

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
INSTITUTO DE FÍSICA

# DISTRIBUIÇÃO DE AUTOVALORES DE MATRIZES ALEATÓRIAS

ROBERTO DA SILVA

Dissertação de Mestrado  
submetida ao Instituto de Física  
da Universidade de São Paulo

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Domingos Humberto Urbano Marchetti (orientador)

Prof. Dr. Nestor Caticha

Prof. Dr. Henrique Von Dreifus

São Paulo

2000

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Ensembles de Matrizes aleatórias simétricas</b>	<b>9</b>
2.1	Ensemble gaussiano de Matrizes Reais simétricas . . . . .	9
2.1.1	A Densidade de Estados no EOG . . . . .	14
2.2	O Ensemble Circular de matrizes Simétricas Unitárias. . . . .	23
<b>3</b>	<b>O Ensemble Unitário e flutuações gaussianas em Matrizes Aleatórias.</b>	<b>25</b>
3.1	Ensembles Unitários . . . . .	25
3.2	O Método dos polinômios ortogonais e o cálculo das funções de correlação de n pontos e Classe de Universalidade . . . . .	26
3.2.1	Expansão de determinantes em menores . . . . .	28
3.2.2	O método de Gram. . . . .	30
3.2.3	Funções de Correlação e Classe de Universalidade . . . . .	31
3.3	Cálculo da variância do número de autovalores de matrizes aleatórias em ensembles gaussiano e circular unitários em um intervalo compacto . . . . .	35
3.4	Ensembles unitários de matrizes aleatórias com entradas correlacionadas. . . . .	37
3.4.1	Ensemble de Legendre . . . . .	38
3.4.2	Ensemble de Laguerre . . . . .	39
3.4.3	Ensemble de Chebychev . . . . .	41
<b>4</b>	<b>A Lei dos Grandes Números para Autovalores de Matrizes Aleatórias</b>	<b>47</b>
4.1	A lei do semi-círculo de um ponto de vista mais geral . . . . .	47
4.2	Alguns resultados importantes, estabilidade do semi-círculo e objetivos do capítulo. . . . .	48
4.3	O teorema principal e um cálculo explícito da lei do semi-círculo através do Método de Wigner . . . . .	51
4.4	O Método Combinatório . . . . .	53
4.4.1	Contribuição dos trajetos pares simples . . . . .	59
4.4.2	Contribuição para $E(\text{Tr}B_n^{2s})$ dos trajetos pares não simples. . . . .	60
4.5	Prova da convergência dos momentos com probabilidade 1 . . . . .	64
4.6	Extensão do Método de Wigner para matrizes hermitianas . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Considerações ...nais</b>	<b>71</b>
<b>Apêndice A</b>		
	Determinantes, Pfaffianos e Demonstração dos Teoremas 2.1 e 2.3.	73

---

<b>Apêndice B</b>	
<b>Demonstração do Teorema 2.2 e da fórmula para a densidade de estados.</b>	<b>86</b>
<b>Apêndice C</b>	
<b>Definições importantes em Probabilidade, Desigualdade de Chebyshev e o Lema de Borel Cantelli.</b>	<b>90</b>
<b>Referências</b>	<b>94</b>

# Capítulo 1

## Introdução

O interesse pelo estudo de matrizes aleatórias (na Física Estatística) surgiu com um problema em Física Nuclear. O objetivo na ocasião era descrever o espectro de energia de núcleos de átomos pesados. Sob esta motivação Wigner publicou uma série de trabalhos, dos quais destacamos [3, 7, 27], chamando a atenção tanto da comunidade matemática quanto da comunidade física para a importância do problema.

Os níveis de energia em Mecânica Quântica são autovalores de operadores hermitianos. Para átomos com núcleos leves é possível uma descrição completa dos níveis de energia do núcleo, tanto do ponto de vista experimental como do ponto de vista computacional.

Nos átomos com núcleos pesados, existem regiões do espectro onde a densidade é muito alta. Nessas regiões é impossível catalogar-se os autovalores.

Para esses casos, as propriedades estatísticas do espectro são mais importantes.

Inspirado então no tratamento dado aos fenômenos macroscópicos da Mecânica Estatística, Wigner propôs descrever tais propriedades por um Ensemble Gaussiano de Matrizes aleatórias. Esse ensemble é definido de forma que o sistema é caracterizado por uma matriz real simétrica  $H$ , cujas entradas  $H_{ij}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  são variáveis aleatórias gaussianas independentes com distribuição conjunta

$$P(H) = a \exp\left[-\frac{b}{2} \sum_{i,j} H_{ij}^2\right]; \quad (1.1)$$

onde  $a$  e  $b$  são constantes positivas. A função densidade de probabilidade conjunta de autovalores  $\lambda = \{\lambda_j\}_{j=1}^N$  no ensemble gaussiano é dada por

$$P_N^G(\lambda) = K_N^G \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\lambda_i - \lambda_j) \prod_{j=1}^N e^{-\frac{b}{2} \lambda_j^2}; \quad (1.2)$$

com  $K_N^G$  uma constante de normalização.

O resultado mais importante de Wigner foi obter a lei do semi-círculo para a densidade de autovalores no regime assintótico

$$W_N(s) = \begin{cases} \frac{4N^{3/4} \sqrt{2 - s^2}}{2^{3/4} N} & ; \text{se } |s| < 2^{3/4} \sqrt{N} \\ 0 & ; \text{se } |s| > 2^{3/4} \sqrt{N} \end{cases} \quad (1.3)$$

sendo

$$\begin{aligned} W_N(s) &= \lim_{\Phi \rightarrow 0} \frac{\Phi W_N(s)}{\Phi} \\ &= \frac{dW_N(s)}{ds}; \end{aligned}$$

onde

$$\Phi W_N(s) = \frac{n([s; s + \Phi])}{N}; \quad (1.4)$$

com  $n(l)$  sendo definido como o número de autovalores em um intervalo  $l$  da reta real.

Na década de 60 havia uma certa insatisfação de alguns físicos, não com o modelo muito menos com a sua solução, mas sim pelo fato dos elementos da matriz  $H$  não terem o mesmo peso estatístico.

Diante dessa insatisfação, por um apelo físico, Dyson introduziu o chamado Ensemble Circular no qual ele propunha estudar o operador de evolução temporal  $U(t) = e^{itH}$  ao invés da matriz simétrica real  $H$ , pois do ponto de vista teórico,  $U$  é tão fundamental quanto  $H$ .

No ensemble circular de Dyson, a distribuição dos autovalores  $\lambda_j = e^{i\mu_j}$ ,  $0 \leq \mu_j < 2\pi$ , se concentra na circunferência unitária em  $C$ :

$$\begin{aligned} P_N^C(s) &= K_N^C \prod_{1 \leq i < j \leq N} |e^{i\mu_i} - e^{i\mu_j}|^2 \\ &= \exp \left[ \sum_{1 \leq i < j \leq N} \log |e^{i\mu_i} - e^{i\mu_j}|^2 \right] \end{aligned} \quad (1.5)$$

Note que esse ensemble não está no contexto da lei do semi-círculo, embora os autovalores de  $H$  os quais vamos denotar por  $\mu_j^0$ , estão distribuídos na reta real inteira ( $H$  é simétrica), pois o que consideramos é o seu mapeamento ao círculo unitário  $\mu_j = \mu_j^0 \bmod 2\pi$ , com  $\mu_j \in [0; 2\pi]$ .

Temos que a densidade de autovalores  $\mu_j$  no Ensemble Circular é exatamente dada por

$$W_N(\mu) = \frac{1}{2\pi}; \quad (1.6)$$

ou seja, a densidade é uniforme em  $\mu$ , o que mostra que os autovalores estão, em média, igualmente espaçados na circunferência unitária.

Dyson propôs uma analogia eletrostática considerando (1.5) como a distribuição de equilíbrio de um gás de partículas carregadas, interagindo via um potencial logarítmico repulsivo, com energia eletrostática devida à interação entre as  $N$  partículas dada por

$$W = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \log \frac{1}{|z_i - z_j|}$$

A mecânica estatística desse gás de Coulomb foi vastamente estudada por F. Dyson, P.J Forrester, A. Alastuey, M.L. Mehta e outros (Vide por exemplo [1,8,28]).

O propósito desta dissertação é estudar as propriedades estatísticas de matrizes aleatórias, concentrando-nos mais especificamente no estudo da densidade de estados destas.

No capítulo 4 desta dissertação, a lei do semi círculo é estudada num contexto mais genérico do que é encontrado em [1]. Assumimos que a distribuição para as entradas das matrizes é da forma produto como em (1.1). Porém, para cada entrada o primeiro momento é nulo e os demais momentos são limitados pelos respectivos momentos da distribuição normal. O leitor deve notar que um grande número de distribuições satisfazem essas duas propriedades. Como exemplos temos obviamente a própria distribuição gaussiana assim como todas as distribuições simétricas com suporte compacto.

Mostraremos, usando um método combinatório de contagem de trajetos originalmente proposto por E.Wigner, que a densidade de autovalores nesse caso é dada pela lei do semi-círculo no limite  $N \rightarrow \infty$ , onde  $N$  é a dimensão da matriz. Para isso fomos fortemente influenciados pelo trabalho de A. Soshnikov e Y. Sinai [4].

Assim, se cada elemento  $H_{ij}$  da matriz for escolhido independentemente com distribuição uniforme

$$P(H_{ij}) = \begin{cases} \frac{1}{2L} & \text{se } H_{ij} \in [j-L; L] \\ 0 & \text{se } H_{ij} \notin [j-L; L]; \end{cases}$$

onde  $L$  é uma constante, a densidade de autovalores é dada pela lei do semi-círculo, mostrando que essa lei não é privilégio das matrizes com entradas independentes distribuídas com peso gaussiano, como no ensemble gaussiano.

Chamamos a atenção nesse exemplo para o fato de que vincular as entradas da matriz em uma região compacta  $[j-L; L]$  não vincula os autovalores a ocuparem uma região compacta também. O estudo de ensembles que vinculam o espectro a uma determinada região da reta real será estudado por nós no Capítulo 3 desta dissertação.

A lei do semi círculo será vista nesta dissertação como um Teorema de Glivenko-Cantelli

para os variáveis aleatórias fortemente correlacionadas, abordagem esta não encontrada na literatura.

Denotando por  $W_N(x) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \delta(x - \lambda_i)$  a distribuição empírica dos autovalores, mostraremos que os momentos pares dessa distribuição

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2s} dW_N(x) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2s} dW(x)$$

convergem, com probabilidade 1 (vide definição no apêndice), para os respectivos momentos da distribuição de Wigner

$$W(x) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t) dt;$$

cuja densidade de estados  $w(t)$  é dada pela lei do semi-círculo (1.3).

Veremos que essa versão do teorema de Glivenko-Cantelli, contrasta com o teorema de Glivenko-Cantelli para variáveis independentes, no sentido de que a lei do semi círculo é uma lei Estável, isto é, independente da distribuição que usamos para as entradas da matriz, para uma grande classe de distribuições.

Esta dissertação contém algumas contribuições inéditas: generalizando os resultados de [4] para matrizes hermitianas e ainda, particularizando a desigualdade FKG, nós garantimos algumas desigualdades essenciais para que nosso método seja feito de forma totalmente rigorosa.

No Capítulo 2 faremos uma grande revisão sobre o Ensemble Ortogonal de Matrizes aleatórias simétricas. Fomos aqui dirigidos pelo livro texto de M. L. Mehta [1].

Nessa revisão é mostrado em detalhes como se obtém a densidade de estados nos Ensembles Gaussiano e Circular Ortogonal, usando a função densidade de probabilidade conjunta dos autovalores. No caso Gaussiano, constatamos numericamente a lei do Semi-Círculo e analisamos graficamente os termos relevantes para a atenuação das flutuações que aparecem na densidade de estados para matrizes de dimensões pequenas.

Obtemos também a densidade de estados no ensemble circular por um cálculo exato.

Vale ressaltar que nessa revisão novos métodos foram introduzidos e todas as etapas são seguidas minuciosamente, desde a dedução da função densidade de probabilidade conjunta até a obtenção da densidade de estados.

Na Capítulo 3 faremos uma revisão sobre o Ensemble Unitário de Matrizes aleatórias Hermitianas. Diferentemente do Ensemble Ortogonal, o ensemble unitário permite construir

um método para calcular as funções de correlação de ordem  $n$  além da densidade de estados.

Mostraremos que o cálculo dessas funções de correlação se reduz ao cálculo do determinante de uma matriz  $n \times n$ , onde cada elemento  $a_{ij}$  dessa matriz é dado por

$$K_N(s_i; s_j) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{A}_k(s_i) \tilde{A}_k(s_j). \quad (1.7)$$

Aqui,  $s_i$  são os autovalores de  $H$  e  $\tilde{A}_k(s)$  são funções determinadas a partir da distribuição conjunta das entradas de  $H$  :

$$P(H) = \exp[\text{Tr} V(H)]; \quad (1.8)$$

onde  $V(H)$  é uma função da matriz  $H$ .

Devido a algumas facilidades do determinante de Gram, as funções de Correlação de ordem superior podem ser calculadas para o ensemble unitário, onde  $H$  é hermitiana. Esse fato não se aplica para o ensemble ortogonal. Nesta parte faremos uso das referências [1], [16] e [34].

Note que no ensemble unitário não é necessário especificar a distribuição das entradas da matriz desde que a função  $\tilde{A}_k(s)$  possa ser determinada por  $V(H)$ . O fator  $e^{V(\cdot)}$  atua como o peso do produto interno no determinante de Gram.

Como aplicação desse método, construiremos ensembles cuja densidade de estados é a soma de quadrados de polinômios clássicos da Física Matemática. São eles os ensembles de Laguerre, Legendre e Chebychev.

As distribuições conjuntas das entradas da matriz nesses ensembles diferem entre si, na medida em que a relação de ortogonalidade do polinômio ortogonal em questão restringe os autovalores a certas regiões da reta. No caso de  $V(H) = H^2$  (ensemble Gaussiano),  $\tilde{A}_k(s)$  são os polinômios de Hermite. Estando definido em toda a reta, os autovalores seguem a lei do semi-círculo. Veremos que isso não ocorre para os demais ensembles.

Serão computados os gráficos para as densidades de autovalores correspondentes a cada um desses ensembles. O ensemble de Chebychev é um caso especial, pois tanto a densidade de estados quanto a função de correlação truncada podem ser obtidos analiticamente, o que também é uma contribuição inédita desta dissertação.

Ainda com respeito às funções de correlação mostrou-se, por um reescalamto adequado, que as funções de Correlação dos ensembles unitários gaussiano e Circular são exatamente iguais, dadas pela equação (1.9). Por esse motivo, muitos autores assumem a existência de uma Classe de Universalidade para os ensembles unitários de matrizes hermitianas.



---

Ainda no Capítulo 3, usamos o Kernel integral (1.7) reescalado

$$K(x; y) = \frac{\sin \frac{1}{4}(x - y)}{\frac{1}{4}(x - y)} \quad (1.9)$$

para mostrar, por um cálculo explícito, que a variância do número médio de autovalores  $\text{Var}[n(t)]$  num intervalo compacto de tamanho  $2t$  da reta real cresce logicamente, ou seja,

$$\text{Var}[n(t)] = \frac{2}{\frac{1}{4}^2} \log 2t + O(1);$$

no caso de uma matriz Hermitiana.

Esse resultado que é tido por muitos autores como fundamental para provar a existência de flutuações gaussianas no número de autovalores (veja por exemplo [9]), não é feito explicitamente e de forma direta como realizado na presente dissertação.

## Capítulo 2

# Ensembles de Matrizes aleatórias simétricas

Uma matriz aleatória  $H$  é uma matriz cujas entradas  $H_{ij}$  são variáveis aleatórias distribuídas de acordo com uma distribuição de probabilidades  $P(f_{H_{ij}}g)$ , que por sua vez induz uma distribuição aleatória para os seus autovalores.

A fim de conhecer a distribuição conjunta dos autovalores e a partir desta a distribuição marginal para um único autovalor (sua densidade de estados), E. Wigner propôs o estudo dos chamados ensembles de matrizes aleatórias.

Um ensemble de matrizes aleatórias é um conjunto de matrizes cuja distribuição é invariante por uma certa transformação de similaridade. Vamos nos deter neste capítulo aos chamados ensembles ortogonais de matrizes simétricas, que, como bem sabemos, são invariantes por uma transformação ortogonal.

A importância do estudo das propriedades estatísticas dessas matrizes é devido ao fato de que todos os sistemas físicos quânticos invariantes por rotação são representados por matrizes simétricas (vide [32]).

### 2.1 Ensemble gaussiano de Matrizes Reais simétricas

Consideremos  $H$  uma matriz  $N \times N$  simétrica, isto é,  $H_{ij} = H_{ji}$ , onde cada elemento  $H_{ij}$  possui distribuição normal

$$P(H_{ij}) = C \exp(-\frac{1}{2} H_{ij}^2);$$

onde  $C$  é a constante de normalização.

Vamos considerar que as entradas dessa matriz sejam variáveis aleatórias independentes.

Se  $f(H)$  denota a distribuição conjunta de todas os elementos de  $H$ , temos

$$\begin{aligned}
 f(H) &= C_N \prod_{i,j} P(H_{ij}) \\
 &= C_N \exp\left(-\sum_{i,j} H_{ij}^2\right) \\
 &= C_N \exp\left(-\sum_{i,j} H_{ij} H_{ji}\right) = C_N \exp(-\text{Tr}H^2)
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Note que o termo  $\text{Tr}H^2$  da distribuição conjunta acima é invariante por uma transformação de similaridade  $M^{-1} X^{-1} M X$ . Com esse fato em mente a seguir definimos o Ensemble Ortogonal Gaussiano (EOG)

**Definição 2.1:** O EOG é definido no espaço  $T$  de matrizes reais simétricas por dois requerimentos:

1-) Invariância por uma transformação Ortogonal

$$P(H)dH = P(H^0)dH^0$$

com  $H^0 = W^T H W$ ,  $dH = \sum_{k,j} dH_{kj}$  e  $W^T W = W W^T = 1$ .

2-) Independência estatística das variáveis aleatórias  $H_{kj}$  :

$$P(H) = \prod_{k,j} P_{kj}(H_{kj})$$

**Observação:**

O fato de termos considerado que as entradas da matriz são independentes restringe a definição do Ensemble acima. C.E. Porter e N. Rosenzweig [20] provaram que se as entradas  $H_{ij}$  são independentes e  $f(H)$  é invariante por uma transformação ortogonal, então  $f(H)$  é univocamente definida como sendo da forma (2.1).

Vamos agora determinar a densidade de probabilidade conjunta dos autovalores no ensemble acima definido. Para isso vamos nos basear fortemente no texto de M.L. Mehta [1].

Chamemos  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  os  $N$  autovalores da matriz  $H$ . Para que possamos definir o Jacobiano da transformação dos elementos  $f_{ij} = H_{ij} g_{i,j}$  para os elementos  $\lambda = f_{\lambda} g_{\lambda}$ , devemos acrescentar  $N(N-1)/2$  parâmetros independentes a além de termos o mesmo número de parâmetros independentes de  $H$ .

Denotando esses parâmetros por  $u = f_{u_1} g_{i=1}^l$ , com  $l = N(N-1)/2$ , temos devido a invariância do traço que

$$\exp\left(\frac{1}{2} \text{Tr}(H^2)\right) \prod_{i,j} dH_{ij} = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^i u_j^2\right) \det(J) \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{i-1} d_{i,j} du_1 \quad (2.2)$$

onde  $\det(J) = \det(J)$  é o jacobiano da transformação  $f(H_{ij}) \rightarrow f(u_1, \dots, u_l)$ :

$$J = \begin{pmatrix} A & C \\ D & B \end{pmatrix} \begin{matrix} \# \\ \frac{N(N+1)}{2} \times \frac{N(N+1)}{2} \end{matrix}$$

Onde A; B; C e D são blocos tais que

$$\begin{aligned} A &= [A_{i,j}] = \begin{matrix} \# \\ @H_{jj} \end{matrix}; \\ B &= [B_{1;(j,k)}] = \begin{matrix} \# \\ @H_{jk} \\ @U_1 \end{matrix} \begin{matrix} \# \\ \# \\ \# \end{matrix} \begin{matrix} N \times N \\ \frac{N(N-1)}{2} \times \frac{N(N-1)}{2} \end{matrix}; \\ C &= [C_{i;(j,k)}] = \begin{matrix} \# \\ @H_{jk} \\ @U_1 \end{matrix} \begin{matrix} \# \\ \# \\ \# \end{matrix} \begin{matrix} N \times N \\ \frac{N(N-1)}{2} \times \frac{N(N-1)}{2} \end{matrix}; \\ D &= [D_{1;j}] = \begin{matrix} \# \\ @H_{jj} \\ @U_1 \end{matrix} \begin{matrix} \# \\ \# \\ \# \end{matrix} \begin{matrix} N \times N \\ \frac{N(N-1)}{2} \times \frac{N(N-1)}{2} \end{matrix}; \end{aligned} \quad (2.3)$$

com  $1 \leq j \leq k \leq N$ , índices para as colunas e  $i = 1; 2; \dots; N$  e  $i = 1; 2; \dots; N(N-1)/2$ , índices para as linhas e  $(j,k)$  indexa o conjunto  $j < k$ .

Sendo H uma matriz simétrica temos

$$H = U - U^T; \quad (2.4)$$

onde  $U = \text{diag}(u_1, \dots, u_N)$  e

$$U U^T = 1; \quad (2.5)$$

A matriz U é a matriz ortogonal cujas colunas são os autovetores de H. Note que o vínculo de ortogonalidade entre os autovetores produz  $C_{N;2} = N(N-1)/2$  equações. Portanto, o número de variáveis independentes é dado por

$$N^2 - N - C_{N;2} = N(N-1)/2;$$

onde o fator N é devido à normalização dos autovetores.

Derivando a equação matricial (2.5) em relação às variáveis  $u_1$  encontramos

$$\frac{\partial U^T}{\partial u_1} U + U^T \frac{\partial U}{\partial u_1} = 0;$$

o que nos leva a definir uma matriz antissimétrica  $N \in N$ ,

$$S^{(1)} = U^T \frac{\partial U}{\partial u_1} = i \frac{\partial U^T}{\partial u_1} U = i U^T \frac{\partial U}{\partial u_1} = i S^{(1)T}$$

para cada índice  $1$ .

Por outro lado, diferenciando a equação (2.4) em relação a  $u_1$  e notando que  $\frac{\partial -}{\partial u_1} = 0$ , obtemos

$$\frac{\partial H}{\partial u_1} = \frac{\partial U}{\partial u_1} - U^T + U - \frac{\partial U^T}{\partial u_1};$$

Multiplicando a equação acima por  $U^T$  pela esquerda e por  $U$  pela direita, conclui-se

$$U^T \frac{\partial H}{\partial u_1} U = S^{(1)} - i - S^{(1)}; \quad (2.6)$$

que em termos das componentes é dada por

$$\sum_{j,k} U_j \frac{\partial H_{jk}}{\partial u_1} U_k = S^{(1)}(j, k): \quad (2.7)$$

Assim como fizemos para  $u_1$ , podemos também diferenciar (2.4) em relação a  $u_s$  a fim de obter

$$\frac{\partial H}{\partial u_s} = U \frac{\partial -}{\partial u_s} U^T;$$

Analogamente do que tínhamos feito para  $u_1$ , multiplicamos a equação acima à esquerda por  $U^T$  e à direita por  $U$  para obter

$$U^T \frac{\partial H}{\partial u_s} U = \frac{\partial -}{\partial u_s};$$

que em termos das componentes é dada por

$$\sum_{j,k} U_j \frac{\partial H_{kj}}{\partial u_s} U_k = \frac{\partial -}{\partial u_s} = \pm \pm: \quad (2.8)$$

Vamos definir a matriz

$$V = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix};$$

$\frac{N(N+1)}{2} \times \frac{N(N+1)}{2}$

onde  $F$  e  $G$  são blocos

$$\begin{aligned} F &= [F_{j;h(i)}] = [U_j U_j]_{N \times \frac{N(N+1)}{2}}; \\ G &= [G_{(j,k);h(i)}] = [U_j U_k]_{\frac{N(N-1)}{2} \times \frac{N(N+1)}{2}}; \end{aligned} \quad (2.9)$$

sendo  $1 \leq j \leq k \leq N$  índices para as linhas,  $1 \leq h \leq \frac{N(N+1)}{2}$  índices para as colunas,  $(j,k)$  indexando o conjunto  $j < k$  e  $h(i)$  indexando o conjunto  $1 \leq i \leq \frac{N(N+1)}{2}$ .

Multiplicando  $J$  por  $V$  podemos concluir, de acordo com as equações (2.3), (2.9), (2.7) e (2.8), que

$$J \uparrow V = \begin{pmatrix} A & C & F \\ D & B & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Upsilon \\ \Phi \end{pmatrix};$$

onde

$$\begin{aligned} \Upsilon &= \Upsilon_{\circ; h^{\circ} i} = \sum_{j=1}^2 A_{\circ j} U_j \otimes U_j + \sum_{j < k}^3 C_{\circ; (j,k)} U_j \otimes U_k \\ &= \sum_{j \cdot k} U_j \otimes \frac{H_{kj}}{u_1} U_k \\ &= [\pm \otimes - \pm \otimes \circ]_{N \in \frac{N(N+1)}{2}} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_{\circ; h^{\circ} i} = \sum_{j=1}^2 D_{1j} U_j \otimes U_j + \sum_{j < k}^3 B_{1; (j,k)} U_j \otimes U_k \\ &= \sum_{j \cdot k} U_j \otimes \frac{H_{kj}}{u_1} U_k \\ &= S_{\otimes}^{(1)}(- - i - \otimes)_{\frac{N(N-1)}{2} \in \frac{N(N+1)}{2}} \end{aligned}$$

Assim concluímos que

$$J \uparrow V = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}; \tag{2.10}$$

onde  $I$  é a matriz identidade  $N \in N$  e  $S$  é uma matriz  $\frac{1}{2}N(N-1) \in \frac{1}{2}N(N-1)$  tal que

$$S = \begin{pmatrix} S_{12}^{(1)}(\dots, 2, i, \dots, 1) & \dots & S_{NN_i 1}^{(1)}(\dots, N, i, \dots, N_i, 1) \\ \vdots & & \vdots \\ S_{12}^{(N)}(\dots, 2, i, \dots, 1) & \dots & S_{NN_i 1}^{(N)}(\dots, N, i, \dots, N_i, 1) \end{pmatrix};$$

Então, calculando o determinante na equação (2.10) obtemos

$$\begin{aligned} = (\dots; u) \det V &= \prod_{\circ < -} (\dots, i, \dots, \otimes) \det S_{\otimes}^{-1} \\ &= \prod_{\otimes < -} (\dots, i, \dots, \otimes) f(u); \end{aligned}$$

onde  $f(u)$  depende apenas dos parâmetros  $u_1$ .

Substituindo esse resultado na equação (2.2) e integrando sobre as variáveis  $u_1$ , concluímos que a distribuição de probabilidade conjunta de autovalores no EOG é

$$P_{EOG}(\dots, 1; \dots; \dots, N) = C_N \uparrow \exp \sum_{j=1}^2 \sum_{j < k}^3 \Upsilon_{j,k} \dots; \tag{2.11}$$

sendo  $C_N$  uma constante de normalização.

A equação (2.11) é a função densidade de probabilidade conjunta para os autovalores de matrizes simétricas com entradas Gaussianas.

Em analogia com a eletrostática, podemos reescrever a expressão acima

$$P_{\text{EOG}}(\lambda_1; \dots; \lambda_N) = C_N \exp \left[ - \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 + \sum_{j < k} \log |\lambda_j - \lambda_k| \right] \\ = C_N \exp[-E]$$

como o peso de Boltzmann de um gás de Coulomb unidimensional de partículas carregadas, com temperatura  $\beta = 1$ , ocupando as posições  $\lambda_1; \dots; \lambda_N$  e interagindo via um potencial

$$E(\lambda_1; \dots; \lambda_N) = \sum_{j=1}^N \lambda_j^2 - \sum_{j < k} \log |\lambda_j - \lambda_k| \quad (2.12)$$

Na equação (2.12), o segundo termo representa a parte de repulsão logarítmica entre as cargas e o primeiro é o termo de interação harmônica responsável por confiná-las em torno da origem, como veremos quando calcularmos a densidade de estados no EOG.

Note que o termo de interação harmônica surgiu pelo fato de termos considerado as entradas da matriz como sendo variáveis aleatórias gaussianas independentes. Esse termo faz com que o peso de Boltzmann seja integrável em  $|\lambda_j| < 1$ ,  $j = 1; \dots; N$ .

**Observação:**

Note que apesar das entradas da matriz serem variáveis aleatórias independentes, os autovalores são variáveis aleatórias correlacionadas. Isso faz com que o estudo da densidade de estados não seja um problema trivial.

### 2.1.1 A Densidade de Estados no EOG

Considere duas funções  $f(\lambda)$  e  $g(\lambda)$ , definidas a valores reais. Podemos escrever o valor médio do produto  $\prod_{i=1}^N f(\lambda_{2i-1})g(\lambda_{2i})$  com respeito à distribuição (2.11) por:

$$\alpha_N(f; g) = \frac{\int \prod_{i=1}^N f(\lambda_{2i-1})g(\lambda_{2i}) P(\lambda_1; \dots; \lambda_N) d\lambda^N}{\int \prod_{i=1}^N f(\lambda_{2i-1})g(\lambda_{2i}) d\lambda^N} \quad (2.13)$$

onde, sem perda de generalidade,  $N$  é par.

Na expressão (2.13)

$$d\lambda^N = d\lambda_1 \dots d\lambda_N$$

e  $\Phi$  é a região de integração ordenada  $| 1 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < 1$ .

O termo  $N!$  se deve ao fato de termos mudado a região de integração  $| 1 < x_1 < 1, | 1 < x_2 < 1, \dots, | 1 < x_N < 1$  para a região  $\Phi$ .

No apêndice A desta dissertação é calculado o determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_N^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{N-1} & x_2^{N-1} & \dots & x_N^{N-1} \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (x_j - x_i) \quad (2.14)$$

Multiplicando a segunda linha da matriz do determinante (2.14) por 2, obtemos como resultado

$$[H_1(x_1) H_1(x_2) \dots H_1(x_N)],$$

onde  $H_1(x) = 2x$  é o polinômio de Hermite de ordem 1.

Da mesma forma, multiplicando a 3ª linha da matriz do determinante por 4 e subtraindo o resultado da primeira linha multiplicado por 2, obtemos

$$[H_2(x_1) H_2(x_2) \dots H_2(x_N)],$$

sendo  $H_2(x) = 4x^2 - 2$  o polinômio de Hermite de ordem 2.

Usando a relação de recorrência para os polinômios de Hermite

$$H_j(x) = 2xH_{j-1}(x) + 2jH_{j-2}(x) = 0;$$

podemos generalizar o processo e escrever a  $(j+1)$ -ésima linha como

$$[H_j(x_1) H_j(x_2) \dots H_j(x_N)]$$

Em cada uma dessas manipulações o determinante é alterado por uma constante que pode ser colocada para fora da matriz, de forma que

$$\prod_{i < j} (x_j - x_i) = G_N \begin{vmatrix} H_0(x_1) & H_0(x_2) & \dots & H_0(x_N) \\ H_1(x_1) & H_1(x_2) & \dots & H_1(x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{N-1}(x_1) & H_{N-1}(x_2) & \dots & H_{N-1}(x_N) \end{vmatrix};$$

onde  $G_N$  é uma constante dependente de  $N$ .



Em vista desse fato, podemos escrever a equação (2.11) na forma

$$P(s_1; \dots; s_N) = C_N^0 \prod_{j=0}^{N-1} (2^j j! \pi^{-1/4})^{1-2j} \det^h \left( \int_{s_i-1}^{s_j} \psi_j \right) \quad (2.15)$$

com  $i, j = 1 \dots N$ , e  $\psi_j(s)$  sendo as funções normalizadas do oscilador harmônico

$$\psi_j(s) = \frac{1}{(2^j j! \pi^{-1/4})^{1-2j}} e^{-s^2/2} H_j(s)$$

Substituindo a equação (2.15) em (2.13), obtemos

$$\alpha_N(f; g) = C_N^0 \prod_{j=0}^{N-1} (2^j j! \pi^{-1/4})^{1-2j} \int_{s_i-1}^{s_j} f(s_{2i-1}) g(s_{2i}) \det^h \left( \int_{s_i-1}^{s_j} \psi_j \right) \quad (2.16)$$

Vamos considerar  $f(x)$  e  $g(x)$  como uma pequena variação da função constante igual a 1. Para funções dessa forma enunciamos o seguinte teorema:

**Teorema 2.1:** *Considere que  $f$  e  $g$  sejam tais que  $f(x) = g(x) = 1 + \epsilon(x)$ , então é válido formalmente que*

$$\alpha_N(1 + \epsilon; 1 + \epsilon) = \frac{1}{\pi^{N/2}} \det \begin{pmatrix} s_{ij} & \pm_{ij} \int_{s_i-1}^{s_j} \psi_j \\ \int_{s_i-1}^{s_j} \psi_j & \frac{1}{2} \delta_{ij} \end{pmatrix}_{i,j=0;1;\dots;N-1} \quad (2.17)$$

onde

$$\int_{s_i-1}^{s_j} \psi_j = \int_{s_i-1}^{s_j} \psi_j(\epsilon) = \frac{1}{4} \int_{s_i-1}^{s_j} dx dy K(x; y) \int_{s_i-1}^{s_j} \psi_j(x) \int_{s_i-1}^{s_j} \psi_j(y) \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{2} \delta_{ij} = \frac{1}{8} \int_{s_i-1}^{s_j} dx dy K(x; y) \int_{s_i-1}^{s_j} \psi_j(x) \int_{s_i-1}^{s_j} \psi_j(y) \quad (2.19)$$

e

$$s_{ij} = s_{ij}(\epsilon) = \frac{1}{2} \int_{s_i-1}^{s_j} dx dy K(x; y) \int_{s_i-1}^{s_j} \psi_j(x) \int_{s_i-1}^{s_j} \psi_j(y) \quad (2.20)$$

com  $K(x; y) = [\epsilon(x) + \epsilon(y) + \epsilon(x)\epsilon(y)] \delta(x - y)$ ,

$$\pm_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{se } i = j \\ 0; & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

onde  $N = 2m$  e  $\epsilon(x) = \frac{x}{|x|}$  é a função sinal.

A prova desse teorema é bastante extensa e será apresentada em detalhes no Apêndice A desta dissertação.

Usaremos esse teorema mais adiante para obter, empregando um cálculo variacional, a densidade de estados no (EOG).

### Função de Correlação e Função de Cluster

Dada uma função densidade de probabilidade conjunta de  $N$  variáveis  $P(s_1; \dots; s_N)$ , vamos de...nir como função de Correlação de  $n$  pontos:

$$W_n^N(s_1; \dots; s_n) = \frac{N!}{(N-n)!} \int P(s_1; \dots; s_N) d_{s_n}^{(n)}; \quad (2.21)$$

onde  $d_{s_n}^{(n)} = d_{s_{n+1}} \dots d_{s_N}$ .

Da mesma forma, podemos de...nir a função de Cluster de  $n$  pontos

$$T_n^N(s_1; \dots; s_n) = \sum_{\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1; \dots; \mathcal{A}_p)} (j-1)^{p_i - n} (p_i - 1)! \prod_{j=1}^p W_{j|\mathcal{A}_j}(s_{\mathcal{A}_j}); \quad (2.22)$$

onde a soma é feita sobre todas as possíveis partições  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1; \mathcal{A}_2; \dots; \mathcal{A}_p)$  dos índices  $f_1; \dots; n$  em subconjuntos disjuntos de  $f_1; \dots; n$ ; contendo pelo menos um elemento, com o vínculo  $\sum_{j=1}^p |\mathcal{A}_j| = n$ .  $j|\mathcal{A}_j$  denota a cardinalidade do conjunto  $\mathcal{A}_j$ . Se  $\mathcal{A} = (i_1; \dots; i_k)$ ,  $s_{\mathcal{A}}$  é a sequência de variáveis  $s_{i_1}; \dots; s_{i_k}$ .

Como exemplo listamos abaixo as três primeiras funções de Cluster

$$\begin{aligned} T_1^N(s) &= W_1^N(s) \\ T_2^N(s_1; s_2) &= W_1^N(s_1)W_1^N(s_2) - W_2^N(s_1; s_2) \\ T_3^N(s_1; s_2; s_3) &= W_3^N(s_1; s_2; s_3) - W_1^N(s_1)W_2^N(s_2; s_3) - W_1^N(s_2)W_2^N(s_1; s_3) - W_1^N(s_3)W_2^N(s_1; s_2) + 2W_1^N(s_1)W_1^N(s_2)W_1^N(s_3); \end{aligned}$$

Vamos de...nir também os coeficientes

$$\begin{aligned} w_n &= \int \dots \int W_n^N(s_1; \dots; s_n) \prod_{i=1}^n \phi(s_i) d_{s_i} \\ t_n &= \int \dots \int T_n^N(s_1; \dots; s_n) \prod_{i=1}^n \phi(s_i) d_{s_i} \end{aligned} \quad (2.23)$$

das respectivas funções geratrizes exponenciais

$$\begin{aligned} W(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_n}{n!} z^n \\ T(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (i-1)^{n_i} \frac{t_n}{n!} z^n \end{aligned} \quad (2.24)$$

onde  $w_0 = 1$ , por construção.

A forma como  $T(z)$  e  $W(z)$  se relacionam é surpreendentemente simples como nos diz o seguinte teorema:

**Teorema 2.2:** *Dados  $W(z)$  e  $T(z)$  como em (2.24), temos*

$$T(z) = \log W(z) \quad (2.25)$$

A prova desse teorema é feita no apêndice B de uma maneira original. A idéia fundamental que tivemos foi olhar uma fórmula combinatorial genérica para a derivada  $n$ -ésima de uma função composta.

Nosso objetivo agora é relacionar as funções  $T(z)$  e  $W(z)$  com  $\alpha_N$ . Por definição

$$\alpha_N(1 + \otimes; 1 + \otimes) = \prod_{j=1}^N [1 + \otimes_{(j)}] :$$

Expandindo o produtório, temos

$$\begin{aligned} \alpha_N &= 1 + \sum_{j_1=1}^N \otimes_{(j_1)} + \sum_{\substack{j_1, j_2=1 \\ j_1 > j_2}}^N \otimes_{(j_1)} \otimes_{(j_2)} + \\ &+ \sum_{\substack{j_1, j_2, j_3=1 \\ j_1 > j_2 > j_3}}^N \otimes_{(j_1)} \otimes_{(j_2)} \otimes_{(j_3)} + \dots + \otimes_{(1)} \otimes_{(2)} \dots \otimes_{(N)} : \end{aligned}$$

Considerando um termo geral dessa soma, por simetria e usando as equações (2.21) e (2.23) calculamos

$$\begin{aligned}
 \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_k=1 \\ j_1 > j_2 > \dots > j_k}}^* \prod_{i=1}^k \delta(x_{j_i}) &= \frac{N!}{k!(N-k)!} \int P_N(s_1; \dots; s_N) \delta(s_1) \dots \delta(s_k) d_{s_1} \dots d_{s_N} \\
 &= \int_{i=1}^k \frac{1}{k!} \left[ \frac{N!}{(N-k)!} \int P_N(s_1; \dots; s_N) d_{s_{k+1}} \dots d_{s_N} \right] \\
 &\quad \delta(s_1) \dots \delta(s_k) d_{s_1} \dots d_{s_k} \\
 &= \frac{1}{k!} \int W_k^N(s_1; \dots; s_k) \delta(s_1) \dots \delta(s_k) d_{s_1} \dots d_{s_k} \\
 &= \frac{W_k}{k!}
 \end{aligned}$$

Observe que o fator binomial

$$\frac{N!}{k!(N-k)!} = \sum_{\substack{j_1, j_2, \dots, j_k=1 \\ j_1 > j_2 > \dots > j_k}}^* 1$$

é o número de maneiras de escolhermos k índices ordenados  $j_1 > j_2 > \dots > j_k$  no conjunto de índices  $1; 2; \dots; N$ :

De (2.24) concluímos:

$$\alpha_N = \sum_{n=0}^N \frac{W_n}{n!} = W(1)$$

Logo, das equações, (2.23), (2.24) e (2.25)

$$\log \alpha_N = \sum_{n=1}^N \frac{(i-1)^n}{n!} \int T_n(s_1; \dots; s_n) \prod_{i=1}^n \delta(s_i) d_{s_i}$$

Por um cálculo variacional, obtemos

$$T_n(s_1; \dots; s_N) = \frac{(i-1)^{n \pm n}}{\pm \delta(s_1) \dots \pm \delta(s_n)} \log \alpha_N \Big|_{\delta=0} \quad (2.26)$$

Note que dessa fórmula geral podemos tirar particularmente a densidade de estados  $\frac{\delta}{\delta \delta(s)}$  =  $T_1(s)$

$$\frac{\delta}{\delta \delta(s)} = \frac{\pm}{\pm \delta(s)} \log \alpha_N \Big|_{\delta=0} \quad (2.27)$$

onde  $\frac{\delta}{\delta \delta}$  denota a derivada funcional em relação a  $\delta$ , definida por:

$$\int \frac{\delta F}{\delta \delta(x)} \delta(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{F(\delta) - F(0)}{\delta}$$

sendo  $F = F(\delta)$  um funcional de  $\delta$ .

O Método da expansão de um determinante em forma de blocos.

Nosso objetivo agora é expandir o determinante (2.17) em série de potências de  $\mathbb{R}(x)$ , a partir do qual em vista da equação (2.26), podemos obter uma fórmula para a densidade de estados.

Considere inicialmente matrizes do tipo  $A = [A_{ij}]_{i,j=1}^N$  cujas entradas

$$A_{ij} = \begin{matrix} \text{"} & & \text{"} & \text{"} \\ \circ_{ij} & \text{\textcircled{R}}_{ij} & \text{\textcircled{-}}_{ij} & \text{\textcircled{\#}}_{ij} \\ \text{"} & & \text{"} & \text{"} \end{matrix} \quad (2.28)$$

são matrizes  $2 \times 2$ . Considere também a matriz

$$B = \begin{matrix} \text{"} & & \text{"} & \text{"} \\ \circ & \text{\textcircled{R}} & \text{\textcircled{-}} & \text{\textcircled{\#}} \\ \text{"} & & \text{"} & \text{"} \end{matrix};$$

onde  $\text{\textcircled{R}} = [\text{\textcircled{R}}_{ij}]$ ,  $\text{\textcircled{-}} = [\text{\textcircled{-}}_{ij}]$ ,  $\text{\textcircled{\#}} = [\text{\textcircled{\#}}_{ij}]$  e  $\pm = [\pm_{ij}]$  são matrizes  $N \times N$ . Existe uma matriz de permutação  $P$  tal que  $B = P A P^{-1}$ . Portanto,  $\det A = \det B$ .

A fim de expandir o determinante em (2.17), consideremos a matriz  $A = [A_{ij}]$ , com

$$A_{ij} = \begin{matrix} \text{"} & & \text{"} & \text{"} \\ \text{\textcircled{+}}_{ij} & \text{\textcircled{R}}_{ij} & \text{\textcircled{-}}_{ij} & \text{\textcircled{\#}}_{ij} \\ \text{"} & & \text{"} & \text{"} \end{matrix}$$

Vamos expandir seu determinante em série de potências de  $\mathbb{R}$ , a fim de usar a equação (2.27) e obter a densidade de estados. Como vimos, escrevendo a matriz em forma de blocos, seu determinante não é alterado e então temos

$$\det \begin{matrix} \text{"} & & \text{"} & \text{"} \\ \text{\textcircled{+}}_{ij} & \text{\textcircled{R}}_{ij} & \text{\textcircled{-}}_{ij} & \text{\textcircled{\#}}_{ij} \\ \text{"} & & \text{"} & \text{"} \end{matrix} = \det \begin{matrix} \text{"} & & \text{"} & \text{"} \\ \text{\textcircled{+}} & \text{\textcircled{R}} & \text{\textcircled{-}} & \text{\textcircled{\#}} \\ \text{"} & & \text{"} & \text{"} \end{matrix}$$

onde  $\text{\textcircled{+}}$ ,  $\text{\textcircled{\#}}$ , e  $\text{\textcircled{1/2}}$  são matrizes  $N \times N$ .

Observe que a matriz

$$\tilde{A} = \begin{matrix} A & K \\ K^T & B \end{matrix}$$

pode ser bloco diagonalizada pela seguinte fórmula

$$\tilde{A} = \begin{matrix} A & 0 \\ 0 & B + K^T A^{-1} K \end{matrix} = \begin{matrix} \tilde{A} & 0 \\ K^T A^{-1} & 1 \end{matrix} \begin{matrix} A & K \\ K^T & B \end{matrix} \begin{matrix} \tilde{A}^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

de onde se conclui,

$$\det \begin{matrix} \tilde{A} & K \\ K^T & B \end{matrix} = \det \begin{matrix} \tilde{A} & 0 \\ 0 & B + K^T A^{-1} K \end{matrix} = \det \tilde{A} \det (B + K^T A^{-1} K)$$

Assim

$$\begin{aligned} \det \tilde{A} &= \det \left( I + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_{ij} \sigma_{ij}^T \right) \\ &= \det \left( I + \sum_{i,j} \sigma_{ij} \sigma_{ij}^T \right)^{1/2} \\ &= \det \left( I + \sum_{i,j} \sigma_{ij} \sigma_{ij}^T \right)^{1/2} \\ &= \det \left( I + \sum_{i,j} \sigma_{ij} \sigma_{ij}^T \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Sendo o logaritmo de uma matriz  $\mathbb{Y}$  definido pela série

$$\log \mathbb{Y} = (\mathbb{Y} - I) - \frac{(\mathbb{Y} - I)^2}{2} + \dots$$

se  $\mathbb{Y} = I + \sum_{i,j} \sigma_{ij} \sigma_{ij}^T + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_{ij} \sigma_{ij}^T$ , temos

$$\log \mathbb{Y} = \sum_{i,j} \sigma_{ij} \sigma_{ij}^T + O(\epsilon^2)$$

Dada uma matriz  $Y$  diagonalizável, é conhecido que

$$\det Y = \exp(\text{Tr} \log Y) \tag{2.29}$$

(para uma rápida demonstração de (2.29) veja apêndice A). Então resulta que

$$\begin{aligned} \det \sum_{i,j} \sigma_{ij} \sigma_{ij}^T &= \exp \left[ 2 \sum_{i=1}^m \sigma_{ii} + O(\epsilon^2) \right] \\ &= \exp \left[ 2 \sum_{i=1}^m \sigma_{ii} [1 + O(\epsilon^2)] \right] \end{aligned} \tag{2.30}$$

Voltando para a expressão (2.17) do teorema 2.1, podemos escrever, em vista de (2.27) e (2.30),

$$\mathbb{Z}_{2m}(\mathbb{Z}) = \frac{\pm}{\pm(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^m \sigma_{ii}$$

A execução dessa derivada requer detalhes. Por esse motivo preferimos deixá-la no Apêndice B. Como resultado obtemos

$$\mathbb{Z}_{2m}(\mathbb{Z}) = \prod_{i=1}^m \sigma_{ii}(\mathbb{Z}) + \int_0^{\mathbb{Z}} \rho_{2m-1}(\mathbb{Z}) \mathbb{Z}_{2m}(\mathbb{Z}) d\mathbb{Z} \tag{2.31}$$

No que segue faremos uso de recursos numéricos para observarmos alguns fatos pitorescos sobre a convergência para a lei do semi-círculo. No final da seção faremos alguns comentários.

Vamos esboçar gráficos da densidade de estados  $\mathbb{Z}_N(\mathbb{Z})$  para diversos valores de  $N$ .

Primeiramente vamos analisar apenas o somatório do lado direito da equação (2.31). O comportamento para  $N = 10$ ,  $N = 50$ ,  $N = 100$  e  $N = 200$  pode ser visto nas figuras 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4, respectivamente.

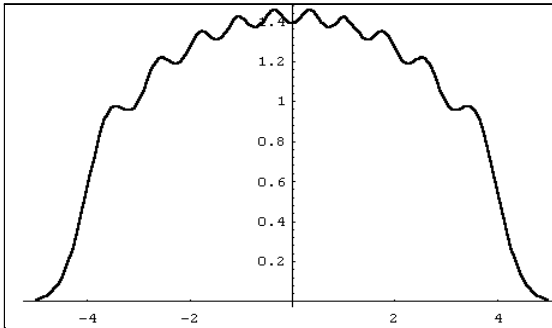


Figura 2.1:  $\frac{3}{4}N E_{s,j}$ , para  $N = 10$ .

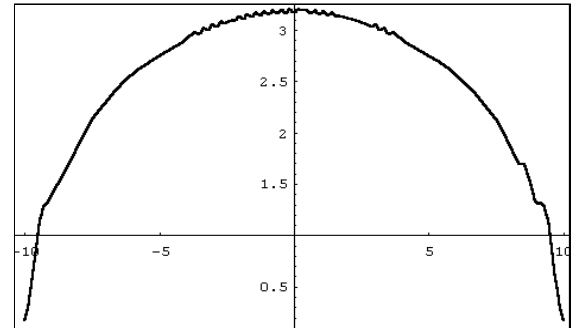


Figura 2.2:  $\frac{3}{4}N E_{s,j}$ , para  $N = 50$

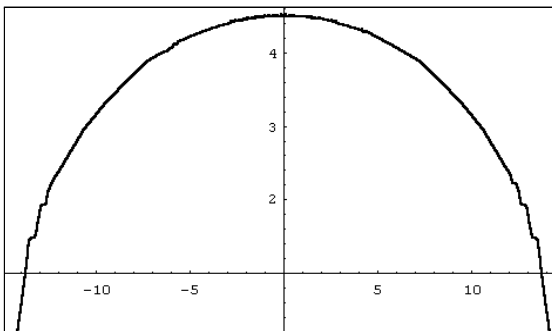


Figura 2.3:  $\frac{3}{4}N E_{s,j}$ , para  $N = 100$

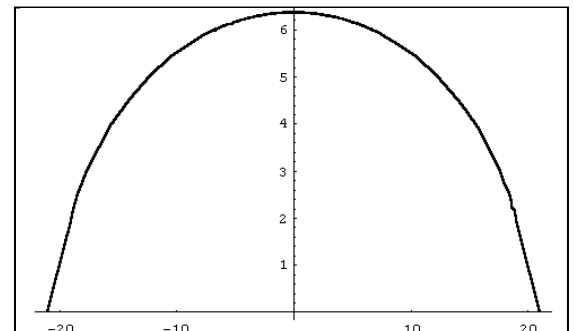


Figura 2.4:  $\frac{3}{4}N E_{s,j}$ , para  $N = 200$

Nesses gráficos podemos notar que à medida em que  $N$  cresce o valor do somatório vai adquirindo cada vez mais o formato de um semi-círculo. Também se deve notar que para valores relativamente pequenos de  $N$  aparecem flutuações causadas, possivelmente, pela não inclusão do termo que contém a integral em (2.31) da densidade de estados.

Sendo assim, esboçamos um gráfico para  $N = 10$ ; agora incluindo esse termo para observar a persistência das flutuações. Como se pode notar na figura 2.5 elas são praticamente atenuadas, mostrando que para  $N$  pequeno o termo que contém a integral é o responsável pela atenuação das flutuações na densidade de estados em torno da chamada Lei do Semi-Círculo. A forma assintótica, para  $N$  grande dessa lei é

$$\frac{3}{4}N E_{s,j} \gg \begin{cases} < \frac{1}{4} \sqrt{(2N - j_s^2)}; & j_s \leq \sqrt{2N} \\ 0; & j_s > \sqrt{2N} \end{cases} \quad (2.32)$$

É curioso notar que o termo contendo a integral na fórmula (2.31) não aparece nos ensembles para matrizes hermitianas. Isso implica que para  $N$  pequeno aparecem as flutuações

nesses ensembles, como mostradas na Fig. 2.1.

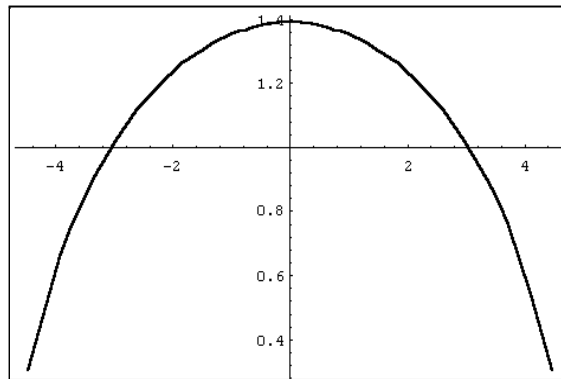


Figura 2.5: Densidade de estados para  $N = 10$ ; incluindo todos os termos.

## 2.2 O Ensemble Circular de matrizes Simétricas Unitárias.

No ensemble anterior vimos que, em analogia com fenômenos da eletrostática, a probabilidade conjunta dos autovalores corresponde ao peso estatístico de um gás de cargas que se repelem através de um potencial logarítmico de dois corpos e confinadas por um potencial externo harmônico. Vimos que a densidade de cargas tende para a lei do semi-círculo quando  $N \rightarrow \infty$ .

Dispondo as cargas em uma circunferência, na ausência de potencial externo, elas interagiriam através do potencial logarítmico repulsivo. A repulsão mútua entre elas levaria a um estado de equilíbrio onde as cargas devem, por essa geometria, estarem igualmente espaçadas. Mostraremos esse fato por um cálculo explícito.

Serão consideradas matrizes simétricas unitárias  $S = e^{itH}$  ao invés das matrizes simétricas reais  $H$ . Isso faz com que os autovalores de  $S$  estejam todos na circunferência de raio 1.

O Ensemble Circular Ortogonal (ECO) é formado pelo grupo unitário  $U(N)$  de matrizes unitárias simétricas com medida uniforme (medida de Haar no grupo). Por um procedimento análogo ao realizado para o EOG, a distribuição dos autovalores  $e^{i\mu_j}$ ,  $j=1, \dots, N$  da matriz  $S \in U(N)$  é dada pela densidade de probabilidade conjunta dos ângulos

$$P(\mu_1, \dots, \mu_N) = C_N \prod_{1 \leq i < j \leq N} |e^{i\mu_i} - e^{i\mu_j}|^2 \quad (2.33)$$

Procedendo como foi feito para o EOG, podemos de...nir



$$\begin{aligned} \alpha_N(1+a; 1+a) &= \int_{\mathbb{C}^N} \prod_{i=1}^N [1 + a(\mu_{2i-1})][1 + a(\mu_{2i})] \\ &= N! \int_{\mathbb{C}^N} P(\mu_1, \dots, \mu_N) \prod_{i=1}^N [1 + a(\mu_{2i-1})][1 + a(\mu_{2i})] d\mu^N; \end{aligned} \quad (2.34)$$

com  $d\mu^N = d\mu_1 \dots d\mu_N$ .

Como foi feito no EOG, enunciamos um teorema análogo

**Teorema 2.3:** Se  $\alpha_N$  é dado por (2.34), então

$$\alpha_N^2 = \det[\pm_{pq} + r_{pq}]$$

onde,

$$\begin{aligned} r_{pq} &= \int_{\mathbb{C}^N} \int_{\mathbb{C}^N} \left(1 + \frac{p}{q}\right)^{z_i} a(\mu) \exp[i(p - q)\mu] d\mu + \\ &+ \int_{\mathbb{C}^N} \int_{\mathbb{C}^N} a(\mu) a(\mu') (\mu - \mu') \exp[i(p\mu - q\mu')] d\mu d\mu' \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$e \ p; q = i \frac{N}{2} + \frac{1}{2}; i \frac{N}{2} + \frac{3}{2}; \dots; \frac{N}{2} - i \frac{1}{2};$$

(No apêndice A, fazemos um esboço rápido da prova.)

Usando novamente a propriedade que  $\det Y = \exp[\text{Tr}(\log Y)]$ , vem da equação (2.35) que

$$\begin{aligned} \alpha_N^2 &= \exp \left[ \frac{1}{2} \text{Tr} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} [r_{pq}]^n \right] \\ &= \exp \left[ \frac{1}{2} \text{Tr} [r_{pq}] + O(a^2) \right] \\ &= \exp \left[ 4 \frac{N}{2^{3/4}} \int_0^1 a(\mu) d\mu + O(a^2) \right]; \end{aligned}$$

Da equação (2.35),

$$\frac{3}{4} N = \frac{\pm}{\pm a} \log \alpha_N \Big|_{a=0} = \frac{N}{2^{3/4}}$$

Concluimos que os autovalores se distribuem uniformemente no círculo unitário e estão espaçados um dos outros, em média pela distância  $\frac{2^{3/4}}{N}$ .

# Capítulo 3

## O Ensemble Unitário e flutuações gaussianas em Matrizes Aleatórias.

### 3.1 Ensembles Unitários

No capítulo anterior vimos que para matrizes simétricas o Jacobiano da transformação  $f(H_{ij}) \rightarrow f(u_l; \dots, i, j)$ , com  $l = 1; \dots; N(N-1)/2$  e  $i = 1; \dots; N$  é separável, ou seja,

$$J(\dots; u) = f(u) \prod_{i < j} (u_i - u_j);$$

onde  $f(u)$  é uma função dos parâmetros extras  $u_l$  definidos além dos  $N$  autovalores a serem de completar o número de parâmetros independentes.

Vamos agora considerar matrizes hermitianas, com entradas  $H_{ij} = H_{ij}^{re} + iH_{ij}^{im}$ , onde  $H_{ij}^{re} = \text{Re } H_{ij}$  e  $H_{ij}^{im} = \text{Im } H_{ij}$ .

Sendo uma matriz hermitiana  $H$  diagonalizável por uma transformação unitária, isto é,

$$U^y H U = \text{diag} \{ u_l; l=1; \dots; N \};$$

com  $U^y U = U U^y = 1$ ; pode-se mostrar, analogamente feito para o caso de matrizes simétricas, que o jacobiano da transformação  $f(H_{ij}^{re}; H_{ij}^{im}) \rightarrow f(u_l; \dots, i, j)$ ,  $l = 1; \dots; N(N-1)$  e  $i = 1; \dots; N$  é

$$J(\dots; u) = g(u) \prod_{i < j} (u_i - u_j)^2; \tag{3.1}$$

onde  $g(u)$  é uma função dos parâmetros extras  $u_l$ .

Para uma matriz  $H$  complexa qualquer, J.Ginibre [31] mostrou, usando teoria de grupos, que o jacobiano da transformação  $f(H_{ij}) \rightarrow f(u_l; \dots, i, j)$  é proporcional a  $\prod_{i < j} (u_i - u_j)^2$ .

O expoente 2 na expressão (3.1) deve-se essencialmente ao número de graus de liberdade de cada elemento da matriz, um da parte real e outro da parte imaginária. Isso então nos impele a de...nir o Ensemble Unitário (EU)

**De...nição 3.1** *Denomina-se Ensemble Unitário (EU) de Matrizes, o conjunto das matrizes  $N \in N$  complexas cujas entradas são escolhidas de acordo com a distribuição  $P(H)$  invariante por transformações unitárias*

$$dP(U^y H U) = dP(H); \tag{3.2}$$

Como foi dito no Capítulo 2 desta dissertação, as entradas de  $H$  são escolhidas independentemente, com  $P(H)$  satisfazendo (3.2), se e somente se  $P(H) = \frac{e^{i \text{Tr} H^2}}{Z}$ . Desse modo, para qualquer  $P(H)$  que não seja dessa forma as entradas da matriz são necessariamente correlacionadas.

Vale ressaltar que no caso de um ensemble unitário de matrizes não hermitianas,  $H^2$  deve ser substituído por  $H^y H$ .

### 3.2 O Método dos polinômios ortogonais e o cálculo das funções de correlação de n pontos e Classe de Universalidade

Vamos considerar matrizes Hermitianas  $H$ , de dimensão  $N$ , com distribuição conjunta das entradas dada por

$$P(H) = \frac{1}{Z_N} \exp[i \text{Tr}(V(H))]; \tag{3.3}$$

onde  $V(H)$  é uma função da matriz  $H$ , e  $Z_N$  é uma constante dependente de  $N$ :

Por (3.1), pela invariância do traço e pela equação (2.14), a distribuição conjunta dos autovalores de  $H$  é dada por

$$P(s_1; \dots; s_N) = C_N [\det(s_j)^{i-1}]^2 \exp[i \sum_{i=1}^N V(s_i)]; \tag{3.4}$$

onde  $i; j = 1; \dots; N$  indexam a linha e a coluna, respectivamente.

Como foi feito detalhadamente na subsecção 2.1.1 do Capítulo 2 para o caso Gaussiano, podemos rearranjar as linhas de  $[\det(s_j)^{i-1}]$  fazendo combinações lineares convenientes de forma

que

$$\det[(s_j)^{i-1}]_{i=1, \dots, N; j=1, \dots, N} = \det[p_{i-1}(s_j)]_{i=1, \dots, N; j=1, \dots, N}$$

onde  $p_{i-1}(s_j)$  são os polinômios ortogonais construídos a partir da base  $f_1; \dots; s^{N-1}g$  pelo procedimento de Gram-Schmidt, de acordo com a relação de ortogonalidade

$$\int_{i-1}^z d_s \exp[i V(s)] p_n(s) p_m(s) = a_{n \pm m}^2 \quad (3.5)$$

Note que o peso estatístico coincide com o peso  $e^{i V(s)}$  do produto interno pelo qual os polinômios são construídos. Definindo as funções

$$\tilde{A}_n(s) = \frac{1}{a_n} p_n(s) \exp\left[i \frac{V(s)}{2}\right]; \quad (3.6)$$

a equação (3.4) pode ser escrita como

$$P(s_1; \dots; s_N) = C_N [\det \tilde{A}_i(s_j)]^2. \quad (3.7)$$

onde  $i = 0; \dots; N-1$  indexa a linha e  $j = 1; \dots; N$  a coluna.

Vamos considerar nesta dissertação apenas os pesos  $e^{i V(s)}$  associados aos polinômios clássicos da Física Matemática, como Hermite, Laguerre, Legendre etc.

Multiplicando o determinante:

$$\det[\tilde{A}_i(s_j)]_{i=0, \dots, N-1; j=1, \dots, N} = \prod_p \tilde{A}_{k_1}(s_1) \tilde{A}_{k_2}(s_2) \dots \tilde{A}_{k_N}(s_N); \quad (3.8)$$

pelo seu complexo conjugado, integrando sobre as variáveis  $s_1, s_2, \dots, s_N$  e usando

$$\int_{i-1}^z \tilde{A}_i(s); \tilde{A}_j(s) = \int_{i-1}^z \tilde{A}_i(x) \tilde{A}_j^*(x) dx = \delta_{ij}; \quad (3.9)$$

restarão apenas os termos do tipo  $\tilde{A}_{k_1}(s_1)^{-2} \tilde{A}_{k_2}(s_2)^{-2} \dots \tilde{A}_{k_N}(s_N)^{-2}$ .

Então podemos dizer que

$$\begin{aligned} \int_{i-1}^z \dots \int_{i-1}^z d_s^N \det^2[\tilde{A}_i(s_j)]_{i=0, \dots, N-1; j=1, \dots, N} &= \prod_p \Psi_{k_1}(s_1) \dots \Psi_{k_N}(s_N)^2 \\ &= \prod_p 1 = N!; \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde  $\|\tilde{A}_k(s)\|^2 = (\tilde{A}_k(s); \tilde{A}_k(s)) = 1$  é a norma no  $L_2(I_{i-1}; 1)$  com produto interno definido pela equação (3.9), com  $d_s^N = d_{s_1} \dots d_{s_N}$ .

Assim, da condição de normalização  $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} P(s_1; \dots; s_N) d_{s_1} \dots d_{s_N} = 1$  e em vista da equação (3.7) e (3.10) tiramos que  $C_N = 1/N!$ , concluindo

$$P(s_1; \dots; s_N) = \frac{1}{N!} [\det \tilde{A}_i(s_j) g]^2. \tag{3.11}$$

### 3.2.1 Expansão de determinantes em menores

Esta subsecção será preparatória para calcularmos as funções de correlação de n pontos.

**Definição 3.2:** *Seja A uma matriz m ∈ n, com elementos a<sub>ij</sub>. O determinante de uma submatriz p ∈ p de A (1 ≤ p ≤ min(m; n)), obtida de A pela deleção de (m - p) linhas e (n - p) colunas, é chamado de menor.*

Em mais detalhes, se as linhas e colunas deletadas são dadas pelos subscritos 1 ≤ i<sub>1</sub> < i<sub>2</sub> < ... < i<sub>p</sub> ≤ m, 1 ≤ j<sub>1</sub> < j<sub>2</sub> < ... < j<sub>p</sub> ≤ n; respectivamente, então o correspondente p × p menor é denotado por

$$A \begin{matrix} \bar{A} \\ i_1 \ i_2 \ \dots \ i_p \\ j_1 \ j_2 \ \dots \ j_p \end{matrix} = \det [a_{i_k j_k}]_{k=1}^p$$

A noção de complementaridade dos menores, isto é, o determinante da submatriz, resultante de A (neste caso necessariamente uma matriz quadrada) pela deleção das linhas 1 ≤ i<sub>1</sub> < i<sub>2</sub> < ... < i<sub>p</sub> ≤ n e 1 ≤ j<sub>1</sub> < j<sub>2</sub> < ... < j<sub>p</sub> ≤ n, é denotada por

$$A \begin{matrix} \bar{A} \\ i_1 \ i_2 \ \dots \ i_p \\ j_1 \ j_2 \ \dots \ j_p \end{matrix}^c$$

Definimos, por conveniência, o fator de complementaridade como

$$A^c \begin{matrix} \bar{A} \\ i_1 \ i_2 \ \dots \ i_p \\ j_1 \ j_2 \ \dots \ j_p \end{matrix} = (-1)^s A \begin{matrix} \bar{A} \\ i_1 \ i_2 \ \dots \ i_p \\ j_1 \ j_2 \ \dots \ j_p \end{matrix}^c$$

onde  $s = (i_1 + i_2 + \dots + i_p) + (j_1 + j_2 + \dots + j_p)$ .

**Teorema 3.1 (Laplace):** *Seja A uma matriz arbitrária n ∈ n e considere uma escolha de p colunas de A. Então o det A é igual à soma dos produtos de todos os C<sub>n;p</sub> = n! / (p!(n-p)!) menores dispostos com essas colunas pelos seus correspondentes fatores de complementaridade, ou seja,*

$$\det A = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} \begin{matrix} \bar{A} \\ i_1 \ i_2 \ \dots \ i_p \\ j_1 \ j_2 \ \dots \ j_p \end{matrix} \begin{matrix} \bar{A} \\ i_1 \ i_2 \ \dots \ i_p \\ j_1 \ j_2 \ \dots \ j_p \end{matrix}^c ;$$

onde a soma é sobre os subconjuntos de índices distintos  $i_1, i_2, \dots, i_p$  de  $1, 2, \dots, n$ , tal que  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq n$ .

**Prova:** Não demonstraremos este teorema por que neste caso apenas nos prestaríamos a transcrever a prova do excelente texto de Lancaster e Tismenetsky [16], pág.36.



Usando o resultado do teorema 3.1, para o nosso caso temos:

$$\det[\tilde{A}_k(s, j)]_{\substack{k=0, \dots, N_i-1 \\ j=1, \dots, N}} = \sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_n} \begin{vmatrix} \tilde{A}_{k_1}(s, 1) & \dots & \tilde{A}_{k_1}(s, n) & \dots & \tilde{A}_{k_1}(s, n+1) & \dots & \tilde{A}_{k_1}(s, N) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{k_n}(s, 1) & \dots & \tilde{A}_{k_n}(s, n) & \dots & \tilde{A}_{k_n}(s, n+1) & \dots & \tilde{A}_{k_n}(s, N) \end{vmatrix};$$

com  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq N$ . Os índices  $1 \leq k_1^a < k_2^a < \dots < k_{N_i}^a \leq N$  são determinados pelo que restar após a deleção das linhas  $k_1, k_2, \dots, k_n$  e das n primeiras colunas.

Calculando o determinante  $[\det[\tilde{A}_k(s, j)]]^2$  e integrando sobre  $s_{n+1}, \dots, s_N$ , aparecerão integrais do tipo

$$\int_{s_1}^z \int_{s_1}^z \dots \int_{s_1}^z \begin{vmatrix} \tilde{A}_{k_1^a}(s_{n+1}) & \dots & \tilde{A}_{k_1^a}(s_N) & \dots & \tilde{A}_{k_1^{a0}}(s_{n+1}) & \dots & \tilde{A}_{k_1^{a0}}(s_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{k_{N_i}^a}(s_{n+1}) & \dots & \tilde{A}_{k_{N_i}^a}(s_N) & \dots & \tilde{A}_{k_{N_i}^{a0}}(s_{n+1}) & \dots & \tilde{A}_{k_{N_i}^{a0}}(s_N) \end{vmatrix} d_{s_{n+1}}^{N_i} \dots d_{s_N}^{N_i};$$

onde  $d_{s_{n+1}}^{N_i} \dots d_{s_N}^{N_i} = d_{s_{n+1}} \dots d_{s_N}$ .

Expandindo os determinantes e usando as relações de ortogonalidade:

$$\int_{s_1}^z \tilde{A}_{k^a}(x) \tilde{A}_{k^{a0}}(x) dx = 0$$

para  $k^a \notin k^{a0}$ , restarão apenas nas integrais os termos satisfazendo  $k_1^a = k_1^{a0}, \dots, k_{N_i}^a = k_{N_i}^{a0}$ .

Logo

$$\int_{s_1}^z \int_{s_1}^z \dots \int_{s_1}^z d_{s_{n+1}}^{N_i} [\det[\tilde{A}_k(s, j)]]^2 = \sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_n} \begin{vmatrix} \tilde{A}_{k_1}(s, 1) & \dots & \tilde{A}_{k_1}(s, n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{k_n}(s, 1) & \dots & \tilde{A}_{k_n}(s, n) \end{vmatrix}^{-2} \int_{s_1}^z \int_{s_1}^z \dots \int_{s_1}^z \begin{vmatrix} \tilde{A}_{k_1^a}(s_{n+1}) & \dots & \tilde{A}_{k_1^a}(s_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{k_{N_i}^a}(s_{n+1}) & \dots & \tilde{A}_{k_{N_i}^a}(s_N) \end{vmatrix}^{-2} d_{s_{n+1}}^{N_i} \dots d_{s_N}^{N_i} \quad (3.12)$$

Quando expandimos o segundo determinante na fórmula acima, de acordo com a fórmula (3.8), notamos usando a relação de ortogonalidade (3.9), que os termos cruzados anulam-se. Então, analogamente à equação (3.10),

$$\prod_{i=1}^n d_{s_i} \det^2[\tilde{A}_{k_j}(s_i)]_{\substack{j=1, \dots, N \\ i=n+1, \dots, N}} = \sum_{g_1, g_2, \dots, g_N} \prod_{i=1}^n \tilde{A}_{k_i}^2(s_{g_i}) \quad (3.13)$$

$$= (N - n)!$$

onde  $\sum_g$  denota a soma sobre as permutações  $g_1, g_2, \dots, g_N$ .

Concluimos de (3.12) que

$$\prod_{i=1}^n d_{s_{n+1}} \dots d_{s_N} [\det[\tilde{A}_k(s_j)]]^2 = (N - n)! \sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_n} \begin{vmatrix} \tilde{A}_{k_1}(s_1) & \dots & \tilde{A}_{k_1}(s_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{k_n}(s_1) & \dots & \tilde{A}_{k_n}(s_n) \end{vmatrix}^2 \quad (3.14)$$

Esta fórmula com o método de Gram que desenvolveremos no próximo capítulo, permitirá escrevermos as funções de Correlação.

### 3.2.2 O método de Gram.

Vamos definir uma matriz  $B = [b_{ij}]$ , com  $i, j = 1, 2, \dots, N$ ; cujas entradas são dadas pelo produto interno em  $C^N$ , ou seja,

$$b_{ij} = \langle a_i, a_j \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} a_{ki} a_{kj}^* \quad (3.15)$$

onde  $a_i = (a_{0i}; a_{1i}; \dots; a_{(N-1)i})$  são vetores formados pela  $i$ -ésima linha da matriz original e  $a_{kj}^*$  o complexo conjugado de  $a_{kj}$

Por definição, o menor principal de  $B$  de ordem  $n \leq N$  é dado por

$$\det B^{(n)} = \det [b_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} = \sum_{p_1} \dots \sum_{p_n} \epsilon_{p_1, \dots, p_n} b_{1p_1} b_{2p_2} \dots b_{np_n}$$

onde  $\epsilon_{p_1, \dots, p_n}$  é o sinal da permutação  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$ . Variando-se também o primeiro índice, podemos escrever

$$\det B^{(n)} = \frac{1}{n!} \sum_{p_1} \sum_{p_2} \dots \sum_{p_n} \epsilon_{p_1, \dots, p_n} b_{1p_1} b_{2p_2} \dots b_{np_n} \quad (3.16)$$

onde  $\epsilon_{p_1, \dots, p_n}$  é o sinal da permutação  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ .

Usando (3.15) em (3.16) obtemos

$$\begin{aligned} \det B^{(n)} &= \frac{1}{n!} \sum_{p_1} \sum_{p_2} \dots \sum_{p_n} \epsilon_{p_1, \dots, p_n} \langle a_{i_1}, a_{j_1} \rangle \langle a_{i_2}, a_{j_2} \rangle \dots \langle a_{i_n}, a_{j_n} \rangle \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{p_1} \sum_{p_2} \dots \sum_{p_n} \epsilon_{p_1, \dots, p_n} \prod_{k=0}^{N-1} a_{ki_1} a_{kj_1}^* \dots \prod_{k=0}^{N-1} a_{ki_n} a_{kj_n}^* \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{p_1} \sum_{p_2} \dots \sum_{p_n} \epsilon_{p_1, \dots, p_n} (a_{\%1 i_1} a_{\%2 i_2} \dots a_{\%n i_n}) a_{\%1 j_1}^* a_{\%2 j_2}^* \dots a_{\%n j_n}^* \end{aligned}$$

onde a soma é sobre as  $n$ -uplas  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1; \dots; \mathcal{A}_n) \in \{0, \dots, N\}^n$ .

Trocando-se a soma em  $\mathcal{A}$  com as somas sobre  $p_1$  e  $p_2$ , temos

$$\begin{aligned} \det B^{(n)} &= \frac{1}{n!} \sum_{\mathcal{A}} \sum_{p_1} \sum_{p_2} \prod_{i=1}^n (a_{\mathcal{A}_1 i_1} a_{\mathcal{A}_2 i_2} \dots a_{\mathcal{A}_n i_n}) \prod_{j=1}^n (a_{\mathcal{A}_1 j_1} a_{\mathcal{A}_2 j_2} \dots a_{\mathcal{A}_n j_n}) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\mathcal{A}} \sum_p \prod_{i=1}^n (a_{\mathcal{A}_1 i_1} a_{\mathcal{A}_2 i_2} \dots a_{\mathcal{A}_n i_n}) \end{aligned}$$

e disso podemos concluir que

$$\det B^{(n)} = \frac{1}{n!} \sum_{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} a_{\mathcal{A}_1 1} & a_{\mathcal{A}_1 2} & \dots & a_{\mathcal{A}_1 n} \\ a_{\mathcal{A}_2 1} & a_{\mathcal{A}_2 2} & \dots & a_{\mathcal{A}_2 n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\mathcal{A}_n 1} & a_{\mathcal{A}_n 2} & \dots & a_{\mathcal{A}_n n} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Necessariamente só serão não nulos os termos da soma acima com  $\mathcal{A}_1 \in \mathcal{A}_2 \in \dots \in \mathcal{A}_n$ , pois não havendo linhas repetidas, o determinante se anula.

Observação: Particularmente no caso em que  $n = N$ , a soma  $\sum_{\mathcal{A}}$  em (3.17) é equivalente à soma sobre as permutações  $\sum_{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & N-1 \\ \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \dots & \mathcal{A}_N \end{pmatrix}$ .

Estamos agora prontos para calcular as funções de Correlação de  $n$  pontos.

### 3.2.3 Funções de Correlação e Classe de Universalidade

A função de Correlação de  $n$  pontos, como já havíamos visto no Capítulo 2, é definida por

$$C_n^N(s_1; \dots; s_n) = \frac{N!}{(N-n)!} \int_{s_1}^1 \dots \int_{s_n}^1 d_{s_{n+1}} \dots d_{s_N} P(s_1; \dots; s_n); \quad (3.18)$$

onde  $C_n^N(s_1; \dots; s_n)$  é a densidade conjunta para as  $n$ -uplas  $(s_1; s_2; \dots; s_n)$ .

De acordo com as equações (3.11) e (3.14), a equação (3.18) pode ser escrita como

$$C_n^N(s_1; \dots; s_n) = \sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_n} \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} \tilde{A}_{k_1}(s_1) & \dots & \tilde{A}_{k_1}(s_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{k_n}(s_1) & \dots & \tilde{A}_{k_n}(s_n) \end{pmatrix}$$

e então

$$C_n^N(s_1; \dots; s_n) = \frac{1}{n!} \sum_k \prod_{i=1}^n \begin{pmatrix} \tilde{A}_{k_1}(s_1) & \dots & \tilde{A}_{k_1}(s_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{A}_{k_n}(s_1) & \dots & \tilde{A}_{k_n}(s_n) \end{pmatrix};$$



com  $\mathbf{k} = (k_1; \dots; k_n) \in \mathbb{N}^n$ . Aqui o fator  $n!$  compensa o fato da soma estar com os índices sem ordenamento.

De acordo com a equação (3.17), obtemos então que

$$C_n^N(s_1; \dots; s_n) = \det [h\tilde{A}(s_i); \tilde{A}(s_j)]_{i,j=1;\dots;n} \quad (3.19)$$

onde  $\tilde{A}(s)$  é a  $n$ -upla  $(\tilde{A}_0(s); \tilde{A}_1(s); \dots; \tilde{A}_{N-1}(s))$ .

A título de comparação com o caso ortogonal, vamos calcular a densidade de estados nos ensembles circular e gaussiano unitários, a partir da expressão (3.19)

No ensemble gaussiano temos  $V(H) = \frac{H^2}{2}$ , com  $-1 < \text{Re } H_{ij} < 1$  e  $-1 < \text{Im } H_{ij} < 1$ , a densidade de estados é então dada por

$$\begin{aligned} C_G^N(s) &= \int \prod_{i=1}^N h'(s_i) \tilde{A}(s_i) \\ &= \int \prod_{k=0}^{N-1} s^k \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde  $s^k$  são as autofunções do oscilador harmônico com  $-1 < s < 1$ . E como já constatamos numericamente no Capítulo 2 a soma (3.20) converge para a lei do semi-círculo no limite  $N \rightarrow \infty$ .

Comentamos também no Capítulo 2 que as flutuações devido a  $N$  pequenos são atenuadas na equação (2.31) pelo termo que contém a integral. Como podemos ver pela equação (3.20) esse termo aqui não existe mostrando que no caso gaussiano unitário tais flutuações aparecem.

Para o ensemble circular  $V(H) = 1$ , cujos autovalores são  $e^{i\mu_j}$ , com  $0 < \mu_j < 2\pi$ , a densidade de estados é

$$C_C^N(\mu) = \int \prod_{k=0}^{N-1} \tilde{A}_k(\mu) \tilde{A}_k^*(\mu);$$

onde  $\tilde{A}_k(\mu) = \frac{1}{2\pi} e^{ik\mu}$ . Assim

$$C_C^N(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int \prod_{k=0}^{N-1} 1 = \frac{N}{2\pi}; \quad (3.21)$$

o que proporciona o mesmo resultado do ensemble circular ortogonal.

Vamos agora calcular o Kernel  $K(x; y) = h\tilde{A}(x); \tilde{A}(y)$  tanto para o caso gaussiano quanto para o circular e mostrar que eles coincidem se forem reescalados apropriadamente. Consequentemente, a função de correlação é mesma para os dois casos.

Para o ensemble unitário:

$$K(\mu_i; \mu_j) = \frac{1}{2\pi} \int \prod_{k=0}^{N-1} e^{ik(\mu_i - \mu_j)};$$

Sendo esta uma série geométrica temos

$$K(\mu_i; \mu_j) = \frac{1}{2^{1/4}} \frac{1 - e^{iN(\mu_i - \mu_j)}}{1 - e^{i(\mu_i - \mu_j)}} = \frac{1}{2^{1/4}} e^{i(N-1)(\mu_i - \mu_j)/2} \frac{\sin [N(\mu_i - \mu_j)/2]}{\sin [(\mu_i - \mu_j)/2]}.$$

Note que

$$\begin{aligned} \det [K(\mu_i; \mu_j)] &= \frac{1}{(2^{1/4})^n} \det \left[ e^{i(N-1)(\mu_i - \mu_j)/2} \frac{\sin [N(\mu_i - \mu_j)/2]}{\sin [(\mu_i - \mu_j)/2]} \right] \\ &= \frac{1}{(2^{1/4})^n} \det \left[ \frac{\sin [N(\mu_i - \mu_j)/2]}{\sin [(\mu_i - \mu_j)/2]} \right]; \end{aligned}$$

onde o termo  $e^{i(N-1)(\mu_i - \mu_j)/2}$  desaparece devido ao fato de que o termo  $e^{i\mu_i}$  proveniente da linha da matriz que é aniquilado com  $e^{i\mu_i}$  proveniente da coluna.

Concluimos que a função de Correlação de n pontos ( $n = 1; \dots; N$ ), para o ensemble circular unitário, é

$$C_n^N(\mu_1; \dots; \mu_n) = \frac{1}{(2^{1/4})^n} \det \left[ \frac{\sin [N(\mu_i - \mu_j)/2]}{\sin [(\mu_i - \mu_j)/2]} \right]_{i,j=1;\dots;n} \quad (3.22)$$

O espaçamento médio entre os autovalores mais próximos no ensemble circular unitário é igual a  $\frac{2^{1/4}}{N}$  devido a (3.21). Reescalando esse espaçamento apropriadamente

$$y_k = i \frac{N}{2} + \frac{N}{2^{1/4}} \mu_k; \quad k = 1; \dots; N \quad (3.23)$$

a distância média entre os vizinhos mais próximos torna-se 1. Substituindo (3.23) em (3.22) escrevemos a função de correlação de n pontos reescalada:

$$\frac{2^{1/4}}{N} C_n^N \left( \frac{2^{1/4}}{N} y_1 + \frac{1}{4}; \dots; \frac{2^{1/4}}{N} y_n + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{N^n} \det \left[ \frac{\sin \frac{1}{4} (y_i - y_j)}{\sin \frac{1}{N} (y_i - y_j)} \right]_{i,j=1;\dots;n}$$

Tomando o limite  $N \rightarrow \infty$  e sendo

$$\sin \frac{1}{N} (y_i - y_j) \sim \frac{1}{N} (y_i - y_j) + O \left( \frac{1}{N^3} \right);$$

obtemos

$$\begin{aligned} C_n(y_1; \dots; y_n) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2^{1/4}}{N} C_n^N \left( \frac{2^{1/4}}{N} y_1 + \frac{1}{4}; \dots; \frac{2^{1/4}}{N} y_n + \frac{1}{4} \right) \\ &= \det \left[ \frac{\sin \frac{1}{4} (y_i - y_j)}{\frac{1}{4} (y_i - y_j)} \right]_{i,j=1;\dots;n}; \end{aligned} \quad (3.24)$$

Mostraremos a seguir que as funções de correlação no ensemble gaussiano unitário quando convenientemente reescaladas convergem para esse mesmo limite. Para isso consideremos o Kernel integral no caso Gaussiano

$$K(x_i; x_j) = \sum_{k=0}^{N-1} \psi_k(x_i) \psi_k(x_j);$$

onde  $\psi_k(x_i)$  são as auto-funções do Oscilador Harmônico. Pela fórmula de Christoffel-Darboux [13] para os polinômios de Hermite, temos

$$K(x_i; x_j) = \frac{1}{2} \frac{H_{N-1}(x_i) H_N(x_j) - H_N(x_i) H_{N-1}(x_j)}{x_i - x_j}; \quad (3.25)$$

Reescalando as variáveis

$$\begin{aligned} 2\sqrt{m} x_i &= \sqrt{4} X \\ 2\sqrt{m} x_j &= \sqrt{4} Y \end{aligned}$$

onde  $N = 2m$ , também encontramos na referência (2.32)

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m!} (i-1)^m m^{1-4i} \frac{1}{2^m} \left(\frac{\sqrt{4} X}{2\sqrt{m}}\right)^{2m} &= \frac{1}{4} i^{-1} \cos \sqrt{4} X \\ \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m!} (i-1)^m m^{1-4i} \frac{1}{2^{m+1}} \left(\frac{\sqrt{4} X}{2\sqrt{m}}\right)^{2m+1} &= \frac{1}{4} i^{-1} \sin \sqrt{4} X; \end{aligned} \quad e$$

onde, voltando à fórmula de Christoffel-Darboux,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(4m)^{1-2}} \sum_{k=0}^{2m-1} \psi_k\left(\frac{\sqrt{4} X}{2\sqrt{m}}\right) \psi_k\left(\frac{\sqrt{4} Y}{2\sqrt{m}}\right) = \frac{\sin \sqrt{4}(X - Y)}{\sqrt{4}(X - Y)};$$

Por  $\dots m$ , a função de Correlação de ordem n reescalada para o ensemble gaussiano unitário é

$$\begin{aligned} C_n(y_1; \dots; y_n) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{(4m)^{1-2}} C_n^{2m}\left(\frac{\sqrt{4} y_1}{2\sqrt{m}}; \dots; \frac{\sqrt{4} y_n}{2\sqrt{m}}\right) \\ &= \det \frac{\sin \sqrt{4}(y_i - y_j)}{\sqrt{4}(y_i - y_j)}; \end{aligned}$$

Note que tanto para o caso gaussiano quanto para o caso circular a densidade de estados por essa escala é 1. Isso quer dizer que a escala é escolhida de maneira tal que para N grande a densidade de estados é praticamente uma constante em torno da origem.

Como esses dois exemplos sugerem, há uma classe de Universalidade para os Ensembles Unitários, desde que nos restrinjamos, para N grande, a uma região constante da densidade de estados. Nessas condições, o Kernel  $K(x_i; x_j)$  converge para o limite

$$K(x; y) = \frac{\sin \sqrt{4}(x - y)}{\sqrt{4}(x - y)}. \quad (3.26)$$

A fórmula de Cristofer-Darboux combinada com a expansão assintótica pode, em princípio, ser estendido para uma classe muito maior de ensembles unitários, como é sugerido em [6] por D. Fox e P. Kahn. Nesse texto os autores afirmam que o Kernel generalizado é da forma

$$K(x; y) = \frac{\sin A^{1/4}(x - y)}{A^{1/4}(x - y)};$$

onde A depende da escala tomada em cada ensemble.

Fox e Kahn [6] afirmam ainda, que este motivo é suficiente para que os ensembles unitários associados com os polinômios clássicos da Física Matemática devam ter distribuições de espaçamento idênticas.

Na próxima seção faremos uma aplicação do Kernel (3.26) para mostrar que a variância do número de autovalores  $n(t)$  em um intervalo fechado de tamanho  $2t$  em ensembles unitários é:

$$\text{Var}[n(t)] = \frac{1}{4^2} \log 2t + O(1); \tag{3.27}$$

A importância desse resultado é devido ao fato de que a estimativa (3.27) é fundamental para provar que a variável aleatória

$$\frac{n(t) - 2t}{\sqrt{\text{Var}[n(t)]}};$$

no limite  $t \rightarrow \infty$ ; converge em lei para uma distribuição normal  $N(0; 1)$  (distribuição gaussiana com média 0 e variância 1).

Não provaremos esse fato nesta dissertação. Para isso deixamos as referências [9] e [33].

### 3.3 Cálculo da variância do número de autovalores de matrizes aleatórias em ensembles gaussiano e circular unitários em um intervalo compacto

Vamos definir a variável aleatória  $n(t)$  como sendo o número de autovalores em um intervalo de comprimento  $2t$  em torno da origem:

$$n(t) = \#\{x_i \in [-t; t]\}$$

Considerando-se interpretação das funções de correlação de  $k$  pontos definida em (3.18) temos

que

$$\int_0^t C_1(x_1) dt = \ln(t) i$$

$$\int_0^t \int_0^t C_2(x_1; x_2) dx_1 dx_2 = \ln(n-1) i$$

$$\vdots$$

$$\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t C_k(x_1; \dots; x_k) dx_1 \dots dx_k = \ln(n-1) \dots (n-k+1) i$$

Nos ensembles gaussiano e circular unitários, dado que as equações (3.24) e (3.26) são válidas, verificamos

$$C_1(x_1) = 1$$

$$C_2(x_1; x_2) = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(x_1 - x_2)}{\frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2}$$

Assim concluímos que

$$\int_0^t C_1(x_1) dt = 2t = \ln(t) i$$

$$\int_0^t \int_0^t C_2(x_1; x_2) dx_1 dx_2 = (2t)^2 = \ln(n-1) i + \ln n i^2$$

Portanto, a variância é

$$\text{Var}[\ln(t)] = \ln^2 n i + \ln n i^2 = 2t \int_0^t \int_0^t \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(x_1 - x_2)}{\frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2} dx_1 dx_2 \quad (3.28)$$

Para calcular a integral

$$I = \int_0^t \int_0^t \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(x_1 - x_2)}{\frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2} dx_1 dx_2,$$

faremos a mudança de variáveis  $u = x_1 - x_2$  e  $v = x_1 + x_2$ , a qual determina uma nova região de integração delimitada pelas retas  $v = 2t - u$  ( $x_1 = t$ ),  $v = 2t + u$  ( $x_1 = -t$ ),  $v = 2t + u$  ( $x_2 = t$ ) e  $v = 2t - u$  ( $x_2 = -t$ ).

Essa região no plano  $v \in u$  corresponde ao losango centrado na origem com as duas diagonais medindo  $4t$ . Por essa transformação, temos

$$I = \int_0^t \int_{-2t+u}^{2t-u} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}u}{\frac{1}{4}u^2} \frac{1}{2} dv du = \int_0^t \frac{\sin^2 \frac{1}{2}u}{\frac{1}{4}u^2} [4t - 2u] du$$

$$= 4t \int_0^t \frac{\sin^2 \frac{1}{2}u}{\frac{1}{4}u^2} du - 2 \int_0^t \frac{\sin^2 \frac{1}{2}u}{u} du \quad (3.29)$$

A primeira integral do lado direito da equação (3.29) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \int_0^{2t} \frac{\sin^2 \frac{1}{4}u}{\frac{1}{4}u} du &= \int_0^{2t} \frac{\sin^2 \frac{1}{4}u}{\frac{1}{4}u} du + \int_0^{2t} \frac{\sin^2 \frac{1}{4}u}{\frac{1}{4}u} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2t} \frac{\sin^2 \frac{1}{4}u}{\frac{1}{4}u} du \\ &= \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{t}\right); \end{aligned} \quad (3.30)$$

pois

$$\int_0^{2t} \frac{\sin^2 \frac{1}{4}u}{\frac{1}{4}u} du \cdot \int_0^{2t} \frac{1}{\frac{1}{4}^2 u^2} du = \frac{1}{2 \frac{1}{4}^2 t};$$

Da mesma forma podemos desmembrar a segunda integral da equação (3.29) de modo que

$$\int_0^{2t} \frac{\sin^2 \frac{1}{4}u}{u} du = \int_0^{2t} \frac{\sin^2 \frac{1}{4}u}{u} du + \int_1^{2t} \frac{\sin^2 \frac{1}{4}u}{u} du$$

e devido a  $\sin^2 \frac{1}{4}u = (1 + \cos 2 \frac{1}{4}u)/2$ ; vem que

$$\int_1^{2t} \frac{\sin^2 \frac{1}{4}u}{u} du = \int_1^{2t} \frac{du}{2u} + \int_1^{2t} \frac{\cos 2 \frac{1}{4}u}{2u} du$$

Como  $\int_1^{2t} \frac{\cos 2 \frac{1}{4}u}{2u} du < 1$ , podemos escrever

$$\int_0^{2t} \frac{\sin^2 \frac{1}{4}u}{u} du = \frac{1}{2} \log 2t + O(1); \quad (3.31)$$

Substituindo (3.31) e (3.30) em (3.29) obtemos

$$I = 2t + \frac{\log 2t}{\frac{1}{4}^2} + O(1);$$

e da equação (3.28)

$$\text{Var}[n] = \frac{\log 2t}{\frac{1}{4}^2} + O(1)$$

### 3.4 Ensembles unitários de matrizes aleatórias com entradas correlacionadas.

Nesta secção faremos algumas aplicações do método desenvolvido na secção 3.2. Vamos considerar nestes casos matrizes cujas entradas são fortemente correlacionadas.

Trataremos de matrizes cujas distribuições conjuntas para as entradas são tais que os autovalores ...cam limitados a um determinado intervalo da reta real. Tais distribuições de...nirão novos ensembles de acordo com o método de Gram desenvolvido na seção 3.2. São eles os ensembles de Legendre, Laguerre e Chebyshev.

Primeiramente vamos esboçar o grá...co da densidade de estados obtido numericamente, para os ensembles de Legendre e de Laguerre.

Para o Ensemble de Chebyshev, a densidade de estados e a função de correlação truncada (sem reescalamiento) de dois pontos serão computados analiticamente. Não encontramos trabalhos referentes a esse ensemble na literatura.

### 3.4.1 Ensemble de Legendre

Esse ensemble é de...nido pela distribuição conjunta

$$P(H) = \begin{cases} 1; & \text{se } \lambda(H) \in [j-1; 1] \\ 0; & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde  $\lambda(H)$  é o espectro da matriz hermitiana  $H$ . O potencial  $V(H)$  na equação (3.3) é um poço in...nito

$$V(H) = \begin{cases} 0; & \text{se } \lambda(H) \in [j-1; 1] \\ 1; & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A distribuição conjunta dos autovalores é, de acordo com a equação (3.4),

$$\begin{aligned} P(\lambda_1; \dots; \lambda_n) &= C_n \prod_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \prod_{i=1}^n \hat{A}_{[j-1; 1]}(\lambda_i) \\ &= C_n \exp \left[ 4 \sum_{i < j} \log(\lambda_i - \lambda_j)^2 \right] \prod_{i=1}^n \hat{A}_{[j-1; 1]}(\lambda_i); \end{aligned}$$

onde  $\hat{A}_l(\lambda_i)$  é a função característica do intervalo  $l$ .

Note que  $P(\lambda_1; \dots; \lambda_n)$  de...ne um gás de cargas interagindo via um potencial logarítmico repulsivo con...nadas no intervalo  $[j-1; 1]$ .

O polinômio ortogonal de...nido pelas equações (3.9) e (3.6) no intervalo  $[j-1; 1]$  com respeito ao produto interno com peso 1, são os polinômios de Legendre  $P_n(x)$ . Usando a relação de ortogonalidade

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{n,m},$$

temos que a densidade de estados é dada por:

$$\begin{aligned} w_N(x) &= \langle \tilde{A}(x); \tilde{A}(x) \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2n+1}{2} P_n^2(x); \end{aligned}$$

onde, como esperado,

$$\int_{-1}^1 w_N(x) dx = \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2n+1}{2} P_n^2(x) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N;$$

Nas figuras 3.1, 3.2 plotamos  $w_N(x)$  e  $x$  para os valores  $N = 10$  e  $N = 100$ .

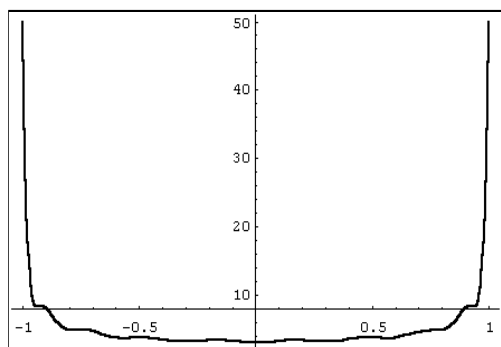


Figura 3.1:

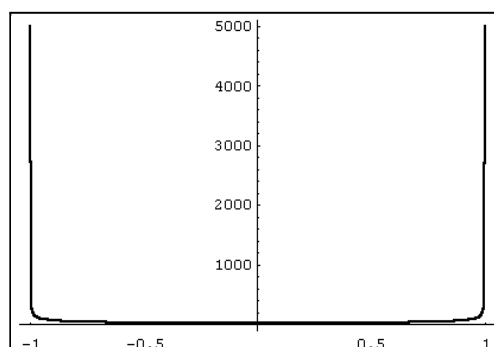


Figura 3.2:

Da propriedade  $P_n(1) = (1/2)^n$  para os polinômios de Legendre, temos que

$$w_N(1) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2n+1}{2} = \frac{N^2}{2};$$

o que confirma a escala do gráfico nas figuras 3.1 e 3.2,  $w_{10}(1) = 50$  e  $w_{100}(1) = 5000$ .

Note então que as cargas se adensam fortemente nas extremidades, um fenômeno típico de extremidades absorventes. A explicação heurística para esse fato consiste em que, dada uma matriz Hermitiana de dimensão  $N \in \mathbb{N}$  com entradas independentes, seu espectro está na reta contida no intervalo  $[\frac{1}{N}, \frac{N}{N}]$ , distribuído de acordo com o semi-círculo. Como o ensemble de Legendre restringe matrizes com espectro fora do intervalo  $[-1; 1]$ , os autovalores que deveriam estar longe da origem se acumulam nas extremidades como se tentassem ‘escapar’.

### 3.4.2 Ensemble de Laguerre

O ensemble de Laguerre é definido pela distribuição conjunta

$$P(H) = \begin{cases} \exp[-\text{Tr}H]; & \text{se } H \in [0; 1] \\ 0; & \text{caso contrário} \end{cases};$$

onde aqui

$$V(H) = \begin{cases} H & \text{se } H \in [0; 1] \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases};$$



Assim a distribuição de autovalores é dada por

$$\begin{aligned}
 P(\lambda_1; \dots; \lambda_n) &= C_n \exp\left[-\sum_{i=1}^n \sum_{i < j} (\lambda_i - \lambda_j)^2\right] \prod_{i=1}^n \tilde{A}_{[0;1]}(\lambda_i) \\
 &= C_n \exp\left[-\sum_{i=1}^n \lambda_i + \sum_{i < j} \log(\lambda_i - \lambda_j)^2\right] \prod_{i=1}^n \tilde{A}_{[0;1]}(\lambda_i);
 \end{aligned}$$

Note que aqui temos um gás de cargas localizadas no semi-eixo positivo que se repelem logaritmicamente e sob a ação de um potencial externo constante  $V(\lambda) = \lambda$ .

Sabemos que os polinômios ortogonais definidos no semi-eixo positivo com respeito ao produto interno com peso  $e^{-x}$  são os polinômios de Laguerre  $L_n(x)$  que satisfazem a relação

$$\int_0^{\infty} L_n(x)L_m(x)e^{-x}dx = (n!)^2 \delta_{n,m};$$

Assim como fazemos para os Polinômios de Legendre, a densidade de estados neste caso é dada por

$$w_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{(n!)^2} L_n^2(x); \tag{3.32}$$

com

$$\int_0^{\infty} w_N(x)dx = N;$$

Os gráficos da densidade de estados para  $N = 10$  e  $N = 100$  são mostrados nas figuras 3.3 e 3.4, respectivamente

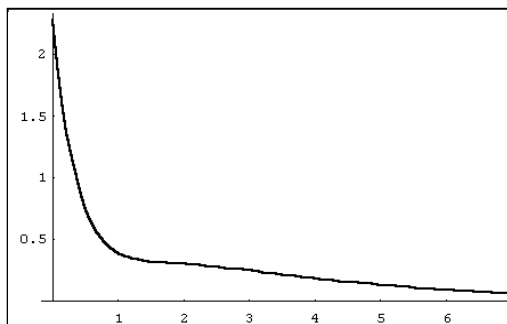


Figura: 3.3

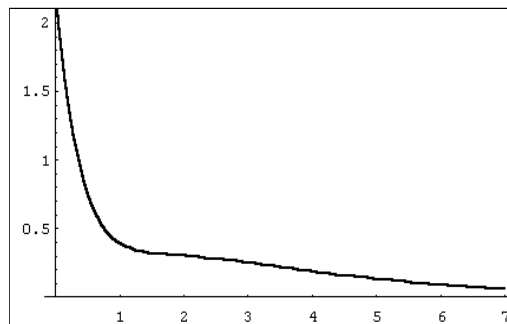


Figura 3.4

Note que há pouca mudança com respeito aos gráficos de  $N = 10$  e  $N = 100$ , mostrando que a exponencial é um fator que se sobrepõe à função polinomial. As cargas se adensam na origem. Isto pode ser visto facilmente já que  $L_n(0) = n!$  e pela equação (3.32), concluímos que  $w_N(0) = N$ .

### 3.4.3 Ensemble de Chebychev

Vamos considerar um ensemble com distribuição conjunta tal que

$$P(H) = \begin{cases} \frac{1}{\det \left( \frac{1}{1 - |H|^2} \right)} & \text{se } H \in [1, 1] \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.33)$$

De acordo com a equação (5.1) do Apêndice A desta dissertação, notemos que

$$\det \left( \frac{1}{1 - |H|^2} \right) = \exp \left( \frac{1}{2} \text{Tr} \log \left( \frac{1}{1 - |H|^2} \right) \right)$$

Assim

$$V(H) = \begin{cases} \frac{1}{2} \log \left( \frac{1}{1 - |H|^2} \right) & \text{se } H \in [1, 1] \\ 1 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

A distribuição conjunta dos autovalores é dada por

$$\begin{aligned} P(s_1, \dots, s_n) &= C_n \det[\text{diag}(1 - |s_i|^2)_{i=1, \dots, n}] \prod_{i < j} (s_i - s_j)^2 \tilde{A}_{[1, 1]}(s_i) \\ &= C_n \prod_{i=1}^n \frac{1}{2(1 - |s_i|^2)} \prod_{i < j} (s_i - s_j)^2 \tilde{A}_{[1, 1]}(s_i) \\ &= C_n \exp \left( \sum_{i=1}^n \log \frac{1}{2(1 - |s_i|^2)} + \sum_{i < j} \log (s_i - s_j)^2 \right) \prod_{i=1}^n \tilde{A}_{[1, 1]}(s_i) \end{aligned}$$

Aqui as cargas se repelem logaritmicamente e ...cam sob a ação externa do potencial atrativo logarítmico:

$$V(s) = \log \frac{1}{2(1 - |s|^2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s|^{2n}}{n}$$

Os polinômios de...nidos entre  $[1, 1]$  ortogonais com respeito ao peso  $\frac{1}{2(1 - |s|^2)}$  são os polinômios de Chebychev. Desta forma, pela equação (3.11),

$$P(s_1, \dots, s_n) = \frac{1}{N!} [\det \tilde{A}_i(s_j) g]^2$$

onde

$$\tilde{A}_n(s) = \begin{cases} \frac{1}{2^{1/4}} \frac{\cos(n \cos^{-1} s)}{1 - s^2} & \text{se } n \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2^{1/4}} \frac{1}{1 - s^2} & \text{se } n = 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

Denotando  $T_n(s) = \cos(n \cos^{-1} s)$  os polinômios de Chebychev, temos

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2(1 - s^2)} T_n(s) T_m(s) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ \frac{1}{4} & \text{se } n = m \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } n = m = 0 \end{cases}$$

Substituindo (3.34) em

$$C_N(s) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{A}_n^2(s); \quad (3.35)$$

obtemos a densidade de estados

$$C_N(s) = \frac{1}{2^{1/4} (1 - |s|^2)} + \frac{1}{2^{1/4} (1 - |s|^2)} \sum_{n=1}^{N-1} \cos^2(n \cos^{-1} |s|); \quad (3.36)$$

onde o segundo termo da soma acima pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{N-1} \cos^2(n \cos^{-1} |s|) &= \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1 + \cos(2n \cos^{-1} |s|)}{2} \\ &= \frac{N-1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \cos(2n \cos^{-1} |s|); \end{aligned} \quad (3.37)$$

Usando

$$e^{i\mu} + e^{2i\mu} + \dots + e^{n i \mu} = \frac{e^{n i \mu} - 1}{e^{i\mu} - 1}$$

e tomando a parte real de  $\frac{e^{n i \mu} - 1}{e^{i\mu} - 1}$ , segue que

$$\cos \mu + \cos 2\mu + \dots + \cos n\mu = \frac{\sin \frac{n\mu}{2} \cos \frac{(n+1)\mu}{2}}{\sin \frac{\mu}{2}}; \quad (3.38)$$

Substituindo (3.38) em (3.36) concluímos, em vista de (3.37),

$$C_N(s) = \frac{1}{2^{1/4} (1 - |s|^2)} N + \frac{\sin[(N-1) \cos^{-1} |s|] \cos[N \cos^{-1} |s|]}{\sin(\cos^{-1} |s|)}; \quad (3.39)$$

Assim, assintoticamente podemos dizer que para  $|s| \ll 1$ , da equação (3.39) obtemos

$$C_N(s) \gg \frac{1}{2^{1/4} (1 - |s|^2)} [2N - 1] \quad (3.40)$$

Nas vizinhanças da origem  $|s| \ll 1$ ,  $\cos^{-1} |s| \gg \frac{1}{2}$ , e a partir da equação (3.39) obtemos

$$C_N(s) \gg \frac{N}{2^{1/4} (1 - |s|^2)} \quad (3.41)$$

O comportamento descrito assintoticamente pelas equações (3.40) e (3.41) pode ser observado nos gráficos de  $C_N(s)$  em  $s$ , onde os casos  $N = 10; 100$  são mostrados, respectivamente, nas figuras 3.5, 3.6.

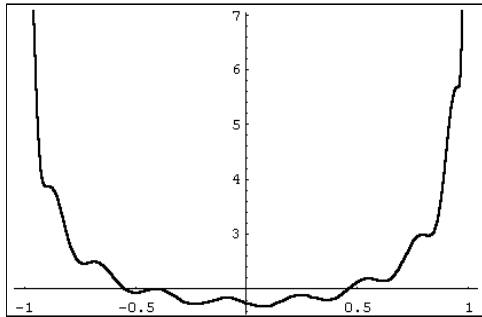


Figura 3.5:

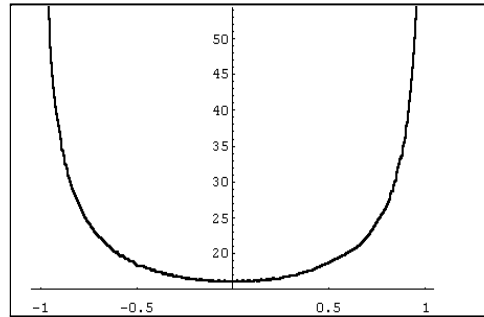


Figura 3.6

Cálculo da função de Correlação truncada de dois pontos no ensemble de Chebyshev.

O Kernel integral no ensemble de Chebyshev é dado por

$$\begin{aligned}
 K_N(x; y) &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{A}_n(x) \tilde{A}_n(y) \\
 &= \frac{1}{2^{1/4} (1-x^2)^{1/4} (1-y^2)^{1/4}} \sum_{n=0}^{N-1} \cos(n \cos^{-1} x) \cos(n \cos^{-1} y) \quad \# \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

Denotando  $\cos^{-1} x = \mu_x$  e  $\cos^{-1} y = \mu_y$ , temos

$$\begin{aligned}
 S_N(x; y) &= \sum_{n=0}^{N-1} \cos(n\mu_x) \cos(n\mu_y) \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \cos n[\mu_x + \mu_y] + \sum_{n=0}^{N-1} \cos n[\mu_x - \mu_y] \quad \#
 \end{aligned}$$

onde, usando a equação (3.38),

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{N-1} \cos n[\mu_x + \mu_y] &= \frac{\sin[(N-1)(\mu_x + \mu_y)] \cos[N(\mu_x + \mu_y)]}{\sin[(\mu_x + \mu_y)]} \\
 \sum_{n=0}^{N-1} \cos n[\mu_x - \mu_y] &= \frac{\sin[(N-1)(\mu_x - \mu_y)] \cos[N(\mu_x - \mu_y)]}{\sin[(\mu_x - \mu_y)]} \quad \#
 \end{aligned}$$

Sendo

$$\frac{\sin[(N-1)(\mu_x + \mu_y)] \cos[N(\mu_x + \mu_y)]}{\sin[(\mu_x + \mu_y)]} = \frac{\sin[(2N-1)(\mu_x + \mu_y)]}{2 \sin[(\mu_x + \mu_y)]} \quad \#$$

e

$$\frac{\sin[(N-1)(\mu_x - \mu_y)] \cos[N(\mu_x - \mu_y)]}{\sin[(\mu_x - \mu_y)]} = \frac{\sin[(2N-1)(\mu_x - \mu_y)]}{2 \sin[(\mu_x - \mu_y)]} \quad \#$$

a equação (3.42) pode ser escrita como

$$K_N(x; y) = \frac{H_N(x; y)}{2^{1/4} (1 - x^2)(1 - y^2)}; \quad (3.43)$$

onde

$$H_N(x; y) = \frac{\sin [(2N - 1)(\mu_x + \mu_y) = 2]}{2 \sin [(\mu_x + \mu_y) = 2]} + \frac{\sin [(2N - 1)(\mu_x - \mu_y) = 2]}{2 \sin [(\mu_x - \mu_y) = 2]} \quad (3.44)$$

Da equação (3.19), podemos dizer que a função de correlação de dois pontos é

$$C_N(x; y) = h\tilde{A}(x); \tilde{A}(x) i h\tilde{A}(y); \tilde{A}(y) i - h\tilde{A}(x); \tilde{A}(y) i^2;$$

onde  $h\tilde{A}(x); \tilde{A}(x) i = C_N(x)$  é a densidade de estados e  $h\tilde{A}(x); \tilde{A}(y) i = K(x; y)$ .

A informação mais importante para nós não é  $C_N(x; y)$ ; mas sim, a função de correlação truncada ou função de Ursell de dois pontos

$$U_N(x; y) = [C_N(x; y) - C_N(x)C_N(y)];$$

que é a menos de um sinal a função de Cluster de dois pontos previamente definida no capítulo 2 pela equação (2.22).

O módulo de  $U_N(x; y)$  mede o quão independente um autovalor  $x$  é independente de  $y$ .

Assim, da equação (3.43) temos

$$U_N(x; y) = \frac{H_N^2(x; y)}{4^{1/2} (1 - x^2)(1 - y^2)}$$

Vamos analisar um  $x_0$  no intervalo  $[-1; 1]$ , correspondente a  $\mu_{x_0}$ . Dessa maneira podemos analisar a função

$$U_N(x_0; y) = \frac{H_N^2(x_0; y)}{4^{1/2} (1 - x_0^2)(1 - y^2)}; \quad (3.45)$$

Fixando  $x_0$  convém traçar um gráfico de  $U_N(x_0; y)$  para  $y \in [-1; 1]$  já que o comportamento da função de correlação deve depender apenas da distância  $(|x_0 - y|)$  entre os autovalores e por simetria  $U_N(x_0; y)$  para  $y \in [-1; 1]$  tem o mesmo comportamento.

Diante dessas informações vamos esboçar um gráfico  $U_N(x_0; y)$  em  $y$  desta função para  $x_0 = 0$ ,  $x_0 = 0.3$  e  $x_0 = 0.5$ , para  $N = 80$  autovalores apresentados respectivamente pelas figuras 3.7, 3.8 e 3.9.

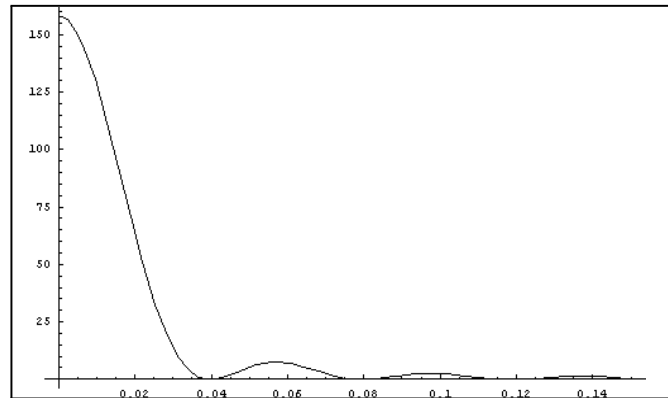


Figura: 3.7

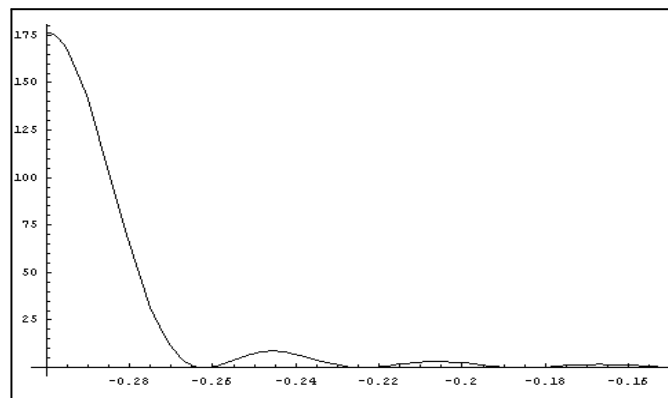


Figura 3.8

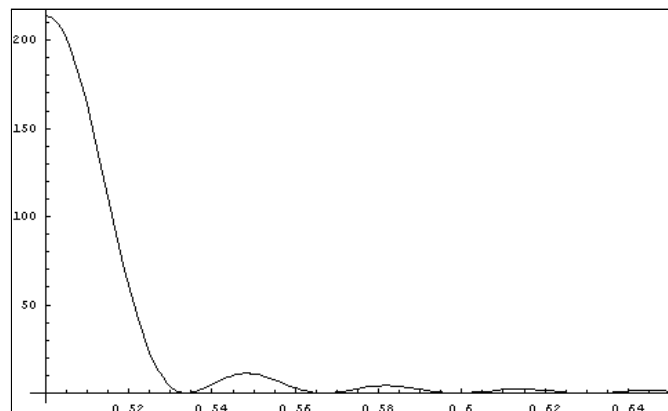


Figura: 3.9

Desses gráficos podemos notar que a função de correlação decai rapidamente com a distância entre os autovalores, assim como o comportamento oscilatório desse decaimento.

Usando o teorema de L'Hospital pode-se concluir, usando (3.44), que

$$\lim_{\substack{x! \\ y!}} U_{80}(x; y) = \frac{80^2}{4!^2} = 162; 278:::$$

Isso verifica a escala do gráfico na Figura 3.8. Para os outros casos de  $x_0$  pode-se verificar

analogamente tal comportamento.

# Capítulo 4

## A Lei dos Grandes Números para Autovalores de Matrizes Aleatórias

### 4.1 A lei do semi-círculo de um ponto de vista mais geral

Nos capítulos anteriores estudamos como obter a densidade de estados em ensembles de matrizes aleatórias.

Ao estudar a densidade de matrizes com espectro na reta real, pudemos constatar, numericamente, a lei do semi-círculo no caso em que os elementos de matriz eram escolhidos independentemente, segundo uma distribuição normal.

Assim colocamos duas questões:

1-) Supondo que outras distribuições sejam adotadas para os elementos da matriz, será que ainda assim, obteríamos a lei do semi-círculo? Quais seriam essas distribuições?

2-) É possível formular o problema sem fazer uso dos ensembles de matrizes?

Neste capítulo responderemos a essas perguntas afirmativamente para uma classe de distribuições. Mostraremos que a densidade de estados de uma matriz simétrica  $H$  de dimensão  $n$  converge quando  $n \rightarrow \infty$  para lei do semi-círculo, supondo apenas que a distribuição das entradas da matriz sejam independentes e que todos os momentos dessa distribuição sejam limitados pelos momentos da distribuição gaussiana.

Note que nos capítulos 2 e 3, quando estudamos o ensemble gaussiano para obter a lei do semi círculo, utilizamos a hipótese de invariância da distribuição conjunta pela transformação de similaridade (ortogonal ou unitária). Nesses capítulos tratávamos de um caso particular do que



propomos no parágrafo anterior, pois obtínhamos uma distribuição conjunta invariante para as entradas independentes da matriz porque estas eram gaussianas. Qualquer outra distribuição para as entradas, mantendo-as independentes, não proporcionaria uma distribuição conjunta invariante como foi dito no capítulo 2.

Assim, a invariância da distribuição conjunta não é uma hipótese importante para se obter a lei do semi-círculo, mas sim a independência estatística das entradas da matriz.

Na próxima seção colocaremos o problema da convergência para a lei do semi círculo como um problema de soma de variáveis aleatórias, e descreveremos com mais detalhes o que faremos neste capítulo.

## 4.2 Alguns resultados importantes, estabilidade do semi-círculo e objetivos do capítulo.

A lei Forte dos grandes números para variáveis aleatórias i.i.d (independentes e igualmente distribuídas) é enunciada pelo seguinte teorema:

**Teorema (Lei Forte dos Grandes Números):** *Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d: com  $E|X_i| < \infty$ . Seja  $EX_i = \mu$  e  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ . Então  $S_n/n \rightarrow \mu$  quase certamente (com probabilidade 1), quando  $n \rightarrow \infty$ .*

A noção de quase certamente quer dizer que a menos de um conjunto de realizações com medida nula, a afirmação é correta (vide definições no apêndice C desta dissertação).

Haja vista que nosso trabalho é o estudo de autovalores de matrizes aleatórias, os quais não são variáveis identicamente distribuídas, a utilização de teoremas deste calibre no nosso problema fica vetada.

Devemos, então, formular uma lei dos grandes números para variáveis correlacionadas.

Seja  $A_n$  uma matriz simétrica de ordem  $n$  com entradas aleatórias  $(a_{ij})_{i,j=1;\dots;n}$  definidas num espaço de probabilidade  $(\Omega; \mathcal{F}; P)$ , tais que:

*i) Os elementos  $(a_{ij})_{i,j}$  são variáveis aleatórias independentes e a lei de distribuição  $F$  para cada  $a_{ij}$  é simétrica:*

$$F(a_{ij}) = F(-a_{ij})$$

ii) Os momentos da distribuição são limitados superiormente:

$$E(a_{ij}^{2p}) \leq c p!$$

onde  $c$  é uma constante, independentes de  $p$ .

obs: De (i) temos que os momentos de ordem ímpar anulam-se.

iii) O segundo momento de todos  $a_{ij}$  é igual à  $\frac{3}{4}$ :

É conveniente considerar a matriz  $B_n$  com entradas normalizadas

$$b_{ij} = \frac{1}{n} a_{ij} \quad (4.1)$$

e denotar seus autovalores por  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ :

Vamos definir a função distribuição empírica por

$$W_n(x) = \frac{1}{n} \# \{ \lambda_i < x; i = 1; \dots; n \}; \quad (4.2)$$

onde  $\#$  denota o número de elementos de um conjunto.

Definida essa grandeza nós podemos escrever os momentos dessa distribuição:

$$\mu_{n;s} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2s} dW_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i^{2s} = \frac{1}{n} \text{tr} B^{2s}. \quad (4.3)$$

Baseados nos trabalhos de E.Wigner [3] e de Y.Sinai e A.Soshnikov [4] e sob as hipóteses i), ii) e iii) mostraremos o seguinte teorema:

**Teorema 4.1:** Considerando  $\mu_{n;s}$  como na equação (4.3), então

$$\mu_{n;s} \sim k_s$$

quando  $n \rightarrow \infty$ , onde

$$k_s = \frac{(2s)!}{s!(s+1)!} \frac{3}{4}^{2s}$$

são os momentos de ordem  $2s$  da distribuição integrada do semi-círculo  $W(x)$ , dada por:

$$W(x) = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} \int_{-1}^x \frac{1}{\sqrt{4-y^2}} dy; \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (4.4)$$

com q:c signi...cando que a convergência é do tipo quase certamente ou com probabilidade 1 com respeito à distribuição das entradas.

Para mostrar o teorema 4.1, devemos separá-lo em dois teoremas menores:

**Teorema 4.2 (Teorema Principal):** Sob as condições de Wigner i), ii) e iii) temos:

$$E(\text{Tr} B_n^{2s}) = \frac{n(2s)!^{3/4} 2^s}{s!(s+1)!} \left( 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right);$$

onde

$$\text{Tr} B_n^m = \sum_{i_0=1}^n \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_{m-1}=1}^n b_{i_0 i_1} b_{i_1 i_2} \cdots b_{i_{m-1} i_0} \quad (4.5)$$

**Teorema 4.3**

$$\text{Var}(1_{n;s}) = E[E(1_{n;s} | 1_{n;s})]^2 \cdot O\left(\frac{1}{n^2}\right); \quad (4.6)$$

Usando o teorema 4.2 (que será provado na secção 4.4), o teorema 4.3 (que será provado na secção 4.5) aliados a desigualdade de Chebyshev e ao Lema de Borel Cantelli (vide apêndice C), provaremos o teorema 4.1 na secção 4.5.

Seguirá desse fato que  $W_n \rightarrow W$  com probabilidade 1 pois  $W$  é a única distribuição com momentos  $k_s$ . Note que  $W$  tem suporte no intervalo limitado  $[1; 1]$  e toda função contínua num intervalo limitado pode ser uniformemente aproximada por polinômios.

Obs: É interessante comparar esse resultado com o seguinte teorema sobre variáveis aleatórias independentes:

**Teorema de Glivenko-Cantelli** (vide [5], pág 59): Seja  $X_1, X_2, \dots$  uma seqüência de variáveis aleatórias i.i.d, com distribuição  $F$  e seja

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \# \{X_i \leq x; i = 1; \dots; n\}$$

então, quando  $n \rightarrow \infty$

$$\sup_x |F_n(x) - F(x)| \rightarrow 0$$

quase certamente.

Note que a distribuição empírica  $F_n$  converge para a distribuição das variáveis aleatórias que a compõe. No problema das matrizes aleatórias temos sempre a convergência para a Lei do Semi-Círculo, independentemente da distribuição das entradas da Matriz.

Isso mostra que a Correlação entre os autovalores, originada pela repulsão entre estes é a causa da 'estabilidade da Lei do Semi-Círculo'.

Vale ressaltar que os resultados apresentados simpli...cam e estendem os resultados nas referências [3] e [4].

A introdução da desigualdade FKG em nossa análise justi...ca algumas passagens não fundamentais em [4]. Apesar de simples essa aplicação não se encontra na literatura.

Os resultados de [4] para matrizes simétricas que apresentaremos no presente capítulo serão estendidos para matrizes hermitianas. Tal extensão também não se encontra na literatura.

### 4.3 O teorema principal e um cálculo explícito da lei do semi-círculo através do Método de Wigner

Vamos usar o teorema 4.2 para mostrar como a lei do semi círculo aparece de uma maneira natural pelo assim chamado método de Wigner.

Em vista deste teorema e da equação (4.3) colocamos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} E(\text{Tr} B_n^{2s}) = \lim_{n \rightarrow \infty} E \int_{-1}^1 x^{2s} dW_n(x) = \int_{-1}^1 x^{2s} dW(x) = \frac{(2s)!^{3/4} 2^s}{s!(s+1)!}.$$

Queremos encontrar  $w(x) = dW/dx$  tal que

$$\int_{-1}^1 x^{2s} w(x) dx = \frac{(2s)!^{3/4} 2^s}{s!(s+1)!}. \quad (4.7)$$

Expandindo  $e^{ikx}$ , concluímos que

$$\int_{-1}^1 e^{ikx} w(x) dx = \int_{-1}^1 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(ikx)^s}{s!} w(x) dx:$$

Como  $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(ikx)^s}{s!}$  converge uniformemente, nós podemos trocar a soma com a integral

$$\int_{-1}^1 e^{ikx} w(x) dx = \sum_{s=0}^{\infty} \int_{-1}^1 \frac{(ikx)^{2s}}{(2s)!} w(x) dx + \sum_{s=0}^{\infty} \int_{-1}^1 \frac{(ikx)^{2s+1}}{(2s+1)!} w(x) dx;$$

onde devido ao fato que  $w(x)$  é simétrica (hipótese  $i$ ), o segundo termo da expressão acima se anula. Então de (4.7) podemos concluir que

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^{ikx} w(x) dx &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(i-1)^s k^{2s}}{(2s)!} \int_{-1}^1 x^{2s} w(x) dx \\ &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(i-1)^s (k^{3/4})^{2s}}{s!(s+1)!} \\ &= \frac{1}{k^{3/4}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(i-1)^s (2k^{3/4})^{2s+1}}{2^{2s} s!(s+1)!} \\ &= \frac{1}{k^{3/4}} J_1(2k^{3/4}); \end{aligned} \quad (4.8)$$

com  $J_1(y)$  sendo a função de Bessel de ordem 1.

Considere agora a integral

$$I = \frac{2}{\sqrt{4}} \int_{-2^{3/4}}^{2^{3/4}} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2^{3/4}}}} dx;$$

Fazendo a mudança de variáveis  $x = 2^{3/4} \sin \mu$  e expandindo  $e^{itx}$ , obtemos

$$I = 2^{3/4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k (2^{3/4} t)^k}{k!} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^k \mu \cos^2 \mu d\mu;$$

Notando que só sobrevivem os termos em que  $k$  é par, por indução podemos concluir que

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{2s} \mu \cos^2 \mu d\mu = \frac{1}{2} \frac{(2s)!}{2^{2s} s!(s+1)!};$$

de forma que

$$I = \frac{1}{t} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(i-1)^s (2^{3/4} t)^{2s+1}}{2^{2s} s!(s+1)!};$$

Dessa identidade...camos

$$\frac{2}{\sqrt{4}} \int_{-2^{3/4}}^{2^{3/4}} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{2^{3/4}}}} dx = \frac{1}{\sqrt{4}t} J_1(\sqrt{4}t); \quad (4.9)$$

Comparando (4.8) com (4.9) podemos concluir finalmente que:

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{4}} J_1(\sqrt{4}t) & \text{se } |x| \leq 2^{3/4} \\ 0 & \text{se } |x| > 2^{3/4} \end{cases};$$

Isto então concluí o cálculo da lei do semi-círculo. Assim podemos dizer que a função distribuição associada a essa densidade é dada pela equação (4.4).

O que vamos fazer na próxima secção é desenvolver um cálculo combinatório para então provar o teorema 4.1.

## 4.4 O Método Combinatório

A fórmula (4.5) pode ser representada como uma soma de trajetos fechados  $T$  de  $m$  passos, onde, para cada passo  $i \rightarrow j$ , um peso  $b_{ij}$  é associado. Nosso objetivo é estimar essa soma.

Um trajeto  $T : i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_{m-1} \rightarrow i_0$  de comprimento  $m$ , é uma coleção de vértices ordenados escolhidos do conjunto  $\{1; 2; \dots; n\}$ . Como exemplo de um possível trajeto de comprimento  $m = 4$ :

$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$$

A cada trajeto  $T$  de tamanho  $m$  associamos um peso  $w_T = b_{i_0 i_1} b_{i_1 i_2} \dots b_{i_{m-1} i_0}$ ; onde com esta notação a equação (4.5) pode ser escrita como

$$T_r B_n^m = \sum_T w_T \quad (4.10)$$

Cada par não ordenado  $(i; j)$  do trajeto  $T$ ; onde  $i; j \in \{1; 2; \dots; n\}$  é denominado de uma ligação. Essa ligação representa o passo  $i \rightarrow j$  ou  $j \rightarrow i$ . Vamos considerar como hipótese do nosso problema os itens i), ii) e iii), de acordo com a seção 4.2.

Ao calcular a esperança (valor médio) de (4.10) com relação a distribuição das entradas da matriz, obtemos um valor não nulo para  $E w_T$  somente se cada ligação  $(i; j)$  aparecer um número par de vezes no trajeto  $T$ , devido à hipótese i).

Consequentemente, somente trajetos pares, ou seja, trajetos nos quais cada ligação aparece um número par de vezes, contribuem para  $E T_r B_n^m$ . Como exemplo de trajetos pares, temos:

$$3 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 3$$

e

$$2 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 2.$$

Note que no primeiro trajeto a ligação  $(2; 5)$  aparece 4 vezes e a  $(3; 5)$  aparece 2 vezes e no segundo trajeto as ligações  $(2; 6)$ ,  $(4; 6)$  e  $(2; 4)$  aparecem duas vezes cada.

**Obs.** Os trajetos pares existem somente se  $m$  (número de passos) for par. Tomaremos  $m = 2s$ .

Consideremos um trajeto par  $i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_{m-1} \rightarrow i_0$ . Dizemos que o  $l$ -ésimo passo do trajeto  $i_{l-1} \rightarrow i_l$  é marcado se durante os  $l$  primeiros passos a ligação  $(i_{l-1}; i_l)$  aparece um número ímpar de vezes. Por exemplo, no trajeto ilustrado pela Fig. 4.1, os passos marcados são os simbolizados por  $\times$ . A figura é apenas para ajudar na visualização.

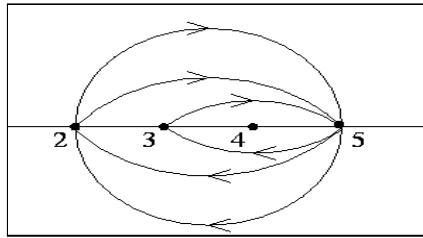


Figura 4.1: 2! 5! 2! 5! 3! 5! 2

obs:.

Em qualquer trajeto o 1º passo é obviamente, sempre marcado. Note que para trajetos pares, o número de passos marcados é sempre igual ao número de passos não marcados.

**De...nição 4.1:** Um vértice  $i, 1 \leq i \leq n$ , pertence ao subconjunto  $Y_k = Y_k(T); 0 \leq k \leq s$ , se o número de vezes que chegamos em  $i$  por passos marcados for igual a  $k$ .

Com essa de...nição podemos classi...car os trajetos fechados por partições. A cada trajeto fechado  $T$  está associada somente uma partição  $Y_0, Y_1, \dots, Y_s$  do conjunto de todos os vértices  $f_1; 2; \dots; n$ , embora não exista necessariamente somente 1 trajeto para cada partição, como veremos.

Por exemplo, o trajeto

$$1! 3! 5! 3! 5! 3! 1;$$

tem partição dada por

$$\begin{aligned} Y_0 & \hat{=} \{1; 2; 4; 6; 7; \dots; n\} \\ Y_1 & \hat{=} \{3\} \\ Y_2 & \hat{=} \{5\} \\ Y_3 & \hat{=} \{ \dots \} \end{aligned}$$

Sendo  $n_k = \#Y_k$ , segue imediatamente o vínculo

$$\sum_{k=0}^s n_k = n \tag{4.11}$$

Por outro lado, sabendo que em trajetos pares o número de passos marcados  $\sum_{k=0}^s kn_k$  é igual ao número de passos não marcados e sendo o número total de passos igual a  $2s$ ; temos o segundo vínculo

$$\sum_{k=0}^s kn_k = s \tag{4.12}$$

Podemos dessa forma, classificar um determinado tipo de trajeto  $T$  pela  $n$ -upla  $(n_0; n_1; \dots; n_s)$  associada a  $T$ .

**Definição 4.2:** *Trajeto do tipo  $(n_0; n_1; \dots; n_s)$  tais que  $i_0 \in Y_0$  são chamados de trajetos pares simples.*

obs.:

Nos trajetos pares simples cada ligação aparece duas vezes, uma em cada direção. Note que o contrário não é válido, ou seja, um trajeto  $T$  com cada ligação aparecendo duas vezes (uma em cada direção) não é par simples, se o vértice  $i_0$  estiver contido na partição  $Y_1$ . Como exemplo vejamos o trajeto

$$2! \ 3! \ 4! \ 2! \ 4! \ 3! \ 2;$$

representado pela Figura 4.2, que obviamente não é um trajeto par simples pois  $i_0 = 2 \in Y_1$ . Nós vamos definir esses trajetos como trajetos quase simples

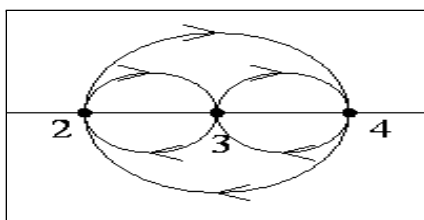


Figura 4.2:

Para calcular  $E(\text{Tr} B_n^{2s})$  nós precisamos contar o número de trajetos  $T$  fechados pares. Para isso, dado o conjunto  $\{1; 2; \dots; n\}$ , o número de maneiras de decompor os  $n$  vértices em  $(s + 1)$  subconjuntos  $Y_0, Y_1, \dots, Y_s$  com as respectivas cardinalidades  $n_0, n_1, \dots, n_s$ , é de acordo com o vínculo da equação (4.11)

$$\frac{n!}{n_0! n_1! \dots n_s!} \quad (4.13)$$

Prosseguindo, poderíamos nos perguntar em que diferem dois trajetos com a mesma partição  $\{Y_0, Y_1, \dots, Y_s\}$ , mesmo ponto inicial e mesma ordem de aparecimento dos vértices que são atingidos por passos marcados?

Resposta: a diferença entre os dois está na escolha dos instantes de tempo em que os passos marcados aparecem e na escolha dos pontos de chegada dos passos não marcados.

Consideremos como exemplo dois trajetos  $T_1 : 2! \ 3! \ 4! \ 3! \ 2$  e  $T_2 : 2! \ 3! \ 2!$



4! 2 representados respectivamente pelas figuras 4.3 e 4.4 com a mesma partição dada por

$$Y_0 = f1; 2; 5; 6; \dots; ng$$

$$Y_1 = f3; 4g$$

$$Y_2 = \dots = Y_s = ; ;$$

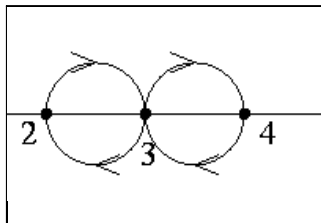


Figura 4.3: a)

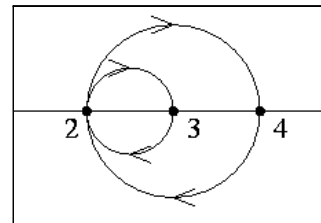


Figura 4.4: b)

Os trajetos a) e b) possuem a mesma partição o mesmo ponto inicial e a mesma ordem de aparecimento dos vértices que são atingidos por passos marcados. Entretanto eles diferem quanto aos diferentes instantes em que os passos marcados aparecem. Em a) temos a sequência  $\alpha \alpha_j j$  e em b) a sequência  $\alpha_j \alpha_j$ .

Da mesma forma consideremos um outro exemplo: Os trajetos  $T_3 : 1! 2! 3! 1! 2! 3! 1$  e  $T_4 : 1! 2! 3! 1! 3! 2! 1$ ; representados respectivamente pelas figuras 4.5 e 4.6, têm mesma partição dada por

$$Y_0 = f4; 5; \dots; ng$$

$$Y_1 = f1; 2; 3g$$

$$Y_2 = \dots; Y_3 = ; ;$$

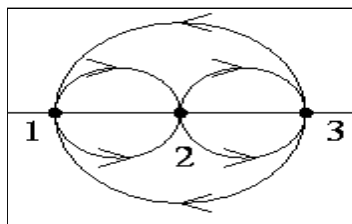


Figura 4.5: c)

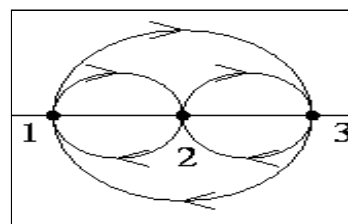


Figura 4.6: d)

Os trajetos c) e d) possuem a mesma partição, mesmo ponto inicial, mesma ordem de aparecimento dos vértices que são atingidos por passos marcados e os instantes de aparecimento dos passos marcados também são os mesmos. Eles diferem apenas no que diz respeito aos pontos de chegada dos passos não marcados 2, 3 e 1 para c) e 3, 2 e 1 para o caso d).

Quando tomamos um ponto inicial, uma partição e a ordem de aparecimento dos vértices atingidos por passos marcados, a escolha dos instantes em que os passos marcados aparecerão pode ser codificada por uma caminhada aleatória simples de comprimento  $2s$  que vai para a

direita se o passo for marcado e vai para a esquerda se o passo não é marcado. Portanto o número de maneiras de se escolher os instantes em que os passos marcados aparecerão é igual ao número de caminhadas de  $2s$  passos que partem e retornam à origem (já que o número de passos marcados deve ser igual ao de não marcados). O número de tais caminhadas (veja Feller [18], pág 82) é dado por

$$\frac{(2s)!}{s!(s+1)!} \tag{4.14}$$

Uma ilustração bastante importante dessa fórmula seria considerar uma caminhada de 6 passos, com a seguinte partição

$$\begin{aligned} Y_0 &= f1; 5; :::ng \\ Y_1 &= f2; 3; 4g \\ Y_2 &= ::: = Y_s = ; ; \end{aligned}$$

onde vamos ...xar que a ordem de aparecimento dos vértices em  $Y_1$ : o vértice 2 é primeiramente atingido por um passo marcado, em segundo o 3 e em terceiro o vértice 4. Vamos também ...xar que 1 é o ponto inicial, e portanto trata-se de um trajeto par simples que como comentaremos adiante não possui degenerescencia alguma com respeito as diferentes escolhas dos pontos de chegada dos passos não marcados.

Assim, o número de trajetos diferentes com essas características é o número de maneiras diferentes de se escolher os instantes em que os passos marcados vão aparecer, que é  $\frac{6!}{3!4!} = 5$ ; de acordo com a equação (4.14). As cinco maneiras possíveis são representadas pelas ...guras 4.7 a 4.11

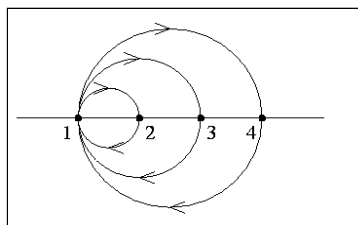


Figura 4.7: 1! 2! 1! 3! 1! 4! 1

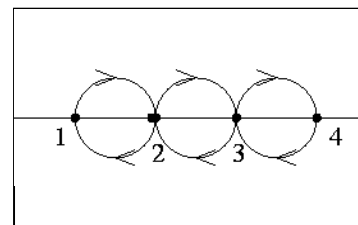


Figura 4.8: 1! 2! 3! 4! 3! 2! 1

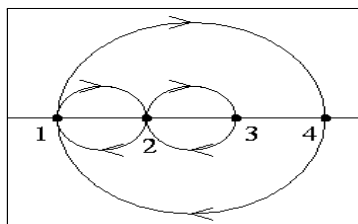


Figura 4.9: 1! 2! 3! 2! 1! 4! 1

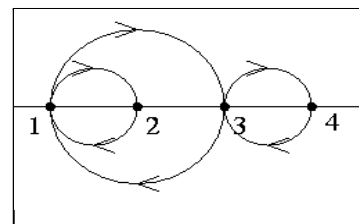


Figura 4.10: 1! 2! 1! 3! 4! 3! 1

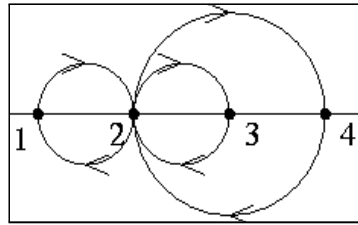


Figura 4.11:  $1! \ 2! \ 3! \ 2! \ 4! \ 2! \ 1$

Em nossa análise combinatória falta ainda quantificar as degenerescências com respeito a liberdade de escolher a ordem de aparecimento dos vértices nos passos marcados.

Dada uma caminhada aleatória (isto é, uma sequência em que os passos marcados aparecem), uma partição  $f: Y_0; Y_1; \dots; Y_s \rightarrow g$  e um ponto inicial, o número de maneiras de se ter diferentes ordens de aparecimentos dos vértices nos passos marcados é

$$\frac{s!}{\prod_{k=1}^s (k!)^{n_k}}; \quad (4.15)$$

que na verdade vem do segundo vínculo dado pela equação (4.12).

Para os mais céticos, podemos fazer uma rápida verificação considerando o exemplo de um trajeto par simples com  $s = 6$  que parte de 1 e tem a mesma sequência de passos marcados  $\alpha \ \alpha \ \beta \ \alpha \ \beta \ \beta$  com  $Y_0 = \{1, 5\}$  e  $Y_1 = \{2, 3, 4\}$ .

Dispensando as regras que o leitor já sabe construir, temos que os trajetos distintos devido às diferentes ordens dos vértices em  $Y_1$  são:

Ordem 2; 4; 3

$$1! \ 2! \ 4! \ 2! \ 3! \ 2! \ 1$$

Ordem 4; 3; 2

$$1! \ 4! \ 3! \ 4! \ 2! \ 4! \ 1$$

Ordem 3; 2; 4

$$1! \ 3! \ 2! \ 3! \ 4! \ 3! \ 1$$

Ordem 2; 3; 4

$$1! \ 2! \ 3! \ 2! \ 4! \ 2! \ 1$$

Ordem 4; 2; 3

$$1! \ 4! \ 2! \ 4! \ 3! \ 4! \ 1$$

Ordem 3; 4; 2

$$1!^3 \ 3!^4 \ 4! \ 3!^2 \ 2! \ 3! \ 1!$$

Note que o número de trajetos distintos é  $\prod_{k=1}^s \frac{s!}{(k!)^{n_k}} = \frac{3!}{(1!)^3(2!)^0} = 6$ , de acordo com a equação

(4.15).

Com isso desenvolvemos tudo que precisávamos para calcular  $E(\text{Tr}B_n^{2s})$ . Para fazê-lo vamos fragmentar convenientemente essa esperança em 3 partes, olhando a contribuição para de  $E(\text{Tr}B_n^{2s})$  para cada uma das diferentes classes de trajetos pares:

$$E(\text{Tr}B_n^{2s}) = E_{ps} + E_{pqs} + E_{nps}; \quad (4.16)$$

onde  $E_{ps}$  é a contribuição para  $E(\text{Tr}B_n^{2s})$  apenas dos trajetos pares simples,  $E_{pqs}$  é a contribuição dos trajetos quase simples e  $E_{nps}$  é a contribuição dos trajetos restantes, ou seja trajetos caracterizados por  $n_1 < s$ .

#### 4.4.1 Contribuição dos trajetos pares simples

Nos trajetos pares simples não temos a liberdade de escolher os vértices de chegada dos passos não marcados. Nesse caso, denotando  $C(s)$  como sendo o número de maneiras de escolher os vértices de chegada dos passos não marcados, no caso do trajeto par simples ela é única, isto é  $C(s) = 1$ . Para os trajetos pares simples cada ligação  $i_{i-1}i_i$  aparece apenas duas vezes.

Portanto

$$E \sum_{i_0 i_1 \dots i_{p_i-1} i_0} a_{i_0 i_1 \dots i_{p_i-1} i_0} = [E \sum_{i=1}^s a^2]^{2s} = 4^{2s} = 2^{4s} = 2^{2s} = 2^{2s};$$

Pela equação acima, todo trajeto  $a_{i_0 i_1 \dots i_{p_i-1} i_0}$  par simples tem a mesma esperança dada por  $2^{2s}$ . Devemos notar que, devido à equação (4.1), temos que

$$E \sum_{i_0 i_1 \dots i_{p_i-1} i_0} b_{i_0 i_1 \dots i_{p_i-1} i_0} = \frac{1}{n^s} E \sum_{i_0 i_1 \dots i_{p_i-1} i_0} a_{i_0 i_1 \dots i_{p_i-1} i_0} = \frac{2^{2s}}{n^s}; \quad (4.17)$$

sendo assim para obter  $E_{ps}$  precisamos apenas calcular o número de trajetos pares simples.

Pela equação (4.13), nós temos que o número de partições, dado que um par simples é denotado pela  $n$ -upla  $(n_1 \ s; s; 0; \dots; 0)$ , é

$$\frac{n!}{s!(n_1 - s)!};$$

Para cada partição, segundo a equação (4.14), podemos ter  $\frac{(2s)!}{s!(s+1)!}$  trajetos com diferentes instantes de ocorrência dos passos marcados. Ainda que veremos os instantes de aparecimento

dos passos marcados, a ordem em que eles aparecem pode ser diferente de  $s!$  maneiras de acordo com a equação (4.15). Ainda sim, devemos contar que para diferentes escolhas do ponto inicial trajetos distintos são proporcionados. A escolha dos pontos iniciais pode ser feita de  $n_i s$  maneiras.

Assim, de acordo com a equação (4.10) e pela equação (4.17), temos que

$$\begin{aligned} E_{ps} &= \sum_{T_{ps}} E(W_T) \\ &= \frac{3/4^{2s}}{n^s} \sum_{T_{ps}} 1 \\ &= \frac{3/4^{2s}}{n^s} (n_i s) \frac{n!}{s!(n_i s)!} \frac{(2s)!}{s!(s+1)!} s!^{3/4^{2s}}; \end{aligned}$$

onde  $\sum_{T_{ps}}$  denota a soma sobre os trajetos pares simples.

Usando a fórmula de Stirling

$$k! = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} k^{k+1/2} e^{-k} [1 + O(\frac{1}{k})];$$

temos

$$\frac{(n_i s) n!}{n^s (n_i s)!} = n \left[ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right];$$

Com isso podemos concluir que

$$E_{ps} = \frac{n(2s)!^{3/4^{2s}}}{s!(s+1)!} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]. \quad (4.18)$$

#### 4.4.2 Contribuição para $E(\text{Tr}B_n^{2s})$ dos trajetos pares não simples.

Dentre os trajetos pares não simples existem os quase simples com  $n_1 = s$  e os não simples restantes são os caracterizados por  $n_1 < s$ . Como vimos a única diferença entre os trajetos pares quase simples e os simples reside no número de maneiras diferentes de escolhes os pontos iniciais. No primeiro é  $s$  e no segundo,  $n_i s$ . Logo, a contribuição dos trajetos pares quase simples é

$$E_{pqs} = \frac{s}{n_i s} E_{ps}$$

que é desprezível, comparado com  $E_{ps}$ .

Resta-nos ainda calcular a contribuição dos trajetos com  $n_1 < s$ ,  $E_{pns}$ , já que para  $n_1 > s$  os trajetos não podem ser pares.

Se  $n_1 < s$ , com certeza pelo menos um dos  $n_k$ ,  $k \geq 2$ , é não nulo e a escolha dos pontos de chegada dos passos não marcados de vértices do tipo  $Y_k$ ,  $k \geq 2$ , pode não ser única, ou seja

$C(s) \notin 1$ . Vamos estimar  $E_{\text{pns}}$  mostrando que sua contribuição para  $E(\text{Tr}B_n^{2s})$  é desprezível. Para isso precisamos estimar convenientemente a esperança, o que é garantido pelo lema que segue:

**Lema 4.1** (Um caso particular da desigualdade FKG)

Seja  $f(x) = x^{2(p_i-k)}$  e  $g(x) = x^{2(p_i-k)}$  dois monômios com  $p > k$  e  $\mu$  uma medida de probabilidade em  $\mathbb{R}$ . Então

$$\langle f, g \rangle \geq \langle f \rangle \langle g \rangle \geq 0;$$

onde

$$\langle f \rangle = \int f(x) d\mu(x);$$

**Prova:**

Vamos considerar:

$$\int x^{2r} d\mu = \int x^{2k} d\mu(x)$$

Então podemos escrever

$$\begin{aligned} \int x^{2p} d\mu \int x^{2(p_i-k)} d\mu &= \int x^{2p} d\mu(x) \int x^{2(p_i-k)} d\mu(x) \int y^{2k} d\mu(y) \\ &= \int x^{2p} d\mu(x) \int y^{2k} d\mu(y) \int x^{2(p_i-k)} d\mu(x) \int y^{2k} d\mu(y); \end{aligned}$$

Simetrizando os termos

$$\int x^{2p} d\mu(x) \int y^{2k} d\mu(y) = \frac{1}{2} \int x^{2p} d\mu(x) \int y^{2k} d\mu(y) + \int y^{2p} d\mu(y) \int x^{2k} d\mu(x)$$

e

$$\begin{aligned} \int x^{2(p_i-k)} d\mu(x) \int y^{2k} d\mu(y) &= \frac{1}{2} \int x^{2(p_i-k)} d\mu(x) \int y^{2k} d\mu(y) + \\ &+ \int y^{2(p_i-k)} d\mu(y) \int x^{2k} d\mu(x); \end{aligned}$$

obtemos

$$\int x^{2p} d\mu \int x^{2(p_i-k)} d\mu \int y^{2k} d\mu = \int x^{2(p_i-k)} d\mu \int y^{2(p_i-k)} d\mu \int x^{2k} d\mu \int y^{2k} d\mu(x) d\mu(y);$$

Isto conclui a prova do lema 4.1, pois, para todo  $k = 1; \dots; p_j - 1$ ,  $x^{2(p_i - k)}_j y^{2(p_i - k)}$  possui o mesmo sinal de  $x^{2k}_j y^{2k}$ .

■

Dado um determinado trajeto  $i_0 ! i_1 ! \dots ! i_{m_i - 1} ! i_0$ , associado à uma partição com  $n_0, n_1, \dots, n_s$ , temos

$$E\left(\prod_{l=1}^s a_{i_{l-1} i_l}\right) = \prod_{(i;j)} E(a_{ij})^{d_{ij}}; \quad (4.19)$$

onde  $d_{ij}$  é a cardinalidade da ligação  $(i;j)$ , ou seja, o número de vezes que a ligação  $(i;j)$  aparece no trajeto considerado. Para nossos propósitos, gostaríamos que  $E\left(\prod_{l=1}^s a_{i_{l-1} i_l}\right)$  fosse limitada superiormente por

$$E(a^2)^{i_{n_1}} E(a^4)^{i_{n_2}} \dots E(a^{2s})^{i_{n_s}}; \quad (4.20)$$

onde  $\sum_{k=1}^s kn_k = s$ .

Suponha que  $i$  é um vértice do conjunto  $Y_k$ . Por definição, ele é atingido por  $k$  passos marcados. Suponha também que os  $k$  passos sejam da mesma ligação. O número de passos marcados continuaria sendo  $\sum kn_k = s$  se todos os vértices fossem tais como  $i$ . O que seria diferente é que em uma situação mais geral o vértice  $i \in Y_k$  seria atingido  $j_1$  vezes por um determinado passo marcado de uma ligação,  $j_2$  vezes por outro passo marcado de uma outra ligação e assim sucessivamente, de forma que a esperança correspondente a essa situação seria:

$$E(a^{2j_1})E(a^{2j_2})\dots E(a^{2j_k});$$

com  $j_1 + \dots + j_k = k$  e não a esperança do produto

$$E(a^{2(j_1+j_2+\dots+j_k)}) = E(a^{2k});$$

correspondente a situação em que os  $k$  passos que atingem o vértice são da mesma ligação.

Assim, para mostrar que  $E\left(\prod_{l=1}^s a_{i_{l-1} i_l}\right)$  é limitada por (4.20) basta mostrar que a esperança de  $2k$  passos da mesma ligação contribui com maior peso do que a esperança de  $2(k_j - p)$  passos de uma determinada ligação multiplicada pela esperança de  $2p$  passos de uma outra ligação. Ou seja basta mostrar a desigualdade

$$E(a^{2(k_j - p)}) \leq E(a^{2p}) \cdot E(a^{2k});$$

mas isto segue do lema 4.1. E então

$$E\left(\prod_{l=1}^s a_{i_{l-1} i_l}\right) \leq \prod_{k=1}^s E(a^{2k})^{i_{n_k}} \quad (4.21)$$

Agora estamos prontos para estimar a contribuição dos trajetos com  $n_1 < s$  para  $E(\text{Tr}B_n^{2s})$ .

Denotando por  $j$  um determinado vértice pertencente a  $Y_k$ ; o número de passos não marcados que partem dele é exatamente  $k$ . Então, dada uma partição  $n_0, n_1, \dots, n_s$ , temos que o número de jeitos de se escolher os passos não marcados é menor que  $\prod_{k=2}^s k^{kn_k}$ . Assim

$$C(s) \cdot \prod_{k=2}^s k^{kn_k}; \tag{4.22}$$

De acordo com as equações (4.10), (4.1), (4.13), (4.14), (4.15) e (4.22) podemos concluir para os trajetos pares não simples com  $n_1 < s$

$$E_{pns} = \sum_{T_{pns}} W_T \cdot \frac{1}{n^s} \frac{(2s)!}{s!(s+1)!} \prod_{T_{pns}} \frac{n!}{n_0!n_1! \dots n_s!} \prod_{k=1}^s \frac{s!}{(k!)^{n_k}} \prod_{k=2}^s [c \llcorner k!]^{n_k} \prod_{k=2}^s k^{kn_k};$$

onde  $\sum_{T_{pns}}$  é a soma sobre os trajetos pares não simples com  $n_1 < s$ .

Sendo

$$\frac{n!}{n_0!} \cdot n^{n_1 n_0}$$

e

$$\frac{n!}{n_0!n^s} = \frac{n(n-1) \dots [n-(n_0-1)]}{n^s};$$

temos que

$$\frac{n(n-1) \dots [n-(n_0-1)]}{n^s} \cdot n^{n_1 n_0}; \tag{4.23}$$

Dos vínculos (4.11) e (4.12) temos

$$\prod_{k=2}^s kn_k = s - n_1 \tag{4.24}$$

$$\prod_{k=2}^s n_k = n - n_0 - n_1;$$

Assim das equações (4.23) e (4.24) obtemos

$$\frac{n(n-1) \dots [n-(n_0-1)]}{n^s} \cdot n^{-\sum_{k=2}^s (k-1)n_k};$$

Com isso vem que:

$$E_{pns} \cdot n^{\llcorner \frac{3}{4} 2s \llcorner} \llcorner \frac{(2s)!}{s!(s+1)!} \llcorner \prod_{T_{pns}} \llcorner \prod_{k=2}^s \frac{[ (k-1)n_k ]}{4} \llcorner \llcorner \frac{s!}{n_1! \dots n_s!} \llcorner \prod_{k=2}^s \frac{\tilde{A} c k^{n_k}}{\frac{3}{4} 2^k} \llcorner ;$$



Sendo  $s! \cdot s^{s_1} n_1! \cdot s^{s_2} n_2! \dots$ , vem

$$E_{\text{subpns}} \cdot n^{\frac{3}{4}2s} \frac{(2s)!}{s!(s+1)!} \prod_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n_k!} \frac{\tilde{A} c_k k^{k-1} n_k}{n^{k_i \frac{1}{4}2k}} \quad (4.25)$$

Como  $\sum_{k=1}^{\infty} k n_k = s$  e  $n_1 < s$ , temos que  $s - n_1 < s$ , e então devemos executar a soma com o vínculo  $0 < \sum_{k=2}^{\infty} k n_k < s$ . Assim, fazendo a soma, resulta

$$E_{\text{pns}} \cdot n^{\frac{3}{4}2s} \frac{(2s)!}{s!(s+1)!} \prod_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n_k!} \frac{c_k k^{k-1} n_k}{n^{k_i \frac{1}{4}2k}}$$

Observemos por exemplo que, dados dois números  $x_1$  e  $x_2$  positivos

$$(e^{x_1} - 1)(e^{x_2} - 1) = e^{x_1+x_2} - e^{x_1} - e^{x_2} + 1 = e^{x_1+x_2} - 1 - (e^{x_1} - 1) - (e^{x_2} - 1)$$

e portanto

$$\prod_k (e^{x_k} - 1) = e^{\sum_k x_k} - 1 - \sum_k (e^{x_k} - 1) + \dots$$

Assim sendo

$$\prod_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n_k!} \frac{\tilde{A} c_k k^{k-1} n_k}{n^{k_i \frac{1}{4}2k}} = \exp \left( \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k k^{k-1} n_k}{n^{k_i \frac{1}{4}2k}} \right) - 1 + \dots$$

Dado que

$$\exp \left( \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k k^{k-1} n_k}{n^{k_i \frac{1}{4}2k}} \right) - 1 = O\left(\frac{1}{n}\right);$$

$E_{\text{pns}} \cdot n^{\frac{3}{4}2s} \frac{(2s)!}{s!(s+1)!} O(1)$ . Finalmente em vista de (4.16), concluímos a prova do teorema 4.2. ■

## 4.5 Prova da convergência dos momentos com probabilidade 1

Nosso objetivo nesta Seção é obter uma estimativa para  $\text{Var}(\text{Tr} B_n^{2s})$  e então provar, com probabilidade 1, a convergência dos momentos  $\mu_{n,s}$  para os momentos da distribuição de Wigner. Por de...nição:

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\text{Tr}B_n^{2s}) &= E[\text{Tr}B_n^{2s} - (E\text{Tr}B_n^{2s})]^2 \\
&= E \left[ \left( \sum_{l=1}^{i_{2s}} a_{i_{l-1}l} - \sum_{m=1}^{j_{2s}} a_{j_{m-1}m} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{n^{2s}} \sum_{f_{i_0 g} \dots f_{j_{2s} 1}} E \left[ \sum_{l=1}^{i_{2s}} a_{i_{l-1}l} - \sum_{m=1}^{j_{2s}} a_{j_{m-1}m} \right]^2
\end{aligned} \tag{4.26}$$

onde aqui estamos usando a convenção  $i_{2s} = i_0, j_{2s} = j_0$ . Para estimar essa variância ajudaria muito saber quais seriam os trajetos  $T \sim f_{i_0} \dots i_1 \dots i_{2s-1} \dots i_0$  e  $T^0 \sim f_{j_0} \dots j_1 \dots j_{2s-1} \dots j_0$ , para os quais  $\text{Var}(\text{Tr}B_n^{2s}) = 0$ . As condições para que isso aconteça são:

1) Se  $T$  e  $T^0$  não têm ligações em comum,  $a_{i_{l-1}l}$  e  $a_{j_{l-1}l}$  são independentes e então

$$E \left[ \sum_{l=1}^{i_{2s}} a_{i_{l-1}l} - \sum_{m=1}^{j_{2s}} a_{j_{m-1}m} \right]^2 = E \left[ \sum_{l=1}^{i_{2s}} a_{i_{l-1}l} \right]^2 + E \left[ \sum_{m=1}^{j_{2s}} a_{j_{m-1}m} \right]^2$$

2) Se uma das ligações aparece um número ímpar  $q$  de vezes na união de  $T$  e  $T^0$ , sendo essa ligação dada por  $(i_{z_1-1}, i_{z_1})$ , temos que

$$E \left[ \sum_{l=1}^{i_{2s}} a_{i_{l-1}l} - \sum_{m=1}^{j_{2s}} a_{j_{m-1}m} \right]^2 = E \left[ a_{i_{z_1-1}i_{z_1}}^q \right] E \left[ \sum_{\text{resto}} a_{i_{l-1}l} - \sum_{\text{resto}} a_{j_{m-1}m} \right]^2 = 0$$

A partir disso nós podemos definir os tipos de trajetos para os quais a variância é não nula.

**Definição 4.3:** Um par de trajetos que satisfaz :

1-)  $T$  e  $T^0$  tem no mínimo uma ligação em comum

2-) Cada ligação aparece na união  $T$  e  $T^0$  um número par de vezes, é chamado par correlacionado.

Um par correlacionado é chamado simples se cada ligação aparece somente duas vezes na união de  $T$  e  $T^0$ .

Para estimar o número de pares correlacionados, construímos para cada par de trajetos correlacionados  $T$  e  $T^0$  um trajeto par de comprimento  $(4s - 2)$  como pode ser visto na Figura 4.12. Nessa figura nos mostramos, por simplicidade, apenas para a primeira ligação ao longo

de  $T$  que pertence também a  $T^0$ . Denominamos essa ligação como **ligação compartilhada** do par correlacionado  $T, T^0$ .

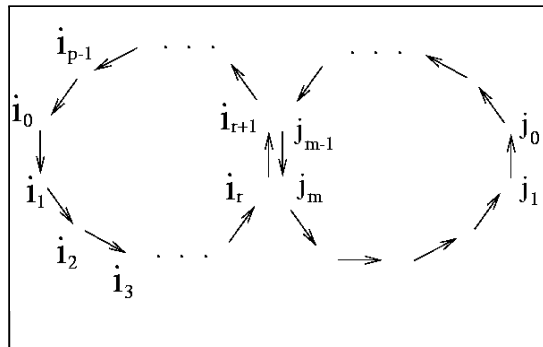


Figura 4.12

O problema é que a correspondência entre esses trajetos de comprimento  $(4s_i - 2)$  e pares de trajetos correlacionados não é de 1 para 1. Precisamos saber de quantas maneiras diferentes um trajeto de comprimento  $(4s_i - 2)$  pode ser obtido de um par de trajetos de comprimento  $2s_i$ .

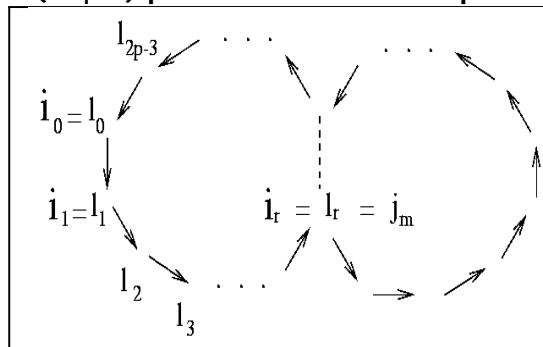


Figura: 4.13

O novo trajeto de comprimento  $(4s_i - 2)$  é construído da seguinte maneira: começamos caminhando ao longo do primeiro trajeto até que alcancemos a extremidade da ligação compartilhada (vide Figura 4.13). Então passamos para o segundo trajeto e percorremos os outros  $(2s_i - 1)$  passos se as direções de  $T$  e  $T^0$  ao longo da ligação compartilhada são opostas. Se as direções coincidem, caminhamos ao longo de  $T^0$  na direção inversa. Após  $2s_i - 1$  passos ao longo de  $T^0$ , chegamos na outra extremidade da ligação compartilhada. Então, passamos para o primeiro trajeto e vamos até o ponto inicial, no caso,  $i_0$ . O novo trajeto é dado por

$$i_0 = i_0 ! \quad i_1 = i_1 ! \quad \dots \quad l_r = i_r = j_m ! \quad \dots$$

$$! \quad l_{r+2s_i-1} = i_{r+1} = j_{m+p_i-1} ! \quad \dots \quad l_{4s_i-3} = i_{2s_i-1} ! \quad i_0 = i_0$$

Independentemente de como se calcule o número de maneiras diferentes de construir um trajeto de  $(4s_j - 2)$  passos, esse número só pode depender de  $s$ , o qual denotamos por  $\#(s)$ .

Estamos agora prontos para provar a convergência dos momentos com probabilidade 1.

Por hipótese, temos  $E(a_{ij}^{2p}) \leq c \rho^p$ . Portanto, podemos concluir que a quantidade

$$\sup_{T; T^0} E \prod_{l=1}^{\Psi_s} a_{i_{l-1} i_l} \prod_{m=1}^{\Psi_s} a_{j_{m-1} j_m} \leq E \prod_{l=1}^{\Psi_s} a_{j_{l-1} j_l} E \prod_{m=1}^{\Psi_s} a_{j_{m-1} j_m} \#$$

é sempre uma função de  $s$ ; a qual denotamos por  $\phi(s)$ .

A equação (4.26) pode ser estimada como:

$$\text{Var} \frac{\tilde{A} \text{Tr} B_n^{2s}}{n} \leq \frac{4s \phi(s) \phi(s)}{n^2 n^{2s}} \# \text{ trajetos pares de comprimento } 4s_j - 2;$$

onde  $4s_j$  é o número de maneiras de se escolher o vértice inicial do trajeto de  $4s_j - 2$  passos.

Pelo teorema 4.2, temos

$$\# \text{ trajetos pares de comprimento } 4s_j - 2 = n^{2s} \frac{(4s_j - 2)!}{(2s_j - 1)s!} [1 + O(\frac{1}{n})];$$

O que nos proporciona

$$\text{Var} \frac{\tilde{A} \text{Tr} B_n^{2s}}{n} \leq \frac{C_1}{n^2}$$

onde  $C_1$  é uma constante. Isto conclui a prova do teorema 4.3:

Em vista da desigualdade de Chebyshev (vide apêndice C), concluímos que

$$P \left[ \left| \frac{\tilde{A} \text{Tr} B_n^{2s}}{n} - E \left( \frac{\tilde{A} \text{Tr} B_n^{2s}}{n} \right) \right| > \epsilon \right] \leq \frac{\text{Var} \frac{\tilde{A} \text{Tr} B_n^{2s}}{n}}{\epsilon^2} \leq \frac{C_1}{\epsilon^2 n^2}$$

Notando que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_1}{\epsilon^2 n^2} < \infty;$$

o Lema de Borel-Cantelli (vide apêndice C) implica então que para  $n \rightarrow \infty$

$$\left| \frac{\tilde{A} \text{Tr} B_n^{2s}}{n} - E \left( \frac{\tilde{A} \text{Tr} B_n^{2s}}{n} \right) \right| \rightarrow 0; \text{ com probabilidade } 1$$

Dessa forma demonstramos que  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n k_s$  com probabilidade 1, no limite  $n \rightarrow \infty$ .

■

Isso conclui a prova do teorema 4.1.

## 4.6 Extensão do Método de Wigner para matrizes hermitianas

Vamos considerar matrizes hermitianas  $\mathbb{C}$  de ordem  $N \in \mathbb{N}$ , com elementos  $\mathbb{C}_{ij} = \frac{1}{N} H_{ij} = \frac{1}{N}(a_{ij} + ib_{ij})$ , de tal forma que  $a_{ij} = a_{ji}$  e  $b_{ij} = -b_{ji}$ . Vamos assumir que  $a_{ij}$  e  $b_{ji}$  sejam variáveis aleatórias cujas distribuições de probabilidades  $F$  e  $G$ ; respectivamente, são simétricas. Assim como fizemos no tratamento para matrizes simétricas, no caso de matrizes hermitianas podemos dizer que

$$E(\text{Tr}^{\mathbb{C}^{2s}}) = \frac{1}{N^s} \sum_{i_0, i_1, \dots, i_{2s-1}} E(H_{i_0 i_1} H_{i_1 i_2} \dots H_{i_{2s-1} i_0});$$

Sendo

$$H_{ij}^{\mathbb{C}^m} = \begin{cases} a_{ij}; & \text{se } \mathbb{C}^m = 1 \\ b_{ij}; & \text{se } \mathbb{C}^m = 0 \end{cases},$$

podemos escrever

$$E(\text{Tr}^{\mathbb{C}^{2s}}) = \frac{1}{N^s} \sum_{f^{\mathbb{C}^m}} (j-1)^p \sum_{i_0, i_1, \dots, i_{2s-1}} E(H_{i_0 i_1}^{\mathbb{C}^0} H_{i_1 i_2}^{\mathbb{C}^1} \dots H_{i_{2s-1} i_0}^{\mathbb{C}^{2s-1}}) = \sum_{f^{\mathbb{C}^m}} (j-1)^p f(f^{\mathbb{C}^m}); \quad (4.27)$$

onde  $(j-1)^p$  é o sinal que aparece devido a um produto par de unidades imaginárias, associada a sequência binária  $\mathbb{C}^0 \mathbb{C}^1 \dots \mathbb{C}^{p-1}$  e

$$f(f^{\mathbb{C}^m}) = \frac{1}{N^s} \sum_{i_0, i_1, \dots, i_{2s-1}} E(H_{i_0 i_1}^{\mathbb{C}^0} H_{i_1 i_2}^{\mathbb{C}^1} \dots H_{i_{2s-1} i_0}^{\mathbb{C}^{2s-1}})$$

**Observação:** Observe que se aparecer um número ímpar de unidades imaginárias, significa que elas são provenientes de um produto de um número ímpar de termos correspondentes a  $\mathbb{C} = 0$ , e como as partes real e imaginária de cada entrada da matriz possuem distribuições distintas, este termo não contribuiria pois a esperança deste é nula.

Então para cada sequência  $\mathbb{C}^0 \mathbb{C}^1 \dots \mathbb{C}^{p-1}$  nós temos que calcular  $f(f^{\mathbb{C}^m})$ , notando que este cálculo é essencialmente o mesmo que fizemos para matrizes simétricas, onde, pelo teorema 4.2 só contribuem os trajetos pares simples, com a única ressalva que aqui temos duas distribuições diferentes.

Ressalvamos também que no caso simétrico todas as entradas tinham a mesma distribuição de probabilidade, e então valia a desigualdade que  $E[a^{2(k-p)}] \leq E[a^{2p}] \cdot E[a^{2k}]$ . No presente

caso temos que analisar o produto  $E_F \langle a^{2(k_i p)} \rangle \langle E_G [a^{2p}] \rangle$  onde  $E_F[\langle \cdot \rangle]$  e  $E_G[\langle \cdot \rangle]$  denotam respectivamente as médias sobre as distribuições  $F$  e  $G$ . Temos dois casos para considerar

$$E_F \langle a^{2(k_i p)} \rangle \langle E_G \langle a^{2p} \rangle \rangle \cdot E_F \langle a^{2(k_i p)} \rangle \langle E_F \langle a^{2p} \rangle \rangle$$

ou

$$E_F \langle a^{2(k_i p)} \rangle \langle E_G \langle a^{2p} \rangle \rangle \cdot E_G \langle a^{2(k_i p)} \rangle \langle E_G \langle a^{2p} \rangle \rangle$$

E agora então podemos usar  $E \langle a^{2(k_i p)} \rangle \langle E [a^{2p}] \rangle \cdot E \langle a^{2k} \rangle$ , de forma que

$$E_F \langle a^{2(k_i p)} \rangle \langle E_G \langle a^{2p} \rangle \rangle \cdot \sup_{F,G} E_F \langle a^{2k} \rangle ; E_G \langle a^{2k} \rangle$$

E colocando como hipótese que os momentos são limitados pelos momentos gaussianos, ou seja  $E_F \langle a^{2k} \rangle \cdot c_{1k} k!$  e  $E_G \langle a^{2k} \rangle \cdot c_{2k} k!$ , podemos escrever a equação (4.27), em vista do teorema 4.2, como

$$\frac{1}{N} E(\text{Tr} \langle \mathcal{O}^{2s} \rangle) = \frac{1}{N^{s+1}} \sum_{f \otimes g} (j-1)^p \sum_{T_{ps}} E(H_{i_0 i_1}^{\otimes s} H_{i_1 i_2}^{\otimes s} \dots H_{i_{2s-1} i_{2s}}^{\otimes s}) + O\left(\frac{1}{N}\right); \quad (4.28)$$

onde  $\sum_{T_{ps}}$  é a soma sobre trajetos pares simples, e  $O(1/N)$  vem da contribuição dos trajetos pares não simples como foi deduzido no caso de matrizes simétricas.

Para trajetos pares simples, se um determinado  $ib_{ij}$  (passo marcado) aparece, deve necessariamente aparecer  $ib_{ji}$  (passo não marcado), e não aparecerá mais nenhuma vez, de forma que

$$ib_{ij} ib_{ji} = i^2 b_{ij}^2 = b_{ij}^2;$$

O sinal  $(j-1)^p$  de (4.28) colocado inicialmente sem nenhuma precisão é por este motivo sempre conhecido, isto é, positivo.

Vamos supor que no produto

$$H_{i_0 i_1} H_{i_1 i_2} \dots H_{i_{2s-1} i_{2s}}$$

das  $s$  ligações  $(i;j)$  do trajeto par simples  $i_0 ! i_1 ! \dots i_{2s-1} ! i_{2s}$ , temos por exemplo  $k$  termos do tipo  $b_{ij}$  e  $s-j-k$  termos do tipo  $a_{ij}$ , onde isso pode ser feito de  $\frac{s!}{k!(s-j-k)!}$  maneiras.

Sendo  $\frac{3}{4}_1^2 = a^2 dF$  e  $\frac{3}{4}_2^2 = b^2 dG$ , somando sobre todos os possíveis  $k$ , isto é  $k$  de  $0$  a  $s$ , e lembrando-se do resultado do teorema 4.2

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} E(\text{Tr} \langle \mathcal{O}^p \rangle) &= \sum_{k=0}^s \frac{s!}{k!(s-j-k)!} \frac{(2s)!}{s!(s+1)!} \left(\frac{3}{4}_1^2\right)^s \left(\frac{3}{4}_2^2\right)^{s-j-k} + O\left(\frac{1}{N}\right) \\ &= \frac{(2s)!}{s!(s+1)!} \sum_{k=0}^s \frac{s!}{k!(s-j-k)!} \left(\frac{3}{4}_1^2\right)^s \left(\frac{3}{4}_2^2\right)^{s-j-k} + O\left(\frac{1}{N}\right) \\ &= \frac{(2s)!}{s!(s+1)!} \left(\frac{3}{4}_1^2 + \frac{3}{4}_2^2\right)^s + O\left(\frac{1}{N}\right); \end{aligned}$$

Note que novamente para o caso hermitiano temos também a convergência para a lei do semi-círculo, onde a densidade de estados limite ( $N \rightarrow \infty$ ) é dada por

$$w(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \sqrt{4 - x^2} & ; \text{ se } |x| \leq 2 \\ 0 & ; \text{ se } |x| > 2 \end{cases}$$

onde a variância  $\sigma^2$  agora é

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$$

# Capítulo 5

## Considerações ...nais

Nesta dissertação reobtivemos muitos resultados existentes na vasta literatura sobre matrizes aleatórias nos preocupando em dar uma visão uni...cada dos resultados fragmentados tanto em física quanto em matemática sobre o assunto.

Neste capítulo nós vamos apresentar os resultados que foram obtidos na dissertação, deixando claro quais são suas contribuições originais.

<sup>2</sup> Mostrou-se detalhadamente a obtenção da Lei do Semi-Círculo para a densidade de estados de matrizes simétricas com entradas gaussianas, o que signi...ca calcular a densidade de estados com entradas de...nidas por uma distribuição conjunta que satisfaz simultaneamente as hipóteses de invariância e independência estatística das entradas. Para isso introduziu-se alguns métodos que permitiram deixar os resultados mais didáticos. Na convergência para a lei do semi-círculo, é feita uma análise das flutuações envolvidas nessa convergência através de um cálculo numérico.

Numa outra vertente mostrou-se que a densidade de autovalores de matrizes simétricas unitárias é uniforme.

<sup>2</sup> No contexto de matrizes hermitianas nós quebramos a hipótese de independência e assim mostramos como se constrói outros ensembles utilizando-se o método de Gram e como através dele obtemos as funções de Correlação para os autovalores das matrizes.

Nesta parte mostramos que sob adequado reescalamiento os ensembles gaussiano e circular têm a mesma função de correlação. Uma aplicação desse resultado é feita para mostrar que a variância do número de autovalores de matrizes hermitianas num intervalo cresce com o logaritmo do tamanho do intervalo nos ensembles unitários.

Um resultado original obtido nesta dissertação é encontrado no ensemble que denominamos ensemble de Chebychev, para o qual computamos analiticamente a densidade de estados bem como a função de Ursell de dois pontos.



Foram exibidos gráficos dessa função de Ursell, em função da distância entre os autovalores, mostrando seu decaimento. Para outros dois ensembles existentes na literatura, o de Legendre e o de Laguerre, nos quais os autovalores são restritos a um intervalo limitado da reta, obteve-se gráficos da densidade de estados.

Um comportamento pitoresco da densidade de estados nestes ensembles é o forte adensamento de autovalores nas extremidades da região que os limita. Por um argumento heurístico concluímos que isto se deve ao fato do espectro de uma matriz hermitiana estar em média espalhado em um intervalo de tamanho  $[\frac{\rho}{N}; \frac{\rho}{N}]$ , onde  $N$  é a dimensão da matriz aleatória, e o fato de ‘aprisionar’ os autovalores em uma região limitada, faria com que numa tentativa de ocupar posições mais distantes eles se adensassem nas extremidades.

<sup>2</sup> Considerando matrizes simétricas com entradas independentes, provou-se através do Método combinatório de Wigner, que tomando qualquer distribuição simétrica para as entradas da matriz com momentos limitados pelos momentos da gaussiana, sua densidade de autovalores converge para a lei do semi-círculo. Nossa abordagem foi a de considerar o problema como um teorema de somas de variáveis aleatórias correlacionadas, o assim chamado teorema de Glivenko-Cantelli, provando a convergência da lei do semi círculo com probabilidade 1.

Desenvolvemos uma versão simplificada do teorema FKG e com isso justificamos algumas passagens do trabalho de Synai e Soshnikov [4] que não são feitas nessa referência.

Como resultado inédito destacamos a extensão desses resultados para matrizes hermitianas.

# Apêndice A

## Determinantes, Pfa...anos e Demonstração dos Teoremas 2.1 e 2.3.

### Determinante de Vandermonde

Consideremos o seguinte determinante de Vandermonde

$$\det M_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Substituindo a n-ésima linha por

$$x_n \in [(n-1)\text{-ésima linha}]_i - [n\text{-ésima linha}]_i;$$

temos

$$\det M_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \dots & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Analogamente, repetindo o processo para as outras linhas, podemos concluir que

$$\det M_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ (x_{n-1} - x_n) & (x_{n-2} - x_n) & (x_{n-3} - x_n) & \dots & 0 \\ x_1(x_{n-1} - x_n) & x_2(x_{n-2} - x_n) & x_3(x_{n-3} - x_n) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{n-2}(x_{n-1} - x_n) & x_2^{n-2}(x_{n-2} - x_n) & x_3^{n-2}(x_{n-3} - x_n) & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Usando a regra de Laplace para o cálculo de determinantes temos

$$\det M_n = \begin{vmatrix} (x_{n-1} - x_n) & (x_{n-2} - x_n) & (x_{n-3} - x_n) & \dots & (x_{n-1} - x_n) \\ x_1(x_{n-1} - x_n) & x_2(x_{n-2} - x_n) & x_3(x_{n-3} - x_n) & \dots & x_{n-1}(x_{n-1} - x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x_1^{n-2}(x_{n-1} - x_n) & x_2^{n-2}(x_{n-2} - x_n) & x_3^{n-2}(x_{n-3} - x_n) & \dots & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1} - x_n) \end{vmatrix};$$

e portanto

$$\det M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \dots & \lambda_{n_i} \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_{n_i}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{n_i-1} & \lambda_2^{n_i-1} & \lambda_3^{n_i-1} & \dots & \lambda_{n_i}^{n_i-1} \end{pmatrix}$$

Disso concluímos que

$$\det M_n = \prod_{j=1}^{n_i-1} (\lambda_i - \lambda_j) \det M_{n_i-1}$$

e iterando o procedimento, temos

$$\det M_n = \prod_{i>j=1}^n (\lambda_i - \lambda_j)$$

## Dedução da fórmula $\det Y = \exp \text{Tr}(\ln Y)$

**Lema A.1:** *Seja  $Y$  uma matriz diagonalizável não nula, então ela sempre pode ser escrita na forma:*

$$\det Y = \exp \text{Tr} \ln Y; \quad (5.1)$$

### Demonstração

Seja  $X$  a matriz dos autovetores de  $A$ , ou seja  $XAX^{-1} = D$ ; onde  $D$  é diagonal. De...nindo

$$e^A = 1 + A + \frac{A^2}{2!} + \dots;$$

temos que:

$$Xe^AX^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(XA^nX^{-1})}{n!};$$

Como

$$\begin{aligned} XA^nX^{-1} &= (XAX^{-1})^n \\ &= D^n, \end{aligned}$$

segue que

$$Xe^AX^{-1} = \exp D = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & e^{\lambda_{n_i}} & \\ 0 & & & e^{\lambda_{n_i}} \end{pmatrix}$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} \det(Xe^A X^{-1}) &= \det Y \\ &= \exp(\operatorname{tr} A) \\ &= \exp \operatorname{tr} D: \end{aligned}$$

Usando os fatos:  $\det(Xe^A X^{-1}) = \det e^A$  e  $\operatorname{tr} D = \operatorname{tr}(XAX^{-1}) = \operatorname{tr} A$ , temos

$$\det e^A = \exp \operatorname{tr} A:$$

Fazendo a mudança  $A = \log Y$ , vem

$$\det Y = \exp \operatorname{tr} \ln Y;$$

onde

$$\ln Y = \ln[I - (I - Y)] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (I - Y)^k + \dots$$

contanto que a série seja convergente, isto é  $\|I - Y\| < 1$ .

■

## Conceitos gerais sobre Pf...anos e Demonstração do Teorema 2.1

Para demonstrar o Teorema 2.1, precisamos de algumas noções sobre pfa...anos e de alguns resultados importantes. Apresentaremos inicialmente esses resultados nesta secção e, em seguida, faremos a demonstração do Teorema 2.1.

Dada uma matriz  $A = [a_{ij}]_{i,j=1;\dots;N}$ , definimos o seu determinante por

$$\det A = \sum_p \epsilon_p a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{Nj_N} \quad (5.2)$$

onde a soma é feita sobre todas as permutações  $p = \begin{matrix} \tilde{A} & 1 & 2 & \dots & N \\ & j_1 & j_2 & \dots & j_N \end{matrix}$  dos números  $1; \dots; N$ , com  $\epsilon_p = +1$  ou  $-1$  de acordo com  $p$  ser uma permutação par ou ímpar respectivamente.

Vamos considerar  $A$  uma matriz antisimétrica de ordem  $N$ ; par. Note que o fato de  $N$  ser par é fundamental pois no caso de  $N$  ímpar

$$\det A = \det A^T = \det(j_i A) = (j_i - 1)^N \det A = (-1)^N \det A = 0:$$

Dessa forma, definimos o pfa...ano de  $A$  pela seguinte função

$$\operatorname{Pf} A = \sum_{\frac{1}{2}N} \epsilon_p a_{j_1 j_2} a_{j_3 j_4} \dots a_{j_{N-1} j_N} \quad (5.3)$$

onde a soma é feita sobre todas as partições  $\frac{1}{2}N$  dos números  $1, \dots, N$  em  $\frac{1}{2}N$  pares não ordenados, e  $p(\frac{1}{2}N)$  é uma permutação  $j_1 j_2 \dots j_N$  tal que  $j_1 j_2, j_3 j_4, \dots, j_{N-1} j_N$  é uma descrição da partição.

Ao invés de somarmos sobre todas as partições, podemos executar a soma (5.3) sobre todas as permutações, dado que o número de permutações correspondente a uma partição  $\frac{1}{2}N$  é  $(2!)^{\frac{1}{2}N} (\frac{1}{2}N)!$ .

Para ver isso, note que o fator  $(2!)^{\frac{1}{2}N}$  corresponde ao número de permutações com respeito a troca da ordem dos dois índices que formam cada par. Quando trocamos dois índices vizinhos, por exemplo  $j_3$  e  $j_4$ , temos uma permutação com sinal oposto, mas este sinal é compensado pelo fato de  $A$  ser antissimétrica  $a_{j_3 j_4} = -a_{j_4 j_3}$ . O fator  $(\frac{1}{2}N)!$  corresponde ao número de permutações com respeito à troca da ordem de dois elementos da matriz. Trocando por exemplo  $a_{j_1 j_2}$  com  $a_{j_2 j_3}$ , o sinal da permutação não muda. Logo

$$PfA = (2!)^{\frac{1}{2}N} (\frac{1}{2}N)! \sum_p a_{j_1 j_2} a_{j_3 j_4} \dots a_{j_{N-1} j_N} \quad (5.4)$$

**Teorema A.1:** *Seja  $A$  uma matriz antissimétrica de ordem par, então é válido que*

$$\det A = (PfA)^2;$$

A prova desse teorema está feita em detalhes em [2], por isso então vamos nos privar disso.

■

**Lema A.2:** *Dada uma matriz  $2m \in 2m$ ,  $A = A(\zeta) = [a_{ij}]$  com*

$$\begin{aligned} a_{j;2i-1} &= a_{ij}(\zeta) \\ a_{j;2i} &= \tilde{A}_{ij}(\zeta); \end{aligned} \quad (5.5)$$

com  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, N = 2m$ , considere a integral

$$I = \int \dots \int d\zeta_1 d\zeta_2 \dots d\zeta_m \det A(\zeta); \quad (5.6)$$

onde a integração é feita independentemente sobre  $\mathbb{R}^n$ .

Definindo

$$d_{ij} = a_{ij} d\zeta_i = a_{ij}(\zeta) \tilde{A}_j(\zeta) \tilde{A}_i(\zeta);$$

então

$$I = m! \det[d_{ij}]_{i,j=1,\dots,2m};$$

### Demonstração:

Substituindo a expressão (5.5) na fórmula (5.2) podemos concluir que a integral (5.6) tem a seguinte forma

$$\sum_p \int \prod_{s=1}^m d_{j_1(s)} \dots d_{j_m(s)} \tilde{A}_{j_2(s)} \tilde{A}_{j_4(s)} \dots \tilde{A}_{j_{N_i-1}(s)} \tilde{A}_{j_N(s)}; \quad (5.7)$$

onde  $\epsilon_p$  é o sinal da permutação  $\tilde{A}_{j_1 j_2 \dots j_N}$ .

Para cada termo

$$\epsilon_p \int \prod_{s=1}^m d_{j_1(s)} \dots d_{j_m(s)} \tilde{A}_{j_2(s)} \tilde{A}_{j_4(s)} \dots \tilde{A}_{j_{N_i-1}(s)} \tilde{A}_{j_N(s)} \quad (5.8)$$

da soma (5.7), encontramos um com paridade oposta com  $j_1$  permutado com  $j_2$

$$\epsilon_i \int \prod_{s=1}^m d_{j_2(s)} \dots d_{j_m(s)} \tilde{A}_{j_1(s)} \tilde{A}_{j_3(s)} \tilde{A}_{j_4(s)} \dots \tilde{A}_{j_{N_i-1}(s)} \tilde{A}_{j_N(s)}; \quad (5.9)$$

Somando (5.8) com (5.17) obtemos

$$\int \prod_{s=1}^m d_{j_1 j_2} \dots d_{j_m} \tilde{A}_{j_3} \tilde{A}_{j_4} \dots \tilde{A}_{j_{N_i-1}} \tilde{A}_{j_N}; \quad (5.10)$$

Analogamente, para cada termo do tipo (5.10), existe um termo em (5.7) de paridade oposta, com  $j_3$  permutado com  $j_4$

$$\epsilon_i \int \prod_{s=1}^m d_{j_1 j_2} \dots d_{j_m} \tilde{A}_{j_3} \tilde{A}_{j_4} \dots \tilde{A}_{j_{N_i-1}} \tilde{A}_{j_N}; \quad (5.11)$$

Somando o termo (5.10) com (5.11), obtemos

$$\int \prod_{s=1}^m d_{j_1 j_2} d_{j_3 j_4} \dots d_{j_m} \tilde{A}_{j_5} \tilde{A}_{j_6} \dots \tilde{A}_{j_{N_i-1}} \tilde{A}_{j_N};$$

Ao ...nal desse procedimento, teremos  $\int \prod_{s=1}^m d_{j_1 j_2} \dots d_{j_{N_i-1} j_N}$  com  $\epsilon_p$  o sinal da permutação inicial. Em cada termo  $d_{ij}$  desse produto, se  $i > j$ ; nós deixamos como está, já se  $i < j$ , então nós trocamos  $d_{ij}$  por  $\tilde{A}_{ij} d_{ji}$  (antissimetria da matriz). Dado que o sinal de  $d_{j_1 j_2} \dots d_{j_{N_i-1} j_N}$  é o sinal da permutação  $\tilde{A}_{j_1 j_2 \dots j_N}$ , trocando por exemplo  $j_1$  e  $j_2$ , adquirimos um sinal negativo o

que proporciona justamente o sinal  $\epsilon_{p^0} = \epsilon_i \epsilon_p$  da permutação  $p^0: \tilde{A}_{j_2 j_1 j_3 \dots j_N}$ .

Com isso podemos escrever que  $I$  na forma :

$$I = \sum_T \int \prod_{k=1}^m d_{k_1 k_2} d_{k_3 k_4} \dots d_{k_{N_i-1} k_N};$$

onde  $T$  é a permutação  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & N \\ k_1 & k_2 & \dots & k_N \end{pmatrix}$ , com  $k_1 > k_2, k_3 > k_4, \dots, k_{N-1} > k_N$ .  
Assim, em vista de (5.4), concluímos que

$$Pf[d_{ij}] = \frac{1}{m!} \prod_{p=1}^m d_{k_1 k_2} d_{k_3 k_4} \dots d_{k_{N-1} k_N}$$

Logo,

$$I = m! \det[d_{ij}]_{i,j=1,\dots,2m}$$

■

Vamos agora voltar à equação (2.16) e demonstrar o Lema 2.1. Na equação (2.16), a integração sobre a coordenada  $s_1$  ( $i-1 < s_1 < s_2$ ) faz com que a 1ª coluna da matriz do determinante seja trocada pelo vetor coluna

$$[V_0(s_2); V_1(s_2); \dots; V_{N-1}(s_2)]^T;$$

onde a função  $V_j(s)$  é definida por

$$V_j(s) = \int_{i-1}^z f(x)^{j-1} dx; \quad (5.12)$$

Quando executamos a integração sobre a coordenada  $s_3$  ( $s_2 < s_3 < s_4$ ), fazemos com que a 3ª coluna da matriz do determinante seja trocada por

$$[V_0(s_4) - V_0(s_2); V_1(s_4) - V_1(s_2); \dots; V_{N-1}(s_4) - V_{N-1}(s_2)]^T;$$

pois

$$\int_{s_2}^z f(x)^{j-1} dx = \int_{i-1}^z f(x)^{j-1} dx - \int_{i-1}^{s_2} f(x)^{j-1} dx = V_j(s_4) - V_j(s_2);$$

Generalizando essa idéia, a integração sobre a coordenada  $s_{2j-1}$  ( $s_{2j-2} < s_{2j-1} < s_{2j}$ ), faz com que a  $(2j-1)$ ésima coluna da matriz do determinante seja trocada por

$$[V_0(s_{2j}) - V_0(s_{2j-2}); \dots; V_{N-1}(s_{2j}) - V_{N-1}(s_{2j-2})]^T;$$

Então podemos concluir que

$$\int_{\Phi(s_{2s_i-1})}^z \prod_{i=1}^N d_{s_{2s_i-1}} f(s_{2s_i-1}) \det A(s) = \det B(s),$$

onde  $B(s) = [b_{ij}]_{i,j=1,\dots,2m}$  tal que

$$\begin{aligned} b_{i;2j-1} &= V_{i-1}(s_{2j}) - V_{i-1}(s_{2j-2}) \\ b_{i;2j} &= V_{i-1}(s_{2j}) \end{aligned}$$

com  $e_s = (s, 2; s, 4; \dots; s, 2m)$ .

Aqui  $\Phi(s, 2s_i - 1)$  significa que a integração é feita somente sobre os elementos com índice ímpar da região de integração  $\Phi$ . Somando-se as colunas  $2j - 1, 2j - 3; \dots$  até a 1ª coluna há um múltiplo cancelamento restando apenas a coluna

$$[V_0(s, 2j)V_1(s, 2j) \dots V_{N_i - 1}(s, 2j)]^T$$

Substituindo essa coluna resultante na  $2j - 1$  ésimas colunas, nós podemos escrever que

$$\int_{\Phi(s, 2s_i - 1)} \prod_{s=1}^N d_{s, 2s_i - 1} f(s, 2s_i - 1) \det A(s) = \det C(e_s); \quad (5.13)$$

onde a matriz  $C(e_s) = [C_{ij}]_{i,j=1, \dots, 2m}$  é tal que

$$\begin{aligned} C_{i; 2j-1} &= V_{i-1}(s, 2j) \\ C_{i; 2j} &= V_{i-1}(s, 2j); \end{aligned}$$

Da equação (2.16) temos que

$$\alpha_N(f; g) = K_N \int_{\Phi(s, 2s)} \prod_{j=1}^N d_{s, 2j} \prod_{j=1}^N g(s, 2j) \det C(e_s); \quad (5.14)$$

com  $K_N$  sendo uma constante que depende de  $N$ .

O fator  $\prod_{j=1}^N g(s, 2j)$  pode ser incorporado no determinante. Logo a equação (5.14) torna-se

$$\alpha_N(f; g) = K_N \int_{\Phi(s, 2)} \prod_{j=1}^N d_{s, 2j} \det E(e_s); \quad (5.15)$$

onde  $E(e_s) = [e_{ij}]_{i,j=1, \dots, 2m}$  é a matriz com elementos

$$\begin{aligned} e_{i; 2j-1} &= g(s, 2j)V_{i-1}(s, 2j) \\ e_{i; 2j} &= V_{i-1}(s, 2j); \end{aligned}$$

O leitor pode se perguntar se toda essa álgebra é necessária. A resposta é sim porque isso faz com que nosso integrando seja simétrico nas variáveis remanescentes  $s, 2j$ . Quando trocamos a coluna  $g(s, 2j)V_{i-1}(s, 2j)$ , com a coluna  $g(s, 2k)V_{i-1}(s, 2k)$  dados  $j$  e  $k$  inteiros entre 1 e  $\frac{N}{2}$ , temos uma permutação par entre as colunas e o sinal se mantém, da mesma forma quando trocamos as colunas  $V_{i-1}(s, 2j)$  e  $V_{i-1}(s, 2k)$ .

A vantagem disso é que nós podemos integrar cada coordenada  $s, 2j$  de  $j - 1$  a  $1$ , ao invés de  $s, 2j - 2$  a  $s, 2j + 2$ , só que então devemos levar em conta a permutação das coordenadas entre si.



Dessa forma, após a integração, nós dividimos por  $m!$  e usando o resultado do Lema A.2 deste apêndice, nós temos que

$$\alpha_N(f; g) = K_N \det[\alpha_{ij}^3]_{i,j=0,1,\dots,2m-1} \quad (5.16)$$

onde

$$\alpha_{ij}^3 = \int_{-1}^1 dx g(x) V_i(x)' V_j(x)' V_j(x)' V_i(x)'$$

De acordo com a equação (5.12) encontramos

$$\alpha_{ij}^3 = \int_{-1}^1 dy dx g(x) f(y)' V_i(x)' V_j(y)' V_j(x)' V_i(y)' \quad (5.17)$$

Definindo uma nova matriz com entradas

$$\begin{aligned} a_{2i;2j} &= \alpha_{2i;2j}^3 \\ a_{2i;2j+1} &= \int_{-1}^1 a_{2j+1;2i} = \frac{\mu_{2j+1} \Gamma_{\frac{1}{2}}}{8} \alpha_{2i;2j+1}^3 \\ a_{2i+1;2j+1} &= \frac{\mu_{2i+1} \Gamma_{\frac{1}{2}}}{8} \frac{\mu_{2j+1} \Gamma_{\frac{1}{2}}}{8} \alpha_{2i+1;2j+1}^3 \end{aligned} \quad (5.18)$$

podemos escrever (5.16) da forma

$$\alpha_N(f; g) = K_N^0 \det[a_{ij}]_{i,j=0,1,\dots,2m-1} \quad (5.19)$$

com

$$K_N^0 = \prod_{j=0}^{m-1} \frac{\Gamma_{\frac{1}{2}}}{2j+1} K_N$$

Vamos definir

$$J_{ij} = a_{2i;2j+1} \frac{\Gamma_{\frac{1}{2}}}{2j+1} a_{2i;2j} \quad (5.20)$$

e

$$\frac{1}{2} J_{ij} = \frac{a_{2i+1;2j+1}}{2j+1} \frac{2i}{2i+1} a_{2i;1;2j+1} + \frac{a_{2i+1;2j}}{2j} \frac{2i}{2i+1} \frac{2j}{2j+1} a_{2i;1;2j+1} \quad (5.21)$$

Substituindo (5.17) e (5.18) na equação (5.20), e usando a relação de recorrência para os polinômios de Hermite

$$P_{2n}^-(x) = P_{n-1}^-(x) - P_{n+1}^-(x),$$



### Lema A.3

Seja a função  $H(x_1; x_2)$  antissimétrica sobre o intercâmbio  $x_1$  e  $x_2$ . Então

$$\int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha^0}^{\beta^0} H(x_1; x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\alpha^0}^{\beta^0} H(x_1; x_2) \epsilon(x_2 - x_1) dx_1 dx_2; \quad (5.25)$$

onde  $\alpha(x_1; x_2)$  e  $\alpha^0(x_1; x_2)$  são, respectivamente, as regiões de integração  $a \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot b$ , e  $a \cdot (x_1; x_2) \cdot b$ ; onde  $\epsilon(x)$  é a função sinal dada por :

$$\epsilon(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1; & \text{se } x > 0 \\ 0; & \text{se } x = 0 \\ -1; & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

### Prova

Vamos denotar a expressão do lado esquerdo de (5.25) por  $I$ . Intercambiando as coordenadas  $x_1$  e  $x_2$  em  $I$ , devido à antissimetria de  $H$ ; temos

$$I = - \int_{\alpha(x_2; x_1)}^{\beta(x_2; x_1)} dx_1 dx_2 H(x_1; x_2);$$

Dessa forma podemos escrever

$$2I = \int_{\alpha(x_1; x_2)}^{\beta(x_1; x_2)} dx_1 dx_2 H(x_1; x_2) - \int_{\alpha(x_2; x_1)}^{\beta(x_2; x_1)} dx_1 dx_2 H(x_1; x_2),$$

então

$$I = \int_{a \cdot (x_1; x_2) \cdot b}^{\beta} dx_1 dx_2 H(x_1; x_2) \left[ \frac{1}{2} \epsilon(x_2 - x_1) \right].$$

■

Em vista desse lema, podemos escrever  $J_{ij}$ ,  $\frac{1}{2} J_{ij}$  e  $\frac{1}{4} J_{ij}$  como

$$J_{ij} = \frac{1}{4} \int_{i-1}^i \int_{i-1}^i dx dy g(x) f(y) \epsilon(x - y) h_{2i}^0(y) h_{2j}^0(x) - h_{2i}^0(x) h_{2j}^0(y), \quad (5.26)$$

$$\frac{1}{2} J_{ij} = \frac{1}{8} \int_{i-1}^i \int_{i-1}^i dx dy g(x) f(y) \epsilon(x - y) h_{2i}^0(y) h_{2j}^0(x) - h_{2i}^0(x) h_{2j}^0(y) \quad (5.27)$$

e

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2} \int_{i-1}^z \int_{i-1}^z dx dy g(x) f(y)''(x_i, y) \begin{matrix} h \\ ' \\ 2i(y)' \\ 2j(x) \end{matrix} \begin{matrix} i \\ ' \\ 2i(x)' \\ 2j(y) \end{matrix} : \quad (5.28)$$

Vamos agora obter o valor de  $K_N^0$  na equação (5.24). Para isso considere  $f(x) = 1$  e  $g(x) = 1$ . Nesse caso temos  $\frac{1}{2} \alpha_{ij} = \alpha_{ij} = 0$ . Nessas condições, observando em (5.22) que a região de integração  $i-1 < y < x < 1$  é igual a região de integração  $i-1 < x < y < 1$  somos levados a concluir

$$J_{ij} = \int_{i-1}^z dx' \begin{matrix} z \\ ' \\ 2i(x) \end{matrix} \int_{i-1}^z dy' \begin{matrix} z \\ ' \\ 2j(y) \end{matrix} = \int_{i-1}^z dx' \begin{matrix} z \\ ' \\ 2i(x)' \\ 2j(x) \end{matrix} = \pm_{ij} : \quad (5.29)$$

Dado que  $\alpha_N(f; g) = 1$  para o caso que  $f(x) = g(x) = 1$ , e que  $\det[J_{ij}] = \det[\pm_{ij}] = 1$ , tiramos de (5.24) que:

$$K_N^0 = 1: \quad (5.30)$$

Voltando na equação (5.24) nós obtemos ...nalmente a forma mais geral para  $\alpha_N(f; g)$

$$\alpha_N(f; g) = \frac{1}{\det} \begin{matrix} \alpha_{ij} \\ J_{ij} \\ \frac{1}{2} \alpha_{ij} \end{matrix} \begin{matrix} \# \\ i, j \\ i, j=0; 1; \dots; m_i-1 \end{matrix} : \quad (5.31)$$

Para ...nalizar a demonstração do Teorema 2.1, vamos supor que as funções  $f$  e  $g$  são tais que  $f(x) = g(x) = 1 + \textcircled{0}(x)$ . Substituindo  $f$  e  $g$  na equação (5.26) obtemos

$$J_{ij} = \pm_{ij} \begin{matrix} i \\ ' \\ 2i(y)' \\ 2j(x) \end{matrix} \begin{matrix} i \\ ' \\ 2i(x)' \\ 2j(y) \end{matrix} = \pm_{ij} \begin{matrix} 1 \\ 4 \\ \int_{i-1}^z \int_{i-1}^z dx dy K(x; y) \begin{matrix} h \\ ' \\ 2i(y)' \\ 2j(x) \end{matrix} \begin{matrix} i \\ ' \\ 2i(x)' \\ 2j(y) \end{matrix} \end{matrix} ; \quad (5.32)$$

onde  $K(x; y) = [\textcircled{0}(x) + \textcircled{0}(y) + \textcircled{0}(x)\textcircled{0}(y)]''(x_i, y)$  e

$$\pm_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{se } i = j \\ 0; & \text{se } i \neq j \end{cases} .$$

Pelo fato que

$$\int_{i-1}^z \int_{i-1}^z dx dy \begin{matrix} z \\ ' \\ 2i(y)' \\ 2j(x) \end{matrix}''(x_i, y) = 0$$

$$\int_{i-1}^z dx' \begin{matrix} z \\ ' \\ 2i(x)' \\ 2j(x) \end{matrix} = 0,$$

concluimos da mesma forma que para  $J_{ij}$ ; das equações (5.27) e (5.28) que

$$\frac{1}{2} \alpha_{ij} = \frac{1}{8} \int_{i-1}^z \int_{i-1}^z dx dy K(x; y) \begin{matrix} h \\ ' \\ 2i(y)' \\ 2j(x) \end{matrix} \begin{matrix} i \\ ' \\ 2i(x)' \\ 2j(y) \end{matrix} \quad (5.33)$$



pelo lema A.2 da secção anterior temos que

$$\begin{aligned} \alpha_N(f; g) &= (i^{-1})^{N=4} N! C_N \overline{\det[\mathfrak{z}_{pq}]} \\ &= N! C_N \overline{\det[\mathfrak{z}_{p; i} \mathfrak{z}_{q}]}; \end{aligned} \quad (5.37)$$

com  $p; q = i \frac{N}{2} + \frac{1}{2}; i \frac{N}{2} + \frac{3}{2}; \dots; \frac{N}{2} i \frac{1}{2}$ .

Para  $f = g = 1$ , temos  $\alpha_N = 1$ , e executando a integral (5.36), conclui-se que  $\mathfrak{z}_{p; i} \mathfrak{z}_{q} = \frac{4^{1/4}}{ip} \pm_{p; q}$ .

Observando que

$$\begin{aligned} \det[\frac{4^{1/4}}{ip} \pm_{p; q}] &= \frac{\mu 4^{1/4} \Gamma_{2m}}{i} \frac{1}{i m + \frac{1}{2}} \frac{1}{i m + \frac{3}{2}} \dots \frac{1}{m i \frac{1}{2}} \\ &= \frac{(4^{1/4})^N 2^{2N} [(\frac{N}{2})!]^2}{(N!)^2}; \end{aligned}$$

da equação (5.37) concluímos que

$$C_N = (4^{1/4})^{\frac{N}{2}} 2^N (\frac{N}{2})!^{-1}; \quad (5.38)$$

Definindo

$$\tilde{A}_{p; q} = \frac{ip}{4^{1/4}} \mathfrak{z}_{p; i} \mathfrak{z}_{q}$$

e usando (5.38) em (5.37), vem que

$$\alpha_N(f; g) = \overline{\det[\tilde{A}_{p; q}]};$$

Considerando funções do tipo  $f(\mu) = g(\mu) = 1 + a(\mu)$ , pode-se concluir que

$$\tilde{A}_{p; q} = \pm_{pq} + r_{pq};$$

onde

$$r_{pq} = \frac{ip}{8^{1/4}} \int_{i \frac{1}{4}}^{z^4} \int_{i \frac{1}{4}}^{z^4} (\mu i^{-1}) [a(\mu) + a(\mu') + a(\mu)a(\mu')] [e^{i(\rho' i q \mu)} i^{-1} e^{i(\rho \mu i q')} ] d\mu d\mu';$$

Apenas desmembrando a equação acima e sendo  $\sigma(x)$  a função sinal já anteriormente definida, obtém-se a equação (2.35), o que finaliza a prova do teorema em questão.

■

# Apêndice B

## Demonstração do Teorema 2.2 e da fórmula para a densidade de estados.

### Demonstração do teorema 2.2.

Substituindo (2.22) no  $t_n$  da equação (2.23) obtemos

$$\begin{aligned}
 t_n &= \int \cdots \int \prod_{i=1}^n d_s(i) \times \sum_{\mathcal{A}: (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m)} (i-1)^{m_i} (m_i-1)! \prod_{j=1}^m W_{j|\mathcal{A}_j}(s_{\mathcal{A}_j}) \\
 &= \sum_{\mathcal{A}: (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m)} (i-1)^{m_i} (m_i-1)! \prod_{j=1}^m W_{j|\mathcal{A}_j}
 \end{aligned} \tag{5.39}$$

Se  $k_j$  denota o número de subconjuntos  $\mathcal{A}_j$  da partição  $\mathcal{A}$ , tal que  $\sum_{j=1}^m k_j = n$  a soma (5.39) pode ser escrita como

$$t_n = \sum_{k_1, \dots, k_n} (i-1)^{m_i} (m_i-1)! \frac{n!}{k_1! \cdots k_n!} \frac{\mu_{W_1}^{k_1}}{1!} \cdots \frac{\mu_{W_n}^{k_n}}{n!}; \tag{5.40}$$

onde  $m = m(k) = \sum_{j=1}^n k_j$  e a soma é feita sobre todos os vetores com  $n$  componentes,  $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$  tal que seja satisfeito  $\sum_{j=1}^n j k_j = n$ .

Note que o fato de dividir por  $k_1! \cdots k_n!$  provém do fato de estarmos descontando as permutações entre os subconjuntos da partição  $\mathcal{A}$  de mesma cardinalidade e dividir por  $(1!)^{k_1} (2!)^{k_2} \cdots (n!)^{k_n}$  signi...ca descontar as permutações entre os elementos de cada subconjunto que forma a partição. Para provar o Teorema 2.2 porém, precisamos provar a seguinte proposição

**Proposição B.1:** *Sejam  $f(z)$  e  $g(z)$  duas funções. Então, sendo  $D = \frac{d}{dz}$  e  $(f \pm g)(z) = f(g(z))$ , a seguinte fórmula:*

$$D^k (f \pm g)(z) = \sum_{\mathcal{A}: (\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_s)} \prod_{j=1}^s D^{j|\mathcal{A}_j} f^{(s)} \pm g \tag{5.41}$$

é válida com a restrição  $\sum_{i=1}^k |j_i| = k$ . Aqui, a soma é feita sobre todas as possíveis partições do conjunto de índices  $\{1; 2; \dots; k\}$ .

## Prova

Vamos provar por indução. Para  $k = 1$  é válido:

$$D(f \pm g) = (f^0 \pm g)(Dg);$$

dado que a única partição de  $\{1\}$  é o próprio conjunto.

Para provar a indução, usamos a hipótese que a equação (5.41) é válida para um  $k$  genérico, e a partir disso verificamos que é válida para  $k + 1$ . Temos

$$\begin{aligned} D^{k+1}(f \pm g) &= D(D^k(f \pm g)) \\ &= D \left( \sum_{\substack{\mathcal{J}=(\mathcal{J}_1; \dots; \mathcal{J}_s) \\ j=1}} \left( \prod_{j=1}^s D^{|\mathcal{J}_j|} g \right) f^{(s)} \pm g \right) \end{aligned}$$

## Executando a derivada

$$\begin{aligned} D^{k+1}(f \pm g) &= \sum_{\substack{\mathcal{J}=(\mathcal{J}_1; \dots; \mathcal{J}_s) \\ j=1}} D \left( \prod_{j=1}^s D^{|\mathcal{J}_j|} g \right) f^{(s)} \pm g + \sum_{\substack{\mathcal{J}=(\mathcal{J}_1; \dots; \mathcal{J}_s) \\ j=1}} \left( \prod_{j=1}^s D^{|\mathcal{J}_j|} g \right) D f^{(s)} \pm g \\ &= \sum_{\substack{\mathcal{J}=(\mathcal{J}_1; \dots; \mathcal{J}_s) \\ j=1}} \sum_{i \in \mathcal{J}_j} D^{|\mathcal{J}_j|+1} g \left( \prod_{j=1}^s D^{|\mathcal{J}_j|} g \right) f^{(s)} \pm g + \\ &\quad + \sum_{\substack{\mathcal{J}=(\mathcal{J}_1; \dots; \mathcal{J}_s) \\ j=1}} \left( \prod_{j=1}^s D^{|\mathcal{J}_j|} g \right) f^{(s+1)} \pm g \end{aligned} \quad (5.42)$$

Agora é uma questão de interpretação. A primeira soma na equação (5.42) significa que estamos dividindo  $\{1; 2; \dots; k + 1\}$  índices em partições de  $s$  subconjuntos. Na segunda soma estamos dividindo  $\{1; 2; \dots; k + 1\}$  em  $s + 1$  subconjuntos com a restrição de necessariamente pelo menos um desses subconjuntos possuir um único elemento.

Isto quer dizer que quando acrescentamos o índice  $k + 1$ , temos duas possibilidades: ou o colocamos em um dos  $s$  subconjuntos anteriores e ou criamos um conjunto cujo o único elemento é  $k + 1$ . Isto então nos dá todas as possíveis maneiras de dividir os índices  $\{1; 2; \dots; k + 1\}$  em  $s^0$  partições. Temos

$$D^{k+1}(f \pm g)(z) = \sum_{\substack{\mathcal{J}=(\mathcal{J}_1; \dots; \mathcal{J}_{s^0}) \\ j=1}} \left( \prod_{j=1}^{s^0} D^{|\mathcal{J}_j|} g \right) f^{(s^0)} \pm g,$$



de tal forma que  $\sum_{i=1}^n j^i = k + 1$ .

Analogamente ao que fizemos para o caso dos coeficientes  $t_n$ , denotando por  $k_j$  o número de conjuntos  $\mathcal{A}_j$  da partição  $\mathcal{A}$  tal que  $j^i = j$ ; escrevemos

$$D^n(f \pm g) = \sum_{k_1, \dots, k_n} \frac{n!}{k_1! \dots k_n!} \prod_{j=1}^n \frac{D^j g^{k_j}}{j!} f^{(\mathbf{P}_{k_j})} \pm g,$$

onde a soma é sobre todos os inteiros  $k_j \geq 0, j = 1, \dots, n$ , tais que  $\sum_{j=1}^n j k_j = n$ .

Sendo as funções  $f$  e  $g$  dadas, respectivamente, por  $\log z$  e  $W(z)$ , onde  $W(z)$  é a função geratriz definida em (2.24), encontramos

$$(f^s \pm g)(z) = (z-1)^{s-1} \frac{(s-1)!}{W^s(z)};$$

Como  $W(0) = 1$ , temos

$$(f^s \pm g)(0) = (z-1)^{s-1} (s-1)!;$$

De (2.24) vem que  $D^{(j)}W(0) = w_j$ , e disto tiramos

$$\frac{1}{n!} (D^n(\log W(z)))_{z=0} = \sum_{\substack{k_1, \dots, k_n \\ \sum j k_j = n}} (z-1)^{\sum_{j=1}^n k_j - 1} \frac{(\sum_{j=1}^n k_j - 1)!}{k_1! \dots k_n!} \frac{w_1^{k_1}}{1!} \dots \frac{w_n^{k_n}}{n!}.$$

Comparando então as equações (5.40) e (2.24) obtemos

$$T(z) = \log W(z)$$

o que demonstra o teorema 2.2

■

## Demonstração da fórmula para a densidade de estados.

Desmembrando a equação (2.18) escrevemos

$$\begin{aligned} \rho_{ij} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dx dy h_{2i}(y) h_{2j}(x) h_{2i}(x) h_{2j}(y) \rho(x) \\ &+ \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dx dy h_{2i}(y) h_{2j}(x) h_{2i}(x) h_{2j}(y) \rho(x) \\ &+ \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dx dy h_{2i}(y) h_{2j}(x) h_{2i}(x) h_{2j}(y) \rho(y) \\ &+ \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 dx dy h_{2i}(y) h_{2j}(x) h_{2i}(x) h_{2j}(y) \rho(y) + F^{(2)} \end{aligned}$$

Dessa forma podemos calcular

$$\begin{aligned} \frac{\pm^{\circ} ij}{\pm^{\circ} \text{®}=0} &= i \frac{1}{2} \int_0^z {}_{2i}^{(x)} \int_0^z {}_{2i}^{(y)} + \frac{1}{4} \int_0^z {}_{2i}^{(x)} \int_0^z {}_{2i}^{(y)} dy \int_0^z {}_{2i}^{(x)} dx \\ &+ \frac{1}{4} \int_0^z {}_{2i}^{(y)} \int_0^z {}_{2i}^{(x)} dx \int_0^z {}_{2i}^{(y)} dy \end{aligned}$$

Observando que

$$\int_0^z {}_{2i}^{(y)} dy \int_0^z {}_{2i}^{(y)} dy = 2 \int_0^z {}_{2i}^{(y)} dy$$

podemos concluir que

$$\frac{3}{4} {}_{2m}^{(s)} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{4} \int_0^z {}_{2i}^{(s)} \int_0^z {}_{2i}^{(y)} dy + \int_0^z {}_{2m}^{(y)} dy \quad (5.43)$$

Para as funções  ${}_{2i}^{(x)}$  sabemos ser válida a relação de recorrência

$$p_{2i}^{(s)} = p_{2i-1}^{(s)} \int_0^z {}_{2i-1}^{(x)} + p_{2i+1}^{(s)} \int_0^z {}_{2i+1}^{(x)} \quad (5.44)$$

Integrando essa equação de 0 a  $z$ , nós obtemos

$$p_{2i+1}^{(s)} \int_0^z {}_{2i}^{(x)} dx = p_{2i-1}^{(s)} \int_0^z {}_{2i-1}^{(z)} + p_{2i+1}^{(s)} \int_0^z {}_{2i+2}^{(x)} dx \quad (5.45)$$

Dessa (5.43) e (5.45) podemos escrever

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m-1} \int_0^z {}_{2i}^{(s)} \int_0^z {}_{2i}^{(y)} dy &= \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{2} p_{2i-1}^{(s)} \int_0^z {}_{2i-1}^{(z)} \int_0^z {}_{2i}^{(y)} dy \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{2} p_{2i-1}^{(s)} \int_0^z {}_{2i}^{(y)} dy + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{2} p_{2i+1}^{(s)} \int_0^z {}_{2i+2}^{(y)} dy \end{aligned}$$

Agora notemos que o termo  $i_p$  da terceira soma é sempre cancelado pelo termo  $i_p + 1$  da primeira soma. Dessa forma, após todos os cancelamentos, resta apenas o último termo da terceira soma, que é o correspondente a  $i = m_j - 1$ . Logo,

$$\sum_{i=1}^{m-1} \int_0^z {}_{2i}^{(s)} \int_0^z {}_{2i}^{(y)} dy = \sum_{i=1}^{m-1} \int_0^z {}_{2i+1}^{(s)} \int_0^z {}_{2i}^{(y)} dy + \frac{1}{2} p_{2m-1}^{(s)} \int_0^z {}_{2m}^{(y)} dy \quad (5.46)$$

Substituindo (5.46) em (5.43) obtemos

$$\frac{3}{4} {}_{2m}^{(s)} = \sum_{i=1}^{m-1} \int_0^z {}_{2i}^{(s)} + \frac{1}{2} p_{2m-1}^{(s)} \int_0^z {}_{2m}^{(y)} dy$$

# Apêndice C

## Definições importantes em Probabilidade, Desigualdade de Chebyshev e o Lema de Borel Cantelli.

Definições importantes sobre convergência de variáveis aleatórias.

Definição C.1: Seja  $Y_1; Y_2; \dots$ , uma sequência de variáveis aleatórias. Dizemos que  $Y_n$  converge em probabilidade para a variável aleatória  $Y$  ( $Y_n \xrightarrow{p} Y$ ), se para todo  $\epsilon > 0$ :

$$P(|Y_n - Y| > \epsilon) \rightarrow 0$$

quando  $n \rightarrow \infty$ :

Esta não é o tipo de convergência mais forte em teoria de Probabilidades. O sentido de convergência mais forte está ligado a Teoria da Medida e é chamada Convergência com probabilidade 1.

Definição C.2: Seja  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  um espaço de probabilidade e  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  uma sequência de eventos. Nós definimos

1-

$$\begin{aligned} \limsup A_n &= \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \\ &= \{ \omega \in \Omega : \omega \text{ ocorre em um número infinito de } A_n \text{sg} \} \end{aligned}$$

2-

$$\begin{aligned} \liminf A_n &= \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n \\ &= \{ \omega \in \Omega : \omega \text{ ocorre em um número finito de } A_n \text{sg} \} \end{aligned}$$

obs:

Note que  $E_m = \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$  é uma sequência decrescente de eventos, e  $\bigcup_{n=m}^{\infty} A_n$  é uma sequência crescente. Não é difícil perceber que se  $w \in \limsup A_n$ ,  $w$  deve estar em  $A_n$  para infinitos  $n$  distintos e que se  $w \in \liminf A_n$  então  $w$  deve estar em  $A_n$  para todos  $n$ 's exceto possivelmente para um número finito de  $n$ 's.

**Definição C.3:** Dizemos que uma sequência de variáveis aleatórias  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  converge com probabilidade 1 ou quase certamente para 0 ( $X_n \xrightarrow{p.c.} 0$ ) se e somente se para todo  $\epsilon > 0$ ,

$$P(\limsup |X_n| > \epsilon) = 0$$

Esta definição quer dizer em outras palavras que a menos de um conjunto de medida nula,  $X_n \rightarrow 0$ .

Um fato importante é que convergência em probabilidade de uma sequência de variáveis aleatórias  $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$  não implica em convergência quase certamente, isto só será verdade somente quando o espaço amostral - for um conjunto contável como por exemplo -  $\Omega = \mathbb{Q}$ .

Já a convergência quase certamente implica em convergência em probabilidade sempre.

## Desigualdade de Chebyshev

**Lema C.1 (Desigualdade de Chebychev)** Seja  $X$  uma variável aleatória, então

$$P(|X - \mu| \geq a) \leq \frac{1}{a^2} E[(X - \mu)^2];$$

**Demonstração** (Totalmente baseado em [15])

Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função positiva ( $g \geq 0$ ) e seja

$$I_\epsilon = \{x : |x - \mu| \geq \epsilon\};$$

Então temos que

$$I_\epsilon P(X \in I_\epsilon) \leq \int_{I_\epsilon} g(x) dF(x) \leq E[g(X)]; \quad (5.47)$$

onde

$$P(X \geq I) = \int_I^{\infty} dF(x)$$

Tomando  $I = [a; \infty)$  e  $g(x) = x^2$  em (5.47), obtemos

$$a^2 P(X \geq a) = E[X^2]$$

■

## Uma condição para a convergência com probabilidade 1

**Lema C.2 (Lema de Borel Cantelli):** *Seja  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  uma seqüência de eventos tal que  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ . Então*

$$P(\limsup A_n) = 0:$$

**Prova:** (Totalmente baseado em [15])

Seja  $E_m = \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$  de forma que  $E = \liminf_{m \rightarrow \infty} E_m = \limsup_{m \rightarrow \infty} A_n$ . Inicialmente verificaremos a seguinte expressão

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P(E_m) = P(E) \quad (5.48)$$

Como  $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$  é uma seqüência de eventos decrescentes,  $\{E_n^c\}_{n=1}^{\infty}$  forma uma seqüência de eventos crescentes pois, em vista da lei de Morgan,  $E_m^c = \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n^c$ . Definindo  $K_m = E_m^c \cap E_{m-1}^c$ ,  $m = 2, 3, \dots$ ; com  $K_1 = E_1^c$ , como uma seqüência de eventos disjuntos notamos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = E^c = \liminf_{n \rightarrow \infty} E_n^c$$

Devido a monotonicidade da seqüência  $\{E_n^c\}_{n=1}^{\infty}$ , e da própria definição de medida de probabilidade  $P$ , temos

$$\begin{aligned} P(E^c) &= P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} K_m\right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} P(K_m) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^n P(K_m) \end{aligned}$$

Quando  $B \subset A$ ,  $A = (A \setminus B) \cup B$ , e obviamente é uma união disjunta então  $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$ , desta forma nós podemos escrever que

$$\begin{aligned} P(E^c) &= P(E_1^c) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=2}^n P(E_m^c) - P(E_{m-1}^c) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [P(E_1^c) + P(E_2^c) - P(E_1^c) + P(E_3^c) - P(E_2^c) + \dots + P(E_n^c) - P(E_{n-1}^c)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n^c) \end{aligned}$$

Então disso nós podemos concluir que:

$$P(E) = 1 - P(E^c) = \lim_{n \rightarrow \infty} [1 - P(E_n^c)] = \lim_{n \rightarrow \infty} P(E_n)$$

e isto mostra a equação (5.48).

Mas nós sabemos que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \cdot P(A) + P(B)$$

é válido para quaisquer dois eventos A e B, e então

$$P(E_m) = \sum_{n=1}^m P(A_n) \tag{5.49}$$

Combinando as equações (5.48) e (5.49), obtemos

$$P(\limsup A_n) = P(E) = \lim_{m \rightarrow \infty} P(E_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m P(A_n)$$

Mas pelo fato de  $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$ , temos que  $\sum_{n=1}^m P(A_n) \rightarrow 0$ , então

$$P(\limsup A_n) = 0$$

■

# Referências

[1] M.L.Metha, *Random Matrices and the Statistical Theory of Energy Levels*, Academic Press, New York, 1967.

[2] P.W.Kasteleyn; *Graph Theory and Crystal Physics*, capítulo 2 de *Graph Theory and Theoretical Physics*, Academic Press, New York, 1967.

[3] E.Wigner, *Characteristic Vectors of Bordered Matrices with Infinite Dimensions*, *Ann. of Mathematics*, vol. 62, N. 3, 1955.

[4] Ya. Sinai and A. Sochnikov, *Central Limit Theorem for traces of Large Random Symmetric Matrices with Independent Matrix Elements* (preprint)

[5] R.Durrett, *Probability: Theory and examples*, second edition, Duxbury Press 1996.

[6] D. Fox and P.Kahn, *Phys. Review*, vol. 134, nº 5P, pág B1151.

[7] E. Wigner, *On the Distribution of The Roots of Certain Symmetric Matrices*, *Annals of Mathematics*, Vol.67, No.2 (1958).

[8] F.J.Dyson, *Statistical Theory of the Energy Levels of complex Systems I*, *J.Math.Phys* Vol.3 N<sup>o</sup>1: 140 156 (1962)

[9] O. Costin and J. Lebowitz, *Gaussian fluctuations in random matrices*, *Phys. Rev. Lett.* 75 (1995), 69-72.

---

[10] D.H.U.Marchetti e O.Bolina, *The Falicov-Kimball Model with Long-Range Hopping Matrices*, (Submetido à publicação).

[11] J.C.A.Barata e D.H.U.Marchetti, *Griffiths Singularities in Diluted Ising Models on Cayley Tree*, Journ.Stat.Phys, Vol.87, 877-889, (1997).

[12] F.J.Dyson, *Statistical Theory of the Energy Levels of Complex Systems. III*, J. Math. Phys Vol.3 N<sup>o</sup>1: 166 175 (1962).

[13] H. Bateman, *Higher Transcendental Functions*, Vol 2. McGraw-Hill, New York, 1953.

[14] D.H.U.Marchetti; *Renormalization Group in Statistical Mechanics: Ideas, Techniques and Analises'*, Notas de Aula, IFUSP (1996)

[15]- D.H.U.Marchetti, *Notas de Aula do curso de Física Matemática III*, ministrado em 1997.

[16]- P.Lancaster and Miron Tismenetsky, *The Theory of Matrices*, second edition, with applications, Academic Press(1985).

[17]- E. Kreyszig, *Introductory Funcional Analysis with Applications*, John Wiley (1989).

[18]- W.Feller, *Introdução à Teoria das Probabilidades e sua Aplicações*, Vol 1, Edgard Blucher Ltda(1970).

[19]- C.M.Fortuin, P.W.Kasteleyn and J.Ginibre, *Correlacion Inequalities on Some Partyally Ordered Sets*, Commun. Math. Phys, vol 22(1971), 89-103.

[20]- Porter, C.E., and N. Rosenzweig, Ann. Acad. Sci. Fennicae: Ser.A VI, N<sub>o</sub>:44 (1960).



---

[21] Ed. Charles E. Porter, *Statistical Theories of Spectra Fluctuations*, Academic Press, New York (1965).

[22] F.G. Tricomi, *Sul comportamento asintotico dei polinomi di Laguerre*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 28 (1949), 263-289.

[23] F.J. Dyson, *A Brownian-Motion Model for the Eigenvalues of a Random Matrix*, J. Math. Phys. Vol. 3, N° 6: 1191-1198 (1962).

[24] Uhlenbeck, G.E., and L.S. Ornstein, *The Theory of Brownian Motion I*, Phys. Rev. 36, 823 (1930).

[25] W.F. Wreszinski, *Mecânica Clássica Moderna*, Edusp, São Paulo, 1997.

[26] David C. Brydges and P.A. Martin, *Coulomb Systems at low density* (não publicado).

[27] E. Wigner, Ann. of Mathematics 53, 36 (1951); 65, 203 (1957)

[28] A. Alastuey e P.J. Forrester, Journ. Stat. Phys. 81, 579 (1995)

[30] G. Oas, *Universal Cubic eigenvalue repulsion for random normal matrices*, Phys. Rev. 55, 205 (1997)

[31] J. Ginibre, *Statistical Ensembles of Complex, Quaternion, and Real Matrices*, Journ. Math. Phys. Vol. 6, N.º 3, 440-449 (1965).

[32] E. P. Wigner, *Group Theory*, Academic, New York, 1959.

[33] H. J. Landau, H. Widom, *Eigenvalue Distribution of Time and Frequency Limiting*, Journal of Mathematical

[34]- E. Brézin and A. Zee, *Universality of the Correlations Between Eigenvalues of Large Random Matrices*, Nuclear Physics B402 (1993) 613 - 627.