Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Séries de Lindstedt Convergentes em Sistemas Periódicos e Quase-Periódicos

Daniel Augusto Cortez

SBI-IFUSP
305M810T4332

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Alves Barata

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Física para obtenção do título de Doutor em Ciências.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ex. 1
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
4332
INSTITUTO DE FÍSICA

Comissão Examinadora:

Prof. Dr. João Carlos Alves Barata (IFUSP)
Prof. Dr. Walter Felipe Wreszinski (IFUSP)
Prof. Dr. Domingos Humberto Urbano Marchetti (IFUSP)
Prof. Dr. César Rogério de Oliveira (UFSCar)
Prof. Dr. Ricardo Schwartz Schor (UFMG)

São Paulo
2005

Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

"Honrai vosso pai e vossa mãe..." – JESUS – MATEUS, 19:19.

◇

"Honrar a seu pai e sua mãe não consiste apenas em respeitá-los; é também assistí-los na necessidade; é proporciona-lhes repouso na velhice; é cercá-los de cuidados como eles fizeram conosco na infância." – Cap. XIV, 3.

Este trabalho é dedicado aos meus pais: Celso e Eliana.

"... *Life is what happens to you while you're busy making other plans ...*" – John Lennon.

Agradecimentos

"Porque aquele que pede, recebe; e, o que busca, encontra; e, ao que bate, se abre." – JESUS – MATEUS, 7:8.

◇

"Desta maneira, serás filho das tuas obras, terás delas o mérito e serás recompensado de acordo com o que hajas feito." – Cap. XXV, 3.

Meus primeiros agradecimentos são dirigidos ao meu orientador, Prof. João Carlos Alves Barata. Primeiro, pela confiança depositada em mim desde os tempos da graduação. Segundo, pela sugestão do tema de pesquisa e pela orientação segura e bem direcionada. Finalmente, pela compreensão e ajuda, principalmente nesse último ano de minha vida que, por razões pessoais, está sendo um pouco mais difícil.

Não poderia deixar de agradecer também ao Prof. Guido Gentile pela colaboração fundamental na segunta parte desta tese, servindo-me até mesmo como co-orientador, ajudando-me no entendimento de seu trabalho e também no decorrer de nossa colaboração.

Agradeço em seguida a todos os meus familiares mais próximos: meus pais Celso e Eliana; meu grande irmão Caio e sua namorada Cristiane; meus tios Flávio e Lia e, finalmente, meus avós, Hélia, José e Dora. Agradeço a todos pelo amor e carinho que nunca faltaram em toda minha vida.

Não poderia deixar de agradecer também aos meus amigos, pelo suporte e pelos momentos de descontração. Aqui do Instituto são eles: Eduardo Altmann, Gustavo Baragallo e Urbano França. Obrigado por tudo e desculpem a ausência nos últimos tempos. Agradeço também aos amigos do ar: Cmte. Marcelo Rosenthal, Cmte. Gilberto Foltram, Cmte. Thiago Rosa, Cmte. Luccas Valvano e Cmte. Sténio Takakura.

E como todos têm uma pessoa especial no coração, não poderia deixar de agradecer a minha, Aline, obrigado pelo carinho e amor nos quase seis anos que vivemos juntos. Que Deus te ilumine!

E por falar em Deus, agradeço a Ele também, por tudo isso e, sobretudo, pela saúde que nunca me faltou.

Por fim, agradeço à FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta tese, através de métodos perturbativos adequados, resultados rigorosos são obtidos para dois sistemas dinâmicos específicos.

Primeiro, apresentamos uma investigação matemática do fenômeno de localização dinâmica em uma classe de sistemas de dois-níveis periodicamente e quase-periodicamente dependente do tempo. Nossos resultados são baseados em um procedimento de eliminação iterativa de termos polinomiais da série de Lindstedt, a qual é proposta como solução de uma certa equação de Riccati associada. Tal procedimento é desenvolvido aqui de uma forma sistemática para adequá-lo ao efeito de localização *em qualquer ordem de perturbação*. No caso quase-periódico, esse procedimento nos leva apenas a uma série de Lindstedt formal bem definida. No caso periódico, uma solução perturbativa convergente é obtida e, em particular, uma expansão perturbativa convergente para a freqüência secular é apresentada. O caso particular do campo monocromático é discutido em detalhes, onde cômputos numéricos das soluções são apresentadas e os resultados são exibidos em termos de certas probabilidades de transição entre os dois auto-estados do sistema.

Segundo, consideramos uma equação de Hill perturbada da forma $\ddot{\phi} + (p_0(t) + \varepsilon p_1(t))\phi = 0$, onde p_0 é real analítica e periódica , p_1 é real analítica quase-periódica e $\varepsilon \in \mathbb{R}$ é *pequeno*. Assumindo condições Diophantinas nas freqüências do sistema desacoplado, *i.e.*, as freqüências dos potenciais externos p_0 e p_1 e a freqüência própria da equação de Hill não-perturbado ($\varepsilon = 0$), e assumindo apenas uma condição de não-degenerescência específica sobre o potencial perturbador p_1, provamos que soluções quase-periódicas da equação não-perturbada são estáveis se ε estiver em um conjunto de Cantor de medida relativamente grande em $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \subset \mathbb{R}$, onde ε_0 é pequeno o suficiente. Nosso método é baseado em um procedimento de resoma da série de Lindstedt formal obtida como solução de uma equação de Riccati associada ao problema de Hill.

Finalmente, salientamos que os sistemas acima são matematicamente aparentados. De fato, ambos passam pela solução de certas equações de Riccati bastante parecidas. Tais soluções são procuradas em termos de séries de Lindstedt expandidas em um parâmetro perturbativo adequado.

Abstract

In this thesis, through the use of suitable perturbative methods, rigorous results are obtained for two specific dynamical systems.

First, we present a mathematical investigation of the phenomenon of dynamical localization in a class of quasi-periodically and periodically time-dependent two-level systems. Our results are based on an interative procedure of elimination of polynomial terms from the Lindstedt series, which is proposed as a solution of a certain associated Riccati equation. Such a procedure is developed here in a systematic way in order to adapt it to the effect of localization *in any perturbative order*. In the quasi-periodic case, this procedure leads only to a formal well defined Lindstedt series. In the periodic case, a convergent perturbative solution is obtained and, in particular, a convergent perturbative expansion for the secular frequency is presented. The particular case of a monochromatic field is discussed in detail, where numerical computations of the solutions are presented and results are exhibited in terms of certain transition probabilities between the two eigenstates of the system.

Second, we consider a perturbed Hill's equation of the form $\ddot{\phi} + (p_0(t) + \varepsilon p_1(t))\,\phi = 0$, where p_0 is real analytic and periodic, p_1 is real analytic and quasi-periodic and $\varepsilon \in \mathbb{R}$ is *small*. Assuming Diophantine conditions on the frequencies of the decoupled system, *i.e.*, the frequencies of the external potentials p_0 and p_1 and the proper frequency of the unperturbed ($\varepsilon = 0$) Hill's equation, and making only one specific non-degeneracy assumption on the perturbing potential p_1, we prove that quasi-periodic solutions of the unperturbed equation are stable if ε lies in a Cantor set of relatively large measure in $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \subset \mathrm{R}$, where ε_0 is small enough. Our method is based on a resummation procedure of a formal Lindstedt series obtained as a solution of a generalized Riccati equation associated to Hill's problem.

Finally, we stress that the two systems above are mathematically related. Indeed, both pass through the solutions of certain strongly related Riccati equations. Such solutions are searched in terms of Lindstedt series expanded in a suitable perturbative parameter.

Prefácio

Este trabalho destina-se à elaboração e à aplicação de métodos perturbativos ao estudo de sistemas dinâmicos específicos de interesse em física. Os resultados aqui contidos apresentam, portanto, importância sob dois pontos de vista: um é o *físico*, uma vez que obteve-se a descrição precisa da evolução de sistemas relevantes; outro é o *matemático*, pois tal descrição só foi alcançada graças à implementação de métodos originais e rigorosos. Dada a importância de ambos os aspectos, procurou-se aqui enfatizá-los e explorá-los de forma democrática, visando tornar deste um genuíno trabalho de pesquisa no campo da *física-matemática*.

Estudamos, essencialmente, dois sistemas físicos distintos, porém matematicamente não totalmente desrelacionados.

O primeiro deles refere-se à resolução da equação de Schrödinger associada a um sistema quântico de dois-níveis onde uma interação externa dependente do tempo é introduzida. A característica particular é que tal dependência temporal é quase-periódica. O problema é resolvido através de uma técnica perturbativa inovadora, procurando expansões para a solução em termos de um parâmetro natural pequeno de sistema, a saber, a diferença de energia entre os níveis não-perturbados. A solução encontrada, no caso periódico, mostrou-se extremamente útil para o estudo de um efeito conhecido apenas formalmente nos modelos até então considerados: dependendo do tipo de interação inserida, a evolução do sistema na transição de um nível de energia para outro pode ser muito lenta em comparação ao ciclo da perturbação externa, evidenciando-se a possibilidade da evolução praticamente *congelar* em um dos auto-estados do sistema. A esse fenômeno, dá-se o nome de *efeito de localização dinâmica*. Resulta que o método perturbativo empregado por nós se mostrou bastante natural para caracterizar tal efeito de uma forma bem geral.

O segundo sistema analisado refere-se ao estudo da estabilidade de soluções limitadas de uma dada equação de Hill ao se introduzir um potencial pequeno e quase-periódico geral. Nesse caso, também aplicamos técnicas perturbativas aproveitando-se do pequeno parâmetro de acoplamento do potencial quase-periódico. De forma bastante geral, podemos dizer que soluções quase-periódicas persistem no sistema perturbado desde que a constante de acoplamento do potencial perturbador seja escolhida dentro de um conjunto bem peculiar, mas com boas propriedades.

A relação matemática entre o primeiro e o segundo sistema estudado está no fato de que a

específica equação de Schrödinger analisada no primeiro caso pode ser transformada em uma certa versão complexa de uma equação de Hill com potencial quase-periódica. A relação exata entre tais equações é apresentada ao longo da tese. O intuito aqui é apenas salientar e justificar o fato do porque praticamente as mesmas técnicas perturbativas desenvolvidas e aplicadas em um sistema puderam ser adaptadas ao outro.

Basicamente, a análise de ambos os sistemas vagamente descritos acima, passa pela resolução de uma equação de Riccati bastante interessante por si só. De um forma geral, escrevemos para ela

$$\dot{u} = F(u^2, Q, R; \varepsilon)\,,$$

onde F é linear em seus argumentos, Q e R são quase-periódicas com o mesmo vetor de rotação[1] $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d$, para algum $d \in \mathbb{Z}_+$, e ε é um parâmetro perturbativo *pequeno*. No caso específico do primeiro sistema (dois-níveis), tem-se $F(x, y, z; \varepsilon) = \varepsilon(xy + z)$, com $z = y^{-1}$. Para o segundo sistema (equação de Hill perturbada), tem-se $F(x, y, z; \varepsilon) = \varepsilon xy + z$, com $y \neq z$. A idéia, em ambos os casos, é procurar por uma solução explícita da equação acima em termos de uma série de potências em ε e com o mesmo vetor de rotação $\boldsymbol{\omega}$ de Q e R. Assim, escrevemos a série de Lindstedt

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d} u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}\, e^{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu} t}\,,$$

e procuramos dar sentido aos coeficientes $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$ e estudar as propriedades de convergência das somas acima.

Para o primeiro sistema, no caso periódico, convergência em ε pode ser demonstrada em diversas situações, inclusive naquele pertinente ao estudo do efeito de localização dinâmica. Já no caso quase-periódico, que é natural para o segundo sistema (equação de Hill), tal não é o ocorrido. Basicamente, como nos problemas originais de mecânica celeste onde as séries de Lindstedt foram inicialmente propostas, a existência de pequenos denominadores impede que boas estimativas sejam dadas para os coeficientes $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$, impossibilitando a demonstração de convergência. O problema todo reside no surgimento de termos como $(i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu})^{-1}$ nas relações recursivas que definem os coeficientes de Fourier $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$. Tais termos tornam-se arbitrariamente grandes a medida que $|\boldsymbol{\nu}| \to \infty$, aproximando-se do plano perpendicular à $\boldsymbol{\omega}$, mesmo assumindo condições Diophantinas sobre $\boldsymbol{\omega}$.

É claro que, por outros argumentos, *e.g.* a Teoria KAM, espera-se que a série de Lindstedt acima seja convergente para ε suficientemente pequeno. De fato, através de uma manipulação direta dos coeficientes $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$, efetuando um procedimento de resoma adequado e através da imposição de condições Diophantinas iterativas e dependentes do parâmetro ε, pudemos demonstrar a convergência de uma expansão renormalizada construída a partir da série formal acima. As técnicas utilizadas já haviam sido empregadas em outros sistemas tipo KAM no mesmo

[1]Definições precisas, obviamente, serão dadas ao longo da tese. Notações específicas e convenções são encontradas na página xviii.

espírito e, portanto, não são totalmente originais. Originais são as devidas adaptações efetuadas nos métodos para encaixar com nossas necessidades e, finalmente. os resultados encontrados para os sistemas estudados.

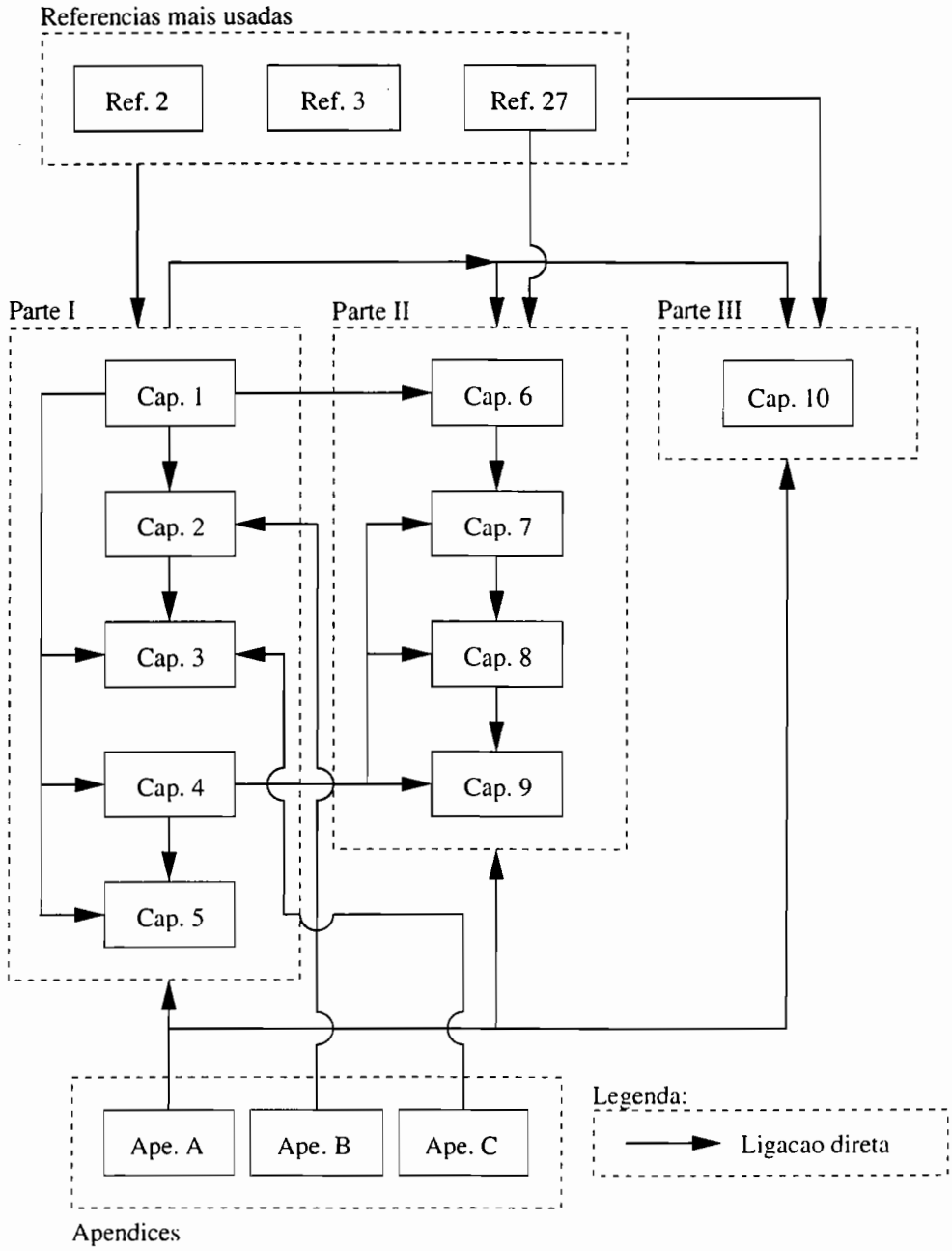


Figura 1: Interdependência entre capítulos. apêndices e referências mais usadas nesta tese.

Procurou-se escrever esta tese de forma auto-contida. de modo que pouca, ou nenhuma. análise das referências citadas deve ser requerida. Exceção, talvez. ao trabalho [27]. de grande importância a partir do Capítulo 4. Se bem que uma revisão bem detalhada desse trabalho é feita no próprio Capítulo 4.

Dividimos a tese em três partes. A primeira trata do problema dos sistemas de dois-níveis.

com especial ênfase ao efeito de localização dinâmica. A segunda parte trata do problema da estabilidade para a equação de Hill perturbada e não é independente da primeira. Finalmente, a terceira parte contém algumas conclusões a respeito dos problemas considerados e uma revisão dos resultados obtidos. Considerações finais também são incluídas.

Recomendamos que esta tese seja lida na seqüência de seus capítulos. Apresentamos no diagrama da Figura 1 a interdependência existente entre os mesmos.

Por fim, esclarecemos que as convenções e notações encontradas nesta tese estão todas definidas a partir da página xviii, no Capítulo *Convenções e Notações*, onde uma lista completa é encontrada. Dessa forma, evitamos que algumas definições óbvias sejam dadas ao longo do texto principal.

Boa leitura a todos.

O Autor.

São Paulo, 20 de abril de 2005.

Sumário

Prefácio vii

Lista de Figuras xiii

Convenções e Notações xviii

I Localização Dinâmica em Sistemas de Dois-Níveis 1

1 Introdução à Parte I 2

1.1 Descrição do Sistema 2

1.2 Teoria Usual de Dyson 5

1.3 O Efeito de Localização Dinâmica 6

1.4 A Técnica Perturbativa 10

1.5 Resultados Prévios 14

1.6 A Freqüência Secular e o Efeito de Localização 16

2 Análise Perturbativa do Efeito de Localização Dinâmica 19

2.1 Resultados Principais 19

2.2 Propriedades Especiais 21

2.2.1 Propriedades do Valor Médio 21

2.2.2 A Operação de Renormalização 23

2.3 O Caso $M(\mathcal{Q}_0) = 0$ e $M(\mathcal{Q}_1) = 0$ 26

2.3.1 Determinação de κ_1 26

2.3.2 Determinação de κ_2 28

2.3.3 Determinação de κ_3 30

2.3.4 Determinação de κ_n, $n \geq 4$ 31

2.4 Prova de Convergência da Expansão em ε 34

3 Campo Monocromático **41**

3.1 Análise das Condições 41

3.2 Cômputo Numérico das Soluções 44

3.2.1 Interações com $F_0 = 0$ 45

3.2.2 Interações com $F_0 \neq 0$ 47

3.2.3 Cômputo do Propagador $U(t)$ 48

3.3 Resultados 51

3.4 Comentários 54

4 Expansão em Árvores **62**

4.1 Representação Diagramática 64

4.2 Solução Formal 69

4.3 Decomposição em Multi-Escala dos Propagadores 70

4.4 Propagadores Renormalizados 75

4.5 Lemas Fundamentais 79

5 Localização Além da Terceira Ordem **81**

5.1 Fatos Preliminares 81

5.2 Extrapolação das Condições (I), (II) e (III) 85

5.2.1 Determinação de $c^{(0)}$ 92

5.2.2 Determinação de $c^{(j)}, j \geq 1$ 93

5.2.3 Resultados 96

5.3 Expansão em Árvores da Freqüência Secular 98

II Estabilidade para a Equação de Hill Perturbada **102**

6 Introdução à Parte II **103**

6.1 A Equação de Hill 103

6.2 Estabilidade das Soluções no Sistema Perturbado 108

6.3 O Teorema Principal 111

7 Método Perturbativo **113**

7.1 Equação Não-Perturbada 113

7.2 A Equação Perturbada e o Ansatz Exponencial 114

7.3 Árvores 116

8 Solução Formal **121**

8.1 Análise dos Modos Zero 121

8.2 Análise da Expansão (7.11) 129

9 Solução Renormalizada **131**

9.1 Expansão Renormalizada 131

9.2 Propriedades dos Valores de Auto-Energia 138

9.3 Convergência da Expansão Renormalizada 141

9.4 Medida do Conjunto dos Valores Admissíveis 146

9.5 Propriedades da Expansão Renormalizada 152

III Discussão **154**

10 Conclusões **155**

10.1 Sumário de Resultados 155

10.2 Considerações Finais 157

A Funções Quase-Periódicas e Almost-Periódicas **162**

B Relações Especiais **165**

B.1 Obtenção de (2.45) 165

B.2 Obtenção de (2.46) 167

C Identidade para uma Soma de Funções de Bessel **169**

Referências Bibliográficas **170**

Lista de Figuras

1 Interdependência entre capítulos, apêndices e referências mais usadas nesta tese. ix

1.1 Ilustração do potencial $V(x;t) = \lambda(x^2 - a^2)^2 + Sx\,\mathrm{sen}(\omega t)$. Cada gráfico representa um instante de tempo específico, variando de $t = 0$, até $t = 11T/12$, em intervalos de $T/12$, onde $T = 2\pi/\omega$ é o período de oscilação do campo externo. . 7

1.2 Probabilidades de transição para o sistema (1.3) com $f(t) = 0$ e $f(t) = F_0$, uma constante não nula. Apresentamos os gráficos de $P(t)$ de acordo com as expressões (1.13) e (1.15) para dois valores de ε. 9

3.1 Valores de $|\mathcal{T}_0(x_a)|$ calculados para os quinze primeiros zero de J_0 em $\mathbb{R}_+$. Infere-se que $M(\mathcal{Q}_3) \neq 0$ para todo zero de J_0. 44

3.2 Gráficos da probabilidade de transição $P(t)$ (coluna esquerda) e do desvio da unitariedade $N(t)$ (coluna direita) como função do tempo (medido em unidades de T_ω) para vários ε. Considerou-se o caso (A) da Tabela 3.1, com $\omega = 1.0$, $\chi_1 = 2/\omega$ e $\chi_2 = 0$. Utilizou-se $\varepsilon = 0.01, 0.10$ nas colunas de cima e de baixo, respectivamente. 56

3.3 Parte real e parte imaginária da solução da equação de Riccati para $\chi_1 = x1$, x_1 sendo o primeiro zero positivo de J_0 e $\chi_2 = 0$. Utilizou-se $\varepsilon = 0.01$ e $\omega = 1.0$. **(A)** representa a solução perturbativa g_p. **(B)** representa a solução numérica g_n e **(C)** representa o desvio relativo $(g_p - g_n)/g_p$ em %. Nota-se que esse desvio não ultrapassa o valor de $\sim 0.006\%$. 57

3.4 Parte real e parte imaginária da solução da equação de Riccati para $\chi_1 = x1$, x_1 sendo o primeiro zero positivo de J_0 e $\chi_2 = 0$. Utilizou-se $\varepsilon = 0.10$ e $\omega = 1.0$. **(A)** representa a solução perturbativa g_p. **(B)** representa a solução numérica g_n e **(C)** representa o desvio relativo $(g_p - g_n)/g_p$ em %. Nota-se que esse desvio não ultrapassa o valor de $\sim 3.0\%$, o qual só ocorre em pontos isolados. 58

3.5 O mesmo da Figura 3.2, mas agora considerou-se o caso (B) da Tabela 3.1, com $\omega = 10.0$ e $\chi_2 = 0$. Nas linhas de cima e do meio, utilizou-se $\chi_1 = x_1$, o primeiro zero positivo de J_0, e $\varepsilon = 0.01, 0.10$, respectivamente. Na linha de baixo, utilizou-se $\chi_1 = x_2$, o segundo zero positivo de J_0, e $\varepsilon = 0.01$. Observamos que em todos os gráficos a escala de tempo é multiplicada pelo fator indicado entre colchetes. . 59

3.6 O mesmo da Figura 3.2, mas agora considerou-se o caso (C) da Tabela 3.1, com $\omega = 1.0$, $\chi_1 = 1.0$ e $\chi_2 = 0.3$ (não inteiro). Utilizou-se $\varepsilon = 0.05, 0.10, 0.20$ nas linhas de cima, do meio e de baixo, respectivamente. 60

3.7 O mesmo da Figura 3.6, mas com $\chi_1 = 0$ e $\chi_2 = 0.8$ ($F_0 = 0.4$). Utilizou-se $\varepsilon = 0.30, 0.43$ nas linhas de cima e de baixo, respectivamente. A linha tracejada representa $P(t)$ calculada via (3.25). 61

4.1 Representação gráfica do coeficiente $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$ para $\boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$. O rótulo (k) acima da bola hachurada indica a ordem perturbativa do coeficiente. 66

4.2 Representação gráfica do coeficiente $u_{\mathbf{0}}^{(k)} = c^{(k)}$. O momento que sai de uma bola branca é sempre nulo. Nesse caso, o valor analítico do propagador é 1. 66

4.3 Representação gráfica dos coeficientes $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(0)}$ e $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(1)}$. Lembramos que para $\boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$, temos $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(0)} = 0$. O primeiro gráfico de $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(1)}$ corresponde ao termo $(Q^{-1})_{\boldsymbol{\nu}}/(i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu})$ da segunda equação de (4.11). O segundo gráfico corresponde ao termo $Q_{\boldsymbol{\nu}}(c^{(0)})^2/(i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu})$ da mesma equação. Note que a conservação de momento no vértice implica em $\boldsymbol{\nu}_0 = \boldsymbol{\nu}$, já que $\boldsymbol{\nu}_1 = \boldsymbol{\nu}_2 = \mathbf{0}$ (bolas brancas). Assim, o fator de vértice associado é $Q_{\boldsymbol{\nu}}$. 66

4.4 Um vértice é formado pelo entroncamento de três propagadores, dois entrando e um saindo. A todo vértice associamos o fator $Q_{\boldsymbol{\nu}_0}$ e exigimos o vínculo $\boldsymbol{\nu}_{\text{sai}} = \boldsymbol{\nu}_{\text{entra}} + \boldsymbol{\nu}_0$. 66

4.5 Expansão do coeficiente $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$, $\boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$, como na última equação de (4.11). Embora não indicado, os momentos saindo das bolas brancas são nulos (como na Figura 4.2). Associamos o fator $Q_{\boldsymbol{\nu}_0}$ em cada vértice, onde vale a lei de conservação $\boldsymbol{\nu}_0 + \boldsymbol{\nu}_1 + \boldsymbol{\nu}_2 = \boldsymbol{\nu}$. A expansão acima deve ser feita para todos os valores de k_1 e k_2 tais que $k_1 + k_2 = k - 1$. 67

4.6 Expansão completa do coeficiente $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(2)}$, $\boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$. O coeficiente $u_{\mathbf{0}}^{(2)}$ é representado como na Figura 4.2 para $k = 2$. 69

4.7 Árvores que não comparecem no conjunto $\mathcal{T}^*_{k+1,0}$. Note que ao lado $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}_1 = \boldsymbol{\nu}_2 = \mathbf{0}$. Por conseguinte, $\boldsymbol{\nu}_0 = \mathbf{0}$. Assim, as duas árvores dão origem à contribuição $2c^{(k)}c^{(0)}Q_{\mathbf{0}}$. A árvore cujo valor é a apenas a constante $c^{(k+1)}$ também não pertence ao conjunto $\mathcal{T}^*_{k+1,\mathbf{0}}$. 69

4.8 Possíveis gráficos das funções $\chi(x)$ e $\psi(x)$. Note que $\psi(x) + \chi(x) = 1$. 71

4.9 Exemplos de clusters em uma árvore de ordem $k = 33$. No exemplo, sem perda de generalidade, $E_W(\theta) = \emptyset$, de forma que $E(\theta) = E_B(\theta)$. O número entre parênteses acima de cada linha denota a escala do propagador. Assim, temos $n_{T_1} = 3$, $n_{T_2} = 1$, $n_{T_3} = 8$, $n_{T_4} = 2$ e $n_{T_5} = 9$. Note que $T_4 \subset T_5$ e por isso $n_{T_4} < n_{T_5}$. É claro que existem outros exemplos de clusters na figura ao lado que não foram apresentados. 73

4.10 Gráficos de auto-energia em uma árvore de ordem $k = 21$. Note que, de acordo com a definição, só há uma linha entrando e uma linha saindo (carregando o mesmo momento) nos gráficos de auto-energia T_1, T_2, T_3 e T_4. É claro que a escala das linhas em T_1, T_2, T_3, T_4 é estritamente menor do que a de suas linhas externas (afinal, gráficos de auto-energia são clusters). 73

5.1 Representação diagramática de $G_{0,1}$, $G_{1,0}$, $G_{1,1}$, $G_{1,2}$, $G_{2,0}$, $G_{2,1}$, $G_{2,2}$ e $G_{2,3}$. A linha raiz carrega momento nulo em todas as árvores. Chamamos de *pernas amputadas* aquelas linhas que partem das bolas brancas amputadas. Conforme indicamos na figura, todos os propagadores associados às pernas amputadas são triviais. 88

5.2 Expansão diagramática dos coeficientes $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}$ e $\Omega^{(3)}$ de acordo com (5.26). . 99

6.1 Gráfico da função $\Delta(\lambda)$ associada à equação (6.4). Mostramos a localização dos valores característicos de primeiro tipo λ_n (raízes de $\Delta(\lambda) = +2$) e de segundo tipo λ'_n (raízes de $\Delta(\lambda) = -2$). Note que λ_n e λ'_n se distribuem conforme (6.6). Os intervalos de instabilidade são apresentados em destaque no eixo real λ. Observe que o quinto intervalo de instabilidade desapareceu pois $\lambda'_5 = \lambda'_6$. Assim, os intervalos de estabilidade (λ_4, λ'_5) e (λ'_6, λ_5) se fundiram em um único intervalo (λ_4, λ_5), onde todas as soluções de (6.4) são estáveis. 107

8.1 Forma canônica de uma árvore em $\widetilde{\mathcal{T}}^{nc}_{k,\nu}$. A região delimitada por linhas tracejadas representa uma sub-árvore geral contendo apenas bolas pretas. Cada sub-árvore canônica θ_j, $1 \leq j \leq n$, é de ordem k_{θ_j} e contém exatamente k_{θ_j} vértices e $k_{\theta_j} + 1$ bolas pretas. Levando em conta os n vértices canônicos $\{v_1, \ldots, v_2\}$, tem-se $k = n + \sum_{j=1}^{n} k_{\theta_j}$. Note que $2 \leq n \leq k$. A amputação das bolas brancas deixa uma linha com momento nulo conectada ao vértice v_n: chamamos de perna amputada tal linha. 124

9.1 Possíveis gráficos das funções $\chi(x)$ e $\omega(x)$. Note que $\omega(x) + \chi(x) = 1$. 132

9.2 Exemplos de clusters em uma árvore de ordem $k = 16$. O número entre parênteses em cima de cada linha denota a escala do propagador. Assim, temos $n_{T_1} = 3$, $n_{T_2} = 1$, $n_{T_3} = 8$, $n_{T_4} = 2$ e $n_{T_5} = 9$. Note que $T_4 \subset T_5$ e portanto $n_{T_4} < n_{T_5}$. Claro que existem outros clusters no exemplo considerado que não são mostrados. 134

9.3 Exemplos de gráficos de auto-energia em uma árvore de ordem $k = 7$. Note que, de acordo com a definição, existe somente uma linha que entra e uma linha que sai (carregando o mesmo momento) nos gráficos de auto-energia T_1, T_2, T_3 e T_4. Está claro que as escalas das linha de T_1, T_2, T_3, T_4 são estritamente menores do que as escalas de suas linhas externas (afinal, os gráficos de auto-energia são clusters). 134

Convenções e Notações

Nesta tese, utilizou-se as seguintes convenções para os conjuntos de números:

- $\mathbb{N}$ denota o conjunto dos naturais incluindo o zero, ou seja, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
- $\mathbb{Z}$ denota o conjunto de todos os inteiros.
- $\mathbb{Z}_+$ denota o conjunto de todos os inteiros positivos, *i.e.*, $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- $\mathbb{Q}$ denota o conjunto de todos os números racionais.
- $\mathbb{R}$ denota a reta real, ou seja, o conjunto de todos os números reais.
- $\mathbb{R}_+$ denota o conjunto de todos os reais positivos, *i.e.*, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.
- $\mathbb{C}$ denota o conjunto de todos os números complexos.
- Seja $n \in \mathbb{Z}_+$. O conjunto $\mathbb{C}^n$ ($\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{Z}^n$) denota o produto cartesiano de $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$) n vezes.
- $\mathbb{T}$ denota o torus unidimensional, *i.e.*, $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Dado $n \in \mathbb{Z}_+$, $\mathbb{T}^n$ é o torus n-dimensional, ou seja, n vezes o produto cartesiano de $\mathbb{T}$.
- $\setminus$ denota a diferença de conjuntos. Assim, escrever $A \setminus B$ representa tudo aquilo que está em A mas não está em B (A menos B).
- $\mathbb{Z}_*$ denota o conjunto de todos os inteiros com exceção do zero, *i.e.*, $\mathbb{Z}_* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Para operações com números complexos, utilizou-se as seguintes notações:

- $\overline{z}$ denota o complexo conjugado de um número complexo $z \in \mathbb{C}$.
- $\Re\{z\}$ denota a parte real de um número complexo $z \in \mathbb{C}$.
- $\Im\{z\}$ denota a parte imaginária de um número complexo $z \in \mathbb{C}$.
- $|z|$ denota o módulo de um número complexo (ou real) $z \in \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$).

Com relação à símbolos especiais e notações específicas, empregou-se as seguintes convenções:

- O símbolo $:=$ na expressão $A := B$ traduz o fato de que a variável A está definida por B. Já o símbolo $=:$ na expressão $A =: B$ traduz o fato de que agora a variável B está definida por A.

- $\lfloor x \rfloor$ denota o maior inteiro menor ou igual a $x \in \mathbb{R}$.

- $\lceil x \rceil$ denota o menor inteiro maior ou igual a $x \in \mathbb{R}$.

- $\langle f \rangle$ ou $M(f)$ denotam a média de uma função quase-periódica f (com as componentes de seu vetor de rotação racionalmente independentes), a saber

$$\langle f \rangle \;=\; M(f) \;:=\; \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt\, f(t) \;=\; f_0\,,$$

  onde f_0 é o termo constante na expansão de Fourier de f.

- O produto escalar entre dois vetores ψ e ϕ de um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ será denotado por $\langle \psi, \phi \rangle$.

- $\|\cdot\|$ denota a norma de um vetor em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$, assim para $\phi \in \mathscr{H}$, $\|\phi\| := \sqrt{\langle \phi, \phi \rangle}$.

- $\|\cdot\|$ também pode denotar a norma operatorial de um operador limitado agindo em $\mathscr{H}$. Assim, se $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ denota o conjunto de todos os operadores limitados agindo em $\mathscr{H}$, e se $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, tem-se $\|T\| := \sup_{\phi\in\mathscr{H}} \frac{\|T\phi\|}{\|\phi\|}$.

- $L^1(\mathbb{R})$, ou simplesmente L^1, denota o espaço de Banach de todas as funções complexas de módulo integrável em $\mathbb{R}$ com a medida de Lebesgue usual.

- $L^2(\mathbb{R})$, ou simplesmente L^2, denota o espaço de Hilbert de todas as funções complexas de módulo ao quadrado integrável em $\mathbb{R}$ com a medida de Lebesgue usual.

- $L^\infty(\mathbb{R})$, ou simplesmente L^∞, denota o espaço de todas as funções complexas limitadas em $\mathbb{R}$.

- Dadas duas matrizes quadradas A e B de mesma ordem, denotamos por $[A, B]$ o comutador de A por B. Tem-se, $[A, B] := AB - BA$.

- O símbolo $\mathbb{1}$ denota a matriz identidade em qualquer dimensão.

- Seja A uma matriz quadrada. Então, denotamos por $\det A$ o determinante de A.

- O símbolo $\mathcal{O}$ é utilizado para denotar a palavra "ordem". Assim, por exemplo, escrever $f(x) = \mathcal{O}(x^5)$, significa que f é da ordem de x^5, ou seja $f(x) = \beta_5 x^5 + \beta_6 x^6 + \cdots$, com $\beta_5 \neq 0$.

- Vetores em $\mathbb{Z}^d$ ou $\mathbb{R}^d$, para algum $d \in \mathbb{Z}_+$, são denotados por letras em negrito, ou por letras com flecha em cima, ou ainda por letras sublinhadas. Exemplos: $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d$, $\vec{n} \in \mathbb{Z}^{d'}$, $\underline{m} \in \mathbb{Z}^A$, $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^d$, $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^{d'}$, $\underline{\omega}_1 \in \mathbb{R}^D$.

- O produto escalar usual em $\mathbb{R}^d$ (ou $\mathbb{Z}^d$) é denotado por um ponto entre os vetores. Assim, por exemplo, para $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_d) \in \mathbb{R}^d$ e $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_d) \in \mathbb{Z}^d$, $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu} := \omega_1 \nu_1 + \cdots + \omega_d \nu_d$.

- $|\cdot|$ denota a norma ℓ^1 de um vetor em $\mathbb{R}^d$ (ou $\mathbb{Z}^d$). Assim, por exemplo, para $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_d) \in \mathbb{Z}^d$, $|\boldsymbol{\nu}| := |\nu_1| + \cdots + |\nu_d|$.

- Para $m \in \mathbb{Z}$, denota-se por $\ll m \gg$ a seguinte função:

$$\ll m \gg := \begin{cases} |m|\,, & \text{for } m \neq 0 \\ 1\,, & \text{for } m = 0 \end{cases} .$$

- Seja $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ definida em um certo domínio $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$. Seja $k \in \mathbb{N}$ fixo. Dizemos que f é de classe $C^k(\mathcal{D})$ se as k primeiras derivadas de f existirem e forem contínuas em $\mathcal{D}$. Se $k = 0$ dizemos apenas que f é contínua em $\mathcal{D}$. Dizemos que f é de classe $C^\infty(\mathcal{D})$ se f for de classe $C^k(\mathcal{D})$ para <u>todo</u> $k \in \mathbb{N}$.

- Seja $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}$ um conjunto mensurável. Então, meas $\mathscr{A}$ denota a sua medida (de Lebesgue).

- O símbolo $\square$ denota o final do enunciado de um resultado (teorema, proposição, lema ou corolário).

- O símbolo $\blacksquare$ denota o final da prova de um resultado (teorema, proposição, lema ou corolário).

Quanto a notação para as derivadas, empregou-se as seguintes convenções:

- ∂_x denota uma derivada ordinária com relação a uma variável x qualquer.

- $\partial_t f$ denota a derivada ordinária com relação à variável t da função $f(t)$. Nesse caso, escrevemos também $\dot{f}$, ou $\frac{d}{dt} f(t)$. A segunda derivada de $f(t)$ com relação à t será denotada por $\partial_t^2 f$, ou simplesmente $\ddot{f}$.

Parte I

Localização Dinâmica em Sistemas de Dois-Níveis

Capítulo 1

Introdução à Parte I

Recentemente, tem-se observado um grande interesse no estudo de sistemas quânticos submetidos a perturbações periódicas ou quase-periódicas. Um dos motivos para isso reside no fato de que tais sistemas constituem um paradigma para o chamado *caos quântico*. De fato, via de regra, verifica-se uma dinâmica caótica associada aos sistemas clássicos correspondentes [11, 12].

Aqui considera-se para estudo um exemplo particular de tais sistemas perturbados, a saber, átomos submetidos a campos externos. A descrição aproximada é feita então em termos de um sistema de dois-níveis com um Hamiltoniano (periodicamente ou quase-periodicamente) dependente do tempo.

1.1 Descrição do Sistema

Sistemas quânticos de dois-níveis caracterizam-se por serem descritos em um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ bidimensional, o espaço $\mathbb{C}^2$. Um operador Hamiltoniano dependente do tempo é, então, dado por uma família de matrizes auto-adjuntas agindo em $\mathbb{C}^2$, parametrizada pelo tempo $t \in \mathbb{R}$.

Do ponto de vista físico, o estudo de sistemas de dois-níveis periodicamente ou quase-periodicamente dependentes do tempo é de importância fundamental em muitas aplicações, desde a física da matéria condensada até a óptica quântica.

Considere, como aplicação, o comportamento de uma partícula de spin 1/2 (um elétron, por exemplo) submetido a um campo magnético dependente do tempo $\vec{B} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. A evolução de tal partícula pode ser descrita por um sistema de dois-níveis como o mencionado acima. Nesse caso, a equação de Schrödinger correspondente assume a forma simplificada (adotando $\hbar = 1$)

$$i\partial_t \Psi(t) = H(t)\Psi(t)\,, \quad \text{com} \quad H(t) := -\frac{1}{2}\vec{B}(t)\cdot\vec{\sigma}\,, \tag{1.1}$$

onde

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 , \quad \vec{B}(t) = (B_1(t), B_2(t), B_3(t)) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{e} \quad \vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$$

são as matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Tal sistema tem sido analisado em várias aproximações desde os trabalhos pioneiros de Rabi [7], Bloch e Siegert [8] e Autler e Townes [9].

Uma situação de particular interesse ocorre quando (1.1) assume a forma específica

$$i\partial_t \Psi(t) = H_1(t)\Psi(t) , \quad \text{com} \quad H_1(t) := \varepsilon\sigma_3 - f(t)\sigma_1, \tag{1.2}$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função do tempo t e $\varepsilon \in \mathbb{R}$ é um parâmetro constante. O Hamiltoniano H_1 descreve, por exemplo, um átomo de dois-níveis submetido a um campo externo dependente do tempo representado pela função f. Através de uma rotação de um ângulo de $\pi/2$ ao redor do eixo-2, obtém-se o seguinte sistema equivalente:

$$i\partial_t \Phi(t) = H_2(t)\Phi(t) , \quad \text{com} \quad H_2(t) = \varepsilon\sigma_1 + f(t)\sigma_3 , \tag{1.3}$$

onde

$$H_2(t) := \exp\left(-i\pi\sigma_2/4\right) H_1(t) \exp\left(i\pi\sigma_2/4\right) \quad \text{e} \quad \Phi(t) := \exp\left(-i\pi\sigma_2/4\right) \Psi(t) .$$

Como veremos, o sistema (1.3) pode ser convenientemente tratado pelos métodos aqui desenvolvidos. A equivalência com (1.2) é feita através das transformações acima.

Note que, de acordo com (1.1), pode-se tanto interpretar (1.2) como descrevendo uma partícula de spin 1/2 sob a influência de um campo magnético específico $\vec{B}(t) = (2f(t), 0, -2\varepsilon)$, como também descrevendo um átomo de dois-níveis com níveis de energia $\pm\varepsilon$ representado pelo Hamiltoniano diagonal (livre) $H_0 := \varepsilon\sigma_3$, perturbados por uma interação dependente do tempo introduzida pelo Hamiltoniano $H_I(t) := -f(t)\sigma_1$. Tal perturbação induz transições dependentes do tempo entre os dois auto-estados não-perturbados de H_0 (os auto-estado do átomo em questão).

Analogamente, o sistema equivalente (1.3), por sua vez, pode tanto descrever uma partícula de spin 1/2 submetida a um campo magnético $\vec{B}(t) = (-2\varepsilon, 0, -2f(t))$, como também descrever um sistema de dois-níveis composto por dois estados desacoplados (para $\varepsilon = 0$) ortogonais e dependentes do tempo,

$$\exp\left(-i\int_0^t f(\tau)d\tau\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \exp\left(+i\int_0^t f(\tau)d\tau\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

sujeitos a uma perturbação constante $\varepsilon\sigma_1$, a qual induz transições entre os estados acima.

Mencionamos agora a possibilidade de se formular o sistema (1.1) em termos de um sistema clássico Hamiltoniano. Essa conexão tem origem no trabalho de Feynman *et al* [10], o qual introduziu um *approach* considerado essencial na teoria semi-clássica do laser. Considere a equação de Schrödinger (1.1) e seja

$$\rho(t) := \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\psi_1(t)} & \overline{\psi_2(t)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\psi_1(t)|^2 & \psi_1(t)\overline{\psi_2(t)} \\ \psi_2(t)\overline{\psi_1(t)} & |\psi_2(t)|^2 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

a matriz de densidade. Então, ρ satisfaz a equação $i\dot{\rho} = [H(t), \rho]$. Escrevendo,

$$\rho(t) = \frac{1}{2}(Q_0\mathbb{1} + \vec{Q}\cdot\vec{\sigma}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} Q_0 + Q_3 & Q_1 - iQ_2 \\ Q_1 + iQ_2 & Q_0 - Q_3 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

temos, por comparação de (1.4) e (1.5):

$$Q_0 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 = 1 \qquad Q_1 = \psi_1(\overline{\psi_2} + \psi_2\overline{\psi_1})$$

$$Q_2 = i(\psi_1\overline{\psi_2} - \psi_2\overline{\psi_1}) \qquad Q_3 = |\psi_1|^2 - |\psi_2|^2 .$$

A equação de movimento $i\dot{\rho} = [H(t), \rho]$ se torna [10]

$$\dot{\vec{Q}} = -\vec{\Omega}\times\vec{Q}\,, \quad \vec{\Omega} = (B_1(t), B_2(t), B_3(t))\,, \tag{1.6}$$

e a condição $\rho^2 = \rho$, que expressa o fato de ρ ser um estado puro, resulta

$$Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = \vec{Q}^2 = Q_0^2 = 1\,. \tag{1.7}$$

As equações (1.6) e (1.7) determinam a função de onda Ψ completamente, já que ψ_1 e ψ_2 são dois números complexos e a fase de Ψ é irrelevante. Assim, três números, *i.e.*, o vetor $\vec{Q}$, é suficiente. Eles são a base de uma simples interpretação geométrica de sistemas quânticos de spin-1/2 (ou sistemas de dois-níveis): o vetor unitário $\vec{Q}(t)$ precessa ao redor do vetor $\vec{\Omega}(t)$ assim como um giromagneto clássico precessa em torno do campo magnético $\vec{B}(t)$ [10].

Objetiva-se aqui estudar o sistema descrito pela equação (1.2) assumindo que f represente uma interação periódico ou, mais genericamente, quase-periódico. Assim, escrevemos

$$f(t) = \sum_{\vec{m}\in\mathbb{Z}^B} F_{\vec{m}}\, e^{i\vec{\omega}_f\cdot\vec{m}t}\,, \tag{1.8}$$

onde $\vec{\omega}_f \in \mathbb{R}^B$ é o vetor de freqüências ou vetor de rotação de f, $\vec{\omega}_f = (\omega_1, \cdots, \omega_B)$, para algum $B \in \mathbb{Z}_+$. As componentes de $\vec{\omega}_f$ são supostas racionalmente independentes. É claro que o caso periódico corresponde à $B = 1$. Assim, o Hamiltoniano em (1.3) pode ser visto como função de $\vec{\theta} = \vec{\omega}t$; nesse caso temos $H = H(\vec{\omega}t)$.

1.2 Teoria Usual de Dyson

O sistema (1.2) pode ser estudado em dois regimes. O primeiro deles, dito de *acoplamento fraco*, corresponde à ε grande com relação à $|f|$. O segundo, dito de *acoplamento forte*, corresponde à ε pequeno com relação à $|f|$. Ambos os regimes foram estudados perturbativamente analisando-se propriedades espectrais do chamado operador de quase-energia. Esse é definido no espaço de Hilbert estendido $\mathscr{H} = \mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{T}^B, d\mu)$, onde $\mathbb{T}^B$ é o toros B-dimensional e $d\mu = 1/(2\pi)^B d\theta_1 \cdots d\theta_B$ é a medida ergódica correspondente, e é dado por

$$K_1 = -i\vec{\omega} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{\theta}} + H(\vec{\theta}) .$$

Em ambos os regimes de acoplamento, demonstrou-se em [13] para o caso específico $B = 2$ que o operador de quase-energia é puro-ponto para $\alpha = \omega_1/\omega_2$ Diophantino, excluindo-se ainda um conjunto pequeno de valores ressonantes. Como é relativamente bem sabido, o fato do operador de quase-energia ser puro-ponto implica em uma dinâmica estável quase-periódica. Isso significa que, sob as condições acima, a evolução do sistema (1.2) é dada em termos de um estado $\Psi(t)$ quase-periodicamente dependente do tempo.

A evolução temporal do sistema (1.2), ou equivalentemente (1.3), é implementada através de um operador que associa um estado qualquer $\Psi_0 \in \mathbb{C}^2$ em um instante de tempo inicial t_0, ao estado $\Psi(t) \in \mathbb{C}^2$ em um instante de tempo subseqüente $t > t_0$, tal que $\Psi(t_0) = \Psi_0$ e tal que (1.2) seja satisfeita. Com isso, a partir de $\Psi(t)$, valores médios de qualquer observável desejado poderão ser calculados para todos os instantes de tempo posteriores à t_0.

O operador unitário que conecta $\Psi(t)$ à $\Psi(t_0)$ é conhecido pelo nome de propagador, ou operador de evolução. Assim, $\Psi(t) = U(t, t_0)\Psi(t_0)$, onde

1. $U(t_0, t_1)U(t_1, t) = U(t_0, t)$;
2. $U(t_0, t_0) = \mathbb{1}$;
3. $U(t_0, t_1)$ é contínuo em t_0 e t_1.

A forma explícita do propagador $U(t_0, t)$ associado, por exemplo, à equação (1.2) é dada pela bem conhecida expansão de Dyson [52]:

$$U(t, t_0) = \mathbb{1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \cdots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n \, H_1(t_1) H_1(t_2) \cdots H_1(t_n) . \qquad (1.9)$$

A expressão acima pode ser obtida sem maiores dificuldades através de um procedimento iterativo de solução da equação diferencial correspondente. Além disso, pode-se demonstrar que valem as propriedades 1, 2 e 3 mencionadas acima para o propagador $U(t, t_0)$.

Uma propriedade importante da série em (1.9) é que a mesma converge em norma uniformemente em qualquer intervalo compacto de tempo se $H_1(t)$ for uma família uniformemente

limitada de operadores [52], ou seja, se houver $M \geq 0$, constante, tal que $\|H_1(t)\| \leq M$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Essa condição é automaticamente satisfeita para o Hamiltoniano de interesse em (1.2) pois f é periódica ou quase-periódica. O problema é que a convergência se dá apenas em intervalos compactos de tempo, de forma que (1.9) torna-se inconveniente para o estudo do comportamento do sistema (1.2) para tempos longos ($t \to +\infty$). Além disso, com $H_1(t)$ periódica ou quase-periódica, a série de Dyson sofre com o problema dos termos seculares, *i.e.*, polinômios em t que aparecem ordem a ordem nas integrações sucessivas de (1.9). A dificuldade com os termos seculares reside no fato de que os mesmos estragam a análise de convergência da série de Dyson na reta, além de impossibilitarem a prova de quase-periodicidade da solução obtida. Em suma, pode-se dizer que a expansão (1.9), apesar de trazer uma solução simples e direta, não é conveniente para o estudo do comportamento quase-periódico e para tempos longos da solução calculada. Nesse sentido, outros métodos de perturbação devem ser explorados para esses propósitos.

1.3 O Efeito de Localização Dinâmica

O chamado efeito de localização dinâmica, também conhecido pelo nome de efeito de destruição coerente de tunelamento, foi inicialmente sugerido no contexto da dinâmica quântica de uma partícula confinada a um potencial tipo poço duplo submetida à ação de uma força externa oscilante [14]. Esse sistema gerou interesse recente em conexão à chamada teoria do *caos quântico* devido ao caráter caóticos de seu correspondente clássico. Além disso, outro tema de investigação recente, tem sido o efeito gerado pela modulação externa no tunelamento quântico através da região classicamente impenetrável [16]. O sistema descrito acima pode ser representado pelo Hamiltoniano

$$H(p,x;t) = H_0(p,x) + Sx\,\mathrm{sen}(\omega t)\,, \quad \text{com} \quad H_0(p,x) = \frac{p^2}{2m} + \lambda(x^2 - a^2)^2\,, \tag{1.10}$$

onde $\lambda > 0$ descreve um potencial simétrico tipo poço duplo, m é a massa da partícula confinada ao potencial e S é a constante de acoplamento ao campo externo periódico de freqüência ω (confira Figura 1.1).

Em 1992 Grossmann *et al* [14] descobriram um comportamento peculiar na dinâmica de tunelamento do sistema (1.10), batizado por eles pelo nome de *destruição coerente de tunelamento*: um pacote de ondas Gaussiano inicialmente localizado em um dos poços de potencial nunca é transferido para o outro poço, como se o tunelamento quântico fosse congelado pela modulação externa periódica. Eles encontraram que esse fenômeno ocorre apenas para parâmetros de S e ω restritos a uma variedade unidimensional no plano bidimensional de parâmetros (S,ω).

Para λ e a grandes em (1.10) os dois primeiros auto-valores de H_0 têm energias próximas que diferem, digamos, 2ε. O menor auto-valor, $\Psi_+(x)$, é uma função par de x e o segundo, $\Psi_-(x)$ é uma função ímpar, sendo que os valores absolutos de ambos concentram-se próximos

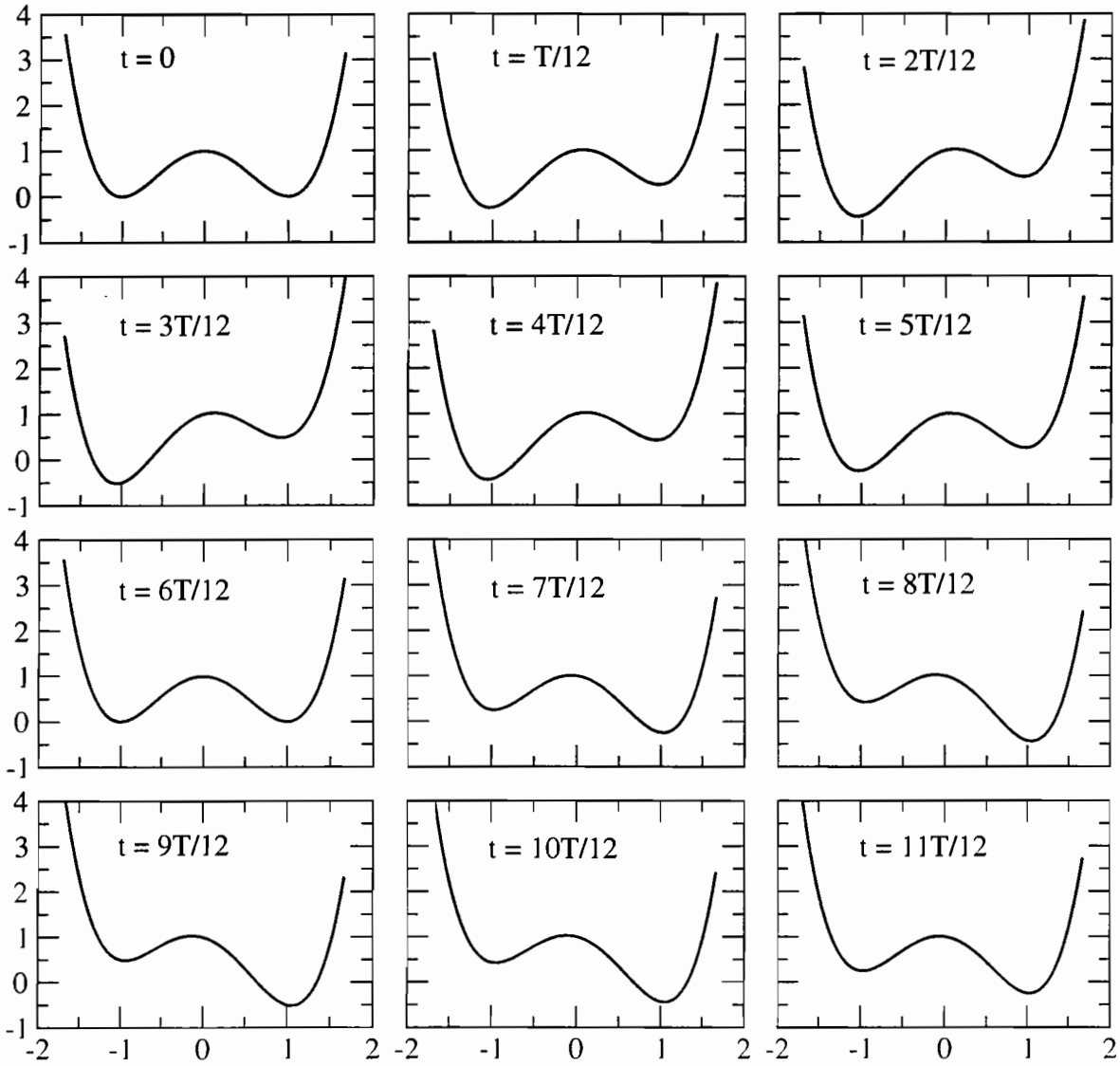


Figura 1.1: Ilustração do potencial $V(x;t) = \lambda(x^2 - a^2)^2 + Sx\,\mathrm{sen}(\omega t)$. Cada gráfico representa um instante de tempo específico, variando de $t = 0$, até $t = 11T/12$, em intervalos de $T/12$, onde $T = 2\pi/\omega$ é o período de oscilação do campo externo.

aos dois poços de potencial em $\pm a$. Para o estado $\Psi_d := (\Psi_+ + \Psi_-)/\sqrt{2}$ a função de onda é mais concentrada, digamos, no poço da direita, enquanto que para o estado $\Psi_e := (\Psi_+ - \Psi_-)/\sqrt{2}$ a função de onda é mais concentrada no poço da esquerda.

A transição entre Ψ_d e Ψ_e só pode se dar por um processo de tunelamento quântico, em função da presença da barreira de potencial separando os dois poços. Se nos restringirmos ao subespaço gerado por Ψ_+ e Ψ_- e representarmos o estado Ψ_+ pelo vetor $\binom{1}{0}$ e o estado Ψ_- pelo vetor $\binom{0}{1}$, teremos

$$\Psi_d = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \Psi_e = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Introduzindo um potencial dependente do tempo, a transição entre os estados Ψ_d e Ψ_e será descrita pela evolução de um sistema de dois-níveis como (1.2). Sendo a correspondente evolução temporal dada por um propagador $\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}(t,0)$, a probabilidade de transição do estado com função de onda concentrada no poço da direita em $t = 0$ ao estado com função de onda concentrada no poço da esquerda no instante de tempo t seria

$$P(t) := |\langle \Psi_e, \mathcal{U}(t)\Psi_d \rangle|^2 .$$

Em termos do sistema equivalente (1.3), definindo

$$\Phi_d := \exp(-i\pi\sigma_2/4)\Psi_d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \Phi_e := \exp(-i\pi\sigma_2/4)\Psi_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e sendo $U(t) = U(t,0)$ o operador de evolução associado à (1.3), temos

$$P(t) = |\langle \Phi_e, U(t)\Phi_d \rangle|^2 = |U_{12}(t)|^2 , \tag{1.11}$$

já que $\mathcal{U}(t) := \exp(i\pi\sigma_2/4)\, U(t)\, \exp(-i\pi\sigma_2/4)$. Portanto, a probabilidade de transição de Ψ_d em $t = 0$ para Ψ_e em $t > 0$ é descrito pela expressão (1.11) na aproximação considerada.

No caso onde não há interação com campo externo, *i.e.*, $f(t) = 0$, o sistema (1.3) passa a ser exatamente solúvel, sendo a evolução dada pelo operador

$$U_{f=0}(t) = \exp(-i\varepsilon\sigma_1 t) = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) & -\operatorname{sen}(\Omega t) \\ \operatorname{sen}(\Omega t) & \cos(\Omega t) \end{pmatrix}, \tag{1.12}$$

com $\Omega = \varepsilon$. Assim,

$$P(t) = \operatorname{sen}^2(\Omega t) , \tag{1.13}$$

e a probabilidade de transição varia entre 0 e 1 dentro de um período π/ε. A freqüência Ω que determina o período de transição entre os estados $\Psi_e \leftrightarrow \Psi_d$ é conhecida como freqüência secular ou freqüência de Rabi, em homenagem ao seu célebre trabalho.

Para $f(t) = F_0$ (campo dc), uma constante não nula, o sistema (1.3) também é solúvel, sendo o propagador dado por

$$U_{f=F_0}(t) = \exp[-i(\varepsilon\sigma_1 + F_0\sigma_3)t] = \begin{pmatrix} \cos(\Omega t) - iF_0\dfrac{\operatorname{sen}(\Omega t)}{\Omega} & -\varepsilon\dfrac{\operatorname{sen}(\Omega t)}{\Omega_0} \\ -\varepsilon\dfrac{\operatorname{sen}(\Omega t)}{\Omega_0} & \cos(\Omega t) + iF_0\dfrac{\operatorname{sen}(\Omega t)}{\Omega} \end{pmatrix}, \tag{1.14}$$

com freqüência secular dada por $\Omega = \sqrt{F_0^2 + \varepsilon^2}$. Nesse caso,

$$P(t) = \left(\frac{\varepsilon}{\Omega}\right)^2 \operatorname{sen}^2(\Omega t) . \tag{1.15}$$

Com relação ao caso $f(t) = 0$, observa-se que a probabilidade de transição é suprimida por um fator ε^2 (confira a Figura 1.2).

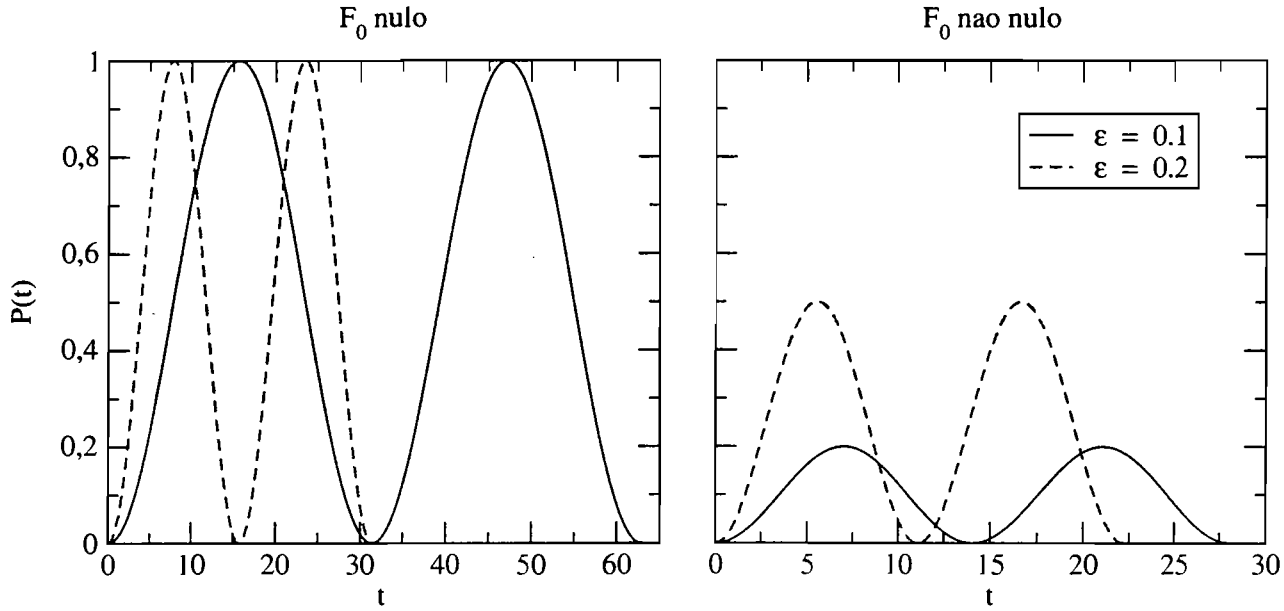


Figura 1.2: Probabilidades de transição para o sistema (1.3) com $f(t) = 0$ e $f(t) = F_0$, uma constante não nula. Apresentamos os gráficos de $P(t)$ de acordo com as expressões (1.13) e (1.15) para dois valores de ε.

Muito mais interessante é a situação onde a interação f é periodicamente variável no tempo. Para o caso mais simples de um campo monocromático $f(t) = \varphi \cos(\omega t)$ (campo ac), mostrou-se inicialmente em [14, 15] que

$$\Omega_1 = \varepsilon J_0 \left(\frac{2\varphi}{\omega} \right) \tag{1.16}$$

como primeira aproximação em ε para a freqüência de transição Ω. Acima, J_0 é a função de Bessel de primeiro tipo e ordem 0. Portanto, se a intensidade do campo φ e a sua freqüência de oscilação ω são escolhidas tal que $\chi_1 = \frac{2\varphi}{\omega}$ é um zero de J_0, então $\Omega \approx 0$, implicando em longos tempos de transição. Esse fenômeno, no contexto de [14] para o sistema (1.10), ficou conhecido pelo nome de *destruição coerente de tunelamento*, hoje mais corretamente chamado de *efeito de localização dinâmico*. Note que tal efeito, primeiramente apontado em [14, 15], indica a possibilidade de aproximadamente congelar o estado inicial do sistema quântico através da ação de uma interação externa dependente do tempo conveniente. Em termos práticos, pode-se dizer que o efeito de localização, hoje em dia, tem papel fundamental na manipulação de q-bits, em conexão com o conhecido efeito Zeno, e também desempenha papel importante no chamado fenômeno da transparência induzida. O efeito de localização dinâmica tem sido objeto de diversas investigações recentes. Em [17], por exemplo, estabeleceu-se um critério geral e rigoroso para o aparecimento da localização dinâmica e aplicado em situações interessantes, como para campos ac-dc e campos bicromáticos (caso quase-periódico). Para uma extensa revisão sobre o assunto, recomenda-se a leitura de [16]. Também remete-se o leitor aos trabalhos [17, 18, 19, 4, 6] para mais detalhes e referências sobre o assunto.

Uma observação importante que deve ser feita é que para um sistema de dois-níveis com

$\varepsilon \neq 0$ e para uma interação f arbitrária, a probabilidade de transição $P(t)$ não pode ser identicamente nula, pois dessa forma $U_{12}(t) = 0$, o que tornaria o operador de evolução $U(t)$ diagonal, contradizendo a equação de Schrödinger $i\partial_t U(t) = H_2(t)U(t)$, como pode-se facilmente constatar. Portanto, pelo menos para a aproximação de (1.10) em termos do sistema de dois-níveis, o efeito de congelamento não pode ser exato como sugerido em [14]. Portanto, uma análise mais detalhada da expansão completa de Ω em termos do parâmetro ε se torna necessária. O propósito da primeira parte desta tese é justamente esse, ou seja, desenvolver um método completo e rigoroso que permita estudar a aproximação de dois-níveis (1.2) em termos de uma solução perturbativa, bem como obter uma expansão completa para Ω que permita caracterizar melhor o efeito de localização dinâmica.

1.4 A Técnica Perturbativa

Esta seção descreve o método perturbativo introduzido em [2] para resolver o sistema (1.3). A principal virtude desse método com relação ao da série de Dyson reside no fato de que as expansões utilizadas pelo mesmo são livres de termos seculares, tornando possível a obtenção de uma solução quase-periódica formal. Mais do que isso, no caso periódico, mostrou-se inclusive a convergência uniforme no parâmetro ε de tais expansões para qualquer tempo $t \in \mathbb{R}$, bem como exibiu-se a forma explícita de Floquet do propagador $U(t)$ e uma expansão completa e convergente da freqüência secular Ω. Nesse sentido, faz-se necessário a apresentação detalhada desse método aqui.

Um resultado chave para o método perturbativo proposto é dado pelo teorema abaixo, cuja prova é estabelecida em [2]. Esse resultado permite expressar as soluções da equação (1.3) em termos de uma solução particular de uma determinada equação de Riccati generalizada.

Teorema 1.1 *Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}$ e seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g \in C^1(\mathbb{R})$, uma solução particular da seguinte equação de Riccati generalizada:*

$$\partial_t G(t) - iG(t)^2 - 2if(t)G(t) + i\varepsilon^2 = 0\,. \tag{1.17}$$

Então, a função $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$ dado por

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_+(t) \\ \phi_-(t) \end{pmatrix} = U(t)\Phi(0)\,,$$

onde

$$U(t) := \begin{pmatrix} R(t)(1 + i\,g(0)S(t)) & -i\,\varepsilon R(t)S(t) \\ -i\,\varepsilon\overline{R(t)S(t)} & \overline{R(t)}(1 - i\,\overline{g(0)S(t)}) \end{pmatrix}, \tag{1.18}$$

com

$$R(t) := \exp\left(-i\int_0^t (f(\tau) + g(\tau))\,d\tau\right) \quad e \quad S(t) := \int_0^t R(\tau)^{-2}\,d\tau \tag{1.19}$$

é solução da equação de Schrödinger (1.3) com valor inicial $\Phi(0) = \begin{pmatrix} \phi_+(0) \\ \phi_-(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. □

É interessante que se descreva as principais idéias que levaram ao Teorema 1.1. Conforme demonstrado em [2], as soluções da equação (1.3) podem ser estudadas em termos das soluções de uma versão complexa da equação de Hill, a saber

$$\ddot{\phi}(t) + \left(i\dot{f}(t) + \varepsilon^2 + f(t)^2\right)\phi(t) = 0\,. \tag{1.20}$$

De fato, uma manipulação simples mostra que as componentes de $\Phi(t)$ satisfazem

$$\ddot{\phi}_\pm(t) + \left(\pm i\dot{f}(t) + \varepsilon^2 + f(t)^2\right)\phi_\pm(t) = 0\,.$$

Tentando-se resolver (1.20) com o Ansatz exponencial

$$\phi(t) = \exp\left(-i\int_0^t (f(\tau) + g(\tau))d\tau\right)\,, \tag{1.21}$$

obtém-se que g deve satisfazer a equação de Riccati generalizada (1.17). Em seguida, procura-se encontrar uma solução para g em termos de uma série de potências em ε (que se anule para $\varepsilon = 0$), assim

$$g(t) = q(t)\sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\,\varepsilon^n\,, \tag{1.22}$$

onde

$$q(t) := \exp\left(i\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right) \tag{1.23}$$

é colocada em evidência por conveniência. Conforme será visto, a função q desempenhará um papel importante.

A idéia heurística por de trás dos Ansätze (1.21) e (1.22) é a seguinte. Para $\varepsilon \equiv 0$ uma solução para (1.20) é dada por $\exp\left(-i\int_0^t f(\tau)d\tau\right)$. Portanto, em (1.21) e (1.22) procura-se uma solução em termos de um *campo efetivo externo* da forma $f + g$, com g dada por uma série convergente de potências em ε, anulando-se para $\varepsilon = 0$. Uma solução da forma (1.21) leva a uma das duas soluções independentes de (1.20). A solução completa de (1.3) em termos das soluções de (1.17) é aquela descrita do Teorema 1.1 (veja a discussão em [2]).

Prossegue-se agora inserindo (1.22) em (1.17). O resultado é um conjunto recursivo de equações diferencias de primeira ordem para as funções v_n que podem ser facilmente integráveis. As soluções são

$$v_1(t) = \kappa_1 q(t)\,. \quad v_2(t) = q(t)\left[i\int_0^t (\kappa_1^2\mathcal{Q}_0(\tau) - \mathcal{Q}_0(\tau)^{-1})\,d\tau + \kappa_2\right]\,. \tag{1.24}$$

$$v_n(t) = q(t)\left[i\left(\int_0^t \sum_{p=1}^{n-1} v_p(\tau)v_{n-p}(\tau)\,d\tau\right) + \kappa_n\right]\,, \quad \text{for } n \geq 3\,, \tag{1.25}$$

onde os κ_n acima, $n \in \mathbb{Z}_+$, são constantes arbitrárias de integração e

$$\mathcal{Q}_0(t) := q(t)^2 = \exp\left(2i \int_0^t f(\tau)\, d\tau\right). \tag{1.26}$$

Definindo

$$\mathcal{I}_2(t) := \kappa_1^2 \mathcal{Q}_0(t) - \mathcal{Q}_0(t)^{-1}, \qquad \mathcal{I}_n(t) := \sum_{p=1}^{n-1} v_p(t) v_{n-p}(t), \quad n \geq 3,$$

pode-se escrever (1.24)-(1.25) como

$$v_1(t) = \kappa_1 q(t), \quad v_n(t) = iq(t) \int_0^t \mathcal{I}_n(\tau) d\tau + \kappa_n q(t), \quad n \geq 2. \tag{1.27}$$

Observe que, em particular, poder-se-ia ajustar todas as constantes arbitrárias κ_n iguais a zero. Entretanto, essa não seria uma escolha muito inteligente, uma vez que a mesma resultaria em termos polinomiais em t nas funções v_n (os chamados termos seculares). Isso restringiria o raio de convergência da série (1.22) para tempos curtos. Em [2], notou-se que existe uma escolha especial das constantes κ_n para a qual pode-se eliminar completamente os termos polinomiais em t em todas as ordens da expansão (1.22). A fixação desses valores das constantes κ_n se faz através de um procedimento iterativo de remoção de termos seculares, o qual foi chamado em [2] de *eliminação de termos seculares*. Tal procedimento será descrito a seguir de forma resumida.

Primeiramente é importante observar que, assumindo a quase-periodicidade de f como em (1.8), pode-se demonstrar que q definida em (1.23) também é quase-periódica (veja demonstração em [2]). Claramente, o mesmo ocorre para $\mathcal{Q}_0$ definida em (1.26), v_1 em (1.24) e para o integrando $\mathcal{I}_2$ que aparece em v_2 na expressão (1.24). Dessa forma, tanto q, $\mathcal{Q}_0$, v_1, quando $\mathcal{I}_2$ tem uma expansão de Fourier e um valor médio bem definido. Denotando-se por $\underline{\omega}$ o vetor de freqüências definido por

$$\underline{\omega} := \begin{cases} \vec{\omega}_f \in \mathbb{R}_+^B, & \text{se } F_{\bar{0}} = 0 \\ (\vec{\omega}_f, F_{\bar{0}}) \in \mathbb{R}_+^{B+1}, & \text{se } F_{\bar{0}} \neq 0, \end{cases} \tag{1.28}$$

onde $\vec{\omega}_f$ é o vetor de freqüências de f dado em (1.8), pode-se escrever a decomposição de Fourier de q e $\mathcal{Q}_0$ como

$$q(t) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} Q_{\underline{m}} e^{i\underline{m}\cdot\underline{\omega}t} \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_0(t) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} Q_{\underline{m}}^{(2)} e^{i\underline{m}\cdot\underline{\omega}t}, \tag{1.29}$$

onde

$$A := \begin{cases} B, & \text{se } F_{\bar{0}} = 0 \\ B+1, & \text{se } F_{\bar{0}} \neq 0. \end{cases}$$

O próximo passo consiste em usar o fato de que $\mathcal{I}_2$ depende da constante arbitrária de integração κ_1. Assim, a idéia chave é fixar o valor de κ_1 de maneira que o valor médio de $\mathcal{I}_2$ seja igual à zero, ou seja,

$$M(\mathcal{I}_2) = M(\kappa_1^2 \mathcal{Q}_0 - \mathcal{Q}_0^{-1}) = 0$$

Como $\mathcal{Q}_0$ tem valor médio bem definido pois é uma função quase-periódica, segue imediatamente da imposição acima que

$$\kappa_1^2 = \frac{M(\mathcal{Q}_0^{-1})}{M(\mathcal{Q}_0)} = \frac{\overline{M(\mathcal{Q}_0)}}{M(\mathcal{Q}_0)}. \tag{1.30}$$

Com essa escolha de κ_1, garante-se a falta de um termo constante na expansão de Fourier de $\mathcal{I}_2$. Como $\mathcal{I}_2$ está sendo integrado no tempo, isso implica na ausência de um termo linear em t na expressão final para v_2.

Uma observação importante a se fazer é que (1.30) só faz sentido se a condição $M(\mathcal{Q}_0) \neq 0$ for assumida. Note que como $\mathcal{Q}_0$ depende exclusivamente de f (confira (1.26)), essa imposição reflete em uma restrição sobre a interação f.

Assumindo a hipótese $M(\mathcal{Q}_0) \neq 0$, pode-se fixar recursivamente todas as constantes κ_n impondo que o valor médio dos integrandos $\mathcal{I}_n$ em (1.27) seja nulo. Esse procedimento remove, ordem a ordem em ε, a presença dos termos seculares na expansão (1.22) para g, permitindo demonstrar a quase-periodicidade de todas as funções v_n assim construídas. Esse trabalho é essencialmente apresentado em [2].

Uma vez que todos os termos seculares tenham sido removidos pelo procedimento descrito acima, pode-se escrever

$$v_n(t) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} V_{\underline{m}}^{(n)} e^{i\underline{m}\cdot\underline{\omega}t}$$

que faz sentido desde que a soma convirja absolutamente. De fato, demonstrou-se em [2] essa convergência da seguinte maneira: primeiramente mostrou-se que os coeficientes de Fourier $Q_{\underline{m}}$ de q satisfazem $|Q_{\underline{m}}| \leq \mathcal{Q} e^{-\chi|\underline{m}|}$, para algum $\chi > 0$. Então, o método de eliminação de termos seculares descrito acima foi aplicado para se fixar as constantes κ_n. Como resultado desses dois primeiros passos, obteve-se cotas indutivas da forma $|V_{\underline{m}}^{(n)}| \leq \mathcal{V}_n e^{-\chi|\underline{m}|}$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, provando, portanto, convergência absoluta da expansão de Fourier.

Entretanto, devido ao mau comportamento das constantes $\mathcal{V}_n$ para $n \to \infty$, não foi possível demonstrar em [2] a convergência em ε da expansão (1.22) para nenhum valor de ε_0 tal que $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ (obteve-se, para n grande, uma estimativa do tipo $\mathcal{V}_n \sim AB^n(n!)^\alpha$, onde A, B e α são constantes positivas). Portanto, as soluções quase-periódicas encontradas em [2] para (1.17) devem ser vistas apenas como séries formais de potência.

O motivo do mau comportamento das constantes $\mathcal{V}_n$ está relacionada com a presença de pequenos denominadores nas relações recursivas que definem os coeficientes $V_{\underline{m}}^{(n)}$. Esse, aliás, é um problema típico de sistemas quase-periódicos quando tratados perturbativamente. Uma discussão geral sobre o problema de pequenos denominadores para o sistema aqui discutido é encontrada em [2]. Entretanto, no caso onde a interação f é periódica ($B = 1$), resultados muito mais fortes podem ser obtidos. Em [3], onde esse caso foi estudado, foi possível demonstrar a convergência da série de potências (1.22) para todo $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, onde ε_0 é escolhido suficientemente pequeno, e também convergência uniforme das séries de Fourier envolvidas no cálculo das funções de onda. Na próxima seção, descreve-se em mais detalhes os resultados

obtidos em [2] e [3] com o método perturbativo aqui exposto. A intenção é mostrar que apesar de gerais, os resultados dos trabalhos supracitados não são suficientemente completos para estudar o problema da localização dinâmica exposto na Seção 1.3, página 6. Mais detalhes serão apresentados a diante.

1.5 Resultados Prévios

Começamos enunciando o principal resultado contido em [2].

Teorema 1.2 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função quase-periódica com*

$$f(t) = \sum_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^B} F_{\vec{m}}\, e^{i\vec{\omega}_f \cdot \vec{m} t},$$

de tal forma que a soma acima contenha apenas um número finito de termos. Suponhamos que o vetor de freqüências $\underline{\omega}$ (definido em (1.28), página 12) satisfaça condições Diophantinas, ou seja, suponhamos que haja constantes $C_0 > 0$ e $\tau > 0$ tais que, para todo $\underline{n} \in \mathbb{Z}^A$, $\underline{n} \neq \underline{0}$,

$$|\underline{n} \cdot \underline{\omega}| \geq C_0^{-1} |\underline{n}|^{-\tau}.$$

(I) *Suponhamos que f satisfaz a condição $M(\mathcal{Q}_0) \neq 0$. Então há uma série de potências formal*

$$g(t) = q(t) \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \varepsilon^n,$$

representando uma solução particular da equação de Riccati generalizada (1.17), página 10, tal que todos os coeficientes c_n são funções quase-periódicas e podem ser representadas pela série de Fourier uniformemente convergente

$$c_n(t) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{Z}^A} C_{\underline{m}}^{(n)}\, e^{i\underline{m} \cdot \underline{\omega} t},$$

onde, para seus coeficientes $C_{\underline{m}}^{(n)}$, temos

$$|C_{\underline{m}}^{(n)}| \leq \mathcal{K}_n e^{-\chi_0 |\underline{m}|},$$

onde $\chi_0 > 0$ é uma constante e $\mathcal{K}_n \geq 0$.

(II) *Suponhamos que f satisfaz as condições $M(\mathcal{Q}_0) = 0$ e $M(\mathcal{Q}_1) \neq 0$, onde*

$$\mathcal{Q}_1(t) := \mathcal{Q}_0(t) \int_0^t (\mathcal{Q}_0(\tau)^{-1} - M(\mathcal{Q}_0^{-1}))\, d\tau. \tag{1.31}$$

Então há uma série de potências formal

$$g(t) = q(t) \sum_{n=1}^{\infty} e_{\underline{n}}(t) \varepsilon^{2n},$$

representando uma solução particular da equação de Riccati generalizada (1.17), página 10, tal que todos os coeficientes e_n são quase-periódicos e podem ser representados pela série de Fourier uniformemente convergente

$$e_n(t) = \sum_{\underline{m}\in\mathbb{Z}^A} E_{\underline{m}}^{(n)}\, e^{i\underline{m}\cdot\underline{\omega}t},$$

onde, para os coeficientes de Fourier $E_{\underline{m}}^{(n)}$, temos

$$|E_{\underline{m}}^{(n)}| \leq \mathcal{L}_n e^{-\chi_0|\underline{m}|},$$

onde $\chi_0 > 0$ é uma constante e $\mathcal{L}_n \geq 0$. □

O Teorema 1.2 apresenta soluções quase-periódicas formais para a equação de Riccati (1.17) sob as hipóteses $M(\mathcal{Q}_0) \neq 0$, ou $M(\mathcal{Q}_0) = 0$ com $M(\mathcal{Q}_1) \neq 0$, respectivamente chamadas de condições (I) ou (II) acima. Tais condições técnicas se fazem necessárias para que o procedimento de eliminação de termos seculares possa ser realizado. Conforme discutido na Seção 1.4, página 10, a condição (I) é essencial para que (1.30) faça sentido. É importante enfatizar que as condições (I) e (II) representam restrições à função f e não ao parâmetro ε.

Conforme já mencionado anteriormente, as afirmativas do Teorema 1.2 não são suficientes para garantir convergência das expansões em ε para g. Teríamos garantida a quase-periodicidade de g se tais expansões convergissem uniformemente na reta real, mas tal não é o caso. Infelizmente, como discutido ao fim da Seção 1.4, o comportamento para n grande das constantes $\mathcal{K}_n$ e $\mathcal{L}_n$ é ruim para permitir convergência absoluta das séries de potência formais em ε para g no caso geral onde f é quase-periódica.

Menos problemático é o caso onde f é periódica, já que aí não há problemas com pequenos denominadores. Em [3], o autor mostrou como as dificuldades analisadas em [2] podem ser contornadas para f periódica, demonstrando a convergência das expansões perturbativas em ε uniformemente em $t \in \mathbb{R}$. Conforme apontado em [3], o método aplicado não só recupera a forma de Floquet da solução da equação de Schrödinger (1.3) original (confira (1.33)-(1.34) abaixo), mas também permite o cálculo da freqüência secular Ω e dos coeficientes de Fourier em termos de expansões convergentes explícitas em ε, o que caracteriza uma vantagem importante com relação à outros métodos de expansão conhecidos.

O principal resultado de [3] pode ser enunciado de acordo com o teorema abaixo.

Teorema 1.3 *Seja f real e T_{ω_f}-periódica cuja decomposição de Fourier*

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_n e^{in\omega_f t}$$

contenha apenas um número finito de termos, i.e., o conjunto de inteiros $\{n \in \mathbb{Z} |\ F_n \neq 0\}$ seja finito. Seja

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_+(t) \\ \phi_-(t) \end{pmatrix} = U(t)\Phi(0) = U(t,0)\Phi(0) \tag{1.32}$$

a solução da equação (1.3), página 3. Suponha que f satisfaça uma das duas condições (I) ou (II) do Teorema 1.2, a saber,

(I) $M(\mathcal{Q}_0) \neq 0$;

(II) $M(\mathcal{Q}_0) = 0$, *mas* $M(\mathcal{Q}_1) \neq 0$,

com $\mathcal{Q}_0$ e $\mathcal{Q}_1$ definidos respectivamente em (1.26) e (1.31). Então, para cada f como acima, existe uma constante $K > 0$ (dependente dos coeficientes de Fourier $\{F_n,\ n \in \mathbb{Z}\ , n \neq 0\}$ e de ω_f) de forma que, para cada ε com $|\varepsilon| < K$, existe $\Omega \in \mathbb{R}$ e funções T_{ω_f}-periódicas $u_{11}^{\pm}$ e $u_{12}^{\pm}$ tal que o propagador $U(t)$ em (1.32) pode ser escrito como

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_{11}(t) & U_{12}(t) \\ U_{21}(t) & U_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}(t) & U_{12}(t) \\ -\overline{U_{12}(t)} & \overline{U_{11}(t)} \end{pmatrix},$$

com

$$U_{11}(t) = e^{-i\Omega t}\, u_{11}^{-}(t) + e^{i\Omega t}\, u_{11}^{+}(t)\,, \quad U_{12}(t) = e^{-i\Omega t}\, u_{12}^{-}(t) + e^{i\Omega t}\, u_{12}^{+}(t)\,. \tag{1.33}$$

As funções $u_{11}^{\pm}$ e $u_{12}^{\pm}$ apresentam expansões de Fourier absolutamente e uniformemente convergentes:

$$u_{11}^{\pm}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{U}_{11}^{\pm}(n) e^{in\omega t}, \quad u_{12}^{\pm}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{U}_{12}^{\pm}(n) e^{in\omega t}. \tag{1.34}$$

Além disso, sob as mesma hipóteses, Ω e os coeficientes de Fourier $\mathcal{U}_{11}^{\pm}(n)$ e $\mathcal{U}_{12}^{\pm}(n)$ podem ser expressados em termos de séries de potência em ε absolutamente convergentes. □

Os teoremas acima resumem os principais resultados contidos nos trabalhos [2] e [3]. A seguir, mostramos que esses não são gerais o suficiente para se estudar o problema de localização dinâmica.

1.6 A Freqüência Secular e o Efeito de Localização

Vamos começar esta seção discutindo as condições (I) e (II) do Teorema 1.3 (caso periódico). Escrevendo a decomposição de Fourier de f como

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{J} \left[\varphi_1^{(n)} \cos(n\omega_f t) + \varphi_2^{(n)} \operatorname{sen}(n\omega_f t) \right]. \tag{1.35}$$

o conjunto $\mathfrak{F}_{J,\omega_f}$ de todas as possíveis funções f com um dado J e ω_f pode ser identificado com o espaço de parâmetros $\mathbb{R}^{2J+1}$ de todos os coeficientes reais F_0, $\varphi_{1,2}^{(n)}$, $1 \leq n \leq J$. A condição (complexa) $M(\mathcal{Q}_0) = 0$ determina um subconjunto $(2J)$ ou $(2J-1)$-dimensional de $\mathfrak{F}_{J,\omega}$, onde a condição (II) eventualmente se aplica. É também nesse subconjunto que a condição mais forte $M(\mathcal{Q}_0) = M(\mathcal{Q}_1) = 0$ deve valer, restringindo o espaço de parâmetros de f a um subconjunto

$(2J-1)$, $(2J-2)$ ou $(2J-3)$-dimensional, se não trivial. Deve-se, portanto, esperar que condições sucessivas como (I) e (II) devam, eventualmente, exaurir completamente o conjunto $\mathfrak{F}_{J,\omega}$.

Para ilustrar essas idéias, vamos considerar o exemplo mais simples, onde f representa uma interação monocromática:

$$f(t) = \varphi \cos(\omega t)$$

Um cálculo simples mostra que

$$M(\mathcal{Q}_0) = \frac{\omega}{4\pi} \int_{-\frac{2\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{2i\varphi \operatorname{sen}(\omega t)/\omega}\, dt = J_0\left(\frac{2\varphi}{\omega}\right),$$

onde J_0 é a função de Bessel de primeiro tipo e ordem zero. Portanto, a condição (I) é satisfeita exceto quando $\varphi = \omega x_a/2$, $a \in \mathbb{Z}_+$, onde x_a é o a-ésimo zero de J_0 em $\mathbb{R}_+$. A condição (II), entretanto, nunca é satisfeita porque $M(\mathcal{Q}_1)$ se anula identicamente nesse caso (detalhes no Capítulo 3). Portanto, para obter-se uma solução completa o Teorema 1.3 deve ser estendido para incluir condições além de (I) e (II), valendo quando $\varphi = \omega x_a/2$.

É importante notar, conforme mencionado na Seção 1.3 (confira (1.16)), que a condição $M(\mathcal{Q}_0) = J_0\left(\frac{2\varphi}{\omega}\right) = 0$ coincide com o critério para ocorrência de localização dinâmica apontado em [14, 15]. Portanto, pelo menos nesse caso, a situação onde as condições (I) e (II) são violadas é precisamente a relevante para o tratamento rigoroso do efeito da localização dinâmica. Na realidade, devido a forma geral da expansão em ε da freqüência secular Ω, resulta que isso é verdade de forma geral inclusive para interações f quase-periódicas, não apenas para o caso periódico monocromático. De fato, uma característica do método perturbativo aqui apresentado, é que o mesmo permite exibir a expansão completa de Ω em termos de ε, a saber [3],

$$\Omega = M(f) + M(g) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n M(q v_n)\,. \tag{1.36}$$

Pelo Teorema 1.3 acima, essa expressão é convergente para $|\varepsilon|$ pequeno suficiente.

O conhecimento da expansão completa de Ω é particularmente importante para a investigação qualitativa do comportamento das soluções para $t \to \infty$. Assim como no caso livre de interações ($f = 0$), Ω representa a freqüência resultante de transição entre os estados do sistema considerado (confira (1.12), página 8). Portanto, Ω pequeno comparado com a freqüência de transição do sistema livre implica em longos tempos de transição para o sistema perturbado. Lembramos que para $f = 0$, tem-se $\Omega = \varepsilon$.

Após alguns cálculos simples usando (1.24)-(1.25), obtém-se

$$\begin{aligned}\Omega &= F_0 + \varepsilon\kappa_1 M(\mathcal{Q}_0) + \varepsilon^2\left[i\kappa_1^2 M(\mathcal{Q}_2) - iM(\mathcal{Q}_1) + \kappa_2 M(\mathcal{Q}_0)\right] \\ &\quad + \varepsilon^3\left[2\kappa_1 M(\mathcal{Q}_3) + \kappa_3 M(\mathcal{Q}_0)\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\,, \end{aligned} \tag{1.37}$$

onde

$$\mathcal{Q}_2(t) := \mathcal{Q}_0(t) \int_0^t (\mathcal{Q}_0(\tau) - M(\mathcal{Q}_0))\, d\tau \tag{1.38}$$

e

$$\mathcal{Q}_3(t) := \mathcal{Q}_0(t) \int_0^t (\mathcal{Q}_1(\tau) - M(\mathcal{Q}_1))\, d\tau. \tag{1.39}$$

Não é difícil demonstrar que a condição $M(\mathcal{Q}_0) = 0$ implica $M(\mathcal{Q}_2) = 0$ (confira o Corolário 2.4, página 22). Portanto, no caso (II), temos

$$\Omega = F_0 - i\varepsilon^2 M(\mathcal{Q}_1) + 2\kappa_1 \varepsilon^3 M(\mathcal{Q}_3) + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\,, \tag{1.40}$$

Se adicionalmente $M(\mathcal{Q}_1) = 0$, uma situação além da condição (II) e, portanto, não contida nos resultados dos trabalhos [2, 3] (confira o Teorema 1.2 e Teorema 1.3), teríamos

$$\Omega = F_0 + 2\kappa_1 \varepsilon^3 M(\mathcal{Q}_3) + \mathcal{O}(\varepsilon^4)\,. \tag{1.41}$$

Se ainda $F_0 = 0$, então $\Omega = O(\varepsilon^3)$, fato primeiramente observado em [4]. Essa fraca dependência de Ω em ε implica em tempos longos de transição para o sistema (1.3), *i.e.*, um efeito de localização dinâmica. A conclusão importante é, portanto, que a análise perturbativa do efeito de localização não está contida nos resultados dos trabalhos [2, 3] pois os mesmos estão restritos aos casos (I) e (II), as quais não cobrem as condições necessárias à localização. Nesse sentido, faz-se necessário estender a demonstração dos teoremas 1.2 e 1.3 para a nova situação $M(\mathcal{Q}_0) = M(\mathcal{Q}_1) = 0$. Esse foi essencialmente o trabalho (não trivial) desenvolvido em [5], o qual será apresentado no próximo capítulo. A inclusão dessa nova classe de funções periódicas resulta em uma solução perturbativa praticamente completa para interações simples, como $f(t) = F_0 + \varphi \cos(\omega t)$ (campos ac-dc), a qual representa uma situação física relevante.

*

Capítulo 2

Análise Perturbativa do Efeito de Localização Dinâmica

Neste capítulo, identifica-se a primeira condição seguinte aos casos (I) e (II) dos teoremas 1.2 e 1.3. Essa condição será chamada de (III), e mostra-se, em seguida, que o método de eliminação de termos seculares exposto no capítulo anterior também se aplica. Para interações periódicas, demonstra-se que a expansão perturbativa (1.22) para g (vide página 11) converge para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno, uniformemente para todo $t \in \mathbb{R}$.

Com relação ao efeito de localização dinâmica, os resultados aqui apresentados podem ser resumidos da seguinte forma: para interações periódicas, mostra-se que a freqüência secular Ω é uma função analítica de ε (para $|\varepsilon|$ pequeno), e obtém-se expressões fechadas para cada um dos termos de sua série perturbativa. Além disso, demonstra-se que não só o termo de primeira ordem da expansão perturbativa de Ω é nulo, como também o termo de segunda ordem. No caso particular de interações monocromáticas, mostra-se que o termo de terceiro ordem da expansão perturbativa de Ω é não nulo, provando que o efeito de localização é, em verdade, de terceira ordem, e não exato como originalmente sugerido em [14, 15]. Tanto quanto se sabe, esses resultados são novos, uma vez que exige-se um conhecimento detalhado da expansão completa de Ω em termos de ε, só alcançada com os métodos aqui apresentados. Além disso, é bom ressaltar que tais métodos são bastante gerais, no sentido de que os mesmos não limitam-se apenas ao caso de interações monocromáticas ou campos ac-dc.

2.1 Resultados Principais

Agora enuncia-se os dois principais teoremas deste capítulo.

Teorema 2.1 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real quase-periódica satisfazendo*

$$\textbf{(III)} \quad M(\mathcal{Q}_0) = M(\mathcal{Q}_1) = 0, \ \textit{mas} \ M(\mathcal{Q}_3) \neq 0.$$

onde se definiu $\mathcal{Q}_3$ em (1.39), página 18. Então, existem constantes κ_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, tal que todas as funções v_n dadas em (1.24)-(1.25), página 11, são quase-periódicas. As expressões recursivas explícitas para as constantes κ_n são encontradas (2.47)-(2.49), página 34. □

A prova do resultado acima é o conteúdo da Seção 2.3. O Teorema 2.1 afirma que o procedimento de eliminação de termos seculares descrito na Seção 1.4 para o caso (I), também se aplica sob a condição (III). Entretanto, quando f for quase-periódica, isso não implica que a solução formal (1.22) da equação de Riccati (1.17) convirja, uma vez que as mesmas dificuldades com pequenos denominadores também se fazem presentes.

Para f periódica, a situação é diferente e resultados mais fortes podem ser provados. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ real e periódica dada por

$$f(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} F_m e^{im\omega t}$$

com freqüência ω. Se $F_0 = M(f) = 0$, q e $\mathcal{Q}_0$ também são periódicas com espectro de freqüências contido em $\{n\omega,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Seguindo a notação introduzida em (1.29), página 12, escrevemos a decomposição de Fourier de q e $\mathcal{Q}_0$ como

$$q(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} Q_m e^{im\omega t}, \quad \mathcal{Q}_0(t) = q(t)^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} Q_m^{(2)} e^{im\omega t}. \tag{2.1}$$

Pelas relações (1.24)-(1.25) e com a escolha das constantes κ_n mencionadas no Teorema 2.1 (confira (2.47)-(2.49)), as funções v_n também são periódicas com espectro de freqüências contido em $\{n\omega,\ n \in \mathbb{Z}\}$. Assim, escreve-se

$$v_n(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} V_m^{(n)} e^{im\omega t}.$$

Na Seção 2.4, página 34, demonstra-se o teorema abaixo, o qual justifica todo o procedimento para o caso de interações periódicas e estabelece convergência da expansão (1.22).

Teorema 2.2 *Seja f real periódica com $F_0 = M(f) = 0$ e tal que a condição (III) do Teorema 2.1 seja satisfeita. Além disso, assuma que os coeficientes Q_m e $Q_m^{(2)}$ em (2.1) satisfaçam a seguinte hipótese: para qualquer $\chi > 0$, existe uma constante $\mathcal{Q} \equiv \mathcal{Q}(\chi)$ tal que*

$$|Q_m| \leq \mathcal{Q} \frac{e^{-\chi|m|}}{\langle\langle m \rangle\rangle^2} \quad e \quad |Q_m^{(2)}| \leq \mathcal{Q} \frac{e^{-\chi|m|}}{\langle\langle m \rangle\rangle^2}, \tag{2.2}$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$ (para a definição de $\langle\langle m \rangle\rangle$, confira página xviii). Então, com as constantes κ_n fixadas de acordo com o Teorema 2.1, os coeficientes de Fourier das funções v_n dadas em (1.24)-(1.25) satisfazem

$$|V_m^{(n)}| \leq M_0 (M_1)^n \frac{e^{-\chi|m|}}{\langle\langle m \rangle\rangle^2}, \quad \forall m \in \mathbb{Z},\ n \geq 1,$$

para constantes positivas M_0 e M_1. Conseqüentemente, a expansão em série de potências (1.22), representando uma solução de (1.17), converge uniformemente para todo $t \in \mathbb{R}$, desde que $|\varepsilon| < 1/M_1$. □

Segue imediatamente do teorema acima que as principais conclusões do Teorema 1.3 também são válidas sob a condição (III). Em particular, segue a validade da forma de Floquet (1.33) e os fatos de que a freqüência secular Ω e os coeficientes de Fourier de (1.34) são funções analíticas de ε para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno. É importante observar que as hipóteses (2.2) foram verificadas em [2] para f periódica com um número finito de termos em sua série de Fourier. A condição $F_0 = M(f) = 0$ acima não é crucial e pode ser eliminada seguindo os procedimentos descritos em [3].

2.2 Propriedades Especiais

Vamos agora introduzir algumas notações e técnicas que serão úteis no que segue. Uma vez que expressões como

$$f(t) \int_0^t dt'\, g(t')$$

freqüentemente surgirão no decorrer de nossos cálculos, é conveniente definirmos uma notação simplificada da seguinte forma:

$$(\, f \,|\, g \,)_t \;:=\; f(t) \int_0^t dt'\, g(t')\,. \tag{2.3}$$

Além disso, se $(\, f \,|\, g \,)_t$ é uma função quase-periódica em t, então $M(\, f \,|\, g \,)$ denota o seu valor médio. Definimos também

$$(\, f \,|\, g \,|\, h \,)_t := (\, f \,|\, (\, g \,|\, h \,)_{t'} \,)_t = f(t) \int_0^t dt'\, g(t') \int_0^{t'} dt''\, h(t'')\,.$$

Composições com mais de três funções como $(f_1 \,|f_2|\, \cdots \,|\, f_n)_t$ são definidas de forma análoga. Assim, para $n > 2$,

$$(f_1 \,|f_2|\, \cdots \,|\, f_n)_t := (\, f_1 \,|\, (f_2 \,|\, \cdots \,|\, f_n)_{t'} \,)_t\,.$$

2.2.1 Propriedades do Valor Médio

As seguintes propriedades gerais sobre o valor médio de composição de funções quase-periódicas como (2.3) vão ser usadas em muitos propósitos neste capítulo tese:

Proposição 2.3 *Seja $a : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e $c : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funções quase-periódicas com coeficientes de Fourier denotados por $A_{\underline{m}}$, $B_{\underline{m}}$ e $C_{\underline{m}}$, $\underline{m} \in \mathbb{Z}^A$, respectivamente. Então, valem as seguinte afirmativas:*

1. *Se $M(c) = 0$, então ao coeficientes de Fourier de $h(t) := (\, b \,|\, c \,)_t$ são dados por*

$$H_{\underline{n}} = \sum_{\underline{m} \neq \underline{0}} \frac{i\, C_{\underline{m}} \,(B_{\underline{n}} - B_{\underline{n}-\underline{m}})}{\underline{m} \cdot \underline{\omega}}\,, \tag{2.4}$$

para todo $\underline{n} \in \mathbb{Z}^A$. *Além disso, se* $M(b) = 0$ *e* $C_{\underline{m}}B_{-\underline{m}} = C_{-\underline{m}}B_{\underline{m}}$ *para todo* $\underline{m} \neq \underline{0}$, *então* $M(h) = 0$.

2. *Se* $M(b) = 0$ *e* $M(c) = 0$, *então* $M(\,b\,|\,c\,) = -M(\,c\,|\,b\,)$.

3. *Se* $M(c) = 0$, *então* $M(\,c\,|\,c\,) = 0$.

4. *Se* $M(a) = M(c) = M(\,b\,|\,c\,) = 0$, *então*

$$M(\,a\,|\,b\,|\,c\,) = -M\left[b(t)\left(\int_0^t a(\tau)\,d\tau\right)\left(\int_0^t c(\tau)\,d\tau\right)\right]. \tag{2.5}$$

Além disso, se ainda $M(\,b\,|\,a\,) = 0$, *então* $M(\,a\,|\,b\,|\,c\,) = M(\,c\,|\,b\,|\,a\,)$.

5. *Se* $M(a) = M(b) = M(c) = 0$ *e* $M(\,b\,|\,c\,) = M(\,c\,|\,a\,) = M(\,a\,|\,b\,) = 0$, *então*

$$M(\,a\,|\,b\,|\,c\,) + M(\,b\,|\,c\,|\,a\,) + M(\,c\,|\,a\,|\,b\,) = 0\,. \tag{2.6}$$

6. *Se* $M(a) = 0$, *segue de (3) e (5) que* $M(\,a\,|\,a\,|\,a\,) = 0$. □

Prova. Podemos provar (2.4) calculando explicitamente a decomposição de Fourier de $h(t)$. Agora, se $M(b) = B_0 = 0$ e $C_{\underline{m}}B_{-\underline{m}} = C_{-\underline{m}}B_{\underline{m}}$ para todo $\underline{m} \in \mathbb{Z}^A_*$, então

$$H_0 = \sum_{\underline{m}\neq\underline{0}} \frac{-i\,C_{\underline{m}}B_{-\underline{m}}}{\underline{m}\cdot\underline{\omega}} = \frac{-i}{2}\sum_{\underline{m}\neq\underline{0}} \frac{(C_{\underline{m}}B_{-\underline{m}} - C_{-\underline{m}}B_{\underline{m}})}{\underline{m}\cdot\underline{\omega}} = 0\,. \tag{2.7}$$

Como $M(h) = H_0$, completamos a prova de (1). Para demonstrar (2), simplesmente usamos a primeira igualdade de (2.7) para escrever

$$M(\,b\,|\,c\,) = \sum_{\underline{m}\neq\underline{0}} \frac{-i\,C_{\underline{m}}B_{-\underline{m}}}{\underline{m}\cdot\underline{\omega}}$$

e

$$M(\,c\,|\,b\,) = \sum_{\underline{m}\neq\underline{0}} \frac{-i\,B_{\underline{m}}C_{-\underline{m}}}{\underline{m}\cdot\underline{\omega}}\,.$$

Trocando $\underline{m} \to -\underline{m}$, a afirmativa segue. O ítem (3) segue como mera conseqüência de (2) quando $b = c$. A primeira afirmativa de (4) pode ser provada usando (2), tomando $h(t) := (\,b\,|\,c\,)_t$ e notando que $M(h) = M(\,b\,|\,c\,) = 0$ e $M(a) = 0$. Para provar a segunda afirmativa de (4), tudo o que precisamos fazer é inverter os papéis de c e a (note que como $M(\,b\,|\,a\,) = 0$, o valor médio de $(\,c\,|\,b\,|\,a\,)_t$ está bem definido). Finalmente, a afirmativa (5) pode ser facilmente demonstrada escrevendo

$$b(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t b(t')\,dt'$$

e usando integração por partes junto com (2.5). ■

O seguinte corolário trivial é de importância crucial em alguns de nossos cálculos:

Corolário 2.4 *Se* $M(\mathcal{Q}_0) = 0$, *então sempre* $M(\mathcal{Q}_2) = 0$. □

Prova. Se $M(\mathcal{Q}_0) = 0$, então por (1.38) $\mathcal{Q}_2(t) = (\,\mathcal{Q}_0\,|\,\mathcal{Q}_0\,)_t$. Portanto, pela afirmativa (3) da Proposição 2.3, segue que $M(\mathcal{Q}_2) = 0$. ■

2.2.2 A Operação de Renormalização

Para funções quase-periódicas gerais $a_1, \ldots, a_n$, a função $(a_1 \mid \cdots \mid a_n)_t$ não é, em geral, quase-periódica. De fato, uma integração realizada sobre uma função quase-periódica com valor médio diferente de zero produz um termo linear em t o qual, eventualmente, poderá se transformar em um termo polinomial de maior grau após novas integrações. Descrevemos aqui uma operação destinada a extrair uma função quase-periódica a partir da composição $(a_1 \mid \cdots \mid a_n)_t$. Basicamente, essa operação age subtraindo iterativamente o valor médio das funções sendo integradas. Tal procedimento é chamado aqui de *renormalização* devido a certa analogia com o método de renormalização perturbativa em teoria quântica de campos. Tal operação de renormalização será usado neste capítulo crucialmente, de forma que aqui apresentamos sua definição precisa e algumas de suas propriedades básicas.

Sejam $a_1, \ldots, a_n$ funções quase-periódicas. Definimos indutivamente a *operação de renormalização* $\mathfrak{R}_n$ agindo em $(a_1 \mid \cdots \mid a_n)$ por

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_1 a_1(t) &:= a_1(t), \\
\mathfrak{R}_2(\, a_1 \mid a_2\,)_t &:= (\, a_1 \mid \mathfrak{R}_1(a_2) - M(\mathfrak{R}_1(a_2))\,)_t = (\, a_1 \mid a_2 - M(a_2)\,)_t, \\
\mathfrak{R}_n(a_1 \mid \cdots \mid a_n)_t &:= (\, a_1 \mid \mathfrak{R}_{n-1}(a_2 \mid \cdots \mid a_n) - M(\mathfrak{R}_{n-1}(a_2 \mid \cdots \mid a_n))\,)_t, \quad n > 2.
\end{aligned}$$

Provamos agora alguns fatos elementares sobre $\mathfrak{R}_n$ que serão usados a seguir. A primeira observação importante é que se $a_1, \ldots, a_n$ são funções quase-periódicas, então $\mathfrak{R}_n(a_1 \mid \cdots \mid a_n)$ também é quase-periódica. Isso pode ser visto facilmente por indução, a partir da observação óbvia de que o valor médio de

$$\mathfrak{R}_{n-1}(a_2 \mid \cdots \mid a_n) - M(\mathfrak{R}_{n-1}(a_2 \mid \cdots \mid a_n))$$

é nulo. Note também que, trivialmente,

$$a_0\, \mathfrak{R}_n(a_1 \mid \cdots \mid a_n) = \mathfrak{R}_n(a_0 a_1 \mid \cdots \mid a_n). \tag{2.8}$$

A seguinte proposição apesar de trivial, dá um significado mais útil à definição dos $\mathfrak{R}_n$'s dada anteriormente.

Proposição 2.5 *Para todo $n \geq 2$, a seguinte afirmativa é válida: se $a_1, \ldots, a_n$ são funções quase-periódicas, então $\mathfrak{R}_n(a_1 \mid \cdots \mid a_n) = \mathfrak{R}_2(\, a_1 \mid \mathfrak{R}_{n-1}(a_2 \mid \cdots \mid a_n)\,)$. Conseqüentemente,*

$$\mathfrak{R}_n(a_1 \mid \cdots \mid a_n) = \mathfrak{R}_2(\, a_1 \mid \mathfrak{R}_2(\, a_2 \mid \mathfrak{R}_2(\cdots \mid \mathfrak{R}_2(\, a_{n-1} \mid a_n\,)\,)\cdots)\,), \tag{2.9}$$

para todo $n > 2$. □

Prova. Pela definição de $\mathfrak{R}_2$,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_2(a_1 \mid \mathfrak{R}_{n-1}(a_2 \mid \cdots \mid a_n)) &= (\, a_1 \mid \mathfrak{R}_{n-1}(a_2 \mid \cdots \mid a_n) - M(\mathfrak{R}_{n-1}(a_2 \mid \cdots \mid a_n))\,) \\
&= \mathfrak{R}_n(a_1 \mid \cdots \mid a_n).
\end{aligned}$$

Segue daí (2.9). ■

A relação (2.9) mostra que a operação $\mathfrak{R}_n$ pode ser obtida por iteração da operação $\mathfrak{R}_2$. Tem-se também o seguinte resultado útil:

Proposição 2.6 *Para todo $n \geq 1$ vale a seguinte afirmativa: se $a_1, \ldots, a_n$ são funções quase-periódicas e $a_n = \mathfrak{R}_2(\, b \,|\, c\,)$, então*

$$\mathfrak{R}_n(a_1 \,|\, \cdots \,|\, a_{n-1} \,|\, a_n) = \mathfrak{R}_{n+1}(a_1 \,|\, \cdots \,|\, a_{n-1} \,|\, b \,|\, c)\,,$$

para quaisquer funções quase-periódicas b, c. □

Prova. Para $n = 1$, seja $a_1 = \mathfrak{R}_2(\, b \,|\, c\,)$. Então,

$$\mathfrak{R}_1(a_1) = a_1 = \mathfrak{R}_2(\, b \,|\, c\,)\,.$$

trivialmente. Para $n = 2$, seja $a_2 = \mathfrak{R}_2(\, b \,|\, c\,)$. Então,

$$\mathfrak{R}_2(\, a_1 \,|\, a_2\,) = (\, a_1 \,|\, a_2 - M(a_2)\,) = (\, a_1 \,|\, \mathfrak{R}_2(\, b \,|\, c\,) - M(\mathfrak{R}_2(\, b \,|\, c\,))\,)\,,$$

mas, por definição,

$$\mathfrak{R}_3(\, a_1 \,|\, b \,|\, c\,) = (\, a_1 \,|\, \mathfrak{R}_2(\, b \,|\, c\,) - M(\mathfrak{R}_2(\, b \,|\, c\,))\,)$$

e a afirmativa é válida novamente. Para $n > 2$, seja $a_n = \mathfrak{R}_2(\, b \,|\, c\,)$. Então,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_{n+1}(a_1 \,|\cdots|\, a_{n-1} \,|\, b \,|\, c) &= (\, a_1 \,|\; \mathfrak{R}_n(a_2 \,|\, \cdots \,|\, a_{n-1} \,|\, b \,|\, c) - M(\mathfrak{R}_n(a_2 \,|\, \cdots \,|\, a_{n-1} \,|\, b \,|\, c))\;) \\
&= (\, a_1 \,|\; \mathfrak{R}_{n-1}(a_2 \,|\, \cdots \,|\, a_{n-1} \,|\, a_n) - M(\mathfrak{R}_{n-1}(a_2 \,|\, \cdots \,|\, a_{n-1} \,|\, a_n)\;) \\
&= \mathfrak{R}_n(a_1 \,|\, \cdots \,|\, a_{n-1} \,|\, a_n)\,,
\end{aligned}$$

onde a indução foi utilizada na passagem da primeira para a segundo igualdade. ■

Se a e $b_1, \ldots, b_m$ são funções quase-periódicas, uma função como $\sum_{k=1}^{m}(\, a \,|\, b_k\,)$ pode não ser a soma de funções quase-periódicas, mesmo quando $(\, a \,|\, \sum_{k=1}^{m} b_k\,) = \sum_{k=1}^{m}(\, a \,|\, b_k\,)$ é quase-periódica. Isso ocorre porque a condição $M(b_k) = 0$ pode não ocorrer individualmente para cada b_k. Apesar disso, segue abaixo um resultado importante o qual será usado diversas vezes:

Proposição 2.7 *Sejam a e $b_1, \ldots, b_m$ funções quase-periódicas. Então,*

$$\mathfrak{R}_2(\, a \,|\, \sum_{k=1}^{m} b_k\,) = \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{R}_2(\, a \,|\, b_k\,)\,.$$

Conseqüentemente,

$$\mathfrak{R}_n\left(a_1 \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, a_{n-1} \,\middle|\, \sum_{k=1}^{m} b_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{R}_n(a_1 \,|\, \cdots \,|\, a_{n-1} \,|\, b_k)$$

para funções quase-periódicas $a_1, \ldots, a_{n-1}$ e $b_1, \ldots, b_m$. □

Prova. Temos,

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_2(\,a\,|\sum_{k=1}^{m} b_k\,) &= (\,a\,|\sum_{k=1}^{m} b_k - M\left(\sum_{k=1}^{m} b_k\right)\,) = \sum_{k=1}^{m}(\,a\,|\,b_k - M(b_k)\,)\\ &= \sum_{k=1}^{m} \mathfrak{R}_2(\,a\,|\,b_k\,)\,.\end{aligned}$$

O caso geral segue disso e de (2.9). ■

O seguinte corolário segue das proposições 2.6 e 2.7.

Corolário 2.8 *Sejam $a_1,\ldots,a_{n-1}$, $b_1,\ldots,b_m$ e $c_1,\ldots,c_m$ funções quase-periódicas. Então,*

$$\mathfrak{R}_n\left(a_1\,\middle|\cdots\middle|\,a_{n-1}\,\middle|\sum_{k=1}^{m}\mathfrak{R}_2(\,b_k\,|\,c_k\,)\right) = \sum_{k=1}^{m}\mathfrak{R}_{n+1}(a_1\,|\cdots|\,a_{n-1}\,|\,b_k\,|\,c_k)\,,$$

para todo $n \geq 2$ e todo $m \geq 1$. □

Com a notação introduzida em (2.3) e a partir da definição de $\mathcal{Q}_0$ dada em (1.26), conclui-se de (1.31) e (1.39) que

$$\mathcal{Q}_1(t) = \mathfrak{R}_2(\,\mathcal{Q}_0\,|\,\overline{\mathcal{Q}_0}\,)_t\,,\quad \mathcal{Q}_2(t) = \mathfrak{R}_2(\,\mathcal{Q}_0\,|\,\mathcal{Q}_0\,)_t\,,\quad \mathcal{Q}_3(t) = \mathfrak{R}_2(\,\mathcal{Q}_0\,|\,\mathcal{Q}_1\,)_t\,.$$

A seguir, freqüentemente utilizaremos a seguinte notação compacta:

$$(\,i\,|\,j\,)_t := (\,\mathcal{Q}_i\,|\,\mathcal{Q}_j\,)_t\,,\quad (\,i\,|\,\bar{j}\,)_t := (\,\mathcal{Q}_i\,|\,\overline{\mathcal{Q}_j}\,)_t\,,\quad (\,i\,|\,j\,|\,k\,)_t := (\,\mathcal{Q}_i\,|\,\mathcal{Q}_j\,|\,\mathcal{Q}_k\,)_t\,,$$

etc, para $i,j,k = 0,\ldots,3$. Em outras palavras, simplesmente usamos o índice n de $\mathcal{Q}_n$ para denotar a própria função $\mathcal{Q}_n$. Além disso, por $M(\,i\,|\,j\,)$ denotamos o valor médio de $(\,i\,|\,j\,)_t$, etc. Note que para $M(\mathcal{Q}_0) = 0$, tem-se com a notação introduzida,

$$\mathcal{Q}_1(t) = (\,0\,|\,\bar{0}\,)_t \quad \text{e} \quad \mathcal{Q}_2(t) = (\,0\,|\,0\,)_t\,.$$

Se além disso $M(\mathcal{Q}_1) = 0$, então

$$\mathcal{Q}_3(t) = (\,0\,|\,1\,)_t\,.$$

Geralmente a função $\mathcal{Q}_3$ será escrita dessa forma. Para $M(\mathcal{Q}_0) = 0$, outras identidades podem ser utilizadas, por exemplo,

$$(\,0\,|\,0\,|\,0\,)_t = (\,0\,|\,(\,0\,|\,0\,)_{t'}\,)_t = (\,0\,|\,2\,)_t \quad \text{e} \quad (\,1\,|\,0\,)_t = (\,2\,|\,\bar{0}\,)_t\,, \tag{2.10}$$

uma vez que $M(\,0\,|\,0\,) = 0$, pelo ítem (3) da Proposição 2.3. Identidades como as acima serão geralmente empregadas sem notificação.

2.3 O Caso $M(\mathcal{Q}_0) = 0$ e $M(\mathcal{Q}_1) = 0$

Nesta seção, demonstra-se o Teorema 2.1. O interesse é estudar a expansão (1.22) na situação complementar às condições (I) e (II), *i.e.*, na situação onde se supõem que a interação quase-periódica f satisfaz

$$\textbf{(III}_0\textbf{)} \quad M(\mathcal{Q}_0) = 0 \text{ e } M(\mathcal{Q}_1) = 0.$$

Para remover os termos seculares de g, aplicando-se as idéias descritas na Seção 1.4, página 10, seremos forçados a adicionar uma restrição a mais à (III$_0$), a saber $M(\mathcal{Q}_3) \neq 0$.

Relembrando, para resolver (1.17) propormos a expansão em ε (1.22). As funções v_n são então dadas por (1.24)-(1.25). Pode-se observar imediatamente a parir da condição (III$_0$) que v_1 e v_2 não contém termos seculares. De fato, uma vez que $M(\mathcal{Q}_0^{-1}) = \overline{M(\mathcal{Q}_0)} = 0$, o valor médio do integrando $\mathcal{I}_2$ em (1.24) é nulo. Portanto, a integração que ocorre na expressão para v_2 em (1.24) não produz um termo linear em t. Portanto, v_1 e v_2 são automaticamente quase-periódicas sob a condição (III$_0$).

A partir das considerações anteriores, vemos que a condição $M(\mathcal{I}_n) = 0$, $n \geq 3$, torna-se recursivamente idêntica à $\sum_{p=1}^{n-1} M(v_p v_{n-p}) = 0$, $n \geq 3$, uma vez que as funções v_n se tornam sucessivamente quase-periódicos quando o procedimento iterativo é *rodado*. Note que se se pudermos satisfazer $M(\mathcal{I}_n) = 0$, para todo n, pela escolha apropriada das constantes κ_n, as relações (1.24)-(1.25) podem ser escritas na forma *renormalizada*

$$v_1(t) = \kappa_1 q(t), \quad v_2(t) = q(t)^{-1}\left(i\kappa_1^2 \mathcal{Q}_2(t) - i\mathcal{Q}_1(t) + \kappa_2 \mathcal{Q}_0(t)\right), \tag{2.11}$$

$$v_n(t) = q(t)^{-1}\left\{ i\sum_{p=1}^{n-1} \Re_2(\,0\,|\,v_p v_{n-p}\,)_t + \kappa_n \mathcal{Q}_0(t)\right\}, \quad n \geq 3, \tag{2.12}$$

onde $\mathcal{Q}_0$, $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ foram definidas em (1.26), (1.31) e (1.38), respectivamente.

Vamos agora analisar o termo de terceira ordem em (1.22). De acordo com (1.25) o integrando $\mathcal{I}_3$ que aparece na expressão de v_3 é dado por $2v_1v_2$. Usando (2.11), obtém-se

$$v_1 v_2 = i\kappa_1^3 \mathcal{Q}_2 - i\kappa_1 \mathcal{Q}_1 + \kappa_1\kappa_2 \mathcal{Q}_0\,. \tag{2.13}$$

Do Corolário 2.4, segue imediatamente que $M(\mathcal{I}_3) = 2M(v_1v_2) = 0$, implicando que v_3 é quase-periódica pois não apresenta termos seculares.

Note que até agora, sob a condição (III$_0$), verificamos a ausência de termos seculares na expansão para g até a terceira ordem em ε. Conforme veremos a seguir, para que o mesmo seja válido até a quarta ordem, precisaremos fixar um valor especial para a constante κ_1.

2.3.1 Determinação de κ_1

De acordo com (1.25), o integrando de v_4 é $\mathcal{I}_4 = 2v_1v_3 + v_2^2$. Como v_1, v_2, v_3 são quase-periódicas, o valor médio de $\mathcal{I}_4$ está bem definido. Vamos explicitamente expandir $\mathcal{I}_4$. Usando

(1.24)-(1.25), obtém-se

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_4 &= -4\kappa_1^4(\,0\,|\,2\,) + 4\kappa_1^2(\,0\,|\,1\,) + 6i\kappa_1^2\kappa_2\mathcal{Q}_2 + (2\kappa_1\kappa_3 + \kappa_2^2)\mathcal{Q}_0 - 2i\kappa_2\mathcal{Q}_1 - \kappa_1^4(\,2\,|\,0\,) \\ &\quad +2\kappa_1^2(\,2\,|\,\overline{0}\,) - (\,1\,|\,\overline{0}\,)\,. \end{aligned} \tag{2.14}$$

As funções do lado direito de (2.14) são todas quase-periódicas, uma vez que $M(\mathcal{Q}_0) = M(\mathcal{Q}_1) = M(\mathcal{Q}_2) = 0$. Portanto, podemos tomar o valor médio de cada termo individual acima. O resultado é

$$M(\mathcal{I}_4) = -4\kappa_1^4 M(\,0\,|\,2\,) + 4\kappa_1^2 M(\,0\,|\,1\,) - \kappa_1^4 M(\,2\,|\,0\,) + 2\kappa_1^2 M(\,2\,|\,\overline{0}\,) - M(\,1\,|\,\overline{0}\,)\,.$$

Pelas afirmativas (2) e (6) da Proposição 2.3 e pelas identidades (2.10), resulta

$$M(\,2\,|\,0\,) = -M(\,0\,|\,2\,) = -M(\,0\,|\,0\,|\,0\,) = 0\,, \tag{2.15}$$

$$M(\,2\,|\,\overline{0}\,) = M(\,1\,|\,0\,) = -M(\,0\,|\,1\,)\,. \tag{2.16}$$

Portanto,

$$M(\mathcal{I}_4) = 2\kappa_1^2 M(\,0\,|\,1\,) - M(\,1\,|\,\overline{0}\,)\,.$$

Proposição 2.9 *Sob as hipóteses $M(\mathcal{Q}_0) = M(\mathcal{Q}_1) = 0$, tem-se $M(\,1\,|\,\overline{0}\,) = 2\overline{M(\,0\,|\,1\,)}$.* □

Prova. Pela definição de $\mathcal{Q}_1$, $M(\,0\,|\,1\,) = M(\,0\,|\,0\,|\,\overline{0}\,)$ e

$$M(\,1\,|\,\overline{0}\,) = M\left(\mathcal{Q}_0(t)\left(\int_0^t \mathcal{Q}_0(\tau)^{-1}\,d\tau\right)\left(\int_0^t \mathcal{Q}_0(\tau)^{-1}\,d\tau\right)\right) = -M(\,\overline{0}\,|\,0\,|\,\overline{0}\,)\,, \tag{2.17}$$

onde, na última igualdade, utilizamos a afirmativa (4) da Proposição 2.3. Agora, pela afirmativa (5) da mesma proposição, podemos escrever

$$M(\,0\,|\,0\,|\,\overline{0}\,) + M(\,0\,|\,\overline{0}\,|\,0\,) + M(\,\overline{0}\,|\,0\,|\,0\,) = 0 \tag{2.18}$$

(lembrando que $M(\,0\,|\,\overline{0}\,) = M(\,\overline{0}\,|\,0\,) = M(\,0\,|\,0\,) = 0$). Mais uma vez, pela afirmativa (4) da Proposição 2.3, $M(\,0\,|\,0\,|\,\overline{0}\,) = M(\,\overline{0}\,|\,0\,|\,0\,)$. Assim, escrevemos (2.18) como

$$2M(\,0\,|\,0\,|\,\overline{0}\,) + M(\,0\,|\,\overline{0}\,|\,0\,) = 0\,.$$

Tomando o complexo conjugado, temos

$$2\overline{M(\,0\,|\,0\,|\,\overline{0}\,)} + M(\,\overline{0}\,|\,0\,|\,\overline{0}\,) = 0\,.$$

Finalmente, usando $M(\,0\,|\,1\,) = M(\,0\,|\,0\,|\,\overline{0}\,)$ e (2.17), resulta $M(\,1\,|\,\overline{0}\,) = 2\overline{M(\,0\,|\,1\,)}$. ■

Com a proposição acima, acabamos de mostrar que

$$M(\mathcal{I}_4) = 2\left(\kappa_1^2\, M(\,0\,|\,1\,) - \overline{M(\,0\,|\,1\,)}\right)\,.$$

Agora impomos $M(\mathcal{I}_4) = 0$. É claro que isso será automaticamente verdade se $M(\,0\,|\,1\,) = 0$. Entretanto, na situação onde $M(\,0\,|\,1\,) \neq 0$, devemos fixar κ_1 como

$$\kappa_1 = \left(\frac{\overline{M(\,0\,|\,1\,)}}{M(\,0\,|\,1\,)}\right)^{1/2} = \left(\frac{\overline{M(\mathcal{Q}_3)}}{M(\mathcal{Q}_3)}\right)^{1/2} . \tag{2.19}$$

Portanto, κ_1 é uma fase, *i.e.*, $|\kappa_1| = 1$. A partir daqui assumiremos que $M(\mathcal{Q}_3) \neq 0$. Se $M(\,0\,|\,1\,) = 0$, κ_1 deverá que ser fixada pela imposição $M(\mathcal{I}_5) = 0$. Não trataremos dessa situação mais restritiva neste capítulo.

Até aqui, verificamos a ausência de termos seculares na expansão (1.22) para g até a terceira ordem em ε, além eliminá-los em v_4 escolhendo um valor especial para a constante κ_1 de acordo com (2.19). Neste ponto, gostaríamos de proceder recursivamente impondo a condição $M(\mathcal{I}_n) = 0$, para todo $n \geq 5$. Dessa forma teríamos determinado o valor das constantes κ_n, $n \geq 2$, de tal maneira a garantir a quase-periodicidade das funções v_n, $n \geq 5$. Esse procedimento recursivo foi usado em [2] para eliminar os demais termos seculares de g nos casos (I) e (II). Aqui, entretanto, ainda temos que determinar as constantes κ_2 e κ_3 explicitamente (não recursivamente), antes de *rodarmos* o procedimento iterativo.

2.3.2 Determinação de κ_2

Vamos começar expandindo o integrando $\mathcal{I}_5$ que aparece em v_5. Tomando $n = 5$ em (1.25), encontramos $\mathcal{I}_5 = 2v_1v_4 + 2v_2v_3$. Primeiro calculamos v_1v_4 e depois v_2v_3.

Uma vez que $M(\mathcal{I}_3) = 0$ e que $M(\mathcal{I}_4) = 0$ pela escolha de κ_1 feita em (2.19), podemos usar as expressões renormalizadas em (2.11)–(2.12). Assim,

$$v_1v_3 = 2i\kappa_1\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,v_1v_2\,) + \kappa_1\kappa_3\mathcal{Q}_0\,, \tag{2.20}$$

$$v_1v_4 = 2i\kappa_1\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,v_1v_3\,) + i\kappa_1\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,v_2^2\,) + \kappa_1\kappa_4\mathcal{Q}_0\,. \tag{2.21}$$

Inserindo agora (2.13) no lado direito de (2.20), obtém-se

$$v_1v_3 = -2\kappa_1^4\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,2\,) + 2\kappa_1^2\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,1\,) + 2i\kappa_1^2\kappa_2\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,0\,) + \kappa_1\kappa_3\,\mathcal{Q}_0\,. \tag{2.22}$$

Novamente, inserindo (2.22) no lado direito de (2.21), resulta

$$\begin{aligned} v_1v_4 = {} & -4i\kappa_1^5\,\mathfrak{R}_3(\,0\,|\,0\,|\,2\,) + 4i\kappa_1^3\,\mathfrak{R}_3(\,0\,|\,0\,|\,1\,) - 4\kappa_1^3\kappa_2\,\mathfrak{R}_3(\,0\,|\,0\,|\,0\,) \\ & +2i\kappa_1^2\kappa_3\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,0\,) + i\kappa_1\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,v_2^2\,) + \kappa_1\kappa_4\mathcal{Q}_0\,. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Vamos agora expandir v_2^2. Como $v_2 = \kappa_2 q + iq^{-1}(\kappa_1^2\mathcal{Q}_2 - \mathcal{Q}_1)$, temos

$$v_2^2 = \kappa_2^2\mathcal{Q}_0 + 2i\kappa_1^2\kappa_2\mathcal{Q}_2 - 2i\kappa_2\mathcal{Q}_1 + s\,, \tag{2.24}$$

onde $s := -\mathcal{Q}_0^{-1}(\kappa_1\mathcal{Q}_2 - \mathcal{Q}_1)^2$ depende apenas de funções conhecidas e κ_1. Agora, inserimos a expressão acima em (2.23). Com efeito,

$$\begin{aligned} v_1v_4 &= -4i\kappa_1^5\,\mathfrak{R}_3(\,0\,|\,0\,|\,2\,) + 4i\kappa_1^3\,\mathfrak{R}_3(\,0\,|\,0\,|\,1\,) - 6\kappa_1^3\kappa_2\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,2\,) + 2i\kappa_1^2\kappa_3\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,0\,) \\ &\quad + i\kappa_1\kappa_2^2\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,0\,) + 2\kappa_1\kappa_2\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,1\,) + i\kappa_1\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,s\,) + \kappa_1\kappa_4\mathcal{Q}_0\,, \end{aligned} \tag{2.25}$$

onde usamos o fato que $\mathfrak{R}_3(\,0\,|\,0\,|\,0\,) = \mathfrak{R}_2(\,0\,|\,2\,)$. Coletando em (2.25) os termos dependentes apenas de κ_1 e definindo

$$\mathcal{A}_1 := -4\kappa_1^4\,\mathfrak{R}_3(\,0\,|\,0\,|\,2\,) + 4\kappa_1^2\,\mathfrak{R}_3(\,0\,|\,0\,|\,1\,) + \mathfrak{R}_2(\,0\,|\,s\,) \tag{2.26}$$

a expressão (2.25) se torna

$$v_1v_4 = -6\kappa_1^3\kappa_2\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,2\,) + 2\kappa_1\kappa_2\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,1\,) + i\kappa_1(2\kappa_1\kappa_3 + \kappa_2^2)\,\mathcal{Q}_2 + \kappa_1\kappa_4\mathcal{Q}_0 + i\kappa_1\mathcal{A}_1\,. \tag{2.27}$$

A partir da definição (2.26), é evidente que $\mathcal{A}_1$ é quase-periódica, uma vez que a mesma é composta por uma soma de funções quase-periódicas. Note que (2.26) depende apenas da constante κ_1. Uma observação importante a ser feita é que como estamos trabalhando sob as hipóteses $M(\mathcal{Q}_0) = M(\mathcal{Q}_1) = M(\mathcal{Q}_2) = 0$, podemos largar o símbolo $\mathfrak{R}_2$ em (2.27). Segue dessa observação e das identidades em (2.15) que

$$M(v_1v_4) = 2\kappa_1\kappa_2\,M(\,0\,|\,1\,) + i\kappa_1 M(\mathcal{A}_1)\,.$$

Vamos agora expandir o segundo termo em $\mathcal{I}_5$, a saber, v_2v_3. Um cálculo extenso usando(2.11)-(2.12), semelhante ao efetuado anteriormente, mostra-nos que

$$\begin{aligned} v_2v_3 &= -2i\kappa_1^5\mathfrak{R}_2(\,2\,|\,2\,) + 2i\kappa_1^3\mathfrak{R}_2(\,2\,|\,1\,) - 2\kappa_1^3\kappa_2\mathfrak{R}_2(\,2\,|\,0\,) + 2i\kappa_1^3\mathfrak{R}_2(\,1\,|\,2\,) \\ &\quad -2i\kappa_1\mathfrak{R}_2(\,1\,|\,1\,) + 2\kappa_1\kappa_2\mathfrak{R}_2(\,1\,|\,0\,) - 2\kappa_1^3\kappa_2\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,2\,) \\ &\quad +2\kappa_1\kappa_2\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,1\,) + i(2\kappa_1\kappa_2^2 + \kappa_1^2\kappa_3)\mathcal{Q}_2 - i\kappa_3\mathcal{Q}_1 + \kappa_2\kappa_3\mathcal{Q}_0\,. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Claramente o lado direito de (2.28) é quase-periódico. Mais uma vez observamos que podemos largar o símbolo $\mathfrak{R}_2$ na expressão acima já que estamos trabalhando sob as hipóteses $M(\mathcal{Q}_0) = M(\mathcal{Q}_1) = M(\mathcal{Q}_2) = 0$. Assim, reordenando (2.28), temos

$$\begin{aligned} v_2v_3 &= i(2\kappa_1\kappa_2^2 + \kappa_1^2\kappa_3)\mathcal{Q}_2 - i\kappa_3\mathcal{Q}_1 + \kappa_2\kappa_3\mathcal{Q}_0 - 2i\kappa_1^5(\,2\,|\,2\,) - 2i\kappa_1(\,1\,|\,1\,) \\ &\quad +2i\kappa_1^3\,[(\,2\,|\,1\,) + (\,1\,|\,2\,)] - 2\kappa_1^3\kappa_2\,[(\,2\,|\,0\,) + (\,0\,|\,2\,)] + 2\kappa_1\kappa_2\,[(\,1\,|\,0\,) + (\,0\,|\,1\,)]\,. \end{aligned}$$

Acima, usamos que $\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,0\,) = \mathcal{Q}_2$. Note da expressão acima que como $M(\mathcal{Q}_0) = M(\mathcal{Q}_1) = M(\mathcal{Q}_2) = 0$, segue das afirmativas (2) e (3) da Proposição 2.3 que, surpreendentemente, $M(v_2v_3) = 0$.

Estamos prontos agora para determinar o valor de κ_2 impondo a condição $M(\mathcal{I}_5) = 0$, garantindo a ausência de termos seculares em v_5. Como

$$M(\mathcal{I}_5) = 2M(v_1v_4) + 2M(v_2v_3) = 4\kappa_1\kappa_2\, M(\,0\,|\,1\,) + 2i\kappa_1 M(\mathcal{A}_1)\,,$$

concluímos que

$$\kappa_2 \;=\; -\frac{iM(\mathcal{A}_1)}{2M(\,0\,|\,1\,)}\,. \tag{2.29}$$

Note que o lado direito de (2.29) depende apenas da constante previamente determinada κ_1.

2.3.3 Determinação de κ_3

Ainda devemos determinar κ_3 antes de prosseguirmos recursivamente para fixar as demais constantes κ_n, para $n \geq 4$. O valor de κ_3 será fixado pela eliminação de termos seculares em v_6, *i.e.*, impondo-se $M(\mathcal{I}_6) = 0$. Usando (2.12) para $n = 6$, encontramos $\mathcal{I}_6 = 2v_1v_5 + 2v_2v_4 + v_3^2$. Vamos inicialmente calcular $2v_1v_5$. Um cálculo extenso nos mostra que

$$2v_1v_5 \;=\; \mathcal{A}_2 - 12\kappa_1^3\kappa_3\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,2\,) + 4\kappa_1\kappa_3\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,1\,) + 4i\kappa_1(\kappa_2\kappa_3 + \kappa_1\kappa_4)\mathcal{Q}_2 + 2\kappa_1\kappa_5\mathcal{Q}_0\,, \tag{2.30}$$

onde $\mathcal{A}_2$ é a função quase-periódica definida por

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_2 \;:=\;& 8\kappa_1^6\,\mathfrak{R}_3(\,0\,|\,2\,|\,2\,) - 8i\kappa_1^4\,\mathfrak{R}_3(\,0\,|\,2\,|\,1\,) - 8i\kappa_1^4\kappa_2\,\mathfrak{R}_3(\,0\,|\,2\,|\,0\,) - 8\kappa_1^4\,\mathfrak{R}_3(\,0\,|\,1\,|\,2\,)\\ &+8\kappa_1^2\,\mathfrak{R}_3(\,0\,|\,1\,|\,1\,) + 8i\kappa_1^2\kappa_2\,\mathfrak{R}_3(\,0\,|\,1\,|\,0\,) + 16i\kappa_1^2\kappa_2\,\mathfrak{R}_3(\,0\,|\,0\,|\,1\,)\\ &-32i\kappa_1^4\kappa_2\,\mathfrak{R}_3(\,0\,|\,0\,|\,2\,) - 12\kappa_1^2\kappa_2^2\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,2\,) - 4\kappa_1^2\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,\mathcal{A}_1\,)\,.\end{aligned} \tag{2.31}$$

Note que $\mathcal{A}_2$ depende apenas das constantes previamente determinadas κ_1 e κ_2. Como $2v_1v_5$ dada acima é composta por uma soma de funções quase-periódicas, podemos calcular o valor médio de cada termo individual que aparece no lado direito de (2.30). Assim,

$$2M(v_1v_5) \;=\; M(\mathcal{A}_2) + 4\kappa_3\kappa_1 M(\,0\,|\,1\,)\,,$$

onde, mais uma vez, usou-se as hipóteses $M(\mathcal{Q}_0) = M(\mathcal{Q}_1) = M(\mathcal{Q}_2) = 0$ e as identidades em (2.15).

O segundo termo em $\mathcal{I}_5$, a saber $2v_2v_4$, pode ser expandido como

$$\begin{aligned}2v_2v_4 \;=\;& \mathcal{A}_3 - 4\kappa_1^3\kappa_3\,\mathfrak{R}_2(\,2\,|\,0\,) + 4\kappa_1\kappa_3\,\mathfrak{R}_2(\,1\,|\,0\,) + 2i(\kappa_1^2\kappa_4 + 2\kappa_1\kappa_2\kappa_3)\mathcal{Q}_2\\ &-2i\kappa_4\mathcal{Q}_1 + 2\kappa_2\kappa_4\mathcal{Q}_0\,.\end{aligned} \tag{2.32}$$

onde a função $\mathcal{A}_3$ é dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_3 \;:=\; & 8\kappa_1^6\,\mathfrak{R}_3(\,2\,|\,0\,|\,2\,) - 8\kappa_1^4\,\mathfrak{R}_3(\,2\,|\,0\,|\,1\,) - 8i\kappa_1^4\kappa_2\,\mathfrak{R}_3(\,2\,|\,0\,|\,0\,) \\ & -8\kappa_1^4\,\mathfrak{R}_3(\,1\,|\,0\,|\,2\,) + 8\kappa_1^2\,\mathfrak{R}_3(\,1\,|\,0\,|\,1\,) + 8i\kappa_1^2\kappa_2\,\mathfrak{R}_3(\,1\,|\,0\,|\,0\,) \\ & -8i\kappa_1^4\kappa_2\,\mathfrak{R}_3(\,0\,|\,0\,|\,2\,) + 8i\kappa_1^2\kappa_2\,\mathfrak{R}_3(\,0\,|\,0\,|\,1\,) - 8\kappa_1^2\kappa_2^2\,\mathfrak{R}_3(\,0\,|\,0\,|\,0\,) \\ & -2\kappa_1^2\,\mathfrak{R}_2(\,2\,|\,v_2^2\,) + 2\,\mathfrak{R}_2(\,1\,|\,v_2^2\,) + 2i\kappa_2\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,v_2^2\,)\,. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Note que $\mathcal{A}_3$ é periódica e depende apenas das constantes κ_1 e κ_2.

Podemos agora prosseguir e calcular o valor médio de $2v_2v_4$ a partir de (2.32). Usando $M(\mathcal{Q}_0) = M(\mathcal{Q}_1) = M(\mathcal{Q}_2) = 0$ e as identidades em (2.15), resulta

$$2M(v_2v_4) \;=\; M(\mathcal{A}_3) + 4\kappa_1\kappa_3 M(\,0\,|\,1\,)\,.$$

Estamos quase no final da expansão dos termos em $\mathcal{I}_6$. Ainda precisamos calcular v_3^2. Usando (2.11)–(2.13), encontramos

$$\begin{aligned} v_3 \;&=\; q^{-1}\left\{2i\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,v_1v_2\,) + \kappa_3\mathcal{Q}_0\right\} \\ &=\; q^{-1}\left\{-2\kappa_1^3\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,2\,) + 2\kappa_1\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,1\,) + 2i\kappa_1\kappa_2\mathcal{Q}_2 + \kappa_3\mathcal{Q}_0\right\}. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Portanto,

$$v_3^2 = \kappa_3^2\mathcal{Q}_0 + 4\kappa_1\kappa_3\left[-\kappa_1^2\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,2\,) + \mathfrak{R}_2(\,0\,|\,1\,) + i\kappa_2\mathcal{Q}_2\right] - 4\mathcal{A}_4\,,$$

onde a função $\mathcal{A}_4$ depende apenas das constantes já conhecidas κ_1 e κ_2 e é definida por

$$\mathcal{A}_4 := \mathcal{Q}_0^{-1}\left[i\kappa_1^3\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,2\,) - i\kappa_1\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,1\,) + \kappa_1\kappa_2\mathcal{Q}_2\right]^2.$$

Finalmente, usando mais uma vez o fato de que $M(\mathcal{Q}_0) = M(\mathcal{Q}_2) = 0$ e as identidades em (2.15), obtemos

$$M(v_3^2) = 4\kappa_3\kappa_1 M(\,0\,|\,1\,) - 4M(\mathcal{A}_4)\,.$$

Impondo a condição $M(\mathcal{I}_6) = 0$, *i.e.*, $2M(v_1v_5) + 2M(v_2v_4) + M(v_3^2) = 0$, segue das expressões anteriores que

$$\kappa_3 \;=\; \frac{4M(\mathcal{A}_4) - M(\mathcal{A}_3) - M(\mathcal{A}_2)}{4\kappa_1 M(\,0\,|\,1\,)}\,. \tag{2.35}$$

Note que o lado direito de (2.35) depende apenas das constantes κ_1 e κ_2 já fixadas.

2.3.4 Determinação de κ_n, $n \geq 4$

Até aqui, fixamos o valor das constantes κ_1, κ_2 e κ_3 individualmente. Prosseguimos agora fixando o valor das demais constantes κ_n, $n \geq 4$, de forma recursiva. Para isso, impomos

$$M(\mathcal{I}_n) \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad M\left(\sum_{p=1}^{n-1} v_p v_{n-p}\right) = 0\,, \quad \text{para cada } n \geq 7\,. \tag{2.36}$$

Note que, de acordo com as discussões anteriores, para $n = 1, 2, 3$ a condição (2.36) é automaticamente satisfeita, e para $n = 4, 5, 6$ a imposição de (2.36) possibilitou a fixação dos valores de κ_1, κ_2 e κ_3, respectivamente. Para cada $n \geq 7$, a imposição de (2.36) garante a ausência de termos seculares em v_n e permite a fixação do valor de κ_{n-3}.

A partir de agora trabalharemos indutivamente: assumimos, para cada $n \geq 7$, que as constantes $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-4}$ já foram fixadas pela imposição de que $M(\mathcal{I}_m) = 0$, para $m = 3, \ldots, n-1$ (para $m = 1, 2, 3$ a condição se verifica identicamente); assim, assumimos que as funções $v_1, \ldots, v_{n-1}$ são quase-periódicas. Dessa forma, podemos tirar a soma para fora do valor médio M em (2.36) e escrever

$$2\left[M(v_1 v_{n-1}) + M(v_2 v_{n-2}) + M(v_3 v_{n-3})\right] + \sum_{p=4}^{n-4} M(v_p v_{n-p}) \;=\; 0\,, \tag{2.37}$$

onde, por convenção, $\sum_{p=4}^{n-4} M(v_p v_{n-p}) = 0$ para $n = 7$. Introduzimos agora a seguinte definição:

$$l_m(t) \;:=\; q(t)(v_m(t) - \kappa_m q(t))\,, \quad m \geq 4\,. \tag{2.38}$$

Note que, pela expressão (1.25), página 11, as funções l_m acima podem ser escritas como

$$l_m(t) \;=\; i\, q(t)^2 \left(\int_0^t \sum_{p=1}^{m-1} v_p(\tau) v_{m-p}(\tau)\, d\tau \right)\,. \tag{2.39}$$

Para $m \leq n-1$ podemos ainda escrever

$$l_m(t) \;=\; i\, q(t)^2 \left(\int_0^t \sum_{p=1}^{m-1} \left[v_p(\tau) v_{m-p}(\tau) - M\left(v_p v_{m-p}\right) \right] d\tau \right) \;=\; i \sum_{p=1}^{m-1} \mathfrak{R}_2(\,0\,|\,v_p v_{m-p}\,)_t\,,$$

uma vez que, pelas hipóteses indutivas, estamos assumindo que $M(\sum_{p=1}^{m-1} v_p v_{m-p}) = M(\mathcal{I}_m) = 0$ para todo $m \leq n-1$. Portanto, as funções l_m são quase-periódicas para todo $m \leq n-1$.

Vamos agora usar a definição dada em (2.38) e calcular os três primeiros termos que aparecem em (2.37). Começando pelo primeiro, temos

$$M(v_1 v_{n-1}) \;=\; M\left(v_1(q^{-1} l_{n-1} + \kappa_{n-1} q)\right) \;=\; \kappa_1 M(l_{n-1})\,, \tag{2.40}$$

onde usamos (1.24), página 11, e o fato que $M(\mathcal{Q}_0) = 0$.

A partir de (2.38), o segundo termo em (2.37) pode ser expandido como

$$M(v_2 v_{n-2}) \;=\; M\left(v_2(q^{-1} l_{n-2} + \kappa_{n-2} q)\right) \;=\; M(q^{-1} v_2 l_{n-2})\,, \tag{2.41}$$

onde usamos (2.11) para expressar $q v_2$ e o fato que $M(\mathcal{Q}_0) = M(\mathcal{Q}_1) = M(\mathcal{Q}_2) = 0$.

Finalmente, para o terceiro termo em (2.37), temos

$$M(v_3 v_{n-3}) \;=\; M\left(v_3(q^{-1} l_{n-3} + \kappa_{n-3} q)\right) \;=\; M(q^{-1} v_3 l_{n-3}) + \kappa_{n-3} M(q v_3)\,. \tag{2.42}$$

O produto qv_3 pode ser obtido a partir de (2.34). Usando os resultados da Proposição 2.3 e as identidades em (2.10), concluí-se que $M(qv_3) = 2\kappa_1 M(\,0\,|\,1\,)$. Inserindo esse resultado em (2.42), obtemos

$$M(v_3 v_{n-3}) \;=\; M(q^{-1}v_3 l_{n-3}) + 2\kappa_1\kappa_{n-3}M(\,0\,|\,1\,)\,. \tag{2.43}$$

Substituímos agora (2.40), (2.41) e (2.43) em (2.37). Com efeito,

$$2\left[\underbrace{\kappa_1 M(l_{n-1})}_{\text{(i)}} + \underbrace{M(q^{-1}v_2 l_{n-2})}_{\text{(ii)}} + \underbrace{M(q^{-1}v_3 l_{n-3})}_{\text{(iii)}} + \underbrace{2\kappa_{n-3}\kappa_1 M(\,0\,|\,1\,)}_{\text{(iv)}}\right] + \underbrace{\sum_{p=4}^{n-4} M(v_p v_{n-p})}_{\text{(v)}} \;=\; 0\,. \tag{2.44}$$

Antes de prosseguirmos, vamos fazer alguns comentários sobre a estratégia a ser seguida. A relação (2.44) é uma conseqüência direta de (2.36) e, portanto, sendo imposta para $n = 7, 8, 9, \ldots$, levará-nos aos valores de $\kappa_4, \kappa_5, \kappa_6, \ldots$. Pelas hipóteses indutivas, já temos fixada as constantes $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-4}$, de forma que temos o completo conhecimento das funções $v_1, \ldots, v_{n-4}$. Por esse motivo, os termos (iii) e (v) em (2.44) são conhecidos por hipótese (note por (2.39) que a expansão de l_{n-3} exige o conhecimento de $v_1, \ldots, v_{n-4}$). O nosso objetivo é utilizar (2.44) como uma equação para se determinar κ_{n-3}. Assim, precisamos isolar o valor de κ_{n-3} em (2.44). A função l_{n-2}, no termo (ii), depende implicitamente de v_{n-3} e, portanto, apresenta uma dependência em κ_{n-3} (confira, novamente, (2.39)). O termo (i), entretanto, depende implicitamente de κ_{n-2} e κ_{n-3}. A dependência em κ_{n-2} poderia ser um problema, uma vez que ainda estamos trabalhando para fixar κ_{n-3}. Contudo, mostraremos que as condições $M(\mathcal{Q}_1) = 0$ e $M(\mathcal{Q}_2) = 0$ permitirão eliminar κ_{n-2} da expressão expandida final para o termo (i). Assim, no final obteremos uma equação simples expressando κ_{n-3} apenas em função de fatores conhecidos.

Vamos agora expandir os termos (i) e (ii). Após um cálculo extenso, o qual pode ser encontrado no Apêndice B.1, página 165, obtemos

$$\kappa_1 M(l_{n-1}) \;=\; 2\kappa_1\kappa_{n-3}M(\,0\,|\,1\,) + \mathcal{R}_n^{(1)}\,, \tag{2.45}$$

onde $\mathcal{R}_n^{(1)}$ está definido em (B.6), página 167, e depende apenas das constantes $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-4}$.

Para o termo (ii) em (2.44), após outro cálculo extenso apresentado no Apêndice B.2, página 167, encontramos

$$M(q^{-1}v_2 l_{n-2}) \;=\; -2\kappa_1\kappa_{n-3}M(\,0\,|\,1\,) + \mathcal{R}_n^{(2)}\,, \tag{2.46}$$

onde $\mathcal{R}_n^{(2)}$ está definido em (B.7), página 168. Observamos que $\mathcal{R}_n^{(2)}$ depende apenas de $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-4}$.

Estamos prontos agora para determinar o valor de κ_{n-3} a partir de (2.44) de tal forma que a condição (2.36) fique satisfeita para cada $n \geq 7$. Colecionando os resultados (2.45) e (2.46), e inserindo tais expressões em (2.44), obtemos

$$\kappa_{n-3} = \frac{-1}{4\kappa_1 M(0\,|\,1)} \left[\sum_{p=4}^{n-4} M(v_p v_{n-p}) + 2\mathcal{R}_n^{(1)} + 2\mathcal{R}_n^{(2)} + 2M(q^{-1} v_3 l_{n-3}) \right],$$

para todo $n \geq 7$. Note que $\mathcal{R}_n^{(1)}$ e $\mathcal{R}_n^{(2)}$ pode ser recursivamente computada para todo $n \geq 7$ (confira equações (B.6)-(B.7)). As funções l_{n-3} também podem ser recursivamente computadas para todo $n \geq 7$ através de (2.39).

Podemos resumir nossos resultados da seguinte forma: sob as condições (III_0) e $M(0\,|\,1) \neq 0$, *i.e.*, sob a nova hipótese (III) do Teorema 2.1, e com as constantes κ_n dadas por

$$\kappa_1 = \left(\frac{\overline{M(0\,|\,1)}}{M(0\,|\,1)} \right)^{1/2}, \qquad \kappa_2 = -\frac{iM(\mathcal{A}_1)}{2M(0\,|\,1)}, \tag{2.47}$$

$$\kappa_3 = \frac{4M(\mathcal{A}_4) - M(\mathcal{A}_3) - M(\mathcal{A}_2)}{4\kappa_1 M(0\,|\,1)}, \tag{2.48}$$

$$\kappa_{n-3} = \frac{-1}{4\kappa_1 M(0\,|\,1)} \left[\sum_{p=4}^{n-4} M\left(v_p v_{n-p}\right) + 2\mathcal{R}_n^{(1)} + 2\mathcal{R}_n^{(2)} + 2M\left(q^{-1} v_3 l_{n-3}\right) \right], \; n \geq 7, \tag{2.49}$$

a expansão (1.22) torna-se livre de termos seculares. Note que a hipótese

$$M(0\,|\,1) = M(\mathcal{Q}_3) \neq 0$$

é a única restrição adicional necessária para que as expressões (2.47)–(2.49) estejam bem definidas. Dessa forma, temos provado o Teorema 2.1. ■

2.4 Prova de Convergência da Expansão em ε

Aqui apresentamos a prova do Teorema 2.2, *i.e.*, a prova de convergência da expansão em ε (1.22) sob a condição (III) para f periódica. A demonstração segue as idéias de [3], embora adaptações técnicas sejam necessárias. Por simplicidade, consideraremos apenas o caso onde $F_0 = M(f) = 0$. O caso geral $F_0 \neq 0$ pode ser tratado seguindo as linhas descritas em detalhes em [3].

Em termos dos coeficientes de Fourier Q_m e $Q_m^{(2)}$ de q e $\mathcal{Q}_0$, dos coeficientes de Fourier $V_m^{(n)}$

de v_n e em termos das constantes κ_n, as relações (2.11)-(2.12) podem ser escritas como

$$V_m^{(1)} = \kappa_1 Q_m\,, \quad V_m^{(2)} = \sum_{\substack{n_1\in\mathbb{Z}\\ n_1\neq 0}} \frac{Q_{m-n_1}\left(\kappa_1^2 Q_{n_1}^{(2)} - \overline{Q_{-n_1}^{(2)}}\right)}{n_1\omega} + \kappa_2 Q_m\,, \tag{2.50}$$

$$V_m^{(n)} = \sum_{\substack{n_1,n_2\in\mathbb{Z}\\ n_1+n_2\neq 0}} \frac{Q_{m-(n_1+n_2)}}{(n_1+n_2)\omega}\left(\sum_{p=1}^{n-1} V_{n_1}^{(p)} V_{n_2}^{(n-p)}\right) + \kappa_n Q_m\,, \quad \text{para } n\geq 3\,. \tag{2.51}$$

É claro que, devido a escolha das constantes κ_n descrita anteriormente, não há presença de termos seculares.

Por (2.2) e por um argumento indutivo, provaremos a seguinte afirmativa: para todo $p\in\mathbb{Z}_+$ e todo $m\in\mathbb{Z}$, existe uma constante $K_p>0$ tal que

$$\left|V_m^{(p)}\right| \leq K_p \frac{e^{-\chi|m|}}{\langle\langle m\rangle\rangle^2}\,. \tag{2.52}$$

Para mostrar isso, vamos relembrar o seguinte fato, provado e [3]:

Lema 2.10 *Para $\chi>0$ e $m\in\mathbb{Z}$, defina*

$$\mathcal{B}(m)\equiv\mathcal{B}(m,\chi) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi(|m-n|+|n|)}}{\langle\langle m-n\rangle\rangle^2\,\langle\langle n\rangle\rangle^2}\,.$$

Então, tem-se

$$\mathcal{B}(m)\leq B_0\frac{e^{-\chi|m|}}{\langle\langle m\rangle\rangle^2}\,.$$

para alguma constante $B_0\equiv B_0(\chi)>0$ e para todo $m\in\mathbb{Z}$. □

De (2.50) e (2.2), segue que

$$\left|V_m^{(1)}\right| \leq \mathcal{Q}\frac{e^{-\chi|m|}}{\langle\langle m\rangle\rangle^2}\,, \quad \left|V_m^{(2)}\right| \leq \frac{2\mathcal{Q}^2}{\omega}\sum_{n_1\in\mathbb{Z}_*}\frac{e^{-\chi(|m-n_1|+|n_1|)}}{\langle\langle m-n_1\rangle\rangle^2\langle\langle n_1\rangle\rangle^2}\frac{1}{|n_1|} + |\kappa_2|\mathcal{Q}\frac{e^{-\chi|m|}}{\langle\langle m\rangle\rangle^2}\,,$$

onde usamos que $|\kappa_1|=1$. Pelo Lema 2.10, a soma sobre n_1 pode ser limitada por

$$B_0\frac{e^{-\chi|m|}}{\langle\langle m\rangle\rangle^2}\,.$$

Portanto,

$$\left|V_m^{(1)}\right| \leq K_1\frac{e^{-\chi|m|}}{\langle\langle m\rangle\rangle^2} \quad \text{e} \quad \left|V_m^{(2)}\right| \leq K_2\frac{e^{-\chi|m|}}{\langle\langle m\rangle\rangle^2}\,,$$

para todo $m\in\mathbb{Z}$, escolhendo

$$K_1 := \mathcal{Q} \quad \text{e} \quad K_2 := \frac{2\mathcal{Q}^2 B_0}{\varpi} + |\kappa_2|\mathcal{Q}\,.$$

Para prosseguir, assumimos agora (2.52) para todo $p = 1, \ldots, n-1$. Por (2.51) e (2.2), temos

$$\left|V_m^{(n)}\right| \leq \frac{\mathcal{Q}}{\omega}\left(\sum_{\substack{n_1,n_2\in\mathbb{Z}\\ n_1+n_2\neq 0}} \frac{e^{-\chi(|m-n_1-n_2|+|n_1|+|n_2|)}}{\langle\langle m-n_1-n_2\rangle\rangle^2\langle\langle n_1\rangle\rangle^2\langle\langle n_2\rangle\rangle^2}\frac{1}{|n_1+n_2|}\right)\left(\sum_{p=1}^{n-1} K_p K_{n-p}\right)$$

$$+ \ |\kappa_n|\mathcal{Q}\frac{e^{-\chi|m|}}{\langle\langle m\rangle\rangle^2}, \qquad \text{para } n \geq 3.$$

Aplicando duas vezes o Lema 2.10, as somas sobre n_1, n_2 podem ser limitadas por

$$(B_0)^2\frac{e^{-\chi|m|}}{\langle\langle m\rangle\rangle^2}.$$

Portanto,

$$\left|V_m^{(n)}\right| \leq K_n\frac{e^{-\chi|m|}}{\langle\langle m\rangle\rangle^2}, \quad \text{para todo } m \in \mathbb{Z},$$

escolhendo

$$K_n := \frac{(B_0)^2\mathcal{Q}}{\omega}\left(\sum_{p=1}^{n-1} K_p K_{n-p}\right) + \kappa_n^0\mathcal{Q}, \tag{2.53}$$

onde κ_n^0 é uma cota superior apropriada para $|\kappa_n|$. Agora devemos encontrar um estimativa para $|\kappa_n|$ usando, novamente, a hipótese indutiva (2.52) para $p = 1, \ldots, n-1$. Observamos que κ_1, κ_2 e κ_3 estão fixadas por (2.47)–(2.48) e κ_n, $n \geq 4$, é dada em (2.49). Assim, escrevemos

$$|\kappa_n| \leq \frac{1}{4|M(0\,|\,1)|}\left[\underbrace{\sum_{p=4}^{n-1}|M\left(v_p v_{n+3-p}\right)|}_{T_1} + 2\underbrace{\left|\mathcal{R}_{n+3}^{(1)}\right|}_{T_2} + 2\underbrace{\left|\mathcal{R}_{n+3}^{(2)}\right|}_{T_3} + 2\underbrace{\left|M\left(q^{-1}v_3 l_n\right)\right|}_{T_4}\right], \tag{2.54}$$

para $n \geq 4$. Temos que estimar cada um dos termos T_i indicados acima. Vamos começar com T_1.

Cota para T_1. Temos, $M\left(v_p v_{n+3-p}\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} V_m^{(p)} V_{-m}^{(n+3-p)}$. Portanto, pela hipótese indutiva (2.52), assumida para $p = 1, \ldots, n-1$, resulta

$$T_1 = \sum_{p=4}^{n-1}|M\left(v_p v_{n+3-p}\right)| \leq \eta_1\sum_{p=4}^{n-1} K_p K_{n+3-p}, \tag{2.55}$$

onde $\eta_1 := \displaystyle\sum_{m\in\mathbb{Z}}\frac{e^{-2\chi|m|}}{\langle\langle m\rangle\rangle^2}$.

Cota para T_2. A expressão (B.6) envolve a soma de valores médios de funções como $\mathfrak{R}_k(\,a_1\,|\cdots|\,a_k\,)$. Vamos provar um resultado geral a respeito de tais funções.

Proposição 2.11 *Para $k \geq 2$, sejam $a_1, \ldots, a_k$ funções periódicas com a mesma freqüência ω, e tal que $a_l(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} A^{(l)}(m)e^{im\omega t}$, onde os coeficientes de Fourier $A^{(l)}(m)$ satisfazem*

$$\left|A^{(l)}(m)\right| \leq \alpha_l\frac{e^{-\chi|m|}}{\langle\langle m\rangle\rangle^2}, \tag{2.56}$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$ e todo $l = 1, \ldots, k$, onde $\alpha_l > 0$ e $\chi > 0$. Então, existe uma constante positiva β_k tal que os coeficientes de Fourier $\mathfrak{R}_k(\, a_1 \,|\, \cdots \,|\, a_k \,)(m)$, $m \in \mathbb{Z}$, de $\mathfrak{R}_k(\, a_1 \,|\, \cdots \,|\, a_k \,)_t$ são limitados por

$$|\, \mathfrak{R}_k(\, a_1 \,|\, \cdots \,|\, a_k \,)(m)| \;\leq\; \beta_k \, \alpha_1 \cdots \alpha_k \, \frac{e^{-\chi|m|}}{\langle\!\langle m \rangle\!\rangle^2} \,. \tag{2.57}$$

□

Prova. Vamos inicialmente considerar o caso $k = 2$. Os coeficientes de Fourier de $\mathfrak{R}_2(\, a_1 \,|\, a_2 \,)_t$ são dados por

$$\mathfrak{R}_2(\, a_1 \,|\, a_2 \,)(m) \;=\; \sum_{n \in \mathbb{Z}} A^{(1)}(m-n) \tilde{A}^{(2)}(n) \,, \tag{2.58}$$

onde

$$\tilde{A}^{(2)}(m) \;:=\; \begin{cases} \dfrac{A^{(2)}(m)}{im\omega}, & \text{for } m \neq 0, \\[2ex] -\dfrac{1}{i\omega} \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{Z}_*} \dfrac{A^{(2)}(k)}{k}, & \text{for } m = 0 \end{cases} .$$

De (2.56), segue que

$$\left| \tilde{A}^{(2)}(m) \right| \leq \alpha_2 \frac{D_0}{\omega} \frac{e^{-\chi|m|}}{\langle\!\langle m \rangle\!\rangle^2} \,, \quad \text{onde} \quad D_0 := \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-\chi|m|}}{\langle\!\langle m \rangle\!\rangle^2} \,.$$

Portanto,

$$|\, \mathfrak{R}_2(\, a_1 \,|\, a_2 \,)(m)| \leq \alpha_1 \alpha_2 \frac{B_0 D_0}{\omega} \, \frac{e^{-\chi|m|}}{\langle\!\langle m \rangle\!\rangle^2} \,,$$

como conseqüência de (2.58), (2.56) e do Lema 2.10. Isso prova a afirmativa para $k = 2$. O caso geral segue de (2.9), página 23, por indução. ■

Como corolário, observa-se de (2.2) que as funções $\mathcal{Q}_0$, $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$ têm coeficientes de Fourier limitados de acordo com

$$|\mathcal{Q}_i(m)| \leq \gamma_i \frac{e^{-\chi|m|}}{\langle\!\langle m \rangle\!\rangle^2} \,,$$

para constantes positivas γ_i, $i = 0, 1, 2$. Além disso, pela hipótese indutiva (2.52) e pelo Lema 2.10, os coeficientes de Fourier $(v_p v_q)(m)$ do produto de funções $v_p(t) v_q(t)$, com $p, q = 1, \ldots, n-1$, são limitados por

$$|(v_p v_q)(m)| \;\leq\; B_0 \, K_p \, K_q \, \frac{e^{-\chi|m|}}{\langle\!\langle m \rangle\!\rangle^2} \,. \tag{2.59}$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$. A conseqüência de todos esses fatos é que para $i_j \in \{0, 1, 2\}$ e $p, q = 1, \ldots, n-1$, tem-se

$$|\, \mathfrak{R}_k \, (i_1 | i_2 | \cdots | i_{k-1} | v_p v_q) \, (m)| \leq \gamma_{i_1, i_2, \cdots, i_{k-1}} \, K_p \, K_q \, \frac{e^{-\chi|m|}}{\langle\!\langle m \rangle\!\rangle^2} \,,$$

para todo $m \in \mathbb{Z}$, e para constantes positivas $\gamma_{i_1, i_2, \cdots, i_{k-1}}$, dependentes dos índices i_j.

De volta agora para (B.6), concluímos que

$$\left|\mathcal{R}^{(1)}_{n+3}\right| \;\leq\; \eta_2 \sum_{p=1}^{n-1} K_p K_{n-p} + \eta_3 \sum_{p=2}^{n-1} K_p K_{n+1-p} + \eta_4 \sum_{p=3}^{n-1} K_p K_{n+2-p}\,, \tag{2.60}$$

para certas constantes positivas η_2, η_3, η_4.

Cota para T_3. Uma vez que qv_2 é uma combinação linear das funções $\mathcal{Q}_0$, $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_2$, concluímos de (B.7) e dos argumentos prévios que

$$\left|\mathcal{R}^{(2)}_{n+3}\right| \;\leq\; \eta_5 \sum_{p=1}^{n-1} K_p K_{n-p} + \eta_6 \sum_{p=2}^{n-1} K_p K_{n+1-p}\,, \tag{2.61}$$

para certas constantes positivas η_5, η_6.

Cota para T_4. Por (2.39), tem-se

$$M(q^{-1} v_3 l_n) = i \sum_{p=1}^{n-1} M(\,\mathfrak{R}_2(\,qv_3 \,|\, v_p v_{n-p}\,))\,.$$

De (2.34) e (2.59), vemos que ambos qv_3 e $v_p v_{n-p}$ satisfazem as condições da Proposição 2.11. Portanto, por (2.57), $M(\,\mathfrak{R}_2(\,qv_3 \,|\, v_p v_{n-p}\,)) \leq \eta_7 K_p K_{n-p}$ para alguma constante positiva η_7 e

$$M(q^{-1} v_3 l_n) \;\leq\; \eta_7 \sum_{p=1}^{n-1} K_p K_{n-p}\,. \tag{2.62}$$

Terminamos com as estimativas dos termos T_i de (2.54). Se colecionarmos (2.55), (2.60), (2.61) e (2.62) e retornarmos para (2.53), concluímos que podemos encontrar uma constante positiva Γ tal que seja possível definir recursivamente

$$K_n \;:=\; \Gamma \left[\sum_{p=1}^{n-1} K_p K_{n-p} + \sum_{p=2}^{n-1} K_p K_{n+1-p} + \sum_{p=3}^{n-1} K_p K_{n+2-p} + \sum_{p=4}^{n-1} K_p K_{n+3-p} \right]. \tag{2.63}$$

para $n > 4$, após a fixarmos valores convenientes para as constantes K_1, K_2, K_3 e K_4. Note que podemos escolher $K_1 = K_2 = K_3 = K_4$ tomando $K_i = \max\{K_1, K_2, K_3, K_4\}$ para todo $i = 1, \ldots, 4$.

A expressão (2.63) tem a sua versão análoga em [3], com a diferença de que apenas as duas primeiras somas acima ocorriam para a expressão correspondente para K_n. A partir de agora, seguimos de perto os passos de [3]. A primeira coisa a fazer é mostrar que K_n é uma seqüência *não-decrescente*. Temos,

$$K_{n+1} - K_n \;:=\; \Gamma \left[\left(\sum_{a=1}^{4} K_a \right) K_n + \left(\sum_{a=1}^{3} K_a \right) (K_n - K_{n-a}) + \sum_{p=1}^{n-1} K_p (K_{n+4-p} - K_{n-p}) \right].$$

Portanto, assumindo indutivamente que $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 \leq \ldots \leq K_n$, implica em $K_n \leq K_{n+1}$, provando que a seqüência é não-decrescente. Em seguida, escrevemos (2.63) como

$$K_n \;=\; \Gamma \left[\sum_{a=1}^{3} \left(\sum_{b=a}^{3} K_b \right) K_{n-a} + \sum_{p=4}^{n-1} K_p \left(K_{n-p} + K_{n+1-p} + K_{n+2-p} + K_{n+3-p} \right) \right].$$

Como a seqüência é não-decrescente, temos $K_{n-p} + K_{n+1-p} + K_{n+2-p} + K_{n+3-p} \leq 4K_{n+3-p}$ e $K_{n-a} \leq K_{n-1}$ para $a = 1, 2, 3$. Portanto, podemos escrever

$$K_n \leq \Gamma \sum_{a=1}^{3} \left(\sum_{b=a}^{3} K_b \right) K_{n-1} + 4\Gamma \sum_{p=4}^{n-1} K_p K_{n+3-p} = \tilde{\Gamma} K_{n-1} K_4 + 4\Gamma \sum_{p=4}^{n-1} K_p K_{n+3-p}, \quad (2.64)$$

onde

$$\tilde{\Gamma} := \frac{\Gamma}{K_4} \sum_{a=1}^{3} \left(\sum_{b=a}^{3} K_b \right)$$

é uma constante positiva. Adicionando a quantidade positiva

$$\tilde{\Gamma} \sum_{p=4}^{n-2} K_p K_{n+3-p}$$

à (2.64) e definindo $\Lambda := \max\{\tilde{\Gamma}, 4\Gamma\}$, resulta

$$K_n \leq \Lambda \sum_{p=4}^{n-1} K_p K_{n+3-p}.$$

Vamos agora definir uma seqüência auxiliar dada por

$$J_n := \Lambda \sum_{p=4}^{n-1} J_p J_{n+3-p},$$

para $n > 4$, com $J_l = K_l$ para $l = 1, 2, 3,$. É um exercício simples mostrar que $K_n \leq J_n$ para todo n. Agora, vamos considerar a seqüência transladada $L_n = J_{n+2}$, $n \geq 1$. Temos,

$$L_n = \Lambda \sum_{p=4}^{n+1} J_p J_{n+5-p} = \Lambda \sum_{p=4}^{n+1} L_{p-2} L_{n+3-p} = \Lambda \sum_{p=2}^{n-1} L_p L_{n+1-p}. \quad (2.65)$$

A seqüência $\mathbf{c}_n$ definida por

$$\mathbf{c}_n = \sum_{p=2}^{n-1} \mathbf{c}_p \mathbf{c}_{n-p+1}.$$

para $n \geq 3$, com $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_2 = 1$, define os chamados "números de Catalan", os quais podem ser expressados de forma fechada como

$$\mathbf{c}_n = \frac{(2n-4)!}{(n-1)!(n-2)!}, \quad n \geq 2.$$

Pela fórmula de Stirling , os $\mathbf{c}_n$ tem o seguinte comportamento assintótico: $\mathbf{c}_n \approx \frac{1}{16\sqrt{\pi}} \frac{4^n}{n^{3/2}}$, para n grande. A existência de uma conexão entre os números de Catalan e a seqüência L_n é evidente de (2.65). As diferenças são a constante Λ que aparece em (2.65) e o fato de que $L_1 = L_2 = K_3 = K_4$ não são necessariamente iguais a 1. Pode-se, contudo, facilmente mostrar

que $L_n = (K_3)^{n-1}\Lambda^{n-2}\mathbf{c}_n$, $n \geq 2$. Portanto, o seguinte comportamento assintótico pode ser estabelecido:

$$L_n \approx \frac{1}{16\sqrt{\pi}K_3\Lambda^2}\,\frac{(4K_3\Lambda)^n}{n^{3/2}}, \qquad n \text{ grande.}$$

Como $K_n \leq J_n = L_{n-2}$, concluímos que para n grande $K_n \leq M_0(M_1)^n$, ponde M_0, M_1 são constantes positivas apropriadas. Isso completa a prova do Teorema 2.2. ■

*

Capítulo 3

Campo Monocromático

Ilustramos neste capítulo nossos resultados estudando o caso mais simples de interações monocromáticas do tipo

$$f(t) = F_0 + \varphi \cos(\omega t)\,. \tag{3.1}$$

importante em aplicações físicas. Queremos mostrar que sob as condições (I)-(III) obtemos, com nosso método, soluções perturbativas convergentes para todos os parâmetros F_0 e φ, exceto, talvez, em situações espúrias.

3.1 Análise das Condições

O passo inicial para começarmos a aplicar nossos métodos ao estudo de (3.1) é calcular a função $\mathcal{Q}_0$ definida em (1.26), página 12. Assim,

$$\mathcal{Q}_0(t) = e^{2iF_0t}e^{2i\varphi\,\mathrm{sen}(\omega t)/\omega} =: e^{2iF_0t}\mathcal{R}_0(t)\,.$$

Note que $\mathcal{R}_0$ é periódica de período $2\pi/\omega$. Seus coeficientes de Fourier são

$$\frac{\omega}{4\pi}\int_{-\frac{2\pi}{\omega}}^{\frac{2\pi}{\omega}} e^{-in\omega t}e^{2i\varphi\,\mathrm{sen}(\omega t)/\omega}\,dt = J_n\left(\frac{2\varphi}{\omega}\right)\,, \quad n \in \mathbb{Z}\,,$$

onde J_n é a função de Bessel de primeiro tipo e ordem n. Assim, definindo

$$\chi_1 := \frac{2\varphi}{\omega} \qquad \text{e} \qquad \chi_2 := \frac{2F_0}{\omega}\,. \tag{3.2}$$

podemos escrever

$$\mathcal{Q}_0(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_n(\chi_1)\, e^{i(n+\chi_2)\omega t}\,. \tag{3.3}$$

De forma inteiramente análoga, mostra-se que

$$\mathcal{Q}_0(t)^{-1} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} J_{-n}(\chi_1)\, e^{i(n-\chi_2)\omega t}\,. \tag{3.4}$$

Da expressão (3.3), imediatamente conclui-se que a condição (I) ($M(\mathcal{Q}_0) \neq 0$) é satisfeita desde que $\chi_2 = -m$, com $m \in \mathbb{Z}$, e tal que χ_1 não seja um zero de J_m. Por (1.37), página 17, tem-se

$$\Omega = -\frac{m\omega}{2} + \varepsilon J_m(\chi_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Veja também a discussão em [17]. Vamos considerar agora as situações complementares.

Caso (i). Seja $\chi_2 = -m$, um inteiro não-nulo, e χ_1 um zero de J_m. Nesse caso, tem-se

$$\mathcal{Q}_0(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} J_{m+k}(\chi_1)e^{ik\omega t}, \quad \mathcal{Q}_0(t)^{-1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} J_{m-k}(\chi_1)e^{ik\omega t} \quad \text{e} \quad M(\mathcal{Q}_0) = 0. \tag{3.5}$$

Precisamos agora calcular $\mathcal{Q}_1$. Segue imediatamente da definição (1.31), com o auxílio do ítem (1) da Proposição 2.3, página 21, que

$$\mathcal{Q}_1(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[\sum_{k\in\mathbb{Z}_*} \frac{iJ_{m-k}(\chi_1)(J_{m+n}(\chi_1) - J_{m+n-k}(\chi_1))}{k\omega} \right] e^{in\omega t} \tag{3.6}$$

e

$$M(\mathcal{Q}_1) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_*} \frac{iJ_{k+m}(\chi_1)^2}{k\omega}.$$

Observamos agora que, para qualquer inteiro m, tem-se a identidade (a demonstração é apresentada no Apêndice C, página 169)

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}_*} \frac{J_{k+m}(x)^2}{k} = J_m(x)\left[-2\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x)\bigg|_{\nu=m} + \pi Y_m(x) \right], \tag{3.7}$$

onde

$$\pi Y_m(x) := \left(\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x) - (-1)^m \frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(x) \right)\bigg|_{\nu=m}$$

é a função de Bessel de segundo tipo e ordem m. Como χ_1 é um zero de J_m, conclui-se que $M(\mathcal{Q}_1) = 0$ nesse caso. Um cálculo simples usando a definição de $\mathcal{Q}_3$ em (1.39), os coeficientes de Fourier de $\mathcal{Q}_0$ e $\mathcal{Q}_1$ dados em (3.5) e (3.6) e, mais uma vez, o ítem (1) da Proposição 2.3, mostra que

$$M(0\,|\,1) = \frac{1}{\omega^2}\mathcal{T}_m(\chi_1), \quad \text{onde} \quad \mathcal{T}_m(x) := -\sum_{k\in\mathbb{Z}_*}\sum_{p\in\mathbb{Z}_*} \frac{J_{m+p}(x)J_{m+p-k}(x)J_{m+k}(x)}{kp}.$$

Cálculos numéricos mostram que $\mathcal{T}_m(x)$ não se anula nos zero de J_m. Concluímos assim que a condição (III) é válida no caso **(i)**, exceto, talvez, por zeros espurios de J_m para os quais $\mathcal{T}_m$ eventualmente se anule, e cuja existência não pode ser verificada numericamente. Por (1.41), página 18, a freqüência secular Ω fica

$$\Omega = -\frac{m\omega}{2} + \frac{2\varepsilon^3}{\omega^2}\mathcal{T}_m(\chi_1) + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Observe por (2.19), página 28, que $\kappa_1 = 1$.

Caso (ii). Considere agora o caso onde χ_2 é não inteiro (veja também discussão em [17]). Daí, $M(\mathcal{Q}_0) = 0$ e devemos olhar para $M(\mathcal{Q}_1)$. Usando os coeficientes de Fourier de $\mathcal{Q}_0$ e $\mathcal{Q}_0^{-1}$ dados em (3.3) e (3.4), temos

$$M(\mathcal{Q}_1) = \frac{i}{\omega\chi_2}\left[J_0(\chi_1)^2 + 2\chi_2^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_k(\chi_1)^2}{\chi_2^2 - k^2}\right].$$

Geralmente, o lado direito da expressão acima é não nulo, o que implica na condição (II). Portanto, por (1.40),

$$\Omega = F_0 + \frac{\varepsilon^2}{\omega\chi_2}\left[J_0(\chi_1)^2 + 2\chi_2^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_k(\chi_1)^2}{\chi_2^2 - k^2}\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \tag{3.8}$$

Note, entretanto, que para cada intervalo aberto $(k, k+1)$, $k = 1, 2, \ldots$, os termos

$$\frac{J_k(\chi_1)^2}{\chi_2^2 - k^2} + \frac{J_{k+1}(\chi_1)^2}{\chi_2^2 - (k+1)^2}$$

variam continuamente de $+\infty$ até $-\infty$ quando percorremos χ_2 em $(k, k+1)$. Dessa forma, existe em cada intervalo $(k, k+1)$, $k = 1, 2, \ldots$, um valor especial χ_2^s de χ_2 (dependente de χ_1) para o qual $M(\mathcal{Q}_1) = 0$. Nesse caso, estaríamos fora da condição (II). Mas quando $2\chi_2$ é não inteiro, é fácil ver que $M(\mathcal{Q}_3) = 0$. Portanto, exceto pelo caso muito improvável onde $2\chi_2^s$ é um inteiro, estaríamos fora da condição (III) também, e $\Omega = F_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$.

Outra situação especial ocorreria se χ_2 fosse escolhido tal que $F_0 - i\varepsilon^2 M(\mathcal{Q}_1) = 0$. Pelo argumento acima, isso seria possível, mas χ_2 dependeria de ε. Assim, não fica claro se $\Omega = \mathcal{O}(\varepsilon^4)$ ou se ainda teríamos uma dependência mais fraca de Ω em ε (eventualmente resultando em um efeito de localização mais forte do que o apresentado na condição (III)). Na verdade, não fica nem claro se estaríamos em uma situação onde nossas séries perturbativas convergem. Assim, preferimos deixar essa situação especial sem maiores comentários.

É interessante comparar a expressão para a freqüência secular Ω (para $F_0 \neq 0$) com a situação onde $\varphi = 0$ e a freqüência secular Ω_0 é $\Omega_0 := F_0\sqrt{1 + (\frac{\varepsilon}{F_0})^2} = F_0 + \frac{\varepsilon^2}{2F_0} + \mathcal{O}(\varepsilon^4)$. Essa comparação revela o efeito do campo oscilante $\varphi\cos(\omega t)$ na freqüência secular. Tomando $\chi_1 \to 0$ em (3.8), recuperamos Ω_0.

Caso (iii). Considere $\chi_2 = 0$ *i.e.*, $F_0 = 0$, e $\chi_1 = x_a$, onde x_a representa o a-ésimo zero de J_0 em $\mathbb{R}_+$. Esse caso é interessante em conexão com o efeito de localização dinâmica, conforme discussão em [14, 15, 16, 17, 4]. Aqui, por construção, $M(\mathcal{Q}_0) = 0$ e

$$M(\mathcal{Q}_1) = \frac{i}{\omega}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{J_m(\chi_1)^2 - J_{-m}(\chi_1)^2}{m} = 0,$$

uma vez que $J_k(x) = (-1)^k J_{-k}(x)$. Assim, a condição (II) não se aplica e devemos olhar para $M(\,0\,|\,1\,)$. Nesse caso, obtemos

$$M(\,0\,|\,1\,) = \frac{1}{\omega^2}\mathcal{T}\,(x_a)\ , \quad \text{com} \quad \mathcal{T}_0\,(x_a) := -\sum_{n\in\mathbb{Z}_*}\sum_{m\in\mathbb{Z}_*}\frac{J_n\,(x_a)\,J_{n-m}\,(x_a)\,J_m\,(x_a)}{n\,m}\,.$$

Concluímos que a condição (III) será válida, exceto, talvez, por zeros espúrios de J_0 para os quais $\mathcal{T}_0(x_a)$ eventualmente se anule. Cômputos numéricos indicam, entretanto, que tais zeros não existem (confira o gráfico da Figura 3.1).

Concluímos que a condição (III) é adequada para o estudo do campo monocromático quando χ_1 estiver sobre os pontos *ressonantes* x_a. Note, finalmente, que no caso **(iii)**, temos $\Omega = \mathcal{O}(\varepsilon^3)$ (confira (1.41), página 18). Na verdade, a primeira contribuição para Ω é $2\frac{\varepsilon^3}{\omega^2}\mathcal{T}_0(x_a)$. Essa fraca dependência em ε implica em longos tempos de transição para certas amplitudes de probabilidade (veja discussão nas Seções 1.3 e 1.6, páginas 6 e 16, respectivamente).

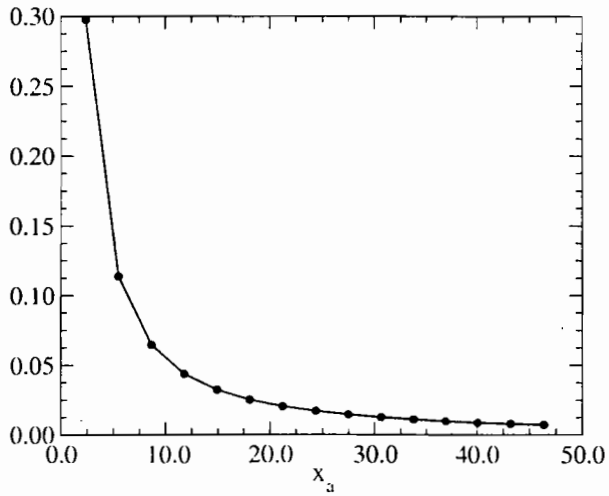


Figura 3.1: Valores de $|\mathcal{T}_0(x_a)|$ calculados para os quinze primeiros zero de J_0 em $\mathbb{R}_-$. Infere-se que $M(\mathcal{Q}_3) \neq 0$ para todo zero de J_0.

Para testar o nosso algoritmo e para extrair mais informações de nossas soluções, calculamos numericamente o propagador $U(t)$ dado em (1.33), página 16, para as condições (I) e (II) do Teorema 1.3 e para a condição (III) do Teorema 2.2 no caso do campo monocromático (3.1). Os resultados são excelentes e serão reportados a seguir.

3.2 Cômputo Numérico das Soluções

Apresentamos aqui um algoritmo passo-a-passo que nos permite calcular o propagador (1.33) apenas a partir dos coeficientes de Fourier da interação f.

Vamos começar com algumas convenções. Assumimos que a interação f é periódica com período $T_\omega = 2\pi/\omega$ e que a sua decomposição de Fourier $f(t) = \sum_n F_n e^{in\omega t}$ tenha um número

finito de termos. Como f é real, deve possuir, além de F_0, um número par de coeficientes de Fourier não nulos, digamos $2J$, com $J \geq 1$. Denotando por $\{n_1, \ldots, n_{2J}\}$ o conjunto de inteiros $\{n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \mid F_n \neq 0\}$, podemos escrever

$$f(t) = F_0 + \sum_{a=1}^{2J} f_a e^{in_a \omega t},$$

com a convenção que $n_a = -n_{2J-a+1}$, para todo $1 \leq a \leq J$, e com $f_a \equiv F_{n_a}$. Claramente, $\overline{f_a} = f_{2J-a+1}$, $1 \leq a \leq J$.

3.2.1 Interações com $F_0 = 0$

Nesse caso, as decomposições de Fourier de q e q^2 podem ser escritas como

$$q(t) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} Q_m e^{im\omega t} \qquad \text{e} \qquad q(t)^2 = \sum_{m \in \mathbb{Z}} Q_m^{(2)} e^{im\omega t}.$$

Os coeficientes Q_m e $Q_m^{(2)}$ são de importância fundamental para o cômputo de (1.33). Os mesmos podem ser obtidos de uma forma fechada a partir dos coeficientes F_m de f. Explicitamente, temos [2, 3] $Q_m = \mathcal{K}_m(1)$ para todo inteiro m, onde, para κ arbitrário, definimos

$$\mathcal{K}_m(\kappa) = e^{i\kappa\gamma_f} \sum_{p_1, \ldots, p_{2J}=0}^{\infty} \delta(P, m) \prod_{a=1}^{2J} \left[\frac{1}{p_a!} \left(\frac{\kappa f_a}{n_a \omega} \right)^{p_a} \right], \tag{3.9}$$

onde $P := \sum_{b=1}^{2J} p_b n_b$, e $\gamma_f := i \sum_{a=1}^{2J} \frac{f_a}{n_a \omega}$. Aqui, $\delta(P, m)$ é igual à 1, se $P = m$ e 0, caso contrário. Para calcular os coeficientes de Fourier de q^2, simplesmente notamos que q^2 é obtido de q pela substituição $f \to 2f$. Portanto, para todo m, $Q_m^{(2)} = \mathcal{K}_m(2)$.

A expressão (3.9) pode ser computada tanto analiticamente (em alguns casos), quanto numericamente. Para interações monocromáticas, uma forma fechada em termos de funções de Bessel de primeiro tipo pode ser obtida (confira (3.3)).

Uma vez conhecido os coeficientes Q_m e $Q_m^{(2)}$, devemos prosseguir para computar a solução particular g, dada pela série (1.22), da equação de Riccati (1.17). Entretanto, primeiramente, precisamos checar qual condição (I), (II) ou (III) é satisfeita por f. Portanto, devemos olhar para os valores médios de $\mathcal{Q}_0$, $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_3$. Tem-se, obviamente, $M(\mathcal{Q}_0) = M(q^2) = Q_0^{(2)}$. Para se obter $M(\mathcal{Q}_1)$ e $M(\mathcal{Q}_3)$, precisamos da decomposição de Fourier de $\mathcal{Q}_1$ e $\mathcal{Q}_3$. A partir das definições (1.31) e (1.39), temos

$$M(\mathcal{Q}_1) = \frac{i}{\omega} \sum_{m \in \mathbb{Z}_*} \frac{\overline{Q_{-m}^{(2)}} \left(Q_0^{(2)} - Q_{-m}^{(2)} \right)}{m}$$

e

$$M(\mathcal{Q}_3) = -\frac{1}{\omega^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}_*} \sum_{m \in \mathbb{Z}_*} \frac{\overline{Q_{-m}^{(2)}}}{n\, m} \left(Q_0^{(2)} Q_n^{(2)} - Q_0^{(2)} Q_{n-m}^{(2)} + Q_{-n}^{(2)} Q_{n-m}^{(2)} \right).$$

Os valores numéricos de $M(\mathcal{Q}_1)$ e $M(\mathcal{Q}_3)$ podem ser calculados trivialmente a partir das expressões acima uma vez que se conheçam os coeficientes $Q_m^{(2)}$.

Cômputo de $g(t)$ sob as Condições (I) e (III)

A condição (I) se aplica toda vez que f satisfizer $M(\mathcal{Q}_0) \neq 0$. Para distinguirmos os coeficientes da expansão (1.22), página 11, entre as condições (I) e (III), passamos a escrever para (I)

$$g_I(t) = q(t) \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \varepsilon^n \tag{3.10}$$

e denotamos as constantes κ_n que aparecem em (1.24)-(1.25) por α_n.

Fixando-se adequadamente as constantes α_n, podemos eliminar completamente os termos seculares de c_n [2, 3] e escrever $c_n(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} C_m^{(n)} e^{im\omega t}$. Os coeficientes $C_m^{(n)}$ podem ser obtidos de forma recursiva a partir de (1.24)-(1.25). Os mesmos são dados por [2]

$$\begin{aligned}
C_m^{(1)} &= \alpha_1 Q_m \,, \\
C_m^{(2)} &= \sum_{\substack{n_1\in\mathbb{Z} \\ n_1\neq 0}} \frac{Q_{m-n_1}\left(\alpha_1^2 Q_{n_1}^{(2)} - \overline{Q_{-n_1}^{(2)}}\right)}{n_1\omega} + \alpha_2 Q_m \,, \\
C_m^{(n)} &= \sum_{\substack{n_1,n_2\in\mathbb{Z} \\ n_1+n_2\neq 0}} \frac{Q_{m-(n_1+n_2)}}{(n_1+n_2)\omega} \left(\sum_{p=1}^{n-1} C_{n_1}^{(p)} C_{n_2}^{(n-p)}\right) + \alpha_n Q_m \,, \qquad \text{for } n \geq 3 \,.
\end{aligned}$$

As constantes α_n são dadas de forma fechada em termos dos coeficientes $Q_m^{(2)}$ e $C_m^{(p)}$, para $p \leq n-1$. Como as expressões são um pouco longas, não as escreveremos aqui. Confira [2].

Como g é dado por (3.10) sob a condição (I), podemos escrever

$$g_I(t) = q(t) \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \varepsilon^n =: \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} G_m^{I,(n)} e^{im\omega t}\right) \varepsilon^n \,, \tag{3.11}$$

onde $G_m^{I,(n)}$ é dado pela convolução $G_m^{I,(n)} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} Q_{m-p} C_p^{(n)}$, cujo valor numérico pode ser facilmente obtido uma vez que já conhecemos Q_m e $C_m^{(n)}$, para todo m e n.

Para a condição (III), tem-se, essencialmente, a mesma solução acima, a menos pela escolha das constantes α_n. No caso, devemos usar o valor das constantes κ_n fixadas anteriormente nas expressões (2.47)-(2.49), página 34. Daí,

$$g_{III}(t) = q(t) \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \varepsilon^n =: \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} G_m^{III,(n)} e^{im\omega t}\right) \varepsilon^n \,,$$

com $G_m^{III,(n)}$ dado pela convolução $G_m^{III,(n)} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} Q_{m-p} V_p^{(n)}$.

Cômputo de $g(t)$ sob a Condição (II)

A condição (II) se aplica toda vez que f satisfizer $M(\mathcal{Q}_0) = 0$, mas $M(\mathcal{Q}_1) \neq 0$. Nesse caso, a solução perturbativa para a equação de Riccati (1.17) é dada por

$$g_{II}(t) = q(t) \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) \lambda^n \,, \quad \text{com} \quad \lambda := \varepsilon^2 \,, \tag{3.12}$$

de acordo com o Teorema 1.2, página 14. Para diferenciar o caso (II) dos casos (I) e (III) denotamos aqui as constantes κ_n de (1.24)-(1.25) por β_n. As mesmas podem ser escolhidas tal que a expansão para g_{II} (3.12) não contenha termos seculares [2]. Portanto, com essa escolha particular de constantes β_n, podemos escrever $e_n(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} E_m^{(n)} e^{im\omega t}$. Os coeficientes $E_m^{(n)}$ são dados indutivamente por [2]

$$\begin{aligned}
E_m^{(1)} &= -\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{Q_{m-n}\overline{Q_{-n}^{(2)}}}{n\omega} + Q_m \left(\beta_1 + \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n\neq 0}} \frac{\overline{Q_{-n}^{(2)}}}{n\omega} \right) , \\
E_m^{(n)} &= \sum_{\substack{n_1,n_2\in\mathbb{Z}\\ n_1+n_2\neq 0}} \frac{Q_{m-n_1-n_2}}{(n_1+n_2)\omega} \left(\sum_{p=1}^{n-1} E_{n_1}^{(p)} E_{n_2}^{(n-p)} \right) \\
&\quad -Q_m \sum_{\substack{n_1,n_2\in\mathbb{Z}\\ n_1+n_2\neq 0}} \left(\sum_{p=1}^{n-1} E_{n_1}^{(p)} E_{n_2}^{(n-p)} \right) \frac{1}{(n_1+n_2)\omega} + \beta_n Q_m \,, \qquad \text{for } n \geq 2 \,.
\end{aligned}$$

As constantes β_n também são dadas de forma fechada em [2] em termos dos coeficientes conhecidos $Q_m^{(2)}$ e $E_m^{(p)}$, para todo m e $p \leq n-1$. Assim, a solução (3.12) pode ser computada numericamente para todo t. Para conveniência futura, escrevemos

$$g_{II}(t) = q(t) \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) \lambda^n =: \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} G_m^{II,(n)} e^{im\omega t} \right) \lambda^n \,. \tag{3.13}$$

onde $G_m^{II,(n)} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} Q_{m-p} E_p^{(n)}$.

3.2.2 Interações com $F_0 \neq 0$

Quando $F_0 \neq 0$, tem-se $M(\mathcal{Q}_0) = 0$, exceto quando $2F_0 = k\omega$, para algum inteiro k [2, 3]. Como a situação onde $2F_0 = k\omega$ não foi genericamente estudada em [2, 3, 5], assumimos que $2F_0 \neq k\omega$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Para $M(\mathcal{Q}_0) = 0$, a condição (I) não é satisfeita. Por outro lado, a convergência de nossas expansões para $F_0 \neq 0$ sob a condição (III) ainda não foi estudada. Portanto, vamos aqui apenas considerar a condição (II). Nesse caso, q é igual à

$$q(t) = e^{iF_0 t} \sum_{m\in\mathbb{Z}} Q_m e^{im\omega t} \tag{3.14}$$

e as funções e_n de (3.12) são tais que

$$e_n(t) = e^{-iF_0 t} \sum_{m\in\mathbb{Z}} E_m^{(n)} e^{im\omega t} . \tag{3.15}$$

Quando $F_0 \neq 0$, os coeficientes de Fourier $E_m^{(n)}$ acima assumem uma forma simples [3]:

$$\begin{aligned} E_m^{(1)} &= \sum_{a\in\mathbb{Z}} \frac{Q_{m+a}\overline{Q_a^{(2)}}}{a\omega + 2F_0} , \\ E_m^{(n)} &= \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{a,b\in\mathbb{Z}} \frac{Q_{m-a-b} E_a^{(p)} E_b^{(n-p)}}{(a+b)\omega - 2F_0} , \quad \text{for } n \geq 2 . \end{aligned}$$

Finalmente, de (3.14), (3.15) e (3.13), obtém-se $g_{II}(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} G_m^{II} e^{im\omega t}$, onde

$$G_m^{II} = \sum_{n=1}^{\infty} G_m^{II,(n)} \lambda^n . \quad \text{com} \quad \lambda = \varepsilon^2$$

e $G_m^{II,(n)} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} Q_{m-p} E_p^{(n)}$. Dessa forma, temos completamente determinada a função g_{II} para $F_0 \neq 0$.

3.2.3 Cômputo do Propagador $U(t)$

Uma vez que os coeficientes $G_m^{i,(n)}$, $i = I, II, III$, (para as condições (I), (II) ou (III)) sejam conhecidos, o propagador $U(t)$ dado em (1.33) pode ser calculado de uma forma direta a partir das expressões (1.18)-(1.19), página 10, conforme mostraremos a seguir. Para simplificar a notação, os coeficientes $G_m^{i,(n)}$ serão abreviados simplesmente por $G_m^{(n)}$, servindo para qualquer uma das condições (I), (II) ou (III). No caso da condição (II), devemos ainda substituir $\varepsilon \to \varepsilon^2$ nas expressões abaixo.

Começamos definindo

$$G_m(\varepsilon) := \sum_{n=1}^{\infty} G_m^{(n)} \varepsilon^n . \tag{3.16}$$

A freqüência secular Ω é dada por [2, 3]

$$\Omega \equiv \Omega(\varepsilon) = M(f) + M(g) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} G_0^{(n)} \varepsilon^n .$$

Analisando (1.18)-(1.19), percebemos que os coeficientes de Fourier de R podem ser calculados se primeiramente encontrarmos a decomposição de Fourier da função

$$W(t) := \exp\left(-i \int_0^t g(\tau)\, d\tau\right) .$$

De fato, como $R = \overline{q}\,W$, obtemos os coeficientes de Fourier de R tomando a convolução entre os coeficientes de $\overline{q}$ e W. Para W, tem-se

$$W(t) = e^{i\gamma_f(\varepsilon)}\, e^{-i\Omega t}\, \exp\left(-\sum_{m\in\mathbb{Z}} H_m\, e^{im\omega t} \right), \tag{3.17}$$

com $H_m := \frac{G_m(\varepsilon)}{m\omega}$, para $m \neq 0$ e $H_0 = 0$. Além disso, $\gamma_f(\varepsilon) := i\sum_{m\in\mathbb{Z}} H_m$. Escrevendo,

$$W(t) \;=\; e^{-i\Omega t} \sum_{m\in\mathbb{Z}} W_m\, e^{im\omega t}\,, \tag{3.18}$$

e usando (3.17), encontramos $W_m = \mathcal{W}_m(1)$ para todo inteiro m, onde, para κ arbitrário, definimos

$$\mathcal{W}_m(\kappa) = e^{-i\kappa\gamma_f(\varepsilon)} \left(w_m + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-\kappa)^{p+1}}{(p+1)!} \sum_{n_1,\ldots,n_p\in\mathbb{Z}} H_{n_1}\cdots H_{n_p} H_{m-N_p} \right).$$

Acima, $w_m = -\kappa H_m$ para $m \neq 0$, $w_0 = 1$ e $N_p := \sum_{a=1}^{p} n_a$. Usando agora (3.18) e o fato que $R = \overline{q}\,W$, concluímos que R pode ser escrito como

$$R(t) = e^{-i\Omega t} \sum_{m\in\mathbb{Z}} R_m\, e^{im\omega t}\,, \tag{3.19}$$

com os coeficientes R_m dados pela convolução

$$R_m = \sum_{p\in\mathbb{Z}} \overline{Q_{p-m}} W_p\,. \tag{3.20}$$

Isso encerra o cálculo de R em termos de sua série de Fourier (3.19). Notamos de (3.16)-(3.20) que uma vez que os coeficientes $G_m^{(n)}$ de g sejam dados, podemos numericamente calcular G_m, H_m, W_m e, portanto, R_m com um algoritmo computacional simples.

Em seguida, prosseguimos computando a série de Fourier de S. Em primeiro lugar, encontramos os coeficientes de Fourier de R^{-2}. Essa é uma tarefa simples, uma vez que R^{-2} é obtido de R pela substituição $(f+g) \to -2(f+g)$. Portanto, devemos trocar $H_m \to -2H_m$ e $\overline{q} \to q^2$. Conseqüentemente, encontramos

$$R(t)^{-2} = e^{2i\Omega t} \sum_{m\in\mathbb{Z}} R_m^{(-2)}\, e^{im\omega t}\,. \tag{3.21}$$

onde $R_m^{(-2)} = \sum_{p\in\mathbb{Z}} Q_{m-p}^{(2)} W_p^{(-2)}$, com $W_m^{(-2)} = \mathcal{W}_m(-2)$ para todo inteiro m. Agora, a função S é obtida por uma simples integração de R^{-2}. Um cálculo trivial a partir de (3.21) nos dá

$$S(t) = \sigma_0 + e^{2i\Omega t} \sum_{m\in\mathbb{Z}} S_m\, e^{im\omega t}\,. \tag{3.22}$$

com

$$S_m := -i\frac{R_m^{(-2)}}{m\omega + 2\Omega} \qquad \text{e} \qquad \sigma_0 := -\sum_{m\in\mathbb{Z}} S_m\,.$$

Assumimos que $m\omega + 2\Omega \neq 0$ para todo $m \in \mathbb{Z}$ (confira a discussão sobre *cruzamento de níveis* em [3]).

Finalmente, para computar o propagador de acordo com (1.18)–(1.19), ainda precisamos de g_0, o qual pode ser facilmente obtido a partir dos coeficientes $G_m(\varepsilon)$:

$$g_0 \equiv g(0) \;=\; \sum_{m\in\mathbb{Z}} G_m(\varepsilon)\,. \tag{3.23}$$

As fórmulas (3.19), (3.22) e (3.23) podem ser agora usadas para se calcular $U(t)$ numericamente para todos os tempos. Note que essas fórmulas dependem essencialmente dos coeficientes de Fourier $G_m^{(n)}$ de g. Esses, por sua vez, dependem diretamente dos coeficientes Q_m e $Q_m^{(2)}$ de q e $\mathcal{Q}_0$, os quais derivam dos coeficiente de f. Para visualizar todos os passos necessários ao cálculo de $U(t)$, apresentamos abaixo alguns diagramas ilustrativos.

- Condição (I): $M(\mathcal{Q}_0) \neq 0$.

$$\begin{array}{ccccccc}
f(t) & \rightarrow & F_m & \rightarrow & Q_m, Q_m^{(2)} & - & \alpha_n \\
 & & & & & & \downarrow \\
H_m & \leftarrow & \Omega & \leftarrow & G_m^{I,(n)}, g_0 & \leftarrow & C_m^{(n)} \\
\downarrow & & & & & & \\
W_m, W_m^{(-2)} & \rightarrow & R_m, S_m & \rightarrow & R(t), S(t) & - & U(t)
\end{array}$$

- Condição (II): $M(\mathcal{Q}_0) = 0$, mas $M(\mathcal{Q}_1) \neq 0$.

$$\begin{array}{ccccccc}
f(t) & \rightarrow & F_m & \rightarrow & Q_m, Q_m^{(2)} & - & \beta_n \\
 & & & & & & \downarrow \\
H_m & \leftarrow & \Omega & \leftarrow & G_m^{II,(n)}, g_0 & - & E_m^{(n)} \\
\downarrow & & & & & & \\
W_m, W_m^{(-2)} & \rightarrow & R_m, S_m & \rightarrow & R(t), S(t) & - & U(t)
\end{array}$$

- Condição (III): $M(\mathcal{Q}_0) = M(\mathcal{Q}_1) = 0$, mas $M(\mathcal{Q}_3) \neq 0$.

$$\begin{array}{ccccccc}
f(t) & \rightarrow & F_m & \rightarrow & Q_m, Q_m^{(2)} & - & \kappa_n \\
 & & & & & & \downarrow \\
H_m & \leftarrow & \Omega & \leftarrow & G_m^{III,(n)}, g_0 & - & V_m^{(n)} \\
\downarrow & & & & & & \\
W_m, W_m^{(-2)} & \rightarrow & R_m, S_m & \rightarrow & R(t), S(t) & - & U(t)
\end{array}$$

3.3 Resultados

Agora vamos aplicar o algoritmo descrito na seção anterior para estudar o caso da interação monocromática f dada em (3.1), página 41, a qual é relevante em muitas aplicações físicas. Conforme discutido na Seção 3.1, as condições (I), (II) e (III) de nosso método perturbativo são adequadas para o estudo de (3.1) em praticamente todo espaço de parâmetros (F_0, φ). De forma equivalente, podemos trabalhar com os parâmetros χ_1 e χ_2 definidos em (3.2). A Tabela 3.1 mostra um resumo das condições satisfeitas por f em função dos parâmetros χ_1 e χ_2 de acordo com a análise da Seção 3.1.

Nome	χ_1	χ_2	Condição
(A)	não zero de J_m	$-m \in \mathbb{Z}$	(I)
(B)	zero de J_m	$-m \in \mathbb{Z}$	(III)
(C)	qualquer	não inteiro	(II)

Tabela 3.1: Classificação das condições satisfeitas pelo campo monocromático (3.1) em função dos parâmetros $\chi_1 = 2\varphi/\omega$ e $\chi_2 = 2F_0/\omega$. Nomeamos por (A), (B) e (C) os três casos possíveis.

Apesar de não indicarmos na Tabela 3.1, conforme apontamos na Seção 3.1, existe no caso (C), para cada intervalo $(k, k+1), k \in \mathbb{Z}_+$, um valor especial χ_2^s de χ_2 (dependente de χ_1) para o qual $M(\mathcal{Q}_1) = 0$, e estaríamos fora da condição (II). Observamos que essa situação espúria não é estudada aqui.

A seguir apresentamos alguns resultados gráficos mostrando a probabilidade de transição entre os estados Φ_e e Φ_d para o sistema (1.3) (confira a Seção 1.3, página 6), calculada para os casos (A), (B) e (C) da Tabela 3.1. Relembrando, de acordo com (1.11), temos

$$P(t) = |\langle \Phi_e, U(t)\Phi_d \rangle|^2 = |U_{12}(t)|^2 . \tag{3.24}$$

Podemos agora calcular $P(t)$ numericamente usando os métodos descritos na Seção 3.2 para computar $U(t)$. Para estimar a precisão de nossos cálculos numéricos, testamos a unitariedade do operador de evolução temporal, $U(t)^\dagger U(t) = \mathbb{1}$, considerando a quantidade

$$N(t) := \det U(t) - 1 = |U_{11}(t)|^2 + |U_{12}(t)|^2 - 1 ,$$

que deve ser igual à zero para $U(t)$ unitário.

Vamos inicialmente considerar o caso (A) da Tabela 3.1 com $\omega = 1.0$, $\chi_1 = 2/\omega$ e $\chi_2 = F_0 = 0$. A Figura 3.2 mostra os gráficos de $P(t)$ e $N(t)$ para $\varepsilon = 0.01$ e $\varepsilon = 0.10$, plotados de $t = 0$ até $t = T_\Omega = 2\pi/\Omega$, em unidades de $T_\omega = 2\pi/\omega$, o período de oscilação do campo externo f. Os cálculos foram realizados usando uma expansão para g até $\mathcal{O}(\varepsilon^{25})$. Os coeficientes de Fourier (genericamente denotados por $\mathcal{F}_m$) envolvidos no cômputo de $U(t)$ foram tomados com $m = -40, \ldots, 40$. Dos desvios de $N(t)$ de 0, podemos inferir erros muito pequenos de cálculos,

resultado em valores bastante confiáveis e corretos para $P(t)$. Para $\varepsilon = 0.01$ e $\varepsilon = 0.10$, temos erros apenas da ordem de 4.0×10^{-7}. Apesar de não mostrarmos, para $\varepsilon = 0.40$, os erros sobem para cerca de 6.0×10^{-4}, indicando que o parâmetro ε está se aproximando do raio de convergência das expansões.

Como no caso (A) estamos sob a condição (I), a freqüência secular Ω é dada por (1.37), página 17, logo $\Omega = \mathcal{O}(\varepsilon)$ (escolhemos $F_0 = \chi_2 = 0$). Para $\varepsilon = 0.01$, da expansão completa de Ω (confira (1.36)), obtemos $T_\Omega \cong 450T_\omega$. Para $\varepsilon = 0.10$, $T_\Omega \cong 45T_\omega$ e para $\varepsilon = 0.40$, $T_\Omega \cong 25T_\omega$. Podemos observar dos gráficos da Figura 3.2, que a probabilidade de transição $P(t)$ se comporta como uma oscilação de Rabi com freqüência Ω, *i.e.*, $P(t) \cong \sin^2(\Omega t)$. Pequenas oscilações de freqüência ω, com amplitudes da ordem de $|\varepsilon|$, são superpostas a essa oscilação de Rabi, resultando em uma evolução quase-periódica para o sistema (de acordo com o garantido pelo Teorema de Floquet).

Agora consideramos o caso (B) da Tabela 3.1 com $\omega = 10.0$, χ_1 igual a algum zero positivo de J_0, e $\chi_2 = F_0 = 0$. Como estamos sob a condição (III) e $F_0 = 0$, a freqüência secular se torna, de acordo com (1.41), $\Omega = \mathcal{O}(\varepsilon^3)$, fato primeiramente apontado em [4].

Para calcular a solução nesse caso, g foi expandido até $\mathcal{O}(\varepsilon^6)$. Esse fato contrasta com a expansão para g na situação anterior, onde g foi computada até $\mathcal{O}(\varepsilon^{25})$. O motivo para isso reside no fato de que para a condição (III), a expansão para as constantes κ_n são muito mais complicadas do que das constantes α_n, para a condição (I). Felizmente, entretanto, as expressões para as constantes κ_1, κ_2 e κ_3 não são tão complicadas e são suficientes para expandir g até $\mathcal{O}(\varepsilon^6)$ (confira a Seção 2.3, página 26 para detalhes). Se nos limitarmos a estudar situações onde ε é bastante pequeno, *i.e.*, bem dentro do raio de convergência das expansões em ε, resultados excelentes ainda podem ser obtidos. Para comprovar nossas afirmativas, apresentamos na Figura 3.3 uma comparação entre a função g calculada de acordo com a expansão até ε^6 e g calculada por um procedimento numérico de resolução da equação de Riccati associada (Runge-Kutta). Utilizou-se na comparação $\omega = 1.0$, χ_1 igual ao primeiro zero positivo de J_0, $\chi_2 = F_0 = 0$ e $\varepsilon = 0.01$. Na Figura 3.4 apresentamos a mesma comparação, mas com $\varepsilon = 0.10$.

A Figura 3.5 apresenta gráficos de $P(t)$ e $N(t)$ para $\varepsilon = 0.01$ e $\varepsilon = 0.10$ quando $\chi_1 = x_1$, x_1 sendo o primeiro zero positivo de J_0, plotados de $t = 0$ até $t = T_\Omega = 2\pi/\Omega$, em unidades de $T_\omega = 2\pi/\omega$. A figura também apresenta $P(t)$ e o erro $N(t)$ para $\varepsilon = 0.10$ e $\chi_1 = x_2$, o segundo zero positivo de J_0. Os erros na Figura 3.5 (medidos a partir do desvio de $N(t)$ de zero) são maiores do que aqueles apresentados na Figura 3.2 devido ao fato de g estar sendo computada em menor ordem. Entretanto, para ε pequeno, os erros são ainda pequenos, da ordem de apenas 3.0×10^{-5} para $\varepsilon = 0.01$ e da ordem de 3.0×10^{-3} para $\varepsilon = 0.10$ (ambos para $\chi_1 = x_1$). Os erros para $\varepsilon = 0.10$ e $\chi_1 = x_2$ são limitados por 2.0×10^{-4}. Observamos que os gráficos de $P(t)$ na Figura 3.5 apresentam os mesmos aspectos qualitativos dos apresentados na Figura. 3.2. Existe uma oscilação de Rabi predominante (com freqüência Ω) superposta por oscilações menores de freqüência ω cujas amplitudes são possivelmente limitadas por termos

proporcionais à $|\varepsilon|^3$.

A maior diferença dos gráficos da Figura 3.2 e da Figura 3.5 é, sem dúvida, o período da oscilação de Rabi T_Ω. No último caso, o tempo longo necessário para que o sistema transite do estado inicial Φ_d para o estado final Φ_e, comparado com o ciclo básico T_ω da perturbação externa, indica o fenômeno (aproximado) de localização dinâmica. O período secular T_Ω obtido para as situações apresentadas na Figura 3.5 foram $T_\Omega \cong 1.6 \times 10^9 T_\omega$ para $\varepsilon = 0.01$ e $T_\Omega \cong 1.6 \times 10^6 T_\omega$ para $\varepsilon = 0.10$ e $\chi_1 = x_1$. Para $\chi_1 = x_2$, obtivemos $T_\Omega \cong 4.5 \times 10^6 T_\omega$. Note que esses são valores muito maiores de T_Ω do que aqueles obtidos para as situações apresentadas na Figura 3.2.

Podemos também comparar os resultados apresentados para os dois diferentes zeros de J_0 analisados na Figura 3.5. Observamos que o comportamento qualitativo de $P(t)$ é o mesmo para ambos os casos. Em particular, o efeito de localização é preservado, uma vez que $\Omega = \mathcal{O}(\varepsilon^3)$ quando χ_1 é um zero de J_0. Podemos notar a partir do desvio da unitariedade $N(t)$ mostrado na Figura 3.5 que os erros para $\chi_1 = x_2$, comparados com os obtidos para o mesmo valor de ε mas para $\chi_1 = x_1$, são menores por um fator $\sim 1/10$. Podemos entender esse fato da seguinte maneira: como $x_2 > x_1$, a força φ da interação f quando $\chi_1 = x_2$ é maior do que quando $\chi_1 = x_1$, portanto, para o mesmo valor de ε, a perturbação efetiva ε/φ é menor no primeiro caso, resultando em um cálculo perturbativo mais preciso.

Investigamos agora o caso (C) da Tabela 3.1. Consideramos $\omega = 1.0$, $\chi_1 = 1.0$ e $\chi_2 = 0.3$. Isso implica na condição (II) e devemos seguir o roteiro da Seção 3.2.2. A Figura 3.6 apresenta os resultados obtidos para $P(t)$ e $N(t)$ para três valores de ε: 0.05, 0.10 e 0.20. Os gráficos são calculados utilizando-se uma expansão para g até ε^{20}. Como nos outros gráficos, $P(t)$ e $N(t)$ foram computadas de $t = 0$ até $t = T_\Omega$ em unidades de T_ω.

Devido à presença do campo constante não-nulo F_0, o comportamento qualitativo da probabilidade de transição é significativo diferente dos resultados anteriores (Figuras 3.2 e 3.5). De fato, a freqüência secular Ω é agora dada por (1.40), página 18 e, portanto, é da ordem de F_0. Para $\varepsilon = 0.05$, obtivemos $T_\Omega \cong 6.3T_\omega$, para $\varepsilon = 0.15$, $T_\Omega \cong 6.0T_\omega$ e para $\varepsilon = 0.20$, $T_\Omega \cong 5.0T_\omega$. Como escolhemos F_0 da ordem de ω, existe uma forte competição entre as oscilações de Rabi (governadas por Ω) e as oscilações do campo externo. Isso resulta nos padrões apresentados na Figura 3.6, os quais não são do tipo $\sin^2(\Omega t)$. Em particular, $P(t) < 1$ para todo tempo, resultando no fato de que o estado Φ_d nunca transita completamente para o estado Φ_e. Além disso, nota-se que a amplitude de transição $P(t)$ tende a zero quando $\varepsilon \to 0$ (confira (3.25), abaixo), diferentemente dos casos apresentados nas Figuras 3.2 e 3.5, anteriormente.

É interessante observar dos gráficos da Figura 3.6 que a probabilidade de transição se aproxima de 1 à medida que ε aumenta. Isso nos dá a impressão de que para ε suficientemente grande, poderíamos ter $P(t) > 1$. Entretanto, nossas expansões não seriam convergentes nesse caso, já que ε seria maior que o raio de convergência. Para ilustrar isso, vamos considerar o caso trivial onde $\chi_1 = 0$ e $\chi_2 = 2F_0/\omega$ não é um inteiro. Como agora $f(t) = F_0 = \omega\chi_2/2$, a equação

de Schrödinger (1.3) se torna independente do tempo, com Hamiltoniano $H_2 = \varepsilon\sigma_1 + F_0\sigma_3$. O propagador $U(t)$ pode ser calculado por métodos elementares, resultando na expressão (1.14), página 8. A probabilidade de transição é então dada por

$$P(t) = \frac{\varepsilon^2}{F_0^2 + \varepsilon^2} \sin^2(\Omega_0 t)\,, \tag{3.25}$$

com $\Omega_0 = \sqrt{F_0^2 + \varepsilon^2}$.

Note que aqui, para $F_0 \neq 0$, $P(t) = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ e $P(t) < 1$. Para $f(t) = F_0$, a equação de Riccati (1.17) associada ao sistema $H_2 = \varepsilon\sigma_1 + F_0\sigma_3$ admite uma solução particular dada pela constante

$$g_0 = -F_0 + \sqrt{F_0^2 + \varepsilon^2}\,.$$

Mostrou-se em [2] que para $f(t) = F_0$ a expansão em ε (3.12) coincide, como esperado, com a expansão de Taylor (centrada em $\varepsilon = 0$) de g_0. Portanto, a região de convergência das expansões perturbativas consideradas está definida pela condição $|\varepsilon| < |F_0|$.

Vamos ilustrar melhor as últimas considerações com um exemplo numérico. Primeiro ajustamos $F_0 = 0.4$. A Figura 3.7 mostra $P(t)$ e $N(t)$ para dois valores críticos de ε: $\varepsilon = 0.30 < F_0$ e $\varepsilon = 0.43 > F_0$, onde supostamente as expansões não convergem. Também apresentamos na Figura 3.7 (linhas tracejadas) os gráficos de $P(t)$ calculados de acordo com (3.25). Observando-se $N(t)$ e o desvio da probabilidade de transição calculada perturbativamente daquela calculada via (3.25), concluímos que a região de convergência de nossas expansões está restrita à região $|\varepsilon| < |F_0|$, conforme esperado. É importante observar que quando $|\varepsilon| < F_0$, o cálculo perturbativo do propagador coincide exatamente com o cálculo analítico (1.14). Isso pode ser visto comparando-se os valores perturbativo e exato (dado em (3.25)) calculados de $P(t)$, conforme apresentação na Figura 3.7.

3.4 Comentários

Conforme já mencionamos, as vantagens do método perturbativo aqui exposto podem ser vistas em três aspectos. Primeiramente, ele permite o cômputo dos valores médios de qualquer observável em qualquer ordem de ε de uma maneira controlada (devido a convergência uniforme), não apenas em primeira ordem, como se faz usualmente. O segundo aspecto, está no fato de que tal método se aplica a qualquer função periódica f, não apenas aos campos monocromáticos. Finalmente, o terceiro e mais importante aspecto, está na estabilidade numérica obtida mesmo para tempos muito longos, pois as expansões obtidas estão livres de termos seculares e são uniformemente e absolutamente convergentes pata todo $t \in \mathbb{R}$. Assim, temos a possibilidade de cálculos numéricos precisos para probabilidades de transição e outros observáveis para tempos arbitrariamente longos sem o acúmulo de erros.

Estabilidade para tempos longos é particularmente importante em situações envolvendo localização dinâmica. Isso porque, como observado no capítulo anterior, a localização não é um

efeito exato em sistemas de dois-níveis, resultando em tempos de transição para certas amplitudes de probabilidade que são extremamente longos comparados ao ciclo do campo externo f, a saber da ordem de ε^{-3} (veja (1.41) com $F_0 = 0$). Até o que sabemos, tais cálculos para tempos longos ainda não haviam sido realizados antes, uma vez que os mesmos exigem um método bastante estável que também incluam correções de ordem superior em ε. Para tempos curtos, outros métodos, como aquele empregado em [19], podem ser aplicados com sucesso, mas eles não são úteis para a análise do efeito de localização dinâmica. Para comparação, observe que o intervalo de tempo apresentado nos gráficos da Figura 3.5 difere em muitas ordens de magnitude dos gráficos correspondentes encontrados em [19].

Outros aspecto interessante do método aqui apresentado, é que o mesmo pode ser implementado numericamente com códigos computacionais relativamente simples. De fato, o algoritmo descrito na Seção 3.2 para calcular o propagador unitário $U(t)$ consiste, essencialmente, em operações simples envolvendo os coeficientes de Fourier de q e q^2, os quais podem ser conhecidos de forma fechada.

Resumindo, o método aqui descrito não é apenas matematicamente rigoroso, mas também muito útil em aplicações práticas, podendo ser aplicado com grande generalidade, com resultados bastante precisos, mesmo para tempos longos.

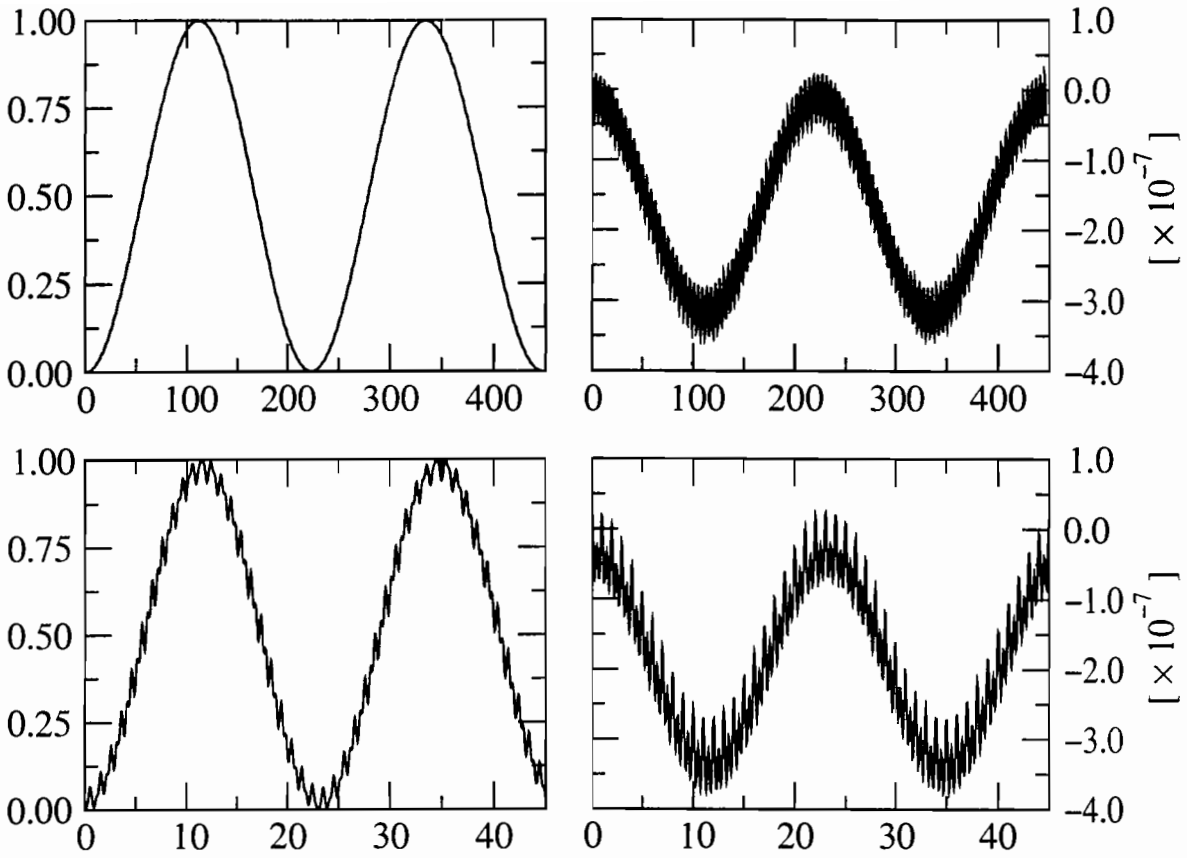


Figura 3.2: Gráficos da probabilidade de transição $P(t)$ (coluna esquerda) e do desvio da unitariedade $N(t)$ (coluna direita) como função do tempo (medido em unidades de T_ω) para vários ε. Considerou-se o caso (A) da Tabela 3.1, com $\omega = 1.0$, $\chi_1 = 2/\omega$ e $\chi_2 = 0$. Utilizou-se $\varepsilon = 0.01, 0.10$ nas colunas de cima e de baixo, respectivamente.

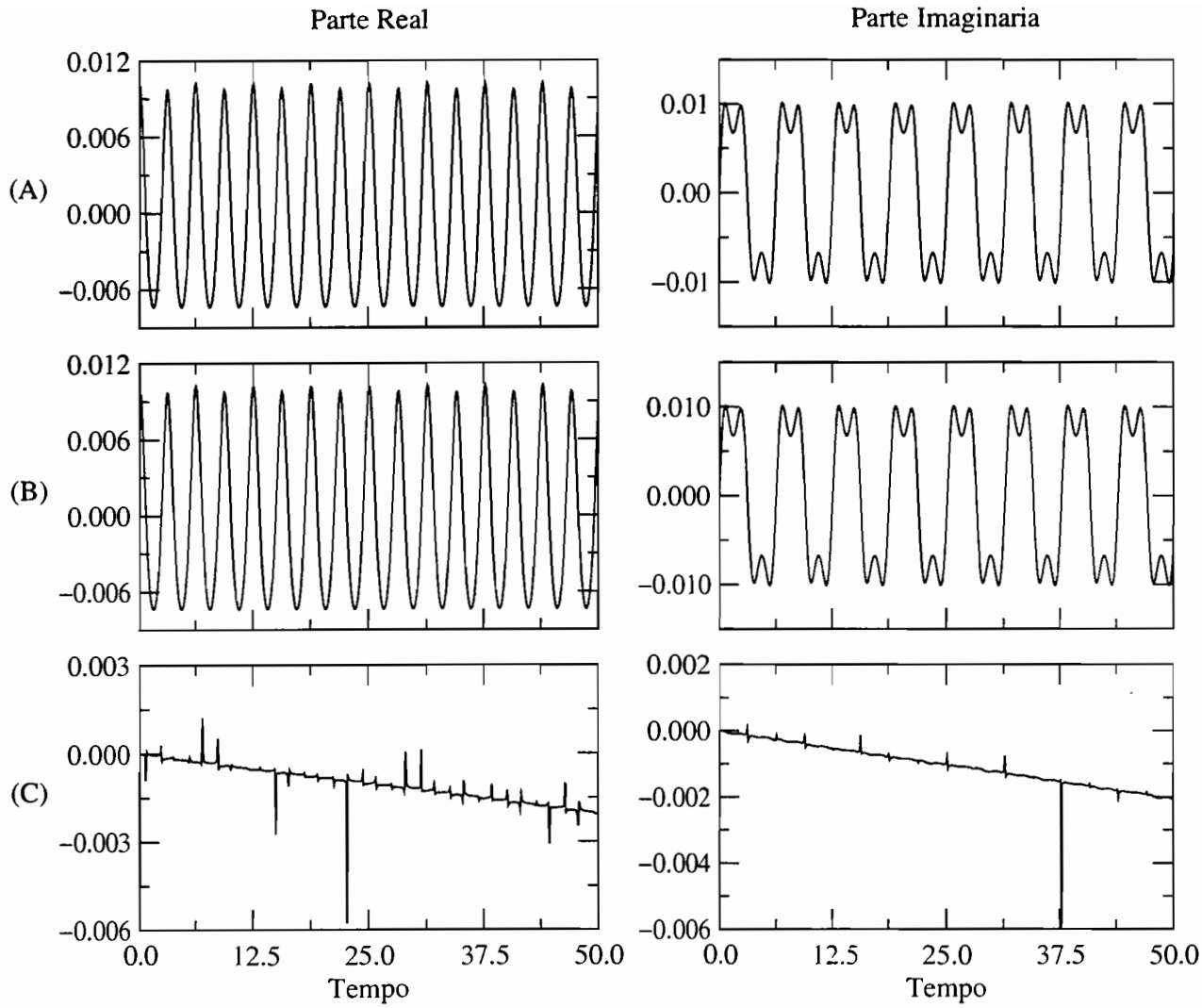


Figura 3.3: Parte real e parte imaginária da solução da equação de Riccati para $\chi_1 = x1$. x_1 sendo o primeiro zero positivo de J_0 e $\chi_2 = 0$. Utilizou-se $\varepsilon = 0.01$ e $\omega = 1.0$. **(A)** representa a solução perturbativa g_p, **(B)** representa a solução numérica g_n e **(C)** representa o desvio relativo $(g_p - g_n)/g_p$ em %. Nota-se que esse desvio não ultrapassa o valor de $\sim 0.006\%$.

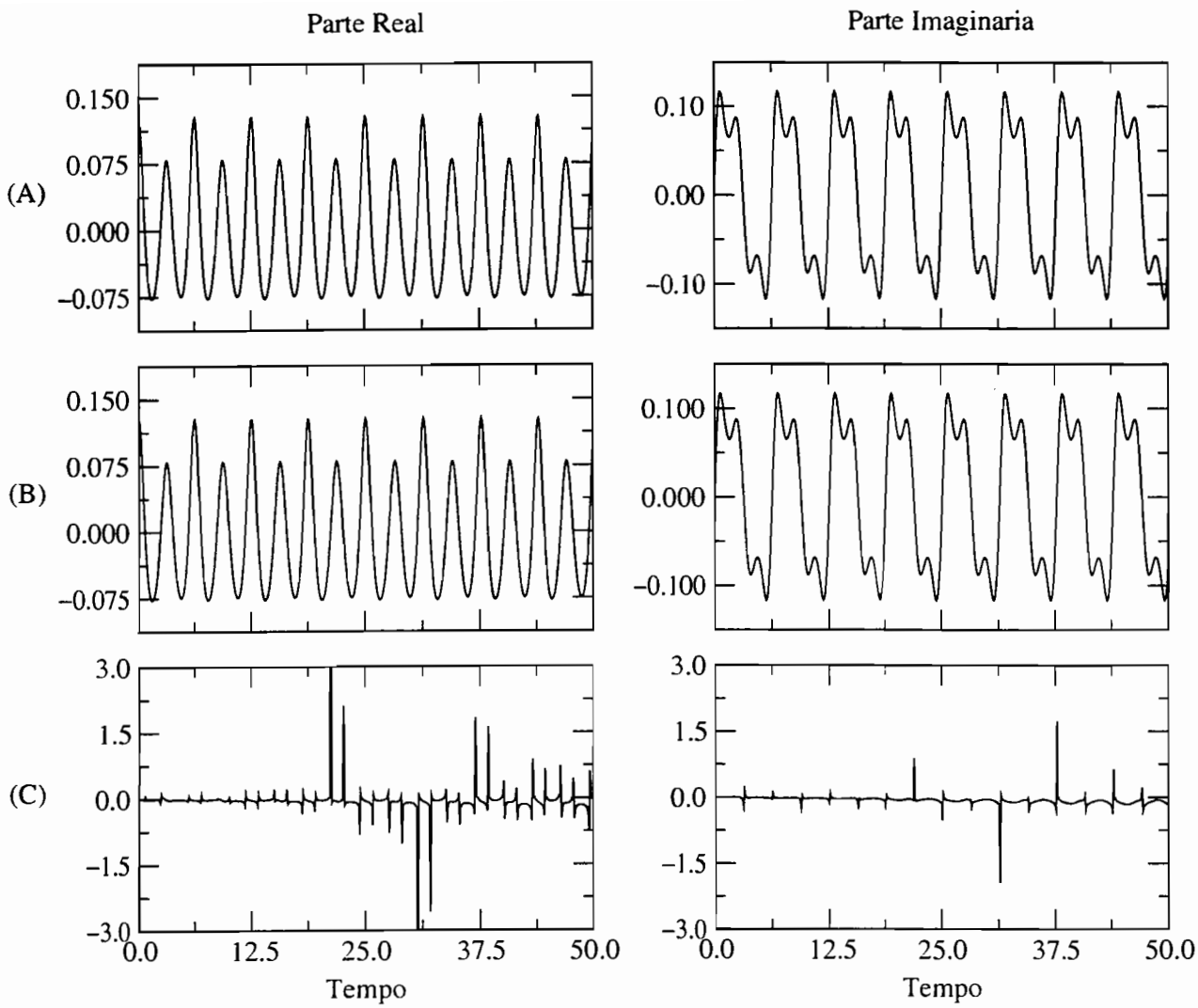


Figura 3.4: Parte real e parte imaginária da solução da equação de Riccati para $\chi_1 = x1$, x_1 sendo o primeiro zero positivo de J_0 e $\chi_2 = 0$. Utilizou-se $\varepsilon = 0.10$ e $\omega = 1.0$. **(A)** representa a solução perturbativa g_p. **(B)** representa a solução numérica g_n e **(C)** representa o desvio relativo $(g_p - g_n)/g_p$ em %. Nota-se que esse desvio não ultrapassa o valor de $\sim 3.0\%$, o qual só ocorre em pontos isolados.

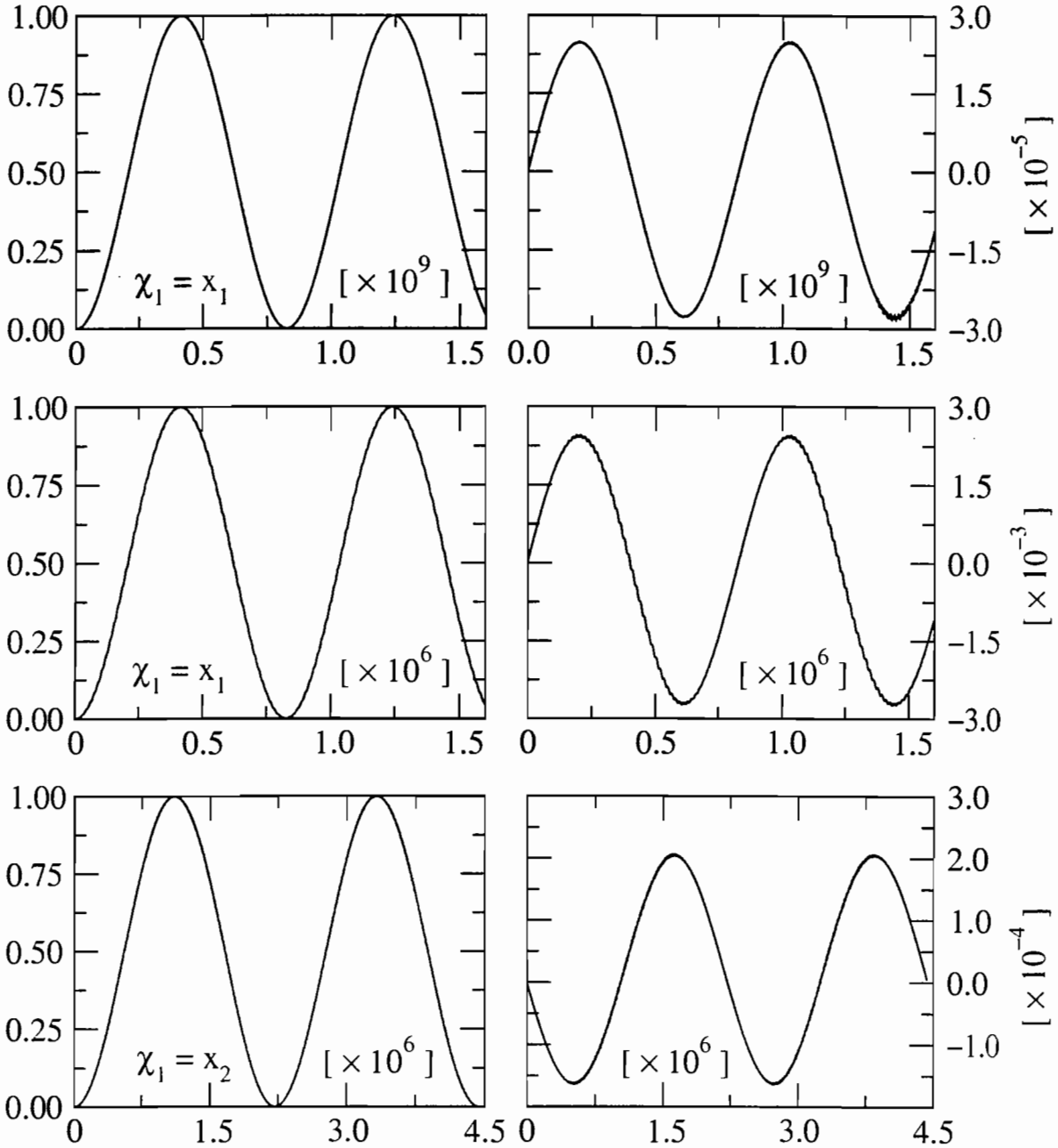


Figura 3.5: O mesmo da Figura 3.2, mas agora considerou-se o caso (B) da Tabela 3.1, com $\omega = 10.0$ e $\chi_2 = 0$. Nas linhas de cima e do meio, utilizou-se $\chi_1 = x_1$, o primeiro zero positivo de J_0, e $\varepsilon = 0.01, 0.10$, respectivamente. Na linha de baixo, utilizou-se $\chi_1 = x_2$, o segundo zero positivo de J_0, e $\varepsilon = 0.01$. Observamos que em todos os gráficos a escala de tempo é multiplicada pelo fator indicado entre colchetes.

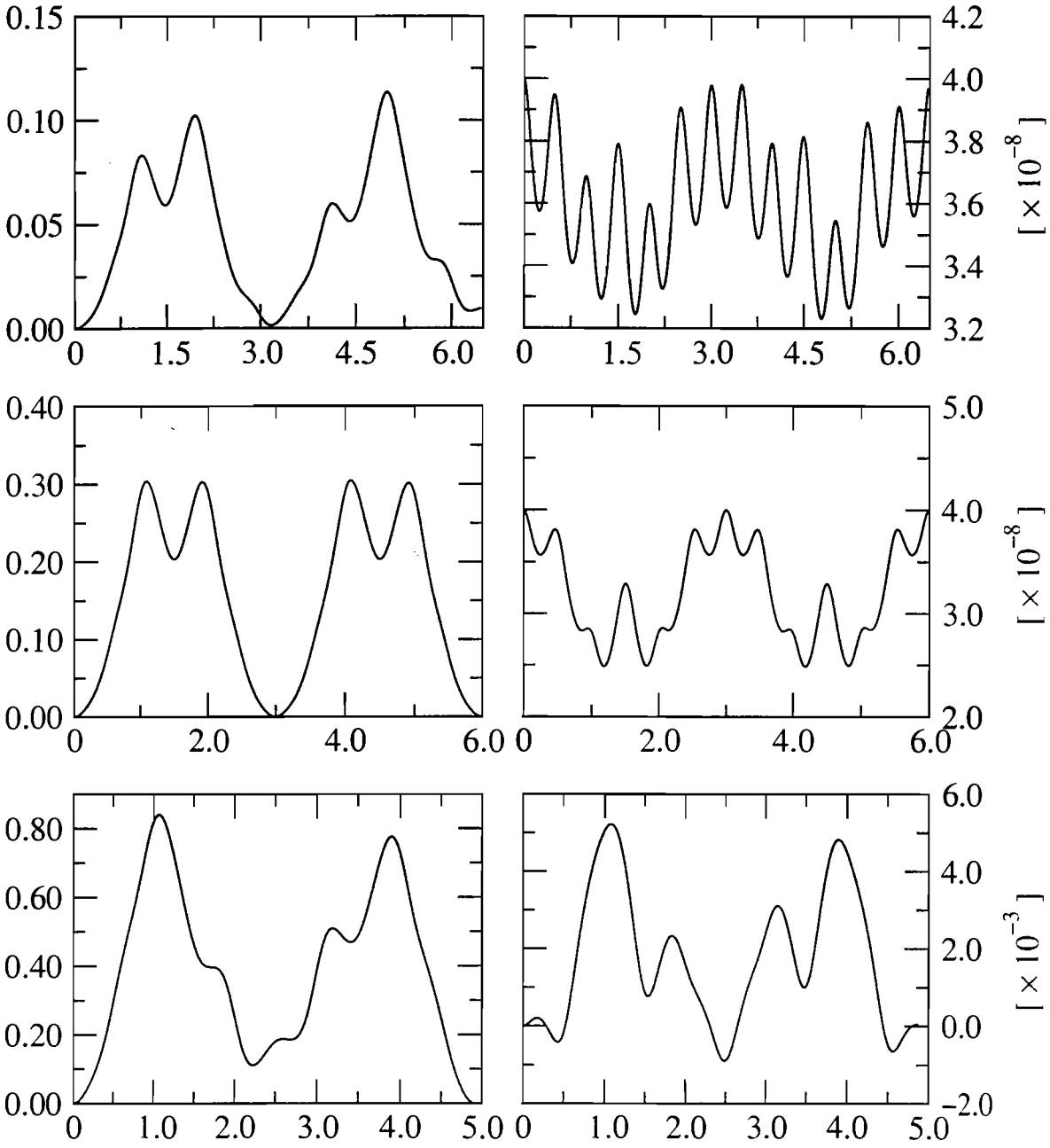


Figura 3.6: O mesmo da Figura 3.2, mas agora considerou-se o caso (C) da Tabela 3.1, com $\omega = 1.0$, $\chi_1 = 1.0$ e $\chi_2 = 0.3$ (não inteiro). Utilizou-se $\varepsilon = 0.05, 0.10, 0.20$ nas linhas de cima, do meio e de baixo, respectivamente.

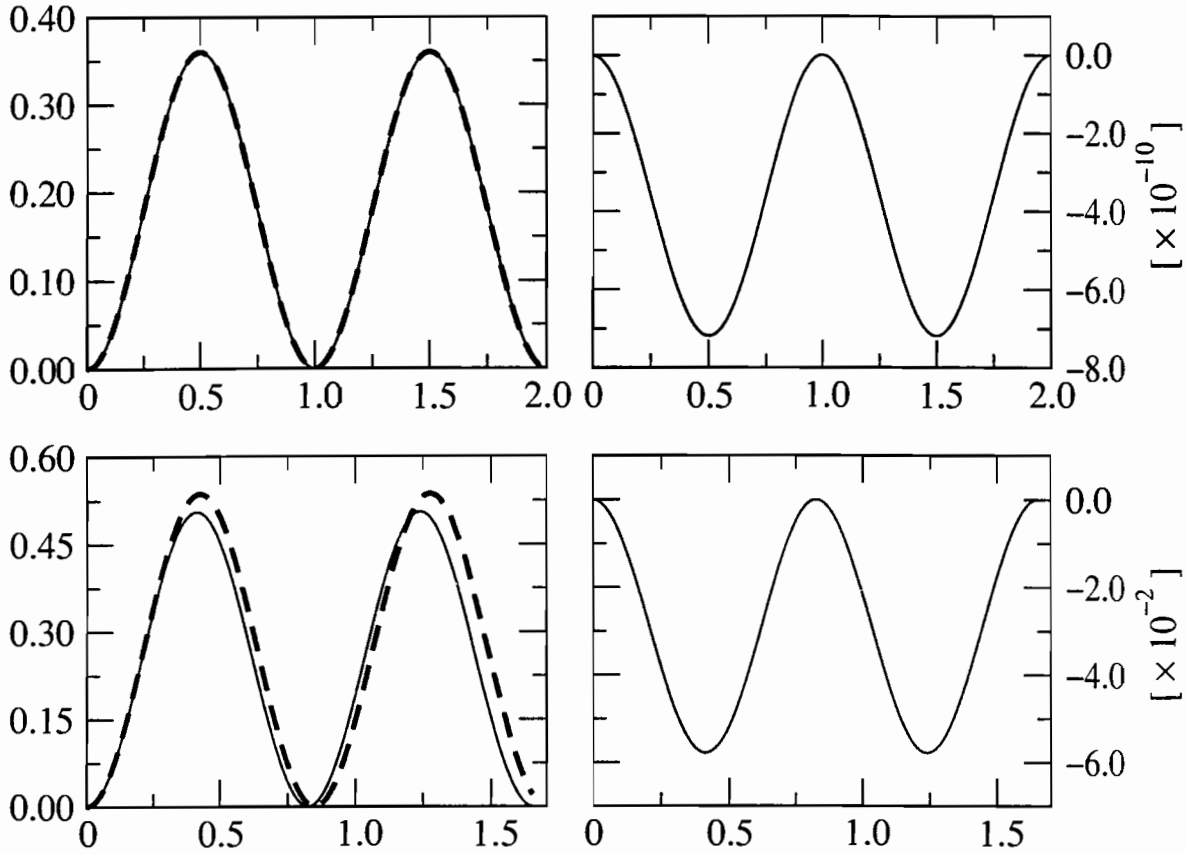


Figura 3.7: O mesmo da Figura 3.6, mas com $\chi_1 = 0$ e $\chi_2 = 0.8$ ($F_0 = 0.4$). Utilizou-se $\varepsilon = 0.30, 0.43$ nas linhas de cima e de baixo, respectivamente. A linha tracejada representa $P(t)$ calculada via (3.25).

*

Capítulo 4

Expansão em Árvores

Este capítulo consiste de uma revisão dos métodos introduzidos por Gentile em seu trabalho [27], o qual apresenta um tratamento do sistema de dois-níveis (1.3) no caso geral quase-periódico. Conforme mencionado anteriormente (confira Seção 1.4, página 10), tal situação é particularmente interessante devido ao problema de pequenas denominadores que ocorre na expansão perturbativa de g, a solução particular da equação de Riccati

$$\partial_t g(t) - ig(t)^2 - 2if(t)g(t) + i\varepsilon^2 \;=\; 0\,. \tag{4.1}$$

Tal problema impede que g tenha uma expansão analítica em ε centrada em $\varepsilon = 0$. Uma discussão mais detalhada é encontrada em [2].

O trabalho [27] tem importância fundamental no desenvolvimento dos demais resultados apresentados nesta tese. De fato, como veremos em detalhes no próximo capítulo, no contexto do efeito de localização em sistemas de dois-níveis, as inovações técnicas introduzidas por Gentile permitem tratar o problema de forma muito geral, levando-nos a resultados mais fortes. Além disso, as idéias de [27] se mostraram adequadas e adaptáveis ao estudo de um problema perturbativo um pouco mais geral do que o considerado até aqui, a saber, o problema de se estudar a estabilidade das soluções de uma equação de Hill real perturbada por um potencial quase-periódico também real. Tal problema é analisado na segunda parte desta tese. Assim, é fundamental que se faça inicialmente uma boa revisão do conteúdo de [27], permitindo que o leitor se familiarize com seus métodos.

A fim de mantermos a notação utilizada em [27] neste capítulo, devemos modificar trivialmente algumas convenções introduzidas anteriormente. Começamos assumindo que a interação f que aparece em (4.1) seja real e quase-periódica. Assim, escrevemos

$$f(t) = \sum_{\vec{\nu}\in\mathbb{Z}^{d'}} f_{\vec{\nu}} e^{i\vec{\nu}\cdot\vec{\omega}t}\,, \quad \text{com} \quad f_{\vec{\nu}} = \overline{f_{-\vec{\nu}}}\,,$$

onde $d' \in \mathbb{Z}_+$ e $\vec{\omega} \in \mathbb{R}^{d'}$ é racionalmente independente. Definimos agora

$$Q(t) := \exp\left(2i\int_0^t f(t')dt'\right)\,,$$

a qual também é uma função quase-periódica com decomposição de Fourier dada por

$$Q(t) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^d} Q_\nu e^{i\nu\cdot\omega t},$$

onde

$$d = \begin{cases} d', & \text{se } f_{\vec{0}} = 0 \\ d'+1, & \text{se } f_{\vec{0}} \neq 0 \end{cases}, \quad \omega = \begin{cases} \vec{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_{d'}), & \text{se } f_{\vec{0}} = 0 \\ (\vec{\omega}, f_{\vec{0}}) = (\omega_1, \ldots, \omega_{d'}, f_{\vec{0}}), & \text{se } f_{\vec{0}} \neq 0 \end{cases}. \tag{4.2}$$

Além disso, sob certas hipóteses de analiticidade em f, escrevemos

$$|Q_\nu| \leq \mathcal{Q} e^{-\kappa|\nu|}, \quad |(Q^{-1})_\nu| \leq \mathcal{Q} e^{-\kappa|\nu|}, \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}^d, \tag{4.3}$$

onde $\mathcal{Q}$ e κ são duas constantes positivas adequadas. O vetor de freqüências ω definido em (4.2) será assumido Diophantino daqui em diante, o que significa que

$$|\omega \cdot \nu| \geq C_0 |\nu|^{-\tau}, \quad \forall \nu \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}, \tag{4.4}$$

onde C_0 e τ são duas constantes positivas fixadas.

O valor médio de uma função quase-periódica será, a partir deste capítulo, denotado por $\langle\cdot\rangle$. Uma hipótese importante assumida em [27] é que $\langle Q\rangle = Q_0 \neq 0$, o que equivale à condição (I) do Teorema 1.2, página 14.

O trabalho de Gentile [27] apresenta uma solução perturbativa para a equação de Riccati (4.1) no caso geral onde f é uma interação quase-periódica. Tal solução é obtida através de um método bem conhecido daquele autor, o qual foi utilizado em outros contextos, sempre na demonstração de convergência da série de Lindstedt obtida para problemas do tipo KAM. Basicamente, tal método é constituído de dois passos. Primeiro, obtém-se uma representação conveniente para os coeficientes de Fourier da solução procurada em termos de diagramas, as chamadas *árvores*. Depois, efetua-se uma resoma adequada das árvores assim obtidas visando controlar o problema dos pequenos denominadores. O resultado é uma solução não-analítica no parâmetro de perturbação, válida em um conjunto de Cantor de medida relativamente grande contido em um intervalo pequeno em torno da origem. Mais especificamente, demonstrou-se em [27] o seguinte teorema:

Teorema 4.1 *Considere a equação de Riccati generalizada (4.1). Assuma que o vetor de freqüências ω definido em (4.2) satisfaça a condição Diophantina (4.4). Assuma também a hipótese* (I) *do Teorema 1.1, i.e., $\langle Q\rangle \neq 0$, e a hipótese de decaimento exponencial dos coeficientes de Fourier Q_ν e $(Q^{-1})_\nu$, (4.3). Então, existem três constantes positivas ε_0, b e ξ e um conjunto de Cantor $\mathcal{E} \subset (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ com medida de Lebesgue* $\text{meas}(\mathcal{E}) \geq 2\varepsilon_0(1 - b\varepsilon_0^\xi)$ *tal que (4.1) admite uma solução particular da forma*

$$g(t;\varepsilon) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^d} g_\nu(\varepsilon) e^{i\omega\cdot\nu t}, \tag{4.5}$$

para todo $\varepsilon \in \mathcal{E}$. □

Vamos apresentar no decorrer deste capítulo os elementos utilizados na demonstração do resultado acima.

4.1 Representação Diagramática

Conforme mencionado anteriormente, a demonstração do Teorema 4.1 é efetuada através de dois passos. O primeiro deles, o qual será apresentado nesta seção, consiste em obtermos uma representação gráfica conveniente para os coeficientes de Fourier da solução desejada. Ao invés de trabalharmos diretamente com a equação (4.1), utilizamos a mudança de variável

$$g(t) =: i\varepsilon Q(t)u(t)\,,$$

obtendo uma equação simplificada em termos da variável u, a saber,

$$\dot{u} = \varepsilon(Q^{-1} + Qu^2)\,. \tag{4.6}$$

Desejamos agora encontrar uma solução particular de (4.1) que seja analítica em ε e que se anule quando $\varepsilon \equiv 0$. Assim, escrevemos

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u^{(k)}(t)\,. \tag{4.7}$$

Os coeficientes $u^{(k)}$ da expansão acima devem então satisfazer (substituindo (4.7) em (4.6))

$$\begin{aligned} \dot{u}^{(0)} &= 0\,, \\ \dot{u}^{(1)} &= Q^{-1} + Q(u^{(0)})^2\,, \\ \dot{u}^{(k)} &= Q \sum_{k_1+k_2=k-1} u^{(k_1)}u^{(k_2)}\,, \quad \forall k \geq 2\,. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Agora impomos que u seja quase-periódica com vetor de freqüências $\boldsymbol{\omega}$. Assim, escrevemos

$$u^{(k)}(t) = \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{Z}^d} u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)} e^{i\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\omega}t}\,, \tag{4.9}$$

desde que o lado direito de (4.8) tenha média nula, *i.e.*,

$$\begin{aligned} 0 &= (Q^{-1})_{\mathbf{0}} + Q_{\mathbf{0}}(u_{\mathbf{0}}^{(0)})^2\,, \\ 0 &= \sum_{k_1+k_2=k-1} \sum_{\boldsymbol{\nu}_0+\boldsymbol{\nu}_1+\boldsymbol{\nu}_2=\mathbf{0}} Q_{\boldsymbol{\nu}_0} u_{\boldsymbol{\nu}_1}^{(k_1)} u_{\boldsymbol{\nu}_2}^{(k_2)}\,, \quad \forall k \geq 2\,. \end{aligned} \tag{4.10}$$

As condições acima garantem a inexistência de termos seculares em u e fornecem equações recursivas para os coeficientes $u_{\mathbf{0}}^{(k)} =: c^{(k)}$. Por exemplo, a primeira equação nos permite

escrever $(c^{(0)})^2 = -\langle Q^{-1}\rangle/\langle Q\rangle$, desde que $\langle Q\rangle \neq 0$ (caso (I) do Teorema 1.1). Os demais coeficientes de Fourier em (4.9), $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$, $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, são obtidos recursivamente de

$$\begin{aligned} u_{\boldsymbol{\nu}}^{(0)} &= 0\,, \\ (i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu})u_{\boldsymbol{\nu}}^{(1)} &= (Q^{-1})_{\boldsymbol{\nu}} + Q_{\boldsymbol{\nu}}(c^{(0)})^2\,, \\ (i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu})u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)} &= \sum_{k_1+k_2=k-1}\ \sum_{\boldsymbol{\nu}_0+\boldsymbol{\nu}_1+\boldsymbol{\nu}_2=\boldsymbol{\nu}} Q_{\boldsymbol{\nu}_0} u_{\boldsymbol{\nu}_1}^{(k_1)} u_{\boldsymbol{\nu}_2}^{(k_2)}\,, \quad \forall k \geq 2\,. \end{aligned} \tag{4.11}$$

O método introduzido em [27] para a análise da expansão (4.7) no caso geral quase-periódico, bem conhecido do autor em outros contextos (confira [28, 29] e suas referências), é constituído, essencialmente, pelas seguintes idéias:

1. Representação gráfica dos coeficientes $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$ em termos de diagramas em forma de *árvores*. Esses diagramas se estruturam em torno de linhas (propagadores) e vértices, em uma estrutura bastante análoga à de diagramas de Feynman de uma teoria de campos.

2. Decomposição em multi-escala dos propagadores e identificação de diagramas ressonantes que implicam no acúmulo de pequenos denominadores (os chamados gráficos de auto-energia).

3. Resoma dos gráficos de auto-energia e definição dos propagadores "vestidos", implicando em uma expansão renormalizada bem definida para u num conjunto restrito de valores de ε.

As idéias acima não são totalmente originais. Na verdade, elas advém de técnicas do grupo de renormalização introduzidas em teoria quântica de campos, conforme o próprio autor de [27] salienta. As mesmas já foram utilizadas em outros contextos na análise de séries de Lindstedt relacionadas a problemas do tipo KAM [30, 31].

Introduzimos uma representação gráfica para os coeficientes $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$ de acordo com a Figura 4.1: a linha saindo da bola hachurada representa um propagador carregando o modo de Fourier $\boldsymbol{\nu}$ (também chamado de *momento* a partir daqui). Para $\boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$, a expressão analítica do propagador é $(i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu})^{-1}$. O rótulo (k) sobre a bola hachurada denota a ordem do coeficiente $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$ que está sendo representado. A bola hachurada assume o valor do lado direito de (4.11). A representação de $u_{\mathbf{0}}^{(k)}$ é feito como na Figura 4.2: o propagador carregando momento nulo assume o valor 1 e a bola branca representa a constante $c^{(k)}$. A representação dos coeficientes $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(0)}$ e $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(1)}$ é explicitamente feita na Figura 4.1. Note que para a representação do primeiro termo de $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(1)}$ em (4.11) introduzimos uma bola preta, cujo valor analítico é $(Q^{-1})_{\boldsymbol{\nu}}$, sendo $\boldsymbol{\nu}$ o momento carregado pela linha saindo da bola preta. Para a representação do segundo termo de $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(1)}$ em (4.11) introduzimos um vértice, cujo fator analítico associado é $Q_{\boldsymbol{\nu}_0}$, sendo válida a seguinte lei de conservação: $\boldsymbol{\nu}_{\text{sai}} = \boldsymbol{\nu}_{\text{entra}} + \boldsymbol{\nu}_0$ (confira Figura 4.4).

Para $k \geq 2$ podemos expandir $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$ como na Figura 4.1, por um procedimento iterativo. Vemos, dessa forma, que qualquer coeficiente $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$ pode ser escrito em termos de uma soma de árvores contendo propagadores, vértices, bolas brancas e bolas pretas. Apresentamos a expansão completa de $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(2)}$, $\boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$, como exemplo na Figura 4.6. Note que $u_{\mathbf{0}}^{(2)} = c^{(2)}$ é representado como na Figura 4.2 para $k = 2$.

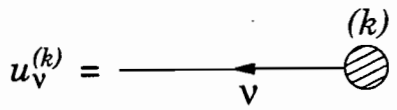


Figura 4.1: Representação gráfica do coeficiente $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$ para $\boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$. O rótulo (k) acima da bola hachurada indica a ordem perturbativa do coeficiente.

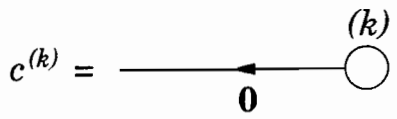


Figura 4.2: Representação gráfica do coeficiente $u_{\mathbf{0}}^{(k)} = c^{(k)}$. O momento que sai de uma bola branca é sempre nulo. Nesse caso, o valor analítico do propagador é 1.

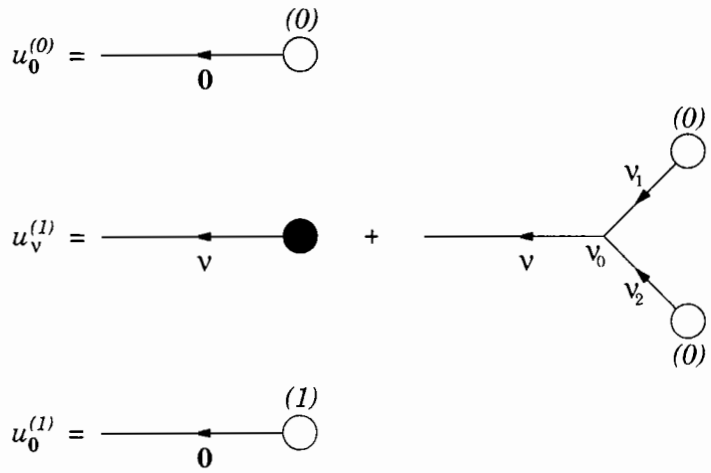


Figura 4.3: Representação gráfica dos coeficientes $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(0)}$ e $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(1)}$. Lembramos que para $\boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$, temos $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(0)} = 0$. O primeiro gráfico de $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(1)}$ corresponde ao termo $(Q^{-1})_{\boldsymbol{\nu}}/(i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu})$ da segunda equação de (4.11). O segundo gráfico corresponde ao termo $Q_{\boldsymbol{\nu}}(c^{(0)})^2/(i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu})$ da mesma equação. Note que a conservação de momento no vértice implica em $\boldsymbol{\nu}_0 = \boldsymbol{\nu}$, já que $\boldsymbol{\nu}_1 = \boldsymbol{\nu}_2 = \mathbf{0}$ (bolas brancas). Assim, o fator de vértice associado é $Q_{\boldsymbol{\nu}}$.

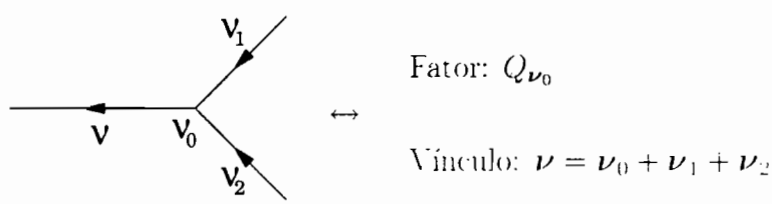


Figura 4.4: Um vértice é formado pelo entroncamento de três propagadores, dois entrando e um saindo. A todo vértice associamos o fator $Q_{\boldsymbol{\nu}_0}$ e exigimos o vínculo $\boldsymbol{\nu}_{\text{sai}} = \boldsymbol{\nu}_{\text{entra}} + \boldsymbol{\nu}_0$.

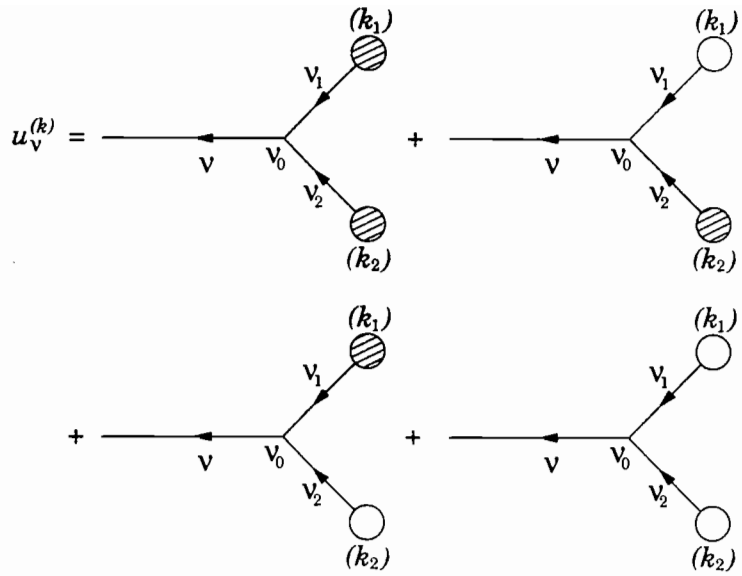


Figura 4.5: Expansão do coeficiente $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$, $\boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$, como na última equação de (4.11). Embora não indicado, os momentos saindo das bolas brancas são nulos (como na Figura 4.2). Associamos o fator $Q_{\boldsymbol{\nu}_0}$ em cada vértice, onde vale a lei de conservação $\boldsymbol{\nu}_0 + \boldsymbol{\nu}_1 + \boldsymbol{\nu}_2 = \boldsymbol{\nu}$. A expansão acima deve ser feita para todos os valores de k_1 e k_2 tais que $k_1 + k_2 = k - 1$.

Definimos uma árvore θ como um conjunto conexo de pontos e linhas tal que as linhas estão orientadas em direção a um ponto que é chamado de *raiz* da árvore. Chamamos de *nós* todos os pontos da árvore que não a raiz. Estamos interessados em árvores tal que que todos os nós apresentam duas ou nenhuma linha entrando (tenha a Figura 4.6 como exemplo). Note que, por construção, a raiz só admite uma linha entrando: tal linha será chamada de *linha raiz*.

Dada uma árvore θ, podemos nela identificar os seguintes subconjuntos:

- $E(\theta)$: Conjunto de nós finais de θ. Um nó v de θ será final se nele não entrar nenhuma linha.

- $V(\theta)$: Conjunto de vértices de θ. Se $v \in V(\theta)$, então v tem pelo menos um linha entrando. Associamos a cada $v \in V(\theta)$ um rótulo de *modo* $\boldsymbol{\nu}_v \in \mathbb{Z}^d$ e um *fator de nó* $F_v = Q_{\boldsymbol{\nu}_v}$.

- $L(\theta)$: Conjunto de linhas de θ. Cada linha $\ell \in L(\theta)$ sai de um ponto v e chega num outro ponto denotado por v'. Como ℓ identifica-se unicamente com v, escrevemos $\ell = \ell_v$. Para cada linha ℓ associamos um rótulo de *momento* $\boldsymbol{\nu}_\ell \in \mathbb{Z}^d$ e um propagador $g_\ell = (i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu})^{-1}$ se $\boldsymbol{\nu}_\ell \neq \mathbf{0}$ e $g_\ell = 1$ se $\boldsymbol{\nu}_\ell = \mathbf{0}$.

- $E_W(\theta)$: Conjunto de bolas brancas em θ. A cada $v \in E_W(\theta)$ associamos um rótulo de *modo* $\boldsymbol{\nu}_v = \mathbf{0}$, um rótulo de *ordem* $k_v \in \mathbb{N}$ e um *fator de nó* $F_v = c^{(k_v)}$. É claro que se $v \in E_W(\theta)$, então nenhuma linha entra em v, ou seja, $v \in E(\theta)$.

- $E_B(\theta)$: Conjunto de bolas pretas em θ. A cada $v \in E_B(\theta)$ associamos um rótulo de *modo* $\boldsymbol{\nu}_v \neq \mathbf{0}$, e um *fator de nó* $F_v = (Q^{-1})_{\boldsymbol{\nu}_v}$. É claro que se $v \in E_B(\theta)$, então nenhuma linha entra em v, ou seja, $v \in E(\theta)$.

- $B(\theta) = E_B(\theta) \cup V(\theta)$: Conjunto de bolas pretas e vértices em θ.

Chamamos *equivalentes* duas árvores que podem ser transformadas uma na outra deformando continuamente as linhas de tal modo que elas não cruzam umas as outras.

Definição 4.2 *Seja $\mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}$ o conjunto de árvores inequivalentes θ satisfazendo:*

1. *Para cada vértice $v \in V(\theta)$ existem exatamente duas linhas entrando;*
2. *Um nó final $v \in E(\theta)$ ou é uma bola branca, ou é uma bola preta;*
3. *O número de bolas pretas, o número de vértices e a soma dos rótulos de ordem das bolas brancas são tais que, definindo $k_1 := |B(\theta)| = |E_B(\theta)| + |V(\theta)|$ e $k_2 := \sum_{v \in E_W(\theta)} k_v$, tem-se $k_1 + k_2 = k$;*
4. *O momento fluindo pela linha raiz é $\boldsymbol{\nu}$.*

O conjunto $\mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}$ será chamado de conjunto de árvores de ordem k e momento total $\boldsymbol{\nu}$. □

Com a definição acima, não é difícil perceber que podemos escrever, para $\boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$,

$$u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)} = \sum_{\theta \in \mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}} \mathrm{Val}(\theta)\,, \tag{4.12}$$

onde $\mathrm{Val} : \mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}} \to \mathbb{C}$ é dado por

$$\mathrm{Val}(\theta) = \left(\prod_{\ell \in L(\theta)} g_\ell \right) \left(\prod_{v \in E(\theta) \cup V(\theta)} F_v \right),$$

sendo

$$g_\ell = \begin{cases} (i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}_\ell)^{-1}, & \boldsymbol{\nu}_\ell \neq \mathbf{0} \\ 1\,, & \boldsymbol{\nu}_\ell = \mathbf{0} \end{cases} \qquad F_v = \begin{cases} Q_{\boldsymbol{\nu}_v}, & v \in V(\theta) \\ (Q^{-1})_{\boldsymbol{\nu}_v}, & v \in E_B(\theta) \\ c^{(k_v)}, & v \in E_W(\theta) \end{cases} \tag{4.13}$$

é o chamado *valor* da árvore $\theta \in \mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}$. Por outro lado, se $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}$, então obtemos $u_{\mathbf{0}}^{(k)} = c^{(k)}$ a partir da segunda equação de (4.10). Em termos de árvores, escrevemos

$$c^{(k)} = -\frac{1}{2c^{(0)}\langle Q \rangle} \sum_{\theta \in \mathcal{T}^*_{k+1,\mathbf{0}}} \mathrm{Val}(\theta)\,, \quad \forall\, k \geq 1\,, \tag{4.14}$$

onde $\mathcal{T}^*_{k+1,\mathbf{0}}$ é definido como $\mathcal{T}_{k+1,\mathbf{0}}$, mas com a exclusão das duas árvores representadas na Figura 4.1 que dão origem ao termo $2c^{(k)}c^{(0)}\langle Q \rangle$ em (4.10), e também da árvore cujo valor é apenas a constante $c^{(k+1)}$ (Figura 4.2 com rótulo de ordem igual à $k+1$).

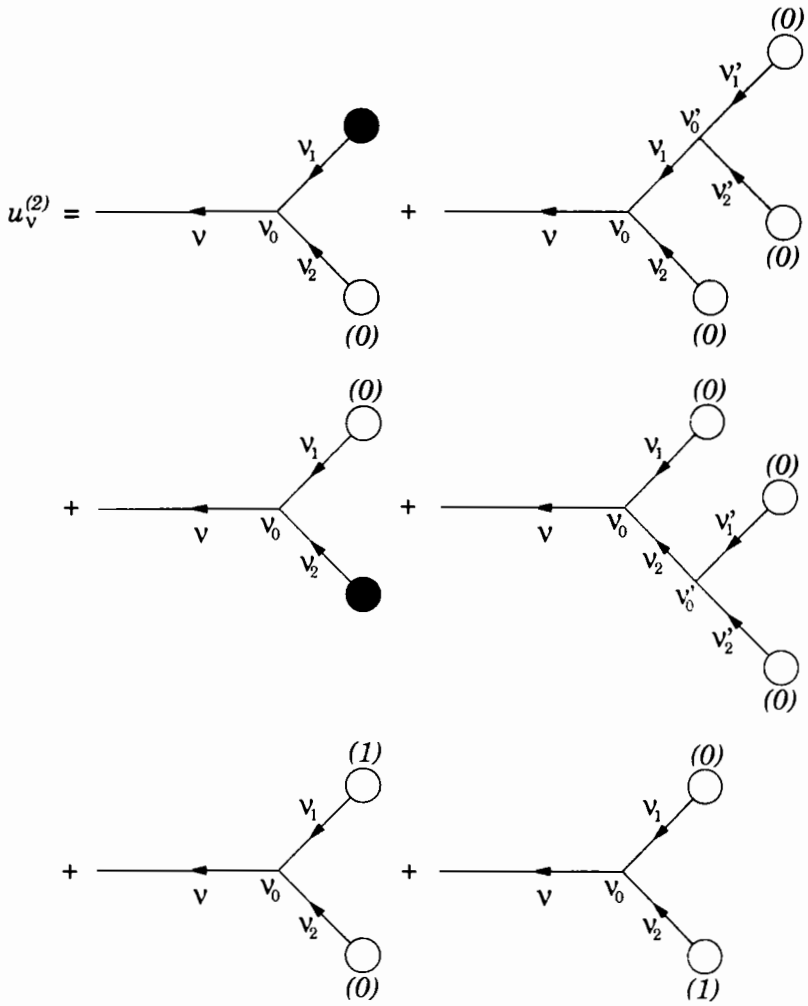


Figura 4.6: Expansão completa do coeficiente $u_\nu^{(2)}$, $\nu \neq \mathbf{0}$. O coeficiente $u_\mathbf{0}^{(2)}$ é representado como na Figura 4.2 para $k = 2$.

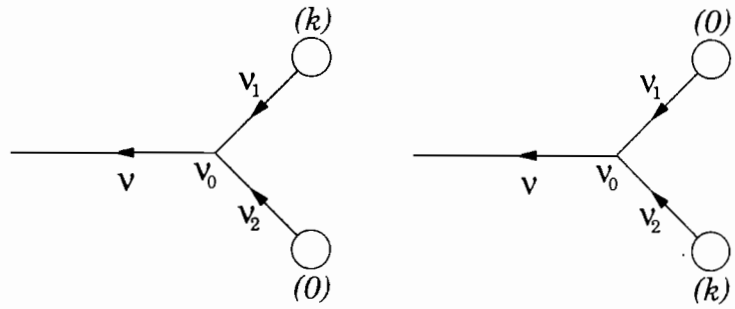


Figura 4.7: Árvores que não comparecem no conjunto $\mathcal{T}^*_{k+1,\mathbf{0}}$. Note que ao lado $\nu = \nu_1 = \nu_2 = \mathbf{0}$. Por conseguinte, $\nu_0 = \mathbf{0}$. Assim, as duas árvores dão origem à contribuição $2c^{(k)}c^{(0)}Q_\mathbf{0}$. A árvore cujo valor é a apenas a constante $c^{(k+1)}$ também não pertence ao conjunto $\mathcal{T}^*_{k+1,\mathbf{0}}$.

4.2 Solução Formal

A primeira análise que fazemos é em relação à expansão (4.7) com os coeficientes $u_\nu^{(k)}$ dados por (4.10)-(4.11). Uma estimativa simples mostra que (4.7) deve ser entendida apenas como

uma série formal. Mais precisamente, temos [27]

Proposição 4.3 *Sejam $k \geq 0$ e $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, então $|u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}| \leq B'B^k(k!)^\beta e^{-\kappa'|\boldsymbol{\nu}|}$, onde B, B', β e $\kappa' < \kappa$ são constantes positivas apropriadas.* □

A presença do fator $(k!)^\beta$, $\beta > 0$, impede a convergência absoluta de (4.7), mesmo para ε pequeno. Na verdade, o surgimento do fator $(k!)^\beta$ está relacionado com a presença dos pequenos denominadores $i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}$ existentes na expansão dos coeficientes $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$ através dos propagadores g_ℓ (confira (4.13)). Portanto, se existe alguma esperança em se dar sentido à (4.7), deve-se tratar os propagadores de forma especial.

Observamos que a Proposição 4.3 recupera os resultados de [2] no caso (I) ($\langle Q \rangle \neq 0$). Até aí o método de expansão em árvores não apresenta muitas vantagem em relação às técnicas anteriores, se não algumas simplificações em cálculos algébricos. A grande vantagem desse método reside, em verdade, na introdução da *decomposição em multi-escala* dos propagadores [32]. Essa técnica torna possível o isolamento de árvores contendo acúmulo de pequenos denominadores (ressonâncias), as quais originam o fator $(k!)^\beta$ na estimativa dos $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$.

Uma vez reconhecido o problema e isolada a contribuição dos gráficos ressonantes (as chamadas *árvores de auto-energia*), pode-se tentar efetuar uma resoma na expansão analítica original, obtendo-se com isso uma expansão renormalizada não mais analítica, mas que seja convergente para alguns valores do parâmetro ε. Esse foi exatamente o procedimento empregado com sucesso no trabalho [27], culminando na demonstração do Teorema 4.1. Observamos que os coeficientes de Fourier $g_{\boldsymbol{\nu}}(\varepsilon)$ que aparecem em (4.5) no Teorema 4.1 não são analíticos em ε. De fato, na verdade eles são obtidos da série formal de potências através do procedimento de resoma mencionado. A resoma é feita em analogia à renormalização dos gráficos de massa em teorias de campos. Observamos ainda que o conjunto $\mathcal{E}$ mencionado no Teorema 4.1, onde a solução quase-periódica da equação (4.1) está bem definida, é caracterizado pela imposição de um número infinito de condições Diophantinas do tipo de Mel'nikov. Discutiremos com mais detalhes as observações acima nas seções seguintes.

4.3 Decomposição em Multi-Escala dos Propagadores

Começamos definindo duas funções $\chi(x)$ e $\psi(x)$ limitadas, ambas $C^\infty(\mathbb{R}_+)$, tais que

$$\psi(x) + \chi(x) = 1\,, \quad 0 \leq \chi(x) \leq 1\,, \quad 0 \leq \psi(x) \leq 1$$

e

$$\psi(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{para } x \geq C_0\,, \\ 0\,, & \text{para } x \leq C_0/2\,, \end{cases}$$

onde C_0 é a constante Diophantina que aparece em (4.4). Um exemplo das funções $\chi(x)$ e $\psi(x)$ com as propriedades acima é apresentado na Figura 4.8. Definimos ainda, para qualquer

$n \in \mathbb{N}$,

$$\chi_n(x) := \chi(2^n x) \quad \text{e} \quad \psi_n(x) := \psi(2^n x)\,.$$

É claro que $\chi_0(x) = \chi(x)$, $\psi_0(x) = \psi(x)$ e $\psi_n(x) + \chi_n(x) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

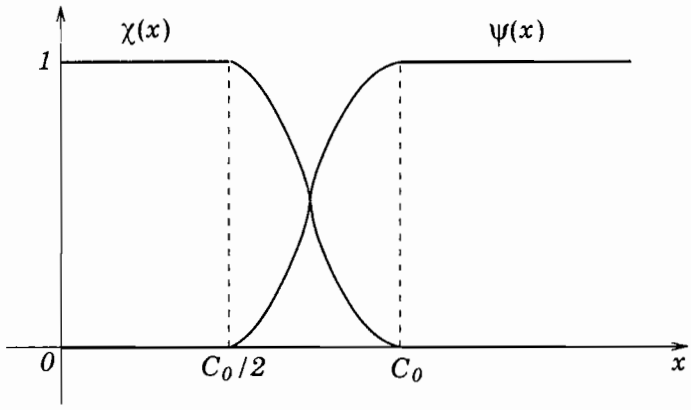


Figura 4.8: Possíveis gráficos das funções $\chi(x)$ e $\psi(x)$. Note que $\psi(x) + \chi(x) = 1$.

A introdução das funções $\chi_n(x)$ e $\psi_n(x)$ nos permite escrever o propagador g_ℓ, para qualquer $\ell \in L(\theta)$ com $\boldsymbol{\nu}_\ell \neq \mathbf{0}$, como[1]

$$g_\ell = \frac{1}{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell} = \frac{\psi_0(|\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell|)}{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(|\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell|)\chi_{n-1}(|\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell|)}{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell}\,.$$

Ou ainda,

$$g_\ell = \sum_{n=0}^{\infty} g_\ell^{(n)}\,,$$

$$g_\ell^{(0)} := \frac{\psi_0(|\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell|)}{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell}\,, \tag{4.15}$$

$$g_\ell^{(n)} := \frac{\psi_n(|\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell|)\chi_{n-1}(|\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell|)}{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell}\,, \quad \forall n \geq 1\,.$$

Escrevemos $g_\ell^{(n)} = g^{(n)}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell)$.

Observação 4.4 *Note que para $x = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}$ fixo, temos $g^{(n)}(x) \neq 0$ apenas para dois valores de n, de forma que a série (4.15) é, em verdade, finita. Note também que $g^{(n)}(x) \neq 0$ somente se $2^{-n-1}C_0 < |x| < 2^{-n+1}C_0$ para $n \geq 1$ e somente se $|x| > 2^{-1}C_0$ para $n = 0$. Isso significa que se*

$$g_\ell^{(n)} \neq 0 \;\Rightarrow\; |g_\ell^{(n)}| \leq C_0^{-1}2^{n+1}\,. \tag{4.16}$$

[1]Em decorrência da identidade $\psi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\chi_{n-1}(x) = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$ (confira Observação 4.4).

A cada linha $\ell \in L(\theta)$, com $\boldsymbol{\nu}_\ell \neq \mathbf{0}$, associamos um novo rótulo $n_\ell = 0, 1, 2, \ldots$ chamado de *rótulo de escala* da linha ℓ. Podemos também associar um rótulo de escala a uma linha ℓ com $\boldsymbol{\nu}_\ell = \mathbf{0}$ colocando $n_\ell = -1$. De acordo com a observação acima, o rótulo n_ℓ de uma linha ℓ diz, essencialmente, qual o tamanho do propagador $g_\ell^{(n_\ell)}$ associado. Isso é útil para que se possa *isolar* a contribuição de árvores contendo propagadores muito grandes. Faremos isso de forma detalhada adiante.

Definição 4.5 *Definimos $\Theta_{k,\boldsymbol{\nu}}$ como o conjunto de árvores $\mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}$ diferindo apenas pela introdução dos rótulos de escala nos propagadores. Ou seja, as árvores de $\Theta_{k,\boldsymbol{\nu}}$ são exatamente as mesmas de $\mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}$, a menos da introdução dos rótulos de escala nos propagadores.* □

Com as definições acima, a expressão (4.12) se modifica para

$$u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)} = \sum_{\theta \in \Theta_{k,\boldsymbol{\nu}}} \mathrm{Val}(\theta)\,, \qquad \mathrm{Val}(\theta) = \left(\prod_{\ell \in L(\theta)} g_\ell^{(n_\ell)} \right) \left(\prod_{v \in E(\theta) \cup V(\theta)} F_v \right)\,, \tag{4.17}$$

onde a soma sobre todas as árvores em $\Theta_{k,\boldsymbol{\nu}}$ implica também em uma soma sobre todos os possíveis rótulos de escala dos propagadores. Assim, para qualquer $\theta \in \Theta_{k,\boldsymbol{\nu}}$, se $N_n(\theta)$ denota o número de linhas de θ em escala n, usando (4.17), (4.16), (4.3) e definindo $|\boldsymbol{\nu}(\theta)| = \sum_{v \in B(\theta)} |\boldsymbol{\nu}_v|$, podemos estimar

$$|\,\mathrm{Val}(\theta)| \leq C_0^{-k_1} 2^{k_1} 2^{n_0 k_1} Q^{k_1} e^{-\kappa |\boldsymbol{\nu}(\theta)|} \left(\prod_{v \in E_W(\theta)} |c^{(k_v)}| \right) \left(\prod_{n=n_0}^{\infty} 2^{n N_n(\theta)} \right)\,, \tag{4.18}$$

onde $k_1 = |B(\theta)|$, $\sum_{v \in E_W(\theta)} k_v = k_2 = k - k_1$ e n_0 é qualquer inteiro positivo.

O problema agora é estimar $N_n(\theta)$. Para isso, precisamos introduzir algumas definições úteis.

Definição 4.6 (Cluster) *Um* cluster *T em escala n é um subconjunto maximal de uma árvore θ tal que todas as suas linhas têm escala $n' \leq n$ e há pelo menos uma linha com escala igual à n. As linhas que entram em um cluster T e as linhas que saem de T são chamadas de* linhas externas. *Dado um cluster T em escala n, denotamos por $n_T = n$ a escala de T. Além disso, $V(T)$, $E_B(T)$, $E(T)$, $B(T)$ e $L(T)$ denotam, respectivamente, o conjunto de vértices, bolas pretas, pontos finais, vértices mais bolas pretas e linhas de T. Definimos, finalmente, $\boldsymbol{\nu}_T = \sum_{v \in B(T)} \boldsymbol{\nu}_v$. Exemplos de clusters são apresentados na Figura 4.9.* □

Definição 4.7 (Gráfico de auto-energia) *Um* gráfico de auto-energia *é dito ser qualquer cluster T de uma árvore θ tal que*

1. *T tenha apenas uma linha entrando ℓ_T^{in} e uma linha saindo ℓ_T^{out};*

2. *O momento de T seja nulo,* i.e., *$\boldsymbol{\nu}_T = \sum_{v \in B(T)} \boldsymbol{\nu}_v = \mathbf{0}$. Isso significa que $\boldsymbol{\nu}_{\ell_T^{\mathrm{in}}} = \boldsymbol{\nu}_{\ell_T^{\mathrm{out}}}$.*

Chamamos de linha de auto-energia *qualquer linha* ℓ_T^{out} *que saia de algum gráfico de auto-energia* T. *Chamamos de* linha normal *qualquer linha que não seja uma linha de auto-energia. Exemplos de gráficos de auto-energia são apresentados na Figura 4.10.* □

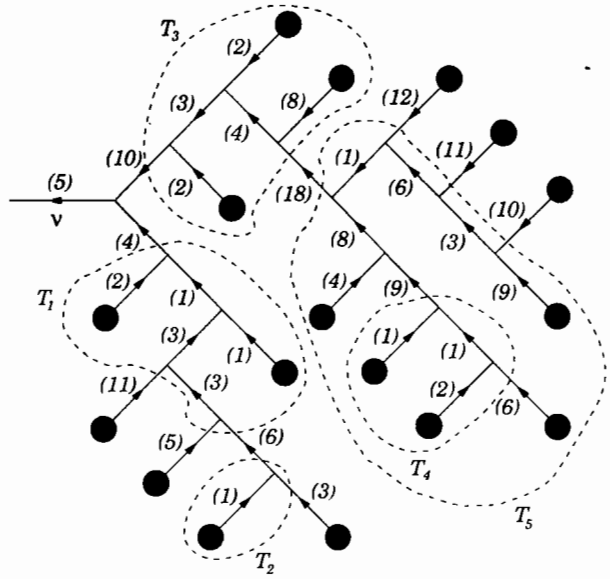
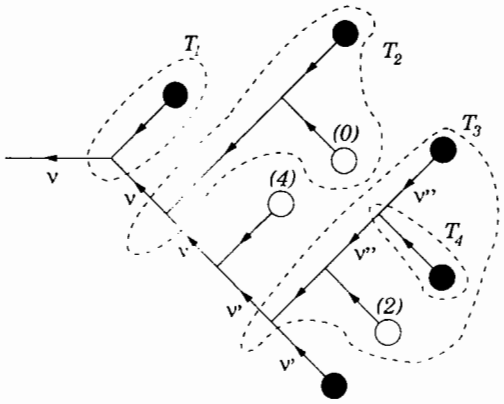


Figura 4.9: Exemplos de clusters em uma árvore de ordem $k = 33$. No exemplo, sem perda de generalidade, $E_W(\theta) = \emptyset$, de forma que $E(\theta) = E_B(\theta)$. O número entre parênteses acima de cada linha denota a escala do propagador. Assim, temos $n_{T_1} = 3$, $n_{T_2} = 1$, $n_{T_3} = 8$, $n_{T_4} = 2$ e $n_{T_5} = 9$. Note que $T_4 \subset T_5$ e por isso $n_{T_4} < n_{T_5}$. É claro que existem outros exemplos de clusters na figura ao lado que não foram apresentados.

Figura 4.10: Gráficos de auto-energia em uma árvore de ordem $k = 21$. Note que, de acordo com a definição, só há uma linha entrando e uma linha saindo (carregando o mesmo momento) nos gráficos de auto-energia T_1, T_2, T_3 e T_4. É claro que a escala das linhas em T_1, T_2, T_3, T_4 é estritamente menor do que a de suas linhas externas (afinal, gráficos de auto-energia são clusters).



Observação 4.8 *É importante observar que devido à condição* $\boldsymbol{\nu}_{\ell_T^{\text{in}}} = \boldsymbol{\nu}_{\ell_T^{\text{out}}}$, *as escalas associadas às linhas de entrada e de saída de um gráfico de auto-energia* T *devem diferir no máximo por uma unidade*, i.e. $|n_{\ell_T^{\text{in}}} - n_{\ell_T^{\text{out}}}| \leq 1$ *(confira Observação 4.4). Além disso, pelo fato de que* T *define um cluster, devemos ter* $n_T + 1 \leq \min\{n_{\ell_T^{\text{in}}}, n_{\ell_T^{\text{out}}}\}$, *o que equivale a dizer que todas as linhas no interior de* T *têm escala estritamente menor do que a escala das linhas externas* ℓ_T^{in} *e* ℓ_T^{out}.

A observação acima é muito importante pois dela decorre o fato de que devido à presença de gráficos de auto-energia, pode-se ter o acúmulo de pequenos denominadores. De fato, a explicação heurística para isso é a seguinte: imagine uma linha ℓ com uma escala muito grande $n_\ell \gg 1$ entrando em um gráfico de auto-energia T. Essa linha, ao sair de T, poderá entrar em

outro gráfico de auto-energia T'. Note que a linha que sai de T e entra em T' também tem escala $n_\ell \gg 1$. Esse processo poderá então se repetir várias vezes, o que finalmente implica em um número grande de linhas em escala $n_\ell \gg 1$, *i.e.*, implica em acúmulo de pequenos denominadores[2].

Na realidade, de um ponto de vista mais preciso, o problema dos gráficos de auto-energia é que não conseguimos estimar de forma satisfatória o número de linhas de auto-energia em uma árvore θ. Por outro lado, é fácil demonstrar (confira, por exemplo, [28]) que se denotarmos por $N_n^{\text{norm}}(\theta)$ o número de linhas normais em uma árvore θ, então existe uma constante c tal que

$$N_n^{\text{norm}}(\theta) \leq c\, 2^{-n/\tau} \sum_{v \in B(\theta)} |\boldsymbol{\nu}_v|\,, \tag{4.19}$$

onde τ é uma das constantes Diophantinas que aparece em (4.4). Assim, suponha que possamos negligenciar todas as linhas de auto-energia em uma árvore θ qualquer, *i.e.*, suponha que possamos substituir $N_n(\theta)$ em (4.18) por $N_n^{\text{norm}}(\theta)$ com a estimativa acima. Através disso, obteríamos

$$|\operatorname{Val}(\theta)| \leq C_0^{-k_1} 2^{2k_1} 2^{n_0 k} \mathcal{Q}^{k_1} e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}(\theta)|} \left(\prod_{v \in E_W(\theta)} |c^{(k_v)}| \right) \exp\left(|\boldsymbol{\nu}(\theta)| c \log 2 \sum_{n=n_0}^{\infty} n 2^{-n/\tau} \right),$$

para qualquer $n_0 \geq 0$. Assim, escolhendo $n_0 = n_0(\kappa, c, \tau)$ tal que[3]

$$-\kappa + c \log 2 \sum_{n=n_0}^{\infty} n 2^{-n/\tau} = -\frac{\kappa}{2},$$

teríamos

$$|\operatorname{Val}(\theta)| \leq C_1^{k_1} e^{-\frac{\kappa}{2}|\boldsymbol{\nu}(\theta)|} \left(\prod_{v \in E_W(\theta)} |c^{(k_v)}| \right).$$

Assim, usando que o número de árvores com ordem fixada e modos fixados é limitado por C_2^k e expandindo cada $c^{(k_v)}$ em termos de árvores de acordo com (4.14), obteríamos no final[4]

$$|u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}| \leq C_3 (C_1 C_2)^k \varepsilon^{-\kappa'|\boldsymbol{\nu}|}, \tag{4.20}$$

o que implicaria na convergência da expansão (4.7) desde que $|\varepsilon| < 1/(C_1 C_2)$.

É claro que o resultado acima é falso pois não podemos simplesmente esquecer dos gráficos de auto-energia já que os mesmos se fazem presentes na expansão. A estimativa obtida apenas ilustra o fato de que todo o problema da convergência da série (4.7) reside justamente nesses gráficos de auto-energia (acúmulo de pequenos denominadores).

[2]Lembre-se de que quanto maior a escala de uma linha, maior o *tamanho*" do propagador associado (confira Observação 4.4).

[3]Note que isso é sempre possível para n_0 suficientemente grande, pois a soma em n é convergente.

[4]Confira [27] e [28] para detalhes dos fatos usados.

4.4 Propagadores Renormalizados

A dificuldade exposta acima é contornada através de um procedimento conveniente de resoma da série formal (4.7). Conforme já mencionamos, esse procedimento, aplicado com sucesso em [27], já havia sido introduzido anteriormente em outros contextos (confira, por exemplo, [28, 29] e referências). A idéia é simples e elegante. Basicamente o que se precisa fazer é separar os gráficos de auto-energia que comparecem em (4.7), somá-los separadamente e reembutí-los na expansão (4.7) através de novos propagadores (propagadores renormalizados). A nova expansão assim obtida (com os novos propagadores) estará livre de gráficos de auto-energia, de forma que uma estimativa como (4.19) (a qual implica em (4.20)) poderá ser conseguida impondo-se condições Diophantinas adicionais sobre os novos propagadores. Veremos que serão justamente essas novas condições que não permitirão a convergência uniforme de (4.7) no disco $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, mas apenas em um conjunto de Cantor $\mathcal{E} \subset (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$.

Os propagadores renormalizados serão definidos iterativamente em função de suas escalas. Denotaremos por $g_\ell^{[n_\ell]}$ o propagador renormalizado associado à linha ℓ com escala n_ℓ. O procedimento de se *vestir* o propagador $g_\ell^{(n_\ell)} \to g_\ell^{[n_\ell]}$ será discutido em detalhes a seguir e é a base do método de resoma utilizado. Aliás, como veremos, esse método é inspirado no processo de renormalização dos gráficos de massa em TQC.

Para a implementação das idéias discutidas no parágrafo anterior, faz-se necessário a introdução de algumas definições iniciais conforme segue.

Definição 4.9 (Valor de auto-energia) *Suponha que os propagadores $g_\ell^{[n_\ell]}$ sejam fixados. Dado um gráfico de auto-energia T que não contenha nenhum outro gráfico de auto-energia, definimos o valor de auto-energia associado à T por*

$$\mathcal{V}_T(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu};\varepsilon) := \varepsilon^{k_T}\left(\prod_{\ell\in L(T)} g_\ell^{[n_\ell]}\right)\left(\prod_{v\in E(T)\cup V(T)} F_v\right). \tag{4.21}$$

onde $\boldsymbol{\nu}$ é o momento que entra em T através da linha externa ℓ_T^{in}, $k_T = |B(T)|$, e F_v está definido em (4.13). Note que $\mathcal{V}_T(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu};\varepsilon)$ depende de $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}$ através dos propagadores das linhas em $L(T)$. □

Definição 4.10 *Definimos $\Theta_{k,\boldsymbol{\nu}}^{\mathcal{R}}$ como o conjunto de árvores de ordem k que não contenham nenhum gráfico de auto-energia* (árvores renormalizadas). *Definimos ainda $\mathcal{S}_{k,n}^{\mathcal{R}}$ como o conjunto de gráficos de auto-energia de ordem k que não contenham nenhum outro gráfico de auto-energia e tal que a escala máxima das linhas de $T \in \mathcal{S}_{k,n}^{\mathcal{R}}$ seja exatamente n* (gráficos de auto-energia renormalizados de ordem k e em escala n). *Os propagadores das linhas das árvores de $\Theta_{k,\boldsymbol{\nu}}^{\mathcal{R}}$ e $\mathcal{S}_{k,n}^{\mathcal{R}}$ são os renormalizados, $g_\ell^{[n_\ell]}$.* □

Vamos construir agora os propagadores renormalizados $g_\ell^{[n_\ell]}$ de maneira inteiramente formal.

Fixemos $x = \boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\omega}$. Definimos inicialmente

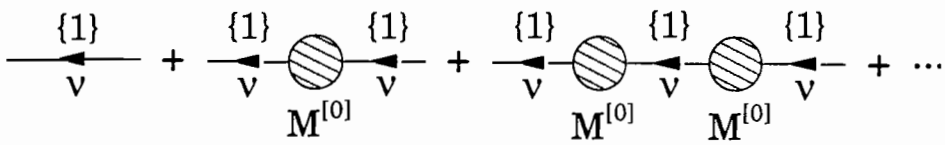
$$g^{[-1]}(x;\varepsilon) := g^{(-1)}(x) = 1\,, \quad g^{[0]}(x;\varepsilon) := g^{(0)}(x) = \frac{\psi_0(|x|)}{ix}\,.$$

Definimos agora um propagador em escala 1 provisória pela expressão[5]:

$$g^{\{1\}}(x;\varepsilon) := \frac{\chi_0(|x|)}{ix}\,.$$

Note que estar em escala 0 significa que $|x| \geq C_0 2^{-1}$ e estar em escala 1 (provisória) significa que $|x| \leq C_0$.

Considere agora a seguinte soma de árvores:



A "bolha" denotada por $M^{[0]}$ acima representa a soma de todos os gráficos de auto-energia em escala 0 (note que as linhas externas tem escala (provisória) 1). Assim,

$$M^{[0]}(x;\varepsilon) := \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{T \in \mathcal{S}^{\mathcal{R}}_{k,0}} \mathcal{V}_T(x;\varepsilon)\,.$$

Logo, formalmente, o valor da soma (geométrica) é

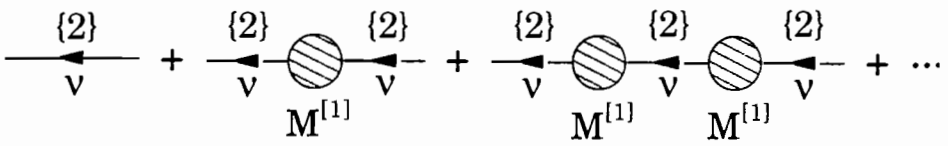
$$g^{\{1\}}(x;\varepsilon)\left(\frac{1}{1 - M^{[0]}(x;\varepsilon)g^{\{1\}}(x;\varepsilon)}\right) = \frac{\chi_0(|x|)}{ix - M^{[0]}(x;\varepsilon)\chi_0(|x|)}\,.$$

Se $|ix - M^{[0]}(x;\varepsilon)\chi_0(|x|)| \geq C_0 2^{-2}$, então a soma acima definirá realmente o propagador renormalizado em escala 1. Se $|ix - M^{[0]}(x;\varepsilon)\chi_0(|x|)| < C_0 2^{-1}$, teremos um propagador renormalizado em escala provisória 2. Ou seja,

$$g^{[1]}(x;\varepsilon) \;:=\; \frac{\chi_0(|x|)\psi_1(|ix - M^{[0]}(x;\varepsilon)\chi_0(|x|)|)}{ix - M^{[0]}(x;\varepsilon)\chi_0(|x|)}\,, \tag{4.22}$$

$$g^{\{2\}}(x;\varepsilon) \;:=\; \frac{\chi_0(|x|)\chi_1(|ix - M^{[0]}(x;\varepsilon)\chi_0(|x|)|)}{ix - M^{[0]}(x;\varepsilon)\chi_0(|x|)}\,. \tag{4.23}$$

Para a definição de $g^{[2]}(x;\varepsilon)$ (propagador renormalizado em escala 2), devemos considerar a soma



[5] A notação $g^{\{n\}}(x;\varepsilon)$ indica um propagador em escala provisória n.

onde

$$M^{[1]}(x;\varepsilon) := \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{T\in\mathcal{S}^{\mathcal{R}}_{k,1}} \mathcal{V}_T(x;\varepsilon)\,.$$

Note que os gráficos da bolha $M^{[1]}$ devem conter pelo menos uma linha com escala igual à 1 (propagador $g^{[1]}$), já que gráficos só com escalas -1 e 0 já foram somados em $g^{\{2\}}$. Isso justifica a definição do conjunto $\mathcal{S}^{\mathcal{R}}_{k,n}$. A série geométrica acima nos leva a definir $g^{[2]}$ e $g^{\{3\}}$ de forma análoga ao que fizemos em (4.22)-(4.23). Procedendo de forma indutiva, chegamos à seguinte

Definição 4.11 (Propagadores renormalizados) *Os* propagadores renormalizados $g^{[n]}_{\ell} \equiv g^{[n]}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_{\ell};\varepsilon)$ *e as quantidades* $M^{[n]}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu};\varepsilon)$ *são definidas da seguinte forma iterativa:*

$$g^{[-1]}(x;\varepsilon) := 1\,, \qquad M^{[-1]}(x;\varepsilon) := 0\,,$$

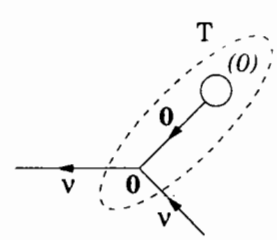
$$g^{[0]}(x;\varepsilon) := \frac{\psi_0(|x|)}{ix}\,, \quad M^{[0]}(x;\varepsilon) := 2\varepsilon c^{(0)}Q_{\mathbf{0}} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{T\in\mathcal{S}^{\mathcal{R}}_{k,0}} \mathcal{V}_T(x;\varepsilon)\,.$$

Para $n \geq 1$, *escrevemos*

$$\begin{aligned}
g^{[n]}(x;\varepsilon) &:= \chi_0(|x|)\chi_1(|ix-\mathcal{M}^{[0]}(x;\varepsilon)|)\cdots\chi_{n-1}(|ix-\mathcal{M}^{[n-2]}(x;\varepsilon)|)\\
&\times\ \psi_n(|ix-\mathcal{M}^{[n-1]}(x;\varepsilon)|)\frac{1}{ix-\mathcal{M}^{[n-1]}(x;\varepsilon)}\\
\mathcal{M}^{[n]}(x;\varepsilon) &:= \mathcal{M}^{[n-1]}(x;\varepsilon) + M^{[n]}(x;\varepsilon)\chi_0(|x|)\chi_1(|ix-\mathcal{M}^{[0]}(x;\varepsilon)|)\cdots\\
&\times\ \chi_n(|ix-\mathcal{M}^{[n-1]}(x;\varepsilon)|)\\
&= \sum_{j=0}^{n} M^{[j]}(x;\varepsilon)\chi_0(|x|)\chi_1(|ix-\mathcal{M}^{[0]}(x;\varepsilon)|)\cdots\\
&\times\ \chi_j(|ix-\mathcal{M}^{[j-1]}(x;\varepsilon)|)\\
M^{[n]}(x;\varepsilon) &:= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{T\in\mathcal{S}^{\mathcal{R}}_{k,n}} \mathcal{V}_T(x;\varepsilon)\,.
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{V}_T(x;\varepsilon)$ *está definido em (4.21).* □

Observação 4.12 *O termo* $2\varepsilon c^{(0)}Q_{\mathbf{0}}$ *que aparece em* $M^{[0]}(x;\varepsilon)$ *representa a contribuição do gráfico de auto-energia* T *desenhado ao lado. Note que o único propagador em* T *tem escala* -1, *devendo contribuir para* $M^{[-1]}(x;\varepsilon)$. *Entretanto, por razões de conveniência futura, optou-se por definir* $M^{[-1]}(x;\varepsilon) = 0$ *e adicionar a contribuição* $2\varepsilon c^{(0)}Q_{\mathbf{0}}$ *em* $M^{[0]}(x;\varepsilon)$.



Observação 4.13 *Se uma linha ℓ estiver em escala n, então, escrevendo $x = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell$, segue que $g_\ell^{[n]} \neq 0$ só se $\chi_0(|x|) \neq 0$, $\chi_1(|ix - \mathcal{M}^{[0]}(x;\varepsilon)|) \neq 0$, ..., $\chi_{n-1}(|ix - \mathcal{M}^{[n-2]}(x;\varepsilon)|) \neq 0$ e $\psi_n(|ix - \mathcal{M}^{[n-1]}(x;\varepsilon)|) \neq 0$, ou seja*

$$g_\ell^{[n]} \neq 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} |x| \leq C_0 \\ |ix - \mathcal{M}^{[0]}(x;\varepsilon)| \leq 2^{-1}C_0 \\ |ix - \mathcal{M}^{[1]}(x;\varepsilon)| \leq 2^{-2}C_0 \\ \cdots\cdots \\ |ix - \mathcal{M}^{[n-2]}(x;\varepsilon)| \leq 2^{-(n-1)}C_0 \\ |ix - \mathcal{M}^{[n-1]}(x;\varepsilon)| \geq 2^{-(n+1)}C_0 \end{cases} \;\Rightarrow\; |g_\ell^{[n]}| \leq C_0^{-1}2^{n+1}\,. \tag{4.24}$$

Definimos agora uma expansão renormalizada em analogia à (4.12)-(4.14). Para todo $k \geq 0$ e todo $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, escrevemos

$$u_{\boldsymbol{\nu}}^{[k]} = \sum_{\theta\in\Theta_{k,\boldsymbol{\nu}}^{\mathcal{R}}} \mathrm{Val}(\theta)\,, \qquad \mathrm{Val}(\theta) = \left(\prod_{\ell\in L(\theta)} g_\ell^{[n_\ell]}\right)\left(\prod_{v\in E(\theta)\cup V(\theta)} F_v\right)\,. \tag{4.25}$$

Os fatores F_v são como em (4.13). As constantes $u_{\mathbf{0}}^{[k]} := c^{[k]}$ são fixadas como em (4.14), mas agora utilizando-se os propagadores renormalizados. Com efeito, $c^{[0]} = c^{(0)} = i(\langle Q^{-1}\rangle/\langle Q\rangle)^{1/2}$ e

$$c^{[k]} = -\frac{1}{2c^{(0)}\langle Q\rangle}\sum_{\theta\in\Theta_{k+1,\mathbf{0}}^{\mathcal{R}*}} \mathrm{Val}(\theta)\,. \quad \forall\, k \geq 1\,. \tag{4.26}$$

Assim, a expansão renormalizada associada à (4.7) fica

$$\widehat{u}(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u^{[k]}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{Z}^d} u_{\boldsymbol{\nu}}^{[k]} e^{i\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\omega}}\,. \tag{4.27}$$

onde os coeficientes $u_{\boldsymbol{\nu}}^{[k]} = u_{\boldsymbol{\nu}}^{[k]}(\varepsilon)$ estão definidos em (4.25) e dependem de ε através dos propagadores renormalizados. Note que $\widehat{u}(t)$ não define uma função analítica em ε.

O comportamento dos coeficientes $u_{\boldsymbol{\nu}}^{[k]}$ deve ser estudado impondo-se primeiramente certas condições Diophantinas sobre os pequenos denominadores que aparecem em (4.25) através dos propagadores renormalizados. Assim, seja $\varepsilon_0 > 0$ a ser fixado posteriormente e tome $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\left|i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu} - \mathcal{M}^{[n]}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu};\varepsilon)\right| \geq C_0|\boldsymbol{\nu}|^{-\tau_1}\,. \quad \forall\,\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{Z}^d\setminus\{\mathbf{0}\} \quad \text{e} \quad \forall\, n \geq -1\,, \tag{4.28}$$

onde $C_0 > 0$ e $\tau_1 > \tau + d$. Denotaremos por $\mathcal{E}$ o conjunto de todos os $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \subset \mathbb{R}$ tais que as condições Diophantinas (4.28) se satisfaçam.

Notemos que como $\Theta_{k,\boldsymbol{\nu}}^{\mathcal{R}}$ está livre de gráficos de auto-energia e que os propagadores em $u_{\boldsymbol{\nu}}^{[k]}$ são limitados de acordo com a Observação 4.13, assumindo as condições Diophantinas (4.28), *i.e.*, assumindo $\varepsilon \in \mathcal{E}$, da mesma forma que podemos demonstrar a relação (4.19), podemos

provar que $N_n(\theta) \leq c\,2^{-n/\tau_1} \sum_{v\in B(\theta)} |\boldsymbol{\nu}_v|$ para toda árvore $\theta \in \Theta^{\mathcal{R}}_{k,\boldsymbol{\nu}}$. Ora, de acordo com as análises que nos levaram à (4.20), essa estimativa implica justamente na convergência de (4.27) para $|\varepsilon|$ suficientemente pequeno. Logo, o resultado fundamental que implica na demonstração do Teorema 4.1 é dado pelo seguinte lema, cuja prova encontra-se em [27].

Lema 4.14 *Assuma que o conjunto $\mathcal{E}$ tenha medida não-nula e que para todo $\varepsilon \in \mathcal{E}$ as funções $\mathcal{M}^{[n]}(x;\varepsilon)$ sejam $C^1(\mathbb{R})$ em x e satisfaçam*

$$|\mathcal{M}^{[n]}(x;\varepsilon)| \leq D|\varepsilon|\,, \quad |\partial_x \mathcal{M}^{[n]}(x;\varepsilon)| \leq D|\varepsilon|\,,$$

para alguma constante positiva D. Então, para qualquer árvore renormalizada $\theta \in \Theta^{\mathcal{R}}_{k,\boldsymbol{\nu}}$ tal que $\mathrm{Val}(\theta) \neq 0$, o número $N_n(\theta)$ de linhas em escala n satisfaz

$$N_n(\theta) \leq c\,2^{-n/\tau_1} \sum_{v\in B(\theta)} |\boldsymbol{\nu}_v|\,.$$

onde c é uma constante positiva apropriada. □

4.5 Lemas Fundamentais

As hipóteses assumidas acima sobre as funções $\mathcal{M}^{[n]}(x;\varepsilon)$ e sobre o conjunto $\mathcal{E}$ também são verificadas em [27]. Mais precisamente, temos:

Lema 4.15 *Para $\varepsilon \in \mathcal{E}$ e para x tal que $g^{[n]}(x;\varepsilon) \neq 0$, existem duas constantes positivas D e D' tal que as funções $\mathcal{M}^{[j]}(x;\varepsilon)$ são $C^1(\mathbb{R})$ em x e satisfazem*

$$|\mathcal{M}^{[j]}(x;\varepsilon)| \leq D|\varepsilon|\,, \quad |\partial_x \mathcal{M}^{[j]}(x;\varepsilon)| \leq D|\varepsilon|\,,$$
$$|\mathcal{M}^{[j]}(x;\varepsilon) - \mathcal{M}^{[j-1]}(x;\varepsilon)| \leq D|\varepsilon| e^{-D'2^{j/\tau_1}}\,.$$

para todo $0 \leq j \leq n-1$. □

Lema 4.16 *Existem três constantes positivas ε_0, b e ξ tal que, para ε_0 suficientemente pequeno, temos*

$$\mathrm{meas}(\mathcal{E}) \geq \varepsilon_0(1 - b\varepsilon_0^{\xi})\,.$$

Além disso, $\lim_{\varepsilon_0 \to 0} \dfrac{\mathrm{meas}(\mathcal{E})}{2\varepsilon_0} = 1.$ □

As demonstrações dos lemas acima, apesar de longas, não são complicada uma vez que se tenha dominado todo o formalismo introduzido. O principal ingrediente talvez seja a utilização das estimativas obtidas para $|\mathcal{M}^{[n]}(x;\varepsilon)|$, $|\partial_x \mathcal{M}^{[n]}(x;\varepsilon)|$ e $|\partial_\varepsilon \mathcal{M}^{[n]}(x;\varepsilon)|$.

Observamos, entretanto, que a demonstração do Teorema 4.1 só estará completa se, finalmente, conseguirmos provar que a expansão renormalizada definida em (4.27), de fato resolva a equação diferencial original (4.6). Embora um pouco trabalhosa, a demonstração desse fato

também não é complicada uma vez entendido o procedimento de renormalização dos propagadores implementado. Assim, em [27], completa-se a prova do Teorema 4.1 com mais um lema:

Lema 4.17 *Para todo $\varepsilon \in \mathcal{E}$, a função $\widehat{u}(t)$ definida pela expansão renormalizada (4.25)-(4.27) satisfaz*

$$\widehat{u} = \mathfrak{g}\,\varepsilon\,(Q^{-1} + Q\widehat{u}^2)\,,$$

onde $\mathfrak{g}$ é o operador diferencial com kernel $\mathfrak{g}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}) = 1/(i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu})$. □

Conforme salientado no início, escrevemos este capítulo com o intuito de situar o leitor no contexto do trabalho [27], pois o mesmo é de fundamental importância para os demais capítulos desta tese. Procuramos aqui enfatizar mais as idéias do que as questões técnicas específicas e, apesar de não termos apresentado demonstrações completas, acreditamos que os métodos de [27] puderam ser entendidos.

*

Capítulo 5

Localização Além da Terceira Ordem

Neste capítulo empregamos a técnica de expansão em árvores para generalizar os resultados do Capítulo 2. Em particular, analisamos o problema do efeito de localização dinâmica que implique em uma dependência da freqüência secular Ω superior à ε^3. Veremos que a solução desse problema se dá pela extrapolação do Teorema 2.1, página 19, além da condição (III) considerada. Conforme será demonstrado, obtivemos uma solução geral para esse problema. Começamos com uma rápida recapitulação de alguns pontos importantes discutidos nos Capítulos 1 e 2.

5.1 Fatos Preliminares

Conforme discussão do Capítulo 1, a análise perturbativa do efeito de localização dinâmica é feita através da relação entre uma solução particular g da equação de Riccati (1.17), página 10 (ou, equivalentemente, (4.6)), e o operador de evolução $U(t, t_0)$ associado ao Hamiltoniano (1.3), página 3. De acordo com o Teorema 1.1, definindo-se $U(t) = U(t, 0)$, tem-se

$$U(t) = \begin{pmatrix} R(t)(1 + i\,g(0)S(t)) & -i\,\varepsilon R(t)S(t) \\ -i\,\varepsilon\overline{R(t)S(t)} & \overline{R(t)}(1 - i\,\overline{g(0)S(t)}) \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

com

$$R(t) := \exp\left(-i\int_0^t (f(t') + g(t'))\,dt'\right) \tag{5.2}$$

e

$$S(t) := \int_0^t R(t')^{-2}\,dt', \tag{5.3}$$

tal que $\Phi(t) := U(t)\Phi_0$ é solução da equação de Schrödinger $i\partial_t\Phi(t) = H_2(t)\Phi(t)$ com valor inicial $\Phi(0) = \Phi_0 \in \mathbb{C}^2$.

Os Teoremas 1.3 e 2.2, páginas 15 e 20, afirmam que no caso periódico e sob as condições (I), (II) e (III), as quais em termos das definições introduzidas no capítulo anterior podem ser escritas como

(I) $\langle Q \rangle \neq 0$;

(II) $\langle Q \rangle = 0$, mas $\langle \mathcal{Q}_1 \rangle \neq 0$, onde $\mathcal{Q}_1(t) := Q(t) \int_0^t dt'(Q^{-1}(t') - \langle Q^{-1} \rangle)$;

(III) $\langle Q \rangle = \langle \mathcal{Q}_1 \rangle = 0$, mas $\langle \mathcal{Q}_3 \rangle \neq 0$, onde $\mathcal{Q}_3(t) := Q(t) \int_0^t dt'(\mathcal{Q}_1(t') - \langle \mathcal{Q}_1 \rangle)$;

o operador de evolução $U(t)$ é posto na forma de Floquet abaixo

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_{11}(t) & U_{12}(t) \\ U_{21}(t) & U_{22}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11}(t) & U_{12}(t) \\ -\overline{U_{12}(t)} & \overline{U_{11}(t)} \end{pmatrix}$$

com

$$U_{11}(t) = e^{-i\Omega t} u_{11}^-(t) + e^{i\Omega t} u_{11}^+(t), \qquad U_{12}(t) = e^{-i\Omega t} u_{12}^-(t) + e^{i\Omega t} u_{12}^+(t).$$

Além disso, as funções $u_{11}^{\pm}$ e $u_{12}^{\pm}$ apresentam expansões de Fourier absolutamente e uniformemente convergentes

$$u_{11}^{\pm}(t) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_{11}^{\pm}(\nu) e^{i\nu\omega t}, \qquad u_{12}^{\pm}(t) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \mathcal{U}_{12}^{\pm}(\nu) e^{i\nu\omega t}.$$

Finalmente, Ω e os coeficientes de Fourier $\mathcal{U}_{11}^{\pm}(\nu)$ e $\mathcal{U}_{12}^{\pm}(\nu)$ são expressados em termos de séries de potências em ε absolutamente convergentes. A expansão de Ω é explicitamente dada por (confira (1.36), página 17).

$$\Omega = \Omega(\varepsilon) = \langle f \rangle + \langle g \rangle = f_0 + i\varepsilon \langle Qu \rangle = f_0 + i\varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \langle Q(t) u^{(k)}(t) \rangle \,, \tag{5.4}$$

onde a partir de agora trabalharemos com a expansão para a função u introduzida no capítulo anterior.

De acordo com [4] (confira também [5, 6]), a evolução qualitativa do sistema descrito pelo Hamiltoniano (1.3) pode ser entendida em termos da *freqüência secular* Ω: longos tempos de transição entre os dois níveis do sistema estão relacionados com uma dependência fraca de Ω com relação à ε (*i.e.*, $\Omega \ll 1$).

É claro que Ω deve ser um número real visto que a matriz $U(t)$ é unitária para todo $t \in \mathbb{R}$, por se tratar de um operador de evolução de um sistema quântico. Entretanto, nenhuma prova desse fato havia sido apresentada em trabalhos anteriores. Nesse sentido, temos demonstrado agora o seguinte resultado:

Teorema 5.1 *Considere uma solução particular g da equação de Riccati generalizada (1.17), página 10, tal que $g \in L^\infty(\mathbb{R})$. Então,*

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Im\{g(t)\} \, dt = 0 \,.$$

ou seja, $\langle \Im\{g\} \rangle = 0$. □

Prova. A demonstração do resultado consiste em uma manipulação conveniente da equação (1.17) juntamente com uma aplicação da propriedade de limitação satisfeita pela solução particular g escolhida.

Começamos separando a parte real e a parte imaginária da solução g. Escrevemos

$$g(t) = \Re\{g(t)\} + i\Im\{g(t)\} =: x(t) + iy(t)\,.$$

Note que $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Substituindo a decomposição acima em (1.17), resulta

$$(\dot{x} + i\dot{y}) - i(x^2 - y^2 - 2ixy) - 2if(x + iy) + i\varepsilon^2 = 0\,.$$

Igualando a parte real e a parte imaginária do lado esquerdo à zero, obtemos o seguinte sistema acoplado:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2xy - 2fy \\ \dot{y} = x^2 - y^2 + 2fx - \varepsilon^2 \end{cases}$$

Agora multiplicamos a primeira das equações acima por x e a segunda por y e somamos os resultados. Com efeito, temos

$$\dot{x}x + \dot{y}y = -x^2y - y^3 - \varepsilon^2 y = -(x^2 + y^2 + \varepsilon^2)y\,.$$

Notando agora que $\dot{x}x = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}x^2$ (o mesmo valendo para y) e que $x^2 + y^2 = |g|^2$, resulta

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|g|^2 = -(|g|^2 + \varepsilon^2)y\,.$$

Como $|g|^2 + \varepsilon^2 > 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$ (note que $\mathbb{R} \ni \varepsilon \neq 0$), escrevemos

$$y = -\frac{1}{2}\frac{\frac{d}{dt}|g|^2}{|g|^2 + \varepsilon^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln\left(|g|^2 + \varepsilon^2\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} y(t)\,dt &= -\frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\frac{d}{dt}\ln\left(|g|^2 + \varepsilon^2\right)dt \\ &= -\frac{1}{2}\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\ln\left(|g|^2 + \varepsilon^2\right)\Big|_{-T}^{T} = 0\,, \end{aligned}$$

uma vez que g é limitada. O teorema está provado pois $y(t) = \Im\{g(t)\}$. ■

Corolário 5.2 *A freqüência secular Ω em (5.4) é real.* □

Prova. Se f em (1.17) for quase-periódica, então

$$\Omega = \langle g_{qp}\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g_{qp}(t)\,dt\,.$$

onde g_{qp} é uma solução particular quase-periódica de (1.17). Nesse caso, $g_{qp} \in L^\infty(\mathbb{R})$ e pelo Teorema 5.1,

$$\Im\{\Omega\} = \Im\left\{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} g(t)\,dt\right\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \Im\{g(t)\}\,dt = 0\,,$$

logo $\Omega \in \mathbb{R}$. É claro que esse resultado se estende imediatamente quando f em (1.17) for periódica. ■

Voltando à discussão sobre o efeito de localização, estabeleceu-se a seguinte relação entre as condições (I), (II) e (III) e a expansão para a freqüência secular Ω (confira Seção 1.6, página 16):

- Sob a condição (I): $\Omega = f_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)$
- Sob a condição (II): $\Omega = f_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$
- Sob a condição (III): $\Omega = f_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$

Então, se $f_0 = 0$,

- $\Omega = \mathcal{O}(\varepsilon)$ quando $\langle Q\rangle \neq 0$. Essa situação já havia sido estudada por diversos autores (confira as referências de [4]). Como a expansão completa de Ω em ε não era conhecida, acreditava-se que a expansão de Ω até primeira ordem era um resultado exato. Caso o coeficiente em ordem ε se anulasse, o que de fato ocorre na condição (II), acreditava-se que o efeito de localização era exato. Entretanto, sabemos que ele só pode ser aproximado.
- A condição (II) não pode ser satisfeita quando $f_0 = 0$, de forma que não se pode ter $\Omega = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Confira discussão em [2, 5].
- Entretanto, existem situações onde $\Omega = \mathcal{O}(\varepsilon^3)$, as quais ocorrem justamente sob a condição (III). Esse efeito de localização é aproximado, e não exato como conjecturado inicialmente.

É sabido que as condições (I), (II) e (III) não esgotam completamente as classes da interação f introduzida no Hamiltoniano (1.3). Na realidade, essas classes são definidas em termos dos coeficientes de Fourier f_ν. Como, em princípio, f pode conter um número infinito de coeficientes f_ν em sua decomposição, condições além de (III) são esperadas. Nesse sentido se dá a importância de generalizarmos os Teoremas 1.3 e 2.2 para condições além de (III). Dessa forma, poderíamos, em princípio, investigar efeitos de localização mais exatos do que o apresentado pela condição (III). Passemos a partir de agora a examinar esse problema com o auxílio do ferramental introduzido no capítulo anterior.

5.2 Extrapolação das Condições (I), (II) e (III)

Conforme discutido no Capítulo 1, as condições (I), (II) e (III) assumidas nos Teoremas 1.3 e 2.2 servem para assegurar que o procedimento de eliminação de termos seculares da solução procurada seja bem sucedido (confira a Seção 1.4, página 10). No contexto do capítulo anterior, onde efetuou-se uma expansão direta quase-periódica para a função u, solução de (4.6), tais condições garantem que os coeficientes de Fourier $u_{\mathbf{0}}^{(k)} = c^{(k)}$ sejam devidamente fixados. Vamos entender isso melhor.

De acordo com a Seção 4.1, página 64, os coeficientes $c^{(k)}$ são determinados a partir da resolução iterativa das equações

$$\begin{cases} 0 &= (Q^{-1})_0 + Q_0(c^{(0)})^2\,, \\ 0 &= \displaystyle\sum_{k_1+k_2=k-1} \sum_{\nu_0+\nu_1+\nu_2=0} Q_{\nu_0} u_{\nu_1}^{(k_1)} u_{\nu_2}^{(k_2)} =: \left\langle [Qu^2]^{(k-1)} \right\rangle\,, \quad \forall k \geq 2 \end{cases} \tag{5.5}$$

e, para todo $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$,

$$\begin{cases} u_{\boldsymbol{\nu}}^{(0)} &= 0\,, \\ (i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu})u_{\boldsymbol{\nu}}^{(1)} &= (Q^{-1})_{\boldsymbol{\nu}} + Q_{\boldsymbol{\nu}}(c^{(0)})^2\,, \\ (i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu})u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)} &= \displaystyle\sum_{k_1+k_2=k-1} \sum_{\nu_0+\nu_1+\nu_2=\nu} Q_{\nu_0} u_{\nu_1}^{(k_1)} u_{\nu_2}^{(k_2)}\,, \quad \forall k \geq 2\,. \end{cases} \tag{5.6}$$

Assim, se $\langle Q \rangle = Q_0 \neq 0$ (condição (I)), encontramos $c^{(0)} = i(\langle Q^{-1}\rangle / \langle Q \rangle)^{1/2}$ da primeira equação de (5.5), $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(1)}$ da segunda equação de (5.6) e assim por diante conforme a cadeia abaixo

$$c^{(0)} \to u_{\boldsymbol{\nu}}^{(1)} \to c^{(1)} \to \cdots \to c^{(j-1)} \to u_{\boldsymbol{\nu}}^{(j)} \to c^{(j)} \to u_{\boldsymbol{\nu}}^{(j+1)} \to \cdots \tag{5.7}$$

Será que a condição $\langle Q \rangle \neq 0$ utilizada para a fixação da constante $c^{(0)}$ é a mesma a ser utilizada na fixação de $c^{(k)}$, para todo $k \geq 1$? A resposta a essa pergunta é afirmativa. De fato, como $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(0)} = 0$, $\forall \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, segue de (5.5) que

$$2c^{(k-1)}c^{(0)}Q_0 = -\sum_{k_1+k_2=k-2} \sum_{\nu_0+\nu_1+\nu_2=0} Q_{\nu_0} u_{\nu_1}^{(k_1)} u_{\nu_2}^{(k_2)} = \text{termos em } c^{(k-2)}, \ldots, c^{(0)}\,,$$

para todo $k \geq 2$. Note que com essa expressão, apenas assumindo a condição $\langle Q \rangle \neq 0$, podemos determinar iterativamente o conjunto de constantes $\{c^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ conforme o esquema (5.7).

Assim, a condição (I) serve para garantir a consistência da solução formal (4.9) com os coeficientes $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$ satisfazendo (5.5)-(5.6), determinados segundo (5.7). A questão natural que se coloca agora é se o esquema (5.7) deixa de valer quando $\langle Q \rangle = 0$. Nesse caso, $c^{(0)}$ não pode ser fixado da primeira equação de (5.5), pois a mesma se anula identicamente. Procuramos

fixar $c^{(0)}$ a partir da segunda equação de (5.5), a qual se expressa (lembrando que $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(0)} = 0$, $\forall \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$)

$$\begin{aligned} 0 &= 2c^{(1)}c^{(0)}Q_{\mathbf{0}} + 2c^{(0)}\sum_{\boldsymbol{\nu}\neq\mathbf{0}} Q_{-\boldsymbol{\nu}}u_{\boldsymbol{\nu}}^{(1)} \\ &= 2c^{(1)}c^{(0)}Q_{\mathbf{0}} + 2c^{(0)}\sum_{\boldsymbol{\nu}\neq\mathbf{0}} \left[\frac{Q_{-\boldsymbol{\nu}}(Q^{-1})_{\boldsymbol{\nu}} + Q_{-\boldsymbol{\nu}}Q_{\boldsymbol{\nu}}(c^{(0)})^2}{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}}\right], \end{aligned}$$

onde, na última passagem, substituímos a expressão de $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(1)}$ dada em (5.6). Note agora que

$$\sum_{\boldsymbol{\nu}\neq\mathbf{0}} \frac{Q_{-\boldsymbol{\nu}}Q_{\boldsymbol{\nu}}}{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}} = 0$$

e que como $Q^{-1}(t) = \overline{Q(t)}$, tem-se $\overline{Q_{-\boldsymbol{\nu}}} = (Q^{-1})_{\boldsymbol{\nu}}$, $\forall \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d$. Assim,

$$0 = 2c^{(1)}c^{(0)}Q_{\mathbf{0}} - 2c^{(0)}\sum_{\boldsymbol{\nu}\neq\mathbf{0}} \frac{|Q_{\boldsymbol{\nu}}|^2}{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}}.$$

A observação crucial neste ponto é que podemos fixar $c^{(0)}$ da expressão acima uma vez que $\langle Q\rangle = 0$, o que implica no anulamento do termo proporcional à $c^{(1)}$ (incógnita). Além disso, assumindo que

$$\sum_{\boldsymbol{\nu}\neq\mathbf{0}} \frac{|Q_{\boldsymbol{\nu}}|^2}{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}} = \left\langle Q(t)\int_0^t Q^{-1}(t')dt'\right\rangle = \langle \mathcal{Q}_1\rangle \neq 0,$$

obtemos $c^{(0)} = 0$. Portanto, sob as hipóteses da condição (II), a saber $\langle Q\rangle = 0$, mas $\langle \mathcal{Q}_1\rangle \neq 0$, temos $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(0)} = 0$, $\forall \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d$. Embora a análise seja um pouco mais complicada que a anterior, segue de (5.5) que a condição $\langle \mathcal{Q}_1\rangle \neq 0$ também é suficiente para fixar as demais constantes $c^{(k)}$, $k \geq 1$, quando $\langle Q\rangle = 0$. Na verdade, pode-se provar por indução a partir de (5.5)-(5.6) que $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)} = 0$ para todo k par e todo $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d$. Assim, sob a condição (II), a expansão da função $g = i\varepsilon Qu$, de acordo com (4.7), é efetiva no parâmetro $\lambda = \varepsilon^2$ (confira o Teorema 1.2, página 14). A análise completa da condição (II) e da prova de convergência da expansão para g no caso periódico é apresentada em [2, 3].

É claro que pode ocorrer que tanto $\langle Q\rangle$ quanto $\langle \mathcal{Q}_1\rangle$ se anulem. Como vimos, esse caso é particularmente interessante para o estudo do problema da localização dinâmica, onde a expansão em ε para a freqüência secular Ω é da ordem de ε^3. Essa situação também pode ser remediada através de uma análise cautelosa das equações (5.5)-(5.6), o que permite fixar o conjunto de constantes $\{c^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ e os demais coeficientes $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$, $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}$, de acordo com o esquema (5.7), desde que se assuma adicionalmente

$$\left\langle Q(t)\int_0^t \mathcal{Q}_1(t')dt'\right\rangle = \langle \mathcal{Q}_3\rangle \neq 0.$$

As hipóteses de que $\langle Q\rangle = \langle \mathcal{Q}_1\rangle = 0$, mas $\langle \mathcal{Q}_3\rangle \neq 0$, correspondem à condição (III), analisada em detalhes no Capítulo 2.

Salientamos que os resultados de [2, 3, 4, 5] foram obtidos fora do formalismo de árvore introduzido em [27], discutido no capítulo anterior. As demonstrações presentes nesses trabalhos baseiam-se na direta manipulação algébrica dos coeficientes envolvidas na expansão (4.7), embora se tenha trabalhado com uma expansão equivalente para g, solução direta de (4.1).

A seguir descrevemos nossos resultados no sentido de generalizar o procedimento de fixação das constantes $\{c^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ discutido anteriormente nos casos (I), (II) e (III). Procuramos encontrar a solução mais geral para esse problema dentro do formalismo de árvores introduzido em [27]. Primeiramente, devemos notar que as equações (5.5) podem ser escritas como

$$\sum_{\theta\in\mathcal{T}'_{k,\mathbf{0}}} \mathrm{Val}(\theta) = 0\,, \quad \forall\, k \geq 1\,,$$

onde $\mathcal{T}'_{k,\mathbf{0}}$ é o conjunto $\mathcal{T}_{k,\mathbf{0}}$ excluindo a árvore[1] que representa $c^{(k)}$ (é claro, por definição, que tal árvore pertence à $\mathcal{T}_{k,\mathbf{0}}$).

Seja $\theta \in \mathcal{T}'_{k,\mathbf{0}}$. Devemos extrair explicitamente o valor dos coeficientes $c^{(k_v)}$, $v \in E_W(\theta) \equiv W(\theta)$, de $\mathrm{Val}(\theta)$. Para isso, introduzimos a seguinte

Definição 5.3 *Seja $\theta\in\mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}$, $k\geq 1$, $\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{Z}^d$. Definimos $\theta\backslash W(\theta)$ como a* árvore $W(\theta)$-amputada *gerada pela amputação do conjunto de bolas brancas $W(\theta)$ de θ. Ou seja,*

$$\mathrm{Val}\,(\theta\backslash W(\theta)) = \frac{\mathrm{Val}(\theta)}{\prod\limits_{v\in W(\theta)} c^{(k_v)}} \quad e \quad k_{\theta\backslash W(\theta)} = k - \sum_{v\in W(\theta)} k_v = |V(\theta)| + |E_B(\theta)|\,,$$

onde $k_{\theta\backslash W(\theta)}$ denota a ordem da árvore $W(\theta)$-amputada. Definimos também $\mathcal{T}_{n,m;\boldsymbol{\nu}}$ como o conjunto de todas as árvores de ordem $n+m$ com $n\geq 1$ vértices, $0\leq m\leq n+1$ bolas pretas, e momento $\boldsymbol{\nu}$ através da linha raiz. Mais precisamente,

$$\mathcal{T}_{n,m;\boldsymbol{\nu}} := \{\, \theta \in \mathcal{T}_{n+m,\boldsymbol{\nu}} \;:\; |V(\theta)| = n\,,\; |E_B(\theta)| = m \,\}\,.$$

Note que se uma árvore em $\mathcal{T}_{n,m;\boldsymbol{\nu}}$ apresentar bolas brancas, todos os seus rótulos de ordem serão nulos. Amputamos agora todas as bolas brancas em $\mathcal{T}_{n,m;\boldsymbol{\nu}}$. Isso define o conjunto

$$\widetilde{\mathcal{T}}_{n,m;\boldsymbol{\nu}} := \{\, \theta\backslash W(\theta) \;:\; \theta \in \mathcal{T}_{n,m;\boldsymbol{\nu}} \,\}\,.$$

Finalmente, para todo $n\geq 1$ e todo $0\leq m\leq n+1$, definimos

$$G_{n,m} := \sum_{\theta\in\widetilde{\mathcal{T}}_{n,m;\mathbf{0}}} \mathrm{Val}(\theta)\,. \tag{5.8}$$

Podemos notar que $G_{n,m}$ representa a soma de todas as possíveis árvores com n vértices e m bolas pretas tal que os $n+1-m$ pontos finais restantes são amputados e o momento através da linha raiz é nulo. Por completeza definimos $G_{0,1} := (Q^{-1})_0 = \langle Q^{-1}\rangle = \langle \overline{Q}\rangle$. Mostramos na Figura 5.1 a representação diagramática de $G_{0,1}$ e $G_{n,m}$, para $1\leq n\leq 2$, $0\leq m\leq n+1$. □

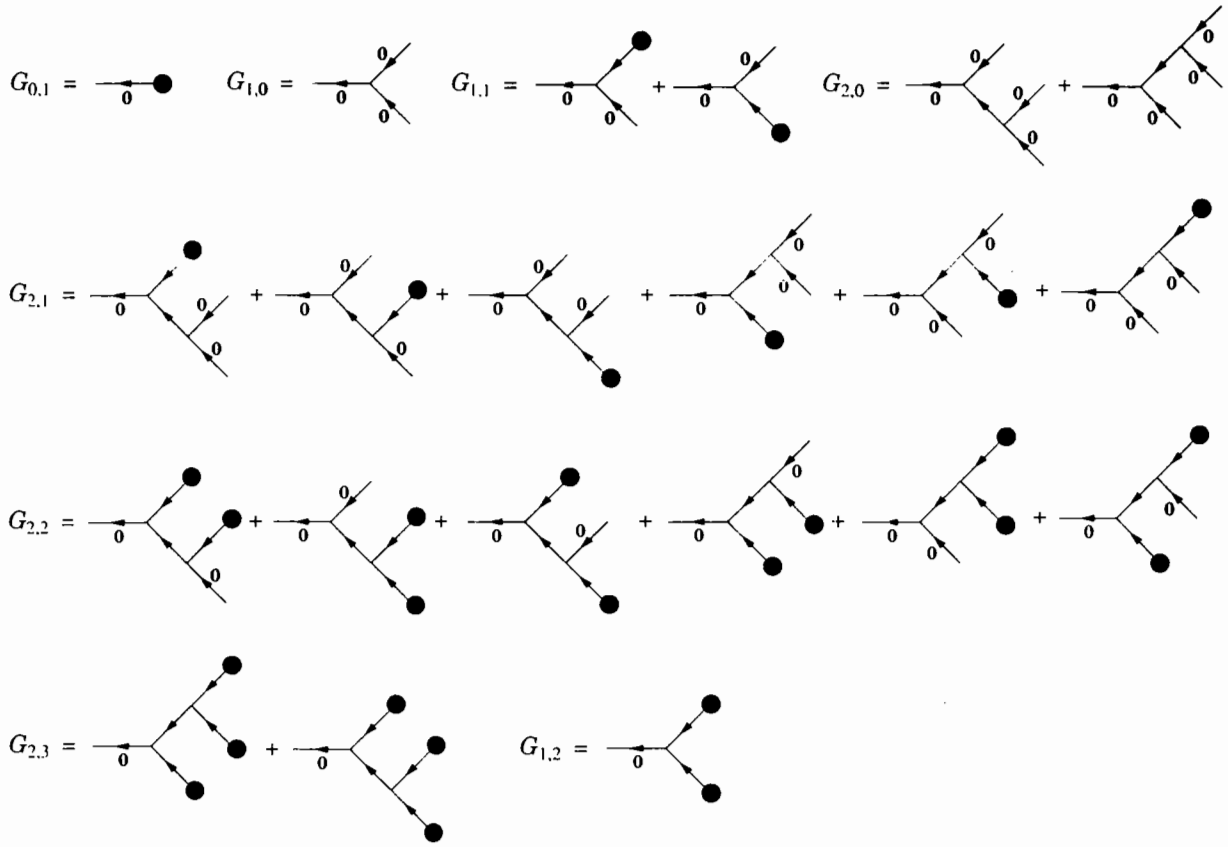


Figura 5.1: Representação diagramática de $G_{0,1}$, $G_{1,0}$, $G_{1,1}$, $G_{1,2}$, $G_{2,0}$, $G_{2,1}$, $G_{2,2}$ e $G_{2,3}$. A linha raiz carrega momento nulo em todas as árvores. Chamamos de *pernas amputadas* aquelas linhas que partem das bolas brancas amputadas. Conforme indicamos na figura, todos os propagadores associados às pernas amputadas são triviais.

Temos provado o seguinte resultado fundamental em nossa análise:

Lema 5.4 *Seja $k \geq 1$, então*

$$\sum_{\theta \in \mathcal{T}'_{k,\mathbf{0}}} \mathrm{Val}(\theta) = \sum_{n=1}^{k} \sum_{m=0}^{\min\{n,k-n\}} G_{n,m} \sum_{\mathcal{K}^k_{n,m}} \prod_{i=1}^{n+1-m} c^{(k_i)} + \Delta(k) G_{\frac{k-1}{2},\frac{k+1}{2}} \,. \tag{5.9}$$

onde

$$\mathcal{K}^k_{n,m} := \left\{ k_1 \in \mathbb{N}, \ldots, k_{n+1-m} \in \mathbb{N} \ : \ \sum_{i=1}^{n+1-m} k_i = k - (n+m) \right\}$$

e Δ é tal que $\Delta(k) = 0$ se k é par e $\Delta(k) = 1$ se k é ímpar. □

Prova. Seja $k \geq 2$ um inteiro par e θ uma árvore arbitrária em $\mathcal{T}'_{k,\mathbf{0}}$. Suponha que θ tenha n vértices. Evidentemente, $1 \leq n \leq k$, o que deixa espaço para $n+1$ pontos finais em θ. Suponha agora que θ tenha $m \geq 0$ bolas pretas. O número de bolas brancas em θ é, então

$$|W(\theta)| = |E(\theta)| - |E_B(\theta)| = n + 1 - m \,. \tag{5.10}$$

[1]Confira a Figura 4.2, página 66.

Queremos encontrar o valor máximo de m dado que a árvore θ é de ordem k em tem n vértices dados ($1 \leq n \leq k$). Primeiramente notamos que θ deve ter pelo menos uma bola branca já que k é par. (De fato, caso contrário, todos os pontos finais de θ seriam bolas pretas, de forma que $k = |V(\theta)| + |B(\theta)| + \sum_{v \in W(\theta)} k_v = n + n + 1$, que é ímpar). Assim, segue de (5.10) que

$$1 \leq n + 1 - m \implies 0 \leq m \leq n\,. \tag{5.11}$$

Outro vínculo importante segue de $k = |V(\theta)| + |B(\theta)| + \sum_{v \in W(\theta)} k_v$. Notamos que $\sum_{v \in W(\theta)} k_v \geq 0$, a igualdade ocorrendo quando todos os rótulos de ordem das bolas brancas em θ forem zero. Portanto,

$$0 \leq \sum_{v \in W(\theta)} k_v = k - (n + m) \implies 0 \leq m \leq k - n\,. \tag{5.12}$$

Da intersecção de (5.11) e (5.12), concluímos que $0 \leq m \leq \min\{n, k - n\}$.

Seja $\mathcal{T}^k_{n,m;\mathbf{0}} := \{\theta \in \mathcal{T}_{k,\mathbf{0}} : |V(\theta)| = n, |E_B(\theta)| = m\}$. Uma vez que concluímos que uma árvore arbitrária em $\mathcal{T}'_{k,\mathbf{0}}$ tem $1 \leq n \leq k$ vértices e $0 \leq m \leq \min\{n, k - n\}$ bolas pretas, seguindo a Definição 5.3, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\sum_{\theta \in \mathcal{T}'_{k,\mathbf{0}}} \mathrm{Val}(\theta) &= \sum_{n=1}^{k} \sum_{m=0}^{\min\{n,k-n\}} \sum_{\theta \in \mathcal{T}^k_{n,m;\mathbf{0}}} \mathrm{Val}(\theta \backslash W(\theta)) \prod_{v \in W(\theta)} c^{(k_v)} \\
&= \sum_{n=1}^{k} \sum_{m=0}^{\min\{n,k-n\}} \sum_{\theta \in \mathcal{T}_{n,m,\mathbf{0}}} \mathrm{Val}(\theta \backslash W(\theta)) \sum_{\mathcal{K}^k_{n,m}} \prod_{i=1}^{n+1-m} c^{(k_i)} \\
&= \sum_{n=1}^{k} \sum_{m=0}^{\min\{n,k-n\}} \sum_{\theta \in \tilde{\mathcal{T}}_{n,m,\mathbf{0}}} \mathrm{Val}(\theta) \sum_{\mathcal{K}^k_{n,m}} \prod_{i=1}^{n+1-m} c^{(k_i)}\,.
\end{aligned}$$

o que prova (5.9) para k par.

O caso onde $k \geq 1$ é ímpar é idêntico, exceto pelo fato de que na soma $\sum_{\theta \in \mathcal{T}'_{k,\mathbf{0}}}$ existe a contribuição de árvore de ordem k tal que todos os seus pontos finais sejam bolas pretas. Para tal árvore, $|V(\theta)| + |E_B(\theta)| = k$ e $|E(\theta)| = |V(\theta)| + 1 = |E_B(\theta)|$. Portanto, $|V(\theta)| = (k-1)/2$ e $|E_B(\theta)| = (k+1)/2$, dando a contribuição $G_{\frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2}}$ em (5.9) para k ímpar. ■

O Lema 5.4 nos diz que o problema de determinar as constantes $\{c^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ é equivalente ao de se resolver o seguinte conjunto de equações não-lineares acopladas:

$$\left\{ \sum_{n=1}^{k} \sum_{m=0}^{\min\{n,k-n\}} G_{n,m} \sum_{\mathcal{K}^k_{n,m}} \prod_{i=1}^{n+1-m} c^{(k_i)} + \Delta(k) G_{\frac{k-1}{2}, \frac{k+1}{2}} = 0\,, \quad k \geq 1\,. \right. \tag{5.13}$$

Salientamos que os coeficientes $G_{n,m}$, dados em (5.8), são funções de Q e Q^{-1} somente, portanto, são independentes de $c^{(k)}$. Chamamos (5.13) de *equações centrais*, visto que nossos resultados seguirão da resolução das mesmas.

Com a intenção de generalizar a discussão prévia a respeito do aparecimento das condições (I), (II) e (III), quando da fixação das constantes $\{c^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, propomos agora resolver o seguinte problema geral: primeiramente assumimos alguma condição que implique no idêntico anulamento das k_0 primeiras equações de (5.13), $k_0 \geq 1$, mas não no anulamento da (k_0+1)-ésima primeira. Dada essa condição, desejamos fixar $c^{(0)}$ a partir da (k_0+1)-ésima equação de (5.13), a qual não se anula identicamente, e a partir da (k_0+1+j)-ésima equação de (5.13) pretendemos fixar $c^{(j)}$, para todo $j \geq 1$.

É importante notar que a condição (I) implica no não anulamento da primeira equação de (5.13). A condição (II) implica no anulamento da primeira equação de (5.13), mas não da segunda. Já a condição (III) implica no anulamento da primeira e da segunda equação de (5.13), mas não no anulamento da terceira. De fato, escrevendo (5.13) para $k = 1, 2, 3$, temos

$$\begin{cases} G_{1,0}(c^{(0)})^2 + G_{0,1} = 0 \\ \\ G_{1,0}(2c^{(0)}c^{(1)}) + G_{1,1}(c^{(0)}) + G_{2,0}(c^{(0)})^3 = 0 \\ \\ G_{1,0}[(c^{(1)})^2 + 2c^{(0)}c^{(2)}] + G_{1,1}(c^{(1)}) + \\ G_{2,0}(3c^{(1)}(c^{(0)})^2) + G_{2,1}(c^{(0)})^2 + G_{3,0}(c^{(0)})^4 + G_{1,2} = 0 . \end{cases} \tag{5.14}$$

Agora, calculamos explicitamente o valor analítico dos coeficientes $G_{n,m}$ acima com base nos diagramas da Figura 5.1. Para $G_{1,0}$ e $G_{0,1}$ temos simplesmente

$$G_{1,0} = Q_{\mathbf{0}} = \langle Q \rangle , \quad G_{0,1} = (Q^{-1})_{\mathbf{0}} = \overline{\langle Q \rangle} .$$

O cálculo de $G_{1,1}$ é bastante simples. Lembrando que $Q_{\boldsymbol{\nu}} = \overline{Q_{-\boldsymbol{\nu}}}$, para qualquer $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d$, resulta

$$G_{1,1} = 2 \sum_{\boldsymbol{\nu}_0+\boldsymbol{\nu}_1=0} \frac{Q_{\boldsymbol{\nu}_0}(Q^{-1})_{\boldsymbol{\nu}_1}}{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_1} = 2\sum_{\boldsymbol{\nu}\neq 0} \frac{|Q_{\boldsymbol{\nu}}|^2}{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}} = 2\left\langle Q(t)\int_0^t dt'(Q^{-1}(t') - \langle Q^{-1}\rangle)\right\rangle = 2\langle \mathcal{Q}_1 \rangle .$$

A passagem da segunda para a terceira igualdade acima pode ser verificada facilmente calculando-se explicitamente o lado direito e verificando-se a identidade.

O cálculo do coeficiente $G_{2,2}$ é bastante simples também. Temos,

$$G_{2,0} = 2 \sum_{\boldsymbol{\nu}_0+\boldsymbol{\nu}_0'=0} \frac{Q_{\boldsymbol{\nu}_0}Q_{\boldsymbol{\nu}_0'}}{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_0'} = \sum_{\boldsymbol{\nu}\neq 0} \frac{Q_{\boldsymbol{\nu}}Q_{-\boldsymbol{\nu}}}{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}} = 0 .$$

Prosseguimos para o cômputo de $G_{2,1}$. Analogamente aos cálculos anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} G_{2,1} &= 2 \sum_{\boldsymbol{\nu}_0+\boldsymbol{\nu}_0'+\boldsymbol{\nu}_1=0} \frac{Q_{\boldsymbol{\nu}_0}Q_{\boldsymbol{\nu}_0'}(Q^{-1})_{\boldsymbol{\nu}_1}}{(i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_0')(i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_1)} + 4 \sum_{\boldsymbol{\nu}_0+\boldsymbol{\nu}_0'+\boldsymbol{\nu}_1=0} \frac{Q_{\boldsymbol{\nu}_0}Q_{\boldsymbol{\nu}_0'}(Q^{-1})_{\boldsymbol{\nu}_1}}{(i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_1)[i\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\nu}_0'+\boldsymbol{\nu}_1)]} \\ &= -2 \sum_{\boldsymbol{\nu}_0,\boldsymbol{\nu}_1\neq 0} \frac{Q_{\boldsymbol{\nu}_0}Q_{-\boldsymbol{\nu}_0-\boldsymbol{\nu}_1}(Q^{-1})_{\boldsymbol{\nu}_1}}{(i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_0)(i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_1)} = 2\left\langle Q(t)\int_0^t dt'(\mathcal{Q}_1(t) - \langle \mathcal{Q}_1\rangle)\right\rangle = 2\langle \mathcal{Q}_3 \rangle . \end{aligned}$$

O coeficiente $G_{1,2}$ é dado por

$$G_{1,2} = \sum_{\nu_0+\nu_1+\nu_2=0} \frac{Q_{\nu_0}(Q^{-1})_{\nu_1}(Q^{-1})_{\nu_2}}{(i\omega\cdot\nu_1)(i\omega\cdot\nu_2)} = \left\langle Q(t)\left(\int_0^t dt' Q^{-1}(t')\right)^2\right\rangle .$$

Voltando um pouco à notação utilizada na Seção 2.2, página 21, notamos da expressão acima que $G_{1,2} = M(\,1\,|\,\overline{0}\,)$. Mas de acordo com a Proposição 2.9, página 27, tem-se $M(\,1\,|\,\overline{0}\,) = 2\overline{\langle \mathcal{Q}_3\rangle}$. Assim, $G_{1,2} = \overline{G_{2,1}} = 2\overline{\langle \mathcal{Q}_3\rangle}$.

Finalmente, o coeficiente $G_{3,0}$ é dado por

$$G_{3,0} = \sum_{\nu_0+\nu_0'+\nu_0''=0} \frac{Q_{\nu_0}Q_{\nu_0'}Q_{\nu_0''}}{(i\omega\cdot\nu_0'')[i\omega\cdot(\nu_0'+\nu_0'')]} = \left\langle Q(t)\int_0^t dt' Q(t')\int_0^{t'} dt'' Q(t'')\right\rangle = 0 ,$$

em vista do ítem (6) da Proposição 2.3, página 21.

Concluímos dos cálculos acima que (5.14) pode ser reescrita como

$$\begin{cases} \langle Q\rangle (c^{(0)})^2 + \overline{\langle Q\rangle} = 0 \\ \langle Q\rangle (2c^{(0)}c^{(1)}) + 2\langle \mathcal{Q}_1\rangle (c^{(0)}) = 0 \\ \langle Q\rangle [(c^{(1)})^2 + 2c^{(0)}c^{(2)}] + 2\langle \mathcal{Q}_1\rangle (c^{(1)}) + 2\langle \mathcal{Q}_3\rangle (c^{(0)})^2 + 2\overline{\langle \mathcal{Q}_3\rangle} = 0 , \end{cases} \tag{5.15}$$

o que demonstra a afirmativa feita no parágrafo anterior à (5.14).

Voltemos ao problema geral de se resolver (5.13). Como hipótese inicial, assumimos que as k_0 primeiras equações de (5.13), $k_0 \geq 1$, se anulem identicamente. Isso equivale à escrever

$$\begin{aligned} G_{n,m} &\equiv 0 , \qquad 1 \leq n \leq k_0 ,\ 0 \leq m \leq \min\{n, k_0 - m\} , \\ G_{\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2}} &\equiv 0 , \qquad 1 \leq n \leq 2m+1 ,\ 0 \leq m \leq \left\lfloor \frac{k_0-1}{2} \right\rfloor . \end{aligned} \tag{5.16}$$

De acordo com a idéia original, pretendemos fixar $c^{(0)}$ da (k_0+1)-ésima equação de (5.13). A mesma pode ser escrita como

$$\sum_{n=1}^{k_0+1} \sum_{m=0}^{\min\{n,k_0+1-n\}} G_{n,m} \sum_{\mathcal{K}_{n,m}^{k_0+1}} \prod_{i=1}^{n+1-m} c^{(k_i)} + \Delta(k_0+1) G_{\frac{k_0}{2},\frac{k_0+2}{2}} = 0 . \tag{5.17}$$

É claro que muitos dos termos de (5.17) são nulos devido às condições expressas em (5.16). Precisamos determinar quais termos restam. Esperamos que esses termos dependam somente de $c^{(0)}$ em vista do que aconteceu anteriormente na análise dos casos (I), (II) e (III). Primeiro temos provado o seguinte resultado importante:

Lema 5.5 *Seja $k \geq 1$, então*

$$\sum_{n=1}^{k+p} \sum_{m=0}^{\min\{n,k+p-n\}} G_{n,m} = \sum_{n=1}^{k} \sum_{m=0}^{\min\{n,k-n\}} G_{n,m} + \sum_{n=\lfloor \frac{k}{2} \rfloor+1}^{k} \sum_{m=\min\{n,k-n\}+1}^{\min\{n,k+p-n\}} G_{n,m}$$

$$+ \sum_{n=k+1}^{k+p} \sum_{m=0}^{\min\{n,k+p-n\}} G_{n,m} ,$$

para todo $p \geq 1$. □

Prova. Primeiramente separamos a soma em n para aqueles valores que são menores ou iguais à $\lfloor k/2 \rfloor$; aqueles que são maiores do que $\lfloor k/2 \rfloor$ e menores ou iguais à k; e aqueles que são maiores do que k:

$$\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{m=0}^{\min\{n,k+p-n\}} G_{n,m} + \sum_{n=\lfloor \frac{k}{2} \rfloor+1}^{k} \sum_{m=0}^{\min\{n,k+p-n\}} G_{n,m} + \sum_{n=k+1}^{k+p} \sum_{m=0}^{\min\{n,k+p-n\}} G_{n,m}$$

Agora, para $1 \leq n \leq \lfloor k/2 \rfloor$, está claro que $\min\{n, k+p-n\} = n = \min\{n, k-n\}$. Por outro lado, quando $k/2 < n \leq k$, segue que $\min\{n, k+p-n\} > \min\{n, k-n\}$. De fato, se $n > k/2$, $\min\{n, k-n\} = k-n < k+p-n$. Além disso, $\min\{n, k-n\} = k-n < n$, de tal forma que $\min\{n, k+p-n\} > \min\{n, k-n\}$. Portanto, as duas primeiras somas da equação acima ficam

$$\sum_{n=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{m=0}^{\min\{n,k-n\}} G_{n,m} + \sum_{n=\lfloor \frac{k}{2} \rfloor+1}^{k} \sum_{m=0}^{\min\{n,k-n\}} G_{n,m} + \sum_{n=\lfloor \frac{k}{2} \rfloor+1}^{k} \sum_{m=\min\{n,k-n\}+1}^{\min\{n,k-n\}} G_{n,m}$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \sum_{m=0}^{\min\{n,k-n\}} G_{n,m} + \sum_{n=\lfloor \frac{k}{2} \rfloor+1}^{k} \sum_{m=\min\{n,k-n\}+1}^{\min\{n,k-n\}} G_{n,m} .$$

provando o resultado. ■

5.2.1 Determinação de $c^{(0)}$

Segue das condições (5.17) e da aplicação do Lema 5.5 à equação (5.17) o seguinte resultado fundamental que nos permite determinar $c^{(0)}$.

Proposição 5.6 *Para todo $k \in \mathbb{Z}_+$ defina o polinômio*

$$\mathcal{P}_k(x) := \sum_{n=\lfloor \frac{k}{2} \rfloor+1}^{k+1} G_{n,k+1-n}\, x^{2n-k} + \Delta(k+1) G_{\frac{k}{2}, \frac{k+2}{2}} . \quad \forall x \in \mathbb{C} . \tag{5.18}$$

Assuma as condições (5.16) para algum $k_0 \geq 1$. Assuma também que $\mathcal{P}_{k_0}$ não seja identicamente nulo. Então, a constante $c^{(0)}$ deve ser fixada como uma raiz de $\mathcal{P}_{k_0}$. □

Prova. Trabalhamos com (5.17). De acordo com o Lema 5.5, temos

$$\sum_{n=1}^{k_0} \sum_{m=0}^{\min\{n,k_0-n\}} G_{n,m} C_{n,m}^{k_0+1} + \sum_{n=\lfloor \frac{k_0}{2} \rfloor+1}^{k_0+1} \sum_{m=\min\{n,k_0-n\}+1}^{\min\{n,k_0+1-n\}} G_{n,m} C_{n,m}^{k_0+1} + \Delta(k_0+1) G_{\frac{k_0}{2},\frac{k_0+2}{2}} = 0,$$

onde, para abreviar, definimos

$$C_{n,m}^{k_0+1} := \sum_{\mathcal{K}_{n,m}^{k_0+1}} \prod_{i=1}^{n+1-m} c^{(k_i)}.$$

Notamos que, pelas condições (5.16), a primeira soma da equação acima se anula identicamente. Assim,

$$\sum_{n=\lfloor \frac{k_0}{2} \rfloor+1}^{k_0+1} \sum_{m=\min\{n,k_0-n\}+1}^{\min\{n,k_0+1-n\}} G_{n,m} C_{n,m}^{k_0+1} + \Delta(k_0+1) G_{\frac{k_0}{2},\frac{k_0+2}{2}} = 0,$$

Observamos agora que como $k_0/2 < n \leq k_0+1$ na primeira soma, segue que $\min\{n, k_0-n\} = k_0 - n$ e $\min\{n, k_0+1-n\} = k_0+1-n$. De fato, $\min\{n, k_0-n\} = k_0 - n \Leftrightarrow n \geq k_0/2$ e $\min\{n, k_0+1-n\} = k_0+1-n \Leftrightarrow n \geq k_0/2 + 1/2$. Portanto,

$$\sum_{n=\lfloor \frac{k_0}{2} \rfloor+1}^{k_0+1} G_{n,k_0+1-n} C_{n,k_0+1-n}^{k_0+1} + \Delta(k_0+1) G_{\frac{k_0}{2},\frac{k_0+2}{2}} = 0,$$

Agora, como $\mathcal{K}_{n,k_0+1-n}^{k_0+1} = \{k_1 \in \mathbb{N}, \ldots, k_{2n-k_0} \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{2n-k_0} k_i = 0\} = \{0, \ldots, 0\}$, segue que $C_{n,k_0+1-n}^{k_0+1} = (c^{(0)})^{2n-k_0}$, de tal forma que a equação para fixação de $c^{(0)}$ é

$$\sum_{n=\lfloor \frac{k_0}{2} \rfloor+1}^{k_0+1} G_{n,k_0+1-n} (c^{(0)})^{2n-k_0} + \Delta(k_0+1) G_{\frac{k_0}{2},\frac{k_0+2}{2}} = 0. \tag{5.19}$$

É claro que, se k_0 for ímpar, pelo menos um G_{n,k_0+1-n}, $\frac{k_0+1}{2} \leq n \leq k_0+1$ deve ser diferente de zero, caso contrário (5.19) se anularia identicamente. Se k_0 é par, e $G_{\frac{k_0}{2},\frac{k_0+2}{2}} = 0$, então, novamente, pelo menos um G_{n,k_0+1-n}, $\frac{k_0}{2}+1 \leq n \leq k_0+1$ não deve ser nulo. Se, entretanto, $G_{\frac{k_0}{2},\frac{k_0+2}{2}} \neq 0$ e $G_{n,k_0+1-n} = 0$, para todo $\frac{k_0}{2}+1 \leq n \leq k_0+1$, (5.19) não apresenta solução e não podemos resolver (5.13). Excluímos essa possibilidade e assumimos a partir de agora que (5.19) tenha uma solução. Para sermos mais precisos, definimos, para todo $k_0 \geq 1$, o polinômio $\mathcal{P}_{k_0}$ em (5.18). Observamos que $\mathcal{P}_{k_0}$ é no máximo de grau k_0+1. Além disso, $\mathcal{P}_{k_0}(x) = \mathcal{P}_{k_0}(-x)$ se k_0 é par, e $\mathcal{P}_{k_0}(x) = -\mathcal{P}_{k_0}(-x)$ se k_0 é ímpar. Está claro de (5.19) que a constante $c^{(0)}$ deve ser fixada como uma raiz de $\mathcal{P}_{k_0}$. ■

5.2.2 Determinação de $c^{(j)}, j \geq 1$

Já sabemos como fixar $c^{(0)}$. O problema agora é fixar iterativamente $c^{(j)}$ a partir da (k_0+1+j)-ésima equação de (5.13). É claro que neste ponto estamos assumindo que todas as constantes $c^{(0)}, \ldots, c^{(j-1)}$ anteriores já tenham sido determinadas pelo procedimento iterativo.

A equação (5.13) para $k = k_0 + 1 + j$ é escrita como

$$\sum_{n=1}^{k_0+1-j} \sum_{m=0}^{\min\{n,k_0+1+j-n\}} G_{n,m} \mathcal{C}_{n,m}^{k_0+1+j} + \Delta(k_0+1+j) G_{\frac{k_0+j}{2},\frac{k_0+2+j}{2}} = 0, \tag{5.20}$$

onde definimos

$$\mathcal{C}_{n,m}^{k} := \sum_{\mathcal{K}_{n,m}^{k}} \prod_{i=1}^{n+1-m} c^{(k_i)}$$

para todos $k \geq 1$, $1 \leq n \leq k$, $0 \leq m \leq \min\{n, k-n\}$. É conveniente também definir

$$\widehat{\mathcal{C}}_{n,m}^{k} := \sum_{\widehat{\mathcal{K}}_{n,m}^{k}} \prod_{i=1}^{n+1-m} c^{(k_i)},$$

onde a diferença com relação à $\mathcal{C}_{n,m}^{k}$ está no conjunto

$$\widehat{\mathcal{K}}_{n,m}^{k} := \left\{ k_1 \in \mathbb{N}, \ldots, k_{n+1-m} \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{n+1-m} k_i = k - (n+m), \; k_i < k - (n+m) \right\}. \tag{5.21}$$

definido para todos $k \geq 1$, $1 \leq n \leq k$, $0 \leq m \leq \min\{n, k-n\}$.

Novamente, a aplicação do Lema 5.5 juntamente com as condições expressas em (5.16) à equação (5.20) nos leva ao seguinte resultado:

Proposição 5.7 *Assuma as condições (5.16) para algum $k_0 \geq 1$. Assuma também que o polinômio $\mathcal{P}_{k_0}$ definido em (5.18) admita um zero simples e que a constante $c^{(0)}$ seja escolhida como esse zero. Então, para todo $j \geq 1$, temos*

$$c^{(j)} = \frac{1}{\mathcal{P}'_{k_0}(c^{(0)})} \mathcal{G}_j^{k_0}(c^{(0)}, \ldots, c^{(j-1)}; Q, Q^{-1}),$$

onde a função $\mathcal{G}_j^{k_0}$ está definida em (5.24) e depende somente das constantes $c^{(0)}, \ldots, c^{(j-1)}$, e dos coeficientes de Fourier de Q e Q^{-1}. □

Prova. Aplicando o Lema 5.5 à equação (5.20), obtemos

$$\sum_{n=1}^{k_0} \sum_{m=0}^{\min\{n,k_0-n\}} G_{n,m} \mathcal{C}_{n,m}^{k_0+1+j} - \sum_{n=\left\lfloor \frac{k_0}{2} \right\rfloor+1}^{k_0} \sum_{m=\min\{n,k_0-n\}+1}^{\min\{n,k_0+1+j-n\}} G_{n,m} \mathcal{C}_{n,m}^{k_0+1+j}$$

$$+ \sum_{n=k_0-1}^{k_0+1+j} \sum_{m=0}^{\min\{n,k_0+1+j-n\}} G_{n,m} \mathcal{C}_{n,m}^{k_0+1+j} + \Delta(k_0+1+j) G_{\frac{k_0+j}{2},\frac{k_0+2+j}{2}} = 0.$$

É claro que a primeira soma acima se anula identicamente devido às condições (5.16). Na segunda soma, como $k_0/2 < n \leq k_0$, segue que $\min\{n, k_0 - n\} = k_0 - n$. De fato, $k_0 - n =$

$\min\{n, k_0 - n\} \Leftrightarrow n \geq k_0/2$. Portanto, a última equação pode ser escrita como

$$0 = \sum_{n=\lfloor \frac{k_0}{2} \rfloor + 1}^{k_0} G_{n,k_0+1-n} \mathcal{C}_{n,k_0+1-n}^{k_0+1+j} + \sum_{n=\lfloor \frac{k_0}{2} \rfloor + 1}^{k_0} \sum_{m=k_0+2-n}^{\min\{n,k_0+1+j-n\}} G_{n,m} \mathcal{C}_{n,m}^{k_0+1+j}$$

$$+ \sum_{n=k_0+1}^{k_0+1+j} \sum_{m=0}^{\min\{n,k_0+1+j-n\}} G_{n,m} \mathcal{C}_{n,m}^{k_0+1+j} + \Delta(k_0+1+j)\, G_{\frac{k_0+j}{2}, \frac{k_0+2+j}{2}} . \tag{5.22}$$

Inserimos agora o termo $G_{k_0+1,0}\mathcal{C}_{k_0+1,0}^{k_0+1+j}$ da terceira soma acima na primeira soma. Assim, ficamos com

$$0 = \sum_{n=\lfloor \frac{k_0}{2} \rfloor + 1}^{k_0+1} G_{n,k_0+1-n} \mathcal{C}_{n,k_0+1-n}^{k_0+1+j} + \sum_{n=\lfloor \frac{k_0}{2} \rfloor + 1}^{k_0} \sum_{m=k_0+2-n}^{\min\{n,k_0+1+j-n\}} G_{n,m} \mathcal{C}_{n,m}^{k_0+1+j}$$

$$+ \sum_{n=k_0+2}^{k_0+1+j} G_{n,0} \mathcal{C}_{n,0}^{k_0+1+j} + \sum_{n=k_0+1}^{k_0+1+j} \sum_{m=1}^{\min\{n,k_0+1+j-n\}} G_{n,m} \mathcal{C}_{n,m}^{k_0+1+j}$$

$$+ \Delta(k_0+1+j)\, G_{\frac{k_0+j}{2}, \frac{k_0+2+j}{2}} . \tag{5.23}$$

A primeira soma na equação acima tem uma parte proporcional à $c^{(j)}$. De fato,

$$\mathcal{K}_{n,k_0+1-n}^{k_0+1+j} = \left\{ k_1 \in \mathbb{N}, \ldots, k_{2n-k_0} \in \mathbb{N} : \sum_{i=1}^{2n-k_0} k_i = j \right\},$$

de tal forma que pelo menos um $k_i = j$ e os outros $2n - k_0 - 1$ são nulos (note que existem $2n - k_0$ possibilidades para $k_i = j$). É claro que existem outras soluções tais que $k_i < j$, mas aí todos os $c^{(k_i)}$ já são conhecidos do procedimento iterativo. Portanto, escrevemos a primeira soma de (5.23) como

$$c^{(j)} \left[\sum_{n=\lfloor \frac{k_0}{2} \rfloor + 1}^{k_0+1} G_{n,k_0+1-n} \, (2n - k_0) \, (c^{(0)})^{2n-k_0-1} \right] + \mathcal{F}_1^{k_0,j}(c^{(0)}, \ldots, c^{(j-1)}; Q, Q^{-1}),$$

onde, de acordo com a definição (5.21) para $\widehat{\mathcal{K}}_{n,m}^{k}$, temos

$$\mathcal{F}_1^{k_0,j}(c^{(0)}, \ldots, c^{(j-1)}; Q, Q^{-1}) := \sum_{n=\lfloor \frac{k_0}{2} \rfloor + 1}^{k_0+1} G_{n,k_0+1-n} \sum_{\widehat{\mathcal{K}}_{n,k_0+1-n}^{k_0+1+j}} \prod_{i=1}^{2n-k_0} c^{(k_i)} .$$

Agora a segunda soma em (5.23) somente depende $c^{(0)}, \ldots, c^{(j-1)}$. De fato, como para todo $\lfloor k_0/2 \rfloor + 1 \leq n \leq k_0$ e $m = k_0 + 1 + n$ na primeira soma de (5.23) obtivemos no máximo $c^{(j)}$, adicionando uma bola preta a mais como fizemos em (5.23) resultará no máximo em $c^{(j-1)}$.

Portanto, é possível escrever

$$\mathcal{F}_2^{k_0,j}(c^{(0)},\ldots,c^{(j-1)};Q,Q^{-1}) := \sum_{n=\lfloor \frac{k_0}{2}\rfloor+1}^{k_0} \sum_{m=k_0+2-n}^{\min\{n,k_0+1+j-n\}} G_{n,m}\,\mathcal{C}_{n,m}^{k_0+1+j}\,.$$

Finalmente, a terceira e quarta soma em (5.23) somente dependem de $c^{(0)},\ldots,c^{(j-1)}$ pois $j-1$ é o maior rótulo de ordem que aparece em $\mathcal{C}_{n,m}^{k_0+1+j}$. Isso ocorre para os menores valores de n e m, a saber, $n=k_0+2$, $m=0$ e $n=k_0+1$, $m=1$. Em ambos os casos, $\sum_{i=1}^{k_0+2} k_i = k_0+1+j-(k_0+2)=j-1$, de tal forma que $k_i \leq j-1$, $\forall i$. Assim, definimos

$$\mathcal{F}_3^{k_0,j}(c^{(0)},\ldots,c^{(j-1)};Q,Q^{-1}) := \sum_{n=k_0+2}^{k_0+1+j} G_{n,0}\,\mathcal{C}_{n,0}^{k_0+1+j} + \sum_{n=k_0+1}^{k_0+1+j} \sum_{m=1}^{\min\{n,k_0+1+j-n\}} G_{n,m}\,\mathcal{C}_{n,m}^{k_0+1+j}\,.$$

Agora, seja

$$\begin{aligned}\mathcal{G}^{k_0,j}(c^{(0)},\ldots,c^{(j-1)};Q,Q^{-1}) &:= -\sum_{i=1}^{3}\mathcal{F}_i^{k_0,j}(c^{(0)}\ldots,c^{(j-1)};Q,Q^{-1}) \\ &\quad - \Delta(k_0+1+j)\,G_{\frac{k_0+j}{2},\frac{k_0+2+j}{2}}\,. \qquad (5.24)\end{aligned}$$

Está claro de (5.23) e de nossas considerações prévias que $c^{(j)}$ pode ser determinada iterativamente a partir da equação linear

$$c^{(j)}\left[\sum_{n=\lfloor \frac{k_0}{2}\rfloor+1}^{k_0+1} G_{n,k_0+1-n}\,(2n-k_0)\,(c^{(0)})^{2n-k_0-1}\right] = \mathcal{G}^{k_0,j}(c^{(0)}\ldots,c^{(j-1)};Q,Q^{-1})\,,$$

para todo $j \geq 1$. A soma entre chaves acima é relacionada com o polinômio $\mathcal{P}_{k_0}$ definido em (5.18). Mais precisamente,

$$\sum_{n=\lfloor \frac{k_0}{2}\rfloor+1}^{k_0} G_{n,k_0+1-n}\,(2n-k_0)\,(c^{(0)})^{2n-k_0-1} = \frac{d}{dx}\mathcal{P}_{k_0}(x)\Big|_{c^{(0)}} \equiv \mathcal{P}'_{k_0}(c^{(0)})\,.$$

Assim, para determinarmos $c^{(j)}$ é necessário que $\mathcal{P}'_{k_0}(c^{(0)}) \neq 0$, o que significa dizer que a constante $c^{(0)}$ deve ser fixada como um zero simples de $\mathcal{P}_{k_0}$. ■

5.2.3 Resultados

Concluímos enunciando um teorema que generaliza as condições (I), (II) e (III) previamente discutidas, dando uma solução geral para (5.13) em termos de apenas uma condição suficiente.

Teorema 5.8 *Suponha que as k_0 primeiras equações de (5.13) sejam identicamente nulas, $k_0 \geq 1$. Suponha ainda que o polinômio $\mathcal{P}_{k_0}$ definido em (5.18), não identicamente nulo,*

admita pelo menos uma raiz simples. Então, (5.13) apresenta uma solução iterativa $c^{(0)} \to c^{(1)} \to \cdots \to c^{(j)} \to \cdots$ *dada por* $c^{(0)}$ *como umas das raízes simples de* $\mathcal{P}_{k_0}$ *e*

$$c^{(j)} = \frac{1}{\mathcal{P}'_{k_0}(c^{(0)})} \mathcal{G}_j^{k_0}(c^{(0)}, \ldots, c^{(j-1)}; Q, Q^{-1}), \quad \forall j \geq 1,$$

onde $\mathcal{G}_j^{k_0}$ *está definido em (5.24).* □

Note do teorema anterior que (5.13) tem uma solução desde que $\mathcal{P}_{k_0}$ tenha um zero simples. É claro que isso dependerá dos coeficientes G_{n,k_0+1-n}, $\lfloor k_0/2 \rfloor + 1 \leq n \leq k_0 + 1$, que definem $\mathcal{P}_{k_0}$. Por exemplo, se k_0 é ímpar e se $G_{\frac{k_0+1}{2},\frac{k_0+1}{2}} \neq 0$ (que corresponde ao coeficiente em x de $\mathcal{P}_{k_0}$), então $c^{(0)} = 0$ é um zero simples de $\mathcal{P}_{k_0}$ e o problema está resolvido. Entretanto, $c^{(0)} = 0$ nunca pode ser um zero simples de $\mathcal{P}_{k_0}$ se k_0 é par. De fato, primeiramente se $G_{\frac{k_0}{2},\frac{k_0+2}{2}} \neq 0$, $c^{(0)} = 0$ não é nem um zero de $\mathcal{P}_{k_0}$. Por outro lado, se $G_{\frac{k_0}{2},\frac{k_0+2}{2}} = 0$, $c^{(0)} = 0$ é no mínimo um zero de dupla multiplicidade de $\mathcal{P}_{k_0}$. É importante também notar que o Teorema 5.8 generaliza as condições (I), (II) e (III). De fato, a condição (II) implica tanto que a primeira equação de (5.13) seja identicamente nula, quanto que $\mathcal{P}_1$ tenha um zero simples, a saber $c^{(0)} = 0$. Já a condição (III) implica tanto que a primeira e a segunda equação de (5.13) sejam identicamente nulas, quanto que $\mathcal{P}_2$ tenha zeros simples[2], a saber $\pm i\langle\overline{\mathcal{Q}_3}\rangle/\langle\mathcal{Q}_3\rangle$.

Uma vez resolvido o problema geral de se determinar o conjunto $\{c^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, podemos estudar a questão da convergência em ε da série definida pelos coeficientes $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$ de acordo com (5.5)-(5.6). No caso periódico esse estudo é simplificado pelo fato de não existirem pequenos denominadores na expansão para os coeficientes $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$ (note que nesse caso $\boldsymbol{\nu} = \nu \in \mathbb{Z}$). De fato, os propagadores se tornam $1/(i\omega\nu)$ que podem ser estimados pelo inverso de $|\omega|$ (apenas um número). A análise é bastante simples e segue as idéias contidas no trabalho [27]. Assim, temos provado o seguinte resultado:

Teorema 5.9 *Seja* f *real periódica de período* $2\pi/\omega$ *tal que* $\langle f \rangle = f_0 = 0$ *e analítica em uma faixa de largura* $\kappa > 0$ *ao longo do eixo real. Assuma ainda que* f *satisfaça as hipóteses do Teorema 5.8. Então, a série*

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} u_{\nu}^{(k)} e^{i\omega\nu t} \tag{5.25}$$

com os coeficientes $u_{\nu}^{(k)}$, $\nu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, *dados por (5.6) e* $u_0^{(k)} = c^{(k)}$ *dados de acordo com o Teorema 5.8.* $k \geq 0$, *é solução da equação de Riccati* $\dot{u} = \varepsilon(Q^{-1} + Qu^2)$. *Além disso, existem constantes* $C' > 0$, $C > 0$, *e* $0 < \kappa' < \kappa$ *tais que* $|u_{\nu}^{(k)}| \leq C'C^k e^{-\kappa'|\nu|}$, $\forall \nu \in \mathbb{Z}$ *e* $\forall k \geq 0$. *Logo, (5.25) converge absolutamente para todo* $|\varepsilon| < C^{-1}$. □

[2]Confira (5.15), página 91, e discussão preliminar.

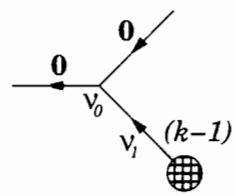
5.3 Expansão em Árvores da Freqüência Secular

Analisamos nesta seção, com um pouco mais de detalhes, a possível relação existente entre condições que extrapolam as hipóteses (I), (II) e (III) e efeitos de localização além da terceira ordem no parâmetro de perturbação. Essa, aliás, foi a motivação original[3] que nos levou a estudar condições gerais além de (I), (II) e (III), culminando nos teoremas enunciados na Subseção 5.2.3.

Começamos analisando a freqüência secular Ω. Reescrevemos (5.4) como (assumindo $f_0 = 0$)

$$\Omega = i \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Omega^{(k)}, \quad \text{com} \quad \Omega^{(k)} := \sum_{\nu_0+\nu_1=0} Q_{\nu_0} u_{\nu_1}^{(k-1)}, \quad k \geq 1. \tag{5.26}$$

Observação 5.10 *Os coeficientes $\Omega^{(k)}$ podem ser representados diagramaticamente de acordo com a figura ao lado. A bola hachurada representa a expansão completa do coeficiente $u_{\nu_1}^{(k-1)}$. Assim, a expansão de $\Omega^{(k)}$ será constituída por uma soma de árvores de ordem k, cada uma com a propriedade de que a linha superior conectada ao vértice de onde parte a linha raiz seja uma perna amputada. A Figura 5.2 ilustra a expansão diagramática de $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}$ e $\Omega^{(3)}$.*



Com o intuito de escrevermos formalmente $\Omega^{(k)}$ em termos de uma expansão diagramática conveniente, necessitamos introduzir mais algumas definições.

Definição 5.11 *Sejam $k \geq 1$, $1 \leq n \leq k$, $0 \leq m \leq \min\{n, k-n\}$ e $\widetilde{\mathcal{T}}_{n,m;0}$ de acordo com a Definição 5.3. Dizemos que uma árvore $\theta \in \widetilde{\mathcal{T}}_{n,m;0}$ é* c-classe *se θ tiver uma linha amputada conectada ao vértice de onde parte a linha raiz. Definimos $\widetilde{\mathcal{T}}^c_{n,m;0} \subseteq \widetilde{\mathcal{T}}_{n,m;0}$ como o conjunto de todas as árvores em $\widetilde{\mathcal{T}}_{n,m;0}$ que são c-classe*, i.e.,

$$\widetilde{\mathcal{T}}^c_{n,m;0} := \{\theta \in \widetilde{\mathcal{T}}_{n,m;0} \ : \ \theta \text{ é c-classe}\}.$$

Finalmente definimos $G^c_{1,0} := G_{1,0} = \langle Q \rangle$ e, para os demais valores de n e m,

$$G^c_{n,m} := \frac{1}{2} \sum_{\theta \in \widetilde{\mathcal{T}}^c_{n,m;0}} \mathrm{Val}(\theta).$$

Podemos notar que $G^c_{n,m}$ representa metade da soma de todas as possíveis árvores c-classe com n vértices e m bolas pretas tal que os $n+1-m$ pontos finais restantes são amputados e o momento através da linha raiz é nulo. □

A partir da Observação 5.10 e do definido acima, concluímos quase que imediatamente o seguinte resultado:

[3]Confira a Seção 5.1.

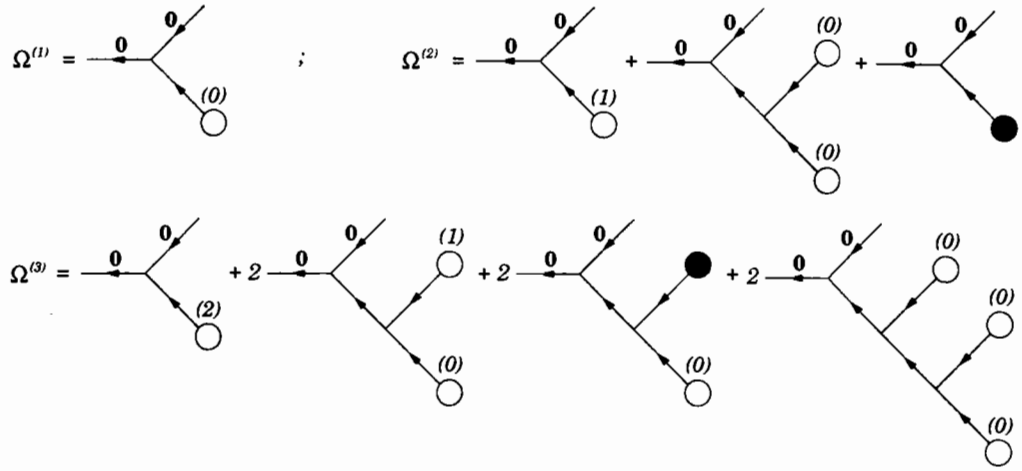


Figura 5.2: Expansão diagramática dos coeficientes $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}$ e $\Omega^{(3)}$ de acordo com (5.26).

Proposição 5.12 *Seja $k \geq 1$, então*

$$\Omega^{(k)} = \sum_{n=1}^{k} \sum_{m=0}^{\min\{n-1,k-n\}} G^c_{n,m} \sum_{(\mathcal{K}^k_{n,m})^c} \prod_{i=1}^{n-m} c^{(k_i)} + \Delta(k+1)\, G^c_{\frac{k}{2},\frac{k}{2}}\,,$$

onde $(\mathcal{K}^k_{n,m})^c := \{\, k_1 \in \mathbb{N}, \ldots, k_{n-m} \in \mathbb{N} \;:\; \sum_{i=1}^{n-m} k_i = k - (n+m) \,\}$. □

Para servir de ilustração, apliquemos a Proposição 5.12 para expandir $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}$ e $\Omega^{(3)}$. Temos, em acordo com a Figura 5.2,

$$\begin{aligned}
\Omega^{(1)} &= c^{(0)} G^c_{1,0}\,, \\
\Omega^{(2)} &= c^{(1)} G^c_{1,0} + (c^{(0)})^2 G^c_{2,0} + G^c_{1,1}\,, \\
\Omega^{(3)} &= c^{(2)} G^c_{1,0} + 2c^{(1)} c^{(0)} G^c_{2,0} + c^{(0)} G^c_{2,1} + (c^{(0)})^3 G^c_{3,0}\,.
\end{aligned}$$

Agora enunciaremos um resultado bastante importante para a discussão que segue. A demonstração do mesmo é um pouco extensa, de forma que não apresentaremos em detalhes aqui.

Proposição 5.13 *Para todos $1 \leq k \leq 5$, $1 \leq n \leq k$, $0 \leq m \leq \min\{n, k-n\}$, temos $G^c_{n,m} = \xi(n,m) G_{n,m}$, onde $\xi \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ depende apenas dos inteiros n e m.* □

Prova. Começamos com $k = 1$. Nesse caso só devemos analisar $G_{1,0}$ e $G^c_{1,0}$. Por definição $G^c_{1,0} = G_{1,0}$, donde segue a afirmativa trivialmente com $\xi(1,0) = 1$.

Consideremos agora $k = 2$. Devemos analisar $G_{1,1}$ e $G_{2,0}$ com $G^c_{1,1}$ e $G^c_{2,0}$. Comparando as árvores da Figura 5.1 com as árvores da Figura 5.2, concluímos trivialmente que $G^c_{1,1} = \frac{1}{2} G_{1,1}$ e $G^c_{2,0} = \frac{1}{2} G_{2,0}$. Assim, a afirmativa da proposição é válida com $\xi(1,1) = \xi(2,0) = \frac{1}{2}$.

Passemos agora para $k = 3$. Nesse caso, as novidades são $G_{2,1}$ e $G_{3,0}$, os quais devem ser comparados com $G^c_{2,1}$ e $G^c_{3,0}$. Vamos começar por $G_{2,1}$. Observe as Figuras 5.1 e 5.2. Note que

$G_{2,1}$ apresenta árvores que não aparecem em $G^c_{2,1}$. Entretanto, veremos que tais árvores são canceladas dentro de $G_{2,1}$, resultando na identidade $G^c_{2,1} = G_{2,1}$. De fato, o valor analítico de $G^c_{2,1}$ é

$$G^c_{2,1} = 2 \sum_{\nu_0+\nu_0'+\nu_1=0} \frac{Q_{\nu_0} Q_{\nu_0'} (Q^{-1})_{\nu_1}}{(i\omega\cdot\nu_1)[i\omega\cdot(\nu_0'+\nu_1)]} = -2 \sum_{\nu_0,\nu_1\neq 0} \frac{Q_{\nu_0} Q_{-\nu_0-\nu_1} (Q^{-1})_{\nu_1}}{(i\omega\cdot\nu_0)(i\omega\cdot\nu_1)}.$$

Já para $G_{2,1}$, temos

$$\begin{aligned} G_{2,1} &= 2 \sum_{\nu_0+\nu_0'+\nu_1=0} \frac{Q_{\nu_0} Q_{\nu_0'} (Q^{-1})_{\nu_1}}{(i\omega\cdot\nu_0')(i\omega\cdot\nu_1)} + 4 \sum_{\nu_0+\nu_0'+\nu_1=0} \frac{Q_{\nu_0} Q_{\nu_0'} (Q^{-1})_{\nu_1}}{(i\omega\cdot\nu_1)[i\omega\cdot(\nu_0'+\nu_1)]} \\ &= -2 \sum_{\nu_0,\nu_1\neq 0} \frac{Q_{\nu_0} Q_{-\nu_0-\nu_1} (Q^{-1})_{\nu_1}}{(i\omega\cdot\nu_0)(i\omega\cdot\nu_1)}. \end{aligned}$$

Dessas duas últimas expressões concluímos que $G^c_{2,1} = G_{2,1}$, ou seja, a afirmativa da proposição vale com $\xi(2,1) = 1$. A comparação entre $G_{3,0}$ e $G^c_{3,0}$ é mais simples. Uma análise gráfica a partir das representações de $G_{3,0}$ e $G^c_{3,0}$ mostra que $G^c_{3,0} = \frac{1}{2}G_{3,0}$, trivialmente. Assim, a proposição também é válida com $\xi(3,0) = \frac{1}{2}$.

Os casos $k = 4$ e $k = 5$ podem ser trabalhados, em essência, analogamente ao realizado anteriormente. Entretanto, devido ao maior número de árvores, cancelamentos analíticos como os apresentados no caso de $G_{2,1}$ e $G^c_{2,1}$ são difíceis de serem demonstrados. Na verdade, a melhor técnica para analisar os cancelamentos de árvores dentro de um mesmo conjunto $\widetilde{\mathcal{T}}_{n,m;0}$ (ou $\widetilde{\mathcal{T}}^c_{n,m;0}$) será apresentada no Capítulo 8, Seção 8.1, página 121, em um contexto um pouco diferente. Essa técnica permite determinar cancelamento entre árvores observando-se apenas os seus desenhos e certas propriedades de permutação entre suas sub-árvores. Não entraremos em detalhes aqui. Apenas afirmamos que com tal técnica conseguimos terminar a demonstração da proposição acima para os valores de k considerados. ■

A importância do resultado acima reside no fato de que, para todos $1 \leq k \leq 5$, $1 \leq n \leq k$, $0 \leq m \leq \min\{n, k-n\}$, se $G_{n,m} = 0$, então $G^c_{n,m} = 0$. Assim, como no Teorema 5.8, suponha que as k_0 primeiras equações de (5.13), $1 \leq k_0 \leq 5$, se anulem identicamente e que $\mathcal{P}_{k_0}$ tenha uma raiz simples. Nesse caso, isso implica que $G_{n,m} = 0$ para todos $1 \leq n \leq k_0$, $0 \leq m \leq \min\{n, k_0-n\}$, implicando também no fato de que $G^c_{n,m} = 0$, para a mesma variação dos índices n e m. Daí, pela Proposição 5.12, $\Omega^{(k)} = 0$ para todo $1 \leq k \leq k_0$, de forma que $\Omega = \mathcal{O}(\varepsilon^{k_0+1})$. É por isso que quando $k_0 = 1$ (equivalente à condição (II): $G_{1,0} = G_{2,0} = 0$, $G_{1,1} \neq 0$), tem-se $\Omega = \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ e que quando $k_0 = 2$ (equivalente à condição (III): $G_{1,0} = G_{1,1} = G_{2,0} = G_{3,0} = 0$, $G_{2,1} \neq 0$), tem-se $\Omega = \mathcal{O}(\varepsilon^3)$. Agora, pela Proposição 5.13, temos certeza de que quando $k_0 = 3$, $\Omega = \mathcal{O}(\varepsilon^4)$, quando $k_0 = 4$, $\Omega = \mathcal{O}(\varepsilon^5)$ e, finalmente, quando $k_0 = 5$, $\Omega = \mathcal{O}(\varepsilon^6)$, todos efeitos mais fortes de localização dinâmica, situações controladas graças ao Teorema 5.9.

Por fim, enunciamos aqui uma conjectura que generaliza a Proposição 5.13, relacionando a hipótese dos Teoremas 5.8 e 5.9 com um efeito de localização tal que $\Omega = \mathcal{O}(\varepsilon^{k_0+1})$, para

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ex. 1
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO

qualquer $k_0 \geq 1$.

Conjectura 5.14 *Para todos* $k \geq 1$, $1 \leq n \leq k$, $0 \leq m \leq \min\{n, k-n\}$, *temos* $G^c_{n,m} = \xi(n,m)G_{n,m}$, *onde* $\xi \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ *depende apenas dos inteiros* n *e* m. $\square$

* * *

Parte II

Estabilidade para a Equação de Hill Perturbada

Capítulo 6

Introdução à Parte II

Nesta parte da tese aplicaremos métodos perturbativos análogos aos utilizados na parte anterior para estudar um sistema um pouco mais geral do que o já considerado. Consideramos uma versão quase-periodicamente perturbada de uma dada equação real de Hill e estudamos o problema da estabilidade das soluções quase-periódicas em função do parâmetro de perturbação (detalhes na Seção 6.2). O fato de considerarmos tal sistema advém da relação existente entre o sistema de dois-níveis estudado anteriormente e uma dada versão complexa quase-periódica da equação de Hill, a saber, dada por (1.20), página 11 (confira [2] para uma dedução completa). Uma vez que as técnicas perturbativas elaboradas para a análise do primeiro sistema se mostraram tão frutíferas, imaginamos que as mesmas poderiam ser de um certa forma adaptadas para o tratamento geral de uma tal equação de Hill perturbada.

Iniciamos este capítulo com uma breve exposição sobre a teoria geral da classe de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com coeficientes periódicos. Damos especial ênfase à existência das chamadas regiões de estabilidade (soluções limitadas) e instabilidade (soluções ilimitadas) existentes no espaço de parâmetros de tais equações. Em seguida, apresentamos especificamente o tipo de problema o qual iremos resolver. Por fim, enunciamos um teorema detalhado que resume nossos principais resultados (confira Teorema 6.4). Os capítulos subseqüentes são dedicados à prova de tal teorema e seguem de perto o exposto no trabalho [27], escrito em colaboração com o Prof. Guido Gentile.

6.1 A Equação de Hill

Aqui apresentamos a teoria geral da chamada *equação de Hill* com base no estudado nas referências [51] e [46]. Descrevemos abaixo algumas idéias e resultados básicos extraídos de [51]. Objetivamos com isso dar uma base conceitual ao problema exposto na Seção 6.2.

Qualquer equação diferencial linear homogênea de segunda ordem com coeficientes reais e periódicos pode ser reduzida a uma equação do tipo de Hill. Uma questão específica que surge

na teoria da equação de Hill é quanto ao problema da existência de soluções periódicas. Alguns teoremas relacionados a esse problema serão agora enunciados e discutidos.

Seja $q(t)$ uma função (real ou complexa) definida para todo valor real de t. Assumimos que $q(t)$ seja contínua por pedaços em todo intervalo finito e também periódica de período mínimo π. Queremos dizer com isso que para $t \in \mathbb{R}$, vale $q(t+\pi) = q(t)$ e se p for um número com $0 < p < \pi$, então existe pelo menos um intervalo real I tal que $q(t+p) \neq q(t)$ para $t \in I$.

Se $q(t)$ tiver as propriedades mencionadas acima, então a equação diferencial

$$\ddot{\phi}(t) + q(t)\phi(t) = 0 \tag{6.1}$$

é conhecida como *equação de Hill*. É bem sabido que (6.1) tem duas soluções continuamente diferenciáveis $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ que são univocamente determinadas pelas condições

$$\phi_1(0) = 1\,,\ \dot{\phi}_1(0) = 0\,,\ \phi_2(0) = 0\,,\ \dot{\phi}_2(0) = 1\,. \tag{6.2}$$

Essas soluções são chamadas de *soluções normalizadas* ou *soluções fundamentais* de (6.1). A *equação característica* associada à (6.1) é construída a partir de $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ como

$$\rho^2 - [\phi_1(\pi) + \dot{\phi}_2(\pi)]\rho + 1 = 0\,. \tag{6.3}$$

O *expoente característico* α associado à (6.1) é definido como o número (real ou complexo) que satisfaz as equações

$$\exp(i\alpha\pi) = \rho_1\,, \quad \exp(-i\alpha\pi) = \rho_2\,,$$

onde ρ_1 e ρ_2 são as raízes da equação característica (6.3). É claro que α está definido a menos de um múltiplo inteiro de 2. Além disso, $2\cos(\alpha\pi) = \phi_1(\pi) + \dot{\phi}_2(\pi)$ e $\rho_1\rho_2 = 1$. Podemos agora enunciar o seguinte resultado:

Teorema 6.1 (Floquet) *Se as raízes ρ_1 e ρ_2 da equação característica (6.3) forem diferentes uma da outra, então a equação de Hill (6.1) tem duas soluções linearmente independentes*

$$\psi_1(t) = e^{i\alpha t}\varphi_1(t)\,, \quad \psi_2(t) = e^{-i\alpha t}\varphi_2(t)\,,$$

onde $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ são periódicas de período π. Se $\rho_1 = \rho_2$, então a equação (6.1) tem uma solução não-trivial de período π (quando $\rho_1 = \rho_2 = 1$) ou 2π (quando $\rho_1 = \rho_2 = -1$). Sejam $\varphi(t)$ tal solução periódica e $\phi(t)$ outra solução linearmente independente à $\varphi(t)$. Então,

$$\phi(t+\pi) = \rho_1\phi(t) + C\,\varphi(t)\,, \quad C \text{ constante.}$$

Além disso, $C = 0$ é equivalente a $\phi_1(\pi) + \dot{\phi}_2(\pi) = \pm 2$, $\phi_2(\pi) = 0$, $\dot{\phi}_1(\pi) = 0$. □

As importantes conclusões do bem conhecido teorema acima são:

- Quando $\rho_1 \neq \rho_2$, se α for real, então existirá uma cota superior M para o valor absoluto $|\phi(t)|$ de *toda* solução de (6.1). Além disso, M dependerá apenas das condições iniciais para ϕ e não de t.

- Se α não for real, então existirá uma solução não-trivial ilimitada $\phi(t)$ de (6.1).
- Quando $\rho_1 = \rho_2$, para que *toda* solução de (6.1) seja limitada, é necessário e suficiente que $\phi_1(\pi) + \dot{\phi}_2(\pi) = \pm 2$, $\phi_2(\pi) = 0$, $\dot{\phi}_1(\pi) = 0$.

Quando todas as soluções de (6.1) forem limitadas, diremos que elas são *estáveis*; de outra forma diremos que elas são *instáveis*. Portanto, não é difícil concluir o seguinte

Teste de Estabilidade. *As soluções de (6.1) são estáveis se e somente se*

$$[\phi_1(\pi) + \dot{\phi}_2(\pi)] \in \mathbb{R} \quad e \quad |\phi_1(\pi) + \dot{\phi}_2(\pi)| < 2$$

ou

$$\phi_1(\pi) + \dot{\phi}_2(\pi) = \pm 2 \quad e \quad \phi_2(\pi) = \dot{\phi}_1(\pi) = 0\,.$$

Vamos agora considerar a equação de Hill (6.1) em sua versão padrão:

$$\ddot{\phi}(t) + [\lambda + Q(t)]\phi(t) = 0\,, \tag{6.4}$$

onde λ é um parâmetro real e $Q(t)$ é real e periódica com período π. Um dos problemas principais associado à equação acima está em se determinar quais os valores de λ para os quais as soluções de (6.4) são estáveis. Outro problema refere-se à determinação dos valores de λ para os quais (6.4) tenha uma solução de período π ou 2π.

Sejam $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$ as soluções normalizadas de (6.4) satisfazendo (6.2). Para enfatizarmos a dependência em λ das soluções normalizadas, escreveremos $\phi_1(t;\lambda)$ e $\phi_2(t;\lambda)$ ao invés de simplesmente $\phi_1(t)$ e $\phi_2(t)$. Como o teste de estabilidade para a equação (6.4) vai depender do valor de $\phi_1(\pi;\lambda) + \dot{\phi}_2(\pi;\lambda)$, é conveniente definirmos

$$\Delta(\lambda) := \phi_1(\pi;\lambda) + \dot{\phi}_2(\pi;\lambda)\,. \tag{6.5}$$

Enunciaremos agora um teorema central relacionado aos problemas descritos acima acerca das soluções de (6.4).

Teorema 6.2 (Oscilação) *Para toda equação diferencial da forma (6.4), existem duas seqüências infinitas crescentes de números reais*

$$\lambda_0\,,\ \lambda_1\,,\ \lambda_2\,,\ \ldots \qquad e \qquad \lambda_1'\,,\ \lambda_2'\,,\ \lambda_3'\,,\ \ldots$$

tal que (6.4) tem uma solução de período π se e somente se $\lambda = \lambda_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, e uma solução de período 2π se e somente se $\lambda = \lambda_n'$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Os λ_n são as raízes da equação $\Delta(\lambda) = 2$ e os λ_n' são as raízes da equação $\Delta(\lambda) = -2$. Além disso, λ_n e λ_n' satisfazem as desigualdades

$$\lambda_0 < \lambda_1' \le \lambda_2' < \lambda_1 \le \lambda_2 < \lambda_3' \le \lambda_4' < \lambda_3 \le \lambda_4 < \cdots \tag{6.6}$$

e as relações

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda_n} = 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda'_n} = 0\,.$$

As soluções de (6.4) são estáveis nos intervalos

$$(\lambda_0,\, \lambda'_1)\,,\ \ (\lambda'_2,\, \lambda_1)\,,\ \ (\lambda_2,\, \lambda'_3)\,,\ \ (\lambda'_4,\, \lambda_3)\,,\ \ \ldots\,. \tag{6.7}$$

Nos extremos desses intervalos as soluções de (6.4) são, em geral, instáveis. Em particular, isso é sempre verdade para $\lambda = \lambda_0$. As soluções de (6.4) são estáveis para $\lambda = \lambda_{2n+1}$ ou $\lambda = \lambda_{2n-2}$ se e somente se $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2}$, e elas são estáveis para $\lambda = \lambda'_{2n+1}$ ou $\lambda = \lambda'_{2n+2}$ se e somente se $\lambda'_{2n+1} = \lambda'_{2n+2}$. □

A demonstração do teorema acima baseia-se na aplicação do teste de estabilidade prescrito na página anterior à função $\Delta(\lambda)$ definida em (6.5). É claro que isso exige o estudo do comportamento analítico de Δ em função do parâmetro λ. A análise completa é apresentada em [51].

Os números reais λ_n são chamados de *valores característicos de primeiro tipo* e os λ'_n são chamados de *valores característicos de segundo tipo*. Os intervalos (6.7) no eixo real λ são ditos *intervalos de estabilidade*; um extremo de um tal intervalo pertencerá a ele se e somente se (6.4) possuir soluções estáveis para o valor correspondente de λ. De forma análoga, definimos os *intervalos de instabilidade*. Os intervalos de estabilidade e instabilidade são ordenados de uma maneira natural. Confira a Figura 6.1 para uma representação gráfica. O intervalo de instabilidade $(-\infty, \lambda_0)$ sempre estará presente. O mesmo será chamado de *intervalo de instabilidade de ordem zero*. O intervalo (λ'_1, λ'_2) será chamado de *primeiro intervalo de instabilidade*. Observe que, de acordo com o teorema acima, nenhum intervalo de estabilidade ou de instabilidade pode se contrair a um único ponto. Os intervalos de estabilidade não podem desaparecer, mas dois deles podem se combinar para formar um único se $\lambda_{2n+1} = \lambda_{2n+2}$ ou $\lambda'_{2n+1} = \lambda'_{2n+2}$. Entretanto, pode ocorrer que todos os intervalos de instabilidade (com exceção do intervalo de ordem zero) desapareçam. Isso de fato ocorre se $Q(t)$ for constante (única possibilidade). Um resultado nesse sentido é devido à Liapounoff.

Teorema 6.3 (Liapounoff) *Seja a função $p(t) \neq 0$ não-negativa, contínua por pedaços e periódica de período π. Então, todas as soluções de $\ddot{\phi}(t) + p(t)\phi(t) = 0$ são limitadas para todos os valores de t se*

$$\pi \int_0^\pi p(t)\, dt \leq 4\,.$$

Essa condição é a melhor possível no sentido de que, para qualquer $\epsilon > 0$, existe uma ***função*** *$p_0(t) \neq 0$ não-negativa, contínua por pedaços e periódica de período π, satisfazendo*

$$\pi \int_0^\pi p_0(t)\, dt < 4 + \epsilon\,,$$

tal que pelo menos uma solução de $\ddot{\phi}(t) + p_0(t)\phi(t) = 0$ é ilimitada quando $t \to \pm\infty$. □

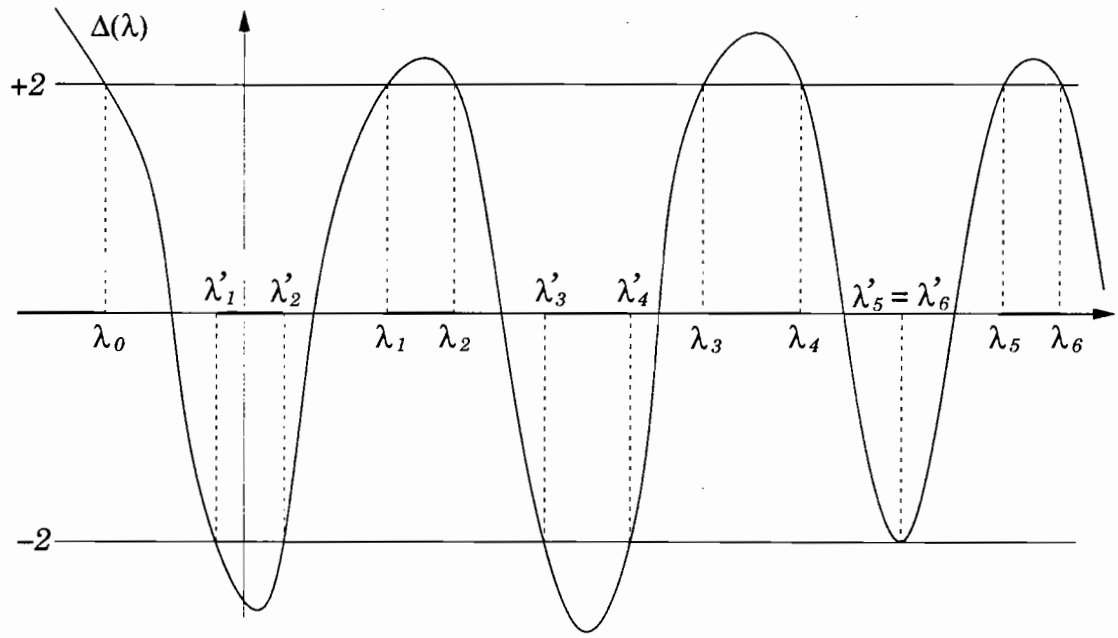


Figura 6.1: Gráfico da função $\Delta(\lambda)$ associada à equação (6.4). Mostramos a localização dos valores característicos de primeiro tipo λ_n (raízes de $\Delta(\lambda) = +2$) e de segundo tipo λ'_n (raízes de $\Delta(\lambda) = -2$). Note que λ_n e λ'_n se distribuem conforme (6.6). Os intervalos de instabilidade são apresentados em destaque no eixo real λ. Observe que o quinto intervalo de instabilidade desapareceu pois $\lambda'_5 = \lambda'_6$. Assim, os intervalos de estabilidade (λ_4, λ'_5) e (λ'_6, λ_5) se fundiram em um único intervalo (λ_4, λ_5), onde todas as soluções de (6.4) são estáveis.

O estudo dos intervalos de estabilidade e instabilidade associados à (6.4) é rico e muitos resultados nesse sentido são apresentados e demonstrados em [51]. Tanto métodos exatos quanto métodos perturbativos são considerados na dedução de tais resultados.

É interessante notar que a equação de Hill (6.4) pode ser escrita como $L_Q\phi = \lambda\phi$, onde L_Q é o operador $-\partial_t^2 - Q(t)$ agindo, por exemplo, no espaço de Hilbert $L^2(\mathbb{R}, dt)$. Agora L_Q nada mais é do que um operador de Schrödinger com um potencial periódico. Assim, o problema dos intervalos de estabilidade e instabilidade associados à (6.4) reduz-se à análise espectral de L_Q. São muitos os textos da literatura que tratam desse problema. É claro que uma forte base em análise funcional é exigida nesse caso. O mais interessante é considerar o operador L_Q quando Q é um potencial quase-periódico. A análise espectral desse operador está intimamente relacionado com o estudo de soluções quase-periódicas para a equação de Hill analisada nesta parte desta tese. Assim, seria interessante considerar a teoria espectral dos operadores de Schrödinger quase-periódicos a fim de compararmos os seus resultados com aqueles obtidos através dos métodos aqui empregados. Algumas referências que se relacionam com esses propósitos são [47, 56, 37, 42].

6.2 Estabilidade das Soluções no Sistema Perturbado

Nesta tese vamos considerar a equação de Hill unidimensional com uma perturbação quase-periódica

$$\ddot{\phi} + (p_0(t) + \varepsilon p_1(t))\,\phi \;=\; 0\,, \tag{6.8}$$

onde p_0 e p_1 são duas funções analíticas reais, sendo a primeira periódica com freqüência ω_0 e a segunda quase-periódica com vetor de freqüência $\underline{\omega}_1 \in \mathbb{R}^D$, para um inteiro $D \geq 1$. Nenhuma suposição adicional é feita sobre a equação além do requerimento que o parâmetro real ε seja pequeno e que a equação não perturbada (*i.e.*, para $\varepsilon \equiv 0$) tenha um sistema fundamental de soluções quase-periódicas reais.

Essa equação tem sido extensivamente estudada para p_0 constante, também em conexão com o espectro da equação de Schrödinger correspondente $\ddot{\phi} + \varepsilon V(\underline{\omega}_1 t)\phi = E\phi$, com V analítica e periódica em seus argumentos; veja, por exemplo, referências [41, 55, 42, 47, 56, 53]. Também mencionamos as recentes [37] e [38], onde algumas propriedades dos gaps e das regiões de instabilidade foram investigadas.

Estamos interessados no problema de estudar a conservação dos movimentos quase-periódicos para ε diferente de zero porém suficientemente pequeno. Certamente a equação (6.8) pode ser considerada como vinda de um sistema Hamiltoniano autônomo com $d = D + 2$ graus de liberdade, descrito pela Hamiltoniana

$$H \;=\; \Omega_0 A + \omega_0 A_0 + \underline{\omega}_1 \cdot \underline{A}_1 + \varepsilon p_1(\underline{\alpha}_1)\, f(A,\, A_0,\, \alpha,\, \alpha_0), \tag{6.9}$$

onde $(A,\, A_0,\, \underline{A}_1,\, \alpha,\, \alpha_0,\, \underline{\alpha}_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^D \times \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \mathbb{T}^D$ são variáveis angulares da ação, e f depende do potencial periódico p_0. Por exemplo, se p_0 é uma constante, digamos $p_0 = 1$, então as variáveis $(A_0,\, \alpha_0)$ desaparecem e $f(A,\, \alpha) = 2A\cos^2\alpha$. Em geral, a mudança de variáveis que leva a (6.9) é um pouco mais complicada, mas pode ser feita (confira, por exemplo, às referências [39, 40]). Além disso, em tais casos a função f ainda é linear nas variáveis de ação. Assim, sistemas como (6.9) não são típicos na teoria KAM, porque a perturbação não remove a isocronia. O que geralmente se faz é estudar o comportamento das soluções, em particular para entender se elas são limitadas (quase-periódicas) ou ilimitadas (linear ou exponencialmente crescentes), ao variarmos os parâmetros que caracterizam o potencial externo. No caso da equação Schrödinger, isso pode ser feito para um potencial fixo variando a energia, que representa um parâmetro livre extra, e podemos obter informação a respeito do espectro. Em [40] isso é feito para soluções limitadas, obtendo-se condições sobre E que caracterizem o espectro do operador de Schrödinger correspondente.

Aqui, estamos interessados em um caso diferente, o qual ainda não foi discutido na literatura. Mais precisamente, consideramos o caso em que o potencial é fixo, e os parâmetros de p_0 são tais que as soluções fundamentais da equação de Hill correspondente, $\ddot{\phi} + p_0(t)\,\phi = 0$, sejam quase-periódicas (isso significa que estamos dentro das regiões de estabilidade). Assim, para $\varepsilon = 0$, temos $d = D + 2$ freqüências fundamentais $\underline{\omega}_1$, ω_0, Ω_0, onde Ω_0 é a freqüência própria

da equação de Hill não perturbada. Então, queremos estudar se as soluções se mantém quase-periódicas quando a perturbação é inserida. Espera-se que a freqüência própria do sistema mude, como um efeito da perturbação.

Uma vez que o sistema é, de fato, uma perturbação de um sistema isócrono e não temos nenhum parâmetro livre para ajustar, ou a freqüência própria é mudada em alguma ordem de perturbação ou ela nunca muda (se dispuséssemos de um parametro aditivo extra E, como no caso da equação de Schrödinger, poderíamos usar tal parâmetro ao invés de ε para alterar a freqüência própria do sistema, como seria possível em nosso caso requerendo que a média de p_1 fosse não nula). A consideração de todas as possibilidades requer uma análise cuidadosa, que pode ser evitada assumindo alguma condição de não-degenerescência sobre a perturbação com o objetivo de controlar a mudança das freqüências. Por condição de não-degenerescência queremos dizer o seguinte: veremos que na construção da solução quase-periódica precisaremos checar, a cada passo iterativo, se a média de uma certa função dependente de p_1 se anula ou não e, de acordo com essa propriedade, o algoritmo deverá ser mudado (por exemplo, no primeiro passo tal propriedade é equivalente a considerar se a média de p_1 é nula ou não). Portanto, em algum passo impomos alguma condição de não-degenerescência sobre p_1 requerendo que a média da função correspondente naquele passo seja não nula (mais precisamente, confira a Observação 8.13, página 128).

Voltando ao nosso problema, fixamos o toro não perturbado e estudamos para quais valores de ε (suficientemente pequenos) tal toro é conservado. Em particular, estamos interessados na dependência em ε do toro conservado: achamos que o toro será definido para ε em um conjunto de Cantor de medida relativa grande e, para tais valores de ε, o sistema se torna redutível, ou seja, conjugado a um fluxo constante [49]. Também podemos dar um significado às séries perturbativas através de um procedimento de resoma adequado, de maneira análoga a que foi feita em contextos semelhantes, como nas referências [27, 28, 44].

Como aplicação física de (6.8), pode-se pensar na equação de Hill para o movimento da lua perturbada pela presença de outros planetas (na aproximação onde esses últimos se movimentam em suas órbitas de Kepler, e apenas a influência deles na Lua é levado em consideração). Para uma introdução ao problema de Hill em astronomia podemos nos referir ao clássico livro-texto de Szebehely [57]. Podemos também mencionar um artigo devido a Avron e Simon [34], no qual a teoria da equação de Hill quase-periódica é aplicada ao problema dos anéis de Saturno, mesmo que tal aplicação seja mais no espírito de operadores de Schrödinger quase-periódicos (no sentido de que os autores do trabalho mencionado consideram um parâmetro livre que faz o papel da energia com o intuito de estudar a estrutura estriada complexa dos anéis). É mais provável que o problema de estabilidade para um sistema de muitos-corpos consistindo de Saturno, uma partícula de poeira teste e os satélites de Saturno (considerados como perturbações) poderia ser estudado aplicando-se a teoria desenvolvida aqui.

Assumimos que (6.8) para $\varepsilon = 0$ tenha duas soluções linearmente independentes (soluções

fundamentais) que sejam quase-periódicas. Pelo Teorema de Floquet, existem duas tais soluções da forma $\phi_1(t) = e^{i\Omega_0 t} w_1(t)$ e $\phi_2(t) = e^{i\Omega_0 t} w_2(t)$, com w_1 e w_2 ambas periódicas com período $2\pi/\omega_0$ e $\Omega_0 \in \mathbb{R}$. Não estudamos diretamente a equação (6.8). Ao invés disso, escrevemos ϕ em termos de uma função u apropriada, para a qual uma equação diferencial de primeira ordem pode ser deduzida. De fato, fazendo

$$\phi_0(t) = \text{const.} \exp\left(i \int_0^t g_0(t')\,\mathrm{d}t'\right), \qquad Q(t) = \exp\left(-2i \int_0^t g_0(t')\,\mathrm{d}t'\right),$$

onde ϕ_0 é uma solução quase-periódica de (6.8) para $\varepsilon = 0$, com vetor de rotação (ω_0, Ω_0), onde a freqüência própria Ω_0 é a média de g_0, e definindo

$$\phi(t) = \phi_0(t) \exp\left(i \int_0^t g(t')\,\mathrm{d}t'\right), \qquad g(t) = i\varepsilon Q(t) u(t), \tag{6.10}$$

achamos que u deve resolver a equação (veja Seção 7.2, página 114, para detalhes)

$$\dot{u} = R + \varepsilon Q u^2, \qquad R = p_1 Q^{-1}, \tag{6.11}$$

que é uma equação diferencial ordinária não-linear, interessante por si só.

A vantagem desse procedimento é que podemos procurar por uma solução de (6.11) com o mesmo vetor de rotação $\boldsymbol{\omega} = (\underline{\omega}_1, \omega_0, \Omega_0)$ do sistema não perturbado, algo que não pode ser feito para o sistema não perturbado todo, porque espera-se que a freqüência própria Ω_0 mude (como normalmente acontece quando se perturba um sistema isócrono). Em princípio, poderia-se tentar desenvolver um método perturbativo de resoma diretamente para a equação (6.8), mas não esperamos nenhuma simplificação com esse *approach*.

Que tal solução $u(t)$ de (6.11) existe pode ser demonstrado, e isso é o núcleo desta parte da tese, desde que se assuma, além da óbvia condição Diophantina sobre $\boldsymbol{\omega}$, que é ε é suficientemente pequeno, digamos $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, e também que pertença a um conjunto de Cantor $\mathcal{E}$ adequado, de medida relativa grande em $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Isso significa que $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \text{meas}(\mathcal{E} \cap [-\varepsilon, \varepsilon])/2\varepsilon = 1$, onde meas denota medida de Lebesgue.

Para recuperar a solução $\phi(t)$ devemos expressá-la em termos de $u(t)$. Usando as relações dadas em (6.10) percebe-se que, primeiro, a solução poderia ser ilimitada (se a parte imaginária da média de g não se anular), e segundo, mesmo se isso não ocorrer, uma freqüência extra $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \langle g \rangle$ apareceria, o que soaria estranho. Entretanto, pode-se checar que ambos os problemas são espúrios, porque $\langle g \rangle$ torna-se real e a dependência sobre o tempo da função $\phi(t)$ que, em princípio, poderia ser através das variáveis $\underline{\omega}_1 t$, $\omega_0 t$, $\Omega_0 t$, $\Omega_\varepsilon t$ (por construção) é, na verdade, apenas através das variáveis $\underline{\omega}_1 t$, $\omega_0 t$, $\Omega_\varepsilon t$, como formalmente observado no caso tratado em [2]. Em outras palavras, a dependência sobre $\Omega_0 t$ desaparece e isso significa que o toro maximal, que na ausência da perturbação tem vetor de rotação $(\underline{\omega}_1, \omega_0, \Omega_0)$, pode ser continuado para $\varepsilon \in \mathcal{E}$, e a última componente do vetor de rotação é transformada em uma quantidade dependente de ε, Ω_ε (que as outras componentes não podem mudar é óbvio.

pela forma das equações de movimento). Assim, a solução de (6.11) provê uma expansão perturbativa adequada para corrigir a freqüência própria do sistema: de fato, $\Omega_\varepsilon - \Omega_0 = \langle g \rangle$, e a função g é expressada em termos da solução u.

6.3 O Teorema Principal

Podemos agora exprimir nossos resultados a cerca do problemas considerados anteriormente no seguinte teorema:

Teorema 6.4 *Seja $p_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ real analítico e periódico com freqüência ω_0 e tal que as soluções fundamentais da equação de Hill correspondente $\ddot{\phi} + p_0(t)\,\phi = 0$ são quase-periódicas com freqüência própria $\Omega_0 \in \mathbb{R}$. Seja $p_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ real analítico e quase-periódico com vetor de freqüência $\underline{\omega}_1 \in \mathbb{R}^D$ para algum $D \in \mathbb{Z}_+$. Defina $\boldsymbol{\omega} := (\underline{\omega}_1, \omega_0, \Omega_0) \in \mathbb{R}^d$ com $d := D + 2$ e assuma que $\underline{m} \cdot \underline{\omega}_1 + n\omega_0 + 2\Omega_0 \neq 0$, $\forall(\underline{m}, n) \in \mathbb{Z}^{D+1}$ e, além disso*

$$|\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}| \geq \frac{C_0}{|\boldsymbol{\nu}|^\tau}, \quad \forall \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\},$$

para duas constantes fixas positivas $C_0 > 0$ e $\tau > d - 1$ (condições Diophantinas). Então, existem $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno e um conjunto de Cantor $\mathcal{E} \subset [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ de medida relativa grande em $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ tal que, para todo $\varepsilon \in \mathcal{E}$, (6.11) admite uma solução quase-periódica da forma

$$\widehat{u}(t) = U(\boldsymbol{\omega} t;\, \varepsilon) = \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d} \tilde{U}_{\boldsymbol{\nu}}(\varepsilon) e^{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu} t},$$

onde a soma acima converge absoluta e uniformemente para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $\varepsilon \in \mathcal{E}$. Além do mais, para todo $\varepsilon \in \mathcal{E}$, o sistema (6.8) é redutível e tem uma solução quase-periódica da forma

$$\phi(t) = \Phi(\Omega_\varepsilon t,\, \underline{\omega}_1 t,\, \omega_0 t;\, \varepsilon) = e^{i\Omega_\varepsilon t} \sum_{(\underline{m}, n) \in \mathbb{Z}^{D+1}} \tilde{\Phi}_{\underline{m}, n}(\varepsilon) e^{i(\underline{m}\cdot\underline{\omega}_1 + n\omega_0)t},$$

onde $\Omega_\varepsilon := \Omega_0 + \langle g \rangle = \Omega_0 + i\varepsilon\langle Qu \rangle$ é real, e a soma acima é absoluta e uniformemente convergente para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $\varepsilon \in \mathcal{E}$. □

Em particular, a prova do resultado implicará que a equação é redutível para $\varepsilon \in \mathcal{E}$. Isso significa que para todo $\varepsilon \in \mathcal{E}$ a solução da equação matricial $\dot{X} = P(t)X$ associada à (6.8) pode ser escrita como $X(t) = Y(\omega_0 t, \underline{\omega}_1 t)e^{Ct}X_0$ para alguma matriz constante C; diz-se nesse caso que o fluxo é conjugado a um fluxo constante dado por e^{Ct} [49].

O resto desta parte desta tese é devotado à prova do teorema acima. Organizamos os capítulos da seguinte maneira: no Capítulo 7 investigamos e discutimos o Ansatz usado para resolver (6.8) e introduzimos a representação em árvore dos coeficientes perturbativos obtidos, que é a base para a análise que se segue. O Capítulo 8 é devotada à solução do problema *do modo zero*, que é essencial para a construção de uma solução quase-periódica formal consistente

para (6.11). O Capítulo 8 ainda mostra que a solução perturbativa encontrada é meramente formal, *i.e.*, não convergente como uma série de potências em ε. Isso está relacionado com o problema dos pequenos denominadores. Para contornar essa dificuldade, o Capítulo 9 traz a idéia central de nosso trabalho: a renormalização da solução formal. Esse processo é implementado através de uma decomposição em multi-escalada dos propagadores e de uma técnica adequada de resoma da série formal. Como descrito no Teorema 6.4, obtém-se com isso uma solução convergente quase-periódica para (6.11), bem definida em um conjunto de Cantor $\mathcal{E}$ de medida relativa grande em $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. No Capítulo 9 ainda demonstra-se alguns lemas técnicos relacionados à estimativas dos chamados *valores de energia próprios*. Esses lemas são cruciais na prova do Teorema 6.4, completada também no Capítulo 9, no qual a convergência da expansão renormalizada é demonstrada. Estimativas sobre a medida do conjunto $\mathcal{E}$ onde a solução renormalizada existe também são dadas no Capítulo 9. É mostrado, em particular, que $\mathcal{E}$ tem medida relativa grande em um conjunto compacto $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$. Finalmente, a prova do Teorema 6.4 é encerrada com a análise das propriedades da expansão renormalizada.

*

Capítulo 7

Método Perturbativo

Neste capítulo iniciamos nossa análise perturbativa. Partimos de uma dada solução quase-periódica complexa para a versão não perturbada da (6.8), *i.e.*, para $\varepsilon = 0$, e procuramos por uma solução perturbativa para a equação total que formalmente tenda a essa solução não perturbada quando $\varepsilon \to 0$. Para isso procuramos um Ansatz exponencial, cuja motivação geométrica será brevemente discutida, chegando finalmente a uma equação generalizada de Riccati (confira equação (7.9), adiante). No núcleo de nossos resultados, provamos que essa equação generalizada de Riccati admite uma solução quase-periódica sob condições adequadas sobre as freqüências e sobre o parâmetro de acoplamento ε. Além disso, provamos que isso implica na quase-periodicidade da solução perturbada de (6.8). Entretanto, esses resultados serão apenas demonstrados a partir do Capítulo 8.

7.1 Equação Não-Perturbada

O seguinte resultado elementar apresenta algumas propriedades básicas das soluções quase-periódicas complexas da equação de Hill não-perturbada que parcialmente motivam o método empregado na Seção 7.2.

Proposição 7.1 *Seja $p_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função analítica e periódica com período $T_0 = 2\pi/\omega_0$, tal que a equação*

$$\ddot{\phi}(t) + p_0(t)\,\phi(t) \;=\; 0 \tag{7.1}$$

tenha duas soluções não-triviais, reais, analíticas, quase-periódicas e independentes, ϕ_a e ϕ_b. Então, a solução quase-periódica complexa $\phi_0(t) = \phi_a(t) + i\phi_b(t)$ pode ser expressa na forma

$$\phi_0(t) \;=\; \exp\left(i\Omega_0 t + i\psi_0(t)\right)\,,$$

onde $\Omega_0 \in \mathbb{R}$ e $\psi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função analítica e periódica com freqüência ω_0. □

Prova. Sendo o Wronskiano $W(t) = \phi_a(t)\dot{\phi}_b(t) - \phi_b(t)\dot{\phi}_a(t)$ uma constante não-nula, $W(t) = W_0 \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, temos

$$|W_0| \;\leq\; |\phi_a(t)|\,|\dot{\phi}_b(t)| + |\phi_b(t)|\,|\dot{\phi}_a(t)| \;\leq\; D(|\phi_a(t)| + |\phi_b(t)|),$$

onde $D := \max\{\sup_{t\in\mathbb{R}} |\dot{\phi}_a(t)|,\ \sup_{t\in\mathbb{R}} |\dot{\phi}_b(t)|\} < \infty$, porque $\dot{\phi}_a$ e $\dot{\phi}_b$ são ambas, por hipótese, quase-periódicas. Seja $\phi_0 := \phi_a + i\phi_b$. Pela equivalência das normas ℓ^1 e ℓ^2, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|\phi_0(t)| \;=\; \sqrt{|\phi_a(t)|^2 + |\phi_b(t)|^2} \;\geq\; C(|\phi_a(t)| + |\phi_b(t)|) \;\geq\; \frac{C|W_0|}{D}, \quad \forall t. \tag{7.2}$$

Isso nos diz que a função quase-periódica complexa ϕ_0 permanece fora de uma vizinhança da origem para todos os tempos. Sob essas circunstâncias, um teorema de H. Bohr [36], implica que podemos escrever

$$\phi_0(t) \;=\; \exp\Big(i\Omega_0 t + i\psi_0(t)\Big), \tag{7.3}$$

onde $\Omega_0 \in \mathbb{R}$ e $\psi_0(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é quase periódica. O teorema de Floquet garante que ψ_0 é periódica com a mesma freqüência de p_0. ■

Vemos claramente de (7.3) que Ω_0 é o número de rotação de ϕ_0.

Sendo $\overline{\phi_0}$ também uma solução de (7.1) (porque (7.1) é real), a solução (complexa) mais geral é

$$A_1 \exp\Big(+i\Omega_0 t + i\psi_0(t)\Big) \;+\; A_2 \exp\Big(-i\Omega_0 t - i\overline{\psi_0(t)}\Big), \tag{7.4}$$

com $A_1, A_2 \in \mathbb{C}$.

Definindo a função periódica $g_0(t) := \dot{\psi}_0(t) + \Omega_0$, podemos escrever

$$\phi_0(t) \;=\; \exp\left(i\int_0^t g_0(t')\,\mathrm{d}t'\right) e^{i\psi_0(0)}. \tag{7.5}$$

Sendo $\langle\dot{\psi}_0\rangle = 0$, temos $\Omega_0 = \langle g_0\rangle$.

7.2 A Equação Perturbada e o Ansatz Exponencial

Conforme mencionamos, a representação (7.5) é possível porque (7.2) nos diz que a função quase-periódica complexa ϕ_0 permanece fora de uma vizinhança da origem para todos os tempos. É tentador presumir que esse tipo de propriedade de estabilidade seja preservada quando a perturbação é inserida e que a função periódica g_0 seja substituída por uma função quase-periódica da forma $g_0 + g$, onde g se anula quando $\varepsilon \to 0$. Essa é a motivação para os passos seguintes.

Vamos considerar agora a equação perturbada (6.8) com $p_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ analítica e quase-periódica, com freqüências no conjunto $\{\underline{m}\cdot\underline{\omega}_1,\ \underline{m} \in \mathbb{Z}^D\}$ para algum $D \geq 1$. As motivações

apresentadas acima (veja também [2]) nos conduzem a procurar por uma solução da (6.8) com a seguinte forma

$$\phi(t) \;=\; \phi_0(t)\exp\left(i\int_0^t g(t')\,\mathrm{d}t'\right) \;=\; \exp\left(i\int_0^t [g_0(t')+g(t')]\,\mathrm{d}t'\right)e^{i\varphi_0(0)} \tag{7.6}$$

com g se anulando identicamente para $\varepsilon = 0$. É facilmente verificável que g deve satisfazer a seguinte equação generalizada de Riccati:

$$\frac{d}{dt}\left(g\phi_0^2\right) + i\left(g\phi_0\right)^2 - i\varepsilon p_1\phi_0^2 \;=\; 0\,, \tag{7.7}$$

ou, de outra forma,

$$\dot{g} + ig^2 + 2ig_0 g - i\varepsilon p_1 \;=\; 0\,. \tag{7.8}$$

Observação 7.2 *É claro que dessa maneira consideramos uma solução que se reduz à primeira função em (7.4) para $\varepsilon = 0$. Note não poderíamos também considerar soluções que continuem, para $\varepsilon \neq 0$, a segunda função em (7.4). A análise seria a mesma.*

A idéia agora é procurar por uma solução quase-periódica g para a equação acima. Nesse caso,

$$\phi(t) \;=\; \exp\left(i\Omega_\varepsilon t + i\psi_\varepsilon(t)\right)\,,$$

onde

$$\Omega_\varepsilon := \Omega_0 + \langle g\rangle \qquad \text{e} \qquad \psi_\varepsilon(t) := \psi_0(t) + \int_0^t \left(g(t') - \langle g\rangle\right)\mathrm{d}t'\,.$$

Note que, se tal g existe, ψ_ε seria também quase-periódica. Entretanto, para assegurar que ϕ seja quase-periódica temos que mostrar que Ω_ε é um número real, que é o caso se $\langle g\rangle \in \mathbb{R}$. Isso é estabelecido pela proposição seguinte que mostra que se g é quase-periódica, então ϕ é automaticamente estável, *i.e.*, o expoente de Liapounov $\Im\{\Omega_\varepsilon\}$ desaparece.

Proposição 7.3 *Assumamos que (7.7) tenha uma solução quase-periódica g. Então a média de g é real, ou seja, $\langle g\rangle \in \mathbb{R}$.* □

Prova. Escreva $g_0 = x_0 + iy_0$ e $g = x + iy$. Note que $\langle g_0\rangle = \Omega_0 \in \mathbb{R}$, de modo que $\langle y_0\rangle = 0$. Tem-se $i\dot{g}_0 - g_0^2 + p_0 = 0$ (substitua (7.5) em (7.1)), cuja parte imaginária dá $\dot{x}_0 = 2x_0y_0$. Além disso, tem-se $\dot{g}+ig^2+2ig_0g-i\varepsilon p_1 = 0$ (equação (7.8)), cuja parte real é $\dot{x}-2xy-2xy_0-2yx_0 = 0$. Combinando as duas equações obtém-se $\dot{x} - 2xy - 2x_0y - 2xy_0 + (-2x_0y_0 + \dot{x}_0) = 0$, de modo que $\dot{x} + \dot{x}_0 - 2(y + y_0)(x + x_0) = 0$.

Definindo $z = x+x_0$, a equação acima se torna $\dot{z} = f(t)\,z$, onde a função $f(t) = 2(y(t)+y_0(t))$ é limitada (e quase-periódica), de modo que, por integração explícita,

$$z(t) = \exp\left(2\int_0^t [y_0(t') + y(t')]\,\mathrm{d}t'\right)z(0),$$

onde $z(0) = x_0(0) + x(0) \neq 0$ (se $z(0) = 0$ então $z(t) \equiv 0$ para todo t, daí que $x(t) = -x_0(t)$ para todo t, o que requer que $x_0(t) = x(t) \equiv 0$ para todo t, e isso não é possível porque $\langle x_0 \rangle = \Omega_0 \neq 0$, de modo que $x_0(t)$ não pode se anular identicamente). Por outro lado $z(t)$ tem que ser uma função quase-periódica limitada, e isso requer $\langle y_0 + y \rangle = 0$, de modo que se tem $\langle y \rangle = 0$. ■

Portanto, podemos dizer que $\phi(t)$ dada em (7.6) é quase-periódica desde que se ache uma g quase-periódica. Outras observações sobre as propriedades de ϕ serão discutidas no Capítulo 9.

Uma versão um pouco mais simples da equação generalizada de Riccati (7.7) acima foi estudada em [27] por um método de expansão em árvores (veja a revisão feita no Capítulo 4, página 62). Então, a idéia agora é tentar escrever a mesma expansão de [27] para uma solução de (7.7) e adaptar sua análise (e resultados) ao contexto do problema aqui colocado.

Primeiramente, vamos reescrever a equação de Riccati (7.7) como em [27]. Sendo $\phi_0 \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, definimos $u(t)$ por

$$g(t) \;=:\; i\varepsilon Q(t)u(t)\,,$$

onde

$$Q(t) \;:=\; \exp\left(-2i\int_0^t g_0(t')\,\mathrm{d}t'\right) \;=\; (\phi_0(t))^{-2}\,,$$

que, por (7.3), é também quase-periódico. Também definimos,

$$R(t) \;:=\; p_1(t)Q(t)^{-1} \;=\; p_1(t)\phi_0^2(t) \;=\; p_1(t)\exp\left(2i\int_0^t g_0(t')\,\mathrm{d}t'\right).$$

Com as definições acima pode-se facilmente checar de (7.7) que

$$\dot{u} \;=\; R + \varepsilon Q u^2\,, \tag{7.9}$$

que é muito similar à equação estudada em [27].

7.3 Árvores

Passaremos agora às expansões perturbativas e a uma representação gráfica que conduzirá nossa análise. Como primeira tentativa (e também para introduzir notações) procuraremos por uma solução de (7.9) como uma série de potências em ε:

$$u(t) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u^{(k)}(t)\,.$$

Note que, em princípio, u não se anula identicamente para $\varepsilon = 0$, mas g sim, pois $g \sim \varepsilon u$. Inserindo o Ansatz acima na equação (7.9), chegamos em

$$\begin{aligned} \dot{u}^{(0)} &= R\,, \\ \dot{u}^{(k)} &= Q \sum_{k_1+k_2=k-1} u^{(k_1)}u^{(k_2)}\,, \quad \forall k \geq 1\,. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Uma vez que procuramos por uma solução quase-periódica u de (7.9), é natural introduzirmos a seguinte decomposição de Fourier:

$$u^{(k)}(t) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^d} u_\nu^{(k)} e^{i\nu\cdot\omega t}, \tag{7.11}$$

para algum $d \geq 1$ a ser convenientemente fixado mais tarde. Note que com a decomposição acima, temos

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^d} u_\nu^{(k)} e^{i\nu\cdot\omega t}. \tag{7.12}$$

Nossa meta é achar uma representação gráfica em termos de árvores para os coeficientes de Fourier $u_\nu^{(k)}$, como em [27].

Prosseguimos agora escrevendo a decomposição de Fourier das funções p_0, p_1, ϕ_0, Q e R. Como assume-se que p_0 é periódico (com período $T_0 = 2\pi/\omega_0$), tem-se simplesmente

$$p_0(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} P_n^{(0)} e^{in\omega_0 t}.$$

Assume-se que a função p_1 é quase-periódica com espectro de freqüências contido no conjunto $\{\underline{m}\cdot\underline{\omega}_1,\ \underline{m}\in\mathbb{Z}^D\}$. Portanto,

$$p_1(t) = \sum_{\underline{m}\in\mathbb{Z}^D} P_{\underline{m}}^{(1)} e^{i\underline{m}\cdot\underline{\omega}_1 t}.$$

Escrevemos as decomposições de Fourier de ϕ_0^2 e ϕ_0^{-2} como segue:

$$(\phi_0(t))^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_n^{(2)} e^{i(n\omega_0+2\Omega_0)t}, \qquad (\phi_0(t))^{-2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_n^{(-2)} e^{i(n\omega_0-2\Omega_0)t}.$$

Portanto, a decomposição de Fourier de R é

$$R(t) = \sum_{\underline{m}\in\mathbb{Z}^D} P_{\underline{m}}^{(1)} e^{i\underline{m}\cdot\underline{\omega}_1 t} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_n^{(2)} e^{i(n\omega_0+2\Omega_0)t} = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^d} R_\nu e^{i\nu\cdot\omega t},$$

onde

$$\nu := (\underline{m},\ n_1,\ n_2), \quad d := D+2, \quad \omega := (\underline{\omega}_1,\ \omega_0,\ \Omega_0) \tag{7.13}$$

e

$$R_\nu := P_{\underline{m}}^{(1)} \mathcal{F}_{n_1}^{(2)} \delta_{n_2,2}.$$

Com essa notação, a decomposição de Fourier de Q é como segue:

$$Q(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{F}_n^{(-2)} e^{i(n\omega_0-2\Omega_0)t} = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^d} Q_\nu e^{i\nu\cdot\omega t},$$

onde ν, d e ω são como em (7.13) e

$$Q_\nu := \delta_{\underline{m},\underline{0}} \mathcal{F}_{n_1}^{(-2)} \delta_{n_2,-2}.$$

Observação 7.4 *Assumimos a seguinte condição de não-ressonância sobre o vetor de freqüência* $\boldsymbol{\omega}$*:*

$$\underline{m} \cdot \underline{\omega}_1 + n\omega_0 + 2\Omega_0 \neq 0 \qquad \forall(\underline{m}, n) \in \mathbb{Z}^{D+1}.$$

Também impomos uma condição Diophantina sobre $\boldsymbol{\omega}$*, a saber:*

$$|\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}| \geq \frac{C_0}{|\boldsymbol{\nu}|^\tau} \qquad \forall \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d \setminus \{\mathbf{0}\}\,, \tag{7.14}$$

para duas constantes positivas fixas C_0 *e* $\tau > d-1$.

Observação 7.5 *Pela suposição de analiticidade sobre* p_0 *e* p_1 *obtém-se o seguinte decaimento dos coeficientes de Fourier de* Q *e de* R*:*

$$|R_{\boldsymbol{\nu}}| \leq \mathcal{Q}e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}|}\,, \quad |Q_{\boldsymbol{\nu}}| \leq \mathcal{Q}e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}|}\,, \tag{7.15}$$

para constantes positivas $\mathcal{Q}$ *e* κ*. Isso será essencial no que se segue.*

Prosseguimos inserindo a decomposição (7.11) em (7.10). O resultado é a seguinte relação de recursividade para os coeficientes $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$, $\boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned}
(i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu})u_{\boldsymbol{\nu}}^{(0)} &= R_{\boldsymbol{\nu}}\,, \\
(i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu})u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)} &= \sum_{k_1+k_2=k-1} \sum_{\boldsymbol{\nu}_0+\boldsymbol{\nu}_1+\boldsymbol{\nu}_2=\boldsymbol{\nu}} Q_{\boldsymbol{\nu}_0} u_{\boldsymbol{\nu}_1}^{(k_1)} u_{\boldsymbol{\nu}_2}^{(k_2)}\,, \quad \forall k \geq 1\,,
\end{aligned} \tag{7.16}$$

para todo $\boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$. Como o lado esquerdo de (7.10) tem média zero, exige-se também

$$\begin{aligned}
0 &= R_{\mathbf{0}}\,, \\
0 &= \sum_{k_1+k_2=k-1} \sum_{\boldsymbol{\nu}_0+\boldsymbol{\nu}_1+\boldsymbol{\nu}_2=\mathbf{0}} Q_{\boldsymbol{\nu}_0} u_{\boldsymbol{\nu}_1}^{(k_1)} u_{\boldsymbol{\nu}_2}^{(k_2)} =: \left\langle [Qu^2]^{(k-1)} \right\rangle\,, \quad \forall k \geq 1\,.
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Nota-se que $R_{\mathbf{0}} = P_{\underline{0}}^{(1)} \mathcal{F}_0^{(2)} \delta_{0,2} = 0$ e assim não há problemas com o requerimento $0 = R_{\mathbf{0}}$.

A representação gráfica dos coeficientes $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$ é quase exatamente como na referência [27]. Recomendamos que o leitor reveja o Capítulo 4 desta tese para detalhes. As únicas duas diferenças essenciais são as seguintes: (1) Aqui representamos como bolas pretas os fatores $R_{\boldsymbol{\nu}}$, enquanto que na referência [27] elas foram associados ao fator $(Q^{-1})_{\boldsymbol{\nu}}$. (2) A ordem de uma árvore aqui é dada somente pela soma dos vértices mais a soma dos rótulos de ordem das bolas brancos, enquanto que referência [27] o número de bolas pretas também é contado na ordem. Aqui também existe uma pequena modificação de notação: enquanto que na referência [27] $u_{\mathbf{0}}^{(k)} := c^{(k)}$, aqui $u_{\mathbf{0}}^{(k)} := \alpha^{(k)}$, para todo $k \geq 0$. Repassamos abaixo as definições pertinentes da referência [27] adaptadas ao presente caso (veja também o Capítulo 4).

Definição 7.6 *Uma árvore* θ *é um conjunto conexo de pontos e linhas sem nenhum loop tal que todas as linhas são orientadas para um único ponto chamado a* raiz. *Denominamos* nós

todos os pontos da árvore com exceção da raiz. Note que, por construção, a raiz admite somente uma linha de entrada: tal linha é chamada linha raiz. *A orientação das linhas na árvore induz uma relação de ordem parcial entre os nós. Denotamos por* $\preceq$ *essa relação: dados dois nós* v *e* w, *escreveremos* $w \preceq v$ *toda vez que* v *está ao longo de um caminho (de linhas) que conecta* w *a raiz. Dada uma árvore* θ, *podemos identificar em* θ *os seguintes subconjuntos:*

- $E(\theta)$: *o conjunto de* pontos finais *(nós finais) em* θ. *Um nó* $v \in \theta$ *será um ponto final se nenhuma linha entra em* v. *Denotamos por* $|E(\theta)|$ *o número de pontos finais em* θ.

- $E_W(\theta) \subseteq E(\theta)$: *o conjunto de* bolas brancas *em* θ. *A cada* $v \in E_W(\theta)$ *associamos um rótulo de* modo $\boldsymbol{\nu}_v = \mathbf{0}$, *um rótulo de* ordem $k_v \in \mathbb{Z}_+$ *e um* fator de nó $F_v = \alpha^{(k_v)}$. *Denotamos por* $|E_W(\theta)|$ *o número de bolas brancas em* θ.

- $E_B(\theta) = E(\theta) \setminus E_W(\theta)$: *o conjunto de* bolas pretas *em* θ. *A cada* $v \in E_B(\theta)$ *associamos um* rótulo de modo $\boldsymbol{\nu}_v \neq \mathbf{0}$ *e um* fator de nó $F_v = R_{\boldsymbol{\nu}_v}$. *Denotamos por* $|E_B(\theta)|$ *o número de bolas pretas em* θ.

- $V(\theta)$: *o conjunto de* vértices *em* θ. *Se* $v \in V(\theta)$, *então* v *tem ao menos uma linha de entrada. Associamos com cada vértice* $v \in V(\theta)$ *um rótulo de* modo $\boldsymbol{\nu}_v \in \mathbb{Z}^d$ *e um* fator de nó $F_v = Q_{\boldsymbol{\nu}_v}$. *Denotamos por* $|V(\theta)|$ *o número de vértices em* θ.

- $B(\theta) = E_B(\theta) \cup V(\theta)$: *O conjunto de bolas pretas e vértices em* θ. *Denotamos por* $|B(\theta)|$ *o número de bolas pretas mais vértices em* θ, i.e., $|B(\theta)| = |E_B(\theta)| + |V(\theta)|$.

- $L(\theta)$: *o conjunto de* linhas *em* θ. *Cada linha* $\ell \in L(\theta)$ *deixa um ponto* v *e entra em outro que denotaremos por* v'. *Uma vez que* ℓ *está unicamente identificado com* v *(o ponto que* ℓ *deixa), podemos escrever* $\ell = \ell_v$. *Para cada linha* ℓ *associamos um rótulo de* momento $\boldsymbol{\nu}_\ell \in \mathbb{Z}^d$ *e um* propagador $g_\ell = 1/(i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}_\ell)$ *se* $\boldsymbol{\nu}_\ell \neq \mathbf{0}$ *e* $g_\ell = 1$ *se* $\boldsymbol{\nu}_\ell = \mathbf{0}$: *dizemos que o momento* $\boldsymbol{\nu}_\ell$ *flui através da linha* ℓ. *Os modos e momentos estão relacionados como se segue: se* $\ell = \ell_v$ *e* ℓ', ℓ'' *são linhas entrando em* v, *então*

$$\boldsymbol{\nu}_\ell = \boldsymbol{\nu}_v + \boldsymbol{\nu}_{\ell'} + \boldsymbol{\nu}_{\ell''} = \sum_{\substack{w \in B(\theta) \\ w \preceq v}} \boldsymbol{\nu}_w . \tag{7.18}$$

Denotamos por $|L(\theta)|$ *o número de linhas em* θ.

Chamamos equivalentes *duas árvores que podem ser transformadas uma na outra deformando continuamente as linhas de tal modo que elas não cruzam umas as outras.* □

Definição 7.7 *Seja* $\mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}$ *o conjunto de árvores* θ *não equivalentes satisfazendo:*

1. *para cada vértice* $v \in V(\theta)$, *existe exatamente duas linhas de entrada em* v;

2. *o número de vértices e a soma de todos os rótulos de ordem das bolas brancas são tais que definindo* $k_1 := |V(\theta)|$ *e* $k_2 := \sum_{v \in E_W(\theta)} k_v$, *temos* $k_1 + k_2 = k$:

3. o momento fluindo através da linha raiz é $\boldsymbol{\nu}$.

Nos referimos a $\mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}$ como o conjunto de árvores de ordem k e momento total $\boldsymbol{\nu}$. □

Baseado nas definições acima, escrevemos para todo $k \geq 0$ e para todo $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d, \boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$:

$$u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)} = \sum_{\theta \in \mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}} \mathrm{Val}(\theta)\,,$$

onde $\mathrm{Val} : \mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}} \to \mathbb{C}$ é chamado o *valor* da árvore θ e é definido por

$$\mathrm{Val}(\theta) := \left(\prod_{\ell \in L(\theta)} g_\ell \right) \left(\prod_{v \in E(\theta) \cup V(\theta)} F_v \right),$$

onde

$$g_\ell := \begin{cases} \dfrac{1}{i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}_\ell}, & \boldsymbol{\nu}_\ell \neq \mathbf{0}, \\ 1\,, & \boldsymbol{\nu}_\ell = \mathbf{0}, \end{cases} \qquad F_v := \begin{cases} Q_{\boldsymbol{\nu}_v}\,, & v \in V(\theta), \\ R_{\boldsymbol{\nu}_v}\,, & v \in E_B(\theta), \\ \alpha^{(k_v)}\,, & v \in E_W(\theta). \end{cases}$$

Todas as árvores que aparecem na expansão do coeficiente $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$ pertencem a $\mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}$. Reciprocamente, toda árvore em $\mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}$ aparece na expansão gráfica de $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$.

Está claro que as constantes $u_{\mathbf{0}}^{(k)} = \alpha^{(k)}$ devem ser recursivamente fixadas das condições (7.17). Deixamos esse problema para o próximo capítulo.

*

Capítulo 8

Solução Formal

Neste capítulo discutimos a resolução recursiva das equações (7.16) e (7.17). Em particular, obtemos uma condição suficiente para a fixação dos coeficientes $\alpha^{(k)}$ e concluímos que, sob essa condição. $\alpha^{(k)} = 0$, para qualquer $k \geq 0$. Finalmente, analisamos o problema da convergência em ε da série (7.12) com os coeficientes $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$ determinados e chegamos à conclusão que, devido ao problema dos pequenos denominadores presentes nos propagadores, (7.12) deve ser entendida apenas como uma série formal.

8.1 Análise dos Modos Zero

Agora analisamos as equações (7.16) e (7.17) com o intuito de fixar $\alpha^{(k)}$, $k \geq 0$. Deve-se ter em mente que essas equações são de natureza recursiva. Portanto, começamos fixando $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(0)}$, $\boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$, de (7.16), então fixamos $\alpha^{(0)}$ de (7.17), então voltamos para (7.16) para fixar $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(1)}$, $\boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$, e assim por diante. Nossa intenção aqui é obter uma expressão recursiva geral para os coeficientes $\alpha^{(k)}$ de modo zero. Provaremos que, a não ser por uma situação espúria, a única escolha possível das constantes $\alpha^{(k)}$ compatível com (7.17) é $\alpha^{(k)} = 0$, para todo $k \geq 0$.

Observação 8.1 *Sejam $\theta \in \mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}$, $k \geq 0$, $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d$. Como $k = |V(\theta)| + \sum_{v \in E_W(\theta)} k_v$, claramente temos $0 \leq |V(\theta)| \leq k$. Se.* e.g., *$E_W(\theta)$ contém apenas uma bola branca com rótulo de ordem k, então $|V(\theta)| = 0$; por outro lado, se $E_W(\theta)$ contém apenas bolas brancas com rótulo de ordem todos iguais à zero, ou se ele é um conjunto vazio, então $|V(\theta)| = k$. Outra simples observação é que, por razões topológicas, o número total de pontos finais em θ é exatamente $|V(\theta)| + 1$. Assim, $|E_W(\theta)| + |E_B(\theta)| = |V(\theta)| + 1$ e temos $0 \leq |E_B(\theta)| \leq |V(\theta)| + 1$.*

Lema 8.2 *Em $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$, $k \geq 0$, $\boldsymbol{\nu} = (\underline{m}, n_1, n_2) \in \mathbb{Z}^d$, n_2 pertence ao seguinte conjunto de inteiros pares: $\{-2k, -2(k-1), \ldots, -2, 0, 2\}$.* □

Prova. Para $k = 0$, $n_2 = 2$ já que $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(0)} \propto \delta_{n_2,2}$. Agora seja $k \geq 1$ e $\theta \in \mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}$ uma árvore contribuindo para $u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}$. A cada vértice $v \in V(\theta)$ associamos o fator $\delta_{n_2^{(v)},-2}$ em Val(θ) e a

cada bola preta $b \in E_B(\theta)$ associamos o fator $\delta_{n_2^{(b)},2}$. Assim, devido a conservação do momento (7.18), precisamos ter o vínculo $n_2 = \sum_{v\in V(\theta)} n_2^{(v)} + \sum_{b\in E_B(\theta)} n_2^{(b)} = 2|E_B(\theta)| - 2|V(\theta)|$ na linha raiz. Da Observação. 8.1, conclui-se que $n_2 = -2k, -2(k-1), \ldots, -2, 0, 2$. ■

Definição 8.3 *Seja $\theta \in \mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}$. $k \geq 0$, $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d$, tal que $E_W(\theta)$ seja não vazio. Seja $\mathcal{A}_\theta \subseteq E_W(\theta)$ não vazio. Definimos $\theta\backslash\mathcal{A}_\theta$ como a* árvore $\mathcal{A}_\theta$-amputada *gerada ao amputarmos o subconjunto $\mathcal{A}_\theta$ de bolas brancas de θ. Isso significa que*

$$\mathrm{Val}\,(\theta\backslash\mathcal{A}_\theta) = \frac{\mathrm{Val}(\theta)}{\prod_{v\in\mathcal{A}_\theta} \alpha^{(k_v)}} \quad e \quad k_{\theta\backslash\mathcal{A}_\theta} = k - \sum_{v\in\mathcal{A}_\theta} k_v\,,$$

onde $k_{\theta\backslash\mathcal{A}_\theta}$ denota a ordem da árvore $\mathcal{A}_\theta$-amputada. Agora seja

$$\mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{(p)} := \{\theta \in \mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}} \;:\; E_W(\theta) = \{v\} \;\; com\; k_v = p\}\,.$$

Isso significa que uma árvore em $\mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{(p)}$ tem apenas uma bola branca com rótulo de ordem p (e portanto $k-p$ vértices). Agora amputamos todas as bolas brancas em $\mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{(p)}$. Isso dá a definição do conjunto

$$\widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{(p)} := \left\{\theta\backslash E_W(\theta) \;:\; \theta \in \mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{(p)}\right\}.$$

Claro que a ordem de uma árvore em $\widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{(p)}$ é igual ao seu número de vértices. que é simplesmente $k-p$. Também introduzimos aqui a abreviação: $\widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{(0)} =: \widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}$, para todo $k \geq 1$. □

Observação 8.4 *Partindo da definição anterior e do fato que $g_\ell = 1$ quando ℓ deixa uma bola branca, nota-se que $\widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{(p)} = \widetilde{\mathcal{T}}_{k-p,\boldsymbol{\nu}}$. De fato, seja $\tilde{\theta} \in \widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{(p)}$ arbitrário. Segue que existe $\theta \in \mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}$ com $E_W(\theta) = \{v\}$ e com $k_v = p$ tal que $\tilde{\theta} = \theta \setminus E_W(\theta)$. Isso significa que $|V(\theta)| = k-p$. Agora tome $\theta' \in \mathcal{T}_{k-p,\boldsymbol{\nu}}$ com $E_W(\theta') = \{v\}$ e com $k_v = 0$ tal que $\tilde{\theta} = \theta' \setminus E_W(\theta')$. Sendo $\theta' \in \mathcal{T}_{k-p,\boldsymbol{\nu}}^{(0)}$, acha-se que $\tilde{\theta} \in \widetilde{\mathcal{T}}_{k-p,\boldsymbol{\nu}}$. Portanto, $\widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{(p)} \subseteq \widetilde{\mathcal{T}}_{k-p,\boldsymbol{\nu}}$. Por outro lado, tome um $\tilde{\theta} \in \widetilde{\mathcal{T}}_{k-p,\boldsymbol{\nu}}$ arbitrário. Então $\tilde{\theta} = \theta \setminus E_W(\theta)$ onde $\theta \in \mathcal{T}_{k-p,\boldsymbol{\nu}}$ e $E_W(\theta) = \{v\}$ com $k_v = 0$. Portanto, $|V(\theta)| = k-p$, o que significa que pode-se tomar $\theta' \in \mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}$ tal que $E_W(\theta') = \{v\}$ com $k_v = p$ e $\tilde{\theta} = \theta' \setminus E_W(\theta')$. Como $\theta' \in \mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{(p)}$, conclui-se que $\tilde{\theta} \in \widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{(p)}$. Portanto. $\widetilde{\mathcal{T}}_{k-p,\boldsymbol{\nu}} \subseteq \widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{(p)}$.*

Lema 8.5 *Seja $k \geq 1$, então $\langle [Qu^2]^{(k-1)}\rangle = \sum_{p=0}^{k-1} \alpha^{(p)} G_{k-p}$, onde, para todo $j \geq 1$, $G_j := \sum_{\theta\in\widetilde{\mathcal{T}}_{j,\mathbf{0}}} \mathrm{Val}(\theta)$.* □

Prova. Da definição,

$$\langle [Qu^2]^{(k-1)}\rangle = \sum_{k_1+k_2=k-1} \sum_{\boldsymbol{\nu}_0+\boldsymbol{\nu}_1+\boldsymbol{\nu}_2=\mathbf{0}} Q_{\boldsymbol{\nu}_0} u_{\boldsymbol{\nu}_1}^{(k_1)} u_{\boldsymbol{\nu}_2}^{(k_2)}\,. \tag{8.1}$$

Com isso, usando a definição do valor de uma árvore e as notações introduzidas na Definição 7.6, podemos escrever

$$\langle [Qu^2]^{(k-1)}\rangle = \sum_{\theta\in\mathcal{T}_{k,\mathbf{0}}} \mathrm{Val}(\theta)\,.$$

Agora seja $\boldsymbol{\nu}_1 = (\underline{m}_1, n_1^{(1)}, n_2^{(1)}) \in \mathbb{Z}^d$ e $\boldsymbol{\nu}_2 = (\underline{m}_2, n_1^{(2)}, n_2^{(2)}) \in \mathbb{Z}^d$ em (8.1). Do Lema 8.2,

$$\begin{aligned} n_2^{(1)} &\in \{-2k_1, -2(k_1-1), \ldots, -2, 0, 2\} \\ n_2^{(2)} &\in \{-2k_2, -2(k_2-1), \ldots, -2, 0, 2\}. \end{aligned}$$

Para ser mais preciso, seja $\theta_j \in \mathcal{T}_{k_j,\boldsymbol{\nu}_j}$, $j = 1, 2$, uma árvore contribuindo para $u_{\boldsymbol{\nu}_j}^{(k_j)}$. Então $n_2^{(1)} = 2(b_1 - v_1)$ e $n_2^{(2)} = 2(b_2 - v_2)$, onde b_j e v_j são os números de bolas pretas e vértices em θ_j. De θ_1 e θ_2 gostaríamos de construir uma árvore $\theta \in \mathcal{T}_{k,\mathbf{0}}$, $k = k_1 + k_2 + 1$, contribuindo para $\langle [Qu^2]^{(k-1)} \rangle$. Primeiro deve-se notar que as linhas das raízes de θ_1 e θ_2 entram em um vértice em θ com modo $\boldsymbol{\nu}_0 = (\underline{0}, n_1^{(0)}, -2)$. Como a linha que deixa esse vértice (linha raiz de θ) carrega momento zero, temos o vínculo $-2 + n_2^{(1)} + n_2^{(2)} = 0$. Assim, $(b_1 + b_2) - (v_1 + v_2 + 1) = 0$. Essa última relação implica que $|E_B(\theta)| = |V(\theta)|$, então (veja a Observação 8.1) a árvore θ contribuindo para $\langle [Qu^2]^{(k-1)} \rangle$ deve ter exatamente uma bola branca (com algum rótulo de ordem p). Claro que $|V(\theta)| + p = k$ e $1 \leq |V(\theta)| \leq k$, portanto $0 \leq p \leq k-1$. Dessa maneira, podemos escrever

$$\begin{aligned} \langle [Qu^2]^{(k-1)} \rangle &= \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{\theta \in \mathcal{T}_{k,\mathbf{0}}^{(p)}} \mathrm{Val}(\theta) = \sum_{p=0}^{k-1} \sum_{\theta \in \mathcal{T}_{k,\mathbf{0}}^{(p)}} \alpha^{(p)} \mathrm{Val}(\theta \setminus E_W(\theta)) \\ &= \sum_{p=0}^{k-1} \alpha^{(p)} \sum_{\theta \in \widetilde{\mathcal{T}}_{k,\mathbf{0}}^{(p)}} \mathrm{Val}(\theta) = \sum_{p=0}^{k-1} \alpha^{(p)} \sum_{\theta \in \widetilde{\mathcal{T}}_{k-p,\mathbf{0}}} \mathrm{Val}(\theta) \\ &=: \sum_{p=0}^{k-1} \alpha^{(p)} G_{k-p}, \end{aligned}$$

onde a Observação 8.4 foi usada. Note que, por construção, G_j, $j \geq 1$, é expresso por uma soma de árvores sem bolas brancas tais que elas têm exatamente j bolas pretas e j vértices. ■

Definição 8.6 *Seja $k \geq 1$ e $\widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}$ como na Definição 8.3. Dividimos $\widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}$ em dois conjuntos disjuntos como se segue: $\widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}} =: \widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{c} \bigcup \widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{nc}$, onde*

- *$\widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{c}$: é o conjunto de árvores em $\widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}$ tal que a linha amputada <u>está conectada</u> à linha raiz;*
- *$\widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{nc}$: é o conjunto de árvores em $\widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}$ tal que a linha amputada <u>não está conectada</u> à linha raiz.*

*Chamamos uma árvore em $\widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{c}$ como uma árvore c-*classe *e uma árvore em $\widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{nc}$ como uma árvore nc-*classe*. Note que qualquer árvore nc-classe tem ordem $k \geq 2$.* □

Qualquer árvore em $\widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{nc}$ pode ser desenhada em sua *forma canônica* como representado na Figura 8.1. De fato, seja $\theta \in \widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{nc}$, $k \geq 2$, $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d$, arbitrário. Seja v_1' o vértice conectado à

linha amputada de θ. Defina v_2' como o vértice tal que uma de suas linhas de entrada seja exatamente a linha de saída de v_1'. Defina v_j' indutivamente como o vértice tal que uma de suas linhas de entrada seja exatamente a linha de saída de v_{j-1}'. Se, para algum $j \geq 2$, v_j' for o vértice conectado à linha raiz, então fixamos $n := j$. Agora re-rotulamos os n vértices definidos acima como $v_j = v_{n-j+1}'$, $1 \leq j \leq n$. Os vértices v_j serão chamados *vértices canônicos*. Fixe θ_j, $1 \leq j \leq n-1$, como a sub-árvore cuja linha raiz é aquela que entra em v_j e não sai de v_{j+1}; θ_n é definida como a árvore cuja linha raiz entra em v_n, não sendo a perna amputado. As sub-árvores θ_j serão chamadas *sub-árvores canônicas*. Agora, desenhe a árvore de tal modo que a linha raiz de cada θ_j, $1 \leq j \leq n$, seja a linha superior entrando no vértice v_j: dessa maneira $\theta \in \widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{nc}$ é como representada na Figura 8.1. Daqui por diante, qualquer árvore em $\widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{nc}$ será pensada como estando em sua forma canônica.

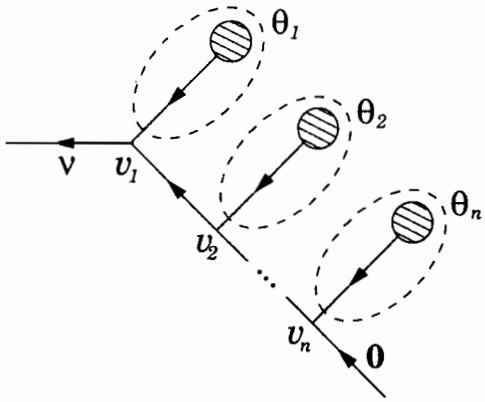


Figura 8.1: Forma canônica de uma árvore em $\widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{nc}$. A região delimitada por linhas tracejadas representa uma sub-árvore geral contendo apenas bolas pretas. Cada sub-árvore canônica θ_j, $1 \leq j \leq n$, é de ordem k_{θ_j} e contém exatamente k_{θ_j} vértices e $k_{\theta_j}+1$ bolas pretas. Levando em conta os n vértices canônicos $\{v_1, \ldots, v_2\}$, tem-se $k = n + \sum_{j=1}^{n} k_{\theta_j}$. Note que $2 \leq n \leq k$. A amputação das bolas brancas deixa uma linha com momento nulo conectada ao vértice v_n; chamamos de perna amputada tal linha.

Observação 8.7 *Cada sub-árvore canônica $\theta_j \subset \theta$ definida acima, dá uma contribuição para $u_{\boldsymbol{\nu}_j}^{(k_{\theta_j})}$ se k_{θ_j} é a ordem de θ_j e se $\boldsymbol{\nu}_j$ é o momento fluindo através de sua linha raiz. Claro que $\boldsymbol{\nu}_j \neq \mathbf{0}$ pois isso daria uma contribuição para $\alpha^{(k_j)}$ e as bolas brancas foram descartados durante a construção. Mais geralmente, cada linha em $L(\theta)$, que não seja nem a linha raiz nem a linha saindo da bola branca amputado, pode ser vista como a linha raiz de uma sub-árvore, então ela deve ter um momento diferente de zero, já que não há outras bolas brancas.*

Observação 8.8 *Note que existem 2^n árvores não equivalentes em $\widetilde{\mathcal{T}}_{k,\boldsymbol{\nu}}^{nc}$ admitindo a mesma forma canônica.*

Agora podemos escrever o valor de uma sub-árvore canônica θ_j como

$$\mathrm{Val}(\theta_j) = \frac{b_{\boldsymbol{\nu}_j}^{(j)}}{i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}_j} \equiv B_{\boldsymbol{\nu}_j}^{(j)}, \quad \boldsymbol{\nu}_j \neq \mathbf{0}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Portanto, θ_j dá uma contribuição para a função

$$B_j(t) = \int_0^t \mathrm{d}t'\, b_j(t') + C_j\,, \tag{8.2}$$

onde a constante de integração C_j é escolhida de modo que somada ao termo constante que surge da integral definida, dá o modo zero de Fourier de B_j:

$$C_j = \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{Z}^d_*} \frac{b^{(j)}_{\boldsymbol{\nu}}}{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}} = B^{(j)}_{\mathbf{0}}\,. \tag{8.3}$$

Uma vez que $B^{(j)}_{\mathbf{0}}$ deve se anular (veja Observação 8.7),

$$B_j(t) = \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{Z}^d_*} B^{(j)}_{\boldsymbol{\nu}} e^{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}t} =: \int b_j\,, \tag{8.4}$$

onde a integral acima tem que ser interpretada como uma notação abreviada para (8.2) com C_j fixado de (8.3), impondo que $B^{(j)}_{\mathbf{0}} = 0$. Deve-se pensar em $\int b_j$ apenas como uma primitiva com média zero.

Lema 8.9 *Seja $\theta \in \widetilde{\mathcal{T}}^{nc}_{k,\mathbf{0}}$ uma árvore nc-classe como aquela na Figura 8.1. com ordem $k \geq 2$, e sejam $2 \leq n \leq k$ sub-árvores canônicas $\theta_1, \ldots, \theta_n$. Sejam $\mathcal{N}_{\mathbf{0}} := \{\boldsymbol{\nu}_v \in \mathbb{Z}^d_* \,:\, v \in B(\theta)\}$ e $a_j(t) := Q(t)B_j(t)$, $1 \leq j \leq n$. Então,*

$$\sum_{\mathcal{N}_{\mathbf{0}}} \mathrm{Val}(\theta) = \left\langle a_1 \int a_2 \int \cdots \int a_{n-1} \int a_n \right\rangle\,, \tag{8.5}$$

onde todas as integrais são entendidas no sentido de (8.4). □

Prova. Seja $1 \leq j \leq n$ e denote por $\boldsymbol{\nu}_{0,j}$ o modo de Fourier do vértice canônico v_j e por $\boldsymbol{\nu}_j$ o momento fluindo através da linha raiz da sub-árvore canônica θ_j. Note que $\boldsymbol{\nu}_{0,j} \neq \mathbf{0}$, já que isso daria $Q_{\mathbf{0}} = 0$. Também $\boldsymbol{\nu}_j \neq \mathbf{0}$ e mais geralmente, $\boldsymbol{\nu}_\ell \neq \mathbf{0}$, para todo $\ell \in L(\theta)$ diferente da linha raiz e da linha saindo da bola branca amputado (veja Observação 8.7). Agora o momento fluindo através da linha raiz é zero, o que significa que

$$\sum_{j=1}^n \boldsymbol{\nu}_j + \sum_{j=1}^n \boldsymbol{\nu}_{0,j} = \mathbf{0}\,.$$

Portanto, por um cálculo explícita,

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathcal{N}_{\mathbf{0}}} \mathrm{Val}(\theta) &= \prod_{r=1}^n \sum_{\boldsymbol{\nu}_r} \sum_{\boldsymbol{\nu}_{0,r}} \frac{\prod_{j=1}^n Q_{\boldsymbol{\nu}_{0,j}}\, b^{(j)}_{\boldsymbol{\nu}_j}}{\prod_{j=1}^n (i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_j) \sum_{p=1}^j i\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\nu}_{n-p+1,0} + \boldsymbol{\nu}_{n-p+1})} \\
&= \prod_{r=1}^n \sum_{\boldsymbol{\nu}_r} \sum_{\boldsymbol{\nu}_{0,r}} \frac{\prod_{j=1}^n Q_{\boldsymbol{\nu}_{0,j}}\, B^{(j)}_{\boldsymbol{\nu}_j}}{\prod_{j=1}^n \sum_{p=1}^j i\boldsymbol{\omega}\cdot(\boldsymbol{\nu}_{n-p+1,0} + \boldsymbol{\nu}_{n-p+1})} \\
&= \left\langle (QB_1) \int (QB_2) \int \cdots \int (QB_{n-1}) \int (QB_n) \right\rangle\,,
\end{aligned} \tag{8.6}$$

o que prova a afirmação. ■

Seja $\theta \in \widetilde{\mathcal{T}}^{nc}_{k,\mathbf{0}}$ uma árvore nc-classe como aquela na Figura 8.1 com ordem $k \geq 2$ e $n \leq k$ sub-árvores canônicas $\theta_1, \ldots, \theta_n$. Claro, se duas árvores canônicas θ_i, θ_j são equivalentes, então tem-se a mesma contribuição em (8.5) ao permutar-se a_i com a_j. Isso nos motiva a dar as seguintes definições: seja $\Theta = \{\theta_1, \ldots \theta_n\}$ a coleção de todas as sub-árvores canônicas de $\theta \in \widetilde{\mathcal{T}}^{nc}_{k,\mathbf{0}}$. Dividimos Θ em $1 \leq m \leq n$ subconjuntos disjuntos E_j, $1 \leq j \leq m$, tal que E_1 é composto por todas as árvores em Θ que são equivalentes a θ_1, E_2 é composto por todas as árvores em $\Theta \setminus E_1$ que são equivalentes a primeira árvore de $\Theta \setminus E_1$ e assim por diante. Desse modo, $\Theta = \bigcup_{j=1}^{m} E_j$, onde cada E_j coleciona todas as árvores que são equivalentes entre si. Claro que cada subconjunto E_j contém $r_j = |E_j|$ árvores (equivalentes) tal que $\sum_{j=1}^{m} r_j = n$. A contribuição para (8.5) de todas as árvores dentro do mesmo E_j é denotada por a_{E_j}, que representa a função a_p associada a árvore θ_p equivalente a todas as árvores em E_j. Agora, seja S_n o grupo de permutações usual de n elementos. Definimos $S_n^{\Theta} := S_n \setminus \{\pi \in S_n \ : \ \pi(i) = j \text{ se } i \neq j \text{ e } \theta_i, \theta_j \in E_p \text{ para algum } 1 \leq i, j, p \leq n\}$. O conjunto S_n^{Θ} será chamado o conjunto de todas as permutações válidas dentro de Θ.

Lema 8.10 *Seja $\theta \in \widetilde{\mathcal{T}}^{nc}_{k,\mathbf{0}}$ uma árvore de nc-classe como aquela da Figura 8.1 com ordem $k \geq 2$ e $n \leq k$ sub-árvores canônicas $\theta_1, \ldots, \theta_n$. Então,*

$$\sum_{\pi \in S_n^{\Theta}} \left\langle a_{\pi(1)} \int a_{\pi(2)} \int a_{\pi(3)} \cdots \int a_{\pi(n)} \right\rangle = \frac{(-1)^{n+1}}{r_1! \cdots r_m!} \left\langle \frac{d}{dt} (A_{E_1}^{r_1} \cdots A_{E_m}^{r_m}) \right\rangle = 0 \,,$$

onde $A_{E_j} = \int a_{E_j}$, para todo $1 \leq j \leq m$. □

Prova. Primeiro vamos assumir que todas as sub-árvores $\theta_1, \ldots \theta_n$ são diferentes. Portanto temos $a_1 \neq a_2 \neq \cdots \neq a_n$ em (8.5). Com essa suposição $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\} = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$ com $E_j = \{\theta_j\}$ e $r_j = 1$ para todo $1 \leq j \leq n$. Por uma integração por partes, tem-se

$$\left\langle a_1 \int a_2 \int a_3 \ldots \int a_n \right\rangle = - \left\langle \left(\int a_3 \ldots \int a_n \right) \left(a_2 \int a_1 \right) \right\rangle ,$$

de modo que somando também o termo $1 \leftrightarrow 2$ e fazendo outra integração por partes, obtém-se

$$\left\langle a_1 \int a_2 \int a_3 \ldots \int a_n \right\rangle + \left\langle a_2 \int a_1 \int a_3 \ldots \int a_n \right\rangle$$

$$= - \left\langle \left(\int a_3 \ldots \int a_n \right) \frac{d}{dt} (A_1 A_2) \right\rangle = \left\langle \left(\int a_4 \ldots \int a_n \right) (A_1 A_2 \, a_3) \right\rangle .$$

Note que para se construir a derivada de $(A_1 A_2)$ acima usou-se as $2! = 2$ permutações de a_1, a_2: $(1\,2\,3 \cdots n)$ e $(2\,1\,3 \cdots n)$. Então, usando também $(1\,3\,2 \cdots n)$, $(3\,1\,2 \cdots n)$ e $(3\,2\,1 \cdots n)$, $(2\,3\,1 \cdots n)$, consegue-se

$$\left\langle \left(\int a_4 \ldots \int a_n \right) (A_1 A_3 \, a_2) \right\rangle \quad \text{e} \quad \left\langle \left(\int a_4 \ldots \int a_n \right) (A_3 A_2 \, a_1) \right\rangle .$$

Portanto, a soma dos $3! = 6$ termos obtidos pela permutação de a_1, a_2, a_3, dá

$$\left\langle \left(\int a_4 \ldots \int a_n \right) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (A_1 A_2 A_3) \right\rangle = - \left\langle \left(\int a_5 \ldots \int a_n \right) (A_1 A_2 A_3 a_4) \right\rangle .$$

Continuamos somando os $4! = 24$ termos obtidos pela permutação de a_1, a_2, a_3, a_4 para obter a derivada de $(A_1 A_2 A_3 A_4)$. Iteramos esse procedimento até exaurir as $n!$ permutações de $a_1, \ldots, a_n$, dando

$$\sum_{\pi \in S_n} \left\langle a_{\pi(1)} \int a_{\pi(2)} \int a_{\pi(3)} \ldots \int a_{\pi(n)} \right\rangle = (-1)^{n+1} \left\langle \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} (A_1 A_2 \ldots A_n) \right\rangle = 0 ,$$

que é a afirmação do lema no caso onde todos os a_j são diferentes.

Assumimos agora a situação mais geral onde $\Theta = \{\theta_1, \ldots, \theta_n\} = \bigcup_{j=1}^m E_j$, para algum $m < n$. Então podemos permutar $i \leftrightarrow j$ se $a_i \neq a_j$ (chamamos isso de uma permutação válida). O conjunto de todas as permutações válidas dentro de Θ é o que denotamos por S_n^Θ acima. O número total de permutações válidas é $\frac{n!}{r_1! \cdots r_m!}$. Portanto, usando o resultado da última fórmula, chega-se à afirmação geral. ■

Lema 8.11 *Para todo $k \geq 2$ temos a identidade $\sum_{\theta \in \widetilde{\mathcal{T}}_{k,\mathbf{0}}^{nc}} \mathrm{Val}(\theta) = 0$. Portanto, para todo $j \geq 1$, $G_j = \sum_{\theta \in \widetilde{\mathcal{T}}_{j,\mathbf{0}}^{c}} \mathrm{Val}(\theta)$.* □

Prova. Seja $k \geq 2$. O resultado segue de uma combinação do Lema 8.9 e do Lema 8.10. Claro, a soma de todas as possíveis árvores em $\widetilde{\mathcal{T}}_{k,\mathbf{0}}^{nc}$ (incluindo a soma sobre os modos de Fourier) significa que temos que somar todas as permutações válidas de $a_1, \ldots, a_n$ em (8.5) para todas as árvores com $2 \leq n \leq k$ sub-árvores canônicas. Uma vez que pelo Lema 8.10 essa soma dá a média de uma derivada total, conclui-se que $\sum_{\theta \in \widetilde{\mathcal{T}}_{k,\mathbf{0}}^{nc}} \mathrm{Val}(\theta) = 0$. Agora, já que $\widetilde{\mathcal{T}}_{1,\mathbf{0}}$ contém apenas árvores c-classe, concluí-se que

$$G_j = \sum_{\theta \in \widetilde{\mathcal{T}}_{j,\mathbf{0}}} \mathrm{Val}(\theta) = \sum_{\theta \in \widetilde{\mathcal{T}}_{j,\mathbf{0}}^{c}} \mathrm{Val}(\theta) + \sum_{\theta \in \widetilde{\mathcal{T}}_{j,\mathbf{0}}^{nc}} \mathrm{Val}(\theta) = \sum_{\theta \in \widetilde{\mathcal{T}}_{j,\mathbf{0}}^{c}} \mathrm{Val}(\theta) ,$$

para todo $j \geq 1$. ■

Proposição 8.12 *Seja G_j, $j \geq 1$, como no lema anterior. Suponha que $G_{j_0} \neq 0$ para algum $j_0 \geq 1$. Então, a condição (7.17), página 118, vale se $\alpha^{(k)} = 0$ para todo $k \geq 0$.* □

Prova. Pelo Lema 8.5 a condição (7.17) dá

$$0 = \left\langle [Qu^2]^{(k-1)} \right\rangle = \sum_{p=0}^{k-1} \alpha^{(p)} G_{k-p} , \quad \forall\, k \geq 1 . \tag{8.7}$$

Provaremos por indução que $\alpha^{(p)} = 0$, $p \geq 0$, é a única solução de (8.7) se $G_{j_0} \neq 0$ para algum $j_0 \geq 1$. De fato, seja $j_0 \geq 1$ tal que $G_1 = \cdots = G_{j_0 - 1} = 0$ e $G_{j_0} \neq 0$. Então, a equação (8.7) é

automaticamente satisfeita para todo $1 \leq k \leq j_0 - 1$. Para $k = j_0$, tem-se

$$0 = \alpha^{(0)} G_{j_0} + \sum_{p=0}^{j_0-1} \alpha^{(p)} G_{j_0-p} = \alpha^{(0)} G_{j_0} .$$

Portanto, $\alpha^{(0)} = 0$. Agora suponha que $\alpha^{(0)} = \cdots = \alpha^{(k_0)} = 0$ para algum $k_0 \geq 1$ e vamos provar que $\alpha^{(k_0+1)} = 0$. Usando (8.7) para $k = j_0 + k_0 + 1$, temos

$$0 = \sum_{p=0}^{j_0+k_0} \alpha^{(p)} G_{j_0+k_0+1-p} = \sum_{p=0}^{k_0} \alpha^{(p)} G_{j_0+k_0+1-p} + \sum_{p=k_0+1}^{j_0+k_0} \alpha^{(p)} G_{j_0+k_0+1-p} = \alpha^{(k_0+1)} G_{j_0} ,$$

o que implica que $\alpha^{(k_0+1)} = 0$. ■

Observação 8.13 *Note que se pode sempre supor que a função p_1 em (6.8), página 108, tenha média zero (i.e., $P_{\underline{0}}^{(1)} = 0$), por uma escolha apropriada da média de p_0. Em tal caso, como*

$$G_1 = \left\langle Q \int R \right\rangle = 2 \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} P_{\underline{0}}^{(1)} \frac{\mathcal{F}_{n_1}^{(-2)} \mathcal{F}_{-n_1}^{(2)}}{i(2\Omega_0 - n_1 \omega_0)} , \tag{8.8}$$

acha-se $G_1 = 0$. Isso mostra que é importante considerar a possibilidade em que o primeiro G_{j_0} não-nulo tenha $j_0 > 1$. Daqui por diante assumiremos que existe um $j_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $G_j = 0$ para todo $1 \leq j < j_0$ e $G_{j_0} \neq 0$. Dizemos que essa é uma condição de não-degenerescência sobre p_1.

Proposição 8.14 *Seja G_j, $j \geq 1$, como no lema anterior. Então,*

(a) $\langle Qu \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k G_{k+1}$.

(b) $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 \Leftrightarrow G_k = 0 . \ \forall k \geq 1$.

(c) $\Omega_\varepsilon \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{G_k} = -G_k , \ \forall k \geq 1$.

Em **(a)** *a igualdade é no sentido de uma série formal de potências (ou seja, vale ordem a ordem).* □

Prova. Vamos escrever primeiro $\langle Qu \rangle$ no espaço de Fourier:

$$\langle Qu \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \langle [Qu]^{(k)} \rangle , \quad \text{onde} \quad \langle [Qu]^{(k)} \rangle = \sum_{\boldsymbol{\nu}_0 + \boldsymbol{\nu}_1 = \mathbf{0}} Q_{\boldsymbol{\nu}_0} u_{\boldsymbol{\nu}_1}^{(k)} , \quad \forall k \geq 1.$$

Agora seja $\boldsymbol{\nu}_1 = (\underline{m}_1, n_1^{(1)}, n_2^{(1)}) \in \mathbb{Z}^d$. Claro que $\boldsymbol{\nu}_1 \neq \mathbf{0}$ porque $\boldsymbol{\nu}_0 = -\boldsymbol{\nu}_1$ e $Q_{\mathbf{0}} = 0$. Do Lema 8.2,

$$n_2^{(1)} \in \{-2k, -2(k-1), \ldots, -2, 0, 2\} .$$

Para ser mais preciso, seja $\theta_1 \in \mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}_1}$ uma árvore contribuindo para $u_{\boldsymbol{\nu}_1}^{(k)}$, então $n_2^{(1)} = 2(b_1 - v_1)$, onde b_1 e v_1 são os números de bolas pretas e vértices em θ_1. De θ_1 gostaríamos de

construir uma árvore $\theta \in \mathcal{T}_{k+1,0}$ que contribui para $\langle [Qu]^{(k)} \rangle$. Fazemos isso do seguinte modo. Tomamos a linha raiz de θ_1 com momento $\boldsymbol{\nu}_1$ entrando em um vértice v com modo $\boldsymbol{\nu}_0 = (\underline{0}, n_1^{(0)}, -2)$. Adicionamos uma linha, com momento zero, entrando em tal vértice v. Não associamos qualquer propagador a essa linha, o que significa que ela se comporta como uma perna amputada: note que podemos considerar tal árvore como uma árvore amputada de uma bola branca. Finalmente, seja a linha raiz de θ, a linha saindo do vértice v carregando momento zero. Assim, $\boldsymbol{\nu}_0 - \boldsymbol{\nu}_1 = \mathbf{0}$. Essa última relação implica que $-2 + n_2^{(1)} = 0$, o que significa que $b_1 - (v_1 + 1) = 0$. Portanto, $|E_B(\theta)| = |V(\theta)|$, conduzindo à conclusão que θ deve ter apenas um ponto final que não seja uma bola preta (veja Observação 8.1). Isso deixa espaço somente para a perna amputada de θ, de modo que θ_1 deve ter apenas bolas pretas. Finalmente, concluí-se que se θ contribui para $\langle [Qu]^{(k)} \rangle$, então $\theta \in \widetilde{\mathcal{T}}^c_{k+1,0}$. Por outro lado, apenas metade das árvores em $\widetilde{\mathcal{T}}^c_{k+1,0}$ contribui para $\langle [Qu]^{(k)} \rangle$ já que em $\widetilde{\mathcal{T}}^c_{k+1,0}$ levamos em conta duas possibilidades para amputar o trecho conectado à linha raiz. Portanto, pelo Lema 8.11, pode-se escrever

$$\langle [Qu]^{(k)} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\theta \in \widetilde{\mathcal{T}}^c_{k+1,0}} \mathrm{Val}(\theta) = \frac{1}{2} G_{k+1} \quad \text{e} \quad \langle Qu \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k G_{k+1} ,$$

onde a última relação vale como igualdade entre séries formais. Isso prova **(a)**. Os ítens **(b)** e **(c)** seguem imediatamente de **(a)** lembrando que $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \langle g \rangle = \Omega_0 + i\varepsilon \langle Qu \rangle$. ■

8.2 Análise da Expansão (7.11)

Um dos principais resultados da última seção (veja Proposição 8.12) nos diz que todo $\alpha^{(k)} = 0$ se algum $G_{j_0} \neq 0$, uma condição que doravante assumiremos (condição de não-degenerescência sobre p_1). Portanto, não devemos nos preocupar com bolas brancas e propagadores triviais. Para todo $k \geq 0$ e todo $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d_*$, definimos $\mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}} := \{ \theta \in \mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}} \ : \ E_W(\theta) = \emptyset \}$. Então,

$$u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)} = \sum_{\theta \in \mathcal{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}} \mathrm{Val}(\theta) , \qquad \mathrm{Val}(\theta) = \left(\prod_{\ell \in L(\theta)} g_\ell \right) \left(\prod_{v \in B(\theta)} F_v \right) , \tag{8.9}$$

onde

$$g_\ell = \frac{1}{i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}_\ell} , \quad \boldsymbol{\nu}_\ell \in \mathbb{Z}^d_* \quad \text{e} \quad F_v = \begin{cases} Q_{\boldsymbol{\nu}_v} , & v \in V(\theta) \\ R_{\boldsymbol{\nu}_v} , & v \in E_B(\theta) \end{cases} . \tag{8.10}$$

Além do mais, $u_{\mathbf{0}}^{(k)} = \alpha^{(k)} = 0$, para todo $k \geq 0$.

Lema 8.15 *Seja $k \geq 0$ e $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d_*$, então $|u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}| \leq B' B^k (k!)^\beta e^{-\kappa'|\boldsymbol{\nu}|}$, para constantes positivas B, B', β e $\kappa' < \kappa$.* □

Prova. Seja $\theta \in \mathscr{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}$, $k \geq 0$, $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d_*$. De (8.9), (8.10), (7.15) (veja Observação 7.5, página 118) e da condição Diophantina (7.14) (veja Observação 7.4, página 118), escrevemos

$$|\operatorname{Val}(\theta)| \leq \mathcal{Q}^{|B(\theta)|} C_0^{-|L(\theta)|} \left(\prod_{\ell \in L(\theta)} |\boldsymbol{\nu}_\ell|^\tau \right) \left(\prod_{v \in B(\theta)} e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}_v|} \right).$$

Agora, sendo $|B(\theta)| = |L(\theta)|$ e

$$\sum_{\ell \in L(\theta)} |\boldsymbol{\nu}_\ell| = \sum_{\ell \in L(\theta)} \Big| \sum_{\substack{w \in B(\theta) \\ w \preceq v \,:\, \ell = \ell_v}} \boldsymbol{\nu}_w \Big| \leq \sum_{\ell \in L(\theta)} \sum_{w \in B(\theta)} |\boldsymbol{\nu}_w| = |L(\theta)| \sum_{v \in B(\theta)} |\boldsymbol{\nu}_v|,$$

segue que

$$\prod_{v \in B(\theta)} e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}_v|} \leq \left(\prod_{v \in B(\theta)} e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}_v|/2} \right) \left(\prod_{\ell \in L(\theta)} e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}_\ell|/2|L(\theta)|} \right). \tag{8.11}$$

Por outro lado, para cada linha $\ell \in L(\theta)$, temos[1]

$$|\boldsymbol{\nu}_\ell|^\tau e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}_\ell|/2|L(\theta)|} \leq \tau! \left(\frac{2|L(\theta)|}{\kappa} \right)^\tau.$$

Daí

$$\left(\prod_{\ell \in L(\theta)} |\boldsymbol{\nu}_\ell|^\tau \right) \left(\prod_{\ell \in L(\theta)} e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}_\ell|/2|L(\theta)|} \right) \leq (\tau!)^{|L(\theta)|} \left(\frac{2|L(\theta)|}{\kappa} \right)^{\tau|L(\theta)|}, \tag{8.12}$$

que, junto com o fato de que para todo $\theta \in \mathscr{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}$ temos $|L(\theta)| = |B(\theta)| = 2k+1$, resulta

$$\begin{aligned} |\operatorname{Val}(\theta)| &\leq \left(\frac{\mathcal{Q} 2^\tau \tau!}{C_0 \kappa^\tau} \right)^{2k+1} \left((2k+1)^{2k+1} \right)^\tau \left(\prod_{v \in B(\theta)} e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}_v|/2} \right) \\ &\leq \Gamma_1 \Gamma_2^k (k!)^\beta e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}|/4} \left(\prod_{v \in B(\theta)} e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}_v|/4} \right), \end{aligned} \tag{8.13}$$

onde $\Gamma_1, \Gamma_2, \beta$ são constantes positivas apropriadas. No último passo acima usamos a bem conhecida relação de Stirling para expressar k^k em termos de $k!$ e o fato que

$$\sum_{v \in B(\theta)} |\boldsymbol{\nu}_v| \geq \Big| \sum_{v \in B(\theta)} \boldsymbol{\nu}_v \Big| = |\boldsymbol{\nu}|. \tag{8.14}$$

Agora levamos em conta que o número de árvores com uma ordem fixa é limitado por Γ_3^k, para alguma constante positiva Γ_3 [27]. Assim, finalmente obtemos

$$|u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}| \leq \sum_{\theta \in \mathscr{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}} |\operatorname{Val}(\theta)| \leq \Gamma_1' \Gamma_2^k \Gamma_3^k (k!)^\beta |e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}|/4},$$

sendo Γ_1' uma constante positiva adequada. Isso completa a prova do lema. ■

*

[1] Devido a desigualdade $|x|^\sigma \leq e^{\delta|x|}(\sigma/e\delta)^\sigma$, $\forall x \in \mathbb{C}$, e a relação de Stirling.

Capítulo 9

Solução Renormalizada

O Lema 8.15 nos diz que as estimativas obtidas para os coeficientes da série (7.12), página 117, não são suficientemente boas para provar convergência. Tal fato está relacionado com o tratamento inadequado dos pequenos denominadores $1/(i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell)$ que aparecem na expansão através dos propagadores g_ℓ.

Para contornar o problema com os pequenos denominadores, adotamos um método bem conhecido da análise das séries de Lindstedt para problemas do tipo KAM (veja [29] e suas referências). O problema dos pequenos denominadores está justamente no fato de que $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}$ pode ser arbitrariamente pequeno para certos valores de $\boldsymbol{\nu}$ com $|\boldsymbol{\nu}|$ suficientemente grande. A idéia, então, grosso modo, é separar as partes *pequenas* de $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}$ e prosseguir de uma forma adequada, obtendo coeficientes que possam ser melhor estimados. O processo de *separação* das *pequenas* partes de $\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}$ é implementada pela técnica de *decomposição em multi-escala dos propagadores.* Enfatizamos, como observação a parte, que essa técnica é genuína dos métodos do Grupo de Renormalização introduzidos para lidar com problemas semelhantes em Teorias de Campo.

9.1 Expansão Renormalizada

Aqui objetivos efetuar uma resoma conveniente dos termos da série (7.12) com o intuito de obtermos uma expansão convergente. Para isso utilizaremos técnicas praticamente idênticas aquelas expostas no Capítulo 4 para o sistema de dois-níveis com interações quase-periódicas. Em particular, empregamos a decomposição em multi-escala dos propagadores (confira Seção 4.3, página 4.3) e o procedimento de renormalização através da resoma dos gráficos de auto-energia (confira Seção 4.4, página 75). É claro que modificações técnicas foram introduzidas para tratar do problema mais geral posto aqui. Assim, repassaremos todas as definições pertinentes com as devidas modificações. Entretanto, as idéias essenciais são as mesmas daquelas já expostas no Capítulo 4.

Começamos introduzindo uma função $\psi(x)$ limitada, não decrescente e $C^\infty(\mathbb{R})$, definida em $\mathbb{R}_+$, de tal forma que

$$\psi(x) = \begin{cases} 1\,, & \text{para } x \geq C_1\,, \\ 0\,, & \text{para } x \leq C_1/2\,, \end{cases}$$

onde $C_1 \leq C_0$ deve ser fixado, sendo C_0 a constante Diophantina que aparece em (7.14), página 118. Além disso, definimos $\chi(x) := 1 - \psi(x)$. Um exemplo de $\chi(x)$ e $\psi(x)$ com as propriedades acima é encontrada na Figura 9.1. Também definimos, para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, $\chi_n(x) := \chi(2^n x)$ e $\psi_n(x) := \psi(2^n x)$. Está claro que $\chi_0(x) = \chi(x)$, $\psi_0(x) = \psi(x)$ e $\psi_n(x) + \chi_n(x) = 1$, $\forall n \geq 0$.

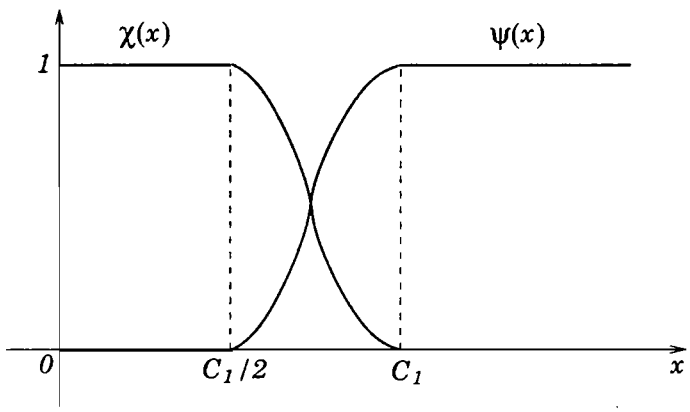


Figura 9.1: Possíveis gráficos das funções $\chi(x)$ e $\psi(x)$. Note que $\psi(x) + \chi(x) = 1$.

As funções $\chi_n(x)$ e $\upsilon_n(x)$ nos permitem escrever o propagador g_ℓ, para todo $\ell \in L(\theta)$ e $\boldsymbol{\nu}_\ell \neq \mathbf{0}$, como[1]

$$g_\ell = \frac{1}{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell} = \frac{\psi_0(|\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell|)}{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n(|\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell|)\chi_{n-1}(|\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell|)}{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell}\,.$$

Podemos ainda escrever

$$\begin{aligned} g_\ell &= \sum_{n=0}^{\infty} g_\ell^{(n)}\,, \\ g_\ell^{(0)} &:= \frac{\psi_0(|\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell|)}{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell}\,, \\ g_\ell^{(n)} &:= \frac{\psi_n(|\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell|)\chi_{n-1}(|\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell|)}{i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell}\,, \quad \forall n \geq 1\,. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Fazemos $g_\ell^{(n)} = g^{(n)}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell)$.

[1]Devido a identidade $\upsilon_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)\chi_{n-1}(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}_+$ (veja Observação 9.1 abaixo).

Observação 9.1 *Note que para $x = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}$ fixado, temos $g^{(n)}(x) \neq 0$ apenas para dois valores de n. Isso significa que as séries (9.1) são, de fato, finitas. Note também que $g^{(n)}(x) \neq 0$ somente se $2^{-n-1}C_1 < |x| < 2^{-n+1}C_1$ para $n \geq 1$ e somente se $|x| > 2^{-1}C_1$ para $n = 0$. Portanto,*

$$g_\ell^{(n)} \neq 0 \;\Rightarrow\; |g_\ell^{(n)}| \leq C_1^{-1}2^{n+1}\,. \tag{9.2}$$

A cada linha $\ell \in L(\theta)$ com $\boldsymbol{\nu}_\ell \neq \mathbf{0}$ associamos um novo rótulo $n_\ell = 0, 1, 2, \ldots$ chamado de *rótulo de escala* da linha ℓ. É importante salientar que, baseado na Observação 9.1, o rótulo de escala n_ℓ de uma linha ℓ diz, essencialmente, qual é o tamanho do propagador associado $g_\ell^{(n_\ell)}$.

Definição 9.2 *Definimos $\Theta_{k,\boldsymbol{\nu}}$ como o conjunto de árvores que diferem daquelas em $\mathscr{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}$ pela introdução de rótulos de escala nos propagadores. Ou seja, as árvores em $\Theta_{k,\boldsymbol{\nu}}$ são exatamente as mesmas que em $\mathscr{T}_{k,\boldsymbol{\nu}}$, exceto pela introdução de rótulos de escala nos propagadores.* □

Com as definições acima, a expressão (8.9), página 129, agora é lida

$$u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)} = \sum_{\theta\in\Theta_{k,\boldsymbol{\nu}}} \mathrm{Val}(\theta)\,, \qquad \mathrm{Val}(\theta) = \left(\prod_{\ell\in L(\theta)} g_\ell^{(n_\ell)}\right)\left(\prod_{v\in B(\theta)} F_v\right)\,, \tag{9.3}$$

onde a soma sobre todas as árvores em $\Theta_{k,\boldsymbol{\nu}}$ implica em uma soma adicional sobre todos os rótulos de escala para cada um dos propagadores. Assim, para todo $\theta \in \Theta_{k,\boldsymbol{\nu}}$, se $N_n(\theta)$ denota o número de linha em θ em escala n, usando (9.3), (9.2), a condição de analiticidade (7.15), página 118, e o fato que $|L(\theta)| = |B(\theta)| = 2k+1$, obtemos

$$\begin{aligned} |\,\mathrm{Val}(\theta)| &\leq (2C_1^{-1}\mathcal{Q})^{2k+1}\left(\prod_{v\in B(\theta)} e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}_v|}\right)\left(\prod_{n=0}^{\infty} 2^{nN_n(\theta)}\right) \\ &\leq (2C_1^{-1}\mathcal{Q}2^{n_1})^{2k+1} e^{-\kappa\sum_{v\in B(\theta)}|\boldsymbol{\nu}_v|}\left(\prod_{n=n_1}^{\infty} 2^{nN_n(\theta)}\right)\,, \end{aligned} \tag{9.4}$$

onde no último passo introduzimos (por enquanto) um inteiro positivo arbitrário n_1 e usamos o fato óbvio que $N_n(\theta) \leq |L(\theta)| = 2k+1$, $\forall\, n \geq 0$.

Nosso problema agora é estimar $N_n(\theta)$. Para resolver isso, introduzimos novamente algumas definições importantes.

Definição 9.3 (Cluster) *Um* cluster *T em escala n é um subconjunto maximal de uma árvore θ tal que todas as suas linha têm escala $n' \leq n$ e há pelo menos uma linha em escala igual à n. As linhas que entram em um cluster T e as linhas que saem de T são chamadas de* linhas externas. *Dado um cluster T em escala n, denotamos por $n_T = n$ a escala de T. Além do mais, $V(T)$, $E_B(T)$, $B(T)$, e $L(T)$ denotam, respectivamente, o conjunto de vértices, bolas pretas, vértices mais bolas pretas, e linhas de T. As linhas externas de T não pertencem a $L(T)$. Finalmente definimos o* momento do cluster *T como $\boldsymbol{\nu}_T := \sum_{v\in B(T)} \boldsymbol{\nu}_v$. Chamamos $k_T := |V(T)|$ a* ordem *de T. Alguns exemplos de clusters são apresentados na Figura 9.2.* □

Definição 9.4 (Gráfico de Auto-Energia) *Um* gráfico de auto-energia *é dito ser qualquer cluster T de uma árvore θ tal que*

1. *T tenha apenas uma linha entrando ℓ_T^{in} e uma linha saindo ℓ_T^{out};*

2. *O momento de T seja nulo,* i.e., $\boldsymbol{\nu}_T = \sum_{v \in B(T)} \boldsymbol{\nu}_v = \mathbf{0}$. *Isso significa que $\boldsymbol{\nu}_{\ell_T^{\text{in}}} = \boldsymbol{\nu}_{\ell_T^{\text{out}}}$.*

Chamamos de linha de auto-energia *qualquer linha ℓ_T^{out} que saia de algum gráfico de auto-energia T. Chamamos de* linha normal *qualquer linha que não seja uma linha de auto-energia. Note que se T é um gráfico de auto-energia, então $\ell_T^{\text{in}}, \ell_T^{\text{out}} \notin L(T)$, de modo que $|L(T)| = 2k_T - 1$ e $|B(T)| = 2k_T$. Alguns exemplos de gráficos de auto-energia são apresentados na Figura 9.3.* □

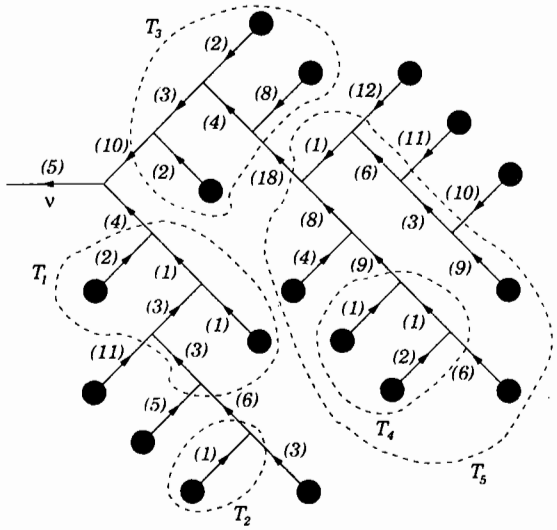


Figura 9.2: Exemplos de clusters em uma árvore de ordem $k = 16$. O número entre parênteses em cima de cada linha denota a escala do propagador. Assim, temos $n_{T_1} = 3$, $n_{T_2} = 1$, $n_{T_3} = 8$, $n_{T_4} = 2$ e $n_{T_5} = 9$. Note que $T_4 \subset T_5$ e portanto $n_{T_4} < n_{T_5}$. Claro que existem outros clusters no exemplo considerado que não são mostrados.

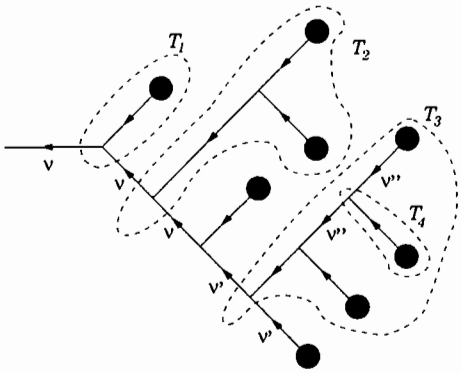


Figura 9.3: Exemplos de gráficos de auto-energia em uma árvore de ordem $k = 7$. Note que, de acordo com a definição, existe somente uma linha que entra e uma linha que sai (carregando o mesmo momento) nos gráficos de auto-energia T_1, T_2, T_3 e T_4. Está claro que as escalas das linha de T_1, T_2, T_3, T_4 são estritamente menores do que as escalas de suas linhas externas (afinal, os gráficos de auto-energia são clusters).

A relação entre os gráficos de auto-energia e a possibilidade de acúmulo de pequenos denominadores já foi mencionado na Seção 4.3, mais especificamente de acordo com a Observação 4.8 e o parágrafo seguinte, página 73.

Agora seguiremos uma análise quase idêntica a realizada na Seção 4.3. Por ser de extrema importância, ela será relembrada aqui. É fácil mostrar que (veja, *e.g.*, a referência [28]) se

denotamos por $N_n^{\text{norm}}(\theta)$ o número de linhas normais em uma árvore θ, então existe uma constante positiva c tal que

$$N_n^{\text{norm}}(\theta) \leq c\, 2^{-n/\tau} \sum_{v \in B(\theta)} |\boldsymbol{\nu}_v| \,, \tag{9.5}$$

onde τ é uma das constantes Diophantinas que aparecem na (7.14). Assim, suponha que poderíamos negligenciar todas as linhas de energia própria dentro de qualquer árvore θ, i.e., suponha que poderíamos substituir $N_n(\theta)$ em (9.4) por $N_n^{\text{norm}}(\theta)$ com a estimativa acima. Então, poderíamos ter

$$|\operatorname{Val}(\theta)| \leq (2C_1^{-1}\mathcal{Q}2^{n_1})^{2k+1} e^{-\kappa \sum_{v \in B(\theta)} |\boldsymbol{\nu}_v|}\, e^{\left(c \log 2 \sum_{n=n_1}^{\infty} n 2^{-n/\tau}\right) \sum_{v \in B(\theta)} |\boldsymbol{\nu}_v|} \,, \tag{9.6}$$

para todo $n_1 \geq 0$. Assim, fazendo $n_1 = n_1(\kappa, c, \tau)$ tal que[2]

$$-\frac{\kappa}{2} + c \log 2 \sum_{n=n_1}^{\infty} n 2^{-n/\tau} < 0 \,, \tag{9.7}$$

poderíamos obter

$$|\operatorname{Val}(\theta)| \leq (2C_1^{-1}\mathcal{Q}2^{n_1(\kappa,c,\tau)})^{2k+1} e^{-\frac{\kappa}{2} \sum_{v \in B(\theta)} |\boldsymbol{\nu}_v|} \leq \Lambda_1 \Lambda_2^k\, e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}|/4} \left(\prod_{v \in B(\theta)} e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}_v|/4} \right) ,$$

onde, na última desigualdade, usamos (8.14), página 130. Portanto, somando sobre todas as árvores (cujo número cresce no máximo com Λ_3^k, para algum Λ_3 positivo) e sobre todos os rótulos de Fourier,

$$|u_{\boldsymbol{\nu}}^{(k)}| \leq \sum_{\theta \in \Theta_{k,\boldsymbol{\nu}}} |\operatorname{Val}(\theta)| \leq \Lambda_1'(\Lambda_2\Lambda_3)^k e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}|/4} \tag{9.8}$$

o que implicaria na convergência da expansão para $u(t)$ (7.12) desde que $|\varepsilon| < 1/(\Lambda_2\Lambda_3)$.

Está claro que o resultado acima é falso já que não podemos simplesmente esquecer os gráficos de auto-energia. A estimativa obtida apenas ilustra o fato de que todo o problema concernente à convergência da série (7.12) recai na existência de gráficos de auto-energia (pequenos divisores). Para contornar esse problema introduzimos agora o procedimento de renormalização dos propagadores como na Seção 4.4, página 75.

Definição 9.5 (Valor de Auto-Energia) *Suponha que os propagadores renormalizados $g_\ell^{[n_\ell]}$ sejam dados. Para um gráfico de auto-energia T que não contenha qualquer outro gráfico de auto-energia, definimos o* valor de auto-energia *associado à T como*

$$\mathcal{V}_T(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}; \varepsilon) := \varepsilon^{k_T} \left(\prod_{\ell \in L(T)} g_\ell^{[n_\ell]} \right) \left(\prod_{v \in B(T)} F_v \right) , \tag{9.9}$$

onde $\boldsymbol{\nu}$ é o momento T que entra através da linha externa ℓ_T^{in}, $k_T = |B(T)|$, e F_v é definido como em (8.10). Note que $\mathcal{V}_T(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}; \varepsilon)$ depende de $\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}$ através dos propagadores $L(T)$. □

[2]Note que isso é sempre possível escolhendo n_1 suficientemente grande, já que a soma sobre n acima é convergente e exponencialmente pequena em n_1.

Fazendo $x = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}$ na (9.9) e $x_\ell = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}_\ell$ para cada linha $\ell \in L(T)$, podemos escrever $x_\ell = x_\ell^0 + \sigma_\ell x$, onde

$$x_\ell^0 = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}_\ell^0, \qquad \boldsymbol{\nu}_\ell^0 = \sum_{\substack{w \in B(T) \\ w \preceq v \,:\, \ell = \ell_v}} \boldsymbol{\nu}_w \,, \tag{9.10}$$

e $\sigma_\ell = 1$ se ℓ é ao longo do caminho das linhas conectando as linhas externas da energia própria T, e $\sigma_\ell = 0$ caso contrário.

Observação 9.6 *O valor $\mathcal{V}_T(x;\varepsilon)$ de um grafo de energia própria T pode depender de x somente se $k_T \geq 2$.*

Definição 9.7 *Definimos $\Theta_{k,\boldsymbol{\nu}}^{\mathcal{R}}$ como o conjunto de árvores de ordem k que não contenham nenhum gráfico de auto-energia* (árvores renormalizadas). *Definimos ainda $\mathcal{S}_{k,n}^{\mathcal{R}}$ como o conjunto de gráficos de auto-energia de ordem k que não contenham nenhum outro gráfico de auto-energia e tal que a escala máxima das linhas de $T \in \mathcal{S}_{k,n}^{\mathcal{R}}$ seja exatamente n* (gráficos de auto-energia renormalizados de ordem k e em escala n). *Os propagadores das linhas das árvores de $\Theta_{k,\boldsymbol{\nu}}^{\mathcal{R}}$ e $\mathcal{S}_{k,n}^{\mathcal{R}}$ são os renormalizados, $g_\ell^{[n_\ell]}$.* □

Então definimos os *propagadores renormalizados* $g_\ell^{[n]} := g^{[n]}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}_\ell;\varepsilon)$ e as quantidades $M^{[n]}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}_\ell;\varepsilon)$ recursivamente como se segue. Para $n_0 \in \mathbb{Z}_+$ fixamos

$$\begin{aligned}
M^{[n_0-1]}(x;\varepsilon) &:= 0, \\
g^{[n_0]}(x;\varepsilon) &:= \frac{\psi_{n_0}(|x|)}{ix}, \\
M^{[n_0]}(x;\varepsilon) &:= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{T \in \mathcal{S}_{k,n_0}^{\mathcal{R}}} \mathcal{V}_T(x;\varepsilon), \\
\mathcal{M}^{[n_0]}(x;\varepsilon) &:= \chi_{n_0}(|x|)\, M^{[n_0]}(x;\varepsilon),
\end{aligned} \tag{9.11}$$

enquanto que, para $n \geq n_0 + 1$, escrevendo

$$\begin{aligned}
\Xi_n(x;\varepsilon) &:= \chi_{n_0}(|x|) \ldots \chi_{n-1}(|ix - \mathcal{M}^{[n-2]}(x;\varepsilon)|)\, \chi_n(|ix - \mathcal{M}^{[n-1]}(x;\varepsilon)|), \\
\Psi_n(x;\varepsilon) &:= \chi_{n_0}(|x|) \ldots \chi_{n-1}(|ix - \mathcal{M}^{[n-2]}(x;\varepsilon)|)\, \psi_n(|ix - \mathcal{M}^{[n-1]}(x;\varepsilon)|),
\end{aligned}$$

definimos

$$
\begin{aligned}
g^{[n]}(x;\varepsilon) &:= \frac{\Psi_n(x;\varepsilon)}{ix - \mathcal{M}^{[n-1]}(x;\varepsilon)}, \\
M^{[n]}(x;\varepsilon) &:= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{T\in\mathcal{S}^{\mathcal{R}}_{k,n}} \mathcal{V}_T(x;\varepsilon), \\
\mathcal{M}^{[n]}(x;\varepsilon) &:= \mathcal{M}^{[n-1]}(x;\varepsilon) + \Xi_n(x;\varepsilon)\, M^{[n]}(x;\varepsilon) \\
&= \sum_{j=n_0}^{n} \Xi_j(x;\varepsilon)\, M^{[j]}(x;\varepsilon)\,, \qquad (9.12)
\end{aligned}
$$

onde $\mathcal{V}_T(x;\varepsilon)$ é definido como em (9.9).

Deve-se agora compreender, das definições acima, que se θ é uma árvore em $\Theta^{\mathcal{R}}_{k,\boldsymbol{\nu}}$ ou $\mathcal{S}^{\mathcal{R}}_{k,n}$, todas as suas linhas são de escala $\geq n_0$. Em particular, se $T \in \mathcal{S}^{\mathcal{R}}_{k,n_0}$, todas as linhas em T são exatamente de escala n_0 e, daí, para todo $\ell \in L(T)$, os propagadores $g^{[n_0]}(x_\ell;\varepsilon)$ são como em (9.11).

Observação 9.8 *Note que se a linha ℓ é de escala $n \geq n_0 + 1$ e, fixando $x = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}_\ell$, tem-se $g^{[n]}(x;\varepsilon) \neq 0$, isso requer $\chi_{n_0}(|x|) \neq 0$, $\chi_{n_0+1}(|ix - \mathcal{M}^{[n_0]}(x;\varepsilon)|) \neq 0$, ..., $\chi_{n-1}(|ix - \mathcal{M}^{[n-2]}(x;\varepsilon)|) \neq 0$ e $\psi_n(|ix - \mathcal{M}^{[n-1]}(x;\varepsilon)|) \neq 0$, o que significa que*

$$
\begin{aligned}
&|x| \leq 2^{-n_0} C_1, \\
&|ix - \mathcal{M}^{[n_0]}(x;\varepsilon)| \leq 2^{-(n_0+1)} C_1, \\
&|ix - \mathcal{M}^{[n_0+1]}(x;\varepsilon)| \leq 2^{-(n_0+2)} C_1, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&|ix - \mathcal{M}^{[n-2]}(x;\varepsilon)| \leq 2^{-(n-1)} C_1, \\
&|ix - \mathcal{M}^{[n-1]}(x;\varepsilon)| \geq 2^{-(n+1)} C_1,
\end{aligned}
$$

de modo que, em particular, tem-se $|g^{[n]}_\ell| \leq C_1^{-1} 2^{n+1}$. Se ℓ é de escala n_0 e $g^{[n_0]}(x;\varepsilon) \neq 0$, então $\psi_{n_0}(|x|) \neq 0$, o que implica que $|g^{[n_0]}_\ell| \leq C_1^{-1} 2^{n_0+1}$.

Então definimos, formalmente, para $\boldsymbol{\nu} \neq \mathbf{0}$,

$$
u^{[k]}_{\boldsymbol{\nu}} = \sum_{\theta\in\Theta^{\mathcal{R}}_{k,\boldsymbol{\nu}}} \mathrm{Val}(\theta), \qquad \mathrm{Val}(\theta) = \left(\prod_{\ell\in L(\theta)} g^{[n_\ell]}_\ell\right)\left(\prod_{v\in B(\theta)} F_v\right), \qquad (9.13)
$$

enquanto que, para $\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}$, tem-se $u^{[k]}_{\mathbf{0}} = 0$, e escrevemos

$$
\widehat{u}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k u^{[k]}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \sum_{\boldsymbol{\nu}\in\mathbb{Z}^d} u^{[k]}_{\boldsymbol{\nu}} e^{i\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{\omega}t}, \qquad (9.14)
$$

onde os coeficientes $u_{\nu}^{[k]}$ dependem de ε (assim como os propagadores); note que a ordem k de uma árvore renormalizada θ ainda é definida como $k = |V(\theta)|$, mas ela não corresponde mais à ordem perturbativa.

Definição 9.9 *Seja ω satisfazendo as condições Diophantinas (7.14), página 118. Fixe ε tal que se tenha*

$$\left|i\omega \cdot \nu - \mathcal{M}^{[n]}(\omega \cdot \nu; \varepsilon)\right| \geq C_1 |\nu|^{-\tau_1}, \qquad \forall \nu \in \mathbb{Z}_*^d \ \ e \ \ \forall n \geq n_0. \tag{9.15}$$

com constantes Diophantinas C_1 e τ_1, onde $\tau_1 > \tau$ e $C_1 < C_0$ serão fixados mais tarde. Chamamos $\mathcal{E}_*$ o conjunto de todos os ε para os quais as condições Diophantinas(9.15) são satisfeitas, e vamos nos referir a ele como o conjunto de valores admissíveis *de ε.* □

Veremos nas próximas seções que para $\varepsilon \in \mathcal{E}_*$ seremos capazes de dar um significado à (até agora formal) expansão renormalizada (9.14), daí provaremos que o conjunto $\mathcal{E}_*$ tem medida positiva de Lebesgue, desde que τ_1 e C_1^{-1} sejam escolhidos suficientemente grandes.

Fixe $\bar{\varepsilon}$ tal que a série obtida de (9.14) pela substituição de $g_\ell^{[n_\ell]}$ em (9.13) com o limite $2^{n_\ell+1}C_1^{-1}$ converja para $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$, e fixe $\varepsilon_0 \leq \bar{\varepsilon}$ suficientemente pequeno (o quão pequeno será determinado na análise que virá). Em seguida, vamos considerar o intervalo $[0, \varepsilon_0]$; o intervalo $[-\varepsilon_0, 0]$ pode ser estudado da mesma maneira.

Será conveniente dividir o intervalo $[0, \varepsilon_0]$ em infinitos intervalos disjuntos da seguinte forma:

$$[0, \varepsilon_0] = \{0\} \cup \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathcal{E}_m, \qquad \mathcal{E}_m := \left(2^{-(m+1)}\varepsilon_0, 2^{-m}\varepsilon_0\right], \tag{9.16}$$

e estudar separadamente cada intervalo $\mathcal{E}_m$. Provaremos que para cada m os valores admissíveis de ε dentro de $\mathcal{E}_m$ têm medida grande, e que suas medidas relativas $\text{meas}(\mathcal{E}_m \cap \mathcal{E}_*)/\text{meas}(\mathcal{E}_m)$ tendem a 1 quando m tende a infinito.

Portanto, a seguir imaginamos que temos m fixado, e fazemos $\varepsilon_m = 2^{-m}\varepsilon_0$, de modo que $\mathcal{E}_m = (\varepsilon_m/2, \varepsilon_m]$.

9.2 Propriedades dos Valores de Auto-Energia

Dada um gráfico de auto-energia $T \in \mathcal{S}_{k,n_0}^{\mathcal{R}}$, defina

$$\overline{\mathcal{V}}_T(x;\varepsilon) := \varepsilon^{k_T} \left(\prod_{\ell \in L(T)} \frac{1}{ix_\ell} \right) \left(\prod_{v \in B(T)} F_v \right), \tag{9.17}$$

que difere de $\mathcal{V}_T(x;\varepsilon)$ porque $\psi_{n_0}(|x_\ell|)$ é substituído por 1 para todo $\ell \in L(T)$, faça

$$\mathcal{M}_j^{[n_0]}(x;\varepsilon) = \chi_{n_0}(|x|)M_j^{[n_0]}(x;\varepsilon), \qquad M_j^{[n_0]}(x;\varepsilon) = \sum_{k=1}^{j} \varepsilon^k \sum_{T\in\mathcal{S}_{k,n_0}^{\mathcal{R}}} \mathcal{V}_T(x;\varepsilon),$$

$$\overline{\mathcal{M}}_j^{[n_0]}(x;\varepsilon) = \chi_{n_0}(|x|)\overline{M}_j^{[n_0]}(x;\varepsilon), \qquad \overline{M}_j^{[n_0]}(x;\varepsilon) = \sum_{k=1}^{j} \varepsilon^k \sum_{T\in\mathcal{S}_{k,n_0}^{\mathcal{R}}} \overline{\mathcal{V}}_T(x;\varepsilon). \tag{9.18}$$

Isso nos permite decompor

$$\mathcal{M}_j^{[n_0]}(0;\varepsilon) = \overline{\mathcal{M}}_j^{[n_0]}(0;\varepsilon) + \left(\mathcal{M}_j^{[n_0]}(0;\varepsilon) - \overline{\mathcal{M}}_j^{[n_0]}(0;\varepsilon)\right), \tag{9.19}$$

onde $\overline{\mathcal{M}}_j^{[n_0]}(0;\varepsilon)$ não depende nem de x nem de n_0. Note que se tem que $\mathcal{M}_j^{[n_0]}(0;\varepsilon) = M_j^{[n_0]}(0;\varepsilon)$ e $\overline{\mathcal{M}}_j^{[n_0]}(0;\varepsilon) = \overline{M}_j^{[n_0]}(0;\varepsilon)$ já que $\chi_{n_0}(0) = 1$ para todo $n_0 \geq 0$.

Lema 9.10 *Seja G_j, $j \geq 1$, como no Capítulo 8. Então, tem-se*

$$\overline{\mathcal{M}}_{j_0}^{[n_0]}(0;\varepsilon) = \sum_{k=1}^{j_0} \varepsilon^k G_k\,, \tag{9.20}$$

para todo n_0 e todo j_0. □

Prova. Fazendo $x = 0$, qualquer gráfico de auto-energia T em $\mathcal{S}_{k,n_0}^{\mathcal{R}}$ que contribui para $\overline{\mathcal{M}}_{j_0}^{[n_0]}(x;\varepsilon)$ aparece como uma árvore θ em $\widetilde{\mathcal{T}}_{k,\mathbf{0}}$, exceto pela presença dos rótulos de escala (compare (9.17) com (9.9): se $T \in \mathcal{S}_{k,n_0}^{\mathcal{R}}$ cada linha $\ell \in L(T)$ tem escala $n_\ell = n_0$). Todavia, os propagadores correspondentes não dependem das escalas. Logo

$$\sum_{T\in\mathcal{S}_{k,n}^{\mathcal{R}}} \overline{\mathcal{V}}_T(0;\varepsilon) = \sum_{\theta\in\widetilde{\mathcal{T}}_{k,\mathbf{0}}} \mathrm{Val}(\theta)\,,$$

e a afirmação segue da definição de G_k (veja Lema 8.5, página 122). ■

Lema 9.11 *Para qualquer gráfico de auto-energia T, tem-se*

$$1 - \prod_{\ell\in L(T)} (1 - \chi_{n_0}(|x_\ell|)) \leq \sum_{\ell\in L(T)} \chi_{n_0}(|x_\ell|)\,,$$

e o mesmo resultado vale se cada x_ℓ for substituído por x_ℓ^0. □

Prova. Segue da identidade

$$\prod_{j=1}^{n}(1-a_j) = 1 - a_1 - \sum_{j=2}^{n} a_j \prod_{i=1}^{j-1}(1-a_i)$$

com $n \geq 2$ e $0 \leq a_j \leq 1$, que pode ser facilmente provado por indução. ■

Lema 9.12 *Para todo $n_0 \in \mathbb{Z}_+$, tem-se*

$$\left|\mathcal{M}_{j_0}^{[n_0]}(0;\varepsilon) - \overline{\mathcal{M}}_{j_0}^{[n_0]}(0;\varepsilon)\right| \leq B_1 |\varepsilon| e^{-B_2 2^{n_0/\tau_1}},$$

$$\left|\partial_\varepsilon \left(\mathcal{M}_{j_0}^{[n_0]}(0;\varepsilon) - \overline{\mathcal{M}}_{j_0}^{[n_0]}(0;\varepsilon)\right)\right| \leq B_1 e^{-B_2 2^{n_0/\tau_1}},$$

para constantes apropriadas B_1 e B_2, dependentes de j_0, mas independentes de n_0. □

Prova. Pode-se escrever $M^{[n_0]}(0;\varepsilon)$ como em (9.11) com $x = 0$, onde $\mathcal{V}_T(0;\varepsilon)$ é dado por (9.9) com $n_\ell = n_0$ e

$$g_\ell^{[n_\ell]} = \frac{\psi_{n_0}(|x_\ell^0|)}{ix_\ell^0} = \frac{1 - \chi_{n_0}(|x_\ell^0|)}{ix_\ell^0}.$$

Além do mais $\mathcal{M}_{j_0}^{[n_0]}(x;\varepsilon)$ e $\overline{\mathcal{M}}_{j_0}^{[n_0]}(0;\varepsilon)$ são polinômios de grau j_0 em ε, daí tem-se

$$\mathcal{M}_{j_0}^{[n_0]}(0;\varepsilon) - \overline{\mathcal{M}}_{j_0}^{[n_0]}(0;\varepsilon) = \sum_{k=1}^{j_0} \sum_{T \in \mathcal{S}_{k,n_0}^{\mathcal{R}}} \left(\mathcal{V}_T(0;\varepsilon) - \overline{\mathcal{V}}_T(0;\varepsilon)\right),$$

que é trivialmente diferenciável com respeito a ε. Aplicando o Lema 9.11, obtemos

$$\left|\left(\mathcal{M}_{j_0}^{[n_0]}(0;\varepsilon) - \overline{\mathcal{M}}_{j_0}^{[n_0]}(0;\varepsilon)\right)\right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{j_0} |\varepsilon|^k \sum_{T \in \mathcal{S}_{k,n_0}^{\mathcal{R}}} \sum_{\ell' \in L(T)} \chi_{n_0}(|x_{\ell'}^0|) \left(\prod_{\ell \in L(T)} \frac{1}{|x_\ell^0|}\right) \left(\prod_{v \in B(T)} |F_v|\right), \quad (9.21)$$

e, para $\partial_\varepsilon(\mathcal{M}_{j_0}^{[n_0]}(0;\varepsilon) - \overline{\mathcal{M}}_{j_0}^{[n_0]}(0;\varepsilon))$, o mesmo limite pode ser obtido com $k|\varepsilon|^{k-1}$ ao invés de $|\varepsilon|^k$. Em (9.21) o fator $\chi_{n_0}(|x_{\ell'}^0|)$ requer que $|x_{\ell'}^0| \leq C_1 2^{-n_0}$, de modo que pela condição Diophantina (7.14) tem-se $|\boldsymbol{\nu}_{\ell'}^0| \geq 2^{n_0/\tau}$, daí, em

$$\left(\prod_{v \in B(T)} |F_v|\right) \leq Q^{|B(T)|} \left(\prod_{v \in B(T)} e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}_v|/2}\right) \left(\prod_{v \in B(T)} e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}_v|/4}\right) \left(\prod_{v \in B(T)} e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}_v|/4}\right)$$

pode-se limitar o terceiro produto por

$$\left(\prod_{v \in B(T)} e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}_v|/4}\right) \leq e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}_{\ell'}^0|/4} \leq e^{-\kappa 2^{n_0/\tau}/4} < e^{-\kappa 2^{n_0/\tau_1}/4},$$

se $\tau_1 > \tau_0$, enquanto o segundo produto é usado para se executar a soma sobre os rótulos dos modos e do primeiro para se concluir que, raciocinando como na passagem de (8.11) para (8.13), página 130,

$$\left(\prod_{\ell \in L(T)} \frac{1}{|x_\ell^0|}\right) \left(\prod_{v \in B(T)} e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}_v|/2}\right) \leq \left(\frac{\tau!}{C_0} \left(\frac{2|L(T)|}{\kappa}\right)^\tau\right)^{|L(T)|} \leq \overline{\Gamma}_1 \overline{\Gamma}_2^{k_T} (k_T!)^\beta,$$

com $k_T = k$ para $T \in \mathcal{S}^{\mathcal{R}}_{k,n_0}$, de modo que, colocando juntos os limites e os inserindo em (9.21), provamos a asserção. Em particular B_1 é proporcional a $\overline{\Gamma}_2^{j_0}(j_0!)^\beta$, enquanto que B_2 é independente de j_0. ■

Lema 9.13 *Seja G_j, $j \geq 1$, como no Capítulo 8. Assuma que exista $j_0 \in \mathbb{Z}_+$ tal que $G_{j_0} \neq 0$ e $G_j = 0$ para todo $1 \leq j < j_0$. Existem duas constantes c_1 e c_2, dependendo de j_0, tal que para*

$$n_0 \geq \tau_1 \log_2 \left(c_1 + c_2 \log \frac{1}{|\varepsilon|} \right), \tag{9.22}$$

tem-se

$$\left| \partial_\varepsilon \mathcal{M}_{j_0}^{[n_0]}(0;\varepsilon) \right| \geq \frac{j_0}{2} |\varepsilon|^{j_0-1} |G_{j_0}|, \tag{9.23}$$

com ε suficientemente pequeno. Se $j_0 = 1$, pode-se tomar $c_2 = 0$. □

Prova. Pelo Lema 9.10, pode-se escrever

$$\overline{\mathcal{M}}_{j_0}^{[n_0]}(0;\varepsilon) = \sum_{k=1}^{j_0} \varepsilon^k G_k = \varepsilon^{j_0} G_{j_0}, \tag{9.24}$$

de maneira que

$$\partial_\varepsilon \overline{\mathcal{M}}_{j_0}^{[n_0]}(0;\varepsilon) = j_0 \varepsilon^{j_0-1} G_{j_0}. \tag{9.25}$$

Pelo Lema 9.12, podemos limitar

$$\left| \partial_\varepsilon \left(\mathcal{M}_{j_0}^{[n_0]}(0;\varepsilon) - \overline{\mathcal{M}}_{j_0}^{[n_0]}(0;\varepsilon) \right) \right| \leq \beta_1 B_1 e^{-\beta_2 B_2 2^{n_0/\tau_1}} \leq \frac{1}{2} |\varepsilon|^{j_0-1} |G_{j_0}|, \tag{9.26}$$

onde a primeira desigualdade é obtida desde que $\beta_2 \leq 1$ e $\beta_1 \geq 1$, enquanto que a segunda requer

$$n_0 \geq \tau_1 \log_2 \left(\frac{1}{\beta_2 B_2} \log \frac{2\beta_1 B_1}{|G_{j_0}|} + \frac{j_0 - 1}{\beta_2 B_2} \log \frac{1}{|\varepsilon|} \right), \tag{9.27}$$

de modo que a asserção segue se c_1 e c_2 são escolhidos de acordo com (9.27). ■

Observação 9.14 *As constantes β_1 e β_2 em (9.26) podem ser tomadas $\beta_1 = \beta_2 = 1$. Entretanto, a seguir será útil ter alguma liberdade para fixar seus valores; veja em particular Observação 9.21.*

Observação 9.15 *Note que se escolhermos $n_0 = \tau_1 \log_2(c_1 + c_2 \log(2/\varepsilon_m))$ obtemos um valor de n_0 que pode ser usado para todo $\varepsilon \in \mathcal{E}_m$.*

9.3 Convergência da Expansão Renormalizada

Nos encontramos agora com o problema de provar à convergência da série que define a expansão renormalizada (9.14). Além disso, devemos estimar o quão grande é o conjunto $\mathcal{E}_* \cap [0, \varepsilon_0]$ de valores admissíveis de ε; verificaremos que ele é um conjunto com medida positiva e relativamente grande.

Como fixamos m, por simplicidade de notação, no que segue achamos conveniente fazer a abreviação $\mathcal{E}^{[\infty]} \equiv \mathcal{E}_* \cap \mathcal{E}_m$. Assumiremos $\varepsilon \in \mathcal{E}^{[\infty]}$, e n_0 fixado como na Observação 9.15.

Lema 9.16 *Assuma que o conjunto $\mathcal{E}^{[\infty]}$ tenha medida não nula e que para todo $\varepsilon \in \mathcal{E}^{[\infty]}$ e para todo $n_0 \leq j < n-1$ as funções $\mathcal{M}^{[j]}(x;\varepsilon)$ sejam C^1 em x e satisfaçam*

$$\left|\mathcal{M}^{[j]}(x;\varepsilon)\right| \leq D\sqrt{|\varepsilon|}, \qquad \left|\partial_x \mathcal{M}^{[j]}(x;\varepsilon)\right| \leq D\sqrt{|\varepsilon|}, \tag{9.28}$$

para alguma constante D. Então, existe uma constante positiva c, independente de n, tal que para qualquer árvore renormalizada θ com $\mathrm{Val}(\theta) \neq 0$, o número $N_j(\theta)$ de linhas em escala j satisfaz

$$N_j(\theta) \leq c\, 2^{-j/\tau_1} \sum_{v \in B(\theta)} |\boldsymbol{\nu}_v|, \tag{9.29}$$

para todo $n_0 < j \leq n-1$. □

Prova. Fixe $K(\theta) := \sum_{v \in B(\theta)} |\boldsymbol{\nu}_v|$ e chame $N_j^\dagger(\theta)$ o número de linhas em $L(\theta)$ com escala $j' \geq j$. Provaremos indutivamente, sobre a ordem k das árvores renormalizadas, que a desigualdade

$$N_j^\dagger(\theta) \leq \max\{0, 2K(\theta)2^{(3-j)/\tau_1} - 1\} \tag{9.30}$$

é válida para todo para todo $n_0 < j \leq n-1$

Se θ tem $k = 0$, temos $B(\theta) = \{v\}$ e $K(\theta) = |\boldsymbol{\nu}_v|$. A linha ℓ saindo de v pode ter escala $n_\ell \geq j$ somente se $|ix - \mathcal{M}^{[j-2]}(x;\varepsilon)| \leq 2^{-j+1}C_1$ (veja Observação 9.8), com $x = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}_v$, daí, pelas condições Diophantinas (9.15), temos $|\boldsymbol{\nu}_v| \geq 2^{(j-1)/\tau_1}$, o que implica $2\,K(\theta)\,2^{(3-j)/\tau_1} \geq 22^{2/\tau_1} \geq 2$. Portanto, em tal caso o limite (9.30) é trivialmente satisfeito.

Se θ é uma árvore renormalizada de ordem $k \geq 1$, assumimos que o limite vale para todas as árvores renormalizadas de ordem $k' < k$. Defina $E_j = (2\,2^{(3-j)/\tau_1})^{-1}$: então, temos que provar que $N_j^\dagger(\theta) \leq \max\{0, K(\theta)E_j^{-1} - 1\}$.

Seja ℓ a linha raiz de θ e $\ell_1, \ldots, \ell_m$ as $m \geq 0$ linhas em escala $\geq j$ que estão mais próximas de ℓ (*i.e.*, tal que nenhuma outra linha ao longo dos caminhos conectando as linhas $\ell_1, \ldots, \ell_m$ à linha raiz tenha escala $\geq j$).

Se a linha raiz ℓ de θ tem escala $n_\ell < j$, então

$$N_j^\dagger(\theta) = \sum_{i=1}^{m} N_j^\dagger(\theta_i),$$

onde θ_i é a sub-árvore renormalizada com ℓ_i como linha raiz, daí a desigualdade pretendida segue pela hipótese indutiva.

Se a linha raiz ℓ tem escala $n_\ell \geq j$, então $\ell_1, \ldots, \ell_m$ são linhas que entram em um cluster T.

Denotando novamente por θ_i a sub-árvore renormalizada tendo ℓ_i como linha raiz, temos

$$N_j^\dagger(\theta) = 1 + \sum_{i=1}^{m} N_j^\dagger(\theta_i), \tag{9.31}$$

de modo que o limite se torna trivial se $m = 0$ ou $m \geq 2$.

Se $m = 1$, então temos um cluster T com duas linhas externas ℓ e ℓ_1, ambas em escalas $\geq j$. Sejam $x_\ell = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}_\ell$ e $x_{\ell_1} = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}_{\ell_1}$, então

$$\left|ix_\ell - \mathcal{M}^{[j-2]}(x_\ell;\varepsilon)\right| \leq 2^{-j+1}C_1, \qquad \left|ix_{\ell_1} - \mathcal{M}^{[j-2]}(x_{\ell_1};\varepsilon)\right| \leq 2^{-j+1}C_1, \tag{9.32}$$

e $\boldsymbol{\nu}_\ell \neq \boldsymbol{\nu}_{\ell_1}$, caso contrário T seria um gráfico de auto-energia. Então, por (9.32), temos

$$\begin{aligned} 2^{-j+2}C_1 &\geq \left|i(x_\ell - x_{\ell_1}) - \mathcal{M}^{[j-2]}(x_\ell;\varepsilon) + \mathcal{M}^{[j-2]}(x_{\ell_1};\varepsilon)\right| \\ &= \left|(x_\ell - x_{\ell_1})\left(i - \partial_x \mathcal{M}^{[j-2]}(x_*;\varepsilon)\right)\right| \\ &\geq |x_\ell - x_{\ell_1}|\left(1 - D\sqrt{|\varepsilon|}\right) \geq \frac{1}{2}|x_\ell - x_{\ell_1}|, \end{aligned}$$

para ε suficientemente pequeno. Acima, x_* é um ponto entre x_ℓ e x_{ℓ_1}, e a suposição (9.28) foi usada. Daí, pela condição Diophantina (7.14), tem-se $|\boldsymbol{\nu}_\ell - \boldsymbol{\nu}_{\ell_1}| > 2^{(j-3)/\tau_1}$, de modo que

$$\sum_{v \in B(T)} |\boldsymbol{\nu}_v| \geq |\boldsymbol{\nu}_T| = |\boldsymbol{\nu}_\ell - \boldsymbol{\nu}_{\ell_1}| > 2^{(j-3)/\tau_1} > E_j,$$

logo $K(\theta) - K(\theta_1) > E_j$, que, inserido em (9.31) com $m = 1$, dá, usando a hipótese indutiva,

$$\begin{aligned} N_j^\dagger(\theta) &= 1 + N_j^\dagger(\theta_1) \leq 1 + K(\theta_1)\,E_j^{-1} - 1 \\ &\leq 1 + \Big(K(\theta) - E_j\Big)E_j^{-1} - 1 \leq K(\theta)\,E_j^{-1} - 1, \end{aligned}$$

portanto a desigualdade pretendida está provada também no caso onde a linha raiz tem escala $n_\ell \geq j$. ■

Observação 9.17 *Seja j_0 como no Lema 9.13. Se ε_0 for suficientemente pequeno. para todo $\varepsilon \in (\varepsilon_m/2, \varepsilon_m]$ e n_0 escolhido de acordo com a Observação 9.15. Se $j_0 = 1$, então podemos limitar*

$$|\varepsilon|^k\, 2^{(2k-1)n_0} \leq c_1^{(2k-1)\tau_1}\, |\varepsilon|^k\,. \tag{9.33}$$

Por outro lado, se $j_0 > 1$, limitamos

$$|\varepsilon|^k\, 2^{(2k-1)n_0} \leq (2c_2)^{(2k-1)\tau_1}\, |\varepsilon|^k \left(\log \frac{2}{|\varepsilon|}\right)^{(2k-1)\tau_1}. \tag{9.34}$$

Com a mesma suposição sob ε, temos ainda

$$\left(\log \frac{2}{|\varepsilon|}\right)^{\tau_1} \leq S_p \left(\frac{1}{|\varepsilon|}\right)^p, \tag{9.35}$$

para todo $p > 0$ e com S_p constante positiva dependente de p. Portanto, em (9.34), tomando $p \leq 1/4$, obtemos para $j_0 > 1$

$$|\varepsilon|^k\, 2^{n_0(2k-1)} \leq (2c_2)^{(2k-1)\tau_1}\, S_p^{2k-1}\, |\varepsilon|^{k/2}. \tag{9.36}$$

Portanto, qualquer que seja o valor de j_0, podemos limitar

$$|\varepsilon|^k 2^{(2k-1)n_0} \leq c_3 |\varepsilon|^{k/2}, \tag{9.37}$$

para todo $k \geq 1$, sendo c_3 uma constante positiva adequada.

Observação 9.18 *Em particular, pode-se escolher $p \leq 1/(2(2j_0+1))$, o que implica*

$$|\varepsilon|^{k-1} \left(\log \frac{2}{|\varepsilon|}\right)^{(2k-1)\tau_1} \leq |\varepsilon|^{j_0-1} \sqrt{|\varepsilon|}\, |\varepsilon|^{(k-j_0-1)/2}$$

para todo $k \geq j_0 + 1$, uma propriedade que será muito útil a seguir.

Lema 9.19 *Fixe p como na Observação 9.17. Então, temos*

$$\left|\mathcal{M}^{[n_0]}(x;\varepsilon)\right| \leq D\sqrt{|\varepsilon|}, \qquad \left|\partial_x \mathcal{M}^{[n_0]}(x;\varepsilon)\right| \leq D\,|\varepsilon|\,,$$

para constantes positivas adequadas D e D'. □

Prova. O primeiro limite segue de (9.37).

Seja j_0 como no Lema 9.13. Se $j_0 = 1$ então n_0 não depende de ε, e também o segundo limite é trivialmente satisfeito.

Se $j_0 \geq 2$, para se obter o segundo limite, analisa-se de maneiras diferentes as contribuições com $k_T = 1$ e as contribuições com $k_T \geq 2$. Se $k_T = 1$ então $\mathcal{V}_T(x;\varepsilon)$ não depende de x (veja Observação 9.6), de modo que, usando as notações (9.18), temos $\mathcal{M}_1^{[n_0]}(x;\varepsilon) = \chi_{n_0}(|x|) M_1^{[n_0]}(0;\varepsilon)$, e escrevemos

$$M_1^{[n_0]}(0;\varepsilon) = \overline{M}_1^{[n_0]}(0;\varepsilon) + \left(M_1^{[n_0]}(0;\varepsilon) - \overline{M}_1^{[n_0]}(0;\varepsilon)\right),$$

onde $\overline{M}_1^{[n_0]}(0;\varepsilon) = 0$ pelo Lema 9.10 (e pela definição de j_0), enquanto que a diferença

$$\mathcal{M}_1^{[n_0]}(0;\varepsilon) - \overline{\mathcal{M}}_1^{[n_0]}(0;\varepsilon) = \chi_{n_0}(|x|)\left(M_1^{[n_0]}(0;\varepsilon) - \overline{M}_1^{[n_0]}(0;\varepsilon)\right)$$

pode ser limitada pelo Lema 9.12 proporcionalmente a $e^{-B_2 2^{n_0/\tau_1}}$. Assim, a derivada com respeito a x age somente sobre a função de suporte compacto $\chi_{n_0}(|x|)$ e produz um fator 2^{n_0} que é controlado pelo fator exponencialmente pequeno $e^{-B_2 2^{n_0/\tau_1}}$. A conclusão é que as contribuições com $k_T = 1$ podem ser limitadas proporcionalmente a ε. As contribuições com $k_T = 2$ podem ser limitadas recaindo novamente sobre (9.37). ■

Lema 9.20 *Fixe p como na Observação 9.17 e n_0 como na Observação 9.15. Para $\varepsilon \in \mathcal{E}^{[\infty]}$ e para x tal que $g^{[n]}(x;\varepsilon) \neq 0$, existem duas constantes D e D' tais que as funções $\mathcal{M}^{[j]}(x;\varepsilon)$ são funções suaves em x e satisfazem os limites*

$$\left|\mathcal{M}^{[j]}(x;\varepsilon)\right| \leq D\sqrt{|\varepsilon|}, \qquad \left|\partial_x \mathcal{M}^{[j]}(x;\varepsilon)\right| \leq D\,|\varepsilon|,$$

$$\left|\mathcal{M}^{[j]}(x;\varepsilon) - \mathcal{M}^{[j-1]}(x;\varepsilon)\right| \leq D\,|\varepsilon| e^{-D' 2^{j/\tau_1}}, \tag{9.38}$$

para todo $n_0 < j \leq n-1$. Além do mais, para todo gráfico de auto-energia T contribuindo para $\mathcal{M}^{[j]}(x;\varepsilon)$, com $n_0 < j \leq n-1$, temos

$$N_{j'}(T) \leq c\, 2^{-j'/\tau_1} \sum_{v \in B(T)} |\boldsymbol{\nu}_v|\,, \tag{9.39}$$

para todo $j' \leq j$. □

Prova. O primeiro limite em (9.38) pode ser provado por indução sobre $n_0 \leq j \leq n-1$. Para $j = n_0$ isso já foi checado (veja Lema 9.19). Vamos assumir que isso vale para todo $n_0 \leq j' < j$. Podemos prosseguir como na prova do Lema 2 da referência [27]. Primeiramente, pode-se provar que para qualquer gráfico de auto-energia $T \in \mathcal{S}^{\mathcal{R}}_{k,j}$ valem as desigualdades

$$\sum_{v \in B(T)} |\boldsymbol{\nu}_v| > 2^{(j-4)/\tau_1}\,, \quad N_{j'}(T) \leq 2\, 2^{(3-j')/\tau_1} \sum_{v \in B(T)} |\boldsymbol{\nu}_v|\,, \quad n_0+1 \leq j' \leq j, \tag{9.40}$$

onde $N_{j'}(T)$ denota o número de linhas em escala j' contidas em T. Omitiremos a prova porque ela é idêntica à apresentada em [27].

As estimativas (9.40) nos permitem limitar

$$|\mathcal{V}_T(x;\varepsilon)| \leq |\varepsilon|^k\, A_1 A_2^k e^{-A_3 2^{j/\tau_1}} \prod_{v \in B(T)} e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}_v|/2}. \tag{9.41}$$

A única diferença com relação ao limite análogo (7.18) em [27] é que as constantes A_1 e A_2 agora dependem de ε. De fato, dado um gráfico de auto-energia $T \in \mathcal{S}^{\mathcal{R}}_{k,j}$, se expressarmos seus valores de acordo com (9.9), podemos limitar

$$\prod_{\ell \in L(T)} |g_\ell^{[n_\ell]}| \leq \left(2C_1^{-1}\right)^{|L(T)|} 2^{n_0 N_{n_0}(T)} \left(\prod_{n=n_0+1}^{j} 2^{n N_n(T)} \right),$$

com $N_{n_0}(T) \leq 2k-1$ e $N_n(T) \leq c\, 2^{-n/\tau_1} \sum_{v \in B(T)} |\boldsymbol{\nu}_v|$ para todo $n_0+1 \leq n \leq j$, de acordo com o segundo limite em (9.40). Daí, o último produto pode ser limitado usando o limite sobre $N_n(T)$ e (9.7) com $n_1(\kappa, c, \tau) = n_0$: apenas note que para ε_0 suficientemente pequeno uma escolha para $n_1(\kappa, c, \tau)$ automaticamente satisfaz a desigualdade em (9.7). Então podemos aplicar os limites dados na Observação 9.17 para escrever

$$|\varepsilon|^k A_1 A_2^k = \overline{A}_1 \overline{A}_2^k |\varepsilon|^{k/2}, \tag{9.42}$$

com $\overline{A}_1$ e $\overline{A}_2$ duas constantes independentes de ε. Assim, o primeiro limite em (9.38) está provado.

Para obtermos o terceiro limite em (9.38), notamos que para $j \geq n_0+1$

$$\begin{aligned} \left|\mathcal{M}^{[j]}(x;\varepsilon) - \mathcal{M}^{[j-1]}(x;\varepsilon)\right| &\leq \left|M^{[j]}(x;\varepsilon)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{T \in \mathcal{S}^{\mathcal{R}}_{k,j}} |\mathcal{V}_T(x;\varepsilon)| \\ &= \sum_{T \in \mathcal{S}^{\mathcal{R}}_{1,j}} |\mathcal{V}_T(x;\varepsilon)| + \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{T \in \mathcal{S}^{\mathcal{R}}_{k,j}} |\mathcal{V}_T(x;\varepsilon)|, \end{aligned} \tag{9.43}$$

onde a última soma pode ser limitada proporcionalmente a $|\varepsilon|\, e^{-A_3 2^{j/\tau_1}}$, por causa de (9.41) e de (9.42). O primeiro pode ser limitado proporcionalmente a $|\varepsilon|$ se $j_0 = 1$. Se $j_0 \geq 2$ podemos raciocinar da seguinte maneira. Podemos limitar $|\mathcal{V}_T(x;\varepsilon)|$ de acordo com (9.41), com $k = 1$, e escrever $e^{-A_3 2^{j/\tau_1}} = e^{-A_3 2^{j/\tau_1}/2} e^{-A_3 2^{j/\tau_1}/4} e^{-A_3 2^{j/\tau_1}/4}$. O gráfico de auto-energia T contém exatamente uma linha ℓ em escala j (porque $T \in \mathcal{S}^{\mathcal{R}}_{1,j}$), daí $n_\ell = j$ e $|g_\ell^{[n_\ell]}| \leq C_1^{-1} 2^{j+1}$, de modo que $2^j e^{-A_3 2^{j/\tau_1}/4}$ é limitado por uma constante. Além do mais, temos $e^{-A_3 2^{j/\tau_1}/4} \leq e^{-\beta_2 B_2 2^{n_0/\tau_1}} \leq |G_{j_0}|(2\beta_1 B_1)^{-1}|\varepsilon|^{j_0-1}$ se β_2 em (9.26) é escolhido de maneira que $\beta_2 B_2 \leq A_3/4$ (veja Observação 9.14). Portanto, podemos concluir que se $j_0 \geq 2$ a primeira soma em (9.43) pode ser limitada proporcionalmente a $|\varepsilon||\varepsilon|^{j_0-1} e^{-A_3 2^{j/\tau_1}/2}$. Daí o terceiro limite em (9.38) segue para qualquer valor de j_0, com $D' = A_3/2$.

A segunda desigualdade em (9.38) novamente pode ser provado raciocinando como em [27] para contribuições vindas de gráficos de auto-energia T com $k_T \geq 2$. As contribuições vindas de gráficos de auto-energia T com $k_T = 1$ podem ser limitadas por $|\varepsilon| \mathcal{Q} C_1^{-1} 2^{n+1} e^{-A_3 2^{n/\tau_1}} e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}_v|/2}$ (como no limite sobre a primeira soma no lado direito de (9.43)) porque existe somente um propagador em escala n. Então, se a derivada age sobre a função de suporte compacto $\chi_{n_0}(|x|)$, temos $2^{n_0} 2^{n+1} e^{-A_3 2^{n/\tau_1}/2}$, que é limitado por uma constante para todo $n > n_0$. ■

Observação 9.21 *Conforme sugerido pela prova do Lema 9.20 fixamos β_2 em (9.26) tal que se tem $D' \geq 2\beta_2 B_2$, onde D' é a constante que aparece no último termo de (9.38). Para conveniência futura, escolheremos β_2 tal que $D' = 4\beta_2 B_2$; veja (9.66). Veremos abaixo que será útil (mesmo que não necessário) também escolher β_1 em (9.26) tal que $2D \leq \beta_1 B_1$.*

Proposição 9.22 *Assuma que o conjunto $\mathcal{E}^{[\infty]}$ tenha medida não nula. Então, para todo $\varepsilon \in \mathcal{E}^{[\infty]}$ temos*

$$\left|g_\ell^{[n_\ell]}\right| \leq C_1^{-1} 2^{n_\ell+1} \tag{9.44}$$

para todas as linhas ℓ em qualquer árvore ou gráfico de auto-energia. Em particular, a série (9.14) é uniformemente convergentes para uma função analítica em t. □

Prova. Segue do Lema 9.16, tomando o limite $n \to \infty$ e usando que a constante c não depende de n, que o limite (9.29) vale para todo $j > n_0$. Dessa forma, pode-se limitar o produto de propagadores como feito na prova do Lema 9.20, usando ainda parte dos fatores de decaimento $e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}_v|}$ para obter um fator total $e^{-\kappa|\boldsymbol{\nu}|/4}$ para qualquer árvore $\theta \in \Theta_{k,\boldsymbol{\nu}}$ contribuindo em $u_{\boldsymbol{\nu}}^{[k]}$. ■

9.4 Medida do Conjunto dos Valores Admissíveis

Para aplicar os resultados obtidos acima ainda temos que construir o conjunto $\mathcal{E}_*$ para o qual as condições Diophantinas (9.15) sejam válidas, e mostrar que tal conjunto tem medida positiva. Aqui e daqui por diante assumiremos que as constantes n_0 e p são escolhidas de acordo com a Observação 9.15 e a Observação 9.18, respectivamente.

Defina recursivamente os conjuntos $\mathcal{E}^{[n]}$ como segue. Faça $\mathcal{E}^{[n_0]} = \mathcal{E}_m$ e, para $n \geq n_0 + 1$,

$$\mathcal{E}^{[n]} := \left\{ \varepsilon \in \mathcal{E}^{[n-1]} \ : \ |i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathcal{M}^{[n-1]}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}; \varepsilon)| > C_1 |\boldsymbol{\nu}|^{-\tau_1} \right\}, \tag{9.45}$$

para constantes Diophantinas adequadas C_1 e τ_1 (a ser fixada mais tarde). É claro que

$$\mathcal{E}_* \cap \mathcal{E}_m = \mathcal{E}^{[\infty]} = \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \mathcal{E}^{[n]} = \lim_{n \to \infty} \mathcal{E}^{[n]}. \tag{9.46}$$

Lema 9.23 *As funções $M^{[n]}(x;\varepsilon)$ e suas derivadas $\partial_x M^{[n]}(x;\varepsilon)$ apresentam uma extensão C^1 no senso de Whitney[3] fora de $\mathcal{E}^{[n-1]}$. Além disso, para todo $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathcal{E}^{[n-1]}$, tem-se*

$$\partial_x^s M^{[n]}(x;\varepsilon') - \partial_x^s M^{[n]}(x;\varepsilon) = (\varepsilon' - \varepsilon)\, \partial_\varepsilon \partial_x^s M^{[n]}(x;\varepsilon) + o\,(\varepsilon' - \varepsilon)\,, \tag{9.47}$$

onde $s = 0, 1$ e $\partial_\varepsilon \partial_x^s M^{[n]}(x;\varepsilon)$ denota a derivada formal com respeito a ε de $\partial_x^s M^{[n]}(x;\varepsilon)$. Finalmente, tem-se ainda

$$\left|\partial_\varepsilon \partial_x \mathcal{M}^{[n]}(x;\varepsilon)\right| \leq D\sqrt{|\varepsilon|}, \qquad \left|\partial_\varepsilon \partial_x M^{[n]}(x;\varepsilon)\right| \leq D\sqrt{|\varepsilon|} e^{-D' 2^{n/\tau_1}}, \tag{9.48}$$

para todo $n > n_0$. Pode-se tomar D como no Lema 9.20. □

Prova. Como na prova do Lema 3 em [27]. Para obter a desigualdade (9.48) deve-se usar a Observação 9.6. Claro, quando expressarmos $\mathcal{M}^{[n]}(x;\varepsilon)$ em termos dos valores de auto-energia $\mathcal{V}_T(x;\varepsilon)$ temos que ter em mente que a constante 2^{n_0} pode ser limitada em termos de ε, mas ela não depende de ε (mesmo que ε varie em $\mathcal{E}_m$ e n_0 seja escolhido de acordo com a Observação 9.15), de modo que as derivadas com respeito a ε de $\mathcal{V}_T(x;\varepsilon)$, como expressas (9.9), agem somente em ε^{k_T} e sobre as quantidades $\mathcal{M}^{[j]}(x;\varepsilon)$ que aparecem nos propagadores. Daí $\partial_\varepsilon \mathcal{V}_T(x;\varepsilon)$ e $\partial_\varepsilon \partial_x \mathcal{V}_T(x;\varepsilon)$ podem ser estudadas como em [27]. Simplesmente notamos que quando agindo sobre algum propagador $g_\ell^{[n_\ell]}$ as derivadas com respeito a ε aumentam a potência do divisor $ix - \mathcal{M}^{[n_\ell - 1]}(x;\varepsilon)$, e se $n_\ell = n_0$ temos que usar parte do decaimento exponencial $e^{-A_3 2^{j/\tau_1}}$ (veja (9.41)) para levar em conta os fatores extras 2^{n_0}. A conclusão é essencialmente que a derivada com respeito a ε de $\mathcal{V}_T(x;\varepsilon)$ admite a mesma estimativa (9.41), possivelmente com constantes A_1 e A_2 diferentes (mas ainda tais que uma desigualdade como (9.42) seja satisfeito, tanto quanto sua dependência em ε), exceto pelo fato que o expoente de $|\varepsilon|$ é $k - 1$ ao invés de k. ■

Portanto, para todo $\varepsilon \in \mathcal{E}^{[n-1]}$, as quantidades $\mathcal{M}^{[n]}(x;\varepsilon)$ são bem definidas e formalmente diferenciáveis (no senso de Whitney [60]) junto com suas derivadas com relação à x.

Lema 9.24 *Existem duas constantes positivas $\mathfrak{m}_1$ e $\mathfrak{m}_2$ tais que*

$$\left|\partial_\varepsilon \mathcal{M}^{[n]}(x;\varepsilon)\right| \geq \mathfrak{m}_1 |\varepsilon|^{j_0 - 1} - \mathfrak{m}_2 \sqrt{|\varepsilon|}\, |x|\,, \tag{9.49}$$

para todo $n \geq n_0$. □

[3] Para detalhes sobre a extensão de Whitney, confira [60].

Prova. Se escrevermos

$$\partial_\varepsilon \mathcal{M}^{[n]}(x;\varepsilon) = \partial_\varepsilon \mathcal{M}^{[n]}(0;\varepsilon) + \int_0^x \mathrm{d}x' \partial_\varepsilon \partial_{x'} \mathcal{M}^{[n]}(x';\varepsilon)\,, \tag{9.50}$$

teremos

$$\left|\partial_\varepsilon \mathcal{M}^{[n]}(0;\varepsilon)\right| \geq \left|\partial_\varepsilon \mathcal{M}^{[n_0]}(0;\varepsilon)\right| - \sum_{j=n_0+1}^{n} \left|\partial_\varepsilon \left(\Xi_j(0;\varepsilon) M^{[j]}(0;\varepsilon)\right)\right|$$

e podemos limitar

$$\begin{aligned}\left|\partial_\varepsilon \mathcal{M}^{[n_0]}(0;\varepsilon)\right| &\geq \left|\partial_\varepsilon \mathcal{M}^{[n_0]}_{j_0}(0;\varepsilon)\right| - \sum_{j=j_0+1}^{\infty} \sum_{T\in\mathcal{S}^{\mathcal{R}}_{j,n_0}} \left|\partial_\varepsilon \mathcal{V}_T(0;\varepsilon)\right| \\ &\geq \frac{j_0}{2}\,|\varepsilon|^{j_0-1}\,|G_{j_0}| + O\left(|\varepsilon|^{j_0-1}\sqrt{|\varepsilon|}\right) \geq \frac{j_0}{4}\,|\varepsilon|^{j_0-1}\,|G_{j_0}|\,,\end{aligned}$$

onde raciocinamos como no fim da prova do Lema 9.23 para limitar $\partial_\varepsilon \mathcal{V}_T(0;\varepsilon)$, e usamos o Lema 9.13 e a Observação 9.18 para fixar p de acordo com (9.35). Daí,

$$\begin{aligned}\left|\partial_\varepsilon \mathcal{M}^{[n]}(0;\varepsilon)\right| &\geq \frac{j_0}{4}\,|\varepsilon|^{j_0-1}\,|G_{j_0}| + O\left(|\varepsilon|^{j_0-1}\sqrt{\varepsilon}\right) \\ &\geq \frac{j_0}{8}\,|\varepsilon|^{j_0-1}\,G_{j_0} \equiv \mathfrak{m}_1\,|\varepsilon|^{j_0-1}\,,\end{aligned}$$

pela segunda desigualdade em (9.48) e procedendo como no final da prova do Lema 9.20 (veja também a Observação 9.21).

Além disso,

$$\left|\int_0^x \mathrm{d}x' \partial_\varepsilon \partial_{x'} \mathcal{M}^{[n]}(x';\varepsilon)\right| \leq |x| \max_x \left|\partial_\varepsilon \partial_x \mathcal{M}^{[n]}(x;\varepsilon)\right| \equiv \mathfrak{m}_2 \sqrt{|\varepsilon|}\,|x| \tag{9.51}$$

por causa do Lema 9.23. Isso completa a prova da afirmação. ■

Lema 9.25 *Existem duas constantes positivas b e ξ tais que, para ε_0 suficientemente pequeno e $\varepsilon_m = 2^{-m}\varepsilon_0$, tem-se*

$$\mathrm{meas}(\mathcal{E}^{[\infty]}) = \mathrm{meas}(\mathcal{E}_m \cap \mathcal{E}_*) \geq \frac{\varepsilon_m}{2}\left(1 - b\varepsilon_m^{\xi}\right), \tag{9.52}$$

onde meas *denota a medida de Lebesgue. As constantes b e ξ são independentes de m.* □

Prova. Defina $\mathcal{I}^{[n_0]} = \emptyset$ e $\mathcal{I}^{[n]} = \mathcal{E}^{[n-1]} \setminus \mathcal{E}^{[n]}$ para $n \geq n_0 + 1$; note que

$$\mathcal{I} := \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \mathcal{I}^{[n]} = \mathcal{E}_m \setminus \mathcal{E}^{[\infty]}\,. \tag{9.53}$$

Lembre-se que fizemos $\mathcal{E}^{[n_0]} = \mathcal{E}_m$. A idéia é estimar a medida do $\mathcal{I}$. Daí,

$$\mathrm{meas}(\mathcal{E}^{[\infty]}) \geq \mathrm{meas}(\mathcal{E}_m) - \mathrm{meas}(\mathcal{I}) = \frac{\varepsilon_m}{2} - \mathrm{meas}(\mathcal{I})\,.$$

Para todo $n \geq n_0 + 1$ e para todo $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}_*^d$ defina

$$I^{[n]}(\boldsymbol{\nu}) = \left\{\varepsilon \in \mathcal{E}^{[n-1]} \ : \ \left|i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu} - \mathcal{M}^{[n-1]}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu};\varepsilon)\right| \leq C_1|\boldsymbol{\nu}|^{-\tau_1}\right\}. \tag{9.54}$$

Cada conjunto $I^{[n]}(\boldsymbol{\nu})$ tem *centro* em um ponto $\varepsilon^{[n]}(\boldsymbol{\nu})$, definido implicitamente pela equação

$$i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu} - \mathcal{M}^{[n]}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu};\varepsilon^{[n]}(\boldsymbol{\nu})) = 0, \tag{9.55}$$

onde estamos usando a extensão de Whitney de $\mathcal{M}^{[n]}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu};\varepsilon)$ fora de $\mathcal{E}^{[n-1]}$.

Portanto, devemos excluir do conjunto $\mathcal{E}^{[n-1]}$ todos os valores ε em torno de $\varepsilon^{[n]}(\boldsymbol{\nu})$ em $I^{[n]}(\boldsymbol{\nu})$, e isso deve ser feito para todo $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}_*^d$ satisfazendo

$$|\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}| \leq \frac{3}{2}\left|\mathcal{M}^{[n]}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu};\varepsilon)\right|, \tag{9.56}$$

porque de outra maneira, poder-se-ia limitar $|i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu} - \mathcal{M}^{[n]}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu};\varepsilon)| \geq |\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}|/3 \geq C_1|\boldsymbol{\nu}|^{-\tau_1}$ tão logo que $\tau_1 \geq \tau$ e $C_1 \leq C_0/3$.

Para ε suficientemente pequeno e para todo $n \geq n_0$, pode-se limitar

$$\left|\mathcal{M}^{[n]}(0;\varepsilon) - \mathcal{M}^{[n_0]}(0;\varepsilon)\right| \leq 2D\,|\varepsilon|\,e^{-D'2^{n_0/\tau_1}} \leq \beta_1 B_1\,|\varepsilon|\,e^{-\beta_2 B_2 2^{n_0/\tau_1}},$$

pela terceira desigualdade em (9.38) do Lema 9.20, aplicada repetidamente da escala $n_0 + 1$ à escala n, usando o fato que se tem $\beta_2 B_2 < D'$ e $2D \leq \beta_1 B_1$ (veja Observação 9.21). Além disso,

$$\left|\mathcal{M}^{[n_0]}(0;\varepsilon) - \mathcal{M}_{j_0}^{[n_0]}(0;\varepsilon)\right| = O\left(|\varepsilon|^{j_0}\sqrt{|\varepsilon|}\right)$$

se p na (9.35) for escolhido de acordo com a Observação 9.18, e

$$\left|\mathcal{M}_{j_0}^{[n_0]}(0;\varepsilon) - \overline{\mathcal{M}}_{j_0}^{[n_0]}(0;\varepsilon)\right| \leq B_1\,|\varepsilon|\,e^{-B_2 2^{n_0/\tau_1}},$$

pelo Lema 9.12, de modo que se acha

$$\left|\mathcal{M}^{[n]}(0;\varepsilon) - \overline{\mathcal{M}}_{j_0}^{[n_0]}(0;\varepsilon)\right| < 2G_{j_0}\,|\varepsilon|^{j_0}.$$

se n_0 é fixado como dito na Observação 9.15, de tal forma que $2\beta_1 B_1\,|\varepsilon\,|e^{-\beta_2 B_2 2^{n_0/\tau_1}} \leq |\varepsilon|^{j_0}|G_{j_0}|$.

Portanto, obtém-se

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{M}^{[n]}(x;\varepsilon)\right| &\leq \left|\mathcal{M}^{[n]}(0;\varepsilon)\right| + \left|\mathcal{M}^{[n]}(x;\varepsilon) - \mathcal{M}^{[n]}(0;\varepsilon)\right| \\
&\leq \left|\overline{\mathcal{M}}_{j_0}^{[n_0]}(0;\varepsilon)\right| + 2G_{j_0}\,|\varepsilon|^{j_0} + D\sqrt{|\varepsilon|}\,|x| \\
&\leq 3G_{j_0}\,|\varepsilon|^{j_0} + \frac{3}{2}D\sqrt{|\varepsilon|}\left|\mathcal{M}^{[n]}(x;\varepsilon)\right|,
\end{aligned}$$

com $x = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu}$, para todo $\boldsymbol{\nu}$ satisfazendo (9.56). Conclui-se que existe uma constante $\mathfrak{D}$ tal que

$$|\mathcal{M}^{[n]}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu};\varepsilon)| \leq \varepsilon_m^{j_0}\mathfrak{D} \tag{9.57}$$

para todo $\boldsymbol{\nu}$ satisfazendo (9.56).

Assim, temos que considerar apenas os vetores $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}_*^d$ satisfazendo não apenas (9.56), mas também a desigualdade $|\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}| < 2\varepsilon_m^{j_0}\mathfrak{D}$, *i.e.*, para todo $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}_*^d$ tal que

$$|\boldsymbol{\nu}| \geq \left(\frac{C_0}{2\varepsilon_m^{j_0}\mathfrak{D}}\right)^{1/\tau} := N_0. \tag{9.58}$$

Chamamos $\mathcal{N}_0$ o conjunto dos $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}_*^d$ que satisfazem (9.56) e (9.58).

Para tal $\boldsymbol{\nu}$, fazendo $x = \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}$, tem-se

$$\begin{aligned} \left|\partial_\varepsilon \mathcal{M}^{[n]}(x:\varepsilon)\right| &\geq \mathfrak{m}_1 |\varepsilon|^{j_0-1} - \frac{3}{2}\mathfrak{m}_2\sqrt{|\varepsilon|}\left(2\varepsilon_m^{j_0}\mathfrak{D}\right) \\ &\geq \frac{\mathfrak{m}_1}{2^{j_0-1}}\varepsilon_m^{j_0-1}\left(1 - \frac{3\mathfrak{m}_2}{2\mathfrak{m}_1}\varepsilon_m^{3/2}2^{j_0}\mathfrak{D}\right) \geq \frac{\mathfrak{m}_1}{2^{j_0}}\varepsilon_m^{j_0-1}, \end{aligned} \tag{9.59}$$

de modo que a medida do conjunto excluído correspondente, que pode ser escrita como

$$\int_{I^{[n]}(\boldsymbol{\nu})} \mathrm{d}\varepsilon = \int_{-1}^{1} dt\, \frac{d\varepsilon(t)}{dt}, \tag{9.60}$$

onde $\varepsilon(t)$ é definido por

$$i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu} - \mathcal{M}^{[n]}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}; \varepsilon(t)) = t\frac{C_1}{|\boldsymbol{\nu}|^{\tau_1}}, \tag{9.61}$$

será estimada por

$$\int_{I^{[n]}(\boldsymbol{\nu})} \mathrm{d}\varepsilon \leq \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t\, C_1|\boldsymbol{\nu}|^{-\tau_1}\frac{1}{|\partial_\varepsilon \mathcal{M}^{[n]}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}; \varepsilon(t))|} \leq \frac{2^{j_0+1}}{\mathfrak{m}_1\varepsilon_m^{j_0-1}}\frac{C_1}{|\boldsymbol{\nu}|^{\tau_1}}, \tag{9.62}$$

onde usamos (9.59).

Isso significa que temos que excluir de $\mathcal{E}^{[n-1]}$ um conjunto

$$\mathcal{I}^{[n]} = \bigcup_{\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{N}_0} I^{[n]}(\boldsymbol{\nu}) \tag{9.63}$$

de medida limitada por

$$\begin{aligned} \mathrm{meas}(\mathcal{I}^{[n]}) &\leq \sum_{\boldsymbol{\nu} \in \mathcal{N}_0} \mathrm{meas}(I^{[n]}(\boldsymbol{\nu})) \leq \mathrm{const.} \sum_{|\boldsymbol{\nu}| \geq N_0} \frac{C_1}{\varepsilon_m^{j_0-1}}|\boldsymbol{\nu}|^{-\tau_1} \\ &\leq \mathrm{const.}\frac{C_1}{\varepsilon_m^{j_0-1}}\left(\frac{\varepsilon_m^{j_0}}{C_1}\right)^{(\tau_1-d)/\tau} = \mathrm{const.}\varepsilon_m^{1+\xi'}, \end{aligned} \tag{9.64}$$

onde $\xi' = j_0(\tau_1 - \tau - d)/\tau$, tal que $\xi' > 0$ se $\tau_1 > \tau + d$, o que fixa o valor de τ_1.

Podemos facilmente provar que existem duas constantes positivas E_1 e E_2 tal que

$$\left|\varepsilon^{[n]}(\boldsymbol{\nu}) - \varepsilon^{[n-1]}(\boldsymbol{\nu})\right| \leq \sqrt{\varepsilon_m}E_1 e^{-E_2 2^{n/\tau_1}} \tag{9.65}$$

para todo $n \geq n_0+1$ e para todo $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d_*$. Fazendo $\delta\varepsilon = \varepsilon^{[n]}(\boldsymbol{\nu}) - \varepsilon^{[n-1]}(\boldsymbol{\nu})$, obtemos (novamente usando as extensões de Whitney)

$$\begin{aligned}
0 &= i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu} - \mathcal{M}^{[n]}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu};\varepsilon^{[n]}(\boldsymbol{\nu})) \\
&= i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu} - \mathcal{M}^{[n-1]}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu};\varepsilon^{[n-1]}(\boldsymbol{\nu})+\delta\varepsilon) \\
&\qquad -\mathcal{M}^{[n]}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu};\varepsilon^{[n]}(\boldsymbol{\nu})) + \mathcal{M}^{[n-1]}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu};\varepsilon^{[n]}(\boldsymbol{\nu})) \\
&= -\partial_\varepsilon\mathcal{M}^{[n-1]}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu};\varepsilon^{[n-1]}(\boldsymbol{\nu}))\,\delta\varepsilon + o(\delta\varepsilon) \\
&\qquad -\left(\mathcal{M}^{[n]}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu};\varepsilon^{[n]}(\boldsymbol{\nu})) - \mathcal{M}^{[n-1]}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu};\varepsilon^{[n]}(\boldsymbol{\nu}))\right),
\end{aligned}$$

pela relação (9.47) no Lema 9.23. Daí, pode-se usar que

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{M}^{[n]}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu};\varepsilon) - \mathcal{M}^{[n-1]}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu};\varepsilon)\right| \\
&\qquad \leq D\,|\varepsilon|\,e^{-D'2^{n/\tau_1}} \\
&\qquad \leq \frac{D}{\beta_1 B_1}\,|\varepsilon|\left(\beta_1 B_1 e^{-\beta_2 B_2 2^{n/\tau_1}}\right) \leq B'|\varepsilon|^{j_0} e^{-\beta_2 B_2 2^{n/\tau_1}},
\end{aligned} \tag{9.66}$$

onde B' é uma constante adequada. Acima, usamos a terceira desigualdade de (9.38) no Lema 9.20, a relação (9.26) e a Observação 9.21. Finalmente, por (9.59) e (9.66), obtemos (9.65), com $E_1 = 4B'/\mathfrak{m}_1$ e $E_2 = \beta_2 B_2$.

Para todo $|\boldsymbol{\nu}| \geq \mathcal{N}_0$ fixe $n_* = n_*(\boldsymbol{\nu})$ tal que $|\varepsilon^{[n_*+1]}(\boldsymbol{\nu}) - \varepsilon^{[n_*]}(\boldsymbol{\nu})| \leq C_1|\boldsymbol{\nu}|^{-\tau_1}$. Para isso, pode-se escolher $n_*(\boldsymbol{\nu}) \leq \text{const.}\,\tau_1 \log\log|\boldsymbol{\nu}|$.

Então, para todo $n_0+1 \leq n \leq n_*$, defina $J^{[n]}(\boldsymbol{\nu})$ como

$$J^{[n]}(\boldsymbol{\nu}) := \left\{\varepsilon \in \mathcal{E}^{[n-1]} \;:\; \left|i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu} - \mathcal{M}^{[n-1]}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu};\varepsilon)\right| < 2C_1|\boldsymbol{\nu}|^{-\tau_1}\right\}. \tag{9.67}$$

Por construção, todos os conjuntos $I^{[n]}(\boldsymbol{\nu})$ caem dentro de $J^{[n_*]}(\boldsymbol{\nu})$ tão logo $n > n_*$. Assim, podemos limitar meas($\mathcal{I}$) pela soma das medidas dos conjuntos $J^{[n_0+1]}(\boldsymbol{\nu}), \ldots, J^{[n_*]}(\boldsymbol{\nu})$ para todo $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{Z}^d_*$ tal que $|\boldsymbol{\nu}| \geq \mathcal{N}_0$. Tal medida será limitada por

$$\text{const.} \sum_{|\boldsymbol{\nu}|\geq\mathcal{N}_0} n_*(\boldsymbol{\nu})\frac{C_1}{\varepsilon_m^{j_0-1}}|\boldsymbol{\nu}|^{-\tau_1} \leq \text{const.}\,\varepsilon_m^{1+\xi}, \tag{9.68}$$

onde o valor de ξ é menor do que ξ' devido as correções logarítmicas no fator $n_*(\boldsymbol{\nu})$. A demonstração do lema está completa com a estimativa acima levada em conta em (9.53). ■

Proposição 9.26 *Defina o conjunto dos valores admissíveis de $\mathcal{E}_*$ como na Definição 9.9, página 138, com $C_1 = C_0/3$ e $\tau_1 > \tau + d$. Então, tem-se*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\text{meas}(\mathcal{E}_m \cap \mathcal{E}_*)}{\text{meas}(\mathcal{E}_m)} = 1,$$

o que significa dizer que $\mathcal{E}_*$ tem medida relativamente grande em $\mathcal{E}_m$. □

Prova. Isso é uma conseqüência imediata da definições e do Lema 9.24. ■

9.5 Propriedades da Expansão Renormalizada

Para completar a prova da existência de uma solução quase-periódica da equação original (7.9), página 116, temos que mostrar que a função definida pela expansão renormalizada (9.14) resolve (7.9). Faça $\mathcal{E}_+ = \bigcup_{m=0}^{\infty} \mathcal{E}_m \cap \mathcal{E}_*$: tal conjunto contém os valores admissíveis de ε em $[0, \varepsilon_0]$. Defina analogamente $\mathcal{E}_-$ para o intervalo $[-\varepsilon_0, 0]$, e faça $\mathcal{E} = \mathcal{E}_+ \cup \mathcal{E}_-$.

Lema 9.27 *Para todo $\varepsilon \in \mathcal{E}$ a função $\widehat{u}(t)$ definida através da (9.14), página 137, resolve a equação*

$$\widehat{u} = \mathfrak{g}\left(R + \varepsilon Q \widehat{u}^2\right), \tag{9.69}$$

onde $\mathfrak{g}$ é um operador diferencial com kernel $\mathfrak{g}(\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu}) = 1/(i\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\nu})$. □

Prova. Como na Seção 8 da referência [27]. ■

Até agora provamos que existe uma função $\widehat{u}(t) = U(\boldsymbol{\omega} t; \varepsilon)$ que resolve (7.9) para ε em um conjunto de Cantor adequado com medida relativamente grande. Para g dado por $g(t) = i\varepsilon Q(t)\widehat{u}(t)$, a Proposição 7.3, página 115, prova que $\phi(t)$ dado em (7.6) resolve a equação de Hill considerada $\ddot{\phi}(t) + (p_0(t) + \varepsilon p_1(t))\phi(t) = 0$ e é quase-periódico.

Em princípio, se fizermos $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \langle g \rangle$, $\phi(t)$ poderia ser da forma

$$\phi(t) \;=\; \Phi(\underline{\omega}_1 t,\, \omega_0 t,\, \Omega_0 t,\, \Omega_\varepsilon t) \;\equiv\; e^{i\Omega_\varepsilon t}\tilde{\Phi}(\underline{\omega}_1 t,\, \omega_0 t,\, \Omega_0 t),$$

uma vez que $\phi(t)$ depende de $\widehat{u}(t)$ e uma freqüência extra aparece da integral da média de $g_0(t) + g(t)$. Mas na realidade esse não é o caso, porque a função $\tilde{\Phi}$ é da forma $\tilde{\Phi}(\underline{\omega}_1 t, \omega_0 t)$, ou seja, sua dependência sobre t é apenas através das variáveis $\omega_0 t$ e $\underline{\omega}_1 t$. Isso vem da seguinte propriedade.

Lema 9.28 *Seja $\widehat{u}(t)$ a função definida através da expansão renormalizada (9.14), página 137. Então, $u_{\boldsymbol{\nu}}^{[k]} \neq 0$ requer que em $\boldsymbol{\nu} = (\underline{m}, n_1, n_2)$ se tenha $n_2 = 2$.* □

Prova. A prova é por indução em k. Para $k = 0$, o resultado é óbvio da relação $(i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\nu})u_{\boldsymbol{\nu}}^{(0)} = R_{\boldsymbol{\nu}}$ em (7.16), página 118, e da identidade $R_{\boldsymbol{\nu}} = P_{\underline{m}}^{(1)} \mathcal{F}_{n_1}^{(2)} \delta_{n_2,2}$. Vamos assumir que $u_{\boldsymbol{\nu}}^{[k']} \propto \delta_{n_2,2}$ para todo $k' < k$. Então, em ordem k a segunda relação na (7.16) diz que se pode ter $u_{\boldsymbol{\nu}}^{[k]} \neq 0$ somente se $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}_0 + \boldsymbol{\nu}_1 + \boldsymbol{\nu}_2$: para a última componente n_2 do vetor $\boldsymbol{\nu}$ a definição do coeficiente $Q_{\boldsymbol{\nu}} = \delta_{\underline{m},\underline{0}} \mathcal{F}_{n_1}^{(-2)} \delta_{n_2,-2}$ e a hipótese indutiva resultam $n_2 = -2 + 2 + 2 = 2$. ■

A conclusão é que $\widehat{u}(t) = e^{2i\Omega_0 t}\tilde{U}(\underline{\omega}_1 t, \omega_0 t)$, com $\tilde{U}$ analítica e periódica em seus argumentos. Levando em conta que se tem $Q(t) = e^{-2i\Omega_0 t - 2i\psi_0(t)}$, com $\psi_0(t)$ dependendo de t somente através da variável $\omega_0 t$, temos $Q(t)\widehat{u}(t) = e^{-2i\psi_0(t)}\tilde{U}(\underline{\omega}_1 t, \omega_0 t)$. Como conseqüência, $\phi(t)$ é uma função quase-periódica com d freqüências fundamentais $\underline{\omega}_1, \omega_0, \Omega_\varepsilon$, e a dependência sobre a última freqüência é apenas através do fator $e^{i\Omega_\varepsilon t}$, exatamente como no caso não perturbado (7.3), página 114. De acordo com o antecipado na Observação 7.2, o mesmo resultado poderia

ser obtido partindo-se da solução não perturbada dada pela segunda função em (7.4), e se encontraria um resultado análogo. Dessas observações concluímos que o sistema é redutível em $\mathcal{E}$.

Portanto, a solução $\widehat{u}(t)$ descreve o movimento sobre um toro maximal d-dimensional que é a ε-continuação de um toro d-dimensional não perturbado. O vetor de rotação deste último é $\boldsymbol{\omega} = (\underline{\omega}_1, \omega_0, \Omega_0)$, enquanto, como um efeito da perturbação, somente a última componente do vetor de rotação é mudada para uma nova freqüência $\Omega_\varepsilon = \Omega_0 + \langle g \rangle$: isso provê uma simples interpretação física da quantidade $\langle g \rangle$. É provável que a nova freqüência Ω_ε seja tal que o vetor $(\underline{\omega}_1, \omega_0, \Omega_\varepsilon)$ ainda seja Diophantino. Isso não segue diretamente de nossa análise, mas esperamos que esse seja o caso.

* * *

Parte III

Discussão

Capítulo 10

Conclusões

A finalidade deste capítulo é recapitular os principais resultados obtidos nesta tese, focando apenas o essencial, deixando de lado aspectos técnicos específicos dos métodos utilizados. As perspectivas de pesquisa futura nos problemas aqui estudados, bem como a impossibilidade de obtenção de resultados melhores devido a falta de potencialidade dos métodos até então implementados, também serão discutidos. Por fim, a importância e a perspectiva geral de nossos trabalhos serão revistas.

10.1 Sumário de Resultados

O primeiro problema estudado refere-se simplesmente a resolução da equação de Schrödinger

$$i\partial_t\Phi(t) = H_2(t)\Phi(t)\,, \quad \text{com} \quad H_2(t) = \begin{pmatrix} f(t) & \varepsilon \\ \varepsilon & -f(t) \end{pmatrix} \tag{10.1}$$

(confira (1.3), página 3), onde f é uma interação quase-periódica e ε é um parâmetro pequeno. O problema acima é transformado no problema da resolução da equação não-linear de Riccati (1.17), página 10 (confira Teorema 1.1).

O Teorema 1.2, página 14, cuja demonstração encontra-se em [2], afirma que a equação de Riccati mencionada acima tem solução formal quase-periódica desde que a interação f satisfaça certas hipóteses (casos (I) ou (II)) que são importantes para o chamado procedimento de *eliminação de termos seculares* (confira discussão na Seção 1.4, página 10). No caso onde f é uma interação periódica, ainda sob as hipóteses (I) ou (II), mostrou-se que a solução para a equação de Riccati é convergente e periódica. Mais do que isso, a partir dessa solução, construiu-se explicitamente a forma de Floquet do propagador $U(t)$ associado ao sistema de Schrödinger (confira o Teorema 1.3, página 15, e demonstração em [3]).

Entretanto, conforme apontado em [4], as hipóteses (I) e (II) não cobrem o caso fisicamente interessante relacionado ao efeito de localização dinâmica. Detalhes foram discutidos já no Capítulo 1. Em particular, discutiu-se a dependência da freqüência secular Ω com o parâmetro

ε (confira Seção 1.6, página 16) e importância de se estender o Teorema 1.3 para a situação de localização dinâmica. Isso foi feito em detalhes no Capítulo 2, culminando no Teorema 2.1, página 19, e no Teorema 2.2, página 20. Tais teoremas permitem a análise precisa do efeito de localização dinâmica quando $\Omega = \mathcal{O}(\varepsilon^3)$. O trabalho que escrevemos [5] é, essencialmente, uma reprodução desse capítulo.

No Capítulo 3 analisamos completamente o caso específico de interações monocromáticas do tipo $f(t) = F_0 + \varphi\cos(\omega t)$. Em particular, utilizamos nossas soluções convergentes para implementar algoritmos numéricos capazes de calcular certas probabilidades de transição, inclusive no caso de localização dinâmica, o qual ocorre para valores determinados de ω e φ. Os resultados obtidos foram excelentes e se transformaram no trabalho [6].

Restava, finalmente, a possibilidade de estudar o sistema considerado no caso geral de interações quase-periódicas. É claro que já havíamos obtido soluções formais para o problema, mas gostaríamos de ir além. Foi necessário para isso a implementação de métodos totalmente desconhecidos de nossa parte, o qual vieram a tona através do trabalho [27]. Nesse caso, o mérito é todo do autor de [27], apenas que o mesmo só estudou o problema assumindo a condição (I), não interessante ao efeito de localização dinâmica. No Capítulo 4 fizemos uma revisão quase que completa do trabalho [27], com mais enfoque nas idéias novas utilizadas do que nas demonstrações técnicas. Em particular, discutimos a representação diagramática em termos de árvores para os coeficientes de Fourier das séries envolvidas (confira a Seção 4.1, página 64) e todo o procedimento de resoma e renormalização da série formal (confira a Seção 4.3, página 70, e as seguintes). Como resultado principal, tem-se o Teorema 4.1, página 63, que implica na existência de uma solução quase-periódica para a equação de Riccati considerada restrita a um conjunto de Cantor de valores do parâmetro ε com medida positiva e relativamente grande em torno da origem.

As técnicas introduzidas por Gentile em seu trabalho [27] foram bastante úteis para que pudéssemos explorar alguns aspectos novos com relação ao problema de efeitos de localização dinâmica mais exatos (além da terceira orem), conforme apresentação do Capítulo 5. Em particular, a representação diagramática em termos de árvores dos coeficientes de Fourier simplificou bastante as coisas, pois cálculos algébricos extensos como aqueles do Capítulo 2 puderam ser evitados. O resultado foi uma análise bastante geral do problema, onde pudemos exibir uma condição única e suficiente para que a técnica de eliminação de termos seculares pudesse ser implementada (confira o Teorema 5.8, página 96). Isso implica na validade das expansões perturbativas propostas para condições que vão além de (I), (II) ou (III). Esse é, essencialmente, o conteúdo do Teorema 5.9, página 97. Mais do que isso, a possibilidade de se estudar o problema de forma tão geral assim, garante o controle sobre efeitos de localização onde a dependencia de Ω com ε é arbitrariamente pequeno. Essa relação é discutida em detalhes na Seção 5.3, página 98 e é um dos principais motivos pelos quais estamos escrevendo [33].

A segunda parte desta tese trata de um problema aparentemente distante daquele analisado

na primeira parte. Entretanto, os métodos empregados são bastante parecidos. Resumidamente, consideramos o problema de se estudar a estabilidade de soluções limitadas da equação de Hill real

$$\ddot{\phi}_0(t) + p_0(t)\phi_0(t) = 0 \tag{10.2}$$

ao se introduzir uma perturbação pequena quase-periódica também real, passando a equação a ser escrita como

$$\ddot{\phi}(t) + (p_0(t) + \varepsilon p_1(t))\phi(t) = 0\,. \tag{10.3}$$

Na verdade os métodos empregados para o estudo desse problema são parecidos com aqueles utilizado no caso dos sistemas de dois-níveis porque esse último já apresentava uma ligação com a resolução de equações do tipo Hill, notadamente através da relação (1.20), página 11. Assim, sabíamos que o caso geral colocado acima poderia ser tratado de forma semelhante ao problema dos sistemas de dois-níveis. Honestamente, trabalhamos sempre no sentido de trazer o segundo problema mais geral o mais próximo possível do primeiro mais simples, onde resultados já haviam sido obtidos.

A tática deu extremamente certo, e aliou-se corretamente com as idéias introduzidas por Gentile no caso geral quase-periódico tratado em seu trabalho [27]. Tanto é que daí surgiu uma colaboração, culminando no trabalho [43], cuja descrição e detalhamento é inteiramente feito na segunda parte desta tese.

O resultado principal é expresso pelo Teorema 6.4, página 111, que diz, de uma forma bem solta, que para um conjunto de Cantor de valores de ε, com medida positiva e relativamente grande, soluções quase-periódicas de (10.2) permanecem quase-periódicas para o sistema (10.2), apenas com a introdução de novas freqüências ($\underline{\omega}_1$ e $\Omega_0 \to \Omega_\varepsilon$).

O interessante é que a técnica de demonstração do Teorema 6.4 passa justamente pela utilização de um Ansatz exponencial adequado, que nos leva a resolução de uma equação não linear de primeira ordem bastante parecida com a analisada no caso dos sistemas de dois-níveis, mas com alguns graus de complicação a mais devido à falta da hipótese $\langle Q \rangle \neq 0$. Os resultados principais encontrados com relação à resolução de tal equação se encontram nos lemas e proposições do Capítulo 9.

É importante frisar que as inovações técnicas introduzidas para o procedimento de resoma e renormalização da solução formal encontrada no Capítulo 8 (confira Lema 8.15, página 129) foram todas idéias do Prof. Gentile, apenas com colaboração de nossa parte.

10.2 Considerações Finais

Este trabalho contém resultados originais obtidos através de técnicas conhecidas. No caso dos sistemas de dois-níveis, utilizaram-se técnicas originalmente introduzidas nos trabalhos [2] e [3]. No caso da equação de Hill, utilizaram-se técnicas também já conhecidas em outros contextos,

introduzidas pelo grupo de Gallavotti para a análise de séries de Lindstedt em problemas do tipo KAM, mais especificamente estamos nos referindo aos trabalhos [27] de Gentile e [28] de Gallavotti e Gentile.

O tratamento matemático dos problemas físicos aqui considerados pode ser considerado rigoroso, o que representa uma novidade, pelo menos com relação ao efeito de localização dinâmica, onde apenas trabalhos formais eram conhecidos [14, 15, 16, 18, 19], com exceção do trabalho mais recente de Sacchetti [17].

Ainda com relação ao efeito de localização dinâmica, tem-se muito a estudar principalmente com relação aos resultados expostos no Capítulo 5. O controle sobre a possibilidade de se encontrar um efeito de localização onde a dependência em ε da freqüência secular Ω é arbitrariamente pequena é motivadora. Em particular, uma prova da Conjectura 5.14, página 101, seria bastante interessante. Outro ponto, importante do ponto de vista de aplicações físicas, seria a busca de um exemplo explícito onde efeitos de localização além da terceira ordem sejam encontrados. De acordo com a discussão na Seção 5.1, página 81, tal deve ser o caso se a interação f possuir mais de uma harmônica em sua decomposição, *e.g.*, $f(t) = F_0 + \varphi_1 \cos(\omega t) + \varphi_2 \cos(2\omega t)$. Se tal efeito ocorrer com a interação acima, pelo menos temos o controle sobre a série perturbativa encontrada como solução, e outro problema interessante seria implementar algoritmos numéricos, como aqueles apresentados no Capítulo 3, para computar probabilidades de transição nesse caso.

Finalmente, ainda com relação aos sistemas de dois-níveis, outro resultado interessante seria dado pela generalização completa do Teorema 4.1, página 63, substituindo a hipótese simples $\langle Q \rangle \neq 0$, pelas hipóteses gerais do Teorema 5.8, página 96. Acreditamos que tal generalização seja possível através de uma adaptação no procedimento de resoma e renormalização empregado em [27], no mesmo sentido daquele utilizado no caso da equação de Hill tratado no Capítulo 9. Afinal, nesse último caso, não se tinha nenhuma hipótese como $\langle Q \rangle \neq 0$.

É claro que todos os problemas mencionados acima são bastante específicos e provavelmente de difícil resolução. Entretanto, isso não impede que os mesmos sejam analisados futuramente, até porque, sob nosso ponto de vista, podemos considerá-los bastante interessantes.

Com relação ao problema da equação de Hill perturbada estudada na segunda parte desta tese, temos considerações importantes a fazer. Primeiro gostaríamos de salientar que o problema considerado não havia sido ainda estudado na literatura, nem através de outros métodos. Isso representa uma novidade importante, podendo [43] ser interessante para comparação com outros trabalhos que estudam problemas similares através de outros métodos, *e.g.*, [37] e [42].

Outro ponto interessante está na questão da unicidade da solução encontrada. Na verdade, unicidade não é obtida: em princípio diferentes soluções, dependentes do método de resoma, podem aparecer. Além disso, não podemos excluir a possibilidade de que outras soluções quase-periódicas existam, possivelmente com a mesma expansão assintótica. Salientamos que essas características não são exclusivas de nosso trabalho, na verdade elas são limitações do

método empregado e também aparecem em outros problemas onde o mesmo havia sido aplicado (confira [27, 28, 44]). Finalmente, o conjunto de valores excluídos de ε também depende do procedimento de resoma utilizado e, em princípio, pode acontecer que um valor de ε que seja excluído em nosso esquema de resoma, possa ser permitido se o esquema for ligeiramente modificado. Ainda mencionamos que a não unicidade das soluções fundamentais *continuando* as do sistema não-perturbado não é de fato um problema, porque podemos considerar qualquer par de soluções fundamentais para escrever a solução geral como uma combinação linear das duas.

Cabe aqui algumas palavras com relação a condição de não-degenerescência imposta sobre a perturbação p_1, a saber, a existência de um certo $j_0 \in \mathbb{Z}_+$, tal que $G_j = 0$ para todo $1 \leq j < j_0$ e $G_{j_0} \neq 0$ (confira Observação 8.13, página 128). Em nosso trabalho original [43], consideramos ainda a possibilidade onde $G_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}_+$. A novidade é que, nesse caso, nenhum procedimento de resoma e renormalização é requerido. Acontece então que a série formal para u acaba sendo convergente e que o conjunto de valores admissíveis para ε é o intervalo fechado $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ todo. Assim, em [43], excluímos qualquer condição de não-degenerescência sobre p_1. Essa última análise não foi apresentada aqui para não sobrecarregar a leitura com detalhes demasiadamente técnicos, como é o caso. Entretanto, a mesma pode ser vista em detalhes em [43]. Conjecturamos que o caso $G_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}_+$ só seja possível se $p_1 \equiv 0$, o que representaria uma trivialidade.

Outro aspecto interessante a ser mencionado está relacionado com o Lema 8.15, página 129. Na verdade não provamos que a série formal é divergente, mas apenas que as estimativas não nos permitem demonstrar convergência. Esperamos que a divergência ocorra, mas esse é um problema em aberto.

O problema tratado, sem dúvida, é difícil. A novidade em nossas idéias reside no fato de que não permitimos a introdução de nenhum parâmetro extra na perturbação que pudesse servir para evitar ressonâncias. Dessa forma, a possibilidade restante foi impor restrições necessárias ao parâmetro de acoplamento da perturbação, visando resolver a equação. Espera-se que um conjunto grande deva ser excluído: a idéia proposta por nós foi justamente a de mostrar que o problema pode ser posto em uma forma que admita uma série formal de potências como solução, e depois mostrar que separando seus coeficientes em somas de vários termos adequados, a série pode ser rearranjada resultando em uma nova expansão convergente satisfazendo a equação original. O método utilizado é bastante interessante e impressionante devido a falta da necessidade de introdução de novos parâmetros. As técnicas, entretanto, não são novas (confira [28, 29]).

Para finalizar, gostaríamos de ressaltar as diferenças existentes entre o estudo da equação (7.9), página 116, em comparação ao estudo de (4.6), página 64, tratada para os sistemas de dois-níveis em [27]. Na verdade, (7.9) é bastante similar à (4.6). A principal diferença, entretanto, está no fato que em (4.6) a função Q é assumida tal que $\langle Q \rangle \neq 0$, enquanto que

em (7.9) essa hipótese não é assumida. Portanto, em algum sentido, o trabalho desenvolvido em [43], descrito na segunda parte desta tese, resolve o caso em aberto em [27], a saber, $\langle Q \rangle = 0$. Para ser mais preciso, é necessário que se faça uma adaptação cuidadosa de um caso para outro. Por exemplo, em (4.6) é outra função que faz o papel de Q em (7.9), mas as idéias fundamentais são as mesmas. É importante notar que enquanto em [27] o caso $\langle Q \rangle = 0$ é, de certa forma, especial, para equação (7.9) o caso degenerado é bastante natural e não apenas uma curiosidade, uma vez que sempre se pode assumir que a média de p_1 em (10.3) seja nula. Nesse caso, a condição análoga assumida em [27] é automaticamente violada (confira a Observação 8.13, página 128). Em outras palavras, o problema considerado em (7.9) é aquele no qual procuramos resultados sem se assumir qualquer hipótese sobre a perturbação.

De um ponto de vista técnico, essa arbitrariedade no potencial resulta em uma série de dificuldades, que não ocorrem em [27]. Por exemplo, o análogo da Seção 8.1, página 121, é reduzido a apenas uma observação em [27] (confira (4.14), página 68). A expansão renormalizada, discutida no Capítulo 9, também foi modificada com relação ao trabalho [27], bem como a estimativa da medida do conjunto de valores admissíveis do parâmetro ε. Por exemplo, a Seção 9.2, página 138, é inteiramente nova com relação ao trabalho [27].

Finalmente, também o problema de se voltar à equação original (10.3) a partir da solução encontrada para (7.9) teve que ser resolvido de uma forma totalmente diferente com relação à [27] (confira a Proposição 7.3, página 115, e os parágrafos seguintes). A prova dessa foi proposição foi devida a Gentile, inspirada em nossa prova do Teorema 5.1, página 82, no contexto dos sistemas de dois-níveis.

Resumindo, podemos dizer que [27] representa um problema similar ao considerado na resolução de (7.9), mas no qual uma condição de não-degenerescência na perturbação é assumida.

* * *

Apêndices

Apêndice A

Funções Quase-Periódicas e Almost-Periódicas

Nota. Este apêndice é apresentado por completeza e, por autorização do autor de [1], é praticamente uma reprodução de sua Seção 2.3.

Com o intuito de facilitar a leitura e fixar alguma notação apresentaremos neste trabalho algumas das definições e resultados básicos da teoria das funções ditas *almost*-periódicas. Para detalhes recomendamos a referência [48].

A teoria das funções *almost*-periódicas reais foi originalmente desenvolvida por Harald Bohr (1887-1951) em vários trabalhos, notadamente naqueles listados em [20]. Bohr, porém, menciona dois predecessores: Piers Bohl (1865-1921) em tese [21] publicada em 1893 (confira também [22]) e Ernest B. Esclangon (1876-1954) (confira [23] e [24]), os quais obtiveram anteriormente resultados semelhantes sobre as funções ditas *quase-periódicas*, denominação esta introduzida por Esclangon. H. Bohr distinguiu-se também pelo desenvolvimento da teoria das funções *almost*-periódicas complexas. O conceito foi posteriormente generalizado por von Neumann para funções definidas em grupos.

Listemos algumas definições e resultados básicos de Bohr. Faremos uso desses resultados para o caso menos geral de funções quase-periódicas.

No intuito de generalizar o conceito de função periódica, H. Bohr introduziu o importante conceito de função *almost*-periódica real, que tentaremos definir agora.

Se ε é um número real com $\varepsilon \geq 0$, um número $T \geq 0$ é dito ser um ε-quase-período de uma função limitada $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se

$$|h(t+T) - h(t)| \leq \varepsilon$$

para todo $t \in \mathbb{R}$.

Uma função contínua $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é dita ser almost-*periódica* se para todo $\varepsilon > 0$ existir $\Lambda(\varepsilon) > 0$ tal que todo intervalo fechado de $\mathbb{R}$ de comprimento $\Lambda(\varepsilon)$ possui pelo menos um

ε-quase-período de h.

Uma outra definição equivalente de *almost*-periodicidade é a seguinte. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função limitada e defina-se $h_a(x) := h(x-a)$, a função h transladada por $a \in \mathbb{R}$. A função h é dita ser *almost*-periódica se for contínua e se o conjunto de seus transladados $\{h_a,\ a \in \mathbb{R}\}$ for um conjunto pré-compacto na topologia uniforme.

Recordando, a topologia uniforme no conjunto das funções contínuas e limitadas $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é a topologia métrica definida pela norma $\|h\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}} |h(x)|$. Em um espaço topológico um conjunto é dito ser *pré-compacto* se seu fecho for compacto.

A equivalência das duas definições de *almost*-periodicidade é uma conseqüência da chamada propriedade de limitação total de conjuntos pré-compactos em espaços métricos completos e pode ser encontrada, por exemplo, em [25].

É possível ver com relativa facilidade [48] que a combinação linear de duas funções *almost*-periódicas é também uma função *almost*-periódica e que o produto de duas funções *almost*-periódicas é também uma função *almost*-periódica. Portanto, o conjunto de todas as funções *almost*-periódicas forma uma *álgebra* abeliana, que contem uma unidade (a função constante igual a 1) e é invariante por conjugação complexa.

Um dos resultados básicos de Bohr refere-se à existência do chamado *valor médio* de uma função *almost*-periódica. Se h é *almost*-periódica, Bohr demonstrou que o limite

$$M(h) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} h(t)\, dt$$

sempre existe e define o que se chama de *valor médio de* h.

Bohr demonstrou também que para toda função *almost*-periódica h existem dois conjuntos contáveis $\{h_n \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}\}$ e $\{\omega_n \geq 0,\ n \in \mathbb{N}\}$ tais que vale a "decomposição de Fourier"

$$h(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n e^{i\omega_n t},$$

onde a série da direita converge uniformemente em $\mathbb{R}$ a h no sentido de Cesaro (confira, por exemplo, [48] para afirmações precisas).

O conjunto de freqüências $\{\omega_n \geq 0,\ n \in \mathbb{Z}\}$ é denominado *espectro de* h e é comummente denotado por $\sigma(h)$.

Se $\omega_n \in \sigma(h)$ e se $e_n(t) := e^{-i\omega_n t}$, Bohr demonstrou que

$$h_n = M(he_n). \tag{A.1}$$

Assim, se convencionarmos que $\omega_0 = 0$, teremos

$$M(h) = h_0.$$

As funções *almost*-periódicas são classificadas de acordo com seu espectro. Uma função *almost*-periódica h é dita ser *quase-periódica* se existir $d \in \mathbb{N}$, $d > 0$, e um vetor d-dimensional

$\underline{\omega} = (\omega_1, \ldots, \omega_d)$ com $\omega_i > 0$, $i = 1, \ldots, d$, tal que

$$\sigma(h) \subset \{\underline{\omega} \cdot \underline{n},\ \underline{n} \in \mathbb{Z}^d\},$$

onde $\underline{n} = (n_1, \ldots, n_d) \in \mathbb{Z}^d$ é um vetor de inteiros e $\underline{\omega} \cdot \underline{n} = \omega_1 n_1 + \cdots + \omega_d n_d$. Obviamente interessa nessa definição que os números ω_i, $i = 1, \ldots, d$, sejam $\mathbb{Z}$-independentes, ou seja, $\underline{\omega} \cdot \underline{n} = 0 \iff \underline{n} = \underline{0}$, onde $\underline{0} = (0, \ldots, 0)$. Notemos também que o conjunto $\{\underline{\omega} \cdot \underline{n},\ \underline{n} \in \mathbb{Z}^d\}$ forma um grupo em relação a operação de soma usual.

Para uma função quase-periódica h denotaremos também por vezes o vetor $\underline{\omega}$ pelo símbolo $\beta(h)$.

Denotaremos o conjunto das funções ditas *almost*-periódicas da reta real por $AP(\mathbb{R})$ e por $QP(\mathbb{R})$ o conjunto das funções ditas quase-periódicas. Obviamente $QP(\mathbb{R}) \subset AP(\mathbb{R})$.

Um teorema célebre de H. Bohr (confira, por exemplo, [48]) afirma que se h é *almost*-periódica uma condição necessária e suficiente para que a integral $H(t) := \int_0^t h(\tau)d\tau$ seja também *almost*-periódica é $H \in L^\infty(\mathbb{R})$. Esse teorema de Bohr generaliza um resultado prévio de P. Bohl para o caso quase-periódico [21]-[22].

Notemos que se h é tal que $M(h) = h_0 = 0$ e $\sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ \omega_n \neq 0}} \frac{|h_n|}{|\omega_n|} < \infty$ então $H(t)$ é limitada e, portanto, *almost*-periódica.

Um outro resultado importante de H. Bohr afirma que $AP(\mathbb{R})$ é fechada na topologia uniforme da reta real, ou seja, o limite uniforme de seqüências de funções *almost*-periódicas é também uma função *almost*-periódica. Mencionamos que isso não é, em geral, verdadeiro para seqüências de funções quase-periódicas.

Em verdade, vale o fato mais forte que $AP(\mathbb{R})$ é uma álgebra C^* abeliana com a norma dada por $\|\cdot\|_\infty$ e a operação $*$ dada pela conjugação complexa usual.

Por fim, observamos que se engana quem acredita que funções *almost*-periódicas mas não quase-periódicas não surgem em problemas de Física. Os modos de vibração de uma membrana livre retangular de lados L_1 e L_2 sob condições de contorno de Dirichlet têm freqüências $\omega_{n,m} = c\pi\sqrt{\left(\frac{n}{L_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{L_2}\right)^2}$, com $n, m \in \mathbb{N}$ e, portanto, quando todos os modos de vibração estão presentes, cada ponto da membrana descreve tipicamente um movimento *almost*-periódico não quase-periódico.

*

Apêndice B

Relações Especiais

Aqui provamos algumas das relações usadas na Seção 2.3, página 26. Como as demonstrações exigem um certo número de manipulações algébricas tediosas, preferimos separá-las do texto principal e inserí-las neste apêndice. Observamos que freqüentemente utilizaremos, sem menção, as proposições e os corolários apresentados nas subseções 2.2.1 e 2.2.2, páginas 21 e 23, respectivamente.

B.1 Obtenção de (2.45)

Usando (2.39), vamos escrever explicitamente $\kappa_1 l_{n-1}$ que aparece no termo (i) de (2.44). Temos, $\kappa_1 l_{n-1}(t) =: A(t) + B(t)$, onde

$$A(t) \;:=\; 2i\,\kappa_1\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,v_1 v_{n-2}\,). \quad B(t) \;:=\; i\kappa_1 \sum_{p=2}^{n-3} \mathfrak{R}_2(\,0\,|\,v_p v_{n-1-p}\,)\,. \tag{B.1}$$

As expressões acima para A e B serão trabalhadas individualmente. Vamos começar com A. Pelas hipóteses indutivas, podemos usar (2.11)–(2.12). Assim,

$$\begin{aligned} A(t) &= 2\,i\,\kappa_1^2\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,i\sum_{p=1}^{n-3} \mathfrak{R}_2(\,0\,|\,v_p v_{n-2-p}\,) + \kappa_{n-2}\mathcal{Q}_0\,) \\ &= -2\,\kappa_1^2 \sum_{p=1}^{n-3} \mathfrak{R}_3(\,0\,|\,0\,|\,v_p v_{n-2-p}\,) + 2\,i\,\kappa_1^2\kappa_{n-2}\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,0\,)\,. \end{aligned}$$

Note que A depende implicitamente de κ_{n-3}, a saber, através de v_{n-3}. Para tornar essa dependência explícita, temos que separar das somas acima os termos contendo v_{n-3} e escrever

v_{n-3} usando (2.12). Com efeito,

$$
\begin{aligned}
A(t) &= -2\,\kappa_1^2 \sum_{p=2}^{n-4} \mathfrak{R}_3(\,0\,|\,0\,|\,v_p v_{n-2-p}\,) - 4\,\kappa_1^2 \mathfrak{R}_3(\,0\,|\,0\,|\,v_1 v_{n-3}\,) + 2\,i\,\kappa_1^2 \kappa_{n-2}\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,0\,) \\
&= -2\,\kappa_1^2 \sum_{p=2}^{n-4} \mathfrak{R}_3(\,0\,|\,0\,|\,v_p v_{n-2-p}\,) - 4i\,\kappa_1^3 \sum_{p=1}^{n-4} \mathfrak{R}_4(\,0\,|\,0\,|\,0\,|\,v_p v_{n-3-p}\,) \\
&\quad -4\,\kappa_1^3 \kappa_{n-3}\,\mathfrak{R}_3(\,0\,|\,0\,|\,0\,) + 2\,i\,\kappa_1^2 \kappa_{n-2}\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,0\,)\,. \qquad \text{(B.2)}
\end{aligned}
$$

Vamos agora trabalhar na expansão de B, expressão (B.1). Usando (2.11)-(2.12), temos

$$
B(t) = 2i\kappa_1\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,v_2 v_{n-3}\,) + i\kappa_1 \sum_{p=3}^{n-4} \mathfrak{R}_2(\,0\,|\,v_p v_{n-1-p}\,)\,. \qquad \text{(B.3)}
$$

Em seguida, devemos computar separadamente $v_2 v_{n-3}$. Usando mais uma vez (2.11), (2.12) e (2.8) (que implica em $\mathcal{Q}_0^{-1}\mathcal{Q}_i\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,a\,) = \mathfrak{R}_2(\,i\,|\,a\,)$), obtemos

$$
\begin{aligned}
v_2 v_{n-3} &= -\kappa_1^2 \sum_{p=1}^{n-4} \mathfrak{R}_2(\,2\,|\,v_p v_{n-3-p}\,) + \sum_{p=1}^{n-4} \mathfrak{R}_2(\,1\,|\,v_p v_{n-3-p}\,) \\
&\quad + i\kappa_2 \sum_{p=1}^{n-4} \mathfrak{R}_2(\,0\,|\,v_p v_{n-3-p}\,) + \kappa_{n-3}\left(i\kappa_1^2 \mathcal{Q}_2 - i\mathcal{Q}_1 + \kappa_2 \mathcal{Q}_0\right)\,.
\end{aligned}
$$

Essa expressão para $v_2 v_{n-3}$ deve ser inserida no primeiro termo de (B.3). O resultado é

$$
\begin{aligned}
B(t) &= 2i\kappa_1 \sum_{p=1}^{n-4} \Big\{ -\kappa_1^2\,\mathfrak{R}_3(\,0\,|\,2\,|\,v_p v_{n-3-p}\,) + \mathfrak{R}_3(\,0\,|\,1\,|\,v_p v_{n-3-p}\,) \\
&\quad + i\kappa_2\,\mathfrak{R}_3(\,0\,|\,0\,|\,v_p v_{n-3-p}\,) \Big\} + i\kappa_1 \sum_{p=3}^{n-4} \mathfrak{R}_2(\,0\,|\,v_p v_{n-1-p}\,) \\
&\quad + 2i\kappa_1\kappa_{n-3} \left[i\kappa_1^2\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,2\,) - i\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,1\,) + \kappa_2\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,0\,) \right]. \qquad \text{(B.4)}
\end{aligned}
$$

Como ambas as funções A e B são quase-periódicas, podemos agora computar $\kappa_1 M(l_{n-1}) = M(A) + M(B)$. Usando (B.2), (B.4), (2.15) e o fato já provado que $M(\,0\,|\,0\,) = 0$, obtemos

$$
\kappa_1 M(l_{n-1}) = 2\kappa_1\kappa_{n-3} M(\,0\,|\,1\,) + \mathcal{R}_n^{(1)}\,, \qquad \text{(B.5)}
$$

onde

$$\mathcal{R}_n^{(1)} := 2i\kappa_1 \sum_{p=1}^{n-4} \Big\{ -2\kappa_1^2 M(\mathfrak{R}_4(0\,|\,0\,|\,0\,|\,v_p v_{n-3-p})) + M(\mathfrak{R}_3(0\,|\,1\,|\,v_p v_{n-3-p}))$$

$$-\kappa_1^2 M(\mathfrak{R}_3(0\,|\,2\,|\,v_p v_{n-3-p})) + i\kappa_2 M(\mathfrak{R}_3(0\,|\,0\,|\,v_p v_{n-3-p}))\Big\}$$

$$-2\,\kappa_1^2 \sum_{p=2}^{n-4} M(\mathfrak{R}_3(0\,|\,0\,|\,v_p v_{n-2-p})) + i\kappa_1 \sum_{p=3}^{n-4} M(\mathfrak{R}_2(0\,|\,v_p v_{n-1-p})). \qquad \text{(B.6)}$$

Essa é a relação desejada (2.45). Por inspeção, verifica-se que $\mathcal{R}_n^{(1)}$ depende apenas das constantes $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-4}$. Note que a constante κ_{n-2} desapareceu completamente quando tomamos o valor médio de $A + B$, devido ao fato crucial que $M(\mathcal{Q}_2) = 0$. Essa é uma observação muito importante, pois, de outra forma, teríamos em (B.5) uma equação para <u>duas</u> constantes não determinadas κ_{n-3} e κ_{n-2}.

B.2 Obtenção de (2.46)

O principal ponto aqui é tornar a dependência em κ_{n-3} de $l_{n-2}(t)$ explicita. Usando (2.39) e (2.12) para $v_{n-3}(t)$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
q^{-1} v_2 l_{n-2} &= i \sum_{p=1}^{n-3} \mathfrak{R}_2(\,q v_2\,|\,v_p v_{n-2-p}\,) \\
&= 2i\,\mathfrak{R}_2(\,q v_2\,|\,v_1 v_{n-3}\,) + i \sum_{p=2}^{n-4} \mathfrak{R}_2(\,q v_2\,|\,v_p v_{n-2-p}\,) \\
&= 2i\kappa_1\,\mathfrak{R}_2(\,q v_2\,|\,i \sum_{p=1}^{n-4} \mathfrak{R}_2(\,0\,|\,v_p v_{n-3-p}\,) + \kappa_{n-3}\mathcal{Q}_0\,) \\
&+ i \sum_{p=2}^{n-4} \mathfrak{R}_2(\,q v_2\,|\,v_p v_{n-2-p}\,) \\
&= -2\kappa_1 \sum_{p=1}^{n-4} \mathfrak{R}_3(\,q v_2\,|\,0\,|\,v_p v_{n-3-p}\,) + i \sum_{p=2}^{n-4} \mathfrak{R}_2(\,q v_2\,|\,v_p v_{n-2-p}\,) \\
&+ 2i\kappa_1\kappa_{n-3}\,\mathfrak{R}_2(\,q v_2\,|\,0\,).
\end{aligned}$$

Por (2.11),

$$\mathfrak{R}_2(\,q v_2\,|\,0\,) = i\kappa_1^2\,\mathfrak{R}_2(\,2\,|\,0\,) - i\,\mathfrak{R}_2(\,1\,|\,0\,) + \kappa_2\,\mathfrak{R}_2(\,0\,|\,0\,).$$

Portanto, $M(\mathfrak{R}_2(qv_2\,|\,0)) = iM(0\,|\,1)$. Assim,

$$M(q^{-1}v_2 l_{n-2}) \;=\; -2\kappa_1\kappa_{n-3}M(0\,|\,1) + \mathcal{R}_n^{(2)}\,,$$

onde

$$\mathcal{R}_n^{(2)} \;:=\; -2\kappa_1 \sum_{p=1}^{n-4} M(\mathfrak{R}_3(qv_2\,|\,0\,|\,v_p v_{n-3-p})) + i\sum_{p=2}^{n-4} M(\mathfrak{R}_2(qv_2\,|\,v_p v_{n-2-p}))\,. \tag{B.7}$$

Essa é a relação desejada (2.46). Por inspeção, verifica-se que $\mathcal{R}_n^{(2)}$ depende apenas das constantes conhecidas $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-4}$.

*

Apêndice C

Identidade para uma Soma de Funções de Bessel

Aqui apresentamos um rascunho da prova da identidade (3.7), página 42, uma vez que não há encontramos em nenhum lugar na literatura pesquisada. Usando a bem conhecida identidade (devido à Schläfli e Gegenbauer) para o produto de funções de Bessel (confira a magnífica referência [26])

$$J_\mu(z)J_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} J_{\mu+\nu}(2z\cos\theta)\cos((\mu-\nu)\theta)\,d\theta\,, \tag{C.1}$$

obtém-se

$$S_m(x) := \sum_{k\neq 0}\frac{J_{m+k}(x)^2}{k} = (-1)^m\int_{-\pi/2}^{\pi/2} J_0(2x\cos\theta)g(\theta)e^{2im\theta}\,d\theta,$$

onde $g(\theta) := \frac{1}{\pi}\sum_{k\neq 0}\frac{(-1)^k\sin(2k\theta)}{k}$. No intervalo $(-\pi/2,\ \pi/2)$, tem-se $g(\theta) = -2\theta/\pi$. Portanto,

$$\begin{aligned} S_m(x) &= \frac{2(-1)^m}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} J_0(2x\cos\theta)\theta\sin(2m\theta)\,d\theta \\ &= \frac{(-1)^{m+1}}{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} J_0(2x\cos\theta)\cos(2\nu\theta)\,d\theta\right)\Bigg|_{\nu=m}. \end{aligned}$$

Usando novamente (C.1) (agora com $\mu = -\nu$), encontra-se

$$S_m(x) = (-1)^{m+1}\frac{\partial}{\partial\nu}\left[J_\nu(x)J_{-\nu}(x)\right]\Bigg|_{\nu=m} = J_m(x)\left[-2\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x)\Bigg|_{\nu=m} + \pi Y_m(x)\right].$$

Essa é a identidade (3.7), como desejado, onde Y_m é a função de Bessel de segundo tipo, dada por $\pi Y_m(x) = \left(\frac{\partial}{\partial\nu}J_\nu(x) - (-1)^m\frac{\partial}{\partial\nu}J_{-\nu}(x)\right)\Big|_{\nu=m}$, definida para qualquer inteiro m.

* * *

Referências Bibliográficas

[1] J. C. A. Barata. *Expansões Perturbativas para uma Classe de Sistemas Quânticos de Dois Níveis sob Interações Periodicamente e Quase-Periodicamente Depebdentes do Tempo.* Tese de Livre-Docência submetida ao IFUSP (1999).

[2] J. C. A. Barata. *On Formal Quasi-Periodic Solutions of the Schrödinger Equation for a Two-Level System with a Hamiltonian Depending Quasi-Periodically on Time.* Rev. Math. Phys. **12**, 25–64 (2000).

[3] J. C. A. Barata. *Convergent Perturbative Solutions of the Schrödinger Equation for a Two-Level Systems with Hamiltonians Depending Periodically on Time.* Ann. Henri Poincaré **2**, 963–1005 (2001).

[4] J. C. A. Barata e W. F. Wreszinski. *Strong Coupling Theory of Two Level Atoms in Periodic Fields.* Phys. Rev. Lett. **84**, 2112–2115 (2000).

[5] J. C. A. Barata e D. A. Cortez. *Perturbative Analysis of Dynamical Localization.* J. Math. Phys. **44**, 1937–1960 (2003).

[6] J. C. A. Barata e D. A. Cortez. *Time Evolution of Two-Level Systems Driven by Periodic Fields.* Phys. Lett. A **301**, 350–360 (2002).

[7] I. I. A. Rabi. *Space Quantization in a Gyrating Magnetic Field.* Phys. Rev. **31**, 652–654 (1937).

[8] F. Bloch e A. Siegert. *Magnetic Resonance for Nonrotating Fields.* Phys. Rev. **57**, 522–527 (1940).

[9] S. H. Autler e C. H. Townes. *Stark Effect in Rapidly Varying Fields.* Phys. Rev. **100**, 703–722 (1955).

[10] R. P. Feynman, F. L. Vernon Jr. and R. W. Hellwarth. J. Appl. Phys. **28**, 49 (1957).

[11] W. F. Wreszinski. *Atoms and Oscillators in Quasi-Periodic External Fields.* Helv. Phys. Acta **70**, 109–123 (1997).

[12] W. F. Wreszinski e S. Casmeridis. *Models of Two Level Atoms in Quasi-periodic External Fields.* J. Stat. Phys. **90**, 1061 (1998).

[13] P. M. Bleher, H. R. Jauslin e J. L. Lebowitz. *Floquet Spectrum for Two Level Systems in Quasiperiodic Time Dependent Fields.* J. Stat. Phys. **68**, 271 (1992).

[14] F. Grossmann, T. Dittrich, P. Jung e P. Hänggi. *Coherent Destruction of Tunneling.* Phys. Rev. Lett. **67**, 516–519 (1991).

[15] F. Grossmann e P. Hänggi. *Localization in a Driven Two-Level Dynamics.* Europhys. Lett. **18** (7), 571-576 (1992).

[16] M. Grifoni e P. Hänggi. *Driven Quantum Tunneling.* Phys. Rep. **304**, 229–354 (1998).

[17] A. Sacchetti. *Dynamical Localization Criterion for Driven Two-Level Systems.* J. Phys. A. Math. Gen. **34**, 10293–10306 (2001).

[18] Y. Kayanuma. *Role of Phase Coherence in the Transition Dynamics of a Periodically Driven Two-Level System.* Phys. Rev. A **50**, 843–845 (1994).

[19] H. Wang e X.-G. Zhao. *Dynamics of Two-Level Systems Driven by dc-ac Fields.* Phys. Lett. A **217**, 225–231 (1996).

[20] H. Bohr. *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. I.* Acta Mathematica **45**, (1924) 29-127. *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. II.* Acta Mathematica **46**, (1925) 101-214. *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. III.* Acta Mathematica **47**, (1926) 237-281.

[21] P. Bohl. *Über die Darstellung von Funktionen einer Variabeln durch trigonometrische Reihen mit meheren einer Variabeln proportionalen Argumenten.* Magisterdissertation, Dorpat (1893).

[22] P. Bohl. *Über eine Differentialgleichung der Störungstheorie.* Journal de Crelle **131**, 268-321 (1906).

[23] E. Esclangon. *Les Fonctions Quasi-Périodiques.* Thèse, Paris (1904).

[24] E. Esclangon. *Nouvelles Recherches sur les Fonctions Quasi-Périodiques.*

[25] Kôsaku Yosida. *Functional Analysis.* Sexta Edição, Springer Verlag (1980).

[26] G. N. Watson. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions.* Segunda edição, Cambridge University Press, London (1962).

[27] G. Gentile. *Quasi-Periodic Solutions for Two-Level Systems.* Comm. Math. Phys. **242**, no. 1-2, 221-250 (2002).

[28] G. Gallavotti e G. Gentile. *Hyperbolic Low-Dimensional Invariant Tori and Summations of Divergent Series.* Comm. Math. Phys. **227**, 421-460 (2002).

[29] G. Gentile e V. Mastropiero. *Methods for the Analysis of the Lindstedt Series for KAM Tori and Renormalizability in Classical Mechanics. A Review with Some Applications.* Rev. Math. Phys. **8**, 393-444 (1996).

[30] G. Gallavotti. *Twistless KAM Tori.* Comm. Math. Phys. **164**, 145-156 (1994).

[31] G. Gentile e V. Mastropietro. *KAM Theorem Revisited.* Physica D **90**, 225-234 (1996).

[32] G. Gentile. *Diagrammatic Techniques in Perturbation Theory, and Applications* em *Symmetry and Perturbation Theory II.* Ed. A. Degasperis e G. Gaeta, World Scientific (1999).

[33] D. A. Cortez. *Strong Perturbative Localization in Two-Level Systems.* Em preparação.

[34] J. E. Avron e B. Simon. *Almost periodic Hill's equation and the rings of Saturn.* Phys. Rev. Lett. **46**, no. 17, 1166-1168 (1981).

[35] M. V. Bartuccelli e G. Gentile. *Lindstedt series for perturbations of isochronous systems: a review of the general theory.* Rev. Math. Phys. **14**, no. 2, 121-171 (2002).

[36] H. Bohr. *Ueber fastperiodische ebene Bewegungen.* Comment. Math. Helv. **4** (1932), 51-64. H. Bohr. *Kleinere Beiträge zur Theorie der Fastperiodischen Funktionen.* Danske Vid. Selsk. Mat.-Fys. Medd. **10**, no. 10, 5-11 (1930).

[37] H. Broer, J. Puig e C. Simó. *Resonance tongues and instability pockets in the quasi-periodic Hill-Schrödinger equation.* Comm. Math. Phys. **241**, no. 2-3, 467-503 (2003).

[38] H. Broer e C. Simó. *Hill's equation with quasi-periodic forcing: resonance tongues, instability pockets and global phenomena.* Bol. Soc. Bras. Mat. **29**, no. 2, 253-293 (1998).

[39] L. Chierchia. *Quasi-periodic Schrödinger operators in one dimension, absolutely continuous spectra, Bloch waves and integrable Hamiltonian systems.* Quaderni del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Firenze, (1986).

[40] L. Chierchia. *Absolutely continuous spectra of quasi-periodic Schrödinger operators.* J. Math. Phys. **28**, no. 12, 2891-2898 (1987).

[41] E. I. Dinaburg e Ja. G. Sinaĭ. *The one-dimensional Schrödinger equation with quasiperiodic potential.* Funkcional. Anal. i Prilozen. **9**, no. 4, 8-21 (1975).

[42] L. H. Eliasson. *Floquet solutions for the 1-dimensional quasi-periodic Schrödinger equation.* Comm. Math. Phys. **146**, no. 3, 447-482 (1992).

[43] G. Gentile, D. A. Cortez e J. C. A. Barata. *Stability for quasi-periodically perturbed Hill's equations.* Aceito para publicação em Comm. Math. Phys. (2005).

[44] G. Gentile e G. Gallavotti. *Degenerate elliptic tori.* Aceito para publicação em Comm. Math. Phys. (2005).

[45] D.B. Hinton e J.K. Shaw. *On the absolutely continuous spectrum of the perturbed Hill's equation.* Proc. London Math. Soc. (3) 50, no. 1, 175–192 (1985).

[46] H. Hochstadt. *The Functions of Mathematical Physics.* Dover Publications (1971).

[47] R. Johnson e J. Moser. *The rotation number for almost periodic potentials.* Commun. Math. Phys. **84**, no. 3, 403-438 (1982).

[48] Y. Katznelson. *An Introduction to harmonic analysis.* Dover, New York (1978).

[49] J. Puig. *Reducibility of Linear Equations with Quasi-Periodic Coefficients. A Survey.* Preprint Univ. Texas.

[50] R. Krikorian, *Global density of reducible quasi-periodic cocycles on* $T^1 \times \mathrm{SU}(2)$, Ann. of Math. (2) **154**, no. 2, 269-326 (2001).

[51] W. Magnus, S. Winkler, *Hill's Equation.* Dover, New York (1979).

[52] M. Reed e B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics vol. II: Fourier Analysis. Self-Adjointness.* Academic Press (1972).

[53] J. Moser, J. Pöschel. *An extension of a result by Dinaburg and Sinaĭ on quasiperiodic potentials.* Comment. Math. Helv. **59**, no. 1, 39-85 (1984).

[54] F.S. Rofe-Beketov. *A finiteness test for the number of discrete levels which can be introduced into the gaps of the continuous spectrum by perturbations of a periodic potential* (Russian). Dokl. Akad. Nauk SSSR **156**, 515-518 (1964).

[55] H. Rüssmann. *On the one-dimensional Schrödinger equation with a quasiperiodic potential.* Nonlinear dynamics (Internat. Conf., New York, 1979), Ann. New York Acad. Sci., 357, New York Acad. Sci., New York (1980).

[56] E. Sorets, T. Spencer. *Positive Lyapunov exponents for Schrödinger operators with quasi-periodic potentials.* Commun. Math. Phys. **142**, no. 3, 543-566 (1991).

[57] V. G. Szebehely. *Theory of orbits.* Academic Press, New York (1967).

[58] V.A. Želudev. *The eigenvalues of a perturbed Schrödinger operator with periodic potential* (Russian), Problems of Mathematical Physics, no. 2, Spectral Theory, Diffraction Problems, pp. 108-123, Izdat. Leningrad. Univ., Leningrad (1967).

[59] V.A. Želudev, *The perturbation of the spectrum of the one-dimensional selfadjoint Schrödinger operator with periodic potential* (Russian), Problems of Mathematical Physics, no. 4, Spectral Theory. Wave Processes, pp. 61-82, Izdat. Leningrad. Univ., Leningrad (1970).

[60] H. Whitney. *Analytic extensions of differential functions defined in closed sets.* Trans. Amer. Math. Soc. **36**, no. 1, 63-89 (1934).