Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Simulação de reações núcleo–núcleo entre 30 e 1000 A MeV com o código CRISP

RAMÓN PÉREZ VARONA

Orientador: Prof. Dr. Airton Deppman

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO APRESENTADA
AO INSTITUTO DE FÍSICA PARA A OBTEN-
ÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM CIÊNCIAS.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Airton Deppman (IF/USP)

Profa. Dra. Liria Matsumoto Sato (EP/USP)

Prof. Dr. Sérgio José Barbosa Duarte (CBPF)

São Paulo
2017

FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Pérez Varona, Ramón

Simulação de reações núcleo-núcleo entre 30 e 1000 A MeV com o código CRISP.

São Paulo, 2017.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo.

Instituto de Física. Departamento de Física Experimental.

Orientador: Prof. Dr. Airton Deppman

Área de Concentração: Física.

Unitermos:

1. Física nuclear;
2. Física de partículas;
3. Reações nucleares;
4. Simulação.

USP/IF/SBI-111/2017

University of São Paulo
Institute of Physics

**Simulation of nucleus – nucleus reactions between
30 and 1000 A MeV with the CRISP code.**

RAMÓN PÉREZ VARONA

Supervisor: Prof. Dr. Airton Deppman

MASTER DISSERTATION SUBMITTED TO THE INS-
TITUTE OF PHYSICS OF THE UNIVERSITY OF SÃO
PAULO FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE

Approved by:

Prof. Dr. Airton Deppman (IF/USP)

Profa. Dra. Liria Matsumoto Sato (EP/USP)

Prof. Dr. Sérgio José Barbosa Duarte (CBPF)

São Paulo

2017

AGRADECIMENTOS

Quero agradecer a minha família que me incentivou a crescer academicamente. Aos meus amigos, por entender quando eu estava na nuvem. Ao meu orientador Airton Deppman pelo suporte, pelas correções e incentivos. Ao CNPq pelo auxílio de bolsa de estudos, sem o qual seria difícil terminar a dissertação. Enfim, agradeço a todos as pessoas que fizeram parte dessa etapa decisiva em minha vida.

RESUMO

Neste trabalho são implementadas as reações nucleares de tipo núcleo–núcleo no código CRISP. Os núcleos são considerados esféricos com os níveis de energia calculados seguindo o modelo de gás de Fermi. A trajetória deles é determinada classicamente considerando o potencial coulombiano até que ocorra a interação nuclear quando é iniciada a cascata intranuclear. Para os núcleons do projétil são executados dois tipos de eventos: a reflexão deles na parede nuclear e a entrada deles ao alvo. É estudada a importância das colisões periféricas entre núcleons do projétil com as partículas do alvo e obtidas as seções de choque total da reação, as seções de choque duplas diferenciais para a emissão de prótons e nêutrons e as seções de choque total dos fragmentos de espalação. De forma geral foi obtido um melhor desempenho do modelo para os sistemas de menor massa total e energia de excitação.

Palavras chaves: Física nuclear, Física de partículas, Reações nucleares, Simulação.

ABSTRACT

Within this work, a Nuclei-Nuclei reaction model was developed and implemented in CRISP code. The nuclei are considered spheric with energy level following a Fermi gas model. The incident nuclei trajectory is determined using classical mechanics considering Coulomb scattering. The individual nucleons of the projectile nuclei are followed during the approximation trajectory; once they reach the target nuclei surface two processes are allowed: a reflexion in the target nuclear surface or they can pass through it and interact with one of the nucleons of the target, in which case the intranuclear cascade phase is initiated.

Using CRISP code was studied the importance of peripheral coalition between both nuclei (target and beam). Total reaction cross section, the double differential cross section from proton and neutron emission, spallation reaction fragments cross section, fission residual mass cross section was studied for different cases; showing better results for systems with less rest mass and less excitation energy.

Keywords: Nuclear Physic, Particle Physic, Nuclear Reactions, Simulation.

LISTA DE FIGURAS

- 2.1 Geometria usada para a simulação das reações próton–núcleo. A origem de coordenadas é tomada no centro do alvo de forma tal que o movimento do próton incidente seja na direção positiva do eixo z 15
- 2.2 Diagrama de blocos representativo da cascata intranuclear no núcleo alvo. 21
- 2.3 Diagrama de blocos representativo da implementação do MCEF no CRISP. Em cada iteração, sempre que a excitação seja maior que a energia de ligação do nêutron ou que a barreira de fissão é sorteada a possibilidade de emissão de um próton, nêutron ou partícula alfa ou de fissão nuclear a partir das probabilidades relativas P_p , P_n , P_α e P_f dadas na equação 2.53 [Weisskopf, 1937], [Vandebosch and Huizenga, 1973]. No caso de alguma emissão a energia cinética da partícula emitida é sorteada pela função densidade de probabilidade 2.55 [Weisskopf, 1937]. 25
- 2.4 Geometria usada para a implementação das reações núcleo–núcleo. A origem de coordenadas é tomada no centro do alvo de forma tal que o movimento do núcleo incidente seja na direção positiva do eixo z 29
- 2.5 Sistema de coordenadas relativas usado para a determinação do ponto de contato inicial entre os núcleos. $\vec{r}$ é o vetor posição relativa e φ o ângulo entre ele e o eixo z 30

- 2.6 Esquerda: Representação esquemática das reações núcleo–núcleo, o volume de cálculo para a cascata intranuclear é $R + dr$ para levar em conta as iterações binárias dos núcleons incidentes que não fazem contato com a superfície do alvo. Direita: Corte transversal do plano xy, todas as interações binárias iniciadas por os núcleons projeteis acontecem dentro do parâmetro de impacto r_α , portanto, todos os núcleons que fazem contato com o alvo na faixa circular de espessura $R + dr - r_\alpha$ continuam com sua trajetória e não aportam eventos para a seção de choque total da reação. 34
- 2.7 Seção de choque total para as reações de tipo nêutron–nêutron (n–n), próton–próton (p–p) e nêutron–próton (n–p) implementadas no CRISP. Observe-se como para as reações com energia maior que 100 A MeV, o parâmetro de empato fica por debaixo de 2 fm, o que justifica a eleição da espessura da parede geométrica do alvo $dr = 2$ fm. 35
- 2.8 Diagrama de blocos representativo da implementação das reações núcleo–núcleo no CRISP. 37
- 3.1 Seção de choque total para diferentes reações núcleo–núcleo. O parâmetro dr representa a espessura de mais além do raio nuclear considerada com o objetivo de favorecer as interações periféricas de núcleons incidentes que não fazem contato com a superfície real do alvo, mas tem possibilidade física de interagir com partículas perto do limite superficial. Os dados experimentais foram tomados de [Takechi et al., 2009] 39

- 3.2 Seção de choque total para a reação $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ núcleo–núcleo. O parâmetro dr representa a espessura de mais além do raio nuclear considerada com o objetivo de favorecer as interações periféricas de núcleons incidentes que não fazem contato com a superfície real do alvo, mas tem possibilidade física de interagir com partículas perto do limite superficial. Os dados experimentais foram tomados de [Takechi et al., 2009] 41
- 3.3 Representação esquemática de um núcleon com três possíveis direções 1, 2, 3 de incidência. Se P_1, P_2, P_3 têm o mesmo módulo, a probabilidade de reação com uma partícula do núcleo é proporcional à espessura do alvo a atravessar, portanto, o núcleon 2 tem a maior probabilidade de fazer contato geométrico com o alvo e atravessá-lo sem interagir com nenhuma partícula dele. 43
- 3.4 Energia cinética dos núcleons no referencial de laboratório em função do seu momento na direção z (sem levar em conta as outras componentes) no referencial do projétil que move-se com uma energia cinética T também na direção z para as reações $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ $T = 290$ A MeV e $^4\text{He} + ^{63}\text{Cu}$ $T = 230$ A MeV. 44
- 3.5 Seção de choque dupla diferencial para a reação $^4\text{He} + ^{63}\text{Cu}$ $E=230$ A MeV para diferentes ângulos de emissão de nêutrons $4^\circ(a)$, $9^\circ(b)$, $20^\circ(c)$, $30^\circ(d)$, $40^\circ(e)$, $60^\circ(f)$, $80^\circ(g)$ em relação ao sistema de laboratório. Os dados experimentais foram tomados de [Takechi et al., 2009] 45
- 3.6 Seção de choque dupla diferencial para a reação $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ $E=290$ A MeV para diferentes ângulos de emissão de nêutrons $5^\circ(a)$, $10^\circ(b)$, $20^\circ(c)$, $30^\circ(d)$, $40^\circ(e)$, $60^\circ(f)$, $80^\circ(g)$ em relação ao sistema de laboratório. Os dados experimentais foram tomados de [Takechi et al., 2009] 46

- 3.7 Seção de choque dupla diferencial para la produção de prótons a 30° , 50° , 70° , 90° , 110° , para a reação $^{20}\text{Ne} + ^{238}\text{U}$ 250A MeV e 400A MeV. Os dados experimentais foram tomados de [Poskanzer, 1978] 47
- 3.8 Seção de espalação para as reações $^{208}\text{Pb} + ^1\text{H}$ (a) 1000A MeV e $^{208}\text{Pb} + ^2\text{H}$ (b). Para o deutério foi comparada também com a versão do CRISP feita para o gerador deutério-núcleo. Os dados experimentais foram tomados de [Enqvist et al., 2001], [Kelić et al., 2004], [Enqvist et al., 2002] 49
- 3.9 Seção de choque total de fragmentação para as reações $^{86}\text{Kr} + ^9\text{Be}$ (a) 500A MeV e $^{58}\text{Ni} + ^9\text{Be}$ (b) 140 A MeV em função do número mássico dos fragmentos. Os dados experimentais foram tomados de [Weber et al., 1994], [Mocko et al., 2006]. 50
- 3.10 Distribuição isotópica para a reação $^{86}\text{Kr} + ^9\text{Be}$ 500A MeV na região $24 \leq Z \leq 27$. Os dados experimentais foram tomados de [Weber et al., 1994]. 50
- 3.11 Distribuição isotópica para a reação $^{86}\text{Kr} + ^9\text{Be}$ 500A MeV na região $28 \leq Z \leq 31$. Os dados experimentais foram tomados de [Weber et al., 1994]. 51
- 3.12 Distribuição isotópica para a reação $^{58}\text{Ni} + ^9\text{Be}$ 140A MeV na região $21 \leq Z \leq 24$. Os dados experimentais foram tomados de [Mocko et al., 2006]. 51
- 3.13 Distribuição isotópica para a reação $^{58}\text{Ni} + ^9\text{Be}$ 140A MeV na região $25 \leq Z \leq 28$. Os dados experimentais foram tomados de [Mocko et al., 2006]. 52
- 3.14 Seção de choque total de fissão para as diferentes aproximações testadas no CRISP para a reação $^7\text{Li} + ^{208}\text{Pb}$ com $E=35$ A MeV supondo que toda a energia de excitação do núcleo é utilizada para a excitação dos fragmentos de fissão. Os dados experimentais foram tomados de [Demekhina et al., 2013] 54

3.15	Energia cinética de diferentes fragmentos de fissão na reação ${}^7\text{Li} + {}^{208}\text{Pb}$ E=35 A MeV supondo que toda a energia de excitação do núcleo que atinge a excisão e utilizada para a excitação dos fragmentos de fissão. Os dados experimentais foram tomados de [Demekhina et al., 2013]	54
3.16	Teste de chi-quadrado comparando as diferentes distribuições de fragmentos na reação ${}^7\text{Li} + {}^{208}\text{Pb}$ E=35 A MeV calculadas com o CRISP em comparação com a teórica em função da porcentagem da energia de excitação do núcleo que atinge a excisão que é destinada à excitação dos fragmentos de fissão	55
3.17	Seção de choque total de fissão para as diferentes aproximações testadas no CRISP para a reação ${}^7\text{Li} + {}^{208}\text{Pb}$ E=35 A MeV supondo que a energia cinética dos fragmentos tem a função de distribuição de probabilidade 3.5. Os dados e o fit experimentais foram tomados de [Demekhina et al., 2013].	57
3.18	Energia cinética de diferentes fragmentos de fissão na reação ${}^7\text{Li} + {}^{208}\text{Pb}$ E=35 A MeV supondo que a energia cinética dos fragmentos tem a função de distribuição de probabilidade 3.5. Os dados experimentais foram tomados de [Demekhina et al., 2013].	57

LISTA DE TABELAS

- 2.1 Primeiros 24 números quânticos usados pelo CRISP para a distribuição do momento dos núcleons no núcleo. Para cada n de energia $n = 1, 2, 3 \dots$ os n_x, n_y, n_z são todas as combinações possíveis de inteiros não negativos que podam cumprir que $n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$, i representa a i -ésima partícula. 13
- 3.1 Energia e momento de Fermi para as diferentes aproximações testadas no CRISP. CRISP1 é a implementação estandar, CRISP2 é usando a fórmula 3.1, 3.2 e CRISP3 a fórmula 3.3. 53

ÍNDICE

	AGRADECIMENTOS	I
	RESUMO	II
	ABSTRACT	III
	LISTA DE FIGURAS	VIII
	LISTA DE TABELAS	IX
1	INTRODUÇÃO	1
2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS	9
	2.1 Fundamentos do código CRISP	9
	2.1.1 A cascata intranuclear	9
	2.1.1.1 Preparação do núcleo alvo	10
	2.1.1.2 Conceito de massa efetiva no CRISP	14
	2.1.1.3 Gerador de eventos	15
	2.1.1.4 Dinâmica da cascata intranuclear	18
	2.1.2 Modelo de desexcitação nuclear	22
	2.2 Reações núcleo–núcleo	28
	2.2.1 Condições iniciais e ponto de contato	29
	2.2.2 Transferência de núcleons do projétil ao alvo	32
	2.2.3 Colisões periféricas	33
	2.2.4 Cálculo da energia de excitação	36
	2.2.5 Dinâmica da cascata intranuclear para reações núcleo–núcleo	36
3	RESULTADOS E DISCUSSÕES	38
	3.1 Interação inicial	39

3.2 Seções de choque diferenciais duplas de emissão de partículas	41
3.3 Parábolas de espalação	48
3.4 Reação ${}^7\text{Li} + {}^{208}\text{Pb}$ 35 MeV por núcleon	52
CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS _____	59
BIBLIOGRAFIA _____	71

1 | INTRODUÇÃO

O método de Monte Carlo consiste na simulação de situações reais a partir da geração de números aleatórios, sempre que estas sejam constituídas por eventos para os quais podem ser definidas as suas probabilidades de que aconteçam e que exista uma convergência para as mesmas condições iniciais e um número grande de repetições. As reações nucleares apresentam um campo de estudo muito favorável para a aplicação das técnicas de Monte Carlo, existindo duas abordagens fundamentais para a sua simulação, a cascata intranuclear e a competição evaporação–fissão dependendo principalmente dos graus de liberdade envolvidos e à energia da reação. Neste trabalho trataremos as reações nucleares com energia do projétil $E > 30 \text{ MeV}$ por núcleon incidente onde os picos devidos às ressonâncias na seção de choque total estão muito perto entre eles e que ela aparece como uma linha contínua. Os casos a ser estudados são as reações de tipo próton–núcleo e núcleo–núcleo.

A primeira parte da reação é descrita através de uma cascata intranuclear, onde todas as constituintes do núcleo são tratados como partículas independentes, considerando os seus movimentos em linhas retas e as reações entre duas delas quando atingem distâncias relativas da ordem da interação das forças nucleares. Por enquanto a teoria que descreve essas reações podem ser muito sofisticadas matematicamente, na atualidade temos um grande número de trabalhos que oferecem fórmulas analíticas para as seções de reações totais e dos diferentes canais resultantes, podendo assim determinar as probabilidades de que elas aconteçam, tornando possível simular o meio nuclear a partir da simulação de reações entre duas partículas usando o método de Monte Carlo. Para fazer o anterior é preciso levar em

conta varias considerações, em primeiro lugar que o tempo de interação entre duas partículas é muito menor que o tempo entre duas colisões sucessivas, portanto, não pode haver duas colisões superpostas temporalmente. A outra consideração é que a distância de interação entre duas partículas é muito menor que o seu caminho livre médio, podendo considerar as interações binarias como independentes. Além da eleição do canal de interação, o Monte Carlo é usado para a distribuição dos núcleons no volume nuclear, e muitas vezes para a determinação do momento das partículas resultantes das interações binarias.

Quando acaba esta etapa, o núcleo atinge um estado de equilíbrio termodinâmico e pode ser descrito por variáveis macroscópicas, como a temperatura, a densidade de níveis. Tratando o núcleo como esférico, a partir de seus números de massa e atômico, sua energia de excitação e seu momento angular, pode-se obter uma boa descrição estatística do sistema podendo obter expressões para o cálculo das suas larguras de emissão de partículas e de fissão nuclear.

O primeiro a propor o estudo de reações nucleares de tipo próton–núcleo e nêutron–núcleo para altas energias da partícula incidente $T > 30 \text{ MeV}$ foi [Serber, 1947]. Daí, imediatamente muitos autores desenvolveram simulações da cascata intranuclear, mas com resultados muito influenciados pelas limitações computacionais [Goldberger, 1948], [Bernardini et al., 1952], [Morrison. et al., 1953], [Meadows, 1955] e [Ivanova and P'ianov, 1957]. Uns dos códigos mais avançados para a época foi o implementado por Metropolis [Metropolis et al., 1958b] [Metropolis et al., 1958a] que basicamente é uma compilação e aperfeiçoamento dos trabalhos feitos anteriormente, considerando também a evaporação de partículas, primeiramente implementados por [Meadows, 1955] e [Jackson, 1957].

As simulações feitas por [Metropolis et al., 1958b] atingem as energias do projétil até os 340 MeV onde a produção de píons pode ser descartada e portanto só levar em conta as colisões binarias elásticas. O núcleo é considerado esférico de raio $R = 1.3 A^{1/3} \text{ fm}$ e como um gás degenerado de Fermi para prótons e nêutrons. Como vantagens em relação a códigos anteriores é feito um tratamento tridimensional e relativístico da cinemática do problema. As seções de choque elásticas usadas

foram as seguintes:

$$\sigma_{pp} = \sigma_{nn} = \left(\frac{10.63}{\beta^2} - \frac{29.92}{\beta} + 42.9 \right) mb \quad (1.1)$$

e

$$\sigma_{np} = \left(\frac{34.10}{\beta^2} - \frac{82.2}{\beta} + 82.2 \right) mb \quad (1.2)$$

onde β é a velocidade do núcleon projétil em unidades de c . Para a distribuição angular das partículas espalhadas, no sistema centro de massas foi usado:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = K \left(A \cos^4 \theta + B \cos^3 \theta + 1 \right) \quad (1.3)$$

onde as constantes A e B dependiam do tipo de interação 1.1 e 1.2.

O princípio de exclusão de Pauli também foi considerado, de forma tal que uma interação é rejeitada se o número de nêutrons e prótons por debaixo do nível de Pauli resulta maior que o número deles ao início da cascata.

Em [Metropolis et al., 1958a] são simuladas reações na faixa $T = 340 - 1800$ MeV onde foram incluídos novos canais para pión: produção simples ou duplas, espalhamento, intercambio de carga e absorção. Também foram estudadas cascatas geradas por píons. Igualmente eles são seguidos até que sejam absorvidos ou escapem do núcleo. As suas seções totais foram tomadas em forma de tabela para as energias dos núcleons maiores que 340 MeV e dos píons maiores que 51 MeV de dados compilados por [Chen et al., 1956], [Johansson, 1955], [Morris et al., 1956], [Fowler et al., 1956], [Block et al., 1956], [Nedzel, 1954], [Coor et al., 1955], [Glauber, 1955], [Lindenbaum and Yuan, 1955], [Cool et al., 1956]. A absorção de píons foi explicada pelo mecanismo de dois núcleons, onde pelo menos tem que haver um núcleon com a projeção do spin isotópico com signo oposto ao pión incidente, por exemplo, o π^- é absorvido por um par próton-nêutron ou próton-próton e o π^+ por um par nêutron-nêutron ou próton-nêutron. O π_0 pode ser absorvido por dois núcleons quaisquer e a sua seção de choque total é uma média entre as seções de choque totais de absorção para π^+ e π^- . Para energias maiores que 51 MeV foram usadas as seguintes seções totais da reação [Anderson

et al., 1955], [Frank et al., 1956]:

$$\begin{aligned}\sigma_{ii} &= 3.7 + 286(\gamma - 1)^3 \\ \sigma_{ij} &= 6.5 + 23.9(\gamma - 1) \\ \sigma_{ij}^{abs} &= 16.4(0.14 + \eta^2)/\eta\end{aligned}\tag{1.4}$$

onde γ é a energia total do pión e η é o seu momento, σ_{ii} é a seção de choque total para $\pi^- - n$ e $\pi^+ - p$, σ_{ij} para $\pi^- - p$ e $\pi^+ - n$ e σ_{ij}^{abs} é a seção total de absorção.

As simulações anteriores foram um grande ponto de avanço para a época, e além das limitações no poder de cálculo existentes, foi capaz de reproduzir com muita precisão observáveis como a multiplicidade, a distribuição angular na emissão de partículas e as funções de excitação.

Outro trabalho importante da época foi [Bertini, 1963], onde foram usadas interpolações dos dados experimentais para as seções totais das reações binárias [Hughes and Schwartz,], [Beretta and Ferrari, 1954], [Orear, 1955].

Na década de setenta apareceram trabalhos onde foram incluídos núcleos como projeteis e formação de ressonâncias bariônicas, como o código CASCADE [Barashenkov et al., 1973] e o ISABEL (INC) [Yariv and Fraenkel, 1979], [Yariv and Fraenkel, 1981]. Neste modelo, o núcleo continua sendo considerado como um gás de Fermi. Em [Yariv and Fraenkel, 1979] os píons são produzidos pelas seguintes reações:

Eles dividem as partículas em dois tipos, partículas no mar de Fermi, aquelas que ficam abaixo do nível de Fermi e partículas da cascata, as que tomam níveis superiores. Nas reações núcleo-núcleo eram consideradas as interações entre todas as partículas do projétil com as do alvo e entre as da cascata do alvo com as do mar de Fermi do projétil e ignoram as interações entre partículas do mesmo mar de Fermi e entre as partículas das cascatas entre elas. O [Yariv and Fraenkel, 1981] inclui as interações das partículas da cascata. Até este ponto, só era seguido o estado físico

(posição–momento–energia) das partículas que pelo menos interagem uma vez, introduzindo discrepâncias com os resultados experimentais.

A partir do final dos anos oitenta, uma nova era na simulação da cascata intranuclear se inicia, com o desenvolvimento em aumento do poder de cálculo dos computadores que permitiram tratar o problema desde uma abordagem multicolisional onde foi possível em cada momento determinar el estado de cada partícula [Cugnon, 1987], [Cugnon et al., 1997a], [Boudard et al., 2002], como por exemplo o Standard Liège Intranuclear Cascade (INCL2) apresentado para as colisões núcleon–núcleo [Cugnon, 1987], [Cugnon and Lemaire, 1988], [Pienkowski et al., 1994]. Ele tem os seguintes aspectos fundamentais:

- As trajetórias das partículas são tomadas em linha reta, quando duas delas atingem a sua distancia relativa minima d_{min} , se $d_{min} < \sqrt{\sigma_t/\pi}$, onde σ_t é a seção de choque total para a reação binaria, então elas são obrigadas a interagir.
- O estado final das interações binarias é sorteado a partir das seções de choque diferenciais experimentais [Cugnon et al., 1981].
- São considerados núcleons, píons e ressonâncias e as seções de choques totais tomadas de [Cugnon et al., 1996], [Chew, 1958], [Northcliffe et al., 1993].
- O momento de Fermi é $P_f = 250 \text{ MeV}/c$ e o potencial nuclear tem uma profundidade constante $V_0 = 40 \text{ MeV}$
- O bloqueio de Pauli é verificado da seguinte forma: para o caso de dois núcleons resultantes n_1 e n_2 , é tomada uma esfera de raio $\Delta r = 2 \text{ fm}$ nas dimensões espaciais e uma de $\Delta p = 200 \text{ MeV}/c$ nas dimensões dos momentos, contados o número de núcleons f_1 e f_2 dentro de $d\Omega_{1,2} = \frac{16}{9}\pi^2(\Delta r)^3(\Delta p)^3$ centradas em n_1 e n_2 respectivamente. A probabilidade de ocupação desse estado é definida como:

$$P_{12} = (1 - f_1)(1 - f_2) \quad (1.6)$$

Portanto, ao final de cada colisão binária é tomada essa probabilidade e sorteado se o estado é bloqueado ou não.

- É levada em conta a reflexão das partículas na parede nuclear e a sua penetração por efeito túnel para partículas carregadas.
- A cascata é processada um tempo t_{max} é se ao final existem ressonâncias elas são obrigadas a decair.

Na descrição anterior o ponto mais fraco resultou ser o mecanismo de bloqueio de Pauli, que ao estar definido a partir de probabilidades de ocupação, introduz também a probabilidade de que os núcleons mais perto do níveis de Fermi diminuam sua energia, dando lugar a uma contração da esfera de Fermi e por tanto a aparição de uma energia de excitação negativa ao final da cascata. Também tem problema com a estabilidade do núcleo, que estando inicialmente em seu estado fundamental tem uma possibilidade real de transferência de energia entre colisões binárias podendo inclusive emitir alguns deles. O INCL3 tem variações em relação ao anterior nesse aspecto, agora as colisões só são consideradas se os dois núcleons resultantes ficam acima do nível de Pauli [[J. Cugnon and P. Henrotte, 2003](#)], [[Cugnon et al., 1997b](#)]. Nesta versão a cascata é finalizada além do critério temporal se a energia de excitação tende a zero.

Na versão INCL++ [[Mancusi et al., 2014](#)] são incluídas as reações induzidas por íons pequenos, quando o número de massa do projétil é menor que 18. As considerações físicas basicamente são as mesmas que o INCL3, mas com muitas melhorias respeito aos códigos anteriores [[Yariv and Fraenkel, 1979](#)], [[Yariv and Fraenkel, 1981](#)]. Só são levadas em conta transferência de núcleons na direção projétil–alvo, mas levando em conta as variações do projétil durante a cascata para a determinação da sua energia de excitação. A transformação dos momentos e energias dos núcleons ao passar do sistema do projétil ao de laboratório é feita seguindo as equações de Lorentz.

Um aspecto importante do INCL++ é a introdução do modelo de fusão para baixas energias, onde a energia por núcleon do projétil é menor que a energia de Pauli no

alvo, onde pelo princípio de exclusão de Pauli essas reações estariam proibidas o qual não acontece nas evidências experimentais. Se um núcleon satisfaz a condição anterior, não é processada a cascata intranuclear e o problema é reduzido a determinar quais núcleons do projétil faz contato com a esfera do alvo $R_{int} = R_0 + d_{int}$ onde $d_{int} = (\max(\sigma_{pp}, \sigma_{nn}, \sigma_{pn})/\pi)^{1/2}$.

O código CRISP (Colaboração Rio–Ilhéus–São Paulo) [Deppman et al., 2004] foi desenvolvido também para o estudo das reações nucleares e igualmente que os exemplos explicados anteriormente segue os mesmos princípios físicos fundamentais, como por exemplo a consideração de uma fase rápida com uma abordagem multicolisional feita no módulo MCMC (Multicolisional Monte Carlo) basicamente muito parecido aos códigos INCL. O que faz do CRISP um código diferente são os seguintes aspectos:

- E introduzido o conceito de massa efetiva das partículas o qual numericamente faz muito mais fácil o tratamento quadridimensional da energia–momento delas durante toda a cascata intranuclear.
- Um mecanismo de bloqueio de Pauli realista, dividendo o núcleo em camadas de momentos e definindo um número de ocupação para cada camada.
- Critérios de parada da cascata intranuclear livre de parâmetros, dependente só do número de núcleons com energia para escapar do núcleo e a quantidade de mésons e ressonâncias. Foi incorporado um critério de parada temporal $t_{max} = 2000 \text{ zs}$ para os casos em que tenham mésons e ressonâncias que não possam decair ou ser absorvidos devido à exclusão de Pauli.

Além das reações induzidas por prótons [Pereira et al., 2008], [Andrade-II, E et al., 2012], [Andrade-II et al., 2011], [Deppman et al., 2013] foram incluídas as de tipo fóton–núcleo [Deppman et al., 2002], [Deppman et al., 2006], [Deppman et al., 2004], elétron–núcleo [Likhachev et al., 2003b], [Likhachev et al., 2003a] mas sempre iniciando a cascata a partir de uma partícula incidente. Levando em conta a possibilidade real da simulação das reações de tipo núcleo–núcleo a partir do abor-

dagem multicolisional exposto anteriormente [Yariv and Fraenkel, 1979], [Yariv and Fraenkel, 1981], [Mancusi et al., 2014] o trabalho a seguir tem como objetivo geral fazer a implementação das reações núcleo–núcleo no código CRISP, e como objetivos específicos:

- Fazer um estudo das reações de tipo próton–núcleo já implementadas no CRISP para uma familiarização com a programação do código.
- Implementar os canais de entrada da cascata intranuclear para núcleons incidentes, a partir de uma abordagem completamente microscópica.
- Obter comparações experimentais de observáveis que sejam relacionados diretamente com a cascata intranuclear
- Fazer simulações da evaporação e da multi–fragmentação nuclear após a cascata intranuclear, analisando possíveis discrepâncias com dados experimentais.

2 | FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 Fundamentos do código CRISP

O CRISP é um código computacional escrito em C++ para a simulação de reações nucleares usando o método de Monte Carlo. O código tem duas etapas fundamentais, a cascata intranuclear como mecanismo inicial da reação e a competição evaporação–fissão como parte da desexcitação do núcleo. Para a implementação das reações núcleo–núcleo é muito importante o estudo e entendimento das reações partícula–núcleo já implementadas em versões anteriores do CRISP, por isso, na primeira parte deste capítulo são explicados os fundamentos físicos das reações de tipo próton–núcleo no código CRISP e posteriormente é detalhado como foi feita a implementação das reações núcleo–núcleo.

2.1.1 A cascata intranuclear

A cascata intranuclear é a primeira etapa do CRISP e consiste na simulação da parte inicial das reações nucleares a partir de uma abordagem de partículas independentes, levando em conta as colisões binárias entre elas. Até o momento do início desta investigação as reações simuladas eram de tipo partícula–núcleo (próton–núcleo, fóton–núcleo), começando quando a partícula incidente entra no núcleo alvo e aí, interage com algum núcleon.

A implementação computacional da cascata tem os seguintes passos fundamentais, os quais serão explicados a seguir:

- Preparação do núcleo alvo

- Gerador de eventos
- Cascada intranuclear

2.1.1.1 Preparação do núcleo alvo

O núcleo alvo é considerado como um conjunto de prótons e nêutrons num potencial nuclear. Com o objetivo de evitar complicações numéricas excessivas, é utilizado um potencial cúbico de profundidade $V_0 + B$, onde V_0 é a energia de Fermi e B a energia de separação média por núcleon $\approx 8MeV$, mas para a construção dos diferentes níveis energéticos o potencial é considerado como cúbico infinito.

Seja o seguinte poço de potencial e um núcleon de massa m ligado a ele:

$$U(x, y, z) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \geq x \geq a \\ 0 & \text{se } 0 \geq y \geq a \\ 0 & \text{se } 0 \geq z \geq a \\ \infty & \text{para os outros casos} \end{cases} \quad (2.1)$$

A solução de Schrödinger para esse potencial é:

$$\Psi(x, y, z) = C \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z) \quad (2.2)$$

onde

$$k_{x,y,z} = \frac{n_{x,y,z} \pi}{a} \quad (2.3)$$

$n_{x,y,z} = 0, 1, 2, \dots$ e C é uma constante de normalização. $n_{x,y,z}$ não podem ser zero ao mesmo tempo.

Os autovalores de energia ficam então:

$$E_{m_x, m_y, m_z} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m\Omega^{2/3}} n^2 \quad (2.4)$$

onde os três números quânticos n_x, n_y, n_z ficam com a seguinte restrição $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = n^2$ com n inteiro positivo e $\Omega = a^3$ é o volume do cubo.

Para n grande, o número N de conjuntos de pontos que cumprem a condição anterior pode aproximar-se ao volume do octante de uma esfera de radio n :

$$N = 2 \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi n^3 \quad (2.5)$$

O fator 2 aparece como consequência do spin, onde cada conjunto de números quânticos pode aparecer duas vezes.

Para um gás de Fermi de N núcleons, usando a equação anterior o maior número quântico de energia é:

$$n_{max} = \left(\frac{3N}{\pi} \right)^{1/3} \quad (2.6)$$

e a energia para esse nível:

$$E_f = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m \Omega^{2/3}} n_{max}^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3N\pi^2}{\Omega} \right)^{2/3} \quad (2.7)$$

Agora para o caso concreto de um núcleo esférico podemos fazer $\Omega = \frac{4}{3}\pi R^3$, onde $R = r_0 A^{1/3}$ é o radio do núcleo. Então a energia de Fermi E_F é:

$$E_f = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \left(\frac{N}{A} \right)^{2/3} \quad (2.8)$$

Depois de calculados os níveis energéticos pelo potencial quadrado infinito, todas as transformações cinemáticas são feitas para dois fluidos de Fermi independentes, um para Z prótons e outro para $A - Z$ nêutrons submetidos ao seguinte potencial esférico de raio $R = r_0 A^{1/3}$:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{se } r \geq R \\ 0 & \text{se } r > R \quad \text{para nêutrons} \\ V_c & \text{se } r > R \quad \text{para prótons} \end{cases} \quad (2.9)$$

A profundidade do poço será $V_0 = E_f + B$ onde $B = 8MeV$ é a energia de separação média por núcleon. A barreira de Coulomb V_c é :

$$V_c = \frac{e^2(Z-1)}{R} \quad (2.10)$$

onde $r_{max} = r_0 A^{1/3}$ e $e^2 = 1.44MeV/fm$

A energia de Fermi é calculada pela equação 2.9 e daí o momento de Fermi correspondente:

$$E_{fn} = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \left(\frac{A-Z}{A} \right)^{2/3} \quad (2.11)$$

$$E_{fp} = \frac{\hbar^2}{2mr_0^2} \left(\frac{9\pi}{4} \right)^{2/3} \left(\frac{Z}{A} \right)^{2/3} \quad (2.12)$$

$$P_f = \sqrt{E_f^2 + 2mE_f} \quad (2.13)$$

Para a construção dos diferentes níveis de ocupação são tomados os números quânticos n_x, n_y, n_z, n da equação da energia 2.4. O número de ocupação de cada nível n é definido pelo número de combinações de números quânticos que cumprem com a condição: $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = n^2$, multiplicado por 2 devido ao spin. Para a distribuição dos momentos de cada núcleon, é considerado que o núcleo é formado por camadas de momentos de igual espessura, a qual depende do momento de Fermi e do número de camadas a ser usadas para o estado fundamental:

$$\Delta p_n = \frac{P_{fn}}{N_n} \quad \Delta p_p = \frac{P_{fp}}{N_p} \quad (2.14)$$

O CRISP tem um arranjo de vetores de números quânticos $\vec{n}_i = (n_{xi}, n_{yi}, n_{zi})$ que sempre é inicializado para 250 elementos. Por exemplo, os primeiros 24 elementos que correspondem aos estados $N \leq 3$ ficam como é apresentado na tabela 2.1.

i	n	n_x	n_y	n_z	i	n	n_x	n_y	n_z
1, 2	1	0	0	1	13, 14	3	0	0	3
3, 4	1	0	1	0	15, 16	3	0	3	0
5, 6	1	1	0	0	17, 18	3	3	0	0
7, 8	2	0	0	2	19, 20	3	2	2	1
9, 10	2	0	2	0	21, 22	3	2	1	2
11, 12	2	2	0	0	23, 24	3	1	2	2

Tabela 2.1: Primeiros 24 números quânticos usados pelo CRISP para a distribuição do momento dos núcleons no núcleo. Para cada n de energia $n = 1, 2, 3, \dots$ os n_x, n_y, n_z são todas as combinações possíveis de inteiros não negativos que podam cumprir que $n^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$, i representa a i -ésima partícula.

Para n núcleons são atribuídos os primeiros n vetores o qual faz possível o conhecimento do número quântico n e calcular Δp pela fórmula 2.14, então o núcleon i assume o momento:

$$\vec{p}_i = \Delta p \vec{n}_i \quad (2.15)$$

Geometricamente os núcleons são distribuídos uniformemente numa esfera de raio $R = r_0 A^{1/3}$. Para fazer isso a partir de uma distribuição uniforme s na faixa $[0, 1]$, em coordenadas esféricas (r, ϕ, θ) , as diferentes componentes sorteiam-se assim:

$$\begin{aligned} \phi &\longrightarrow 2\pi s \\ \cos\theta &\longrightarrow 1 - 2s \\ r &\longrightarrow R s^{1/3} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Outros modelos da cascata intranuclear estudados [Mancusi et al., 2014] usam a distribuição de Woods–Saxon para os núcleos iniciais:

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp((r - R)/a)} \quad (2.17)$$

$$a = 1.26 \text{ fm} \quad (2.18)$$

Nós estudaremos a influência das distribuições uniforme e de Woods–Saxon na seções de choque total das reações de tipo núcleo–núcleo.

2.1.1.2 Conceito de massa efetiva no CRISP

Para os núcleons ligados, a energia total é:

$$H = T + V = \sqrt{p^2 + m^2} - V_0 \quad (2.19)$$

a qual pode ser expressa na forma:

$$H = \sqrt{p^2 + m_{eff}^2} = \sqrt{p^2 + m^2} - V_0 \quad (2.20)$$

tratando o sistema como um conjunto de partículas que não estão submetidas a nenhum potencial com uma massa efetiva m_{eff} , isso é muito melhor numericamente na hora de fazer as simulações porque não vai ser preciso trabalhar mais com o potencial V_0 . Desta forma a massa efetiva é:

$$m_{eff}(p) = \sqrt{m^2 + V_0^2 - 2V_0\sqrt{p^2 + m^2}} \quad (2.21)$$

A solução anterior não é muito prática computacionalmente, portanto é pegado o valor médio da massa efetiva para o ^{208}Pb $\langle m_{eff} \rangle = 0.950m_0$ [Canal et al., 1984].

Fazendo um diagrama de energia total temos dois poços quadrados um para prótons e outro para nêutrons, onde a parte inferior está a uma altura m_{eff} do zero de energia, essa altura não é mesma para os dois conjuntos de partículas, o que faz que para o mesmo núcleo, os níveis de Fermi para prótons e nêutrons não tenham a mesma altura.

Considerando que a energia de enlace dos núcleons é a mesma para prótons e nêutrons ($\approx 8\text{MeV}$), a condição de que a energia total destes sejam iguais na parte

superior do poço de potencial converte-se na condição de que as energias totais para os níveis de Fermi sejam iguais, por tanto, para o momento dos prótons é preciso fazer uma re-normalização que depende da diferença $\Delta = k_F^n - k_F^p$:

$$\vec{p}' = \frac{\Delta}{p} \vec{p} \quad (2.22)$$

2.1.1.3 Gerador de eventos

A seguir será explicado o gerador de eventos para prótons do código CRISP, já que é a base para a implementação das reações de tipo núcleo–núcleo.

Figura 2.1: Geometria usada para a simulação das reações próton–núcleo. A origem de coordenadas é tomada no centro do alvo de forma tal que o movimento do próton incidente seja na direção positiva do eixo z .

O problema consiste em um próton com energia cinética T que é lançado contra um núcleo construído como foi explicado no epígrafe anterior. O referencial é assumido de forma tal que o eixo z tem a direção do movimento do projétil (figura 2.1) e o alvo representa uma esfera de radio R centrada no sistema de referencial. O próton tem a seguinte energia total:

$$E = T + m_0 = \sqrt{p^2 + m_0^2} \quad (2.23)$$

onde m_0 é a massa em repouso do próton. O momento do próton é:

$$\vec{p} = \sqrt{(T + m_0)^2 - m_0^2} \hat{i} \quad (2.24)$$

Quando o núcleon entra no núcleo, tem a mesma energia mas o momento muda devido ao poço de potencial:

$$E = \sqrt{p^2 + m_0^2} = \sqrt{p'^2 + m_{eff}^2} \quad (2.25)$$

Então:

$$p' = \sqrt{p^2 + m_0^2 - m_{eff}^2} \quad (2.26)$$

e

$$\vec{p}' = p' \hat{i} \quad (2.27)$$

As coordenadas do ponto de entrada do próton na superfície nuclear é sorteada assim:

- As componentes x, y no plano transversal à direção do movimento são sorteadas uniformemente dentro da circunferência $x^2 + y^2 = R^2$.
- Uma vez obtidas x, y , z é calculada z : $z = -\sqrt{R^2 - y^2 - x^2}$. O sinal menos aparece porque o próton entra pelo semiplano negativo no eixo z .

Conhecida a posição inicial do próton no alvo, é calculado o tempo de interação e a seção de choque total com cada núcleon no volume de cálculo. São tentadas as respectivas interações, começando pela mais perto temporalmente até que alguma aconteça e possa iniciar a dinâmica da cascata intranuclear. Se o próton não pode interagir com ninguém, então é iniciado o gerador de eventos novamente para essa interação, considerando isso como uma tentativa de cascata fracassada.

Para decidir se alguma interação acontece são comparadas as seções de choque núcleon-núcleon calculadas teoricamente a partir da soma dos diferentes canais, o elástico e os inelásticos, e a seção geométrica que pode ser obtida a partir do parâmetro de impacto em dependência das posições e os momentos dos núcleons.

Sejam duas partículas n_1 e n_2 com posições $\vec{r}_{01}$, $\vec{r}_{02}$ e velocidades $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, a posição relativa delas em função do tempo é:

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_{012} + \vec{v}_{12}t \quad (2.28)$$

onde $\vec{r}_{012} = \vec{r}_{10} - \vec{r}_{20}$ e $\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$.

Elevando ao quadrado 2.28:

$$d^2 = r_{12}^2 = r_{012}^2 + v_{12}^2 t^2 + 2\vec{r}_{012}\vec{v}_{12}t \quad (2.29)$$

O tempo de colisão é o tempo para o qual as duas partículas estão mais próximas e d^2 é mínimo:

$$\frac{d(d^2)}{dt} = 0 \quad (2.30)$$

ou:

$$t_{int} = -\frac{2\vec{r}_{012}\vec{v}_{12}}{v_{12}^2} \quad (2.31)$$

Uma colisão é considerada se $t_{int} > 0$, ou de outra maneira, se a posição relativa das partículas não atinge o seu mínimo. O parâmetro de impacto é a posição relativa mínima:

$$b = d_{min} = d(t_{int}) \quad (2.32)$$

Para que alguma reação pode acontecer a seção de choque geométrica πb^2 tem que ser menor que a teórica, do contrario, a reação é rejeitada. O outro critério importante que pode fazer uma interação núcleon-núcleon impossível, é o mecanismo de bloqueio de Pauli. Como foi visto anteriormente para os momentos dos núcleon no alvo temos um número quântico principal n o qual pode ser olhado como um vetor com três componentes inteiras n_x, n_y, n_z , por tanto, para cada n , temos uma combinação finita de n_x, n_y, n_z . O número de combinações possíveis para cada n , multiplicado por dois, define então o número de ocupação de cada nível. O bloqueio de Pauli impõe que em nenhum momento num nível tenham mais núcleons que o permitido pelo número de ocupação desse nível.

2.1.1.4 Dinâmica da cascata intranuclear

O gerador de eventos faz a primeira interação do próton incidente com algum núcleon do alvo, com o proposito de descartar os casos que o próton atravessa o núcleo sem fazer transferência de energia. A partir desse momento é levada em conta a seguinte informação de cada partícula:

- **Tipo de partícula:** No código CRISP as partículas são divididas nos seguinte tipos: bárions, ressonâncias e mésons. Os bárions são os prótons e nêutrons os quais estão sometidos ao principio de exclusão de Pauli em dependência do seu nível de energia. As ressonâncias são núcleons em estado excitado, ou seja, com massa efetiva diferente às massas de prótons e nêutrons. No CRISP são consideradas as ressonâncias Δ_{1232} , Δ_{1950} , Δ_{1700} , Δ_{1950} , N_{1440} , N_{1520} , N_{1680} e N_{1535} às quais não é aplicado o principio de Pauli devido a sua baixa taxa de formação. Os mésons considerados são os π , Ω , ρ , ϕ .
- **Posição da partícula:** A posição de cada partícula e a sua evolução temporal são levadas em conta em cada momento, entre duas interações consecutivas separadas temporalmente em um tempo dt o vetor posição será atualizado da seguinte forma:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}dt \quad (2.33)$$

onde $\vec{r}_0$ é a posição inicial e $\vec{v}$ a velocidade da partícula.

- **Momento e energia da partícula:** Tem um tratamento quadri-dimensional, cada partícula tem um momento $p = \{\vec{p}, E\}$. Essa grandeza determina as diferentes seções de choque de interação na cascata intranuclear e a velocidade $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E}$ entre interações.

Para a execução da cascata é assumido um núcleo que pode estar constituído, além de prótons e nêutrons, por mésons e ressonâncias. São considerados três tipos de interações:

- **Choque de duas partículas:** Pode ser elástico ou inelástico. A seção de choque para o espalhamento elástico $n - n$, $p - p$, $p - n$ é determinado pelo

formalismo de Kikuchi-Kawai [Kikuchi and Kawai, 1968]. De forma geral as interações inelásticas são dos seguintes tipos:

a) Formação de uma ressonância a partir de dois bárions e vice-versa:

b) Formação de uma ressonância a partir da absorção de um pion por um bárion:

onde $i = 1232, 1700, 1950, 1440, 1520, 1680, 1535$ e $j = 1232, 1700, 1950$.

c) Formação de um méson e um bárion a partir de um méson e um bárion

O tempo de interação e o parâmetro de impacto para essas reações é calculado pelas equações 2.31, 2.32

- **Decaimento de partículas:** Muitas das partículas tem um tempo de vida médio da ordem de duração da cascata intranuclear, por isso pode dar-se o caso de algum decaimento. No código CRISP tem implementado uma grande quantidade destas reações. Há dois parâmetros fundamentais que as definem além do conhecimento dos canais resultantes, a constante λ de decaimento e o branching ratio para cada canal resultante. A probabilidade de que uma partícula decaia após um tempo t_0 é:

$$p(t > t_0) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (2.37)$$

portanto, para fazer o sorteio do tempo de decaimento é usada:

$$t \longrightarrow -\frac{1}{\lambda}(1 - s) \quad (2.38)$$

onde s é um número sorteado uniformemente na faixa $[0; 1]$. O branching ratio é utilizado para determinar a probabilidade relativa dos diferentes canais de decaimento para o seu sorteio.

- **Chegada de uma partícula á superfície nuclear:** Seja um núcleon com momento $p = \{\vec{p}, \epsilon\}$, posição e velocidade $\vec{r} = \vec{r}_0$ ($c = 1$) e $\vec{\beta} = \vec{p}/\epsilon$ é uma superfície esférica de radio R com o centro no centro do sistema de coordenadas cartesianas $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, para o núcleon temos [Hagedorn, 1973]:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\beta}t \quad (2.39)$$

onde t é o tempo. Elevando 2.39 ao quadrado temos:

$$r^2 = r_0^2 + (\beta t)^2 + 2\vec{r}_0\vec{\beta}t \quad (2.40)$$

Fazendo $r = R$ pode-se achar o tempo que demora o núcleon em atingir a superfície R , resolvendo a equação quadrática 2.40 para t :

$$t_{1,2} = \frac{\vec{r}_0\vec{\beta} \pm \sqrt{(\vec{r}_0\vec{\beta})^2 - \beta^2(r_0^2 - R^2)}}{\beta^2} \quad (2.41)$$

Se a equação 2.41 tem a mesma solução real para t_1 e t_2 , o núcleon faz contato tangente com a superfície, se as duas soluções são reais, a interpretação física dos tempos depende do seu sinal, se t é negativo o núcleon move-se em direção contrária á superfície e se é positivo na mesma direção. Se as duas soluções não são reais então a trajetória do núcleon nunca faz contato com a superfície. Neste momento só é importante a solução não negativa, já que todas as partículas estão dentro do núcleo.

Para os núcleons que atingem a superfície, se a sua energia cinética e maior que a profundidade do potencial levando em conta a parte coulombiana para prótons, é desligado do núcleo e contado como partícula emitida, do contrario, é refletido na parede do núcleo.

Figura 2.2: Diagrama de blocos representativo da cascata intranuclear no núcleo alvo.

A execução da cascata intranuclear acontece assim (figura 2.2): Temos um núcleo composto por prótons, nêutrons, ressonâncias e mésons, no instante inicial $t = 0$ são calculados todos os tempos dos possíveis eventos descritos anteriormente (partícula–partícula, decaimento e partícula–superfície). Para as interações partículas–partículas é achada a seção de choque total σ_r e o parâmetro de impacto b , se o tempo de interação é negativo ou $\pi b^2 > \sigma_r$ esse evento não é possível, e o tempo é assumido como infinito. Depois são ordenados temporalmente os eventos e executados um por um, em cada execução são atualizadas as posições e as novas interações e tempos. A cascata finaliza quando não há prótons ou nêutrons com energia maior que o poço de potencial e não existem mésons e ressonâncias no núcleo. Há também um critério de parada temporal para os casos de que alguma ressonância não possa decair e fique presa no núcleo, normalmente a cascata é processada até que $t = 2000$ zs, nesse caso as ressonâncias são obrigadas a decair. 2.2):

2.1.2 Modelo de desexcitação nuclear

Após a cascata intranuclear, além de que nenhum núcleon tenha energia suficiente para sair do núcleo, este tem uma energia de excitação total geralmente maior que a energia de ligação dos núcleons, a qual pode ser redistribuída de forma tal que seja possível a evaporação de partículas. No código CRISP, o núcleo remanescente da cascata é considerado em equilíbrio termodinâmico e seguindo o modelo estatístico de Weisskopf [Weisskopf, 1937] são calculadas as probabilidades relativas de emissão de prótons, nêutrons e partículas alfas. Também é achada a probabilidade relativa de fissão usando a teoria de Vandenbosh e Huizenga [Vandenbosch and Huizenga, 1973]

As larguras de emissão para prótons e alfas relativas dos nêutrons são calculadas assim:

$$\frac{\Gamma_p}{\Gamma_n} = \frac{E_p^*}{E_n^*} \exp \left\{ 2a_n^{1/2} \left[(r_p E_p^*)^{1/2} - (E_n^*)^{1/2} \right] \right\} \quad (2.42)$$

$$\frac{\Gamma_\alpha}{\Gamma_n} = \frac{E_\alpha^*}{E_n^*} \exp \left\{ 2a_n^{1/2} \left[(r_\alpha E_\alpha^*)^{1/2} - (E_n^*)^{1/2} \right] \right\} \quad (2.43)$$

onde $E_i^* = E^* - B_i - V_i$, E^* é a energia de excitação V_i o potencial coulombiano e B_i a energia de ligação da partícula $i = n, p, \alpha$.

Os parâmetros de densidade de níveis são calculados pelas fórmulas empíricas de Dostrovsky [Dostrovsky et al., 1958]:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{A}{a_1} \left(1 - a_2 \frac{A-2Z}{A^2} \right)^2 \\ a_p &= \frac{A}{a_3} \left(1 - a_4 \frac{A-2Z}{A^2} \right)^2 \\ a_\alpha &= \frac{A}{a_5} \left(1 - \frac{a_6}{A} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Para todos os cálculos feitos neste trabalho foram pegados os seguintes parâmetros:

$$a_1 = 18.81, a_2 = 1.3, a_3 = 20.07, a_4 = 3.84, a_5 = 18.68, a_6 = 2.02$$

A barreira coulombiana para prótons e alfas é:

$$V_p = C \frac{[K_p(Z-1)e^2]}{r_0(A-1)^{1/3} + R_p} \quad (2.45)$$

$$V_\alpha = C \frac{[2K_\alpha(Z-2)e^2]}{r_0(A-4)^{1/3} + R_\alpha} \quad (2.46)$$

com $K_p = 0.70$, $K_\alpha = 0.83$, $R_p = 1.14 fm$, $R_\alpha = 2.16 fm$. C é uma correção para os núcleos excitados:

$$C = 1 - \frac{E^*}{Am_0 - M(A, Z)} \quad (2.47)$$

onde m_0 e $M(A, Z)$ são as massas do núcleon e do núcleo respetivamente.

A largura relativa de fissão é calculada a partir da teoria de Vandenbosh e Huizenga [Vandenbosch and Huizenga, 1973]:

$$\frac{\Gamma_f}{\Gamma_n} = K_f \exp \left\{ 2 \left[(a_f E_f^*)^{1/2} - (a_n E_n^*)^{1/2} \right] \right\} \quad (2.48)$$

onde $E_f^* = E^* - B_f$ e B_f a barreira de fissão.

Para a obtenção da equação anterior é considerado que:

$$\Gamma_f = \frac{D}{2\pi} \int_0^{E^* - B_f} \rho^*(E^* - B_f - K) dK \quad (2.49)$$

e

$$\Gamma_n = \frac{D}{2\pi} \frac{2mR^2g}{\hbar^2} \int_0^{E^* - B_n} \epsilon \rho^*(E^* - B_n - \epsilon) d\epsilon \quad (2.50)$$

onde ρ^* são as densidades de energia para os níveis de fissão e emissão de nêutrons, D é o espaçamento médio entre estes níveis, R o raio nuclear e $g = 2$ a degenerescência de spin para nêutrons.

Pegando a relação $\frac{\Gamma_f}{\Gamma_n}$ de 2.49 e 2.50 e que:

$$\rho(E) \propto \exp \left[2(aE)^{1/2} \right] \quad (2.51)$$

e fazendo a integração chega-se a 2.48.

Pode olhar-se na equação 2.49 que só é levada em conta a fissão quando a energia de excitação é maior que a barreira de fissão, desconsiderando os casos de fissão por efeito túnel, que é muito menos improvável que a emissão de partículas, o mesmo acontece para prótons e alfa, se a excitação é menor que a barreira coulombiana então a sua emissão não acontece.

Conhecidas as larguras de emissão e fissão é possível calcular as probabilidades de emissão para cada uma delas, por exemplo, a probabilidade de que aconteça o evento i é ($i = n, p, \alpha, f$):

$$P_i = \frac{\Gamma_i}{\Gamma_n + \Gamma_p + \Gamma_\alpha + \Gamma_f} \quad (2.52)$$

dividendo o numerador e denominador por Γ_n :

$$P_i = \frac{\frac{\Gamma_i}{\Gamma_n}}{1 + \frac{\Gamma_p}{\Gamma_n} + \frac{\Gamma_\alpha}{\Gamma_n} + \frac{\Gamma_f}{\Gamma_n}} \quad (2.53)$$

onde todos os termos podem ser calculados pelas equações 2.42, 2.43 e 2.48

Figura 2.3: Diagrama de blocos representativo da implementação do MCEF no CRISP. Em cada iteração, sempre que a excitação seja maior que a energia de ligação do nêutron ou que a barreira de fissão é sorteada a possibilidade de emissão de um próton, nêutron ou partícula alfa ou de fissão nuclear a partir das probabilidades relativas P_p , P_n , P_α e P_f dadas na equação 2.53 [Weisskopf, 1937], [Vandenbosch and Huizenga, 1973]. No caso de alguma emissão a energia cinética da partícula emitida é sorteada pela função densidade de probabilidade 2.55 [Weisskopf, 1937].

O funcionamento geral do MCEF é representado no diagrama de blocos na figura 2.3. Como dados iniciais temos A , Z , E^* e o momento angular L , em todo o tempo o núcleo é considerado esférico. Cada iteração corresponde a determinação da probabilidade de emissão de nêutrons, prótons, alfas e fissão nuclear, fazer um sorteio e pegar um dos eventos anteriores, isso é feito enquanto a energia de excitação seja maior que o mínimo da energia de enlace do nêutron B_n e a de fissão B_f . Uma vez determinado o evento que acontece, se é uma emissão é obtida a energia cinética da partícula emitida e daí atualizado o núcleo residual, se é fissão e parado o MCEF e

iniciado o cálculo dos fragmentos de fissão.

Pela teoria de Weisskops [[Weisskopf, 1937](#)], originalmente a largura de emissão na evaporação é:

$$W_i d\epsilon = C(\epsilon - V_i) e^{-\frac{\epsilon - V_i}{T_f(E^* - B_i)}} \quad (2.54)$$

portanto, para a energia cinética das partículas evaporadas é usado o integrando da equação anterior como função de densidade de probabilidade.

$$f(\epsilon) = (\epsilon - V_c) \exp\left(-\frac{(\epsilon - V_c)}{T_f(\epsilon)(E^* - B_i)}\right) \quad (2.55)$$

No caso de nêutrons $V_c = 0$. T_f é a temperatura no núcleo após a emissão, por isso depende da energia cinética da partícula emitida.

A relação entre excitação pós-emissão $E_f^* = E^* - B_i - \epsilon$ e temperatura é:

$$T_f = \sqrt{2a_i E_f^*} \quad (2.56)$$

Na equação anterior a_i são os parâmetros densidade de níveis definidos em 2.44. Os fragmentos de fissão são obtidos pelo modelo MM-NRM (multimodal-random neck rupture model) [[Brosa et al., 1990](#)], onde a seção de distribuição de massas é determinada por três modos diferentes e independentes de fissão:

- **Simétrico Superlongo (S):** Corresponde á fissão simétrica onde pode ser atingida a maior deformação do núcleo.

$$\sigma_S = \frac{K_S}{\sqrt{2\pi\Gamma_S^2}} \exp\left(-\frac{(A - A_S)^2}{2\Gamma_S^2}\right) \quad (2.57)$$

- **Assimétrico Estândar I (S1):** Esse modo aparece como consequência da existência de uma camada fechada esférica para nêutrons $N \sim 82$ e prótons $Z \sim 50$ em núcleos pesados com $A \sim 132$. A distribuição de massas dos fragmentos são duas gaussianas simetricamente deslocadas da posição A_S :

$$\sigma_{S1-} = \frac{K_{S1}}{\sqrt{2\pi\Gamma_{S1}^2}} \exp\left(-\frac{(A - A_S - D_{S1})^2}{2\Gamma_{S1}^2}\right) \quad (2.58)$$

$$\sigma_{S1+} = \frac{K_{S1}}{\sqrt{2\pi}\Gamma_{S1}^2} \exp\left(-\frac{(A - A_S + D_{S1})^2}{2\Gamma_{S1}^2}\right) \quad (2.59)$$

- **Assimétrico Estândar II (S2):** Esse modo aparece como consequência da existência da camada anterior deformada para nêutrons $N \sim 86 - 88$ e prótons $Z \sim 52$ em núcleos pesados com $A \sim 138 - 140$. Também na distribuição de massas dos fragmentos temos duas gaussianas simetricamente deslocadas da posição A_S :

$$\sigma_{S2-} = \frac{K_{S2}}{\sqrt{2\pi}\Gamma_{S2}^2} \exp\left(-\frac{(A - A_S - D_{S2})^2}{2\Gamma_{S2}^2}\right) \quad (2.60)$$

$$\sigma_{S2+} = \frac{K_{S2}}{\sqrt{2\pi}\Gamma_{S2}^2} \exp\left(-\frac{(A - A_S + D_{S2})^2}{2\Gamma_{S2}^2}\right) \quad (2.61)$$

O código CRISP deve receber na entrada as intensidades das gaussianas K_S, K_{S1}, K_{S2} , as suas larguras $\Gamma_S, \Gamma_{S1}, \Gamma_{S2}$ e o deslocamento em relação à posição A_S dos modos assimétricos D_{S1}, D_{S2}

As distribuições de carga para cada núcleo de massa A também são consideradas gaussianas [Kudo et al., 1998], [Duijvestijn et al., 1999]:

$$\sigma_{A,Z} = \frac{\sigma_A}{\sqrt{\pi}\Gamma_Z} \exp\left(-\frac{(Z - Z_p)^2}{\Gamma_Z^2}\right) \quad (2.62)$$

os valores Z_p e Γ_Z são funções lineares da massa A do fragmentos:

$$Z_p = \mu_1 + \mu_2 A \quad (2.63)$$

$$\Gamma_Z = \gamma_1 + \gamma_2 A \quad (2.64)$$

os parâmetros $\mu_1, \mu_2, \gamma_1, \gamma_2$ também tem que ser especificados no arquivo de entrada do CRISP. Para o sorteio das massas é assumida a seguinte função de distribuição:

$$f(A) = \frac{\sigma_S + \sigma_{S1-} + \sigma_{S1+} + \sigma_{S2-} + \sigma_{S2+}}{K_S + 2K_{S1} + 2K_{S2}} \quad (2.65)$$

e para as cargas a equação 2.62, normalizada.

Uma vez determinados os fragmentos a_1, z_1 e a_2, z_2 a energia de excitação E^* é distribuída como excitação dos fragmentos dependendo de seus respectivos números de massa:

$$E_1^*(a_1, z_1) = \frac{a_1}{A} E^* \quad (2.66)$$

$$E_2^*(a_2, z_2) = \frac{a_2}{A} E^*$$

Para calcular a energia cinética dos fragmentos partimos da conservação da energia e momento lineal.

$$M(A, Z) + E^* = m_1(a_1, z_1) + m_2(a_2, z_2) + T + E_1^*(a_1, z_1) + E_2^*(a_2, z_2) \quad (2.67)$$

$$T = M(A, Z) - m_1(a_1, z_1) - m_2(a_2, z_2) = Q \quad (2.68)$$

$$T = T_1 + T_2 = \frac{P_1^2}{2m_1(a_1, z_1)} + \frac{P_2^2}{2m_2(a_2, z_2)} \quad (2.69)$$

$$P_1 = P_2 \quad (2.70)$$

Desta forma, resolvendo o sistema de equações 2.69–2.70 chega-se a:

$$T_1 = \frac{m_2(a_2, z_2)}{m_1(a_1, z_1) + m_2(a_2, z_2)} T \quad (2.71)$$

$$T_2 = \frac{m_1(a_1, z_1)}{m_1(a_1, z_1) + m_2(a_2, z_2)} T$$

Nas equações anteriores os sub-índices 1 e 2 referem-se aos fragmentos 1 e 2 respectivamente, M e m é a massa, P o momento e T a energia cinética

2.2 Reações núcleo–núcleo

Neste caso, temos um núcleo a_1, z_1 com uma energia T que é lançado contra um núcleo alvo A, Z . Uma vez que os fragmentos entram em contato, é iniciada a cascata intranuclear (figura 2.4). Os núcleos são construídos como foi descrito na seção 2.1.1.

Figura 2.4: Geometria usada para a implementação das reações núcleo-núcleo. A origem de coordenadas é tomada no centro do alvo de forma tal que o movimento do núcleo incidente seja na direção positiva do eixo z .

A trajetória é influenciada pelo potencial coulombiano dos fragmentos em função da distância r entre os centros de massas destes:

$$V_c = \frac{z_1 Z e^2}{r} \quad (2.72)$$

A trajetória é determinada classicamente para este potencial até que os núcleos entrem em contato e aí, começa o processo de transferência nucleônica na direção projétil-alvo

2.2.1 Condições iniciais e ponto de contato

A primeira parte do problema consiste em determinar as coordenadas dos núcleos quando eles fazem contacto. Isso pode ser feito no sistema de coordenadas relativas dos núcleos, o qual é representado na figura 2.5, onde $\vec{r}$ é o vetor de posição relativa dos núcleos e φ é o ângulo dele com o eixo z .

Figura 2.5: Sistema de coordenadas relativas usado para a determinação do ponto de contato inicial entre os núcleos. $\vec{r}$ é o vetor posição relativa e φ o ângulo entre ele e o eixo z

Nesse sistema a trajetória é descrita pela equação [Kotkin and Serbo, 1971]:

$$\frac{A}{r} = \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0) - 1 \quad (2.73)$$

com:

$$A = \frac{l^2}{r\alpha} \quad (2.74)$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2T'l^2}{\mu\alpha}} \quad (2.75)$$

$$\varphi_0 = \arccos\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \quad (2.76)$$

Aqui l é o momento angular, $\alpha = z_1 Ze^2$, T' a energia cinética e μ é a massa reduzida do sistema.

O momento angular é sorteado desde 0 até o valor máximo l_{max} da seguinte forma [Fröbrich and Gontchar, 1998]:

$$l = l_{max}\sqrt{s} \quad (2.77)$$

O valor l_{max} corresponde as reações para o máximo parâmetro de impacto $b = R_1 + R_2$:

$$l_{max} = bP \quad (2.78)$$

onde P é o momento do sistema de dois corpos no referencial das coordenadas relativas, R_1 e R_2 são os raios dos fragmentos e s é um número aleatório com uma distribuição uniforme na faixa $[0, 1]$.

No sistema coordenadas relativas temos quatro variáveis generalizadas r , p_r , φ e l . Elas têm as seguintes condições iniciais:

$$\begin{aligned} r_0 &= \infty \\ p_0 &= \sqrt{2\mu T} \\ \varphi_0 &= 0 \\ l_0 &= l \end{aligned} \quad (2.79)$$

desta forma, os núcleos fazem contato se para a equação 2.73 existe solução para a coordenada angular para $r = R_c = R_1 + R_2$ e neste ponto as coordenadas são:

$$\begin{aligned} r &= R_c \\ p &= \sqrt{2\mu(T - V_c(R_c))} \\ \varphi &= \varphi_0 - \arccos \left[\frac{\frac{A}{R_c} + 1}{\epsilon} \right] \\ l &= l \end{aligned} \quad (2.80)$$

Para passar às coordenadas cartesianas, é preciso fazer a transformação a seguir:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= (-r \sin \varphi, 0, r \cos \varphi) \\
\vec{p} &= (p \sin(\theta - \varphi), 0, p \cos(\theta - \varphi)) \\
\theta &= \arcsin\left(\frac{l}{rp}\right)
\end{aligned} \tag{2.81}$$

Dessa forma, temos a coordenadas do sistema quando os núcleos fazem contacto, para levar em conta as três dimensões do espaço cartesiano é preciso fazer uma rotação aleatória ao redor do eixo z .

2.2.2 Transferência de núcleons do projétil ao alvo

No momento que os núcleos fazem contato, é preciso levar em conta a possibilidade de que os núcleons no projétil atinjam a superfície do alvo e possam dar início à cascata intranuclear, similar as reações próton-núcleo simuladas anteriormente com o CRISP.

Durante toda a trajetória do projétil, após fazer contato com o alvo são levados em conta dois tipos de eventos para os núcleons incidentes, a interação com a própria superfície do projétil e a interação com a superfície do alvo. Estes são ordenados e executados de maneira temporal em dependência da equação 2.41

Se um núcleon interagem com o projétil, no sistema centro de massas de ele é feita uma reflexão do momento, conservando a componente tangencial á superfície e investindo a componente radial. Por outro lado, se atinge o núcleo alvo é feita a transferência aplicando a conservação da energia e o princípio de exclusão de Pauli. Em cada intervalo de tempo Δt igual a diferença de tempo entre dois eventos sucessivos, é feita a atualização da posição do projétil e rodada a cascata intranuclear para o alvo um tempo Δt , sem o critério de parada energético.

Para o gerador de reações induzidas por íons, é preciso usar as transformações de Lorentz [Hagedorn, 1973], as quais relacionam os momentos de uma partícula para dois sistemas de referencia K e K' , com K' movimentando-se a uma velocidade $\vec{v}$ em relação a K . Em nosso caso K é o núcleo alvo e K' o projétil. Se uma partícula

tem momento $p = \{\vec{p}, \varepsilon\}$ em K e $p' = \{\vec{p}', \varepsilon'\}$ em K' , estes ficam ligados pelas seguintes equações, com $\vec{\beta} = \vec{v}/c$:

$$\vec{p}' = \vec{p} + \vec{\beta} \gamma \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1} \vec{\beta} \vec{p} + \varepsilon \right) \quad (2.82)$$

$$\varepsilon' = \gamma (\varepsilon - \vec{p} \vec{\beta}) \quad (2.83)$$

$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{\beta} \gamma \left(\frac{\gamma}{\gamma + 1} \vec{\beta} \vec{p}' - \varepsilon' \right) \quad (2.84)$$

$$\varepsilon = \gamma (\varepsilon' + \vec{p}' \vec{\beta}) \quad (2.85)$$

Por outro lado se temos um sistema de partículas com um momento $P = \{\vec{P}, E\}$ em relação ao sistema de referencia K , pode-se calcular $\vec{\beta}$ do sistema K' que move-se no centro de massa do sistema de partículas a partir de:

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{P}}{E} \quad (2.86)$$

Uma vez que o projétil perde o contato com o alvo ou todos os núcleons sejam capturados por ele, é processada a cascata intranuclear aplicando os critérios de parada energético e temporal.

2.2.3 Colisões periféricas

Em versões anteriores do CRISP, na cascata intranuclear só eram considerados os núcleons cujas trajetórias fazem contato geométrico com a superfície do alvo, sem levar em conta os que passam perto dela e possam assim interagir com núcleons perto da superfície do alvo, o que pode trazer como consequência uma subestimação da seção de choque total. Consideremos agora que o alvo tem um raio $R' = R + dr$, onde $R = r_0 A^{1/3}$, desta forma, em dependência do valor dr , podem ser processados os núcleons com trajetórias na periferia do alvo. Na figura 2.6 esquerda é representada a superfície do alvo como duas circunferências, uma interior de raio R e outra exterior de raio R' . São representados também as trajetórias dos núcleons do projétil, pode-se olhar em cor azul um núcleon que faz contato com

a superfície $r = R'$, o qual não seria processado pela cascata intranuclear se fosse considerado $r = R$.

O parâmetro dr não é ajustável porque existe um dr a partir do qual a seção de choque total tende ao mesmo valor limite. Para entender isto consideremos que r_α é o parâmetro de impacto para o qual a partir dele $b > r_\alpha$ não temos mais possibilidade de reação e tomemos um dr tal que $R' = R + dr > r_\alpha$. Essa situação é apresentada na figura 2.6 direita, fazendo um corte transversal do alvo no plano xy .

Figura 2.6: Esquerda: Representação esquemática das reações núcleo-núcleo, o volume de cálculo para a cascata intranuclear é $R + dr$ para levar em conta as interações binárias dos núcleons incidentes que não fazem contato com a superfície do alvo. Direita: Corte transversal do plano xy , todas as interações binárias iniciadas por os núcleons projeteis acontecem dentro do parâmetro de impacto r_α , portanto, todos os núcleons que fazem contato com o alvo na faixa circular de espessura $R + dr - r_\alpha$ continuam com sua trajetória e não aportam eventos para a seção de choque total da reação.

Seja que os projeteis têm uma taxa por unidade de superfície e tempo α de chegada à seção transversal circular de raio R' , que as reações com parâmetro de impacto $b < r_\alpha$ têm uma probabilidade p de começar uma cascata intranuclear. e que para $b > r_\alpha$ temos zero probabilidade de interação.

Desta forma o número possíveis de cascatas a ser executadas é:

$$N_p = \alpha \pi R'^2 \quad (2.87)$$

Delas, só acontecem $N_f = \alpha p \pi r_\alpha^2$ portanto a seção de choque total da reação pode ser calculada como a probabilidade de que aconteça a cascata intranuclear N_f/N_p vezes a seção de choque geométrica $\sigma_G = \pi R'^2$:

$$\sigma = \sigma_G \frac{N_f}{N_p} = \pi R'^2 \frac{\alpha p \pi r_\alpha^2}{\alpha \pi R'^2} = \pi p r_\alpha^2 \quad (2.88)$$

Portanto, se $R' = R + dr > r_\alpha$ a seção de choque total da reação é independente de R' . Isso pode ser assegurado se tomamos um dr maior que o parâmetro de impacto máximo de todas as possíveis reações binárias $dr > \sqrt{\max(\sigma_{ij})/\pi}$. Na figura 2.7 mostra-se que para $E_{lab} > 100$ das interações núcleons–núcleons, o parâmetro de impacto relativo as seções de choques totais nunca atinge o valor de 2 fm, portanto é razoável tomar esse valor na hora de fazer os cálculos.

Figura 2.7: Seção de choque total para as reações de tipo nêutron–nêutron (n–n), próton–próton (p–p) e nêutron–próton (n–p) implementadas no CRISP. Observe-se como para as reações com energia maior que 100 A MeV, o parâmetro de empato fica por debaixo de 2 fm, o que justifica a eleição da espessura da parede geométrica do alvo $dr = 2$ fm.

2.2.4 Cálculo da energia de excitação

Uma consideração importante do CRISP é a suposição de que como a cascata intranuclear é um processo muito rápido, os níveis energéticos ficam invariantes durante toda a sua evolução temporal. Isso torna mais fácil o cálculo da energia de excitação em núcleos finais com menos prótons e nêutrons que o inicial, onde a estrutura nuclear seja formada por núcleons em níveis maiores que o de Fermi e buracos nos outros níveis.

Suponhamos a seguinte reação:

$$(a_1, z_1) + (A, Z) = (A_f, Z_f) + \text{núcleons} \quad (2.89)$$

Para o cálculo da energia de excitação é assumido um núcleo no estado fundamental (A, Z) e removidos os $A - A_f + Z_f - Z$ nêutrons e $Z - Z_f$ prótons mais energéticos e:

$$E^* = \sum_{i=1}^{A_f} T'_i - \sum_{i=1}^{A_f} T_i \quad (2.90)$$

onde T'_i é a energia cinética do i -ésimo núcleon no núcleo construído é T_i a energia cinética do i -ésimo núcleon no núcleo residual da cascata.

No caso que $A_f > A$ a energia de excitação é a mesma que as versões anteriores do CRISP. Ao início da cascata é assumida a energia cinética do núcleon incidente como excitação inicial E^* e depois, cada vez que uma partícula seja desligada é tirada sua energia cinética de E^* . Ao final o valor que fique de E^* é a energia de excitação do remanescente da cascata intranuclear.

2.2.5 Dinâmica da cascata intranuclear para reações núcleo–núcleo

Na figura 2.8 é representado um diagrama de blocos da implementação das reações núcleo–núcleo no código CRISP, usando a teoria e equações explicadas em epígrafes anteriores.

Figura 2.8: Diagrama de blocos representativo da implementação das reações núcleo-núcleo no CRISP.

Para cada cascata a ser processada o primeiro passo é o sorteio do momento angular do projétil (equação 2.77), isso vai permitir o cálculo do parâmetro de impacto (equação 2.78) é a determinação das coordenadas dos núcleos na hora que eles fazem contato geométrico (equação 2.82). São processados dois tipos de colisões para os núcleons do projétil, a reflexão deles na parede do projétil e a chegada deles também à superfície do alvo. No caso que um núcleon projétil atinja o alvo, ele é desligado do projétil e ligado ao alvo para formar parte das partículas da cascata intranuclear. Durante duas entradas sucessivas de núcleons do projétil no núcleo alvo é processada a cascata intranuclear no alvo um tempo igual à diferença temporal entre as duas entradas. Quando os núcleos perdem o contato entre eles, é feita a cascata intranuclear no alvo com o critério de parada energético.

3 | RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para a análise dos resultados as simulações foram divididas em varias etapas:

- **Interação inicial:** Esta etapa vai até o ponto onde pode ser definido se a reação acontece ou não. Se pelo menos algum núcleon do projétil interage com o alvo a reação é considerada. Independentemente da evolução posterior do processo, a seção de choque total da reação pode ser determinada neste ponto. Qualquer variação desta em relação aos resultados experimentais depende só das considerações levadas em conta até aqui.
- **Cascata intranuclear:** É a partir da interação inicial até o final da cascata. Sempre é função da etapa anterior o que faz um pouco mais difícil achar algum observável direto desta etapa. Às seções duplas diferenciais de emissão de partículas, sobre tudo para as energias mais altas pode ser um bom observável para comparar com dados experimentais e obter conclusões sobre a simulação da cascata.
- **Evaporação–fissão:** São obtidos os fragmentos e parábolas de espalação que podem ser comparados com dados experimentais, dando uma visão geral da capacidade do código de reproduzir a realidade física. Os resultados obtidos nesta etapa dependem de todos os cálculos anteriores.

3.1 Interação inicial

No código CRISP, a primeira interação do gerador de eventos e o bloqueio de Pauli vai definir completamente a seção de choque total. Olhando os dados experimentais para diferentes reações na figura 3.1 e a curva teórica obtida por Shen [Shen et al., 1989], é possível identificar duas regiões fundamentais. Na faixa $E_{lab} < 100 \text{ MeV}/A$ há um máximo devido à fusão completa governada principalmente por graus de liberdade coletivos. Teoricamente existem muitos trabalhos que descrevem esse fenômeno sendo comum também a aplicação de uma dinâmica de Langevin [Fröbrich and Gontchar, 1998], onde é utilizada uma parametrização para o processo de união dos núcleos e em função deles e de um potencial de interação proposto são resolvidas equações do movimento.

Figura 3.1: Seção de choque total para diferentes reações núcleo-núcleo. O parâmetro dr representa a espessura de mais além do raio nuclear considerada com o objetivo de favorecer as interações periféricas de núcleons incidentes que não fazem contato com a superfície real do alvo, mas tem possibilidade física de interagir com partículas perto do limite superficial. Os dados experimentais foram tomados de [Takechi et al., 2009]

A partir de uma abordagem mais fenomenológica o processo pode ser visto como a aproximação de dois núcleos até a região da interação nuclear entre eles, que não tem energia suficiente para a ruptura do potencial de atração resultando na fusão completa.

Este tratamento não é levado em conta, até o momento, no código CRISP, onde temos uma abordagem de partícula independente. No processo de fusão completa, os núcleos formam um novo sistema com uma distribuição nova dos níveis de energia, fazendo possível a redistribuição de todos os núcleons neles. No CRISP, os níveis energéticos são construídos para os estados iniciais esféricos e mantidos invariantes durante toda a evolução temporal da cascata intranuclear, impondo que para essas energias não seja possível a obtenção da fusão completa porque o bloqueio de Pauli começa a ser muito importante. Observa-se na figura 3.1 que não é reproduzido o pico de fusão para $E_{lab} < 100 \text{ A MeV}$.

Na figura 3.1, as linhas em vermelho e azul são as seções de choque total da reação levando em conta uma distribuição uniforme dos núcleos e uma distribuição de Woods–Saxon respectivamente na hora de construir os núcleos, comprovando-se que não existem diferenças significativas na consideração de um ou outro modelo. O melhor acordo com os dados experimentais aparece para a região $E_{lab} > 100 \text{ A MeV}$ onde é esperado que a descrição de partícula independente faça uma melhor representação das reações núcleo–núcleo. Na figura 3.1 temos é possível observar que a consideração de uma camada superficial de espessura 1 fm ao redor do núcleo alvo, pode levar a um melhor acordo teórico–experimental, precisamente porque abre a possibilidade de processamento de colisões periféricas que antes não eram consideradas.

Na figura 3.2 temos a seção de choque total para a reação $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ em função da espessura dr da camada superficial considerada, podendo-se observar a convergência deste observável para $dr > 1.5 \text{ fm}$ como foi analisado no capítulo 2.

Figura 3.2: Seção de choque total para a reação $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ núcleo-núcleo. O parâmetro dr representa a espessura de mais além do raio nuclear considerada com o objetivo de favorecer as interações periféricas de núcleons incidentes que não fazem contato com a superfície real do alvo, mas tem possibilidade física de interagir com partículas perto do limite superficial. Os dados experimentais foram tomados de [Takechi et al., 2009]

3.2 Seções de choque diferenciais duplas de emissão de partículas

Este é um observável muito conveniente que dá uma medida do comportamento do modelo na fase da cascata intranuclear, fundamentalmente para as partículas mais energéticas. Na figura 3.5 são apresentados os resultados de emissão de nêutrons para a reação $^4\text{He} + ^{63}\text{Cu}$ para $E = 230 \text{ A MeV}$ e na figura 3.6 para $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$, $E = 290 \text{ MeV/A}$. Em geral temos uma boa reprodução dos dados experimentais. Para 5° e 10° os dados experimentais apresentam um pico, o qual não é reproduzido porque nos cálculos com o CRISP só é levada em conta a transferência de núcleons na direção projétil-alvo e posteriormente considerado o alvo como volume de cálculo para a cascata. Esse pico é devido à emissão de partículas para o rema-

nescente do projétil que pode ficar em estado excitado [Mancusi et al., 2014] e é muito próximo da energia inicial por núcleon devido à velocidade do projétil.

Nos cálculos temos dois picos para os ângulos de emissão frontais na reação $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ para 5° e 10° , um deslocado à esquerda e outro à direita em função da energia por núcleon do alvo. Na reação $^4\text{He} + ^{63}\text{Cu}$ só temos o pico da direita. Esses picos representam as partículas que não interagem com o alvo e o atravessam. Para entender esse deslocamento é preciso levar em conta algumas considerações sobre a programação destas reações no CRISP: tanto as partículas projeteis que na sua trajetória não fazem contato com a superfície do alvo como as que entram no alvo antes de que aconteça a primeira interação não são levadas em conta na contagem de partículas emitidas. Por outro lado, depois da primeira interação de um núcleon do projétil com um do alvo, os núcleons que atingem a superfície do alvo são posicionados sobre ela se o mecanismo de bloqueio de Pauli o permite, e podem ser contados como emitidos embora eles continuem sua trajetória sem fazer reação com os núcleons do alvo. Esta última situação é mais provável para os núcleons que tenham uma menor probabilidade de interagir dentro do alvo, ou seja, para os que tenham que atravessar uma menor espessura do alvo, geralmente os que têm um movimento próximo à direção z , como pode-se ver na figura 3.3, onde temos um núcleon com três possíveis trajetórias $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ e $\vec{P}_3$, pode-se olhar que a trajetória $\vec{P}_2$ é a que fazendo contato com o núcleo tem que atravessar uma menor espessura dele.

Figura 3.3: Representação esquemática de um núcleon com três possíveis direções 1, 2, 3 de incidência. Se P_1 , P_2 , P_3 têm o mesmo módulo, a probabilidade de reação com uma partícula do núcleo é proporcional à espessura do alvo a atravessar, portanto, o núcleon 2 tem a maior probabilidade de fazer contato geométrico com o alvo e atravessá-lo sem interagir com nenhuma partícula dele.

Nas reações anteriores, os projéteis ${}^4\text{He}$ e ${}^{12}\text{C}$ têm um momento de Fermi (equação 2.13) $P_f = 246.47 \text{ MeV}/c$ e esse precisamente é o único nível de energia existente, portanto todos os seus núcleons têm esse momento mas, distribuídos isotropicamente no seu espaço de configuração. Para estimar a aparição dos picos em nossas simulações, calculamos a energia cinética dos núcleons no referencial de laboratório em função da componente P_z do momento deles dentro do projétil para as reações estudadas (figura 3.4). Como foi olhado anteriormente, os núcleons com uma direção do movimento próxima a z tem uma maior probabilidade de fazer contato geométrico com o alvo e atravessá-lo sem interagir com ele, ou seja, os que tenham momentos $\vec{P} \approx \pm P_f \hat{z}$. Na figura 3.4 pode-se olhar, por exemplo, para a reação ${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C}$ 290 A MeV, os núcleons com $P_z \approx \pm 246.47 \text{ MeV}/c$ no referencial do projétil têm uma energia cinética $T_1 \approx 70 \text{ MeV}$ e $T_2 \approx 500 \text{ MeV}$ no referencial

de laboratório, precisamente a energias onde aparecem os picos na figura 3.6 para os ângulos de emissão frontais. O mesmo acontece para a reação ${}^4\text{He} + {}^{63}\text{Cu}$ 230 A MeV, agora $T_1 \approx 40 \text{ MeV}$ e $T_2 \approx 400 \text{ MeV}$.

Figura 3.4: Energia cinética dos núcleons no referencial de laboratório em função do seu momento momento na direção z (sem levar em conta as outras componentes) no referencial do projétil que move-se com uma energia cinética T também na direção z para as reações ${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C}$ T = 290 A MeV e ${}^4\text{He} + {}^{63}\text{Cu}$ T = 230 A MeV.

Na reação ${}^{20}\text{Ne} + {}^{238}\text{U}$, E = 250 e 400 A MeV, também é possível uma boa reprodução dos dados experimentais para a emissão de cargas. Os picos observados anteriormente nas simulações para ângulos frontais não são vistos porque eles aparecem principalmente para reações onde as colisões periféricas têm uma probabilidade relativamente alta de acontecer, por exemplo, reações onde os núcleos são pequenos ou apresentam uma grande simetria de massas. Neste caso, onde a assimetria é considerável, o projétil tem uma maior probabilidade de colidir completamente com o alvo e portanto, de que suas partículas reajam dentro dele. Além do anterior, os ângulos estudados são maiores que os vistos nas reações ${}^{12}\text{C} + {}^{12}\text{C}$ T = 290 A MeV e ${}^4\text{He} + {}^{63}\text{Cu}$ T = 230 A MeV.

Figura 3.5: Seção de choque dupla diferencial para a reação ${}^4\text{He} + {}^{63}\text{Cu}$ $E=230$ A MeV para diferentes ângulos de emissão de nêutrons 4° (a), 9° (b), 20° (c), 30° (d), 40° (e), 60° (f), 80° (g) em relação ao sistema de laboratório. Os dados experimentais foram tomados de [Takechi et al., 2009]

Figura 3.6: Seção de choque dupla diferencial para a reação $^{12}\text{C} + ^{12}\text{C}$ $E=290$ A MeV para diferentes ângulos de emissão de nêutrons 5° (a), 10° (b), 20° (c), 30° (d), 40° (e), 60° (f), 80° (g) em relação ao sistema de laboratório. Os dados experimentais foram tomados de [Takechi et al., 2009]

Figura 3.7: Seção de choque dupla diferencial para a produção de prótons a 30° , 50° , 70° , 90° , 110° , para a reação $^{20}\text{Ne} + ^{238}\text{U}$ 250A MeV e 400A MeV. Os dados experimentais foram tomados de [Poskanzer, 1978]

3.3 Parábolas de espalação

Foi obtida a distribuição de massas para os fragmentos de espalação da reação $p + {}^{208}\text{Pb}$ figura 3.8 esquerda, observando-se um bom acordo teórico–experimental para a região de massas grandes $A > 180$ e uma subestimação para massa menores. A base de nossas simulações é o gerador de eventos para as reações de tipo próton–núcleo, por isso é muito importante o conhecimento e estudo das potencialidades do CRISP para essas reações. Na figura 3.8 direita, na cor vermelho são apresentados os cálculos das seções de choque de espalação para a reação ${}^2\text{H} + {}^{208}\text{Pb}$ $E=1000$ A MeV usando um gerador de eventos já implementado anteriormente no CRISP para reações deutério–núcleo, que basicamente o que faz é tomar um próton e um nêutron como projeteis com a condição de que o impacto na superfície do alvo em pontos muito próximos, do ordem da raio do deutério. O nosso modelo, além de que o modelo de Fermi do núcleo não seja a ótima para o deutério, introduz aproximações importantes que fazem possível uma melhor reprodução dos dados experimentais 3.8 direita, linha cor azul. Na região $A > 75$ temos um acordo quase perfeito dos dados experimentais, possivelmente devido a que é levado em conta uma distribuição de momento para os núcleon no projétil e à consideração de um raio efetivo no alvo para uma melhor descrição das reações periféricas, que podem deixar ao núcleo com uma excitação pequena, fazendo que ele não possa emitir muitas partículas ficando com uma massa próxima à inicial.

No artigo [[Mancusi et al., 2014](#)] são apresentados os cálculos anteriores da evaporação e justificada a grande quantidade de partículas pelo fenômeno da dissipação nuclear, o qual não é considerado em nossas predições.

O possível efeito da dissipação que pode fazer um melhor acordo teórico e experimental é o seguinte: geralmente a dissipação é explicada através de uma equação dinâmica [[Fröbrich and Gontchar, 1998](#)] que descreve a deformação temporal do núcleo no processo de evaporação–fissão usando variáveis coletivas, existindo um certo intercambio de energia entre os graus de liberdade associados a elas e os de partícula independente, diretamente relacionados com a energia disponível para a

evaporação. Os graus de liberdade colectivos determinam a fissão do núcleo, já que este tem que atingir uma deformação para poder fazer a sua divisão. Se a correlação de energia entre esses graus de liberdade não é abordada corretamente durante toda a evolução do sistema, pode haver uma desviação das simulações em relação aos dados experimentais. É importante lembrar que na teoria de Weisskopf, [Weisskopf, 1937] o núcleo é considerado esférico em todo momento, portanto, é esperado uma pior reprodução da realidade para os sistemas com energia de excitação relativamente alta e número de massa grande onde fisicamente seja possível a excitação dos graus de liberdade coletivos e o estado esférico possa ser facilmente abandonado.

Outro fator importante é que para essas energias das partículas incidentes ($E \approx 1000 \text{ MeV}$), existem mecanismos de absorção de píons os quais ainda não estão implementados no CRISP. Pode estar acontecendo que tenham píons que saiam do núcleo levando com ele energia que poderia ser usada para ter uma maior evaporação de núcleons.

Figura 3.8: Seção de espalação para as reações $^{208}\text{Pb} + ^1\text{H}$ (a) 1000 A MeV e $^{208}\text{Pb} + ^2\text{H}$ (b). Para o deutério foi comparada também com a versão do CRISP feita para o gerador deutério-núcleo. Os dados experimentais foram tomados de [Enqvist et al., 2001], [Kelić et al., 2004], [Enqvist et al., 2002]

Para sistemas com menos graus de liberdade de partículas independentes é obtido, como é esperado, um melhor acordo nas seções de espalação para todas as massas,

figura 3.9.

Figura 3.9: Seção de choque total de fragmentação para as reações $^{86}\text{Kr} + ^9\text{Be}$ (a) 500A MeV e $^{58}\text{Ni} + ^9\text{Be}$ (b) 140 A MeV em função do número mássico dos fragmentos. Os dados experimentais foram tomados de [Weber et al., 1994], [Mocko et al., 2006].

Na continuação são apresentadas também as parábolas de espalção para diferentes reações núcleo–núcleo, olhando-se um bom acordo com os dados experimentais.

Figura 3.10: Distribuição isotópica para a reação $^{86}\text{Kr} + ^9\text{Be}$ 500A MeV na região $24 \leq Z \leq 27$. Os dados experimentais foram tomados de [Weber et al., 1994].

Figura 3.11: Distribuição isotópica para a reação $^{86}\text{Kr} + ^9\text{Be}$ 500A MeV na região $28 \leq Z \leq 31$. Os dados experimentais foram tomados de [Weber et al., 1994].

Figura 3.12: Distribuição isotópica para a reação $^{58}\text{Ni} + ^9\text{Be}$ 140A MeV na região $21 \leq Z \leq 24$. Os dados experimentais foram tomados de [Mocko et al., 2006].

Figura 3.13: Distribuição isotópica para a reação $^{58}\text{Ni} + ^9\text{Be}$ 140A MeV na região $25 \leq Z \leq 28$. Os dados experimentais foram tomados de [Mocko et al., 2006].

3.4 Reação $^7\text{Li} + ^{208}\text{Pb}$ 35 MeV por núcleon

A energia da reação de 35 MeV por núcleon é da ordem da energia de Fermi do alvo, as partículas que entram no núcleo alvo ficam próximas ao limite superior do potencial nuclear, por tanto, o sistema é muito sensível para as diferentes considerações levadas em conta na hora de fazer o gerador de eventos, principalmente o relacionado com a determinação dos níveis de Fermi no projétil. Outra característica importante é que pode ter uma grande transferência de energia para o alvo e uma alta probabilidade de fissão, tornando possível o estudo das seções de choque de fissão.

Foram implementadas e testadas diferentes aproximações para o cálculo das energias de Fermi no projétil, a primeira delas, CRISP1, é a versão do código usada para todos os cálculos anteriores e relatada no capítulo dois, onde é considerada uma expressão estatística (equação 2.11) a qual supõe uma grande quantidade de núcleons. Para os núcleos menores essa não é a melhor aproximação na hora de

simular o movimento fermiônico, uma aproximação mais acertada para núcleos pequenos pode ser tirar a parte estatística da expressão (equação 2.11), ou seja, tomar a estrutura de níveis exatamente calculada para o potencial cúbico infinito. Por exemplo, para o ${}^7\text{Li}$ que tem um só nível de ocupação, a energia e o momento de Fermi ficam então:

$$E_f = 1.89 \frac{\hbar^2}{m_{eff} r_0^2 A^{2/3}} = \frac{58.06}{A^{2/3}} \quad (3.1)$$

$$P_f = \sqrt{E_f^2 + 2m_{eff}E_f} \quad (3.2)$$

Nós usaremos a nomenclatura CRISP2 para diferenciar as simulações feitas usando as duas fórmulas anteriores.

No Liège intranuclear cascade (INCL++) [Mancusi et al., 2014], foi utilizada uma expressão tabulada por [Moniz et al., 1971] a partir de medições de espalhamento de quasi-elétron para a simulação de reações núcleo-núcleo:

$$P_f(A) = \alpha - \beta \exp(-\gamma A) \quad (3.3)$$

com $\alpha = 259.416 \text{ MeV}/c$, $\beta = 152.824 \text{ MeV}/c$ e $\gamma = 9.5157 \cdot 10^{-2}$. Também será estudada a influência da expressão anterior nas simulações, essa última aproximação a chamaremos CRISP3.

Na tabela seguinte, apresentam-se os momentos e energias para o nível de Fermi para as aproximações anteriores:

Aprox	nêutron P_f	nêutron E_f	próton P_f	próton E_f
CRISP1	233.09	30.18	256.96	36.55
CRISP2	168.91	15.87	168.91	15.87
CRISP3	180.91	18.30	180.91	18.30

Tabela 3.1: Energia e momento de Fermi para as diferentes aproximações testadas no CRISP. CRISP1 é a implementação estándar, CRISP2 é usando a fórmula 3.1, 3.2 e CRISP3 a fórmula 3.3.

Figura 3.14: Seção de choque total de fissão para as diferentes aproximações testadas no CRISP para a reação ${}^7\text{Li} + {}^{208}\text{Pb}$ com $E=35$ A MeV supondo que toda a energia de excitação do núcleo é utilizada para a excitação dos fragmentos de fissão. Os dados experimentais foram tomados de [Demekhina et al., 2013]

Figura 3.15: Energia cinética de diferentes fragmentos de fissão na reação ${}^7\text{Li} + {}^{208}\text{Pb}$ $E=35$ A MeV supondo que toda a energia de excitação do núcleo que atinge a excisão é utilizada para a excitação dos fragmentos de fissão. Os dados experimentais foram tomados de [Demekhina et al., 2013]

Na distribuição dos fragmentos de fissão, figura 3.14, para o CRISP1 temos uma sobre-evaporação de partículas, fazendo um deslocamento do espectro de massas para a esquerda. Isso é menor para o CRISP2 e o CRISP3, obtendo-se o melhor acordo para a região de massas pequenas. De qualquer modo para os números de massa maiores que 90, onde temos o pico do espectro, o acordo não é muito bom. Na implementação da fissão nuclear no CRISP toda a energia de excitação é distribuída como excitação dos fragmentos de fissão (equação 2.66), proporcionalmente à massa destes, permitindo a evaporação de partículas após a fissão. Na verdade, parte da excitação nuclear pode-se transformar em outras formas de energias coletivas como cinética e rotacional, fazendo que os núcleos fiquem menos excitados e limitando assim a evaporação. A sobre-excitação dos fragmentos afeta mais aos fragmentos de maior massa, pois a sua energia de excitação é maior, por isso temos o pior acordo com os dados experimentais nessa região de massas.

Figura 3.16: Teste de chi-quadrado comparando as diferentes distribuições de fragmentos na reação ${}^7\text{Li} + {}^{208}\text{Pb}$ $E=35$ A MeV calculadas com o CRISP em comparação com a teórica em função da porcentagem da energia de excitação do núcleo que atinge a excisão que é destinada à excitação dos fragmentos de fissão

Considerando que temos uma boa estimação da energia total no ponto onde serão determinados os fragmentos de fissão, o excesso de energia de excitação encontrado pode ser energia destinada a excitação dos graus de liberdade coletivos dos fragmentos de fissão na excisão nuclear, o qual não é levado em conta na versão do CRISP usada. Para demonstrar a importância destes graus de liberdade podemos considerar que só uma porcentagem da energia passa a ser energia de excitação intrínseca dos fragmentos. Na figura 3.16 é apresentado o chi-quadrado dos resultados teórico-experimentais para diferentes porcentagens da energia de excitação total destinada a energia de excitação dos fragmentos de fissão, o CRISP1 apresenta o melhor ajuste quando toda a energia de excitação passa para os graus coletivos, a sobre-evaporação de partículas é tão alta que precisamos tirar toda a excitação dos fragmentos finais para obter o melhor acordo. CRISP2 e CRISP3 apresentam um resultado mais lógico, fazendo a melhor reprodução dos fragmentos de fissão se aproximadamente o 50 % da excitação é tomada para a evaporação dos fragmentos.

Uma boa tentativa para estimar a energia cinética total dos fragmentos de fissão é fazer um procedimento parecido ao feito para calcular a energia cinética das partículas emitidas na evaporação nuclear, onde temos uma expressão para a suas larguras de emissão que depende de uma integral por todas as possíveis energias cinéticas, onde é tomado o integrando como função de distribuição delas (equações 2.54 e 2.55). Para a fissão temos que:

$$\Gamma_f = \frac{D}{2\pi} \int_0^{E^* - B_f} \rho^*(E^* - B_f - K) dK \quad (3.4)$$

Tomando o integrando da equação anterior temos que para a energias cinética dos fragmentos pode-se usar a função densidade de probabilidade:

$$f(K) = \rho^*(E^* - B_f - K) \quad (3.5)$$

Figura 3.17: Seção de choque total de fissão para as diferentes aproximações testadas no CRISP para a reação ${}^7\text{Li} + {}^{208}\text{Pb}$ $E=35$ A MeV supondo que a energia cinética dos fragmentos tem a função de distribuição de probabilidade 3.5. Os dados e o fit experimentais foram tomados de [Demekhina et al., 2013].

Figura 3.18: Energia cinética de diferentes fragmentos de fissão na reação ${}^7\text{Li} + {}^{208}\text{Pb}$ $E=35$ A MeV supondo que a energia cinética dos fragmentos tem a função de distribuição de probabilidade 3.5. Os dados experimentais foram tomados de [Demekhina et al., 2013].

Considerando que a energia cinética dos fragmentos tem a densidade de probabilidade da equação 3.5, a distribuição dos fragmentos de fissão melhora para todas as aproximações (figura 3.17), mas a estimativa da energia cinética é pior (figura 3.18). Um ponto importante é que não foi possível reproduzir simultaneamente os dois observáveis, por quanto é preciso fazer uma implementação mais completa do fenômeno da fissão nuclear, que em primeira aproximação poderia ser levada em conta toda a evolução dinâmica do sistema desde o estado inicial que geralmente corresponderia a sua deformação de equilíbrio até a que é atingido o ponto de fissão.

Uma conclusão importante é a necessidade de incluir as aproximações CRISP2 ou CRISP3 para as energias de Fermi em futuras implementações no código, principalmente para as reações onde a energia cinética por núcleon do projétil é da ordem da energia do movimento nucleônico no meio nuclear. CRISP2 e CRISP3 são muito similares (tabela 3.1), o CRISP2 é o melhor candidato, já que a fórmula estatística (equação 2.11) usada é derivada precisamente da equação dos níveis de energia para o potencial cúbico a qual é usada na aproximação CRISP2, portanto, não seria necessário a introdução de parâmetros adicionais como acontece com o CRISP3 (equação 3.3).

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Como cumprimento dos objetivos deste trabalho foram atingidas as conclusões descritas a seguir:

- Foi implementado o modelo da cascata intranuclear para reações de tipo núcleo–núcleo, obtendo resultados muito similares a outros trabalhos [[Yariv and Fraenkel, 1979](#)] [[Yariv and Fraenkel, 1981](#)] [[Mancusi et al., 2014](#)].
- O volume de cálculo para a primeira interação é tomado como o volume do núcleo alvo mais uma camada superficial de espessura $dr = 2 \text{ fm}$ para considerar as possíveis reações binárias de partículas que passam perto do alvo sem fazer contato com ele mas podem interagir com os núcleons dele próximos a sua superfície.
- Foram identificadas duas regiões fundamentais nas curvas de seção de choque total da reação em função da energia incidente vezes o número de núcleons do projétil E_{lab} , para $E_{lab} < 100 \text{ A MeV}$, experimentalmente é observado um pico o qual não foi possível reproduzir devido ao bloqueio de Pauli. Outros trabalhos associam esse pico ao fenômeno de fusão completa [[Fröbrich and Gontchar, 1998](#)] onde acontece uma reestruturação dos níveis energéticos do sistema núcleo–núcleo de forma tal que o princípio de exclusão de Pauli torna-se desprezível [[Mancusi et al., 2014](#)]. Para $E_{lab} > 100 \text{ A MeV}$, um melhor acordo teórico–experimental foi obtido nas seções de choque total da reação, já que o bloqueio de Pauli não faz tanto efeito para as primeiras interações onde a tendência é a transferência de energia dos núcleons incidentes

para os do alvo de forma tal que todos fiquem por encima do nível de Fermi.

- As seções de choque duplas diferenciais para a emissão de prótons e nêutrons apresentam também uma boa concordância com os dados experimentais, melhor ainda para os sistemas com menor número de constituintes.
- Foram obtidas as seções de choque de espalação para diferentes reações: ${}^2\text{He} + {}^{208}\text{Pb}$ $E_{lab} = 1000 \text{ A MeV}$, ${}^{86}\text{Kr} + {}^9\text{Be}$, $E_{lab} = 500 \text{ A MeV}$ e ${}^{58}\text{Kr} + {}^9\text{Be}$, $E_{lab} = 140 \text{ A MeV}$ obtendo-se uma sub-estimação para os fragmentos de massa menores associados a uma energia de excitação inicial alta onde podem aparecer deformações coletivas não levadas em conta para a determinação das larguras de emissão das diferentes partículas [Weisskopf, 1937] [Fröbrich and Gontchar, 1998]. Também nessa região de energia temos reações de absorção de píons que podem ser importantes e ainda não estão implementadas no código.
- Para a reação ${}^7\text{Li} + {}^{208}\text{Pb}$, $E_{lab}=35 \text{ A MeV}$ e não foi possível a reprodução simultânea de observáveis como a distribuição dos fragmentos de fissão e a suas energias cinéticas. Uma possível explicação poderia ser a transferência de energia entre graus de liberdade de partícula independente e graus de liberdade coletivos.
- Para reações com energia da ordem da energia do movimento nucleônico, podem-se usar melhores aproximações para o cálculo do nível de Fermi para núcleos pequenos, como por exemplo, o primeiro nível de energia do poço de potencial cúbico infinito (equação 3.1).

De forma geral, os resultados obtidos foram os esperados levando em conta a simplicidade do modelo implementado. Para continuar com o seu desenvolvimento temos como primeiro objetivo fazer a inclusão dos casos de fusão completa quando $E_{lab} < 100 \text{ A MeV}$ seguindo o formalismo proposto em [Mancusi et al., 2014], onde o problema da entrada dos núcleons incidentes no alvo é feito de uma forma puramente geométrica em dependência da suas trajetórias e sem levar em conta o

bloqueio de Pauli. Outro passo importante será a consideração da transferência de partículas do alvo para o projétil para fazer os cálculos de evaporação para ambos núcleos. O último passo poderia ser a inclusão do fenômeno de dissipação de energia para desta forma fazer uma descrição mais completa destas reações. O maior aporte seria na fase de evaporação–fissão onde seria levada em conta uma correta correlação entre os diferentes graus de liberdade de partículas independentes e coletivos.

BIBLIOGRAFIA

- [Anderson et al., 1955] Anderson, H. L., Davidon, W. C., and Kruse, U. E. (1955). Causality in the pion-proton scattering. *Phys. Rev.*, 100:339–343.
- [Andrade-II et al., 2011] Andrade-II, E., Menezes, J. C. M., Duarte, S. B., Garcia, F., Rossi, P. C. R., Tavares, O. A. P., and Deppman, A. (2011). Fragment mass distributions in the fission of heavy nuclei by intermediate- and high-energy probes. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 38(8):085104.
- [Andrade-II, E et al., 2012] Andrade-II, E., Menezes, J C M, Duarte, S B, Garcia, F, Rossi, P C R, Tavares, O A P, and Deppman, A (2012). Effects of fissioning nuclei distributions on fragment mass distributions for high energy fission. *EPJ Web of Conferences*, 21:10001.
- [Barashenkov et al., 1973] Barashenkov, V. S., Il’inov, A. S., Sobolevskii, N. M., and Toneev, V. D. (1973). Interaction of particles and nuclei of high and ultrahigh energy with nuclei. *Soviet Physics Uspekhi*, 16(1):31.
- [Beretta and Ferrari, 1954] Beretta, L. and Ferrari, F. (1954). *Nuovo Cimento*, page S499.
- [Bernardini et al., 1952] Bernardini, G., Booth, E. T., and Lindenbaum, S. J. (1952). The interactions of high energy nucleons with nuclei. ii. *Phys. Rev.*, 88:1017–1026.
- [Bertini, 1963] Bertini, H. W. (1963). Low-energy intranuclear cascade calculation. *Phys. Rev.*, 131:1801–1821.

- [Block et al., 1956] Block, M. M., Harth, E. M., Cocconi, V. T., Hart, E., Fowler, W. B., Shutt, R. P., Thorndike, A. M., and Whittemore, W. L. (1956). Proton-proton interactions at 2.75 bev. *Phys. Rev.*, 103:1484–1489.
- [Boudard et al., 2002] Boudard, A., Cugnon, J., Leray, S., and Volant, C. (2002). Intranuclear cascade model for a comprehensive description of spallation reaction data. *Phys. Rev. C*, 66:044615.
- [Brosa et al., 1990] Brosa, U., Grossmann, S., and Müller, A. (1990). Nuclear scission. *Physics Reports*, 197(4):167 – 262.
- [Canal et al., 1984] Canal, C. A., Santangelo, E. M., and Vucetich, H. (1984). Nucleon Effective Mass and the A Dependence of Structure Functions. *Physical Review Letters*, 53:1430–1432.
- [Chen et al., 1956] Chen, F. F., Leavitt, C. P., and Shapiro, A. M. (1956). Total $p - p$ and " $p - n$ " cross sections at cosmotron energies. *Phys. Rev.*, 103:211–225.
- [Chew, 1958] Chew, G. F. (1958). Proposal for determining the pion-nucleon coupling constant from the angular distribution for nucleon-nucleon scattering. *Phys. Rev.*, 112:1380–1383.
- [Cool et al., 1956] Cool, R., Piccioni, O., and Clark, D. (1956). Pion-proton total cross sections from 0.45 to 1.9 bev. *Phys. Rev.*, 103:1082–1097.
- [Coor et al., 1955] Coor, T., Hill, D. A., Hornyak, W. F., Smith, L. W., and Snow, G. (1955). Nuclear cross sections for 1.4-bev neutrons. *Phys. Rev.*, 98:1369–1386.
- [Cugnon, 1987] Cugnon, J. (1987). Proton-nucleus interaction at high energy. *Nuclear Physics A*, 462(4):751 – 780.
- [Cugnon and Lemaire, 1988] Cugnon, J. and Lemaire, M.-C. (1988). Medium effects in pion production. *Nuclear Physics A*, 489(4):781 – 802.

- [Cugnon et al., 1996] Cugnon, J., L'Hôte, D., and Vandermeulen (1996). *Nucl. Inst. and Meth. B*, page 215.
- [Cugnon et al., 1981] Cugnon, J., Mizutani, T., and Vandermeulen, J. (1981). Equilibration in relativistic nuclear collisions. a monte carlo calculation. *Nuclear Physics A*, 352(3):505 – 534.
- [Cugnon et al., 1997a] Cugnon, J., Volant, C., and Vuillier, S. (1997a). Improved intranuclear cascade model for nucleon-nucleus interactions. *Nuclear Physics A*, 620(4):475 – 509.
- [Cugnon et al., 1997b] Cugnon, J., Volant, C., and Vuillier, S. (1997b). Nucleon and deuteron induced spallation reactions. *Nuclear Physics A*, 625(4):729 – 757.
- [Demekhina et al., 2013] Demekhina, N. A., Karapetyan, G. S., and Guimarães, V. (2013). Investigation of induced fission of natpb by accelerated 7li ions. *The European Physical Journal Plus*, 128(3):28.
- [Deppman et al., 2013] Deppman, A., Andrade-II, E., Guimarães, V., Karapetyan, G. S., Tavares, O. A. P., Balabekyan, A. R., Demekhina, N. A., Adam, J., Garcia, F., and Katovsky, K. (2013). Supersymmetric fission of heavy nuclei induced by intermediate-energy protons. *Phys. Rev. C*, 88:064609.
- [Deppman et al., 2004] Deppman, A., Duarte, S. B., Silva, G., Tavares, O. A. P., Anéfalos, S., Arruda-Neto, J. D. T., and Rodrigues, T. E. (2004). The crisp package for intermediate- and high-energy photonuclear reactions. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 30(12):1991.
- [Deppman et al., 2006] Deppman, A., Silva, G., Anefalos, S., Duarte, S. B., García, F., Hisamoto, F. H., and Tavares, O. A. P. (2006). Photofission and total photoabsorption cross sections in the energy range of shadowing effects. *Phys. Rev. C*, 73:064607.

- [Deppman et al., 2002] Deppman, A., Tavares, O. A. P., Duarte, S. B., Arruda-Neto, J. D. T., Gonçalves, M., Likhachev, V. P., and de Oliveira, E. C. (2002). Photofissility of heavy nuclei at intermediate energies. *Phys. Rev. C*, 66:067601.
- [Dostrovsky et al., 1958] Dostrovsky, I., Rabinowitz, P., and Bivins, R. (1958). Monte carlo calculations of high-energy nuclear interactions. i. systematics of nuclear evaporation. *Phys. Rev.*, 111:1659–1676.
- [Duijvestijn et al., 1999] Duijvestijn, M. C., Koning, A. J., Beijers, J. P. M., Ferrari, A., Gastal, M., van Klinken, J., and Ostendorf, R. W. (1999). Proton-induced fission at 190 mev of ^{nat}W , ^{197}Au , ^{nat}Pb , ^{208}Pb , and ^{232}Th . *Phys. Rev. C*, 59:776–788.
- [Enqvist et al., 2002] Enqvist, T., Armbruster, P., Benlliure, J., Bernas, M., Boudard, A., Czajkowski, S., Legrain, R., Leray, S., Mustapha, B., Pravikoff, M., Rejmund, F., Schmidt, K.-H., Stéphan, C., Taieb, J., Tassan-Got, L., Vivés, F., Volant, C., and Wlazło, W. (2002). Primary-residue production cross sections and kinetic energies in 1agev 208pb on deuteron reactions. *Nuclear Physics A*, 703(1):435 – 465.
- [Enqvist et al., 2001] Enqvist, T., Wlazło, W., Armbruster, P., Benlliure, J., Bernas, M., Boudard, A., Czajkowski, S., Legrain, R., Leray, S., Mustapha, B., Pravikoff, M., Rejmund, F., Schmidt, K.-H., Stéphan, C., Taieb, J., Tassan-Got, L., and Volant, C. (2001). Isotopic yields and kinetic energies of primary residues in 1 a gev 208pb+p reactions. *Nuclear Physics A*, 686(1):481 – 524.
- [Fowler et al., 1956] Fowler, W. B., Shutt, R. P., Thorndike, A. M., and Whittemore, W. L. (1956). Proton-proton interactions at 1.5 bev. *Phys. Rev.*, 103:1479–1483.
- [Frank et al., 1956] Frank, R. M., Gammel, J. L., and Watson, K. M. (1956). Optical model potential for pion-nucleus scattering. *Phys. Rev.*, 101:891–901.

- [Fröbrich and Gontchar, 1998] Fröbrich, P. and Gontchar, I. (1998). *Langevin Description of Fusion, Deep-inelastic Collisions and Heavy-ion-induced Fission*. Physics reports. North-Holland.
- [Fröbrich and Gontchar, 1998] Fröbrich, P. and Gontchar, I. (1998). Langevin description of fusion, deep-inelastic collisions and heavy-ion-induced fission. *Physics Reports*, 292(3):131 – 237.
- [Glauber, 1955] Glauber, R. J. (1955). Cross sections in deuterium at high energies. *Phys. Rev.*, 100:242–248.
- [Goldberger, 1948] Goldberger, M. L. (1948). The interaction of high energy neutrons and heavy nuclei. *Phys. Rev.*, 74:1269–1277.
- [Hagedorn, 1973] Hagedorn, R. (1973). *Relativistic kinematics: a guide to the kinematic problems of high-energy physics*. Mathematics Lecture Note Series. W. A. Benjamin.
- [Hughes and Schwartz,] Hughes, D. J. and Schwartz, R. B. Bnl-325, 1958 (unpublished).
- [Ivanova and P’ianov, 1957] Ivanova, N. and P’ianov, I. (1957). Uranium fission induced by high-energy protons. *JETP*, 4:367.
- [J. Cugnon and P. Henrotte, 2003] J. Cugnon and P. Henrotte (2003). The low-energy limit of validity of the intranuclear cascade model. *Eur. Phys. J. A*, 16(3):393–407.
- [Jackson, 1957] Jackson, J. D. (1957). Spallation yields from high energy proton bombardment of heavy elements. *Canadian Journal of Physics*, 35(1):21–37.
- [Johansson, 1955] Johansson, S. A. E. (1955). Yield of photoprotons from some light elements. *Phys. Rev.*, 97:1186–1186.
- [Kelić et al., 2004] Kelić, A., Schmidt, K.-H., Enqvist, T., Boudard, A., Armbruster, P., Benlliure, J., Bernas, M., Czajkowski, S., Legrain, R., Leray, S.,

- Mustapha, B., Pravikoff, M., Rejmund, F., Stéphan, C., Taïeb, J., Tassan-Got, L., Volant, C., and Wlazole, W. (2004). Isotopic and velocity distributions of ^{83}Bi produced in charge-pickup reactions of $^{208}_{82}\text{Pb}$ at 1a GeV. *Phys. Rev. C*, 70:064608.
- [Kikuchi and Kawai, 1968] Kikuchi, K. and Kawai, M. (1968). *Nuclear Matter and Nuclear Reactions*. North-Holland research monograph. North-Holland Pub. Co.
- [Kotkin and Serbo, 1971] Kotkin, G. and Serbo, V. (1971). *Collection of Problems in Classical Mechanics*. International series of monographs in natural philosophy. Pergamon Press.
- [Kudo et al., 1998] Kudo, H., Maruyama, M., Tanikawa, M., Shinozuka, T., and Fujioka, M. (1998). Most probable charge of fission products in 24 mev proton induced fission of ^{238}U . *Phys. Rev. C*, 57:178–188.
- [Likhachev et al., 2003a] Likhachev, V., Mesa, J., Arruda-Neto, J., Carlson, B., Carvalho, W., Chamon, L., Deppman, A., Dias, H., and Hussein, M. (2003a). Quasi-free $^{238}\text{U}(e,ef)$ cross section in macroscopic–microscopic approach. *Nuclear Physics A*, 713(1):24 – 44.
- [Likhachev et al., 2003b] Likhachev, V. P., Arruda-Neto, J. D. T., Carvalho, W. R., Deppman, A., Evseev, I. G., Garcia, F., Hussein, M. S., Macedo, L. F. R., Margaryan, A., Mesa, J., Nesterenko, V. O., Rodriguez, O., Pashchuk, S. A., Schellin, H. R., and Vaudeluci, M. S. (2003b). Inclusive quasifree electrofission cross section for ^{238}U . *Phys. Rev. C*, 68:014615.
- [Lindenbaum and Yuan, 1955] Lindenbaum, S. J. and Yuan, L. C. L. (1955). Total cross section of hydrogen for 150- to 750-mev positive and negative pions. *Phys. Rev.*, 100:306–323.
- [Mancusi et al., 2014] Mancusi, D., Boudard, A., Cugnon, J., David, J.-C., Kaitaniemi, P., and Leray, S. (2014). Extension of the Liège intranuclear-cascade model to reactions induced by light nuclei. *Phys. Rev.*, C90(5):054602.

- [Meadows, 1955] Meadows, J. W. (1955). (p, a) and (p, ab) reactions at 100 mev. *Phys. Rev.*, 98:744–749.
- [Metropolis et al., 1958a] Metropolis, N., Bivins, R., Storm, M., Miller, J. M., Friedlander, G., and Turkevich, A. (1958a). Monte carlo calculations on intranuclear cascades. ii. high-energy studies and pion processes. *Phys. Rev.*, 110:204–219.
- [Metropolis et al., 1958b] Metropolis, N., Bivins, R., Storm, M., Turkevich, A., Miller, J. M., and Friedlander, G. (1958b). Monte carlo calculations on intranuclear cascades. i. low-energy studies. *Phys. Rev.*, 110:185–203.
- [Mocko et al., 2006] Mocko, M., Tsang, M. B., Andronenko, L., Andronenko, M., Delaunay, F., Famiano, M., Ginter, T., Henzl, V., Henzlová, D., Hua, H., Lukyanov, S., Lynch, W. G., Rogers, A. M., Steiner, M., Stolz, A., Tarasov, O., Goethem, M.-J. v., Verde, G., Wallace, W. S., and Zalessov, A. (2006). Projectile fragmentation of ^{40}Ca , ^{48}Ca , ^{58}Ni , and ^{64}Ni at 140 mev/nucleon. *Phys. Rev. C*, 74:054612.
- [Moniz et al., 1971] Moniz, E. J., Sick, I., Whitney, R. R., Ficenec, J. R., Kephart, R. D., and Trower, W. P. (1971). Nuclear fermi momenta from quasielastic electron scattering. *Phys. Rev. Lett.*, 26:445–448.
- [Morris et al., 1956] Morris, T. W., Fowler, E. C., and Garrison, J. D. (1956). Proton-proton interactions at 810 mev. *Phys. Rev.*, 103:1472–1478.
- [Morrison. et al., 1953] Morrison., Muirhead, and Rosser (1953). *Phil. Mag*, 44:1326.
- [Nedzel, 1954] Nedzel, V. A. (1954). Total cross sections for 410-mev neutrons. *Phys. Rev.*, 94:174–183.
- [Northcliffe et al., 1993] Northcliffe, L. C., Jain, M., Evans, M. L., Glass, G., Hiebert, J. C., Kenefick, R. A., Bonner, B. E., Simmons, J. E., Bjork, C. W., and

- Riley, P. J. (1993). Differential cross section for n-p elastic scattering in the angular region $50^\circ \leq \theta^* \leq 180^\circ$ at 459 mev. *Phys. Rev. C*, 47:36–46.
- [Orear, 1955] Orear, J. (1955). Energy dependence of the phase shifts in pion-proton scattering. *Phys. Rev.*, 100:288–291.
- [Pereira et al., 2008] Pereira, S. A., Deppman, A., Silva, G., Maiorino, J. R., dos Santos, A., Duarte, S. B., Tavares, O. A. P., and Garcia, F. (2008). Spallation product distributions and neutron multiplicities for accelerator-driven system using the crisp code. *Nuclear Science and Engineering*, 159(1):102–105.
- [Pienkowski et al., 1994] Pienkowski, L., Bohlen, H., Cugnon, J., Fuchs, H., Galin, J., Gatty, B., Gebauer, B., Guerreau, D., Hilscher, D., Jacquet, D., Jahnke, U., Josset, M., Ledoux, X., Leray, S., Lott, B., Morjean, M., Péghaire, A., Röschert, G., Rossner, H., Siemssen, R., and Stéphan, C. (1994). Hot nuclei in reactions induced by 475 mev, 2 gev 1h and 2 gev 3he. *Physics Letters B*, 336(2):147 – 151.
- [Poskanzer, 1978] Poskanzer, A. M. (1978). Proceeding of the international conference on the dynamical properties oh heavy ion reactions (unpublished), lawrence berkeley laboratory report no. lbl-7762 , johannesburg, lawrence berkeley.
- [qing Shen et al., 1989] qing Shen, W., Wang, B., Feng, J., long Zhan, W., tai Zhu, Y., and pu Feng, E. (1989). Total reaction cross section for heavy-ion collisions and its relation to the neutron excess degree of freedom. *Nuclear Physics A*, 491(1):130 – 146.
- [Serber, 1947] Serber, R. (1947). Nuclear reactions at high energies. *Phys. Rev.*, 72:1114–1115.
- [Takechi et al., 2009] Takechi, M., Fukuda, M., Mihara, M., Tanaka, K., Chinda, T., Matsumasa, T., Nishimoto, M., Matsumiya, R., Nakashima, Y., Matsubara,

- H., Matsuta, K., Minamisono, T., Ohtsubo, T., Izumikawa, T., Momota, S., Suzuki, T., Yamaguchi, T., Koyama, R., Shinozaki, W., Takahashi, M., Takizawa, A., Matsuyama, T., Nakajima, S., Kobayashi, K., Hosoi, M., Suda, T., Sasaki, M., Sato, S., Kanazawa, M., and Kitagawa, A. (2009). Reaction cross sections at intermediate energies and fermi-motion effect. *Phys. Rev. C*, 79:061601.
- [Vandenbosch and Huizenga, 1973] Vandenbosch, R. and Huizenga, J. (1973). *Nuclear Fission [By] Robert Vandenbosch [And] John R. Huizenga*. Academic Press.
- [Weber et al., 1994] Weber, M., Donzaud, C., Dufour, J., Geissel, H., Grewe, A., Guillemaud-Mueller, D., Keller, H., Lewitowicz, M., Magel, A., Mueller, A., Münzenberg, G., Nickel, F., Pfützner, M., Piechaczek, A., Pravikoff, M., Roedel, E., Rykaczewski, K., Saint-Laurent, M., Schall, I., Stéphan, C., Sümmerer, K., Tassan-Got, L., Vieira, D., and Voss, B. (1994). Longitudinal momenta and production cross-sections of isotopes formed by fragmentation of a 500 a_mev86kr beam. *Nuclear Physics A*, 578(3):659 – 672.
- [Weisskopf, 1937] Weisskopf, V. (1937). Statistics and nuclear reactions. *Phys. Rev.*, 52:295–303.
- [Yariv and Fraenkel, 1979] Yariv, Y. and Fraenkel, Z. (1979). Intranuclear cascade calculation of high-energy heavy-ion interactions. *Phys. Rev. C*, 20:2227–2243.
- [Yariv and Fraenkel, 1981] Yariv, Y. and Fraenkel, Z. (1981). Intranuclear cascade calculation of high energy heavy ion collisions: Effect of interactions between cascade particles. *Phys. Rev. C*, 24:488–494.