Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Polarização da Radiação Cósmica de Fundo

Paulo Henrique Flose Reimberg

Orientador: Luis Raul Weber Abramo

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física para a obtenção do título de Mestre em Ciências

Comissão Examinadora:

George Emanuel Avraam Matsas – IFT – UNESP
João Carlos Alves Barata – IF – USP
Luis Raul Weber Abramo – IF – USP

São Paulo
2009

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Reimberg, Paulo Henrique Flose

Polarização da radiação cósmica de fundo.
São Paulo, 2009.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física, Departamento de Física Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luis Raul Weber Abramo

Área de Concentração: Cosmologia

Unitermos: 1. Cosmologia; 2. Radiação de fundo; 3. Polarização; 4. Equação de Boltzmann.

USP/IF/SBI-072/2009

Resumo

Utilizando conceitos de mecânica quântica e teoria cinética apresentamos uma rederivação da equação de Boltzmann para a polarização. Mostramos a equivalência entre a equação que derivamos e a equação de Boltzmann encontrada na literatura ([1], [2], [3]) além de mostrar que essas derivações correspondem a considerar-se o efeito, sobre a polarização dos fótons da radiação cósmica de fundo, de dois espalhamentos Thompson com elétrons durante a recombinação. Conduzimo-nos, ainda, a descrever a polarização completamente no espaço real, como iniciado em [4] em um caso especial. Mostramos a possibilidade dessa conversão, recobramos a geometria que está associada ao estudo do problema no espaço real e verificamos satisfeitas as condições de causalidade.

Abstract

Applying concepts of quantum mechanics and kinetic theory we show a re-derivation of Boltzmann equation for the Cosmic Microwave Background (CMB) polarization. We show the equivalence between our derivation and those already known ([1], [2], [3]) and also that these derivations correspond to take into account the effect, on the photon polarization, of two Thompson scatterings on electrons while decoupling from matter. We address ourselves, then, to give a complete formalism for the CMB polarization problem in real space, as started in [4] in a special case. Besides the possibility of complete treatment of the problem in real space, we recover the geometry that describes it and that the causal relations are satisfied.

Agradecimentos

Agradeço ao Raul Abramo pela orientação, paciência e longas discussões, à Renata Funchal, ao João Barata e ao Walter Wreszinski pelas lições, discussões e sugestões e também ao Fleury e ao Parra pelas ajudas com o computador e etc. Agradeço ainda à FAPESP pelo apoio financeiro e ao departamento de Física-Matemática pelas instalações e suporte.

Sumário

Introdução

Este trabalho dedica-se a estudar a polarização da radiação cósmica de fundo. A abordagem, entretanto, irá diferir em essência da literatura existente sobre esse assunto e por dois motivos: primeiro, a maneira de derivar os resultados básicos como a equação de Boltzmann para a polarização não segue derivações clássicas. Segundo, encaminha-se o trabalho para o estudo da polarização no espaço real e não para o cálculo de correlações, como é usual. Além disso, busca-se aqui fundamentar todos os desenvolvimentos sobre conceitos bem fixados dentro da física-matemática para evitar ao máximo problemas com as diferenças de convenções que aparecem de forma abundante na literatura e, só depois de atingir um ponto em que se tem clareza do que obteve, estabelecer relação com a literatura.

A recombinação é uma época da história do universo caracterizada pela transição entre o estado de equilíbro entre radiação e matéria e um estágio de dois equilíbrios distintos. Isso se dá porque, à medida que fótons vão ficando menos energéticos, átomos de hidrogênio que começam a se formar deixam de ser ionizados por esses fótons ambientes, o número de elétrons livres cai e também a possibilidade de que fótons continuem interagindo com a matéria e os fótons, finalmente, começam a propagar-se sem mais interagir.

As últimas interações entre elétrons e fótons deixam nesses últimos, entretanto, uma marca indelével: a polarização. A maneira de computar-se essa polarização não pode diferir muito de considerar a dinâmica das interações entre fótons e a matéria durante a recombinação, estudar como essas interações polarizaram fótons e como se dá a propagação dessa polarização até que seja eventualmente observada.

A parte da propagação da polarização é, em geral, trivial. Não se tomam em conta efeitos da perturbação do espaço-tempo sobre a polarização, numa primeira aproximação. Para a geração da polarização há algumas derivações padrão, como [1], baseada em [5], ou [6], ambas consagradas a calcular o termo colisional para uma equação tipo Boltzmann, a primeira com uma abordagem de eletromagnetismo, estudando fenômenos radiativos, e a segunda apoiada sobre a teoria quântica dos campos. Aqui formula-se uma derivação desse termo colisional com base em mecânica quântica e teoria cinética. Essa derivação tem como vantagem a clareza. Poucas hipóteses são suficientes para que se rederive, em sua forma já cristalizada, a equação de Boltzmann para a polarização considerando a contribuição de perturbações escalares na métrica.

Conceitos fundamentais em mecânica quântica como o de matriz S e a teoria de espalhamento são suficientes para que se possa descrever a matriz densidade final (após a interação com elétrons) dos fótons que eram inicialmente não polarizados. Com base nessa matriz densidade final podemos definir um tensor de polarização e, aplicando o que na literatura é conhecido como método do momento angular total, chegar a coeficientes da expansão desse objeto em termos de um conjunto de funções especiais que formam uma base para funções definidas sobre a esfera. Os coeficientes dessa expansão conduzem diretamente à equação de Boltzmann, na forma integral, que se encontra em [1], por exemplo.

Uma vez de posse desses coeficientes, dedicamo-nos a estudar como formular o problema da polarização no espaço real. Essa abordagem iniciada em [4] em um caso particular é aqui generalizada para contemplar

todos os termos de fonte que se precisa considerar no tratamento consistente do problema da polarização gerada durante a recombinação. Mostramos ser possível descrever o problema inteiramente no espaço real e recobramos evidente, após os cálculos que se fazem necessários, a geometria básica do problema desde sua formulação.

Servindo de introdução ao problema, no Capítulo 1 apresentamos uma derivação da equação de Sachs-Wolfe, peça básica do estudo da radiação cósmica de fundo. A derivação aqui apresentada, fundamentada no cálculo do efeito sobre os fótons das perturbações causadas por potenciais no espaço tempo é baseada em [7] e tem como predicado principal deixar clara a física envolvida nessa equação.

No Capítulo 2 derivamos, baseados em teoria de representações de grupos, o que são os harmônicos esféricos de spin que aparecem de modo abundante em toda a literatura sobre a radiação cósmica de fundo. Para essa derivação, apresentamos fatos básicos sobre as representações irredutíveis do grupo de rotações e o central teorema de Peter-Weyl. Ainda nesse capítulo fazemos uma breve revisão sobre geometria diferencial sobre a esfera para mostrar uma curiosa identificação entre a derivada covariante e operadores canônicos atuando sobre representações irredutíveis do grupo de rotações. Finalizamos por aplicar essa curiosa conexão para derivar os modos E e B da polarização.

O Capítulo 3 é consagrado à derivação da equação de Boltzmann para a polarização. Introduzimos conceitos necessários para a articulação da teoria de espalhamento entre partículas com spin em mecânica quântica, rudimentos da derivação da matriz S do espalhamento Thompson e como, dada essa matriz, obter a polarização final de um feixe de fótons incidente em um centro espalhador. Calculamos o efeito sobre a polarização de um e dois espalhamentos, o que é suficiente para ter-se a equação de Boltzmann para a polarização. Também é nessa seção que integramos as dependências angulares da polarização e mostramos a equivalência entre a equação de Boltzmann que obtemos e a presente na literatura ([1], [2], [3]). Para tanto impomos nas equações que obtivemos as mesmas hipóteses empregadas nessas referências e mostramos que temos os mesmos resultados.

Finalmente o Capítulo 4 faz a transposição dos resultados derivados para o espaço real. Para que isso seja feito, curiosas integrais de produtos de funções de Bessel esféricas têm que ser computadas e são responsáveis pela possibilidade de interpretação geométrica e constatação da satisfação das condições de causalidade na formulação final do problema.

Capítulo 1

A equação de Sachs-Wolfe

Após o desacoplamento vamos supor que os fótons não interagem mais com a matéria (não considerando reionização, portanto) e que seguem uma geodésica nula desde que desacoplaram. Uma abordagem simplificada da física da radição cósmica de fundo pode, então, ser obtida considerando a defasagem espectral sofrida por um fóton propagando-se em um espaço-tempo perturbado. Nesta abordagem vamos adotar uma descrição de fluido para a matéria e supor a superfície de último espalhamento infinitamente fina, ou seja, que a recombinação se dá instantaneamente. Essa apresentação simplificada tem o mérito de deixar mais transparente a física envolvida e é inspirada no artigo seminal [7].
Seja o elemento de linha de Friedmann-Lamaître-Robertson-Walker (FLRW daqui em diante) para um espaço-tempo perturbado:

$$ds^2 = a^2(\eta)[-(1+2A)d\eta^2 + 2B_i dx^i d\eta + (\gamma_{ij} + h_{ij})dx^i dx^j]\,, \tag{1.0.1}$$

notando que o espaço não perturbado é obtido fazendo $A = B_i = h_{ij} = 0$.
A variedade que está sendo pensada aqui é uma variedade lorentziana (M, g), sendo M uma variedade diferenciável e g é a métrica que dá origem a (1.0.1).
Seja $K \in \mathcal{X}(M)$ um campo vetorial sobre M(com $\mathcal{X}(M)$ o conjunto de campos vetoriais sobre M). Para que uma curva integral de um campo K dê origem a uma curva que possa ser considerada a "trajetória" de um fóton é necessário e suficiente que:
$k_\mu k^\mu = 0$, já que os vetores tangentes às trajetórias dos fótons são vetores tipo nulo.
$k^\mu \nabla_\mu k^\nu = 0$, ou seja, os vetores tangentes à trajetória de um fóton devem ser transportados paralelamente a si mesmos para que dêem origem a uma geodésica (já que imaginamos que os fótons viajam em trajetórias geodésicas).
Antes de iniciar os cálculos devemos notar uma particularidade sobre a métrica do espaço. A métrica de FLRW é conforme a uma outra sem o fator $a(\eta)^2$ multiplicativo. Na seção seguinte ficará mais claro o significado dessa afirmação.

1.1 Métricas conformes

Dada uma variedade M com uma métrica g, uma métrica $\tilde{g} = \Omega^2 g$ é dita ser conforme a g (ou, para ser mais preciso, obtida a partir de g através de uma transformação conforme). O estudo de espaços conformes (variedades com métricas conformes) traz algumas vantagens em certas ocasiões, como por exemplo o estudo

de espaços assintoticamente planos onde permite dar uma definição precisa de infinito conforme. Aqui empregaremos uma métrica conforme por outro motivo: facilitar os cálculos.
A razão fundamental pela qual espaços conformemente relacionados são interessantes é que eles compartilham a mesma estrutura causal, ou seja, dado um vetor que é tipo tempo com relação à métrica g é também tipo tempo em relação à métrica $\tilde{g}$. O mesmo para vetores tipo espaço ou nulos (notar que quando nos referimos a velores nulos estamos falando de vetores tipo nulo e não do vetor nulo do espaço vetorial).
Pode-se estabelecer relações entre as entidades geométricas em espaços conformes. O operador derivada covariante, que nos será útil, é um exemplo[1]. Seja ∇ associado a g e $\widetilde{\nabla}$ a $\tilde{g}$. Sabendo que esses dois operadores são relacionados podemos nos perguntar se porventura uma curva geodésica com relação a ∇ também é uma $\widetilde{\nabla}$-geodésica. A resposta a essa pergunta é, em geral, não. No entanto, no caso de geodésicas nulas, esse é o caso, isto é, geodésicas nulas são conformemente invariantes.
O que deve ser notado, entretanto, é que a geodésica com relação a $\widetilde{\nabla}$ aparece parametrizada de modo não-afim[2]. Em geral geodésicas parametrizadas de modo não-afim aparecem na forma de uma equação do tipo $\tilde{k}^\mu \widetilde{\nabla}_\mu \tilde{k}^\nu = f(\tilde{\lambda}) k^\nu$ onde $\tilde{k}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$, x^μ descreve a trajetória do fóton e $\tilde{\lambda}$ é o parâmetro não-afim. A função f que apareceu deve satisfazer a equação

$$f(\tilde{\lambda}) = \frac{\frac{d^2\lambda}{d\tilde{\lambda}^2}}{\frac{d\lambda}{d\tilde{\lambda}}} \tag{1.1.1}$$

onde λ é um parâmetro afim.
No nosso caso de interesse, $f(\tilde{\lambda}) = \frac{d}{d\tilde{\lambda}}(ln\Omega^2)$. Usando (1.1.1) mostra-se sem dificuldades que $\frac{d\lambda}{d\tilde{\lambda}} = \Omega^2$. Isso implica que se temos uma geodésica nula $k^\mu \nabla_\mu k^\nu = 0$ essa geodésica no espaço conforme será dada por $\tilde{k}^\mu \widetilde{\nabla}_\mu \tilde{k}^\nu = 0$ com $\tilde{k}^\mu = \frac{k^\mu}{\Omega^2}$.

1.2 A equação de Jacobi não-homogênea

Vamos considerar um espaço-tempo que pode ser tratado como um espaço-tempo base sobre o qual se aplica uma perturbação. O desenvolvimento aqui apresentado é geral e portanto a métrica utilizada não precisa ser aquela de FLRW. Esta seção foi baseada em [9]. Seja $g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ com $g^{(0)}_{\mu\nu}$ sendo a métrica do espaço base e $h_{\mu\nu}$ a perturbação. Como usual em teoria de perturbação, usa-se a métrica do espaço não-perturbado para subir e baixar índices.
Os coeficientes da conexão de Levi-Civita de $g_{\mu\nu}$, que são dados por

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (g_{\sigma\beta,\alpha} + g_{\alpha\sigma,\beta} - g_{\alpha\beta,\sigma}) \,,$$

podem ser separados em um termo de ordem zero e um de primeira ordem em h

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta} + \Gamma^{(1)\mu}_{\alpha\beta} \,,$$

onde

$$\Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{(0)\mu\sigma} (g^{(0)}_{\sigma\beta,\alpha} + g^{(0)}_{\alpha\sigma,\beta} - g^{(0)}_{\alpha\beta,\sigma}) \tag{1.2.1}$$

e

[1] Para ver os detalhes pode-se consultar [8].
[2] *Non-affinely parametrized*, em inglês.

$$\Gamma^{(1)\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{(0)\mu\sigma}(h_{\sigma\beta,\alpha} + h_{\alpha\sigma,\beta} - h_{\alpha\beta,\sigma}) - \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(g^{(0)}_{\sigma\beta,\alpha} + g^{(0)}_{\alpha\sigma,\beta} - g^{(0)}_{\alpha\beta,\sigma}),$$

ou seja,

$$\Gamma^{(1)\mu}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}g^{(0)\mu\sigma}(h_{\sigma\beta;\alpha} + h_{\alpha\sigma;\beta} - h_{\alpha\beta;\sigma}). \tag{1.2.2}$$

O ponto-e-vírgula acima indica derivação covariante com relação à conexão de $g^{(0)}_{\mu\nu}$.
Seja $x^{(0)\mu}(\lambda)$ uma geodésica no espaço-tempo base com parâmetro afim λ. $x^{(0)\mu}(\lambda)$ costuma ser dito "o caminho não-perturbado". Por hipótese $x^{(0)\mu}(\lambda)$ satisfaz

$$\ddot{x}^{(0)\mu} + \Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta}(x^{(0)})\dot{x}^{(0)\alpha}\dot{x}^{(0)\beta} = 0, \tag{1.2.3}$$

com $\left(\dot{} = \frac{d}{d\lambda}\right)$ e $\Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta}(x^{(0)})$ significando que os símbolos da conexão são calculados sobre a trajetória não-perturbada.
Consideremos agora a expressão:

$$x^{\mu}(\lambda) = x^{(0)\mu}(\lambda) + x^{(1)\mu}(\lambda). \tag{1.2.4}$$

Aqui $x^{\mu}(\lambda)$ e $x^{(1)\mu}(\lambda)$ não são especificados e a equação (1.2.4) pode ser entendida como definidora tanto de um quanto de outro, uma vez que um deles é dado. Vamos derivar condições em $x^{(1)\mu}(\lambda)$ que serão necessárias e suficientes para que $x^{\mu}(\lambda)$ seja uma geodésica no espaço perturbado. No que segue, vamos truncar as expansões na primeira ordem em termos perturbados, ou seja, vamos descartar produtos envolvendo mais de um termo do tipo $x^{(1)\mu}(\lambda)$ ou $\dot{x}^{(1)\mu}(\lambda)$.
Derivando duas vezes (1.2.4) e usando (1.2.3), temos

$$\ddot{x}^{\mu} = -\Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta}(x^{(0)})\dot{x}^{(0)\alpha}\dot{x}^{(0)\beta} + \ddot{x}^{(1)\mu}. \tag{1.2.5}$$

Por outro lado, se $x^{\mu}(\lambda)$ é uma geodésica parametrizada de modo afim no espaço-tempo perturbado, deve valer

$$\ddot{x}^{\mu} = -\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}(x)\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta} = -\Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta}(x)(\dot{x}^{(0)\alpha}\dot{x}^{(0)\beta} + 2\dot{x}^{(0)\alpha}\dot{x}^{(1)\beta}) - \Gamma^{(1)\mu}_{\alpha\beta}(x)\dot{x}^{(0)\alpha}\dot{x}^{(0)\beta}. \tag{1.2.6}$$

Podemos agora fazer uma expansão dos coeficientes da conexão em torno da trajetória não-perturbada:

$$\Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta}(x) = \Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta}(x^{(0)}) + \Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta,\tau}(x^{(0)})x^{(1)\tau} + ...$$
$$\Gamma^{(1)\mu}_{\alpha\beta}(x) = \Gamma^{(1)\mu}_{\alpha\beta}(x^{(0)}) + ...$$

Substituindo isso em (1.2.6), temos

$$\ddot{x}^{\mu} = -\Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta}(x^{(0)})\dot{x}^{(0)\alpha}\dot{x}^{(0)\beta} - \Gamma^{(1)\mu}_{\alpha\beta}(x^{(0)})\dot{x}^{(0)\alpha}\dot{x}^{(0)\beta} - 2\Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta}(x^{(0)})\dot{x}^{(0)\alpha}\dot{x}^{(1)\beta} - \Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta,\tau}(x^{(0)})\dot{x}^{(0)\alpha}\dot{x}^{(0)\beta}x^{(1)\tau}. \tag{1.2.7}$$

Comparando as equações (1.2.7) e (1.2.5), concluimos que $x^{\mu}(\lambda)$, definido pela equação (1.2.4), será uma geodésica parametrizada de modo afim no espaço-tempo perturbado contanto que $x^{(1)\mu}(\lambda)$ satisfaça o sistema

de quatro equações diferenciais acopladas

$$\left(\frac{d^2}{d\lambda^2} + A\frac{d}{d\lambda} + B\right) x^{(1)} = f\,, \tag{1.2.8}$$

onde as matrizes 4×4 A e B e o vetor (de quatro componentes) f são definidos por

$$A^\mu_\alpha = 2\Gamma^{(0)\mu}_{\tau\alpha} k^{(0)\tau}\,,$$
$$B^\mu_\alpha = \Gamma^{(0)\mu}_{\tau\sigma,\alpha} k^{(0)\tau} k^{(0)\sigma}\,,$$
$$f = -\Gamma^{(1)\mu}_{\tau\sigma} k^{(0)\tau} k^{(0)\sigma}\,,$$

onde, aproveitando a interpretação de geodésicas nulas como trajetórias de fótons, escrevemos $\dot{x}^{(0)}$ como $k^{(0)}$. A notação de matrizes foi empregada para simplificar a escrita e deve-se tomar cuidado ao recolocar os índices para fazer manipulações. Devemos também enfatizar que a equação (1.2.8) vale ao longo de algum segmento da trajetória não-perturbada e gera soluções para a separação $x^{(1)}$ entre a trajetória perturbada e a não-perturbada. Veremos agora que estamos no fundo tratando da equação de Jacobi.
Denotemos por $\frac{D}{d\lambda}$ a derivada covariante ao longo da curva $x^{(0)}$ com a conexão do espaço-tempo base. Com isso, para um vetor arbitrário v,

$$\frac{D}{d\lambda} v^\mu = \frac{dv^\mu}{d\lambda} + \Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta} k^{(0)\alpha} v^\beta$$

e

$$\frac{D^2}{d\lambda^2} v^\mu = \frac{d^2 v^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta,\sigma} k^{(0)\alpha} k^{(0)\sigma} v^\beta + \Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta} \frac{dk^{(0)\alpha}}{d\lambda} v^\beta + 2\Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta} k^{(0)\alpha} \frac{dv^\beta}{d\lambda} + \Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta} k^{(0)\alpha} \Gamma^{(0)\beta}_{\sigma\rho} k^{(0)\sigma} v^\rho\,.$$

Usando a equação de geodésica para $k^{(0)}$ temos

$$\frac{D^2}{d\lambda^2} v^\mu = \frac{d^2 v^\mu}{d\lambda^2} + 2\Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta} k^{(0)\alpha} \frac{dv^\beta}{d\lambda} + \Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta,\sigma} k^{(0)\alpha} k^{(0)\sigma} v^\beta + \Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta} \Gamma^{(0)\alpha}_{\sigma\rho} k^{(0)\beta} k^{(0)\sigma} v^\rho - \Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta} \Gamma^{(0)\alpha}_{\sigma\rho} k^{(0)\sigma} k^{(0)\rho} v^\beta\,. \tag{1.2.9}$$

O tensor de Riemann para o espaço-tempo base é escrito como

$$R^{(0)\mu}_{\alpha\beta\sigma} = (\Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\sigma,\beta} - \Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta,\sigma} + \Gamma^{(0)\mu}_{\beta\rho} \Gamma^{(0)\rho}_{\alpha\sigma} - \Gamma^{(0)\mu}_{\sigma\rho} \Gamma^{(0)\rho}_{\alpha\beta})\,. \tag{1.2.10}$$

Com isso (1.2.9) pode ser reescrita como

$$\frac{D^2}{d\lambda^2} v^\mu - R^{(0)\mu}_{\alpha\beta\sigma} k^{(0)\alpha} k^{(0)\beta} v^\sigma = \frac{d^2 v^\mu}{d\lambda^2} + 2\Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta} k^{(0)\alpha} \frac{dv^\beta}{d\lambda} + \Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta,\sigma} k^{(0)\alpha} k^{(0)\beta} v^\sigma\,. \tag{1.2.11}$$

Mas o lado direito de (1.2.11) é justamente o lado esquerdo da equação (1.2.8), logo o lado esquerdo de (1.2.11) é igual a f, ou seja,

$$\nabla^2_{k^{(0)}} x^{(1)} - R(k^{(0)}, x^{(1)}) k^{(0)} = f\,, \tag{1.2.12}$$

que é uma equação de Jacobi[10] não-homogênea vinda do estudo de uma métrica perturbada. O campo $x^{(1)}$ em (1.2.12) é chamado de campo de Jacobi. Um campo de Jacobi é determinado pelas condições iniciais $x^{(1)}(0)$ e $\frac{dx^{(1)}}{d\lambda}(0)$ e tem a interpretação justamente atribuida a ele neste caso, ou seja, dizer como duas geodésicas partindo do mesmo ponto se afastam sob o efeito da curvatura. Aqui o termo não-homogêneo na

equação funciona como um termo forçante associado à perturbação.
Vejamos agora a particularização da equação de Jacobi (1.2.12) num sistema de coordenadas especial, no caso, o sistema de coordenadas normais [11].
De fato, dado que temos um espaço-tempo dotado de uma conexão, podemos escolher tratar nosso problema utilizando o sistema de coordenadas normais, ou seja, obtidas através da aplicação exponencial sobre vetores base do espaço tangente.
Tirando proveito desse especial sistema de coordenadas, podemos escrever $\frac{D}{d\lambda}x^{(1)} = \frac{d}{d\lambda}x^{(1)} = k^{(1)}$ e, com isso,

$$\frac{D^2}{d\lambda^2}x^{(1)\mu} = \frac{dk^{(1)\mu}}{d\lambda} + \Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta,\sigma}k^{(0)\alpha}k^{(0)\sigma}x^{(1)\beta}\,.$$

Com isso a equação (1.2.12) pode ser reescrita como

$$\frac{dk^{(1)\mu}}{d\lambda} + \Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta,\sigma}k^{(0)\alpha}k^{(0)\sigma}x^{(1)\beta} - R^{(0)\mu}_{\alpha\beta\sigma}k^{(0)\alpha}k^{(0)\beta}x^{(1)\sigma} = f\,,$$

daí,

$$\frac{dk^{(1)\mu}}{d\lambda} + (\Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\sigma,\beta} - R^{(0)\mu}_{\alpha\beta\sigma})k^{(0)\alpha}k^{(0)\beta}.x^{(1)\sigma} = f \tag{1.2.13}$$

Utilizando o fato de que num sistema de coordenadas normais o tensor de Riemann escreve-se, como vê-se facilmente de (1.2.10),

$$R^{(0)\mu}_{\alpha\beta\sigma} = \Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\sigma,\beta} - \Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta,\sigma}\,,$$

temos então que o lado esquerdo de (1.2.13) fica

$$\frac{dk^{(1)\mu}}{d\lambda} + \Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta,\sigma}k^{(0)\alpha}k^{(0)\beta}x^{(1)\sigma}\,. \tag{1.2.14}$$

Juntando, obtivemos:

$$\frac{dk^{(1)\mu}}{d\lambda} + \Gamma^{(0)\mu}_{\alpha\beta,\sigma}k^{(0)\alpha}k^{(0)\beta}x^{(1)\sigma} = -\Gamma^{(1)\mu}_{\tau\rho}k^{(0)\tau}k^{(0)\rho}\,. \tag{1.2.15}$$

1.3 Equação de Sachs-Wolfe - parte II

Os desenvolvimentos desta Seção são baseados em [12].
A métrica de FLRW perturbada pode ser escrita na forma:

$$(\mathbf{g}) = a(\eta)^2\begin{pmatrix} -(1+2A) & B_i \\ B_j & \gamma_{ij} + h_{ij} \end{pmatrix}, \tag{1.3.1}$$

onde

$$(\gamma_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{1.3.2}$$

A métrica g que acaba de ser apresentada pode ser escrita como $g = a^2\tilde{g}$ com $\tilde{g}$ uma métrica conforme dada

por:

$$(\tilde{\mathbf{g}})=\begin{pmatrix} -(1+2A) & B_i \\ B_j & \gamma_{ij}+h_{ij} \end{pmatrix}. \tag{1.3.3}$$

O fator Ω^2 aqui é obviamente a^2.
No que segue, tendo justificado o por quê na seção 1.1 dedicada às métricas conformes, vamos utilizar a métrica (1.3.3) e estudar as equações $\tilde{k}_\mu \tilde{k}^\mu = 0$ e $\tilde{k}^\mu \tilde{\nabla}_\mu \tilde{k}^\nu = 0$, com $\tilde{k^\mu} = \frac{k^\mu}{a^2}$.
Lembrando as expansões feitas quando estudamos a equação de Jacobi, vamos escrever neste espaço o vetor de onda de um fóton como

$$\tilde{k}^\mu = E(1+M, e^i + \delta e^i) \tag{1.3.4}$$

onde E é uma normalização e $\tilde{k}^{(1)} = (M, \delta e^i)$.
É uma conta fácil verificar que se impomos $\gamma_{ij} e^i e^j = 1$, temos que ter

$$e_j \delta e^j = A + M - B_i e^i - \frac{1}{2} h_{ij} e^i e^j$$

para que seja satisfeita a equação $\tilde{k}^\mu \tilde{k}_\mu = 0$, sempre ficando apenas com termos de até primeira ordem.
Como vimos na seção sobre a equação de Jacobi, a condição para que valha $\tilde{k}^\mu \tilde{\nabla}_\mu \tilde{k}^\nu = 0$, com $\tilde{k}^\mu = \frac{\tilde{x}^\mu}{d\tilde{\lambda}}$, é equivalente a ter satisfeita a equação (1.2.15).
Podemos escrever a componente temporal de (1.2.15) como:

$$\frac{dM}{d\tilde{\lambda}} = -\tilde{\Gamma}^{(1)0}_{\mu\rho} \tilde{k}^{(0)\mu} \tilde{k}^{(0)\rho}$$

se lembramos que $\Gamma^{(0)0}_{\alpha\beta,\sigma}$ são nulos na métrica conforme.
Usando os coeficientes da conexão perturbados para FLRW [12], obtemos

$$\frac{dM}{d\tilde{\lambda}} = A' - 2D_i A e^i - \frac{1}{2} h'_{ij} e^i e^j + D_i B_j e^i e^j \,, \tag{1.3.5}$$

onde $'$ significa derivação com relação a η.
Tendo obtido esses resultados, passemos a tratar um outro ponto.
Dado um observador fundamental com quadrivelocidade u^μ, a frequência, ou energia, de um fóton por ele observado é proporcional a $k^\mu u_\mu$.
Enquanto a matéria puder ser aproximadamente descrita numa aproximação de fluido, podemos escrever seu tensor energia-momento como

$$T^\mu_\nu = (\epsilon + p) u^\mu u_\nu - p \delta^\mu_\nu$$

com ϵ descrevendo a densidade de energia e p a pressão. Da mesma maneira introduzimos perturbações na métrica, devemos introduzir perturbações no tensor de energia-momento, que devem ser, naturalmente, parametrizadas por quantidades relativas à caracterização da matéria: vejamos como podemos decompor o vetor u^μ numa parte não-perturbada e um parte perturbada. Vamos por um momento retomar a métrica de FLRW original para o que segue imediatamente. Suponhamos que se possa escrever $u^\mu = u^{(0)\mu} + u^{(1)\mu}$. Suponhamos ainda que seja satisfeita a normalização $u^{(0)\mu} u_{(0)\mu} = -1$. Essa imposição implica que $u^{(0)\mu}$

deve ser dado por

$$u^{(0)\mu} = \frac{\delta^\mu_0}{a}\,.$$

Impondo que também a norma de $u^{(0)\mu}+u^{(1)\mu}$ seja -1 teremos que satisfazer $2u^{(0)\mu}u^{(1)\mu}+h_{\mu\nu}u^{(0)\mu}u^{(0)\nu}=0$ onde $h_{\mu\nu}$ á perturbação na métrica de FLRW. Dessa condição extraímos que $u^{(1)0}=\frac{-A}{a}$. Colocamos, já que isso não viola as condições obtidas, $u^{(1)i}\equiv\frac{v^i_b}{a}$ e, com isso,

$$u^\mu = \frac{1}{a}(1-A, v^i_b)\,, \tag{1.3.6}$$

v^i_b será interpretado como a velocidade dos bárions [3].
Voltando agora a omitir os fatores a, chamamos $\tilde{u}^\mu = au^\mu$.
Logo,

$$\tilde{u}_\mu = g_{\mu\nu}\tilde{u}^\nu = \Big(-(1+A)+B_iv^i_b, B_i+(\gamma_{ij}+h_{ij})v^j_b\Big)\,.$$

É uma conta fácil verificar que

$$\tilde{k}^\mu\tilde{u}_\mu = -E\{1+[M+A-e^i(v_{bi}+B_i)]\}\,. \tag{1.3.7}$$

Vamos introduzir ainda mais uma aproximação: a aproximação de Born [12]. Estaremos calculando a variação de energia sofrida por um fóton devida às parturbações do espaço-tempo mas sobre a trajetória que o fóton teria no espaço-tempo não-perturbado, ou seja, em FLRW. Como FLRW é conforme, as geodésicas são justamente linhas a 45 graus no diagrama conforme, ou seja, distâncias (conformes) estão diretamente relacionadas a intervalos de tempo conforme. Portanto os pontos de emissão e observação dos fótons serão relacionados como

$$\mathbf{x}_O = \mathbf{x}_E + \mathbf{e}(\eta_O-\eta_E)\,. \tag{1.3.8}$$

A quantidade interessante a calcular-se, neste ponto, é a razão entre a energia do fóton observado e a energia do emitido. Utilizando (1.3.7) obtemos:

$$\frac{(\tilde{k}^\mu\tilde{u}_\mu)_o}{(\tilde{k}^\mu\tilde{u}_\mu)_e} \simeq \Big(1+\big[M+A-e^i(v_{bi}+B_i)\big]^o_e\Big)\,, \tag{1.3.9}$$

onde entende-se que se deve tomar a diferença da quantidade entre colchetes entre os pontos de observação e emissão.
Devemos lembrar, entretanto que a frequência de um fóton para um observador com quadrivelocidade u^μ não foi estabelecida na métrica conforme, ou seja, devemos voltar a colocar os fatores a relevantes para termos as quantidades corretas. Com isso, a razão entre a temperatura dos fótons nos pontos de observação e emissão é dada por:

$$\frac{T_o(\mathbf{x_o},\eta_o)}{T_e(\mathbf{x}_e,\eta_e)} = \frac{a(\eta_e)}{a(\eta_o)}\Big(1+\big[M+A-e^i(v_{bi}+B_i)\big]^{\eta_o}_{\eta_e}\Big) \tag{1.3.10}$$

onde lembramos que $\tilde{k}^\mu$ e $\tilde{u}^\mu$ têm diferentes potências de a quando perdem o $\sim$.
O instante do desacoplamento pode ser decomposto como $\eta_e = \bar{\eta}_e + \delta\eta_e$ já que, devido a flutuações de

[3] Notar que em cosmologia bárions são entendidos como toda matéria não-escura.

densidade, a recombinação não aconteceu em todos os pontos do Universo no mesmo instante. A temperatura será decomposta como $T_e(\mathbf{x}_e, \eta_e) = \bar{T}(\bar{\eta}_e)[1 + \Theta_e(\mathbf{x}_e, \eta_e)]$ e $T_o(\mathbf{e}) = \bar{T}_o(\eta_o)[1 + \Theta(\mathbf{e})]$. O símbolo Θ será chamado de contraste de temperatura. Inserindo essas decomposições em (1.3.10), temos que, em ordem zero

$$\frac{\bar{T}_o}{\bar{T}_e} = \frac{a(\bar{\eta}_e)}{a(\bar{\eta}_o)}\,,$$

que não é mais do que a lei de defasagem espectral de um corpo negro num espaço homogêneo e isotrópico em expansão.

O contraste de temperatura observado na direção $\mathbf{e}$ será, pois, dado por

$$\Theta(\mathbf{e}) = \Theta_e(\mathbf{x}_e, \bar{\eta}_e) + \left[M + A - e^i(v_{bi} + B_i)\right]_{\eta_e}^{\eta_o}\,.$$

Utilizando (1.3.5) podemos escrever

$$[M]_{\eta_e}^{\eta_o} = -2[A]_{\eta_e}^{\eta_o} + \int_{\eta_e}^{\eta_o} \left(A' - \frac{1}{2}h'_{ij}e^ie^j + D_iB_je^ie^j\right) d\tilde{\lambda}\,.$$

Fazendo $\Theta_e(\mathbf{x}_e, \eta_e) = \frac{1}{4}\delta_\gamma(\mathbf{x}_e, \eta_e)$ por causa da lei de Stefan-Boltzmann, obtemos,

$$\Theta(\mathbf{e}) = \left[\frac{1}{4}\delta_\gamma + A + e^i(v_{bi} + B_i)\right](\mathbf{x}_e, \eta_e) + \int_{\eta_e}^{\eta_o} \left(A' - \frac{1}{2}h'_{ij}e^ie^j + D_iB_je^ie^j\right) d\tilde{\lambda} + f(O) \tag{1.3.11}$$

onde $f(O)$ é função das variáveis de perturbação hoje e do ponto de observação e não pode ser medida. Por esse motivo essa função será doravante omitida.

A equação (1.5.1) pode ser reescrita em termos de quantidades invariantes de gauge. Uma vez isso feito, teremos, finalmente, obtido a equação de Sachs-Wolfe. Para tanto é conveniente que se esclareça o que é a liberdade de gauge em relatividade geral e quais são as quantidades invariantes de gauge no contexto da métrica em que estamos trabalhando.

1.4 Invariância de gauge

Para discutir mais adequadamente as quantidades invariantes de gauge neste problema em particular é conveniente esclarecer de maneira geral o que são essas quantidades e de que modo elas aparecem num contexto mais geral, a saber, no estudo de perturbações de espaços-tempo em relatividade geral. Aprofundamentos nas questões aqui discutidas podem ser encontradas em [13], que serviu como referência fundamental para esta seção.

Iniciamos por conceituar o que entendemos por perturbação de um espaço-tempo. Aqui, quando falamos de perturbação de um espaço-tempo (M, g) estamos supondo um espaço-tempo levemente diferente (M', g') que é obtido modificando um pouco (M, g). Vamos também requerer que a perturbação seja contínua no sentido de que (M, g) e (M', g') sejam conectadas por uma curva no espaço dos espaços-tempo. Vamos, portanto, considerar sequências de espaços-tempo dependendo de um parâmetro variando continuamente.

Suponhamos, então, que (M, g) seja um espaço-tempo arbitrário e (M', g') seja uma perturbação sua. Vamos supor que existe um família uniparamétrica de espaços-tempo (M_ϵ, g_ϵ) com o espaço não-perturbado (M, g) correspondendo a $\epsilon = 0$ e o peturbado a $\epsilon = 1$. A aproximação linearizada para (M', g') seria (se fizermos uma analogia com a aplicação exponencial [10]) o vetor tangente a essa família de espaços-tempo em (M, g).

Convém notar que a família de espaços-tempo em questão forma um variedade de dimensão cinco, a ser denotada por $\mathcal{M}$.
Analisemos agora a possibilidade de introduzir um mapeamento entre M e M' que permita fazer uma identificação entre os pontos de ambas. Consideremos um campo vetorial V suave, que não se anula em $\mathcal{M}$ e que tenha sempre componente transversal em relação aos M_ϵ, ou seja, em nenhum ponto pertença ao plano tangente de algum M_ϵ. Vamos agora dizer que um ponto $p_\epsilon \in M_\epsilon$ é o mesmo, com respeito a V, que o ponto $p \in M$ se p_ϵ e p estão sobre a mesma curva integral de V. Isso define um mapeamento de M em M_ϵ.
Uma vez escolhido um campo vetorial transversal V em $\mathcal{M}$, podemos definir a linearização com respeito a V. Suponha que Q_0 é alguma quantidade em M na qual estamos interessados e Q_ϵ é uma quantidade análoga em cada um dos espaços-tempo M_ϵ. Podemos então ter um campo das quantidades Q na variedade cinco-dimensional. A linearização Q_1 de Q com respeito a V é simplesmente a derivada de Lie de Q na direção de V avaliada no espaço-tempo não-perturbado:

$$Q_1 = \pounds_V Q_\epsilon|_{(\epsilon=0)} \,. \tag{1.4.1}$$

A expressão (1.4.1) mostra explicitamente qual o mecanismo da identificação. O que é usualmente feito é escolher um sistema de coordenadas (x^μ, ϵ) em $\mathcal{M}$ e escrever (componentes de Q_ϵ) = (componentes de Q_0) + ϵ(perturbação), o que obscurece o que de fato está acontecendo.
Sejam agora dois campos vetoriais V e $\widetilde{V}$ em $\mathcal{M}$ como acima. Podemos nos perguntar qual a relação entre as linearizações de Q_0, Q_1 e $\widetilde{Q}_1$. De fato, pela definição (1.4.1) e pelas propriedades da derivada de Lie, temos

$$Q_1 - \widetilde{Q}_1 = \pounds_V Q_\epsilon|_{(\epsilon=0)} - \pounds_{\widetilde{V}} Q_\epsilon|_{(\epsilon=0)} = \pounds_{(V-\widetilde{V})} Q_\epsilon|_{(\epsilon=0)} = \pounds_X Q_0 \tag{1.4.2}$$

onde X é, devido à maneira como são escolhidos V e $\widetilde{V}$, tangente a $M = M_0$ [13].
Podemos, então definir a noção de invariância de gauge para uma quantidade Q_ϵ como a propriedade de que a linearização Q_1 de Q_0 permanece invariante mediante mudanças arbitrárias da identidicação $V \to \widetilde{V}$.
Como pode-se perceber a partir da definição, Q_1 é invariante de gauge se, e somente se, $\pounds_X Q_0 = 0$ para todos os campos de vetores X em M. Esse resultado é conhecido como lema de Stewart-Walker[4].
Podemos notar, como um corolário desse lema que, como todas as quantidades relativistas são covariantes e podem ser escritas na forma $Q = 0$, Q sendo um campo tensorial, é sempre possível, em primeira ordem na teoria de perturbação, escrever todas as equações em termos de quantidades invariantes de gauge.
Resta-nos então, descobrir quais são as quantidades invariantes de gauge no caso que nos interessa aqui, ou seja, no caso de uma métrica de FLRW perturbada. A primeira coisa a se fazer é notar que qualquer campo vetorial pode ser decomposto como a soma do gradiente de um escalar e um vetor de divergência nula [14] como

$$B^i = D^i B + \bar{B}^i$$

onde $D^i \bar{B}_i = 0$. De maneira análoga, um tensor simétrico de ordem 2 pode ser decomposto como [15]

$$h_{ij} = 2C\gamma_{ij} + 2D_i D_j E + 2D_{(i}\bar{E}_{j)} + 2\bar{E}_{ij}$$

com $D_i \bar{E}^{ij} = 0$, $\bar{E}^i_i = 0$.

[4] Embora tenha ficado conhecido como lema de Stewart-Walker, esses o atribuem, em [13], a Sachs, num trabalho de 1964 (em "Relativity, groups and topology", editado por B. deWitt e C. deWitt).

Assim, os graus de liberdade da métrica (1.3.1) ficam separados em 4 escalares:A, B, C e E, correspondendo a 4 graus de liberdade. 2 vetores: $\bar{B}^i$ e $\bar{E}^i$ correspondendo a mais 4 graus de liberdade e 1 tensor $\bar{E}^{ij}$ que corresponde a mais dois graus de liberdade.
Pela definição (1.4.1) e pela identidade (1.4.2) podemos entender qual o efeito sobre a métrica de uma mudança de gauge. Isso será

$$g^{(1)}_{\mu\nu} \to g^{(1)}_{\mu\nu} + \pounds_\xi g_{\mu\nu} = g^{(1)}_{\mu\nu} + 2\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} \,,$$

onde ∇ é a conexão com a métrica não-perturbada. Partindo disso, e por meio longos cálculos chega-se, para o caso da métrica conforme (que não depende de η), às quantidades invariantes de gauge (ver [12] ou [16] - neste último discute-se o caso particular de curvatura escalar nula):

$$\Psi \equiv -C \,, \tag{1.4.3}$$

$$\Phi \equiv A + (B - E')' \,, \tag{1.4.4}$$

$$\bar{\Phi} \equiv \bar{E}'^i - \bar{B}^i \,, \tag{1.4.5}$$

$$\bar{E}^{ij} \,. \tag{1.4.6}$$

Se antes tínhamos dez graus de liberdade para fixar a métrica, temos agora apenas seis (quatro graus ficaram com as componentes do vetor ξ). Essas seis quantidades que sobraram devem ser consideradas como os verdadeiros parâmetros da perturbação do espaço-tempo, uma vez que elas não podem ser anuladas por transformações de coordenadas. Os quatro graus elimidados dariam origem a modos espúrios [16].
As quantidades que caracterizam a matéria (densidade(ρ), pressão (P), velocidade (v) e pressões anisotrópicas (π_{ij})) [12] também sofrem alterações quando mudanças de gauge são conduzidas. Para termos uma descrição consistente temos também que encontrar quantidades invariantes de gauge que descrevam a matéria. Essas quantidades são

$$\delta^N = \delta + \frac{\rho'}{\rho}(B - E') \,, \tag{1.4.7}$$

$$V = v + E' \,, \tag{1.4.8}$$

$$\bar{V}_i = \bar{v}_i + \bar{B}_i \,. \tag{1.4.9}$$

A pressão anisotrópica já é invariante de gauge (por causa do lema de Stewart-Walker).
Tendo feito tudo isso, ainda resta-nos um ponto: escolher um gauge. Há uma coleção de gauges conhecidos e famosos, entre eles, por exemplo, o newtoniano ou longitudinal, o de folheação plana, o comóvel, o (não bem fixado) síncrono ou de Gauss. Aqui escolheremos o gauge newtoniano.
O gauge newtoniano é caracterizado pelas escolhas $B = 0$, $E = 0$, $\bar{B}_i = 0$. As quantidades invariantes de gauge restantes tomam a forma: $A = \Phi$, $C = -\Psi$, $\delta = \delta^N$, $v = V$ e $\bar{v}_i = \bar{V}_i$.

1.5 Equação de Sachs-Wolfe - parte III

Antes de nos atermos a discutir a invariância de gauge tínhamos obtido:

$$\Theta_o(\mathbf{e}) = \left[\frac{1}{4}\delta_\gamma + A + e^i(v_{bi} + B_i)\right](\mathbf{x}_e, \eta_e) + \int_{\eta_e}^{\eta_o} \left(A' - \frac{1}{2}h'_{ij}e^ie^j + D_iB_je^ie^j\right) d\tilde{\lambda}\,. \tag{1.5.1}$$

Podemos agora reescrever essa expressão como:

$$\Theta_o(\mathbf{x}_o, \eta_o, \mathbf{e}) = \left[\frac{1}{4}\delta_\gamma^N + \Phi + e^i(D_iV_b + \bar{V}_{bi} + \bar{\Phi}_i)\right](\mathbf{x}_e, \eta_e) + \int_{\eta_e}^{\eta_o} (\Psi' + \Phi')d\eta + \int_{\eta_e}^{\eta_o} e^i\bar{\Phi}'_i d\eta - \int_{\eta_e}^{\eta_o} e^ie^j\bar{E}'_{ij}d\eta\,, \tag{1.5.2}$$

onde nós integramos sobre a geodésica não perturbada que havíamos escolhido, parametrizada como

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_e + \mathbf{e}(\eta - \eta_e)\,.$$

Essa equação é conhecida como equação de Sachs-Wolfe. A equação (1.5.2) pode ser decomposta como a soma de três termos [12]:

$$\Theta_{SW} = \left[\frac{1}{4}\delta_\gamma^N + \Phi\right](\mathbf{x}_e, \eta_e)\,, \tag{1.5.3}$$

$$\Theta_{dop} = e^i\left(D_iV_b + \bar{\Phi}_i\right)(\mathbf{x}_e, \eta_e)\,, \tag{1.5.4}$$

$$\Theta_{ISW} = \int_{\eta_e}^{\eta_o} \left[(\Psi' + \Phi') + e^i\bar{\Phi}'_i - e^ie^j\bar{E}'_{ij}\right] d\eta\,. \tag{1.5.5}$$

O primeiro termo comporta apenas contribuições escalares e é chamado de Sachs-Wolfe próprio. O segundo termo comporta contibuições escalares e vetoriais e representa o termo Doppler. O terceiro termo contém contribuições escalares, vetoriais e tensoriais e é conhecido como Sachs-Wolfe integrado.
O termos de Sachs-Wolfe próprio, avaliado no momento do desacoplamento, é composto de duas contribuições: uma do contraste de densidade do fluido de radiação e outra do potencial gravitacional. O primeiro traduz, através da lei de Stefan-Boltzmann, que uma zona mais densa é mais quente. O segundo traduz que um fóton emitido dentro de um poço de potencial tem uma defasagem espectral adicional.
O termo de Doppler traduz que a defasagem espectral depende do fato do emissor e do receptor não terem a mesma velocidade. O termo integral depende da história do fóton entre sua emissão e recepção e é nele que aparecem as derivadas dos potenciais gravitacionais. Esse termo terá contribuições vindas do fato do fóton atravessar regiões com estruturas em formação durante sua história, entre outras.

Capítulo 2

Matrizes de rotação, geometria na esfera e harmônicos esféricos de spin

Neste Capítulo estudaremos um pouco da teoria de representação do grupo de rotações, um pouco de geometria sobre a esfera S^2, em especial uma maneira de escrever a derivada covariante sobre a esfera, e mostraremos a curiosa conexão entre esses dois assuntos. Isso nos permitirá mostrar, a partir de objetos fundamentais, como os ditos harmônicos esféricos de spin podem ser definidos. Este capítulo basicamente revisita alguns pontos de [17], mas com outra abordagem.

2.1 Equações diferenciais para matrizes de rotação

Consideremos a matriz de rotação parametrizada pelos ângulos de Euler:

$$D^j(\alpha\beta\gamma) = \mathrm{e}^{-i\alpha J_3}\mathrm{e}^{-i\beta J_2}\mathrm{e}^{-i\gamma J_3} \tag{2.1.1}$$

onde J_is são geradores do grupo de rotação ($J_i \in \mathrm{Mat}(3,\mathbb{R})$). Notar que estamos realizando uma rotação em torno do eixo z, uma em torno de y e, finalmente, uma outra rotação em torno de z[1]. Consideremos agora as seguintes derivadas de D^2:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}D^j(\alpha\beta\gamma) = -iJ_3D^j(\alpha\beta\gamma) \tag{2.1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}D^j(\alpha\beta\gamma) = \mathrm{e}^{-i\alpha J_3}(-iJ_2\mathrm{e}^{-i\beta J_2})\mathrm{e}^{-i\gamma J_3} = -i(\mathrm{e}^{-i\alpha J_3}J_2\mathrm{e}^{i\alpha J_3})D^j(\alpha\beta\gamma) \tag{2.1.3}$$

Pode-se mostrar, em geral, que em $SO(3)$, vale [22]

$$\mathbf{J}' = \mathrm{e}^{-i\psi\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{J}}\mathbf{J}\mathrm{e}^{i\psi\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{J}} = \mathbf{J}\cos\psi + \hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{J})(1-\cos\psi) + (\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{J})\mathrm{sen}\psi\,.$$

Para $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{k}}$,

$$\mathrm{e}^{-i\alpha J_3}J_2\mathrm{e}^{i\alpha J_3} = J_2\cos\psi - J_1\mathrm{sen}\psi\,. \tag{2.1.4}$$

[1] Notar que há livros de mecânica clássica executam a segunda rotação em torno do eixo x, como [18] ou [19], entretanto há outros, como o clássico [20] que fazem essa rotação em torno de y.

[2] Talvez o primeiro lugar em que se veja essa abordagem seja [21].

Introduzindo (2.1.4) em (2.1.3), temos

$$\frac{\partial}{\partial\beta}D^j(\alpha\beta\gamma) = -i(-J_1\text{sen}\alpha + J_2\cos\alpha)D^j(\alpha\beta\gamma) \tag{2.1.5}$$

Finalmente,

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}D^j(\alpha\beta\gamma) = \mathrm{e}^{-i\alpha J_3}\mathrm{e}^{-i\beta J_2}(-iJ_3)\mathrm{e}^{-i\gamma J_3} = -iD^j(\alpha\beta\gamma)J_3 = -i[D^j(\alpha\beta\gamma)J_3(D^j(\alpha\beta\gamma))^{-1}]D^j(\alpha\beta\gamma) \tag{2.1.6}$$

lembrando que

$$(D^j(\alpha\beta\gamma))^{-1} = \mathrm{e}^{i\gamma J_3}\mathrm{e}^{i\beta J_2}\mathrm{e}^{i\alpha J_3}$$

e que

$$D^j(\alpha\beta\gamma)J_3(D^j(\alpha\beta\gamma))^{-1}\mathrm{e}^{-i\alpha J_3}\underbrace{\mathrm{e}^{-i\beta J_2}J_3\mathrm{e}^{i\beta J_2}}_{J_3\cos\beta+J_1\text{sen}\beta}\mathrm{e}^{i\alpha J_3} = \cos\beta J_3 + \text{sen}\beta\underbrace{\mathrm{e}^{-i\alpha J_3}J_1\mathrm{e}^{i\alpha J_3}}_{J_1\cos\alpha+J_2\text{sen}\alpha}$$

(2.1.6) escreve-se como:

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}D^j(\alpha\beta\gamma) = -i(J_1\cos\alpha\text{sen}\beta + J_2\text{sen}\alpha\text{sen}\beta + J_3\cos\beta)D^j(\alpha\beta\gamma) \tag{2.1.7}$$

Podemos agora inverter (2.1.2), (2.1.5) e (2.1.7) e expressar a ação dos operadores matriciais J_i sobre as matrizes $D^j(\alpha\beta\gamma)$ como operadores diferenciais sobre as mesmas matrizes, ou seja,

$$J_iD^j(\alpha\beta\gamma) := -\mathcal{J}_iD^j(\alpha\beta\gamma)$$

para $\mathcal{J}_i$s adequados [22]. Matricialmente,

$$\begin{pmatrix} \partial_\alpha \\ \partial_\beta \\ \partial_\gamma \end{pmatrix} D^j(\alpha\beta\gamma) = -i\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha\text{sen}\beta & \text{sen}\alpha\text{sen}\beta & \cos\beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} D^j(\alpha\beta\gamma)\,. \tag{2.1.8}$$

Denotando momentaneamente a matriz quadrada que aparece em (2.1.8) por M, podemos nos convencer que, operando simbolicamente, teremos

$$\begin{aligned} (\partial)D^j &= -iM(J)D^j \\ M^{-1}(\partial)D^j &= -i(J)D^j \\ iM^{-1}(\partial)D^j &= -(\mathcal{J})D^j\,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 \\ \mathcal{J}_2 \\ \mathcal{J}_3 \end{pmatrix} D^j(\alpha\beta\gamma) = -i\begin{pmatrix} -\cos\alpha\text{cotg}\beta & -\text{sen}\alpha & \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\beta} \\ -\text{sen}\alpha\text{cotg}\beta & \cos\alpha & \frac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\beta} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_\alpha \\ \partial_\beta \\ \partial_\gamma \end{pmatrix} D^j(\alpha\beta\gamma)\,. \tag{2.1.9}$$

Com isso, pode-se escrever

$$\begin{pmatrix} \mathcal{J}_1 \\ \mathcal{J}_2 \\ \mathcal{J}_3 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} -\cos\alpha\mathrm{cotg}\beta & -\mathrm{sen}\alpha & \frac{\cos\alpha}{\mathrm{sen}\beta} \\ -\mathrm{sen}\alpha\mathrm{cotg}\beta & \cos\alpha & \frac{\mathrm{sen}\alpha}{\mathrm{sen}\beta} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\alpha \\ \partial_\beta \\ \partial_\gamma \end{pmatrix} . \tag{2.1.10}$$

Definindo $\mathcal{J}_+ = \mathcal{J}_1 + i\mathcal{J}_2$ e $\mathcal{J}_- = \mathcal{J}_1 - i\mathcal{J}_2$, temos,

$$\mathcal{J}_+ = \mathrm{e}^{i\alpha}\left(i\mathrm{cotg}\beta\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{i}{\mathrm{sen}\beta}\frac{\partial}{\partial\gamma}\right) \tag{2.1.11}$$

$$\mathcal{J}_- = \mathrm{e}^{-i\alpha}\left(i\mathrm{cotg}\beta\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{\partial}{\partial\beta} - \frac{i}{\mathrm{sen}\beta}\frac{\partial}{\partial\gamma}\right) \tag{2.1.12}$$

$$\mathcal{J}_3 = -i\frac{\partial}{\partial\alpha} . \tag{2.1.13}$$

Não é difícil mostrar que, dada a maneira como se relacionam J e $\mathcal{J}$, tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\pm D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) &= [(j\mp m')(j\pm m'+1)]^{1/2} D^{j*}_{(m'\pm1)m}(\alpha,\beta,\gamma) \\ \mathcal{J}_3 D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) &= m' D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) . \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

Facilmente verifica-se também que

$$\mathcal{J}_1^2 + \mathcal{J}_2^2 = \frac{1}{2}[\mathcal{J}_+\mathcal{J}_- + \mathcal{J}_-\mathcal{J}_+]$$

e, que, chamando de $\mathcal{J}^2 = \mathcal{J}_1^2 + \mathcal{J}_2^2 + \mathcal{J}_3^2$, tem-se

$$\mathcal{J}^2 D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = j(j+1) D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) . \tag{2.1.15}$$

Explicitamente, $\mathcal{J}^2$ pode ser escrito como:

$$\mathcal{J}^2 = -\mathrm{cossec}^2\beta\left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\gamma^2} - 2\cos\beta\frac{\partial^2}{\partial\alpha\beta}\right) - \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \mathrm{cotg}\beta\frac{\partial}{\partial\beta} \tag{2.1.16}$$

Perguntemo-nos agora se é possível encontrar funções $A(\alpha)$, $B(\beta)$ e $C(\gamma)$ tais que $D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = A(\alpha)B(\beta)C(\gamma)$, ou seja, se $\mathcal{J}^2 A(\alpha)B(\beta)C(\gamma) = j(j+1)A(\alpha)B(\beta)C(\gamma)$. Utilizando (2.1.16),

$$j(j+1) = -\mathrm{cossec}^2\beta\left(\frac{A''}{A} + \frac{C''}{C} - 2\cos\beta\frac{A'}{A}\frac{C'}{C}\right) - \frac{B''}{B} - \mathrm{cotg}\beta\frac{B'}{B} .$$

Não é difícil de se convencer, observando (2.1.1) que A e C devem ser escolhidos como

$$A(\alpha) = \mathrm{e}^{im'\alpha} \qquad C(\gamma) = \mathrm{e}^{im\gamma}$$

enquanto B deve satisfazer

$$\left(\frac{d^2}{d\beta^2} + \mathrm{cotg}\beta\frac{d}{d\beta} - \frac{m'^2 + m^2 - 2m'm\cos\beta}{\mathrm{sen}^2\beta} + j(j+1)\right) B(\beta) = 0\,. \tag{2.1.17}$$

Pode-se mostrar que as soluções regulares de (2.1.17) são as funções $d^j_{m'm}(\beta)$, que são polinômios de Jacobi [21], [23]. Explicitamente,

$$\begin{aligned} d^j_{m'm}(\beta) = & \sqrt{\frac{(j+m')!(j-m')!}{(j+m)!(j-m)!}} \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{-m-m'} \left(\mathrm{sen}\frac{\beta}{2}\right)^{2j+m+m'} (-1)^{j+m'} \\ & \times \sum_\nu \left[(-1)^\nu \binom{j+m}{\nu} \binom{j-m}{j+m'-\nu} \left(\cos\frac{\beta}{2}\right)^{2\nu} \left(\mathrm{sen}\frac{\beta}{2}\right)^{-2\nu}\right] \end{aligned} \tag{2.1.18}$$

onde a soma sobre ν estende-se sobre todos os valores naturais de ν para os quais os coeficientes binomiais não se anulam [24]. Nota-se por inspeção que $d^j_{m'm}(-\beta) = (-1)^{m'+m} d^j_{m'm}(\beta)$.
Com isso,

$$D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = \mathrm{e}^{im'\alpha} d^j_{m'm}(\beta) \mathrm{e}^{im\gamma}\,, \tag{2.1.19}$$

ou,

$$D^j_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = \mathrm{e}^{-im'\alpha} d^j_{m'm}(\beta) \mathrm{e}^{-im\gamma}\,. \tag{2.1.20}$$

2.2 Construindo mais um conjunto de operadores

Fomos capazes de obter operadores que incrementam ou decrementam um dos índices das funções $D^j_{m'm}$. Buscaremos agora operadores que sejam capazes de realizar a mesma tarefa com relação ao outro índice inferior.
Mostramos que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^2 D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) &= j(j+1) D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) \\ \mathcal{J}_3 D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) &= m' D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)\,. \end{aligned}$$

Entretanto,

$$-i\frac{\partial}{\partial\gamma} D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = m D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)\,,$$

ou seja, existe um outro operador, a saber

$$\mathcal{K}_3 = -i\frac{\partial}{\partial\gamma} \tag{2.2.1}$$

que comuta com $\mathcal{J}^2$ e $\mathcal{J}_3$.

Analisando a equação (2.1.16) notamos que não há alteração se trocarmos α e γ mantendo β ou fazendo $\beta \to -\beta$. Isso pode indicar a existência de eventuais $\mathcal{K}_1$ e $\mathcal{K}_2$ tais que $\mathcal{K}_1^2 + \mathcal{K}_2^2 + \mathcal{K}_3^2 = \mathcal{J}^2$. Com efeito, sejam

$$\mathcal{K}_1 = -i\cos\gamma \mathrm{cotg}\beta \frac{\partial}{\partial\gamma} - i\mathrm{sen}\gamma \frac{\partial}{\partial\beta} + i\frac{\cos\gamma}{\mathrm{sen}\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha} \tag{2.2.2}$$

$$\mathcal{K}_2 = i\mathrm{sen}\gamma \mathrm{cotg}\beta \frac{\partial}{\partial\gamma} - i\cos\gamma \frac{\partial}{\partial\beta} - i\frac{\mathrm{sen}\gamma}{\mathrm{sen}\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\,. \tag{2.2.3}$$

juntamente com $\mathcal{K}_3$ eles satisfazem $\mathcal{K}_1^2 + \mathcal{K}_2^2 + \mathcal{K}_3^2 = \mathcal{J}^2$ [22].
Podemos tambem definir

$$\mathcal{K}_+ = (\mathcal{K}_1 + i\mathcal{K}_2) = \mathrm{e}^{-i\gamma}\left(-i\mathrm{cotg}\beta\frac{\partial}{\partial\gamma} + \frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{i}{\mathrm{sen}\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) \tag{2.2.4}$$

e

$$\mathcal{K}_- = (\mathcal{K}_1 - i\mathcal{K}_2) = \mathrm{e}^{i\gamma}\left(-i\mathrm{cotg}\beta\frac{\partial}{\partial\gamma} - \frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{i}{\mathrm{sen}\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\,. \tag{2.2.5}$$

Pode-se mostrar [22] que esses operadores têm a seguinte propriedade:

$$\mathcal{K}_- D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = [(j-m)(j+m+1)]^{1/2} D^{j*}_{m'(m+1)}(\alpha,\beta,\gamma) \tag{2.2.6}$$

$$\mathcal{K}_+ D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = [(j+m)(j-m+1)]^{1/2} D^{j*}_{m'(m-1)}(\alpha,\beta,\gamma) \tag{2.2.7}$$

$$\mathcal{K}_3 D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = m D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) \tag{2.2.8}$$

já que os operadores $\mathcal{K}$s satisfazem relações de comutação com sinal invertido aos $\mathcal{J}$s.
Naturalmente,

$$\left\{\frac{1}{2}\left[\mathcal{K}_+\mathcal{K}_- + \mathcal{K}_-\mathcal{K}_+\right] + \mathcal{K}_3^2\right\} D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = j(j+1) D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)$$

A atuação de $\mathcal{K}_+$ e $\mathcal{K}_-$ sobre as matrizes de rotação pode ser escrita ainda de outra maneira. Para tanto consideremos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_+ D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) &= \mathrm{e}^{-i\gamma}\left(-i\mathrm{cotg}\beta\frac{\partial}{\partial\gamma} + \frac{\partial}{\partial\beta} + i\mathrm{cossec}\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) \\
&= \mathrm{e}^{-i\gamma}\left(m\mathrm{cotg}\beta + \frac{\partial}{\partial\beta} + i\mathrm{cossec}\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right) D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) \\
&= \mathrm{e}^{-i\gamma}\left\{(\mathrm{sen}\beta)^{-m}\left[m(\mathrm{sen}\beta)^{m-1}\cos\beta + (\mathrm{sen}\beta)^m\frac{\partial}{\partial\beta} + (\mathrm{sen}\beta)^m i\mathrm{cossec}\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right]\right\} D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) \\
&= \mathrm{e}^{-i\gamma}\left\{(\mathrm{sen}\beta)^{-m}\left[\frac{\partial}{\partial\beta} + i\mathrm{cossec}\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right](\mathrm{sen}\beta)^m\right\} D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma)\,.
\end{aligned} \tag{2.2.9}$$

Pode-se, de maneira completamente análoga, reescrever $\mathcal{K}_-$ na mesma forma. Ficamos, então, com[3]:

$$\mathcal{K}_+ D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = \mathrm{e}^{-i\gamma}\left\{(\mathrm{sen}\beta)^{-m}\left[\frac{\partial}{\partial\beta} + i\mathrm{cossec}\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right](\mathrm{sen}\beta)^{m}\right\} D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) \quad (2.2.10)$$

$$\mathcal{K}_- D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = \mathrm{e}^{i\gamma}\left\{-(\mathrm{sen}\beta)^{m}\left[\frac{\partial}{\partial\beta} - i\mathrm{cossec}\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\right](\mathrm{sen}\beta)^{-m}\right\} D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) \quad (2.2.11)$$

Fazendo analogia com o problema do rotor em mecânica quântica, $\mathcal{J}_\pm$ aumentam ou diminuiem a projeção do momento angular em relação ao eixo z de um sistema de referência fixo enquanto $\mathcal{K}_\pm$ sobem ou descem a projeção do momento angular com relação ao eixo z' coincidindo com o eixo de simetria do rotor (que está em rotação com relação ao sistema sem ') [22].

2.3 O teorema de Peter-Weyl e as funções de spin

O estudo das funções especiais tem sido programa fundamental na física-matemática desde há muito. A relação entre essas funções especiais e a teoria de grupos, entretanto, pode parecer bastante insuspeita a princípio. O teorema de Peter-Weyl é central para estabelecer-se essa conexão, explicitamente relacionando as representações irredutíveis unitárias de grupos compactos com conjuntos de funções satisfazendo propriedades comuns a qualquer conjunto de funções que se possa chamar de função especial. Pode-se inclusive reverter o programa padrão e introduzir-se às funções especiais partindo da teoria de representação de grupos, como, por exemplo, exposto em [26] ou [27].
Não se pretende aqui fazer uma exposição ampla sobre o assunto, mas apenas ilustrar o porque de se fazer expansões de funções em termos de matrizes de rotação. Apenas algumas definições básicas necessárias para fixar a nomenclatura serão introduzidas. Essa sessão é baseada em [28].

Definição 1 *Uma representação de um grupo G em um espaço vetorial V é uma aplicação que a cada $g \in G$ associa um operador linear invertível $\Pi(g) : V \to V$ de modo que sejam satisfeitas*

1. $\Pi(e) = \mathbb{1}$;
2. $\Pi(g)\Pi(h) = \Pi(gh)$, $\forall\, g,\, h \in G$;
3. $\Pi(g^{-1}) = \Pi(g)^{-1}$, $\forall\, g \in G$.

i. e., uma representação de um grupo em um espaço vetorial V é um homomorfismo de G no grupo dos operadores lineares invertíveis.

Definição 1 *Seja G um grupo e V_1, V_2 dois espaços vetoriais onde atuam duas representações de G:Π_1 e Π_2, respectivamente em V_1 e V_2. Um operador $U : V_1 \to V_2$ tal que $U\Pi_1(g) = \Pi_2(g)U$, para todo $g \in G$ é dito ser um intertwiner de Π_1 e Π_2.*

[3] Lembrar que em [17] e [25] tem-se $m = -s$

Dentro da coleção de todas as representações unitárias de dimensão finita de um grupo compacto G podemos estabelecer uma relação de equivalência dizendo que duas representações são equivalentes se possuírem um intertwiner invertível. Podemos tomar em cada classe um representante Π^α e formar assim uma coleção $\{\Pi^\alpha,\, \alpha \in \Lambda\}$ de todas as representações unitárias de dimensão finita não-equivalentes entre si do grupo compacto G. Acima Λ designa o conjunto de índices que rotulam as representações.
Cada Π^α age em um espaço vetorial V_α. No que segue designamos por d_α a dimensão de V_α.

Teorema (Peter-Weyl) 1 *Seja $\{\Pi^\alpha,\, \alpha \in \Lambda\}$ a coleção de todas as representações unitárias irredutíveis de dimensão finita não-equivalentes entre si de um grupo compacto G. Sejam $\Pi^\alpha(g)_{i,j}$, $i,\, j = 1, ..., d_\alpha$ seus elementos de matriz. Seja $d\mu$ a medida de Haar [29] de G. Então*

$$\int_G \Pi^\alpha(g)^*_{ij}\Pi^\beta(g)_{kl}d\mu(g) = \frac{1}{d_\alpha}\delta_{\alpha\beta}\delta_{ik}\delta_{jl}\,. \tag{2.3.1}$$

Por fim, as funções $\Pi^\alpha(g)_{i,j}$ $i,\, j = 1, ..., d_\alpha$ formam uma base ortogonal completa no espaço de Hilbert $\mathcal{L}^2(G, d\mu)$. Com isso, toda função $f \in \mathcal{L}^2(G, d\mu)$ pode ser escrita na forma

$$f(g) = \sum_{\alpha\in\Lambda}\sum_{i,j=1}^{d_\alpha} a^\alpha_{ij}\Pi^\alpha(g)_{ij} \tag{2.3.2}$$

onde

$$a^\alpha_{ij} = d_\alpha \int_G \Pi^\alpha(g)^*_{ij} f(g) d\mu(g)\,. \tag{2.3.3}$$

Ainda, para $f \in \mathcal{L}^2(G, d\mu)$ vale a identidade de Parseval:

$$\int_G |f(g)|^2 d\mu(g) = \sum_{\alpha\in\Lambda}\frac{1}{d_\alpha}\sum_{i,j=1}^{d_\alpha}|a^\alpha_{ij}|^2\,. \tag{2.3.4}$$

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [26], por exemplo.
No contexto do nosso estudo o grupo de interesse é $SO(3)$. Em $SO(3)$ a matriz denotada por $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ comuta com os três geradores L_a: $[L^2, L_a] = 0$, $\forall\, a = 1,\, 2,\, 3$.
Um operador com a propriedade de comutar com todos os geradores de um grupo de Lie é dito ser um operador de Casimir. Demonstra-se que L^2 é o único operador de Casimir não trivial de $SO(3)$. Como L^2 comuta com cada L_a, tendo $\Pi(R(\theta, \vec{\eta})) = \exp(-i\theta\vec{\eta}\cdot\vec{L})$, segue que $L^2\Pi(g) = \Pi(g)L^2$, $\forall\, g \in SO(3)$. Assim, pelo Lema de Schur [28]., se Π é uma representação irredutível, L^2 deve ser um múltiplo da identidade. Isso abre caminho para classificar as representações irredutíveis de $SO(3)$: estudando os possíveis valores de L^2. Em cada sub-espaço formado por autovetores com um dado autovalor fixo, teremos uma representação irredutível.
No caso de $SO(3)$, os $\Pi^\alpha(g)$ devem ser identificados com as matrizes de rotação $D^l(R)$, sendo $d_\alpha = 2l + 1$. Os $\Pi^\alpha_{i,j}(g)$, $i,\, j = 1, ..., d_\alpha$ serão os $D^l_{mm'}(R)$, $m,\, m' = -l, ..., l$.
As matrizes de rotação podem ser parametrizadas por três ângulos de Euler. Entretanto, se tomamos uma direção $\mathbf{n}$ caracterizada pelos ângulos (θ, ϕ) com $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_z = \cos\theta$, essa direção pode ser obtida de $\mathbf{n}_z$ pode ser

obtida por uma rotação $\mathbf{n}_z \to \mathbf{n}$

$$\mathbf{n} \to \mathrm{e}^{-i\phi J_z}\mathrm{e}^{-i\theta J_y}\mathbf{n_z} = D(\phi,\theta,0)\mathbf{n}_z\,.$$

Basta, portanto, fixar dois ângulos para definir completamente uma segunda direção a partir da primeira. Fixar o ângulo de Euler $\alpha = \phi$ e $\beta = \theta$ é necessário. γ, entretanto, não é fixado pela imposição $\mathbf{n}_z \to \mathbf{n}$.
Há, entretanto, uma classe de funções que se caracteriza por seu comportamento sob rotação em torno de $\mathbf{n}$ por um ângulo arbitrário. Essas funções satisfazem $f(x) \to f(x)\mathrm{e}^{-im_0\gamma}$, onde x é a coleção de parâmetros de que f explicitamente depende, m_0 é chamado de spin e γ é o ângulo girado. Essas funções são chamadas de *funções de spin* m_0 [17], [25]. Consideremos uma dessas funções com spin.
Seja $f(\alpha,\beta)\mathrm{e}^{-im_0\gamma}$ com α, β e γ ângulos de Euler. Pelo teorema de Peter-Weyl,

$$f(\alpha,\beta)\mathrm{e}^{-im_0\gamma} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{m,m'=-j}^{j} c^j_{mm'}D^j_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma) \tag{2.3.5}$$

com

$$\begin{aligned}
c^j_{mm'} &= (2j+1)\int D^{j*}_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma)f(\alpha,\beta)\mathrm{e}^{-im_0\gamma}d\mu \\
&= (2j+1)\int_0^{4\pi}\frac{d\alpha}{4\pi}\int_0^{4\pi}\frac{d\gamma}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\beta}{2}\mathrm{sen}\beta\,\mathrm{e}^{im\alpha}\,d^j_{mm'}(\beta)\,\mathrm{e}^{i(m'-m_0)\gamma}\,f(\alpha,\beta) \\
&= (2j+1)\int_0^{4\pi}\frac{d\gamma}{4\pi}\mathrm{e}^{i(m'-m_0)\gamma}\int_0^{4\pi}\frac{d\alpha}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\beta}{2}\,\mathrm{sen}\beta\,D^{j*}_{mm_0}(\alpha,\beta,0)\,f(\alpha,\beta) \\
&= (2j+1)\int_0^{4\pi}\frac{d\alpha}{4\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\beta}{2}\,\mathrm{sen}\beta\,D^{j*}_{mm'}(\alpha,\beta,0)\,f(\alpha,\beta) \\
&= (2j+1)c^j_{mm_0} \equiv a^j_m\,,
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
f(\alpha,\beta) &= \sum_{j,m} c^j_{mm_0}\mathrm{e}^{im_0\gamma}D^j_{mm_0}(\alpha,\beta,\gamma) \\
&= \sum_{j,m} a^j_m D^j_{mm_0}(\alpha,\beta,0)\,.
\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Reescrevendo,

$$f(\alpha,\beta) = \sum_{j,m} a^j_m D^j_{mm_0}(\alpha,\beta,0) \tag{2.3.8}$$

com

$$a^j_m = (2j+1)\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\alpha\int_0^{\pi}d\beta\,\mathrm{sen}\beta\,D^{j*}_{mm_0}(\alpha,\beta,0)f(\alpha,\beta)\,. \tag{2.3.9}$$

As funções $D^j_{mm'}(\alpha,\beta,0)$ são ortogonais pois, quando um produto de duas tais funções são integradas nos

ângulos α e β, as exponenciais (que dependem de α) são ortogonais e as funções $d^j_{mm'}(\beta)$, que são polinômios de Jacobi, são também polinômios ortogonais.

2.4 Comentário sobre a inversa de uma rotação e algumas conseqüências

Seja $R(\alpha, \beta, \gamma)$ uma rotação parametrizada por ângulos de Euler. Por definição, α, $\gamma \in (-\pi, \pi]$ e $\beta \in [0, \pi]$. A inversa da rotação $R(\alpha, \beta, \gamma)$ é a rotação $R(\pi - \gamma, \beta, \pi - \alpha)$.
Escrevendo $D^j_{m'm}(R(\alpha, \beta, \gamma))$ para explicitar a dependência de D não apenas nos ângulos, mas em uma rotação por aqueles ângulos, tem-se, como D^j são representações unitárias do grupo de rotação,

$$D^j_{m'm}(R(\alpha, \beta, \gamma)^{-1}) = D^{j*}_{mm'}(R(\alpha, \beta, \gamma))\,. \tag{2.4.1}$$

Escrevendo agora

$$D^j_{m'm}(R(\alpha, \beta, \gamma)^{-1}) = D^j_{m'm}(\pi - \gamma, \beta, \pi - \alpha) = \mathrm{e}^{-im'(\pi-\gamma)} d^j_{m'm}(\beta) \mathrm{e}^{-im(\pi-\alpha)} = D^j_{m'm}(-\gamma, -\beta, -\alpha) \tag{2.4.2}$$

já que, de (2.1.18),

$$d^j_{m'm}(-\beta) = (-1)^{m'+m} d^j_{m'm}(\beta)\,. \tag{2.4.3}$$

Naturalmente (2.4.2) deve ser entendida como um abuso de linguagem uma vez que, por ser um ângulo de Euler, $0 \leq \beta \leq \pi$.
A realidade das funções $d^j_{m'm}(\beta)$ junto com a unitariedade da representação implicam em

$$d^j_{m'm}(\beta) = d^j_{mm'}(-\beta)\,. \tag{2.4.4}$$

Uma outra relação pode ser obtida como segue [24]: Seja $|jm\rangle$ um auto-estado de momento angular j. Então

$$\begin{aligned} d^j_{m'm}(\beta) &= \langle jm'|\mathrm{e}^{-i\beta J_2}|jm\rangle \\ &= \langle jm'|\mathrm{e}^{+i\pi J_1}\mathrm{e}^{+i\beta J_2}\mathrm{e}^{-i\pi J_1}|jm\rangle \end{aligned}$$

porque aplicar uma rotação de um ângulo π em torno do eixo x, uma rotação de um ângulo β em torno de y e ainda uma rotação de um ângulo π em torno de x é equivalente a fazer uma rotação de $-\beta$ em torno de y. Agora,

$$\mathrm{e}^{-\pi J_1}|jm\rangle = \phi_x(j, m)|j, -m\rangle$$

onde $\phi_x(j, m)$ é uma fase. As fases vão se cancelar e teremos

$$d^j_{m'm}(\beta) = d^j_{-m'-m}(-\beta) = d^j_{-m-m'}(\beta)\,. \tag{2.4.5}$$

De (2.1.20) e de (2.4.3), (2.4.4) e (2.4.5) tem-se

$$D^{j*}_{m'm}(\alpha,\beta,\gamma) = (-1)^{m'-m} D^{j}_{-m'-m}(\alpha,\beta,\gamma)\,. \tag{2.4.6}$$

2.5 Relação entre matrizes de rotação e harmônicos esféricos de spin

Definindo os harmônicos esféricos de spin da maneira mais direta possível á partir dos $D^{j}_{m'm}$, seguindo o fato que

$$D^{j*}_{m0}(\alpha,\beta,\gamma) = \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}}\mathrm{Y}_{jm}(\beta,\alpha)$$

definimos

$$D^{j*}_{m'-m}(\alpha,\beta,\gamma) =: \sqrt{\frac{4\pi}{2j+1}}\,{}_m\mathrm{Y}_{jm'}(\beta,\alpha) \tag{2.5.1}$$

impondo-se $\gamma = 0$.
O objeto ${}_m\mathrm{Y}_{jm'}(\beta,\alpha)$ é chamado de *harmônico esférico de spin*[4]. Trata-se de um objeto um tanto quanto redundante no tratamento de polarização, por exemplo, uma vez que as matrizes de rotação são objetos mais fundamentais em termos das quais expansões podem ser feitas. O estudo e aplicação desses harmônicos esféricos tem origem na descrição de problemas de radiação em relatividade geral (problema de Bondi) e aparecem no estudo de representações do grupo BMS[5] [25], [30].
A conexão dos harmônicos esféricos de spin com matrizes de rotação aparece de maneira não-homogênea na literatura e não é difícil encontrar diferentes convenções para definí-los (ver [17] e [3] ou [31], [32] e [33] para alguns exemplos). Apesar de tudo, esses objetos são largamente empregados na literatura sobre polarização da radiação cósmica de fundo e portanto convém saber como conciliar diferentes maneiras de fazer expansões.
Se nos remetemos à Seção 2.3, vemos que, se temos uma quantidade Ψ de spin m que desejamos decompor em termos dos elementos de matriz da representação irredutível do grupo de rotação, temos (omitindo as dependências das quantidades que aparecem porque aqui elas não têm nenhum papel):

$$\Psi = \sum_{jm'} \frac{2j+1}{4\pi}\psi^{(m)}_{jm'} D^{j}_{m'm}$$

onde $\psi^{(m)}_{jm'} = \int \Psi D^{j*}_{m'm} dR$. Portanto,

$$\sum_{jm'} \frac{2j+1}{4\pi}\psi^{(m)}_{jm'} D^{j}_{m'm} = \sum_{jm'} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\psi^{(m)}_{jm'}\left(\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}D^{j}_{m'm}\right) = \sum_{jm'} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\psi^{(m)}_{jm'}(-1)^{m'-m}\left(\sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}D^{j*}_{-m'-m}\right)$$

$$= \sum_{jm'} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\psi^{(m)}_{jm'}(-1)^{m'-m}\,{}_m\mathrm{Y}_{j-m'} = \sum_{jm'} \sqrt{\frac{2j+1}{4\pi}}\psi^{(m)}_{j-m'}(-1)^{m'-m}\,{}_m\mathrm{Y}_{jm'} = \sum_{jm'} \xi^{(m)}_{jm'}\,{}_m\mathrm{Y}_{jm'}$$

[4] *Spin-weighted spherical harmonics em inglês.*
[5] Bondi, Metzner, Sachs.

se chamamos de $\xi^{(m)}_{jm'}$ os coeficientes de Ψ em termos de harmônicos esféricos de spin. Logo,

$$\xi^{(m)}_{jm'} = (-1)^{m-m'}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\psi^{(m)}_{j-m'} \tag{2.5.2}$$

Para o caso em que $m = 2$, em que teremos especial interesse, temos

$$\xi^{(2)}_{lm} = (-1)^{m}\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\psi^{(2)}_{l-m}\,. \tag{2.5.3}$$

O $(-1)^m$ que fica aparecendo podia ser eliminado se, ao invés de assumirmos independência do terceiro ângulo de Euler, tivéssemos assumido independência do primeiro [24].

2.6 Operadores de levantamento e abaixamento de spin

Define-se de maneira análoga a [17], fazendo referência a (2.2.10), os objetos

$$\Big[\mathcal{K}_+ D^{j*}_{m-s}(\alpha,\beta,\gamma)\Big]_{\gamma=0} = \eth D^{j*}_{m-s}(\alpha,\beta,0)\,, \tag{2.6.1}$$

$$\Big[-\mathcal{K}_- D^{j*}_{m-s}(\alpha,\beta,\gamma)\Big]_{\gamma=0} = \eth^* D^{j*}_{m-s}(\alpha,\beta,0)\,. \tag{2.6.2}$$

O símbolo $\eth$ é chamado *eth*. O sinal de menos em (2.6.2) é para que se tenha concordância com o efeito desse operador sobre os harmônicos esféricos de spin tal como apresentado em [17] ou [25], ou seja, para que

$$\eth\,{}_m\mathrm{Y}_{jm'} = [(j-m)(j+m+1)]^{1/2}\,{}_{(m+1)}\mathrm{Y}_{jm'} \tag{2.6.3}$$

$$\eth^*\,{}_m\mathrm{Y}_{jm'} = -[(j+m)(j-m+1)]^{1/2}\,{}_{(m-1)}\mathrm{Y}_{jm'}\,. \tag{2.6.4}$$

Essa diferença de sinal com relação ao que se espera à partir da teoria de momento angular [22] pode ser entendida como uma adaptação para que objetos vindos da teoria de momento angular satisfaçam propriedades de objetos que, em essência, não precisariam estar associados a essa teoria, no caso os harmônicos esféricos de spin que, como já dito, surgem em outro contexto [25].
Deve-se notar que

$$(\mathcal{K}_+)^* = -(\mathcal{K}_-) \qquad\qquad (\mathcal{K}_-)^* = -(\mathcal{K}_+) \tag{2.6.5}$$

e, portanto, pode-se entender também o sinal menos que aparece em (2.6.2) como uma maneira de fazer com que, de fato, $\eth$ e $\eth^*$ sejam complexos conjugados um do outro já que $\mathcal{K}_+$ e $\mathcal{K}_-$ não o são.

2.7 Geometria diferencial sobre a esfera S^2

2.7.1 Generalidades sobre como escrever um tensor em diferentes bases

Consideremos um tensor escrito na base cartesiana como

$$T = T^{11}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + T^{12}\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + T^{21}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + T^{22}\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \,.$$

Considerando que podemos escrever os vetores da base cartesiana em termos da base esférica como

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ - \mathbf{e}_-) \qquad\qquad \mathbf{e}_2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-)\,, \tag{2.7.1}$$

temos,

$$\begin{aligned}
T &= T^{11}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ - \mathbf{e}_-) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ - \mathbf{e}_-)\right] + T^{12}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ - \mathbf{e}_-) \otimes \frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-)\right] + \\
&+T^{21}\left[\frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ - \mathbf{e}_-)\right] + T^{22}\left[\frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-) \otimes \frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-)\right] \\
&= \frac{1}{2}\{T^{11}[\mathbf{e}_- \otimes \mathbf{e}_- - \mathbf{e}_- \otimes \mathbf{e}_+ - \mathbf{e}_+ \otimes \mathbf{e}_- + \mathbf{e}_+ \otimes \mathbf{e}_+] + iT^{12}[\mathbf{e}_- \otimes \mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_- \otimes \mathbf{e}_- - \mathbf{e}_+ \otimes \mathbf{e}_+ - \mathbf{e}_+ \otimes \mathbf{e}_-] + \\
&+iT^{21}[\mathbf{e}_+ \otimes \mathbf{e}_- - \mathbf{e}_+ \otimes \mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_- \otimes \mathbf{e}_- - \mathbf{e}_- \otimes \mathbf{e}_+] - T^{22}[\mathbf{e}_+ \otimes \mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_+ \otimes \mathbf{e}_- + \mathbf{e}_- \otimes \mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_- \otimes \mathbf{e}_-]\} \\
&= \frac{1}{2}[(T^{11} + iT^{12} + iT^{21} - T^{22})\mathbf{e}_- \otimes \mathbf{e}_- + (-T^{11} + iT^{12} - iT^{21} - T^{22})\mathbf{e}_- \otimes \mathbf{e}_+ + \\
&+(-T^{11} - iT^{12} + iT^{21} - T^{22})\mathbf{e}_+ \otimes \mathbf{e}_- + (T^{11} - iT^{12} - iT^{21} - T^{22})\mathbf{e}_+ \otimes \mathbf{e}_+]
\end{aligned}$$

enfim,

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\{[(T^{11} - T^{22}) + i(T^{12} + T^{21})]\mathbf{e}_- \otimes \mathbf{e}_- - [(T^{11} + T^{22}) - i(T^{12} - T^{21})]\mathbf{e}_- \otimes \mathbf{e}_+ - \\
&-[(T^{11} + T^{22}) + i(T^{12} - T^{21})]\mathbf{e}_+ \otimes \mathbf{e}_- + [(T^{11} - T^{22}) - i(T^{12} + T^{21})]\mathbf{e}_+ \otimes \mathbf{e}_+\}\,.
\end{aligned} \tag{2.7.2}$$

Sob conjugação complexa os vetores da base esférica satisfazem

$$\mathbf{e}_+^* = -\mathbf{e}_- \qquad\qquad \mathbf{e}_-^* = -\mathbf{e}_+\,. \tag{2.7.3}$$

Introduzindo (2.7.3) em (2.7.2), teremos

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}\{[(T^{11} + T^{22}) - i(T^{12} - T^{21})]\mathbf{e}_+^* \otimes \mathbf{e}_+ - [(T^{11} - T^{22}) - i(T^{12} + T^{21})]\mathbf{e}_-^* \otimes \mathbf{e}_+ - \\
&-[(T^{11} - T^{22}) + i(T^{12} + T^{21})]\mathbf{e}_+^* \otimes \mathbf{e}_- + [(T^{11} + T^{22}) - i(T^{12} + T^{21})]\mathbf{e}_-^* \otimes \mathbf{e}_-\}\,.
\end{aligned} \tag{2.7.4}$$

Há, entretanto, uma redundância em empregar-se $\mathbf{e}_+$, $\mathbf{e}_-$ e seus conjugados como base, já que podíamos usar apenas $\mathbf{e}_+$ e $\mathbf{e}_-$, por exemplo. Isso corresponderia a olhar a esfera S^2 como uma variedade complexa [34], mas com uma base não-coordenada, neste caso. De fato, como variedade complexa, S^2 pode ser identificada com a esfera de Riemann, ou seja, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Vamos, portanto, usar apenas $\mathbf{e}_+$ e $\mathbf{e}_-$[6] como vetores de base.

[6] Talvez fosse mais tradicional usar $\mathbf{e}_+$ e $\mathbf{e}_+^*$ como base, mas isso carregaria demais a notação.

Neste caso a métrica é hermitiana.

Aplicação para a decomposição de uma matriz densidade

Escrita na base cartesiana, a matriz densidade de um sistema de dois níveis, ou a matriz densidade que descreve a polarização de fótons, tem a forma clássica

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1-\xi_3 \end{pmatrix}, \tag{2.7.5}$$

onde ξ_1, ξ_2 e ξ_3, no contexto do estudo de polarização, estão associados a parâmetros de Stokes, escritos também como Q, V e U, como se costuma denotar esses parâmetros na literatura. Naturalmente, para que se tenha uma matriz densidade definida, $\xi_i \in \mathbb{R}$ e $|\vec{\xi}| \leq 1$, $i = 1, 2, 3$.
Se, agora, usarmos os vetores $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_j$ com i, j sendo $+$, $-$, escreveremos a matriz densidade como[7]

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \xi_3 - i\xi_1 & -1-\xi_2 \\ -1+\xi_2 & \xi_3 + i\xi_1 \end{pmatrix}. \tag{2.7.6}$$

Se estivessemos interessados apenas na parte sem traço da matriz densidade (2.7.5) [que é o tensor de polarização (3.2.22)], obteríamos

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \xi_3 - i\xi_1 & -\xi_2 \\ \xi_2 & \xi_3 + i\xi_1 \end{pmatrix}. \tag{2.7.7}$$

O que há de interessante sobre essa última maneira de reescrever objetos na base $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_j$ com i, j sendo $+$, $-$ vem da análise do comportamento sob rotações dos vetores de base.
Naturalmente, quando de uma rotação de um ângulo γ do sistema de coordenadas, $\mathbf{e}_1 \to \cos\gamma\mathbf{e}_1 - \mathrm{sen}\gamma\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_2 \to \mathrm{sen}\gamma\mathbf{e}_1 - \cos\gamma\mathbf{e}_2$. Pode-se, então, deduzir o comportamento dos vetores da base esférica sob rotação. Denotando com $'$ o sistema girado, temos

$$\mathbf{e}'_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}'_1 + i\mathbf{e}'_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\gamma\mathbf{e}_1 - \mathrm{sen}\gamma\mathbf{e}_2 + i\mathrm{sen}\gamma\mathbf{e}_1 + i\cos\gamma\mathbf{e}_2) = e^{i\gamma}\mathbf{e}_+ .$$

Analogamente $\mathbf{e}'_- = e^{-i\gamma}\mathbf{e}_-$.
Assim, se temos uma quantidade vetorial $\mathbf{V}$ decomposta na base $\{\mathbf{e}_+, \mathbf{e}_-\}$, ou seja, $\mathbf{V} = V^+\mathbf{e}_+ + V^-\mathbf{e}_-$, as componentes V^+ e V^- devem se comportar como $V^{+'} = e^{-i\gamma}V^+$ e $V^{-'} = e^{i\gamma}V^-$ sob uma rotação como a acima descrita.
Se considerarmos (2.7.7) com $\xi_2 = 0$, teremos

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \xi_3 - i\xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_3 + i\xi_1 \end{pmatrix}, \tag{2.7.8}$$

e, daí, temos que $\mathcal{P}^{++'} = (\xi_3 - i\xi_1) = e^{-2i\gamma}\mathcal{P}^{++}$ e $\mathcal{P}^{--'} = (\xi_3 + i\xi_1) = e^{+2i\gamma}\mathcal{P}^{--}$ e, portanto, $\xi_3 - i\xi_1$ é um objeto de spin 2[8].

[7] Notar que agora estamos empregando uma base complexa não coordenada e traços devem ser tomados com intermédio da métrica.

[8] Lembrar que na seção 2.3 definimos que uma função tinha spin m_0 se, quando executada uma rotação de um ângulo γ a função satisfazia $f(x) \to f(x)\mathrm{e}^{-im_0\gamma}$, onde x é a coleção de parâmetros de que f explicitamente depende.

2.7.2 Bases não-coordenadas e conexões sobre a esfera

A introdução a bases não coordenadas aqui apresentada é baseada em [34].
Quando tratamos com uma base coordenada, um vetor arbitrário de T_pM pode ser decomposto em termos de vetores do conjunto $\{e_\mu\} = \{\partial/\partial x^\mu\}$ e um elemento de T_p^*M em termos de $\{dx^\mu\}$. Quando M é dotada de uma métrica g, então há uma possível alternativa. Consideremos a combinação linear

$$\hat{e}_\alpha = e_\alpha{}^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \qquad \{e_\alpha{}^\mu\} \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{R}) \tag{2.7.9}$$

onde $\det(e_\alpha{}^\mu) > 0$. Em outras palavras, $\{\hat{e}_\alpha\}$ é um conjunto de vetores obtidos de $\{e_\mu\}$ por uma $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$-rotação, preservando a orientação. Podemos requerer que $\{\hat{e}_\alpha\}$ seja ortonormal com respeito a g, ou seja,

$$g(\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta) = e_\alpha{}^\mu e_\beta{}^\nu g_{\mu\nu} = \delta_{\alpha\beta}\,.$$

Podemos também escrever o contrário,

$$g_{\mu\nu} = e^\alpha{}_\mu e^\beta{}_\nu \delta_{\alpha\beta}$$

onde $e^\alpha{}_\mu$ é a inversa de $e_\alpha{}^\mu$.
Seja V um vetor. Como V é independente da base, temos $V = V^\mu e_\mu = V^\alpha \hat{e}_\alpha = V^\alpha e_\alpha{}^\mu e_\mu$. Daí,

$$V^\mu = V^\alpha e_\alpha{}^\mu \qquad V^\alpha = e^\alpha{}_\mu V^\mu\,.$$

Podemos também introduzir a base dual $\{\hat{\theta}^\alpha\}$ definida por $\langle \hat{\theta}^\alpha, \hat{e}_\beta \rangle = \delta^\alpha{}_\beta$. $\hat{\theta}^\alpha$ escreve-se como

$$\hat{\theta}^\alpha = e^\alpha{}_\mu dx^\mu\,. \tag{2.7.10}$$

Em termos de $\{\hat{\theta}^\alpha\}$ a métrica escreve-se como:

$$g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \delta_{\alpha\beta} \hat{\theta}^\alpha \otimes \hat{\theta}^\beta\,.$$

As bases $\{\hat{e}_\alpha\}$ e $\{\hat{\theta}^\alpha\}$ são chamadas de bases não-coordenadas. Os coeficientes $e_\alpha{}^\mu$ são chamados de *vierbeine* em espaços quadridimensionais, *vielbeine* em espaços de maior dimensão e *zweibeine* no caso de termos uma variedade bi-dimensional.
Uma das propriedades fundamentais das bases não coordenadas é que essas têm colchete de Lie não nulo, ou seja,

$$[\hat{e}_\alpha, \hat{e}_\beta]|_p = c_{\alpha\beta}{}^\gamma(p) \hat{e}_\gamma|_p$$

onde $c_{\alpha\beta}{}^\gamma(p) = e_\gamma{}^\nu [e_\alpha{}^\mu \partial_\mu e_\beta{}^\nu - e_\beta{}^\mu \partial_\mu e_\alpha{}^\nu](p)$.
Lembremo-nos das definições de curvatura e torção numa variedade riemanniana:

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z\,, \\ T(X,Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \end{aligned}$$

onde X, Y, e Z são campos vetoriais em M. Em coordenadas temos:

$$\begin{aligned} T^{\alpha}{}_{\beta\gamma} &= \Gamma^{\alpha}{}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta} - c_{\beta\gamma}{}^{\alpha}\,, \\ R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} &= \hat{e}_{\gamma}\Gamma^{\alpha}{}_{\delta\beta} - \hat{e}_{\delta}\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta} + \Gamma^{\varepsilon}{}_{\delta\beta}\Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\varepsilon} - \Gamma^{\varepsilon}{}_{\gamma\beta}\Gamma^{\alpha}{}_{\delta\varepsilon} - c_{\gamma\delta}{}^{\varepsilon}\Gamma^{\alpha}{}_{\varepsilon\beta}\,, \end{aligned}$$

onde os coeficientes da conexão com respeito à base $\{\hat{e}_{\alpha}\}$ são escritos como $\nabla_{\hat{e}_{\alpha}}\hat{e}_{\beta} = \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}\hat{e}_{\gamma}$. Introduzimos, por fim, a chamada 1-forma de conexão por

$$\omega^{\alpha}{}_{\beta} = \Gamma^{\alpha}{}_{\gamma\beta}\hat{\theta}^{\gamma}\,. \tag{2.7.11}$$

As 1-formas de conexão satisfazem importantes relações chamadas equações de estrutura de Cartan, cujas demonstração e aplicações podem ser encontradas, por exemplo, em [34], [35] ou [36]. Essas relações são conhecidas como primeira e segunda equação de estrutura de Cartan:

$$d\hat{\theta}^{\alpha} + \omega^{\alpha}{}_{\beta}\wedge\hat{\theta}^{\beta} = T^{\alpha}\,, \tag{2.7.12}$$

$$d\omega^{\alpha}{}_{\beta} + \omega^{\alpha}{}_{\gamma}\wedge\omega^{\gamma}{}_{\beta} = R^{\alpha}{}_{\beta} \tag{2.7.13}$$

onde introduzimos a 2-forma de torção $T^{\alpha} = \frac{1}{2}T^{\alpha}{}_{\beta\gamma}\hat{\theta}^{\beta}\wedge\hat{\theta}^{\gamma}$ e a 2-forma de curvatura $R^{\alpha}{}_{\beta} = \frac{1}{2}R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta}\hat{\theta}^{\gamma}\wedge\hat{\theta}^{\delta}$. Uma observação deve ser feita sobre os casos em que a conexão é de Levi-Civita em (M, g), ou seja, a conexão é compatível com a métrica ($\nabla_X g = 0$) e a torção anula-se. Neste caso pode-se mostrar que a 1-forma de conexão satisfaz

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha} \tag{2.7.14}$$

onde $\omega_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\gamma}\omega^{\gamma}{}_{\beta}$. Notamos também que no caso da conexão ser de Levi-Civita, temos

$$c_{\alpha\beta}{}^{\gamma} = \Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} - \Gamma^{\gamma}{}_{\beta\alpha}\,.$$

Passamos agora ao problema que nos interessa tratar. Consideremos a esfera S^2 como nossa variedade. Podemos escrever a métrica de S^2 como

$$g = d\theta\otimes d\theta + \mathrm{sen}^2\theta d\phi\otimes d\phi = \hat{\theta}^1\otimes\hat{\theta}^1 + \hat{\theta}^2\otimes\hat{\theta}^2 \tag{2.7.15}$$

onde $\hat{\theta}^1 = d\theta$ e $\hat{\theta}^2 = \mathrm{sen}\theta d\phi$. Os zweibeins nesse caso são

$$e_1{}^{\theta} = 1 \qquad e_1{}^{\phi} = 0 \qquad e_2{}^{\theta} = 0 \qquad e_2{}^{\phi} = \mathrm{sen}\theta\,. \tag{2.7.16}$$

Passamos agora ao cálculo das 1-formas de conexão $\{\omega^{\alpha}{}_{\beta}\}$. Devemos notar, primeiro, que, considerando uma conexão de Levi-Civita, teremos, devido a (2.7.14), $\omega_{11} = \omega_{22} = 0$, o que equivale a $\omega^1{}_1 = \omega^2{}_2 = 0$. $\omega^1{}_2$ e $\omega^2{}_1$ podem ser obtidos com a ajuda da primeira equação de estrutura de Cartan.

$$0 = d(\mathrm{sen}\theta d\phi) + \omega^2{}_1\wedge d\theta = \cos\theta d\theta\wedge d\phi + \omega^2{}_1\wedge d\theta$$

donde, ${\omega^2}_1 = \cos\theta d\phi$. Novamente usando (2.7.14), ${\omega^1}_2 = -\cos\theta d\phi$. Tendo calculado as 1-formas de conexão, podemos, usando (2.7.11), obter os símbolos da conexão. Os únicos símbolos não nulos são ${\Gamma^1}_{22} = -\text{cotg}\theta$ e ${\Gamma^1}_{21} = \text{cotg}\theta$. Deve-se ter em mente que quando se utiliza uma base não coordenada os símbolos de Christoffel não são mais simétricos com relação à troca de seus índices inferiores.
Interessamo-nos, no entanto, em utilizar a base formada pelos vetores $\mathbf{e}_+$ e $\mathbf{e}_-$ em nossos cálculos e, por isso, convém determinar os símbolos de Christoffel com relação a essa escolha de vetores base. Escrevemos:

$$\mathbf{e}_\pm = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\theta \pm i\mathbf{e}_\phi)\,.$$

Recobremos para essa empreitada a propriedade definidora dos símbolos de Christoffel, ou seja, $\nabla_{\mathbf{e}_k}\mathbf{e}_j = \Gamma^i_{kj}\mathbf{e}_i$, onde i, j e k podem ser $+$ ou $-$[9].
Comecemos por $\nabla_{\mathbf{e}_-}\mathbf{e}_+$.

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{e}_-}\mathbf{e}_+ &= \nabla_{\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\theta - i\mathbf{e}_\phi)}\mathbf{e}_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}\nabla_{\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{e}_\theta - i\mathbf{e}_\phi)}(\mathbf{e}_\theta + i\mathbf{e}_\phi)\\
&= -\frac{1}{2}(\nabla_{\mathbf{e}_\theta}\mathbf{e}_\theta + i\nabla_{\mathbf{e}_\theta}\mathbf{e}_\phi - i\nabla_{\mathbf{e}_\phi}\mathbf{e}_\theta + \nabla_{\mathbf{e}_\phi}\mathbf{e}_\phi)\\
&= -\frac{1}{2}\left[\Gamma^1_{11}\mathbf{e}_1 + \Gamma^2_{11}\mathbf{e}_2 + i(\Gamma^1_{12}\mathbf{e}_1 + \Gamma^2_{12}\mathbf{e}_2) - i(\Gamma^1_{21}\mathbf{e}_1 + \Gamma^2_{21}\mathbf{e}_2) + \Gamma^1_{22}\mathbf{e}_1 + \Gamma^2_{22}\mathbf{e}_2\right]\\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}(-\text{cotg}\theta)\frac{(\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2)}{\sqrt{2}} = \frac{-\text{cotg}\theta}{\sqrt{2}}\\
&= \Gamma^+_{-+}\mathbf{e}_+\,.
\end{aligned} \tag{2.7.17}$$

De modo análogo obtém-se $\Gamma^-_{+-} = \frac{\text{cotg}\theta}{\sqrt{2}}$, $\Gamma^+_{++} = \frac{-\text{cotg}\theta}{\sqrt{2}}$ e $\Gamma^-_{--} = \frac{\text{cotg}\theta}{\sqrt{2}}$, que completam o conjunto dos símbolos de Christoffel não nulos.

2.7.3 Maneira de reescrever a derivada covariante

Seja T um tensor de posto 2 escrito na base $\mathbf{e}_+$, $\mathbf{e}_-$ e que é diagonal nessa base[10]. Desejamos obter a derivada covariante das componentes desse tensor com relação aos vetores da base, ou seja, desejamos obter $T^{++}_{;-}$, $T^{++}_{;+}$, $T^{--}_{;+}$ e $T^{--}_{;-}$.

$$T^{--}_{;+} = \mathbf{e}_+(T^{--}) + \Gamma^-_{+-}T^{--} + \Gamma^-_{+-}T^{--}\,. \tag{2.7.18}$$

Onde usamos o fato que o tensor é diagonal e que os únicos símbolos de conexão não nulos são $\Gamma^+_{-+} = -\Gamma^-_{+-} = \Gamma^+_{++} = -\Gamma^-_{--} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\text{cotg}\theta$. Tendo (2.2.10), (2.6.1) e (2.6.2) em mente, calcula-se

[9] Convém ter em mente as propriedades que devem ser satisfeitas por uma conexão, ou seja, dados X, Y, Z campos vetoriais no espaço tangente a uma variedade, f uma função contínua e ∇ uma conexão nessa variedade então vale

$$\begin{aligned}
\nabla_X(Y+Z) &= \nabla_X Y + \nabla_X Z\\
\nabla_{(X+Y)}Z &= \nabla_X Z + \nabla_Y Z\\
\nabla_{(fX)} &= f\nabla_X Y\\
\nabla_X(fY) &= X[f]Y + f\nabla_X Y\,.
\end{aligned}$$

[10] O posto do tensor ser assumido 2 aqui é apenas uma conveniência, mas a generalização para o caso de um posto s pode ser feita [31].

$$
\begin{aligned}
T^{--}_{;+} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\partial_\theta + \frac{i}{\mathrm{sen}\theta}\partial_\phi\right)T^{--} + \frac{2}{\sqrt{2}}\mathrm{cotg}\theta T^{--} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\partial_\theta - 2\mathrm{cotg}\theta + \frac{i}{\mathrm{sen}\theta}\partial_\phi\right)T^{--} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\eth T^{--}\,. \qquad (2.7.19)
\end{aligned}
$$

Continuando,

$$
\begin{aligned}
T^{--}_{;-} &= \mathbf{e}_-(T^{--}) + \Gamma^-_{--}T^{--} + \Gamma^-_{--}T^{--} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\partial_\theta - \frac{i}{\mathrm{sen}\theta}\partial_\phi\right)T^{--} + \frac{2}{\sqrt{2}}\mathrm{cotg}\theta T^{--} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\partial_\theta + 2\mathrm{cotg}\theta - \frac{i}{\mathrm{sen}\theta}\partial_\phi\right)T^{--} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\eth^* T^{--}\,, \qquad (2.7.20)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T^{++}_{;-} &= \mathbf{e}_-(T^{++}) + \Gamma^+_{-+}T^{++} + \Gamma^+_{-+}T^{++} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\partial_\theta - \frac{i}{\mathrm{sen}\theta}\partial_\phi\right)T^{++} - \frac{2}{\sqrt{2}}\mathrm{cotg}\theta T^{++} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\partial_\theta + (-2)\mathrm{cotg}\theta - \frac{i}{\mathrm{sen}\theta}\partial_\phi\right)T^{++} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\eth^* T^{++}\,, \qquad (2.7.21)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
T^{++}_{;+} &= \mathbf{e}_+(T^{++}) + \Gamma^+_{++}T^{++} + \Gamma^+_{++}T^{++} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\partial_\theta + \frac{i}{\mathrm{sen}\theta}\partial_\phi\right)T^{++} - \frac{2}{\sqrt{2}}\mathrm{cotg}\theta T^{++} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\partial_\theta - (-2)\mathrm{cotg}\theta + \frac{i}{\mathrm{sen}\theta}\partial_\phi\right)T^{++} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\eth T^{++}\,. \qquad (2.7.22)
\end{aligned}
$$

Disso podemos depreender que:

$$\nabla_{\mathbf{e}_+} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\eth \qquad \nabla_{\mathbf{e}_-} = \frac{1}{\sqrt{2}}\eth^* \,. \tag{2.7.23}$$

Isso conclui o paralelo inusitado entre operadores que sobem e descem índices de elementos das representações irredutíveis do grupo de rotação e a operação de derivação covariante sobre a esfera, quando se usa uma base conveniente.

2.8 Os modos E e B

Em geral, dado $t \in \mathcal{S}$ ($\mathcal{S}$ sendo o conjunto de tensores simétricos sobre a variedade considerada $\mathcal{M}$), vale

$$t_{ij} = t^S_{ij} + t^V_{ij} + t^T_{ij}$$

onde,

$$t^S_{ij} = \mathrm{Tr}(t)g_{ij} + \left(\nabla_i\nabla_j - \frac{1}{3}g_{ij}\triangle\right) f \tag{2.8.1}$$

$$t^V_{ij} = \nabla_i\xi_j + \nabla_j\xi_i \tag{2.8.2}$$

$$t^T_{ij} : \mathrm{Tr}(t^T) = 0; \qquad \nabla \cdot t^T = 0 \tag{2.8.3}$$

onde f é uma função sobre a variedade considerada e ξ_i um campo vetorial com divergência nula. As três componentes são ortogonais com respeito ao produto escalar

$$\langle t, s\rangle = \int t_{ij}s^{ij}d\mu$$

onde μ é a medida de Riemann para a métrica g. A unicidade dessa decomposição segue do teorema de Gauss [37]. A existência de uma tal decomposição é, no entanto, um ponto bastante mais sutil e não óbvio, mas pode ser demonstrada[11].

A demonstração consiste, basicamente, de mostrar que para qualquer tensor simétrico sem traço existe um campo de vetores tal que

$$t_{ij} - \nabla_i A_j - \nabla_j A_i + \frac{2}{n}g_{ij}\nabla^k A_k$$

é transversal. O resultado segue da aplicação do teorema da decomposição de Hodge e de alguns resultados da teoria de equações diferenciais elípticas lineares.

Como estamos com atenção voltada para o tensor de polarização, que, matricialmente, é uma matriz 2×2, teremos, sendo E e B as funções escalares que permitem a decomposição do tensor de polarização [3], [38]

$$\mathcal{P}_{ab} = E_{;ab} - \frac{1}{2}g_{ab}\triangle E + \frac{1}{2}(\varepsilon_a{}^c B_{;bc} + \varepsilon_b{}^c B_{;ac}) \,. \tag{2.8.4}$$

$\varepsilon_{\mu_1\mu_2} = 1$ se $\mu_1\mu_2$ for uma permutação par de $1\,2$, -1 se $\mu_1\mu_2$ for uma permutação ímpar de $1\,2$ e 0 em

[11] Ver [15] para uma demonstração em espaços de curvatura constante.

outros casos. A métrica nesse caso é do tipo

$$g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.8.5}$$

Devemos lembrar que $\triangle = g^{ij}\nabla_i\nabla_j$. Com isso,

$$\triangle = g^{ij}\nabla_i\nabla_j = g^{12}\nabla_1\nabla_2 + g^{21}\nabla_2\nabla_1 = -\nabla_{\mathbf{e}_+}\nabla_{\mathbf{e}_-} - \nabla_{\mathbf{e}_-}\nabla_{\mathbf{e}_+}$$

como E é uma função ($E \in \mathcal{F}(\mathcal{M})$), $\nabla_{\mathbf{e}_+}\nabla_{\mathbf{e}_-}E = \nabla_{\mathbf{e}_-}\nabla_{\mathbf{e}_+}E$, o que faz com que $\triangle E = -2\nabla_{\mathbf{e}_+}\nabla_{\mathbf{e}_-}E$. Com isso, $E_{;12} - \frac{1}{2}g_{12}\triangle E = E_{;21} - \frac{1}{2}g_{21}\triangle E = 0$. Além disso, $\varepsilon^{\mu_1}_{\mu_2} = g^{\mu_1\nu_1}\varepsilon_{\nu_1\mu_2}$ e $\varepsilon^1_1 = 1 = -\varepsilon^2_2$. Temos, portanto,

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} E_{;11} + B_{;11} & 0 \\ 0 & E_{;22} - B_{;22} \end{pmatrix} \tag{2.8.6}$$

Entretanto, sabemos que os operadores de derivada covariante estão associados aos operadores $\eth$ e $\eth^*$ (2.7.23). Logo, escrevendo $\mathcal{P}$ como em (2.7.8), temos[12]

$$E + B = \eth^*\eth^*(\xi_3 - i\xi_1) \tag{2.8.9}$$

$$E - B = \eth\eth(\xi_3 + i\xi_1) \tag{2.8.10}$$

e, com isso,

$$E \rightarrow \frac{1}{2}\left[\eth^*\eth^*(\xi_3 - i\xi_1) + \eth\eth(\xi_3 + i\xi_1)\right] \tag{2.8.11}$$

$$B \rightarrow \frac{1}{2}\left[\eth^*\eth^*(\xi_3 - i\xi_1) - \eth\eth(\xi_3 + i\xi_1)\right] \tag{2.8.12}$$

Usando (2.6.3), pode-se mostrar sem dificuldade que, se

$$\xi_3 - i\xi_1 = \sum_{lm} a^{(2)}_{lm}\,{}_2\mathrm{Y}_{lm} \qquad \xi_3 + i\xi_1 = \sum_{lm} a^{(-2)}_{lm}\,{}_{-2}\mathrm{Y}_{lm}$$

então

$$\eth\eth(\xi_3 + i\xi_1) = \sum_{lm} a^{(-2)}_{lm}\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}\mathrm{Y}_{lm} \tag{2.8.13}$$

$$\eth^*\eth^*(\xi_3 - i\xi_1) = \sum_{lm} a^{(2)}_{lm}\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}\mathrm{Y}_{lm} \tag{2.8.14}$$

[12] Na verdade, há um abuso de notação no que segue: para sermos precisos, deveríamos escrever

$$\triangle(\triangle+2)(E+B) = \eth^*\eth^*(\xi_3 - i\xi_1) \tag{2.8.7}$$

$$\triangle(\triangle+2)(E-B) = \eth\eth(\xi_3 + i\xi_1) \tag{2.8.8}$$

entretanto demonstra-se, exatamente como na demonstração da existência da decomposição do tensor em componentes escalar, vetor e tensor, a existência da solução dessas equações.

e, portanto,

$$E_{lm} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}[a_{lm}^{(2)} + a_{lm}^{(-2)}] \tag{2.8.15}$$

e

$$B_{lm} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}[a_{lm}^{(2)} - a_{lm}^{(-2)}]\,. \tag{2.8.16}$$

Como a existência dos modos E e B estão sujeitas à solução de uma equação elíptica, esses modos são não locais, isto é, precisam de dados de Cauchy sobre toda a variedade para que possam ser determinados. A presença de condições de fronteira pode fazer com que eles não possam ser determinados unicamente [33].

Capítulo 3

Espalhamentos entre fótons e elétrons e a polarização da radiação cósmica de fundo

Durante a recombinação, fótons começam a desacoplar-se da matéria. É nessa época que se pode gerar polarização na radiação cósmica de fundo uma vez que enquanto fótons e elétrons estavam em equilíbrio, o grande número de interações apagava qualquer polarização gerada. Com a diminuição da energia dos fótons, interações com elétrons passaram a ser mais raras e, por isso, espalhamentos sofridos durante a recombinação puderam gerar polarização.
Neste Capítulo dicutiremos, com uma abordagem de mecânica quântica, como a polarização pode ser gerada nessa época devida ao espalhamento Thompson entre fótons e elétrons. Concentramo-nos nesse espalhamento porque, devido às baixas energias disponíveis, essa é a forma mais eficiente de interação e apenas nos interessamos em espalhamentos por elétrons porque as seções de choque são suprimidas pela massa da partícula com que o fóton interage, fazendo com que apenas espalhamentos com elétrons sejam eficientes.

3.1 Preliminares

3.1.1 A matriz densidade para sistemas em equilíbrio

O teorema H de Boltzmann ensina que um sistema isolado que se deixa evoluir atinge um estado de máxima entropia. Mostraremos agora qual matriz densidade corresponde ao estado de máxima entropia. Consideremos a entropia[1] de von Neumann [23]:

$$\mathcal{S} = -\mathrm{Tr}(\rho \ln \rho) \tag{3.1.1}$$

onde ρ é uma matriz densidade (para um sistema de dimensão finita). Em termos das probabilidades p_i, (3.1.1) fica

$$\mathcal{S} = -\sum_i p_i \ln p_i \,. \tag{3.1.2}$$

[1] [39] chama essa entropia de "entropia" uma vez que ela não aumenta com o tempo, mas permanece constante.

Para um estado puro, tem-se $p_i = 1$ para algum p_i e 0 para os outros e, portanto, $\mathcal{S} = 0$. Logo, $0 \leq \mathcal{S}$, já que $0 \leq p_i \leq 1$. Isso conduz à questão de se $\mathcal{S}$ atinge um valor máximo. Para responder a isso, aplicamos variações a $\mathcal{S}$ sujeita ao vínculo que $\sum_i p_i = 1$. Introduzindo um multiplicador de Lagrange λ,

$$0 = \delta(\sum_i p_i \ln p_i + \lambda) = \sum_i \delta p_i (\ln p_i + 1 + \lambda)$$

e, logo, $\ln p_i + 1 + \lambda = 0$. Isso diz que os p_is que maximizam $\mathcal{S}$ não dependem de i, mas devem somar 1. Assim, o argumento só faz sentido em espaços de Hilbert de dimensão finita, d e, daí, $p_i = 1/d$.
A matriz densidade que maximiza $\mathcal{S}$ é,

$$\rho_{max} = \frac{1}{d} \sum_i |a_i\rangle\langle a_i| \tag{3.1.3}$$

com $\{|a_i\rangle\}$ uma base particular que diagonaliza ρ. Entretanto, $\sum_i |a_i\rangle\langle a_i| = \mathbb{1}$. Então,

$$\rho_{max} = \frac{1}{d}\mathbb{1}\,, \tag{3.1.4}$$

ou seja, a mistura em que a entropia é máxima é aquela em que todos os estados, em qualquer base, são populados com igual probabilidade.

3.1.2 Espalhamento de partículas com spin

A teoria de espalhamento em mecânica quântica fornece meios de tratar o problema de interação entre partículas com spin. O estudo desse tipo de sistema é mais complexo do que espalhamentos sem spin mas pode ser obtido através de generalizações da teoria regular permitindo a introdução de graus de liberdade de spin. Uma apresentação dessa teoria pode ser encontrada em [23], por exemplo, que servirá de guia na introdução de algumas generalidades da teoria de espalhamento.
Seja $|\mathbf{k}_i\nu_i\rangle \equiv |i\rangle$ o estado incidente, com ν_i especificando o estado de spin do alvo (suposto parado) e do projétil. Se deseja-se observar um estado final $|\mathbf{k}_f\nu_f\rangle \equiv |f\rangle$, então devemos determinar a amplitude de $i \to f$. Sem entrar nos pormenores de como pode-se obter esse resultado (ver [23]), pode-se escrever a amplitude de transição entre os estados inicial e final como

$$f(\mathbf{k}_f\nu_i|\mathbf{k}_i\nu_i) = \langle\nu_f|M(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)|\nu_i\rangle\,,$$

onde M é dito ser o operador do espalhamento e atua apenas no espaço dos spins. Imposições de invariância sob reversão espacial e temporal permitem restringir a forma desse operador.
Trataremos agora de como a seção de choque e a polarização são ligados.
Um ponto interessante sobre espalhamentos entre partículas com spin é que se pode produzir um estado final polarizado mesmo se o estado inicial não o é. Para ver como isso se dá, consideremos $\{\nu_n\}$ uma base ortonormal no espaço de spin das duas partículas e $p_{i,n}$ a probabilidade de que a partícula incidente esteja em $|\nu_n\rangle$. O estado incidente pode, então, ser descrito pela matriz densidade

$$\rho_i = \sum_n |\nu_n\rangle p_{i,n} \langle\nu_i|\,.$$

.

Supondo que esse estado seja não polarizado, $\rho_i = \frac{\mathbb{1}}{N_S}$, com $N_S = (2s_1+1)(2s_2+1)$, s_i sendo o spin de cada uma das partículas envolvidas.
Por causa da linearidade das equações que regem a dinâmica, a matriz densidade ρ_f do estado final segue diretamente de ρ_i se M é conhecida. Isso porque o estado de spin $|\nu_n\rangle$ espalhado na direção $\mathbf{k}_f$ será $M(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)|\nu_i\rangle$. Assim, o princípio de superposição implica que a matriz densidade do estado final será

$$\rho_f = \frac{M\rho_i M^\dagger}{\mathrm{Tr}\rho_i M^\dagger M}\,,$$

onde o denominador garante que $\mathrm{Tr}\rho_f = 1$.
A seção de choque para o espalhamento de $|\mathbf{k}_i\nu_n\rangle$ em $|\mathbf{k}_f\nu_m\rangle$ é $|\langle\nu_m|M|\nu_n\rangle|^2$. Como a probabilidade de estar neste estado inicial é $p_{i,n}$, a seção de choque quando não são selecionadas orientações dos spins após ao espalhamento será

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{n,m} |\langle\nu_m|M(\mathbf{k}_f, \mathbf{k}_i)|\nu_n\rangle|^2 p_{i,n}\,,$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \mathrm{Tr}\,\rho_i M^\dagger M\,. \tag{3.1.5}$$

O valor esperado do spin do projétil após o espalhamento é dado, então, por

$$\langle\mathbf{s}_1\rangle = \mathrm{Tr}\mathbf{s}_1\rho_f = \frac{\mathrm{Tr}\,\mathbf{s}_1 M\rho_i M^\dagger}{d\sigma/d\Omega}\,. \tag{3.1.6}$$

Veremos em seguida a aplicação dessas técnicas aplicadas ao estudo do espalhamento de uma partícula de spin 1/2 por um alvo de spin 0, que é justamente equivalente ao problema que estamos interessados em tratar, uma vez que o fóton tem dois estados possíveis de helicidade e, para as energias envolvidas (eV), o spin do elétron não precisa ser considerado por induzir termos de ordem superior, como veremos.
No caso de sistemas em que a matriz M é 2×2, pode-se expressá-la, em geral, em termos de combinação envolvendo matrizes de Pauli. No caso particular em que se requer, por exemplo, invariância sob reversão espacial e temporal, M pode ser escrita como:

$$M = g(k,\theta) + \sigma\cdot\mathbf{n}h(k,\theta)\,, \tag{3.1.7}$$

onde

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}_i\times\mathbf{k}_f}{|\mathbf{k}_i\times\mathbf{k}_f|} \tag{3.1.8}$$

é um vetor unitário normal ao plano do espalhamento, θ é o ângulo entre $\mathbf{k}_f$ e $\mathbf{k}_i$, $k = |\mathbf{k}_f| = |\mathbf{k}_i|$ para espalhamentos elásticos.
Supondo M expressa na forma (3.1.7), a seção de choque (3.1.5), com um estado incidente não-polarizado, pode ser escrita na forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(g^* + \sigma\cdot\mathbf{n}h^*)(g + \sigma\cdot\mathbf{n}h)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |g(k,\theta)|^2 + |h(k,\theta)|^2 \,. \tag{3.1.9}$$

Pode-se definir a polarização do estado final como $\mathbf{P}_f = \mathrm{Tr}\sigma\rho_f$ e usar (3.1.6) para determinar $\mathbf{P}_f$. Se o feixe incidente for não polarizado, o numerador de (3.1.6) será

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\sigma(g + \sigma\cdot\mathbf{n}h)(g^* + \sigma\cdot\mathbf{n}h^*) = \mathbf{n}(gh^* + g^*h)\,,$$

e, com isso,

$$\mathbf{P}_f = \mathbf{n}\frac{2\,\mathrm{Re}\,gh^*}{|g|^2 + |h|^2}\,. \tag{3.1.10}$$

Isso mostra que após um espalhamento $\mathbf{P}_f$ é normal ao plano de espalhamento.
Pode-se mostrar que g e h que aparecem em M podem ser escritas como

$$g(k,\theta) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2}[(l+1)a_l^+ + la_l^-]\mathrm{Y}_{l0}(\theta) \tag{3.1.11}$$

$$h(k,\theta) = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2}[a_l^+ - a_l^-]i\mathrm{sen}\theta\frac{d}{d\cos\theta}\mathrm{Y}_{l0}(\theta) \tag{3.1.12}$$

$$\tag{3.1.13}$$

onde $a_l^\pm = \mathrm{e}^{i\delta_l^\pm}\mathrm{sen}\delta_l^\pm$ e os $\delta_l^\pm$ são fases que comparecem na expansão em ondas parciais da matriz S [40][2].

3.1.3 Brevíssima revisão de eletrodinâmica e a matriz S do espalhamento Thompson

Essa seção é baseada em desenvolvimentos de [23].

Bases

Por vezes, quando se estuda problemas que envolvem polarização de fótons, ou equivalentemente da radiação eletromagnética, é conveniente escolher bases que explicitem o caráter transverso entre as direções de oscilação dos campos e a de propagação. Uma forma de satisfazer esse requerimento é escolher como base em termos da qual quantidades serão expressas um par de vetores de polarização mutualmente ortogonais num plano perpendicular à direção de propagação $\mathbf{k}$. Um tal par pode ser constituído de vetores de polarização linear reais $\varepsilon_{k\alpha}$: $\varepsilon_{k1}\times\varepsilon_{k2} = \hat{\mathbf{k}}$, $\varepsilon_{k\alpha}\cdot\varepsilon_{k\beta} = \delta_{\alpha\beta}$, com $(\alpha,\beta = 1,2)$. Uma outra base que pode ser empregada são os vetores de polarização circular complexos (ou de helicidade):

$$\mathbf{e}_{k\pm} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{k1} \pm i\varepsilon_{k2})$$

esses vetores satisfazem $\mathbf{e}^*_{k\lambda}\cdot\mathbf{e}_{k\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}$, $\mathbf{e}^*_{k\lambda}\times\mathbf{e}_{k\lambda'} = i\lambda\hat{\mathbf{k}}\delta_{\lambda\lambda'}$ e $i\hat{\mathbf{k}}\times\mathbf{e}_{k\lambda} = \lambda\mathbf{e}_{k\lambda}$ [23].

[2] Notar a semelhança com as expressões obtidas para o espalhamento devido à interação de spin-órbita [23]

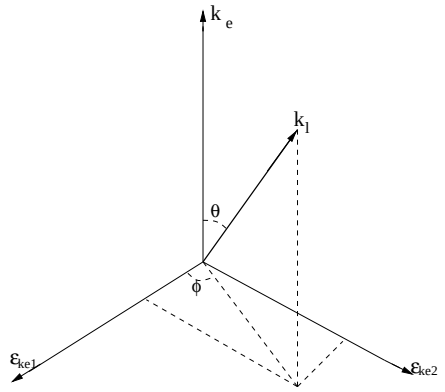

Figura 3.1.1: Ilustração da notação utilizada. O vetor $\hat{\mathbf{k}}'$ indica o momento do fóton observado (fóton que é espalhado e propaga-se em direção ao observador). ε_1' e ε_2' formam um triedro com $\hat{\mathbf{k}}'$. $\hat{\mathbf{k}}$ representa o momento do fóton que incide no centro espalhador. Os ângulos θ e ϕ são os que aparecerão na decomposição de $\hat{\mathbf{k}}$ no triedro ε_1', ε_2' e $\hat{\mathbf{k}}'$.

Notar que essa convenção de a direção de propagação do fóton observado coincidir com o eixo "z" do sistema de coordenadas é a mesma adotada por [6] e [16], mas é diferente da adotada em boa parte da literatura, como [41], [32]. A convenção adotada é útil aqui porque faz com que a estrutura do problema fique mais clara, entretanto, quando se pretende fazer geometria, tem-se o inconveniente de ter-se a normal apontando para dentro da superfície. Por esse motivo, uma vez que fique claro a maneira como essas duas convenções se relacionam, faremos o intercâmbio. Apesar de parecer confuso, isso é útil porque manteremos uniformidade de convenção com boa parte da literatura e poderemos fazer geometria de maneira mais natural.

A matriz S

O formalismo geral para tratar problemas de colisões em mecânica quântica é a teoria de matriz S[3]. Não se pretende aqui desenvolver essa teoria, mas apenas indicar alguns pontos que serão necessários para desenvolvimentos posteriores.

Suponha que se esteja interessado em tratar o problema de um projétil interagindo com um alvo. Seja $\Phi_i(\mathbf{r}, t)$ para $t \lll 0$ (supondo que a interação se dê em torno de $t = 0$) onde $\mathbf{r}$ são os graus de liberdade do alvo e do projétil e Φ um estado produto descrevendo um projétil com momento razoavelmente definido movendo-se em direção a um alvo em algum estado estacionário (alvo isolado).

Seja $\Psi_i^{(+)}$ dado por

$$\Psi_i^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \int d\mathbf{r}' K(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t')\Phi_i(\mathbf{r}', t') \qquad t > t', \qquad t' <<< 0$$

responsável pela descrição do sistema em qualquer tempo, sendo K o propagador para a Hamiltoniana completa.

Em experimentos de espalhamento, um estado final específico é selecionado após a separação espacial dos produtos da reação. Seja $\Phi_f(\mathbf{r}, t)$, $t \ggg 0$, descrevendo o estado final selecionado. Consideremos $\Psi_f^{(-)}(t)$ a

[3] A matriz S foi introduzida por John Archibald Wheeler em 1937 (Phys. Rev. **52**, 1937) e, por suas próprias palavras [42]"... the S matrix was 'methodological' - that is, it provided a formal way of describing events in quantum world independent of particular details. It gave a before-and-after description of scattering and reactions events. Each of many initial states (such as protons flying toward a nucleous) can give rise to various possible final states (for example, a neutron flying away from nucleus). The S matrix is a package description of all these possibilities."

solução do problema com interação pertinente que, no futuro, torna-se o estado Φ_f (estado que tem ondas esféricas entrando ao invés de saindo).
Com isso, define-se a matriz S como

$$S_{fi} = \langle \Psi_f^{(-)} | \Psi_i^{(+)} \rangle \tag{3.1.14}$$

com $\Psi_{f,i}^{(\pm)} = \Psi_{f,i}^{(\pm)}(0)$ com $t = 0$ tendo sido escolhido por conveniência, já que, como definida, a matriz S não tem dependência temporal.
Duas coisas apenas serão aqui ditas sobre as propriedades da matriz S. A primeira é que a matriz S é unitária:

$$SS^\dagger = 1 \tag{3.1.15}$$

A segunda é que a matriz S tem a forma

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i \delta(E_f - E_i) T_{fi}\,. \tag{3.1.16}$$

O termo δ_{fi} contempla a possibilidade de não haver espalhamento enquanto a matriz T tem como elementos as várias amplitudes de espalhamento. Além disso (3.1.16) garante que a matriz S só existe estre estados de mesma energia, isto é, a energia é conservada em um espalhamento, de um estado assintótico para outro.
Ainda,

$$\langle \mathbf{k}_f \nu_f | T | \mathbf{k}_i \nu_i \rangle = \langle \nu_f | M(\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_f) | \nu_i \rangle \tag{3.1.17}$$

onde νs descrevem variáveis de spin.

Interação entre o campo eletromagnético e fontes

Consideremos um conjunto de partículas pontuais carregadas ($a = 1, ..., N$), com posições, momentos, cargas, massas e momentos magnéticos $\mathbf{r}_a$, $\mathbf{p}_a$, e_a, m_a, $\boldsymbol{\mu}_a$. A Hamiltoniana completa num limite não relativístico é

$$H = H_\gamma + \sum_a \frac{1}{2m_a}\left(\mathbf{p}_a - \frac{e_a}{c}\mathbf{A}_a\right)^2 - \sum_a \boldsymbol{\mu}_a \cdot \mathbf{B}_a + \frac{1}{8\pi}\sum_{b\neq a}\frac{e_a e_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} + V \tag{3.1.18}$$

onde

$$H_\gamma = \sum_k \hbar\omega_k \left[\mathbf{a}_k^\dagger \cdot \mathbf{a}_k + \frac{1}{2}\right]$$

e $\mathbf{A}_a = \mathbf{A}(\mathbf{r}_a)$ é o potencial vetor. $\boldsymbol{\mu}_a = \frac{e\hbar}{2m_a c} g_a \mathbf{s}_a$, com $\mathbf{s}_a$ o spin da partícula e g_a o fator giromagnético. V contém interações não eletromagnéticas.
H pode ser fatorada como $H = H_\gamma + H_M + H_{int}$, com H_M descrevendo a matéria sem o campo e H_{int} a interação entre matéria e campo. A Hamiltoniana de interação contém termos lineares e quadráticos:

$$H_{int} = H_1 + H_2\,. \tag{3.1.19}$$

H_1 descreve criação e/ou absorção de um fóton e H_2, de dois:

$$H_1 = -\sum_a \frac{e_a}{m_a}\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{A}_a - \sum_a \boldsymbol{\mu}_a \cdot \mathbf{B}_a \tag{3.1.20}$$

$$H_2 = \sum_a \frac{e_a^2}{2m_a c^2}|\mathbf{A}_a|^2 \tag{3.1.21}$$

Em geral, escreve-se H_1 como

$$H_1 = -e\sum_{k\lambda}\frac{1}{\sqrt{2Vk}}[J_{k\lambda}a_{k\lambda} + h.c.] \tag{3.1.22}$$

com V relativo ao volume em que se faz a quantização e $J_{k\lambda}$ envolvendo apenas graus de liberdade das fontes:

$$J_{k\lambda} = \sum_a \left(\frac{q_a}{m_a}\mathbf{p}_a \cdot \mathbf{e}_{k\lambda} + i\frac{\boldsymbol{\mu}_a}{e} \cdot (\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{k\lambda})\right) \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_a} \tag{3.1.23}$$

com q_a a carga em unidades de e.
No limite de baixas energias pode-se fazer a chamada aproximação de dipolo, que consiste em uma expansão de $J_{k\lambda}$ em série de potências, mantendo apenas o termo de ordem mais baixa[4]:

$$J_{k\lambda} = \sum_a q_a \left(\frac{\mathbf{p}_a}{m_a} \cdot \mathbf{e}_{k\lambda}\right) . \tag{3.1.24}$$

No caso de espalhamentos com fótons, a matriz de transição aparecendo como fator da matriz S pode ser obtida, em teoria de perturbação em ordem mais baixa permitindo transição com dois fótons, de

$$T = H_2 + H_1\frac{1}{E - H_0 + i\varepsilon}H_1 \tag{3.1.25}$$

com $H_0 = H_\gamma + H_M$.
T_{fi} será dada pela fórmula de Kramers-Heisenberg (de fato, a fórmula de Kramers-Heisenberg faz uma prescrição para a seção de choque, que está associada a $|T_{fi}|^2$). Com efeito,

$$T_{fi} = (\mathbf{e}_f^* \cdot \mathbf{e}_i)F_{fi}(\mathbf{k}_f \cdot \mathbf{k}_i) + m\sum_n \frac{\langle|J^\dagger_{k_f\lambda_f}|n\rangle\langle n|J_{k_i\lambda_i}|i\rangle}{E_i - E_n + k_i + i\varepsilon} + \frac{\langle|J^\dagger_{k_i\lambda_i}|n\rangle\langle n|J_{k_f\lambda_f}|i\rangle}{E_i - E_n + k_f + i\varepsilon} \tag{3.1.26}$$

com F_{fi} sendo o fator de forma e n descrevendo estados intermediários.
Fazendo aproximação de dipolo e considerando o espalhamento por uma partícula sem estrutura interna ($F_{fi} = 1$) no referencial em que está em repouso, tem-se

$$T_{fi} = \mathbf{e}_f^* \cdot \mathbf{e}_i \,, \tag{3.1.27}$$

que é justamente o caso do espalhamento Thompson (e em geral de qualquer espalhamento elástico a baixas energias, a menos de proporcionalidades).
Quando se está fora do limite de baixas energias, entretanto, contribuições do spin do elétron devem comparecer e o sistema deixa de ser tão simples. Em geral no espalhamento de partículas de spin 1/2 (ao que um fóton é análogo no sentido que tem apenas dois estados possíveis de helicidade) a matriz densidade final

[4] [39], por exemplo, introduz o problema de interação de fótons e elétrons inteiramente nesse limite.

pode ser escrita como

$$\rho = \frac{1}{4}\left(1 + \boldsymbol{\sigma}_e \cdot \mathbf{P}_e + \boldsymbol{\sigma}_f \cdot \mathbf{P}_f + \sum_{i,j=1}^{3} \sigma_{e,i}\sigma_{f,j}C_{ij}\right) \tag{3.1.28}$$

onde $\mathbf{P}$s são polarizações de spin separados e C_{ij} descreve a correlação entre as polarizações.
Antes de finalizar esta seção notemos apenas que, em termos de T_{fi}, a seção de choque do espalhamento (elástico) é da forma

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{m^2}|T_{fi}|^2 \,. \tag{3.1.29}$$

Como estamos interessados em tratar o problema de espalhamento e fótons com a matéria durante a recombinação, a energia desses fótons será da ordem de eV enquanto a massa do elétron, que era a partícula mais leve com as quais fótons podiam interagir então, é de $0,5\,MeV$. Vemos com isso que estamos, de fato, num limite não relativístico em que a aproximação de dipolo está bem justificada[5] além de termos apenas que nos preocupar com interação entre fótons e elétrons porque, tendo em vista (3.1.29), interação com partículas mais pesadas que elétrons (prótons, no caso) é fortemente suprimida devido à massa.

3.2 Derivação do tensor de polarização

A matriz T para o espalhamento Thompson é, como vimos, dada por (3.1.27):

$$T = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^*_{k'+} \cdot \mathbf{e}_{k+} & \mathbf{e}^*_{k'+} \cdot \mathbf{e}_{k-} \\ \mathbf{e}^*_{k'-} \cdot \mathbf{e}_{k+} & \mathbf{e}^*_{k'-} \cdot \mathbf{e}_{k-} \end{pmatrix} , \tag{3.2.1}$$

A matrix densidade final pode ser obtida como $\rho_f = T\rho_i T^\dagger$. Se $\rho_i \propto \mathbb{1}$ então $\rho_f \propto TT^\dagger$.

$$\begin{aligned} TT^\dagger &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}^*_{k'+} \cdot \mathbf{e}_{k+}\mathbf{e}_{k'+} \cdot \mathbf{e}^*_{k+} + \mathbf{e}^*_{k'+} \cdot \mathbf{e}_{k-}\mathbf{e}_{k'+} \cdot \mathbf{e}^*_{k-} & \mathbf{e}^*_{k'+} \cdot \mathbf{e}_{k+}\mathbf{e}_{k'-} \cdot \mathbf{e}^*_{k+} + \mathbf{e}^*_{k'+} \cdot \mathbf{e}_{k-}\mathbf{e}_{k'-} \cdot \mathbf{e}^*_{k-} \\ \mathbf{e}^*_{k'-} \cdot \mathbf{e}_{k+}\mathbf{e}_{k'+} \cdot \mathbf{e}^*_{k+} + \mathbf{e}^*_{k'-} \cdot \mathbf{e}_{k-}\mathbf{e}_{k'+} \cdot \mathbf{e}^*_{k-} & \mathbf{e}^*_{k'-} \cdot \mathbf{e}_{k+}\mathbf{e}_{k'-} \cdot \mathbf{e}^*_{k+} + \mathbf{e}^*_{k'-} \cdot \mathbf{e}_{k-}\mathbf{e}_{k'-} \cdot \mathbf{e}^*_{k-} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_\lambda \mathbf{e}^*_{k'+} \cdot \mathbf{e}_{k\lambda}\mathbf{e}_{k'+} \cdot \mathbf{e}^*_{k\lambda} & \sum_\lambda \mathbf{e}^*_{k'+} \cdot \mathbf{e}_{k\lambda}\mathbf{e}_{k'-} \cdot \mathbf{e}^*_{k\lambda} \\ \left(\sum_\lambda \mathbf{e}^*_{k'+} \cdot \mathbf{e}_{k\lambda}\mathbf{e}_{k'-} \cdot \mathbf{e}^*_{k\lambda}\right)^* & \sum_\lambda \mathbf{e}^*_{k'-} \cdot \mathbf{e}_{k\lambda}\mathbf{e}_{k'-} \cdot \mathbf{e}^*_{k\lambda} \end{pmatrix} . \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Para reescrever essa matriz, consideremos os desenvolvimentos:

[5] De fato, quando se estuda a equação de Kompaneets [43] ou se aplica a equação de Boltzmann para tratar o problema da radiação cósmica de fundo, assume-se que os elétrons são descritos por uma distribuição de Maxwell [6], o que remete à mesma aproximação aqui assumida de não tomar em conta o spin do elétron.

$$
\begin{aligned}
\sum_\lambda |\mathbf{e}_f^* \cdot \mathbf{e}_i|^2 &= \sum_\lambda \mathbf{e}_{k'\lambda'} \cdot \mathbf{e}_{k\lambda}^* \mathbf{e}_{k\lambda} \cdot \mathbf{e}_{k'\lambda'}^* = \sum_\lambda \left(\sum_i e_{k'\lambda'}^i e_{k\lambda}^{i*} \right) \left(\sum_j e_{k\lambda}^j e_{k'\lambda'}^{j*} \right) \\
&= \sum_{ij} e_{k'\lambda'}^i \left(\sum_\lambda e_{k\lambda}^{i*} e_{k\lambda}^j \right) e_{k'\lambda'}^{j*} = \sum_{ij} e_{k'\lambda'}^i \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) e_{k'\lambda'}^{j*} \\
&= \sum_i e_{k'\lambda'}^i e_{k'\lambda'}^{i*} - \frac{1}{k^2} \left(\sum_i e_{k'\lambda'}^i k_i \right) \left(\sum_j e_{k'\lambda'}^{j*} k_i^* \right) = 1 - |\mathbf{e}_{k'\lambda'} \cdot \hat{\mathbf{k}}|^2
\end{aligned}
$$

onde tiramos proveito de que $\sum_\lambda e_{k\lambda}^{i*} e_{k\lambda}^j = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}$.
Tomemos λ e $\bar{\lambda}$ sempre distintos (um sendo $+$ e outro $-$ ou o contrário). Então,

$$
\begin{aligned}
\sum_\lambda \mathbf{e}_{k'\lambda'} \cdot \mathbf{e}_{k\lambda}^* \mathbf{e}_{k\lambda} \cdot \mathbf{e}_{k'\bar{\lambda}'}^* &= \sum_\lambda \left(\sum_i e_{k'\lambda'}^i e_{k\lambda}^{i*} \right) \left(\sum_j e_{k\lambda}^j e_{k'\bar{\lambda}'}^{j*} \right) \\
&= \sum_{ij} e_{k'\lambda'}^i \left(\sum_\lambda e_{k\lambda}^{i*} e_{k\lambda}^j \right) e_{k'\bar{\lambda}'}^{j*} = \sum_{ij} e_{k'\lambda'}^i \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) e_{k'\bar{\lambda}'}^{j*} \\
&= -(\mathbf{e}_{k'\lambda'} \cdot \hat{\mathbf{k}})(\mathbf{e}_{k'\bar{\lambda}'}^* \cdot \hat{\mathbf{k}})
\end{aligned}
$$

com isso, temos

$$
TT^\dagger = \begin{pmatrix} 1 - |\mathbf{e}_{k'+} \cdot \hat{\mathbf{k}}|^2 & -(\mathbf{e}_{k'-} \cdot \hat{\mathbf{k}})(\mathbf{e}_{k'+}^* \cdot \hat{\mathbf{k}}) \\ -(\mathbf{e}_{k'-}^* \cdot \hat{\mathbf{k}})(\mathbf{e}_{k'+} \cdot \hat{\mathbf{k}}) & 1 - |\mathbf{e}_{k'-} \cdot \hat{\mathbf{k}}|^2 \end{pmatrix} . \tag{3.2.3}
$$

Lembrando a definição dos vetores da base de helicidade,

$$
\mathbf{e}_{k\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\varepsilon_{k1} \pm i\varepsilon_{k2}) , \tag{3.2.4}
$$

onde ε_{k1} e ε_{k2} são versores cartesianos, podemos reescrever (3.2.3) em função dos ângulos formados pela direção do momento do fóton e os eixos cartesianos num dado ponto.
$|\mathbf{e}_{k'+} \cdot \hat{\mathbf{k}}|^2$ pode ser reescrito como

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{e}_{k'+} \cdot \hat{\mathbf{k}}|^2 &= \frac{1}{2} \left[((\varepsilon_{k'1} - i\varepsilon_{k'2}) \cdot \hat{\mathbf{k}})((\varepsilon_{k'1} + i\varepsilon_{k'2}) \cdot \hat{\mathbf{k}}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[(\varepsilon_{k'1} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 + (\varepsilon_{k'2} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 \right] .
\end{aligned} \tag{3.2.5}
$$

Analogamente,

$$
|\mathbf{e}_{k'-} \cdot \hat{\mathbf{k}}|^2 = \frac{1}{2} \left[(\varepsilon_{k'1} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 + (\varepsilon_{k'2} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2 \right] . \tag{3.2.6}
$$

Por fim,

$$(\mathbf{e}^*_{k'+}\cdot\hat{\mathbf{k}})(\mathbf{e}_{k'-}\cdot\hat{\mathbf{k}}) = -\frac{1}{2}\left[(\varepsilon_{k'1}\cdot\hat{\mathbf{k}})^2 - 2i(\varepsilon_{k'1}\cdot\hat{\mathbf{k}})(\varepsilon_{k'2}\cdot\hat{\mathbf{k}}) - (\varepsilon_{k'2}\cdot\hat{\mathbf{k}})^2\right]. \tag{3.2.7}$$

Fazendo $\varepsilon_{k'1}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \text{sen}\theta\cos\phi$ e $\varepsilon_{k'2}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \text{sen}\theta\text{sen}\phi$, com os ângulos sendo aqueles indicados na figura 3.1.1, podemos reescrever (3.2.5), (3.2.6) e (3.2.7) como:

$$|\mathbf{e}_{k'+}\cdot\hat{\mathbf{k}}|^2 = |\mathbf{e}_{k'-}\cdot\hat{\mathbf{k}}|^2 = \frac{1}{2}\text{sen}^2\theta \tag{3.2.8}$$

$$(\mathbf{e}^*_{k'+}\cdot\hat{\mathbf{k}})(\mathbf{e}_{k'-}\cdot\hat{\mathbf{k}}) = -\frac{1}{2}(\text{sen}^2\theta\cos 2\phi - i\text{sen}^2\theta\text{sen}2\phi). \tag{3.2.9}$$

Podemos agora escrever a matriz densidade final em termos desses ângulos:

$$T\rho_i T^\dagger = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2}\text{sen}^2\theta & \frac{1}{2}\text{sen}^2\theta\cos 2\phi - i\frac{1}{2}\text{sen}^2\theta\text{sen}2\phi \\ \frac{1}{2}\text{sen}^2\theta\cos 2\phi + i\frac{1}{2}\text{sen}^2\theta\text{sen}2\phi & 1-\frac{1}{2}\text{sen}^2\theta \end{pmatrix}, \tag{3.2.10}$$

onde introduzimos $\rho_i = \frac{1}{2}\mathbb{1}$ indicando que o estado inicial é suposto um estado de mistura máxima. Para termos a matriz densidade final, temos ainda que dividir (3.2.10) por seu traço:

$$\text{Tr}(T\rho_i T^\dagger) = 1 - \frac{1}{2}\text{sen}^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos^2\theta),$$

daí,

$$\rho_f = \frac{T\rho_i T^\dagger}{\text{Tr}(T\rho_i T^\dagger)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \frac{\text{sen}^2\theta\cos 2\phi - i\text{sen}^2\theta\text{sen}2\phi}{(1+\cos^2\theta)} \\ \frac{\text{sen}^2\theta\cos 2\phi + i\text{sen}^2\theta\text{sen}2\phi}{(1+\cos^2\theta)} & 1 \end{pmatrix}, \tag{3.2.11}$$

que é a matriz densidade final do nosso sistema.

Parâmetros de Stokes

Notando que a matriz densidade deve ser hermitiana e ter traço normalizado a 1, as componentes diagonais ρ_{11} e ρ_{22} de ρ devem ser reais e determinadas uma em função da outra em virtude do vínculo do traço. A componente ρ_{12} deve ser complexa e satisfazendo $\rho^*_{21} = \rho_{12}$ e, assim, a matriz densidade pode ser caracterizada por três parâmetros reais. Esses três parâmetros são conhecidos como parâmetros de Stokes. Em termos desses parâmetros a matriz densidade escreve-se, numa representação usando como eixos coordenados os vetores da base euclideana $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, como

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1-\xi_3 \end{pmatrix}. \tag{3.2.12}$$

Os parâmetros ξ_1 e ξ_3 caracterizam a polarização linear enquanto o parâmetro ξ_2 descreve polarização circular.

Escrevendo a matriz densidade numa representação utilizando como eixos coordenados os vetores unitários

circulares, ρ fica [44]:

$$\rho = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\xi_2 & -\xi_3 - i\xi_1 \\ -\xi_3 + i\xi_1 & 1+\xi_2 \end{pmatrix}. \tag{3.2.13}$$

Comparando (3.2.11) e (3.2.13), vemos, imediatamente, que $\xi_2 = 0$ e que ξ_1 e ξ_3 não são nulos. Vamos escrevê-los de maneira mais apropriada. Inicialmente lemos que:

$$\xi_1 = \frac{\text{sen}^2\theta \text{sen}2\phi}{1+\cos^2\theta} \qquad \xi_3 = -\frac{\text{sen}^2\theta\cos 2\phi}{1+\cos^2\theta}. \tag{3.2.14}$$

Consideremos agora a possibilidade de reescrever os numeradores que aparecem em (3.2.14):

(i)

$$\text{sen}^2\theta\text{sen}2\phi = 2\text{sen}^2\theta\cos\phi\text{sen}\phi = 2(\text{sen}\theta\cos\phi)(\text{sen}\theta\text{sen}\phi)\,;$$

(ii)

$$\text{sen}^2\theta\cos 2\phi = \text{sen}^2\theta(\cos^2\phi - \text{sen}^2\phi) = \text{sen}^2\theta(2\cos^2\phi - 1) = -2\left(\frac{1}{2}(1-\cos^2\theta) - \text{sen}^2\theta\cos^2\phi\right)\,;$$

(iii)

$$\text{sen}^2\theta\cos 2\phi = \text{sen}^2\theta(2\cos^2\phi - 1) = 2\text{sen}^2\theta(1-\text{sen}^2\phi) - \text{sen}^2\theta = 2\left(\frac{1}{2}(1-\cos^2\theta) - \text{sen}^2\theta\text{sen}^2\phi\right).$$

Com isso, podemos reescrever ξ_1 e ξ_3 como:

$$\xi_1 = -2\frac{(\text{sen}\theta\cos\phi)(\text{sen}\theta\text{sen}\phi)}{(1+\cos^2\theta)}, \tag{3.2.15}$$

$$\xi_3 = 2\frac{\frac{1}{2}(1-\cos^2\theta) - \text{sen}^2\theta\cos^2\phi}{(1+\cos^2\theta)} \tag{3.2.16}$$

ou, alternativamente, ξ_3 deixa-se escrever na forma:

$$\xi_3 = -2\frac{\frac{1}{2}(1-\cos^2\theta) - \text{sen}^2\theta\text{sen}^2\phi}{(1+\cos^2\theta)}. \tag{3.2.17}$$

Lembrando que escrevemos $\varepsilon_{k'1}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \text{sen}\theta\cos\phi$ e $\varepsilon_{k'2}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \text{sen}\theta\text{sen}\phi$ podemos reescrever (3.2.15), (3.2.16) e (3.2.17) como:

$$\xi_1 = -2\frac{(\varepsilon_{k'1}\cdot\hat{\mathbf{k}})(\varepsilon_{k'2}\cdot\hat{\mathbf{k}})}{1+(\hat{\mathbf{k}}'\cdot\hat{\mathbf{k}})^2}, \tag{3.2.18}$$

$$\xi_3 = 2\frac{\frac{1}{2}(1-(\hat{\mathbf{k}}'\cdot\hat{\mathbf{k}})^2) - (\varepsilon_{k'1}\cdot\hat{\mathbf{k}})^2}{1+(\hat{\mathbf{k}}'\cdot\hat{\mathbf{k}})^2}, \tag{3.2.19}$$

$$\xi_3 = -2\frac{\frac{1}{2}(1-(\hat{\mathbf{k}}'\cdot\hat{\mathbf{k}})^2) - (\varepsilon_{k'2}\cdot\hat{\mathbf{k}})^2}{1+(\hat{\mathbf{k}}'\cdot\hat{\mathbf{k}})^2}. \tag{3.2.20}$$

O tensor de polarização

Para continuar vamos retornar a escrever ρ_f na forma (3.2.12):

$$\rho_f = \frac{1}{2}\mathbb{1} + \begin{pmatrix} \frac{\frac{1}{2}(1-(\hat{\mathbf{k}}'\cdot\hat{\mathbf{k}})^2)-(\varepsilon_{k'1}\cdot\hat{\mathbf{k}})^2}{1+(\hat{\mathbf{k}}'\cdot\hat{\mathbf{k}})^2} & \left[-\frac{(\varepsilon_{k'1}\cdot\hat{\mathbf{k}})(\varepsilon_{k'2}\cdot\hat{\mathbf{k}})}{1+(\hat{\mathbf{k}}'\cdot\hat{\mathbf{k}})^2}\right] \\ \left[-\frac{(\varepsilon_{k'1}\cdot\hat{\mathbf{k}})(\varepsilon_{k'2}\cdot\hat{\mathbf{k}})}{1+(\hat{\mathbf{k}}'\cdot\hat{\mathbf{k}})^2}\right] & \frac{\frac{1}{2}(1-(\hat{\mathbf{k}}'\cdot\hat{\mathbf{k}})^2)-(\varepsilon_{k'2}\cdot\hat{\mathbf{k}})^2}{1+(\hat{\mathbf{k}}'\cdot\hat{\mathbf{k}})^2} \end{pmatrix} . \tag{3.2.21}$$

Verifica-se, observando a forma das entradas de (3.2.21), que a parte sem traço de ρ_f pode ser escrita compactamente como

$$\mathcal{P}_{ab} = \frac{1}{1+(\hat{\mathbf{k}}'\cdot\hat{\mathbf{k}})^2}\left[\frac{1}{2}(1-(\hat{\mathbf{k}}'\cdot\hat{\mathbf{k}})^2)\delta_{ab} - (\varepsilon_{k'a}\cdot\hat{\mathbf{k}})(\varepsilon_{k'b}\cdot\hat{\mathbf{k}})\right] \tag{3.2.22}$$

onde a e b podem valer 1 ou 2. Essa expressão é obtida por outros métodos por [16]. O objeto definido em (3.2.22) é conhecido como o *tensor de polarização*.

Ao invés de utilizar-se ξ_1 e ξ_3 como parâmetros de Stokes, é mais comum utilizar-se variáveis a essas proporcionais, denotadas Q e U. A constante de proporcionalidade é justamente $1+(\hat{\mathbf{k}}'\cdot\hat{\mathbf{k}})^2$ que será denotado por I, ou seja, $I = 1+(\hat{\mathbf{k}}'\cdot\hat{\mathbf{k}})^2$. Entretanto, apenas tomando U proporcional a ξ_1, teríamos U com o mesmo sinal que [6] ou [1], por exemplo, que é inverso ao sinal de U em outras referências, como [41] e [32]. Essa diferença de sinal vem de adotar o sentido do "eixo z" do sistema de coordenadas como $\mathbf{k}'$, e não o sentido contrário[6]. A diferença de sinal pode ser eliminada, entretanto seguindo [16] e definindo

$$Q = 2I\xi_3 \tag{3.2.23}$$

e

$$U = -2I\xi_1 . \tag{3.2.24}$$

Naturalmente escreve-se $\mathcal{P}_{11} = Q/2I$ e $\mathcal{P}_{12} = \mathcal{P}_{21} = -U/2I$. Devemos notar que, devido à sua forma funcional [(3.2.15), (3.2.16) e (3.2.17)], Q e U podem ser escritos também como:

$$\frac{Q}{4I} = -2\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\mathrm{Re}\mathrm{Y}_{22}(\theta,\phi) \qquad \frac{U}{4I} = -2\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\mathrm{Im}\mathrm{Y}_{22}(\theta,\phi) . \tag{3.2.25}$$

Também pode-se reescrever I como:

$$I = \frac{4\sqrt{4\pi}}{3}\left(\mathrm{Y}_{00}(\theta,\phi) + \frac{1}{2\sqrt{5}}\mathrm{Y}_{20}(\theta,\phi)\right) . \tag{3.2.26}$$

Notação: No que segue, para evitar confusão entre as direções de propagação dos fótons com k's que apareçam por causa de transformadas de Fourier e para ressaltar que alteramos o sistema de coordenadas para ter consonância com a literatura, passaremos a escrever a direção do fóton incidente num centro espalhador por $\mathbf{l}$ e a direção do fóton espalhado por $\mathbf{e}$, mas com sentido invertido aos momentos dos fótons, ou seja, $\mathbf{l} \equiv -\hat{\mathbf{k}}$ e $\mathbf{e} \equiv -\hat{\mathbf{k}}'$. Além disso, $\varepsilon_{k'a} = \mathbf{e}_a$ e $\varepsilon_{k'b} = \mathbf{e}_b$. Naturalmente, os fótons se propagam no sentido inverso a $\mathbf{e}$ ou $\mathbf{l}$.

[6] Isso pode ser visto em (3.2.12), já que $\mathbf{e}_\lambda(-\mathbf{k}) = \mathbf{e}_{-\lambda}(\mathbf{k})$, o que faz com que, uma vez invertendo-se o sentido de $\mathbf{k}$, tenha-se um sinal $-$ de diferença em U

3.3 Generalização para o caso de um feixe de fótons

Podemos agora generalizar para o caso de radiação não polarizada incidente com intensidade $J(\mathbf{l}) \propto \langle E^2(\mathbf{l})\rangle$ [16].

Dada a matriz densidade final, cada uma de suas entradas é relacionada com a probabilidade de que o fóton espalhado esteja em cada um dos estados de polarização disponíveis. Para um feixe de fótons, pode-se argumentar que fótons terão uma dada polarização final com probabilidade igual à probabilidade que um fóton esteja nesse estado de polarização vezes o número de fótons no feixe. O número de fótons, entretanto, é dado pelo operador número, que é diretamente associado à intensidade do feixe. Assim,

$$\mathcal{P}_{ab}(\mathbf{e}) = \frac{\int \left[\frac{1}{2}(1-(\mathbf{e}\cdot\mathbf{l})^2)\delta_{ab} - (\mathbf{l}\cdot\mathbf{e}_a)(\mathbf{l}\cdot\mathbf{e}_b)\right] J(\mathbf{l})d^2\mathbf{l}}{\int \left[1+(\mathbf{e}\cdot\mathbf{l})^2\right] J(\mathbf{l})d^2\mathbf{l}}\,. \tag{3.3.1}$$

Se lembrarmos que o denominador que aparece em (3.3.1) é $\int \frac{d\sigma}{d\Omega} J(\mathbf{l})d^2\mathbf{l}$, vemos que na verdade esse denominador é uma normalização pelo número de fótons do feixe que foram espalhados na direção $\mathbf{e}$. Com isso a interpretação das entradas de $\mathcal{P}$ é que elas descrevem quantos fótons do feixe foram espalhados em uma certa direção com uma dada polarização, dividido pelo número total de fótons espalhados naquela direção.

Devido às expressões para as entradas do tensor de polarização (3.2.25), o que está no numerador de (3.3.1) é uma combinação de harmônicos esféricos com $l = 2$. Notamos, daí, que se a radiação incidente for isotrópica, $\mathcal{P}_{ab}(\mathbf{e}) = 0$ após a integração em $\mathbf{l}$. Na verdade, se fizermos uma decomposição em harmônicos esféricos de $J(\mathbf{l})$, apenas os termos com $l = 2$ podem contribuir para a polarização. Assim, espalhamentos induzem polarização em uma radiação inicialmente não polarizada apenas se a radiação incidente é anisotrópica e apenas a componente quadrupolar dessa anisotropia contribui para a polarização.

A questão que se deve ter em mente é que, da maneira como derivamos a equação de Sachs-Wolfe, vemos que no instante da recombinação (que foi suposta instantânea) os termos escalares têm apenas uma anisotropia dipolar e, portanto, dessa maneira, a polarização não poderia ter sido criada. Entretanto a radiação cósmica de fundo pode se tornar polarizada se a recombinação não for instantânea.

Ainda uma observação: como em geral na literatura, não assumiremos acoplamento entre polarização e métrica, ou seja, as perturbações da métrica não têm efeito sobre a polarização [1]. Essa aproximação é chamada de *free streaming*. De fato, correções desse tipo seriam de ordem superior.

3.4 Efeito da recombinação não-instantânea sobre a temperatura e polarização

Vamos aqui considerar o efeito da largura da superfície de último espalhamento sobre a temperatura e polarização [7]. Um fóton vindo de uma direção $\mathbf{e}$ do céu deve ter sofrido seu último espalhamento em um *redshift* no intervalo $1200 \lesssim z \lesssim 900$. Se o último espalhamento aconteceu num tempo conforme η_e, o fóton carrega informações sobre as condições da temperatura na posição

$$\mathbf{x}(\eta_e) = \mathbf{x}_o + \mathbf{e}(\eta_o - \eta_e)\,.$$

Uma vez que o fluxo total de radiação chegando de uma direção $\mathbf{e}$ consiste de fótons que sofreram seu último espalhamento dentro de um certo intervalo de tempo, a informação carregada pelo fluxo representa uma média com pesos sobre uma escala $\Delta x \sim \Delta\eta_r$ onde $\Delta\eta_r$ é basicamente a duração da recombinação.

[7] As considerações aqui apresentadas foram baseadas em [16].

Vamos calcular a probabilidade de que um fóton fosse espalhado em um intervalo de tempo Δt_e (correspondendo a um tempo conforme η_e) e que depois não tenha mais sofrido espalhamentos. Vamos dividir o intervalo $t_o > t > t_e$ em N subintervalos de duração Δt de modo que o j-ésimo intervalo começa em $t_j = t_e + j\Delta t$ e $N > j > 1$. A probabilidade de que tenha havido um espalhamento em Δt_e e que não tenha mais havido espalhamentos desde então será dada por

$$\Delta P = \frac{\Delta t_e}{\tau(t_e)}\left(1 - \frac{\Delta t}{\tau(t_1)}\right)...\left(1 - \frac{\Delta t}{\tau(t_j)}\right)...\left(1 - \frac{\Delta t}{\tau(t_N)}\right),$$

onde

$$\tau(t_j) = \frac{1}{\sigma_T n_t(t_j) X(t_j)} \tag{3.4.1}$$

é o tempo do livre caminho médio (intervalo entre duas colisões sucessivas) para espalhamento Thompson com n_t sendo a densidade de todos os elétrons (ligados ou livres), X a fração de ionização e σ_T, a seção de choque de Thompson.
Tomando o limite $N \to \infty$ ($\Delta t \to 0$) e convertendo o tempo físico para tempo conforme, obtemos

$$dP(\eta_e) = \mu'(\eta_e)\exp[-\mu(\eta_e)]d\eta_e\,, \tag{3.4.2}$$

onde $'$ denota derivada com relação ao tempo conforme e $\mu(\eta_e)$ é a profundidade óptica, definida por

$$\mu(\eta_e) \equiv \int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{\tau(t)} = \int_{\eta_e}^{\eta_o} \sigma_T n_t X_e a(\eta) d\eta\,. \tag{3.4.3}$$

A incerteza sobre o momento de último espalhamento causa modificações para a flutuação da temperatura tal como foi obtida em (1.5.2). Antes de expressar essas modificações convém fazer algumas manipulações na equação de Sachs-Wolfe para que as expressões obtidas fiquem numa forma mais usual. Como estamos interessados apenas nos modos escalares das perturbações, recobremos apenas esses termos de (1.5.2):

$$\Theta(\mathbf{x}_o, \eta_o, \mathbf{e}) = \left[\frac{1}{4}\delta_\gamma^N + \Phi + e^i(D_i V_b)\right](\mathbf{x}_e, \eta_e) + \int_{\eta_e}^{\eta_o} (\Psi' + \Phi')d\eta\,, \tag{3.4.4}$$

A modificação a (3.4.4) induzida pela recombinação não instantânea será

$$\Theta(\mathbf{x}_o, \eta_o, \mathbf{e}) = \int \left[\frac{1}{4}\delta_\gamma^N + \Phi + e^i(D_i V_b)\right](\mathbf{x}_e, \eta_e)\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}d\eta_e + \int_0^{\eta_o} (\Psi' + \Phi')\mathrm{e}^{-\mu(\eta)}d\eta\,, \tag{3.4.5}$$

ou seja, para os termos Sachs-Wolfe e Doppler, que devem ser calculados no ponto em que ocorre o último espalhamento, deve-se introduzir um peso probabilístico de que haja um espalhamento de fóton em matéria em um dado instante e que esse fóton não mais se espalhe daí em diante, além de tomar em conta que esse espalhamento pode acontecer em qualquer momento durante a recombinação. Para o termo de Sachs-Wolfe integrado, o peso que deve entrar é somente devido à restrição de que o fóton não mais se espalhe durante o intervalo em que a integral se estende.
Uma vez tendo estabelecido como se altera o contraste de temperatura por causa da recombinação não instantânea, vejamos como se altera a polarização. Retomemos, para tanto, (3.3.1).
Vamos supor que $J(\mathbf{l})$, num certo tempo conforme η_e seja dado pela lei de Stefan-Boltzmann, isto é,

$$J(\eta_e, \mathbf{l}) \propto (T_0 + \delta T(\eta_e, \mathbf{l}))^4\,,$$

onde T_0 é a temperatura dos fótons no instante considerado e δT sua variação.
Vamos agora inserir essa expressão para $J(\eta_e, \mathbf{l})$ em (3.3.1) fazendo expansão em série de Taylor até a primeira ordem no numerador e tomando apenas o termo de ordem zero no denominador. O termo do denominador fica $\int(1+\cos^2\theta)T_0^4 \sin\theta d\theta d\phi$ com θ variando entre 0 e π e ϕ de 0 a 2π, que pode ser facilmente calculado e vale $16\pi T_0^4/3$. No numerador de (3.3.1), a contribuição da expansão de J será $T_0^4(1+4\delta T/T_0)$, sendo que quando integrado sobre os ângulos o termo isotrópico passa a não contribuir (já que o termo entre colchetes no numerador de (3.3.1) seleciona apenas o quadrupolo do que se integra). Podemos ver, finalmente, que o termo $4T_0^4$ no numerador e o termo $16\pi T_0^4/3$ no denominador podem ser simplificados resultando apenas em um fator $3/4\pi$ global. Dessas considerações e notando ainda que se deve inserir o peso probabilístico (3.4.2) para traduzir a não instantaneidade da recombinação, obteremos como expressão para a polarização [16]:

$$\mathcal{P}_{ab}(\mathbf{e}) = 3\int\left[\frac{1}{2}(1-(\mathbf{e}\cdot\mathbf{l})^2)\delta_{ab} - (\mathbf{l}\cdot\mathbf{e}_a)(\mathbf{l}\cdot\mathbf{e}_b)\right]\frac{\delta T}{T_0}(\mathbf{x}_e,\eta_e,\mathbf{l})\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}d\eta_e\frac{d^2\mathbf{l}}{4\pi}\,, \tag{3.4.6}$$

onde $\frac{\delta T}{T_0}$ é justamente o contraste de temperatura Θ e a integral temporal deve ser calculada durante toda a duração da recombinação.
Com isso a polarização deve ser proporcional ao quadrupolo gerado durante a recombinação não instantânea. Para calcular $\Theta(\eta_e, \mathbf{l})$ originado pelas perturbações escalares, num ponto $\mathbf{x}$ podemos usar (3.4.5) substituindo η_o por η_e e integrar no intervalo $\eta_e > \eta > 0$, isto é,

$$\Theta(\mathbf{x}_e,\eta_e,\mathbf{l}) = \int_0^{\eta_e}\left[\frac{1}{4}\delta_\gamma^N + \Phi + l^i(D_iV_b)\right](\mathbf{x},\eta)\mu'(\eta)\mathrm{e}^{-\mu(\eta)}d\eta + \int_0^{\eta_e}(\Psi'+\Phi')\mathrm{e}^{-\mu(\eta)}d\eta\,. \tag{3.4.7}$$

3.5 Integração sobre dependências angulares

Nesta seção interessaremo-nos em integrar as dependências angulares de (3.4.6). Para tanto algumas manipulações sobre (3.4.7) e (3.4.6) devem ser feitas além de uso intenso da teoria de momento angular.

3.5.1 Reexpressando o contraste de temperatura

A equação de Sachs-Wolfe relaciona os pontos de emissão e observação de fótons, sendo que a temperatura dos fótons no ponto de observação é uma função do ponto (do espaço-tempo) de emissão. Para simplificar a escrita, momentaneamente denotemos por $\Theta(\mathbf{x}_e,\eta_e,\mathbf{l}) = \xi(\mathbf{x},\eta,\eta_e)$ essa relação funcional.

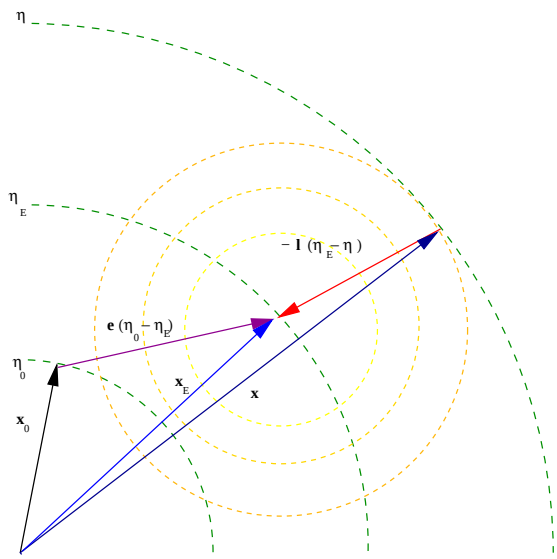

Figura 3.5.1: Esquema indicando os pontos do espaço-tempo envolvidos na geometria da equação de Sachs-Wolfe.

Fazendo a transformada de Fourier de (3.4.7), temos

$$\begin{aligned}\Theta(\mathbf{k},\eta_e,\mathbf{l}) &= \int \frac{d^3\mathbf{x}_e}{(2\pi)^{3/2}}\Theta(\mathbf{x}_e,\eta_e,\mathbf{l})\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_e} = \int \frac{d^3\mathbf{x}_e}{(2\pi)^{3/2}}\xi(\mathbf{x},\eta,\eta_e)\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_e} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}}\xi(\mathbf{x},\eta,\eta_e)\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{l}(\eta_e-\eta))} \\ &= \xi(\mathbf{k},\eta,\eta_e)\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}(\eta_e-\eta)}\,. \end{aligned} \tag{3.5.1}$$

De (3.4.7) e (3.5.1), temos que:

$$\begin{aligned}\Theta(\mathbf{x}_e,\eta_e,\mathbf{l}) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\Theta(\mathbf{k},\eta_e,\mathbf{l})\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_e} \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\int_0^{\eta_e}\Big\{\big[\Theta_{SW}(\mathbf{k},\eta)+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}V_b(\mathbf{k},\eta)\big]\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}(\eta_e-\eta)}\mu'(\eta)\mathrm{e}^{-\mu(\eta)}d\eta + \\ &+ \int_0^{\eta_e}(\Psi'+\Phi')(\mathbf{k},\eta)\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}(\eta_e-\eta)}\mathrm{e}^{-\mu(\eta)}d\eta\Big\}\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_e}\,. \end{aligned} \tag{3.5.2}$$

Com isso,

$$\Theta(\mathbf{x}_e,\eta_e,\mathbf{l}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\int_0^{\eta_e}\Big\{\big[\Theta_{SW}(\mathbf{k},\eta)+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}V_b(\mathbf{k},\eta)\big]\mu'(\eta)+(\Psi'+\Phi')(\mathbf{k},\eta)\Big\}\mathrm{e}^{-\mu(\eta)}\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}(\eta_e-\eta)}d\eta\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_e} \tag{3.5.3}$$

Tomando vantagem de trabalharmos com a transformada de Fourier, podemos reescrever (3.5.3) como

$$\Theta(\mathbf{x}_e,\eta_e,\mathbf{l}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{\eta_e} \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_e}\mathrm{e}^{-\mu(\eta)}\Big\{\mu'(\eta)\big[\Theta_{SW}(\mathbf{k},\eta) - V_b(\mathbf{k},\eta)\partial_\eta\big] + (\Psi'+\Phi')(\mathbf{k},\eta)\Big\}\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{l}(\eta_e-\eta)}d\eta \tag{3.5.4}$$

Inserindo a expressão para expansão de ondas planas em ondas esféricas[8] [24]

$$\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot((\eta_e-\eta)\mathbf{l})} = 4\pi\sum_{l,m} i^l j_l(k(\eta_e-\eta))\mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{k}})\mathrm{Y}_{lm}(\mathbf{l}) \tag{3.5.5}$$

em (3.5.4), temos

$$\begin{aligned}\Theta(\mathbf{x}_e,\eta_e,\mathbf{l}) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \int_0^{\eta_e} 4\pi\sum_{l,m} i^l \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_e}\mathrm{e}^{-\mu(\eta)}\Big\{\Big[\mu'(\eta)\Big(\Theta_{SW}(\mathbf{k},\eta)j_l(k(\eta_e-\eta)) - \\ &\quad -V_b(\mathbf{k},\eta)\frac{\partial j_l(k(\eta_e-\eta))}{\partial\eta}\Big) + (\Psi'+\Phi')(\mathbf{k},\eta)j_l(k(\eta_e-\eta))\Big]\mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{k}})\mathrm{Y}_{lm}(\mathbf{l})\Big\}d\eta \\ &\equiv \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} 4\pi\sum_{l,m} i^l \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_e}\Theta_l(\mathbf{k},\eta_e)\mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{k}})\mathrm{Y}_{lm}(\mathbf{l})\end{aligned} \tag{3.5.6}$$

onde

$$\begin{aligned}\Theta_l(\mathbf{k},\eta_e) &= \int_0^{\eta_e} \mathrm{e}^{-\mu(\eta)}\Big\{\mu'(\eta)\Big[\Theta_{SW}(\mathbf{k},\eta)j_l(k(\eta_e-\eta)) - V_b(\mathbf{k},\eta)\frac{\partial j_l(k(\eta_e-\eta))}{\partial\eta}\Big] + \\ &\quad +(\Psi'+\Phi')(\mathbf{k},\eta)j_l(k(\eta_e-\eta))\Big\}d\eta\,.\end{aligned} \tag{3.5.7}$$

3.5.2 Função polarização

Utilizando (3.4.6) e (3.2.25) podemos escrever da seguinte maneira as componentes do tensor de polarização:

$$\mathcal{P}_{11}(\mathbf{e}) = -3\int\int_0^{\eta_o} 2\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\left[\frac{\mathrm{Y}_{22}(\mathbf{l})+\mathrm{Y}_{2-2}(\mathbf{l})}{2}\right]\Theta[\mathbf{x}_o+\mathbf{e}(\eta_o-\eta_e),\eta_e,\mathbf{l}]\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}d\eta_e\frac{d^2\mathbf{l}}{4\pi} \tag{3.5.8}$$

$$\mathcal{P}_{12}(\mathbf{e}) = -3\int\int_0^{\eta_o} 2\sqrt{\frac{2\pi}{15}}\left[\frac{\mathrm{Y}_{22}(\mathbf{l})-\mathrm{Y}_{2-2}(\mathbf{l})}{2i}\right]\Theta[\mathbf{x}_o+\mathbf{e}(\eta_o-\eta_e),\eta_e,\mathbf{l}]\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}d\eta_e\frac{d^2\mathbf{l}}{4\pi}\,. \tag{3.5.9}$$

Suponhamos agora que Θ possa reescrever-se como

$$\Theta(\mathbf{x}_o+\mathbf{e}(\eta_o-\eta_e),\eta_e,\mathbf{l}) = \sum_{lm} b_{lm}(\mathbf{x}_o+\mathbf{e}(\eta_o-\eta_e),\eta_e)\mathrm{Y}_{lm}(\mathbf{l})\,.$$

Com isso,

[8] Segundo [45], essa expansão é devida a Bauer, *Journal für Math. LVI* (1859), pp. 104, 106.

$$\mathcal{P}_{11}(\mathbf{e})=-2\sqrt{\frac{3}{40\pi}}\int_0^{\eta_o}\Big\{b_{2-2}[\mathbf{x}_o-\mathbf{e}(\eta_o-\eta_e),\eta_e]+b_{22}[\mathbf{x}_o+\mathbf{e}(\eta_o-\eta_e),\eta_e]\Big\}\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}d\eta_e \quad (3.5.10)$$

$$\mathcal{P}_{12}(\mathbf{e})=-\frac{2}{i}\sqrt{\frac{3}{40\pi}}\int_0^{\eta_o}\Big\{b_{2-2}[\mathbf{x}_o-\mathbf{e}(\eta_o-\eta_e),\eta_e)-b_{22}[\mathbf{x}_o+\mathbf{e}(\eta_o-\eta_e),\eta_e]\Big\}\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}d\eta_e. \quad (3.5.11)$$

Logo, se fizermos a operação $(\mathcal{P}_{11}-i\mathcal{P}_{12})/2$, teremos o que passaremos a chamar *função polarização*

$$P(\mathbf{x}_o,\eta_o,\mathbf{e})\equiv\frac{\mathcal{P}_{11}-i\mathcal{P}_{12}}{2}=\frac{Q+iU}{4I}=-\sqrt{\frac{3}{40\pi}}\int_0^{\eta_o}b_{2-2}[\mathbf{x}_o+\mathbf{e}(\eta_o-\eta_e),\eta_e]\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}d\eta_e\,. \quad (3.5.12)$$

Temos que calcular os b_{lm} que aparecem em (3.5.12). Isso, entretanto, é um pouco mais sutil do que parece à primeira vista. Poderíamos ter ingenuamente escrito $b_{lm}(\mathbf{x}_e,\eta_e)=\int d^2\mathbf{l}\Theta(\mathbf{x}_e,\eta_e,\mathbf{l})\mathrm{Y}^*_{lm}(\mathbf{l})$ e procedido às integrações, mas uma análise mais detalhada dos sistemas de coordenadas envolvidos faz-se necessária.
Devemos primeiro recobrar que na derivação do tensor de polarização, na seção 3.2.1, adotamos a direção do fóton observado como o eixo "z" de um sistema de referência, como indicado na figura 3.1.1. O versor correspondente a esse eixo passou a ser denotado por $\mathbf{e}$. O versor correspondente à direção do fóton incidente, que passou a ser denotada por $\mathbf{l}$, deve ser decomposto com respeito a esse sistema sempre que aparece no tensor de polarização. Assim, quando nos interessamos em calcular a polarização de fótons observados em uma certa direção do céu, estamos calculando quantidades em um sistema obtido através de uma rotação a partir de um sistema fixo, por exemplo o sistema de coordenadas galáctico ou um fixo no planeta Terra.
Ao calcular $\Theta(\mathbf{x}_0+\mathbf{e}(\eta_0-\eta_e),\eta_e,\mathbf{l})$, por outro lado, não fizemos mensão a $\mathbf{e}$ (ao menos não como uma direção em relação à qual outras quantidades deviam ter referência) e, com isso, os ângulos envolvidos são relativos ao sistema de referência fixo. Temos, então, que reconciliar os sistemas empregados nas decomposição para calcular os b_{lm}'s. Para tal missão, consideremos o esquema:

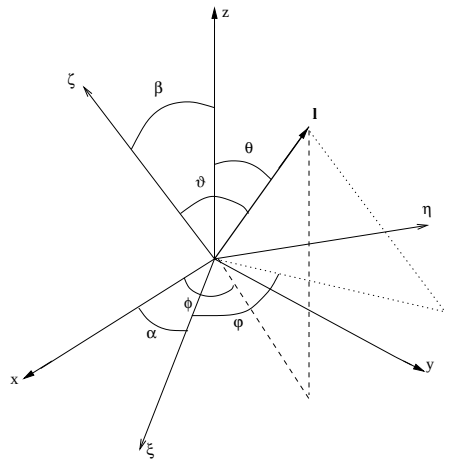

Figura 3.5.2: Esquema indicando os sistemas de coordenadas utilizados. O sistema $\{\xi,\,\eta,\,\zeta\}$ é obtida de $\{x,\,y,\,z\}$ por uma rotação R parametrizada por ângulos de Euler. θ e ϕ são ângulos da decomposição de $\mathbf{l}$ no sistema $\{x,\,y,\,z\}$ e ϑ e φ com relação a $\{\xi,\,\eta,\,\zeta\}$.

Nesta figura, $\{\xi,\,\eta,\,\zeta\}$ correspondem a $\{k',\,\varepsilon_1,\,\varepsilon_2\}$ da figura 3.1.1. Quando escrevemos $b_{lm}(\mathbf{x}_e,\eta_e)=$

$\int d^2\mathbf{l}\Theta(\mathbf{x}_e,\eta_e,\mathbf{l})\mathrm{Y}^*_{lm}(\mathbf{l})$, o sistema de referência a ser empregado para que haja consistência no cálculo, é $\{\xi,\,\eta,\,\zeta\}$. Devemos, assim, adaptar a expressão obtida em (3.5.6) a esse sistema. Com efeito, sendo R a rotação que leva a $\{\xi,\,\eta,\,\zeta\}$ partindo de $\{x,\,y,\,z\}$, sabemos que [24]

$$\mathrm{Y}_{lm}(\theta,\phi)=\sum_{m'}\mathrm{Y}_{lm'}(\vartheta,\varphi)D^{l*}_{mm'}(R)\,.$$

Assim, sempre em relação ao sistema $\{\xi,\,\eta,\,\zeta\}$ reescrevemos 3.5.6 como

$$\Theta(\mathbf{x}_e,\eta_e,\mathbf{l})=\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}4\pi\sum_{l,m}i^l\Theta_l(\mathbf{k},\eta_e)\mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{k}})\sum_{m'}\mathrm{Y}_{lm'}(\mathbf{l})D^{l*}_{mm'}(R)\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_e}\,. \tag{3.5.13}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
b_{lm}(\mathbf{x}_e,\eta_e) &= \int d^2\mathbf{l}\Theta(\mathbf{x}_e,\eta_e,\mathbf{l})\mathrm{Y}^*_{lm}(\mathbf{l}) = \\
&= \int d^2\mathbf{l}\left[\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}4\pi\sum_{l',m'}i^{l'}\Theta_{l'}(\mathbf{k},\eta_e)\mathrm{Y}^*_{l'm'}(\hat{\mathbf{k}})\sum_{m''}\mathrm{Y}_{l'm''}(\mathbf{l})D^{l'*}_{m'm''}(R)\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_e}\right]\mathrm{Y}^*_{lm}(\mathbf{l}) \\
&= \int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}4\pi\sum_{m'}i^l\Theta_l(\mathbf{k},\eta_e)\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_e}\mathrm{Y}^*_{lm'}(\hat{\mathbf{k}})D^{l*}_{m'm}(R)\,.
\end{aligned} \tag{3.5.14}$$

Estamos interessados em b_{2-2}:

$$\begin{aligned}
b_{2-2}(\mathbf{x}_e,\eta_e) &= -\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}4\pi\Theta_2(\mathbf{k},\eta_e)\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_e}\sum_{m'}\mathrm{Y}^*_{2m'}(\hat{\mathbf{k}})D^{2*}_{m'-2}(R) \\
&= -\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}4\pi\Theta_2(\mathbf{k},\eta_e)\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_e}\sum_{m'}(-1)^{m'}\mathrm{Y}_{2-m'}(\hat{\mathbf{k}})(-1)^{m'+2}D^2_{-m'2}(R) \\
&= -\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}4\pi\Theta_2(\mathbf{k},\eta_e)\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_e}\sum_{m'}\mathrm{Y}_{2m'}(\hat{\mathbf{k}})D^2_{m'2}(R)\,.
\end{aligned} \tag{3.5.15}$$

Portanto,

$$P(\mathbf{x}_o,\eta_o,\mathbf{e})=\sqrt{\frac{3}{40\pi}}\int_0^{\eta_o}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}4\pi\Theta_2(\mathbf{k},\eta_e)\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_e}\sum_M\mathrm{Y}_{2M}(\hat{\mathbf{k}})D^2_{M2}(R)\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}d\eta_e\,. \tag{3.5.16}$$

Passaremos agora a trabalhar a expressão (3.5.16) com o intuito de simplificá-la. Para tal, focaremos inicialmente em separar sua parte angular. Essa separação é inspirada no que usualmente é feito quando se escreve uma função na forma de uma série com coeficientes dependendo de variáveis não-angulares e harmônicos esféricos como conjunto de funções ortogonais e é baseada fundamentalmente no teorema de Peter-Weyl.

3.5.3 Integração da parte angular da função polarização

Usando o teorema de Peter-Weyl, vamos fazer de uma expansão de (3.5.16) tal como em (2.3.8), com coeficientes dados por (2.3.9). Inicialmente, para tanto, notemos que a rotação que reconcilia os sistemas $\{\xi, \eta, \zeta\}$ e $\{x, y, z\}$ é inteiramente determinada fornecendo os ângulos de Euler α e β como indica a figura 3.5.2. Esses ângulos β e α são justamente os que caracterizam a direção $\mathbf{e}$ (que coincide com ζ). Assim, escrever $D(R)$, $D(\alpha, \beta, 0)$ ou $D(\mathbf{e})$ significa a mesma coisa, tomando apenas o cuidado que a medida de integração sobre todo o grupo de rotações e a integração sobre $d^2\mathbf{e}$ diferem, isto é,

$$\int_{SO(3)} dR = \int_0^{4\pi} \frac{d\alpha}{4\pi} \int_0^{4\pi} \frac{d\gamma}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\beta}{2} \mathrm{sen}\beta$$

e

$$\int d^2\mathbf{e} = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} d\beta \mathrm{sen}\beta\,,$$

ou seja,

$$\int_{SO(3)} dR \to \frac{1}{4\pi} \int d^2\mathbf{e}\,.$$

Consideremos então o objeto

$$\begin{aligned}
\int P(\mathbf{x}_o, \eta_o, \mathbf{e}) D^{j*}_{m'm''}(\mathbf{e}) d^2\mathbf{e} \; &= \sqrt{\frac{6\pi}{5}} \sum_{M=-2}^{2} \int \int_0^{\eta_o} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \Theta_2(\mathbf{k}, \eta_e) \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_o + \mathbf{e}(\eta_o - \eta_e))} \mathrm{Y}_{2M}(\hat{\mathbf{k}}) \times \\
&\times D^2_{M2}(\mathbf{e}) D^{j*}_{m'm''}(\mathbf{e}) \mu'(\eta_e) \mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)} d\eta_e d^2\mathbf{e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{6\pi}{5}} \sum_{M=-2}^{2} \int \int_0^{\eta_o} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \Theta_2(\mathbf{k}, \eta_e) \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o} \sum_{lm} 4\pi(-i)^l j_l(k(\eta_o - \eta_e)) \times \\
&\times \mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \mathrm{Y}_{lm}(\mathbf{e}) \mathrm{Y}_{2M}(\hat{\mathbf{k}}) D^2_{M2}(\mathbf{e}) D^{j*}_{m'm''}(\mathbf{e}) \mu'(\eta_e) \mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)} d\eta_e d^2\mathbf{e}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\pi \sqrt{\frac{6\pi}{5}} \sum_{M=-2}^{2} \sum_{lm} i^l \int_0^{\eta_o} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \Theta_2(\mathbf{k}, \eta_e) \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o} j_l(k(\eta_o - \eta_e)) \times \\
&\times \mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \mathrm{Y}_{2M}(\hat{\mathbf{k}}) \left[\int \mathrm{Y}_{lm}(\mathbf{e}) D^2_{M2}(\mathbf{e}) D^{j*}_{m'm''}(\mathbf{e}) d^2\mathbf{e} \right] \mu'(\eta_e) \mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)} d\eta_e
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4\pi \sqrt{\frac{6\pi}{5}} \sum_{M=-2}^{2} \sum_{lm} i^l \int_0^{\eta_o} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o} \Theta_2(\mathbf{k}, \eta_e) j_l(k(\eta_o - \eta_e)) \mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \mathrm{Y}_{2M}(\hat{\mathbf{k}}) \times \\
&\times (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \left[\int D^{j*}_{m'm''}(\mathbf{e}) D^2_{M2}(\mathbf{e}) D^l_{-m0}(\mathbf{e}) d^2\mathbf{e} \right] \mu'(\eta_e) \mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)} d\eta_e
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 4\pi\sqrt{\frac{6\pi}{5}}\sum_{M=-2}^{2}\sum_{lm} i^l \int_0^{\eta_o}\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o}\Theta_2(\mathbf{k},\eta_e)j_l(k(\eta_o-\eta_e))\times \\
&\times \mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{k}})\mathrm{Y}_{2M}(\hat{\mathbf{k}})(-1)^m\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}\frac{4\pi\langle 2Ml-m|jm'\rangle\langle 22l0|jm''\rangle}{2j+1}\times \\
&\times \mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}d\eta_e
\end{aligned}
\tag{3.5.17}
$$

onde usamos que $D^l_{m0}(\alpha,\beta,0)=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\mathrm{Y}^*_{lm}(\beta,\alpha)$ e o resultado da integração de três matrizes de rotação (ver [24] ou [23], por exemplo). Utilizando as regras de seleção dos coeficientes de Clebsch-Gordan vemos que $\langle 22l0|jm''\rangle$ implica que $m''=2$, como já deviamos esperar, já que P é um objeto de spin 2, como discutimos na Seção 2.7.1, quando estudando o efeito de rotações sobre os vetores da base esférica.
Vamos definir coeficientes da seguinte maneira:

$$
p_{jm'}(\mathbf{x}_o,\eta_o)=\int_R P(\mathbf{x}_o,\eta_o,\mathbf{e})D^{j*}_{m'2}(\mathbf{e})d^2\mathbf{e}\,. \tag{3.5.18}
$$

Com isso,

$$
\begin{aligned}
p_{jm'}(\mathbf{x}_o,\eta_o) &= \frac{(4\pi)^2}{\sqrt{2j+1}}\sqrt{\frac{3}{10}}\sum_{M=-2}^{2}\sum_{lm} i^l\sqrt{2j+1}\sqrt{2l+1}(-1)^m\int_0^{\eta_o}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o}\Theta_2(\mathbf{k},\eta_e)\times \\
&\times j_l(k(\eta_o-\eta_e))\mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{k}})\mathrm{Y}_{2M}(\hat{\mathbf{k}})\frac{\langle 2Ml-m|jm'\rangle\langle 22l0|j2\rangle}{2j+1}\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}d\eta_e \\
&= \frac{(4\pi)^2}{\sqrt{2j+1}}\sqrt{\frac{3}{10}}\sum_{l=0}^{\infty} i^l\sqrt{2j+1}\sqrt{2l+1}\int_0^{\eta_o}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o}\Theta_2(\mathbf{k},\eta_e)j_l(k(\eta_o-\eta_e))\times \\
&\times\left[\sum_{m=-l}^{l}\sum_{M=-2}^{2}\mathrm{Y}_{l-m}(\hat{\mathbf{k}})\mathrm{Y}_{2M}(\hat{\mathbf{k}})\langle 2Ml-m|jm'\rangle\right]\frac{\langle 22l0|j2\rangle}{2j+1}\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}d\eta_e\,.
\end{aligned}
\tag{3.5.19}
$$

Lembremos agora que os harmônicos esféricos satisfazem a seguinte regra de composição [46]

$$
\mathrm{Y}_{l_1m_1}(\Omega)\mathrm{Y}_{l_2m_2}(\Omega)=\sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2}\sum_{m=-l}^{l}\sqrt{\frac{(2l_1+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l+1)}}\langle l_10l_20|l0\rangle\langle l_1m_1l_2m_2|lm\rangle\mathrm{Y}_{lm}(\Omega)\,. \tag{3.5.20}
$$

Inserindo (3.5.20) em (3.5.19):

$$
\begin{aligned}
p_{jm'}(\mathbf{x}_o,\eta_o) &= \frac{(4\pi)^2}{\sqrt{2j+1}}\sqrt{\frac{3}{10}}\sum_{l=0}^{\infty} i^l\sqrt{2j+1}\sqrt{2l+1}\int_0^{\eta_o}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o}\Theta_2(\mathbf{k},\eta_e)j_l(k(\eta_o-\eta_e))\times \\
&\times\left[\sum_{m=-l}^{l}\sum_{M=-2}^{2}\left(\sum_{\lambda=|l-2|}^{l+2}\sum_{\nu=-\lambda}^{\lambda}\sqrt{\frac{(2l+1)5}{4\pi(2\lambda+1)}}\langle l020|\lambda 0\rangle\langle l-m2M|\lambda\nu\rangle\mathrm{Y}_{\lambda\nu}(\hat{\mathbf{k}})\right)\langle 2Ml-m|jm'\rangle\right]\times \\
&\times\frac{\langle 22l0|j2\rangle}{2j+1}\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}d\eta_e\,.
\end{aligned}
\tag{3.5.21}
$$

Lançamos mão, neste ponto, da propriedade dos coeficientes de Clebsch-Gordan [24]

$$\langle j_2 m_2 j_1 m_1 | JM \rangle = (-1)^{(j_1+j_2-J)} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle \,. \tag{3.5.22}$$

Daí

$$\begin{aligned}
p_{jm'}(\mathbf{x}_o, \eta_o) &= \frac{(4\pi)^2}{\sqrt{2j+1}} \sqrt{\frac{3}{10}} \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{2j+1}\sqrt{2l+1} \int_0^{\eta_o} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o} \Theta_2(\mathbf{k}, \eta_e) j_l(k(\eta_o - \eta_e)) \times \\
&\times \left[\sum_{m=-l}^{l} \sum_{M=-2}^{2} \sum_{\lambda=|l-2|}^{l+2} \sum_{\nu=-\lambda}^{\lambda} \sqrt{\frac{(2l+1)5}{4\pi(2\lambda+1)}} \langle l020|\lambda 0\rangle \langle 2Ml-m|\lambda\nu\rangle (-1)^{\lambda-l} \mathrm{Y}_{\lambda\nu}(\hat{\mathbf{k}}) \langle 2Ml-m|jm'\rangle \right] \times \\
&\times \frac{\langle 22l0|j2\rangle}{2j+1} \mu'(\eta_e) \mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)} d\eta_e \\
&= \frac{(4\pi)^2}{\sqrt{2j+1}} \sqrt{\frac{3}{10}} \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{2j+1}\sqrt{2l+1} \int_0^{\eta_o} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o} \Theta_2(\mathbf{k}, \eta_e) j_l(k(\eta_o - \eta_e)) \times \\
&\times \left[\sum_{\lambda=|l-2|}^{l+2} \sum_{\nu=-\lambda}^{\lambda} \sqrt{\frac{5(2l+1)}{4\pi(2\lambda+1)}} \langle l020|\lambda 0\rangle \mathrm{Y}_{\lambda\nu}(\hat{\mathbf{k}}) \sum_{m=-l}^{l} \sum_{M=-2}^{2} (-1)^{\lambda-l} \langle 2Ml-m|\lambda\nu\rangle \langle 2Ml-m|jm'\rangle \right] \times \\
&\times \frac{\langle 22l0|j2\rangle}{2j+1} \mu'(\eta_e) \mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)} d\eta_e
\end{aligned} \tag{3.5.23}$$

Como

$$\sum_{m_1=-j_1}^{j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{j_2} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J'M' \rangle = \delta_{JJ'} \delta_{MM'} \,,$$

ficamos com

$$\begin{aligned}
p_{jm'}(\mathbf{x}_o, \eta_o) &= \frac{(4\pi)^2}{\sqrt{2j+1}} \sqrt{\frac{3}{10}} \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{2j+1}\sqrt{2l+1} \int_0^{\eta_o} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o} \Theta_2(\mathbf{k}, \eta_e) j_l(k(\eta_o - \eta_e)) \times \\
&\times \sqrt{\frac{5(2l+1)}{4\pi(2j+1)}} \langle l020|j0\rangle \mathrm{Y}_{jm'}(\hat{\mathbf{k}}) (-1)^{j-l} \frac{\langle 22l0|j2\rangle}{2j+1} \mu'(\eta_e) \mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)} d\eta_e \\
&= \frac{4\pi}{\sqrt{2j+1}} \sqrt{6\pi} \sum_{l=0}^{\infty} i^l \frac{2l+1}{2j+1} \langle l020|j0\rangle \langle l022|j2\rangle \times \\
&\times \int_0^{\eta_o} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o} \Theta_2(\mathbf{k}, \eta_e) j_l(k(\eta_o - \eta_e)) \mathrm{Y}_{jm'}(\hat{\mathbf{k}}) \mu'(\eta_e) \mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)} d\eta_e \,.
\end{aligned} \tag{3.5.24}$$

Vamos agora analisar as regras de seleção para os coeficientes de Clebsch-Gordan que figuram em (3.5.24) com o intuito de restringir a soma l a um conjunto menor de valores. Consideremos um a cada vez esses coeficientes:

i) $\langle l020|j0\rangle$

Sabemos que

$$\langle j_1 - m_1 j_2 - m_2 | J - M \rangle = (-1)^{(j_1+j_2-J)} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle \,. \tag{3.5.25}$$

Logo $\langle l020|j0\rangle = (-1)^{l-j}\langle l020|j0\rangle$, ou seja, para que esse coeficiente não seja nulo é preciso que $l-j$ seja par.

ii) $\langle l022|j2\rangle$

Imediatamente temos que $j \geq 2$.

Notemos ainda que devem ser satisfeitas as relações

$$\begin{aligned} M &= m_1 + m_2 && (3.5.26)\\ |j_1 - j_2| \leq \; & J \leq j_1 + j_2 && (3.5.27)\\ |J - j_1| \leq \; & j_2 \leq J + j_1 && (3.5.28)\\ |J - j_2| \leq \; & j_1 \leq J + j_2 && (3.5.29) \end{aligned}$$

para que $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | JM \rangle$ não seja nulo. Em nosso caso, para que $\langle l022|j2\rangle$ não se anule, é preciso que $l = j-2, j-1, j, j+1, j+2$.

Juntando $i)$ e $ii)$, temos que a soma $\sum_{l=0}^{\infty}$ se torna apenas $\sum_{l=j-2,j,j+2}$. Assim,

$$\begin{aligned} p_{jm'}(\mathbf{x}_o, \eta_o) &= \frac{4\pi}{\sqrt{2j+1}}\sqrt{6\pi} \sum_{l=j-2,j,j+2} i^l \frac{2l+1}{2j+1} \langle l020|j0\rangle \langle l022|j2\rangle \times \\ &\times \int_0^{\eta_o} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o} \Theta_2(\mathbf{k}, \eta_e) j_l(k(\eta_o - \eta_e)) \mathrm{Y}_{jm'}(\hat{\mathbf{k}}) \mu'(\eta_e) \mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)} d\eta_e \,. \end{aligned} \tag{3.5.30}$$

Vamos agora explicitar uma trivialidade: $i^l = \pm\sqrt{(-1)}^l = (\pm 1)^l (-1)^{l/2} = i^j (\pm 1)^{(l-j)} (-1)^{(l-j)/2}$. Podemos reescrever (3.5.30) como

$$p_{jm'}(\mathbf{x}_o, \eta_o) = \frac{4\pi}{\sqrt{2j+1}}\sqrt{6\pi} i^j \int_0^{\eta_o} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o} \Theta_2(\mathbf{k}, \eta_e) F_j(k(\eta_o - \eta_e)) \mathrm{Y}_{jm'}(\hat{\mathbf{k}}) \mu'(\eta_e) \mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)} d\eta_e \tag{3.5.31}$$

onde

$$F_j(k(\eta_o - \eta_e)) = \sum_{l=j-2,j,j+2} (-1)^{(l-j)/2} \frac{2l+1}{2j+1} \langle l020|j0\rangle \langle l022|j2\rangle j_l(k(\eta_o - \eta_e)) \tag{3.5.32}$$

e o fator $(\pm 1)^{(l-j)}$ fica suprimido porque a diferença $l-j$ é sempre par nesta soma.
Podemos agora fazer a soma em l. Em [47] encontramos expressões para certos símbolos 3j de Wigner que nos permitem fazer a soma em questão sem grande dificuldade. Como são completamente equivalentes,

vamos transformar os coeficientes de Clebsch-Gordan de nossa expressão em símbolos 3j de Wigner para que possamos nos valer do auxílio de [47].
Recordemo-nos que [23]

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{j_1-j_2-m_3}}{\sqrt{2j_3+1}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_3 - m_3 \rangle \tag{3.5.33}$$

e

$$\begin{pmatrix} j_2 & j_1 & j_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1+j_2+j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} . \tag{3.5.34}$$

Para que os símbolos 3j que aparecem estejam na forma adequada para que se possa utilizar as expressões de [47], devemos fazer certas rotações de índices nos coeficientes de Clebsch-Gordan utilizando [24][9]:

$$\langle j_2 m_2 j - m | j_1 - m_1 \rangle = (-1)^{j-j_1-m_2} \sqrt{\frac{2j_1+1}{2j+1}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j - m \rangle . \tag{3.5.35}$$

Com isso,

$$\langle l020 | j0 \rangle = (-1)^l \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} 2 & j & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\langle l022 | j2 \rangle = (-1)^l \sqrt{2j+1} \begin{pmatrix} 2 & j & l \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} .$$

Portanto F_j pode ser reescrito como

$$F_j(k(\eta_o - \eta_e)) = \sum_{l=j-2,j,j+2} (-1)^{(l-j)/2} (2l+1) \begin{pmatrix} 2 & j & l \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & j & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} j_l(k(\eta_o - \eta_e)) . \tag{3.5.36}$$

Como já dito, expressões gerais para o cálculo dos símbolos 3j de Wigner que aparecem podem ser encontradas em [47]:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ j_1 & -j_1 - m_3 & m_3 \end{pmatrix} &= (-1)^{-j_1+j_2+m_3} \times \\ &\times \left[\frac{(2j_1)!(-j_1+j_2+j_3)!(j_1+j_2+m_3)!(j_3-m_3)!}{(j_1+j_2+j_3+1)!(j_1-j_2+j_3)!(j_1+j_2-j_3)!(-j_1+j_2-m_3)!(j_3+m_3)!} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

[9] Notar que essa expressão aparece incorreta em [23].

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{(j_1+j_2+j_3)/2} \frac{((j_1+j_2+j_3)/2)!}{((j_1+j_2+j_3)/2-j_1)!\,((j_1+j_2+j_3)/2-j_2)!\,((j_1+j_2+j_3)/2-j_3)!} \times$$
$$\times \left[\frac{(j_1+j_2-j_3)!(j_1+j_2-j_3)!(-j_1+j_2+j_3)!}{(j_1+j_2+j_3+1)!}\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Com o auxílio dessas expressões, calculamos

$$\begin{pmatrix} 2 & j & j \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^j \left[3\frac{(j+2)(j+1)(j-1)}{(2j+3)(2j+2)(2j+1)(2j-1)}\right]^{\frac{1}{2}} ,$$

$$\begin{pmatrix} 2 & j & j-2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^j \left[\frac{1}{2}\frac{(j+2)(j+1)(j-1)}{(2j+1)(2j-1)(2j-2)(2j-3)}\right]^{\frac{1}{2}} ,$$

$$\begin{pmatrix} 2 & j & j+2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^j \left[\frac{1}{2}\frac{(j+2)(j+1)(j)(j-1)}{(2j+5)(2j+4)(2j+3)(2j+2)(2j+1)}\right]^{\frac{1}{2}} ,$$

$$\begin{pmatrix} 2 & j & j \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{j+1} j(j+1) \left[\frac{1}{(2j+3)(j+1)(2j+1)j(2j-1)}\right]^{\frac{1}{2}} ,$$

$$\begin{pmatrix} 2 & j & j-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^j \frac{j(j-1)}{2} \left[\frac{6}{(2j+1)j(2j-1)(j-1)(2j-3)}\right]^{\frac{1}{2}} ,$$

$$\begin{pmatrix} 2 & j & j+2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1)^j \frac{(j+2)(j+1)}{2} \left[\frac{6}{(2j+5)(j+2)(2j+3)(j+1)(2j+1)}\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Com todos os símbolos 3j que comparecem em (3.5.36), podemos calcular os termos da soma que figura no lado direito de (3.5.36).
Quando $l = j-2$, a parcela da soma do lado direito de (3.5.36) vale

$$\frac{-1}{2(2j+1)(2j-1)} \left[\frac{3}{2}\frac{(j+2)!}{(j-2)!}\right]^{\frac{1}{2}} j_{(j-2)}(k(\eta_o - \eta_e)) .$$

Quando $l = j$, vale

$$\frac{-1}{(2j+3)(2j-1)} \left[\frac{3}{2}\frac{(j+2)!}{(j-2)!}\right]^{\frac{1}{2}} j_j(k(\eta_o - \eta_e)) .$$

Quando $l = j+2$,

$$\frac{-1}{2(2j+3)(2j+1)} \left[\frac{3}{2}\frac{(j+2)!}{(j-2)!}\right]^{\frac{1}{2}} j_{(j+2)}(k(\eta_o - \eta_e)) .$$

Com esses termos calculados, podemos reescrever (3.5.36) como

$$F_l(k(\eta_o-\eta_e)) = -\sqrt{\frac{3}{8}\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}\left[\frac{j_{(l-2)}(k(\eta_o-\eta_e))}{(2l+1)(2l-1)} + \frac{2j_l(k(\eta_o-\eta_e))}{(2l+3)(2l-1)} + \frac{j_{(l+2)}(k(\eta_o-\eta_e))}{(2l+3)(2l+1)}\right]. \tag{3.5.37}$$

Entretanto, devido às relações de recorrência satisfeitas pelas funções de Bessel,

$$\frac{j_l(k(\eta_o-\eta_e))}{(k(\eta_o-\eta_e))^2} = \frac{j_{(l-2)}(k(\eta_o-\eta_e))}{(2l+1)(2l-1)} + \frac{2j_l(k(\eta_o-\eta_e))}{(2l+3)(2l-1)} + \frac{j_{(l+2)}(k(\eta_o-\eta_e))}{(2l+3)(2l+1)}.$$

Com isso podemos, finalmente, reescrever F_l na forma simples

$$F_l(k(\eta_o-\eta_e)) = -\sqrt{\frac{3}{8}\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}\frac{j_l(k(\eta_o-\eta_e))}{(k(\eta_o-\eta_e))^2}. \tag{3.5.38}$$

Retomando o que obtivemos na equação (3.5.31), sempre tendo $l \geq 2$,

$$p_{lm}(\mathbf{x}_o,\eta_o) = \frac{4\pi}{\sqrt{2l+1}}\sqrt{6\pi}i^l\int_0^{\eta_o}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o}\Theta_2(\mathbf{k},\eta_e)F_l(k(\eta_o-\eta_e))\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{k}})\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}d\eta_e \tag{3.5.39}$$

com

$$F_l(k(\eta_o-\eta_e)) = -\sqrt{\frac{3}{8}\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}\frac{j_l(k(\eta_o-\eta_e))}{(k(\eta_o-\eta_e))^2} \tag{3.5.40}$$

e

$$\begin{aligned}\Theta_2(\mathbf{k},\eta_e) &= \int_0^{\eta_e}\Big\{\big[\Theta_{SW}(\mathbf{k},\eta)j_2(k(\eta_e-\eta)) - V_b(\mathbf{k},\eta)\frac{\partial j_2(k(\eta_e-\eta))}{\partial\eta}\big]\mu'(\eta) + \\ &+(\Psi'+\Phi')(\mathbf{k},\eta)j_2(k(\eta_e-\eta))\Big\}\mathrm{e}^{-\mu(\eta)}d\eta.\end{aligned} \tag{3.5.41}$$

3.5.4 Expressão da decomposição em termos de harmônicos esféricos de spin

É comum encontrar na literatura ([12], [31], [32]) o tratamento da polarização da radiação cósmica de fundo feito com expansões em termos dos assim chamados harmônicos esféricos de spin, introduzidos na Seção 2.5.1.

Em [12], por exemplo, lemos

$$\frac{(Q\pm iU)}{4I}(\mathbf{e}) = \sum_{lm} a_{lm}^{(\pm 2)}\,{}_{\pm 2}\mathrm{Y}_{lm}(\mathbf{e}) \tag{3.5.42}$$

Fazendo a comparação entre (3.5.42) e (2.5.3), aprendemos que

$$a_{lm}^{(2)} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}}(-1)^m p_{l-m}, \tag{3.5.43}$$

ou seja,

$$a_{lm}^{(2)}(\mathbf{x}_o,\eta_o) = 4\pi\sqrt{\frac{3}{2}}i^l\int_0^{\eta_o}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o}\Theta_2(\mathbf{k},\eta_e)F_l(k(\eta_o-\eta_e))\mathrm{Y}_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}})\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}d\eta_e \tag{3.5.44}$$

com F_l dado por (3.5.40) e Θ_2 por (3.5.41).
Usando o coeficiente (3.5.44) podemos escrever

$$\frac{Q+iU}{4I}(\mathbf{e}) = \int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{lm}4\pi\alpha_l^{(2)}(\mathbf{k},\eta_o)i^l\mathrm{Y}_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}})\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o}{}_2\mathrm{Y}_{lm}(\mathbf{e}) \tag{3.5.45}$$

com

$$\alpha_l^{(2)}(\mathbf{k},\eta_o) = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}\int_0^{\eta_o}\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}d\eta_e\frac{1}{2}\left[\Theta_2(\mathbf{k},\eta_e)\right]\frac{j_l(k(\eta_o-\eta_e))}{(k(\eta_o-\eta_e))^2}\,. \tag{3.5.46}$$

3.5.5 Modos E e B

Como na seção 2.8, podemos definir, a partir dos coeficientes da expansão de quantidades de spin, modos chamados E e B.
Escrevendo

$$a_{lm}^{(2)} = \int\frac{Q+iU}{4I}{}_2\mathrm{Y}_{lm} \qquad\qquad a_{lm}^{(-2)} = \int\frac{Q-iU}{4I}{}_{-2}\mathrm{Y}_{lm}\,.$$

Sabemos que os coeficientes $a_{lm}^{(2)}$ são dados por (3.5.44). Para obtermos E e B precisamos determinar $a_{lm}^{(-2)}$. Para isso, consideremos

$$(a_{lm}^{(2)})^* = \left[\int\frac{Q+iU}{4I}{}_2\mathrm{Y}_{lm}\right]^* = \int\frac{Q-iU}{4I}{}_2\mathrm{Y}_{lm}^* = \int\frac{Q-iU}{4I}(-i)^m{}_{-2}\mathrm{Y}_{l-m} = (-1)^m a_{l-m}^{(-2)}\,.$$

Logo, $(a_{lm}^{(2)})^* = (-1)^m a_{l-m}^{(-2)}$. Reescrevendo (3.5.44),

$$a_{lm}^{(2)}(\mathbf{x}_o,\eta_o) = 4\pi\sqrt{\frac{3}{2}}i^l\int_0^{\eta_o}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o}\Theta_2(\mathbf{k},\eta_e)F_l(k(\eta_o-\eta_e))\mathrm{Y}_{lm}^*(\hat{\mathbf{k}})\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}d\eta_e \tag{3.5.47}$$

vemos claramente que $(-1)^m(a_{l-m}^{(2)})^* = a_{lm}^{(2)}$ e, portanto, $a_{lm}^{(-2)} = a_{lm}^{(2)}$. Essa igualdade, (2.8.15) e (2.8.16) implicam, obviamente que

$$E_{lm} = \sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}a_{lm}^{(2)} \qquad\qquad B_{lm} = 0\,, \tag{3.5.48}$$

ou seja, a interação estudada não é capaz de induzir um modo B na radiação cósmica de fundo.

3.6 Reespalhamentos

A recombinação é uma época de transição de um estado de equilíbrio entre matéria e radiação para um estado em que os dois sistemas atingem equilíbrios distintos. A transição entre essas duas configurações não

é instantânea e, como já descrito, é responsável pelo surgimento de multipolos com $l \geqslant 2$ nas flutuações de temperatura dos fótons da radiação cósmica de fundo.

Quando deduzimos a expressão para o tensor de polarização fizemos uma simplificação assumindo que os fótons são inicialmente não polarizados (o que está de acordo com a hipótese de que estão em equilíbrio antes de desacoplarem-se) mas também assumimos que adquiriam polarização em apenas um espalhamento com um elétron. Podemos perguntar-nos agora qual seria o efeito sobre a polarização se fótons que já haviam espalhado uma vez sofressem um segundo espalhamento, o que é razoável dada a não-instantaneidade da recombinação.

Para tanto, reconsideremos o que havíamos estabelecido quando tratamos em geral o espalhamento de partículas com spin. Se conhecemos o operador de espalhamento, no caso a parte T da matriz S do espalhamento, e a matriz densidade inicial do sistema, podemos obter a matriz densidade final do sistema como:

$$\rho_f = \frac{T\rho_i T^\dagger}{\mathrm{Tr}\rho_i T^\dagger T}\,. \tag{3.6.1}$$

Para calcular o efeito de um espalhamento consideramos a matriz densidade inicial sendo $\rho_i = \mathbb{1}/2$, indicando que o sistema não apresenta nenhuma polarização, e utilizando a matriz T do espalhamento Thompson, obtivemos uma matriz densidade final. Se tomarmos, desta feita, como matriz densidade inicial a matriz densidade final que havíamos obtido antes, podemos calcular através de (3.6.1) uma segunda matriz densidade final, correspondendo a termos tomado em conta dois espalhamentos.

Antes de iniciar as computações, fixemos notações. Vamos denotar por $\mathbf{k}_i$ o momento do fóton que incide em um centro espalhador, por $\mathbf{k}_e$ o momento do fóton que foi espalhado uma vez, mas que incide em um segundo centro espalhador e por $\mathbf{k}_o$ o momento do fóton observado. Os operadores de espalhamento serão denotados por T_1 e T_2 para o primeiro e para o segundo espalhamento respectivamente e são dados por:

$$T_1 = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^*_{k_e+}\cdot\mathbf{e}_{k_i+} & \mathbf{e}^*_{k_e+}\cdot\mathbf{e}_{k_i-} \\ \mathbf{e}^*_{k_e-}\cdot\mathbf{e}_{k_i+} & \mathbf{e}^*_{k_e-}\cdot\mathbf{e}_{k_i-} \end{pmatrix} \qquad T_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^*_{k_o+}\cdot\mathbf{e}_{k_e+} & \mathbf{e}^*_{k_o+}\cdot\mathbf{e}_{k_e-} \\ \mathbf{e}^*_{k_o-}\cdot\mathbf{e}_{k_e+} & \mathbf{e}^*_{k_o-}\cdot\mathbf{e}_{k_e-} \end{pmatrix}. \tag{3.6.2}$$

De acordo com (3.6.1), teremos, para dois espalhamentos consecutivos,

$$\rho = \frac{T_2\left(T_1\frac{\mathbb{1}}{2}T_1^\dagger\right)T_2^\dagger}{\mathrm{Tr}\left(T_2\left(T_1\frac{\mathbb{1}}{2}T_1^\dagger\right)T_2^\dagger\right)}\,. \tag{3.6.3}$$

Concentremo-nos, pois, no produto $T_2T_1T_1^\dagger T_2^\dagger$. Notemos, primeiramente, que

$$T_1T_1^\dagger T_2^\dagger = T_2^\dagger T_1T_1^\dagger + [T_1T_1^\dagger, T_2^\dagger]$$

e, portanto,

$$T_2T_1T_1^\dagger T_2^\dagger = (T_2T_2^\dagger)(T_1T_1^\dagger) + T_2[T_1T_1^\dagger, T_2^\dagger]\,. \tag{3.6.4}$$

Da mesma forma que procedemos na Seção 3.3, podemos escrever o efeito sobre a polarização devida a um feixe de fótons incidentes com uma intensidade $J(\mathbf{i})$ como

$$\mathcal{P}_{ab} = \frac{\int_0^{\eta_o} d\eta_e \mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}\int_0^{\eta_e} d\eta_i \mu'(\eta_i)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_i)}\int d^2\mathbf{e}\int d^2\mathbf{i}\left[\frac{1}{2}T_2T_1T_1^\dagger T_2^\dagger - \frac{\mathbb{1}}{2}\right]_{ab} J(\mathbf{i})}{\int d^2\mathbf{e}\int d^2\mathbf{i}\,\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(T_2T_1T_1^\dagger T_2^\dagger)J(\mathbf{i})} \tag{3.6.5}$$

lembrando que é a parte sem traço da matriz densidade a responsável pela descrição da polarização gerada. Essa seria a maneira mais geral de introduzir o efeito sobre a polarização de dois espalhamentos consecutivos de mesma natureza. O que se deve notar, entretanto, é que o tratamento nesse caso geral é muito complicado e uma simplificação, portanto, é feita: assumimos a hipótese de caos molecular[10]. Essa aproximação, empregada como um dos ingredientes básicos para a derivação da equação de Boltzmann clássica [48], leva-nos a não tomar em conta a correlação entre o momento das partículas que sofrem espalhamento. Uma breve ilustração das complicações aportadas por não supor caos molecular pode ser vista no Apêndice .1.

Com essa aproximação, somos levados a tomar $\mathbf{k}_e$ que aparece em T_1 distinto de $\mathbf{k}_e$ que aparece em T_2, embora fossem, a priori, o mesmo. Isso corresponde a, ao invés de estudar o efeito de um espalhamento seguido de um segundo, estudar apenas o efeito de dois espalhamentos. Essa distinção entre os momentos que aparecem em T_1 e T_2 faz com que essas matrizes comutem e que, com isso, não seja mais necessário considerar o termo do comutador em (3.6.4).

Feita a hipótese de caos molecular, vamos então concentrar-nos no termo $(T_2T_2^\dagger)(T_1T_1^\dagger)$. Conforme já havíamos mostrado, ver (3.2.22), podemos escrever $\frac{(T_1T_1^\dagger)}{\mathrm{Tr}(T_1T_1^\dagger)} = \mathbb{1}/2 + \mathcal{P}_{i,e}$ e $\frac{(T_2T_2^\dagger)}{\mathrm{Tr}(T_2T_2^\dagger)} = \mathbb{1}/2 + \mathcal{P}_{o,e}$. Nessas expressões, os subídices indicam que se trata do tensor de polarização para o espalhamento entre o fóton incidente e o espalhado ou entre o espalhado e o observado. Com isso,

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{3}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{2}\int d^2\mathbf{e}\int d^2\mathbf{i}\left[(T_2T_2^\dagger)(T_1T_1^\dagger)-\mathbb{1}\right]_{ab}\Theta(\mathbf{x}_i,\eta_i,\mathbf{i}) = \\
&= \left(\frac{3}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{2}\int d^2\mathbf{e}\int d^2\mathbf{i}\left\{\left[\frac{\mathbb{1}}{2}+\mathcal{P}_{o,e}\right]\left[\frac{\mathbb{1}}{2}+\mathcal{P}_{i,e}\right]-\mathbb{1}\right\}_{ab}\Theta(\mathbf{x}_i,\eta_i,\mathbf{i}) = \\
&= \left(\frac{3}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{2}\int d^2\mathbf{e}\int d^2\mathbf{i}\left[\frac{\mathcal{P}_{o,e}}{2}+\frac{\mathcal{P}_{i,e}}{2}+\mathcal{P}_{o,e}\mathcal{P}_{i,e}-\frac{3}{4}\mathbb{1}\right]_{ab}\Theta(\mathbf{x}_i,\eta_i,\mathbf{i}) = \\
&= \left(\frac{3}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{2}\int d^2\mathbf{e}\left[\int d^2\mathbf{i}\left(\frac{\mathcal{P}_{i,e}}{2}+\mathcal{P}_{o,e}\mathcal{P}_{i,e}\right)_{ab}\Theta(\mathbf{x}_i,\eta_i,\mathbf{i})\right] = \\
&= \left(\frac{3}{4\pi}\right)^2 \frac{1}{2}\left[\int d^2\mathbf{e}\int d^2\mathbf{i}\left(\frac{\mathcal{P}_{i,e}}{2}\right)_{ab}\Theta(\mathbf{x}_i,\eta_i,\mathbf{i})+\int d^2\mathbf{e}\int d^2\mathbf{i}\,(\mathcal{P}_{o,e}\mathcal{P}_{i,e})_{ab}\,\Theta(\mathbf{x}_i,\eta_i,\mathbf{i})\right] \qquad (3.6.6)
\end{aligned}
$$

o termo $\mathcal{P}_{o,e}$ foi descartado porque, não tendo fonte, anula-se quando integrado, e o termo da identidade foi descartado porque, quando integrado, dá a média angular das flutuações de temperatura, que é zero. Aqui, novamente como na seção 3.4, vamos introduzir $J(\mathbf{x}_i,\eta_i,\mathbf{i}) \propto (T_0 + \delta T(\mathbf{x}_i,\eta_i,\mathbf{i}))^4$, fazer expansão de Taylor até a primeira ordem no numerador e ordem zero no denominador, realizar as integrações necessárias e obter um fator multiplicativo global $\left(\frac{3}{4\pi}\right)^2$[11].

O termo $\int d^2\mathbf{e}\int d^2\mathbf{i}(\mathcal{P}_{i,e})_{ab}\Theta(\mathbf{x}_i,\eta_i,\mathbf{i})$ representa a integração do que tínhamos antes - algo como o monopolo da polarização. Vamos concentrar-nos no termo "quadrático". Definindo

$$p_{ab} = \sum_k (\mathcal{P}_{o,e})_{ak}(\mathcal{P}_{i,e})_{kb}$$

temos

[10] O famoso *Stosszahlansatz*.

[11] Notar que a parte do traço de $(T_2T_2^\dagger)(T_1T_1^\dagger)$ que não se anula sob integrações é um quarto do produto do traço dos fatores.

$$p_{11} = (\mathcal{P}_{o,e})_{11}(\mathcal{P}_{i,e})_{11} + (\mathcal{P}_{o,e})_{12}(\mathcal{P}_{i,e})_{21} \tag{3.6.7}$$

$$p_{12} = (\mathcal{P}_{o,e})_{11}(\mathcal{P}_{i,e})_{12} + (\mathcal{P}_{o,e})_{12}(\mathcal{P}_{i,e})_{22}\,. \tag{3.6.8}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} p_{11} - ip_{12} &= (\mathcal{P}_{o,e})_{11}[(\mathcal{P}_{i,e})_{11} - i(\mathcal{P}_{i,e})_{12}] + (\mathcal{P}_{o,e})_{12}[(\mathcal{P}_{i,e})_{21} - i(\mathcal{P}_{i,e})_{22}] \\ &= (\mathcal{P}_{o,e})_{11}[(\mathcal{P}_{i,e})_{11} - i(\mathcal{P}_{i,e})_{12}] + (\mathcal{P}_{o,e})_{12}[(\mathcal{P}_{i,e})_{12} + i(\mathcal{P}_{i,e})_{11}] \\ &= (\mathcal{P}_{o,e})_{11}[(\mathcal{P}_{i,e})_{11} - i(\mathcal{P}_{i,e})_{12}] + i(\mathcal{P}_{o,e})_{12}[(\mathcal{P}_{i,e})_{11} - i(\mathcal{P}_{i,e})_{12}] \\ &= [(\mathcal{P}_{0,e})_{11} + i(\mathcal{P}_{0,e})_{12}][(\mathcal{P}_{i,e})_{11} - i(\mathcal{P}_{i,e})_{12}] \end{aligned} \tag{3.6.9}$$

Com isso, em analogia ao que chamamos de $\frac{Q+iU}{4I}$ em (3.5.12),

$$\begin{aligned} \frac{p_{11} - ip_{12}}{2} = \left(\frac{Q+iU}{4I}\right)_2 (\mathbf{x}_o, \eta_o) = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^2 \int d^2\mathbf{e} \int_0^{\eta_o} d\eta_e \mu'(\eta_e) \mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)} \left[\frac{(\mathcal{P}_{o,e})_{11} + i(\mathcal{P}_{o,e})_{12}}{2}\right] \times \\ \times \left(\int d^2\mathbf{i} \int_0^{\eta_e} d\eta_i \mu'(\eta_i) \mathrm{e}^{-\mu(\eta_i)} \left[\frac{(\mathcal{P}_{i,e})_{11} - i(\mathcal{P}_{i,e})_{12}}{2}\right] \Theta(\mathbf{x}_i, \eta_i, \mathbf{i})\right) \end{aligned} \tag{3.6.10}$$

o índice 2 em $\left(\frac{Q+iU}{4I}\right)_2$ serve para lembrar que se trata do tratamento da polarização gerada por dois espalhamentos. O termo que aparece entre parênteses em (3.6.10) é justamente o que tínhamos em (3.5.12) e que vai servir de fonte para o segundo espalhamento.

Dois pontos devem ser notados aqui: o primeiro é que há necessidade de aplicar uma rotação de sistemas de referência para que haja consistência entre as definições empregadas na derivação do tensor de polarização e no termo de fonte, conforme já descrito na seção 3.5.2.

O segundo ponto a notar-se, é uma extensão da hipótese de caos molecular: quando, dado um fóton não polarizado, aplicamos $(T_1T_1^\dagger)$, estamos computando a polarização final desse fóton após o espalhamento com um elétron. Essa polarização é, como já visto, perpendicular ao plano de espalhamento e carrega, portanto, informação sobre os momentos envolvidos no espalhamento. Quando nos interessamos por um segundo espalhamento e fazemos a hipótese de caos molecular, uma quantidade como a polarização gerada no primeiro espalhamento não é, em si, o que se deseja como termo de fonte para $(T_2T_2^\dagger)$ justamente por carregar informação sobre os momentos dos integrantes da primeira interação, ainda que apenas sobre o plano em que estão contidos esses momentos. Devemos, então, empregar uma quantidade que seja escalar e produzida à partir da polarização gerada no primeiro espalhamento. Teríamos, a priori, duas escolhas: o modo E e o modo B. Como visto na seção 3.5.5, o modo $B = 0$ e temos, sem ambiguidade, escolhido o modo E para servir de fonte para o segundo espalhamento.

Retomando (3.6.10) em vista dessas observações e dos desenvolvimentos das Seções 2.5.1, 2.8 e 3.5.5, temos

$$\left(\frac{Q+iU}{4I}\right)_2(\mathbf{x}_o,\eta_o) = \sqrt{\frac{3}{40\pi}}\int d^2\mathbf{e}\int_0^{\eta_o} d\eta_e\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}\mathrm{Y}_{22}(\mathbf{e})\times$$
$$\times\sum_{l,m}\frac{(2l+1)}{4\pi}\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}p_{lm}(\mathbf{x}_e,\eta_e)\sqrt{\frac{4\pi}{(2l+1)}}\sum_M \mathrm{Y}^*_{lM}(\mathbf{e})D^l_{mM}(\mathbf{o})\,, \quad (3.6.11)$$

onde o fator $\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}$ vem do fato de estarmos inserindo o modo E (como descrito por (2.8.15)). O fator $\frac{(2l+1)}{4\pi}$ aparece porque, segundo (2.3.9), os coeficientes na expansão de P em termos dos D^l_{m2} devem ser $\frac{(2l+1)}{4\pi}p_{lm}$ e $\sqrt{\frac{4\pi}{(2l+1)}}$ aparece porque transformamos D^l_{m0} num harmônico esférico, como descrito por (2.5). Então,

$$\left(\frac{Q+iU}{4I}\right)_2(\mathbf{x}_o,\eta_o) = \sqrt{\frac{3}{40\pi}}\sum_{l,m}\int d\eta_e\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}}p_{lm}(\mathbf{x}_e,\eta_e)\times$$
$$\times\int d^2\mathbf{e}\mathrm{Y}_{22}(\mathbf{e})\sum_M \mathrm{Y}^*_{lM}(\mathbf{e})D^l_{mM}(\mathbf{o})$$
$$= \sqrt{\frac{3}{40\pi}}\sqrt{24}\sqrt{\frac{5}{4\pi}}\int_0^{\eta_o} d\eta_e\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}\sum_m p_{2m}(\mathbf{x}_e,\eta_e)D^2_{m2}(R')\,. \quad (3.6.12)$$

Inserindo agora

$$p_{2m}(\mathbf{x}_e,\eta_e) = 4\pi\sqrt{\frac{6\pi}{5}}\int_0^{\eta_e}\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_e}\Theta_2(\mathbf{k},\eta_i)F_2(k(\eta_e-\eta_i))\mathrm{Y}_{2m}(\hat{\mathbf{k}})\mu'(\eta_i)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_i)}d\eta_i$$

e fazendo também a decomposição de $\left(\frac{Q+iU}{4I}\right)_2$ em termos dos D^js, teremos

$$\int\left(\frac{Q+iU}{4I}\right)_2 D^{j*}_{m'm''}(\mathbf{o})\,d^2\mathbf{o} = \sqrt{24}\sqrt{\frac{3}{2}}\int_0^{\eta_o} d\eta_e\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}\Big[\sqrt{\frac{6\pi}{5}}\int dR'\int_0^{\eta_e}\mu'(\eta_i)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_i)}d\eta_i\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\times$$
$$\times\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot[\mathbf{x}_o+\mathbf{o}(\eta_o-\eta_e)]}\Theta_2(\mathbf{k},\eta_i)\sum_m \mathrm{Y}_{2m}(\hat{\mathbf{k}})D^2_{m2}(\mathbf{o})D^{j*}_{m'm''}(\mathbf{o})d^2\mathbf{o}\Big]F_2(k(\eta_e-\eta_i))\,. \quad (3.6.13)$$

O termo entre colchetes é exatamente o que já apareceu antes em (3.5.17). Temos agora que proceder exatamente da mesma maneira para integrar sua dependência angular. O resultado dessa integração será dado por (3.5.39). Chamando de ρ_{lm} os coeficientes dessa expansão [em análogia aos p_{lm} em (3.5.18)], temos:

$$\rho_{lm}(\mathbf{x}_o,\eta_o) = \frac{4\pi\sqrt{24}}{\sqrt{2l+1}}\sqrt{\frac{3}{2}}\int_0^{\eta_o} d\eta_e\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}\Big[\sqrt{6\pi}i^l\int_0^{\eta_e} d\eta_i\mu'(\eta_i)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_i)}\times$$
$$\times\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o}\Theta_2(\mathbf{k},\eta_i)F_2(k(\eta_e-\eta_i))\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{k}})\Big]F_l(k(\eta_o-\eta_e))\,. \quad (3.6.14)$$

Notar que a presença dupla da função de visibilidade $\mu'(\eta)\mathrm{e}^{-\mu(\eta)}$ reforça o fato de termos dois espalhamentos.

3.6.1 Equação de Boltzmann para a polarização

A radiação observada pode ser polarizada ou não. A parte polarizada, em que nos interessamos, pode ter sido polarizada por um, dois, diversos espalhamentos de fótons com elétros durante a recombinação. Devemos lembrar que quanto mais espalhamentos são tomados em conta, menos polarização líquida é gerada.
Outro argumento para indicar que tomar em conta muitos espalhamentos não inclui muitas modificações no resultado final é que, cada vez que se computa um termo $TT^\dagger$, tem-se um fator α $(= \frac{1}{137})$ adicional, logo, contribuições à polarização por múltiplos espalhamentos são suprimidas [23].
Aqui, tomaremos em conta dois espalhamentos no máximo. Um terceiro espalhamento teria a mesma ordem do termo devido ao spin no cálculo da matriz S do espalhamento Thompson numa ordem a mais em teoria de perturbação. Tomar em conta essa correção, entretanto, acarreta na necessidade de manipulação de termos que não são tão tratáveis quanto os já considerados. Veremos que apenas dois espalhamentos fornecem a equação de Boltzmann encontrada na literatura.
O efeito da polarização gerada por fótons que sofreram um espalhamento e pelos que sofreram dois será dado pela soma das contribuições das duas parcelas, ou seja,

$$\begin{aligned}\rho_{lm}(\mathbf{x}_o,\eta_o) = & \frac{4\pi\sqrt{6\pi}}{\sqrt{2l+1}} i^l \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o} \int_0^{\eta_o} d\eta_e \mu'(\eta_e) \mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)} \Big[\Theta_2(\mathbf{k},\eta_e) + \Big(2\sqrt{6}\sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^{\eta_e} \Theta_2(\mathbf{k},\eta_i) \\ & F_2(k(\eta_e-\eta_i))\mu'(\eta_i)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_i)} d\eta_i\Big)\Big] F_l(k(\eta_o-\eta_e))\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{k}})\,. \end{aligned} \tag{3.6.15}$$

onde, dentro dos colchetes, introduzimos $\Theta_2(\mathbf{k},\eta_e)$, que dá conta da polarização devida a um espalhamento e o termo entre parênteses dá conta da contribuição de dois espalhamentos. Continuando com manipulações algébricas, temos

$$\begin{aligned}\rho_{lm}(\mathbf{x}_o,\eta_o) = & -\frac{4\pi\sqrt{6\pi}}{\sqrt{2l+1}}\sqrt{\frac{3}{8}}\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}} i^l \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o} \int_0^{\eta_o} d\eta_e \mu'(\eta_e) \mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)} \Big[\Theta_2(\mathbf{k},\eta_e) + \Big(2\sqrt{6}\sqrt{\frac{3}{2}} \int_0^{\eta_e} \Theta_2(\mathbf{k},\eta_i) \\ & \sqrt{\frac{3}{8}}\sqrt{24}\frac{j_2(k(\eta_e-\eta_i))}{(k(\eta_e-\eta_i))^2}\mu'(\eta_i)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_i)} d\eta_i\Big)\Big] \frac{j_l(k(\eta_o-\eta_e))}{(k(\eta_o-\eta_e))^2}\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) = \\ = & -\frac{4\pi\sqrt{6\pi}}{\sqrt{2l+1}}\sqrt{\frac{3}{8}}\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}} i^l \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o} \int_0^{\eta_o} d\eta_e \mu'(\eta_e) \mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)} \Big[\Theta_2(\mathbf{k},\eta_e) + \sqrt{6}\Big(\frac{3}{2}\sqrt{24} \int_0^{\eta_e} \Theta_2(\mathbf{k},\eta_i) \\ & \frac{j_2(k(\eta_e-\eta_i))}{(k(\eta_e-\eta_i))^2}\mu'(\eta_i)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_i)} d\eta_i\Big)\Big] \frac{j_l(k(\eta_o-\eta_e))}{(k(\eta_o-\eta_e))^2}\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \end{aligned} \tag{3.6.16}$$

Fazendo a expansão em termos de harmônicos esféricos de spin, usando (2.5.3) e chamando os coeficientes de α_{lm}[12], ficamos com

[12] Lembrar, que estamos seguindo a convenção de que quando as expansões são feitas em termos das matrizes D^ls, denotamos os coeficientes por p_{lm} (no caso de um espalhamento) ou ρ_{lm} (no caso de dois), e quando a expansão é feita em termos de harmônicos esféricos de spin, os coeficientes são chamados de $a^{(2)}_{lm}$ ou $\alpha^{(2)}_{lm}$.

$$\alpha^{(2)}_{lm}(\mathbf{x}_o,\,\eta_o) = -4\pi\frac{3}{2}\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}i^l\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o}\int_0^{\eta_o}d\eta_e\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}\Big[\frac{\Theta_2(\mathbf{k},\eta_e)}{2} -$$
$$-\sqrt{6}\Big(-\frac{3}{2}\sqrt{24}\int_0^{\eta_e}\frac{\Theta_2(\mathbf{k},\eta_i)}{2}\frac{j_2(k(\eta_e-\eta_i))}{(k(\eta_e-\eta_i))^2}\mu'(\eta_i)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_i)}d\eta_i\Big)\Big]\frac{j_l(k(\eta_o-\eta_e))}{(k(\eta_o-\eta_e))^2}\mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \quad (3.6.17)$$

Com isso podemos escrever a decomposição de $\left(\frac{(Q+iU)}{4I}\right)$[13] como

$$\frac{Q+iU}{4I}(\mathbf{x}_o,\eta_o,\mathbf{o}) = \int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{lm}4\pi\alpha^{(2)}_l(\mathbf{k},\eta_o)i^l\mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{k}})\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o}{}_2\mathrm{Y}_{lm}(\mathbf{o}) \quad (3.6.18)$$

onde $\alpha^{(2)}_l$ é dado por

$$\alpha^{(2)}_l(\mathbf{k},\eta_o) = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}\int_0^{\eta_o}d\eta_e\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}\frac{1}{2}\Big[\Theta_2(\mathbf{k},\eta_e) -$$
$$-\sqrt{6}\Big(-\frac{3}{2}\sqrt{24}\int_0^{\eta_e}d\eta_i\mu'(\eta_i)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_i)}\Theta_2(\mathbf{k},\eta_i)\frac{j_2(k(\eta_e-\eta_i))}{(k(\eta_e-\eta_i))^2}\Big)\Big]\frac{j_l(k(\eta_o-\eta_e))}{(k(\eta_o-\eta_e))^2}\,, \quad (3.6.19)$$

que pode ser reescrita como:

$$\alpha^{(2)}_l(\mathbf{k},\eta_o) = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}\int_0^{\eta_o}d\eta_e\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}\frac{1}{2}\Big[\Theta_2(\mathbf{k},\eta_e)-\sqrt{6}\alpha^{(2)}_2(\mathbf{k},\eta_e)\Big]\frac{j_l(k(\eta_o-\eta_e))}{(k(\eta_o-\eta_e))^2}\,. \quad (3.6.20)$$

(3.6.20) é, a menos de diferença de convenções (que serão discutidas na Seção 3.7) idêntica a expressões encontradas em [3], [1] ou [2], e corresponde à equação de Boltzmann para a polarização numa versão integral. De fato, como assumimos que a polarização e as perturbações da métrica não são acopladas, não devem aparecer termos relativos à geometria do espaço-tempo na propagação da polarização. O termo de colisão é justamente o que aqui derivamos, dentro das aproximações supostas. Deve-se notar que a denominação de equação de Boltzmann para essa equação é mais devida ao fato de nela comparecerem um termo descrevendo propagação (embora livre) e outro contendo informações sobre colisões, do que ao fato de ela ser realmente algum tipo de equação de Boltzmann, já que essa última, em essência, presta-se a descrever a evolução de uma função distribuição de probabilidades definida sobre um espaço de fases.

3.7 Comparação entre os resultados obtidos e a literatura

É, naturalmente, fundamental mostrar que os desenvolvimentos aqui apresentados conduzem a resultados que condizem com a literatura existente sobre o assunto. Estabeleceremos aqui a conexão entre nossos

[13] $\left(\frac{Q+iU}{4I}\right)_1 + \left(\frac{Q+iU}{4I}\right)_2$ onde os índices 1 e 2 correspondem às contribuições de um ou dois espalhamentos.

resultados e os de [1]. Para tanto, vamos apresentar quais são as convenções utilizadas naquela referência e mostraremos de que maneira seus resultados são equivalentes aos nossos.

3.7.1 As convenções de [1]

Os principais pontos que se devem notar a respeito das convenções utilizadas por [1] são o sentido do versor que dá a direção em que se observa o céu e o fato que lá se particulariza $\hat{\mathbf{k}}$ em uma certa direção. A figura 3.7.1, extraída de [1] indica essas convenções.

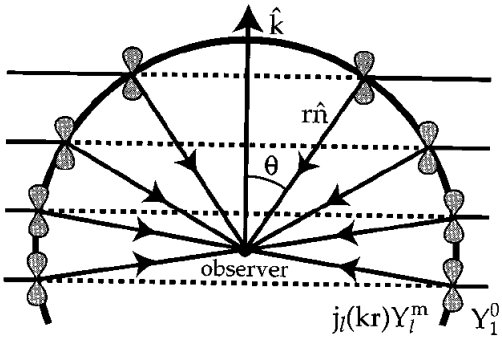

Figura 3.7.1: Figura extraída de [1]. Mostra-se nessa figura as convenções adotadas nessa referência, principalmente o fato de $\hat{\mathbf{k}}$ ter sido escolhido na direção z e que o versor $\hat{\mathbf{n}}$ aponta para o observador.

A primeira observação é que a direção do versor $\mathbf{n}$ na figura 3.7.1 é diferente da adotada em nosso cálculo (onde tomamos esse versor como apontando na direção em que se vai observar). A segunda, é que não fazemos qualquer particularização na direção de $\hat{\mathbf{k}}$.

3.7.2 Conexão entre nossos cálculos e os de [1]

Vejamos qual a implicação das diferenças de convenções acima discutidas em (3.6.18) e (3.6.20), que reproduziremos aqui por conveniência:

$$\frac{Q+iU}{4I}(\mathbf{x}_o,\eta_o,\mathbf{o}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{lm} 4\pi\alpha_l^{(2)}(\mathbf{k},\eta_o) i^l \mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{k}}) \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o} {}_2\mathrm{Y}_{lm}(\mathbf{o}) \tag{3.7.1}$$

onde $\alpha_l^{(2)}$ é dado por

$$\alpha_l^{(2)}(\mathbf{k},\eta_o) = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}} \int_0^{\eta_o} d\eta_e \mu'(\eta_e) \mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)} \frac{1}{2}\Big[\Theta_2(\mathbf{k},\eta_e) - \sqrt{6}\alpha_2^{(2)}(\mathbf{k},\eta_e)\Big] \frac{j_l(k(\eta_o-\eta_e))}{(k(\eta_o-\eta_e))^2} \,. \tag{3.7.2}$$

A primeira coisa que se nota é que (3.7.2) não tem nenhuma informação sobre a direção $\mathbf{o}$ e, portanto, permanece exatamente como está. $\mathbf{k}$, entretanto comparece explicitamente. No entanto, no caso em que se considera que as flutuações de temperatura tiveram origem de flutuações gaussianas de sobredensidades num universo primordial, como em geral assume-se na literatura e em especial em [1], $\Theta(\eta,\mathbf{k})$ pode ser escrito

como [12] $\Theta(\eta,\mathbf{k}) = \Theta(\eta,k)a(\mathbf{k})$, onde a é uma variável aleatória satisfazendo $\langle a(\mathbf{k})a^*(\mathbf{k}')\rangle = \delta(\mathbf{k}-\mathbf{k}')$ (devido à gaussianidade). Como a é uma variável aleatória, não há diferença que se particularize $\hat{\mathbf{k}}$ em uma dada direção e, portanto, para comparar nosso resultado com [1] vamos substituir a dependência em Θ, escrevendo apenas $\Theta = \Theta(\eta,k)$ em (3.7.2) e suprimiremos a:

$$\alpha_l^{(2)}(k,\eta_o) = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}\int_0^{\eta_o} d\eta_e \mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}\frac{1}{2}\Big[\Theta_2(k,\eta_e)-\sqrt{6}\alpha_2^{(2)}(k,\eta_e)\Big]\frac{j_l(k(\eta_o-\eta_e))}{(k(\eta_o-\eta_e))^2} \quad (3.7.3)$$

e, então, (3.7.3) não sofre qualquer alteração sobre particularização de $\hat{\mathbf{k}}$ ou escolha do sentido de $\mathbf{o}$. Devemos nos concentrar, portanto em (3.7.1). A inversão do sentido de $\mathbf{o}$ acarreta apenas em um $(-1)^l$. A particularização de $\hat{\mathbf{k}}$ na direção z tem consequências mais interessantes. Essa escolha faz com que se escreva

$$\mathrm{Y}^*_{LM}(\hat{\mathbf{k}}) = \delta_{M0}\sqrt{\frac{2L+1}{4\pi}} \quad (3.7.4)$$

e, com isso, (3.7.1) fica

$$\begin{aligned}\frac{Q+iU}{4I}(\mathbf{x}_o,\eta_o,\mathbf{o}) &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\sum_l (-i)^l\sqrt{4\pi(2l+1)}\alpha_l^{(2)}(k,\eta_o)\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o}{}_2\mathrm{Y}_{l0}(\mathbf{o}) = \\ &= \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\sum_l (-i)^l\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}[(2l+1)\alpha_l^{(2)}(k,\eta_o)]\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o}{}_2\mathrm{Y}_{l0}(\mathbf{o})\,. \quad (3.7.5)\end{aligned}$$

Baseados em [1], vamos considerar as funções ${}_{\pm 2}G_l^0$ em termos das quais as expansões são feitas:

$${}_{\pm 2}G_l^0 = (-i)^l\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}[{}_2\mathrm{Y}_{l0}(\mathbf{o})]\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o}\,. \quad (3.7.6)$$

Em termos dessas funções [1] expande $\frac{Q+iU}{4I}$ como[14]:

$$\frac{Q+iU}{4I}(\mathbf{x}_o,\eta_o,\mathbf{o}) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}}\sum_l E_l\,{}_2G_l^0 \quad (3.7.7)$$

com

$$\frac{E_l(\eta_o,k)}{2l+1} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}\int_0^{\eta_o} d\eta\mu'(\eta)\mathrm{e}^{-\mu(\eta)}P(\eta)\frac{j_l(k(\eta_o-\eta_e))}{(k(\eta_o-\eta_e))^2} \quad (3.7.8)$$

e

$$P = \frac{1}{10}[\Theta_2-\sqrt{6}E_2]\,. \quad (3.7.9)$$

Comparando (3.7.3) e (3.7.5) com o que se obtem inserindo (3.7.6), (3.7.8) e (3.7.9) em (3.7.7), vemos que há uma diferença de um fator $(2l+1)$ entre nosso cálculo e o que se encontra em [1] e que esse fator vem

[14] Na verdade em [1], os fatores de 2π não são simétricos em relação à transformada de Fourier e sua inversa e, então, (3.7.7) não é exatamente o que aparece em [1].

apenas das convenções adotadas em [1]. Para termos exatamente o que aparece em [1] definimos

$$\alpha_l^{(2)}(k,\eta_o) = \frac{E_l(\eta_o,k)}{2l+1} \tag{3.7.10}$$

e

$$\Theta_2(k,\eta) = \frac{\tilde{\Theta}_2(k,\eta)}{2.2+1}\,. \tag{3.7.11}$$

Isso é o suficiente para que (3.7.3) converta-se identicamente em (3.7.8), que é a expressão para a equação de Boltzmann para a polarização que aparece em [1], [2] e [3], por exemplo. Isso mostra que considerar o efeito de dois espalhamentos sobre a polarização dos fótons é suficiente para que se obtenha as expressões da literatura.

Capítulo 4

Expressão dos coeficientes no espaço Real

Tendo mostrado que nosso resultado para a versão integral da equação de Boltzmann é equivalente ao que se encontra na literatura, uma vez feitas as mesmas hipóteses, vamos nos concentrar em um outro tipo de abordagem para o problema da polarização: o tratamento no espaço real. Esse tipo de desenvolvimento foi iniciado por [4] e pode servir como uma alternativa à tradição de tratar problemas associados à radiação cósmica de fundo em termos de correlações. Neste capítulo final, portanto, consideraremos como é possível fazer a transformada de Fourier inversa em (3.6.17) e expressar a polarização no espaço real. O resultado dessa transformação tem um significado geométrico muito claro, deixando transparentes as relações causais satisfeitas entre os pontos de emissão, espalhamento, reespalhamento e observação.

4.1 Resultado para um espalhamento

Iniciaremos por tratar o que acontece no problema com apenas um espalhamento, já que a generalização para dois espalhamentos pode ser feita facilmente. Para tanto, consideremos (3.5.44) e nela vamos inserir (3.5.40) e (3.5.41). Com isso,

$$\begin{aligned} a^{(2)}_{lm}(\mathbf{x}_o,\eta_o) &= -\frac{3}{4}i^l 4\pi\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}\int_0^{\eta_o}\int k^2\frac{dk}{(2\pi)^{1/2}}\int\frac{d^2\hat{\mathbf{k}}}{(2\pi)}\int_0^{\eta_e}\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_o}\Big\{\big[\Theta_{SW}(\mathbf{k},\eta)j_2(k(\eta_e-\eta))+\\ &\quad -V_b(\mathbf{k},\eta)\frac{\partial j_2(k(\eta_e-\eta))}{\partial\eta}\big]\mu'(\eta)+(\Psi'+\Phi')(\mathbf{k},\eta)j_2(k(\eta_e-\eta))\Big\}\mathrm{e}^{-\mu(\eta)}d\eta\mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{k}})\times\\ &\quad\times\frac{j_l(k(\eta_o-\eta_e))}{(k(\eta_o-\eta_e))^2}\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}d\eta_e\,. \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Se fizermos $\mathbf{x}_o=\vec{0}$, ou seja, o ponto de observação coincide com a origem do sistema de coordenadas, teremos

$$
\begin{aligned}
a^{(2)}_{lm}(\eta_o) &= -\frac{3}{2}i^l\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}\int_0^{\eta_o}\int k^2\frac{dk}{(2\pi)^{1/2}}\int_0^{\eta_e}\Bigg\{\underbrace{\left(\int d^2\hat{\mathbf{k}}\Theta_{SW}(\mathbf{k},\eta)\mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{k}})\right)}_{\mathcal{S}_{lm}(k,\eta)} j_2(k(\eta_e-\eta))\mu'(\eta)\mathrm{e}^{-\mu(\eta)} + \\
&- \underbrace{\left(\int d^2\hat{\mathbf{k}}V_b(\mathbf{k},\eta)\mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{k}})\right)}_{\mathcal{V}_{lm}(k,\eta)}\frac{\partial j_2(k(\eta_e-\eta))}{\partial\eta} + \underbrace{\left(\int d^2\hat{\mathbf{k}}(\Psi'+\Phi')(\mathbf{k},\eta)\mathrm{Y}^*_{lm}(\hat{\mathbf{k}})\right)}_{\mathcal{I}_{lm}(k,\eta)} j_2(k(\eta_e-\eta))\mathrm{e}^{-\mu(\eta)}\Bigg\}d\eta\times \\
&\times\frac{j_l(k(\eta_o-\eta_e))}{(k(\eta_o-\eta_e))^2}\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}d\eta_e = \\
&= -\frac{3}{2}i^l\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}\Bigg\{\int_0^{\eta_o}\int_0^{\eta_e}\left[\int\frac{dk}{(2\pi)^{1/2}}\mathcal{S}_{lm}(k,\eta)j_2(k(\eta_e-\eta))j_l(k(\eta_o-\eta_e))\right]\frac{\mu'(\eta)\mathrm{e}^{-\mu(\eta)}\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}}{(\eta_o-\eta_e)^2}d\eta d\eta_e + \\
&- \int_0^{\eta_o}\int_0^{\eta_e}\left[\int\frac{dk}{(2\pi)^{1/2}}\mathcal{V}_{lm}(k,\eta)\frac{\partial j_2(k(\eta_e-\eta))}{\partial\eta}j_l(k(\eta_o-\eta_e))\right]\frac{\mu'(\eta)\mathrm{e}^{-\mu(\eta)}\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}}{(\eta_o-\eta_e)^2}d\eta d\eta_e + \\
&+ \int_0^{\eta_o}\int_0^{\eta_e}\left[\int\frac{dk}{(2\pi)^{1/2}}\mathcal{I}_{lm}(k,\eta)j_2(k(\eta_e-\eta))j_l(k(\eta_o-\eta_e))\right]\frac{\mathrm{e}^{-\mu(\eta)}\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}}{(\eta_o-\eta_e)^2}d\eta d\eta_e\Bigg\}. \qquad (4.1.2)
\end{aligned}
$$

Toda a dependência em k está contida nas integrais dentro dos colchetes e poderia ser eliminada caso essas integrais pudessem ser feitas. Para dar um passo nessa direção vamos descobrir como exprimir os coeficientes da expansão dos potencias, que aqui dependem de k, em termos dos coeficientes da expansão no espaço real.

4.1.1 Conexão entre coeficientes no espaço real e sua transformada de Fourier

Consideremos o seguinte desenvolvimento:
Seja $\Xi(\mathbf{x},\chi)$ uma quantidade em que estejamos interessados, com $\mathbf{x}=\mathbf{e}x$, e χ um conjunto de outras variáveis de que Ξ dependa. Consideremos a transformada de Fourier dessa quantidade Ξ:

$$
\begin{aligned}
\Xi(\mathbf{k},\chi) &= \int_0^\infty\frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}}\Xi(\mathbf{x},\chi)\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\
&= \sum_{lm}\int_0^\infty\frac{d^3\mathbf{x}}{(2\pi)^{3/2}}\underbrace{\Xi(\mathbf{x},\chi)(\mathbf{e})}_{\sum_{l'm'}\xi_{l'm'}(x,\chi)\mathrm{Y}_{l'm'}(\mathbf{e})}4\pi(-i)^l j_l(kx)\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{k}})\mathrm{Y}^*_{lm}(\mathbf{e}) \\
&= 2\sum_{lm}(-i)^l\int_0^\infty\xi_{lm}(x,\chi)j_l(kx)\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{k}})x^2\frac{dx}{(2\pi)^{1/2}}\,. \qquad (4.1.3)
\end{aligned}
$$

Podemos então calcular a seguinte quantidade:

$$
\begin{aligned}
\xi_{l'm'}(k,\chi) &= \int d^2\hat{\mathbf{k}}\Xi(\mathbf{k},\chi)\mathrm{Y}^*_{l'm'}(\hat{\mathbf{k}}) \\
&= 2\sum_{lm}(-i)^l \int d^2\hat{\mathbf{k}} \int_0^\infty \xi_{lm}(x,\chi)j_l(kx)\mathrm{Y}_{lm}(\hat{\mathbf{k}})x^2\frac{dx}{(2\pi)^{1/2}}\mathrm{Y}^*_{l'm'}(\hat{\mathbf{k}}) \\
&= 2(-i)^{l'} \int_0^\infty \xi_{l'm'}(x,\chi)j_{l'}(kx)x^2\frac{dx}{(2\pi)^{1/2}}\,, \qquad (4.1.4)
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\xi_{lm}(k,\chi) = 2(-i)^l \int_0^\infty \xi_{lm}(x,\chi)j_l(kx)x^2\frac{dx}{(2\pi)^{1/2}}\,. \qquad (4.1.5)
$$

4.1.2 Resultado para um espalhamento - parte II

Podemos agora usar (4.1.5) em (4.1.2) onde escrevíamos $\mathcal{S}_{lm}(k,\eta)$, $\mathcal{V}_{lm}(k,\eta)$ e $\mathcal{I}_{lm}(k,\eta)$. Com isso, obtemos:

$$
\begin{aligned}
a^{(2)}_{lm}(\eta_o) &= -3\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}\int_0^{\eta_o} d\eta_e \int_0^{\eta_e} d\eta \int_0^\infty \frac{d(\eta_o-\bar{\eta})}{(2\pi)^{1/2}}(\eta_o-\bar{\eta})^2\Bigg\{\mathcal{S}_{lm}((\eta_o-\bar{\eta}),\eta)\times \\
&\times\left[\int \frac{dk}{(2\pi)^{1/2}}j_l(k(\eta_o-\bar{\eta}))j_2(k(\eta_e-\eta))j_l(k(\eta_o-\eta_e))\right]\frac{\mu'(\eta)\mathrm{e}^{-\mu(\eta)}\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}}{(\eta_o-\eta_e)^2} - \\
&-\mathcal{V}_{lm}((\eta_o-\bar{\eta}),\eta)\left[\int \frac{dk}{(2\pi)^{1/2}}j_l(k(\eta_o-\bar{\eta}))\frac{\partial j_2(k(\eta_e-\eta))}{\partial\eta}j_l(k(\eta_o-\eta_e))\right]\frac{\mu'(\eta)\mathrm{e}^{-\mu(\eta)}\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}}{(\eta_o-\eta_e)^2} + \\
&+\mathcal{I}_{lm}((\eta_o-\bar{\eta}),\eta)\left[\int \frac{dk}{(2\pi)^{1/2}}j_l(k(\eta_o-\bar{\eta}))j_2(k(\eta_e-\eta))j_l(k(\eta_o-\eta_e))\right]\frac{\mathrm{e}^{-\mu(\eta)}\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}}{(\eta_o-\eta_e)^2}\Bigg\}\,, \qquad (4.1.6)
\end{aligned}
$$

ou, simplificando,

$$
\begin{aligned}
a^{(2)}_{lm}(\eta_o) = -\frac{3}{2\pi}\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}\int_0^{\eta_o} d\eta_e \int_0^{\eta_e} d\eta \int_0^\infty d(\eta_o-\bar{\eta})(\eta_o-\bar{\eta})^2\Big\{\mathrm{e}^{-\mu(\eta)}\Big[\mu'(\eta)\big[\mathcal{S}_{lm}((\eta_o-\bar{\eta}),\eta) - \\
-\mathcal{V}_{lm}((\eta_o-\bar{\eta}),\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}\big] + \mathcal{I}_{lm}((\eta_o-\bar{\eta}),\eta)\Big]I\Big\}\frac{\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}}{(\eta_o-\eta_e)^2}\,. \qquad (4.1.7)
\end{aligned}
$$

onde

$$
I = \int_0^\infty dk j_l(k(\eta_o-\bar{\eta}))j_2(k(\eta_e-\eta))j_l(k(\eta_o-\eta_e))\,. \qquad (4.1.8)
$$

Se pudermos resolver essa integral, então teremos expressado os coeficientes que determinam a polarização em termos de quantidades no espaço real, ou seja, em termos de pontos do espaço-tempo: distâncias e instantes de tempo. Como veremos, é possível resolver essa integral, mas vejamos antes como se passam manipulações como as aqui apresentadas para o caso de dois espalhamentos.

4.2 Resultado para dois espalhamentos

Tendo em mente que os coeficientes da expansão da polarização gerada por dois espalhamentos é o que aparece em (3.6.17), podemos nos convencer que a expressão

$$\begin{aligned}\alpha^{(2)}_{lm}(\eta_o) = &-\frac{3}{2\pi}\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}\int_0^{\eta_o} d\eta_e \frac{\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}}{(\eta_o-\eta_e)^2}\int_0^{\infty} d(\eta_o-\bar{\eta})(\eta_o-\bar{\eta})^2\Bigg[\Bigg\{\int_0^{\eta_e} d\eta \mathrm{e}^{-\mu(\eta)}\Big[\mu'(\eta)\\ &\times\big[\mathcal{S}_{lm}((\eta_o-\bar{\eta}),\eta)-\mathcal{V}_{lm}((\eta_o-\bar{\eta}),\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}\big]+\mathcal{I}_{lm}((\eta_o-\bar{\eta}),\eta)\Big]I\Bigg\}-\sqrt{6}\Bigg(-3\sqrt{24}\int_0^{\eta_e} d\eta_i\mu'(\eta_i)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_i)}\\ &\times\Bigg\{\int_0^{\eta_i} d\eta \mathrm{e}^{-\mu(\eta)}\Big[\mu'(\eta)\big[\mathcal{S}_{lm}((\eta_o-\bar{\eta}),\eta)-\mathcal{V}_{lm}((\eta_o-\bar{\eta}),\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}\big]+\mathcal{I}_{lm}((\eta_o-\bar{\eta}),\eta)\Big]I_2\Bigg\}\Bigg)\Bigg]\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

com

$$I_2 = \int_0^{\infty} dk j_l(k(\eta_o-\bar{\eta}))j_2(k(\eta_i-\eta))j_l(k(\eta_o-\eta_e))\frac{j_2(k\eta_e-\eta_i))}{(k(\eta_e-\eta_i))^2}$$

traduzirá os coeficientes da expansão de P no espaço real caso seja possível resolver I_2.
Para escrever (4.2.1) de uma maneira mais compacta, vamos definir

$$\mathtt{T}_{lm}((\eta_o-\bar{\eta}),\eta) \equiv \mathrm{e}^{-\mu(\eta)}\left[\mu'(\eta)\Big[\mathcal{S}_{lm}((\eta_o-\bar{\eta}),\eta)-\mathcal{V}_{lm}((\eta_o-\bar{\eta}),\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}\Big]+\mathcal{I}_{lm}((\eta_o-\bar{\eta}),\eta)\right] \tag{4.2.2}$$

e, com isso,

$$\begin{aligned}\alpha^{(2)}_{lm}(\eta_o) = &-\frac{3}{2\pi}\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}\int_0^{\eta_o} d\eta_e \frac{\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}}{(\eta_o-\eta_e)^2}\int_0^{\infty} d(\eta_o-\bar{\eta})(\eta_o-\bar{\eta})^2\Bigg[\Bigg\{\int_0^{\eta_e} d\eta \mathtt{T}_{lm}((\eta_o-\bar{\eta}),\eta)I\Bigg\}\\ &+36\int_0^{\eta_e} d\eta_i\mu'(\eta_i)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_i)}\Bigg\{\int_0^{\eta_i} d\eta \mathtt{T}_{lm}((\eta_o-\bar{\eta}),\eta)I_2\Bigg\}\Bigg]\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Passemos agora às integrações.

4.3 Integrais envolvendo funções de Bessel

Integrais envolvendo produtos de funções de Bessel aparecem de maneira natural quando se tenta retornar ao espaço real, como visto em (4.1.7), por exemplo. Integrar esses produtos de funções de Bessel, entretanto, requer algumas bases.
Conforme já apontado, o tratamento o estudo de funções especiais pode ser feito com uma abordagem de teoria de grupos, como em [26] ou [27]. O estudo das representações irredutíveis de grupos de Lie dá origem a conjuntos de funções especiais e pode-se deduzir importantes relações sobre essas funções investigando questões relativas à teoria de grupos. Como já visto, as representações irredutíveis do grupo de rotação dão origem às funções $D^l_{mm'}(\alpha,\beta,\gamma)$, que formam uma base sobre as funções de quadrado integrável sobre a

esfera.
Outros grupos de Lie compactos dão origem a outros conjuntos de funções especiais, como pode ser visto nas referências supracitadas. Grupos não compactos, entretanto, são de grande interesse e, apesar de em geral não terem algumas das boas propriedades compartilhadas por grupos compactos, alguns podem ser tratados. Esse é o caso do grupo euclideano, cujas representações podem ser obtidas como limite das representações do grupo de rotação em quatro dimensões [27] e, por isso, herdam algumas boas propriedades.
O grupo euclideano E_3 consiste do conjunto de transformações em $\mathbb{R}^3$ que deixa distâncias invariantes, ou seja, rotações e translações no espaço. Os elementos de matriz das representações desse grupo estão associadas às funções de Bessel esféricas, como pode ser visto em [27]. Os elementos de matriz das representações do grupo euclideano em duas dimensões dão origem às funções de Bessel.
Uma das propriedades fundamentais que podem ser estabelecidas sobre funções especiais são teoremas de adição, que seguem da regra de multiplicação do grupo. Para o caso do grupo euclideano, devido à sua não compacidade, regras de adição passam a não ser tão simples como no caso do grupo de rotações, por exemplo. De fato, um teorema devido a Weierstrass afirma a impossibilidade de expressar-se $J_\nu(Z+z)$ como uma função algébrica de $J_\nu(Z)$ e $J_\nu(z)$ o que implica que funções de Bessel não possuem teoremas de adição no sentido estrito do termo [45]. Entretanto há classes de fórmulas que podem ser interpretadas como teoremas de adição.
Uma dessas fórmulas é o teorema de adição de Gegenbauer[1] [45]. Um caso especial desse teorema de adição implica que

$$\frac{\mathrm{sen}kr}{kr} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)j_n(kr_1)j_n(kr_2)P_n(\cos\theta) \tag{4.3.1}$$

onde $r^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\theta$ (r, r_1 e r_2 são lados de um triângulo)[2]. Sabemos também que vale [27]:

$$j_n(r) = r^n\left(-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^n\frac{\mathrm{sen}r}{r} \tag{4.3.2}$$

que é conhecida como fórmula de Rayleigh.
Além disso, sabemos que vale para polinômios associados de Legendre

$$P_m^l(\cos\theta) = (1-\cos^2\theta)^{m/2}\frac{d^m}{d(\cos\theta)^m}P_l(\cos\theta)\,. \tag{4.3.3}$$

Segue de (4.3.1), (4.3.2) e (4.3.3), que [27]

$$\frac{j_m(kr)}{(kr)^m} = \sum_{n=m}^{\infty}\frac{(2n+1)j_n(kr_1)j_n(kr_2)}{((kr_1)(kr_2)\mathrm{sen}\theta)^m}P_n^m(\cos\theta)\,. \tag{4.3.4}$$

Essa é a regra de adição fundamental que permite a integração de produtos de funções de Bessel esféricas.

4.3.1 Integral de três funções de Bessel esféricas

Motivados pela integral (4.1.8), procuramos integrar

[1] *Wierner Sitzungsberichte*, *LXX* (2), (1875), pp.6-16.
[2] Segundo [45] essa regra é devida a Clebsch, *Journal für Math.*, *LXI*, (1863), p.227.

$$I = \int dk j_l(kr_1) j_2(kr_3) j_l(kr_2)\,.$$

Lembre-mo-nos, para tanto, que, para m par,

$$\int_{-1}^{1} P_l^m(x) P_{l'}^{-m} dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{l,l'}\,. \tag{4.3.5}$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\int dk j_l(kr_1) j_2(kr_3) j_l(kr_2) &= \sum_{l'=2}^{\infty} \int dk j_{l'}(kr_1) j_2(kr_3) j_{l'}(kr_2) \delta_{l,l'} \\
&= \frac{2l'+1}{2} \sum_{l'=2}^{\infty} \int dk \int_{-1}^{1} d(\cos\chi) j_2(kr_3) j_{l'}(kr_1) j_{l'}(kr_2) P_{l'}^2(\cos\chi) P_{l'}^{-2}(\cos\chi) \\
&= \frac{1}{2} \int dk \int_{-1}^{1} d(\cos\chi) j_2(kr_3) P_{l'}^{-2}(\cos\chi) (kr_1)^2 (kr_2)^2 \mathrm{sen}^2\chi \times \\
&\times \sum_{l'=2}^{\infty} \frac{(2l'+1) j_{l'}(kr_1) j_{l'}(kr_2) P_{l'}^2(\cos\chi)}{[(kr_1)(kr_2)\mathrm{sen}\chi]^2}
\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Vamos agora supor que χ seja o ângulo encerrado por r_1 e r_2, ou seja, $r^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\chi$. Podemos, então, fazer a seguinte mudança de variável:

$$\int_{-1}^{1} d(\cos\chi) \to \int_{|r_1 - r_2|}^{r_1 + r_2} dr \frac{r}{r_1 r_2}\,.$$

Usando também (4.3.4) em (4.3.6), teremos

$$\int dk j_l(kr_1) j_2(kr_3) j_l(kr_2) = \frac{1}{2} \int_{|r_1 - r_2|}^{r_1 + r_2} dr (r r_1 r_2) P_{l'}^{-2}(\cos\chi) \mathrm{sen}^2\chi \int_0^{\infty} dk k^2 \frac{j_2(kr_3) j_2(kr)}{r^2} \tag{4.3.7}$$

Usando

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{n+1/2}(x)$$

na integral em k que aparece no lado direito de (4.3.7), ficamos com

$$\int_0^{\infty} dk k^2 \frac{j_2(kr_3) j_2(kr)}{r^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{r_3}} \int_0^{\infty} dk k \frac{J_{5/2}(kr_3) J_{5/2}(kr)}{r^{5/2}}\,. \tag{4.3.8}$$

Usando agora a relação

$$\frac{d}{dx}(x^{\nu} J_{\nu}(x)) = x^{\nu} J_{\nu-1}(x)$$

mostramos que

$$J_{5/2}(kr_3) = \frac{1}{k(kr_3)^{7/2}} \frac{d}{dr_3} [(kr_3)^{7/2} J_{7/2}(kr_3)]$$

e, com isso, o segundo termo em (4.3.8) fica

$$\frac{\pi}{2r_3^{1/2}}\frac{1}{r^{7/2}}\frac{d}{dr_3}\left[r_3^{7/2}\int_0^\infty dk\frac{J_{7/2}(kr_3)J_{5/2}(kr)}{r^{5/2}}\right]. \tag{4.3.9}$$

A integral $\int_0^\infty dk\frac{J_{7/2}(kr_3)J_{5/2}(kr)}{r^{5/2}}$ pertence a uma classe de integrais chamadas de integrais de Weber-Schafheitlin [45] que, no caso considerado, é descontínua com relação aos parâmetros r e r_3 e tem-se

$$r_3^{7/2}\int_0^\infty dk\frac{J_{7/2}(kr_3)J_{5/2}(kr)}{r^{5/2}} = \begin{cases} 0 & \text{se } r_3 < r \\ \frac{1}{2} & \text{se } r_3 = r \\ 1 & \text{se } r_3 > r \end{cases} \tag{4.3.10}$$

logo,

$$r_3^{7/2}\int_0^\infty dk\frac{J_{7/2}(kr_3)J_{5/2}(kr)}{r^{5/2}} = H(r_3 - r)$$

com H sendo um degrau de Heaviside. Com isso, voltando a (4.3.9), temos

$$\frac{\pi}{2r_3^{1/2}r^{7/2}}\frac{d}{dr_3}\left[r_3^{7/2}\int_0^\infty dk\frac{J_{7/2}(kr_3)J_{5/2}(kr)}{r^{5/2}}\right] = \frac{\pi}{2r_3^{1/2}r^{7/2}}\delta(r - r_3) \tag{4.3.11}$$

e concluímos facilmente que

$$I = \int dk j_l(kr_1)j_2(kr_3)j_l(kr_2) = \frac{\pi}{4}\frac{r_1r_2}{r_3^3}P_l^{-2}(\cos\chi)\text{sen}^2\chi \tag{4.3.12}$$

onde r_1, r_2 e r_3 devem formar um triângulo. Esse resultado é demonstrado também por [45], num caso mais geral e empregando outros meios.

4.4 Interpretação dos resultados obtidos para o caso de um espalhamento

Curiosamente as integrais de três funções de Bessel esféricas só não se anulam identicamente, como vimos, quando seus argumentos satisfazem desigualdades que em nosso caso escrevem-se

$$|(\eta_e - \eta) - (\eta_o - \eta_e)| \leq (\eta_o - \bar{\eta}) \leq (\eta_o - \eta)\,,$$

ou seja, a integração em $(\eta_0 - \bar{\eta})$ fica restrita a um intervalo finito:

$$\int_0^\infty d(\eta_0 - \bar{\eta}) \to \int_{|(\eta_e-\eta)-(\eta_o-\eta_e)|}^{\eta_o-\eta} d(\eta_o - \bar{\eta})\,.$$

Essa restrição no intervalo de integração resolve a questão que havia sobre a convergência de (4.1.7), já que tínhamos que calcular uma integral em um intervalo não-finito sobre uma variável à qual não se tinha nenhum peso descrescente associado. Além da solução desse ponto, a integração de três funções de Bessel (4.3.12) permite que I que aparece em (4.1.7) seja escrita em termos dos intervalos que caracterizam a geometria do problema:

$$I = \frac{\pi}{4}\frac{(\eta_o - \eta_e)(\eta_o - \bar{\eta})}{(\eta_e - \eta)^3}\sin^2\chi P_l^{-2}(\cos\chi) \tag{4.4.1}$$

com $2(\eta_o - \eta_e)(\eta_o - \bar{\eta})\cos\chi = (\eta_o - \eta_e)^2 + (\eta_o - \bar{\eta})^2 - (\eta_e - \eta)^2$.
Pode-se, então, ter uma representação pictórica da geometria envolvida na caracterização da solução do problema para um espalhamento:

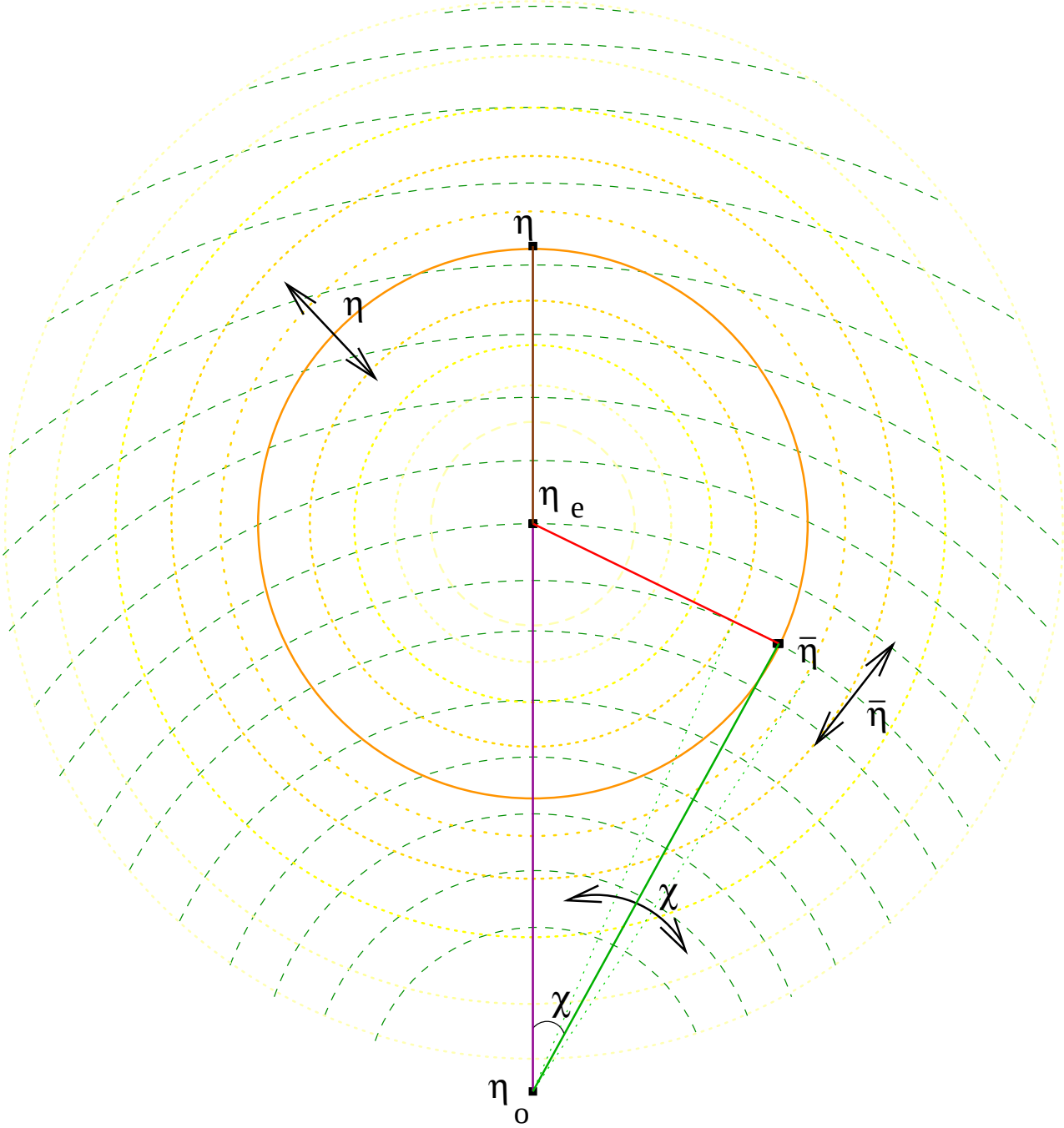

Figura 4.4.1: Na figura temos uma representação da geometria do problema. O cone de luz passado do centro espalhador é representado pelo círculo de raio $(\eta_e - \eta)$. O intervalo de variação de $(\eta_o - \bar{\eta})$ é entre $(\eta_o - \eta_e) - (\eta_e - \eta)$ e $(\eta_o - \eta)$. O ângulo χ que aparece em I está indicado na figura. As direções de variação de $\bar{\eta}$, χ e η são indicadas por setas duplas.

Na figura (4.4.1), circunferências centradas em η_o indicam o lugar geométrico de onde emergiram fótons que

foram observados em η_0 após um tempo $|\eta_o - \bar{\eta}|$. Naturalmente, considerar o conjunto de todas as possíveis circinferências é equivalente a considerar todo o cone de luz passado de $(\mathbf{x}_o, \eta_o)$. Variações de $\bar{\eta}$ indicam passagem entre as diferentes cincurferências que são, de fato, interseções do cone de luz passado de $(\mathbf{x}_o, \eta_o)$ com superfícies de tempo constante.
Os círculos concêntricos centrados em η_e representam, para cada η, o lugar geométrico de onde emergiram os fótons que atingem o centro espalhador num tempo $|\eta_e - \eta|$ após terem desacoplado. A cada η distinto corresponde uma circunferência relativa a fótons que se desacoplaram mais cedo ou mais tarde da matéria. A função de visibilidade é que governa a probabilidade desse desacoplamento em função do tempo.
Interessantemente, o intervalo que interessa na integração em $\bar{\eta}$ corresponde exatamente ao cone de luz passado do centro espalhador desde quando os fótons se desacoplaram[3]. Isso está de acordo com o que se espera, uma vez que como não assumimos um acoplamento direto entre a métrica e a polarização - a conexão entre perturbações do espaço-tempo e a polarização só se faz via temperatura dos fótons incidentes num centro espalhador - a influência dos potenciais de Bardeen tem que estar contida no cone de luz passado do centro espalhador.

4.5 Integral de quatro funções de Bessel esféricas

Suponha que estejamos interessados na integral

$$I_2 = \int_0^\infty dk j_l(kr_1) j_2(kr_3) j_l(kr_2) \frac{j_2(kr_4)}{(kr_4)^2} \,.$$

Com o intuito de lançar mão dos mesmos artifícios que empregamos na integração de três funções de Bessel, vamos chamar de χ o ângulo formado por r_1 e r_2, ou seja, $r^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos\chi$, e escreveremos, usando (4.3.4):

$$I_2 = \int_{|r_1 - r_2|}^{r_1 + r_2} dr \frac{r}{r_1 r_2} P_l^{-2}(\cos\chi) \mathrm{sen}^2\chi \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2 r_4^2} \int_0^\infty dk j_2(kr_4) j_2(kr_3) j_2(kr) \,. \tag{4.5.1}$$

Usando (4.3.12) teremos

$$I_2 = \frac{\pi}{4} \int_{|r_1 - r_2|}^{r_1 + r_2} dr \frac{r_1 r_2 r_3}{r_4^5} P_l^{-2}(\cos\chi) \mathrm{sen}^2\chi P_l^{-2}(\cos\beta) \mathrm{sen}^2\beta \tag{4.5.2}$$

já que (4.3.12) implica que r_3, r_4 e r devem formar um triângulo $r_4^2 = r_3^2 + r^2 - 2r_3 r \cos\beta$. Naturalmente quando se escreve sen ou cos em (4.5.4) entende-se que esses devem ser escritos em termos de r, usando a geometria dos triângulos que surgem durante a integração. A condição que r_3, r_4 e r devem formar um triângulo implica, entretanto em uma outra desigualdade triangular que deve ser satisfeita:

$$|r_3 - r_4| \leq r \leq r_3 + r_4 \,.$$

A integral (4.5.2) deve então ser calculada com r variando no intervalo:

$$G = \Big[|r_1 - r_2|, r_1 + r_2 \Big] \cap \Big[|r_3 - r_4|, r_3 + r_4 \Big] \,, \tag{4.5.3}$$

[3] Naturalmente depois faz-se a integração sobre os centros espalhadores, como prescrito em (4.1.7).

ou seja, no intervalo mais restritivo possível. Explicitamente,

$$I_2 = \frac{\pi}{4}\int_G dr \frac{r_1 r_2 r_3}{r_4^5} P_l^{-2}(\cos\chi)\mathrm{sen}^2\chi P_l^{-2}(\cos\beta)\mathrm{sen}^2\beta\,. \tag{4.5.4}$$

A geometria dessa integração fica mais clara com o auxílio da figura:

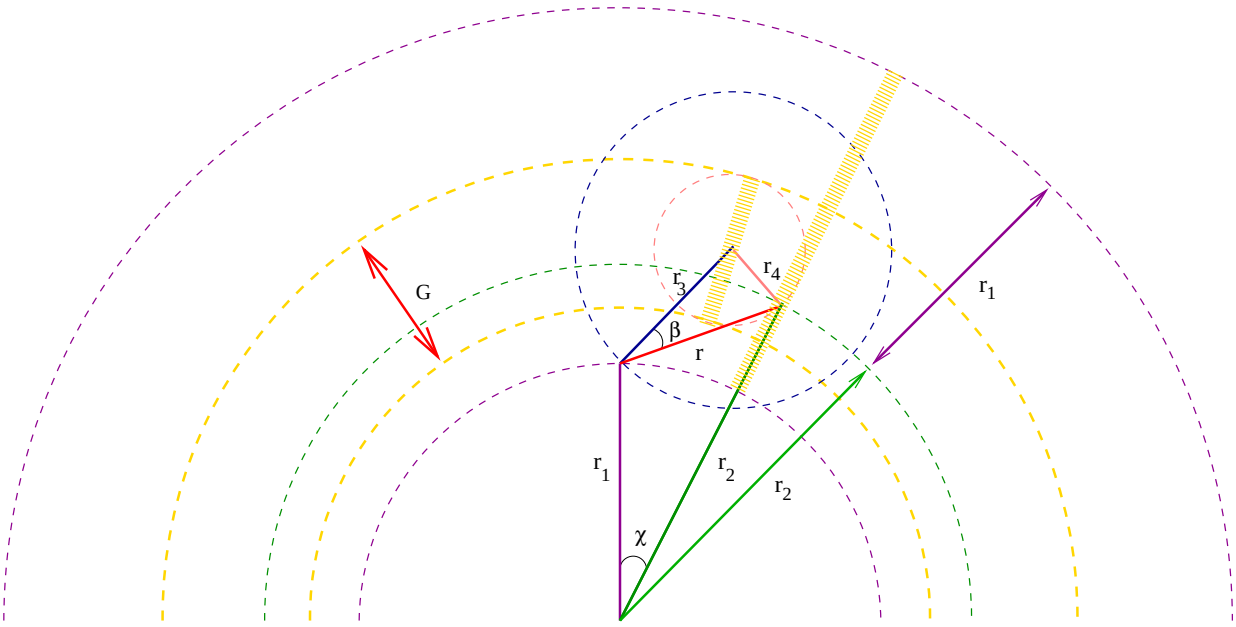

Figura 4.5.1: Quadrilátero que deve ser formado por r_1, r_2, r_3 e r_4 para que a integral I_2 não se anule. Vê-se que a condição é que se formem dois triângulos que compartilham um de seus lados. Os pontilhados fortes indicam os intervalos em que r pode estar definido. A integral I_2 deve ser calculada na interseção desses conjuntos, indicada, nesse caso especial, pela seta dupla com indicação G. r_1 foi transportado para que se pudesse ter uma visualização clara do intervalo de integração.

4.6 Interpretação para o caso de dois espalhamentos

A interpretação para o caso de dois espalhamentos é mais complicado pois as relações impostas pela integral (4.5.4) são bastante menos restritivas que aquelas introduzidas por (4.3.12) e temos sempre que nos preocupar com o intervalo de integração que deve ser utilizado em I_2. Explicitamente, substituindo as distâncias características do problema em (4.5.4), I_2 escreve-se como:

$$I_2 = \frac{\pi}{4}\frac{(\eta_o-\eta_e)(\eta_o-\bar{\eta})(\eta_e-\eta_i)}{(\eta_i-\eta)^5}\int_G d(\eta_e-\bar{\eta})P_l^{-2}(\cos\chi)\mathrm{sen}^2\chi P_l^{-2}(\cos\beta)\mathrm{sen}^2\beta \tag{4.6.1}$$

com

$$2(\eta_e-\eta_i)(\eta_e-\bar{\eta})\cos\beta = (\eta_e-\eta_i)^2 + (\eta_e-\bar{\eta})^2 - (\eta_i-\eta)^2\,,$$

$$2(\eta_o-\eta_e)(\eta_o-\bar{\eta})\cos\chi = (\eta_o-\eta_e)^2 + (\eta_o-\bar{\eta})^2 - (\eta_e-\bar{\eta})^2$$

e G o intervalo

$$G = \Big[|(\eta_o - \eta_e) - (\eta_o - \bar{\eta})|, (\eta_o - \eta_e) + (\eta_o - \bar{\eta})\Big] \cap \Big[|(\eta_e - \eta_i) - (\eta_i - \eta)|, (\eta_e - \eta_i) + (\eta_i - \eta)\Big]. \quad (4.6.2)$$

Aqui, sempre que escrevemos a diferença de tempos estamos pensando no valor absoluto dessa diferença, mas para não sobrecarregar a notação com módulos, não os escreveremos. Poderíamos argumentar que o intervalo $\Big[|(\eta_e - \eta_i) - (\eta_i - \eta)|, (\eta_e - \eta_i) + (\eta_i - \eta)\Big]$ sempre é mais restritivo, no contexto do problema que estamos tratando, que $\Big[|(\eta_o - \eta_e) - (\eta_o - \bar{\eta})|, (\eta_o - \eta_e) + (\eta_o - \bar{\eta})\Big]$, pois o primeiro intervalo é relativo a intervalos de tempo transcorridos durante a recombinação e, portanto, têm que ser muito menores do que os intervalos relativos às distâncias entre nós e a recombinação.

Devido ao requerimento de que os pontos envolvidos na integração formem um quadrilátero para que a integral não se anule e como parte do quadrilátero que esses lados devem formar é o triângulo que tínhamos no caso anterior, o caso de dois espalhamentos tem que ser uma generalização do caso anterior. Além disso é uma restrição natural a ser imposta que o ponto η_i, correspondente ao instante em que o primeiro espalhamento se dá, esteja dentro do círculo de raio $(\eta_e - \eta)$ centrado em η_e. Isso faz sentido físico já que todos os pontos que podem influenciar $(\mathbf{x}_i, \eta_i)$ têm também que ser capazes de influenciar $(\mathbf{x}_e, \eta_e)$, uma vez que supomos que esses dois pontos são conectados por fótons quando iniciamos a hipótese de dois espalhamentos entre fótons e elétrons em sequência.

A região de integração corresponde a um intervalo entre os raios $(\eta_e - \eta)$ e $(\eta_e - \eta_i)$. Isso implica que I_2 deve ser calculada entre o tempo necessário para que o fóton se propague entre o primeiro e o segundo espalhamento e o tempo necessário para que um fóton propague-se da superfície de último espalhamento (η) até (η_e). As outras integrais vão tomar conta de que se possa ter os instantes de desacoplamento (η) e os espalhamentos (η_e e η_i) em qualquer instante, pesados por funções de visibilidade.

Devido às imposições sobre o intervalo em que I_2 deve ser calculada para que não se anule identicamente, é necessário que a integração em $(\eta_o - \bar{\eta})$, que antes era feita em todo o espaço, seja agora feita apenas no intervalo $\Big[|(\eta_o - \eta_e) - (\eta_e - \eta)|, (\eta_o - \eta)\Big]$ pois, caso o contrário, seria violada uma desigualdade triangular entre e I_2 anularia-se.

Pictoricamente essa geometria pode ser descrita de maneira análoga à figura 4.4.1:

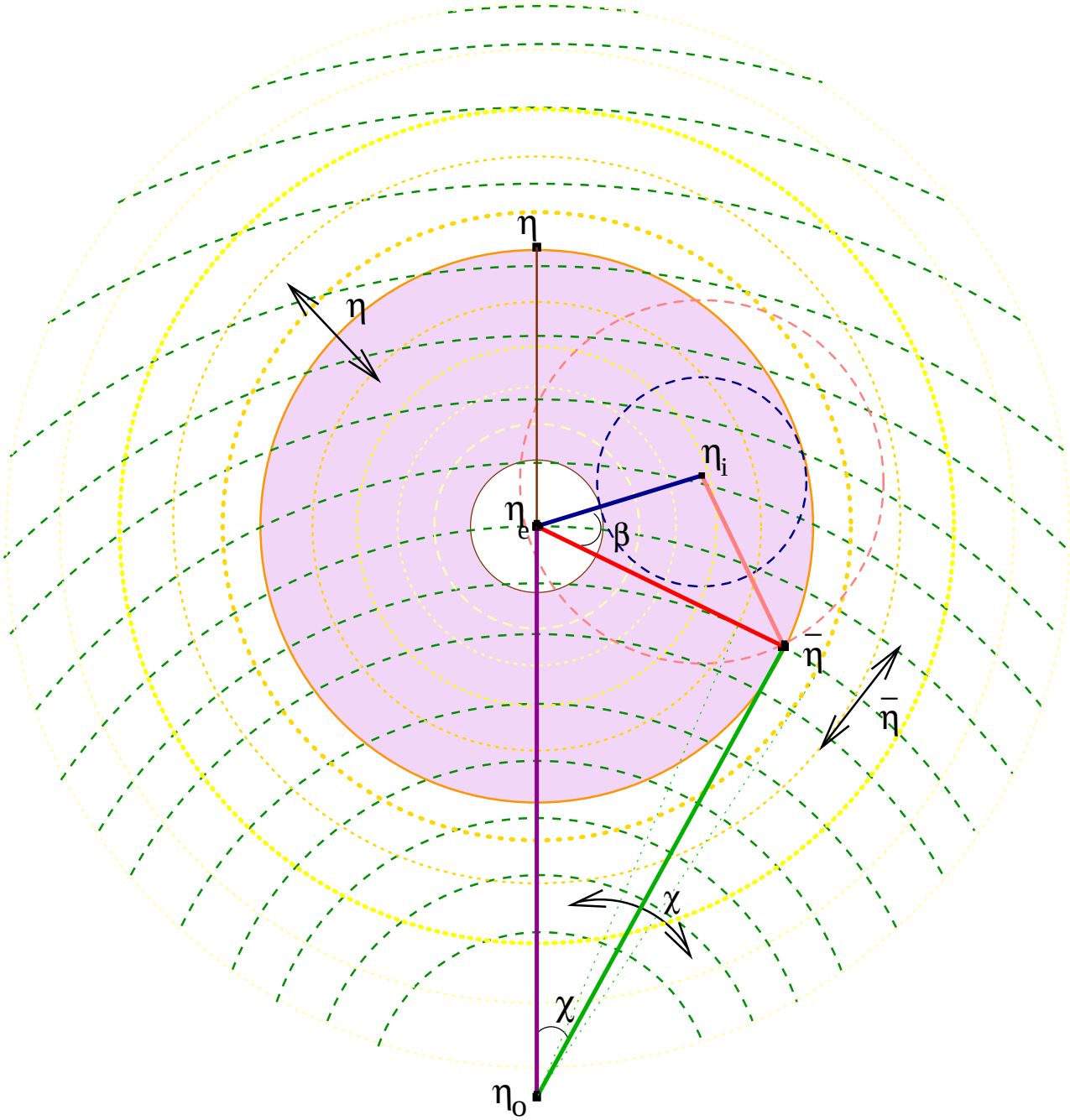

Figura 4.6.1: Na figura temos uma representação da geometria do problema. O ângulo β está associado a uma variável de integração em I_2. A região preenchida corresponde ao intervalo de integração em I_2. O ângulo χ que aparece em I e I_2 está indicado na figura. As direções de variação de $\bar{\eta}$, χ e η são indicadas por setas duplas.

O resultado, portanto, de se tratar a polarização em espaço real é, retomando (4.6.3):

$$\alpha^{(2)}_{lm}(\eta_o) = -\frac{3}{2\pi}\sqrt{\frac{(l+2)!}{(l-2)!}}\int_0^{\eta_o} d\eta_e \frac{\mu'(\eta_e)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_e)}}{(\eta_o-\eta_e)^2}\int_{|(\eta_o-\eta_e)-(\eta_e-\eta)|}^{(\eta_o-\eta_e)} d(\eta_o-\bar{\eta})(\eta_o-\bar{\eta})^2\left[\left\{\int_0^{\eta_e} d\eta \mathtt{T}_{lm}((\eta_o-\bar{\eta}),\eta)I\right\}+\right.$$
$$\left.+36\int_0^{\eta_e} d\eta_i \mu'(\eta_i)\mathrm{e}^{-\mu(\eta_i)}\left\{\int_0^{\eta_i} d\eta \mathtt{T}_{lm}((\eta_o-\bar{\eta}),\eta)I_2\right\}\right] \tag{4.6.3}$$

com

$$\mathtt{T}_{lm}((\eta_o-\bar{\eta}),\eta) \equiv \mathrm{e}^{-\mu(\eta)}\left[\mu'(\eta)\left[\mathcal{S}_{lm}((\eta_o-\bar{\eta}),\eta)-\mathcal{V}_{lm}((\eta_o-\bar{\eta}),\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}\right]+\mathcal{I}_{lm}((\eta_o-\bar{\eta}),\eta)\right], \tag{4.6.4}$$

I dada por (4.4.1) e I_2 por (4.6.1).

Vemos que essa abordagem em espaço real é mais complexa do que a abordagem usual que dedica-se a calcular correlações. Essa complexidade aparece tanto computacionalmente, já que há mais integrais a serem resolvidas, quanto na necessidade de conhecer-se os potenciais de Bardeen em todo o espaço para que se possa calcular os coeficientes da decomposição da polarização como descrito por (4.6.3). Entretanto todas as fases, assim como toda informação sobre as flutuações como função da posição, são guardadas nas fórmulas que obtivemos.

Conclusão

Ao longo das seções que compuseram esse trabalho fomos capazes de desenvolver uma nova abordagem para a derivação do termo de fonte para a polarização da radiação cósmica de fundo utilizando teoria cinética e mecânica quântica, integrar dependências angulares de modo a obter uma expansão da polarização em termos de coeficientes multiplicados por harmônicos esféricos de spin e, por fim, escrever esses coeficientes inteiramente no espaço real. Pudemos mostrar ainda que a abordagem para a derivação da equação de Boltzmann que apresentamos aqui é equivalente à encontrada na literatura, se as mesmas hipóteses simplificadoras são empregadas.

O resultado obtido em espaço real é bastante geral, dado que hipóteses sobre a natureza do campo de flutuações não precisam ser assumidas. Essa generalidade, entretanto, acarreta que para obter os coeficientes da polarização em espaço real os potenciais gravitacionais têm que ser conhecidos em todo o espaço-tempo, o que implicaria na necessidade de solução exata das equações de Einstein. Como as condições iniciais que se impõem na solução dessas equações são aquelas vindas da inflação, o máximo que se afirma sobre essas soluções é que correspondem a um universo estatisticamente equivalente ao nosso, o que não é suficiente para a determinação da polarização em nossa abordagem.

A necessidade de mapear as flutuações dos potenciais para que se possa determinar a polarização pode parecer um inconveniente, entretanto o método pode ter aplicações. Sabemos, por exemplo, que dentro de certas aproximações é possível inverter o problema e determinar os coeficientes dos potenciais em termos daqueles da polarização [4]. Apesar da possibilidade de uma tal inversão no caso geral ser desconhecida (e provavelmente impossível) esse formalismo pode ter aplicações no estudo de lentes gravitacionais, por exemplo, já que nesse domínio as flutuações de densidade localizadas têm um papel central.

Além disso, esse formalismo pode ser usado para estudar possibilidades de desvios do princípio cosmológico que supõem que estamos observando o universo de uma região caracterizada por uma configuração especial de potenciais que nos conduziriam a interpretar o resultado de observações como uma aceleração global do universo. Um típico exemplo são as bolhas de Hubble [49] e podemos estudar, no espaço real, qual seria o efeito sobre a polarização se uma tal configuração especial de potenciais fosse dada e eventualmente impor limites sobre essa não copernicianidade.

Apêndice

.1 Ilustração da necessidade da hipótese de caos molecular

Para ilustrar a necessidade da hipótese de caos molecular empregada na Seção 3.6, vamos tentar prosseguir um pouco os cálculos lá iniciados tomando em conta as correlações entre os momentos e ver que chegamos a expressões razoavelmente complicadas.

Os termos entre parênteses do lado direito de (3.6.4) são exatamente da forma do que já havíamos calculado anteriormente. O termo do comutador, entretanto, é novo. Chamando de t_{ij} as entradas da matriz $T_2[T_1T_1^\dagger, T_2^\dagger]$, obtemos, após a multiplicação das matrizes:

$$\begin{aligned} t_{11} = {} & (\mathbf{e}^*_{k_o+}\cdot\mathbf{e}_{k_e+})\Big[(\mathbf{e}_{k_o+}\cdot\mathbf{e}^*_{k_e-})(\mathbf{e}^*_{k_e+}\cdot\hat{\mathbf{k}}_i)(\mathbf{e}_{k_e-}\cdot\hat{\mathbf{k}}_i)-(\mathbf{e}^*_{k_o+}\cdot\mathbf{e}_{k_e-})(\mathbf{e}_{k_e+}\cdot\hat{\mathbf{k}}_i)(\mathbf{e}^*_{k_e-}\cdot\hat{\mathbf{k}}_i)\Big]+ \\ & (\mathbf{e}^*_{k_o+}\cdot\mathbf{e}_{k_e-})(\mathbf{e}_{k_e+}\cdot\hat{\mathbf{k}}_i)(\mathbf{e}^*_{k_e-}\cdot\hat{\mathbf{k}}_i)\Big[(\mathbf{e}_{k_o+}\cdot\mathbf{e}^*_{k_e+})-(\mathbf{e}^*_{k_o+}\cdot\mathbf{e}_{k_e+})\Big], \end{aligned} \tag{.1.1}$$

$$\begin{aligned} t_{22} = {} & (\mathbf{e}^*_{k_o-}\cdot\mathbf{e}_{k_e-})\Big[(\mathbf{e}_{k_o-}\cdot\mathbf{e}^*_{k_e+})(\mathbf{e}_{k_e+}\cdot\hat{\mathbf{k}}_i)(\mathbf{e}^*_{k_e-}\cdot\hat{\mathbf{k}}_i)-(\mathbf{e}^*_{k_o-}\cdot\mathbf{e}_{k_e+})(\mathbf{e}^*_{k_e+}\cdot\hat{\mathbf{k}}_i)(\mathbf{e}_{k_e-}\cdot\hat{\mathbf{k}}_i)\Big]+ \\ & (\mathbf{e}^*_{k_o-}\cdot\mathbf{e}_{k_e+})(\mathbf{e}_{k_e-}\cdot\hat{\mathbf{k}}_i)(\mathbf{e}^*_{k_e+}\cdot\hat{\mathbf{k}}_i)\Big[(\mathbf{e}_{k_o-}\cdot\mathbf{e}^*_{k_e-})-(\mathbf{e}^*_{k_o-}\cdot\mathbf{e}_{k_e-})\Big], \end{aligned} \tag{.1.2}$$

$$\begin{aligned} t_{12} = {} & (\mathbf{e}^*_{k_o+}\cdot\mathbf{e}_{k_e+})(\mathbf{e}^*_{k_e+}\cdot\hat{\mathbf{k}}_i)(\mathbf{e}_{k_e-}\cdot\hat{\mathbf{k}}_i)\Big[(\mathbf{e}_{k_o-}\cdot\mathbf{e}^*_{k_e-})-(\mathbf{e}^*_{k_o-}\cdot\mathbf{e}_{k_e-})\Big]+ \\ & (\mathbf{e}^*_{k_o+}\cdot\mathbf{e}_{k_e-})\Big[(\mathbf{e}_{k_o-}\cdot\mathbf{e}^*_{k_e+})(\mathbf{e}_{k_e+}\cdot\hat{\mathbf{k}}_i)(\mathbf{e}^*_{k_e-}\cdot\hat{\mathbf{k}}_i)-(\mathbf{e}^*_{k_o-}\cdot\mathbf{e}_{k_e+})(\mathbf{e}_{k_e-}\cdot\hat{\mathbf{k}}_i)(\mathbf{e}^*_{k_e+}\cdot\hat{\mathbf{k}}_i)\Big] \end{aligned} \tag{.1.3}$$

e $t_{21} = t^*_{12}$.

Pode-se observar que todas as entradas são escritas como somas de termos do tipo

$$(\mathbf{e}^*_{k_o\lambda}\cdot\mathbf{e}_{k_e\lambda'})(\mathbf{e}^*_{k_o\xi}\cdot\mathbf{e}_{k_e\xi'})(\mathbf{e}^*_{k_e\zeta}\cdot\hat{\mathbf{k}}_i)(\mathbf{e}_{k_e\zeta'}\cdot\hat{\mathbf{k}}_i)$$

com índices λ, λ', ξ, ξ', ζ, ζ' podendo ser ± 1.

Primeiramente vamos voltar a escrever explicitamente os vetores das bases cartesianas. Com isso,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{e}^*_{k_o\lambda}\cdot\mathbf{e}_{k_e\lambda'} &= \left[\frac{-\lambda}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{k_o1}-i\lambda\varepsilon_{k_o2})\right]\left[\frac{-\lambda'}{\sqrt{2}}(\varepsilon_{k_e1}+i\lambda'\varepsilon_{k_e2})\right] \\
&= \frac{\lambda\lambda'}{2}\left[\varepsilon_{k_o1}\cdot\varepsilon_{k_e1}+i\lambda'\varepsilon_{k_o1}\cdot\varepsilon_{k_e2}-i\lambda\varepsilon_{k_o2}\cdot\varepsilon_{k_e1}+\lambda\lambda'\varepsilon_{k_o2}\cdot\varepsilon_{k_e2}\right]. \qquad (.1.4)
\end{aligned}
$$

e

$$
(\mathbf{e}^*_{k_e\zeta}\cdot\hat{\mathbf{k}}_i)(\mathbf{e}_{k_e\zeta'}\cdot\hat{\mathbf{k}}_i) = \frac{\zeta\zeta'}{2}\left[(\varepsilon_{k_o1}-i\zeta\varepsilon_{k_o2})\cdot\hat{\mathbf{k}}_i\right]\left[(\varepsilon_{k_o1}+i\zeta'\varepsilon_{k_o2})\cdot\hat{\mathbf{k}}_i\right] \qquad (.1.5)
$$

Vamos avaliar agora o comportamento desses termos. Para tanto, vamos decompor todos os vetores envolvidos na base formada por $\hat{\mathbf{k}}_o$, ε_{k_o1} e ε_{k_o2}. Denotaremos por θ e ϕ os ângulos da decomposição dos vetores associados ao sistema do fóton espalhado e α, β os ângulos relativos ao sistema do fóton incidente, ou seja, escrevendo as decomposições que nos serão necessárias,

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathbf{k}}_i &= \mathrm{sen}\beta\cos\alpha\varepsilon_{k_o1}+\mathrm{sen}\beta\mathrm{sen}\alpha\varepsilon_{k_o2}+\cos\beta\hat{\mathbf{k}}_o && (.1.6)\\
\varepsilon_{k_e1} &= \cos\theta\cos\phi\varepsilon_{k_o1}+\cos\theta\mathrm{sen}\phi\varepsilon_{k_o2}-\mathrm{sen}\theta\hat{\mathbf{k}}_o && (.1.7)\\
\varepsilon_{k_e2} &= -\mathrm{sen}\phi\varepsilon_{k_o1}+\cos\phi\varepsilon_{k_o2} && (.1.8)
\end{aligned}
$$

Com isso, usando (.1.4), podemos reescrever $(\mathbf{e}^*_{k_o\lambda}\cdot\mathbf{e}_{k_e\lambda'})(\mathbf{e}^*_{k_o\xi}\cdot\mathbf{e}_{k_e\xi'})$ como:

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{e}^*_{k_o\lambda}\cdot\mathbf{e}_{k_e\lambda'})(\mathbf{e}^*_{k_o\xi}\cdot\mathbf{e}_{k_e\xi'}) = \frac{\lambda\lambda'\xi\xi'}{4}\Big[&\cos^2\theta\cos^2\phi-i\xi'\cos\theta\mathrm{sen}\phi\cos\phi-i\xi\cos^2\theta\mathrm{sen}\phi\cos\phi+\xi\xi'\cos\theta\cos^2\phi-\\
&-i\lambda'\cos\theta\mathrm{sen}\phi\cos\phi-\lambda'\xi'\mathrm{sen}^2\phi-\lambda'\xi\cos\theta\mathrm{sen}^2\phi-i\lambda'\xi\xi'\mathrm{sen}\phi\cos\phi-\\
&-i\lambda\cos^2\theta\mathrm{sen}\phi\cos\phi-\lambda\xi'\cos\theta\mathrm{sen}^2\phi-\lambda\xi\cos^2\theta\mathrm{sen}^2\phi-i\lambda\xi\xi'\cos\theta\mathrm{sen}\phi\cos\phi+\\
&+\lambda\lambda'\cos\theta\cos^2\phi-i\lambda\lambda'\xi'\mathrm{sen}\phi\cos\phi-i\lambda\lambda'\xi\cos\theta\mathrm{sen}\phi\cos\phi+\lambda\lambda'\xi\xi'\cos^2\phi\Big] \qquad (.1.9)
\end{aligned}
$$

De maneira semelhante, (.1.5) escreve-se como

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{e}^*_{k_e\zeta}\cdot\hat{\mathbf{k}}_i)(\mathbf{e}_{k_e\zeta'}\cdot\hat{\mathbf{k}}_i) = \frac{\zeta\zeta'}{2}\Big\{&\cos^2\theta\cos^2\phi\mathrm{sen}^2\beta\cos^2\alpha+2\cos^2\theta\mathrm{sen}\phi\cos\phi\mathrm{sen}^2\beta\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha+\cos^2\theta\mathrm{sen}^2\phi\mathrm{sen}^2\beta\mathrm{sen}^2\alpha-\\
&-2\mathrm{sen}\theta\cos\theta\cos\phi\mathrm{sen}\beta\cos\beta\cos\alpha-2\mathrm{sen}\theta\cos\theta\mathrm{sen}\phi\mathrm{sen}\beta\cos\beta\mathrm{sen}\alpha+\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\beta+\\
&+i(\zeta'-\zeta)\Big[-\cos\theta\mathrm{sen}\phi\cos\phi\mathrm{sen}^2\beta\cos^2\alpha+\cos\theta\cos^2\phi\mathrm{sen}^2\beta\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha-\\
&-\cos\theta\mathrm{sen}^2\phi\mathrm{sen}^2\beta\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha+\cos\theta\mathrm{sen}\phi\cos\phi\mathrm{sen}^2\beta\mathrm{sen}^2\alpha+\\
&+\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\phi\mathrm{sen}\beta\cos\beta\cos\alpha-\mathrm{sen}\theta\cos\phi\mathrm{sen}\beta\cos\beta\mathrm{sen}\alpha\Big]+\\
&+\zeta\zeta'\Big[\mathrm{sen}^2\phi\mathrm{sen}^2\beta\cos^2\alpha-2\mathrm{sen}\phi\cos\phi\mathrm{sen}^2\beta\mathrm{sen}\alpha\cos\alpha+\cos^2\phi\mathrm{sen}^2\beta\mathrm{sen}^2\alpha\Big]\Big\} \qquad (.1.10)
\end{aligned}
$$

Devemos então introduzir esses fatores em (.1.1), (.1.2) e (.1.3) para determinarmos a matriz $T_2[T_1T_1^\dagger,T_2^\dagger]$

e, somando com $(T_1T_1^\dagger)(T_2T_2^\dagger)$ e finalmente dividindo pelo traço dessa soma de matrizes é que teríamos a matriz densidade final dos fótons depois de dois espalhamentos. Pode-se entender que a expressão final a ser obtida após esse processo seria demasiado complicada e carregaria muita informação não essencial para a descrição do problema, o que é simplificado pela hipótese de caos molecular.

Referências Bibliográficas

[1] W. Hu and M. White. *Phys. Rev. D*, 56, 1997.

[2] W. Hu, U. Seljak, M. White, and M. Zaldarriaga. *Phys. Rev. D*, 57, 1998.

[3] N. Straumann. *arXiv:hep-ph/0505249 v3.*

[4] L. R. Abramo and H. S. Xavier. *Phys. Rev. D*, 75, 2007.

[5] S. Chandrasekhar. *Radiative Transfer.* Dover, 1960.

[6] A. Kosowski. *Annals. Phys.*, 246, 1996.

[7] R. K. Sachs and A. M. Wolfe. *ApJ*, 147, 1967.

[8] R. Wald. *General Relativity.* University of Chicago Press, 1984.

[9] T. Pyne and M. Birkinshaw. *arXiv:astro-ph/9303020v1.*

[10] M. do Carmo. *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides, 2005.

[11] Y. Choquet-Bruhat, C. deWitt Morette, and M. Dillard-Bleick. *Analysis, Manifolds and Physics part 1.* North-Holland, 1991.

[12] J. P. Uzan and P. Peter. *Cosmologie Primordiale.* Belin, 2005.

[13] J. M. Stewart and M. Walker. *Proc. R. Soc. Lon. A.*, 341, 1974.

[14] W. Appel. *Mathématiques pour la physique et les physiciens.* H&K, 2006.

[15] N. Straumann. *arXiv:gr-qc/0805.4500v1.*

[16] V. Mukhanov. *Physical principles of cosmology.* Cambridge, 2005.

[17] J. N. Golberg et al. *J. Math. Phys.*, 11, 1967.

[18] L. Landau and E. Lifchitz. *Mécanique.* Mir, 1966.

[19] V. I. Arnold. *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique.* Éditions MIR, 1976.

[20] E. T. Whittaker. *A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies.* Cambridge, 1988.

[21] J. Schwinger (ed. by L. C. Biedenharn and H. van Dam). *Quantum Theory of Angular Momentum.* Academic Press, 1965.

[22] L. C. Biedenharn and J. D. Louck. *Angular Momentum in Quantum Physics - Theory and Applications.* Addison-Wesley, 1981.

[23] K. Gottfried and T. M. Yan. *Quantum Mechanics: Fundamentals.* Springer, 2003.

[24] M. Chaichian and R. Hagedorn. *Symmetries in Quantum Mechanics.* Taylor & Francis, 1998.

[25] E. T. Newman and R. Penrose. *J. Math. Phys.*, 5, 1966.

[26] N. Ja. Vilenkin and A. U. Klimyk. *Representation of Lie Groups and Special Functions vol. 1.* Kluwer Academic Publischers, 1991.

[27] J. D. Talman. *Special Functions: A Group Theoretic Approach.* W. A. Benjamin, Inc., 1968.

[28] J. C. A. Barata. *Curso de Física-Matemática.* $http://denebola.if.usp.br/\sim jbarata/Notas\_de\_aula/notas\_de\_aula.html$.

[29] A. Deitmar. *A First Course in Harmonic Analysis, Second Edition.* Springer, 2005.

[30] M. Carmeli. *Group theory and general relativity.* McGraw-Hill, 1974.

[31] R. Durrer. *The Cosmic Microwave Background.* Cambridge, 2008.

[32] M. Zaldarriaga and U. Seljak. *Phys. Rev. D*, 55, 1997.

[33] A. Lewis, A. Challinor, and N. Turok. *Phys. Rev D*, 65, 2001.

[34] M. Nakahara. *Geometry, Topology, and Physics.* Taylor & Francis, 2003.

[35] N. Straumann. *General Relativity and Astrophysics.* Springer, 2004.

[36] J. Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis, 4th ed.* Springer, 2005.

[37] R. Arnowitt, S. Deser, and W. Misner (ed by L. Witten). *Gravitation: an introduction to current research.* Wiley, 1962.

[38] P. Cabella and M. Kamionkowski. *arXiv:astro-ph/0403392v2.*

[39] R. P. Feynman. *Statistical Mechanics.* ABP, 1998.

[40] F. J. Ynduráin. *Relativistic quantum mechanics and introduction to Field Theory.* Springer, 1996.

[41] M. Kamionkowski, A. Kosowsky, and A. Stebbins. *arXiv:astro-ph/9611125 v1.*

[42] J. A. Wheeler and K. Ford. *Geons, Black Holes & Quantum Foam.* Norton, 2000.

[43] G. B. Rybicki and A. P. Lightman. *Radiative Processes in Astrophysics.* Wiley Interscience, 1979.

[44] V. Bérestetski, E. Lifchitz, and L. Pitayevski. *Électrodynamique quantique.* Mir, 1989.

[45] G. N. Watson. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd ed.* Cambridge, 1944.

[46] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Mécanique Quantique tome II.* Hermann, 2000.

[47] L. Landau and E. Lifchitz. *Mécanique Quantique.* Mir, 1966.

[48] G. M. Kremer. *Uma Introdução à Equação de Boltzmann.* Edusp, 2006.

[49] R. R. Caldwell and A. Stebbins. *Phys. Rev. Lett*, 100, 2008.