SBI-IFUSP
305M810T4318

Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Departamento de Física-Matemática

Soluções atratoras e isocurvatura em modelos de energia escura

Ronaldo Carlotto Batista

Orientador: Prof. Dr. Luís Raul Weber Abramo

Dissertação apresentada ao IF-USP para a obtenção do grau de mestre em ciências.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
SERVIÇO DE BIBLIOTECA E INFORMAÇÃO
4318
INSTITUTO DE FÍSICA

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Luís Raul Weber Abramo (IF-USP)

Prof. Dr. Gustavo Burdman (IF-USP)

Prof. Dr. Ioav Waga (IF-UFRJ)

2005

Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

523.1
B288s
M
ex.1

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Batista, Ronaldo Carlotto

Soluções atratoras e isocurvatura em modelos de energia escura. São Paulo - 2005.

Dissertação (Mestrado) - Universidade de São Paulo
Orientador: Prof. Dr. Luís Raul Weber Abramo

Instituto de Física - Departamento de Física Matemática
Área de Concentração: Física

Unitermos:

1. Cosmologia;
2. Estrutura do Universo;
3. Relatividade.

USP/IF/SBI-038/2005

(...)

Of course there is nothing the matter with the stars

It is my emptiness among them

While they drift farther away in the invisible morning

W. S. Merwin

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao professor Raul Abramo pela orientação, pela atenção desde o primeiro contato numa manhã de Outubro de 2002, pela motivação e implementação de objetividade nos estudos. Também gostaria de agradecer ao professor Vilson Zanchin, pela orientação e amizade durante os anos de graduação na longínquoa UFSM.

Pelas diversas discusões em física, ou mesmo de temas aleatórios, e pela amizade, agradeço ao Carlos Molina, Mário Baldiotti, ao pessoal do grupo cósmico: Thiago Pereira, Rafael Brandão, Ivan Yasuda e Vinícius Fernandes. Também agradeço aos amigos Marcelo Pires, em especial pelas dicas sobre Mathematica, João Assirati, em especial pela essencial ajuda com a distribuição Linux mais amigável de todos os tempos, e Luciana Afonso pelas massagens terapêuticas; aos amigos (por momentos inimigos) ETPlayers: Rodrigo Fresneda, Fábio Paolini, Alencar de Faria, Leonardo Sioufi e Patton. Agradeço às gurias da secretaria Beth Vargas, Simone Shinomiya e Amélia Ferrari pela paciência e eficiência. Efim, agradeço a todos que conheci nesta cidade, discutiram, bandejaram, encheram a cara ou compartilharam de momentos divertidos.

Contudo, quase nada teria feito não tivesse o fundamental apoio da minha família. Agradeço muito aos meus pais, Rogério e Rosa, que, independentemente da distância que nos sepera, sempre me incentivaram desde os momentos iniciais e mais difíceis até os dias de hoje. Agradeço também ao meu irmão, Roberto, pelas longas horas escrevendo sobre as novidades de casa pela internet, pelos tragos e pelos momentos de sua compania sempre engraçada, especialmente quando junto aos nossos pais, que pouco tive nestes últimos dois anos.

Agradeço ao CNPq pelos dois anos de bolsa de mestrado.

Resumo

Recentes observações astrofísicas, em especial de supernovas tipo Ia e das anisotropias da radiação cósmica de fundo, indicam que recentemente na história do universo um tipo desconhecido de energia passou a dominar sua evolução induzindo uma expansão acelerada. Esta componente misteriosa ficou conhecida como energia escura. Nosso objetivo é o estudo da energia escura, através de modelos com constante cosmológica, campo escalar canônico e com o campo de Born-Infeld. Para os modelos com campo escalar, usando potenciais tipo lei de potência, estudamos soluções atratoras para a evolução homogênea. Também estudamos, na aproximação de largas escalas, soluções atratoras para as perturbações dos campos escalares. Mostramos que, para modelos de energia escura com campo escalar canônico, as soluções atratoras a nível perturbativo não geram modos de isocurvatura. Para o campo de Born-Infeld, fazemos uma análise de estabilidade de suas soluções atratoras a nível perturbativo, determinamos em que circunstâncias elas podem gerar modos de isocurvatura. Para os modelos de energia escura mais realistas, estes modos tendem a ser pequenos.

Abstract

Recent astrophysical observations, specially supernova type Ia and cosmic microwave background anisotropies, indicate that recently in the history of the universe, some unknown type of energy is dominating its evolution and inducing an accelerated expansion. This mysterious component has been named dark energy. Our aim is to study dark energy, by using cosmological constant, canonical scalar field and Born-Infeld scalar field models. In the models with scalar field, using power law potentials, we study attractor solutions for the homogeneous evolution. We also study, in the large scale approximation, attractor solutions for the scalar field perturbations. We show that, for models with canonical scalar field, the attractor solutions for its perturbations do not generate isocurvature modes. For the Born-Infeld scalar field, we analyze the stability of its attractor solutions in the perturbative level, and we determine in which case they can generate isocurvature modes. For the more realistic dark energy models, these modes tend to be small.

Sumário

1 Introdução **8**

2 Modelo cosmológico padrão **12**

2.1 A métrica Friedmann-Robertson-Walker e o universo em expansão 13

2.2 Evolução e conteúdo do universo 18

2.3 Além do modelo padrão 25

2.3.1 Matéria escura 25

2.3.2 Energia escura 26

3 Modelos de energia escura: evolução homogênea **29**

3.1 Constante Cosmológica 30

3.2 Modelos com campo escalar 33

3.2.1 Campo de quintessência 33

3.2.2 Campo de Born-Infeld 39

4 Perturbações cosmológicas **46**

4.1 Perturbações lineares invariantes de gauge 47

4.1.1 Perturbações adiabáticas e de entropia 55

4.1.2 Perturbação de pressão não adiabática para fluidos perfeitos com equação de estado constante 60

4.2 Soluções para um sistema com radiação, matéria e constante cosmológica . 62

4.2.1 Soluções na aproximação de grandes escalas 63

4.2.2 Soluções de pequena escala 67

5 Perturbações nos modelos com campo escalar **70**

5.1 Perturbações no campo de quintessência 71

5.2 Perturbações no campo de Born-Infeld 76

5.2.1 Modos de isocurvatura 82

6 Conclusões **93**

Referências Bibliográficas **95**

Capítulo 1

Introdução

Atualmente a cosmologia apresenta duas grandes questões a serem respondidas. A mais antiga, que data ainda da primeira metade do século passado, diz respeito à natureza de um tipo desconhecido de matéria, detectada unicamente por seus efeitos gravitacionais, que ficou conhecida como matéria escura. A segunda surgiu há menos de duas décadas: os cosmólogos se depararam com o problema de explicar a razão pela qual o universo está em expansão acelerada, dominado por uma forma de energia desconhecida, a qual foi batizada com o nome de energia escura.

Existem duas grandes motivações para o estudo destas questões. Uma é o êxito do modelo cosmológico padrão em explicar aspectos fundamentais do universo. A partir do entendimento propiciado pelo modelo padrão, existe uma base sólida para os novos questionamentos cosmológicos. A outra motivação se dá pelo grande avanço tecnológico das últimas décadas, o qual permitiu uma melhora muito significativa das observações astrofísicas, que por sua vez comprovaram várias predições do modelo padrão e colocaram de forma cientificamente clara as duas grandes questões sobre o universo: a matéria escura e a energia escura.

Descrições adequadas tanto para a energia quanto para a matéria escura demandam

teorias físicas mais bem fundamentadas. Nesse sentido, existem algumas propostas teóricas, as quais, contudo, ainda necessitam de testes experimentais. Infelizmente, a presente tecnologia ainda não acessa as escalas de energia necessárias para a realização de tais testes. Portanto, atualmente, o estudo fenomenológico é uma alternativa na busca do melhor entendimento desta questões.

O objeto de estudo desta dissertação são alguns aspectos das perturbações da energia escura. Descrevemos aspectos gerais de modelos com constante cosmológica e com campos escalares. Dos vários modelos com campo escalar, o mais estudado é o campo escalar canônico, ou campo de quintessência. Também existem modelos com campos escalares não canônicos, dentre os quais vamos estudar o campo de Born-Infeld. Nosso principal interesse é estudar soluções atratoras para estes campos e suas perturbações, em especial para o campo de Born-Infeld, e verificar se estas geram modos de isocurvatura em grandes escalas. Estes modos são manifestações de perturbações não adiabáticas e podem ser usados para distinguir os modelos de energia escura.

As soluções atratoras a nível homogêneo são importantes pois tendem a aliviar o problema da coincidência cósmica. Uma vez que os campos escalares apresentam a mesma evolução para condições iniciais diferentes, podemos argumentar que a fase atual de transição de dominação da matéria para energia escura surge naturalmente a partir da dinâmica do universo. Contudo, ainda devemos ajustar a escala de energia destes campos, o que não alivia o problema do ajuste fino. Apesar desta atual dificuldade, é de se esperar que esta escala de energia seja definida por uma teoria física mais fundamental.

A partir das soluções atratoras a nível homogêneo, é importante estudar como as perturbações associadas aos campos se comportam. Procuramos descrever as principais características perturbativas destas soluções, as quais ocorrem na aproximação de grandes escalas. Feito isso, analisamos se essas soluções geram modos de isocurvatura. Tais estudos são muito importantes nos modelos de energia escura pois, conhecendo as perturbações em

grandes escalas e sua natureza, poderemos determinar qual seu impacto em observáveis físicos. Por sua vez, tal determinação pode discriminar os modelos de energia escura mais adequados.

No capítulo 2 apresentamos os aspectos fundamentais do modelo padrão, tais como a homogeneidade e isotropia do universo e sua expansão. Nesse contexto discutimos algumas previsões importantes, tais como a abundância dos elementos leves, a radiação cósmica de fundo (RCF) e seu espectro. Também apresentamos os problemas da energia e matéria escura e discutimos como algumas observações recentes são capazes de vincular os parâmetros cosmológicos associados a estas quantidades.

No capítulo 3 estudamos alguns modelos homogêneos de energia escura: com constante cosmológica, campo de quintessência e campo de Born-Infeld. No contexto da constante cosmológica, apresentamos os problemas da coincidência cósmica e do ajuste fino, os quais incentivaram outras propostas de energia escura modeladas por campos escalares. Apresentamos, para potenciais tipo lei de potência, soluções atratoras para a evolução de fundo dos modelos de quintessência e de Born-Infeld, que podem ao menos aliviar o problema da coincidência cósmica.

O capítulo 4 é destinado à apresentação da teoria de perturbações cosmológicas relativística. Discutimos perturbações lineares na teoria da relatividade geral, o problema da escolha de variáveis físicas adequadas e apresentamos as equações para as perturbações escalares. Com isso, definimos variáveis que descrevam as perturbações de entropia num sistema com vários fluidos e em que circunstâncias a pressão não adiabática em grandes escalas gera modos de isocurvatura. Com este conjunto de ferramentas, discutimos algumas soluções para perturbações na radiação e na matéria e o efeito da constante cosmológica.

As perturbações nos modelos com campo escalar, abordados no capítulo 3, são estudadas no capítulo 5. Nosso interesse é discutir suas soluções atratoras e se elas geram modos de isocurvatura em grandes escalas. Apresentamos as soluções atratoras para o campo de

quintessência e o fato de não gerarem modos de isocurvatura. Para o campo de Born-Infeld, deduzimos sua solução atratora em nível perturbativo e seu critério de estabilidade. Para este modelo, fazemos uma análise detalhada das perturbações de entropia e mostramos que podemos ter modos de isocurvatura em grandes escalas. Por fim, apresentamos as conclusões no capítulo 6.

Esta dissertação é desenvolvida no contexto da relatividade geral. A assinatura da métrica é +2 e usamos a convenção de soma de Einstein. As coordenadas do espaço-tempo são indexadas por letras gregas minúsculas, variando de 0 a 3, as coordenadas puramente espaciais são indexadas por letras latinas minúsculas, variando de 1 a 3. Também usaremos o sistema natural de unidades, no qual $c = \hbar = k_B = 1$, a menos de quantidades explicitamente expressas em unidades convencionais.

Capítulo 2

Modelo cosmológico padrão

O modelo cosmológico padrão é fundamentado por uma teoria física e um princípio. Quando em 1916 Einstein propôs [1] a teoria da Relatividade Geral, uma das primeiras aplicações [2, 3] seria no estudo do universo em larga escala, desde então tal teoria foi dada como a mais adequada para sua descrição. Como em qualquer problema de relatividade geral, ainda é preciso estabelecer uma variedade riemanniana, com alguns graus de liberdade, os quais são especificados pelas equações de Einstein. O princípio cosmológico estabelece que vivemos num universo homogêneo e isotrópico, o que, por sua vez, determina uma variedade riemanniana maximalmente simétrica para a seção espacial do universo.

Supor que vivemos num universo homogêneo e isotrópico pode não parecer razoável enquanto se observa o sistema solar ou a Via-Láctea, contudo, na medida que visamos galáxias cada vez mais distantes, tal suposição torna-se, na mesma medida, mais adequada. São tais observações que embasam o princípio cosmológico, o qual implica numa métrica de seção espacial maximalmente simétrica, com apenas um grau de liberdade. Dado o conteúdo material do universo, as equações de Einstein estabelecem a evolução deste grau de liberdade. Neste contexto é formulado o modelo padrão, que é capaz de explicar a formação dos elementos leves e a RCF.

2.1 A métrica Friedmann-Robertson-Walker e o universo em expansão

Algumas das primeiras soluções para um universo espacialmente homogêneo, isotrópico e não estático foram obtidas por Friedmann em 1922 [4]. Em 1935, Robertson e Walker [5, 6] demonstraram que a métrica encontrada por Friedmann era uma conseqüência direta de assumir o princípio cosmológico, a qual ficou conhecida como métrica de Friedmann-Robertson-Walker (FRW):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 \left[1 + \frac{\kappa}{4}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right]^{-2} \delta_{ij} dx^i dx^j \ , \tag{2.1}$$

onde $a = a(t)$ é o fator de escala e a natureza da seção espacial é definida por:

$$\kappa = \begin{cases} +1 & \rightarrow \quad \text{fechado ou esférico} \ , \\ 0 & \rightarrow \quad \text{plano} \ , \\ -1 & \rightarrow \quad \text{aberto ou hiperbólico} \ . \end{cases}$$

As equações de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \ , \tag{2.2}$$

mais a especificação do conteúdo de matéria determinam a evolução do fator de escala. Em geral, modelar este conteúdo por um fluido perfeito de densidade ρ e pressão p é uma boa aproximação para a maioria dos casos. Então, utilizamos o tensor energia-momento de um fluido perfeito:

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu} \ . \tag{2.3}$$

Acompanhado o fluido em seu referencial de movimento, podemos definir observadores comóveis, os quais possuem a quadri-velocidade $U^\mu = (1,0,0,0)$, então $T^\mu{}_\nu = diag(-\rho, p, p, p)$. Com isso temos as equações de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2} , \tag{2.4}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) , \tag{2.5}$$

onde ρ e p são quantidades totais, somadas sobre as possíveis espécies de fluido presentes no universo:

$$\rho = \sum_\ell \rho_\ell \quad \text{e} \quad p = \sum_\ell p_\ell .$$

A partir da equação (2.4) definimos a densidade crítica do universo:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} , \tag{2.6}$$

onde $H = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble, e uma densidade associada com a componente de curvatura:

$$\rho_\kappa = \frac{3\kappa}{8\pi G} a^{-2} . \tag{2.7}$$

A partir da densidade crítica, também definimos o parâmetro de densidade de um fluido:

$$\Omega_\ell = \frac{\rho_\ell}{\rho_c}. \tag{2.8}$$

Com isso, a equação (2.4) pode ser escrita na forma:

$$\Omega - 1 = \Omega_\kappa , \tag{2.9}$$

onde $\Omega = \sum_\ell \Omega_\ell$ e $\Omega_\kappa = \rho_\kappa/\rho_c$.

Se $\Omega = 1$, a densidade total é igual à densidade crítica, temos que $\kappa = 0$ e o universo é plano. Analogamente, se $\Omega < 1$ a densidade total é menor que a densidade crítica, devemos ter $\kappa = -1$ e um universo aberto. Para $\Omega > 1$ a densidade total é maior que a densidade crítica, $\kappa = +1$ e o universo é fechado. Análises das observações do WMAP indicam que hoje $\Omega_\kappa = 0,03 \pm 0,03$ [7], portanto iremos avaliar apenas modelos de universo plano.

Até 1929, acreditava-se que o universo era estático, portanto o fator de escala deveria ser constante. Einstein supôs que o universo era fechado, preenchido por matéria sem pressão, pois as dispersões de velocidade das galáxias seriam muito menores que a velocidade da luz, e teria densidade ρ_m constante. Contudo, não é possível encontrar uma solução das equações de Friedmann com a e ρ_m constantes. Dada tal impossibilidade, Einstein propôs um termo extra em suas equações, a constante cosmológica Λ:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \ , \tag{2.10}$$

com a qual seria possível obter uma solução estática, contudo a solução encontrada por Einstein era instável. Na verdade, o lado esquerdo desta equação é o tensor local mais geral, de segunda ordem, simétrico e de divergência nula que podemos construir com a métrica e suas derivadas até segunda ordem. Contudo, nesta forma, as equações de Einstein não reproduzem o limite newtoniano, motivo pelo qual estas equações inicialmente não continham este termo. Para evitar este problema, Einstein também supôs que Λ teria um valor muito pequeno, de tal forma que a gravitação newtoniana não fosse modificada em escalas que é bem testada. Estudaremos a constante cosmológica no contexto da energia escura no capítulo 3.

Apesar da tendência de Einstein em procurar soluções estáticas para o universo, Friedmann (em 1922) [4] e Lemaître (em 1927) [8] estudaram soluções dinâmicas para o universo, com e sem constante cosmológica. Em seu artigo, Lemaître vinculou a variação do fator

de escala com as velocidades de recessão das galáxias, o que até então não fôra observado.

Foi em 1929 com as observações de Edwin Hubble [9], que se verificou, através das velocidades de recessão das galáxias, que o universo estava em expansão. Hubble, observou que a luz das galáxias chegava à Terra com um desvio positivo do seu comprimento de onda, e portando para a lado vermelho do espectro de luz visível, fato pelo qual tal fenômeno ficou conhecido como *redshift*. Esse desvio foi associado, via efeito Doppler, à velocidade de afastamento das fontes luminosas observadas.

As coordenadas x, y, z são comóveis ao movimento do fluido, portanto funcionam como rótulos das partículas do fluido. A distância física entre duas partículas é dada por $\vec{r} = a\vec{x}$, onde $\vec{x}$ é a *distância comóvel*. A velocidade é então dada por $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{a}\vec{x} + a\dot{\vec{x}}$. No caso que as partículas apenas seguem a expansão, sem velocidades peculiares ($\dot{\vec{x}} = 0$), temos a lei de Hubble:

$$v = \frac{\dot{a}_0}{a_0} r = H_0 r \ , \tag{2.11}$$

onde H_0 é o valor do parâmetro de Hubble hoje, usualmente chamado de *constante de Hubble*.

Um fóton emitido com comprimento de onda λ_{em}, e observado com comprimento de onda λ_{obs} tem seu redshift dado por:

$$z = \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} \ . \tag{2.12}$$

O redshift de um fóton devido ao efeito Doppler relativístico de uma fonte se afastando do ponto de observação com velocidade constante v é dado por

$$1 + z = \frac{1 + v}{\sqrt{1 - v^2}} \ . \tag{2.13}$$

Para velocidades muito menores que a da luz, isto é, $v \ll 1$:

$$z \simeq v + \mathcal{O}(v^2) \,. \tag{2.14}$$

As relações (2.11) e (2.14) associam o redshift observado com a velocidade de recessão das galáxias, que foi a primeira evidência observacional de um universo em expansão.

O redshift aparece diretamente da métrica FRW. Um fóton se propaga sobre geodésicas nulas $ds^2 = 0$, portanto, considerando uma propagação sobre uma linha, temos:

$$dx = \frac{dt}{a} \,. \tag{2.15}$$

Para uma distância comóvel fixa entre o ponto de emissão e observação, duas ondas eletromagnéticas de mesma freqüência ν_{em} são emitidas em t_1 e $t_1 + \delta t_1$, com uma diferença de tempo pequena δt. As ondas são observadas em t_0 e $t_0 + \delta t_0$, então a relação (2.15) indica:

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a} = \int_{t_1+\delta t_1}^{t_0+\delta t_0} \frac{dt}{a} \quad \longrightarrow \quad I\left(t_0\right) - I\left(t_1\right) = I\left(t_0 + \delta t_0\right) - I\left(t_1 + \delta t_1\right) \,,$$

onde $I\left(t\right) = \int dt/a$. Como as diferenças de tempo devem ser pequenas, podemos tomar a aproximação

$$I\left(t_0 + \delta t_0\right) = I\left(t_0\right) + \dot{I}\left(t_0\right) \delta t_0 \,,$$

e outra análoga para $I\left(t_1 + \delta t_1\right)$, assim teremos a relação:

$$\frac{\delta t_1}{a_1} = \frac{\delta t_0}{a_0} \,. \tag{2.16}$$

Se associarmos a diferença δt_1 com a freqüência de emissão ν_{em} e δt_0 com a freqüência observada ν_{obs}, teremos:

$$\nu_{obs} = \frac{a_1}{a_0} \nu_{em} \,. \tag{2.17}$$

Num universo em expansão, vamos normalizar $a_0 = 1$, portanto $a_1 = a(t)$, com $t < t_0$, será um número menor que 1 e a freqüência observada será menor que a emitida. Em termos do comprimento de onda:

$$\lambda_{obs} = \frac{1}{a(t)} \lambda_{em} , \tag{2.18}$$

que podemos relacionar com z:

$$1 + z = \frac{1}{a(t)} . \tag{2.19}$$

Apesar das primeiras evidências do universo em expansão serem qualitativamente consistentes, as medidas observacionais continham muita incerteza. Em geral, se expressa o valor da constante de Hubble por:

$$H_0 = 100\, h\, km/s\, Mpc , \tag{2.20}$$

onde h é um parâmetro que contém as incertezas. Ultimamente, várias medidas distintas, tais como as do *Hubble Key Project* [10], parecem convergir para um valor de $h \simeq 0,7$. Em particular, para um modelo ΛCDM, a análise combinada destes dados com os do WMAP indicam $h = 0,72 \pm 0,05$ [11].

2.2 Evolução e conteúdo do universo

As duas equações de Friedmann envolvem três funções do tempo: o fator de escala, a densidade de energia e a pressão. Portanto ainda é preciso um equação adicional para obtermos uma solução. A forma mais natural de resolver este problema é estabelecer uma equação de estado $p = p(\rho)$, e para tal precisamos especificar que tipos de fluidos estamos considerando.

A lei de conservação do tensor energia momento (2.3), $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$, nos dá a seguinte equação para $\nu = 0$:

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho + p\right) = 0 \ , \tag{2.21}$$

para $\nu = i$, as equações são identicamente nulas, portanto sem mais informações.

Em seguida vamos avaliar alguns casos simples, nos quais a densidade de energia total pode ser atribuída a um único fluido com equação de estado $p_\ell = \omega_\ell \rho_\ell$, onde ω_ℓ é constante. Nestes casos, integrando a equação (2.21) temos a evolução da densidade de energia em função do fator de escala e do parâmetro de equação de estado ω_ℓ[1]:

$$\rho_\ell = \rho_{\ell_0} a^{-3(1+\omega_\ell)} \ , \tag{2.22}$$

onde ρ_{ℓ_0} é uma constante. Com essa solução, também podemos achar a solução do fator de escala em função do tempo:

$$a\left(t\right) \sim t^{2/3(1+\omega_\ell)} \tag{2.23}$$

Era dominada pela matéria

À primeira vista, observamos um universo cheio de galáxias dispersas, com velocidades peculiares pequenas. Portanto, podemos supor que durante algum período o universo é dominado por matéria sem pressão, ou tipo "poeira", isto é, $\omega_m = 0$. Nesse caso, das equações (2.22) e (2.23), temos a evolução da densidade de energia da matéria com o fator de escala, e deste com o tempo:

$$\rho_m = \rho_{m_0} a^{-3} \ , \tag{2.24}$$

$$a\left(t\right) \sim t^{2/3} \ . \tag{2.25}$$

Com isso, em um volume físico $V = a^3 x^3$, onde x^3 é um volume comóvel fixo, a energia

[1]Em geral, vamos nos referir ao parâmetro ω_ℓ como equação de estado.

total das partículas,

$$E_m = V\rho_m = \rho_{m_0} x^3 \ , \tag{2.26}$$

é constante.

Era dominada pela radiação

Em 1964, Penzias e Wilson [12] mediram um excesso isotrópico de $3,5K$ de temperatura de antena. Tal observação logo foi interpretada como evidência de uma radiação cósmica de fundo. Como o comprimento de onda de um fóton aumenta com a expansão do universo, a energia deles diminui. Analogamente, fótons num universo mais jovem seriam mais energéticos que os que observamos hoje, portanto o universo poderia ser dominado pela radiação durante algum período no passado. A equação de estado de um gás de fótons é $\omega_r = 1/3$, portanto de (2.22) e (2.23) temos as soluções:

$$\rho_r = \rho_{r_0} a^{-4} \ , \tag{2.27}$$

$$a\,(t) \sim t^{1/2}. \tag{2.28}$$

Como vemos, a densidade da radiação cai mais rapidamente que a densidade da matéria. Portanto, se em algum período recente a matéria dominou a densidade de energia do universo, em algum período mais primordial a radiação era mais importante.

A energia total dos fótons em um volume físico $V = a^3 x^3$ varia com

$$E_r = V\rho_r = \left(\rho_{r_0} x^3\right) a^{-1} \ . \tag{2.29}$$

Neste caso temos uma diminuição da energia devido ao redshift induzido pela expansão do universo. A energia associada a uma dada temperatura, em unidades naturais, é simplesmente $E = T$, com isso podemos associar a temperatura da radiação com o fator de

escala:

$$T_r \sim a^{-1}. \tag{2.30}$$

Portanto, num universo mais e mais jovem, a temperatura da radiação é mais e mais alta. Esse resultado acabou por desenhar o cenário do *Hot Big Bang,* no qual o universo surgiu a partir de uma grande explosão e toda matéria estaria muito concentrada, a temperaturas altíssimas.

Nucleossíntese

A energia de ligação do núcleo de deutério D pode ser estimada por:

$$m_p + m_n - m_D = 2,22MeV \ ,$$

onde m_D é a massa de um núcleo de deutério, m_p e m_n são, respectivamente, as massas do próton e do nêutron livres. Para um universo suficientemente jovem, fótons com energias de alguns MeV, podem desintegrar os núcleos dos elementos mais leves logo que são formados. A temperatura dos fótons hoje é da ordem de alguns $K \simeq 10^{-4}eV$, mas aqueles processos ocorrem a temperaturas da ordem de alguns $MeV \simeq 10^{10}K$, então, pela relação (2.30), vemos que esta temperatura corresponde a $z \simeq 10^{10}$. Mas, na medida que o universo expande e os fótons esfriam, os elementos mais leves como D, ^{3}He,^{4}He e ^{7}Li começam a ser formados até $z \simeq 10^9$. A idéia de que os elementos mais leves tenham se formado logo após o Big Bang por processos dinâmicos de captura de nêutrons foi primeiramente proposta por Gamow [13][2].

O modelo de nucleossíntese primordial (NP) é um exemplo em que outras áreas do conhecimento da física passaram a ter um papel importante na cosmologia. Para os cál-

[2]Em um trabalho subseqüente, Alpher e Herman mostraram que deveria haver uma radiação com espectro de corpo negro, remanescente destes processos, a qual hoje teria uma temperatura de aproximadamente $5K$ [14]. Esta foi a primeira sugestão teórica da RFC.

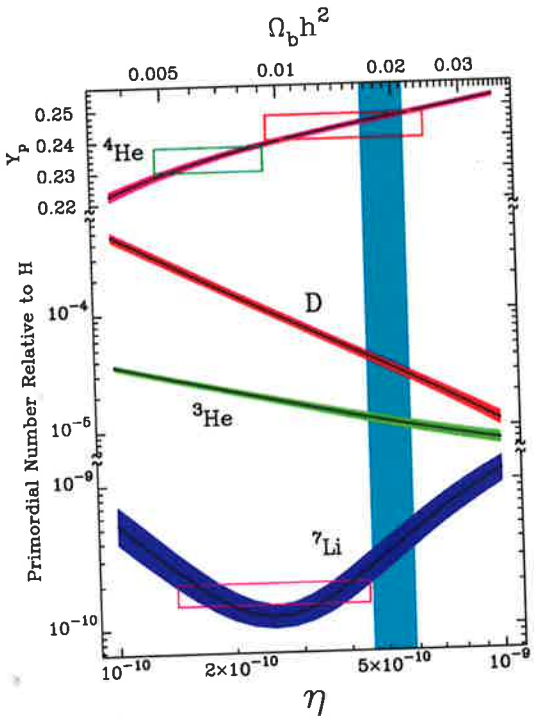

Figura 2.1: Previsões de teoria da nucleossíntese primordial para as abundâncias de D, ^3He, ^4He e ^7Li, onde η é a fração bárions/fótons. Os retângulos horizontais indicam as regiões permitidas pelas observações com 95% de nível de confiança. Note que para $h = 0,7$ temos $\Omega_b \simeq 0,04$. Figura retirada de [16].

culos mais detalhados [15], a física nuclear e estatística são necessárias. Contudo, dada a dependência de alguns parâmetros cosmológicos, a NP implica vínculos sobre modelos cosmológicos modernos.

Espécies Relativísticas

A densidade de energia para um gás de baixa densidade de partículas fracamente interagentes é dada por:

$$\rho = \frac{g}{(2\pi)^3} \int E(\vec{p})\, f(\vec{p})\, d^3\vec{p}\,, \tag{2.31}$$

onde $E(\vec{p}) = \sqrt{|\vec{p}|^2 + m^2}$, g é número de graus de liberdade de cada espécie, e, para espécies

em equilíbrio cinético, $f(\vec{p})$ é a distribuição de *Fermi-Dirac* $(+1)$ ou *Bose-Einstein* (-1):

$$f(\vec{p}) = \left[exp\left(\left(E-\mu\right)/T\right) \pm 1\right]^{-1} , \tag{2.32}$$

onde μ é o potencial químico. Em função da energia, a densidade de energia é dada por

$$\rho = \frac{g}{2\pi^2}\int_m^\infty \frac{\left(E^2-m^2\right)^{1/2} E^2}{exp\left(\left(E-\mu\right)/T\right) \pm 1} dE . \tag{2.33}$$

No limite relativístico, no qual $T \gg m$, e para $T \gg \mu$:

$$\rho = \begin{cases} \left(\pi^2/30\right) gT^4 & \rightarrow \text{ bósons} \\ \left(7/8\right)\left(\pi^2/30\right) gT^4 & \rightarrow \text{ férmions} \end{cases} \tag{2.34}$$

Após a NP, os fótons ainda interagem com os elétrons via espalhamento Thomson, impedindo a formação de átomos neutros. Num redshift de aproximadamente $z = 1100$ a energia dos fótons já caiu o suficiente para que os elétrons sejam capturados pelos núcleos atômicos, então os fótons passam a se propagar livremente pelo universo. São estes fótons que são detectados como RCF, cujo espectro de corpo negro foi ajustado [17], com enorme precisão, a partir dos dados do experimento FIRAS, a bordo do satélite COBE, com uma temperatura de $T_r = 2,728 \pm 0,002K$. Esta é uma das previsões mais bem testadas do modelo padrão. Recentemente, o satélite WMAP [18] obteve um mapa detalhado das anisotropias da RCF. A análise dos dados obtidos [19, 11] estabelece vínculos sobre vários parâmetros cosmológicos importantes.

A densidade de energia dos fótons, que são bósons com $g = 2$, fica determinada pela expressão (2.34) e sua temperatura hoje:

$$\rho_r = \frac{\pi^2}{15}\left(2,7K\right)^4 \simeq 2,0 \times 10^{-51}\left(GeV\right)^4 . \tag{2.35}$$

Seu parâmetro de densidade hoje é da ordem de

$$\Omega_r = \frac{\rho_r}{\rho_c} \simeq 5,0 \times 10^{-5} \ , \tag{2.36}$$

onde a densidade crítica é $\rho_c = 3,96 \times 10^{-47} \, (GeV)^4$, com $h = 0,7$. Portanto a energia associada à radiação é hoje uma pequena fração da energia total do universo.

Também podemos considerar a contribuição dos neutrinos, os quais consideramos em três gerações, com pouca ou nenhuma massa e com um grau de liberdade $g = 1$. Estas partículas perdem equilíbrio térmico com os fótons antes do término das reações que criam pares elétron-pósitron, isto é, antes de $T < 1MeV$. A partir desta consideração, é possível mostrar [15] que a temperatura dos neutrinos após a aniquilação $e^+ - e^-$ é relacionada com a dos fótons por:

$$T_\nu = \left(\frac{4}{11}\right)^{1/3} T_r \ . \tag{2.37}$$

Como consideramos neutrinos com pouca ou nenhuma massa, sua evolução de temperatura é análoga à dos fótons (2.30). Neste caso sua temperatura hoje seria $T_\nu = 1,96K$, sua contribuição deve ser pouco menor que a contribuição dos fótons para a energia total do universo hoje, ou seja, também muito pequena:

$$\rho_\nu = 3\left(\frac{7}{8}\right)\left(\frac{\pi^2}{30}\right) T_\nu^4 \simeq 7,0 \times 10^{-52} \, (GeV)^4 \ , \tag{2.38}$$

e

$$\Omega_\nu = \frac{\rho_\nu}{\rho_c} \simeq 1,7 \times 10^{-5} \ . \tag{2.39}$$

2.3 Além do modelo padrão

2.3.1 Matéria escura

Em 1933, Zwicky [20] sugeriu, pela análise do aglomerado de Coma, que a matéria necessária para manté-lo gravitacionalmente ligado era aproximadamente dez vezes a quantidade de matéria luminosa observada. A quantidade de matéria não luminosa foi batizada de *matéria escura.*

Por outro lado, as curvas de rotação das galáxias, segundo a gravitação newtoniana, deveriam apresentar um perfil kepleriano $v^2 \propto r^{-1}$ após o centro luminoso. No entanto, o que se observa é um perfil aproximadamente constante [21], o que também é uma forte indicação para a matéria escura. Ao contrário da matéria bariônica, este tipo desconhecido de matéria não é detectável por ondas eletromagnéticas, interagindo apenas gravitacionalmente com outros tipos de matéria.

Acredita-se que a matéria escura contida nos grandes aglomerados de galáxias é uma boa estimativa da sua quantidade total presente no universo [22, 23]. Os censos de contagem e distribuição de galáxias, como o *2dF Galaxy Redshift Survey* [24] e *Sloan Digital Sky Survey* [25] têm estimado a quantidade de matéria [3] em $\Omega_m h^2 = 0,20 \pm 0,03$ [26, 27].

As medidas de raios-X emitidos por aglomerados de galáxias é outra forma de medir a quantidade de matéria escura. Com a análise dos dados do telescópio *Chandra* é possível estimar a razão entre a matéria bariônica e a matéria total do aglomerado. Contrapondo estes resultados com os obtidos pelo WMAP para matéria bariônica, é possível calcular a quantidade de matéria escura. Além disso, outros dados, como os de NP e supernovas Ia, podem ser combinados com os do telescópio Chandra [28]. Contudo, as estimativas e incertezas dependem do modelo utilizado. Em geral, vamos elaborar nossos modelos com

[3] Em geral, vamos nos referir às "quantidades de matéria" como sendo a soma das quantidades de matéria bariônica e matéria escura

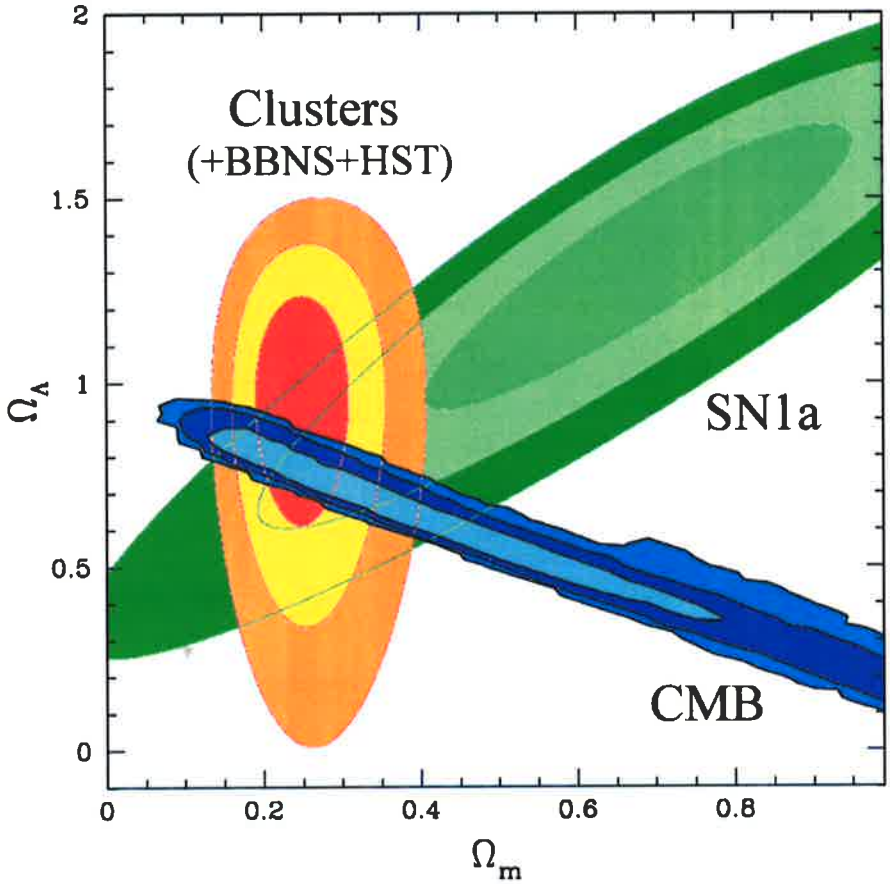

Figura 2.2: Valores permitidos para quantidade de matéria e constante cosmológica. Figura retirada da referência [28]

$\Omega_m = \Omega_b + \Omega_{me} \simeq 0,30$, onde $\Omega_b \simeq 0,05$ e $\Omega_{me} \simeq 0,25$, que são compatíveis com as melhores estimativas encontradas na literatura [28, 11].

2.3.2 Energia escura

Num espaço euclidiano, para uma fonte luminosa a uma distância R, o fluxo de energia observado sobre uma casca esférica é:

$$F = \frac{L}{4\pi R^2} , \tag{2.40}$$

onde L é a luminosidade absoluta da fonte. Num universo em expansão, o fluxo decai devido a dois efeitos: a diminuição de energia dos fótons e a diminuição da freqüência de chegada dos fótons, ambos por um fator de $1+z$. Além disso, a distância física entre o observador e a fonte é dada por $R = a_0 x$. Com isso temos:

$$\frac{L}{F} = 4\pi \left(a_0 x\right)^2 \left(1+z\right)^2 \ . \tag{2.41}$$

Definindo *distância luminosidade* por:

$$d_L^2 = \frac{L}{4\pi F} \ , \tag{2.42}$$

temos a seguinte expressão:

$$d_L = \left(1+z\right) a_0 x \ . \tag{2.43}$$

Os fótons viajam sobre geodésicas nulas $ds^2 = 0$, logo podemos escrever:

$$x = \int_0^z H^{-1}\left(z'\right) dz' \ , \tag{2.44}$$

e obtemos a seguinte expressão para a distância luminosidade:

$$d_L\left(z\right) = \left(1+z\right) \int_0^z H^{-1}\left(z'\right) dz' \ . \tag{2.45}$$

Portanto, na medida que esta quantidade depende de H, podemos ter uma medida do conteúdo material do universo.

A partir de 1998, observações astrofísicas sobre supernovas de tipo Ia (SNIa) passaram a indicar que a expansão do universo estaria sendo acelerada [29, 30] por algum tipo desconhecido de energia, dita *energia escura*. As observações produziam dados relacionados com d_L, que por sua vez dá uma indicação de H. A partir da equação (2.5), podemos ver

que a única forma de termos uma expansão acelerada, isto é, $\ddot{a} > 0$ é para $(\rho + 3p) = \rho(1 + 3\omega) < 0$. Tal condição é possível para uma equação de estado efetiva $\omega < -1/3$. Como discutiremos no próximo capítulo, podemos modelar um fluido com equação de estado $\omega = -1$ pela constante cosmológica, ou por campos escalares, casos em que a equação de estado é dinâmica.

Dados recentes de SNIa, que incluem observações destes objetos com até $z = 1,75$, continuam a indicar um universo em expansão acelerada [31]. A inclusão dos objetos mais distantes também indica que a transição entre a fase de expansão desacelerada, na era dominada pela matéria, e o início da fase de expansão acelerada, quando a energia escura passa a dominar, se dá, para um modelo ΛCDM, em $z = 0,46 \pm 0,13$, ou seja, muito recentemente na história do universo.

Capítulo 3

Modelos de energia escura: evolução homogênea

Conforme discutimos no capítulo anterior, observações de SNIa indicam que o universo está numa fase de expansão acelerada. Por outro lado, dados como os do WMAP, Chandra, NP e SDSS restringem os valores da matéria bariônica Ω_b, matéria escura Ω_{me} e do parâmetro de densidade associado à curvatura Ω_κ. O cruzamento dessas informações dá uma forte indicação que o universo hoje é dominado pela energia escura com $\Omega_{ee} \simeq 0,7$ e, em muito boa aproximação, plano.

Com tal configuração, podemos guiar os modelos de fundo, que descrevem a evolução homogênea do universo. Neste capítulo, pretendemos fazer um descrição de alguns modelos para energia escura, em função dos requerimentos básicos para evolução de fundo do universo. Vamos admitir um universo com radiação, matéria (bárions mais matéria escura) e energia escura.

3.1 Constante Cosmológica

Com a necessidade de explicar um universo que se expande aceleradamente, a constante cosmológica de Einstein voltou à pauta cosmológica. Contudo, ao invés de conter a expansão, tarefa para a qual fôra originalmente proposta, agora ela deve dar conta de acelerá-la.

Podemos interpretar a constante cosmológica como um fluido perfeito de densidade e pressão dadas por:

$$-T^0{}_0 = \rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{8\pi G} \tag{3.1}$$

e

$$T^i{}_j = \delta^i{}_j p_\Lambda = \delta^i{}_j \frac{\Lambda}{8\pi G} \,. \tag{3.2}$$

Assim, para $\Lambda > 0$, temos um fluido de densidade de energia positiva e constante, e com equação de estado $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$, portando $\omega_\Lambda = -1$.

A pressão negativa associada a constante cosmológica é capaz de acelerar a expansão do universo. De fato, considerando um universo apenas com Λ, temos a primeira equação de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda = \frac{\Lambda}{3} = H_\Lambda^2 \,, \tag{3.3}$$

que integrada nos dá a seguinte evolução para o fator de escala:

$$a = exp\left[H_\Lambda\left(t - t_0\right)\right] \,, \tag{3.4}$$

e portanto temos uma expansão acelerada, $\dot{a} \propto exp\left(H_\Lambda t\right)$.

Contudo, Λ não é a única densidade de energia presente no universo. Devemos considerar a matéria, que ainda é importante hoje, e a radiação, que já foi mais importante no

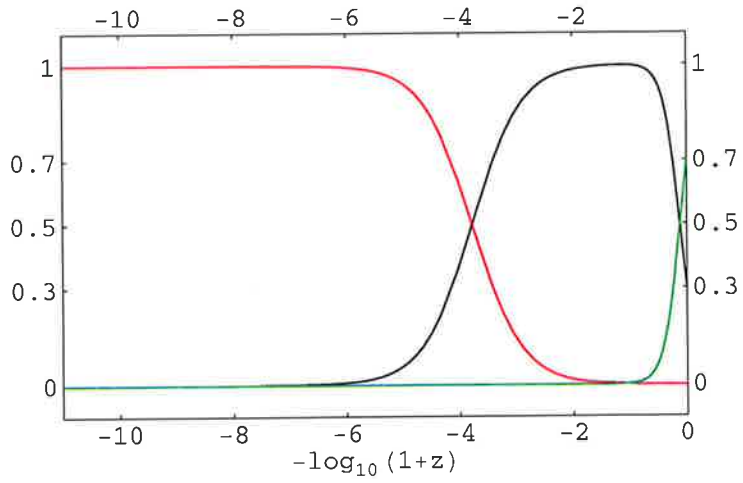

Figura 3.1: Evolução dos parâmetros de densidade em função do redshift: Ω_r (em vermelho), Ω_m (em preto) e Ω_Λ (em verde).

passado. Então a primeira equação de Friedmann pode ser escrita na forma:

$$\frac{\dot{a}}{a} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\left(\frac{\Lambda}{8\pi G} + \Omega_m a^{-3} + \Omega_r a^{-4}\right)}\,, \tag{3.5}$$

a qual precisamos integrar numericamente. Vamos admitir, em $z = 0$, $\Omega_m \simeq 0,3$, $\Omega_\Lambda \simeq 0,7$ e $\Omega_r \simeq 10^{-5}$. Nesse caso a figura 3.1 apresenta a evolução dos parâmetros de densidade.

Como já discutimos, os valores de Ω_m e Ω_r podem ser inferidos diretamente a partir das observações. Contudo isso não é possível para Λ, cujo valor deve ser ajustado para termos um universo plano e de expansão acelerada. Como Λ é constante durante toda evolução do universo, estaríamos vivendo num momento muito especial em que a densidade de energia da matéria é da mesma ordem de grandeza que a associada com Λ. Tal questão ficou conhecida como o *Problema da Coincidência Cósmica.*

A forma mais natural de energia constante em todo espaço, à qual podemos associar uma pressão negativa, é a energia de vácuo. A invariância de Lorentz implica que o tensor

energia momento do vácuo deve ser [32, 33]:

$$T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac} g_{\mu\nu} \ , \tag{3.6}$$

o qual se associado a um fluido perfeito, indica a mesma equação de estado que a constante cosmológica. Apesar da aparente naturalidade, se confiarmos na gravitação de Einstein até as escalas de Planck[1], uma mera estimativa dimensional indica que a densidade de energia associada ao vácuo é da ordem de

$$\rho_{vac} \sim (M_{pl})^4 \sim 10^{73} \, (GeV)^4 \ , \tag{3.7}$$

que é 120 ordens de grandeza maior que o valor estimado da constante cosmológica, isto é, da ordem de grandeza da densidade crítica hoje:

$$\rho_\Lambda \sim \rho_c \sim 10^{-47} \, (GeV)^4 \ . \tag{3.8}$$

O problema da enorme discrepância entre os valores observados e preditos para Λ é freqüentemente chamado de *Problema de Ajuste Fino.*

Dados os problemas da coincidência cósmica, bem como a enorme discrepância entre os valores preditos pela teoria quântica e os observados, uma variedade de modelos de energia escura foram propostos na tentativa de solucionar ou ao menos amenizar tais problemas. Em geral, tais modelos são baseados em campos escales, canônicos ou não, e apresentam uma dinâmica mais complexa. Também existem outras propostas que não campos escalares, tais como Λ variável [34] e o gás de *Chaplygin* [35, 36, 37].

[1]Nesse caso até a massa de Planck reduzida: $M_{pl} = (8\pi G)^{-1/2} = 2,43 \times 10^{18} GeV$.

3.2 Modelos com campo escalar

Vamos estudar campos escalares canônicos, os quais ficaram conhecidos como campos de *quintessência* e, entre os não canônicos, o campo de *Born-Infeld*.

3.2.1 Campo de quintessência

Como alternativa à constante cosmológica, modelos com um campo escalar canônico foram propostos [38, 39, 40]. Nestes modelos, a ação é dada por:

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[\frac{R}{16\pi G} + \frac{1}{2}\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + V + \mathcal{L}_m \right] , \tag{3.9}$$

onde R é o escalar de curvatura, $\varphi = \varphi(t, \vec{x})$ é o campo de quintessência, $V = V(\varphi)$ é o potencial deste campo e $\mathcal{L}_m$ é a densidade lagrangeana dos campos de matéria (bárions, matéria escura, radiação, neutrinos). A equação de movimento para o campo é a equação de Klein-Gordon para espaços curvos:

$$\nabla_\mu \partial^\mu \varphi + V_{,\varphi} = 0 , \tag{3.10}$$

onde $V_{,\varphi} = dV/d\varphi$.

A densidade de energia associada ao campo, por sua vez, se acopla à geometria. O tensor energia-momento de uma densidade lagrangeana $\mathcal{L}$ é

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left[\frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\alpha \frac{\partial(\sqrt{-g}\mathcal{L})}{\partial(\partial_\alpha g^{\mu\nu})} \right] . \tag{3.11}$$

No caso da quintessência, temos $\mathcal{L}_Q = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + V$. Com isso o tensor energia momento será

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_Q , \tag{3.12}$$

o qual podemos associar ao tensor energia momento de um fluido perfeito. Em princípio, estamos interessados na evolução de fundo, portanto homogênea e isotrópica, então $\varphi = \varphi(t)$, que por sua vez indica:

$$-T^0{}_0 = \rho_\varphi = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V \,, \tag{3.13}$$

e

$$T^i{}_j = \delta^i{}_j p_\varphi = \delta^i{}_j \left(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V\right) \,. \tag{3.14}$$

Assim, podemos escrever a primeira equação de Friedmann na forma:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\left(\rho_r + \rho_m + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V\right) \,, \tag{3.15}$$

e a equação de Klein-Gordon:

$$\ddot{\varphi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\varphi} + V_{,\varphi} = 0 \,. \tag{3.16}$$

Uma vez especificado o potencial V, as equações (3.15) e (3.16) determinam a evolução do fator de escala a e do campo φ.

O campo de quintessência, como candidato à energia escura, deve ter equação de estado negativa atualmente: A partir de (3.13) e (3.14) temos:

$$\omega_\varphi = \frac{p_\varphi}{\rho_\varphi} = \frac{\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 - V}{\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + V} \,. \tag{3.17}$$

O estado de menor energia do campo é aquele no qual $\dot{\varphi}_0 = 0$ e $V(\varphi_0) \neq 0$ é mínimo, neste caso, sua equação de estado ficará congelada em $\omega_\varphi = -1$ e recuperamos o comportamento de constante cosmológica. Contudo, em geral, ω_φ depende do tempo, podendo ser positiva.

Uma grande variedade de potenciais foram propostos para a quintessência, uma relação pode ser encontrada em [41]. Contudo, a maioria deles requer um ajuste da condição

inicial φ_i e de parâmetros do potencial [42, 43]. Apesar destas dificuldades, é possível construir alguns tipos de potencial que originam soluções atratoras e, portanto, uma grande variedade de condições iniciais distintas convergem para uma mesma solução. Vamos tratar de soluções tipo *tracker,* propostas em [44, 45]. Ao contrário de outras propostas de soluções atratoras [46, 47], nas quais a evolução do campo fica congelada quando ele atinge um ponto fixo, nas soluções tipo tracker o campo varia e a densidade de energia da quintessência decai mais lentamente que a da matéria. Com este mecanismo, a era de dominação da energia escura surge como um evolução natural e, quando a matéria passa a ser muito subdominante, o campo sai da solução atratora e evolui para seu estado de menor energia, comportando-se como constante cosmológica.

Vamos construir uma solução particular que apresenta o comportamento tipo tracker. Vamos admitir que a quintessência, durante algum período, se comporte como um fluido perfeito, isto é,

$$\dot{\rho}_\varphi + 3H\gamma_\varphi\rho_\varphi = 0 \ , \tag{3.18}$$

onde $\gamma_\varphi = 1 + \omega_\varphi$ é constante. Também vamos admitir que, neste período, a densidade de energia dominante seja de um fluido f (matéria ou radiação), então $a \sim t^{2/3\gamma_f}$ e:

$$H = \frac{2}{3\gamma_f} t^{-1} \ . \tag{3.19}$$

Utilizando a equação de conservação para o campo (3.16), podemos escrever a equação (3.18) na forma:

$$\dot{\varphi} \sim \rho_\varphi^{1/2} \sim a^{-3\gamma_\varphi/2} \sim t^{-\gamma_\varphi/\gamma_f} \ . \tag{3.20}$$

Com isso, para $\gamma_\varphi \neq \gamma_f$[2], temos:

$$\varphi = C_1 t^{1-\gamma_\varphi/\gamma_f} \ , \tag{3.21}$$

onde C_1 é uma constante. Com esta solução, podemos reconstruir o potencial, a partir da equação (3.16) temos:

$$-V_{,\varphi} = C_2 \varphi^{\frac{\gamma_f+\gamma_\varphi}{\gamma_\varphi-\gamma_f}} \ ,$$

$$V = V_0 \varphi^{\alpha^*} \ , \tag{3.22}$$

onde:

$$\alpha^* = \frac{2\gamma_\varphi}{\gamma_\varphi - \gamma_f} \ . \tag{3.23}$$

Em geral, vamos especificar um valor para α^*, então é mais conveniente escrever a última relação na forma:

$$\gamma_\varphi = \frac{\alpha^*}{\alpha^* - 2}\gamma_f .$$

Dado que tanto γ_φ quanto γ_f devem ser não negativos, devemos ter $\alpha^* \leq 0$ ou $\alpha^* > 2$. No caso que $\gamma_\varphi = 0$, devemos ter $\alpha^* = 0$, o que corresponde à constante cosmológica. Uma vez definida a lei de potência para o potencial (3.22), a equação de estado da quintessência no regime tracker fica dada por:

$$\omega_\varphi = \frac{2}{\alpha^* - 2} + \frac{\alpha^*}{\alpha^* - 2}\omega_f \ . \tag{3.24}$$

No caso que este regime é atingido na época dominada pela matéria $\omega_f = 0$, então:

$$\omega_\varphi = \frac{2}{\alpha^* - 2} \ , \tag{3.25}$$

[2]Outro tipo de potencial é possível para $\gamma_\varphi = \gamma_f$, o qual será $V = V_0 e^{-\lambda\varphi}$. Contudo, dada a igualdade das equações de estado, as densidades de energia da quintessência e matéria evoluirão da mesma forma, e não teremos expansão acelerada.

o que nos indica que a equação de estado da quintessência é negativa para $\alpha^* < 0$. Em geral o potencial (3.22) é expresso na forma:

$$V(\varphi) = M^{4+\alpha}\varphi^{-\alpha}\,, \tag{3.26}$$

onde redefinimos $\alpha^* \to -\alpha$. O valor atual da equação de estado da quintessência depende de Ω_m, que é uma medida do período que a energia escura passou a dominar e portanto, neste caso, quando o campo deixa de evoluir segundo a solução tipo tracker. Como estimado em [44], para $\Omega_m \geq 0,2$ devemos ter $\omega_\varphi > -0,8$.

Uma característica importante das soluções tipo tracker é que elas são atratoras estáveis para $-1 < \omega_\varphi < (1+\omega_f)/2$. Para uma grande variedade de condições iniciais elas são atingidas e permanecem neste regime atrator até a densidade de energia da quintessência se equiparar com a densidade do fluido de fundo. Para $\omega_\varphi < \omega_f$, a condição para que um campo de quintessência apresente tais soluções é que a função:

$$\Gamma = \frac{VV_{,\varphi\varphi}}{V_{,\varphi}^2} \tag{3.27}$$

seja maior que um e aproximadamente constante [45]. Para o potencial (3.26), temos

$$\Gamma = (1+\frac{1}{\alpha})\,, \tag{3.28}$$

então temos soluções tipo tracker para $\alpha > 0$.

Para ilustrar o comportamento das soluções tipo tracker, tomamos um modelo não realista, no qual a matéria ainda domina hoje. Vamos admitir o potencial $V = M^{10}\varphi^{-6}$ e que a densidade de energia inicial da quintessência é maior que o valor da densidade de energia no regime tracker. Na figura 3.2 apresentamos um gráfico com a evolução dos parâmetros de densidade e a equação de estado da quintessência.

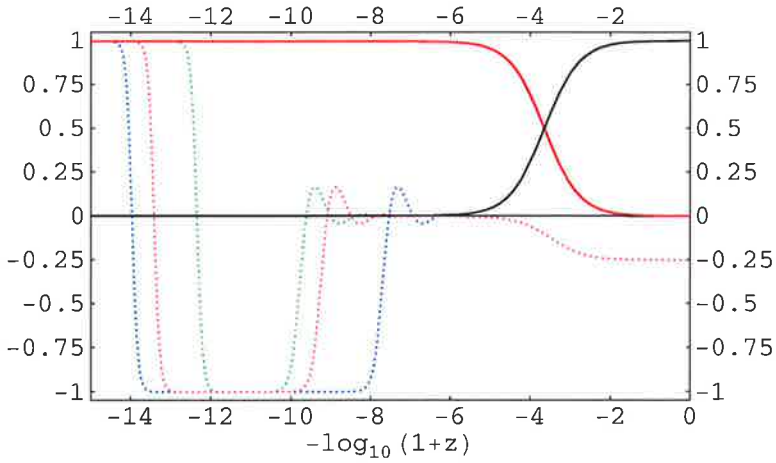

Figura 3.2: Num modelo não realista, para três conjuntos de condições iniciais diferentes para a quintessência: evolução em função do redshift da equação de estado da quintessência ω_φ (linhas pontilhadas), dos parâmetros de densidade da radiação Ω_r (linha vermelha), Ω_m da matéria (linha preta), neste caso não realista o parâmetro de densidade do campo de quintessência é sempre desprezível frente aos da matéria e radiação

Como é possível deduzir de (3.25), para $\alpha = -6$ a equação de estado da quintessência no regime atrator é $\omega_\varphi = -0,25$, que é justamente o valor apresentado no gráfico para condições iniciais distintas.

Como se observa, primeiramente temos $\omega_\varphi = 1$, o que corresponde a uma fase dominada pela energia cinética do campo a qual diminui com a^{-6}. Depois de um breve período de transição, a energia potencial passa a dominar, temos $\omega_\varphi = -1$ e o valor do campo e sua energia ficam congelados. Em algum momento o campo passa a crescer, assim como sua equação de estado, até o momento que ele converge, após algumas oscilações, para a solução tipo tracker, na qual permanece até a densidade de energia da quintessência começar a se equiparar à da matéria. Depois disso, o campo busca seu estado de menor energia, convergindo para $\omega_\varphi = -1$.

Também apresentamos um gráfico com um modelo realista de quintessência, no qual em $z = 0$, temos: $\Omega_m = 0,30$ e $\omega_\varphi = -0,76$. Neste caso o potencial é $V = M^5\varphi^{-1}$, com $M = 3,9 \times 10^{-9} GeV$.

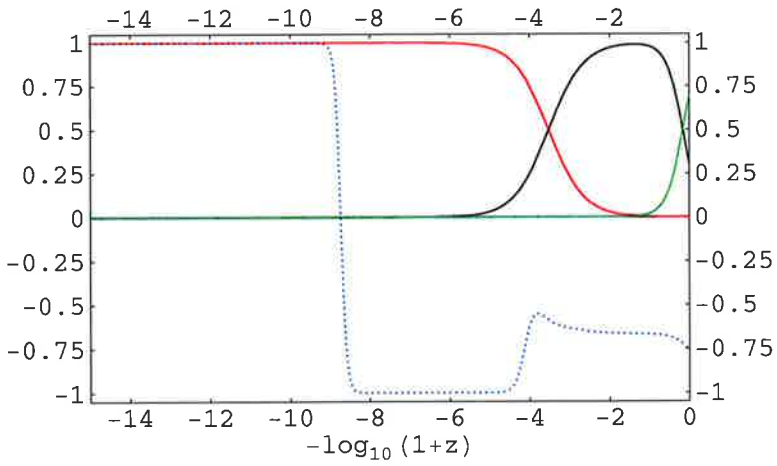

Figura 3.3: Modelo realista de quintessência: evolução em função do redshift dos parâmetros de densidade da radiação Ω_r (linha vermelha), matéria Ω_m (linha preta) e quintessência (linha verde), e da equação de estado da quintessência ω_φ (linha azul tracejada).

3.2.2 Campo de Born-Infeld

Outro possível modelo de energia escura com campo escalar pode ser definido pela ação:

$$S = \int dx^4 \sqrt{-g} \left[\frac{R}{16\pi G} + V(\varphi) \sqrt{1 + \frac{\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi}{m^4}} + \mathcal{L}_m \right] , \tag{3.29}$$

onde o campo φ é o campo de Born-Infeld (BI). Este modelo foi primeiramente proposto como uma generalização da lagrangeana de uma partícula relativística [48, 49]. Segundo a teoria de cordas, o campo BI pode representar uma teoria efetiva de baixas energias para das D-branas e cordas abertas, razão pela qual também foi sugerido em modelos cosmológicos [50, 51, 48, 49].

A partir de (3.11), temos o tensor energia momento do campo BI:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi}{\sqrt{1 + \frac{\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi}{m^4}}} V(\varphi) - g_{\mu\nu} \mathcal{L}_{BI} , \tag{3.30}$$

onde:

$$\mathcal{L}_{BI} = V(\varphi)\sqrt{1 + m^{-4}\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi}\,. \tag{3.31}$$

Podemos encontrar a equação de movimento deste campo através da condição de conservação do seu tensor energia momento, $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$,

$$\nabla_\mu\partial^\mu\varphi - \frac{\nabla_\mu\partial_\nu\varphi\partial^\mu\varphi\partial^\nu\varphi}{m^4 + \partial_\alpha\varphi\partial^\alpha\varphi} - m^4\left(lnV\right)_{,\varphi} = 0\,. \tag{3.32}$$

No caso de um modelo de fundo, o campo deve ser homogêneo, isto é, $\varphi = \varphi(t)$, então sua equação de movimento será

$$\frac{\ddot{\varphi}}{1 - m^{-4}\dot{\varphi}^2} + 3H\dot{\varphi} + m^4\left(lnV\right)_{,\varphi} = 0\,. \tag{3.33}$$

Assim como para quintessência, vamos associar o tensor energia momento do campo BI (3.30) a um fluido perfeito, então sua densidade e pressão são dadas por:

$$\rho_\varphi = \frac{V(\varphi)}{\sqrt{1 - m^{-4}\dot{\varphi}^2}}\,, \tag{3.34}$$

$$p_\varphi = -V(\varphi)\sqrt{1 - m^{-4}\dot{\varphi}^2}\,. \tag{3.35}$$

Com isso, temos a equação de estado do campo BI:

$$\omega_\varphi = \frac{p_\varphi}{\rho_\varphi} = m^{-4}\dot{\varphi}^2 - 1\,, \tag{3.36}$$

a qual, devido à raiz quadrada em (3.31) deve ser não positiva.

Vamos procurar uma solução para φ que, durante algum período, tenha equação de estado constante, isto é, $\ddot{\varphi} = 0$. No caso desta solução ser válida na era dominada pela matéria, se a equação de estado do campo for menor que a equação de estado da matéria,

a densidade de energia desse decairá mais lentamente que a da matéria e portanto passará a dominar a evolução do universo. Considerando que neste período a evolução do universo seja dominada por um fluido perfeito de equação de estado ω_f, o parâmetro de Hubble também será dado por (3.19). Então, a equação (3.18) para o campo BI será:

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \frac{-2\gamma_\varphi}{\gamma_f}\frac{1}{t} . \tag{3.37}$$

Note que para ω_φ constante devemos ter $\ddot{\varphi} = 0$. Com isso temos a evolução do potencial com tempo:

$$V(t) = V_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{-2\gamma_\varphi}{\gamma_f}} . \tag{3.38}$$

Com essa solução para o potencial, definimos:

$$\alpha^* = -\frac{2\gamma_\varphi}{\gamma_f} . \tag{3.39}$$

Tanto γ_φ e γ_f devem ser não negativos, então $\alpha^* \leq 0$. Por esse motivo redefinimos $\alpha^* \rightarrow -\alpha$. Dessa forma, a equação de estado do campo BI será:

$$\omega_\varphi = -1 + \frac{\alpha}{2}\gamma_f . \tag{3.40}$$

Como se vê, para que $\omega_\varphi < 0$ devemos ter $\alpha < 2$ quando a matéria domina. Neste caso temos o comportamento procurado, o qual irá induzir uma expansão acelerada quando a densidade de energia do campo se tornar maior que a da matéria. Portanto, para modelos de energia escura, devemos ter $0 \leq \alpha < 2$. No caso do campo de quintessência, este comportamento ocorre para $\alpha \geq 0$.

Usando a solução do potencial (3.38) na equação (3.33), podemos encontrar a evolução

do campo com o tempo:

$$\frac{2}{\gamma_f t}\dot{\varphi} + m^4 \left(lnV\right)_{,\varphi} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{2}{\gamma_f t}\dot{\varphi}^2 + m^4 \frac{\dot{V}}{V} = 0$$

$$\varphi\left(t\right) = m^2 \sqrt{\gamma_\varphi} t + \varphi_i \ , \tag{3.41}$$

ou ainda, usando (3.40),

$$\varphi\left(t\right) = m^2 \sqrt{\frac{\alpha}{2}\gamma_f t} + \varphi_i \ . \tag{3.42}$$

Desprezando o valor inicial φ_i, podemos reescrever o potencial em função do campo na forma

$$V\left(\varphi\right) = M^{4+\alpha}\varphi^{-\alpha} \ , \tag{3.43}$$

o qual foi proposto em [48, 52].

Pequenas variações $\delta y\left(t\right)$ em torno da solução (3.42) obedecem à equação:

$$\delta\ddot{y} + \left(\frac{2}{\gamma_f} - \alpha\right)\frac{\delta\dot{y}}{t} + \left(\frac{2}{\gamma_f} - \alpha\right)\frac{\delta y}{t^2} = 0 \ , \tag{3.44}$$

cuja solução é $\delta y \propto t^\beta$, onde:

$$\beta = \frac{1+\lambda}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(1+\lambda\right)^2 + 4\lambda} \ ,$$

com $\lambda = 2 - \alpha/\gamma_f$. Para que a solução (3.42) seja estável, devemos ter $\delta y/\varphi \propto t^{\beta-1}$ com $\beta - 1 < 0$, isto é,

$$\alpha < \frac{2}{\gamma_f} \ . \tag{3.45}$$

A seguir temos um gráfico com a evolução dos parâmetros de densidade da radiação, matéria, do campo BI e sua equação de estado. Para três conjuntos de condições iniciais distintas, o campo atinge o regime atrator tanto na fase dominada pela matéria quanto na

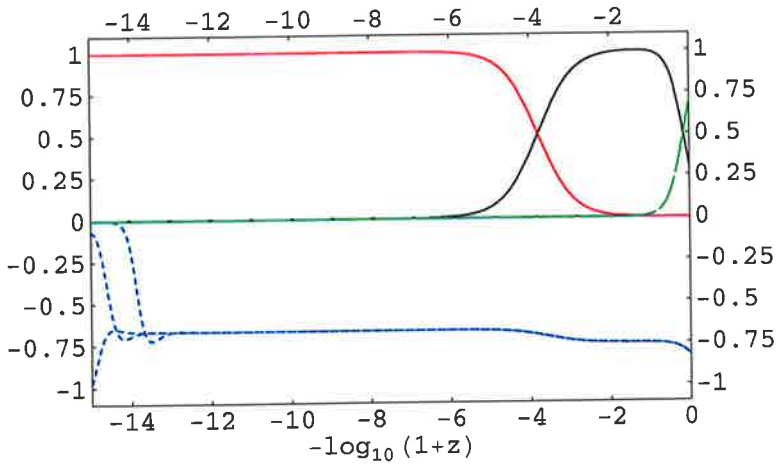

Figura 3.4: Modelo realista, para três conjuntos de condições iniciais diferentes para o campo de Born-Infeld: evolução em função do redshift da equação de estado do campo de Born-Infeld ω_φ (linha azul-tracejada), dos parâmetros de densidade da radiação Ω_r (linha vermelha), da matéria Ω_m (linha preta) e do campo de Born-Infeld Ω_φ (linha verde).

fase dominada pela radiação. O potencial é $V = M^{4,5}\varphi^{-0,5}$, onde $M = 1,95 \times 10^{-8} GeV$.

Quando $2/\gamma_f < \alpha < 2$, $\omega_\varphi \to 0^-$ e não passa a ser positiva. Neste caso, a solução do campo é

$$\varphi = m^2 t - \epsilon t^{1-2(\alpha - 2/\gamma_f)} \ . \tag{3.46}$$

Para ilustrar esse tipo de comportamento, para um modelo não realista, no qual a densidade de energia do campo é sempre muito subdominante, apresentamos na figura 3.5 a evolução da equação de estado do campo e dos parâmetros de densidade para a radiação e matéria. Neste caso usamos $\alpha = 1,55$, portanto, durante a era dominada pela radiação temos $\alpha > 2/\gamma_r$ e a equação de estado do campo fica congelada em zero. Quando a matéria passa a dominar, $\alpha < 2/\gamma_m$ e a equação de estado do campo é dada pela relação (3.40), neste caso $\omega_\varphi = -0,225$.

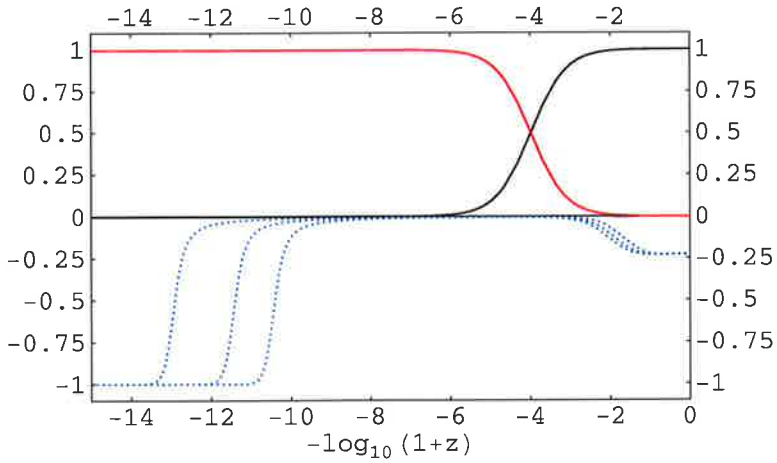

Figura 3.5: Modelo não realista, para três conjuntos de condições iniciais diferentes para o campo de Born-Infeld: evolução em função do redshift da equação de estado do campo de Born-Infeld (linha azul-pontilhada), e dos parâmetros de densidade da radiação (linha vermelha), da matéria (linha preta). Neste exemplo ilustrativo, o parâmetro de densidade do campo de Born-Infeld é sempre desprezível frente aos da matéria e radiação.

Quando o campo BI passa a dominar fortemente a densidade de energia do universo, a primeira equação de Friedmann assume a forma:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\frac{V}{\sqrt{1-m^4\dot{\varphi}^2}} = \frac{M^{4+\alpha}}{3}\frac{\varphi^{-\alpha}}{\sqrt{1-m^4\dot{\varphi}^2}} \,. \tag{3.47}$$

Definindo as variáveis:

$$y = 1 - m^{-4}\dot{\varphi}^2 = -\omega_\varphi \,, \tag{3.48}$$

$$x = M^{4+\alpha}\varphi^{-\alpha} \,, \tag{3.49}$$

a equação de evolução do campo (3.33) pode ser reescrita na forma

$$\frac{d\,(lny)}{dx} = \frac{2}{x} - A\frac{\sqrt{1-y}}{y^{1/4}}x^{-(2+\alpha)/2} \,, \tag{3.50}$$

onde $A = 2\alpha^{-1}\sqrt{3\times 8\pi G}m^{-2}M^{(4+\alpha)/\alpha}$. Para $\alpha = 2$, temos uma solução exata, com y

constante [48, 49, 53]. Neste caso, o fator de escala varia com $a \sim t^p$, onde

$$p = \frac{1}{3}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{9}{4}\frac{M^{12}}{m^8 M_{pl}^4}}\right) . \tag{3.51}$$

Também é possível mostrar [52] que para $\alpha < 2$ temos soluções quasi-de Sitter e para $\alpha > 2$ temos soluções tipo poeira, as quais são estáveis. No caso em que $\alpha = 0$, o campo BI se comporta com o gás de Chaplygin [35, 36, 37].

Dadas suas características em função do potencial, o campo BI é capaz de modelar a energia escura para potenciais com $0 \leq \alpha < 2$. Dado seu comportamento tipo poeira com $\alpha > 2$, não temos expansão acelerada, contudo, nestes casos, podemos modelar matéria escura.

Capítulo 4

Perturbações cosmológicas

No capítulo anterior, tratamos de alguns modelos de fundo para energia escura, os quais se fundamentam no princípio cosmológico e nas observações que indicam que vivemos em um universo em expansão acelerada e aproximadamente plano. Contudo, ao observarmos as galáxias e aglomerados de galáxias, notamos que em alguma escala o princípio cosmológico não é mais válido. Este fato, juntamente com as anisotropias observadas na RCF, indica que para uma descrição mais detalhada do universo precisamos estudar a evolução dessas inomogeniedades.

Neste capítulo apresentamos uma teoria para o estudo das perturbações cosmológicas, a qual se baseia no estudo de perturbações lineares em relatividade geral. Abordamos a questão da decomposição dos campos tensoriais envolvidos e da invariância de *gauge*[1]. Por fim, apresentamos algumas soluções para perturbações escalares num modelo com radiação, matéria e constante cosmológica.

[1]Em português, *calibre*. Contudo, devido ao uso corrente da palavra da língua inglesa *gauge* na língua portuguesa falada, usaremos gauge também na língua portuguesa escrita.

4.1 Perturbações lineares invariantes de gauge

Uma das grandes complicações no estudo de perturbações cosmológicas está ligada à liberdade de gauge na relatividade geral, teoria que deve ser covariante sob transformações gerais de coordenadas. Com essa liberdade, podemos descrever o espaço físico perturbado de várias formas distintas. O problema é o fato de que variáveis que queremos estudar são definidas como a diferença entre seu valor homogêneo e isotrópico de fundo, as quais vivem num espaço de FRW, e seu valor real, perturbado, as quais vivem no espaço físico, que por sua vez podemos descrever de várias formas distintas.

Portanto, nossos objetos de estudo são subtrações de quantidades geométricas definidas em variedades distintas, as quais não podem ser covariantemente definidas. Uma manifestação desta dificuldade é o aparecimento de *modos de gauge,* que são soluções espúrias sem significado físico. Elaborar uma teoria de perturbações cosmológicas invariantes de gauge era uma grande necessidade para a cosmologia.

Os primeiros estudos sobre teoria de perturbações invariantes de gauge em relatividade geral foram feitos por Hawking (1966) e Olson (1976) [54, 55]. Contudo, o tratamento completo foi desenvolvido por Bardeen (1980) [56]. O tratamento invariante de gauge para as perturbações cosmológicas foi estudado em vários artigos, dentre os quais destacamos [57, 58, 59].

Antes de construir as variáveis invariantes de gauge, vamos descrever o processo de decomposição dos campos tensoriais envolvidos. A grande vantagem deste método é separar as perturbações da métrica em quantidades puramente escalares, vetoriais e tensoriais. Desta forma, podemos definir transformações de coordenadas para as quais estas quantidades não se misturam.

Tomaremos como métrica de fundo a métrica de FRW:

$$ds^2 = a^2 \left[-d\eta^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j\right] , \tag{4.1}$$

a qual define o tensor métrico de fundo:

$$ {}^{f}g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \gamma_{ij} \end{pmatrix} , \tag{4.2} $$

com $a = a(\eta)$, onde η é o tempo conforme, $d\eta = a^{-1}(t)\, dt$, e:

$$ \gamma_{ij} = \delta_{ij} \left(1 + \frac{\kappa}{4}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)\right)^{-2} . \tag{4.3} $$

O tensor métrico total será então:

$$ g_{\mu\nu} = {}^{f}g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu} , \tag{4.4} $$

onde $\delta g_{\mu\nu}$ é a parte correspondente às perturbações, que devem ser pequenas, de forma que vamos desprezar termos de ordem quadrática, $\delta g^2_{\mu\nu}$, e ordens superiores. Com isso, o processo de levantamento e abaixamento de índices é realizado com o tensor métrico de fundo ${}^{f}g_{\mu\nu}$. No que segue, também vamos usar as derivadas covariantes com respeito à parte espacial da métrica de fundo γ_{ij}, indicadas por uma barra, seguida pelos índices.

As perturbações escalares podem ser construídas com duas funções escalares, uma para a parte temporal, ψ, e outra para o traço da parte espacial da métrica, ϕ. Também podemos tomar derivadas covariantes de outras duas funções escalares, uma para a parte espacial da métrica, com $i \neq j$, E, e outra para as componentes $0i$, B. Com isso, as perturbações escalares da métrica podem ser escritas na forma:

$$ {}^{esc}\delta g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -2\psi & -B_{|i} \\ -B_{|i} & 2\left(E_{|ij} - \gamma_{ij}\phi\right) \end{pmatrix} \tag{4.5} $$

Podemos incluir perturbações de natureza vetorial utilizando dois vetores S_i e F_i. Para

garantir que tais vetores não contenham partes que se transformem como escalares, eles devem ter divergência nula, isto é, $S_i^{|i} = F_i^{|i} = 0$. Com isso, as perturbações vetoriais da métrica podem ser escritas na forma:

$$^{vet}\delta g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} 0 & -S_i \\ -S_i & F_{i|j} + F_{j|i} \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Por fim, a métrica também pode conter perturbações de natureza puramente tensorial, as quais podem ser descritas por um tensor h_{ij}, simétrico e que satisfaça os vínculos: $h^i{}_i = h_{ij}{}^{|j} = 0$. O primeiro vínculo garante que este tensor não contém uma função escalar, o segundo exclui um vetor. Com isso, podemos escrever as perturbações tensoriais da métrica na forma:

$$^{tens}\delta g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_{ij} \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

Este tipo de decomposição apresenta quatro graus de liberdade devido às funções escalares, seis graus de liberdade devido aos dois vetores e seis graus de liberdade devido ao tensor. Os dois vetores têm um vínculo cada e o tensor possui quatro vínculos. Desta forma, dos dezesseis graus de liberdade iniciais, seis deles são eliminados pelos vínculos. Portanto, temos dez graus de liberdade, o que está de acordo com um tensor métrico quadri-dimensional simétrico, que é o objeto fundamental da teoria da relatividade geral.

As perturbações vetoriais e tensoriais não apresentam instabilidades e decaem em amplitude. As primeiras podem ser interpretados como anisotropias do espaço, as quais vão sendo atenuadas com a expansão do universo. As perturbações tensoriais estão associadas às ondas gravitacionais, que não se acoplam com as perturbações de densidade e pressão. Já as perturbações escalares apresentam instabilidades, as quais originam as anisotropias da RCF e as estruturas colapsadas. Nosso objeto de estudo são estas perturbações, então

a métrica que descreve o espaço-tempo será:

$$ds^2 = a^2 \left[-(1+2\psi)\, d\eta^2 + 2B_{|i} dx^i d\eta + \left((1-2\phi)\, \gamma_{ij} + E_{|ij} \right) dx^i dx^j \right] . \tag{4.8}$$

Para ilustrar a dependência das quantidades perturbadas com o sistema de coordenadas escolhido, vamos tomar a seguinte transformação infinitesimal:

$$x^\alpha \longrightarrow \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha , \tag{4.9}$$

onde devemos ter $|\xi^\alpha| \ll 1$. Estas transformações formam o grupo de transformações infinitesimais, ou grupo de gauge da gravitação. Podemos separar a parte espacial do vetor ξ^α em duas partes:

$$\xi^i = \xi^i_{vec} + \gamma^{ij} \xi_{|j} , \tag{4.10}$$

onde ξ é uma função escalar que deve ser solução de $\xi^{|j}{}_{|j} = \xi^j{}_{|j}$ e $\xi^i_{vec|i} = 0$. Este procedimento discrimina a parte do vetor ξ^i que se transforma como escalar, ξ, e a parte que se transforma puramente como vetor, ξ^i_{vec}. Portanto, para que a transformação (4.9) preserve o caráter escalar das perturbações da métrica (4.8), devemos excluir o vetor ξ^i_{vec} de (4.10). Então, vamos aplicar as seguintes transformações de coordenadas:

$$\begin{cases} \eta \longrightarrow \tilde{\eta} &= \eta + \xi^0 , \\ x^i \longrightarrow \tilde{x}^i &= x^i + \xi^i , \end{cases} \tag{4.11}$$

onde $\xi^i = \gamma^{ij} \xi_{|j}$. A nova perturbação na métrica, $\delta \tilde{g}_{\mu\nu}$, não é invariante frente à transformação (4.11), de fato, sua nova expressão é:

$$\delta \tilde{g}_{\mu\nu} = \delta g_{\mu\nu} - \mathcal{D}_\xi g_{\mu\nu} , \tag{4.12}$$

onde:

$$\mathcal{D}_\xi g_{\mu\nu} = \xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} \tag{4.13}$$

é a derivada de Lie da métrica total. Como exemplo, vamos calcular $\delta\tilde{g}_{00} = 2\tilde{\psi}$:

$$\mathcal{D}_\xi g_{00} = 2\xi_0' - \frac{2a'}{a}\xi_0 \,, \tag{4.14}$$

então:

$$\tilde{\psi} = \psi - \xi_0' - \frac{a'}{a}\xi^0 \,, \tag{4.15}$$

onde um apóstrofo indica derivada em relação a η. Procedimentos análogos indicam:

$$\tilde{\phi} = \phi + \frac{a'}{a}\xi^0 \,, \tag{4.16}$$

$$\tilde{B} = B + \xi^0 - \xi' \,, \tag{4.17}$$

$$\tilde{E} = E - \xi \,. \tag{4.18}$$

Como se vê, todas as perturbações escalares dependem da escolha do sistema de coordenadas. Contudo, podemos tomar algumas combinações das funções ϕ, ψ, B e E tais que formem uma função invariante de gauge. Duas possíveis escolhas são:

$$\Psi = \psi + \frac{1}{a}\left[a\left(B - E'\right)\right]' \tag{4.19}$$

e

$$\Phi = \phi - \frac{a'}{a}\left(B - E'\right) \,. \tag{4.20}$$

Também vamos precisar de perturbações invariantes de gauge de funções escalares. Sendo $q\left(\eta, x^i\right)$ uma função escalar definida no espaço físico perturbado, então podemos

separá-la em uma parte de fundo $q_f(\eta)$, homogênea e isotrópica, mais sua perturbação:

$$q\left(\eta, x^i\right) = q_f(\eta) + \delta q\left(\eta, x^i\right) . \tag{4.21}$$

Dada a transformação infinitesimal (4.11), a parte perturbada muda:

$$\delta q \rightarrow \delta\tilde{q} = \delta q - \mathcal{D}_\xi q_f ,$$

onde $\mathcal{D}_\xi q_f = \xi^\alpha \partial_\alpha q_f = \xi^0 q_f'$. Então:

$$\delta\tilde{q} = \delta q - \xi^0 q_f' ,$$

que depende da escolha de transformação. Uma possível escolha de perturbações invariantes de gauge de funções escalares é

$$^{(ig)}\delta q = \delta q + q_f'\left(B - E'\right) . \tag{4.22}$$

Uma vez definidas as variáveis invariantes de gauge de interesse, vamos escolher um determinado gauge e escrever as equações de Einstein. Vamos adotar o gauge *longitudinal* ou *newtoniano conforme* [58], no qual tomamos as escolhas:

$$B = E = 0 . \tag{4.23}$$

Esta escolha indica que as variáveis invariantes de gauge (4.19) e (4.20) assumem uma forma simples:

$$\Psi = \psi , \tag{4.24}$$

$$\Phi = \phi \, . \tag{4.25}$$

Com isso, a parte perturbada do tensor métrico será:

$$\delta g_{\mu\nu} = a^2 \begin{pmatrix} -2\Psi & 0 \\ 0 & -2\gamma_{ij}\Phi \end{pmatrix} . \tag{4.26}$$

Como discutimos no capítulo 2, o universo é, em boa aproximação, plano. Por isso, a partir de agora, tomamos $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$, o que converte todas as derivadas covariantes com respeito à parte espacial da métrica de fundo em derivadas ordinárias. Com isso, a parte perturbada do tensor de Einstein é dada por:

$$\delta G^0{}_0 = 2a^{-2}\left[3h\left(\Phi' + h\Psi\right) - \nabla^2\Phi\right] \, , \tag{4.27}$$

$$\delta G^0{}_i = -2a^{-2}\partial_i\left[\Psi' + h\Phi\right] \, , \tag{4.28}$$

$$\delta G^i{}_j = 2a^{-2}\left[\Phi'' + h\left(\Psi' + 2\Phi'\right) + \left(2h' + h^2\right)\Psi + \frac{\nabla^2}{3}\left(\Psi - \Phi\right)\right]\delta^i{}_j - \frac{2a^{-2}}{3}\delta^{ik}\partial_k\partial_j\left(\Psi - \Phi\right) \, , \tag{4.29}$$

onde $h = a'/a = aH$.

Também devemos estabelecer as perturbações no tensor energia momento. As quantidades de fundo de um fluido perfeito são $\rho(\eta)$, $p(\eta)$ e $U^\alpha(\eta) = a^{-1}(1,0,0,0)$. Portanto vamos estabelecer as quantidades totais:

$$\rho(\eta,\vec{x}) = \overline{\rho}(\eta) + \delta\rho(\eta,\vec{x}) \, , \tag{4.30}$$

$$p(\eta,\vec{x}) = \overline{p}(\eta) + \delta p(\eta,\vec{x}) \, , \tag{4.31}$$

$$U^\alpha(\eta,\vec{x}) = a^{-1}\left(1 - \psi, v^i\right) \, , \tag{4.32}$$

onde $\delta\rho$, δp e v^i têm valores pequenos. Também podemos incluir termos de *stress anisotrópico*, neste caso por um tensor espacial de traço nulo Υ_{ij}. Portanto, o tensor energia momento relacionado com essas quantidades perturbadas será:

$$\delta T^0{}_0 = -\delta\rho \,, \tag{4.33}$$

$$\delta T^0{}_i = (\rho + p)\, v_i \,, \tag{4.34}$$

$$\delta T^i{}_j = \delta p \delta^i{}_j + \Upsilon^i{}_j \,. \tag{4.35}$$

Em geral, os termos relacionados com o stress anisotrópico $\Upsilon^i{}_j$ são importantes apenas quando se considera perturbações nos neutrinos [59]. Contudo, não vamos considerar neutrinos em nossos modelos, então podemos desprezar os termos não diagonais de $\delta T^i{}_j$. Por sua vez, se $\delta T^i{}_j$ tem apenas termos diagonais, a parte não diagonal do tensor de Einstein $\delta G^i{}_j$ indica que

$$\delta^{ik}\partial_k\partial_j\left(\Psi - \Phi\right) = 0, \tag{4.36}$$

para $i \neq j$, o que em geral só é possível se $\Psi = \Phi$. Isso nos indica que na ausência de stress anisotrópico precisamos somente de um potencial (seja ele Φ) para descrever o sistema. Nesta mesma circunstância, o fluido é irrotacional, isto é, $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$. Então, podemos expressar a velocidade perturbada como o gradiente de um potencial:

$$v_i = -\partial_i \sigma \tag{4.37}$$

Com isso, o tensor energia momento descreve perturbações puramente escalares, as quais devem ser definidas como (4.22) para que sejam invariantes de gauge. Como estamos utilizando o gauge newtoniano conforme, as perturbações invariantes de gauge têm a mesma forma que as perturbações físicas (4.30), (4.31) e (4.32).

Por fim, temos as equações de Einstein perturbadas, $\delta G^{\mu}{}_{\nu} = 8\pi G \delta T^{\mu}{}_{\nu}$, invariantes de gauge:

$$\delta G^{0}{}_{0} = 8\pi G \delta T^{0}{}_{0} \quad \rightarrow \quad \nabla^2\Phi - 3h\left(\Phi' + h\Phi\right) = 4\pi G a^2 \delta\rho \ , \tag{4.38}$$

$$\delta G^{0}{}_{i} = 8\pi G \delta T^{0}{}_{i} \quad \rightarrow \quad \partial_i\left(\Phi' + h\Phi\right) = 4\pi G a^2 \partial_i \sigma \ , \tag{4.39}$$

$$\delta G^{i}{}_{j} = 8\pi G \delta T^{i}{}_{j} \quad \rightarrow \quad \Phi'' + 3h\Phi' + \left(2h' + h^2\right)\Phi = 4\pi G a^2 \delta p \ , \tag{4.40}$$

É interessante notar que a equação (4.38) pode ser entendida como uma generalização relativística da equação de Poison para um espaço em expansão. Por esse motivo, em geral a função Φ é também chamada de *potencial newtoniano*.

Também temos as equações de conservação da parte perturbada do tensor energia momento:

$$\delta' - 3\gamma\Phi' = \gamma\nabla^2\sigma - 3h\left(\frac{\delta p}{\delta\rho} - \omega\right)\delta \ , \tag{4.41}$$

$$\nabla^2\sigma' = h\left(3\omega - 1\right)\nabla^2\sigma - \frac{\omega'}{\gamma}\nabla^2\sigma + \frac{\delta p/\delta\rho}{\gamma}\nabla^2\delta + \nabla^2\Phi \ , \tag{4.42}$$

onde $\delta = \delta\rho/\rho$ é o contraste de densidade e $\gamma = 1 + \omega$.

As equações (4.38), (4.39) e (4.40) são válidas para as quantidades totais, por exemplo: $\delta\rho = \Sigma_\ell \delta\rho_\ell$. Já as equações (4.41) e (4.42) são válidas para cada componente de fluido e também para o contraste de densidade total $\delta = \Sigma_\ell \Omega_\ell \delta_\ell$.

4.1.1 Perturbações adiabáticas e de entropia

Conforme podemos ver a partir das equações (4.38) - (4.42), temos quatro funções e cinco equações. As equações de conservação da parte perturbada do tensor energia momento são conseqüência das equações de Einstein e são redundantes, descrevendo vínculos que as soluções devem satisfazer. A equação (4.39) também estabelece um vínculo, dada uma so-

lução de Φ, imediatamente temos σ. Desta forma, podemos tomar um sistema fundamental formado por (4.38) e (4.40), o qual contém três funções. Portanto, ainda precisamos de mais um vínculo.

Do ponto de vista termodinâmico, podemos dizer que a pressão depende da densidade de energia e da entropia do fluido, nesse caso temos:

$$\delta p_\ell\left(\rho_\ell, \mathcal{S}_\ell\right) = \left(\frac{\partial p_\ell}{\partial \rho_\ell}\right)_{\delta \mathcal{S}_\ell = 0} \delta \rho_\ell + \left(\frac{\partial p_\ell}{\partial \mathcal{S}_\ell}\right)_{\delta \rho_\ell = 0} \delta \mathcal{S}_\ell \ , \tag{4.43}$$

onde tomamos a definição de perturbação de entropia [60]:

$$\delta \mathcal{S}_\ell = \frac{\delta p_\ell}{\dot{p}_\ell} - \frac{\delta \rho_\ell}{\dot{\rho}_\ell} \ , \tag{4.44}$$

que representa a diferença entre hipersuperficies de pressão uniforme e densidade uniforme. A parte da pressão perturbada proporcional à $\delta \rho_\ell$ é dita adiabática, sendo dada por:

$$\delta p_{\ell_{ad}} = \left(\frac{\partial p_\ell}{\partial \rho_\ell}\right)_{\delta \mathcal{S}_\ell = 0} \delta \rho_\ell = c_{s_\ell}^2 \delta \rho_\ell \ , \tag{4.45}$$

onde, usando a definição (4.44),

$$c_{s_\ell}^2 = \frac{\dot{p}_\ell}{\dot{\rho}_\ell} \ , \tag{4.46}$$

é o quadrado da velocidade do som adiabática. A outra parte da perturbação de pressão é dita não adiabática, ou de entropia:

$$\delta p_{\ell_{nad}} = \left(\frac{\partial p_\ell}{\partial \mathcal{S}_\ell}\right)_{\delta \rho_\ell = 0} \delta \mathcal{S}_\ell = \dot{p}_\ell \delta \mathcal{S}_\ell \ . \tag{4.47}$$

Portanto, para um único fluido perfeito, a perturbação total de pressão é dada por:

$$\delta p_\ell = c_{s_\ell}^2 \delta \rho_\ell + \dot{p}_\ell \delta \mathcal{S}_\ell \tag{4.48}$$

Podemos associar a parte de entropia da pressão perturbada com a variação da equação de estado. Da relação anterior, temos:

$$\delta p_{\ell_{nad}} = \dot{p}_\ell \delta \mathcal{S}_\ell = \delta p_\ell - c_{s_\ell}^2 \delta \rho_\ell \,. \tag{4.49}$$

No caso que ω_ℓ é constante, $\delta p_\ell = \omega_\ell \delta \rho_\ell$ e $c_{s_\ell}^2 = \omega_\ell$, portanto a pressão perturbada não adiabática é nula. Em geral, quando a equação de estado for dinâmica, este tipo de pressão é não nula, a qual reflete a entropia intrínseca de um fluido.

Num caso geral, devemos definir a relação entre a pressão perturbada total, $\delta p = \Sigma_\ell \delta p_\ell$, e a densidade perturbada total, $\delta \rho = \Sigma_\ell \delta \rho_\ell$, que entram nas equações (4.38) e (4.40). A parte adiabática da perturbação de pressão é facilmente generalizada:

$$\delta p_{ad} = c_s^2 \delta \rho \,, \tag{4.50}$$

onde:

$$c_s^2 = \frac{\Sigma_\ell \dot{p}_\ell}{\Sigma_\ell \dot{\rho}_\ell} \,, \tag{4.51}$$

note que nesta soma apenas as quantidades de fluidos perturbados devem ser consideradas. A parte não adiabática terá dois termos distintos, um relacionado à entropia intrínseca de cada fluido e outro relacionado à entropia relativa entre os fluidos. O primeiro é simplesmente a soma das respectivas partes de entropia intrínseca de cada fluido:

$$\delta p_{int} = \sum_\ell \dot{p}_\ell \delta \mathcal{S}_\ell \,. \tag{4.52}$$

O segundo pode ser definido por [61, 62]

$$\delta p_{rel} = -\frac{1}{6H\dot{\rho}} \sum_{\ell,\flat} \left(c_{s_\ell}^2 - c_{s_\flat}^2 \right) \dot{\rho}_\ell \dot{\rho}_\flat \delta \mathcal{S}_{\ell,\flat} \,, \tag{4.53}$$

onde a perturbação de entropia relativa é:

$$\delta\mathcal{S}_{\ell,b} = -3H\left(\frac{\delta\rho_\ell}{\dot{\rho}_\ell} - \frac{\delta\rho_b}{\dot{\rho}_b}\right) . \tag{4.54}$$

Então, a perturbação total de pressão será:

$$\delta p = \delta p_{ad} + \delta p_{rel} + \delta p_{int} . \tag{4.55}$$

Devemos avaliar os graus de liberdade envolvidos na especificação das perturbações da pressão. Para um sistema de ℓ fluidos diferentes, temos ℓ equações de estado para especificar. Um dos graus de liberdade está na parte adiabática da perturbação de pressão, os restantes $\ell-1$ graus de liberdade são especificados pelas perturbações de entropia relativa entre os fluidos. Então, devemos ter um vínculo entre as perturbações de entropia relativa. Por exemplo, no caso de $\ell = 3$, podemos construir a relação:

$$\delta\mathcal{S}_{1,3} = \delta\mathcal{S}_{1,2} - \delta\mathcal{S}_{3,2} . \tag{4.56}$$

Também existem os graus de liberdade relacionados à entropia intrínseca de cada fluido. Contudo, nos casos que vamos estudar, estes termos são originados apenas por campos escalares, os quais possuem uma equação de conservação de segunda ordem nas perturbações do campo, que por sua vez vinculam a variação da equação de estado e, portanto, a entropia intrínseca.

A partir de agora, vamos tomar transformadas de Fourier das funções, o que converte $\partial_j \rightarrow ik$ e $\nabla^2 \rightarrow -k^2$, onde k é o número de onda da perturbação. Com isso, vamos reescrever as equações (4.38) e (4.40) em função da variável $N = ln\,(a/a_0)$:

$$\frac{d\Phi}{dN} + \Phi + \frac{k^2\Phi}{3a^2H^2} = -\frac{1}{2}\frac{\delta\rho}{\rho} \tag{4.57}$$

$$\frac{d^2\Phi}{dN^2} + \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\omega\right)\frac{d\Phi}{dN} - 3\omega\Phi = \frac{3}{2}\frac{\delta p}{\rho}\,, \tag{4.58}$$

onde $\omega = p/\rho$. Podemos usar a relação (4.55) e escrever uma única equação de segunda ordem para o potencial:

$$\frac{d^2\Phi}{dN^2} + \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\omega + 3c_s^2\right)\frac{d\Phi}{dN} + \left(3c_s^2 - 3\omega + \frac{c_s^2k^2}{a^2H^2}\right)\Phi = \frac{3}{2}\frac{\delta p_{nad}}{\rho}\,, \tag{4.59}$$

onde $\delta p_{nad} = \delta p_{rel} + \delta p_{int}$. Escrever a equação para o potencial newtoniano nesta forma apresenta uma grande clareza por deixar explícita sua dependência na perturbação de pressão não adiabática, a qual aparece como um termo de fonte.

A variável:

$$\zeta = \frac{2}{3}\frac{d\Phi/dN + \Phi}{\gamma} + \Phi \tag{4.60}$$

é invariante de gauge e tem sua evolução determinada pela equação:

$$\frac{d\zeta}{dN} = \frac{2}{3\gamma H^2}\left(\frac{-c_s^2k^2\Phi}{a^2} + 4\pi G\delta p_{nad}\right)\,. \tag{4.61}$$

Esta variável foi proposta em [63] e em [64] interpretada como perturbação de curvatura no gauge comóvel. Como se pode verificar, a equação (4.61) é a mesma que (4.59) para o potencial newtoniano.

Quando o comprimento de onda associado à perturbação Φ é muito maior que o horizonte de Hubble H^{-1}, temos o limite de grandes escalas $k/aH \ll 1$. Neste caso, a função ζ varia somente se a pressão não adiabática for não desprezível,

$$\frac{d\zeta}{dN} = \frac{1}{\gamma}\frac{\delta p_{nad}}{\rho}\,. \tag{4.62}$$

Portanto, podemos usar ζ como uma medida da presença de pressão não adiabática em

grandes escalas.

4.1.2 Perturbação de pressão não adiabática para fluidos perfeitos com equação de estado constante

As perturbações de entropia (4.54) apresentam uma forma simples quando tratamos de uma mistura de fluidos perfeitos de equação de estado constante. Vamos avaliar uma mistura de três fluidos com este comportamento, o qual será uma boa aproximação para alguns modelos que vamos estudar. Neste caso não temos entropia intrínseca e a pressão perturbada total será:

$$\delta p = \omega_1 \delta\rho_1 + \omega_2 \delta\rho_2 + \omega_3 \delta\rho_3 \ . \tag{4.63}$$

As perturbações de entropia relativa (4.54) podem ser escritas na forma:

$$\delta\mathcal{S}_{12} = \frac{\delta\rho_1}{\gamma_1\rho_1} - \frac{\delta\rho_2}{\gamma_2\rho_2} \ , \tag{4.64}$$

$$\delta\mathcal{S}_{13} = \frac{\delta\rho_1}{\gamma_1\rho_1} - \frac{\delta\rho_3}{\gamma_3\rho_3} \ . \tag{4.65}$$

O quadrado da velocidade do som adiabática é:

$$c_s^2 = \frac{\gamma_1\Omega_1\omega_1}{\gamma} + \frac{\gamma_2\Omega_2\omega_2}{\gamma} + \frac{\gamma_3\Omega_3\omega_3}{\gamma} \ , \tag{4.66}$$

onde $\gamma = \gamma_1\Omega_1 + \gamma_2\Omega_2 + \gamma_3\Omega_3$. Com tais quantidades temos:

$$\delta p = c_s^2 \delta\rho + \delta p_{nad} \ , \tag{4.67}$$

onde a perturbação de pressão não adiabática é dada por:

$$\delta p_{nad} = \frac{\gamma_1\rho_1\gamma_2\rho_2}{\gamma\rho}(\omega_1 - \omega_2)\delta\mathcal{S}_{12} + \frac{\gamma_1\rho_1\gamma_3\rho_3}{\gamma\rho}(\omega_1 - \omega_3)\delta\mathcal{S}_{13} \ . \tag{4.68}$$

Com isso, o lado direito da equação (4.59) pode ser escrito como:

$$\frac{3}{2}\frac{\delta p_{nad}}{\rho} = \frac{3}{2}\frac{\gamma_1\Omega_1\gamma_2\Omega_2}{\gamma}(\omega_1 - \omega_2)\delta\mathcal{S}_{12} + \frac{3}{2}\frac{\gamma_1\Omega_1\gamma_3\Omega_3}{\gamma}(\omega_1 - \omega_3)\delta\mathcal{S}_{13} \equiv \mathcal{F} \ . \tag{4.69}$$

A equação (4.41) indica que, em grandes escalas,

$$\frac{d\delta_\ell}{dN} - 3\gamma_\ell\frac{d\Phi}{dN} = 0 \ . \tag{4.70}$$

Assim, temos que

$$\delta_\ell = 3\gamma_\ell\Phi + \delta_{\ell_i} - 3\gamma_\ell\Phi_i \ , \tag{4.71}$$

onde δ_{ℓ_i} e Φ_i são valores iniciais. A relação (4.71) indica que

$$\delta\mathcal{S}_{12} = \frac{\delta_{1_i}}{\gamma_1} - \frac{\delta_{2_i}}{\gamma_2} = \text{constante}$$

e

$$\delta\mathcal{S}_{13} = \frac{\delta_{1_i}}{\gamma_1} - \frac{\delta_{3_i}}{\gamma_3} = \text{constante} \ ,$$

então o termo de fonte $\mathcal{F}$ tem sua dependência temporal dada apenas pelas quantidades de fundo Ω_1, Ω_2 e Ω_3. Quando a densidade de energia de um fluido domina fortemente sobre a dos outros de forma que, por exemplo, $\Omega_1 \gg \Omega_2$ e $\Omega_1 \gg \Omega_3$ o termo de fonte fica dado por

$$2\mathcal{F}/3 = \gamma_2\Omega_2(\omega_1 - \omega_2)\delta\mathcal{S}_{12} + \gamma_3\Omega_3(\omega_1 - \omega_3)\delta\mathcal{S}_{13} \ . \tag{4.72}$$

Com isso, a menos que um dos contrastes de densidade que contribuem para $\delta\mathcal{S}_{12}$ ou $\delta\mathcal{S}_{13}$ seja pelo menos da ordem de $(1/\Omega_2)$ e $(1/\Omega_3)$, respectivamente, o que não seria compatível com uma teoria de perturbações lineares, o termo não adiabático que contribui para Φ é desprezível. Assim, em grandes escalas, estes termos têm importância apenas em períodos próximos às fases de transição de dominação.

4.2 Soluções para um sistema com radiação, matéria e constante cosmológica

Vamos estudar a evolução das perturbações em uma mistura de fluidos com equações de estado constantes. Vamos considerar que $\rho = \rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda$, com $\omega_r = 1/3$, $\omega_m = 0$ e $\omega_\Lambda = -1$. Como a densidade de energia de Λ é constante, ela não admite flutuações, isto é, $\delta\rho_\Lambda = \delta p_\Lambda = 0$. Portanto a única influência da constante cosmológica nas perturbações é via as quantidades de fundo, como o parâmetro de Hubble e sua derivada. Nos casos em que consideramos campos escalares como energia escura, os quais apresentam densidades variáveis e equações de estado dinâmicas, devemos considerar suas perturbações, as quais podem gerar perturbações de entropia intrínseca. Estes modelos serão estudados no próximo capítulo.

Neste modelo com radiação, matéria e Λ, a equação (4.57) pode ser escrita na forma:

$$\frac{d\Phi}{dN} + \Phi + \frac{k^2\Phi}{3a^2H^2} = -\frac{1}{2}\left(\Omega_r\delta_r + \Omega_m\delta_m\right) . \tag{4.73}$$

Portanto, quando, por exemplo, a radiação domina fortemente a densidade de energia total, isto é, $\Omega_r \gg \Omega_m$, podemos desconsiderar as perturbações de densidade da matéria para o cálculo do potencial newtoniano.

4.2.1 Soluções na aproximação de grandes escalas

Modos adiabáticos

No limite de grandes escalas $k/aH \ll 1$, a equação de segunda ordem para o potencial newtoniano assume a forma:

$$\frac{d^2\Phi}{dN^2} + \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\omega + 3c_s^2\right)\frac{d\Phi}{dN} + \left(3c_s^2 - 3\omega\right)\Phi = \frac{3}{2}\frac{\delta p_{nad}}{\rho} . \tag{4.74}$$

Considerando apenas perturbações adiabáticas, devemos impor que:

$$\delta\mathcal{S}_{rm} = \frac{\delta_{r_i}}{\gamma_r} - \frac{\delta_{m_i}}{\gamma_m} = 0 , \tag{4.75}$$

ou seja,

$$\delta_{m_i} = \frac{3}{4}\delta_{r_i} . \tag{4.76}$$

Desta forma não temos pressão não adiabática δp_{nad}. Na medida que um fluido ρ_ℓ domina fortemente a evolução de fundo, teremos

$$\frac{d^2\Phi}{dN^2} + \left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\omega_\ell\right)\frac{d\Phi}{dN} = 0 , \tag{4.77}$$

cuja solução é

$$\Phi\left(a\right) = \Phi_1 + \Phi_2\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-(3\omega_\ell+5)/2} , \tag{4.78}$$

onde Φ_1 e Φ_2 são constantes. Como se vê, para $\omega_\ell > -5/3$, o potencial newtoniano permanece constante em grandes escalas, a menos de um modo decrescente.

A solução (4.78) é válida para a fase dominada pela matéria e para a fase dominada pela radiação. Então, as perturbações com $k/aH \ll 1$ permanecem constantes durante estas duas fases. Contudo, nestas fases, o horizonte de Hubble, H^{-1}, cresce linearmente com t e

o comprimento de onda da perturbação, λa, cresce com t^p, com $p = 1/2$ na fase dominada pela radiação e $p = 2/3$ na fase dominada pela matéria; então em algum momento a aproximação de larga escala deixa de valer e o comprimento de onda da perturbação entra no horizonte de Hubble.

Devemos notar que a solução (4.78) não é válida para a fase dominada pela constante cosmológica. Neste caso $c_s^2 = 0$ já que não temos perturbações associadas a Λ. Com isso a equação para o potencial newtoniano fica dada por:

$$\frac{d^2\Phi}{dN^2} + \left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\omega_\Lambda\right)\frac{d\Phi}{dN} + (-3\omega_\Lambda)\,\Phi = 0\,, \tag{4.79}$$

cuja solução é:

$$\Phi(a) = \Phi_1\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} + \Phi_2\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-1}. \tag{4.80}$$

Portanto, no caso de um modelo de energia escura com Λ, o potencial newtoniano em grandes escalas sempre decai. Este efeito de decaimento do potencial newtoniano pode ser interpretado como uma evidência da energia escura [65].

A seguir mostramos a evolução do potencial newtoniano em grandes escalas, num modelo com radiação, matéria e constante cosmológica. Como se vê, durante o período de transição de dominação de radiação para matéria, o potencial newtoniano varia, decaindo 10% do seu valor normalizado na era dominada pela radiação (este valor pode ser deduzido analiticamente [58]). Passada a fase de transição, seu valor novamente permanece constante e começa a decair quando a constante cosmológica passa a dominar.

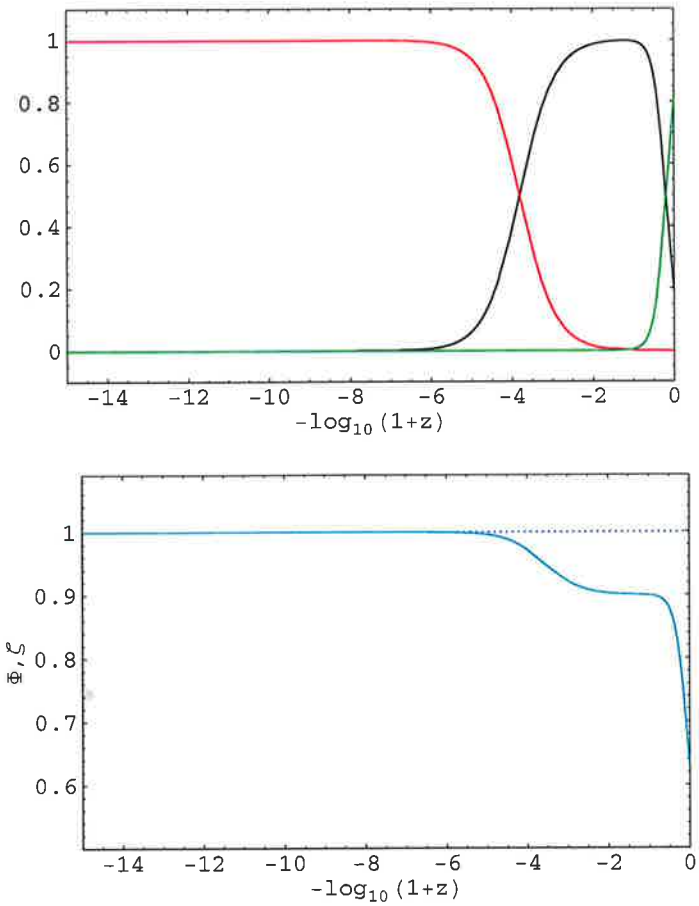

Figura 4.1: Painel superior: evolução dos parâmetros de densidade da radiação, matéria e constante cosmológica. Painel inferior: evolução, do potencial newtoniano Φ (linha cheia em azul claro) e da função ζ (linha pontilhada em azul escuro).

Modos de isocurvatura

Vamos considerar o caso em que δp_{nad} não é nula, então a perturbação de entropia deve ser tal que

$$\delta\mathcal{S}_{rm} = \frac{\delta_{r_i}}{\gamma_r} - \frac{\delta_{m_i}}{\gamma_m} \neq 0 \,. \tag{4.81}$$

Em particular, podemos escolher $\Phi_i = 0$ e $\delta\mathcal{S}_{rm}$ tal que $\delta\rho_i = \delta\rho_{r_i} + \delta\rho_{m_i} = 0$, estas condições correspodem aos chamados modos de *isocurvatura*. Em geral, quaisquer valores iniciais para Φ_i, $\delta\rho_{r_i}$ e $\delta\rho_{m_i}$ podem ser separados em um modo adiabático, com $\delta_{m_i} = \frac{3}{4}\delta_{r_i}$

mais modos de isocurvatura.

Como discutimos na seção 4.1.2, em grandes escalas os termos de entropia influenciam o potencial newtoniano apenas nas fases de transição. Esse comportamento fica evidente quando avaliamos a função ζ. A seguir apresentamos uma figura com um gráfico de Φ e ζ para condições puramente de isocurvatura e para condições adiabáticas mais isocurvatura. Note que ζ varia apenas próximo à fase de transição entre a matéria e radiação, isto é, $z \simeq 10^4$.

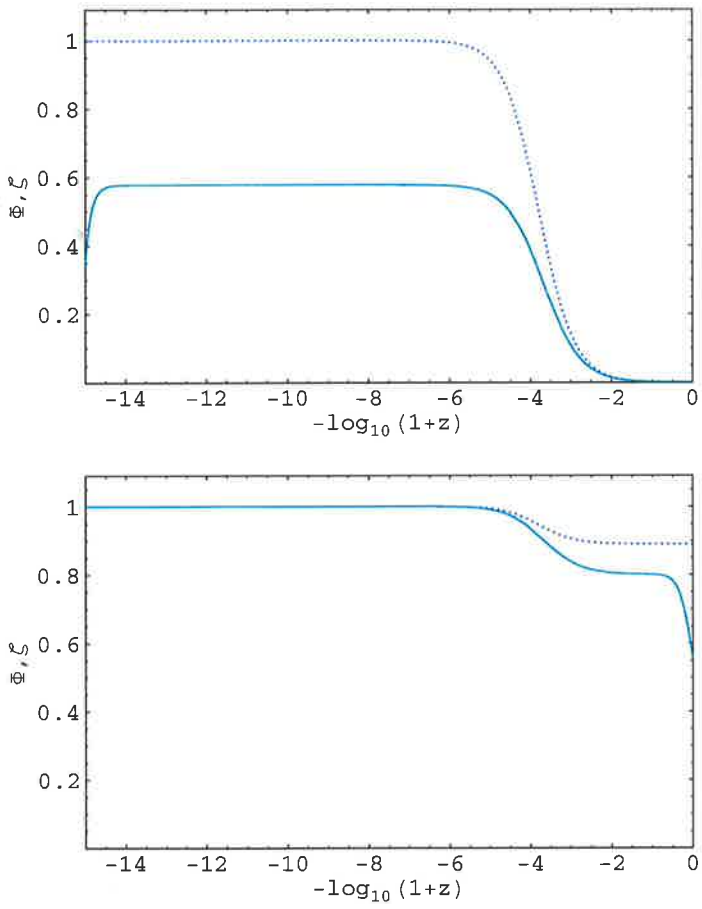

Figura 4.2: Evolução do potencial newtoniano Φ (linha cheia em azul claro) e da função ζ (linha pontilhada em azul escuro). Painel superior: para condições puramente de isocurvatura. Painel inferior: para condições adiabáticas mais condições de isocurvatura.

4.2.2 Soluções de pequena escala

Quando o comprimento de onda da perturbação entra no horizonte de Hubble não podemos desprezar os termos em k/aH na equação (4.59), a qual, para condições adiabáticas, escrita em função do tempo conforme η assume a forma:

$$\Phi'' + 3h\left(1 + c_s^2\right)\Phi' + \left[2h' + h^2\left(1 + 3c_s^2\right) + k^2 c_s^2\right]\Phi = 0\,. \tag{4.82}$$

Na fase dominada pela radiação, temos:

$$c_s^2 = \omega_r = 1/3 \quad \text{e} \quad h = \tfrac{1}{\eta}\,.$$

Portanto, a equação para o potencial newtoniano será

$$\Phi'' + \frac{4}{\eta}\Phi' + \frac{k^2}{3}\Phi = 0\,. \tag{4.83}$$

Tomando a seguinte transformação $\Phi \rightarrow f(x)\,y(x)$, onde $x = k\eta/\sqrt{3}$ podemos determinar $f(x)$ de modo a obtermos uma equação de Bessel para $y(x)$. Com $f(x) = x^{-3/2}$, temos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \left[1 - \frac{(3/2)^2}{x^2}\right]\frac{1}{x^2}y = 0\,, \tag{4.84}$$

cuja solução é:

$$y(x) = C_1 J_{3/2} + C_2 J_{-3/2}\,, \tag{4.85}$$

onde C_1 e C_2 são constantes e $J_{3/2}$ e $J_{-3/2}$ são funções de Bessel de ordem 3/2. Reconstruindo o potencial newtoniano temos a seguinte expressão:

$$\Phi = \frac{C_1}{(w\eta)^2}\left[\frac{sen\,(w\eta)}{w\eta} - cos\,(w\eta)\right] + \frac{C_2}{(w\eta)^2}\left[\frac{cos\,(w\eta)}{w\eta} + sen\,(w\eta)\right]\,, \tag{4.86}$$

onde $w = k/\sqrt{3}$.

Esta solução mostra que, para escalas dentro do horizonte de Hubble, o potencial newtoniano oscila decaindo de amplitude. A oscilação é um efeito da pressão associada com a radiação que inibe o crescimento das perturbações. O decaimento da amplitude de oscilação está associado com a expansão do universo. Portanto, durante a fase dominada pela radiação, o potencial newtoniano e as perturbações de densidade não crescem.

Na fase dominada pela matéria, temos:

$$c_s^2 = \omega_m = 0 \quad \text{e} \quad h = \tfrac{2}{\eta} \, .$$

Então, a equação para o potencial newtoniano fica na forma:

$$\Phi'' + \frac{6}{\eta}\Phi' = 0 \, , \tag{4.87}$$

cuja solução é:

$$\Phi = C_1(\vec{x}) + C_2(\vec{x})\,\eta^{-5} \, , \tag{4.88}$$

onde $C_1(\vec{x})$ e $C_2(\vec{x})$ são funções apenas do espaço. Neste caso, é interessante determinarmos a evolução do contraste de densidade da matéria δ_m. Pela equação (4.38), temos:

$$\delta_m = \frac{1}{6}\left[\nabla^2 C_1(\vec{x})\,\eta^2 - 12C_1(\vec{x}) + \nabla^2 C_2(\vec{x})\,\eta^{-3} + 18C_2(\vec{x})\,\eta^{-5}\right] \, . \tag{4.89}$$

Como podemos ver, existe um modo crescente, que em função em função do fator de escala é dado por:

$$^{+}\delta_m \sim a \, . \tag{4.90}$$

Desses resultados podemos tirar uma conclusão importante. Durante a era da radiação as perturbações não crescem em pequena escala e permanecem constantes em larga escala.

Quando a matéria passa a dominar, as perturbações na matéria começam a crescer linearmente com o fator de escala. Na medida que a matéria passou a dominar a partir de um $z \simeq 10^4$, suas perturbações cresceram nesta mesma ordem de grandeza.

Capítulo 5

Perturbações nos modelos com campo escalar

No capítulo 3, discutimos a evolução homogênea dos modelos de quintessência e de Born-Infeld. Diferentemente do modelo com constante cosmológica, esses modelos, por terem densidade de energia variável, admitem flutuações. Neste capítulo estudamos alguns aspectos associados às flutuações dos campos de quintessência e de Born-Infeld.

Vamos estudar como as flutuações associadas a um campo escalar,

$$\varphi\left(t,\vec{x}\right)=\varphi\left(t\right)+\delta\varphi\left(t,\vec{x}\right)\ , \tag{5.1}$$

influenciam o potencial newtoniano Φ da métrica:

$$ds^2=-\left(1+2\Phi\right)dt^2+a^2\left(1-2\Phi\right)d\vec{x}^2\ . \tag{5.2}$$

Como discutimos no capítulo anterior, no espaço de Fourier, temos as equações de Einstein

(00) e (ii) para o potencial newtoniano:

$$3H\dot{\Phi} + 3H^2\Phi + \frac{k^2}{a^2}\Phi = -4\pi G\delta\rho \ , \tag{5.3}$$

$$\ddot{\Phi} + 4H\dot{\Phi} + \left(2\dot{H} + 3H^2\right)\Phi = 4\pi G\delta p \ , \tag{5.4}$$

nas quais vamos considerar as perturbações de um mistura de radiação, matéria e de densidade de energia associada às perturbações do campo escalar $\delta\varphi$:

$$\delta\rho = \delta\rho_r + \delta\rho_m + \delta\rho_\varphi \ , \tag{5.5}$$

mais suas respectivas perturbações de pressão.

5.1 Perturbações no campo de quintessência

Na medida em que os modelos de quintessência podem induzir uma evolução de fundo muito semelhante à que temos com o modelo de constante cosmológica, uma forma de diferenciar estes modelos é pelo estudo das perturbações do campo de quintessência. Neste sentido, vários trabalhos foram desenvolvidos [66, 46, 67, 41, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74]. Nosso interesse é fazer uma descrição das soluções atratoras associadas às perturbações do campo de quintessência [69] e avaliar se elas geram modos de isocurvatura.

A parte perturbada da equação de Klein-Gordon (3.10) indica, no espaço de Fourier, a seguinte equação para as flutuações do campo:

$$\delta\ddot{\varphi} + 3H\delta\dot{\varphi} + \frac{k^2}{a^2}\delta\varphi + V_{,\varphi\varphi}\delta\varphi = 4\dot{\varphi}\dot{\Phi} - 2V_{,\varphi}\Phi \ . \tag{5.6}$$

As perturbações de densidade e pressão associadas ao campo de quintessência são definidas

a partir da parte perturbada do tensor energia momento (3.12):

$$\delta\rho_\varphi = \dot{\varphi}\delta\varphi - \dot{\varphi}^2\Phi + V_{,\varphi}\delta\varphi \,, \tag{5.7}$$

$$\delta p_\varphi = \dot{\varphi}\delta\varphi - \dot{\varphi}^2\Phi - V_{,\varphi}\delta\varphi \,. \tag{5.8}$$

Como se pode ver pelo termo em k^2 na equação (5.6), a velocidade de propagação associada às perturbações do campo de quintessência é igual a 1. Com isso, para escalas dentro do horizonte de Hubble, o comportamento das perturbações é essencialmente oscilatório, com amplitude decrescente, devido à expansão do universo.

Existe uma circunstância na qual as perturbações do campo de quintessência podem não decair. Na aproximação de grandes escalas, o potencial newtoniano admite uma solução constante, dada por

$$\Phi_c = -\frac{1}{2}\frac{\delta\rho}{\rho} \,, \tag{5.9}$$

a qual substituída na equação (4.59), sem o termo de pressão não adiabática, indica que devemos ter:

$$\omega = c_s^2 \,. \tag{5.10}$$

Esta condição é satisfeita nas fases dominadas pela radiação e pela matéria. Também podemos considerar a solução de Φ_c constante na presença de pressão não adiabática como uma boa aproximação, a menos da fase de transição de dominação da radiação para matéria. Portanto, a menos desta fase, podemos desconsiderar a variação temporal do potencial newtoniano. Nestas condições, a equação para as perturbações do campo de quintessência fica dada por:

$$\delta\ddot{\varphi} + 3H\delta\dot{\varphi} + V_{,\varphi\varphi}\delta\varphi \simeq -2V_{,\varphi}\Phi_c \,. \tag{5.11}$$

Se a quantidade $V_{,\varphi}/V_{,\varphi\varphi}$ é aproximadamente constante, temos a solução aproximada:

$$\delta\varphi \simeq -2\frac{V_{,\varphi}}{V_{,\varphi\varphi}}\Phi_c \,. \tag{5.12}$$

Devemos avaliar em que circunstâncias a quantidade $V_{,\varphi}/V_{,\varphi\varphi}$ é aproximadamente constante. Como descrevemos no capítulo 3, para um potencial tipo lei de potência,

$$V = M^{4+\alpha}\varphi^{-\alpha} \,, \tag{5.13}$$

temos uma solução tipo tracker, na qual a equação de estado da quintessência é constante e dada por:

$$\omega_\varphi = -\frac{2}{\alpha+2} + \frac{\alpha}{\alpha+2}\omega_f \,, \tag{5.14}$$

onde ω_f é a equação de estado do fluido que domina a evolução de fundo. Portanto, a velocidade do som adiabática da quintessência,

$$c_{s_\varphi}^2 = \frac{\dot{p}_\varphi}{\dot{\rho}_\varphi} = 1 + \frac{2V_{,\varphi}}{3H\dot{\varphi}} = \omega_\varphi - \frac{\dot{\omega}_\varphi}{3H\left(1+\omega_\varphi\right)} \,, \tag{5.15}$$

será constante e igual à sua equação de estado (5.14). Neste regime, temos a solução (3.21):

$$\varphi = C_1 t^{1-\gamma_\varphi/\gamma_f} \,. \tag{5.16}$$

Então:

$$\frac{V_{,\varphi}}{V_{,\varphi\varphi}} \sim \varphi \sim t^p \,, \tag{5.17}$$

onde $p = 1 - \gamma_\varphi/\gamma_f$. Com a relação (5.14), temos:

$$p = \frac{2}{2+\alpha} \,. \tag{5.18}$$

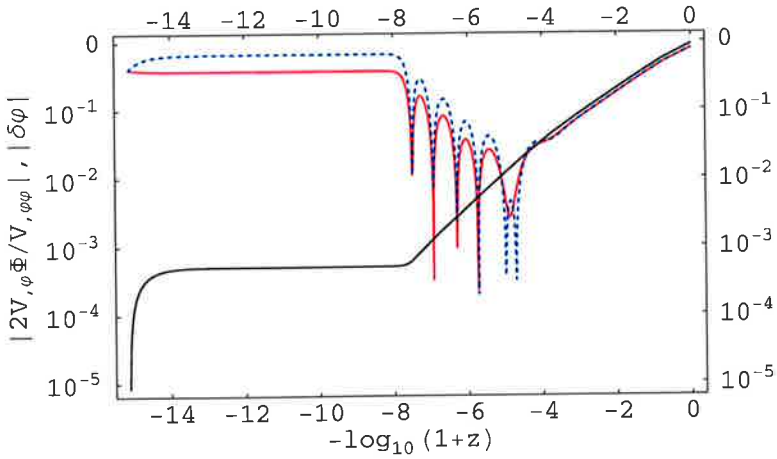

Figura 5.1: Evolução da quantidade $|2\frac{V_{,\varphi}}{V_{,\varphi\varphi}}\Phi|$ (linha cheia em preto) e de $|\delta\varphi|$ (linhas vermelha cheia e azul tracejada) para duas condições inicias distintas.

Portanto, quanto maior for α, menor é a variação de $V_{,\varphi}/V_{,\varphi\varphi}$. Na figura 5.1, mostramos, para dois conjuntos de condições iniciais diferentes, ambas com $\alpha = 6$, um gráfico com a evolução da quantidade $|2V_{,\varphi}\Phi/V_{,\varphi\varphi}|$ e da perturbação do campo $|\delta\varphi|$ num cenário com radiação, matéria e quintessência. Como vemos, as perturbações do campo buscam a solução atratora. É interessante notar que mesmo na fase de transição entre a dominação da radiação para matéria ($z \simeq 10^4$), quando o potencial newtoniano varia, a solução (5.12) é atingida e bem verificada.

Na figura 5.2, também mostramos o diagrama de fase das soluções mostradas anteriormente. Quando o regime tracker termina, as perturbações do campo começam a evoluir de maneira muito parecida.

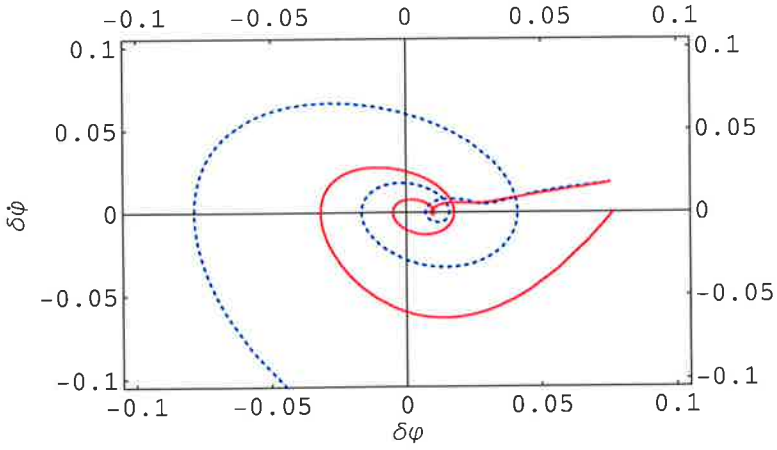

Figura 5.2: Digrama de fase das soluções da Figura 5.1

Para verificarmos se este tipo de solução atratora gera algum modo de isocurvatura, vamos definir condições adiabáticas entre a radiação e a matéria, isto é, $\delta_{m_i} = 0,75\delta_{r_i}$ e computar o potencial newtoniano Φ e a função ζ na aproximação de grandes escalas. Como vemos na figura 5.3, a evolução de Φ é semelhante ao modelo com constante cosmológica e ζ não varia, indicando que não temos modos de isocurvatura. A ausência de modos de isocurvatura está associada ao regime tracker que o campo de quintessência atinge [41, 69, 70, 71].

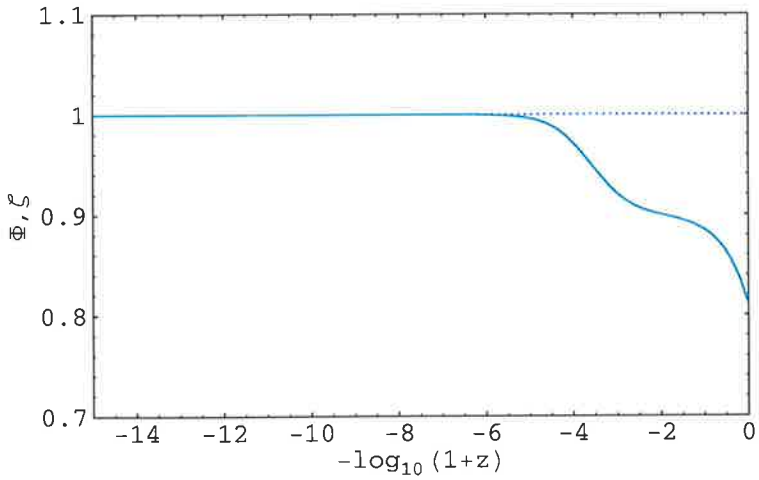

Figura 5.3: Modelo de energia escura com campo de quintessência, com $\alpha = 6$. Potencial newtoniano Φ (linha cheia em azul claro) e função ζ (linha pontilhada em azul escuro).

Conforme discutido em [70], em termos das variáveis $\delta_\varphi = \delta\rho_\varphi/\rho_\varphi$ e $\delta_p = \delta p_\varphi/\rho_\varphi$, um período cinético prolongado pode evitar o completo desaparecimento dos modos não adiabáticos. Em modelos realistas, o período cinético se dá na fase dominada pela radiação. Portanto, de acordo com a expressão (4.72), o impacto no potencial newtoniano destes modos é desprezível.

5.2 Perturbações no campo de Born-Infeld

Diferentemente do campo de quintessência, as perturbações do campo de Born-Infeld têm sido pouco estudadas. Contudo, estes modelos reproduzem bem os dados de anisotropias da RCF [73], onde suas perturbações foram consideradas.

A densidade e pressão associadas às perturbações do campo BI são:

$$\delta\rho_\varphi = \frac{V\dot{\varphi}(\delta\dot{\varphi} - \Phi\dot{\varphi})}{(1-\dot{\varphi}^2)^{3/2}} + \frac{V_{,\varphi}\delta\varphi}{\sqrt{1-\dot{\varphi}^2}}\,, \tag{5.19}$$

$$\delta p_\varphi = \frac{V\dot{\varphi}(\Phi\dot{\varphi} - \delta\dot{\varphi})}{\sqrt{1-\dot{\varphi}^2}} - V_{,\varphi}\delta\varphi\sqrt{1-\dot{\varphi}^2}\,, \tag{5.20}$$

onde tomamos uma redefinição do campo φ para eliminar a massa m que aparece na expressão (3.29). A equação de movimento das perturbações do campo é obtida pela conservação do seu tensor energia momento:

$$\delta\ddot{\varphi} + \left[3H\left(1-\dot{\varphi}^2\right) + \frac{2\ddot{\varphi}\dot{\varphi}}{(1-\dot{\varphi}^2)}\right]\delta\dot{\varphi} + \left(1-\dot{\varphi}^2\right)\left[\frac{k^2}{a^2} + ln\left(V\right)_{,\varphi\varphi}\right]\delta\varphi$$
$$= 2\left[3H\dot{\varphi}\left(1-\dot{\varphi}^2\right) + \frac{\ddot{\varphi}}{(1-\dot{\varphi}^2)}\right]\Phi + 4\left(1-\dot{\varphi}^2\right)\dot{\varphi}\dot{\Phi}\,. \tag{5.21}$$

A velocidade de propagação das perturbações do campo BI é $\sqrt{1-\dot{\varphi}^2} = \sqrt{-\omega_\varphi}$. Como discutimos no capítulo 3, a equação de estado do campo BI é essencialmente não positiva, portanto a velocidade de propagação de suas perturbações é não negativa. Com isso, a menos que $\omega_\varphi \simeq 0$, em escalas dentro do horizonte de Hubble, as perturbações do campo BI, assim como as da quintessência, tendem a oscilar com amplitude decrescente.

Para a solução atratora de fundo (3.42), no limite de grandes escalas e nas condições que temos o potencial newtoniano constante (5.9) a equação de movimento para as perturbações fica na forma:

$$3H\delta\dot{\varphi} + ln\left(V\right)_{,\varphi\varphi}\delta\varphi = 6H\dot{\varphi}\Phi\,. \tag{5.22}$$

Quando um fluido perfeito de equação de estado constante ω_f domina a evolução do universo, o parâmetro de Hubble é dado por $H = 2/3\left(1+\omega_f\right)t$. Portanto, temos:

$$\delta\dot{\varphi} + t^{-1}\delta\varphi = \sqrt{2\alpha\left(1+\omega_f\right)}\Phi\,, \tag{5.23}$$

cuja solução é [75]:

$$\delta\varphi = \sqrt{\frac{\alpha\left(1+\omega_f\right)}{2}}\Phi t + c_1 t^{-1}\,, \tag{5.24}$$

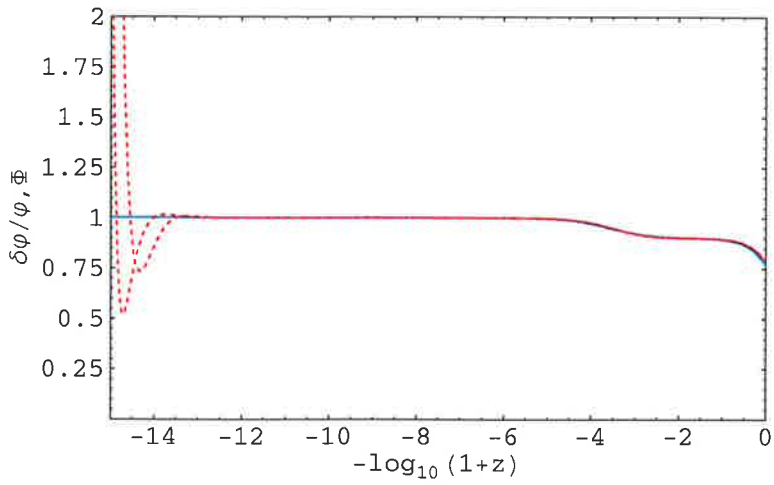

Figura 5.4: Evolução do potencial newtoniano (linha cheia em azul claro) e, para duas condições iniciais distintas, a função $\delta\varphi/\varphi$ (linha pontilhada vermelha).

com c_1 constante. Desprezando a parte decrescente, temos a seguinte solução aproximada:

$$\delta\varphi \simeq \sqrt{\frac{\alpha\,(1+\omega_f)}{2}}\Phi t = \varphi\Phi\ , \tag{5.25}$$

ou:

$$\frac{\delta\varphi}{\varphi} \simeq \Phi\ . \tag{5.26}$$

A seguir avaliamos um modelo com $\alpha = 1$. Para dois conjuntos de condições iniciais distintas, mostramos na figura 5.4 a solução atratora (5.26), atingida na época dominada pela radiação e na época dominada pela matéria. Perceba que mesmo quando o potencial newtoniano varia, a solução atratora é bem verificada.

Também mostramos, na figura 5.5, para dois conjuntos de condições iniciais distintas, um gráfico no plano $\delta\varphi/\varphi$ - $d(\delta\varphi/\varphi)/dt$. Note que o primeiro ponto atrator ocorre para $\frac{\delta\varphi}{\varphi} = 1$, o que corresponde ao valor do potencial newtoniano na era dominada pela radiação. Durante a fase de transição para dominação da matéria, o campo evolui e atinge o segundo ponto atrator $\frac{\delta\varphi}{\varphi} = 0,9$. Após esta fase, ambas as soluções passam a evoluir de forma

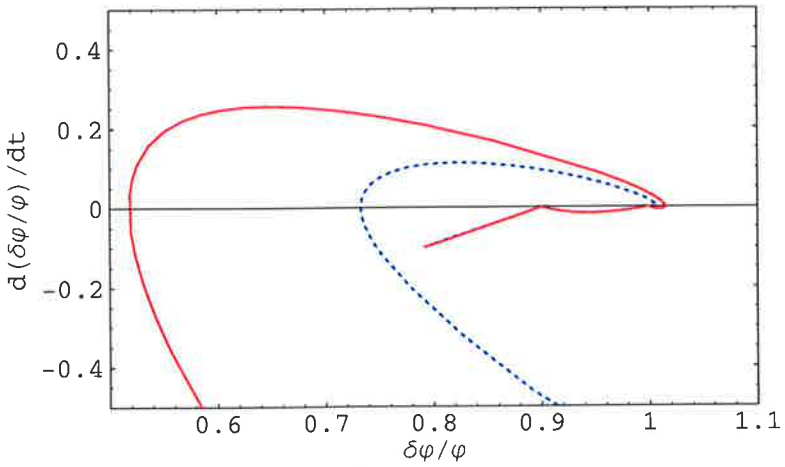

Figura 5.5: Plano $\delta\varphi/\varphi$ - $d(\delta\varphi/\varphi)/dt$ para dois conjuntos de condições iniciais distintas, ambas com $\alpha = 1$.

indistinguível.

Como mostramos no capítulo 3, na época dominada pela radiação, para $\alpha > 1,5$, a solução atratora de fundo se satura com $\omega_\varphi \to 0^-$ e o campo tem uma correção decrescente. Quando avaliamos as perturbações neste caso, percebemos uma dependência nas condições iniciais das perturbações do campo. Quando a solução atratora é atingida na época dominada pela radiação, na fase de transição entre a dominação da radiação para a matéria, a função $\delta\varphi/\varphi$ evolui para longe do atrator Φ. Nestes casos, as perturbações do campo podem crescer indefinidamente.

Nas circunstâncias que a solução (5.25) é atingida, ou seja, em grandes escalas, com o potencial newtoniano constante e quando a solução atratora de fundo é válida, a equação para $\delta\varphi$ fica na forma:

$$\delta\ddot{\varphi} + 3H\left(1-\dot{\varphi}^2\right)\delta\dot{\varphi} + \left(1-\dot{\varphi}^2\right) ln\left(V\right)_{,\varphi\varphi}\delta\varphi = 6H\dot{\varphi}\left(1-\dot{\varphi}^2\right)\Phi\,. \tag{5.27}$$

Neste caso, desvios Δ em torno da solução (5.25) devem satisfazer a equação:

$$\ddot{\Delta} - \frac{\lambda}{t}\dot{\Delta} - \frac{\lambda}{t^2}\Delta = 0\,, \tag{5.28}$$

onde $\lambda = \alpha - 2/\gamma_f$, cuja solução é $\Delta \propto t^\beta$ com:

$$\beta = \frac{1+\lambda}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1+\lambda)^2 + 4\lambda}\,. \tag{5.29}$$

Portanto, para que a solução (5.25) seja estável, devemos ter $\Delta/\delta\varphi \propto t^{\beta-1}$ com $\beta - 1 < 0$, isto é,

$$\alpha < \frac{2}{\gamma_f}\,. \tag{5.30}$$

Na era dominada pela radiação $\gamma_f = \gamma_r = 4/3$, então devemos ter $\alpha < 1,5$ para que a solução atratora perturbativa (5.25) seja estável. Logo no início da transição de dominação da radiação para a matéria, temos desvios da solução atratora de fundo para o campo BI, que amplificam os termos extras na equação (5.27). Portando, devemos considerar os desvios Δ, que para $\alpha = 1,6$ crescem inicialmente com $t^{1,18}$ ou $a^{2,36}$. Na medida que a transição transcorre, γ_f e Φ também variam e a evolução de Δ é mais complexa que uma simples lei de potência. Caso Δ cresça muito, o potencial newtoniano terá variações ainda maiores do que a que ocorre na fase de transição, o que por sua vez irá impedir que a função $\delta\varphi/\varphi$ atinja o segundo regime atrator, o que então provoca um crescimento ilimitado. Contudo, ainda podemos ajustar as condições inicias $\delta\varphi_i$ e $\delta\dot{\varphi}_i$ para que o crescimento das perturbações do campo seja limitado. A figura 5.6 ilustra dois casos dessa situação.

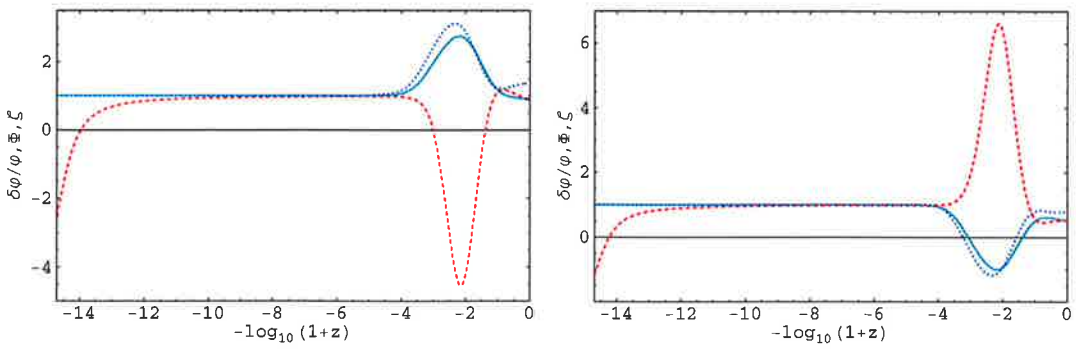

Figura 5.6: Modelo de energia escura com campo de Born-Infeld, com $\alpha = 1,52$. Para condições iniciais $\delta\varphi_i$ distintas: potencial newtoniano Φ (linha cheia em azul claro), função ζ (linha pontilhada em azul escuro) normalizados e a função $\delta\varphi/\varphi$ (linha tracejada em vermelha).

Para as soluções mostradas na figura 5.6, mostramos um gráfico no plano $\delta\varphi/\varphi$ - $d(\delta\varphi/\varphi)/dt$. A solução atratora para as perturbações do campo são atingidas na época dominada pela radiação, isto é, $\frac{\delta\varphi}{\varphi} = 1$. Próximo da transição entre a dominação da radiação para matéria, as perturbações do campo começam a evoluir de forma distinta. Como escolhemos condições inicias tais que a solução atratora na época dominada pela matéria também seja atingida, o que inibe o crescimento indefinido das perturbações do campo, notamos uma convergência das duas soluções para o valor do potencial newtoniano nesta época. Contudo, dado que as instabilidades das perturbações do campo influenciam fortemente o potencial newtoniano e geram modos de isocurvatura muito significativos, não temos mais um modelo realista. Para ilustrar a dependência das perturbações do campo BI com as condições iniciais, também mostramos um gráfico com a evolução de algumas condições próximas.

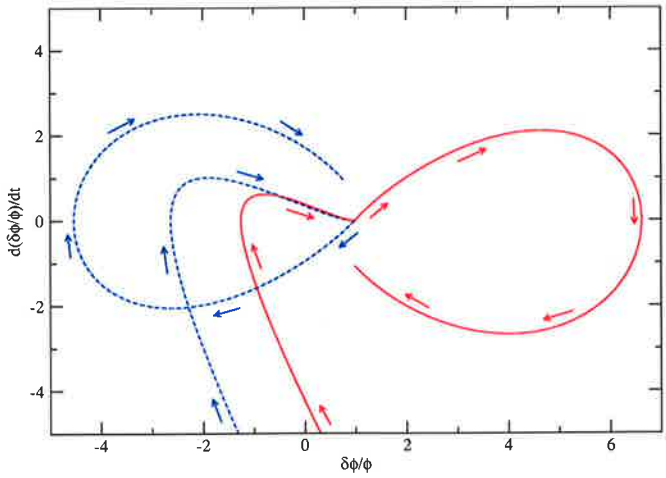

Figura 5.7: Plano $\delta\varphi/\varphi$ - $d(\delta\varphi/\varphi)/dt$ para as soluções da figura 5.6.

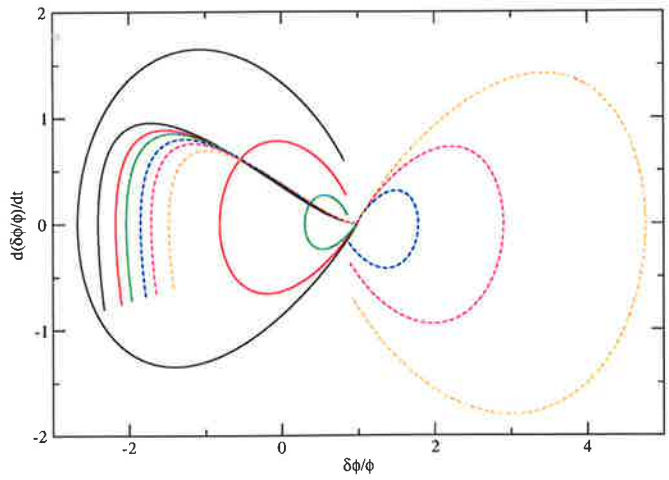

Figura 5.8: Plano $\delta\varphi/\varphi$ - $d(\delta\varphi/\varphi)/dt$ para algumas condições iniciais próximas, todas com a mesma evolução de fundo e com $\alpha = 1,52$.

5.2.1 Modos de isocurvatura

Vamos avaliar se a solução atratora para as perturbações (5.26) do campo BI induzem modos de isocurvatura. Para tal, mostraremos que neste regime atrator, a pressão e densidade associadas com as perturbações do campo podem ser descritas como perturbações de um fluido perfeito com equação de estado constante. Neste caso, podemos aplicar a análise

que desenvolvemos na seção 4.1.2 do capítulo anterior.

A densidade de energia e pressão perturbadas associadas à solução atratora (5.26) são dadas por:

$$\delta\rho_\varphi = -\alpha\Phi\rho_\varphi \ , \tag{5.31}$$

$$\delta p_\varphi = \alpha\Phi\rho_\varphi \left(1 - \frac{\alpha\,(1+\omega_f)}{2}\right) \ . \tag{5.32}$$

Portanto, temos o contraste de densidade:

$$\delta_\varphi = -\alpha\Phi \ , \tag{5.33}$$

e a seguinte relação entre pressão e densidade:

$$\delta p_\varphi = \left(\frac{\alpha\,(1+\omega_f)}{2} - 1\right)\delta\rho_\varphi \ ,$$

que por sua vez indica a velocidade do som adiabática c_{s_φ} é constante e dada por:

$$c_{s_\varphi}^2 = \frac{\alpha\,(1+\omega_f)}{2} - 1 \ . \tag{5.34}$$

A equação de estado do campo ω_φ no regime atrator de fundo é

$$\omega_\varphi = \frac{\alpha\,(1+\omega_f)}{2} - 1 \ . \tag{5.35}$$

Com estas relações, podemos dizer que, neste regime, as perturbações do campo têm um comportamento de fluido perfeito com equação de estado constante, indicada por $c_{s_\varphi}^2 = \omega_\varphi$, relação verificada pelas expressões (5.34) e (5.35).

No caso em que consideramos uma mistura de radiação, matéria e campo BI, as perturbações de entropia no regime atrator, isto é, quando o campo se comporta como um

fluido perfeito, ficam dadas por:

$$\delta\mathcal{S}_{\varphi r} = \frac{\delta_{\varphi_i}}{\gamma_\varphi} - \frac{\delta_{r_i}}{\gamma_r} , \tag{5.36}$$

$$\delta\mathcal{S}_{\varphi m} = \frac{\delta_{\varphi_i}}{\gamma_\varphi} - \frac{\delta_{m_i}}{\gamma_m} . \tag{5.37}$$

Quando este regime é atingido na época dominada pela radiação, fazendo uso das relações (5.33) e (5.35), podemos escrever:

$$\delta\mathcal{S}_{\varphi r} = -\frac{1}{\gamma_r}\left(2\Phi_i + \delta_{r_i}\right) , \tag{5.38}$$

$$\delta\mathcal{S}_{\varphi m} = -\frac{2\Phi_i}{\gamma_r} - \frac{\delta_{m_i}}{\gamma_m} . \tag{5.39}$$

Como se vê:

$$\delta\mathcal{S}_{\varphi m} - \delta\mathcal{S}_{\varphi r} = \delta\mathcal{S}_{rm} . \tag{5.40}$$

Para verificar se as perturbações do campo BI induzem modos de isocurvatura no regime atrator, vamos estabelecer condições adiabáticas entre as perturbações da radiação e matéria, isto é, $\delta\mathcal{S}_{mr} = 0$. Portanto, basta calcular umas das perturbações de entropia relacionadas ao campo BI pois $\delta\mathcal{S}_{\varphi r} = \delta\mathcal{S}_{\varphi m}$.

As expressões (5.38) e (5.39) são válidas para o regime atrator, portanto Φ_i, δ_{r_i} e δ_{m_i} devem ser computadas em algum instante neste período. Para este instante, passamos a indicar as variáveis envolvidas com o subscrito "at". Assim, para a perturbação de entropia entre a radiação e o campo BI, temos:

$$\delta\mathcal{S}_{\varphi r} = -\frac{1}{\gamma_r}\left(2\Phi_{\rm at} + \delta_{r_{\rm at}}\right) . \tag{5.41}$$

Durante a época que a radiação domina, podemos expressar a evolução do contraste de

densidade pela equação de Einstein (00):

$$\delta_r \simeq -2\left(\Phi + \frac{\dot{\Phi}}{H}\right) . \tag{5.42}$$

Nesta circunstância o potencial newtoniano não varia, portanto $\dot{\Phi} = 0$, então $\delta_{r_{\rm at}} = -2\Phi_{\rm at}$ e a perturbação de entropia entre a radiação e campo BI, dada pela expressão (5.41), será nula:

$$\delta\mathcal{S}_{\varphi r} = \delta\mathcal{S}_{\varphi m} = 0 . \tag{5.43}$$

Quando o regime atrator para as perturbações do campo BI é atingido na era dominada pela matéria, podemos tomar um procedimento análogo ao que tomamos para a era dominada pela radiação, o que também indica

$$\delta\mathcal{S}_{\varphi m} = \delta\mathcal{S}_{\varphi r} = 0 . \tag{5.44}$$

Portanto, se o regime atrator é atingido nas épocas de dominação da radiação ou matéria, não temos perturbação de entropia sendo gerada nestas épocas.

A figura 5.9 apresenta a evolução da perturbação de entropia $\delta\mathcal{S}_{\varphi m} = \delta\mathcal{S}_{\varphi r}$, nos termos da definição (4.54), para um modelo em que a solução atratora (5.26) é atingida nas fases dominadas pela radiação e pela matéria. Podemos observar que inicialmente temos uma perturbação de entropia, a qual rapidamente converge para zero. Na fase de transição entre a dominação da radiação para matéria, as perturbações do campo BI saem do atrator e conseqüentemente temos alguma perturbação de entropia. Quando a matéria passa a dominar, a perturbação de entropia novamente converge para zero. Na medida que o campo BI passa a dominar, o que acontece para $z < 1$, a solução atratora para suas perturbações não é mais válida e também temos perturbações de entropia diferente de zero.

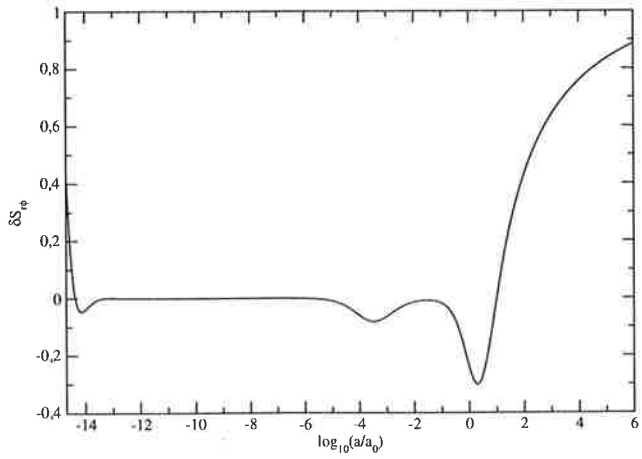

Figura 5.9: Evolução da perturbação de entropia relativa entre o campo BI e radiação $\delta S_{r\varphi}$ para um modelo com $\alpha = 1,0$.

Contudo, dado que nesta primeira fase de transição Ω_φ ainda deve ser consideravelmente menor que Ω_r e Ω_m, a pressão não adiabática associada às perturbações de entropia que surgem neste período são desprezíveis. Já na segunda fase de transição, isto é, quando o campo BI começa a dominar a evolução de fundo, Ω_φ e Ω_m são comparáveis, portanto é de se esperar que a perturbação de pressão não adiabática associada à perturbação de entropia relativa entre o campo BI e a matéria seja não desprezível, o que pode gerar modos de isocurvatura.

Para ilustrar essa conclusão, mostramos na figura 5.10 a evolução do potencial newtoniano e da função ζ num modelo com campo BI, com condições adiabáticas entre radiação e matéria. É importante notar que função ζ apresenta uma pequena variação para épocas muito recentes, caracterizadas pela fase de transição entre a dominação da matéria para o campo BI. Nas mesmas circunstâncias, no modelo com quintessência, não temos variação da função ζ.

Para verificar se apenas a entropia relativa contribui para os modos de isocurvatura,

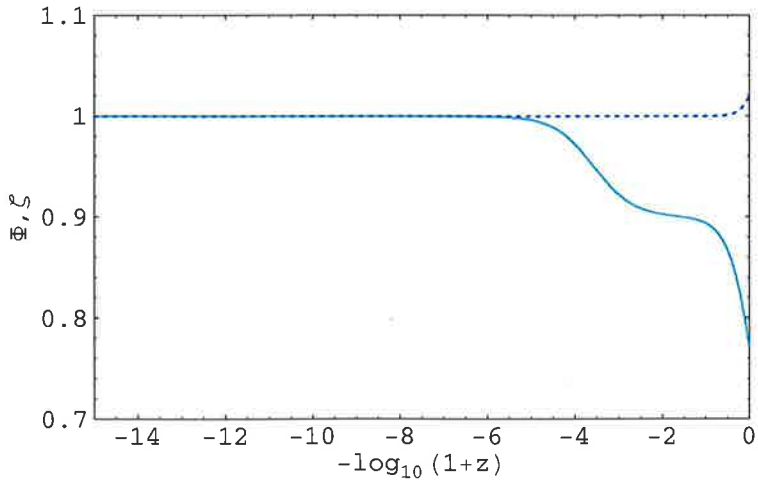

Figura 5.10: Modelo de energia escura com campo de Born-Infeld, com $\alpha = 1$: potencial newtoniano Φ (linha cheia em azul claro) e função ζ (linha pontilhada em azul escuro).

vamos acompanhar as seguintes funções:

$$\mathcal{F}_{rel} = \frac{c_{s_\varphi}^2}{2H\dot{\rho}} \frac{\dot{\rho}_m \dot{\rho}_\varphi}{\rho} \delta\mathcal{S}_{\varphi m} \tag{5.45}$$

e

$$\mathcal{F}_{int} = \frac{3}{2} \frac{\delta p_\varphi - c_{s_\varphi}^2 \delta\rho_\varphi}{\rho} , \tag{5.46}$$

as quais definimos, respectivamente, de acordo com as expressões (4.54) e (4.52). A primeira delas expressa o termo de fonte na equação do potencial newtoniano relativo à entropia relativa entre o campo BI e a matéria. A segunda expressa, na mesma equação, a contribuição da entropia intrínseca do campo BI. Para maior clareza, evoluímos estas funções até épocas futuras.

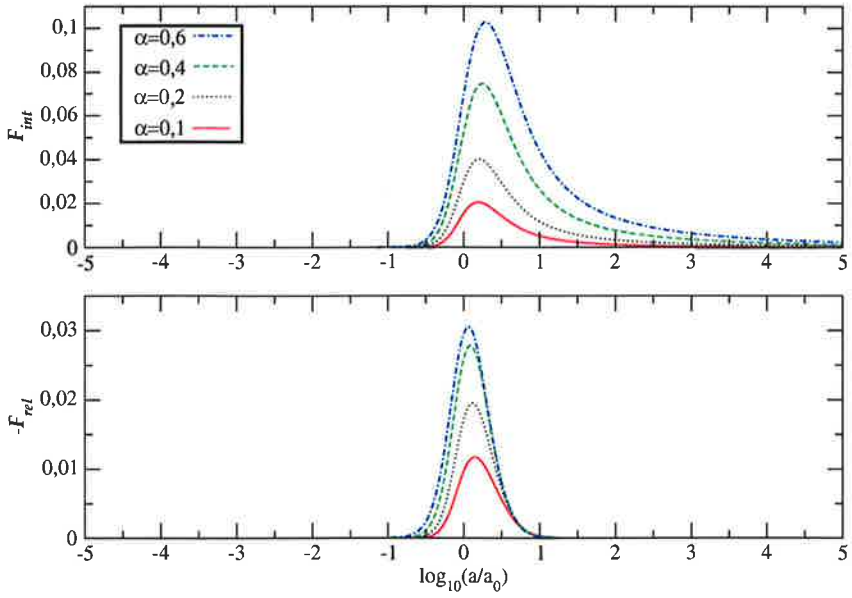

Figura 5.11: Modelo de energia escura com campo de Born-Infeld. Painel superior: $\mathcal{F}_{int}$ para alguns valores de α. Painel inferior: $-\mathcal{F}_{rel}$ para alguns valores de α.

Como podemos ver na figura 5.11, o termo de entropia intrínseca é positivo e maior que o termo de entropia relativa, que é negativo e decai conforme $\Omega_\varphi \to 1$. Já o termo de entropia intrínseca decai mais lentamente, sendo responsável pela maior parte da variação da função ζ.

A entropia intrínseca do campo é uma manifestação da diferença entre sua velocidade do som adiabática c_{s_φ} e a quantidade $\sqrt{\delta p_\varphi / \delta \rho_\varphi}$, a qual pode ser interpretada como a sua velocidade do som efetiva c_{ef_φ}. Sempre que houver uma diferença entre estas duas quantidades, teremos uma perturbação de entropia intrínseca associada, a qual pode gerar um termo de fonte $\mathcal{F}_{int}$ não desprezível. Conforme podemos ver na figura 5.12, a velocidade do som adiabática e efetiva são iguais nos períodos em que as perturbações do campo BI estão no regime atrator. Na fase de transição entre a dominação da radiação para a matéria, temos uma pequena diferença, a qual tende a se anular na fase de dominação da matéria. Quando Ω_φ passa a se equiparar com Ω_m a diferença entre as velocidades do som

adiabática e efetiva aumenta, mas conforme $\Omega_\varphi \longrightarrow 1$ o campo se aproxima de uma evolução adiabática.

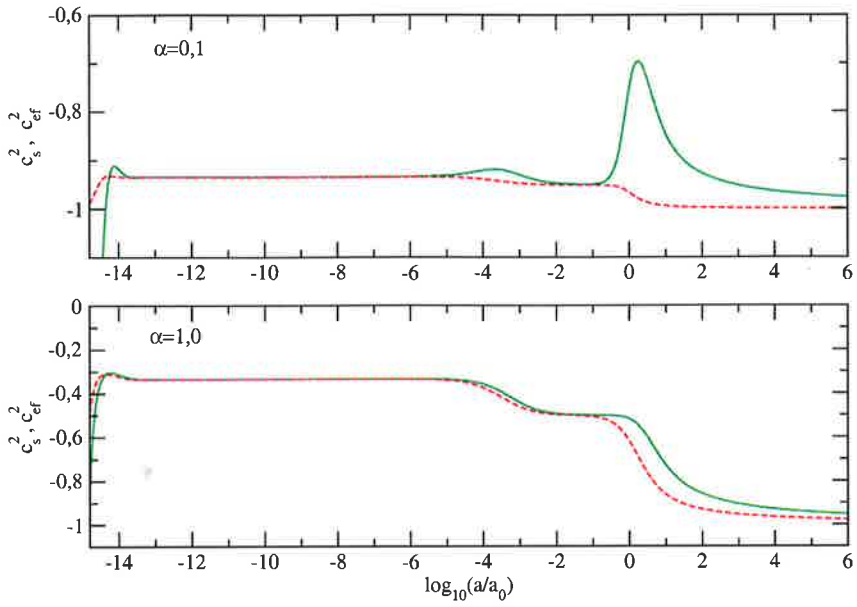

Figura 5.12: Modelo de energia escura com campo de Born-Infeld. Evolução de $c^2_{s_\varphi}$(linha cheia em verde) e $c^2_{ef_\varphi}$(linha tracejada em vermelho) para $\alpha = 0,1$ (painel superior) e $\alpha = 1,0$ (painel inferior).

Como podemos ver, em torno de $a/a_0 \simeq 10^{-4}$, temos uma diferença entre c_{ef_φ} e c_{s_φ}. Contudo, esta entropia intrínseca associada não gera modos de isocurvatura muito relevantes. Podemos reescrever a expressão (5.46) na forma:

$$\mathcal{F}_{int} = \frac{3}{2}\Omega_\varphi \delta_\varphi \left(c^2_{ef_\varphi} - c^2_{s_\varphi}\right) , \tag{5.47}$$

e, como $\Omega_\varphi \ll 1$ nesta época o termo de fonte associado com esta entropia intrínseca é desprezível. Contudo, para épocas recentes, onde Ω_φ é da ordem de um, o termo de fonte se torna importante e temos modos de isocurvatura, indicados pela variação da função ζ na figura 5.10.

Apesar disso, os melhores modelos de energia escura com o campo BI são aqueles que têm equação de estado mais próxima de -1. Para tal, α deve ser pequeno. A expressão (5.33) indica que quanto menor α menor será o contraste de densidade do campo BI no final do regime atrator da era da matéria. Além disso, após esse regime, dada a expansão acelerada que ocorre quando o campo BI começa a dominar, tanto o potencial newtoniano, quanto os contrastes de densidade decaem. Por esses motivos, a partir da expressão (5.47), podemos dizer que os melhores modelos de energia escura com campo BI tendem não gerar modos de isocurvatura relevantes. Contudo, é importante notar que existe um mecanismo natural da evolução do campo BI que gera modos de isocurvatura, os quais tendem a ser atenuados com os parâmetros que melhor reproduzem os modelos de energia escura.

No caso que a solução atratora para as perturbações do campo BI é atingida na época dominada pela radiação e para $\alpha > 1,5$, também podemos ter modos de isocurvatura. Neste caso estes modos ocorrem fundamentalmente pois as perturbações do campo BI evoluem para longe da solução atratora no período de transição entre a dominação da radiação para matéria, gerando perturbações de entropia relativa.

Como mostramos, nestes casos a evolução das perturbações do campo BI é sensível às condições iniciais. Para valores de α pouco maiores que $1,5$ esta sensibilidade ainda é pequena, contudo ela aumenta rapidamente à medida que aumentamos α. Para ilustrar este fato, na figura 5.13 apresentamos gráficos com a evolução da função ζ para o mesmo conjunto de condições iniciais para as perturbações do campo BI, para $\alpha = 1,505$, $\alpha = 1,51$ e $\alpha = 1,52$.

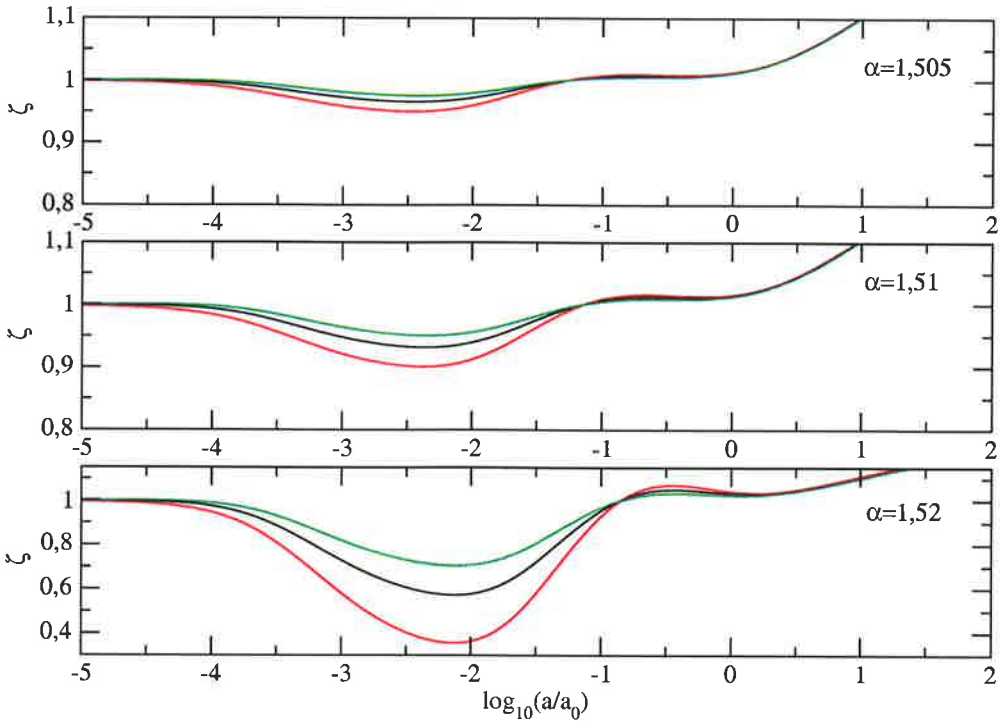

Figura 5.13: Modelo de energia escura com campo de Born-Infeld. Evolução da função ζ para três conjuntos de condições iniciais distintas para as perturbações do campo BI para alguns valores de α.

Nestes casos, quando o campo BI passa a dominar a evolução de fundo, suas perturbações tendem a evoluir de forma indistinguível. Devemos notar que, para os valores de α abordados, não temos bons modelos de energia escura. Como se pode ver pela expressão da equação de estado para o campo BI no seu regime atrator (3.40), na era dominada pela matéria temos:

$$\omega_\varphi = -1 + \frac{\alpha}{2}\,, \tag{5.48}$$

portanto, para $\alpha = 1,5$ temos $\omega_\varphi = -0,25$. Como este valor é muito grande, mesmo quando o campo BI sai do regime atrator, o que faz com que $\omega_\varphi \to -1$ à medida que $\Omega_\varphi \to 1$, sua equação de estado não decai o suficiente para termos bons modelos de energia escura. Na verdade, nestas circunstâncias, o campo BI está mais próximo de uma modelagem de

matéria escura do que energia escura, dado que sua equação de estado é muito próxima de zero durante a maior parte da evolução do universo.

Capítulo 6

Conclusões

Neste trabalho analisamos alguns aspectos homogêneos e perturbativos de alguns modelos de energia escura. Tratamos do modelo com constante cosmológica, do modelo com campo de quintessência e do modelo com campo de Born-Infeld. Para os modelos com campo escalar utilizamos potenciais tipo lei de potência.

Primeiramente estudamos a evolução homogênea destes modelos. Mostramos que os modelos com campo escalar apresentam soluções atratoras, o que pode aliviar o problema da coincidência cósmica. Nossa análise qualitativa indica que a evolução homogênea é muito semelhante para os três casos.

Como a constante cosmológica não apresenta flutuações, o estudo perturbativo dos modelos com campo escalar pode indicar diferenças entre esses modelos. Neste sentido, dado que no modelo com constante cosmológica modos de isocurvatura apenas podem ser gerados por perturbações de entropia entre a matéria e a radiação, o estudo destas perturbações nos modelos com campo escalar pode indicar quais são os modelos mais adequados. Para isso definimos as variáveis de interesse e discutimos em que circunstâncias os modos de isocurvatura podem ser gerados.

Dadas as soluções atratoras para a evolução de fundo dos campos, deduzimos soluções

atratoras a nível perturbativo em grandes escalas. Verificamos que para o campo de quintessência estas soluções não geram modos de isocurvatura, que é um resultado conhecido na literatura. Para o campo de Born-Infeld, fizemos uma análise detalhada das perturbações de entropia e mostramos que podemos ter modos de isocurvatura.

Contudo, para modelos de energia escura com o campo de Born-Infeld, os modos de isocurvatura tendem a ser desprezíveis. Mostramos que isso ocorre pois os valores da potência do potencial do campo que melhor descrevem as características homogêneas da energia escura tornam os modos de isocurvatura menos importantes.

Apesar de não haver muita diferença entre os modelos de campo escalar no que diz respeito aos modos de isocurvatura quando eles atuam como energia escura, mostramos que estes modos podem ser importantes quando o campo de Born-Infeld é designado a modelar a matéria escura. Este fato ocorre pois, ao contrário do que acontece nos modelos para energia escura, os valores da potência do potencial do campo de Born-Infeld que geram modos de isocurvatura, basicamente para $2 > \alpha > 1,5$, também podem modelar a matéria escura. Contudo, nestes casos, a evolução das perturbações para o campo depende das condições iniciais e, conforme aumentamos α, elas tendem a crescer indefinidamente, afetando fortemente o potencial newtoniano e tornando estes modelos não realistas.

Na medida que os modos de isocurvatura afetam as anisotropias da RCF, é possível verificar se o campo de Born-Infeld como matéria escura, apesar das instabilidades apresentadas, ainda pode ser considerado para esse fim. Como mostramos, para valores de α pouco maiores que $1,5$ as instabilidades ainda são pequenas, contundo geram modos de isocurvatura. Esse aspecto certamente demanda mais estudo.

Referências Bibliográficas

[1] A. Einstein, Annalen Phys. **49**, 769 (1916).

[2] A. Einstein, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1**, 142 (1917).

[3] W. de Sitter, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet **19**, 1217 (1917).

[4] Friedmann, Z. Phys. **10**, 377 (1922).

[5] H. P. Robertson, Ap. J. **82**, 284 (1935).

[6] A. G. Walker, Proc. Lond. Math. Soc. **42**, 90 (1936).

[7] L. Page *et al.*, Astrophys. J. Suppl. **148**, 233 (2003), astro-ph/0302220.

[8] G. Lemaître, Ann. Soc. Sci. Bruxelles **A47**, 49 (1927).

[9] E. Hubble, Proceedings of the National Academy of Sciences **15** (1929).

[10] W. L. Freedman *et al.*, Astrophys. J. **553**, 47 (2001), astro-ph/0012376.

[11] WMAP, D. N. Spergel *et al.*, Astrophys. J. Suppl. **148**, 175 (2003), astro-ph/0302209.

[12] A. A. Penzias and R. W. Wilson, Astrophys. J. **142**, 419 (1965).

[13] H. B. R. Alpher and G. Gamow, Phys. Rev. **73**, 803 (1948).

[14] R. A. Alpher and R. Herman, Nature **162**, 774 (1948).

[15] E. W. Kolb and M. S. Turner, The Early Universe (Addison-Wesley Publishing Company, 1990).

[16] S. Burles, K. M. Nollett, J. N. Truran, and M. S. Turner, Phys. Rev. Lett. **82**, 4176 (1999), astro-ph/9901157.

[17] J. C. Mather *et al.*, Astrophys. J. **420**, 439 (1994).

[18] W. M. A. Probe, http://map.gsfc.nasa.gov/ .

[19] C. L. Bennett *et al.*, Astrophys. J. Suppl. **148**, 1 (2003), astro-ph/0302207.

[20] F. Zwicky, Helv. Phys. Acta **6**, 110 (1933).

[21] D. W. Sciama, Modern Cosmology and the Dark Matter Problem (Cambridge University Press, 1993).

[22] V. R. Eke, J. F. Navarro, and C. S. Frenk, Astrophys. J. **503**, 569 (1998), astro-ph/9708070.

[23] S. D. M. White, J. F. Navarro, A. E. Evrard, and C. S. Frenk, Nature **366**, 429 (1993).

[24] 2dF Galaxy Redshift Survey, http://www.mso.anu.edu.au/2dFGRS/ .

[25] S. D. S. Survey, http://www.sdss.org .

[26] The 2dFGRS, W. J. Percival *et al.*, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **327**, 1297 (2001), astro-ph/0105252.

[27] SDSS, S. Dodelson *et al.*, Astrophys. J. **572**, 140 (2001), astro-ph/0107421.

[28] S. W. Allen, R. W. Schmidt, H. Ebeling, A. C. Fabian, and L. van Speybroeck, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **353**, 457 (2004), astro-ph/0405340.

[29] Supernova Search Team, A. G. Riess *et al.*, Astron. J. **116**, 1009 (1998), astro-ph/9805201.

[30] Supernova Cosmology Project, S. Perlmutter *et al.*, Astrophys. J. **517**, 565 (1999), astro-ph/9812133.

[31] Supernova Search Team, A. G. Riess *et al.*, Astrophys. J. **607**, 665 (2004), astro-ph/0402512.

[32] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. **61**, 1 (1989).

[33] S. M. Carroll, Living Rev. Rel. **4**, 1 (2001), astro-ph/0004075.

[34] J. C. Carvalho, J. A. S. Lima, and I. Waga, Phys. Rev. **D46**, 2404 (1992).

[35] A. Y. Kamenshchik, U. Moschella, and V. Pasquier, Phys. Lett. **B511**, 265 (2001), gr-qc/0103004.

[36] M. C. Bento, O. Bertolami, and A. A. Sen, Phys. Rev. **D66**, 043507 (2002), gr-qc/0202064.

[37] N. Bilic, G. B. Tupper, and R. D. Viollier, Phys. Lett. **B535**, 17 (2002), astro-ph/0111325.

[38] P. J. E. Peebles and B. Ratra, Astrophys. J. **325**, L17 (1988).

[39] B. Ratra and P. J. E. Peebles, Phys. Rev. **D37**, 3406 (1988).

[40] C. Wetterich, Nucl. Phys. **B302**, 668 (1988).

[41] P. Brax, J. Martin, and A. Riazuelo, Phys. Rev. **D62**, 103505 (2000), astro-ph/0005428.

[42] J. A. Frieman, C. T. Hill, A. Stebbins, and I. Waga, Phys. Rev. Lett. **75**, 2077 (1995), astro-ph/9505060.

[43] R. R. Caldwell, R. Dave, and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **80**, 1582 (1998), astro-ph/9708069.

[44] I. Zlatev, L.-M. Wang, and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **82**, 896 (1999), astro-ph/9807002.

[45] P. J. Steinhardt, L.-M. Wang, and I. Zlatev, Phys. Rev. **D59**, 123504 (1999), astro-ph/9812313.

[46] P. G. Ferreira and M. Joyce, Phys. Rev. Lett. **79**, 4740 (1997), astro-ph/9707286.

[47] E. J. Copeland, A. R. Liddle, and D. Wands, Phys. Rev. **D57**, 4686 (1998), gr-qc/9711068.

[48] T. Padmanabhan, Phys. Rev. **D66**, 021301 (2002), hep-th/0204150.

[49] J. S. Bagla, H. K. Jassal, and T. Padmanabhan, Phys. Rev. **D67**, 063504 (2003), astro-ph/0212198.

[50] A. Sen, JHEP **04**, 048 (2002), hep-th/0203211.

[51] A. Sen, Mod. Phys. Lett. **A17**, 1797 (2002), hep-th/0204143.

[52] L. R. W. Abramo and F. Finelli, Phys. Lett. **B575**, 165 (2003), astro-ph/0307208.

[53] A. Feinstein, Phys. Rev. **D66**, 063511 (2002), hep-th/0204140.

[54] S. W. Hawking, Astrophys. J. **145**, 544 (1966).

[55] D. W. Olson, Phys. Rev. **D14**, 327 (1976).

[56] J. M. Bardeen, Phys. Rev. **D22**, 1882 (1980).

[57] H. Kodama and M. Sasaki, Prog. Theor. Phys. Suppl. **78**, 1 (1984).

[58] V. F. Mukhanov, H. A. Feldman, and R. H. Brandenberger, Phys. Rept. **215**, 203 (1992).

[59] C.-P. Ma and E. Bertschinger, Astrophys. J. **455**, 7 (1995), astro-ph/9506072.

[60] D. Wands, K. A. Malik, D. H. Lyth, and A. R. Liddle, Phys. Rev. **D62**, 043527 (2000), astro-ph/0003278.

[61] K. A. Malik, D. Wands, and C. Ungarelli, Phys. Rev. **D67**, 063516 (2003), astro-ph/0211602.

[62] S. Gupta, K. A. Malik, and D. Wands, Phys. Rev. **D69**, 063513 (2004), astro-ph/0311562.

[63] J. M. Bardeen, P. J. Steinhardt, and M. S. Turner, Phys. Rev. **D28**, 679 (1983).

[64] D. H. Lyth, Phys. Rev. **D31**, 1792 (1985).

[65] SDSS, R. Scranton *et al.*, (2003), astro-ph/0307335.

[66] P. T. P. Viana and A. R. Liddle, Phys. Rev. **D57**, 674 (1998), astro-ph/9708247.

[67] P. G. Ferreira and M. Joyce, Phys. Rev. **D58**, 023503 (1998), astro-ph/9711102.

[68] K. Benabed and F. Bernardeau, Phys. Rev. **D64**, 083501 (2001), astro-ph/0104371.

[69] L. R. W. Abramo and F. Finelli, Phys. Rev. **D64**, 083513 (2001), astro-ph/0101014.

[70] M. Malquarti and A. R. Liddle, Phys. Rev. **D66**, 123506 (2002), astro-ph/0208562.

[71] N. Bartolo, P. S. Corasaniti, A. R. Liddle, and M. Malquarti, Phys. Rev. **D70**, 043532 (2004), astro-ph/0311503.

[72] S. DeDeo, R. R. Caldwell, and P. J. Steinhardt, Phys. Rev. **D67**, 103509 (2003), astro-ph/0301284.

[73] L. R. Abramo, F. Finelli, and T. S. Pereira, (2004), astro-ph/0405041.

[74] C. Gordon and W. Hu, Phys. Rev. **D70**, 083003 (2004), astro-ph/0406496.

[75] T. S. Pereira, Dissertação de mestrado - IFUSP (2004).

INSTITUTO DE FÍSICA
Serviço de Biblioteca e Informação
Tombo: 4318