

Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Bursts temporalmente correlacionados no Texas Helimak

David Tae Young Chang

Orientador: Prof. Dr. Zwinglio de Oliveira Guimarães Filho



Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Zwinglio de Oliveira Guimarães Filho - Orientador (IFUSP)

Prof. Dr. Camilo Rodrigues Neto (EACH/USP)

Prof. Dr. Antonio Marcos Batista (UEPG)

São Paulo
2024

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Chang, David Tae Young

Bursts temporalmente correlacionados no Texas Helimak. São Paulo, 2024.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo, Instituto de Física. Depto. de Física Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Zwinglio de Oliveira Guimarães Filho.
Área de Concentração: Física de Plasmas.

Unitermos: 1. Física de Plasmas; 2. Tokamaks; 3. Turbulência eletrostática.

USP/IF/SBI-032/2024

University of São Paulo
Physics Institute

Time Correlated Bursts in the Texas Helimak

David Tae Young Chang

Supervisor: Prof. Dr. Zwinglio de Oliveira Guimarães Filho

Dissertation submitted to the Physics Institute of the University of Sao Paulo in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science.

Examining Committee:

Prof. Dr. Zwinglio de Oliveira Guimarães Filho - Supervisor (IFUSP)

Prof. Dr. Camilo Rodrigues Neto (EACH/USP)

Prof. Dr. Antonio Marcos Batista (UEPG)

São Paulo
2024

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família e aos meus amigos por pelo todo o apoio durante a realização deste trabalho.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Zwinglio de Oliveira Guimarães Filho e a todos que contribuíram de alguma forma para a realização deste trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil

"Viva la vida"
Coldplay

RESUMO

A turbulência em plasmas confinados magneticamente apresentam certas propriedades universais com a presença de estruturas coerentes de alta densidade, genericamente denominadas de *bursts*. Essas estruturas se propagam de forma convectiva e, portanto, têm um impacto relevante sobre o confinamento. Esta dissertação busca estudar o regime de correlação temporal entre *bursts* que foi observado em um conjunto de descargas no Texas Helimak com objetivo de avaliar a reprodutibilidade deste fenômeno e sua descrição fenomenológica baseada em simulações pelo modelo de Trem de Pulsos (*Stochastic Pulse Train Model*) alterado para considerar a correlação temporal entre *bursts*. É adotado que a PDF do intervalo de tempo entre *bursts* segue uma distribuição gama com parâmetro de forma, k , e de escala, s , que se relacionam com o intervalo de tempo entre pulsos sucessivos, τ , por $\bar{\tau} = ks$ com variância $V_{\tau} = ks^2$. A fim de achar uma estimativa para k , foi utilizada uma equação desenvolvida no artigo de referência (PEREIRA *et al.*, 2019) para o ajuste do histograma do intervalo de tempo entre *bursts* sucessivos. Entretanto, foi observado que a equação do modelo proposto era incompleta e que isso levava a resultados tendenciosos. Com o objetivo de melhorar a estimativa do valor de k , um processo de ajuste em duas etapas foi desenvolvida neste trabalho e, com isso, foi possível reproduzir alguns resultados do artigo de referência.

Palavras-chave: Física de Plasmas; Tokamaks; Turbulência eletrostática.

ABSTRACT

Turbulence in magnetically confined plasmas exhibits certain universal properties with the presence of coherent high-density structures, generically called bursts. These structures propagate convectively and, therefore, have a relevant impact on confinement. This dissertation seeks to study the time correlated bursts regime observed in a set of shots in the Texas Helimak and the main goal is to evaluate the repeatability of this phenomenon and its phenomenological description based on simulations with Stochastic Pulse Train Model (SPTM) modified to consider the correlation in time between bursts. It is stated that PDF of time interval between main bursts follows a gamma distribution with parameter of shape, k , and scale, s , which relate to the time interval between successive pulses, τ , by $\bar{\tau} = ks$ with variance $V_{\tau} = ks^2$. In order to find an estimation of the value k , an equation developed in reference article (PEREIRA *et al.*, 2019) has been used in a non-linear fit on the histogram of time interval between successive bursts. But it's been observed that the model of equation is not completed which leads to biased results. As a mean to better estimate the k value, a fitting process with two steps was developed in this work and it was able to reproduce some results found in the reference article.

Keywords: Plasma physics; Tokamaks; Electrostatic turbulence.

SUMÁRIO

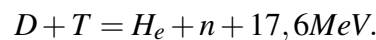
1	INTRODUÇÃO	6
1.1	Energia de fusão	6
1.2	Confinamento magnético de plasmas	6
1.2.1	<i>Plasmas</i>	6
1.2.2	<i>Confinamento magnético</i>	8
1.3	Texas Helimak	10
1.4	Sondas de Langmuir	11
1.5	Transporte turbulento	13
2	MÉTODOS DE ANÁLISE	14
2.1	Função Densidade de Probabilidade	14
2.2	Transformada de Fourier e densidade do espectro de potência	15
2.3	Chi-quadrado	18
3	MEDIÇÕES DA FLUTUAÇÃO DE DENSIDADE NO HELIMAK . . .	19
3.1	Média Condicional dos <i>bursts</i>	19
3.2	Características gerais da flutuação de densidade com bias positivo . . .	21
4	MODELO	27
4.1	Modelo do Trem de Pulso	27
4.2	Modelo com <i>burst</i> temporalmente correlacionado	28
4.2.1	<i>Média condicional com pulsos com tempos de ocorrência correlacionados</i>	35
4.3	Equação do ajuste do intervalo de tempo entre <i>bursts</i> temporalmente correlacionados	36
5	RESULTADOS	40
5.1	Análise de descargas de plasma com gás Hélio	40
5.2	Análise de descargas de plasma com gás Argônio	47
5.3	Discussões	52
6	CONCLUSÃO	55
	REFERÊNCIAS	57
	APÊNDICE A – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE DO INTERVALO DE TEMPO ENTRE BURSTS .	59

1 INTRODUÇÃO

1.1 Energia de fusão

Ao longo das últimas décadas, a demanda por energia mundial vem crescendo rapidamente, sendo em boa parte suprida pelos recursos não renováveis. Cerca de 80% da produção energética mundial é a partir de combustíveis fósseis (RITCHIE; ROSADO; ROSER, 2020), além de serem um dos grandes agentes contribuidores para o aquecimento global, é previsto que tais recursos não durarão por muito tempo. Assim é de suma importância a busca por produção de energia alternativa renovável, como, por exemplo, a energia eólica, solar, hidráulica, etc.

Dentre as alternativas da produção, a fusão nuclear é um dos destaques com um grande potencial de produção de energia futuramente, com a promessa de ser uma fonte limpa e segura com grande abundância de recurso para o seu funcionamento, no entanto, tal tecnologia ainda se encontra na fase de desenvolvimento. A fusão consiste em combinar dois átomos leves para formar um mais pesado, sendo que neste processo é liberado energia devido à diferença entre as massas de repouso dos constituintes da reação antes e depois da fusão. O processo da fusão em reatores é mais simplificada ao utilizar Deutério D e Trítio, T , para formar um átomo de Hélio, He , e um nêutron, n , com liberação de cerca de 17,6 MeV de energia. Este processo pode ser representado por:



A energia liberada surge da conservação de massa, isto é, uma parte da massa do sistema é convertida em energia cinética durante a fusão entre os dois elementos, seguindo o princípio de que $E = mc^2$ formulada pelo Einstein. Esta energia é distribuída entre os dois produtos da reação, sendo que o nêutron, carregado com 14.1 MeV, será utilizado para a geração de energia a ser extraída do reator de fusão, enquanto o Hélio será um agente que irá contribuir para o aquecimento do plasma (MAGAUD; MARBACH; COOK, 2004).

Para se conseguir uma produção líquida positiva de energia por meio da fusão nuclear é necessário manter o confinamento dos átomos reagentes em temperaturas bastante elevadas por um longo período de tempo. Para isso, é utilizado o campo magnético para o confinamento dos átomos para a realização da fusão, e esta tecnologia vem sendo desenvolvida desde meados do século XX (ITER, 2024).

1.2 Confinamento magnético de plasmas

1.2.1 Plasmas

Quando um gás é suficientemente aquecido, parte das partículas que o compõem acabam sendo ionizados, no entanto, esse não é o único critério para distinguir um gás de um plasma, uma vez que, em geral, os gases apresentam pelo menos um pequeno grau de ionização.

Assim, a definição de plasma pode ser dada como a quasi-neutralidade de um gás ionizado e que possui um comportamento coletivo (CHEN, 2015). O comportamento coletivo em plasma é gerada por conta da presença de campos eletromagnéticos produzidas pelos íons e elétrons livres que acabam influenciando no comportamento das outras partículas do sistema. Para entender o significado da quasi-neutralidade, primeiramente deve-se entender o conceito do comprimento de Debye,

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{n_e e^2}}, \quad (1.1)$$

lembrando que ϵ_0 significa a permissividade do vácuo, k_B a constante de Boltzmann, T temperatura em Kelvin, n_e a densidade de elétrons e e a carga do elétron.

O comprimento de Debye pode ser entendida como parâmetro de escala de comprimento da influência do campo elétrico gerado por uma partícula carregada dentro do plasma. Assim, as partículas carregadas livres se locomovem para regiões com uma concentração maior de cargas opostas, de modo que acabam blindando o campo elétrico nas distâncias que estejam dentro da ordem de magnitude do comprimento de Debye. Em outras palavras, as partículas se interagem por meio do campo eletrostático dentro do comprimento de Debye, no entanto, o efeito de distribuições de carga vindas de fora do tal comprimento possuem uma influência desprezível sobre os íons e elétrons, tal efeito é denominado de blindagem de Debye e isso é caracterizado como uma consequência do comportamento coletivo (BITTENCOURT, 2010). Assim, a quasi-neutralidade pode ser entendida como se para escalas maiores do que o comprimento de Debye, o plasma se comporta como se fosse um gás neutro.

Por conveniência, é definida a esfera de Debye como uma região esférica com raio de λ_D dentro do plasma, assim as partículas dentro da esfera interagem por meio do campo eletrostático criado nesta região sem alterações significativas vindas de fora da esfera por conta da blindagem. A quantidade de partículas encontradas dentro da esfera é dada por:

$$N_D = \frac{4\pi\lambda_D^3 n_e}{3}. \quad (1.2)$$

Logo, a quantidade de partículas dentro da esfera de Debye deve ser significadamente alta, uma vez que a blindagem de Debye é formada por conta do comportamento coletivo de várias partículas, portanto, para ser considerado plasma, a condição $N_D \gg 1$ deve ser satisfeita. Além dos critérios já mencionados para ser considerado plasma, é necessário também averiguar se a condição $\omega_{pe} \tau > 1$ também é satisfeita, onde τ é o intervalo de tempo médio de colisão entre as partículas carregadas e os átomos neutros, e ω_{pe} é a frequência da oscilação do plasma dada por:

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}}. \quad (1.3)$$

Tal condição implica que o τ deve ser consideravelmente maior do que ω_{pe} para que se comporte como plasma ao invés de um gás neutro.

Em suma, para ser considerado como plasma, deve-se satisfazer os seguintes critérios (CHEN, 2015):

1. A escala do sistema do plasma deve ser muito maior do que o comprimento de Debye ($L \gg \lambda_D$)
2. A quantidade de partículas dentro da esfera de Debye deve ser muito maior do que 1 ($N_D \gg 1$)
3. O intervalo de tempo médio da colisão entre partículas carregadas e átomos neutros deve ser consideravelmente maior do que a frequência da oscilação do plasma ($\omega_{pe} \tau > 1$)

1.2.2 Confinamento magnético

Para obter energia a partir da fusão nuclear, é estimado que a temperatura do plasma deve chegar na ordem de 10^8 K (CHEN, 2011), o que é uma temperatura extremamente elevada que pode acarretar danos ao material da máquina caso não haja devidos cuidados. Para isso o plasma é confinado utilizando campos magnéticos que fazem com que a partícula acelere conforme a força de Lorentz:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (1.4)$$

Considerando que haja apenas campo magnético, a velocidade perpendicular das partículas em relação à direção do campo magnético dá origem à força que aponta em direção à linha do campo magnético, o que acaba fazendo com que os íons e os elétrons realizem movimentos helicoidais ao longo da linha, acompanhando então o sentido da direção onde este campo se propaga, assim como ilustrado na Figura 1.

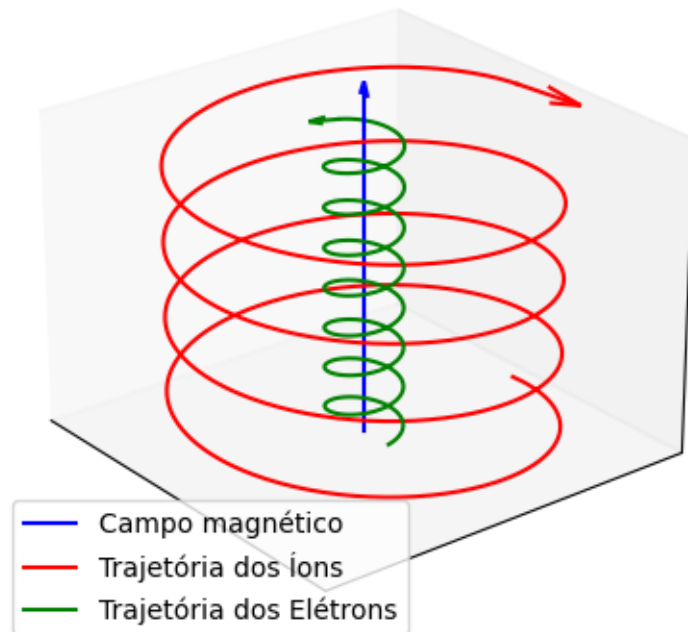


Figura 1 – Trajetória dos íons (vermelho) e dos elétrons (verde) sob influência de um campo magnético (azul).

Logo, uma vez que o plasma se locomove seguindo as linhas do campo magnético, surge a ideia da criação de máquinas toroidais que produzem o campo magnético que segue um formato de um toro, possibilitando assim a confinamento do plasma sem haver perda significativa de partículas e ter tempo suficiente para se ter ganho de energia por meio da fusão nuclear. Existem diversos modelos de máquinas que seguem o mesmo princípio de confinamento com configurações e complexidades diferentes, atualmente as mais utilizadas para o estudo da fusão nuclear, são os chamados tokamaks, cujo nome é de origem russa que tem como significado de "Câmara Toroidal com Bobinas Magnéticas", ilustrado na Figura 2.

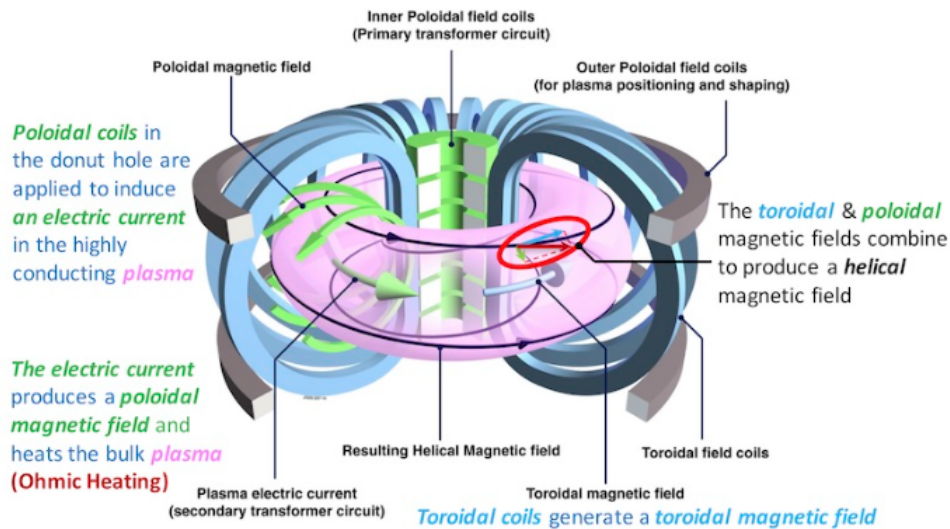


Figura 2 – Exemplo de um esquema de tokamak. Fonte: Plasma Control Laboratory.

No entanto, para este trabalho foi utilizado o Texas Helimak, que diferem dos tokamaks e estas diferenças serão explicadas na seção 1.3:

1.3 Texas Helimak

O Texas Helimak é uma máquina de confinamento magnético de plasma, que diferentemente dos tokamaks tradicionais, produz uma componente vertical do campo magnético além da componente toroidal, fazendo com que o plasma tenha uma trajetória helicoidal. Apesar das linhas do campo não serem fechadas, é possível desprezar os efeitos de borda, logo o equilíbrio do sistema depende apenas da coordenada radial e, desta forma, a máquina é utilizada para estudos de confinamento em plasmas por conta da sua simplificação na modelagem e simulações. Além disso, o equipamento trabalha com temperaturas e densidades baixas de partículas, possibilitando então o trabalho em estudos de turbulências que ocorrem nas regiões de borda e scrape-off layer em tokamaks.

O dispositivo é uma câmara toroidal de formato cilíndrico com altura de 2 m, raio interno de 0.6 m e raio externo de 1.6 m. Para a produção do campo toroidal, são usados 16 bobinas com 28 voltas cada, enquanto para o campo vertical são utilizados 3 bobinas, 2 com 126 voltas posicionadas na parte superior e inferior da máquina e a outra com 75 voltas posicionada na parte central da máquina (GENTLE; HE, 2008). As bobinas são acionadas pela corrente constante, I_{tot} , e pode ser controlada utilizando um *Silicon Controlled Rectifier* (SCR). A intensidade da componente magnético vertical (VF, de *Vertical Field*) pode ser alterada ao variar a resistência do resistor que está acoplada em série com as bobinas responsáveis pelo VF. Finalmente, o plasma é produzido por meio do *Electron Cyclotron Resonance Heating* (ECRH), na frequência de 2,45 GHz, assim somente os elétrons são aquecidos e os íons acabam mantendo em temperaturas baixas.

Por conta da baixa temperatura dos íons no plasma, é possível trabalhar com maior intervalo de tempo do diagnóstico dos dados obtidos pelas sondas Langmuir, espalhadas pelas placas encontradas no interior do Helimak conforme ilustrado na Figura 3.

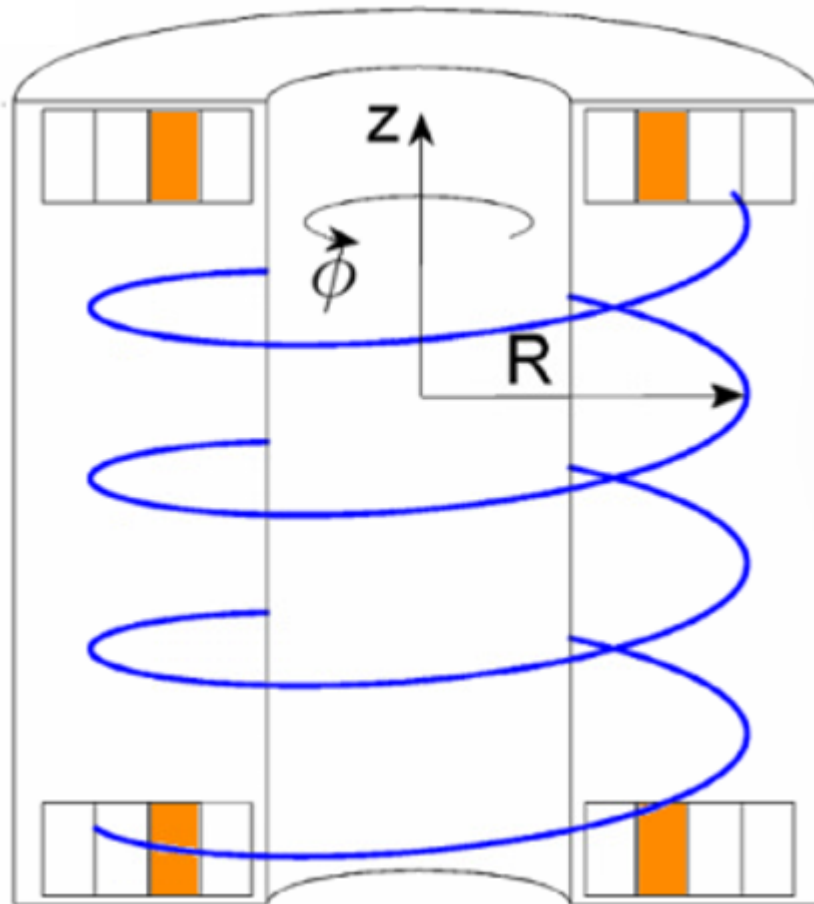


Figura 3 – Esquema do Helimak. Fonte : (PEREIRA *et al.*, 2019).

Além dessas placas conterem as sondas, elas também são utilizadas para gerar potencial elétrico que atuam sobre o plasma, que neste trabalho será chamado de *Bias*. O *Bias* é aplicado em uma das placas de cada conjunto, indicado pela cor laranja na Figura 3, enquanto o resto se mantém aterrado. Esta imposição tem como o objetivo de alterar o perfil radial do campo elétrico e ela pode variar tanto para valores negativos quanto para valores positivos.

1.4 Sondagens de Langmuir

As sondas de Langmuir são eletrodos utilizados para se medir a temperatura e a densidade do plasma (STANGEBY *et al.*, 2000). Quando estão inseridas no meio, elas acabam acumulando rapidamente os elétrons ao seu redor uma vez que estas partículas são mais leves que os íons, de forma que o potencial gerado fique negativo, logo os elétrons começam a ser

afastados e os íons atraídos para a sonda até o momento em que ambas as partículas começam a colidir na sonda com a mesma taxa. Este equilíbrio é chamado de "floating potential" ϕ_w e a sua corrente medida é nula.

Quando é aplicado um potencial negativo sobre a sonda, os elétrons começam a ser repelidos da sonda até o ponto em que a sua contribuição na medida passa a ser desprezível, restando apenas a interação dos íons. Assim, a corrente medida na sonda se aproxima a uma outra constante, denominada de densidade de corrente de saturação iônica J_i . O mesmo vale quando o potencial aplicado é positivo, mas ao invés do elétron ser repelido é o íon, logo a corrente medida na sonda chega a um outro limite chamada de densidade de corrente de saturação eletrônica J_{e0} , como ilustrado na Figura 4

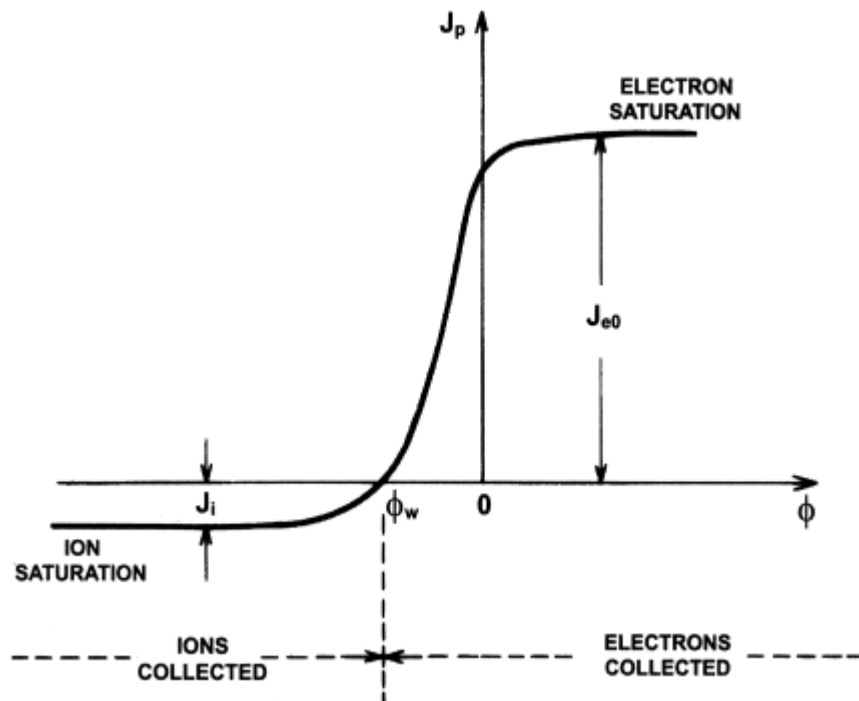


Figura 4 – Curva densidade de corrente de saturação da sonda de Langmuir. Fonte (BITTENCOURT, 2010).

A corrente de saturação de íons é então definida como,

$$I_{sat} \equiv -AJ_i, \quad (1.5)$$

onde o A é a área do pino da sonda.

A corrente I_{sat} também pode ser dada como,

$$I_{sat} = 0.5Aen_0 \sqrt{k_B \frac{T_i + T_e}{m_i}}. \quad (1.6)$$

No entanto, como o Helimak trabalha com a temperatura iônica muito mais baixa do que a dos elétrons, é possível desprezar o termo T_i , logo é possível concluir que o I_{sat} mede a densidade

de partículas no plasma dependente apenas da temperatura eletrônica:

$$I_{sat} \propto n_0 \sqrt{T_e}. \quad (1.7)$$

A temperatura eletrônica pode ser estimada utilizando técnicas discutidas no (HERNANDEZ *et al.*, 2019)). Para o presente trabalho, os valores do I_{sat} são utilizados para analisar a turbulência do plasma.

1.5 Transporte turbulento

Nos primeiros modelos teóricos para descrever o transporte de partículas em confinamento de plasmas são considerados que a principal causa para o transporte é devido ao movimento das partículas por meio das colisões, no entanto, a difusão encontrada nos experimentos era muito maior do que o previsto por esses modelos. Esta diferença é então chamada transporte anômalo (WOOTTON *et al.*, 1990), e tal transporte é causado por efeitos turbulentos associados às flutuações coerentes nas densidades de partículas, na temperatura e no campo eletromagnético (KRASHENINNIKOV; SMOLYAKOV; KUKUSHKIN, 2020).

É possível observar um dos efeitos do transporte turbulento ao observar picos de densidade encontrada nos dados obtidos pela sonda Langmuir ao longo do tempo do experimento. Quando a amplitude do pico supera o limiar, definida pela soma da média com uma certa quantidade de desvios padrões dos dados, isto é, $\Theta = \langle I_{sat} \rangle + n\sigma_{I_{sat}}$, onde o valor do n é geralmente adotado com valor de 2.0, 2.5 ou 3, o pico é usualmente denominado de *burst*. Este fenômeno é encontrado em diversas máquinas tais como KSTAR (GARCIA *et al.*, 2017), TCABR (ZURITA *et al.*, 2022), Alcator C-mod (GARCIA *et al.*, 2018), etc. O que demonstra que a sua ocorrência é universal em máquinas de confinamento magnético (ANTAR *et al.*, 2003), logo como tal fenômeno é um dos principais causadores da perda de partículas do sistema, o estudo sobre eles se mostra necessário para se conseguir aperfeiçoar o confinamento magnético do plasma.

Para isso, nos últimos anos tem-se desenvolvido um modelo que descreve algumas características dos *bursts* chamada de Stochastic Pulse Train Model (SPTM) (GARCIA *et al.*, 2016), cuja versão mais comum considera que a ocorrência dos *bursts* seja aleatório, ou seja, não há correlação entre os tempos de ocorrência de *bursts*, no entanto, em um recente estudo foi observado que ao ser aplicado um bias positivo durante os disparos no Texas Helimak, o regime passa a ter um certo grau de correlação temporal entre os *bursts* (PEREIRA *et al.*, 2019).

Logo, o objetivo do trabalho é confirmar essas observações, estendendo o conjunto de dados analisados para descargas em campanhas experimentais diferentes com a máquina em configurações distintas, a fim de avaliar a reprodutibilidade dos achados do trabalho de referência (PEREIRA *et al.*, 2019).

2 MÉTODOS DE ANÁLISE

2.1 Função Densidade de Probabilidade

Se a variável da amostra for contínua, a probabilidade de se encontrar o dado em um intervalo de valores em um espaço amostral pode ser dada utilizando a função densidade de probabilidade (PDF) da seguinte maneira:

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b p(x)dx. \quad (2.1)$$

Dado que a e $b \in \Omega$, sendo este o espaço amostral do experimento, $P(a \leq x \leq b)$ é a probabilidade de se encontrar a variável x dentro do intervalo $[a,b]$ e $p(x)$ a função densidade de probabilidade. A função deve ser normalizada ao considerar todos os valores possíveis, ou seja, $\forall x \in (-\infty, \infty), \int p(x)dx = 1$. No entanto, devido à impossibilidade de determinar todos os valores possíveis em um experimento, é convencionado a normalização considerando apenas o espaço amostral do experimento, assim

$$\int_{\Omega} p(x)dx = 1. \quad (2.2)$$

O valor esperado de uma grandeza por meio de uma função $f(x)$ é definida como

$$\langle f(x) \rangle \equiv \int_{\Omega} f(x)p(x)dx. \quad (2.3)$$

Ao substituir o $f(x)$ por x^n , onde $n \in \mathbb{N}$, passa a ser chamado de momento de ordem n da variável aleatória x , μ_n

$$\mu_n = \langle x^n \rangle = \int_{\Omega} x^n p(x)dx. \quad (2.4)$$

Note que quando $n = 1$, é definida o valor médio da função.

Ademais, quando $f(x)$ é substituído pela $(x - \mu_1)^n$, é denominado como o momento central de ordem n de uma variável aleatória x , μ'_n .

$$\mu'_n = \langle (x - \mu_1)^n \rangle = \int_{\Omega} (x - \mu_1)^n p(x)dx. \quad (2.5)$$

Assim, a variância é determinada como o momento central de segunda ordem. A sua interpretação estatística significa o quão espalhado os dados estão em relação a sua média.

$$\sigma_v^2 = \int_{\Omega} (x - \mu_1)^2 p(x)dx. \quad (2.6)$$

O desvio-padrão é definido como a raiz quadrada positiva da variância, $\sigma = \sqrt{\sigma_v^2}$. A covariância das variáveis aleatórias x e y é definida como

$$cov(x, y) = \langle (x - \langle x \rangle)(y - \langle y \rangle) \rangle. \quad (2.7)$$

Ao utilizar a definição dada pela equação 2.3, é possível reescrever a covariância da seguinte maneira,

$$cov(x, y) = \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle. \quad (2.8)$$

Note que se $\langle xy \rangle = \langle x \rangle \langle y \rangle$ a covariância é nula, o que significa que as variáveis x e y são independentes entre si. Assim, para verificar a dependência entre as duas variáveis, é útil definir um critério de correlação dada de forma a seguir

$$\text{corr}(x, y) = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (2.9)$$

Que é uma grandeza adimensional e todos os valores possíveis do coeficiente de correlação se encontram no intervalo entre -1 e 1. Quanto mais próximo o valor se encontra ao extremo, maior a sua força de correlação, ou seja, quando a correlação está próximo de 1, quando a variável x tende a crescer ou diminuir, a variável y tende a seguir o mesmo comportamento com variações proporcionais aos desvios-padrões de x e y , enquanto quanto mais próximo de -1, os dois tendem a variar de forma oposta.

No entanto, como os dados experimentais se encontram na forma discreta, é útil definir a sua média e sua variância na forma discreta, logo se um dado é medido N vezes,

$$\langle x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N x_i, \quad (2.10)$$

$$\sigma_v^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^N (x_i - \langle x \rangle)^2. \quad (2.11)$$

Outras duas propriedades importantes para a estatística são a assimetria e a curtose, elas são definidas a partir do terceiro e quarto momento normalizado respectivamente, ou seja,

$$S = \frac{\mu_3^3}{\sigma^3}, \quad K = \frac{\mu_4^4}{\sigma^4}. \quad (2.12)$$

A assimetria, mais conhecido como skewness, determina o quão assimétrico é a distribuição, quando S é positivo, a cauda da PDF é maior no lado direito em relação à moda, se for negativo, a cauda é maior no lado esquerdo, e se for nulo a PDF apresenta simetria.

Por fim, a curtose é muito influenciada pelos eventos extremos distantes da sua média, em outras palavras, ela reflete o formato da cauda da função. Outra característica importante para a curtose é de que ele sempre obedece a seguinte relação.

$$K \geq 1 + S^2. \quad (2.13)$$

Em geral, em flutuações turbulentas medidas em plasmas a curtose e a assimetria seguem a seguinte relação (THEODORSEN; GARCIA, 2018)

$$K \approx 3 + 1.5S^2. \quad (2.14)$$

2.2 Transformada de Fourier e densidade do espectro de potência

A transformada de Fourier é um processo de análise matemático que converte o domínio temporal em um espaço de frequências. Esta conversão é feita utilizando a seguinte definição

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.15)$$

E a sua inversa é dada por

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2.16)$$

Note que quando se trabalha com apenas domínio temporal positivo, o Fourier acaba se tornando um caso da transformada de Laplace, isto é

$$\hat{f}(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}(f). \quad (2.17)$$

Uma propriedade interessante da transformada na teoria da probabilidade é ao ser aplicado em uma convolução entre duas PDFs, o seu resultado se dá pela multiplicação das transformadas das PDFs, isto é.

$$\mathcal{L}(F * G) = \mathcal{L}(F)\mathcal{L}(G).$$

Onde $F * G$ significa a convolução entre dois PDFs cuja definição pode ser dada como

$$(F * G)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t - \tau)G(\tau) d\tau. \quad (2.18)$$

Tal propriedade pode ser facilmente verificada. Considerando um conjunto de dados cujo domínio temporal seja positivo, os limites da integral da convolução será de 0 e ∞ , aplicando a transformada de Laplace é obtido

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(F * G) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F(t - \tau)G(\tau) e^{-st} d\tau dt \\ &= \int_0^{\infty} G(\tau) d\tau \int_0^{\infty} F(t - \tau) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} G(\tau) d\tau \int_0^{\infty} F(u) e^{-s(u+\tau)} du \\ &= \int_0^{\infty} G(\tau) e^{-s\tau} d\tau \int_0^{\infty} F(u) e^{-su} du \\ &= \mathcal{L}(F)\mathcal{L}(G). \end{aligned}$$

Onde foi feita a substituição $u = t - \tau$.

Em geral, os dados experimentais são encontrados de forma discreta, portanto é necessário definir a transformada discreta de Fourier e a sua inversa como:

$$\hat{f}_j = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-\frac{i2\pi jn}{N}}, \quad (2.19)$$

$$f_n = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{f}_j e^{\frac{i2\pi jn}{N}}. \quad (2.20)$$

Onde N é número total de pontos n e j representam o index do tempo e frequência, respectivamente. O tempo e a frequência em função dos index n e j podem ser definidas como

$$t_n = \frac{nT}{N-1}, \quad (2.21)$$

$$f_{rj} = j/T. \quad (2.22)$$

Onde T é o tempo total do período analisado, ou seja:

$$T = \Delta t(N - 1). \quad (2.23)$$

A definição da densidade do espectro de potência é dada como a transformada de Fourier da função de autocorrelação, ou seja,

$$\Omega(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau, \quad (2.24)$$

onde $R(\tau)$ é a função de autocorrelação definida como

$$R(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \phi(t + \tau)\phi^*(t)dt, \quad (2.25)$$

onde τ neste caso é o parâmetro de atraso, isto é, o deslocamento temporal entre as duas séries, e ϕ^* é o complexo conjugado da série temporal ϕ .

A densidade do espectro de potência muitas vezes é útil para encontrar alguns fenômenos inesperados no domínio da frequência dos sinais. No entanto, realizando a amostragem da PSD ocorre uma dispersão do espectro, o que acarreta distorção do espectro de potência. Para então reduzir este vazamento é empregado uma técnica comumente chamada de "Método de Welch" (WELCH, 1967). Tal método consiste em separar a série temporal em diversos segmentos com L pontos com separação de D pontos de conjuntos vizinhos. Normalmente é escolhido $D = \frac{L}{2}$, ou seja, ocorre uma sobreposição de 50 % dos dados para cada fragmento e é aplicado uma suavização nos extremos de cada segmento de forma que convirja para zero. Tal suavização é feita aplicando uma multiplicação de uma função de janela para cada segmento. Para o presente trabalho, a função de janela Hamming (PODDER *et al.*, 2014) foi usada e ela é dada como:

$$W(j) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi j}{L-1}\right), \quad 0 \leq j \leq L-1 \quad (2.26)$$

Logo em seguida é aplicado a transformada de Fourier na forma discreta para cada segmento

$$A_k(n) = \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{L-1} X_k(j)W(j)e^{-\frac{2\pi jin}{L}}. \quad (2.27)$$

A partir disso é possível obter K periodogramas, definida como

$$I_k(f_n) = \frac{L}{U} |A_k(n)|^2, \quad (2.28)$$

onde

$$U = \frac{1}{L} \sum_{j=0}^{L-1} W^2(j), \quad (2.29)$$

por fim a estimativa do PSD é feita ao realizar a média dos I_k , isto é

$$\Omega = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K I_k(f_n). \quad (2.30)$$

2.3 Chi-quadrado

Chi-quadrado é muitas vezes utilizado para determinar a adequação da função do ajuste $f_i(x)$ com os dados experimentais y_i , de forma que quanto mais reduzido for o seu valor mais adequado é a função de ajuste. Assim, dado que $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ um vetor de n parâmetros diferentes, a sua definição pode ser dada como

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - f_i(x)}{\sigma_i} \right)^2. \quad (2.31)$$

Note que quando o chi-quadrado admite um valor demasiadamente pequeno, pode ser um indicativo de que a incerteza considerada para os dados, σ_i , é grande demais, portanto é geralmente estabelecido um intervalo de limite inferior e superior dos valores de chi-quadrado aceitáveis para determinar a concordância da função teórica com os dados experimentais. Além disso, é importante também observar em como os dados estão distribuídos ao redor do seu correspondente ponto da função ajustada, esta análise pode ser feita ao realizar gráfico dos resíduos, onde erros no modelo são indicados quando há observações de estruturas claras na distribuição, ou seja, é ideal que os pontos residuais apresentem uma certa aleatoriedade para que a função do ajuste seja minimamente razoável.

Quando os dados são independentes e seguem uma gaussiana, a PDF do χ^2 segue uma distribuição gama com parâmetro da escala igual a 2 e da forma igual a $\frac{NGL}{2}$, onde NGL significa Números de Grau de Liberdade. (HELENE; VANIN, 1991) Assim, o valor esperado e o desvio-padrão do chi-quadrado valem.

$$\langle \chi^2 \rangle = NGL, \quad (2.32)$$

$$\sigma_\chi = \sqrt{2 \times NGL}. \quad (2.33)$$

Além disso, é útil definir a sua forma reduzida, que é feita a partir da sua normalização com o número de graus de liberdade. Logo é trivial que:

$$\langle \chi_{red}^2 \rangle = 1, \quad (2.34)$$

$$\sigma_{\chi_{red}} = \sqrt{\frac{2}{NGL}}. \quad (2.35)$$

Portanto, quanto mais o valor do χ se aproxima de 1, maior a adequação da função de ajuste, no entanto, apesar dos dados experimentais nem sempre seguem uma gaussiana, o termo reduzido já é uma boa estimativa de se obter os parâmetros da função estudada.

3 MEDIÇÕES DA FLUTUAÇÃO DE DENSIDADE NO HELIMAK

Para se medir as flutuações de densidade do plasma dentro do Helimak foram utilizadas sondas de Langmuir espalhadas pelas placas fixadas dentro do dispositivo. Ao longo do experimento, cada sonda registra cerca de 5×10^6 pontos durante os 10 segundos do disparo (um ponto a cada $2\mu s$, o que corresponde a uma taxa de aquisição de 500 kSamples/s). Foram utilizados os disparos 130128005 até 130128014 para ser mostrado de exemplo, em que foi utilizado o gás de Argônio com o valor do Vertical Field de 3,6 Ohms com a corrente total das bobinas de 800 Amperes.

A Figura 5a mostra a série temporal da corrente de saturação de todo o espaço de tempo analisado, e a série temporal da Figura 5b, onde foi feita uma amplificação da imagem em uma determinada região temporal, nela é possível notar a presença de picos de densidades como uma das suas características da sua flutuação, portanto é útil utilizar o método da Média Condicional dos *bursts* para caracterizar o formato típico dos tais pulsos.

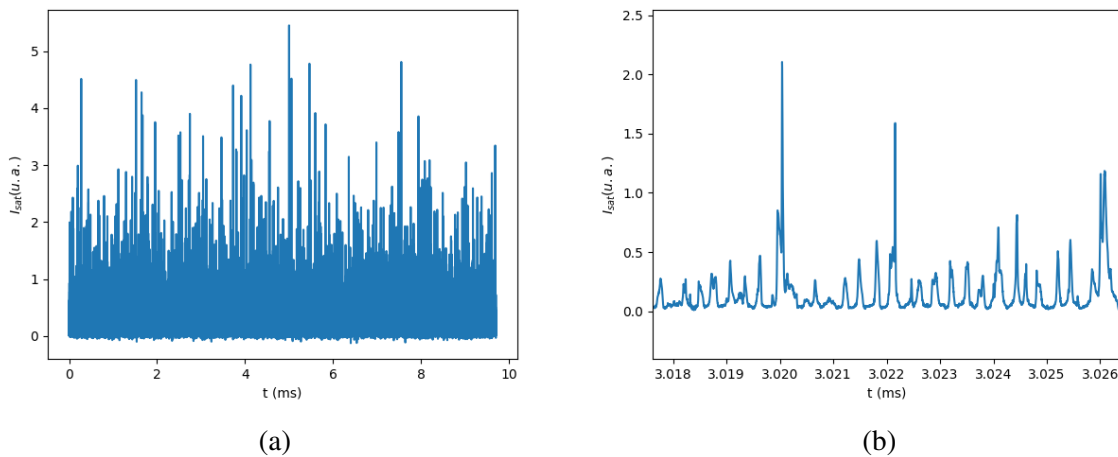


Figura 5 – Exemplo de uma série temporal de corrente de saturação iônica medida por sondas de Langmuir no Texas Helimak. (a) mostra toda a série temporal do disparo 130128014 na posição radial de 1.21 m e altura 0.213 m e (b) a série ampliada em um curto intervalo de tempo para facilitar a visualização dos *bursts*.

3.1 Média Condicional dos *bursts*

Essa técnica é amplamente utilizada em diversos estudos sobre turbulência no confinamento magnético de plasmas, por conta da sua capacidade de descrever algumas características dos eventos extremos que ocorrem dentro das máquinas de confinamento. Primeiramente, é conveniente realizar uma normalização nos dados do I_{sat} utilizando a expressão:

$$\tilde{I}_{sat} = \frac{I_{sat} - \langle I_{sat} \rangle}{\sigma_{I_{sat}}}. \quad (3.1)$$

Feita a normalização, são detectados os picos dos pulsos que possuem o valor da sua

amplitude maior do que o limiar já pré-estabelecido, neste trabalho foi considerado o limiar de 2, conforme pode ser visto na Figura 6.

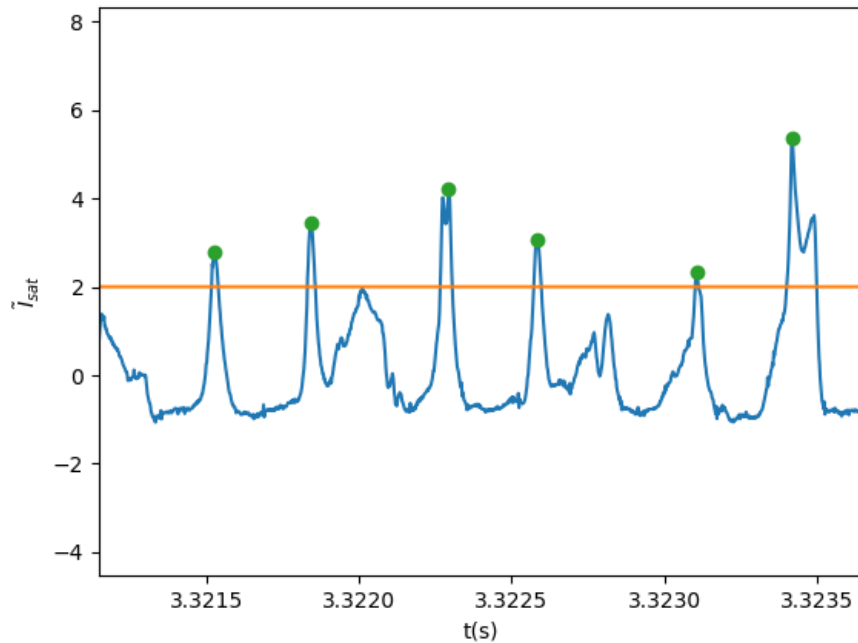


Figura 6 – Série temporal do \tilde{I}_{sat} com os pontos verdes indicando a posição dos picos dos *bursts* detectados e a linha laranja o limiar para considerar os pulsos como sendo *bursts*.

Em seguida são adicionados uma certa quantidade, a critério do autor, de pontos vizinhos ao pico para complementar o formato do *burst* de forma que todos os *bursts* tenham a mesma quantidade de pontos. Feito isso, o ponto de cada *burst* é centralizado, de tal forma que o pico do *burst* seja associado ao tempo relativo 0, como apresentado na Figura 7a, onde foram detectados milhares de *bursts*, e por fim é feita a sua média, como visto na Figura 7b, onde mostra a média condicional dos *bursts* de cada série temporal em posições radiais distintas em uma determinada altura de 0.253 m do disparo 130128005.

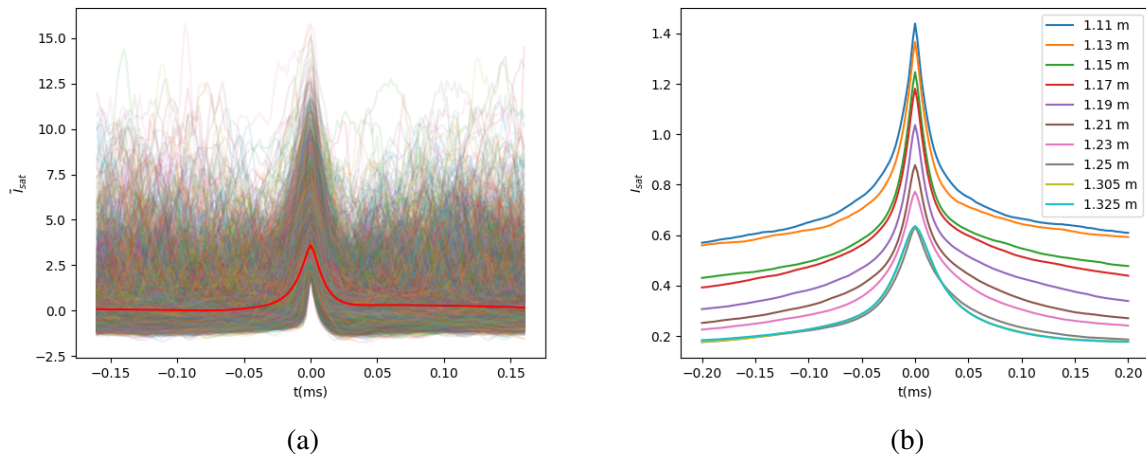


Figura 7 – (a) Cálculo da média condicional com 10963 *bursts* detectados. (b) Média condicional dos *bursts* em diferentes posições radiais para uma descarga com Bias zero.

Além disso, vale ressaltar que é também estabelecido um intervalo de tempo mínimo entre os picos para evitar que um *burst* seja contabilizado mais de uma vez no cálculo da média, assim será considerado somente o *burst* mais forte.

3.2 Características gerais da flutuação de densidade com bias positivo

Um dos aspectos interessantes para o estudo da turbulência do plasma no Texas Helimak é a sua capacidade de se conseguir variar tanto positivamente quanto negativamente o valor do Bias aplicado sobre uma das placas de cada conjunto situados dentro da máquina. Ao utilizar valores negativos na placa 2 onde se encontra a densidade máxima, ocorre uma redução no nível da turbulência e a sua intermitência é portanto eliminada (GENTLE; HE, 2008). No entanto, ao aplicar Bias positivo há um aumento na quantidade de *bursts*, como visto na Figura 8, e este aumento se mostra de grande interesse para o estudo das características dos *bursts* e na sua dinâmica, uma vez que é possível estudar as propriedades deste fenômeno por conta da sua abundância em poucos disparos.

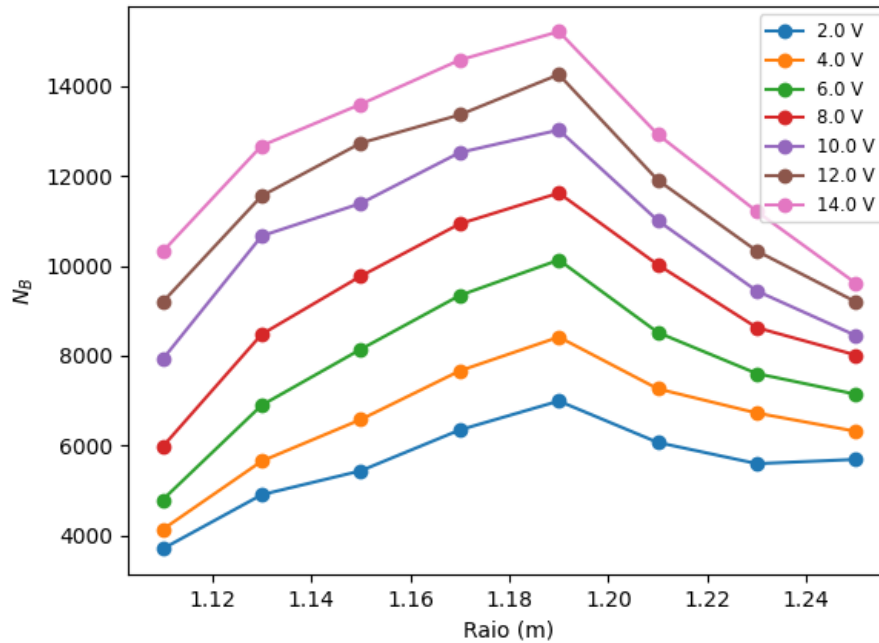


Figura 8 – Número de bursts detectados dos disparos 130128006-13 na altura 0.233 m variando o valor do Bias para diferentes posições radiais utilizando o limiar de 2.

Utilizando valores de Bias positivo, foi descoberto que em determinadas regiões há uma certa correlação temporal entre os tempos de ocorrência de *bursts* sucessivos, isso é evidenciado no histograma do intervalo de tempo entre os *bursts*, conforme visto na Figura 9. Nesta figura foram adicionadas dois histogramas de exemplo com posições radiais diferentes do mesmo disparo 130128014 e altura 0.233 m, nela já é possível notar o aumento da probabilidade do intervalo temporal entre *bursts* de cerca de 0.35 ms para os pontos da posição 1.21 m, evidenciado pelo surgimento do pico de ocorrência. Algo que já não acontece com a posição 1.11 m, nela é sugerido que o surgimento dos *bursts* é aleatório seguindo o modelo da SPTM tradicional (GARCIA *et al.*, 2016) e que por isso a sua distribuição segue uma exponencial.

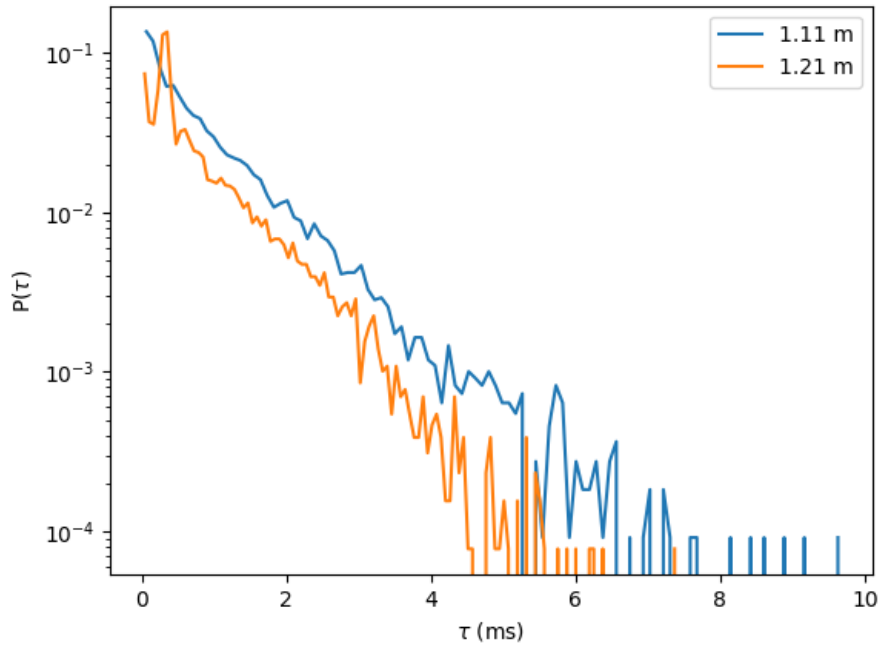


Figura 9 – Histograma do intervalo de tempo entre Bursts, τ , na altura 0.233 m com o bias aplicado de 15 V.

Foram feitas também histogramas 3D para conseguir determinar em quais regiões ocorrem as tais elevações. As figuras são compostas de diversos histogramas do intervalo temporal entre *bursts* sucessivos de maneira a identificar os picos por meio do espectro de cores, isto é, deve haver um espaçamento entre o eixo x com a faixa que indica o surgimento dos picos, como pode ser visto na Figura 10. Assim, a região da faixa mais avermelhada, como vista, por exemplo, na Figura 10f, representa o pico em torno da região temporal de 0.35 ms encontrado na Figura 9 da posição radial de 1.21 m.

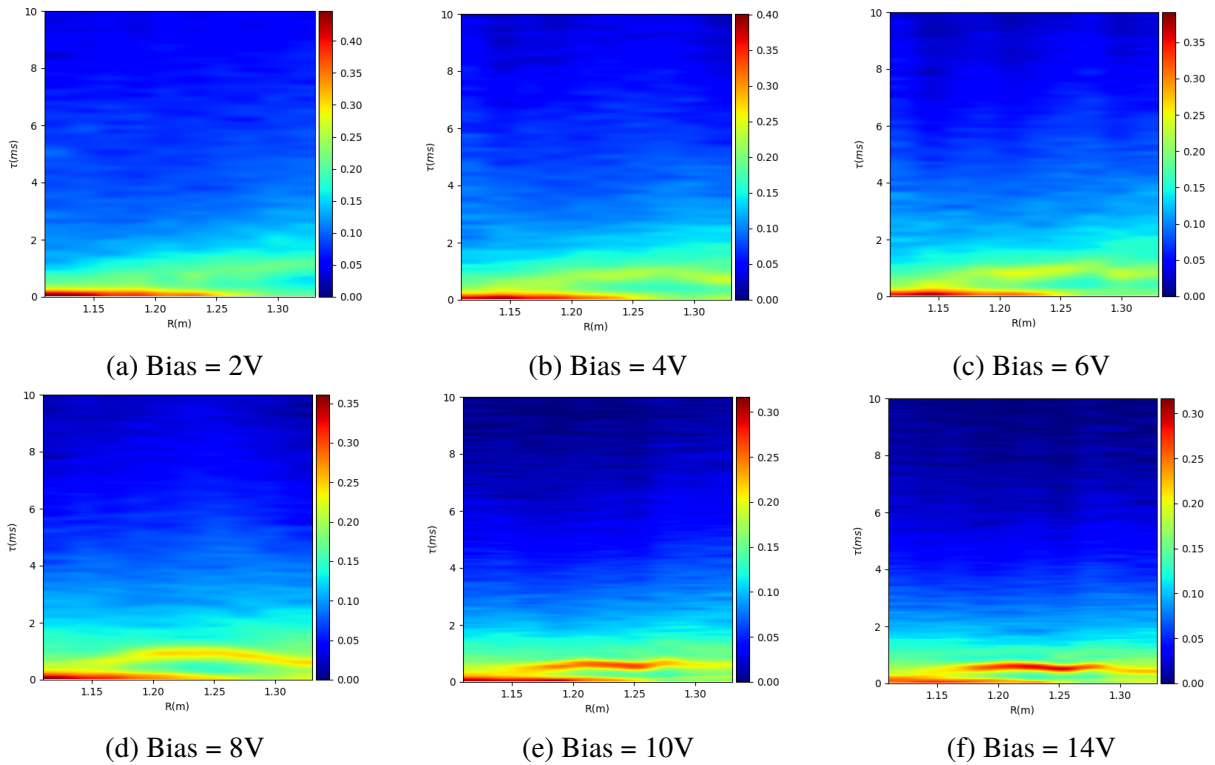


Figura 10 – Histogramas 3D para diferentes valores de Bias na altura 0.253 m. Foi aplicado raiz quadrada nos pontos da probabilidade $P(\tau)$ apenas para salientar visualmente a faixa que corresponde aos picos dos histogramas.

É possível observar que, para valores de *Bias* baixos, o pico quase não é imperceptível, como visto nas Figuras 10a, 10b e 10c, onde a faixa encontrada na região radial em torno de 1.15 m a 1.32 m possui uma coloração mais amarelada, o que é um indicativo de que há uma leve correlação temporal entre *bursts* sucessivos. Enquanto para valores de bias maiores há uma clara evidência do surgimento das tais elevações mais acentuadas, indicadas pela faixa avermelhada mais afastada do eixo-x nas posições radiais de 1.15 m a 1.32 m, como pode se notar nas Figuras 10d, 10e, 10f. Ademais, é notável que a presença da faixa se mostra cada vez mais forte em determinadas posições radiais, sugerindo que há uma variação suave deste fenômeno conforme o *Bias* aplicado aumenta e ao longo da direção radial.

Ademais, ao realizar o procedimento da média condicional nos disparos em que há evidência da correlação temporal entre os *bursts*, é notável a presença de uma ondulação na base da figura, isso é um indicativo do aumento da frequência do surgimento de *burst* após o outro, ou seja, devido a uma quantidade razoável de *bursts* correlacionadas com o *burst* principal, isso acaba criando o efeito da oscilação ao ser contabilizada no cálculo da média, como pode ser vista na Figura 11. Note que nesta mesma figura o pico da ondulação se encontra em torno de 0.35 ms também.

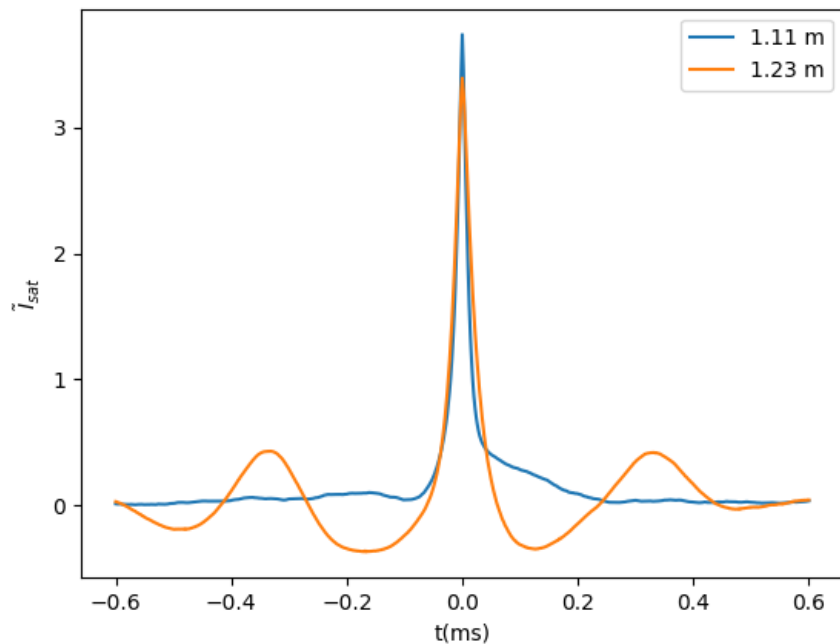


Figura 11 – Média Condicional de duas medidas com posições radiais diferentes na altura 0.233 m com 15 V de Bias.

Além disso, o PSD também se mostra útil para encontrar a periodicidade e fenômenos correlacionados. Como pode ser visto no exemplo da Figura 12, nela é possível encontrar picos que indicam a tal periodicidade dos pulsos, porém note que há surgimento de dois picos no exemplo dado, o primeiro pico se situa em torno de 2.81 kHz, o que no domínio temporal corresponde a 0.35 ms, concordando então com os valores encontrados tanto no histograma do intervalo de tempo quanto a figura da média condicional. Enquanto o segundo pico se encontra em torno de 196 kHz, o que indica de que há uma periodicidade de em torno de $5 \mu s$. Entretanto, a causa do aparecimento dos picos nas altas frequências ainda permanecem desconhecidas, portanto, o foco do estudo se encontra nos picos encontrados em frequências menores.

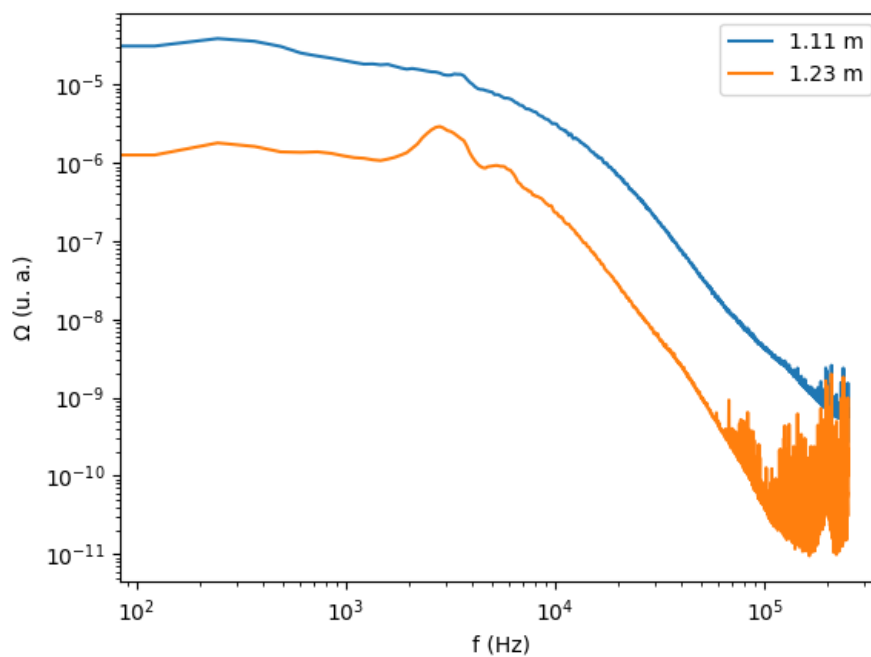


Figura 12 – PSD de duas séries com diferentes posições radiais na altura 0.233 m com Bias aplicado de 15 V utilizando o método de Welch com overlap de 50 % e 2^{12} pontos para cada segmento.

4 MODELO

4.1 Modelo do Trem de Pulso

O Stochastic Pulse Train Model é um modelo fenomenológico que descreve as flutuações de densidade que ocorrem em confinamento magnético de plasmas, também é referenciado por diversos outros nomes por outros autores, tais como Filtered Poisson Process (THEODORSEN; GARCIA; RYPDAL, 2017), shot noise process (WALKDEN *et al.*, 2017), Garcia Model (BENCZE *et al.*, 2019), etc. O modelo caracteriza a flutuação como uma sobreposição de diversos pulsos com formatos bi-exponenciais, com amplitudes, tempo de duração e ocorrência aleatórias. Em suma, o I_{sat} obtido no experimento pode ser descrito como:

$$I_{sat}(t) = \sum_{j=1}^{N_P} A_j \phi \left(\frac{t-t_j}{t_d}; \lambda \right), \quad (4.1)$$

com

$$\phi(\theta; \lambda) = \begin{cases} \exp(\frac{\theta}{\lambda}), & \theta < 0 \\ \exp(-\frac{\theta}{1-\lambda}), & \theta \geq 0 \end{cases}, \quad (4.2)$$

onde N_P representa a quantidade de pulsos que ocorrem ao longo do intervalo de tempo T do experimento; A_j e t_j são respectivamente a amplitude e tempo de ocorrência do j -ésimo pulso; t_d é o tempo de duração característico do pulso e λ é o termo de assimetria do pulso.

A duração característico e o λ podem ser estimadas a partir da média condicional dos pulsos explicadas na seção 3.1.

Diversos estudos (GARCIA *et al.*, 2017; GARCIA *et al.*, 2018) evidenciam que a distribuição da amplitude segue uma exponencial dada por:

$$P(A_j) = \frac{\exp(-\frac{A_j}{\langle A \rangle})}{\langle A \rangle}. \quad (4.3)$$

Além disso, o tempo de ocorrência dos pulsos é assumido que segue uma distribuição uniforme, com $P(t_j) = \frac{1}{T}$. Ademais, considerando que os pulsos sejam descorrelacionados e o seu surgimento é aleatório, a distribuição do intervalo de tempo entre os pulsos segue também uma distribuição exponencial:

$$P(\Delta t_w) = \frac{\exp(-\frac{\Delta t_w}{\langle t_w \rangle})}{\langle t_w \rangle}. \quad (4.4)$$

Os valores dos parâmetros do formato do pico são obtidos a partir da média condicional dos *bursts*, e por simplicidade os valores obtidos são considerados fixos para todos os pulsos.

O modelo indica de que, uma vez que é considerado que a forma de cada pico segue uma bi-exponencial e são descorrelacionados um com outro, a PDF do I_{sat} segue uma distribuição gama (THEODORSEN; GARCIA, 2018), ou seja:

$$P(I_{sat}) = \frac{1}{\langle A \rangle \Gamma(\gamma)} \left(\frac{I_{sat}}{\langle A \rangle} \right)^{\gamma-1} \exp \left(-\frac{I_{sat}}{\langle A \rangle} \right), \quad (4.5)$$

onde $\gamma = \tau_d \frac{N_p}{T}$ é o termo de intermitência dos pulsos, isto é, quanto maior for o seu valor, mais pulsos estão sobrepostos um sobre o outro.

Os momentos da distribuição gama podem ser deduzidas seguindo o artigo (THEODORSEN; GARCIA, 2018), logo é obtido que,

$$\begin{aligned}\langle I_{sat} \rangle &= A\gamma, \\ \sigma &= A\gamma^{\frac{1}{2}}, \\ S &= 2\gamma^{-\frac{1}{2}}, \\ K &= 3 + \frac{6}{\gamma}.\end{aligned}$$

Muitas vezes é conveniente trabalhar com os dados do I_{sat} já normalizados, assim a PDF do \tilde{I}_{sat} é feita a partir da troca de variáveis utilizando a seguinte relação:

$$P(\tilde{I}_{sat}) = \left| \frac{dI_{sat}}{d\tilde{I}_{sat}} \right| P(I_{sat}(\tilde{I}_{sat})), \quad (4.6)$$

lembrando que

$$\tilde{I}_{sat} = \frac{I_{sat} - \langle I_{sat} \rangle}{\sigma}.$$

Assim, realizando as devidas substituições com os momentos obtidos anteriormente, é possível reescrever a PDF da seguinte maneira:

$$P(\tilde{I}_{sat}) = \frac{\gamma^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\gamma)} \left(\gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{I}_{sat} + \gamma \right)^{\gamma-1} \exp \left(-\gamma^{\frac{1}{2}} \tilde{I}_{sat} - \gamma \right). \quad (4.7)$$

Além disso, no campo do estudo do confinamento de plasma se mostra necessário a adição do ruído de fundo, é geralmente incluído o ruído gaussiano, para entrar em acordo com o experimento (ZURITA *et al.*, 2022). Porém, neste trabalho, ao invés de ser adicionado o termo gaussiano, é adicionado outro regime com a hipótese de que estes pulsos são descorrelacionados com o regime principal.

4.2 Modelo com *burst* temporalmente correlacionado

No entanto, como visto nos resultados do presente trabalho, é necessário haver uma modificação nas simulações para considerar os efeitos da correlação temporal entre os *bursts*. Tal alteração é feita considerando que a PDF do intervalo de tempo entre os pulsos segue uma distribuição gama, isto é, assim que o pulso é criado na simulação o pulso seguinte irá obedecer ao espaçamento entre eles cujo valor é sorteado da distribuição gama dada por:

$$\rho(\tau, k, s) = \frac{\tau^{k-1} \exp(-\frac{\tau}{s})}{\Gamma(k) s^k}, \quad (4.8)$$

onde k e s são parâmetros de forma e de escala, respectivamente, e a função $\Gamma(k)$ é definida como

$$\Gamma(k) = \int_0^{\infty} x^{k-1} e^{-x} dx.$$

O parâmetro de forma k tem como definição dada como $k = \left(\frac{\bar{\tau}}{\sigma}\right)^2$, ele indica o quanto que o regime de *bursts* principal se desvia do processo aleatório, quando $k = 1$ é obtido o processo de Poisson e para $k \gg 1$ indica um intervalo de tempo com período bem definido entre *bursts* sucessivos (PEREIRA *et al.*, 2019), e este parâmetro pode ser estimado realizando o procedimento do ajuste desenvolvido na seção 4.3, enquanto o parâmetro s pode-se aproveitar o fato de que a distribuição gama tem sua moda dada por $(k - 1) \times s$, ou seja, uma estimativa de s pode ser obtida a partir do valor encontrado com a maior frequência no histograma de intervalo de tempo entre eventos *bursts* sucessivos dividido por $k - 1$.

Como pode ser visto pelas Figuras 13, 14 e 15, é notável a presença da elevação que se assemelham com o que é encontrado no experimento, mostrando assim um forte indicativo de que em determinadas condições os *bursts* começam a ter uma certa correlação temporal entre eles e que este intervalo de tempo segue uma distribuição gama.

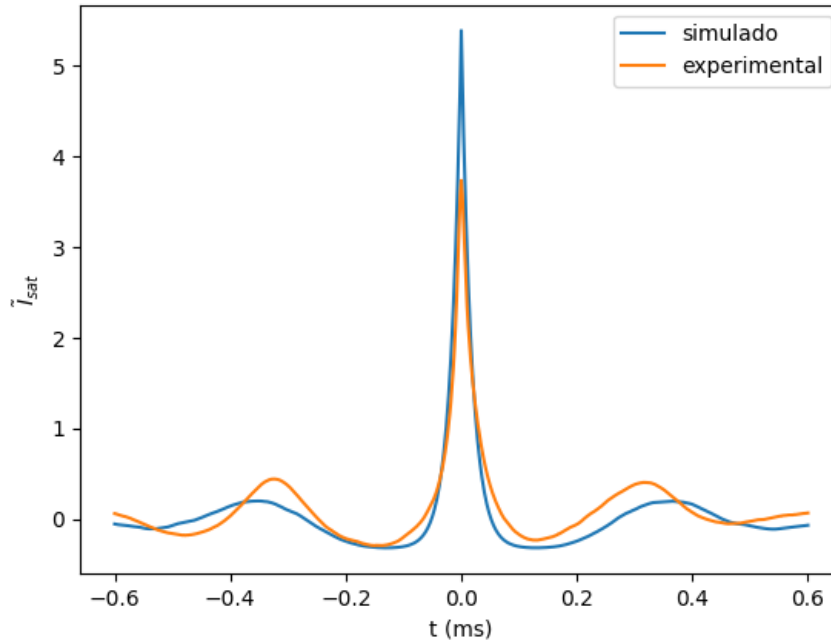


Figura 13 – Média condicional comparando o experimental com o simulado do regime apenas correlacionado.

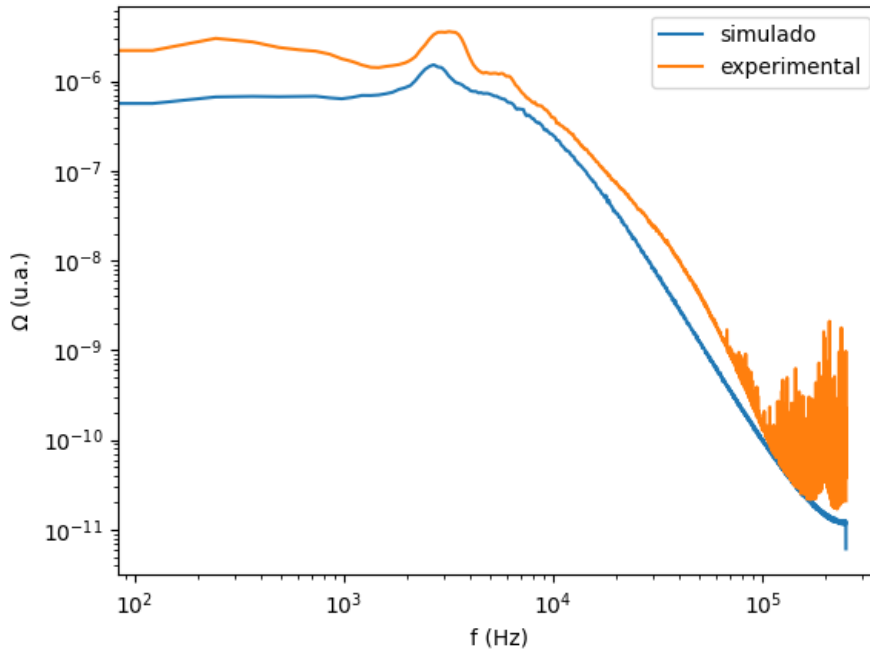


Figura 14 – PSD comparando o experimental com o simulado do regime apenas correlacionado.

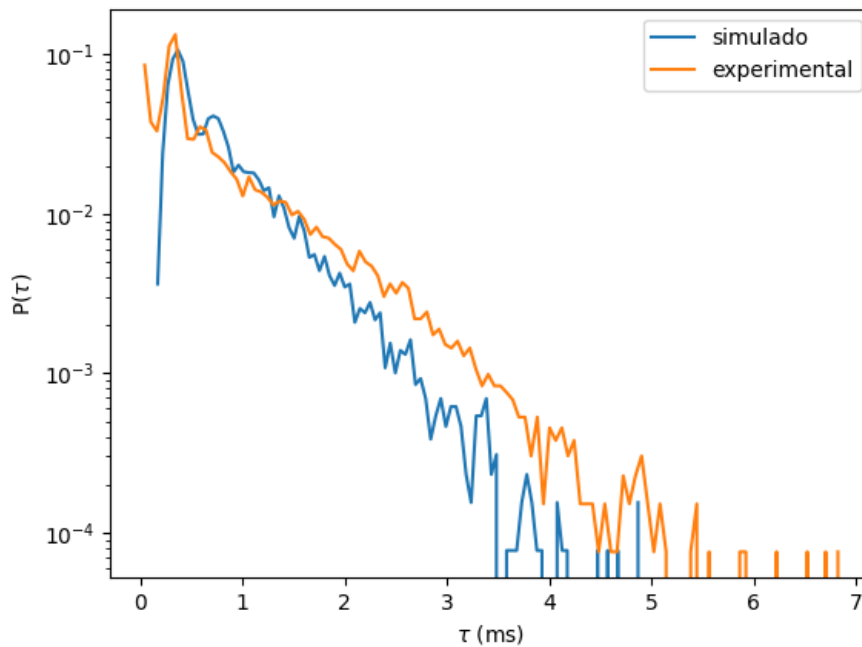


Figura 15 – Histograma comparando o experimental com o simulado do regime apenas correlacionado.

No entanto, os primeiros pontos do histograma do intervalo de tempo da simulação da Figura 15 diferem bastante do que é encontrado no experimento. Esta diferença pode ser resolvida ao adicionar um novo regime de pulsos em que dessa vez é considerado que não possuem

nenhuma correlação entre eles. Diferentemente de diversos estudos que adicionam outro tipo de ruído (THEODORSEN; GARCIA; RYPDAL, 2017; ZURITA *et al.*, 2022), a adição do pulso de fundo foi utilizada no artigo (PEREIRA *et al.*, 2019) e no trabalho (ZURITA; GUIMARÃES-FILHO, 2022) para reproduzir melhor os dados experimentais. Portanto, a série temporal do modelo fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} I_{sat}(t) &= \sum_{i=1}^{N_{Pc}} A_i \phi\left(\frac{t-t_i}{\tau_d^c}; \lambda\right) + \sum_{j=1}^{N_{Pb}} A_j \phi\left(\frac{t-t_j}{\tau_d^b}; \lambda\right) \\ &= I_c(t) + I_b(t), \end{aligned}$$

onde I_c e I_b correspondem ao regime dos pulsos correlacionados e dos pulsos de fundo, respectivamente.

Neste novo modelo foi considerado que a PDF da amplitude dos ambos os regimes e do intervalo de tempo entre os *bursts* do regime de fundo ainda seguem uma exponencial dadas pela equação 4.3 e 4.4. Para simplificação, foi assumido que todos os pulsos possuem os mesmos parâmetros de assimetria, λ , e de tempo característico, τ , dos *bursts* correlacionados, sendo elas estimadas utilizando o ajuste de mínimos quadrados da média condicional do *burst* experimental empregando a técnica explicada na seção 4.2.1. Entretanto, ainda não foi desenvolvida uma metodologia objetiva para estimar os parâmetros da amplitude média dos pulsos temporalmente correlacionados, $\langle A_i \rangle$, amplitude média dos pulsos de fundo, $\langle A_j \rangle$ e intervalo de tempo médio dos pulsos de fundo, $\langle t_w^b \rangle$, por esse motivo esses parâmetros são estimados de forma iterativa de forma que tantos os resultados das simulações, quanto suas médias e seus desvios-padrões do I_{sat} simulado se tornem parecidos com o experimental, como feito nos trabalhos (PEREIRA *et al.*, 2019) e (ZURITA; GUIMARÃES-FILHO, 2022).

Todavia, com intuito de se conseguir reproduzir os efeitos causados pelos pulsos temporalmente correlacionados observados nos experimentos, foram feitas algumas simulações da série temporal da corrente de saturação, como de exemplo vistas nas Figuras 16a e 16b, sendo este último uma ampliação de uma determinada região temporal para uma melhor visualização dos picos das séries. Apesar da simulação não estar totalmente fiel com os experimentos, por conta da dificuldade de se estimar os parâmetros das amplitudes e intervalo de tempo médio do regime de fundo, ainda foi possível recriar alguns fenômenos observados nos experimentos, como podem ser vistos nas Figuras 17, 18 e 19.

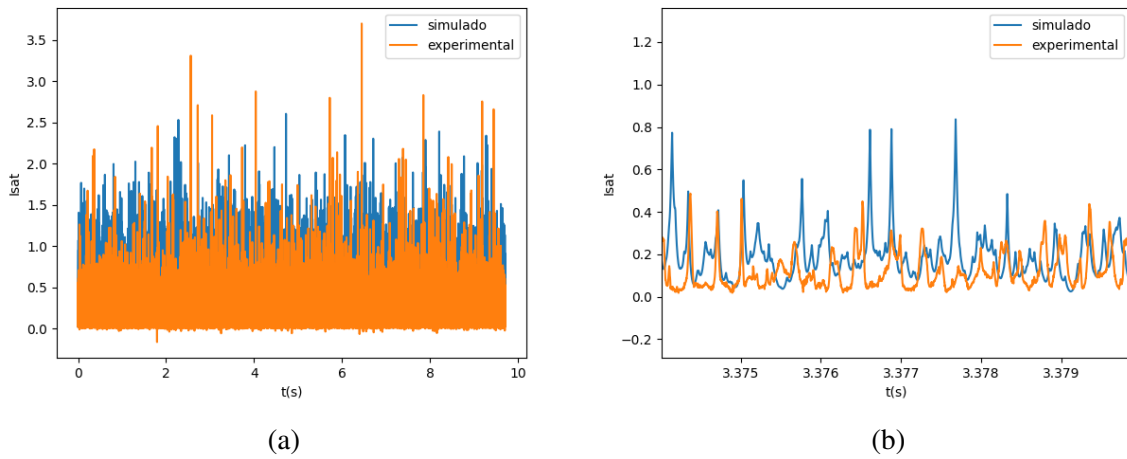


Figura 16 – Comparação da série temporal experimental com o sinal simulado. O gráfico (a) mostra todo o intervalo de $\sim 9,6$ s e (b) a ampliação de uma região de $\sim 0,005$ s.

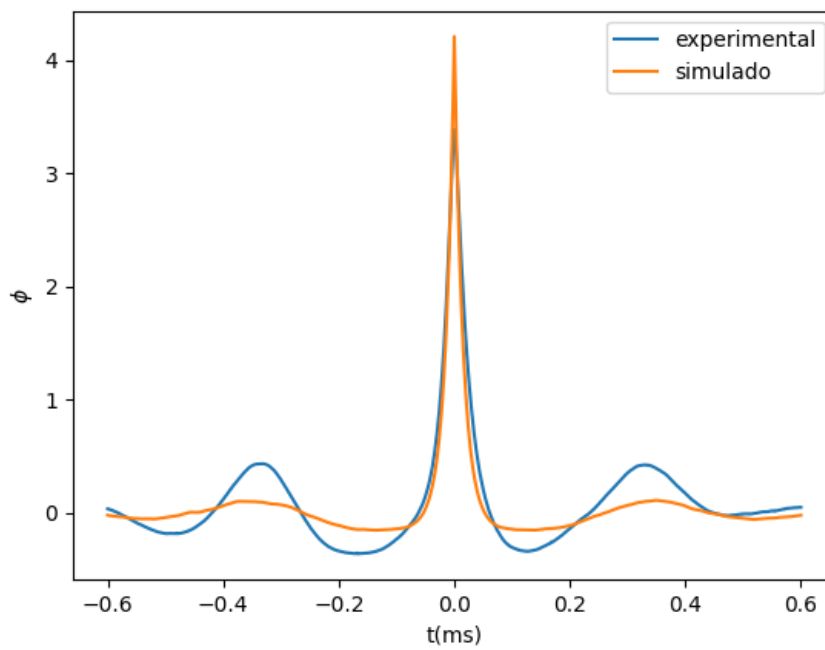


Figura 17 – Comparação da média condicional dos *bursts* do experimental com simulado.

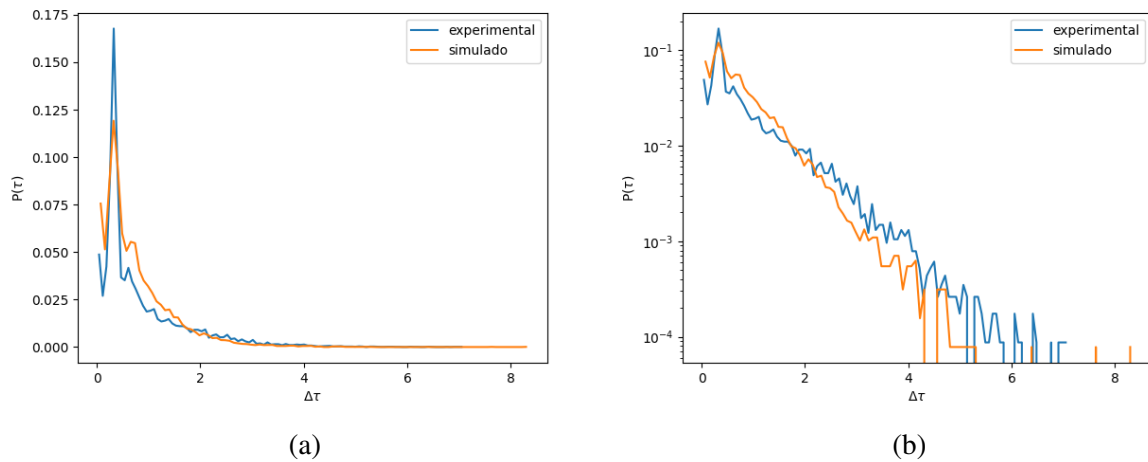


Figura 18 – Comparação dos histogramas do intervalo de tempo entre *bursts* na série temporal experimental e no sinal simulado em escala linear (a) e logarítmica (b).

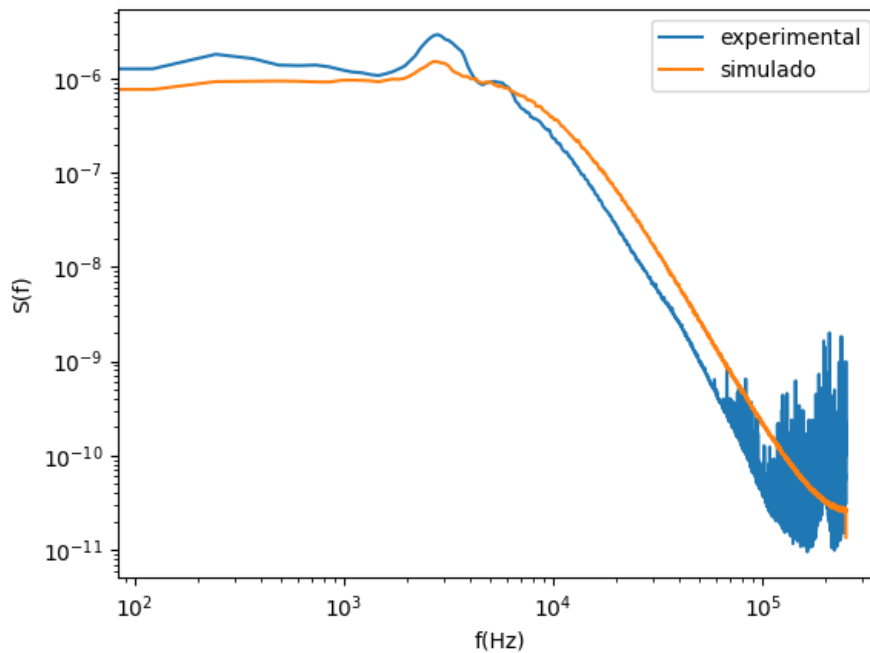


Figura 19 – Comparação do PSD experimental e simulado.

Apesar da amplitude da saliência da simulação encontrada na média condicional dos *bursts*, no histograma do intervalo de tempo e no espectro de potência (PSD) ser notavelmente menor do que experimental, conforme visto nas Figuras 17, 18, 19 ainda foi possível reproduzir o efeito causado pelo regime de pulsos temporalmente correlacionado, com ênfase agora na Figura 18, nesta figura claramente houve êxito em conseguir reproduzir o efeito do resultado principalmente os primeiros pontos do histograma. Logo, é um forte indicativo da coexistência de dois regimes atuando no sistema. A coexistência de dois regimes no Texas Helimak já foi sugerida em um outro estudo mais recente (PEREIRA *et al.*, 2021).

Além disso, note também que é necessário haver um certo cuidado para determinar os parâmetros $\langle A_i \rangle$, $\langle A_j \rangle$ e $\langle t_w^b \rangle$ a serem utilizados na simulação, por conta de que a eventual detecção do pulso de fundo como um *burst* pode acabar influenciando na forma do pico encontrado nos histogramas do intervalo de tempo entre *bursts*, como visto, por exemplo, na Figura 20, em que foi variado apenas o parâmetro $\langle t_w^b \rangle$ e foi fixado o parâmetro $k = 16$ e o intervalo de tempo entre *bursts* correlacionados de 0.35 ms.

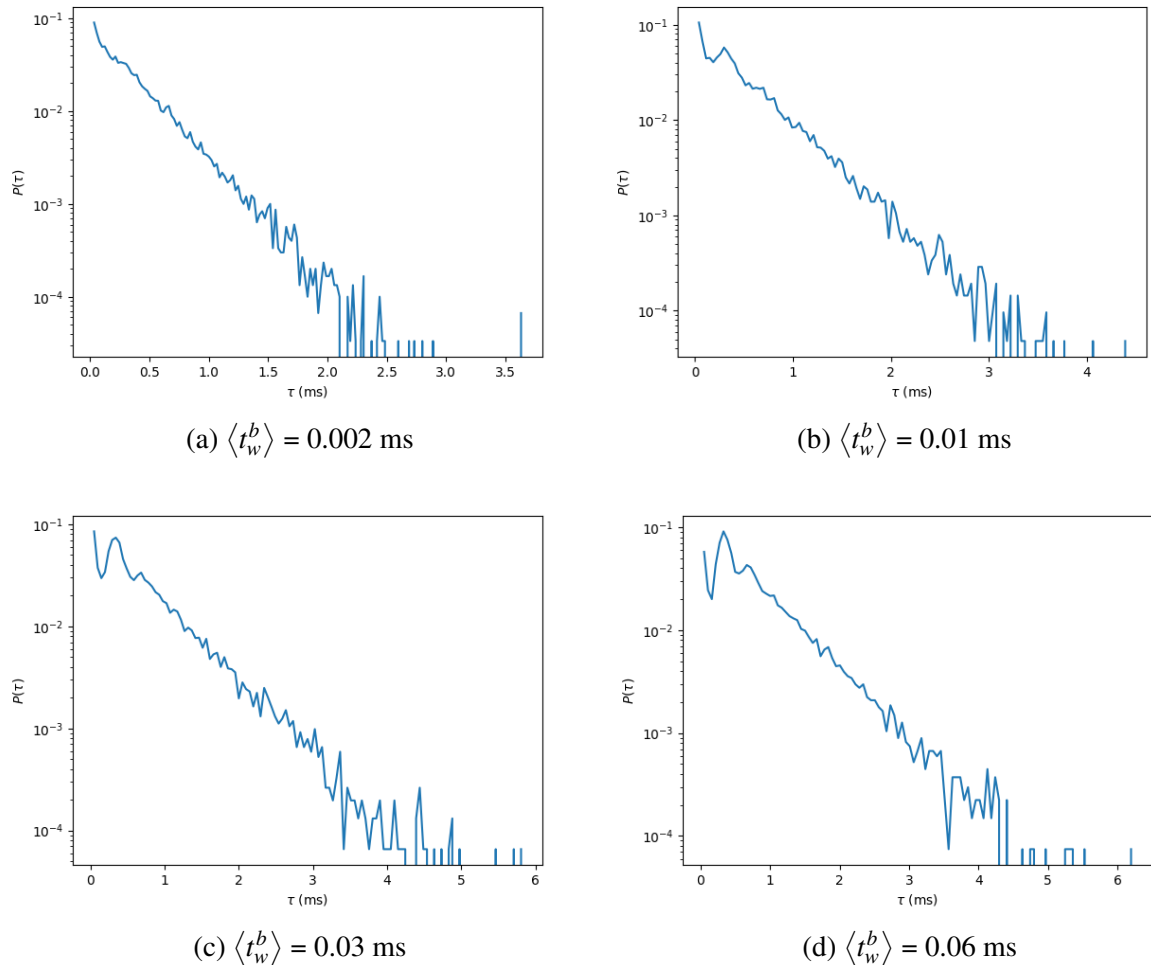


Figura 20 – Exemplos de histogramas simulados utilizando $\langle A_i \rangle = 0.3$, $\langle A_j \rangle = 0.06$ e variando os valores do $\langle t_w^b \rangle$.

A Figura 20a mostra que, apesar do valor do parâmetro de forma, k , ser muito maior que 1, por conta do intervalo de tempo médio do regime de pulsos de fundo ser muito menor do que o regime de pulsos temporalmente correlacionados, os *bursts* aleatórios que surgem do regime de fundo acaba influenciando na contagem do intervalo de tempo, ocasionando assim a diminuição da amplitude do pico encontrado nos histogramas até o certo ponto de que a sua PDF aparentemente seguirá uma exponencial.

A Figura 20b apresenta um leve surgimento do pico quando aumentado o intervalo de tempo médio do pulso de fundo, no entanto, devido ao fato da sua forma ser muito pequena, isso

será evidenciado como se fosse uma correlação relativamente fraca, isto é, o parâmetro k seria maior do que 1, todavia não é tão grande quanto o esperado.

Por fim, as Figuras 20c e 20d apresentam a forma do pico muito mais definido, por conta de que o eventual detecção do *burst* de fundo seja mais raro nestas ocasiões, e que portanto a sua influência é menor na forma que o pico surge. Portanto, quanto maior for o intervalo de tempo dos pulsos de fundo, mais definido será o pico formado no histograma do intervalo de tempo entre *bursts* sucessivos.

4.2.1 Média condicional com pulsos com tempos de ocorrência correlacionados

Por conta da ondulação encontrada na base das médias condicionadas dos *bursts* quando aplicado o bias positivo durante o disparo, realizar o ajuste utilizando a forma bi-exponencial se torna inadequada. Ademais, a ondulação é causada por pulsos subsequentes ao *burst* detectado que ocorrem em maior frequência de modo que acabam influenciando na forma da média, em outras palavras, a ondulação não é uma característica dos *bursts*.

Para então conseguir estimar a forma característica do *burst*, foi empregada a seguinte técnica utilizada no artigo (PEREIRA *et al.*, 2019). Primeiramente, aproveitando o fato de que no modelo SPTM tradicional considera que o surgimento dos pulsos é aleatório, foi criado dois conjuntos de \tilde{I}_{sat} uma que contém os subconjuntos de valores maiores do que zero e o outro menores do que zero. Em seguida, criou-se uma nova série inserindo os subconjuntos de forma aleatória, simulando assim a aleatoriedade do sistema, o procedimento pode ser ilustrado na Figura 21.

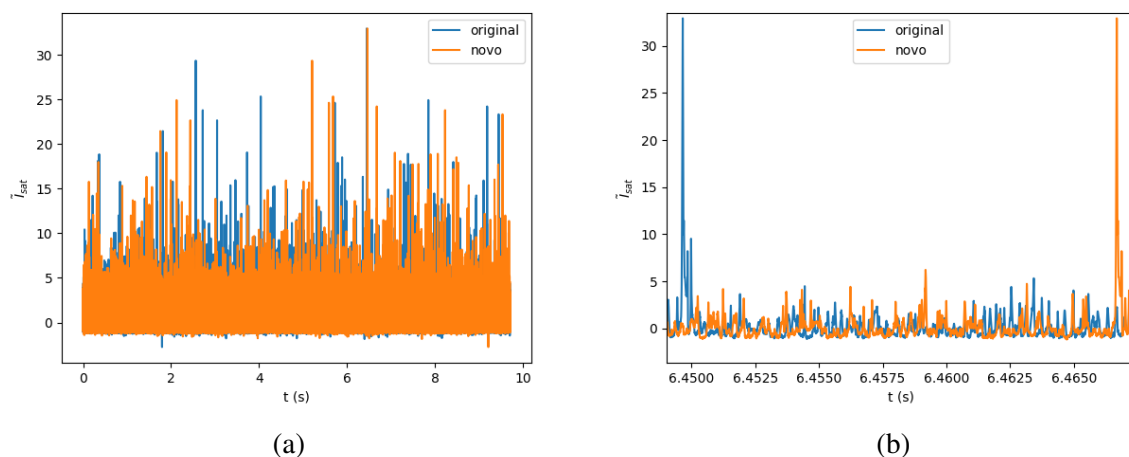


Figura 21 – Comparação da série temporal original com a nova utilizando o dado do disparo 130128014 da altura 0.233 m do raio 1.23 m. O gráfico em (a) mostra toda a série e (b) uma ampliação.

A Figura 21a mostra a série randomizada em comparação com a série original e é pos-

sível observar com maior detalhe a forma dos pulsos ao ampliar em uma determinada região, mostrada na Figura 21b. Nesta mesma figura, é possível encontrar dois pulsos com amplitudes grandes idênticos, porém em posições temporais diferentes, mostrando então que a nova série temporal é a antiga porém randomizada, simulando assim a aleatoriedade do surgimento dos pulsos.

Por fim, com esta nova série, é feito o procedimento do cálculo da média condicional dos *bursts*, vista na Figura 22.

No entanto, pode-se notar na Figura 22 a presença de uma leve saliência na base da média, para isso foi adicionado um fator de correção gaussiano na forma da equação do ajuste do formato do *burst*, como expressada na equação 4.9:

$$\phi_c = \phi(\theta; \lambda) + ae^{-\frac{(t-t_g)^2}{2s_t^2}}, \quad (4.9)$$

onde t_g e s_t são os termos locais e largura da correção gaussiana, e o parâmetro a a sua amplitude.

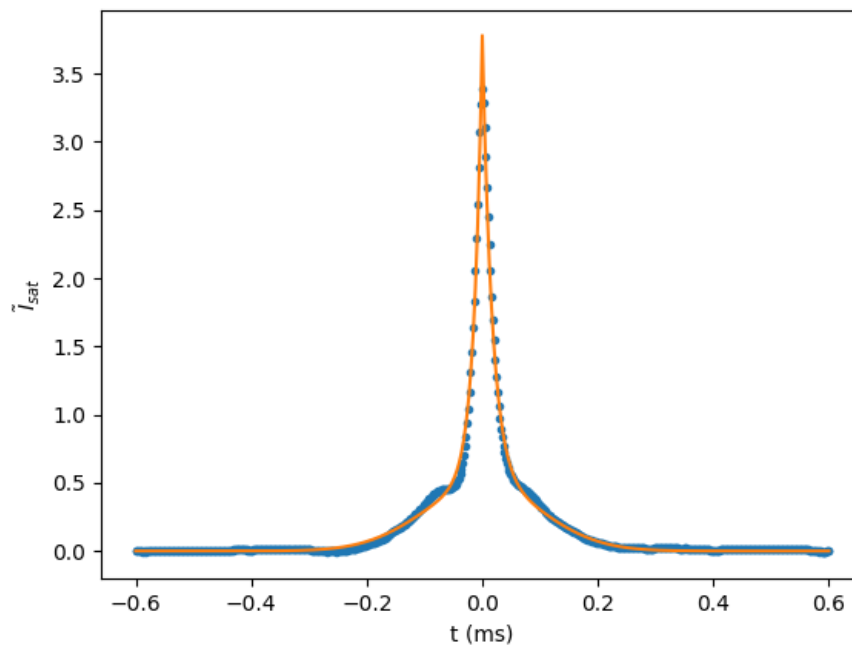


Figura 22 – Média condicional do *burst* com a série randomizada.

4.3 Equação do ajuste do intervalo de tempo entre *bursts* temporalmente correlacionados

Ao aplicar o bias positivo durante os experimentos, que neste trabalho serão chamados de disparos ou descargas, o nível de turbulência no plasma é aumentada, evidenciado pelo aumento da amplitude e da quantidade de *bursts* que ocorrem durante o disparo (PEREIRA *et al.*, 2019).

Além disso, foram encontradas algumas evidências de que, em determinadas regiões do Texas Helimak, o intervalo de tempo entre os *bursts* deixa de seguir uma distribuição exponencial como previsto no SPTM tradicional, como, por exemplo, visto na Figura 9, onde foi aplicado um bias de 15V, nela é possível observar que há um aumento na frequência do surgimento do *burst* após o outro. Além disso, isso também é evidenciado quando é realizada a média condicional dos *bursts*, como ilustrado na Figura 11, nela é possível observar a presença de uma oscilação na base do *burst*, isso é um indicativo de que há uma correlação no surgimento entre os *bursts*. Ademais, quando é calculado o PSD da série temporal, é possível notar o surgimento de um pico em uma determinada frequência, como mostrado na Figura 12, a frequência do pico do PSD coincide com o pico da distribuição do intervalo de tempo entre os *bursts* e com a oscilação encontrada na média condicional, isso tudo mostra que há um indicativo de que, em determinadas condições e regiões do plasma no Texas Helimak, a hipótese da aleatoriedade do surgimento dos *bursts* não é válida.

Portanto, foi proposto no artigo (PEREIRA *et al.*, 2019) que o intervalo de tempo entre os *bursts* segue uma distribuição gama com parâmetros de forma, k , e escala, s , dados pela equação 4.8:

Foi adotada esta distribuição por conta de uma propriedade interessante, note que quando parâmetro de forma k é igual à 1, ela retorna uma distribuição exponencial, como é o esperado para os casos dos *bursts* temporalmente descorrelacionados.

Para estimar os valores dos parâmetros k e s é feita um ajuste diretamente na distribuição do intervalo de tempo entre os *bursts*. No entanto, para encontrar a função do ajuste a ser feita, primeiramente deve-se considerar que os pulsos abrangem diferentes amplitudes, portanto ao definir um valor do limiar Θ , alguns *bursts* deixarão de ser detectados, por esse motivo deve-se considerar a probabilidade de que o *burst* seja detectado, definido por:

$$\alpha(\Theta) = \int_{\Theta}^{\infty} P(A)dA, \quad (4.10)$$

onde $P(A)$ é a PDF da amplitude do *burst*.

Assim, considerando que a PDF do intervalo de tempo entre os *bursts* deve incluir também a contagem dos *bursts* não detectados, a PDF é dada da seguinte forma (PEREIRA *et al.*, 2019):

$$P(\tau) = \alpha \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \alpha)^{j-1} \int_0^{\infty} \delta(\tau - \sum_{i=1}^j t_i) \prod_{i=1}^j \rho(t_i) dt_i. \quad (4.11)$$

Devido a sua complexidade, é útil aplicar a transformada de Laplace para a sua simplificação, logo a função fica dada pela equação 4.12, e a sua derivação pode ser encontrada no apêndice A :

$$P(\omega) = \frac{\alpha}{(1 + i\omega s)^k - (1 - \alpha)}. \quad (4.12)$$

O ajuste é realizado utilizando a equação 4.12, com a sua transformada inversa calculada numericamente. Os pontos a serem ajustados vem do histograma do intervalo de tempo entre

os *bursts* com a incerteza de cada ponto sendo estimada utilizando a incerteza binomial $\sigma = \sqrt{Np(1-p)}$.

Por conta da transformada inversa da equação 4.12 não possuir uma forma analítica, a função do ajuste é realizado numericamente com $N = 2^{14}$ pontos interpolados. O motivo do uso da interpolação dos pontos se deve para amenizar a oscilação encontrada na equação do ajuste quando a quantidade de pontos é pequena.

Além disso, a função do ajuste não apresenta um modelo completo por conta de que somente é levado em consideração os *bursts* temporalmente correlacionados. Isso é evidenciado nos primeiros pontos da Figura 24, onde o parâmetro k estimado é $\gg 1$, nela é possível notar que estes pontos se encontram muito acima do que os pontos do ajuste da equação 4.12. Esta diferença pode ser explicada considerando que há dois regimes de *bursts* atuando no sistema, um com os *bursts* correlacionados e outro não correlacionados. Apesar da incompletude do modelo da equação, os valores dos parâmetros obtidos pelo ajuste já são uma boa estimativa para se ter uma maior compreensão do tipo de regime que ocorre no plasma.

Para se obter a estimativa do parâmetro k , principalmente para os disparos em que foram utilizados o gás Argônio, o ajuste foi realizado em duas etapas. A primeira etapa consiste em realizar diversos cálculos da função de ajuste alterando iterativamente os valores dos parâmetros da equação 4.12 considerando todos os pontos do histograma, de forma que minimize o chi-quadrado utilizando somente os pontos que compõem o formato da elevação nos histogramas do intervalo de tempo entre *bursts*, ou seja, foram considerados os pontos que se encontram dentro do intervalo de $[0.1, 0.7]$ ms, como por exemplo a Figura 23. Note também que foi realizado o histograma com 200 canais a fim de aumentar a quantidade de pontos que dão a forma do pico encontrado no intervalo de tempo.

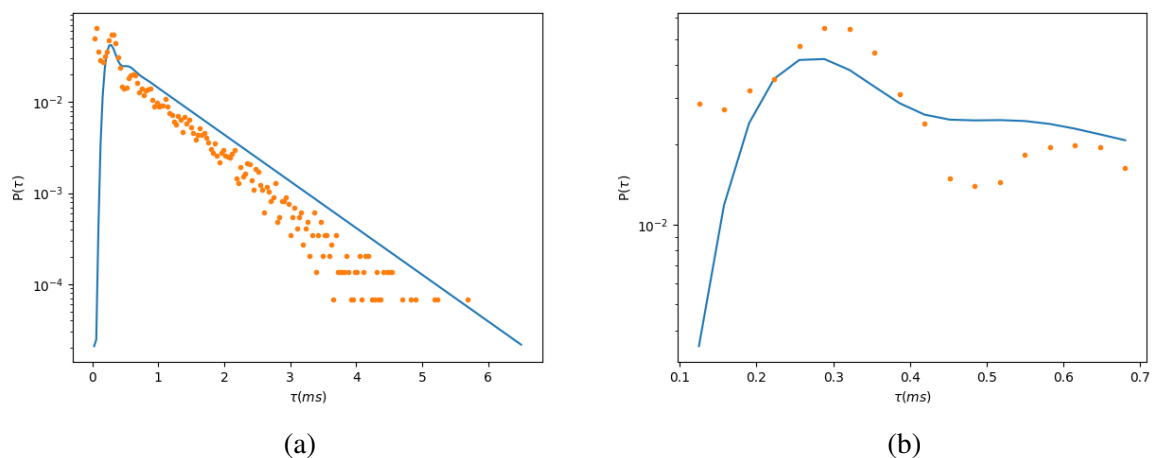


Figura 23 – Exemplo da primeira parte do ajuste minimizando o chi-quadrado para estimar os parâmetros iniciais (a). A ampliação mostrada em (b) corresponde à região entre 0,1 e 0,7 ms.

Por fim, obtidos a primeira estimativa dos parâmetros, a segunda etapa é realizado o ajuste utilizando MMQ incluindo todos os pontos do histograma com quantidade de canais produzidos de forma automatizada, porém fixando uma variação limite de 10% do parâmetro de forma k e de escala s encontrado na primeira parte. Assim o ajuste final pode ser visualizada na Figura 24

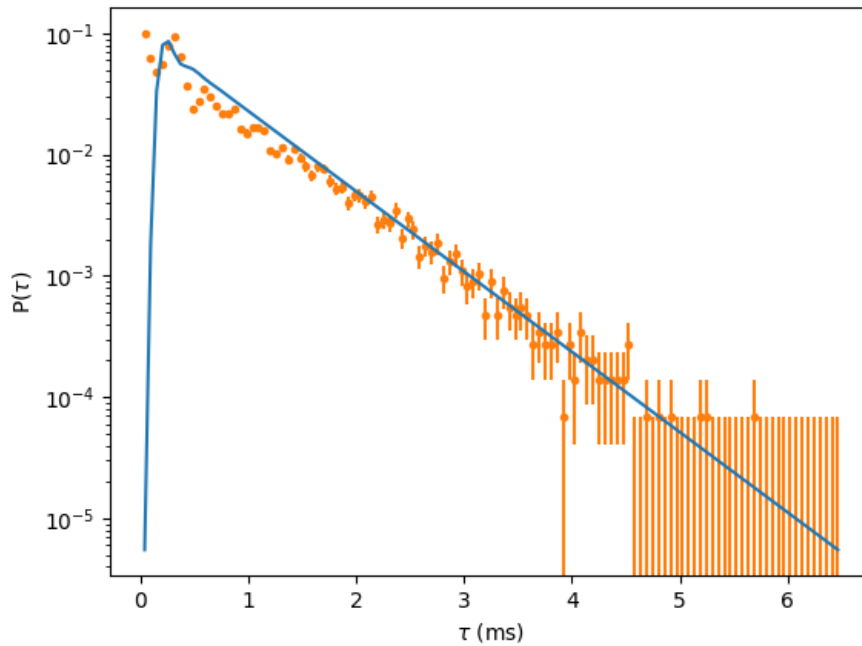


Figura 24 – Exemplo da segunda parte do ajuste obtendo as estimativas finais dos parâmetros.

Além disso, os parâmetros da equação se mostram fortemente correlacionados, conforme visto na matriz de correlação dos parâmetros:

$$\text{corr}(\alpha, k, s) = \begin{bmatrix} 1 & -0.99 & 0.99 \\ -0.99 & 1 & -0.99 \\ 0.99 & -0.99 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

A forte correlação negativa entre o parâmetro de forma k e de escala s ocorre pelo fato de que como a moda da distribuição gama, isto é, a posição do pico do histograma do intervalo de tempo pode ser estimado utilizando a relação $(k - 1)s$, então conforme o parâmetro k aumenta, é esperado que o parâmetro s diminua. Ademais, a forte correlação entre os parâmetros pode acarretar uma maior complexidade em realizar o ajuste, uma vez que a sua convergência da solução acaba sendo dificultada. Além de tudo isso, os resultados obtidos são tendenciosos, indicando que o modelo não está completo.

5 RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados alguns resultados da análise dos experimentos feitos com o gás Argônio e Hélio localizados na placa 3, que abrange um intervalo de raios de 1.11 metros a 1.25 metros, aplicando Bias positivo na placa 2 de cada conjunto de placas situadas dentro do Helimak.

5.1 Análise de descargas de plasma com gás Hélio

Alguns dos parâmetros do Helimak para que o regime dos pulsos correlacionados apareça durante as descargas de plasma utilizando o gás de Hélio são:

P (Torr)	2×10^{-5}
P (kW)	6
I_{tot} (A)	800
VF (ohm)	3.6
Raio (m)	1.11 - 1.25

O gás Hélio apresenta um intervalo de tempo médio entre os *bursts* cerca de 0.115(13) ms conforme pode ser visto no histograma feita com a moda do intervalo de tempo de cada conjunto de dados das sondas em cada descarga de plasma, como por exemplo visto na Figura 25.

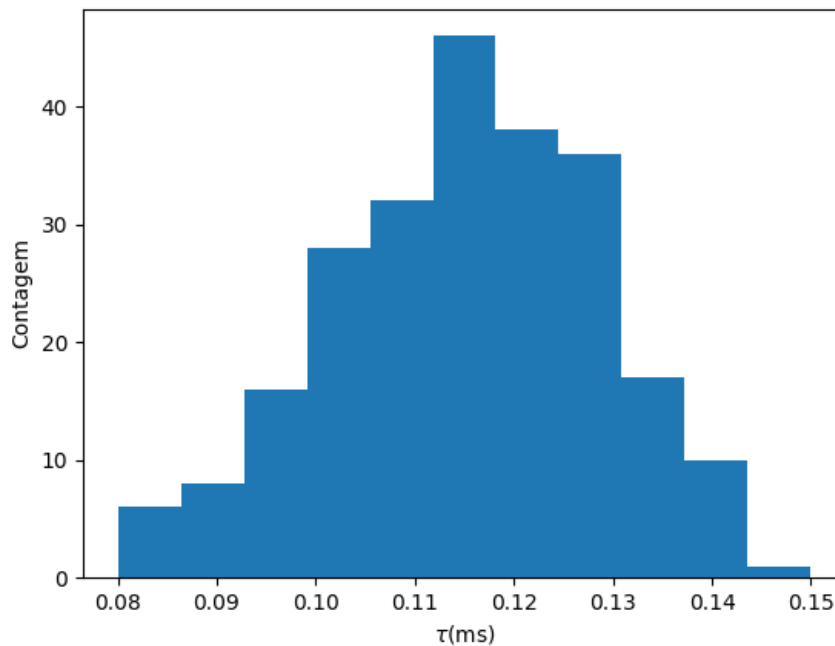


Figura 25 – Histograma dos valores da moda do intervalo de tempo entre *bursts* para os disparos 150310116-20.

Além disso, esta correlação também pode ser evidenciada tanto na média condicional do *burst* quanto no PSD dos valores do I_{sat} , como mostrado nas figuras 26 e 27, onde foi utilizado o disparo 150310120 e a sonda localizada na posição radial de 1.11 m na altura 0.253 m.

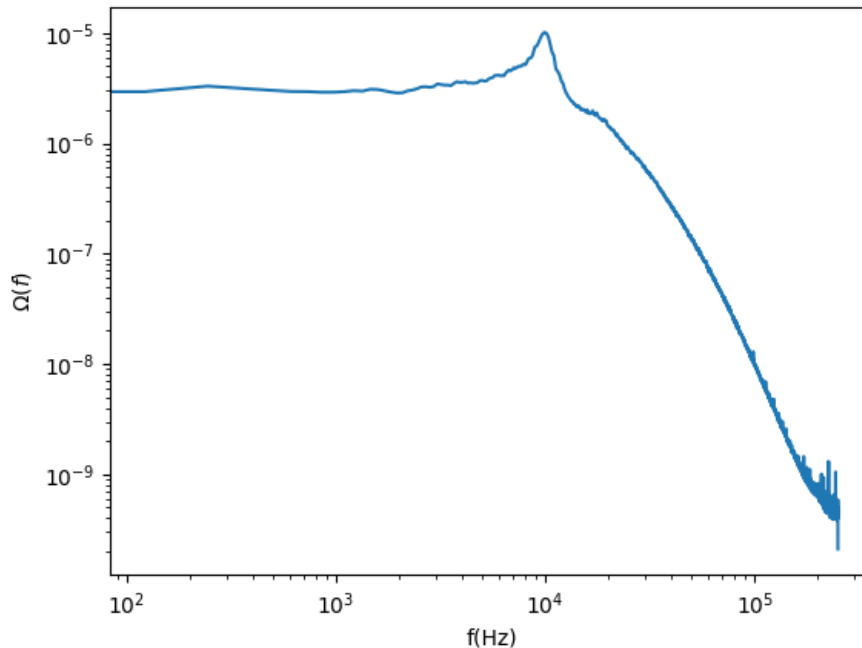
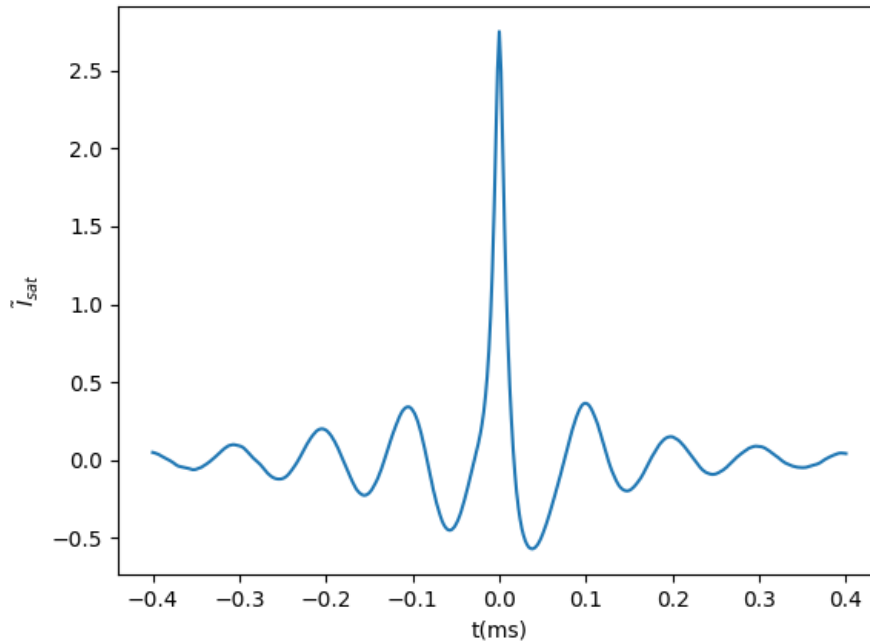


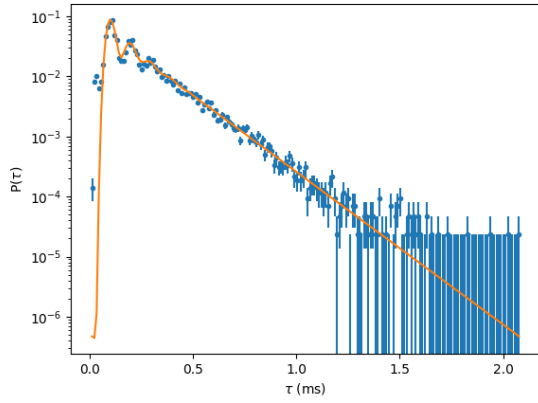
Figura 26 – PSD do I_{sat} utilizando 2^{12} pontos de cada segmento L com overlap de 50 %.

O pico na Figura 26 indica uma periodicidade dos pulsos no regime na série temporal da corrente de saturação. A frequência em que ocorre o aumento da densidade espectral de potência se encontra em torno de 9,89 kHz, o que corresponde a aproximadamente 0,10 ms. Além disso, vale comentar que é possível observar que, diferentemente do caso em que foi utilizado o gás Argônio, não ocorre um aumento da densidade nas frequências mais altas, como visto na Figura 12 na posição radial de 1.23 m.

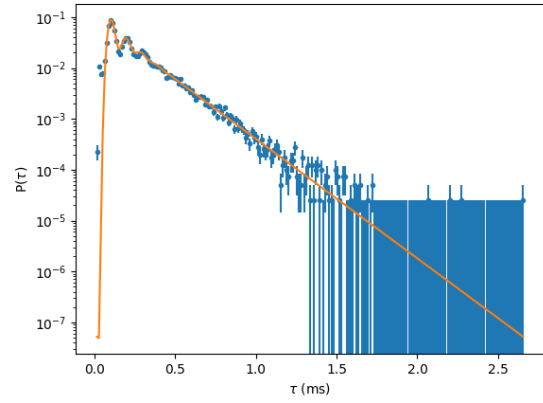
Figura 27 – Média condicional dos *bursts*.

É evidente a presença da ondulação na base da média condicional da Figura 27 com período de 0.1 ms, mostrando assim mais um indício da correlação temporal entre os *bursts*.

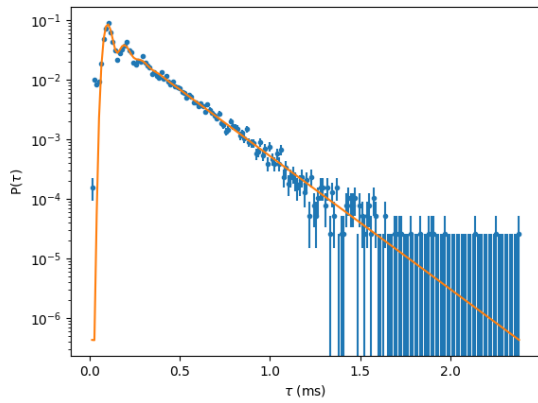
Por conta do rápido surgimento dos *bursts* temporalmente correlacionados, o ajuste a ser feito se torna mais facilitado, pois os pontos decorrentes do regime não correlacionados acaba não influenciando significativamente os primeiros pontos do histograma do intervalo de tempo, e uma vez que a equação do ajuste 4.12 somente é considerado os *bursts* temporalmente correlacionados, não foi necessário realizar o método do ajuste em 2 partes, e portanto foi feito o ajuste MMQ sobre diretamente os dados. Como pode ser visto no exemplo da Figura 28



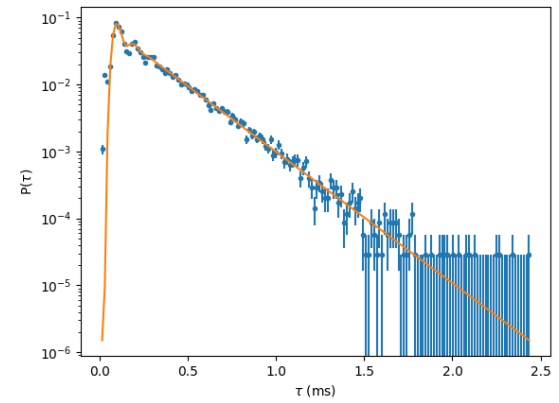
(a) $R = 1.11$ m



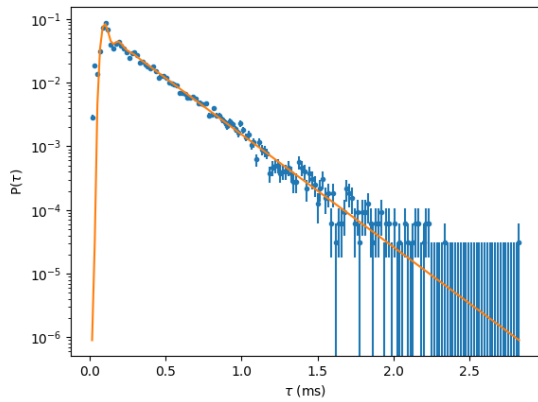
(b) $R = 1.13$ m



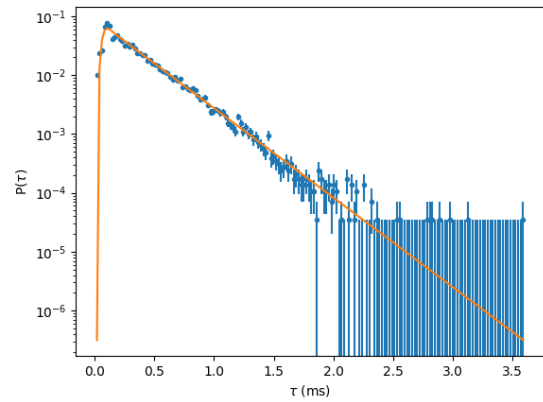
(c) $R = 1.15$ m



(d) $R = 1.17$ m



(e) $R = 1.19$ m



(f) $R = 1.21$ m

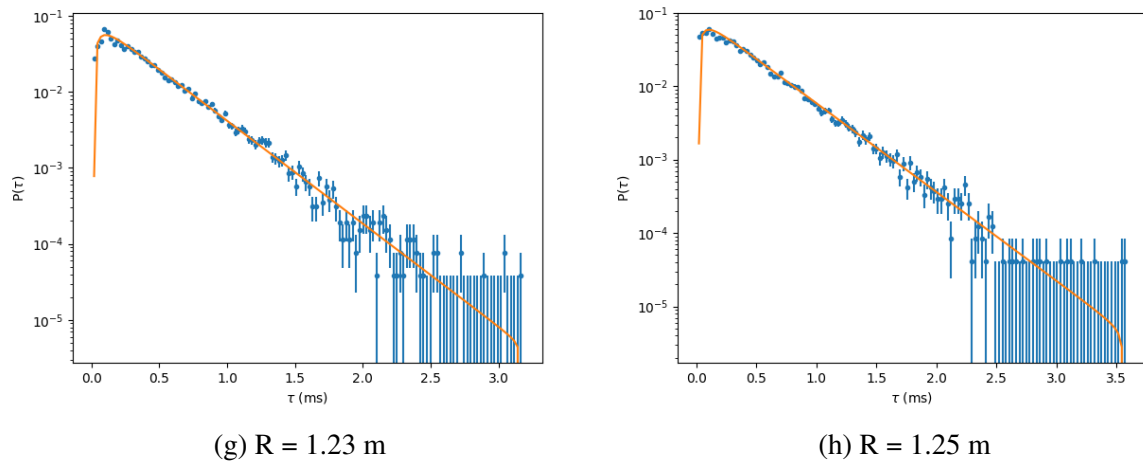


Figura 28 – Exemplos de ajustes realizados utilizando MMQ com valor do Bias de 14 V e na altura 0.233 m em posições radiais de 1,11 m (a) até 1,25 m (h).

É possível observar nas Figuras 28 (a) - (e) uma notável presença de picos dos pontos do histograma do intervalo de tempo entre *bursts*, indicando um regime de pulsos com forte correlação temporal, assim é esperado que o valor da estimativa do parâmetro de forma, k , seja muito maior do que 1. Este pico começa a aparentar cada vez mais discreto conforme a região radial analisada se afasta do centro da máquina, por exemplo visto na Figura 28f, indicando que há um enfraquecimento da correlação temporal, retornando então o valor do parâmetro k maior que 1, porém menor em comparação com as estimativas obtidas nas regiões mais centrais. Por fim, a correlação praticamente deixa de existir como observada na Figura 28h, onde os pontos do histograma praticamente segue uma exponencial e o ajuste retorna o parâmetro k em torno de 1.

Logo, realizando o ajuste para sondas na mesma posição radial em alturas distintas, é possível observar a variação de intensidade da correlação temporal entre *bursts*, mostradas nos perfis radiais do parâmetro k para diferentes alturas da Figura 29.

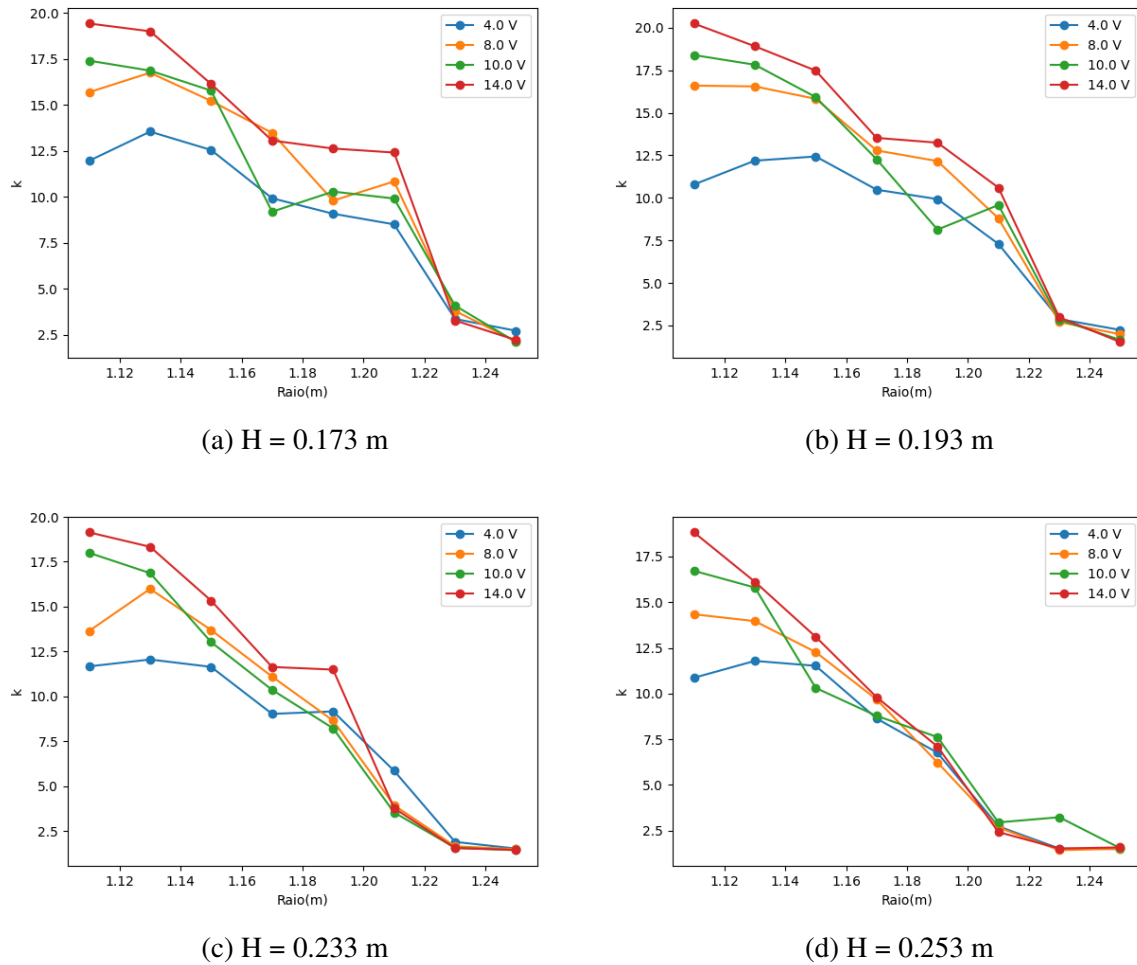


Figura 29 – Valores do parâmetro de forma k obtidos pelo ajuste nos histogramas do intervalo de tempo com diferentes sondas e valores de Bias para alturas de 0,173 m (a) a 0,253 m (d).

Já é possível notar na Figura 29 que o valor do parâmetro k tende a aumentar conforme se aproxima da posição radial de 1.11 m. Como pode ser visto na Figura 29 percebe-se que os pontos tendem a apresentar o mesmo comportamento em alturas diferentes, mostrando assim que a variação do parâmetro de forma k depende mais da posição radial e do Bias aplicado e não depende da altura, como já era de esperar por conta da configuração do Helimak. Além disso, o Bias aparenta não influenciar fortemente no parâmetro k nas posições radiais mais distantes, sugerindo que não basta apenas aplicar Bias para conseguir observar o regime correlacionado, é necessário também procurar em quais posições radiais este fenômeno ocorre. Tendo isso em mente, foi feito a média dos resultados de cada altura para compactar o resultado, assim foi obtido a figura:

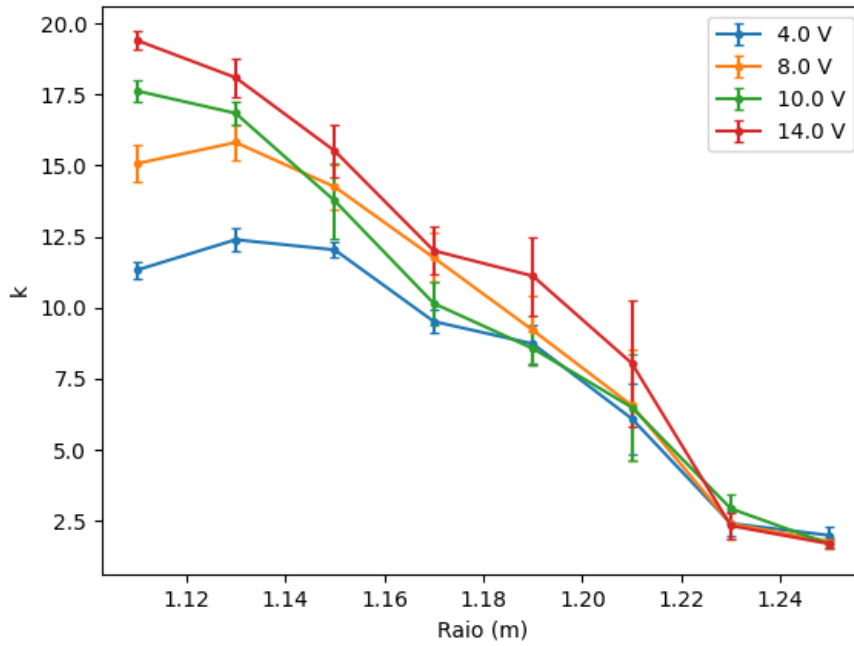


Figura 30 – Perfil médio do parâmetro k , com a barra da incerteza estimada pelo desvio-padrão da média.

Utilizando os mesmos pontos da Figura 30, é possível verificar a dependência do parâmetro k com o Bias aplicado, assim como pode ser visto, por exemplo, na Figura 31.

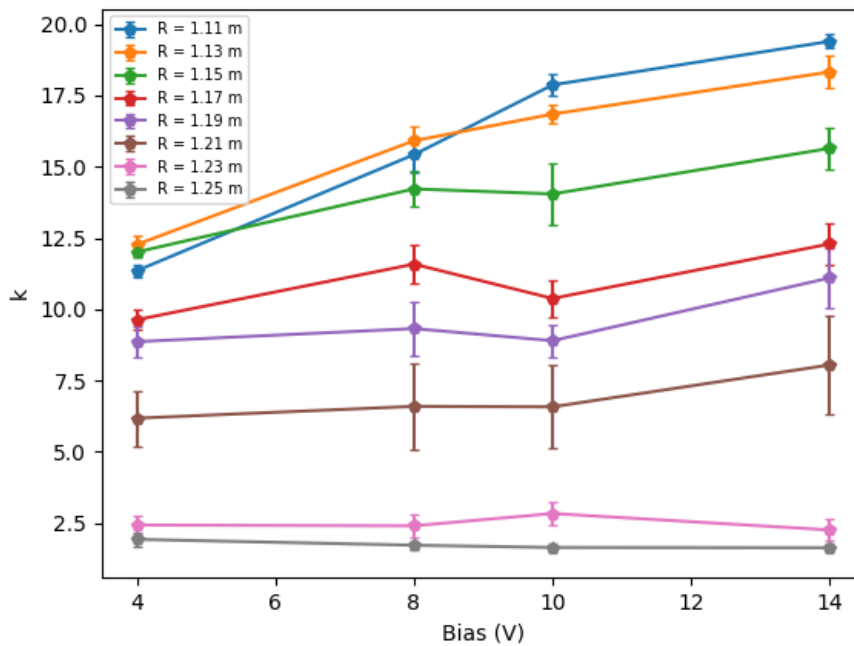


Figura 31 – Perfil do parâmetro de forma k em função do bias aplicado utilizando disparo com regime de gás hélio.

Pode-se perceber que na Figura 31, o parâmetro de forma k não depende muito do bias para as posições acima de 1.17 m, enquanto para as regiões mais próximas ao centro do Helimak é mais perceptível a dependência entre eles, de forma que o aumento do valor do bias acaba tornando o regime do tempo correlacionado mais evidente.

5.2 Análise de descargas de plasma com gás Argônio

Já foi mostrado na seção 3.2 alguns exemplos das principais características da flutuação de densidade utilizando o gás Argônio. Nesta configuração, o surgimento do regime correlacionado ocorre principalmente nas posições radiais de 1.15 m até 1.25 m com maior intensidade na região entre 1.21 m e 1.23 m. Para os disparos de 150311044 até 150311049 a média da moda do intervalo de tempo tem o valor de 0.32(4) ms, conforme visto na Figura 32.

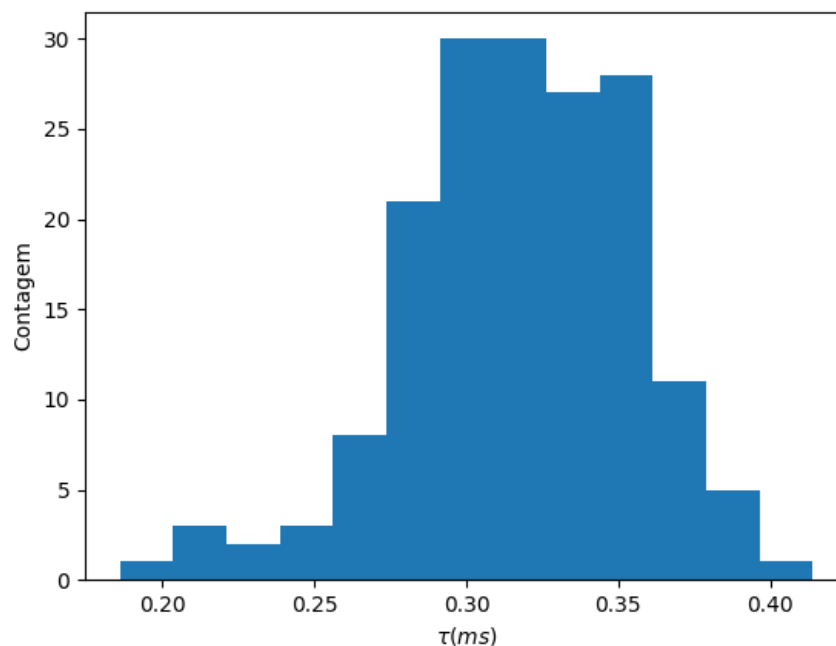
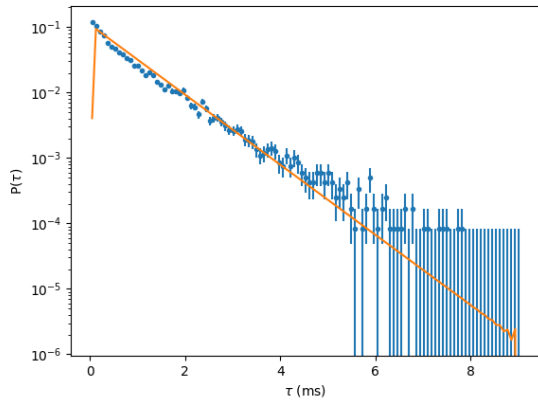
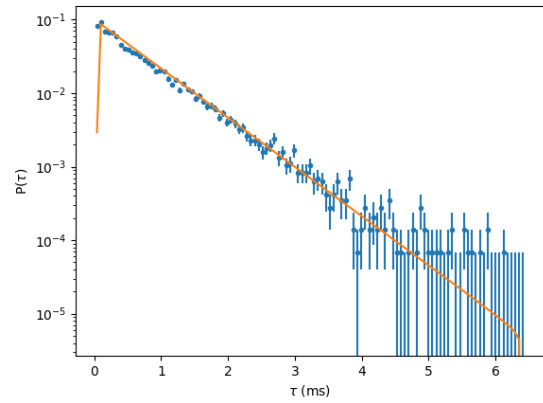


Figura 32 – Histograma dos valores da moda do intervalo de tempo para os disparos 150311044-49.

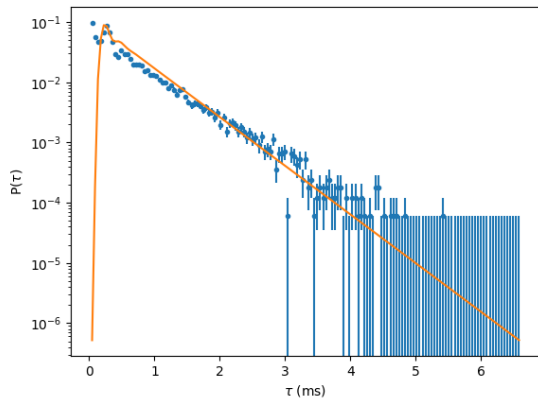
Devido ao maior intervalo de tempo médio em comparação ao caso do gás Hélio, isso faz com que o regime de fundo se torne mais suscetível a aparecer neste meio tempo, além de que isso influencia a forma do pico no histograma, pois ao ser contabilizado isso pode fazer com que o próximo *burst* que deveria ser correlacionado pode não ser mais considerado como um. Por isso que há um aumento nos primeiros pontos do histograma, diferentemente do que é visto com o experimento realizado utilizando o gás Hélio. Portanto, o ajuste direto da equação 4.12 por meio do MMQ não se mostra adequada, para isso foi feito o ajuste de 2 partes desenvolvida neste trabalho. Aplicado a metodologia do ajuste, os resultados podem ser vistos na Figura 33.



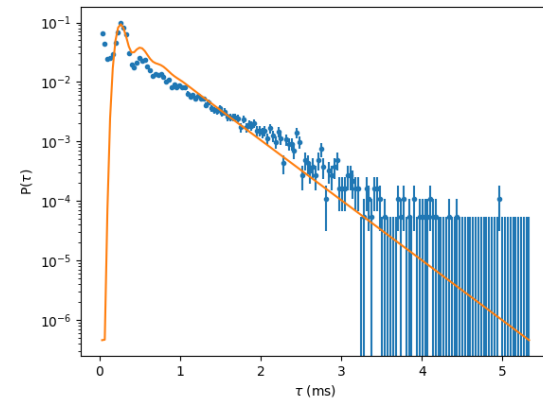
(a) $R = 1.11$ m



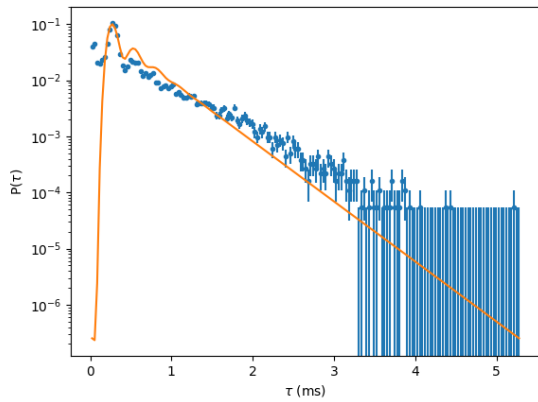
(b) $R = 1.13$ m



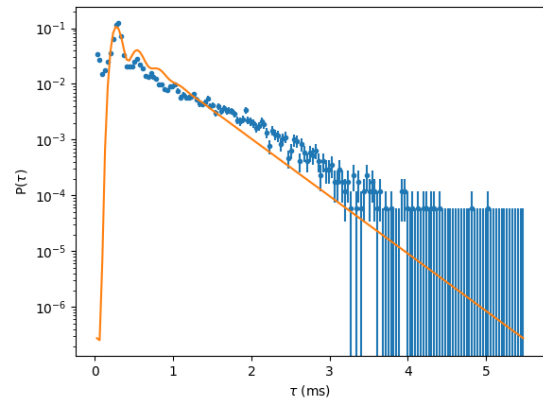
(c) $R = 1.15$ m



(d) $R = 1.17$ m



(e) $R = 1.19$ m



(f) $R = 1.21$ m

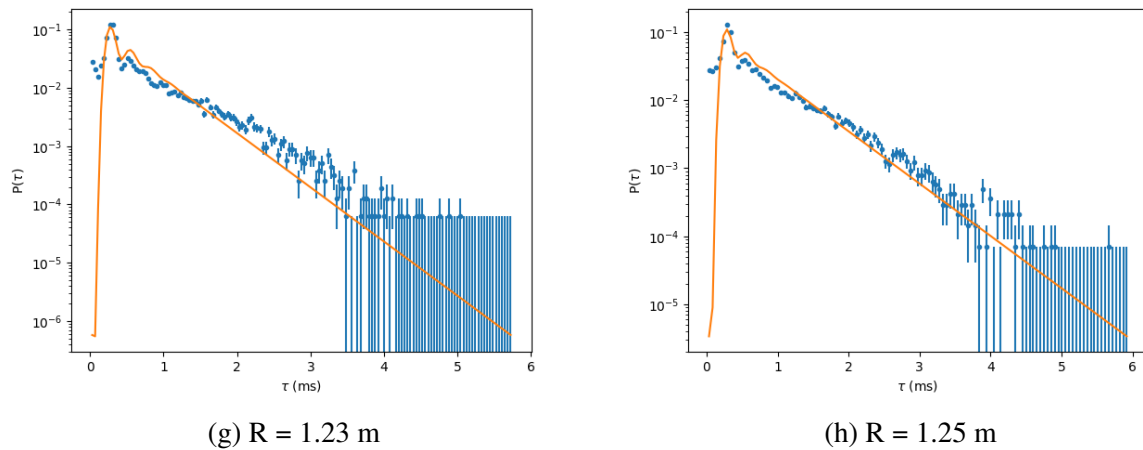


Figura 33 – Exemplos de ajustes realizados utilizando o método de duas etapas com valor do Bias de 14 V e na altura 0.233 m para posições radiais de 1,11 m (a) até 1,25 m (h).

Os histogramas das posições radiais mais centrais, como nas Figuras 33a e 33b, não é clara a evidência da correlação temporal entre *bursts* por conta da falta do surgimento do pico nos histogramas, portanto o ajuste retorna o valor do parâmetro de forma, k , em torno de 1. A Figura 33c apresenta uma leve aparição do pico, indicando um certo nível de correlação temporal, porém não muito intenso, assim o parâmetro k retorna um valor não muito maior do que 1. As figuras 33 (d) - (h) apresentam uma forma de pico da correlação temporal bem definidos, e que apesar do resultado do método não realizar um ajuste bom para pontos posteriores e anteriores ao pico, o ajuste feito nos pontos que compõem o pico se aparenta razoavelmente bom o suficiente para indicar a existência do regime de *bursts* temporalmente correlacionados.

Por fim, foi aplicando a mesma metodologia para diferentes alturas e Bias aplicado na segunda placa, foi possível observar que, dado os perfis do parâmetro k em relação à posição radial mostrados na Figura 34, nesta mesma figura todos os perfis apresentam a mesma tendência de comportamento para as diferentes alturas.

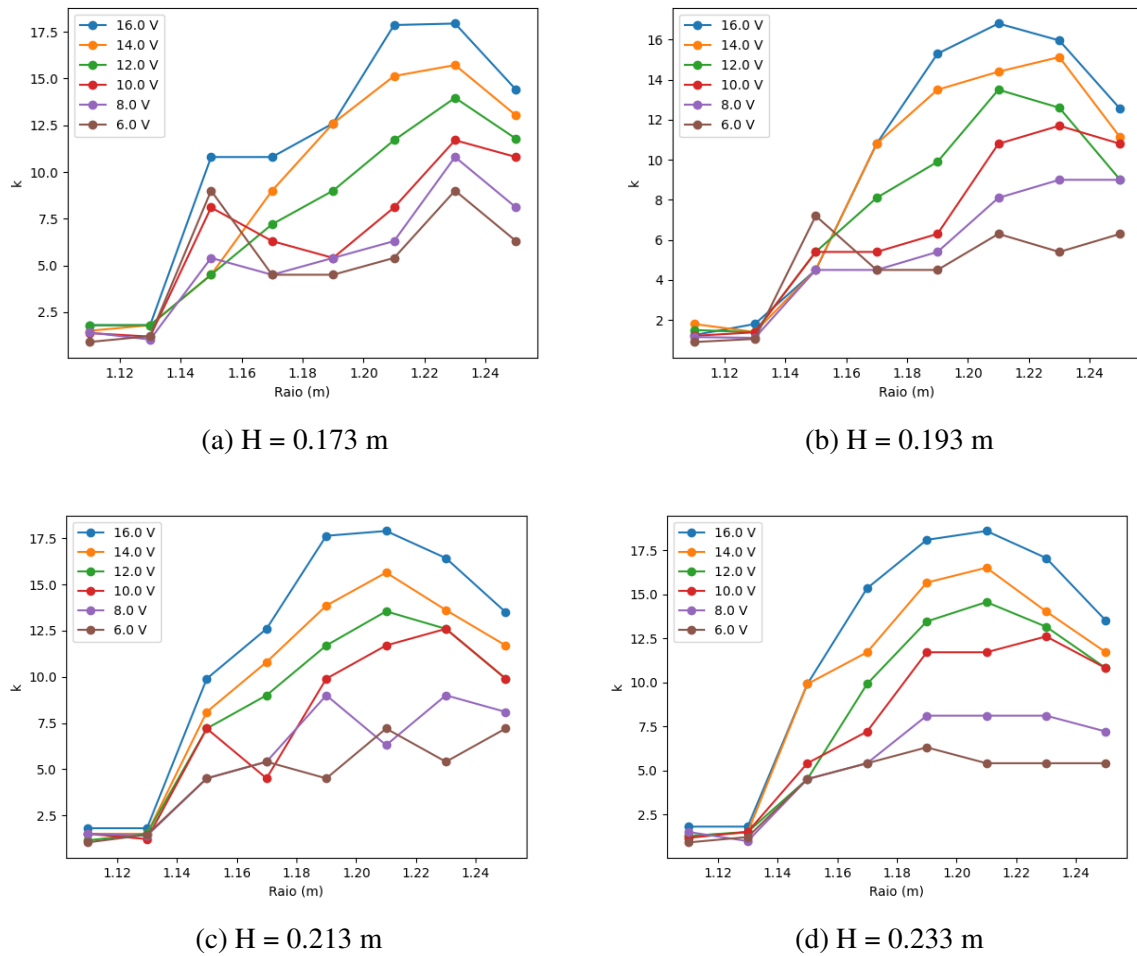


Figura 34 – Valores do k obtidos pelo ajuste nos histogramas do intervalo de tempo com diferentes sondas e valores de Biais para alturas de 0,173 m (a) até 0,233 m (d).

Por fim, realizando a média do k para cada altura, assim como foi feito no caso do gás Hélio, o perfil radial médio do parâmetro k dos disparos 150311044-150311049 pode ser visto na Figura 35.

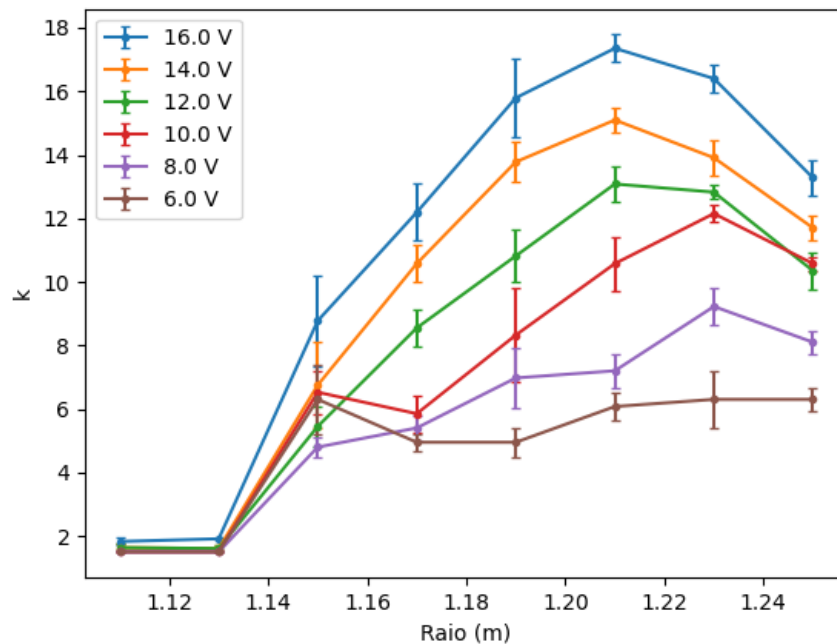
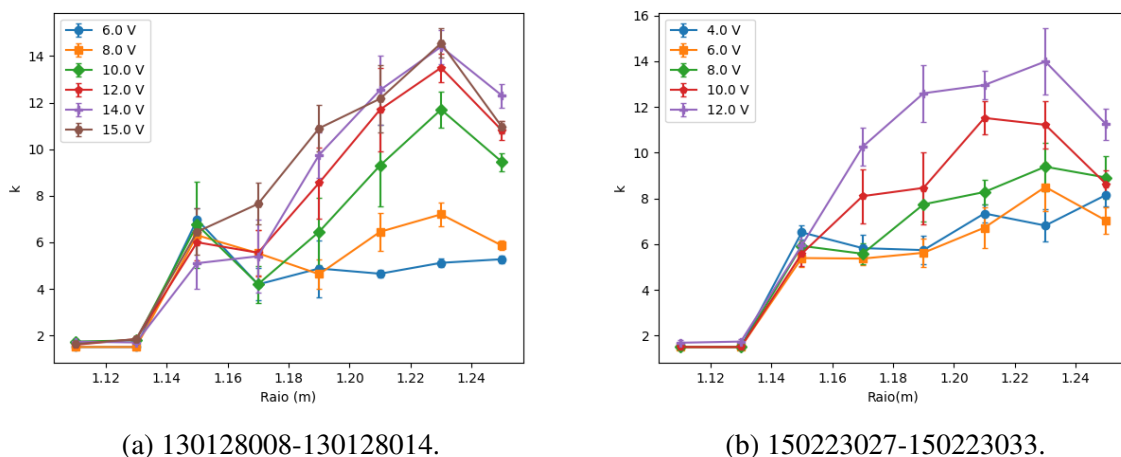


Figura 35 – Perfil médio do parâmetro k para os disparos 150311044-49.

Também foram feitos os mesmos procedimentos de ajustes para os disparos 130128008 - 130128014 e 150223027 - 150223033, que possuem configurações de máquina semelhantes na mesma região.



(a) 130128008-130128014.

(b) 150223027-150223033.

Figura 36 – Valores do parâmetro de forma k obtidos pelo ajuste nos histogramas do intervalo de tempo com diferentes sondas e valores de Bias para duas séries de disparos: 130128008-14 (a) e 150223027-33 (b).

É possível notar que as figuras 35, 36a, 36b apresentam a mesma tendência de comportamento, onde é notável que o parâmetro k tende a crescer conforme se distância do centro do Helimak até um certo ponto radial em torno de 1.21 m a 1.23 m e posteriormente possui uma

tendência de queda. Nas posições 1.11m e 1.13m não aparentam haver um regime correlacionado, uma vez que nestes pontos $k \approx 1$. Ademais, na região entre 1.17 m a 1.25 m, é perceptível o aumento do parâmetro k ao aumentar também o Bias, sugerindo que nesta região o regime correlacionado se torna mais intenso ao depender do potencial elétrico aplicado. Esta relação pode ser melhor visualizada pela Figura 37, em que foram utilizados os pontos da Figura 35 para servir de exemplo.

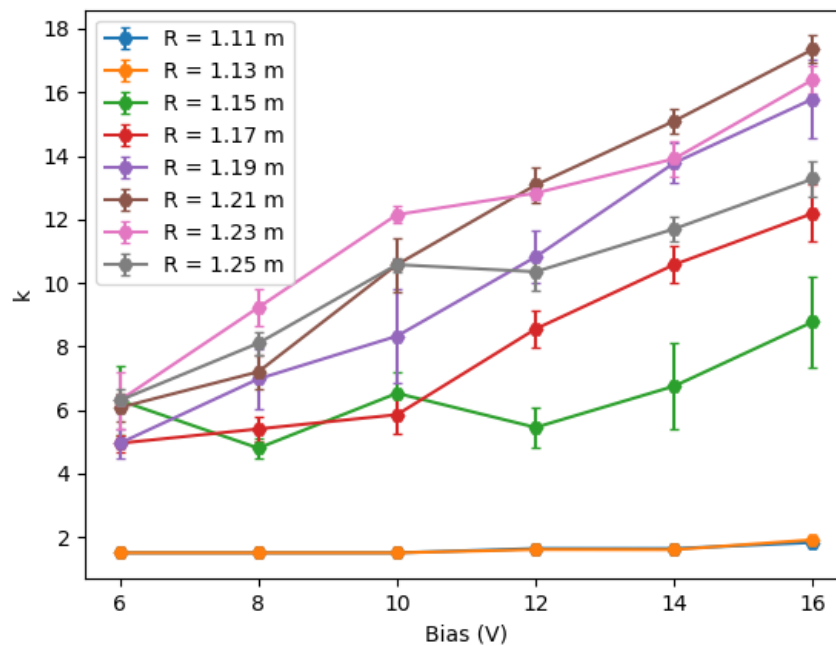


Figura 37 – perfil do parâmetro de forma k em função do bias aplicado, os disparos de exemplo utilizados foram 150311044-49.

A Figura 37 mostra que, para as posições radiais 1.11 m e 1.13 m, não há correlação entre o bias aplicado com o parâmetro k . Para a posição 1.15 m possui uma leve correlação e para as posições de 1.17 m até 1.25 m possuem uma correlação forte.

5.3 Discussões

A análise foi realizada em alguns disparos em uma determinada região do Helimak onde foi possível identificar a atuação do regime dos *bursts* temporalmente correlacionados evidenciados nos histogramas do intervalo de tempo. Durante o processo de seleção, percebeu-se que os disparos precisavam possuir as configurações da máquina semelhantes dadas na tabela 1 .

Tabela 1 – Alguns dos parâmetros iniciais dos disparos analisados

	Ar	He
Pressão (Torr)	1 E-5	2 E-5
P (kW)	6	6
I_{tot} (A)	800	800
VF (ohms)	3.6	3.6
Raio (m)	1.15-1.25	1.1 - 1.21

Valores muito fora dos parâmetros fazem com que os efeitos do regime de correlação tendem a não aparecerem na região analisada no histograma do intervalo de tempo, como por exemplo para valores de $I_{tot} \gg 800A$ ou quando $VF = 10$ ohms.

A utilização do gás Hélio com os parâmetros da máquina dados pela tabela para o estudo do regime correlacionado com o atual modelo se mostra interessante por conta de uma maior facilidade em se realizar o ajuste em comparação ao que foi visto com o gás Argônio. Considerando a hipótese da coexistência de dois regimes, sendo um deles o regime do pulso de fundo, tal regime acaba não influenciando significativamente a forma do pico apresentado no histograma do intervalo de tempo, além de que os primeiros pontos do histograma condizem mais com o modelo, deixando assim a realização do ajuste mais simples. Portanto, realizar mais experimentos com o gás Hélio no Texas Helimak pode ser de grande interesse para o estudo do *bursts* temporalmente correlacionados.

Pode-se notar também que, comparando o perfil das figuras 31 e 37, o parâmetro de forma k para o gás de Argônio aparentemente apresenta uma dependência mais forte com o bias aplicado em comparação ao gás de Hélio. Além disso, pelas figuras 30 e 35, houve um deslocamento na região do surgimento do regime correlacionado, o caso do gás Hélio tal região se encontra mais no interior da máquina e a presença de tal regime é gradativamente menor nas regiões mais externas, ao contrário do que se observa ao utilizar o gás Argônio, para as regiões mais internas o regime correlacionado tende a ser menos intenso, possui o seu pico de intensidade em torno de 1.21 m a 1.23 m e na posição radial 1.25 m tende a ter uma recaída.

Em casos em que não há evidência da presença do regime correlacionado nos histogramas do intervalo de tempo entre *bursts*, isto é, seguem uma distribuição exponencial, não há vantagem em realizar o ajuste utilizando a equação 4.12 e exhibe certos comportamentos indesejados. Como pode ser visto, por exemplo, na Figura 33a, onde há uma leve presença de oscilação nos últimos pontos da função de ajuste. Este comportamento ocorre principalmente quando o parâmetro $k \approx 1$ e é amenizada ao utilizar uma grande quantidade de pontos interpolados durante a transformação inversa da equação 4.12. Por esse motivo, a utilização da equação não é muito apropriada para casos de regimes de pulsos não correlacionados. Ademais, além de ter sido mostrado que o regime dos pulsos temporalmente correlacionado se mostra cada vez mais presente conforme o potencial elétrico é aumentado em determinadas posições radiais, é possível notar o gradativo aumento da intensidade de atuação do tal regime em comparação com o regime aleatório, facilitando assim o procedimento da estimativa dos parâmetros k e s .

Ademais, a presença do regime correlacionado também é um indicativo da periodicidade do surgimento de *burst*, algo que não é considerado no modelo padrão (GARCIA *et al.*, 2016). É evidente que tal período depende do tipo de gás que está sendo utilizado durante o disparo, enquanto para o gás Hélio o período do surgimento é em torno de 0.1 ms, para o gás Argônio é de aproximadamente 0.3 ms. É importante lembrar que a periodicidade também é manifestada no PSD, por meio da aparição de uma elevação do espectro em uma determinada frequência que condiz com a moda do intervalo de tempo que corresponde ao pico encontrado nos histogramas, e na média condicional dos *bursts*, através dos surgimentos de uma ondulação na base da forma da média do pulso.

6 CONCLUSÃO

Como dito na introdução, o objetivo deste trabalho é avaliar se o fenômeno da correlação temporal entre *bursts* sucessivos identificado no artigo de referência (PEREIRA *et al.*, 2019) era observado em outras descargas de plasma com a máquina em configurações diferentes. Logo, foi utilizado o modelo desenvolvido no mesmo artigo para determinar o parâmetro de forma k da distribuição do regime temporalmente correlacionado, realizando o ajuste da equação 4.12 diretamente do histograma do intervalo de tempo entre *bursts* sucessivos.

Foi notado que o modelo proposto não está completo, uma vez que não foi considerado o regime do pulso de fundo na sua formulação da equação de ajuste. Portanto, foi desenvolvido neste trabalho um método de ajuste separado em duas partes, sendo que a primeira consiste em calcular iterativamente os parâmetros da equação e comparar com os pontos que dá a forma do pico encontrado no histograma de forma a minimizar o chi-quadrado, e a segunda parte é de realizar o ajuste por Método de Mínimos Quadrados impondo um limite de variação nos parâmetros de forma e escala, k e s , respectivamente.

A hipótese do regime do pulso de fundo pode ser verificada por meio de simulações, baseado no modelo da SPTM (GARCIA *et al.*, 2016) onde foram feitas algumas modificações como a adição de outro regime de pulsos, baseado no modelo tradicional, não correlacionados com o regime principal, em que este último tem como a PDF do seu intervalo de tempo uma distribuição gama com os parâmetros de forma e escala, k e s .

Por fim, foram feitos os ajustes nos histogramas do intervalo de tempo entre os *bursts* com gases Argônio e Hélio na região radial de 1,11 m a 1,25 m do Texas Helimak. Descobriu-se que, para o caso do gás Hélio, o ajuste pode ser feito diretamente utilizando o Método de Mínimos Quadrados, uma vez que os pulsos de fundo não influenciam significadamente a forma do pico no histograma. Em contrapartida, no regime utilizando o gás Argônio foi necessário realizar o método do ajuste em duas etapas.

Realizado os ajustes, foi possível observar o comportamento do aumento da intensidade da correlação temporal dos *bursts*, indicado pelo perfil do parâmetro de forma, k , em função da posição radial com diferentes valores de Bias aplicado durante os disparos, como visto no artigo de referência (PEREIRA *et al.*, 2019), em que foi analisado somente os disparos que utilizaram o gás Argônio. No presente trabalho, além de ter visto a reprodutibilidade do fenômeno da correlação em três diferentes campanhas de disparos utilizando o gás Argônio, também foi observado essa tal ocorrência nos disparos em que foram utilizados o gás Hélio. Além disso, foi observado um deslocamento da região em que ocorre a correlação temporal entre os *bursts*, em que essa ocorrência acontece na região mais central da máquina, enquanto para o gás Argônio, ocorre em posições mais distantes do centro. Além disso, é notável que o tempo médio da periodicidade do regime temporalmente correlacionado entre os *bursts* dos dois gases são diferentes, enquanto para o gás Hélio tem um tempo de surgimento mais rápido de cerca de 0,11 ms, o Argônio tem o tempo médio de aproximadamente 0,35 ms.

Para trabalhos futuros, seria interessante abranger ainda mais a análise para outras descargas com diferentes configurações do Texas Helimak, verificar se o fenômeno do regime correlacionado pode acontecer em tokamaks. Pode-se também desenvolver ainda mais o modelo proposto incluindo o regime do pulso de fundo e testar a nova equação nos experimentos do Texas Helimak, e por fim, poderia ser desenvolvido um trabalho teórico visando modelar a periodicidade da ocorrência do *burst* dada as condições dos experimentos.

REFERÊNCIAS

- ANTAR, G. Y.; COUNSELL, G.; YU, Y.; LABOMBARD, B.; DEVYNCK, P. Universality of intermittent convective transport in the scrape-off layer of magnetically confined devices. **Physics of Plasmas**, American Institute of Physics, v. 10, n. 2, p. 419–428, 2003. Citado na página 13.
- BENCZE, A. *et al.* Characterization of edge and scrape-off layer fluctuations using the fast li-bes system on compass. **Plasma Physics and Controlled Fusion**, IOP Publishing, v. 61, n. 8, p. 085014, 2019. Citado na página 27.
- BITTENCOURT, J. **Fundamentals of Plasma Physics**. [S.l.: s.n.], 2010. ISBN 978-1-4419-1930-4. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 12.
- CHEN, F. F. **An indispensable truth: how fusion power can save the planet**. [S.l.]: Springer, 2011. v. 3. Citado na página 8.
- _____. **Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion**. [S.l.: s.n.], 2015. ISBN 978-3-319-22308-7. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 8.
- GARCIA, O. *et al.* Sol width and intermittent fluctuations in kstar. **Nuclear Materials and Energy**, v. 12, p. 36–43, 2017. ISSN 2352-1791. Proceedings of the 22nd International Conference on Plasma Surface Interactions 2016, 22nd PSI. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352179116301430>>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 27.
- GARCIA, O. E.; KUBE, R.; THEODORSEN, A.; PÉCSELI, H. Stochastic modelling of intermittent fluctuations in the scrape-off layer: Correlations, distributions, level crossings, and moment estimation. **Physics of Plasmas**, AIP Publishing, v. 23, n. 5, 2016. Citado 4 vezes nas páginas 13, 22, 54 e 55.
- GARCIA, O. E.; KUBE, R.; THEODORSEN, A.; LABOMBARD, B.; TERRY, J. Intermittent fluctuations in the alcator c-mod scrape-off layer for ohmic and high confinement mode plasmas. **Physics of Plasmas**, AIP Publishing, v. 25, n. 5, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 27.
- GENTLE, K. W.; HE, H. Texas helimak. **Plasma Science and Technology**, IOP Publishing, v. 10, n. 3, p. 284, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 21.
- HELENE, O. A.; VANIN, V. R. **Tratamento estatístico de dados em física experimental**. [S.l.]: Editora Blucher, 1991. Citado na página 18.
- HERNANDEZ, W. A.; GUIMARÃES-FILHO, Z. O.; GRENFELL, G. G.; NASCIMENTO, I. C. Spatial inhomogeneity effects on burst temperature estimation using a triple probe configuration in tokamak chauffage alfvén brésilien tokamak. **Journal of Plasma Physics**, v. 85, n. 4, p. 905850407, 2019. Citado na página 13.
- ITER. 2024. <https://www.iter.org/sci/BeyondITER>. Citado na página 6.
- KRASHENINNIKOV, S.; SMOLYAKOV, A.; KUKUSHKIN, A. **On the edge of magnetic fusion devices**. [S.l.]: Springer, 2020. Citado na página 13.
- MAGAUD, P.; MARBACH, G.; COOK, I. Nuclear fusion reactors. **Encyclopedia of Energy**, Elsevier: New York, v. 4, p. 365–381, 2004. Citado na página 6.

- PEREIRA, F. A. C. *et al.* Statistical properties of intermittent bursts in the texas helimak. **Physics of Plasmas**, AIP Publishing LLC, v. 26, n. 5, p. 052301, 2019. Citado 11 vezes nas páginas vi, vii, 11, 13, 29, 31, 35, 36, 37, 55 e 59.
- _____. Coexistence of turbulence regimes in the Texas Helimak. **Physics of Plasmas**, v. 28, n. 3, p. 032301, 03 2021. ISSN 1070-664X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/5.0033381>>. Citado na página 33.
- PODDER, P.; KHAN, T. Z.; KHAN, M. H.; RAHMAN, M. M. Comparative performance analysis of hamming, hanning and blackman window. **International Journal of Computer Applications**, Foundation of Computer Science (FCS), NY, USA, New York, USA, v. 96, n. 18, p. 1–7, June 2014. ISSN 0975-8887. Disponível em: <<https://ijcaonline.org/archives/volume96/number18/16891-6927/>>. Citado na página 17.
- RITCHIE, H.; ROSADO, P.; ROSER, M. Energy production and consumption. **Our World in Data**, 2020. <https://ourworldindata.org/energy-production-consumption>. Citado na página 6.
- STANGEBY, P. C. *et al.* **The plasma boundary of magnetic fusion devices**. [S.l.]: Institute of Physics Pub. Philadelphia, Pennsylvania, 2000. v. 224. Citado na página 11.
- THEODORSEN, A.; GARCIA, O. E. Probability distribution functions for intermittent scrape-off layer plasma fluctuations. **Plasma Physics and Controlled Fusion**, IOP Publishing, v. 60, n. 3, p. 034006, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 15, 27 e 28.
- THEODORSEN, A.; GARCIA, O. E.; RYPDAL, M. Statistical properties of a filtered poisson process with additive random noise: distributions, correlations and moment estimation. **Physica Scripta**, IOP Publishing, v. 92, n. 5, p. 054002, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 31.
- WALKDEN, N. *et al.* Statistical analysis of the ion flux to the jet outer wall. **Nuclear Fusion**, IOP Publishing, v. 57, n. 3, p. 036016, 2017. Citado na página 27.
- WELCH, P. The use of fast fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms. **IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics**, v. 15, n. 2, p. 70–73, 1967. Citado na página 17.
- WOOTTON, A. *et al.* Fluctuations and anomalous transport in tokamaks. **Physics of Fluids B: Plasma Physics**, American Institute of Physics, v. 2, n. 12, p. 2879–2903, 1990. Citado na página 13.
- ZURITA, M.; GUIMARÃES-FILHO, Z. O. **Modelo estocástico de flutuações turbulentas de plasma aplicado ao tokamak TCABR**. Tese (Doutorado) — Universidade de Sao Paulo, 2022. Citado na página 31.
- ZURITA, M.; HERNANDEZ, W.; CREPALDI, C.; PEREIRA, F. A. C.; GUIMARAES-FILHO, Z. Stochastic modeling of plasma fluctuations with bursts and correlated noise in tcabr. **Physics of Plasmas**, AIP Publishing, v. 29, n. 5, 2022. Citado 3 vezes nas páginas 13, 28 e 31.

APÊNDICE A – DEDUÇÃO DA EQUAÇÃO DA FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE DO INTERVALO DE TEMPO ENTRE BURSTS

Para a dedução da equação 4.12, parte-se da equação A.1 definida no trabalho (PEREIRA *et al.*, 2019), onde α é a probabilidade de se detectar o burst na série e ρ é a função da PDF do sistema:

$$P(\tau) = \alpha \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \alpha)^{j-1} \int_0^{\infty} \delta(\tau - \sum_{i=1}^j t_i) \prod_{i=1}^j \rho(t_i) dt_i. \quad (\text{A.1})$$

É possível observar a complexidade da eq A.1 dificulta o ajuste a ser feito. Para então simplificar a equação, foi feita a transformada de Laplace na integral da eq A.1, assim:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(P(\tau)) &= \int_0^{\infty} e^{-s\tau} \int_0^{\infty} \delta(\tau - \sum_{i=1}^j t_i) \prod_{i=1}^j \rho(t_i) dt_i d\tau \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-s\tau} \delta(\tau - \sum_{i=1}^j t_i) \prod_{i=1}^j \rho(t_i) dt_i d\tau \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s \sum_{i=1}^j t_i} \prod_{i=1}^j \rho(t_i) dt_i \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st_1} \rho(t_1) dt_1 \int_0^{\infty} e^{-st_2} \rho(t_2) dt_2 (\dots) \int_0^{\infty} e^{-st_j} \rho(t_j) dt_j \\ &= \hat{\rho}(\omega) \times \hat{\rho}(\omega) \times (\dots) \times \hat{\rho}(\omega). \end{aligned}$$

Note que a integral é uma convolução de probabilidade, em que foi utilizado a propriedade de $\mathcal{L}(F * G) = \mathcal{L}(F) * \mathcal{L}(G)$, por conta deste motivo que foi possível a simplificação da integral. Logo, é possível escrever a equação A.1 da seguinte forma:

$$P(\omega) = \alpha \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \alpha)^{j-1} \hat{\rho}(\omega)^j. \quad (\text{A.2})$$

É possível reescrever a somatória da seguinte forma

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} (1 - \alpha)^{j-1} \hat{\rho}^j &= \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \alpha)^n \hat{\rho}^{n+1} \\ &= \hat{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \alpha)^n \hat{\rho}^n \\ &= \hat{\rho} (1 + r + r^2 + \dots + r^n) \\ S_n &= \hat{\rho} (1 + r + r^2 + \dots + r^n). \end{aligned}$$

Onde onde $r = (1 - \alpha)\hat{\rho}$. Considerando agora para S_{n+1} , é obtido que

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \hat{\rho} (1 + r + r^2 + \dots + r^n + r^{n+1}) \\ &= \hat{\rho} (1 + r(1 + r^2 + \dots + r^n)) \\ &= \hat{\rho} (1 + \frac{rS_n}{\hat{\rho}}). \end{aligned}$$

Mas note também que também é possível expressar a somatória da seguinte forma $S_{n+1} = S_n + \hat{\rho}r^{n+1}$, assim fazendo as devidas substituições, a somatória S_n pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} S_n + \hat{\rho}r^{n+1} &= \hat{\rho}\left(1 + \frac{rS_n}{\hat{\rho}}\right) \\ S_n(1-r) &= \hat{\rho}(1-r^{n+1}) \\ S_n &= \frac{\hat{\rho}(1-r^{n+1})}{1-r}. \end{aligned}$$

Note que como $r = (1-\alpha)\hat{\rho} < 1$, para $n \rightarrow \infty \Rightarrow r^{n+1} \rightarrow 0$, logo é possível reescrever o S_n como:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{\hat{\rho}}{1-r} \\ &= \frac{\hat{\rho}}{1-\hat{\rho}(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Reescrevendo a equação A.2 substituindo o resultado anterior na somatória:

$$P(\omega) = \frac{\alpha\hat{\rho}(\omega)}{1-(1-\alpha)\hat{\rho}(\omega)}. \quad (\text{A.3})$$

Agora, lembrando que $\hat{\rho}(\omega)$ é a transformada de Laplace de uma função ρ qualquer, no caso da PDF do intervalo de tempo entre os bursts, foi adotado que o ρ segue uma distribuição gamma:

$$\rho(\tau) = \frac{\tau^{k-1}e^{-\frac{\tau}{s}}}{\Gamma(k)s^k}. \quad (\text{A.4})$$

Realizando então a sua transformada de Laplace, é obtido que:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(\omega) &= \int_0^\infty \rho(\tau)e^{-s\tau}d\tau \\ &= \int_0^\infty \frac{\tau^{k-1}e^{-\frac{\tau}{s}}}{\Gamma(k)s^k}e^{-i\omega\tau}d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(k)s^k} \int_0^\infty \tau^{k-1}e^{-\tau(\frac{1}{s}+i\omega)}d\tau. \end{aligned}$$

É possível resolver a integral utilizando o método da substituição, realizando a seguinte conversão $(\frac{1}{s} + i\omega)\tau = u$, temos também que $d\tau = \frac{du}{\frac{1}{s} + i\omega}$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \tau^{k-1}e^{-\tau(\frac{1}{s}+i\omega)}d\tau &= \int_0^\infty \left(\frac{u}{\frac{1}{s}+i\omega}\right)^{k-1} \frac{e^{-u}}{\frac{1}{s}+i\omega} du \\ &= \frac{1}{(\frac{1}{s}+i\omega)^k} \int_0^\infty u^{k-1}e^{-u} du \\ &= \frac{1}{(\frac{1}{s}+i\omega)^k} \Gamma(k). \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(\omega) &= \frac{1}{\Gamma(k)s^k} \frac{1}{(\frac{1}{s}+i\omega)^k} \Gamma(k) \\ &= \frac{1}{(1+i\omega s)^k}. \end{aligned}$$

Substituindo a expressão obtida na equação A.3, finalmente é deduzida a função do ajuste:

$$P(\omega) = \frac{\alpha \frac{1}{(1+i\omega s)^k}}{1 - (1-\alpha) \frac{1}{(1+i\omega s)^k}} \quad (\text{A.5})$$

$$= \frac{\alpha}{(1+i\omega s)^k - (1-\alpha)}. \quad (\text{A.6})$$