

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE FÍSICA

SBI-IFUSP



ESTIRAMENTO E DESEMPARELHAMENTO NA LINHA DE " YRAST "



Dissertação de Mestrado
Diógenes Galetti

Orientador
Prof. Dr. A.F.R. de Toledo Piza

São Paulo
1974

Alto Pledo 8/19

Christ Ideto Chen

José Rodrigues de Oliveira

Desejo expressar meus agradecimentos

Ao Prof. A.F.R. de Toledo Piza pela orientação segura e pela leitura crítica dos manuscritos.

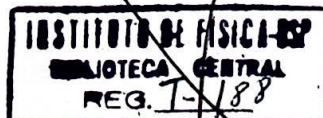
Aos amigos Joaquim, Marilena, Celso, Mauro e Kiomi pelo interesse e discussões.

Ao A. Endo pela confecção dos gráficos.

À Geni pelo incentivo constante.

Ao Sr. Perclides pelas cópias xerox.

À FAPESP pelo apoio financeiro durante a execução do trabalho.



RESUMO

É desenvolvido neste trabalho um modelo fenomenológico de três parâmetros para a banda rotacional do estado fundamental de núcleos deformados, incluindo a região de altos momentos angulares.

Supõe-se que a energia total de um membro da banda rotacional do estado fundamental pode ser escrita como soma das energias de deformação, emparelhamento e rotação e constroi-se uma forma analítica para cada uma dessas contribuições baseadas no comportamento qualitativo esperado para os efeitos relevantes.

São introduzidos efeitos de camadas através da energia de deformação de Myers e Swiatecki, e efeitos de CAP (Coriolis anti pairing), controlados pelos parâmetros ajustáveis, na energia de emparelhamento. Com base no modelo de Trainor e Gupta constroi-se um modelo geométrico semi-clássico para o momento de inércia nuclear.

As energias da banda rotacional calculada são ajustadas às energias experimentais da banda rotacional de núcleos par de terras raras e calculam-se os momentos de inércia efetivos correspondentes com o procedimento de Johnson.

Uma interpretação semi-clássica para o "backbending" e para o "downbending" é obtida do modelo proposto.

ABSTRACT

A three-parameter phenomenological model is developed for ground state rotational band of deformed nuclei, including states with higher angular momentum.

The total energy of a member of the ground state rotational band is written as a sum of a deformation energy, pairing energy and rotational energy. For each of these contributions an analytical expression is constructed based on the expected qualitative behaviour of the relevant effects.

Shell effects are introduced through the deformation energy of Myers and Swiatecki, and Coriolis anti-pairing effects, controlled by the adjustable parameters, are introduced in the pairing energy. A semi-classical geometrical model for the nuclear moment of inertia is constructed based on Trainor and Gupta's "governor" model.

The calculated rotational band energies are adjusted to the experimental ground state rotational band of deformed even even rare earth nuclei and the corresponding effective moment of inertia are calculated with the Johnson formula.

A semi-classical interpretation to the "backbending" and "downbending" is obtained from the proposed model.

ÍNDICE

I. Introdução	1
II. Construção do modelo	6
II. 1. Energia de deformação	8
II. 2. Energia de emparelhamento	16
II. 3. Energia de rotação	20
III. Procedimento de cálculo	26
IV. Resultados	29
V. Comparações e conclusões	30
Apêndice	38
Referências	40

I. INTRODUÇÃO

Em 1953 foram observadas experimentalmente ¹⁾ bandas rotacionais em espectros nucleares, confirmando as predições de A. Bohr ²⁾ sobre excitações rotacionais em núcleos atômicos.

As energias dos estados da banda rotacional podiam ser bem descritas em primeira aproximação pela equação:

$$E_J = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2 \mathcal{I}} \quad (1)$$

onde J é o momento angular do estado (em unidades de \hbar) e \mathcal{I} é interpretado como momento de inércia do núcleo deformado. Em núcleos deformados com número par de prótons e número par de nêutrons os valores do momento angular da banda rotacional do estado fundamental são da forma $J^\pi = 0^+, 2^+, 4^+, 6^+, \dots$. Essa sequência de níveis é explicada por A. Bohr em termos das simetrias das funções de onda que descrevem o núcleo deformado.

A partir de (1) o momento de inércia do núcleo pode ser obtido então usando-se as energias experimentais.

O relacionamento do momento de inércia nuclear com o aspecto de partícula única da estrutura nuclear foi obtido no "cranking model" de Inglis ³⁾. Este modelo supõe uma rotação lenta (em relação aos movimentos das partículas no núcleo) do núcleo como um todo, o que provoca um aumento na energia dos orbitais de partícula única. Este aumento na energia é identificado como a energia rotacional do núcleo como um todo e o momento de inércia obtido desta maneira é da ordem do valor do momento de inércia rígido do núcleo, que é maior que o valor experimental para o estado fundamental por um fator dois ⁴⁾.

Pode-se ainda introduzir neste esquema de cálculo as correlações de emparelhamento ⁵⁾. Estas correlações, que agem

em nucleons em pares de orbitais de partícula única ligados por inversão temporal, são análogas às aquelas de um metal supercondutor e podem ser descritas pela teoria B.C.S. ⁶⁾. A introdução dessas correlações nos cálculos do momento de inércia provoca uma diminuição no valor do momento de inércia rígido de um fator da ordem de dois ⁷⁾, o que leva a um bom acordo com os dados experimentais.

Por outro lado as energias experimentais dos níveis da banda rotacional mostram que, com o aumento do momento angular, o valor do momento de inércia também aumenta.

O aumento do momento de inércia pode ser explicado como consequência de dois fatores :

a) Estiramento centrífugo provocado por forças inerciais.

b) Redução das correlações de emparelhamento através da ação da força de Coriolis, associada a uma redução efetiva da constante de acoplamento da interação de emparelhamento num sistema em rotação. Este efeito foi sugerido por Mottelson e Valatin ⁸⁾ em 1960.

Os modelos desenvolvidos que levam em conta somente o efeito do estiramento centrífugo não conseguem bom acordo com as energias da banda e consequentemente com os momentos de inércia obtidos destas energias a partir de (1).

Como não se tem conhecimento detalhado das mudanças da estrutura nuclear com o aumento do momento angular, J, Mariscotti, G. Goldhaber e Buck ⁹⁾ apresentaram um modelo fenomenológico no qual é introduzida uma energia potencial, que é função de uma variável de estiramento generalizada x, e foi feita a suposição que o momento de inércia, pudesse ser escrito como $\mathcal{J} \sim x^n$. Um ajuste numa série de núcleos mostrou ser n = 1 o

melhor valor de n . Consequentemente o próprio momento de inércia é usado como variável de estiramento.

O modelo VMI (variable moment of inertia) consiste assim em escrever a energia do estado com momento angular J como

$$E_J = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2 \mathcal{J}} + \frac{C}{2} (\mathcal{J} - \mathcal{J}_0)^2 \quad (2)$$

e o momento de inércia para este estado é calculado da condição:

$$\frac{\partial E_J}{\partial \mathcal{J}} = 0$$

Os parâmetros, \mathcal{J}_0 , momento de inércia do estado fundamental, e C , constante da "força de restauração", são ajustados às energias experimentais para cada núcleo.

Este modelo é, porém, equivalente ao do "cranking" de quarta ordem de Harris ¹⁰⁾. O "cranking model" de Harris considera pequena a velocidade angular, definida a partir da relação semi-clássica

$$\hbar^2 J(J+1) = \mathcal{J}^2 \omega^2$$

e, usando teoria de perturbação, escreve a energia e o momento angular como uma série em ω^2

$$E = \frac{1}{2} \omega^2 (\mathcal{J}_0 + 3C_H \omega^2 + 5D\omega^4 + \dots)$$

$$\hbar J = \mathcal{J} \omega = \omega (\mathcal{J}_0 + 2C_H \omega^2 + 3D\omega^4 + \dots)$$

Quando se retém dois termos nestas expansões obtém-se

$$E = \frac{1}{2} \mathcal{J}_0 \omega^2 + \frac{3}{2} C_H \omega^4$$

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_0 + 2C_H \omega^2$$

Esta relação para o momento de inércia é verificada experimentalmente para núcleos com $106 \ll A \ll 248$ e o acordo é excelente para níveis de energia com momento angular de até $J \sim 12 \hbar$. Para valores maiores do momento angular existe desacordo entre o modelo e os valores experimentais.

Recentemente Johnson ^{11,12)} com novas técnicas experimentais conseguiu novos valores para energias rotacionais com momentos angulares de até $22 \hbar$ na região das terras raras. Com estas energias pôde calcular o momento de inércia e a velocidade angular a partir das relações:

$$\frac{2J}{\hbar^2} = \left[\frac{dE}{dJ(J+1)} \right]$$

$$\hbar^2 \omega^2 = 4J(J+1) \left[\frac{dE}{dJ(J+1)} \right]^2$$

calculando as derivadas com os valores das energias obtidas experimentalmente

$$\left[\frac{dE}{dJ(J+1)} \right]_{J(J+1) = J_i^2 - J_i + 1} = \frac{E(J_i) - E(J_i - 2)}{4J_i - 2}$$

Os gráficos do momento de inércia assim obtido contra a velocidade angular $\frac{2J}{\hbar^2} \times \hbar^2 \omega^2$ mostraram duas características novas com relação aos gráficos obtidos do "cranking" de Harris :

a) Em certos núcleos, em seguida ao aumento inicial da velocidade angular, há uma diminuição da mesma seguida de um aumento sucessivo. Nos gráficos $\frac{2J}{\hbar^2} \times \hbar^2 \omega^2$ este comportamento dá origem a uma curva com a forma de um S. Esta anomalia é chamada "backbending".

b) Nos gráficos $\frac{2J}{\hbar^2} \times \hbar^2 \omega^2$ de núcleos como

Yb^{166} e Er^{158} o momento de inércia obtido dos dados experimentais diminui a partir de um valor dado da velocidade angular. Este comportamento é conhecido como "downbending".

A forma peculiar do "backbending" nos gráficos $\frac{2J}{\hbar^2} \times \hbar^2 \omega^2$ está associada com uma acentuada compressão da banda de energias experimentais em relação àquela prevista pelo modelo VMI, o que se nota pelo fato que $(\hbar\omega)^2$ é calculado a partir daquelas energias experimentais. A compressão observada experimentalmente tem uma explicação no efeito de desemparelhamento de Mottelson e Valatin ⁸⁾.

Por outro lado, o "downbending" está associado a uma diminuição do momento de inércia efetivo com ω^2 . Essa diminuição se observa também num gráfico de $\frac{2J}{\hbar^2}$ contra o momento angular J.

Neste trabalho é consruído um modelo fenomenológico de três parâmetros que inclui efeitos de estiramento centrífugo e de desemparelhamento por efeito de forças inerciais. É construído um modelo geométrico semi-clássico para o núcleo e separa-se o conceito de momento de inércia efetivo, obtido a partir das energias experimentais dos níveis da banda, daquele obtido do modelo nuclear visto que o momento de inércia efetivo pode conter contribuições de efeitos não descritos em termos de um movimento coletivo rotacional. É mostrado que o procedimento de Johnson para o cálculo do momento de inércia dá origem ao aparecimento do "downbending" através de efeitos dessa natureza. Esse fenômeno existe mesmo para rotações clássicas de um elipsóide elástico.

II. CONSTRUÇÃO DO MODELO

Consideremos a energia total de um estado rotacional E_{tot}^J . Esta energia depende de alguns parâmetros que consideraremos como sendo a deformação e o grau de emparelhamento, que serão definidos precisamente adiante, além do momento angular. Estes parâmetros variam, porém, com o aumento da rotação nuclear; a deformação, δ , aumenta por causa do estiramento centrífugo e o emparelhamento diminui por causa do efeito das forças de Coriolis ⁸⁾. A energia total de um estado rotacional será então calculada com os valores dos parâmetros obtidos quando se leva em conta esses efeitos da rotação.

Separaremos a energia total de um estado rotacional em diferentes termos de acordo com sua origem física:

$$E_{\text{tot}}^J = E_{\text{def.}}^J + E_{\text{emp.}}^J + E_{\text{rot.}}^J$$

Desta forma a energia total para um estado com momento angular J é escrita como uma soma de três contribuições: energia de deformação, energia de emparelhamento e energia de rotação.

Para podermos descrever rotações nucleares com momentos angulares altos ($J > 10\hbar$) vamos permitir que os diferentes termos de energia não sejam independentes entre si. Isto corresponde a introduzirmos possíveis acoplamentos entre a estrutura intrínseca do núcleo com a rotação do sistema como um todo; devendo-se ter em mente que no limite de baixos momentos angulares tais acoplamentos devem ser pequenos (limite adiabático).

As diferentes contribuições de energia terão suas ex-

pressões analíticas e as suas interdependências construídas fenomenologicamente. Vamos considerar, porém, inicialmente as suas dependências com os parâmetros. A energia de emparelhamento será suposta uma função do momento angular, devido ao efeito das forças de Coriolis, e da deformação devido à variação da densidade de níveis na região da superfície de Fermi com esse parâmetro.

$$E_{\text{emp}} = E_{\text{emp}}(J, \delta)$$

A energia de deformação será considerada como função da deformação, $E_{\text{def}} = E_{\text{def}}(\delta)$, e a energia de rotação como função do momento angular e da deformação, para se levar em conta efeitos das forças inerciais devidas à rotação para o momento de inércia do modelo; $E_{\text{rot}} = E_{\text{rot}}(J, \delta)$.

Assim vamos impor que para cada estado com momento angular J a energia total pode ser escrita como:

$$E_{\text{tot}}(J, \delta) = E_{\text{def}}(\delta) + E_{\text{emp}}(J, \delta) + E_{\text{rot}}(J, \delta).$$

A deformação de equilíbrio para este nível de energia é obtida então da condição:

$$\frac{\partial E_{\text{tot}}(J, \delta)}{\partial \delta} = 0$$

Calcularemos o valor de cada contribuição para a energia total com a deformação de equilíbrio obtida da condição de minimização para os diversos valores do momento angular J , e conseqüentemente poderemos obter as energias de excitação previstas para a banda rotacional que compararemos com aquelas obtidas experimentalmente.

Examinaremos a seguir, mais detalhadamente, cada uma das contribuições para a energia total.

II. 1- ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

A energia de deformação usada será aquela de Myers e Swiatecki ¹³⁾. Esta escolha foi feita em vista de sua simplicidade e o seu uso não é essencial para o modelo. Ela pode em particular ser substituída por um esquema mais "realístico" do tipo desenvolvido por Strutinsky ¹⁴⁾. A teoria semi-empírica de Myers e Swiatecki é também uma fórmula de massa, tal que minimizando-se a massa com respeito à deformação obtém-se as massas dos estados fundamentais dos núcleos além das deformações de equilíbrio correspondentes. Esta teoria semi-empírica para a energia potencial nuclear acrescenta ao modelo da gota líquida uma correção relacionada com os efeitos da existência de camadas na estrutura nuclear. Esta correção é baseada em dois argumentos:

a) Os saltos nos desvios de massa, em relação às predições do modelo simples da gota líquida, entre os núcleos mágicos estão associados com o agrupamento de níveis de energia em um potencial nuclear esférico, sendo o preenchimento de um grupo de níveis correspondente a uma configuração de camada fechada.

b) Estando tal agrupamento associado com a forma esférica do potencial nuclear, desaparecerá ele então para uma configuração suficientemente deformada, indicando o fato que para formas nucleares muito distorcidas o agrupamento de níveis característico dos núcleos mágicos, será destruído, devido à remoção das degenerescências associadas com a forma esférica.

A correção é escrita então como uma função de N e Z para se levar em conta efeitos de camada, e como uma função da forma do núcleo para descrever a variação daquele efeito de camadas com o aumento da deformação.

A energia de deformação deste modelo é escrita como :

$$E(N, Z, \text{forma}) = E_{\text{g.l.}}(N, Z, \text{forma}) + S(N, Z) \cdot f(\text{distorção})$$

onde $S(N, Z)$ é a correção de camadas, e $f(\text{distorção})$ é a função de atenuação dos efeitos de camada e é escrita empiricamente como :

$$f(\text{distorção}) = (1 - 2 \cdot (\text{distorção})^2 / a^2) \exp(-(\text{distorção})^2 / a^2),$$

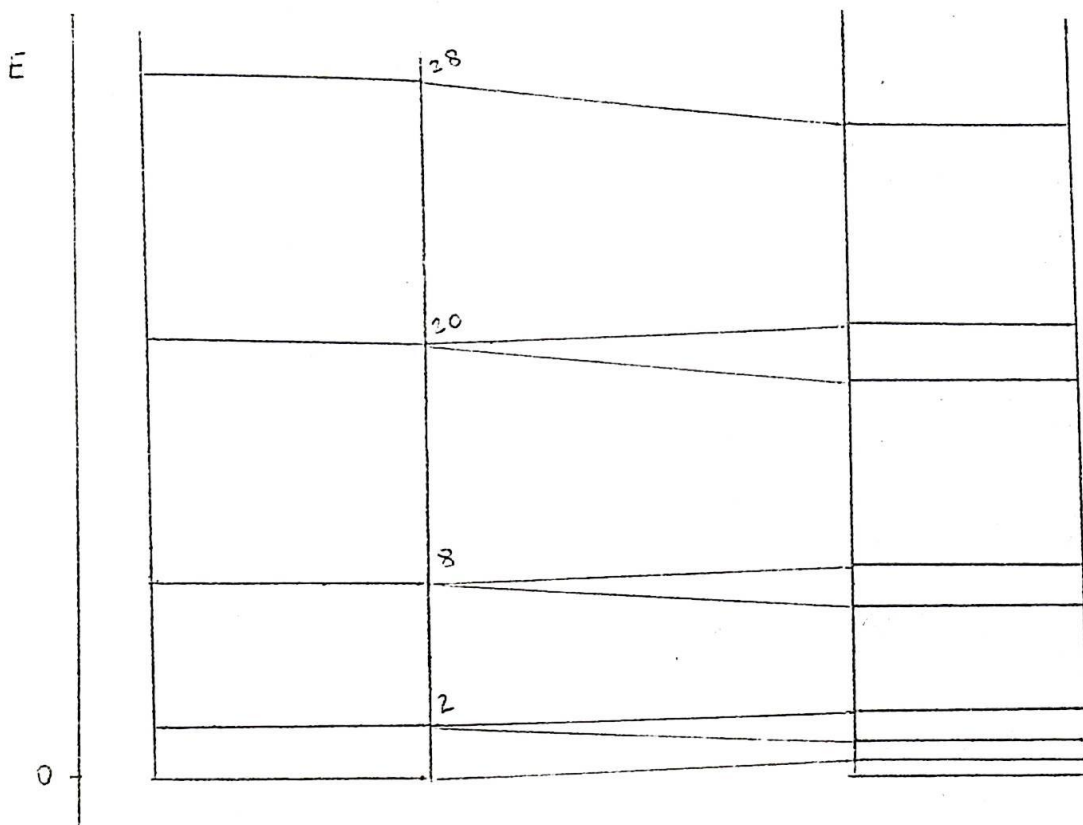
tendo por base, porém, o comportamento do espaçamento de níveis em diagramas de energia contra deformação; e a distorção é definida como a média do quadrado do desvio do raio vetor $R(\theta, \phi)$, especificando a superfície nuclear, do seu valor médio R_0 :

$$(\text{distorção})^2 = \overline{(\delta R)^2} = \frac{\iint (R - R_0)^2 d\Omega}{\iint d\Omega}$$

e a , que é um parâmetro ajustado empiricamente para os estados fundamentais para uma série de núcleos, é o alcance desta função.

1a) CONSTRUÇÃO DA CORREÇÃO DE CAMADAS

A correção de camadas de Myers e Swiatecki é o resultado do agrupamento de uma distribuição inicialmente suave de níveis de energia de partícula única a uma distribuição que consiste de grupos de níveis com populações correspondendo aos números mágicos observados.



Assim a correção de camada é tomada como a diferença em energia entre a soma sobre as contribuições dos níveis de partícula única no caso da distribuição agrupada e não agrupada.

O espectro de energias com distribuição suave é considerado como sendo o de um gás de Fermi ideal degenerado, e aquele com uma distribuição agrupada de níveis é obtido cortando-se a distribuição suave em grupos com populações correspondentes às aquelas das camadas entre os números mágicos, e comprimindo cada grupo a fim de produzir bandas com intervalos de energia nos números mágicos como mostra a figura.

Para se calcular a correção de camadas o núcleo é considerado como um sistema de neutrons e protons que estão num mesmo potencial proporcional ao número total de partículas $A = N + Z$. Isto significa que para núcleos com $N = Z$, o gás de Fermi preencherá o poço de potencial até uma profundidade constante, independente de A , que é $t_F = \left(\frac{9\pi}{8}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2M_0 r_0^2}$; onde M_0 é a massa de um

nucleon e r_0 é a constante do raio nuclear.

Da expressão para a energia do n -ésimo neutron

$$t = t_N \left(\frac{n}{N} \right)^{2/3} \quad ; \quad \text{onde} \quad t_N = t_F \left(\frac{N}{A/2} \right)^{2/3}$$

consegue-se a energia total para todos neutrons na distribuição não agrupada

$$\int_0^N t \, dn = \frac{t_N}{N^{2/3}} \int_0^N n^{2/3} \, dn$$

e analogamente para os protons.

Na distribuição agrupada considera-se inicialmente, para fins de cálculo, que todos níveis entre M_{i-1} e M_i , onde M_i e M_{i-1} são números mágicos, estão com a mesma energia t_i (agrupamento de generado).

Assim pode-se escrever a energia total de neutrons no caso da distribuição degenerada de níveis para neutrons como:

$$\int_0^N t_d \, dn \quad ; \quad \text{onde } t_d \text{ é uma função que consiste de degraus}$$

de altura constante t_i entre os números mágicos, e é escrita como

$$t_d = \frac{t_N}{N^{2/3}} q(n)$$

$$q(n) = q_i = \frac{\int_{M_{i-1}}^{M_i} n^{2/3} \, dn}{\int_{M_{i-1}}^{M_i} dn} = \frac{3}{5} \frac{M_i^{5/3} - M_{i-1}^{5/3}}{M_i - M_{i-1}}$$

Esta escolha de q_i corresponde a tomar t_i no centro de gravidade da banda não agrupada correspondente.

Fazendo-se considerações análogas para os protons, a correção de camada é escrita então:

$$\Delta E = \frac{t_N}{N^{2/3}} \int_0^N [q(n) - n^{2/3}] \, dn + \frac{t_Z}{Z^{2/3}} \int_0^Z [q(z) - z^{2/3}] \, dz$$

$$\Delta E = \frac{t_F}{(A/2)^{2/3}} \left[F(N) + F(Z) \right]$$

com

$$F(N) = \int_0^N [q(n) - n^{2/3}] dn \quad e \quad F(Z) = \int_0^Z [q(z) - z^{2/3}] dz$$

Para se calcular corretamente, porém, a correção de camadas deve-se tomar bandas parcialmente agrupadas e isto é feito introduzindo-se um fator de agrupamento b (parâmetro a ser ajustado). Se $b=0$ não temos nenhum agrupamento e se $b=1$ o agrupamento é total. Então o efeito do agrupamento parcial é substituir t_F por bt_F , quando a posição de cada nível no espectro de energia varia linearmente com b (E é linearmente proporcional a b).

Assim a correção de camadas introduzida por Myers e Swiatecki é escrita como:

$$C_s(N, Z) = C \left[\frac{F(N) + F(Z)}{(A/2)^{2/3}} - c A^{1/3} \right]$$

onde $C = bt_F$ e c é um parâmetro introduzido para dar o sinal conveniente para a correção de camadas. Os números mágicos tomados para o cálculo dos q_i são $M_i = 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126$ para neutrons e protons e considera-se $M_c = 0$.

Com a correção de camadas e a função de atenuação calculadas pode-se então escrever a energia de deformação de um núcleo com A partículas.

$E(N, Z, \text{forma}) = \frac{M_N}{N} + \frac{M_Z}{Z} + \text{energia de volume} + \text{energia de superfície} + \text{energia Coulombiana} + \delta + S(N, Z)$. função de atenuação

Onde

M_n — massa do neutron

M_z — massa do proton

energia de volume = $-C_1 A$

energia de superfície = $C_2 A^{2/3} f$ (forma)

energia Coulombiana = $\frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0} \frac{Z^2}{A^{1/3}} g(\text{forma}) - \frac{\pi^2}{2} \frac{e^2}{r_0} \left(\frac{d}{r_0}\right)^2 \frac{Z^2}{A}$

O segundo termo na energia eletrostática corrige a energia da gota com forma arbitrária considerando a distribuição de carga da forma de uma distribuição de Fermi e retendo-se a ordem mais baixa na expansão do parâmetro d , que mede a espessura da superfície ($d = 0.546$ fm, obtido das experiências de espalhamento de elétrons de Stanford).

Para se escrever as funções de forma, considerando-se especificamente casos de simetria axial, escreve-se o raio

$$R(\theta) = R_0 \left[1 + \sum_n a_n P_n(\cos \theta) \right] \quad ; \text{ e então}$$

$$\overline{\delta R^2} = R_0^2 \sum_n \frac{a_n^2}{2n+1}$$

$$f = 1 + \sum_n \frac{(n-1)(n+2)}{2(2n+1)} a_n^2 + \dots$$

$$g = 1 - \sum_n \frac{5(n-1)}{(2n+1)^2} a_n^2 + \dots$$

Quando se retém somente $n = 2$ (deformação de quadrupolo), e usando-se a definição dos parâmetros β (deformação) e γ (forma), relacionados com os semi-eixos de um elipsóide, obtêm-se:

$$\overline{\delta R^2} = R_0^2 \frac{1}{5} \beta^2 \left(1 - \frac{1}{7} \cos 3\gamma \right) + \dots$$

$$f = 1 + \frac{2}{5} \sigma^2 - \frac{2}{21} \sigma^3 \cos 3\gamma + \dots$$

$$g = 1 - \frac{1}{5} \sigma^2 - \frac{1}{105} \sigma^3 \cos 3\gamma + \dots$$

Da relação entre σ e β ($\beta^2 = \sum_{\lambda} \sum_{\mu} |a_{\lambda\mu}|^2$)

$$\beta^2 = \frac{4\pi}{5} \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{7} \cos 3\gamma + \dots\right)$$

toma-se a variável $\alpha^2 = \frac{5}{4\pi} \beta^2$, que dividida por $\alpha_0^2 = \frac{5a^2}{R_0^2}$ é a variável usada para se escrever a energia de deformação

$$E(N, Z, \theta, \delta) = E_0 + E\sigma^2 - F\sigma^3 \cos 3\gamma + \delta(N, Z) \cdot (1 - 2\theta^2) \exp(-\theta^2)$$

onde

$$\theta = \left(\frac{\alpha}{\alpha_0}\right)^2$$

$$E_0 = M_n N + M_p Z - C_1 A + C_2 A^{2/3} + C_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - C_4 \frac{Z^2}{A} + \delta$$

$$E = \left(\frac{2}{5} C_2 A^{2/3} - \frac{1}{5} C_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}}\right) \alpha_0^2$$

$$F = \frac{4}{105} \left(C_2 A^{2/3} + C_3 \frac{Z^2}{A^{1/3}}\right) \alpha_0^2$$

$$C_3 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{r_0} \quad ; \quad C_4 = \frac{\pi^2}{2} \left(\frac{d}{r_0}\right)^2 \frac{e^2}{r_0}$$

Para os nossos propósitos, porém, vamos exigir que $\gamma=0$ (forma esferoidal) e introduziremos um novo parâmetro de deformação, relacionado com os semi-eixos (a, a, c) de um elipsóide prolato da seguinte forma:

$$\delta = \frac{c}{a} - 1$$

Por outro lado $\theta^2 = \frac{A^{2/3}}{4\pi \left(\frac{\alpha}{r_0}\right)^2} \beta^2$ e $\delta = \frac{3\beta \sqrt{5}}{1 - \beta \sqrt{5}} \frac{\sqrt{16\pi}}{\sqrt{16\pi}}$ (apêndice)

então:

$$\theta^2 = \frac{4A^{2/3} \delta^2}{5 \left(\frac{\alpha}{r_0}\right)^2 (3 + \delta)^2}$$

A energia de deformação que usaremos então é:

$$E - E = E_0^2 - E_0^3 + \dots(N, Z) \cdot (1 - 2\epsilon^2) \exp(-\epsilon^2)$$

e os parâmetros de Myers e Swiatecki obtidos de um ajuste na tabela periódica são :

$$a_1 = 15.4941 \text{ MeV}$$

$$a_2 = 17.9439 \text{ MeV}$$

$$c_3 = 0.7053 \text{ MeV}$$

$$K = 1.7826$$

$$C = b t_F = 5.8 \text{ MeV}$$

$$c = 0.325$$

$$\frac{a}{r_0} = 0.444 \quad ; \quad e$$

$$c_1 = a_1 \left[1 - K \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2 \right]$$

$$c_2 = a_2 \left[1 - K \left(\frac{N-Z}{A} \right)^2 \right]$$

II. 2 - ENERGIA DE EMPARELHAMENTO

Usaremos basicamente a energia de emparelhamento para níveis não degenerados, que é escrita para neutrons (ou protons) como :

$$E_{\text{emp}} = \frac{\Delta^2}{2d}$$

onde

Δ - "gap" de energia, que neste modelo foi calculado a partir de energias de ligação ¹⁵⁾ com a fórmula (para núcleos par-par) :

$$\Delta_n = \frac{1}{4} [B(N-2, Z) - 3B(N-1, Z) + 3B(N, Z) - B(N+1, Z)] \quad 16)$$

d - espaçamento médio dos níveis de energia de neutrons (ou protons) no entorno da energia de Fermi.

Introduziremos, porém, dois efeitos na energia de emparelhamento : a variação do espaçamento de níveis com a variação da deformação nuclear, proveniente do estiramento centrífugo, e o efeito de desemparelhamento provocado por forças de Coriolis, e - feito este associado a uma redução efetiva da constante de acoplamento da interação de emparelhamento num sistema em rotação ⁸⁾ .

2a) ESPAÇAMENTO DE NÍVEIS DE ENERGIA

Se nos restringirmos a descrever núcleos pesados ($A > 1$) podemos usar a expressão para a energia de uma partícula num gás de Fermi (ex. neutrons) com distribuição não agrupada de níveis:

$$t = t_N \left(\frac{n}{N} \right)^{2/3}$$

e calcular então o espaçamento de níveis na energia de Fermi

$$\left. \frac{dt}{dn} \right|_{n=N} = d$$

o que dá para a distribuição não agrupada :

$$d = \frac{2}{3} \frac{t_N}{N}$$

Este espaçamento será modificado, porém, quando se agrupar os níveis de energia. O intervalo de energia ΔE , correspondente ao número de partículas de uma camada fechada, na distribuição não agrupada deverá ser multiplicado por $(1 - b)$, onde b é o fator de agrupamento, e assim o espaçamento também será multiplicado por $(1 - b)$.

Esta descrição, no entanto, não leva em conta o efeito da deformação. Isto pode ser feito introduzindo-se no efeito de agrupamento a função de atenuação, obtida para a energia de deformação,

$$f_{at} = (1 - 2\theta^2) \exp(-\theta^2)$$

Assim o agrupamento depende da deformação, e o espaçamento de níveis é escrito como :

$$d = \frac{2}{3} \frac{t_N}{N} (1 - b f_{at})$$

e analogamente para protons.

A introdução da energia de emparelhamento dependente da deformação através do agrupamento de níveis modifica o valor do parâmetro b obtido por Myers e Swiatecki ($C = b \cdot t_F$). Isto é corrigido impondo-se que a deformação de equilíbrio para o estado fundamental obtida da energia de deformação seja a mesma que aquela obtida da energia de deformação mais energia de emparelhamento. Esta condição fornece uma equação que permite calcular um novo fator de agrupamento (e um novo C)

$$b_2^3 f_{at}^2 - b_2^2 (2 f_{at} + b_1 f_{at}^2) + b_2 \left(\frac{\Delta_n^2}{\frac{2}{3} \frac{t_N}{N} t_F} + \frac{\Delta_p^2}{\frac{2}{3} \frac{t_z}{Z} t_F} + 2 b_1 f_{at} \right) - b_1 = 0$$

Esta equação deve ser resolvida numericamente para cada núcleo e é obtido um novo valor, b_2 , para o fator de agrupamento e um novo valor $C (= b_2 t_F)$.

2b) DESEMPARELHAMENTO PROVOCADO PELAS FORÇAS
DE CORIOLIS

Quando o momento angular da banda rotacional do estado fundamental aumenta, com o correspondente aumento da frequência de rotação nuclear, as correlações devidas à força de emparelhamento essencialmente cessam para algum valor crítico do momento angular, J_c , como resultado do efeito das forças de Coriolis. Esta diminuição da energia de emparelhamento será descrita empiricamente por uma função decrescente do momento angular, $h(J)$, que tem duas propriedades características :

a) O ponto, J_c , em que ocorre uma redução apreciável (por exemplo 50%) da energia de emparelhamento original.

b) A " velocidade " com que esta redução se dá com o aumento do momento angular.

O efeito de desemparelhamento provocado pelas forças de Coriolis é então descrito neste modelo pela função $h(J)$ com dois parâmetros a serem determinados: o momento angular crítico, J_c , e o parâmetro que mede a " velocidade " da redução da energia de emparelhamento, n . Estes parâmetros estarão presentes na função $h(J)$ do momento angular :

$$h(J) = \left[1 + \left(\frac{J}{J_c} \right)^n \right]^{-1}$$

cujo comportamento deve traduzir a diminuição da energia de emparelhamento. Esta função foi escolhida arbitrariamente, à vista de sua conveniência, não sendo esta escolha essencial ao problema; outras formas podem eventualmente ser usadas.

Assim a energia de emparelhamento para este modelo é escrita como :

$$E_{emp}(J, \delta) = \frac{\Delta_n^2}{2 \frac{2}{3} \frac{t_N}{N} (1 - b \int_{at})} \left[1 + \left(\frac{J}{J_c} \right)^n \right]^{-1} \text{ para neutrons}$$

(e analogamente para os protons)

Com esta forma analítica para a função $h(J)$, o parâmetro J_0 é interpretado como valor do momento angular para o qual a função $h(J)$ tem valor 0.5, e o parâmetro n mede a inclinação da curva no ponto $J = J_0$. Esses parâmetros são livres para ser ajustados em cada caso que se estude.

II. 3- ENERGIA DE ROTAÇÃO

3a) MODELO SEMI-CLÁSSICO PARA O MOMENTO DE INÉRCIA DE NÚCLEOS DEFORMADOS

Consideremos um núcleo axialmente simétrico com deformação prolata definida pelos seus semi-eixos maior e menor, c e a respectivamente. O momento de inércia deste núcleo para rotações rígidas em torno do semi-eixo menor é dado por :

$$J = \frac{1}{5} \mu (a^2 + c^2) \quad , \text{ onde } \mu \text{ é a massa do núcleo.}$$

Introduzindo-se uma variável que mede a deformação, $\delta = \frac{c}{a} - 1$, podemos escrever o momento de inércia :

$$J = \frac{1}{5} \mu a^2 (2 + 2\delta + \delta^2)$$

Quando este sistema roda sua deformação muda devido a efeitos inerciais. Vamos considerar que, embora a deformação aumente, tenhamos ainda a forma prolata e o volume constante. Como o volume do elipsóide é dado por :

$$V = \frac{4\pi}{3} a^2 c \quad (= \frac{4\pi}{3} r_0^3 A)$$

concluimos que $a^3 = \frac{r_0^3 A}{1 + \delta}$ e o momento de inércia assim obtido para um núcleo deformado, quando se faz $\mu = m_0 A$, é

$$J = \frac{m_0 r_0^2 A^{5/3}}{5(1 + \delta)^{2/3}} (2 + 2\delta + \delta^2)$$

Este é, porém, o momento de inércia rígido. Os valores resultantes desta expressão para valores experimentais de δ , obtidos de medidas de momentos de quadrupolo elétrico, são aproximadamente o dobro dos valores empíricos do momento de inércia do estado fundamental.

Uma maneira de corrigir esta discrepância foi sugerida por Trainor e Gupta ¹⁷⁾ que baseados no fato de núcleos esféricos não terem espectros rotacionais e que núcleos levemente deformados têm valores empíricos pequenos para o momento de inércia da banda fundamental, acrescentaram ao modelo anterior a hipótese da existência de um caroço rotacionalmente invariante. Desta forma a única massa que participa efetivamente da rotação, neste modelo, é aquela que está fora deste caroço. Geometricamente esta massa corresponde àquela que resta quando se elimina uma esfera de raio a do elipsóide que descreve o núcleo.

O momento de inércia do sistema é escrito então como a diferença entre a contribuição de todo elipsóide e desta esfera inscrita, suposta com densidade de massa constante :

$$J = \frac{m_0 r_0^2 A^{5/3}}{5(1+\delta)^{2/3}} (2+2\delta+\delta^2) - \frac{2}{5} \frac{m_0}{r_0^3} a^5$$

Quando o núcleo gira há um aumento de deformação e se há conservação de volume teremos conseqüentemente uma diminuição do raio da esfera inscrita, o que provoca um aumento no momento de inércia.

Introduziremos, porém, neste ponto algumas modificações referentes ao comportamento do raio da esfera com o aumento do momento angular.

Para descrever a variação do raio da esfera com o momento angular vamos introduzir uma função $f(J)$ que é definida pelas condições :

a) Quando $J = 0$ a esfera que não contribui para o momento de inércia do sistema tem raio a , ou seja, é a maior esfera inscrita no elipsóide.

b) Para valores do momento angular $J > 0$ o raio da

esfera diminui, e a casca esférica correspondente à diferença entre os raios a e αa , onde $0 \leq \alpha \leq 1$, passa a contribuir para o momento de inércia do sistema.

Assim o raio da esfera (igual ao raio menor da casca esférica) é escrito como :

$$r(J) = a f(J)$$

A função $f(J)$, como foi definida, está desta maneira relacionada com a função $h(J)$ que descreve o comportamento da energia de emparelhamento.

A forma de $f(J)$ usada neste trabalho foi obtida da hipótese que a densidade de energia de emparelhamento é constante

$$\rho_{emp} = \frac{E_{emp}(J=0)}{\frac{4\pi}{3} a^3}$$

Desta condição obtemos que :

$$E_{emp}(J) = \frac{4\pi}{3} \rho_{emp} r^3(J)$$

e conseqüentemente

$$r(J) = \left[\frac{E_{emp}(J)}{E_{emp}(J=0)} \right]^{1/3} a$$

que pode ser escrita na forma

$$r(J) = a f(J) \quad \text{se} \quad \left[\frac{E_{emp}(J)}{E_{emp}(J=0)} \right]^{1/3} = f(J)$$

com $E_{emp}(J)$ obtida no item anterior.

Como estamos considerando que a contribuição para o momento de inércia vem de uma casca esférica, devemos então considerar a parte de energia de emparelhamento que depende do momento angular como sendo aquela correspondente à casca esférica.

Esta parte pode ser escrita como :

$$E_{emp}(J=0) h(J) (1-W)$$

onde W é um parâmetro adimensional a ser ajustado que mede a fração da energia de emparelhamento total que corresponde a contribuição da esfera restante.

Assim a energia de emparelhamento deve ser escrita como uma parte correspondente à casca esférica, e que depende do momento angular, mais uma contribuição que independe do momento angular; esta contribuição não contribui em nada para o modelo e pode ser removida por uma definição apropriada do zero da energia.

$$E_{emp} = E_{emp}(J=0) [h(J)(1-W) + W]$$

Consequentemente a função $f(J)$ é escrita como

$$f(J) = \left\{ \frac{E_{emp}(J=0) [h(J)(1-W) + W]}{E_{emp}(J=0)} \right\}^{1/3}$$

O momento de inércia do modelo é então calculado como a diferença entre a contribuição de todo elipsóide e a contribuição da esfera cujo raio diminui com o momento angular.

$$\mathcal{J}(J, \delta) = \frac{m_0 r_0^2 A^{5/3}}{5(1+\delta)^{2/3}} (2 + 2\delta + \delta^2) - \frac{2}{5} \frac{m_0 r_0^2 A^{5/3}}{(1+\delta)^{5/3}} f^5(J)$$

Para termos esta expressão em condições de ser usada devemos ainda modificar a função $f(J)$ no sentido de incluir separadamente efeitos de prótons e nêutrons, uma vez que para núcleos par-par de terras raras, onde o modelo funciona bem, $N > Z$, e consequentemente os nêutrons ocupam estados de energias mais altas que os prótons e pode-se desprezar o emparelhamento de prótons e nêutrons.

A modificação provém do fato de termos considerado o núcleo como sendo formado de neutrons e protons ocupando o mesmo volume sem termos feito considerações sobre os momentos angulares para os quais o desemparelhamento acontece apreciavelmente (momento angular crítico ⁸⁾) em cada um dos casos.

Com finalidade de cálculo adotaremos os resultados de Krumlinde ¹⁸⁾, que se tomados qualitativamente prevêem:

1) Os neutrons têm momentos angulares críticos menores que dos protons.

2) Dentro do intervalo de momentos angulares obtidos experimentalmente só podemos encontrar momentos angulares críticos de neutrons.

De posse desses dois resultados reformulamos a energia de emparelhamento fazendo a dependência da mesma com o momento angular ficar somente com a contribuição dos neutrons.

Com esta modificação a energia de emparelhamento é escrita como :

$$E_{emp}(J, \delta) = E_{emp}^{protons}(\delta) + E_{emp}^{neutrons}(J, \delta)$$

$$= E_{emp}^{protons}(\delta) + E_{emp}^{neutrons}(\delta, J=0) [h(J)(1-W) + W]$$

Desta maneira os parâmetros J_c , n e W que serão ajustados se referem aos neutrons.

Finalmente a função $f(J)$ fica :

$$f(J) = \left\{ \frac{E_{\text{emp}}^{\text{protons}}(\delta) + E_{\text{emp}}^{\text{neutrons}}(\delta, J=0) [\hbar(J)(1-W) + W]}{E_{\text{emp}}^{\text{protons}}(\delta) + E_{\text{emp}}^{\text{neutrons}}(\delta, J=0)} \right\}^{1/3}$$

e podemos introduzir o momento de inércia do modelo, calculado com esta função, na energia de rotação :

$$E_{\text{rot}} = \frac{\frac{1}{2} \hbar^2 J(J+1)}{2 \mathcal{J}(J, \delta)}$$

III. PROCEDIMENTO DE CÁLCULO

Tendo-se construído uma expressão analítica que parametriza cada contribuição para a energia total, o problema consiste em determinar a deformação de equilíbrio e consequentemente a energia de equilíbrio para cada estado da banda. Como a energia total é função do momento angular e da deformação, a condição de equilíbrio é determinada por :

$$\frac{\partial}{\partial \delta} E_{\text{tot}}(J, \delta) = 0 \quad \text{para } J \text{ fixo}$$

Esta condição foi estudada em diferentes etapas :

1) Escreveu-se a expressão da energia total para alguns núcleos de terras raras dos quais tem-se resultados experimentais para as energias dos estados (com momentos angulares da ordem de até $20 \hbar$) usando-se os parâmetros definidos anteriormente. Os núcleos estudados foram : Dy^{158} , Dy^{160} , Er^{162} , Yb^{166} , Yb^{168} . Estes núcleos foram escolhidos por serem bons rotores para baixos valores de J , além do fato de terem as bandas de energias medidas até altos momentos angulares.

2) Tomando-se o Dy^{160} como amostra do conjunto a ser estudado, verificou-se graficamente a existência de um só mínimo na função $E_{\text{tot}}(J, \delta)$ para cada estado da banda rotacional no intervalo usado para os valores da deformação ($0 \leq \delta \leq 0,340$). Esta verificação foi feita com um programa de computador que calcula para cada estado com momento angular J as diferentes contribuições de energia e a energia total para um conjunto dado de valores da deformação. Para cada estado é calculada a dependência de $E_{\text{tot}}(J, \delta)$ com δ . Cada uma dessas funções mostrou presença de um só mínimo. Para efeitos de cálculo o inter-

valo $0.2800 \leq \delta \leq 0.3150$ foi suficiente para conter todas as de -
 formações de equilíbrio dos diferentes estados do núcleo estuda -
 do.

3) Fez-se a suposição que a função $E_{\text{tot}}(J, \delta)$,
 para um dado J , pode ser bem descrita por uma parábola no inter -
 valo $0.2600 \leq \delta \leq 0.3360$. Esta suposição é justificada pelo com -
 potamento da função $E_{\text{tot}}(J, \delta)$ neste intervalo. Assim, para
 um dado estado, a energia total é calculada para três valores
 conhecidos da deformação, resolve-se o sistema de equações 3X3
 e se obtém os coeficientes da expressão

$$E_{\text{tot}}(J, \delta) = E_0 + E_1 \delta + E_2 \delta^2$$

de onde se calcula

$$\delta_{\text{mín}} = - \frac{E_1}{2 E_2}$$

Com estas aproximações pode-se calcular as deforma -
 ções de equilíbrio para os estados da banda que está se estudan -
 do e as correspondentes energias de equilíbrio :

$$E_{\text{tot}}^{\text{mín}}(J, \delta) = E_{\text{tot}}(J, \delta_{\text{mín}})$$

Com os valores da energia de equilíbrio, obtidos a par -
 tir das deformações de equilíbrio e de valores dados para os pa -
 râmetros J_0 , n e W , calculam-se os valores do momento de inér -
 cia da banda segundo o procedimento de Johnson :

$$\frac{2J}{\hbar^2} = \frac{4J-2}{\Delta E_{J, J-2}}$$

Este método de cálculo de valores para o momento de
 inércia obtido da banda de energias foi introduzido num progra -
 ma de computador que ajusta os valores dos parâmetros J_0 , n e W

de tal forma a se obter o melhor acordo dos momentos de inércia obtidos das energias experimentais com os calculados por este procedimento.

Desta forma, para um dado núcleo, o programa dá os melhores valores dos parâmetros J_0 , n e W e os valores do momento de inércia da banda experimental e da banda do modelo.

IV. RESULTADOS

Os parâmetros J_c , n e w foram ajustados e os melhores valores do momento de inércia da banda calculada do modelo foram obtidos para os núcleos: Dy^{158} , Dy^{160} , Er^{162} , Yb^{166} , e Yb^{168} .

A comparação entre os resultados para o momento de inércia da banda calculada do modelo e os do momento de inércia da banda experimental é feita nas figuras 1, 2, 3, 4 e 5 respectivamente. As figuras mostram $\frac{2J}{\hbar^2} \times J$ e conseqüentemente o "back-bending" não aparece.

Os valores da energia das bandas rotacionais dos núcleos estudados foram tomados da ref. (12).



V. COMPARAÇÕES E CONCLUSÕES

Os resultados obtidos pelo presente modelo para o momento de inércia da banda mostraram :

1) Desvio sistemático em relação aos resultados obtidos da banda experimental na parte dos momentos angulares pequenos ($J \leq 10 \hbar$). A região de baixos momentos angulares é bem descrita pelo VMI ⁹⁾ e pelo modelo de Trainor e Gupta ¹⁷⁾, que têm seus parâmetros ajustados para descrever bem esta região, mas não é bem descrita pelo modelo proposto pelo fato que o mesmo depende crucialmente dos valores da deformação nuclear nestes estados da banda rotacional, valores estes que não podem ser bem calculados por causa do caráter geral do formalismo usado do modelo de Myers e Swiatecki. Este modelo não consegue dar valores muito bons para a deformação de equilíbrio uma vez que se propõe a reproduzir o comportamento médio das deformações na tabela periódica e conseqüentemente os valores do momento de inércia do modelo assim obtidos apresentam um desacordo com aqueles resultados experimentais.

Este desacordo pode também ser entendido se compararmos os parâmetros \mathcal{J}_0 do modelo VMI com os valores correspondentes obtidos do modelo geométrico para o momento de inércia quando se faz $J = 0$:

$$\mathcal{J}_0 = \frac{2}{5} m_0 r_0^2 A^{5/3} \left[\frac{(2+2\delta+\delta^2)}{2(1+\delta)^{2/3}} - \frac{1}{(1+\delta)^{5/3}} \right]$$

A comparação está na tabela 1

Tabela 1

NÚCLEO	Dy ¹⁵⁸	Dy ¹⁶⁰	Er ¹⁶²	Yb ¹⁶⁶	Yb ¹⁶⁸
\mathcal{J}_0 VMI (MeV ⁻¹)	29.8	34.3	29.3	28.9	34.2
\mathcal{J}_0 modelo (MeV ⁻¹)	29.5	31.2	31.7	33.4	34.4

As melhores descrições do comportamento do momento de inércia da banda para baixos momentos angulares são aquelas para as quais o ajuste de \mathcal{J}_0 é melhor : Dy¹⁵⁸ e Yb¹⁶⁸.

2) Para altos momentos angulares ($J > 10 \hbar$), os modelos de Trainor e Gupta e o VMI não apresentam bons resultados para o momento de inércia da banda. O presente modelo consegue, porém, descrever bem as particularidades dos núcleos estudados mediante o ajuste dos parâmetros introduzidos na energia de emparelhamento, que foi considerada como a mais importante das contribuições de energia naquela região do espectro rotacional. Desta forma o ajuste dos parâmetros controla o aparecimento das anomalias de comportamento do momento de inércia da banda :

a) A compressão da banda de energias relativamente àquela prevista pela forma $J (J+1)$, e que provoca o aparecimento do " backbending " é controlada pelo parâmetro n . Este parâmetro mede o intervalo de momentos angulares no qual a casca

esférica do modelo geométrico do núcleo descrito anteriormente passa a contribuir para a rotação rígida do núcleo. Assim quanto menor é o valor de n maior é o intervalo de momentos angulares, pois a função $\left[1 + \left(\frac{J}{J_0}\right)^n\right]^{-1}$ tem inclinação menor no entorno de um dado valor de J_0 . Conseqüentemente quando o valor de n é pequeno o momento de inércia da banda tem um aumento suave com o aumento de J e não há a compressão na banda de energias responsável pelo "backbending".

O aparecimento da compressão da banda de energias é entendido neste modelo como devido a uma variação de $(1 - W)\%$ da energia de emparelhamento de neutrons num intervalo pequeno de momentos angulares no entorno de J_0 , estando este intervalo relacionado com o parâmetro n .

Dos núcleos estudados, o Dy^{158} , Dy^{160} e o Yb^{168} não apresentam "backbending" e os valores obtidos de n foram respectivamente: 3.0, 4.0 e 3.5; por outro lado para o Er^{162} e o Yb^{166} , que apresentam aquela anomalia obteve-se $n = 6.5$.

Não se tentou nenhuma explicação microscópica dos parâmetros. A troca, porém, da formulação de Myers e Swiatecki¹³⁾ pela de Strutinsky¹⁴⁾ para a energia de deformação poderá melhorar a determinação das deformações de equilíbrio e também, devido ao seu tratamento mais realístico dos efeitos de camadas, a formulação de Strutinsky poderá fornecer informações maiores sobre o efeito da variação da densidade de níveis no entorno da energia de Fermi, provocada pela deformação, nas mudanças do valor da energia de emparelhamento, e o possível relacionamento da quele efeito com o aparecimento do "backbending".

b) O aparecimento do fenômeno do "downbending" no momento de inércia da banda do Yb^{166} pode ser reproduzido pelo modelo e uma explicação para aquele fenômeno é possível de ser obtida em termos semi-clássicos. O ponto de partida para esta explicação do "downbending" é a observação do fato que os núcleos que apresentam esta anomalia para algum valor do momento angular já tinham apresentado o "backbending" para valores menores do momento angular. Como o "backbending" é descrito no modelo como uma variação brusca na função $h(J) = \left[1 + \left(\frac{J}{J_c}\right)^n\right]^{-1}$, no entorno de J_c , devido ao valor de n , podemos considerar que para valores um pouco maiores do que J_c a condição:

$$\frac{dh(J)}{dJ} \approx 0 \quad \text{é satisfeita}$$

Desta forma para valores do momento angular um pouco maiores do que J_c a energia total do sistema fica escrita como:

$$E(J, \delta) = \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2 \mathcal{J}_{\text{mod}}(J, \delta)} + E_{\text{def}}(\delta) + E_{\text{emp}}(\text{constante})$$

com o momento de inércia do modelo dependendo praticamente só de δ .

O momento de inércia da banda, segundo Johnson, é calculado então como:

$$\frac{2 \mathcal{J}_{\text{banda}}}{\hbar^2} = \frac{4J_1 - 2}{E(J_1, \delta) - E(J_1 - 2, \delta)} \quad \text{para um dado valor } J_1$$

Para $J_2 = J_1 + 2$, podemos escrever o novo valor do mo-

mento de inércia da banda:

$$\frac{2J_{\text{banda}}}{h^2} = \frac{4J_2 - 2}{E(J_2, \delta) - E(J_1, \delta)}$$

A condição do aparecimento do "downbending" é

$$\frac{4J_1 - 2}{\Delta E_{J_1, J_1-2}} > \frac{4J_2 - 2}{\Delta E_{J_2, J_2}}$$

que também pode ser escrita como:

$$\Delta E_{J_1+2, J_1} > \frac{2J_1+3}{2J_1-1} \Delta E_{J_1, J_1-2}$$

ou

$$\Delta E_{J_1+2, J_1} > \varepsilon(J) \Delta E_{J_1, J_1-2}$$

com $\varepsilon(J) \rightarrow 1$ quando $J_1 \rightarrow \infty$

Podemos, porém, decompor

$$\Delta E_{J_1+2, J_1} = \Delta E_{\text{rot}}(J_1+2, J_1) + \Delta E_{\text{def}}(J_1+2, J_1) ; e$$

$$\Delta E_{J_1, J_1-2} = \Delta E_{\text{rot}}(J_1, J_1-2) + \Delta E_{\text{def}}(J_1, J_1-2)$$

sem a contribuição da energia de emparelhamento que é considerada aproximadamente constante para estes valores do momento angular.

A condição de "downbending" é reescrita então como :

$$\Delta E_{\text{rot}}(J_1+2, J_1) - \varepsilon(J) \Delta E_{\text{rot}}(J_1, J_1-2) > \varepsilon(J) \Delta E_{\text{def}}(J_1, J_1-2) - \Delta E_{\text{def}}(J_1+2, J_1) \quad (z)$$

O aparecimento do "downbending" é uma consequência

então :

1) Do fato de que a energia de emparelhamento é aproximadamente constante num intervalo de valores do momento an-

gular (no entorno de J_c).

2) Do procedimento de cálculo do momento de inércia da banda (procedimento de Johnson), pois, embora o momento de inércia do modelo seja uma função crescente de J , o momento de inércia " efetivo " da banda pode ser decrescente para certos valores do momento angular onde a relação (Z) está satisfeita.

O fenômeno do " downbending " ocorrerá também classicamente quando se usa aquele procedimento de cálculo para obter um momento de inércia " efetivo " definido a partir da energia total.

Consideremos um elipsóide prolato de massa m , com semi-eixos a_0, a_0 e c_0 . Introduzindo $\delta_0 = \frac{c_0}{a_0} - 1$ podemos escrever o momento de inércia do elipsóide :

$$J = \frac{m}{5} a^2 (2 + 2\delta + \delta^2) \quad ; \text{ onde}$$

$$a = a_0 \left(\frac{1 + \delta_0}{1 + \delta} \right)^{1/3} \quad \text{por conservação de volume}$$

δ - deformação do elipsóide quando este roda .

Em primeira ordem o momento de inércia do elipsóide pode ser escrito como :

$$J = \frac{2}{5} m a_0^2 \left(1 + \frac{2}{3} \delta_0 + \frac{\delta}{3} \right)$$

A energia total deste elipsóide que gira, para pequenas deformações, pode ser escrita como :

$$E = \frac{J^2}{2 \frac{2}{5} m a_0^2 \left(1 + \frac{2}{3} \delta_0 + \frac{\delta}{3} \right)} + k (\delta - \delta_0)^2$$

que dá :

$$\delta = \delta_0 + \frac{5}{12 m a_0^2 k} J^2$$

para a deformação de equilíbrio, em primeira ordem, para cada valor do momento angular.

Definimos

$$E = \frac{J^2}{2 \mathcal{J}_{\text{efetivo}}}$$

para se usar o procedimento de Johnson e calcular

$$\mathcal{J}_{\text{efetivo}} = \frac{1}{2} \left(\frac{dE}{dJ^2} \right)^{-1}$$

que neste caso é escrito como

$$\mathcal{J}_{\text{efetivo}} = \frac{72 m^2 a_0^4 k \left(1 + \delta_0 + \frac{5 J^2}{36 m a_0^2 k} \right)^2}{180 m a_0^2 k (1 + \delta_0) + 25 J^2 \left(1 + \delta_0 + \frac{5 J^2}{36 m a_0^2 k} \right)^2}$$

É importante notar que desta expressão

$$\mathcal{J}_{\text{efetivo}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \frac{2}{5} m a_0^2 (1 + \delta_0)$$

o que mostra que o momento de inércia efetivo só é igual ao momento de inércia do elipsóide para rotores perfeitamente rígidos.

Como no caso nuclear os rotores não são rígidos, o momento de inércia efetivo não dará informações somente do momento de inércia nuclear como também das variações de energia interna.

Classicamente o aparecimento do "downbending" é caracterizado por

$$\frac{d}{dJ} \mathcal{J}_{\text{efetivo}} < 0$$

que no caso do elipsóide fornece a desigualdade

$$J^2 > \frac{36 m a_0^2 k}{5} \left[\sqrt[3]{2(1 + \delta_0)} - (1 + \delta_0) \right]$$

a qual mostra que para um elipsóide com m , a_0 , δ_0 e k conhecidos o "downbending" ocorre quando aquela desigualdade for satisfeita.

Este tratamento clássico mostra claramente dois aspectos do procedimento de Johnson :

1) O momento de inércia da banda contém mais informações do que somente aquelas do momento de inércia nuclear visto que pode incluir efeitos de energia interna. Aquele procedimento seria mais adaptado à descrição de rotações rígidas, para as quais os valores dos dois momentos de inércia coincidem.

2) O aparecimento do "downbending" é uma consequência do procedimento de cálculo na região de valores do momento angular onde a energia de emparelhamento é praticamente constante.

APÊNDICE

a) Relação entre os parâmetros de deformação β e δ_{mod}

Suponhamos um elipsóide cujo raio é dado como :

$$R(\theta, \phi) = R_0 \left[1 + \sum_{\ell m} \beta_{\ell m} Y_{\ell m}(\theta, \phi) \right]$$

Para formas esferoidais $R(\theta, \phi) = R(\theta)$, pois não há dependência em ϕ ($m = 0$).

Escrevendo-se a soma e retendo-se o termo $\ell = 2$ teremos uma expressão para o raio de um elipsóide com simetria axial

$$R(\theta) = R_0 \left[1 + \beta_{20} Y_{20} \right]$$

R_0 é o raio do núcleo ($= r_0 A^{1/3}$) se este não fosse deformado.

$\beta_{20} = \beta$ é uma medida da deformação nuclear.

Os semi-eixos deste elipsóide são respectivamente

eixo único $R_0 \left[1 + \beta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \right]$

eixo duplo $R_0 \left[1 - \beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \right]$

Quando $\beta > 0$ o elipsóide é prolato e quando $\beta < 0$ o elipsóide é oblato.

No caso de elipsóide prolato teremos a relação :

semi-eixo maior

$$R_0 \left(1 + \beta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \right) = c = a(1 + \delta_m) \quad (1)$$

semi-eixo menor

$$R_0 \left(1 - \beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \right) = a \quad (2)$$

Então substituindo (2) em (1)

$$R_0 \left(1 + \beta \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \right) = R_0 \left(1 - \beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \right) (1 + \delta_m)$$

$$1 + \delta_m = \frac{1 + \beta \sqrt{\frac{5}{4\pi}}}{1 - \beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}}}$$

e finalmente

$$\delta_m = \frac{3\beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}}}{1 - \beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}}} \quad (3)$$

b) Relação entre os parâmetros de deformação δ_{Nilsson} e δ_{mod}

Como a deformação de Nilsson pode ser escrita em primeira ordem como

$$\delta_N = 3\beta \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \quad (4)$$

Então substituindo (4) em (3), temos

$$\delta_m = \frac{\delta_N}{1 - \frac{\delta_N}{3}}$$

REFERÊNCIAS

- 1) T. Huus e G. Zupancic
Danske. Videnskab. Selskab. 27 (1953) nº 16
- 2) A. Bohr
Danske. Videnskab. Selskab. 26 (1952) nº 14
- 3) D. R. Inglis
Phys. Rev. 96 (1954) 1059
- 4) A. Bohr e B. Mottelson
Danske. Videnskab. Selskab. 30 (1955) nº 1
- 5) A. Bohr, B. Mottelson e D. Pines
Phys. Rev. 110 (1958) 936
- 6) J. Bardeen, L. N. Cooper e J. R. Schrieffer
Phys. Rev. 108 (1957) 1175
- 7) S. T. Beliaev
Danske. Videnskab. Selskab. 31 (1959) nº 11
- 8) B. Mottelson e J. Valatin
Phys. Rev. Letters 5 (1960) 511
- 9) M. Mariscotti, G. Goldhaber e B. Buck
Phys. Rev. 178 (1969) 1864
- 10) S. M. Harris
Phys. Rev. 138 (1965) B509
- 11) A. Johnson, H. Ryde e S. A. Hyorth
Nucl. Phys. A179 (1972) 753
- 12) A. Johnson e S. Szymanski
Phys. Reports 7C nº 4 (1973)

- 13) W. Myers e W. Swiatecki
Nucl. Phys. A81 (1966) 1
- 14) V. Strutinsky
Nucl. Phys. A95 (1967) 420
- 15) Nuclear Data Tables 9 (1971)
- 16) A. Bohr e B. Mottelson
Nuclear Structure - vol. I - Benjamin
- 17) L. Trainor e R. Gupta
Can. Jour. of Phys. 49 (1971) 133
- 18) J. Krumlinde
Nucl. Phys. A160 (1971) 471

Fig.-1

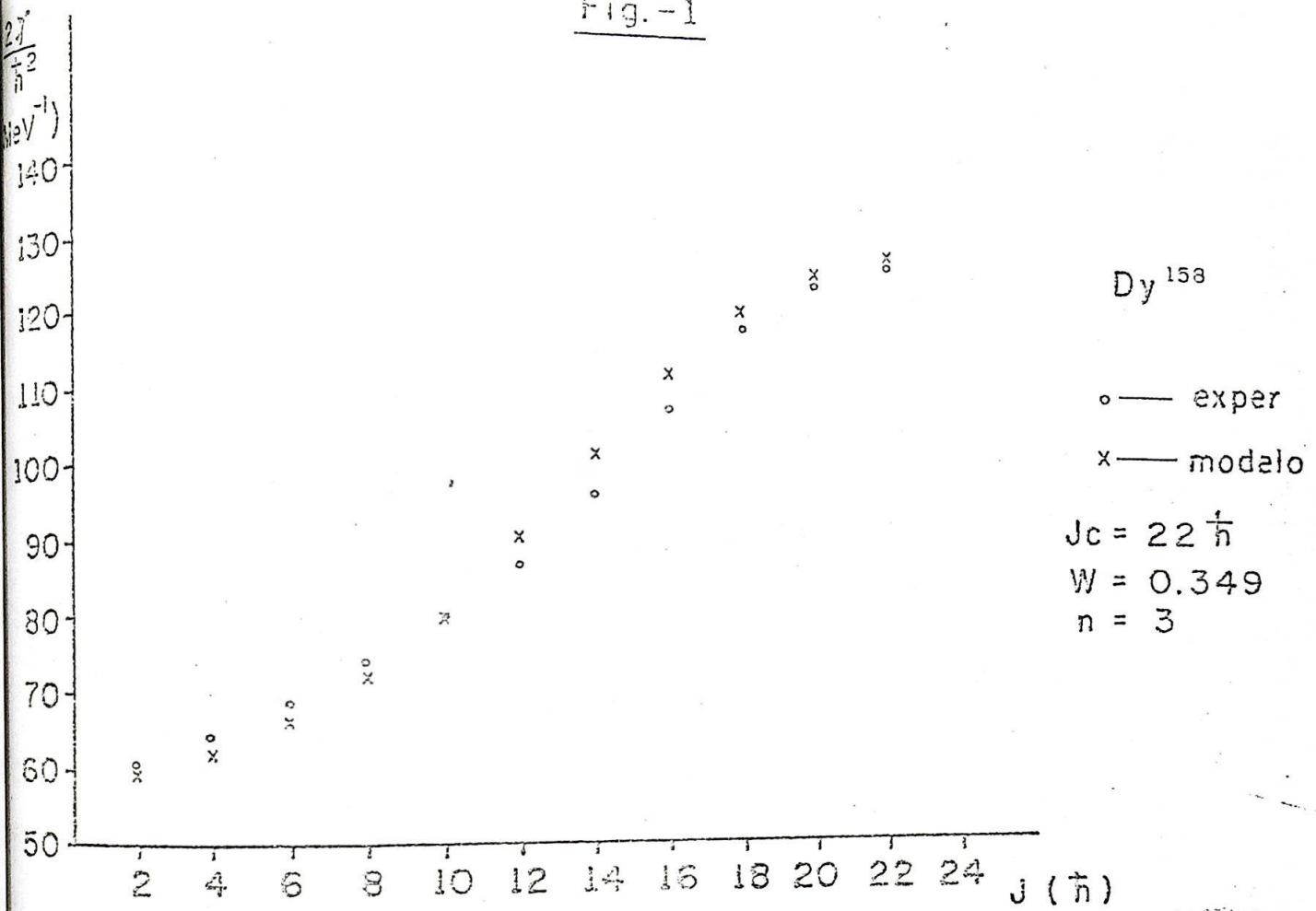
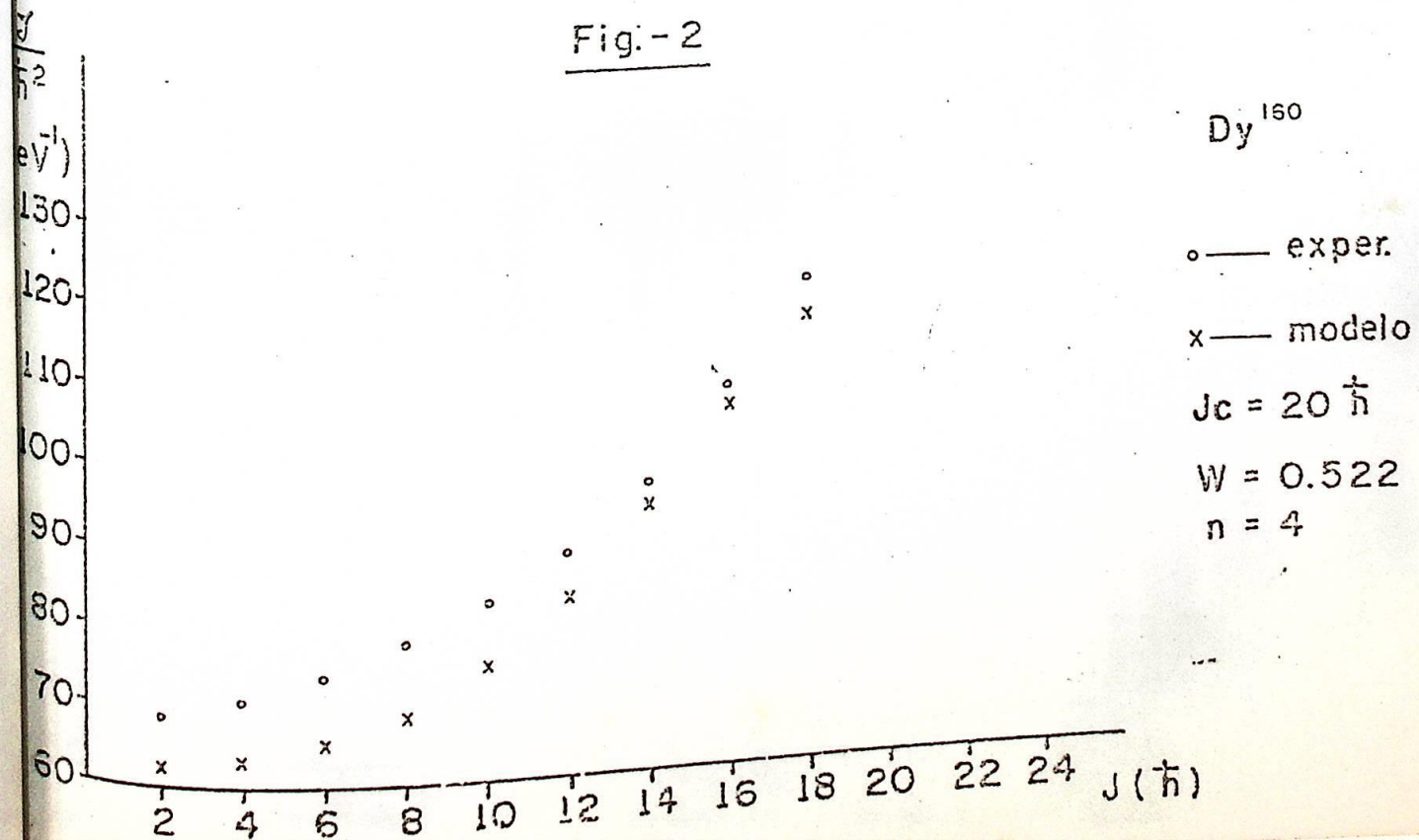


Fig.-2



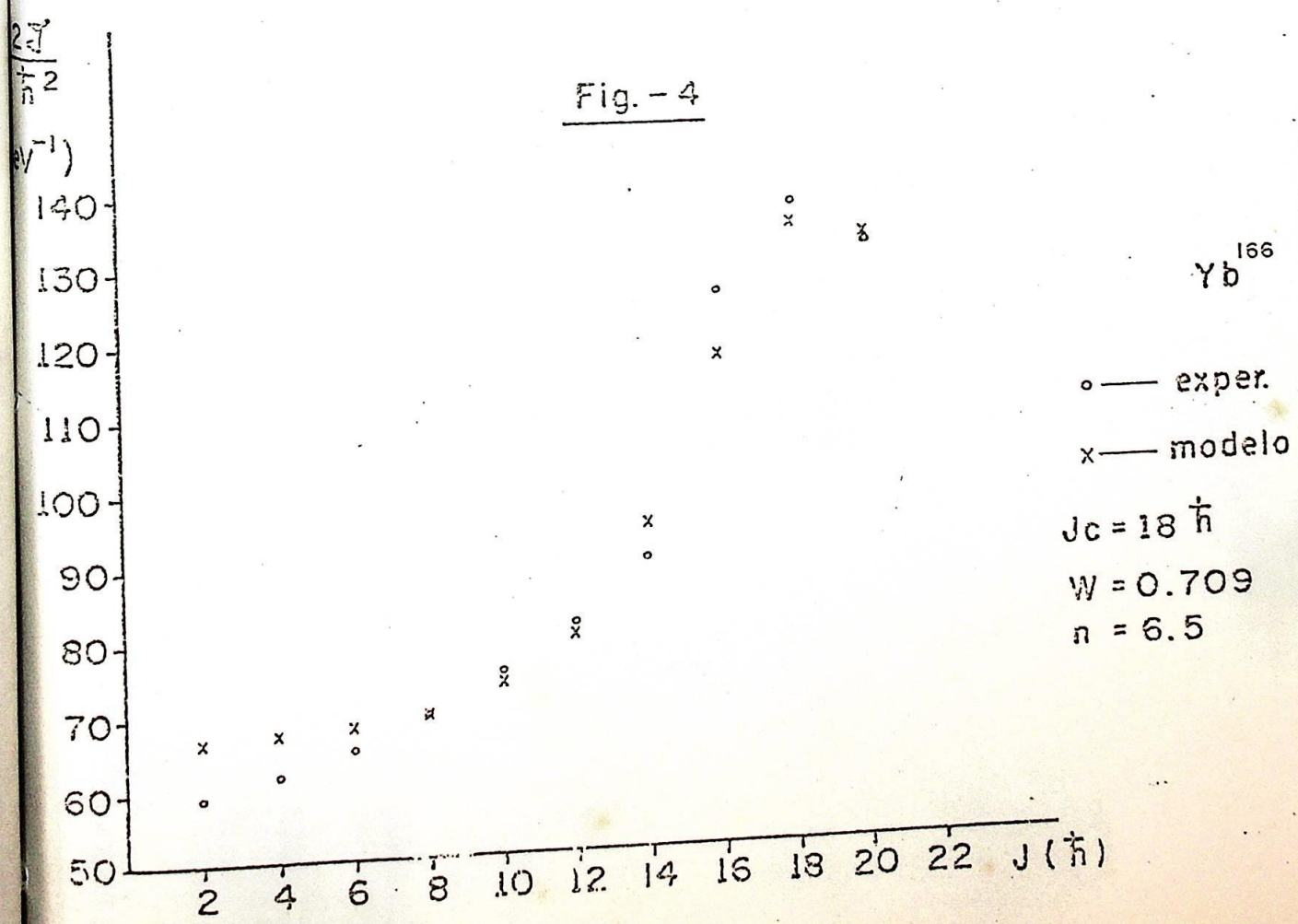
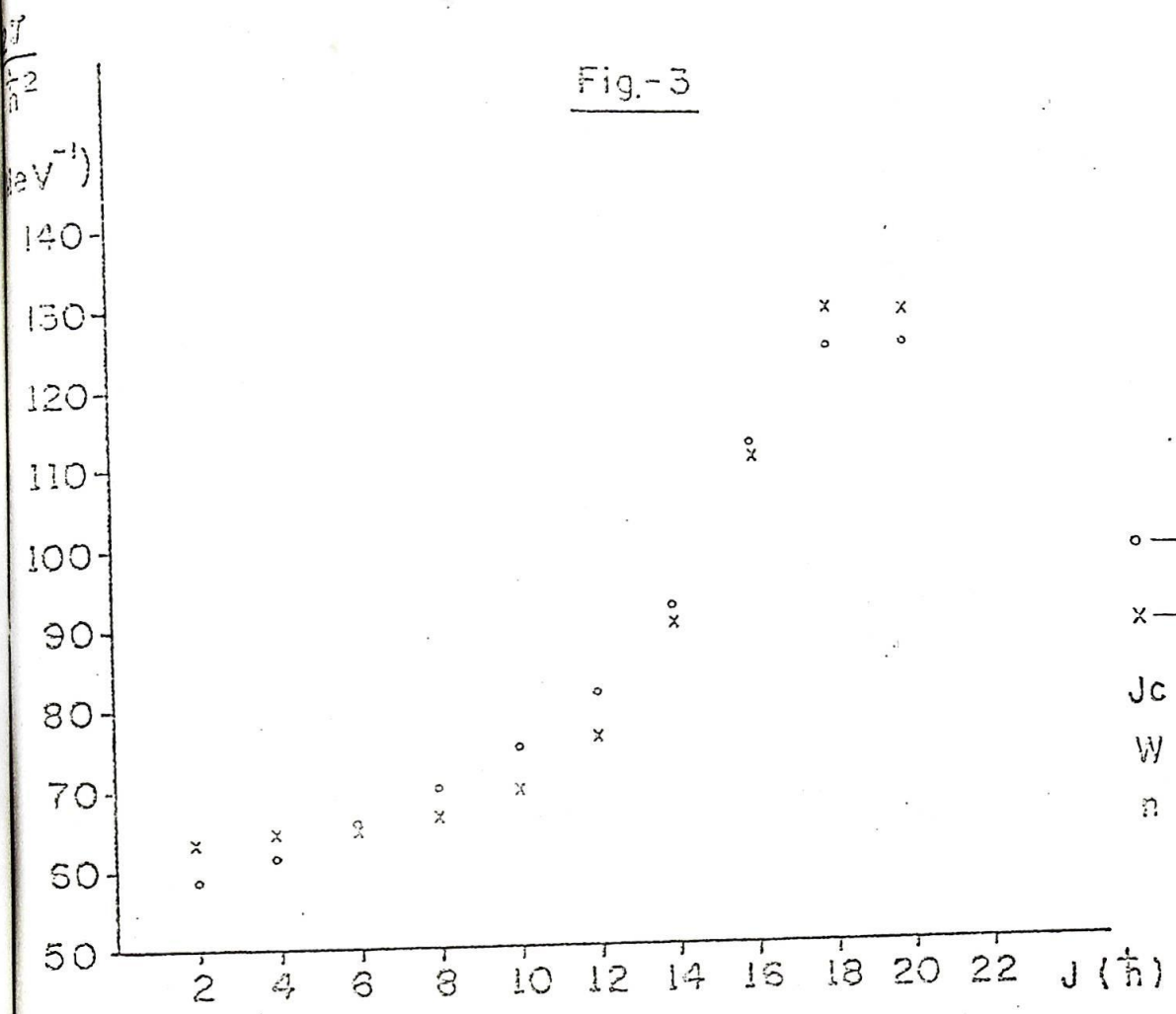


Fig. - 5

