

Universidade de São Paulo  
*Instituto de Física*

O Problema da Violação CP Forte e o Limite Perturbativo em  
Extensões  $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$  do Modelo Padrão.

SBI-IFUSP



305M81014316

Alex Gomes Dias

Tese apresentada ao Instituto de Física da  
Universidade de São Paulo para obtenção  
do grau de doutor em ciências.

Comissão Examinadora:

- Prof. Dr. Vicente Pleitez (IFT/UNESP) (Orientador)
- Prof. Dr. Gustavo Alberto Burdman (IFUSP)
- Profa. Dra. Ivone Freire da Mota e Albuquerque (IFUSP)
- Prof. Dr. Carlos Ourivio Escobar (UNICAMP)
- Prof. Dr. Carlos Alberto Garcia Canal (UNLP)

São Paulo  
2005

Prof. Armando Corbani Ferraz  
Presidente da Comissão de Pós Graduação



050.17  
0541 p  
Dex. 1

### FICHA CATALOGRÁFICA

**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação  
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Dias, Alex Gomes

O Problema da Violação CP Forte e o Limite  
Perturbativo em Extensões  $SU(3)c \otimes SU(3)L \otimes U(1)x$  do  
Modelo Padrão.  
São Paulo - 2005.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São  
Paulo

Orientador: Prof. Dr. Vicente Pleitez

Instituto de Física - Departamento de Física  
Matemática  
Área de Concentração: Física

Unitermos:

- 1  
2     1. Física de Partículas;  
3     2. Teoria de Campos;  
4     3. Simetria.  
5  
6

USP/IF/SBI-040/2005

## **Resumo**

Nesta tese apresentamos um estudo de como as simetrias discretas grandes podem tornar as soluções de problemas como o da violação CP forte, mais naturais. Em particular, trataremos de extensões  $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$  do Modelo Padrão. Veremos como uma simetria discreta grande torna automática, em nível clássico, a simetria de Peccei-Quinn. O áxion do tipo invisível tem a sua massa protegida contra os efeitos semi-clássicos de gravitação quântica através da simetria  $Z_N$ .

O limite perturbativo desses modelos também é investigado. A classe de modelos em que a simetria discreta é quase automática tem a sua validade perturbativa apenas em uma escala de energia relativamente baixa, na ordem dos TeV. É, então, proposta a extensão com um conteúdo mínimo de representação adicional onde o limite perturbativo pode ser ampliado para escalas de mais de uma dezena de TeV; deixando, portanto, esses modelos mais atrativos do ponto de vista fenomenológico nas energias que estarão sendo alcançadas em um futuro próximo nos aceleradores de partículas.

## **Abstract**

In this thesis we perform a study about how large discrete symmetries can make problems solutions like the strong CP violation, more natural. In particular, we shall treat of a  $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$  Standard Model extension. We shall see how a large discrete symmetry makes, at the classical level, the Peccei-Quin symmetry automatic. The invisible axion has its mass protected against quantum gravity semi-classical efects by means of a  $Z_N$  symmetry.

The perturbative limit of some of those models is investigated. The class of models in which the dcrete symmetry is almost automatic can be treated with perturbation theory only at energy scales below few TeV. It is, then, proposed a model extension with a minimal representation content which extends the perturbative limit to scales of tens of TeV; making, therefore, the models more atractives from the phenomenological point of view at the energies scalas to be reached in the near future.

*Dedico à minha mãe*

# Agradecimentos

Agradeço o Prof. Vicente Pleitez pela sua orientação e por ter estado sempre disposto a discutir os problemas de física e dividir suas idéias, durante todo o período do curso de doutorado.

Também agradeço aos membros do departamento de física matemática e do instituto de física teórica, IFT, que me ajudaram a eliminar muitos obstáculos.

À Professora Ivone Corradi por, gentilmente, ter feito a revisão da tese.

E, principalmente, a minha mãe pela sua determinação em me levar e buscar para escola desde do pré-primário até a agora, e por não ter se abatido em nenhuma dificuldade. Ela me trouxe aqui hoje.

Finalizando, agradeço à FAPESP pelo auxílio financeiro.

*"Se podes olhar, vê. Se podes ver, repara"*

(livro dos conselhos em *Ensaio sobre a Cegueira*)

# Conteúdo

<b>1 Proposições e motivações para extensões do modelo padrão</b>	<b>7</b>
1.1 Quatro décadas de Física de Partículas Elementares: o Modelo Padrão e além dele . . . . .	7
1.2 Física de Partículas Elementares e Cosmologia . . . . .	10
1.3 O problema de violação CP forte . . . . .	11
1.4 O áxion como solução do problema de violação CP forte . . . . .	13
1.5 Problemas com o áxion . . . . .	15
1.6 Modelos 3-3-1 . . . . .	19
<b>2 Modelos com simetria <math>SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X</math></b>	<b>21</b>
2.1 Os modelos 3-3-1 . . . . .	21
2.1.1 O conteúdo de representação. . . . .	24
2.1.2 Bósons de gauge do setor eletrofraco . . . . .	33
2.1.3 Interações com os léptons . . . . .	38
2.2 O splitting de massa entre os bósons de gauge não hermitianos e o parâmetro $\rho_0$ . . . . .	42
<b>3 Estabilizando o áxion leve com as simetrias discretas de gauge</b>	<b>47</b>
3.1 O áxion invisível leve e as correções gravitacionais . . . . .	47
3.2 Estabilização por simetrias discretas nos Modelos 3-3-1 . . . . .	51
3.2.1 Uma atribuição diferente para $Z_{13}$ . . . . .	57
3.3 Domínios de parede . . . . .	59
3.4 Acoplamento áxion-fóton . . . . .	60
3.5 Modelo com neutrinos direitos . . . . .	62
3.5.1 Acoplamento áxion-fóton no Modelo com o neutrinos direitos . . . . .	65

<b>4</b>	<b>Induzindo dinamicamente a quebra espontânea da simetria eletrofraca</b>	<b>66</b>
4.1	Invariância de escala no Modelo 3-3-1 e o mecanismo de Coleman-Weinberg para $\phi$	66
4.2	Induzindo a quebra da simetria $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$	68
<b>5</b>	<b>O problema do limite perturbativo na escala dos TeV</b>	<b>72</b>
5.1	O problema do limite perturbativo	72
5.2	As equações do grupo de renormalização e o limite perturbativo	75
5.3	O caso supersimétrico e a aproximação de 2-loop	82
5.4	Uma solução com um conteúdo mínimo de matéria adicional	85
5.4.1	O limite perturbativo com as novas representações	89
5.5	Desacoplando os escalares das energias $E < \mu_{331}$	91
<b>6</b>	<b>Discussão final</b>	<b>94</b>
<b>A</b>	<b>Representações</b>	<b>98</b>
<b>B</b>	<b>Quantização da carga elétrica no Modelo 331 com o singlet do áxion</b>	<b>99</b>

# Capítulo 1

## Proposições e motivações para extensões do modelo padrão

### 1.1 Quatro décadas de Física de Partículas Elementares: o Modelo Padrão e além dele

Nas últimas quatro décadas, a Física no campo das partículas elementares tem logrado êxito no desenvolvimento de uma base teórica concomitante com incríveis avanços e descobertas no campo experimental. Tais conquistas levaram à construção de um eficiente modelo, que esclarece em um único arcabouço muitos aspectos de três das quatro interações fundamentais conhecidas na Natureza. A saber, as interações forte, fraca e eletromagnética, no que chamamos de Modelo Padrão. A estrutura bem sucedida que deu origem ao Modelo Padrão apresenta a simetria local  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , cuja fundamentação envolveu o trabalho de mais de uma dezena de físicos [1]. Com  $SU(3)_C$ , correspondendo ao grupo de simetria gerado pelos campos, glúons, intermediando a força nuclear forte, atuando exclusivamente nos quarks conhecido como setor da QCD; com  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , correspondendo ao grupo gerado por campos intermediando as forças fraca e eletromagnética e conhecido como setor eletrofraco da teoria.

A matéria fermiônica é incorporada de uma maneira bastante curiosa: considerando a decomposição dos campos dos férmions em componentes de quiralidade direita e esquerda, as componentes esquerdas tanto de léptons como de quarks formam representações fundamentais

do grupo  $SU(2)_L$ ; já as componentes direitas desses férmiões formam representações singletos (trivial), desse grupo<sup>1</sup>. O tratamento diferenciado das componentes direita e esquerda para os campos de matéria dá ao Modelo Padrão um caráter quiral no setor eletrofraco. Por outro lado, a QCD trata de forma equivalente as componentes direita e esquerda dos quarks, possuindo assim um caráter vetorial. Uma representação de campos escalares com uma componente neutra condensando (originando a partícula de Higgs) e, assim, gerando massa para os férmiões carregados e os campos que intermedian as forças fracas é postulado existir, o que também torna o modelo mais consistente dentro do seu limite de validade. Os neutrinos permanecem sem massa. Vimos nas últimas décadas a confirmação de todas as previsões do Modelo Padrão, exceto a partícula de Higgs que ainda não foi confirmada.

Por exemplo, as descobertas dos chamados de processos de corrente neutra por vários grupos no CERN e Fermilab [2], em 1973, seguida da produção do estado  $J/\psi$  em dois experimentos independentes [3], interpretado, depois, como sendo um estado ligado de quarks do tipo  $c$ ,  $\bar{c}c$ , confirmando a existência desse tipo de quark, do lepton  $\tau$  em 1975, indicando a existência de uma terceira família [4], que fora também sugerida teoricamente para acomodar a mistura entre quarks nas reações eletrofracas [5], dos processos  $e^-e^+ \rightarrow 3jatos$  evidenciando os gluons da QCD [6], dos bósons de gauge intermediadores da força fraca,  $W^\pm$  e  $Z^0$ , em 1983 no CERN através de colisões próton-antiproton [7], a confirmação de que o número de espécies de neutrinos leves ativos resultantes da desintegração da partícula  $Z^0$  é igual a três [8], mostrando a existência de apenas três famílias leves e do quark top em 1995 no Fermilab [9] são alguns dos triunfos experimentais corroborando o Modelo Padrão [1]. A lista completa não é pequena e graças a ela obtivemos uma visão bastante clara sobre a própria teoria nas escalas de energia acessíveis atualmente.

De extrema importância, foi o fato de tudo isso nos levar a formularmos novas perguntas mais precisas e, até mesmo, mais ambiciosas, porém, cujas respostas, geralmente, estão além do alcance da teoria atual. As extensões mais simples do Modelo Padrão que podem ser submetidas a um escrutínio experimental direto são as primeiras candidatas a serem consideradas para uma teoria que venha a descrever uma física nova. Obviamente, qualquer teoria candidata deve, pelo menos, conter a simetria  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  em um limite de baixa energia.

---

<sup>1</sup>Neutrinos direitos não fazem parte do modelo padrão mínimo em seu conteúdo de matéria. A introdução de tais componentes para obter massa para neutrinos já é uma extensão do modelo.

Dentre as novas perguntas que o Modelo Padrão nos levou a formular estão as seguintes:

- *Existem famílias adicionais com a mesma estrutura das três observadas ou há alguma explicação para que três seja mesmo o número de famílias?*
- *A estrutura  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  deveria estar embutida em que tipo de estrutura maior?*
- *Que tipo de física nova poderíamos esperar na escala de energia dos TeV que começam a ser testadas a partir de agora?*
- *De que forma poderíamos explicar o valor de alguns parâmetros do modelo? Por exemplo, como uma teoria superior explicaria o valor dos parâmetros no setor eletrofraco?*
- *Como algum tipo de matéria exótica seria incorporada ao Modelo Padrão levando a uma melhor compreensão da dinâmica atualmente observada do universo?*

Há, sem dúvida, outras perguntas ainda mais ambiciosas do que essas bem como tentativas de respostas para elas; no entanto, acreditamos que essas representam, pelo menos parcialmente, algo do que certamente poderá ser esclarecido com as novas experimentações na escala de energia dos TeV. A nossa intenção aqui não é a de responder de forma definitiva cada uma dessas questões, mas sim mostrar que é interessante procurar saber o que uma dada extensão do Modelo Padrão pode dizer a respeito delas.

Por outro lado, o Modelo Padrão traz consigo problemas, dos quais destacamos alguns nos parágrafos seguintes.

- As recentes experiências observando oscilações de neutrinos, junto dos limites advindos do decaimento beta e dos dados cosmológicos, têm mostrado que tais partículas devem ter massa não nula, mas bastante pequena, entre  $m_\nu \lesssim 1 - 10^{-2}$  eV [10], [11]. O que agrava, brutalmente, a hierarquia nas escalas de massa dentro do Modelo Padrão, visto que as maiores massas, dos bósons de gauge da força fraca e do quark top, estão na escala da ordem da condensação do campo de Higgs,  $v_W \approx 10^2$  GeV.
- As soluções não perturbativas da QCD levam a uma quebra explícita da simetria CP (C para a conjugação de carga e P para paridade) [12] cuja observação direta está vinculada a ser menor do que uma parte em  $10^9$ , de acordo com as medidas precisas do momento de dipólo elétrico do neutron. Esse é o conhecido problema da violação CP forte. O Modelo Padrão não oferece um mecanismo para explicar por que a violação dessa simetria CP é absurdamente pequena ou inexiste.

- As correções radiativas para a massa do bóson de Higgs apresentam divergências quadráticas que deveriam ser reguladas pela escala limite de validade do modelo. Isso significa que essas correções viriam a retirar o bósons de Higgs do espectro de baixa energia, dificultando o entendimento do seu papel na geração de massa para as partículas do Modelo Padrão, a menos que um ajuste fino extremo ocorra entre os parâmetros da teoria [13]. Esse é o conhecido problema da hierarquia.

A solução desses e outros problemas requer uma extensão do Modelo Padrão. Dentre as explicações mais comuns para o valor da escala de massa dos neutrinos, temos a hipótese de que deve haver uma escala  $M$  bem maior do que a da condensação do campo Higgs; de modo que as massas pequenas seriam devido à razão  $v_W^2/M$  [14]. O problema da violação CP no setor da QCD também tem uma solução baseada na introdução de uma escala além do Modelo Padrão como discutiremos abaixo [15], [16]. Para o problema da hierarquia, existe uma série propostas de soluções, como a introdução da supersimetria [13], a hipótese de dimensões extras [17], [18] ou, então, a implementação de novas simetrias de gauge [19].

## 1.2 Física de Partículas Elementares e Cosmologia

As motivações guiando os novos desenvolvimentos teóricos estão indo cada vez mais além das questões de interesses exclusivos na física de partículas elementares. Há um interesse geral em se incorporar, na ausência de uma teoria de gravitação quântica preditiva, ao menos qualitativamente efeitos importantes do ponto de vista da cosmologia e da gravitação. Ainda que a gravidade não tenha o seu comportamento a curtas distâncias tão bem entendido quanto às demais forças, o Modelo Padrão também ajudou, qualitativamente, na maneira pela qual esperamos que a teoria quântica incluindo a gravitação deva funcionar, visto o sucesso com que ele descreveu a teoria anterior de Fermi.

Na cosmologia, vivemos o paradigma da energia escura, implicando na recente observada aceleração do universo, e da matéria escura. A relação entre densidades de radiação e matéria ordinária  $\Omega_o$ , de matéria escura,  $\Omega_{dm}$ , e de energia escura,  $\Omega_\Lambda$ , dando  $\Omega_o + \Omega_{dm} + \Omega_\Lambda = 1.02 \pm 0.02$  [20] e apontando para um universo plano nos traz mais um problema: o de como obter e introduzir fontes compatíveis de matéria e energia escura junto de suas interações com as

partículas elementares. Atualmente, temos  $\Omega_{dm} \simeq 0.22$  e  $\Omega_\Lambda \simeq 0.73$ . O problema da energia escura parece ser bem mais delicado, visto que os processos de quebra de simetria tornam difícil entender por que o valor da constante cosmológica,  $\Lambda = 3H_0\Omega_\Lambda \simeq 10^{-66}$  eV<sup>2</sup> ( $H_0$ = constante de Hubble), é tão pequeno e positivo como sugerido pela observação direta [21]. A pequenez de  $\Lambda$  não foi ainda associada a uma simetria conhecida. Já a matéria escura pode em princípio ser acomodada dentro de um modelo de partículas elementares. De fato, existem candidatos naturais para o posto de matéria escura dentro dos diversos modelos. Têm-se, por exemplo, na extensão supersimétrica do Modelo Padrão, os chamados neutralinos que seriam provenientes dos parceiros supersimétricos dos bósons de gauge e de Higgs do setor eletrofraco e requerem uma simetria discreta chamada de paridade  $R$  para a sua estabilização [22], [23].

Dentre os candidatos à matéria escura ou à parte dela, destacam-se os chamados áxions. A razão é que esses são remanescentes da solução de um outro problema, a princípio sem nenhuma conexão direta com a cosmologia. A conexão vem com um dos problemas que mencionamos acima relativo a necessidade de se estender o Modelo Padrão: o da violação CP forte.

### 1.3 O problema de violação CP forte

Ocorre que o setor das interações fortes, QCD, isto é, da simetria  $SU(3)_C$ , possui soluções não perturbativas que conduzem a um estado de vácuo com uma estrutura complicada, não incluído na teoria de perturbações usual. Essas soluções não perturbativas são chamadas na literatura de *instantons* [24]. A idéia básica é que existe no subgrupo  $SU(2)$  da QCD, uma série de soluções [25] para os campos de gauge  $A^\mu$  construídas a partir de uma transformação de gauge  $\Omega_n = (\Omega_1)^n$  e classificadas de acordo com  $A_n^\mu$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Cada uma dessas soluções representa um vácuo diferente  $|n\rangle$  que não é invariante por todas as transformações de gauge. O verdadeiro vácuo invariante de gauge mostra ser uma superposição dos vácuos  $|n\rangle$  das soluções  $A_n^\mu$  [12], [16], [26]. O ponto mais importante é que o efeito resultante desse vácuo não trivial acarreta o surgimento de um novo tipo de interação entre os gluons e que tem a seguinte forma,

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{\theta}{32\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} G_a^{\mu\nu} G_a^{\sigma\rho}, \quad (1.1)$$

onde  $G_a^{\mu\nu}$  é o tensor dos campos de gauge representando os gluons. Desde que  $\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$  é um pseudo-

tensor, o termo de interação acima não é invariante por uma transformação de paridade. Ele também não é invariante sob a transformação da inversão temporal. Consequentemente, esse termo é invariante sob uma conjugação de carga, uma vez que de acordo com o teorema CPT a composição dessas três transformações é uma simetria das teorias de campo usuais. Deu-se, então, o nome ao surgimento da interação acima no setor das interações fortes como o problema da violação CP nas interações fortes, o que chamaremos simplesmente de violação CP forte. Note que a invariância de gauge não é comprometida. Todavia, o novo parâmetro  $\theta$  pode levar a consequências físicas ainda que a Eq. (1.1) seja equivalente a uma derivada total. A razão é que esse termo é presente devido a soluções de instantons que são soluções não perturbativas. Efeitos eletrofracos adicionais modificam a interação, de modo que ao final o que temos é um parâmetro efetivo definido como  $\bar{\theta} = \theta - \text{ArgDet}[M_q]$ , onde  $M_q$  é a matriz de massa dos quarks. De fato, esse parâmetro pode causar efeitos mensuráveis no momento de dipólo elétrico do neutron,  $d_n$ . Os limites experimentais sobre  $d_n$  mostram que o seu valor é tal que [27]

$$d_n < 6 \times 10^{-25} \text{ e cm}. \quad (1.2)$$

Por outro lado, os primeiros cálculos mostravam que  $d_n = 5.2 \times 10^{-16} \bar{\theta}$  e cm [28]. Vinculando assim o parâmetro de violação CP como tendo um valor total tal que  $\bar{\theta} \leq 10^{-9}$ . O desafio posto então é tentar entender por que tal parâmetro tem um valor tão próximo de zero. Esperar que haja um ajuste fino entre  $\theta$  e  $\text{ArgDet}[M_q]$  tal que a diferença entre eles esteja na nona casa decimal é demasiadamente improvável, uma vez que esses parâmetros têm origens muito distintas.

Entre as soluções para o problema de violação CP forte, temos a de fazer que um dos quarks, digamos o quark  $u$ , não ganhasse massa com a quebra espontânea de simetria. Isso porque, nesse caso, haveria ainda uma simetria adicional, em nível clássico, na teoria relativa a transformação global do tipo quiral  $u \rightarrow e^{i\alpha\gamma_5} u^2$ , que devido ao fato das transformações chirais serem anômalas em nível quântico seria equivalente a uma modificação  $\bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} + \alpha$  tornando  $\bar{\theta}$  um parâmetro não físico, já que ele pode ser eliminado através com a transformação quiral. No entanto, cálculos com a QCD na rede tem se mostrado contra a possibilidade da massa do quark  $u$  nula, apontando que a razão de massa dos quarks  $u$  e  $d$ ,  $m_u/m_d$ , é diferente de zero [15]. A massa do quark  $u$  poderia ser gerada então por efeitos não perturbativos [15]. Recentemente,

---

<sup>2</sup> $\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$  usual satisfazendo a relação de anticomutação  $\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$ .

foram levantados argumentos apontando que o conceito em se manter um único quark com massa nula é matematicamente mal definido [29]. Outra solução é baseada na suposição que a contribuição que vem exclusivamente do setor da QCD para o parâmetro  $\bar{\theta}$  é nula, impondo a simetria CP nesse setor, e, esse parâmetro seria calculável e gerado exclusivamente pelo setor eletrofraco. Os modelos construídos com esse intuito tentam basicamente mostrar que partindo de um valor  $\bar{\theta} = 0$ , em nível de árvore, as correções radiativas levam o parâmetro inicial para um valor dentro do limite experimental [15]. Aqui nós não vamos nos basear em nenhuma dessas soluções, mas sim na que descrevemos abaixo.

## 1.4 O áxion como solução do problema de violação CP forte

Em 1977, R. D. Peccei e H. Quinn propuseram uma bela solução para o problema de violação CP forte [30]. A idéia deles baseava-se no fato de que simetrias globais do tipo quiral são quebradas dinamicamente em nível quântico e produzem termos anômalos proporcionais ao lado direito da Eq. (1.1). Dessa forma, com a introdução de uma simetria global extra na teoria o parâmetro passa a ser em campo dinâmico  $\bar{\theta} = a(x)/f_a$ . Um potencial efetivo  $V(\bar{\theta})$  é então gerado para esse campo, por meio de efeitos não perturbativos da QCD.  $f_a$  é a constante de decaimento desse campo, relacionada à escala de quebra espontânea da simetria de Peccei-Quinn. A minimização de  $V(\bar{\theta})$  determina o valor esperado de  $a(x)$  forçando com que  $\bar{\theta}$  seja zero, resolvendo assim o problema da violação CP forte. Essa simetria ficou conhecida como simetria de Peccei-Quinn e designada como um fator global  $U(1)_{PQ}$ . Para a realização do mecanismo de Peccei-Quinn, é necessário a extensão do Modelo Padrão. A primeira tentativa foi feita considerando mais um dubbleto escalar de  $SU(2)_L$  em adição ao já existente. No entanto, a quebra espontânea da simetria  $U(1)_{PQ}$  deixaria, a princípio no espectro da teoria, um bóson de Goldstone  $a(x)$ ; porém, como essa simetria é anômala, uma massa é gerada para esse bóson, caracterizando-o como um pseudo-Goldstone.

Nesse caso, o estado escalar  $a(x)$  é uma combinação da parte imaginária das componentes neutras dos dubbletos escalares e, portanto, tem acoplamento direto com a matéria. A observação sobre desse campo escalar foi feita por S. Weinberg e independentemente por F. Wilczeck logo

em seguida do trabalho de Peccei-Quinn e batizado por eles como o áxion [31]. De acordo com seus acoplamentos, esse áxion já deveria ter sido observado, por exemplo na observação de um decaimento raro do tipo  $K \rightarrow \pi + a$ . Isso descartou o modelo com dois dbletos escalares livre do problema da violação CP forte via a simetria de Peccei-Quinn.

No final da década de 70 e início da década de 80, foram propostos os primeiros modelos dos chamados áxions invisíveis [32],[33],[34],[35]. Diferente do modelo anterior em que o áxion originava-se de uma combinação da parte imaginária das componentes neutras de escalares em representações não triviais de  $SU(2)_L$ , os modelos de áxion invisível baseiam-se na introdução de um singletó escalar  $\phi$  com uma carga não nula de  $U(1)_{PQ}$ . A invisibilidade deve-se ao fato que, com um valor esperado grande para esse singletó,  $\langle \phi \rangle \simeq f_a$ , os acoplamentos diretos do áxion com a matéria são suprimidos por um fator  $1/f_a$  em relação à escala eletrofraca. Dessa forma, explicar-se-ia por que decaimentos envolvendo o áxion não foram observados. Consequentemente, essa solução trazia algo muito interessante do ponto de vista cosmológico, a introdução de um candidato natural à matéria escura, uma vez que o áxion tem papel fundamental na solução do problema da violação CP forte.

Foram feitas duas propostas iniciais para o áxion invisível que evadiam os dados experimentais. A primeira delas deve-se a J. E. Kim, e independentemente a M. Shifman, A. Vainshtein e V. Zakharov, o chamado modelo de áxion KSVZ [32],[33], no qual é introduzido um campo escalar mais um quark exótico do tipo vetorial todos sendo singletos de  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  e carregando carga não nula de  $U(1)_{PQ}$ , com os campos do Modelo Padrão neutros por essa simetria. Os quarks exóticos e o singletó escalar estariam desacoplados da escala eletrofraca. A segunda deve-se a M. Dine, W. Fischler, M. Srednicki e independentemente a A. R. Zhitnitskii, chamado modelo de áxion DFSZ [35], [34]. Neste caso, um singletó mais um dbleto de escalares são introduzidos com todos os campos do Modelo Padrão também carregados sobre a simetria  $U(1)_{PQ}$ .

A escala de quebra da simetria  $U(1)_{PQ}$ , não pode ser arbitrariamente grande nem arbitrariamente pequena. A combinação de limites astrofísicos, cosmológicos e experimentais sugerem que o seu valor esteja restrito ao intervalo<sup>3</sup>  $10^{10} \leq f_a \leq 10^{12}$  GeV [37]. Os efeitos não per-

---

<sup>3</sup>Esse intervalo é também apresentado na literatura como um intervalo de massa permitido para o áxion. Isso é equivalente porque a massa do áxion é inversamente proporcional a  $f_a$ ,  $m_a \simeq \Lambda_{QCD}^2/f_a$ . Vemos por exemplo no PDG que o intervalo de massa atualmente aceito é  $10^{-6} < m_a < 10^{-2}$  eV.

turbativos dão ao áxion uma massa  $m_a \sim \Lambda_{QCD}^2/f_a$  que seria no mínimo  $O(10^{-5})$  eV, com  $\Lambda_{QCD} \sim 0.1$  GeV sendo a escala da QCD. O limite inferior vem do fato que áxions leves poderiam ser produzidos em estrelas, de modo que parte da energia delas estaria sendo perdida na emissão dessas partículas, alterando demasiadamente a evolução estrelar <sup>4</sup> [36]. Para que haja concordância com a perda de energia das estrelas, tem-se que a constante de decaimento deve satisfazer  $f_a \geq 10^{10}$  GeV. Esse limite é um tanto dependente do modelo. Por outro lado, se  $f_a$  é maior do que  $10^{12}$  então em algum ponto na evolução na densidade de energia nas oscilações coerentes de axions poderia exceder muito a densidade crítica,  $\rho_c$ , do universo fechando-o, isto é, fazendo-o colapsar ou então gerando uma evolução contrária à expansão acelerada atualmente observada, pois  $f_a$  faria com que  $\Omega_{dm}$  tenha um valor maior do que o sugerido atualmente [36], [37]. Esses fatores tornam o áxion um candidato promissor para componente de matéria escura.

## 1.5 Problemas com o áxion

Uma questão interessante que surge a respeito da simetria de Peccei-Quinn é a seguinte: embora ela resolva o problema da violação CP forte, trazendo também um áxion interessante cosmologicamente; a imposição de um fator global tipo  $U(1)_{PQ}$  na teoria parece um tanto artificial. Uma das razões é que simetrias desse tipo, chirais, são válidas apenas em nível clássico pois elas são quebradas automaticamente pela própria dinâmica quântica da teoria. Assim, não é natural nem satisfatório ter de impor uma simetria que, a priori, já está quebrada em nível quântico. Note que isso é diferente do que acontece no caso da quebra espontânea das simetrias de gauge locais, onde a quebra acontece devido a uma condensação, de um campo escalar elementar ou um composto de outros campos, favorecida energéticamente e onde a fase simétrica da teoria pode ser alcançada em regimes, cujas energias estão acima das de condensação. Então, levanta-se um problema de naturalidade. Com isso, queremos dizer que a simetria  $U(1)_{PQ}$  deveria estar contida naturalmente dentro do modelo, isto é, sem ter de ser imposta inicialmente, ou então surgir quando se invoca uma simetria a princípio mais

---

<sup>4</sup>Uma simulação feita com os dados da super nova SN1987A mostra que a medida que a massa do áxion aumenta, o intervalo de tempo de chegada dos neutrinos provenientes da explosão dessa estrela deveria diminuir, assim como o número de neutrinos detectados [36]. Segundo essa análise um áxion com massa  $m_a > 10^{-2}$  eV é incompatível com o número de neutrinos e o intervalo de tempo de chegada deles obtidos da SN1987A.

fundamental.

É interessante notar que no Modelo Padrão os princípios da simetria de gauge e da renormalizabilidade, que exclui operadores com dimensão maior do que quatro, fazem as simetrias globais importantes de número bariônico e leptônico surgirem automaticamente em nível clássico. Dessa forma, dizemos que essa simetrias são naturais, ou seja, não precisam ser impostas mas aparecem como subprodutos de princípios a priori mais fundamentais. Será um dos propósitos do nosso trabalho aqui tratar da construção de modelos onde a simetria  $U(1)_{PQ}$  é automática. Outro ponto problemático para simetrias, não só desse tipo mas geral para todas as simetrias globais, decorre da gravitação como discutiremos a seguir.

Os efeitos semi-clássicos da gravitação mostram que leis de conservação associadas a simetrias globais serão todas violadas pela ainda não totalmente revelada teoria para a gravitação quântica. Por efeitos semi-clássicos, queremos dizer aqueles que podem ser estimados ou então até mesmo calculados assumindo apenas o conhecimento que se pode extrair das teorias vigentes em adição à escala de Planck,  $M_{Pl}$ , onde as interações gravitacionais passam a ter um papel significativo comparado às demais interações. Aqueles que podem ser estimados, consideramos as suas manifestações através de operadores não renormalizáveis e que, nesse caso, são suprimidos escala de Planck. Esses operadores devem somente cumprir com as simetrias de gauge locais da teoria e têm dimensão maior do que quatro. Um efeito que pode ser calculado é o da evaporação do buraco negro, fenômeno conhecido como radiação de Hawking [38]. Esse processo fornece um exemplo claro para a violação de simetrias globais pelas interações gravitacionais.

Considere um buraco negro formado pelo colapso de uma estrela. Inicialmente na estrela tínhamos, embora grandes, os números bariônico e leptônico bem definidos relativos aos prótons, nêutrons e elétrons que a constituíam. Na teoria da relatividade geral esses números, bem como outros números quânticos e energia, terminariam nos únicos parâmetros caracterizando o buraco negro, sua massa  $M$ , carga elétrica  $Q$  e momento angular  $J$ . A evaporação do buraco negro é caracterizada pela emissão de radiação térmica de baixa energia, uma vez que a temperatura associada é proporcional ao inverso da massa do buraco negro,  $T_{bh} \sim 1/M$ , supondo por simplicidade que ele seja neutro e não tenha rotação. O número bariônico é violado, porque é favorecida a emissão de fótons com energias menores do que a massa do próton e do nêutron ou qualquer outro hadron mais leve, e, antes que o buraco negro alcance

o seu estágio final onde a aproximação semi-clássica não é mais válida, grande parte da sua massa foi-se na evaporação. Quanto ao número leptônico, haveria uma aparente dificuldade em se utilizar do mesmo argumento anterior já que, desta vez, temos que contar com a possibilidade da existência de, talvez, uma espécie de neutrino com massa nula. Mas como bem observado em Ref. [39] a emissão de neutrinos deve se dar de uma forma muito lenta, dado o princípio de Pauli. De modo que também observaríamos a violação do número leptônico. Além disso, se não existem neutrinos sem massa, então a emissão deles seria desfavorecida frente aos fôtons. Todo o raciocínio que acabamos de discutir repete-se exatamente, se considerarmos agora que o buraco negro inicial, em um dado momento, engole uma quantidade de matéria com números quânticos advindos de simetrias globais bem definidos<sup>5</sup>.

Assim, vimos que as simetrias globais que eram automáticas no Modelo Padrão estão ameaçadas. No caso do número leptônico, seria bem interessante que essa quebra estivesse associada a uma escala de energia alta. Uma vez que isso poderia explicar por que os neutrinos têm uma massa pequena. No entanto, voltando à questão da simetria  $U(1)_{PQ}$ : mesmo que essa surgisse automaticamente em um modelo, acabando com o problema da naturalidade, teríamos ainda de enfrentar a ameaça gravitacional. Isso acontece porque o modelo de áxion invisível está associado a uma escala de energia alta como vimos acima. E, estando a massa do áxion vinculada a um valor pequeno de acordo com os limites astrofísicos, certas correções gravitacionais poderiam desestabilizar a solução com o áxion invisível. Podemos ver isso através de um operador não renormalizável que descreve a interação de  $d \geq 4$  campos singletos em energias altíssimas. Esse operador teria a forma

$$O_{grav}^{(d)} = c \frac{\phi^d}{M_{Pl}^{d-4}}, \quad (1.3)$$

onde  $c$  é uma constante da ordem da unidade. Quando o campo  $\phi$  adquire valor esperado no vácuo, esse operador gera então uma correção na massa na parte imaginária desse campo, que é basicamente o áxion, cujo valor é  $m_{grav} \approx \langle \phi \rangle^{\frac{d-2}{2}} / M_{Pl}^{\frac{d-4}{2}}$ . Dependendo da dimensão  $d$  do operador, essa correção é muito maior do que aquela dentro do limite permitido  $10^{-6} < m_a < 10^{-2}$  eV [37]. Os operadores de menor dimensão são os que mais contribuem. Tomando por exemplo  $f_a \simeq 10^{10}$  GeV e  $M_{Pl} \simeq 10^{19}$  temos para o operador de dimensão  $d = 5$  que a

---

<sup>5</sup>É interessante notar que as simetrias globais não estão só ameaçadas pelas interações que vêm da gravitação. Em geral observa-se que os cenários de grande unificação conservam somente uma combinação do número bariônico e leptônico. No caso, B-L para o modelo SU(5) ou SO(10).

correção para a massa do áxion é da ordem de  $10^5$  GeV. Claramente a solução é desestabilizada pelos efeitos gravitacionais. O operador de menor dimensão, acima da qual a massa do áxion se manteria dentro do intervalo permitido teria  $d > 7$ . Os operadores não renormalizáveis de menor dimensão na forma da Eq. (1.3) devem, portanto, ser proibidos de alguma forma.

Ainda mais preocupante, é o fato de o parâmetro de violação de CP forte,  $\bar{\theta}$ , estar vinculado a um valor tão pequeno, de modo que ele está muito mais suscetível às correções gravitacionais, o que coloca um obstáculo à proposta do áxion. Faremos uma discussão mais detalhada sobre isso no Capítulo 3, pois trata-se de um dos pontos centrais no nosso trabalho.

Deve-se pontuar que as correções gravitacionais à massa não é um problema exclusivo dos modelos de áxion invisível. Elas representam um problema geral para qualquer teoria que faça uso de campos escalares extremamente leves, seja esta teoria voltada às partículas elementares seja então para objetivos puramente cosmológicos. Nesse último caso, temos, por exemplo, uma classe de teorias com os chamados campos de "Quintessência", cuja massa deve estar em torno de  $10^{-33}$  eV para que elas cumpram com seus objetivos [40]. Encontrar uma forma de estabilizar esses campos, de tal modo que massas tão pequenas fiquem protegidas contra correções gravitacionais, é de fato um problema para essas teorias.

Apresentaremos aqui a construção de uma classe de modelos que constituem extensões do Modelo Padrão, onde a solução do problema de violação CP forte é estabilizada contra as correções gravitacionais no sentido discutido acima. Tratar-se-á em particular das extensões  $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$  do Modelo Padrão, comumente chamados de modelos 3-3-1. Mostrar-se-á como a simetria de Peccei-Quinn pode surgir automaticamente nesses modelos, tornando a solução do áxion natural. A estabilização contra o problema gravitacional será feita com simetrias discretas de gauge que notavelmente aparecem também quase automaticamente em um dos modelos. Os acoplamentos do áxion com a matéria nesses modelos serão mostrados e comparados com aqueles das interações efetivas utilizadas na busca experimental direta do áxion.

## 1.6 Modelos 3-3-1

Os Modelos 3-3-1 são extensões interessantes para o Modelo Padrão porque eles podem oferecer algumas direções para algumas perguntas como as que foram colocadas anteriormente. Por exemplo, esses modelos colocam uma restrição ao número de famílias permitidas por uma questão de consistência interna. Neles é possível ter somente um número de famílias que seja um múltiplo de três. Levando em conta a observação direta do fenômeno da liberdade assintótica [41] para as escalas de energias até agora testadas, pode-se argumentar que o número de famílias deve ser mesmo três. Eles contém o Modelo Padrão,

$$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \subset SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X, \quad (1.4)$$

de tal forma que o parâmetro  $\sin^2 \theta_W$  que mede a mistura entre os bósons de gauge neutros do setor eletrofraco tem seu valor mais restrito. De fato, em uma classe de modelos, temos a previsão que  $\sin^2 \theta_W < 0.25$ , o que concorda com o valor observado de  $\sin^2 \theta_{W_{exp}} = 0.23113(15)$ <sup>6</sup>. Esses modelos também prevêem um novo conteúdo de matéria e novos campos de gauge intermediando as interações eletrofracas. Esses novos estados devem provavelmente surgir na escala dos TeV, tornando-os bastante atrativos do ponto de vista fenomenológico.

A previsão  $\sin^2 \theta_W < 0.25$  de uma das classes de Modelos 3-3-1 faz com que o tratamento perturbativo não seja mais válido em escalas de energia de poucos TeV, como veremos posteriormente. Isso trará uma dificuldade para o estudo fenomenológico nas escalas de energia em que se espera observar uma física nova, limitando, portanto, o intervalo de energia no qual ele pode ser testado quantitativamente com o uso da teoria de perturbações. A extensão desse limite perturbativo requer a introdução de campos adicionais e traz para a evolução dos parâmetros do modelo um comportamento bastante distinto como veremos no Capítulo 5.

Outros aspectos e problemas diretamente relacionados a esses modelos serão discutidos nesse trabalho. A saber, o problema da quebra espontânea de simetria, as interações dos novos bósons de gauge e etc.

O trabalho será organizado da seguinte forma: no Capítulo 2, faremos uma introdução aos modelos 3-3-1 apresentando também algumas características interessantes adicionais; no Capítulo 3 lidaremos com problema do áxion, e a naturalidade da simetria de Peccei-Quinn; no

---

<sup>6</sup>Esse é o valor segundo a edição de 2002 do Particle Data Group e será usado em todo o trabalho aqui.

Capítulo 4, apresentaremos uma proposta com o singletos escalar do áxion induzindo a quebra da simetria na escala eletrofraca; no Capítulo 5, trataremos do problema do limite perturbativo na escala dos TeV mostrando uma solução com um conteúdo mínimo adicional de matéria. Terminaremos no Capítulo 6 com as discussões e considerações finais.

# Capítulo 2

## Modelos com simetria

$$\mathbf{SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X}$$

Neste capítulo, apresentaremos os detalhes da classe de modelos que ocuparão a maior parte do nosso trabalho. Serão os modelos com simetria  $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ , chamados modelos 3-3-1. Uma das razões dessa escolha, como será mostrado no capítulo seguinte, relaciona-se ao fato que eles acomodam naturalmente simetrias discretas  $Z_N$  com  $N$  grande e contêm automaticamente a simetria global necessária para resolver o problema de violação CP forte. Em particular, concentrar-nos-emos em duas classes desses modelos nos seus conteúdos mínimos de matéria. A primeira delas é a que contém os modelos com os tripletos de léptons formados por um neutrino e dois léptons carregados. A segunda classe será distinguida pelo fato de que neutrinos direitos fazem parte dos tripletos de léptons, isto é, os tripletos de léptons são formados, nessa classe, por dois neutrinos e um lépton. Essa última classe será chamada de modelos 3-3-1 com neutrinos direitos. Outras motivações adicionais para se considerar esse tipo de extensão do Modelo Padrão serão mostradas.

### 2.1 Os modelos 3-3-1.

O Capítulo 1 explica por que é interessante considerarmos extensões do Modelo Padrão que contenham naturalmente a simetria global  $U(1)_{PQ}$ . Escolhemos como base do nosso trabalho

os modelos com simetria a  $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ , pois eles permitem a implementação da simetria  $U(1)_{PQ}$  no seu conteúdo mínimo de representação, como será visto no Capítulo 3. Além disso, eles também oferecem respostas não triviais, por exemplo, para o problema da replicação das famílias, junto de uma base teórica frutífera para uma nova fenomenologia nas escalas de energia que começam a ser alcançadas atualmente no campo experimental. Esses e outros detalhes serão mostrados à medida que avançamos nesse capítulo.

As primeiras extensões do grupo de simetria  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  do setor eletrofraco para um grupo  $SU(3) \otimes U(1)$ , resultando em um modelo em que não havia correntes neutras com troca de sabor, foram feitas em meados da década de 70 [42]. Nesses modelos, todos os quarks e léptons eram dispostos em triplets para as componentes de mão esquerda e de mão direita desses campos, o que os deixava com um caráter vetorial, tornando-os assim livre de anomalias. Em modelos com caráter vetorial, as simetrias de gauge local não são suficientes para impedir que inicialmente tenhamos termos de massa nua na Langrangiana. Para evitar esses termos, é geralmente necessária a imposição de simetrias adicionais discretas, como fora feito nesses primeiros modelos, ou do tipo conforme, para se explicar que a massa dos férmons surge de um processo de quebra de simetria. Além das motivações puramente teóricas que visavam a acomodação da teoria eletrofraca vigente em um esquema mais amplo, havia também uma tentativa de explicação para certos decaimentos com três mísions no estado final, que poderiam estar sendo observados naquela época. Entre as razões que descartaram esses modelos, estava o fato de que eles não apresentavam uma estrutura pura do tipo  $V - A$  nas correntes neutras, ou então previam bósons de gauge e férmons adicionais na escala do Modelo Padrão, discordando do que veio a ser observado. Eles também não se reduziam à estrutura  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  de uma forma simples. Uma série de outras construções envolvendo a simetria  $SU(3)_L$  também foram feitas na mesma época [43].

No início da década de 80, M. Singer, J. W. F. Valle e J. Schechter propuseram o primeiro modelo com a simetria  $SU(3)_L$  e uma estrutura pura do tipo  $V - A$ , cuja representação exata de famílias do Modelo Padrão podia ser recuperada em um limite apropriado [44]. Além disso, o cancelamento das anomalias chirais se dava envolvendo as três famílias de uma vez. O modelo continha neutrinos exóticos pesados, completando as representações fundamentais de  $SU(3)$  para os léptons.

Cerca de uma década atrás novos modelos foram propostos fazendo ressurgir a idéia da

simetria SU(3) no setor eletrofraco. Esses modelos são opções interessantes para descrever a física na escala dos TeV que estará sendo alcançada de agora em diante na nova geração de experimentos. Eles foram introduzidos por F. Pisano e V. Pleitez e posteriormente por P. H. Frampton em 1992 [45]. Além da maior coincidência com o Modelo Padrão em baixas energias, os modelos 3-3-1, como serão chamados daqui em diante, podem iluminar algumas questões fundamentais que são acomodadas, mas não explicadas pelo primeiro. Vejamos, por exemplo, o problema de multiplicação das gerações. Assim como no modelo de M. Singer, J. W. F. Valle e J. Schechter, para que haja o cancelamento das anomalias chirais nesses modelos é necessário que o número de gerações,  $N_g$ , seja um múltiplo de 3, o que combinado com o fato que a liberdade assintótica na QCD requer um número de gerações  $N_g < 5$ , devido ao fato dos quarks estarem agrupados em tripletos, o que implica que o número de gerações permitidas deve ser mesmo  $N_g = 3$ . Veremos isso novamente a seguir. Mesmo se essa resposta não venha a ser revelada totalmente satisfatória, uma vez que lança mão da estrutura de família conhecida do modelo padrão e da informação sobre a liberdade assintótica, é notável que o número de gerações esteja diretamente relacionado com a consistência interna da teoria, o que, no mínimo, deve ser visto como uma dica para uma possível resposta final à questão.

Outro aspecto a ser destacado é que entre os bósons de gauge do setor eletrofraco da classe original dos modelos 3-3-1, temos aqueles que correspondem a autoestados duplamente carregados. Isso significa que está de forma concreta e precisa aberta a possibilidade de eventos onde a simetria global de número leptônico realiza-se de tal forma que, apenas o número leptônico total  $L = L_e + L_\mu + L_\tau$  é conservado. Exemplificando, tem-se o processo em nível de árvore  $e^-e^- \rightarrow \mu^-\mu^-$  intermediado por um bóson vetorial duplamente carregado. Processos assim têm sido uma motivação adicional para a procura de uma nova física além do Modelo Padrão, pois eles têm um sinal potencialmente alto para descobertas em aceleradores lineares e são previstos pelos modelos 3-3-1 [46]. Os bósons vetoriais duplamente carregados também podem ser descobertos em medidas da assimetria esquerda-direita em colisões lépton-lépton [47].

A seguir, revisaremos os pontos básicos da estrutura dos modelos concomitantemente a alguns aspectos fenomenológicos.

### 2.1.1 O conteúdo de representação.

Vamos agora apresentar o conteúdo de representação dos principais modelos que trataremos durante a maior parte do nosso trabalho. Eles pertencem a duas classes distintas. Denominaremos a primeira classe simplesmente por Modelos 3-3-1, cuja característica marcante está em que a última componente do triplete de léptons ser ocupada por uma partícula com carga positiva. A segunda classe de modelo será denominada por modelos 3-3-1 com neutrinos direitos. Nesse caso, a característica marcante é o fato de que a componente direita do neutrino pertence ao triplete de léptons, transformando-se, portanto, de maneira não trivial sob o grupo não abeliano.

Considerando as matrizes geradoras  $T^a$  do grupo SU(3) em sua normalização usual (veja o Apêndice A) o operador de carga elétrica, dado por uma combinação dos geradores diagonais dos grupos de simetria do setor eletrofraco, que definirá como os campos estarão dispostos nas representações é dado por:

$$Q = T^3 - bT^8 + X. \quad (2.1)$$

A constante  $b$  define a classe à qual o modelo pertence. Para  $b = \sqrt{3}$ , teremos o modelo 3-3-1 original. Para  $b = 1/\sqrt{3}$ , teremos o modelo 3-3-1 com neutrinos direitos.  $X$  é o número quântico relativo ao fator abeliano  $U(1)_X$ . Ele é necessário para que se faça possível a introdução de quarks no primeiro modelo. No segundo modelo toda matéria têm carga  $X$  não nula.

- **Modelos 3-3-1 ( $b = \sqrt{3}$ )**

No caso  $b = \sqrt{3}$  os léptons estarão dispostos de acordo com as seguintes representações:  $\Psi_{aL}$  representando os triplets de léptons da simetria SU(3) do setor eletrofraco com suas terceiras componentes sendo ocupada por léptons de carga positiva que denotaremos por  $E_a$  [48],

$$\Psi_{aL} = (\nu_a, l_a, E_a)_L^T \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0), \quad (2.2)$$

onde o índice superior  $T$  significa a matriz transposta e  $a = e, \mu, \tau$ ; as componentes direitas transformam-se como singletos do grupo

$$\nu_{aR} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0); \quad l_{aR} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1); \quad E_{aR} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 1). \quad (2.3)$$

Os números entre parênteses referem-se às propriedades de transformações sob os grupos  $SU(3)_C$ ,  $SU(3)_L$  e  $U(1)_X$  respectivamente. Neutrinos direitos,  $\nu_{aR}$ , em singletos, são introduzidos considerando a possibilidade de que esses venham a ser partículas com massa de Dirac ou Majorana. Existe a possibilidade de que a terceira componente do triplete  $\Psi_L$  seja ocupada pelo elemento que é uma conjugação de carga do segundo elemento, ou seja, poderíamos fazer  $E = l^c$  com  $c$  indicando a operação de conjugação de carga, de modo que as componentes direita e esquerda dos léptons carregados conhecidos estariam ambas no triplete. Dessa forma, o triplete de léptons na Eq. (2.2) passaria a ser

$$\Psi_{aL} = (\nu_a, l_a, l_a^c)_L^T \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0) \quad (2.4)$$

e na Eq. (2.3) seriam eliminados  $l_{aR}$  e  $E_{aR}$ . De fato, essa foi a construção original [45]. Aqui vamos nos ater às construções que têm os léptons segundo as representações em Eq. (2.2) e Eq. (2.3). Quando tratamos da construção original diremos isso explicitamente, tentando evitar qualquer confusão.

Os quarks têm suas componentes esquerdas acomodadas nos tripletos com transformação não trivial sob o fator abeliano  $U(1)_X$ . Isso leva à necessidade de se introduzir quarks novos com cargas elétricas exóticas. Temos,

$$Q_{mL} = (d_m, u_m, j_m)_L^T \sim (\mathbf{3}, \mathbf{3}^*, -1/3), \quad Q_{3L} = (u_3, d_3, J)_L^T \sim (\mathbf{3}, \mathbf{3}, 2/3), \quad (2.5)$$

com  $m = 1, 2$ , e as componentes direitas transformando-se como singletos de acordo com

$$\begin{aligned} u_{\alpha R} &\sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, 2/3), & d_{\alpha R} &\sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3), \\ J_R &\sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, 5/3), & j_{mR} &\sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -4/3) \end{aligned} \quad (2.6)$$

com  $\alpha = 1, 2, 3$ . Os quarks  $J$  e  $j_m$  são exóticos no sentido que eles têm cargas elétricas  $5/3$  e  $-4/3$  respectivamente, em unidades do módulo da carga do elétron. Os grupos  $SU(N)$  com  $N > 2$  contam com representações fundamentais que são complexas e por isso, indicamos com um \* que alguns quarks em Eq. (2.5) transforma-se como a representação conjugada complexa, ou seja, como anti-tripletos. A razão para isso é que o cancelamento das anomalias chirais exige que dois tripletos de quarks pertençam à representação anti-fundamental de  $SU(3)$  do setor eletrofraco. Veremos isso a seguir.

Com esse conteúdo de matéria fermiônica, as anomalias cancelam-se de uma forma não trivial envolvendo o número de famílias. As relações que devem ser satisfeitas para que a teoria

seja livre das anomalias do triângulo são:

$$\text{I) } [\text{SU}(3)_C]^2 \text{U}(1)_X : \quad \text{Tr}(\{T_C^a, T_C^b\}X) = 0, \quad (2.7)$$

$$\text{II) } [\text{SU}(3)_L]^3 : \quad \text{Tr}(\{T^a, T^b\}T^c) = 0, \quad (2.8)$$

$$\text{III) } [\text{SU}(3)_L]^2 \text{U}(1)_X : \quad \text{Tr}(\{T^a, T^b\}X) = 0, \quad (2.9)$$

$$\text{IV) } [\text{U}(1)_X]^3 : \quad \text{Tr}(\{X, X\}X) = 0. \quad (2.10)$$

Onde  $T_C^a$  referem-se aos geradores do grupo da QCD e  $X$  ao fator abeliano  $\text{U}(1)_X$ . A relação I envolvendo  $\text{SU}(3)_C$  e  $\text{U}(1)_X$  diz que a soma de todas as cargas  $X$  dos quarks deve ser nula. Usando as Eqs. (2.5) e (2.6)

$$\text{Tr}(\{T_C^a, T_C^b\}X) \equiv \delta^{ab} \text{Tr}X = 6\left(-\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{2}{3}\right) + 3\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) + \frac{5}{3} + 2\left(-\frac{4}{3}\right) = 0. \quad (2.11)$$

A relação II, envolvendo puramente o fator  $\text{SU}(3)_L$  pode se cumprir somente se o número de tripletos desse grupo é igual ao número de anti-tripletos, uma vez que  $T^{a*} = -T^a$ . De fato, as representações em Eq. (2.2) e Eq. (2.5) satisfazem isso. Temos três tripletos em  $\Psi_{aL}$ , três tripletos em  $Q_{3L}$  e seis anti-tripletos em  $Q_{mL}$  levando em conta o número de famílias e os graus de liberdade de cor dos quarks.

Já para a relação III que envolve  $\text{SU}(3)_L$  e  $\text{U}(1)_X$  temos que a soma das cargas  $X$  de todos os férmiões nos tripletos de  $\text{SU}(3)_L$  deve ser nula. Usando as Eqs. (2.2) e (2.5),

$$\text{Tr}(\{T^a, T^b\}X) \equiv \delta^{ab} \text{Tr}X = 6\left(-\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{2}{3}\right) + 3(0) = 0. \quad (2.12)$$

Finalmente, a relação IV envolvendo puramente o fator  $\text{U}(1)_X$  determina que a diferença entre a soma dos cubos das cargas  $X$  dos férmiões de mão-esquerda e dos férmiões de mão-direita deve-se anular. Usando as Eqs. (2.2), (2.3), (2.5) e (2.6),

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\{X, X\}X) &\equiv \text{Tr}X_L^3 - \text{Tr}X_R^3 \\ &= 18\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 9\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 3\left[3\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{5}{3}\right)^3 + 2\left(-\frac{4}{3}\right)^3\right] = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Observe que o cancelamento das anomalias se daria da mesma forma, se tivermos  $n$  cópias do conjunto das representações do conteúdo de matéria. Isso significa que a estrutura de representação nas Eqs. (2.2), (2.3), (2.5) e (2.6) permite o cancelamento das anomalias para um conteúdo de representação que seja um múltiplo  $n$  de três famílias. Ou seja, seria, a princípio, possível ter  $3n$  famílias no Modelo 3-3-1.  $n = 1$  corresponde ao modelo mínimo.

Fenomenologicamente, a existência de outras  $3(n - 1)$ ,  $n > 1$ , famílias estariam vinculadas de acordo com o que segue. A largura invisível da partícula  $Z^0$  mostra que existem apenas três neutrinos transformando-se não trivialmente segundo a estrutura de dubletos de  $SU(2)_L$  com massa menor do que  $M_{Z^0}/2$ . Uma vez que  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  é um subgrupo de  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$ , famílias adicionais, segundo o Modelo 3-3-1, implicariam na existência de  $3(n - 1)$  novos neutrinos e também  $3(n - 1)$  novos léptons carregados na estrutura de dubletos do Modelo Padrão. Esses léptons novos acoplariam-se aos bósons vetoriais de  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  de maneira idêntica à dos léptons conhecidos. Portanto, eles devem ter massas  $m$  tal que  $m > M_{Z^0}/2$  para que não venham a ser produtos da desintegração da partícula  $Z^0$ . Por outro lado, eles ganhariam massa na mesma escala do Modelo Padrão, e deveríamos esperar que se eles, de fato, existissem então suas massas teriam de estar não muito distante das partículas conhecidas. Obviamente, esse não é um argumento de exclusão para esses fermions e já que suas massas ainda poderiam ser ajustadas para compatibilizar com a largura de decaimento da partícula  $Z^0$ . Porém, seria difícil de imaginar por que neutrinos fazendo parte de estruturas idênticas teriam massas tão diferentes, já que as oscilações dos neutrinos conhecidos sugerem massas da ordem de  $1 - 10^{-2}$  eV para eles [10].

Outra restrição vem da liberdade assintótica, [49], como observado em Ref. [50]. A evolução da constante de acoplamento da QCD,  $\alpha_c$ , indica também que existem somente seis quarks na escala de energia do Modelo Padrão. Observa-se, nas escalas de energia acessíveis, a liberdade assintótica. Da função  $\beta$  do grupo de renormalização para  $\alpha_c$  tem-se na aproximação de um loop

$$\beta = \mu \frac{d\alpha_c}{d\mu} = -\frac{1}{2\pi} \left( 11 - \frac{2}{3} n_q \right) \alpha_c^2 \quad (2.14)$$

com  $n_q$  sendo o número de quarks. Para que função a  $\beta$  seja negativa é necessário que  $n_q < 33/2 \simeq 17$ . Temos no Modelo 3-3-1 no mínimo nove quarks, com três deles ganhando massa em uma escala acima da do Modelo Padrão como veremos abaixo. Para  $n = 2$ , como vimos anteriormente, seriam dezoito quarks e estaremos acima do limite para liberdade assintótica. Veja que, então, supondo que a liberdade assintótica permaneça acima da do Modelo Padrão não há outra alternativa senão apenas três famílias. É nessa consideração que dizemos que o modelo, junto da observação experimental de que a evolução da constante de acoplamento da QCD, de fato é decrescente com o aumento da energia, leva à conclusão que o número de famílias é três.

Todavia, devemos ressaltar que a suposição de liberdade assintótica é corroborada apenas pelo observação direta a baixas energias.

Para gerar todas as massas via quebra espontânea de simetria, são necessários, no mínimo, três triplets escalares nessa versão. Eles serão

$$\begin{aligned}\eta &= (\eta^0, \eta_1^-, \eta_2^+)^T \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0), \\ \rho &= (\rho^+, \rho^0, \rho^{++})^T \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, 1), \\ \chi &= (\chi^-, \chi^{--}, \chi^0)^T \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, -1).\end{aligned}\quad (2.15)$$

Com isso, os termos de Yukawa na Langrangiana de interação são

$$\begin{aligned}-\mathcal{L}_Y^l &= G_{ab}^\nu \overline{(\Psi)}_{aL} \nu_{bR} \eta + G_{ab}^l \overline{(\Psi)}_{aL} l_{bR} \rho + G_{ab}^E \overline{(\Psi)}_{aL} E_{bR} \chi \\ &+ \epsilon^{ijk} H_{ab} \overline{(\Psi_{aL})_i^c} (\Psi_{bL})_j \eta_k + M_{ab}^\nu \overline{(\nu_{aR})^c} \nu_{bR} + M_{ab}^{lE} \overline{(l_{aR})^c} E_{bR} + H.c.,\end{aligned}\quad (2.16)$$

para os léptons com  $G_{ab}^\nu$ ,  $G_{ab}^l$  e  $G_{ab}^E$  matrizes complexas arbitrárias,  $H_{ab}$  uma matriz antisimétrica e  $M_{ab}^\nu$ ,  $M_{ab}^{lE}$  matrizes de massa nua para os neutrinos direitos e léptons carregados. E,

$$\begin{aligned}-\mathcal{L}_Y^q &= \overline{Q}_{iL} (F_{i\alpha} u_{\alpha R} \rho^* + \tilde{F}_{i\alpha} d_{\alpha R} \eta^*) + \overline{Q}_{3L} (G_\alpha u_{\alpha R} \eta + \tilde{G}_\alpha d_{\alpha R} \rho) \\ &+ \lambda^J \overline{Q}_{3L} J_{1R} \chi + \lambda_{im}^j \overline{Q}_{iL} j_{mR} \chi^* + H.c.,\end{aligned}\quad (2.17)$$

para os quarks, com  $F_{i\alpha}$ ,  $\tilde{F}_{i\alpha}$ ,  $G_\alpha$ ,  $\tilde{G}_\alpha$ ;  $\alpha = 1, 2, 3$ ,  $\lambda^J$  e  $\lambda_{im}^j$ ;  $i, m = 1, 2$  também matrizes complexas arbitrárias. Os índices repetidos significam uma soma implícita. Em ambas as interações de Yukawa acima, uma mistura geral em cada setor carregado é permitida. Desde que essa mistura não será relevante para os nossos desenvolvimentos aqui, não trataremos delas.

Uma característica adicional interessante é que essas interações de Yukawa junto dos vínculos advindos do cancelamento das anomalias permitem mostrar que a carga elétrica é quantizada nesse modelo. A quantização da carga elétrica no modelo onde as terceiras componentes dos triplets de léptons são ocupadas pelo pósitron e seus primos foi mostrada em Ref. [51]. No Apêndice B, mostramos que também há quantização quando temos o singuleto do áxion e uma simetria discreta específica. E ainda, a quantização pode ser alcançada desprezando os termos de massa nua em Eq. (2.17), de modo que os neutrinos passam a ser partículas de Dirac. Isso não é uma característica comum, pois uma análise sobre extensões do modelo padrão tem mostrado que não é possível ter quantização da carga elétrica, se os neutrinos são partículas de Dirac [52].

No setor escalar, o potencial invariante de gauge e renormalizável tem a forma

$$\begin{aligned}
V_{331} = & \mu_1^2 \eta^\dagger \eta + \mu_2^2 \rho^\dagger \rho + \mu_3^2 \chi^\dagger \chi + \lambda_1 (\eta^\dagger \eta)^2 + \lambda_2 (\rho^\dagger \rho)^2 + \lambda_3 (\chi^\dagger \chi)^2 \\
& + \eta^\dagger \eta [\lambda_4 (\rho^\dagger \rho) + \lambda_5 (\chi^\dagger \chi)] + \lambda_6 (\rho^\dagger \rho) (\chi^\dagger \chi) + \lambda_7 (\rho^\dagger \eta) (\eta^\dagger \rho) \\
& + \lambda_8 (\chi^\dagger \eta) (\eta^\dagger \chi) + \lambda_9 (\rho^\dagger \chi) (\chi^\dagger \rho) + (f \epsilon^{ijk} \eta_i \rho_j \chi_k + \text{H. c.})
\end{aligned} \tag{2.18}$$

com as constantes de acoplamento  $\lambda_i$ , admensionais e os parâmetros  $\mu_i^2$  e  $f$  com dimensões de massa quadrado e massa respectivamente. É possível ainda um termo de interação do tipo  $(\eta^\dagger \rho) (\eta^\dagger \chi)$  que violaria a simetria de número leptônico. Omitiremos esse termo supondo que existe uma simetria discreta suprimindo essa interação. Essa simetria será detalhada no próximo Capítulo. De qualquer forma, esse termo não afeta a minimização do potencial em nível de árvore.

A quebra espontânea de simetria acontece quando as componentes neutras dos tripletos escalares em Eqs. (2.15) condensam, isto é, desenvolvem valor esperado no vácuo (VEV),  $\langle \eta^0 \rangle = v_\eta / \sqrt{2}$ ,  $\langle \rho^0 \rangle = v_\rho / \sqrt{2}$  e  $\langle \chi^0 \rangle = v_\chi / \sqrt{2}$ , induzindo a seguinte rota de quebra de simetria

$$SU(3)_L \otimes U(1)_N \xrightarrow{\langle \chi \rangle} SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{\langle \eta, \rho \rangle} U(1)_{em}. \tag{2.19}$$

O VEV  $\langle \chi^0 \rangle$  é responsável pela quebra para o grupo do Modelo Padrão, de modo que devemos ter  $v_\chi \gg v_\eta, v_\rho$ . Identificaremos esse VEV, como tendo a mesma ordem da escala de energia que definiremos como  $\mu_{331}$ , onde todas as simetrias do modelo tornam-se evidentes, isto é,  $v_\chi \approx \mu_{331}$ . Isso deixa os campos adicionais que completam as representações do Modelo 3-3-1 mais pesados que as partículas conhecidas desacoplando-os da teoria efetiva de baixa energia, que, no caso, é o subgrupo  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ . Como pode ser visto das interações de Yukawa em Eqs. (2.16) e (2.17), tanto os léptons exóticos  $E_a$  quanto os quarks exóticos  $J$  e  $j_m$  terão massas proporcionais a  $v_\chi$ , pois eles se acoplam diretamente com a componente neutra  $\chi^0$ . Entretanto, pode ser que pelo menos uma dessas massas não seja tão maior do que a massa do quark top, se os limites experimentais permitirem isso. Os bósons de gauge de  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$  que não fazem parte do Modelo Padrão também terão massa proporcional a escala  $v_\chi$  como veremos na próxima sessão. No entanto, nesse conteúdo mínimo de representação os bósons de gauge exóticos carregados terão massas menores do que  $v_\chi$ . Já os léptons e quarks conhecidos ganham massa com as escalas  $v_\eta$  e  $v_\rho$  na última etapa de quebra de simetria para o grupo eletromagnético  $U(1)_{em}$ . Esses VEVs se relacionam com a escala eletrofraca usual de acordo com  $v_\eta^2 + v_\rho^2 = v_W^2$ , onde  $v_W^2 = (246)^2 \text{ GeV}^2$ .

O espectro de massa do setor escalar tem sido estudado na literatura com relação às matrizes de massa [53, 54]. Existem, no espectro de massas dos campos escalares, três estados carregados, e quatro estados neutros. Entre os estados carregados, um deles compõe uma partícula escalar de dupla carga. Os estados carregados restantes são absorvidos nos graus de liberdade dos seis bósons de gauge carregados, dois deles correspondendo às conhecidas partículas  $W^\pm$  do Modelo Padrão. Nos estados neutros, há um pseudoescalar pesado que advém da parte imaginária das componentes neutras dos campos da simetria. As partes imaginárias restantes das componentes neutras são absorvidas nos graus de liberdade dos dois bósons de gauge massivos neutros do modelo. Um deles equivalente à conhecida partícula  $Z^0$  e o outro mais pesado que esse, com massa na escala  $\mu_{331}$ . Os bósons de gauge serão tratados em mais detalhes na próxima sessão.

Isso já é suficiente para o que iremos desenvolver nesse modelo. Outros aspectos serão apresentados à medida que se fizerem necessários. Passemos para a versão do modelo com neutrinos direitos.

- **Modelos 3-3-1 com neutrinos de mão direita ( $b = 1/\sqrt{3}$ )**

No caso  $b = 1/\sqrt{3}$ , o triploto com  $X = -1/3$  acomoda duas componentes neutras [55]. Assim, é possível colocar o neutrino e sua anti-partícula junto de um lépton carregado na estrutura de triploto. Dessa forma, os léptons estarão dispostos segundo as seguintes representações, agora com  $\psi_{aL}$  representando

$$\psi_{aL} = (\nu_a, e_a, \nu_a^c)_L^T \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, -1/3), \quad (2.20)$$

com  $e_a$  um lépton carregado conhecido. Levando em conta que a operação de conjugação de carga  $c$  troca a quiralidade do férmion, o triploto acima tem as componentes direita e esquerda do neutrino. Essa versão é chamada de Modelo 3-3-1 com neutrinos de mão direita, pois diferente das outras versões, nela o neutrino direito se transforma não trivialmente sob o grupo não abeliano. As componentes direita dos léptons carregados formam os únicos singletos de léptons,

$$e_{aR} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1). \quad (2.21)$$

Nessa versão, não há quarks com cargas elétricas exóticas. As representações para eles são

as seguintes

$$Q_{mL} = (d_m, u_m, d'_m)_L^T \sim (\mathbf{3}, \mathbf{3}^*, 0), \quad Q_{3L} = (u_3, d_3, u'_3)_L^T \sim (\mathbf{3}, \mathbf{3}, 1/3), \quad (2.22)$$

com  $m = 1, 2$ , e as componentes direitas transformando-se como singletos de acordo com

$$\begin{aligned} u_{\alpha R} &\sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, 2/3), & d_{\alpha R} &\sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3), \\ u'_{3R} &\sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, 2/3), & d'_{mR} &\sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3). \end{aligned} \quad (2.23)$$

$\alpha = 1, 2, 3$ .

As anomalias cancelam-se como pode ser verificado através das relações em Eqs. (2.7), (2.8), (2.9) e (2.10).

Os multipletos escalares, necessários para quebrar espontaneamente as simetrias de gauge nesse modelo, são

$$\begin{aligned} \eta &= (\eta^0, \eta^-, \eta'^0)^T \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, -1/3), \\ \rho &= (\rho^+, \rho^0, \rho'^+)^T \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, 2/3), \\ \chi &= (\chi^0, \chi^-, \chi'^0)^T \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, -1/3). \end{aligned} \quad (2.24)$$

É possível eliminar um dos dois tripletos escalares com carga  $X = -1/3$  [56]. Essa seria a versão mais econômica dos modelos. A fenomenologia dessa versão tem sido trabalhada recentemente [57]. No entanto, os três tripletos são interessantes para os nossos propósitos e por essa razão trabalharemos com tal opção.

Embora em Eq. (2.24) tenhamos ao todo nos tripletos, cinco componentes neutras, suparemos durante todo o trabalho que apenas uma em cada triplete desenvolve VEV. Em semelhança à versão anterior, consideraremos  $\langle \eta^0 \rangle = v_\eta/\sqrt{2}$ ,  $\langle \rho^0 \rangle = v_\rho/\sqrt{2}$  e  $\langle \chi'^0 \rangle = v_\chi'/\sqrt{2}$ . A consequência em se fazer com que as demais componentes neutras adquiram VEV é que nessa situação há a quebra espontânea do número leptônico concomitante a geração de massa de Majorana para os neutrinos e ao surgimento de um bóson de Goldstone, o chamado Majoron, que tem consequências interessantes como por exemplo a desintegração de neutrinos [58, 59]. A quebra espontânea do número leptônico não pode ser implementada no modelo com dois tripletos.

As interações de Yukawa, nesse modelo, para os léptons são

$$-\mathcal{L}_Y^l = h_{ab} \bar{\psi}_{aL} e_{bR} \rho + h'_{ab} \epsilon^{ijk} (\bar{\psi}_{aL})_i (\psi_{bL})_j^c (\rho^*)_k + \text{H.c..} \quad (2.25)$$

para os léptons com  $h_{ab}$  uma matriz complexa arbitrária e  $h'_{ab}$  uma matriz anti-simétrica pela estatística de Fermi. E,

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^q &= G_1 \bar{Q}_{3L} u'_{3R} \chi + G_2^{ij} \bar{Q}_{iL} d'_{jR} \chi^* + G_3^{3a} \bar{Q}_{3L} u_{aR} \eta + G_4^{ia} \bar{Q}_{iL} d_{aR} \eta^* \\ &+ G_5^{3a} \bar{Q}_{3L} d_{aR} \rho + G_6^{ia} \bar{Q}_{iL} u_{aR} \rho^* + H.c., \end{aligned} \quad (2.26)$$

para os quarks, com as matrizes  $G_{is}$  complexas e arbitrárias. Desde que os tripletos  $\eta$  e  $\chi$  têm os mesmos números quânticos seriam ainda permitidos em Eq. (2.26) termos onde  $\eta$  é trocado por  $\chi$  e vice-versa. Em razão disso, as Langrangianas do setor de Yukawa e do setor escalar tornam-se bem mais complicadas nessa versão do modelo. Na forma que apresentamos, supomos nesse ponto que existe uma simetria além da do grupo de gauge até aqui explicitado, que deixa a Langrangiana de Yukawa na forma acima. No próximo capítulo, apresentaremos e discutiremos essa simetria.

O potencial escalar mais geral, renormalizável e invariante de gauge é nesse modelo

$$V = V_H + V_{NH}, \quad (2.27)$$

onde  $V_H$  é a parte que coleciona todos os termos hermitianos, com a forma

$$\begin{aligned} V_H &= \mu_1^2 \eta^\dagger \eta + \mu_2^2 \rho^\dagger \rho + \mu_3^2 \chi^\dagger \chi + \lambda_1 (\eta^\dagger \eta)^2 + \lambda_2 (\rho^\dagger \rho)^2 + \lambda_3 (\chi^\dagger \chi)^2 \\ &+ \eta^\dagger \eta [\lambda_4 (\rho^\dagger \rho) + \lambda_5 (\chi^\dagger \chi)] + \lambda_6 (\rho^\dagger \rho) (\chi^\dagger \chi) + \lambda_7 (\rho^\dagger \eta) (\eta^\dagger \rho) \\ &+ \lambda_8 (\chi^\dagger \eta) (\eta^\dagger \chi) + \lambda_9 (\rho^\dagger \chi) (\chi^\dagger \rho), \end{aligned} \quad (2.28)$$

e  $V_{NH}$  é a parte que coleciona todos os termos não hermitianos

$$\begin{aligned} V_{NH} &= \mu_4^2 \chi^\dagger \eta + \epsilon^{ijk} f \eta_i \rho_j \chi_k + \lambda_{10} (\chi^\dagger \eta)^2 + \lambda_{11} (\chi^\dagger \rho) (\rho^\dagger \eta) \\ &+ \lambda_{12} (\chi^\dagger \eta) (\eta^\dagger \eta) + \lambda_{13} (\chi^\dagger \eta) (\rho^\dagger \rho) + \lambda_{14} (\chi^\dagger \eta) (\chi^\dagger \chi) + H.c. \end{aligned} \quad (2.29)$$

com as constantes de acoplamento  $\lambda_i$  e os parâmetros de massa  $\mu_i$  como antes. Diferentemente da Langrangiana de Yukawa acima, apresentamos em Eq. (2.29) todos os termos permitidos pela simetria de gauge na parte não hermitiana do potencial escalar. O motivo para isso é que queremos deixar evidente como a parte não hermitiana do potencial será simplificada consideravelmente quando introduzimos as simetrias discretas a serem discutidas no próximo capítulo.

Discutiremos, abaixo, os bósons de gauge do setor eletrofraco desses modelos.

## 2.1.2 Bósons de gauge do setor eletrofraco

As interações dos bósons de gauge do setor eletrofraco com a matéria surgem com a derivada covariante definida para um campo de matéria  $\varphi$  como

$$\begin{aligned} D_\mu^\varphi &= \partial_\mu - \frac{i}{2}gW_\mu^a T^a - ig_X X_\varphi B_\mu \\ &= \partial_\mu - \frac{i}{2}g\mathcal{M}_\mu^\varphi, \end{aligned} \quad (2.30)$$

sendo as matrizes geradoras  $T^a$ ,  $a = 1..8$ , da álgebra de SU(3) dadas pela definição de M. Gell-Mann como mostrado no Apêndice A, e  $X_\varphi$  a carga do fator abeliano U(1)<sub>X</sub> do multipletô  $\varphi$  no qual  $D_\mu^\varphi$  atua. A matriz  $\mathcal{M}_\mu^\varphi$  contém os bósons de gauge com as cargas elétricas,  $q$ , definidas de acordo com o operador genérico de carga em Eq. (2.1) através da equação de autovalores

$$\mathcal{Q}|\mathcal{M}_\mu^\varphi\rangle_{ij} \equiv [\mathcal{Q}, \mathcal{M}_\mu^\varphi]_{ij} = q_{ij}|\mathcal{M}_\mu^\varphi\rangle_{ij}. \quad (2.31)$$

O que resulta que a matriz  $\mathcal{M}_\mu^\varphi$  terá a disposição de campos e de carga elétricas segundo a forma

$$\mathcal{M}_\mu^\varphi = \begin{pmatrix} W_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}W_\mu^8 + 2tX_\varphi B_\mu & \sqrt{2}W_\mu^+ & \sqrt{2}\left(V_\mu^{\frac{1}{2}(\sqrt{3}b-1)}\right)^\dagger \\ \sqrt{2}W_\mu^- & -W_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}}W_\mu^8 + 2tX_\varphi B_\mu & \sqrt{2}\left(U_\mu^{\frac{1}{2}(\sqrt{3}b+1)}\right)^\dagger \\ \sqrt{2}V_\mu^{\frac{1}{2}(\sqrt{3}b-1)} & \sqrt{2}U_\mu^{\frac{1}{2}(\sqrt{3}b+1)} & -\frac{2}{\sqrt{3}}W_\mu^8 + 2tX_\varphi B_\mu \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

com  $t = g_X/g$  e os bósons de gauge não hermitianos, fora da diagonal de  $\mathcal{M}_\mu$ , definidos como

$$\begin{aligned} W_\mu^+ &= (W_\mu^1 - iW_\mu^2)/\sqrt{2}, \\ V_\mu^{\frac{1}{2}(\sqrt{3}b-1)} &= (W_\mu^4 + iW_\mu^5)/\sqrt{2}, \\ U_\mu^{\frac{1}{2}(\sqrt{3}b+1)} &= (W_\mu^6 + iW_\mu^7)/\sqrt{2} \end{aligned} \quad (2.33)$$

sendo  $\pm\frac{1}{2}(\sqrt{3}b \pm 1)$  a carga elétrica  $q$  associada aos bósons de gauge exóticos  $V$  e  $U$  previstos pelo modelo. Assim, no Modelo 3-3-1  $b = \sqrt{3}$  e temos dois bósons de gauge com uma carga,  $V^\pm$ , e dois bósons de gauge duplamente carregados,  $U^{\pm\pm}$ . No Modelo 3-3-1 com neutrinos direitos  $b = 1/\sqrt{3}$  e temos dois bósons de gauge não hermitianos e neutros,  $V^0$  e  $V^{0\dagger}$ , e dois bósons de gauge com uma carga  $U^\pm$ . Os três autoestados físicos neutros reais serão uma combinação linear de  $W_\mu^3$ ,  $W_\mu^8$  e  $B_\mu$ .

- Autoestados e massas para os bósons de gauge do Modelo 3-3-1 ( $b = \sqrt{3}$ )

No Modelo 3-3-1, a parte na Lagrangiana contendo as derivadas covariantes para os campos escalares,  $\mathcal{L} = \sum_{\varphi} (D_{\mu}\varphi)^{\dagger}(D^{\mu}\varphi)$ , fornece os bilineares nos campos de gauge gerando os termos de massa através de:

$$\sum_{\varphi=\eta,\rho,\chi} (\mathcal{M}_{\mu}\langle\varphi\rangle)^{\dagger}(\mathcal{M}_{\mu}\langle\varphi\rangle) \quad (2.34)$$

e leva as seguintes massas para os estados carregados

$$M_w^2 = \frac{g^2}{4}v_w^2, \quad (2.35)$$

$$M_v^2 = \frac{g^2}{4}(v_{\eta}^2 + v_{\chi}^2), \quad (2.36)$$

$$M_u^2 = \frac{g^2}{4}(v_{\rho}^2 + v_{\chi}^2) \quad (2.37)$$

onde  $v_w^2 = v_{\eta}^2 + v_{\rho}^2 \simeq (246)^2$  GeV<sup>2</sup>. Já os bilineares da parte neutra real levam a seguinte matriz de massa na base  $(W_{\mu}^3, W_{\mu}^8, B_{\mu})$

$$M_{bvn}^2 = \frac{g^2}{2}v_{\chi}^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\bar{v}_w^2 & \frac{1}{2\sqrt{3}}(\bar{v}_w^2 - 2\bar{v}_{\rho}^2) & -t\bar{v}_{\rho}^2 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}}(\bar{v}_w^2 - 2\bar{v}_{\rho}^2) & \frac{1}{6}(\bar{v}_w^2 + 4) & \frac{1}{\sqrt{3}}t(\bar{v}_{\rho}^2 + 2) \\ -t\bar{v}_{\rho}^2 & \frac{1}{\sqrt{3}}t(\bar{v}_{\rho}^2 + 2) & 2t^2(\bar{v}_{\rho}^2 + 1) \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

onde definimos por simplicidade as quantidades adimensionais  $\bar{v}_{\rho} = v_{\rho}/v_{\chi}$  e  $\bar{v}_w = v_w/v_{\chi}$ . A matriz em Eq. (2.38) contém um autovalor nulo, correspondendo ao fóton que chamaremos de  $A_{\mu}$ , e dois autovalores não nulos,  $M_z^2$  e  $M_{z'}^2$  correspondendo às massas quadráticas dos dois bósons vetoriais neutros físicos que chamaremos de  $Z_{\mu}$  e  $Z'_{\mu}$  respectivamente. Elas serão dadas junto à definição de dois parâmetros adimensionais,  $m_z^2$  e  $m_{z'}^2$ , por conveniência

$$m_z^2 = \frac{2M_z^2}{g^2v_{\chi}^2} = \frac{1}{3} [3t^2(\bar{v}_{\rho}^2 + 1) + 1 + \bar{v}_w^2] \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{3(4t^2 + 1)(\bar{v}_w^2(\bar{v}_{\rho}^2 + 1) - \bar{v}_{\rho}^4)}{(3t^2(\bar{v}_{\rho}^2 + 1) + 1 + \bar{v}_w^2)^2}} \right],$$

$$m_{z'}^2 = \frac{2M_{z'}^2}{g^2v_{\chi}^2} = \frac{1}{3} [3t^2(\bar{v}_{\rho}^2 + 1) + 1 + \bar{v}_w^2] \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{3(4t^2 + 1)(\bar{v}_w^2(\bar{v}_{\rho}^2 + 1) - \bar{v}_{\rho}^4)}{(3t^2(\bar{v}_{\rho}^2 + 1) + 1 + \bar{v}_w^2)^2}} \right]. \quad (2.39)$$

Os autoestados  $W_{\mu}^3$ ,  $W_{\mu}^8$  e  $B_{\mu}$  da simetria em termos dos autoestados físicos  $A_{\mu}$ ,  $Z_{\mu}$  e  $Z'_{\mu}$  são:

$$W_{\mu}^3 = \frac{t}{\sqrt{4t^2 + 1}}A_{\mu} - N_Z (3m_{z'}^2 + \bar{v}_{\rho}^2 - 2\bar{v}_w^2) Z_{\mu} - N_{Z'} (3m_z^2 + \bar{v}_{\rho}^2 - 2\bar{v}_w^2) Z'_{\mu},$$

$$\begin{aligned} \frac{w^8}{\sqrt{3}} &= -\frac{t}{\sqrt{4t^2+1}} A_\mu - N_Z \left( m_{Z'}^2 + \bar{v}_\rho^2 - \frac{2}{3} \bar{v}_w^2 - \frac{2}{3} \right) Z_\mu - N_{Z'} \left( m_z^2 + \bar{v}_\rho^2 - \frac{2}{3} \bar{v}_w^2 - \frac{2}{3} \right) Z'_\mu, \\ B_\mu &= \frac{1}{\sqrt{4t^2+1}} A_\mu + 2t(1-\bar{v}_\rho^2) N_Z Z_\mu + 2t(1-\bar{v}_\rho^2) N_{Z'} Z'_\mu, \end{aligned} \quad (2.40)$$

com os fatores de normalização

$$N_Z = \left[ 3 \left( 2m_{Z'}^2 + \bar{v}_\rho^2 - \frac{4}{3} \bar{v}_w^2 - \frac{1}{3} \right)^2 + (\bar{v}_\rho^2 - 1)^2 (4t^2 + 1) \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.41)$$

$$N_{Z'} = \left[ 3 \left( 2m_z^2 + \bar{v}_\rho^2 - \frac{4}{3} \bar{v}_w^2 - \frac{1}{3} \right)^2 + (\bar{v}_\rho^2 - 1)^2 (4t^2 + 1) \right]^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.42)$$

Pegando a componente de interação do elétron com o fóton dos autoestados da simetria, como escritos acima temos a seguinte relação:

$$g \frac{t}{\sqrt{4t^2+1}} \bar{l}_a \gamma^\mu l_a A_\mu = e \bar{l}_a \gamma^\mu l_a A_\mu = g \text{sw} \bar{l}_a \gamma^\mu l_a A_\mu, \quad (2.43)$$

onde  $e$  é a carga elétrica do elétron;  $\text{sw} = \sin \theta_W$  é o parâmetro de mistura eletrofraca como definido no Modelo Padrão. A identificação  $e = g \text{sw}$  é possível no Modelo 3-3-1, porque o subgrupo  $SU(2)_L$  está totalmente embebido em  $SU(3)_L$ . Isso significa que a constante de acoplamento  $g$  é a mesma que aparece junto ao fator não abeliano  $SU(2)_L$  do Modelo Padrão. Portanto, teremos que nas escalas de energia, onde as simetrias do Modelo 3-3-1 são realizadas, vale a seguinte relação.

$$t^2 = \frac{\alpha_X}{\alpha_L} = \frac{\text{sw}^2}{1 - 4\text{sw}^2}. \quad (2.44)$$

Com  $\alpha_i = g_i^2/4\pi$ ,  $i = X, L$ .

Observa-se que a consistência do modelo exige que  $\text{sw}^2 < 1/4$ . O que está de acordo com a experiência uma vez que as medidas precisas no pólo de produção da partícula  $Z^0$  fornecem o valor  $\text{sw}^2(M_Z) = 0.23113(15)^1$ . De fato, essa é uma característica interessante do modelo que explica por que o valor de  $\text{sw}^2$  é menor do que 0.25 sendo corroborado pela experiência direta.

Por outro lado, a Eq. (2.44) traz ao modelo o seguinte problema: considerando que a constante de acoplamento  $\alpha_L$  se deve ao fator não abeliano, ela deverá decrescer com a energia para

---

<sup>1</sup>Esse é o valor que usamos em todo o trabalho e corresponde ao sugerido pela edição de 2002 do Particle Data Group

o conteúdo mínimo de matéria. Assim, dado também que o valor de  $sw^2$  levando em conta o conteúdo de matéria do Modelo Padrão cresce com a energia, a constante de acoplamento  $\alpha_X$  terá então um valor inicial que evoluirá rapidamente para próximo da unidade, invalidando a análise perturbativa do modelo. Esse é um problema geral para a classe de modelos em que  $b = \sqrt{3}$  na Eq. (2.1) [61]. Trataremos desse problema em detalhes no Capítulo 5, analisando as equações do grupo de renormalização e o limite perturbativo. Apresentaremos, também, a solução de como evadir o limite perturbativo na escala dos TeV [62]. Por enquanto, apenas utilizaremos a Eq. (2.44) como relacionando o parâmetro  $t$  com o parâmetro de mistura eletrofraca  $sw^2$ , adiando qualquer outra discussão a respeito para o Capítulo 5.

Quanto às massas para  $Z$  e  $Z'$  em primeira aproximação, isto é, fazendo  $\bar{v}_w^2, \bar{v}_\rho^2 \ll 1$  temos o seguinte

$$M_z^2 \approx \frac{M_w^2}{cw^2}, \quad M_{z'}^2 \approx \frac{g^2}{3} \frac{cw^2}{1 - 4sw^2} v_\chi^2. \quad (2.45)$$

E uma comparação direta com Eq. (2.37) mostra então que  $Z'$  é o bóson de gauge mais pesado no modelo.

- **Autoestados e massas para os bósons de gauge do Modelo 3-3-1 com neutrinos direitos ( $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$ )**

No Modelo 3-3-1 com neutrinos direitos, os bilineares da parte neutra real levam a seguinte matriz de massa na base  $(W_\mu^3, W_\mu^8, B_\mu)$

$$M_{bvn.nd}^2 = \frac{g^2}{2} v_\chi^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \bar{v}_w^2 & \frac{1}{2\sqrt{3}} (\bar{v}_w^2 - 2\bar{v}_\rho^2) & -\frac{1}{3} t (\bar{v}_w^2 + \bar{v}_\rho^2) \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} (\bar{v}_w^2 - 2\bar{v}_\rho^2) & \frac{1}{6} (\bar{v}_w^2 + 4) & \frac{1}{3\sqrt{3}} t (3\bar{v}_\rho^2 - \bar{v}_w^2 + 2) \\ -\frac{1}{3} t (\bar{v}_w^2 + \bar{v}_\rho^2) & \frac{1}{3\sqrt{3}} t (3\bar{v}_\rho^2 - \bar{v}_w^2 + 2) & \frac{2}{9} t^2 (3\bar{v}_\rho^2 + \bar{v}_w^2 + 1) \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

E os parâmetros adimensionais definidos em termos dos dois autovalores não nulos são nesse caso dados por

$$m_z^2 = \frac{2M_z^2}{g^2 v_{\chi'}^2} \quad (2.47)$$

$$= \frac{1}{9} [t^2 (\bar{v}_w^2 + 3\bar{v}_\rho^2 + 1) + 3(\bar{v}_w^2 + 1)] \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{9(4t^2 + 3)(\bar{v}_w^2(\bar{v}_\rho^2 + 1) - \bar{v}_\rho^4)}{(t^2(\bar{v}_w^2 + 3\bar{v}_\rho^2 + 1) + 3(\bar{v}_w^2 + 1))^2}} \right],$$

$$\begin{aligned}
m_{z'}^2 &= \frac{2M^2}{g^2 v_{\chi'}^2} \\
&= \frac{1}{9} [t^2(\bar{v}_w^2 + 3\bar{v}_\rho^2 + 1) + 3(\bar{v}_w^2 + 1)] \left[ 1 + \sqrt{1 - \frac{9(4t^2 + 3)(\bar{v}_w^2(\bar{v}_\rho^2 + 1) - \bar{v}_\rho^4)}{(t^2(\bar{v}_w^2 + 3\bar{v}_\rho^2 + 1) + 3(\bar{v}_w^2 + 1))^2}} \right].
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Dessa forma, os autoestados  $W_\mu^3$ ,  $W_\mu^8$  e  $B_\mu$  da simetria em termos dos autoestados físicos  $A_\mu$ ,  $Z_\mu$  e  $Z'_\mu$  são:

$$\begin{aligned}
W_\mu^3 &= \frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{4t^2 + 3}} A_\mu - N_Z [3m_{z'}^2 - 3(\bar{v}_w^2 - \bar{v}_\rho^2)] Z_\mu - N_{Z'} [3m_z^2 - 3(\bar{v}_w^2 - \bar{v}_\rho^2)] Z'_\mu, \\
\frac{W_\mu^8}{\sqrt{3}} &= -\frac{1}{3} \frac{\sqrt{3}t}{\sqrt{4t^2 + 3}} A_\mu - N_Z [3m_{z'}^2 - 3(\bar{v}_w^2 - \bar{v}_\rho^2)] Z_\mu - N_{Z'} [3m_z^2 - 3(\bar{v}_w^2 - \bar{v}_\rho^2)] Z'_\mu, \\
B_\mu &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4t^2 + 3}} A_\mu + 2t(1 + \bar{v}_\rho^2 - \bar{v}_w^2) N_Z Z_\mu + 2t(1 + \bar{v}_\rho^2 - \bar{v}_w^2) N_{Z'} Z'_\mu,
\end{aligned} \tag{2.49}$$

com os fatores de normalização

$$N_Z = \left[ 9(2m_{z'}^2 + \bar{v}_\rho^2 - \bar{v}_w^2 - 1)^2 + (1 + \bar{v}_\rho^2 - \bar{v}_w^2)^2(4t^2 + 3) \right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.50}$$

$$N_{Z'} = \left[ 9(2m_z^2 + \bar{v}_\rho^2 - \bar{v}_w^2 - 1)^2 + (1 + \bar{v}_\rho^2 - \bar{v}_w^2)^2(4t^2 + 3) \right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.51}$$

Nesse modelo o parâmetro  $t$  não é tão restritivo em relação ao valor de  $sw^2$  e tem a forma

$$t^2 = \frac{\alpha_X}{\alpha_L} = \frac{sw^2}{1 - \frac{4}{3}sw^2}. \tag{2.52}$$

Diferente do modelo anterior, o problema do limite perturbativo não ocorre nesse caso. Isso porque, como pode ser verificado, a evolução das constantes de acoplamento mostram que o valor da energia para a qual  $sw^2 = 3/4$  está acima da massa de Planck, o que deixa o modelo completamente tratável perturbativamente até a escala de Planck [61].

### 2.1.3 Interações com os léptons

Embora não seja o objetivo principal do nosso trabalho estudar as interações dos bósons de gauge com os léptons nos modelos, daremos aqui a título de ilustração como são esses acoplamentos nos modelos. Esta seção pode ser desconsiderada, sem prejudicar a leitura, se o leitor não tem interesse imediato nos detalhes das interações de correntes neutras dos léptons.

Na literatura existente, os acoplamentos de correntes neutras para os léptons têm sido dado apenas de forma aproximada. Aproveitando os autoestados obtidos de forma exata dados pelas Eqs. (2.40) e (2.49) obtivemos os acoplamentos da parte vetorial e da parte a axial também de forma exata para as correntes neutras. Isso será muito importante para quando o modelo, eventualmente, for colocado à prova de testes mais precisos que certamente trarão ainda mais vínculos a parâmetros, como por exemplo, aqueles advindos da quebra espontânea de simetria.

Denotando por  $g_V^{\psi Z}$  e  $g_V^{\psi Z'}$ , os acoplamentos da parte vetorial e por  $g_A^{\psi Z}$  e  $g_A^{\psi Z'}$ , os acoplamentos da parte axial para o lépton  $\psi$  nas correntes neutras com os bósons  $Z$  e  $Z'$  respectivamente de acordo com a seguinte forma genérica

$$\mathcal{L}^{c.n.} = -\frac{g}{2cw} \sum_{\psi} \bar{\psi} \gamma^{\mu} \left[ (g_V^{\psi Z} - g_A^{\psi Z} \gamma_5) Z_{\mu} + (g_V^{\psi Z'} - g_A^{\psi Z'} \gamma_5) Z'_{\mu} \right] \psi, \quad (2.53)$$

temos então os seguintes acoplamentos do tipo vetorial e do tipo axial nas correntes neutras para os léptons.

- **Acoplamentos de correntes neutras para o Modelo 3-3-1 ( $b = \sqrt{3}$ )**

Para os neutrinos:

$$g_V^{\nu Z} = g_A^{\nu Z} = cwN_Z \left( 2m_{z'}^2 + \bar{v}_{\rho}^2 - \frac{4}{3}\bar{v}_w^2 - \frac{1}{3} \right) \quad (2.54)$$

$$g_V^{\nu Z'} = g_A^{\nu Z'} = cwN_{Z'} \left( 2m_z^2 + \bar{v}_{\rho}^2 - \frac{4}{3}\bar{v}_w^2 - \frac{1}{3} \right) \quad (2.55)$$

Para o elétron e seus primos:

$$g_V^{eZ} = -cwN_Z \left( m_{z'}^2 + \frac{1}{3}(1 - 2\bar{v}_w^2) - \frac{2sw^2}{1 - 4sw^2}(1 - \bar{v}_{\rho}^2) \right) \quad (2.56)$$

$$g_A^{lZ} = -\text{cw}N_Z \left( m_{z'}^2 + \frac{1}{3}(1 - 2\bar{v}_w^2) + \frac{2\text{sw}^2}{1 - 4\text{sw}^2}(1 - \bar{v}_\rho^2) \right) \quad (2.57)$$

$$g_V^{lZ'} = -\text{cw}N_{Z'} \left( m_z^2 + \frac{1}{3}(1 - 2\bar{v}_w^2) - \frac{2\text{sw}^2}{1 - 4\text{sw}^2}(1 - \bar{v}_\rho^2) \right) \quad (2.58)$$

$$g_A^{lZ'} = -\text{cw}N_{Z'} \left( m_z^2 + \frac{1}{3}(1 - 2\bar{v}_w^2) + \frac{2\text{sw}^2}{1 - 4\text{sw}^2}(1 - \bar{v}_\rho^2) \right) \quad (2.59)$$

Para os léptons exóticos:

$$g_V^{EZ} = -\text{cw}N_Z \left( m_{z'}^2 + \bar{v}_\rho^2 - \frac{2}{3}(1 + \bar{v}_w^2) + \frac{2\text{sw}^2}{1 - 4\text{sw}^2}(1 - \bar{v}_\rho^2) \right) \quad (2.60)$$

$$g_A^{EZ} = -\text{cw}N_Z \left( m_{z'}^2 + \bar{v}_\rho^2 - \frac{2}{3}(1 + \bar{v}_w^2) - \frac{2\text{sw}^2}{1 - 4\text{sw}^2}(1 - \bar{v}_\rho^2) \right) \quad (2.61)$$

$$g_V^{EZ'} = -\text{cw}N_{Z'} \left( m_z^2 + \bar{v}_\rho^2 - \frac{2}{3}(1 + \bar{v}_w^2) + \frac{2\text{sw}^2}{1 - 4\text{sw}^2}(1 - \bar{v}_\rho^2) \right) \quad (2.62)$$

$$g_A^{EZ'} = -\text{cw}N_{Z'} \left( m_z^2 + \bar{v}_\rho^2 - \frac{2}{3}(1 + \bar{v}_w^2) - \frac{2\text{sw}^2}{1 - 4\text{sw}^2}(1 - \bar{v}_\rho^2) \right) \quad (2.63)$$

Na aproximação em que  $\bar{v}_w^2 \ll 1$ , as constantes de acoplamento das partes vetorial e axial dos léptons tomam a seguinte forma.

$$g_V^{\nu Z} = g_A^{\nu Z} \simeq \frac{1}{2}, \quad g_V^{\nu Z'} = g_A^{\nu Z'} \simeq -\frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{1 - 4\text{sw}^2}, \quad (2.64)$$

$$g_V^{lZ} \simeq -\frac{1}{2} + 2\text{sw}^2, \quad g_A^{lZ} \simeq -\frac{1}{2}, \quad (2.65)$$

$$g_V^{lZ'} \simeq -\frac{\sqrt{3}}{6} \frac{(1 - 10\text{sw}^2)}{\sqrt{1 - 4\text{sw}^2}}, \quad g_A^{lZ'} \simeq -\frac{\sqrt{3}}{6} \frac{(1 - 2\text{sw}^2)}{\sqrt{1 - 4\text{sw}^2}}, \quad (2.66)$$

$$g_V^{EZ} \simeq -2\text{sw}^2, \quad g_A^{EZ} \simeq 0 \quad (2.67)$$

$$g_V^{EZ'} \simeq \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{(1 - 7\text{sw}^2)}{\sqrt{1 - 4\text{sw}^2}}, \quad g_A^{EZ'} \simeq \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{\text{cw}^2}{\sqrt{1 - 4\text{sw}^2}}. \quad (2.68)$$

Observe que as constantes de acoplamento  $g_V^{\nu Z}$ ,  $g_A^{\nu Z}$ ,  $g_V^{\nu Z'}$  e  $g_A^{\nu Z'}$  recobrem exatamente nessa aproximação os valores previstos pelo Modelo Padrão. Vale a pena notar que os neutrinos têm

uma acoplamento com o bóson vetorial  $Z'$  suprimido pelo fator  $\sqrt{1 - 4sw^2}$  e que o acoplamento do lépton exótico com o bóson  $Z$  é puramente vetorial nessa aproximação. Isso é uma característica apenas da versão do modelo em que as terceiras componentes dos tripletos de léptons são ocupadas pelos léptons exóticos.

No modelo onde as terceiras componentes dos tripletos de léptons são ocupadas pelo elétron e seus primos o acoplamento dos léptons conhecidos com o bóson vetorial  $Z'$  são sempre proporcionais ao fator supressão  $\sqrt{1 - 4sw^2}$  [63]. Dessa forma, vemos que há uma dependência forte com a representação, pois modelos pertencentes a uma mesma classe apresentam características fenomenológicas muito diferentes, o que tornará claro a confirmação ou não de um deles frente ao escrutínio experimental.

Para as correntes carregadas, temos as seguintes interações realizando transições entre os léptons no triplete, em termos dos autoestados da simetria,

$$\mathcal{L}^{c.c.} = \frac{g}{2\sqrt{2}} [\bar{\nu}_a \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l_a W_\mu^+ + \bar{\nu}_a \gamma^\mu (1 - \gamma_5) E_a V_\mu^- + \bar{E}_a \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l_a U_\mu^{++} + H.c.] . \quad (2.69)$$

A produção de léptons exóticos através da reação  $e^-e^+ \rightarrow E^-E^+$  se daria com intermediação dos bósons de gauge  $Z'$  e  $U^{\pm\pm}$ ; porém, considerando o modelo em seu conteúdo mínimo de representação,  $Z'$  é o bóson de gauge mais pesado nesse modelo e a produção dos léptons exóticos seria também uma evidência para a existência dos bósons de gauge duplamente carregados,  $U^{\pm\pm}$ .

No modelo onde o pósitrons e seus primos ocupam as terceiras componentes dos tripletos de léptons, as interações de correntes carregadas têm a mesma forma da Eq. (2.69) acima, bastando substituir os léptons exóticos pelos campos conjugados de carga dos léptons conhecidos, i. e.,  $E_a \rightarrow l_a^c$ . Nesse caso, como dissemos no início desse Capítulo, tem-se ainda uma motivação adicional particularmente interessante para a procura de uma física além do Modelo Padrão, pois a última interação em Eq. (2.69) passa a ser  $\frac{g}{2\sqrt{2}} \bar{l}_a^c \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l_a U_\mu^{++}$ , ou seja, há a transição entre elétron-pósitron intermediada pelos bósons de gauge duplamente carregados. Isso significa que teremos reações no canal  $s$  que violarão o número leptônico de família. Um processo típico desses seria  $e^-e^- \rightarrow \mu^-\mu^-$ , onde o número leptônico de família tanto para o elétron quanto para o múon seria violado por duas unidades. Os bósons de gauge, intermediando processos dessa natureza, são chamados de biléptons. A sessão de choque  $\sigma(e^-e^- \rightarrow \mu^-\mu^-)$  pode muito bem estar dentro das possibilidades dos futuros colisores e devem portanto ser analisadas tornando factível a potencial descoberta dos biléptons [46], [47]. Apenas o número

leptônico total  $L = L_e + L_\mu + L_\tau$  é conservado. Biléptons nesses modelos têm sido tema de considerável interesse na literatura [50], [64], [65], [66], [67].

A seguir, mostramos os acoplamentos vetorial e axial das correntes neutras,  $g_V^{\nu Z}$  e  $g_A^{\nu Z}$ , dos léptons para o Modelo 3-3-1 com neutrinos direitos.

- **Acoplamentos de correntes neutras para o Modelo 3-3-1 com neutrinos direitos**  
 $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Para os neutrinos:

$$g_V^{\nu Z} = \text{cw}N_Z \left( 6m_{Z'}^2 - 3(\bar{v}_w^2 - \bar{v}_\rho^2) - 3 \right) \quad (2.70)$$

$$g_A^{\nu Z} = \text{cw}N_Z \frac{(1 + \bar{v}_\rho^2 - \bar{v}_w^2)}{1 - \frac{4}{3}\text{sw}^2} \quad (2.71)$$

$$g_V^{\nu Z'} = \text{cw}N_{Z'} \left( 6m_z^2 - 3(\bar{v}_w^2 - \bar{v}_\rho^2) - 3 \right) \quad (2.72)$$

$$g_A^{\nu Z'} = \text{cw}N_{Z'} \frac{(1 + \bar{v}_\rho^2 - \bar{v}_w^2)}{1 - \frac{4}{3}\text{sw}^2}. \quad (2.73)$$

Para o elétron e seus primos:

$$g_V^{lZ} = -\text{cw}N_Z (1 + \bar{v}_\rho^2 - \bar{v}_w^2) \left( \frac{1 - 4\text{sw}^2}{1 - \frac{4}{3}\text{sw}^2} \right) \quad (2.74)$$

$$g_A^{lZ} = -\text{cw}N_Z \frac{(1 + \bar{v}_\rho^2 - \bar{v}_w^2)}{1 - \frac{4}{3}\text{sw}^2} \quad (2.75)$$

$$g_V^{lZ'} = -\text{cw}N_{Z'} (1 + \bar{v}_\rho^2 - \bar{v}_w^2) \left( \frac{1 - 4\text{sw}^2}{1 - \frac{4}{3}\text{sw}^2} \right) \quad (2.76)$$

$$g_A^{lZ'} = -\text{cw}N_{Z'} \frac{(1 + \bar{v}_\rho^2 - \bar{v}_w^2)}{1 - \frac{4}{3}\text{sw}^2} \quad (2.77)$$

E, na aproximação em que  $\bar{v}_w^2 \ll 1$ , as constantes de acoplamento das partes vetorial e axial dos léptons tomam a seguinte forma.

$$g_V^{\nu Z} = g_A^{\nu Z} \simeq \frac{1}{2}, \quad (2.78)$$

$$g_V^{\nu Z'} \simeq -\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{3} sw^2}, \quad g_A^{\nu Z'} \simeq \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4}{3} sw^2}}, \quad (2.79)$$

$$g_V^{lZ} \simeq -\frac{1}{2} + 2sw^2, \quad g_A^{lZ} \simeq -\frac{1}{2}, \quad (2.80)$$

$$g_V^{lZ'} \simeq -\frac{\sqrt{3}}{3} \frac{(-\frac{1}{2} + 2sw^2)}{\sqrt{1 - \frac{4}{3} sw^2}}, \quad g_A^{lZ'} \simeq \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{1 - \frac{4}{3} sw^2}}. \quad (2.81)$$

Comparando os acoplamentos nas Eqs. (2.79) e (2.81) com os das Eqs. (2.64) e (2.66), vemos que o Modelo 3-3-1 com neutrinos direitos tem uma assinatura que difere bastante das assinaturas das versões dos modelos, onde a terceira componente do tripletos de léptons é ocupada por um lépton com carga positiva, com relação aos acoplamentos vetorial e axial do neutrino e do elétron com o bóson  $Z'$ . Consequentemente, a eventual produção dessa partícula certamente servirá como um teste de exclusão para os modelos.

As correntes carregadas no Modelo 3-3-1 com neutrinos direitos, que realizam transições entre os léptons dos tripletos, são, em termos dos autoestados da simetria,

$$\mathcal{L}^{c.c.} = \frac{g}{2\sqrt{2}} [\bar{\nu}_a \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l_a W_\mu^+ + \bar{\nu}_a \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_a^c V_\mu^0 + \bar{l}_a \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_a^c U_\mu^- + H.c.] . \quad (2.82)$$

Haverá, no entanto, a quebra espontânea do número leptônico, ocorrendo uma mistura entre os bósons de gauge  $W$  e  $V$ ; se, por exemplo, a terceira componente do triplo escalar  $\eta$  em Eq. (2.24) adquirir VEV [58, 59].

Passemos, então, a discutir outras características como o parâmetro  $\rho_0$ .

## 2.2 O splitting de massa entre os bósons de gauge não hermitianos e o parâmetro $\rho_0$ .

Visto que esses modelos prevêem dois novos bósons de gauge,  $V$  e  $U$ , cujas massas são dadas pelas expressões em Eqs. (2.36) e (2.37), surge então a pergunta de qual deles seria o mais pesado e qual seria o valor do splitting de massa entre eles. Nessa seção, apresentamos uma direção de resposta para essa pergunta.

Embora as escalas dos VEV,  $v_\chi$  e  $v_{\chi'}$  dos Modelos 3-3-1 e do Modelo 3-3-1 com neutrinos direitos respectivamente, do campo escalar que quebra a simetria  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$  para  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  não sejam conhecidas, dados experimentais disponíveis são usados para colocar limites inferiores sobre esses e outros parâmetros dos modelos. Por exemplo, na Ref. [56], foi utilizado o valor do parâmetro  $\rho_0 = cw^2 M_z^2 / M_{w^\pm}^2$  que especifica a intensidade das correntes neutras, carregadas das interações fracas através da razão de massa dos bósons de gauge de  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , para obter o limite inferior de 1.3 TeV e para estabelecer a escala na qual a nova física no Modelo 3-3-1 com neutrinos direitos deve surgir.

Seria muito interessante, se pudéssemos encontrar limites mais restritivos sobre esses modelos com o intuito de distingui-los dos seus outros competidores viáveis, prevendo novos bósons de gauge não hermitianos. Tal perspectiva, certamente, ajudaria a descartar algumas das extensões propostas e também daria motivações adicionais para os experimentalistas procurarem pelas previsões dos modelos.

Trabalharemos, aqui, somente com o Modelo 3-3-1; contudo, o mesmo pode ser feito para o Modelo 3-3-1 com neutrinos direitos sem maiores dificuldades. Nos Modelos 3-3-1,  $b = \sqrt{3}$ , temos, então, um dos bósons de gauge adicionais com uma carga simples,  $V^\pm$ , e o outro duplamente carregado,  $U^{\pm\pm}$ . Suas massas são dadas pelas Eqs. (2.36) e (2.37), sendo dominadas pela escala  $v_\chi$ . Vemos com relação à diferença de massas quadráticas que

$$\Delta M^2 = |M_{v^{\pm\pm}}^2 - M_{v^\pm}^2| = \frac{g^2}{4} |v_\rho^2 - v_\eta^2| < M_{w^\pm}^2 \quad (2.83)$$

onde, como vimos, as escalas  $v_\eta$  e  $v_\rho$  são conectadas à escala do Modelo Padrão  $v_W$ , de acordo com  $v_W^2 = v_\eta^2 + v_\rho^2 \simeq (246)^2$  GeV<sup>2</sup>. À primeira vista, não há como descobrir qual das duas partículas é a mais pesada, porque as escalas  $v_\eta$  e  $v_\rho$  parecem ser vinculadas apenas por essa última relação. Seria muito interessante saber teoricamente qual partículas seria observada primeiro aumentando a energia do centro de massa em um colisor de elétron-elétron para a produção de  $U^{\pm\pm}$  e de um colisor de elétron-pósitron numa reação  $e^-e^+ \rightarrow \nu\bar{\nu}$  intermediada por  $V^\pm$ , no modelo onde as terceiras componentes dos tripletos de léptons são ocupadas pelo pósitron e seus primos, por exemplo. Obviamente, essas partículas poderiam ser produzidas em colisores de hadrons também. Como as cargas elétricas são diferentes poder-se-ia, em princípio, ter uma previsão direta sobre a realização do modelo na Natureza. No presente, existem na literatura limites inferiores sobre as massas dessas partículas, motivando incluir a procura delas nas máquinas futuras [47], [50], [67]. Queremos discutir o que os vínculos das medidas precisas

envolvendo os bósons de gauge de  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  podem nos dizer sobre os novos bósons de gauge.

Faremos uma simples hipótese de que o valor do parâmetro  $\rho_0$  é o máximo permitido em nível de árvore, para descobrir qual dos bósons de gauge,  $U^{\pm\pm}$  ou  $V^\pm$ , é o mais pesado. Veremos que as escalas  $v_\eta$  e  $v_\rho$  têm os seus valores fixados com essa condição que, enfim, permite determinar o splitting de massa quadrática  $\Delta M^2$ . Ou seja, com uma simples hipótese, seremos capazes de responder quais são os valores de  $v_\eta$  e  $v_\rho$ , qual dos novos bósons de gauge é o mais pesado e, portanto, a diferença de massa quadrática entre eles.

O que se apresenta a seguir, pode ser considerado para as duas versões do Modelo 3-3-1, fazendo a observação de que na versão em que o pósitron e seus primos ocupam as terceiras componentes dos triplets de léptons, se um sexteto de escalares for introduzido para quebrar a degenerescência de massa entre os léptons este sexteto deverá ter um VEV bem menor do que a escala  $v_W$  do Modelo Padrão, de modo que a sua contribuição para a massa dos novos bósons de gauge pode ser desprezada.

O parâmetro  $\rho_0$ , assim como definido em nível de árvore, e a Eq. (2.39) para a massa da partícula  $Z$  nos dão

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \text{cw}^2 \frac{M_z^2}{M_{w^\pm}^2} \\ &= \frac{2\text{cw}^2}{3\bar{v}_w^2} [3t^2(\bar{v}_\rho^2 + 1) + 1 + \bar{v}_w^2] \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{3(4t^2 + 1)(\bar{v}_w^2(\bar{v}_\rho^2 + 1) - \bar{v}_\rho^4)}{(3t^2(\bar{v}_\rho^2 + 1) + 1 + \bar{v}_w^2)^2}} \right]. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Uma vez que  $\bar{v}_w^2$  é uma constante, e, a escala  $v_\chi$  fixa; a função acima é tal que  $\rho_0(\bar{v}_\rho^2) \leq 1$ . Sendo que o valor máximo  $\rho_0 = 1$  é atingido em três soluções para  $\bar{v}_\rho^2$ . A primeira delas é  $\bar{v}_\rho^2 = 0$  e deve ser descartada porque ela significa que  $v_\rho^2 = 0$ , o que traria problemas para o espectro de massa, ou então  $v_\chi = \infty$ ; esperamos, no entanto, a escala  $v_\chi$  seja finita com o valor de poucos TeV. A segunda solução é proibida, pois ela dá  $v_\rho^2 < 0$ . Assim, a única solução consistente fornecendo um espectro de massa correto nos dá

$$v_\rho^2 = \frac{1 - 4\text{sw}^2}{2\text{cw}^2} v_w^2. \quad (2.85)$$

Esse é o valor que faz coincidir com a previsão  $\rho_0 = 1$  do Modelo Padrão. Observe que não há dependência com a escala  $v_\chi$  e, portanto,  $M_z$  também coincide com o valor previsto pelo Modelo Padrão para a massa do bóson de gauge  $Z^0$ . Colocando o valor experimental  $\text{sw}^2 = 0.2311$  a

Eq. (2.85) determina  $|v_\rho| \simeq 56$  GeV e  $|v_\eta| \simeq 239.5$  GeV. Temos então a consequência imediata que  $V^\pm$  é o bóson de gauge não hermitiano mais pesado, e o valor do splitting de massa é

$$\Delta M^2 = M_{V^\pm}^2 - M_{U^{\pm\pm}}^2 \simeq 5770 \text{ GeV}^2. \quad (2.86)$$

O valor usado para a constante de acoplamento  $g$  foi o mesmo que no Modelo Padrão, isto é,  $g \simeq 0.654$ , pois o grupo SU(2) está totalmente embebido em SU(3).

Sobre a escala  $v_\chi$ , existem na literatura limites inferiores para a massa do bósons de gauge  $U^{\pm\pm}$  [64, 65, 66]. Eles colocam  $M_{U^{\pm\pm}} > 740$  GeV, de acordo com a produção de férmions em colisões elétron-pósitron e no decaimento de léptons carregados violando sabor [64], bem como da conversão muonium-antimuonium e demais processos [65]. Em geral, é suposto que essas partículas são os únicos novos estados além dos previstos pelo Modelo Padrão [64]. Mas como observado na Ref. [68], estados do tipo escalar podem abaixar os limites existentes de uma maneira significativa. E, de fato, esses escalares estão presentes no Modelo 3-3-1. Com isso, usaremos aqui o limite conservador de  $M_{U^{\pm\pm}} > 360$  GeV apenas para derivar um limite inferior para  $v_\chi$ . Este é o limite inferior para a exclusão da descoberta dessa partícula no Tevatron [65]. Dessa forma, obtemos da Eq. (2.37)

$$(360)^2 \text{ GeV}^2 < \frac{g^2}{4}(v_\rho^2 + v_\chi^2). \quad (2.87)$$

O que fornece o limite inferior de  $v_\chi \geq 1.1$  TeV.

Se, por exemplo, usarmos o limite superior de aproximadamente 4 TeV para os modelos mínimos, como veremos no Capítulo 5, temos os seguintes limites superiores para as massas desses novos bósons de gauge carregados:

$$M_{U^{\pm\pm}} < 1340 \text{ GeV}, \quad M_{V^\pm} < 1343 \text{ GeV}. \quad (2.88)$$

Esses bósons de gauge são quase degenerados para efeitos práticos e o valor do splitting de massa se torna mais evidente quanto menor for a massa de cada partícula. O intervalo de valores permitidos seria então  $360 \text{ GeV} < M_{U^{\pm\pm}} < 1340 \text{ GeV}$ , respeitando a relação em Eq. (2.86). A partícula real neutra,  $Z'$  é o bóson de gauge mais pesado nos modelos mínimos, tendo de acordo com os limites acima, uma massa cujo limite inferior seria de  $M_{Z'} \geq 1350$  GeV, estando, portanto, dentro do intervalo a para potencial descoberto no LHC [65].

É notável que os dados precisos sobre os bósons de gauge de  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  podem nos dar informação direta sobre as massas dos novos bósons de gauge nesses tipos de modelos  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$ .

Vemos que com a descoberta de um bóson de gauge duplamente carregado, outro estado massivo com a diferença de massa quadrática na Eq. (2.86) é, então, previsto por essa classe de modelos, se impusermos que o valor do parâmetro  $\rho_0$  seja o máximo permitido em nível de árvore de acordo com o Modelo Padrão. A previsão geral, nesses modelos, é que a diferença de massa quadrática deve ser menor do que  $M_{W^\pm}^2$ . Aqui, mostramos que com a hipótese razoável acima que o modelo, no seu conteúdo mínimo de representação, poderia ser descartado, se um segundo bóson de gauge com uma carga simples e com a massa quadrática dada por  $M_{V^\pm}^2 \simeq M_{U^{\pm\pm}}^2 + \Delta M^2$  não for encontrado. A faixa de energia onde se espera que essas novas partículas sejam observadas é muito mais restrita nesses modelos. Os VEV  $v_\rho$  e  $v_w$  são também determinados e podem ser usados para vincular ainda mais o espectro de massa para os férmiões e escalares. De fato, valeria a pena investigar se esses VEV poderiam levar a algum problema de ajuste fino.

É claro que se poderia questionar o quanto natural é a imposição sobre o parâmetro  $\rho_0$  acima. O tratamento aqui pode ter pelo menos duas justificativas: a primeira é que ela é feita para fazer o sub setor  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  igual ao Modelo Padrão; a segunda propõe que é completamente possível que as medidas futuras, refinando o valor do parâmetro, poderiam produzir um valor muito mais próximo da unidade, justificando ainda mais o tratamento.

Atualmente, o valor está em  $\rho_0 = 0.9998^{+0.0008}_{-0.0005}$ , segundo a edição de 2004 do Particle Data Group, supondo um bóson de Higgs com massa abaixo de 200 GeV.

Seria ainda interessante calcular as correções radiativas para o parâmetro  $\rho_0$ , desde que essa seria a única forma de fazê-lo maior do que um. Além disso, é preciso saber se essas correções seriam consistentes com a hipótese sobre o parâmetro.

# Capítulo 3

## Estabilizando o áxion leve com as simetrias discretas de gauge

Neste capítulo, vamos discutir o modo pelo qual a solução do problema de violação CP forte é estabilizada nos modelos apresentados no Capítulo 2. Mostraremos como o áxion invisível é introduzido nos modelos fazendo a simetria de Peccei-Quinn surgir naturalmente. As correções gravitacionais, geradas pelos operadores não renormalizáveis suprimidos pela escala de Planck, serão evitadas em parte pelas simetrias discretas  $Z_N$  que devem ser entendidas como manifestação de um grupo de gauge local tipo U(1) que a teoria deveria ter em altas energias. Observaremos que a simetria discreta  $Z_N$  com  $N$  grande está contida de forma quase natural em um dos modelos. Mostraremos também que é possível ter uma atribuição das cargas de  $Z_N$ , de modo que os neutrinos ativos ganham massa de Majorana pequena através do mecanismo see-saw relacionado a escala de quebra da simetria de Peccei-Quinn. O acoplamento do áxion com o fóton será também apresentado.

### 3.1 O áxion invisível leve e as correções gravitacionais

A observação geral de Peccei e Quinn foi a seguinte: com a introdução de uma simetria chiral global do tipo  $U(1)_{PQ}$  espontaneamente quebrada, numa escala  $v_{PQ}$ , o parâmetro  $\bar{\theta}$  efetivo, que quantifica a violação da simetria CP na QCD, é rodado para o valor zero, através

de um mecanismo de minimização de um potencial envolvendo esse parâmetro. Isso porque, sendo essa simetria anômala, ela acarreta no surgimento de um novo termo de interação dos gluons com um campo pseudoescalar  $a(x)$  que está associado à quebra espontânea da simetria  $U(1)_{PQ}$ , conhecido depois como o áxion e que será para nós praticamente a parte imaginária de um singlet escalar, devido a anomalia Adler-Bell-Jackiw (ABJ) no setor da QCD alterando-o agora para a seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4g} G_a^{\mu\nu} G_{a\mu\nu} + \sum_{q=quarks} \bar{q}(i\gamma^\mu D_\mu - m_q)q + \frac{1}{32\pi^2} \left( \frac{a(x)}{f_a} + \bar{\theta} \right) G_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{a\mu\nu}, \quad (3.1)$$

com a escala  $f_a$  relacionada diretamente com  $v_{PQ}$ . O campo do áxion  $a(x)$  é, a princípio, o bóson de Goldstone da simetria  $U(1)_{PQ}$  e provém de uma das combinações da parte imaginária dos campos escalares do modelo, e teria, portanto, uma massa nula. No entanto, ele será caracterizado como um pseudo-Goldstone porque ganha uma pequena massa via efeitos não perturbativos. O parâmetro  $\bar{\theta}$  passa a ser então uma variável dinâmica  $a(x)/f_a + \bar{\theta}$  que, por sua vez, adquire um potencial  $V(a(x)/f_a + \bar{\theta})$ . Peccei e Quinn mostraram que, desconsiderando as contribuições do setor eletrofraco, esse potencial é minimizado justamente em  $\langle a(x) \rangle = -\bar{\theta}f_a$  resolvendo o problema da violação CP [30]. Uma prova complementar de que a paridade não é quebrada espontaneamente no setor da QCD foi também dada por Vaffa e Witten [69].

Nos modelos tratados neste estudo, a escala de quebra da simetria  $U(1)_{PQ}$ ,  $v_{PQ}$ , tem o mesmo valor do que a constante  $f_a$  de decaimento do áxion de modo que falaremos de uma única escala daqui em diante, isto é, teremos  $v_{PQ} = f_a$ . Lembramos, no entanto, que essa não é uma característica geral dos modelos de áxion onde as escalas  $v_{PQ}$  e  $f_a$  estão relacionadas através do número de vácuos degenerados que surgem quando a simetria  $U(1)_{PQ}$  é espontaneamente quebrada.

O áxion se torna invisível quando a escala  $f_a$  é muito maior do que a escala de quebra de simetria,  $v_w$ , do Modelo Padrão. A razão é que o seu acoplamento com os demais campos é, em geral, sempre suprimido pelo fator  $1/f_a$  (veremos isso explicitamente ao apresentar os acoplamentos do áxion em um dos modelos por nós tratados). Assim, o áxion se origina principalmente de um campo, carregando carga não nula de  $U(1)_{PQ}$ , que deve ser um singlet de  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  para não alterar significativamente o espectro de massa observado na escala de energia dessa simetria. Esse singlet, denotado usualmente como  $\phi$ , ganhando valor esperado na forma  $\langle \phi \rangle = f_a/\sqrt{2}$ , quebra então  $U(1)_{PQ}$  que, por ser anômala para os quarks, produz o

termo em  $a(x)G_a^{\mu\nu}\tilde{G}_{a\mu\nu}$  na Eq. (3.1) acima, possibilitando a solução do problema da violação CP forte.

Como mencionamos no Capítulo 1, as primeiras realizações da idéia do áxion invisível foram feitas introduzindo o singlet  $\phi$  e, então, postulando a simetria chiral adequada, como foi o caso de Kim-Shifman-Vainstein-Zhacarov, (KSVZ), [32],[33], onde um quark exótico pesado, singlet do grupo do setor eletrofraco, foi também introduzido, carregando a única carga não nula de  $U(1)_{PQ}$  para os férmiões. Ou então, como foi feito por Dine-Fischler-Srednicki-Zhitnitskii, (DFSZ) considerando o Modelo Padrão com dois dubletos escalares, [35],[34].

Mostrou-se que os efeitos não perturbativos da QCD geram um potencial periódico na seguinte forma para o áxion [12, 26, 30]:

$$V(a) \simeq -\Lambda_{QCD}^4 \cos(a(x)/f_a + \bar{\theta}), \quad (3.2)$$

que é minimizado em  $\langle a(x) \rangle = -\bar{\theta}f_a$ . Com isso, é induzida uma massa para o áxion

$$m_a \simeq \frac{\Lambda_{QCD}^2}{f_a}, \quad (3.3)$$

resultando em um valor muito pequeno,  $m_a = 10^{-5}$  eV, levando em conta que  $\Lambda_{QCD} \simeq 0.1$  GeV e o limite superior  $f_a = 10^{12}$  GeV.

O valor tão restritivo para o parâmetro  $\bar{\theta} < 10^{-9}$  e essa pequena massa para o áxion são suscetíveis às correções advindas de escala de energia associadas às interações gravitacionais. Isso pode ser imaginado pelo fato que as correções gravitacionais a esses parâmetros seriam proporcionais a  $f_a/M_{Pl}$  e como a escala  $f_a$  não está tão distante da massa de Planck em relação às escalas da QCD e do setor eletrofraco, parâmetros tão pequenos como os acima seriam desestabilizados a menos que uma simetria ou algum outro mecanismo os protegesse. Veja, por exemplo, que a primeira correção para  $\bar{\theta}$  seria  $\mathcal{O}(f_a/M_{Pl}) \approx 10^{-6}$ , destruindo a solução do problema. Essa observação foi feita, pela primeira vez, por Holman et al, Kamionkowski e March-Russell [70], [71]. Apresentaremos os principais argumentos no que segue.

Desde que a teoria quântica, envolvendo a gravitação não tem sido completamente revelada a ponto de nos fornecer uma maneira detalhada para os cálculos da escala de Planck, o que podemos a fazer é pensar em nossas teorias na escala eletrofraca como sendo, de fato, efetivas: no sentido em que os efeitos da teoria superior devem se manifestar através de uma série infinita de operadores não renormalizáveis, suprimidos por uma escala  $M \approx M_{Pl}$ , que respeitam, em princípio, somente as simetrias de gauge.

Um operador desses com dimensão arbitrária  $d$  geraria uma correção para o potencial do singletô  $\phi$  na forma

$$\begin{aligned} V_g &= -\frac{|c|}{M_{Pl}^{d-4}} e^{i\delta_d} \phi^d + H.c \\ &= -2 \frac{|c|}{M_{Pl}^{d-4}} |\phi|^d \cos \left( d \frac{a(x)}{f_a} + \delta_d \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

$|c|$  é uma constante de acoplamento que esperamos ser próxima da unidade;  $\delta_d$ , a fase que surge junto à transformação que leva a fase da matriz de massas dos quarks para o termo do tipo  $\theta$ , mais um termo que viria exclusivamente das interações gravitacionais se essas violarem CP. Usou-se também o fato que para o áxion invisível, na fase em  $|\phi|e^{i\frac{a(x)}{f_a}}$   $a(x)$  é praticamente o campo do áxion. De uma forma mais geral, o campo do áxion tem componentes na parte imaginária dos outros escalares também, mas essas componentes são em geral suprimidas pelo fator  $1/f_a$  de modo que elas podem ser desconsideradas.

Quando  $U(1)_{PQ}$  é quebrada espontaneamente, o potencial do áxion em Eq. (3.2) ganha contribuições dos diversos operadores do tipo acima passando a ser, definindo por conveniência  $a(x)_{eff}/f_a = a(x)/f_a + \bar{\theta}$  e redefinindo também implicitamente a fase  $\delta_d = \delta_d - d\frac{\bar{\theta}}{f_a^d}$ ,

$$V_{eff}^{ax} = -\Lambda_{QCD}^4 \cos \left( \frac{a(x)_{eff}}{f_a} \right) - \sum_d \frac{|c_d|}{(\sqrt{2})^{d-2}} \frac{f_a^d}{M_{Pl}^{d-4}} \cos \left( d \frac{a(x)_{eff}}{f_a} + \delta_d \right). \quad (3.5)$$

Por simplicidade, ao considerar apenas um dos operadores na soma acima, temos agora que para que a solução ainda seja viável o mínimo de  $V_{eff}^{ax}$  deve ser tal que  $\frac{a(x)_{eff}}{f_a} < 10^{-9}$ . Em primeira ordem essa relação é

$$\left\langle \frac{a(x)_{eff}}{f_a} \right\rangle \simeq \frac{d|c_d| \frac{f_a^d}{(\sqrt{2})^{d-2} M_{Pl}^{d-4}} \sin \delta_d}{\Lambda_{QCD}^4 + d^2 |c| \frac{f_a^d}{(\sqrt{2})^{d-2} M_{Pl}^{d-4}} \cos \delta_d} < 10^{-9}. \quad (3.6)$$

Naturalmente, esperamos que  $\sin \delta_d \simeq \cos \delta_d \simeq 1$ , e observa-se, então, que para satisfazer a condição acima é necessário que  $\Lambda_{QCD}^4$  seja o termo dominante no denominador. E assim a correção gravitacional para o ângulo de violação CP é aproximadamente

$$\bar{\theta}_{grav} = \left\langle \frac{a(x)_{eff}}{f_a} \right\rangle \simeq d|c_d| \frac{f_a^d}{(\sqrt{2})^{d-2} M_{Pl}^{d-4} \Lambda_{QCD}^4}. \quad (3.7)$$

Com a suposição que  $d|c_d| \simeq 1$ , essa correção só pode ser menor do que  $10^{-9}$ , se a dimensão  $d$  do operador for tal que

$$d > \frac{82 + \frac{\ln 2}{\ln 10}}{7 + \frac{1}{2} \frac{\ln 2}{\ln 10}} \approx 11. \quad (3.8)$$

Assim, a menos que, por alguma razão desconhecida, as constantes de acoplamento  $c_d$  desses operadores sejam exponencialmente suprimidas, [71], todos operadores do tipo (3.4) com a dimensão  $d < 11$  ameaçariam o mecanismo de Peccei-Quinn como uma solução do problema da violação CP forte a menos que eles fossem proibidos por alguma simetria.

Da mesma forma, a massa quadrática efetiva do áxion com as correções gravitacionais é de acordo com Eq. (3.5)

$$m_{eff}^2 \simeq \frac{\Lambda_{QCD}^4}{f_a^2} + \sum_d d^2 |c| \frac{f_a^{d-2}}{(\sqrt{2})^{d-2} M_{Pl}^{d-4}} \cos \delta_d, \quad (3.9)$$

e, mesmo se  $\delta_d = 0$  gera uma correção que pode ser muito maior do que a massa estimada de  $10^{-5}$  eV para o áxion via os efeitos não perturbativos da QCD. Vale a pena salientar que esse é um problema geral para os modelos que tentam explicar um dado fenômeno através de um campo escalar fundamental tão, ou ainda mais, leve quanto o áxion. Mesmo se o dado campo escalar não adquire VEV a interação gravitacional dele com campos, ou operadores compostos de campos, que adquiriram VEV leva a uma massa efetiva para esse campo escalar semelhante ao que acontece com o áxion.

A idéia a ser considerada a seguir, é de que os operadores perigosos que acabamos de discutir serão proibidos por simetrias discretas de gauge e que nos Modelos 3-3-1 elas são quase automáticas.

## 3.2 Estabilização por simetrias discretas nos Modelos 3-3-1

A estabilização da solução de Peccei-Quinn pode ser alcançada, se a teoria efetiva de baixa energia possuir uma simetria discreta  $Z_N$ , com  $N$  igual a dimensão  $d$  do primeiro operador não perigoso como vimos acima, suficientemente grande para ser capaz de proibir os operadores não renormalizáveis envolvendo o singleto  $\phi$ . Krauss e Wilczek fizeram a observação de que as simetrias discretas, nas teorias de baixa energia, podem ter origem em um grupo local de gauge e devem, portanto, ser respeitadas pelas interações e gravitacionais [72]. Em outras palavras, um grupo discreto observado na escala eletrofraca seria uma relíquia de um grupo local que se manifestaria de forma explícita em energias mais altas.

Uma forma bem simples de explicitar essa idéia é considerar uma teoria com dois campos escalares,  $\eta$  e  $\xi$ , com cargas  $N\epsilon$  e  $\epsilon$  de um grupo de gauge local U(1) [72]. Suponha agora operadores genéricos de dimensão  $m + n$  dessa teoria. São permitidas as interações que sob uma transformação da simetria U(1),

$$[\eta]^m[\xi^\dagger]^n \rightarrow e^{i\alpha\epsilon(Nm-n)}[\eta]^m[\xi^\dagger]^n, \quad (3.10)$$

tem  $n = Nm$ . Se o campo  $\eta$  condensa em uma escala de energia muito alta dando massa ao bóson de gauge de U(1), esses campos estarão desacoplados da teoria efetiva de baixa energia que contará com o único escalar  $\xi$  leve. Então, depois da condensação e sob uma transformação de fase em  $\xi$

$$[\eta]^m[\xi^\dagger]^n \rightarrow \langle\eta\rangle^m[\xi^\dagger]^n \rightarrow e^{-i\alpha_N\epsilon Nm}\langle\eta\rangle^m[\xi^\dagger]^{Nm}, \quad (3.11)$$

essa interação na teoria efetiva será invariante para  $\alpha_N = \frac{2\pi}{Ne}$  deixando o subgrupo discreto  $Z_N \subset \text{U}(1)$  como um grupo de simetria de baixas energias. Sendo assim permitidos todos os operadores do tipo  $[\xi^\dagger]^{Nm}$ , que serão, portanto, invariantes por  $Z_N$ . Vemos, então, que a condensação de  $\eta$  quebra o grupo local para o subgrupo discreto

$$\text{U}(1) \xrightarrow{\langle\eta\rangle} Z_N. \quad (3.12)$$

O campo  $\xi$  permanece leve, porque sua massa quadrática será em primeira ordem dada por  $m_\xi^2 \approx \mu_\xi - \mu_\eta$  sendo que  $\mu_\xi$  e  $\mu_\eta$  são os termos quadráticos de massa para os escalares no potencial e deveriam ser da mesma ordem.

É nesse espírito que dizemos que  $Z_N$  advém de um grupo local e, portanto, é uma simetria discreta de gauge. E o campo  $\xi$  se transforma de acordo com essa simetria segundo a forma

$$\xi \rightarrow e^{\frac{2\pi i}{N}}\xi. \quad (3.13)$$

A origem local da  $Z_N$  aqui é que faz com que ela seja preservada pelos efeitos gravitacionais, pois o teorema "no hair" afirma que apenas as quantidades derivadas de simetrias locais caracterizam o buraco negro. Assim, num processo envolvendo a gravitação, quantias advindas de simetrias locais seriam observadas e preservadas como essas simetrias discretas.

É relevante dizer que as cargas de U(1) devem ser quantizadas para que se possa ter o subgrupo discreto, uma vez que  $N = \text{inteiro}$  é a carga do campo que quebra U(1).

Se algumas simetrias  $Z_N$  não fossem de gauge, então a utilidade delas estaria ameaçada pela gravitação. A paridade R em supersimetria é um exemplo típico de uma simetria discreta

de gauge que tem o papel de proibir alguns operadores renormalizáveis que violam o número bariônico ou que garante, portanto, a estabilidade do nucleon [72],[73].

Neste trabalho, não vamos nos preocupar com origem exata das simetrias discretas, assim veja Refs. [74, 75, 76] para uma série de possibilidades. Façamos, simplesmente, a suposição que, em altas energias, existe a simetria  $U(1) \otimes G_{EW}$  com  $U(1)$ , sendo uma simetria local, que pode até ser um subgrupo de uma simetria maior, e  $G_{EW}$  o grupo eletrofraco. Em nosso caso,  $G_{EW} = SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ . Essa simetria é, então, quebrada na forma  $U(1) \otimes G_{EW} \rightarrow Z_N \otimes G_{EW}$ . Iremos reconhecer que nos Modelos 3-3-1, existe uma simetria discreta grande quase natural. Ao impormos essa simetria, veremos que a simetria global  $U(1)_{PQ}$  surge automaticamente em nível clássico na Langrangiana como consequência. As simetrias discretas serão grandes o suficiente para eliminar a ameaça gravitacional como discutimos anteriormente.

Como nos modelos de áxion invisível, introduziremos um singlet escalar

$$\phi \sim (1, 1, 0), \quad (3.14)$$

cuja fase será praticamente o campo do áxion.

A seguir, faremos a observação de que as Langrangianas de Yukawa em Eqs. (2.16) e (2.17) do Modelo 3-3-1 possuem quase automaticamente a seguinte simetria discreta  $Z_{13}$  nos campos

$$\begin{aligned} \Psi_L &\rightarrow w_0 \Psi_L, \\ (\phi, u_{\alpha R}) &\rightarrow \omega_1(\phi, u_{\alpha R}), \quad d_{\alpha R} \rightarrow \omega_1^{-1} d_{\alpha R}, \\ \chi &\rightarrow \omega_2 \chi, \quad E_R \rightarrow \omega_2^{-1} E_R, \\ J_R &\rightarrow \omega_3 J_R, \quad j_{mR} \rightarrow \omega_3^{-1} j_{mR}, \\ \eta &\rightarrow \omega_4 \eta, \quad \nu_R \rightarrow \omega_4^{-1} \nu_R, \\ Q_{3L} &\rightarrow \omega_5 Q_{3L}, \quad Q_{iL} \rightarrow \omega_5^{-1} Q_{iL}, \\ \rho &\rightarrow \omega_6 \rho, \quad l_R \rightarrow \omega_6^{-1} l_R \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde  $\omega_k = e^{2\pi i k/13}$ ,  $k = 0, \dots, \pm 6$ . Usando todos os elementos do grupo  $Z_{13}$  temos garantido a existência dessa simetria. Ao impor essa simetria, ficam proibidos os termos  $(\overline{\Psi}_{aL})^c (\Psi_{aL}) \eta$ ,  $(\overline{\nu}_{aR})^c \nu_{bR}$  e  $(\overline{l}_{aR})^c E_{bR}$  em Eq. (2.16). Eles não são essenciais para a geração de massa através da quebra espontânea de simetria e por isso podem ser desprezados. Para os quarks, as interações

de Yukawa são automaticamente invariantes pela simetria  $Z_{13}$  acima. A Langrangiana de Yukawa total para os léptons e quarks passa a ser então

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^{total} = & G_{ab}^\nu \overline{(\Psi)}_{aL} \nu_{bR} \eta + G_{ab}^l \overline{(\Psi)}_{aL} l_{bR} \rho + G_{ab}^E \overline{(\Psi)}_{aL} E_{bR} \chi \\ & + \overline{Q}_{iL} (F_{i\alpha} u_{\alpha R} \rho^* + \tilde{F}_{i\alpha} d_{\alpha R} \eta^*) + \overline{Q}_{3L} (G_\alpha u_{\alpha R} \eta + \tilde{G}_\alpha d_{\alpha R} \rho) \\ & + \lambda^J \overline{Q}_{3L} J_{1R} \chi + \lambda_{im}^j \overline{Q}_{iL} j_{mR} \chi^* + H.c.. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Ao introduzir o singlet escalar  $\phi$ , novos termos são permitidos e outros proibidos no potencial escalar em Eq. (2.18) que agora toma a seguinte forma invariante pelas transformações em (3.15):

$$\begin{aligned} V_{331} = & \mu_1^2 \eta^\dagger \eta + \mu_2^2 \rho^\dagger \rho + \mu_3^2 \chi^\dagger \chi + \lambda_1 (\eta^\dagger \eta)^2 + \lambda_2 (\rho^\dagger \rho)^2 + \lambda_3 (\chi^\dagger \chi)^2 \\ & + \eta^\dagger \eta [\lambda_4 (\rho^\dagger \rho) + \lambda_5 (\chi^\dagger \chi)] + \lambda_6 (\rho^\dagger \rho) (\chi^\dagger \chi) + \lambda_7 (\rho^\dagger \eta) (\eta^\dagger \rho) \\ & + \lambda_8 (\chi^\dagger \eta) (\eta^\dagger \chi) + \lambda_9 (\rho^\dagger \chi) (\chi^\dagger \rho) + (\lambda_{10} \epsilon^{ijk} \phi \eta_i \rho_j \chi_k + H.c.) \\ & + \phi^* \phi [\lambda_{\phi\eta} (\eta^\dagger \eta) + \lambda_{\phi\rho} (\rho^\dagger \rho) + \lambda_{\phi\chi} (\chi^\dagger \chi)] + \mu_\phi^2 \phi^* \phi + \lambda_\phi (\phi^* \phi)^2. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Observe que o termo  $(\eta^\dagger \rho) (\eta^\dagger \chi)$  que violaria a simetria de número leptônico fica permitido pela simetria discreta. Para eliminá-lo, é necessário ainda impor uma simetria  $Z_2$  sobre a qual os campos  $J_R, j_{mR}, \chi, \phi$  são ímpares e os demais campos pares. Com isso, o número leptônico também passa a ser uma simetria natural no modelo.

Assim com a simetria  $Z_{13} \otimes Z_2$ , teremos que a simetria  $U(1)_{PQ}$  fica contida no modelo automaticamente. Para ver isso, consideremos as seguintes atribuições de cargas de  $U(1)_{PQ}$  para os férmons

$$\begin{aligned} u'_L &= e^{-i\alpha X_u} u_L, \quad d'_L = e^{-i\alpha X_d} d_L, \quad l'_L = e^{-i\alpha X_l} l_L, \\ \nu'_L &= e^{-i\alpha X_\nu} \nu_L, \quad j''_L = e^{-i\alpha X_j} j_L, \quad J'_L = e^{-i\alpha X_J} J_L, \\ E'_L &= e^{-i\alpha X_E} E_L, \end{aligned} \quad (3.18)$$

com as componentes direitas transformando-se da mesma forma, mas com carga  $X$  contrária à sua respectiva componente esquerda acima. Das interações de Yukawa na Eq. (3.16) e do termo não hermitiano em Eq. (3.17) são extraídos uma série de vínculos das cargas  $U(1)_{PQ}$  dos campos escalares cujas transformações devem obedecer às seguintes relações.

$$\eta'^0 = e^{-2i\alpha X_u} \eta^0 = e^{+2i\alpha X_d} \eta^0,$$

$$\begin{aligned}
\eta_1'^- &= e^{-i\alpha(X_u+X_d)} \eta_1^- = e^{+i(X_u+X_d)} \eta_1^-, \\
\eta_2'^+ &= e^{-i\alpha(X_J+X_u)} \eta_2^+ = e^{+i\alpha(X_j+X_d)} \eta_2^+, \\
\rho'^0 &= e^{+2i\alpha X_u} \rho^0 = e^{-2i\alpha X_d} \rho^0, \\
\rho'^+ &= e^{-i\alpha(X_u+X_d)} \rho^+ = e^{+i\alpha(X_u+X_d)} \rho^+, \\
\rho'^{++} &= e^{-i\alpha(X_J+X_d)} \rho^{++} = e^{+i\alpha(X_j+X_u)} \rho^{++}, \\
\chi'^- &= e^{-i\alpha(X_u+X_J)} \chi^- = e^{+i\alpha(X_d+X_j)} \chi^-, \\
\chi'^{--} &= e^{-i\alpha(X_d+X_J)} \chi^{--} = e^{+i\alpha(X_u+X_j)} \chi^{--}, \\
\chi'^0 &= e^{-2i\alpha X_J} \chi^0 = e^{+2i\alpha X_j} \chi^0, \\
\phi' &= e^{-2iX_j} \phi.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Segue, então, que das Eqs. (3.18) e (3.19) as cargas  $X$  relacionam-se umas com as outras de acordo com

$$X_d = -X_u = X_l = -X_\nu, \quad X_j = -X_J = -X_E. \tag{3.20}$$

Como vemos, existem dois conjuntos de cargas independentes. Normalizamos então as cargas, de modo que elas sejam as menores inteiras possíveis, o que, nesse caso, é simplesmente fazer  $X_d = 1$  e  $X_j = 1$ .

Com essas transformações do ângulo  $\bar{\theta}$  é então modificado para

$$\bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} - 2\alpha \sum_{\text{todos quarks}} X_f = \bar{\theta} - 2\alpha X_j = \bar{\theta} - 2\alpha. \tag{3.21}$$

Temos apenas a contribuição vinda dos quarks exótico  $j_m$  e  $J$ , pelo fato que os quarks conhecidos do tipo  $u$  e  $d$  têm cargas de  $U(1)_{PQ}$  com sinais opostos, i. e.,  $X_u = -X_d$ , fazendo com que a contribuição dos quarks conhecidos seja cancelada. No contexto do Modelo Padrão, essa atribuição de carga não é possível porque ela não permite que exista a anomalia ABJ, que dá a interação do áxion com os gluons, e impede assim a realização do mecanismo de Peccei-Quinn.

Dessa forma, poderíamos considerar para efeitos práticos que  $X_u = 0$ ; no entanto, existe outra atribuição para as cargas da simetria  $Z_{13}$ , relacionando os dois subconjuntos em (3.20) como veremos na próxima seção. É interessante que apenas os quarks exóticos tenham um papel relevante no deslocamento do ângulo  $\bar{\theta}$ . Diferente da proposta da introdução de um quark exótico pesado para resolver o problema [32], no Modelo 3-3-1, esses quarks devem fazer parte do espectro por uma questão de consistência. As transformações relevantes de  $U(1)_{PQ}$

são então

$$\begin{aligned}
j'_L &= e^{-i\alpha X_j} j_L, \quad J'_L = e^{i\alpha X_j} J_L, \\
E'_L &= e^{-i\alpha X_j} E_L, \quad \eta_2'^+ = e^{i\alpha X_j} \eta_2^+, \\
\rho'^{++} &= e^{i\alpha X_j} \rho^{++}, \quad \chi'^- = e^{i\alpha X_j} \chi^- \\
\chi'^{--} &= e^{i\alpha X_j} \chi^{--}, \quad \chi'^0 = e^{2i\alpha X_j} \chi^0, \\
\phi' &= e^{-2i\alpha X_j} \phi.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

A primeira correção gravitacional permitida de acordo com a simetria  $Z_{13}$  em (3.15) seria então, de acordo com (3.7), relativa a um operador de dimensão  $d = N = 13$  o que fornece  $\delta\theta_{grav} \approx 10^{-12}$  para a máxima escala permitida,  $f_a \simeq 10^{12}$ , não colocando em risco, portanto, a estabilização da solução. Da mesma forma, a correção gravitacional para a massa do áxion é de acordo com Eq. (3.9)  $\delta m_{grav} \approx 10^{-9}$  eV. Se colocássemos ainda o fato adicional que temos a simetria  $Z_2$ , essas correções seriam ainda mais suprimidas.

Para ver que o áxion é principalmente um singuleto, calculamos as equações de vínculo com a redefinição dos campos escalares de carga elétrica nula na forma  $\varphi = (v_\varphi + \text{Re}\varphi + i\text{Im}\varphi)/\sqrt{2}$ , com  $\varphi = \eta, \rho, \chi, \phi$ , obtendo as seguintes equações de vínculo para minimização do potencial:

$$\begin{aligned}
\text{Re}[\mu_\eta^2 v_\eta + \lambda_1 |v_\eta|^2 v_\eta + \frac{1}{2} (\lambda_4 |v_\rho|^2 + \lambda_5 |v_\chi|^2) v_\eta + \frac{\lambda_{10}}{2} v_\rho v_\chi f_a + \lambda_{\phi\eta} |f_a|^2 v_\eta] &= 0, \\
\text{Re}[\mu_\rho^2 v_\rho + \lambda_2 |v_\rho|^2 v_\rho + \frac{1}{2} (\lambda_4 |v_\eta|^2 + \lambda_6 |v_\chi|^2) v_\rho + \frac{\lambda_{10}}{2} v_\eta v_\chi f_a + \lambda_{\phi\rho} |f_a|^2 v_\rho] &= 0, \\
\text{Re}[\mu_\chi^2 v_\chi + \lambda_3 |v_\chi|^2 v_\chi + \frac{1}{2} (\lambda_5 |v_\eta|^2 + \lambda_6 |v_\rho|^2) v_\chi + \frac{\lambda_{10}}{2} v_\eta v_\rho f_a + \lambda_{\phi\chi} |f_a|^2 v_\chi] &= 0, \\
\text{Re}[\mu_\phi^2 f_a + \lambda_\phi |f_a|^2 f_a + \frac{\lambda_{10}}{2} v_\eta v_\rho v_\chi + \frac{1}{2} (\lambda_{\phi\eta} |v_\eta|^2 + \lambda_{\phi\rho} |v_\rho|^2 + \lambda_{\phi\chi} |v_\chi|^2) f_a] &= 0, \\
\text{Im}(f_a v_\eta v_\rho v_\chi) &= 0.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Analisando o potencial em (3.17) com esses vínculos, é possível mostrar que para diversos valores não nulos dos parâmetros  $\lambda_s$  e  $v_s$  todas as massas dos escalares são positivas, de modo que o potencial realmente tem um ponto de mínimo. A matriz de massa  $4 \times 4$  da parte imaginária dos escalares é resolvida, exatamente, fornecendo os seguintes autoestados de massa na base  $\text{Im}(\eta^0, \rho^0, \chi^0, \phi)$

$$G_1^0 = \frac{1}{(v_\eta^2 + v_\rho^2)^{1/2}} (-v_\eta, v_\rho, 0, 0),$$

$$G_2^0 = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \left( \frac{s_1}{s_2} v_\rho^2 v_\eta, \frac{s_1}{s_2} v_\eta^2 v_\rho, \frac{s_2}{s_1} f_a^2 v_\chi, \frac{s_2}{s_1} v_\chi^2 f_a \right),$$

$$a = \frac{1}{(v_\chi^2 + f_a^2)^{1/2}} (0, 0, -v_\chi, f_a),$$

$$A^0 = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} (v_\rho v_\chi f_a, v_\eta v_\chi f_a, v_\eta v_\rho f_a, v_\eta v_\rho v_\chi), \quad (3.24)$$

onde os VEVs  $v_{is}$  foram tomados como reais por simplicidade;  $s_1 = (v_\chi^2 + f_a^2)^{1/2}$ ,  $s_2 = (v_\eta^2 + v_\rho^2)^{1/2}$  e  $\mathcal{N} = v_\eta^2 [v_\rho^2(v_\chi^2 + f_a^2) + v_\chi^2 f_a^2] + v_\rho^2 v_\chi^2 f_a^2$ .

$G_1^0$  e  $G_2^0$  são genuínos bósons de Goldstone a serem absorvidos pelos bósons de gauge  $Z^0$  e  $Z'$ , formando seus graus de liberdade longitudinais,  $a$  é o pseudo-Goldstone descrevendo o áxion.  $A^0$  é um pseudoescalar pesado, cuja massa quadrática é dada por

$$M_{A^0}^2 = -\frac{\lambda_{10}}{8} \left[ \frac{1}{f_a} v_\eta v_\rho v_\chi + \frac{1}{v_\chi} v_\eta v_\rho f_a + \frac{1}{v_\rho} v_\eta f_a v_\chi + \frac{1}{v_\eta} f_a v_\rho v_\chi \right], \quad (3.25)$$

com  $\lambda_{10} < 0$  e todos os VEV positivos. Veja que essa massa é aproximadamente  $M_{A^0} \approx \sqrt{|\lambda_{10}| f_a v_\chi} \ll f_a$ . Se esse pseudoescalar fosse estável, ele poderia fornecer consequências interessantes para cosmologia; porém, do autoestado  $A^0$  em (3.24) observa-se que ele tem suas componentes dominantes nas direções de  $\text{Im}\eta$  e  $\text{Im}\rho$  e, portanto, deve-se acoplar significativamente com a matéria usual.

Concluímos que com a simetria discreta terminamos com um Modelo invariante pelo grupo  $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X Z_{13} \otimes Z_2$ . Nesse contexto, a simetria  $U(1)_{PQ}$  é automática assim como o número leptônico. A solução do problema de violação CP forte via mecanismo de Peccei-Quinn é mantida estável contra os efeitos gravitacionais. As correções à massa do áxion e o ângulo  $\bar{\theta}$  ficam suprimidas com as simetrias discretas.

### 3.2.1 Uma atribuição diferente para $Z_{13}$

Uma atribuição um pouco diferente para as fases da simetria  $Z_{13}$  é ainda possível nesse modelo. Isso porque, como pode ser visto, podemos trocar as fases das transformações de alguns campos em (3.15), sem modificar o conteúdo da simetria na seguinte forma:

$$\begin{aligned} w_\eta &\rightarrow w_\rho, & w_{d_R} &\rightarrow w_{u_R}, & w_l &\rightarrow w_\nu, \\ w_\rho &\rightarrow w_\eta, & w_{u_R} &\rightarrow w_{d_R}, & w_\nu &\rightarrow w_l. \end{aligned} \quad (3.26)$$

De modo que as novas transformações sob  $Z_{13}$  passam a ser

$$\begin{aligned}
\Psi_L &\rightarrow w_0 \Psi_L, \\
(\phi, d_{\alpha R}) &\rightarrow \omega_1(\phi, d_{\alpha R}), \quad u_{\alpha R} \rightarrow \omega_1^{-1} u_{\alpha R}, \\
\chi &\rightarrow \omega_2 \chi, \quad E_R \rightarrow \omega_2^{-1} E_R, \\
J_R &\rightarrow \omega_3 J_R, \quad j_{mR} \rightarrow \omega_3^{-1} j_{mR}, \\
\rho &\rightarrow \omega_4 \rho, \quad l_R \rightarrow \omega_4^{-1} l_R, \\
Q_{3L} &\rightarrow \omega_5 Q_{3L}, \quad Q_{iL} \rightarrow \omega_5^{-1} Q_{iL}, \\
\eta &\rightarrow \omega_6 \eta, \quad \nu_R \rightarrow \omega_6^{-1} \nu_R.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Diferente da forma anterior em (3.27), o termo  $(\eta^\dagger \rho)(\eta^\dagger \chi)$  que violaria o número leptônico explicitamente fica proibido por essa  $Z_{13}$ . Essa atribuição também impede os termos  $M_R \overline{(\nu_R)^c} \nu_R$  de massa nua de Majorana para os neutrinos direitos; porém, agora é permitida a adição em Eq. (3.16) de um termo de interação entre os neutrinos estéreis e o singlet do áxion na forma

$$\mathcal{L}_{\phi \nu \nu} = \frac{\lambda_{\alpha \beta}}{2} \phi^* \overline{(\nu_{\alpha R})^c} \nu_{\beta R} + H.c. \tag{3.28}$$

que viola o número leptônico explicitamente. Poderíamos pensar em atribuir um número leptônico para o singlet do áxion, de modo que esse termo conservasse o número leptônico. Fazendo isso, a violação permaneceria, porque ela seria transferida para o termo não hermitiano  $\lambda_{10} \epsilon^{ijk} \phi \eta_i \rho_j \chi_k$  no potencial em Eq. (3.17). Aceitando esse fato e sem fazer a imposição de nenhuma simetria auxiliar, como foi o caso da  $Z_2$  anterior, temos agora que diferentes dos dois subconjuntos distintos de cargas de  $U(1)_{PQ}$  em Eqs. (3.20) todas as cargas estão relacionadas.

$$X_d = -X_u = X_l = -X_\nu = X_j = -X_J = -X_E. \tag{3.29}$$

E não é permitido mais tomar as cargas dos quarks tipo  $u$  e  $d$  nulas. Normalizamos as cargas de modo que  $X_d = 1$ .

O interessante é que quando a simetria  $U(1)_{PQ}$  é quebrada via  $\langle \phi \rangle = f_a / \sqrt{2}$ , é gerada uma massa de Majorana grande para os neutrinos direitos como requerido pelo popular mecanismo see-saw para gerar massa de Majorana pequena para os neutrinos ativos  $\nu_{\alpha L}$  [78], [79]. Após a condensação de todos campos neutros escalares, temos os termos de massa para os neutrinos:

$$\mathcal{L}_\nu^{mass} = G_{\alpha \beta}^\nu \frac{v_\eta}{\sqrt{2}} \overline{\nu_{\alpha L}} \nu_{\beta R} + \frac{\lambda_{\alpha \beta}}{2} \frac{f_a}{\sqrt{2}} \overline{(\nu_{\alpha R})^c} \nu_{\beta R} + H.c.$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{G_{\alpha\beta}^\nu}{2} \frac{v_\eta}{\sqrt{2}} [\overline{\nu_{\alpha L}} \nu_{\beta R} + (\overline{\nu_{\beta R}})^c (\nu_{\alpha L})^c] + \frac{\lambda_{\alpha\beta}}{2} \frac{f_a}{\sqrt{2}} (\overline{\nu_{\alpha R}})^c \nu_{\beta R} + H.c. \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \overline{\nu_{\alpha L}} & \overline{(\nu_{\alpha R})^c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{G_{\alpha\beta}^\nu v_\eta}{\sqrt{2}} \\ \frac{G_{\beta\alpha}^\nu}{\sqrt{2}} v_\eta & \frac{\lambda_{\alpha\beta}}{\sqrt{2}} f_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\nu_{\beta L})^c \\ \nu_{\beta R} \end{pmatrix} + H.c. \quad (3.30)
\end{aligned}$$

Para uma estimativa, supondo  $G_{\alpha\beta}^\nu$  e  $\lambda_{\alpha\beta}$  diagonais e da mesma ordem, temos que a massa de Majorana para os neutrinos ativos, direitos, é aproximadamente

$$m_{\nu_{\alpha L}} \simeq G_{\alpha\alpha}^\nu \frac{v_\eta^2}{f_a}. \quad (3.31)$$

$v_\eta$  pertence à escala eletrofraca, i. e.  $v_\eta \approx 10^2$  GeV, e com  $f_a \approx 10^{12}$  GeV, temos para  $G_{\alpha\alpha}^\nu \simeq 10^{-2}$  que  $m_{\nu_{\alpha L}} \simeq 0.1$  eV. Isso deixa, portanto, esses neutrinos dentro do intervalo de massa sugerido pela observação [10].

Com a simetria discreta em (3.27), é ainda possível mostrar que não há nenhuma liberdade na atribuição das cargas do fator  $U(1)_X$ , ou seja, a carga elétrica é quantizada. No Apêndice B, demonstramos como ocorre a quantização da carga elétrica na presença do singuleto do áxion.

### 3.3 Domínios de parede

A característica do potencial em Eq. (3.2) ser periódico, acarreta que a simetria  $U(1)_{PQ}$  poderia conter um subgrupo discreto  $Z_N$  que não é quebrado pelo vácuo da QCD. Uma forma simples de ver isso é observar o potencial <sup>1</sup>  $V(\theta)$ , antes da quebra espontânea de  $U(1)_{PQ}$ , que nesse caso é

$$V(\theta) = -\Lambda_{QCD}^4 \cos(\bar{\theta}). \quad (3.32)$$

Suponha agora que tenhamos um modelo onde, ao realizarmos uma transformação de  $U(1)_{PQ}$  como em Eq. (3.21), ficamos com

$$\bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} - 2\alpha \sum_{\text{todos quarks}} X_f = \bar{\theta} - 2\alpha N_{DW}, \quad (3.33)$$

---

<sup>1</sup>A palavra potencial empregada nesse contexto deve ser entendida como apenas uma analogia já que  $\theta$  é um parâmetro e não uma variável dinâmica.

onde  $N_{DW}$  é um número inteiro, contabilizando a soma das cargas  $X_f$ , sendo chamado de número de domínios de parede. Isso leva Eq. (3.32) para

$$V(\theta) = -\Lambda_{QCD}^4 \cos(\bar{\theta} - 2\alpha N_{DW}). \quad (3.34)$$

Quando se diz que  $U(1)_{PQ}$ , embora seja uma simetria da Langrangiana clássica, é quebrada pelos efeitos não perturbativos da QCD é porque em geral para uma transformação arbitrária  $V(\bar{\theta}) \neq V(\bar{\theta} - 2\alpha N_{DW})$ . Os valores discretos do parâmetro  $\alpha$  na forma  $\alpha = k\pi/N$ ,  $k = 0, \dots, N_{DW} - 1$ , formam um subconjunto discreto  $Z_{N_{DW}} \subset U(1)_{PQ}$  de transformações da simetria de Peccei-Quinn que deixam  $V(\theta)$  invariante, ou seja, as transformações de  $U(1)_{PQ}$  com  $\alpha = k\pi/N$  não são quebradas pelo vácuo da QCD. Isso significa que os campos neutros geram na condensação um vácuo e mais outros  $N_{DW} - 1$  vácuos degenerados com primeiro, relacionados uns com os outros pelo grupo discreto  $Z_{N_{DW}}$ . Seriam então formados, no universo primordial, diversos domínios separados por paredes demarcando regiões de vácuos diferentes [80]. A quebra espontânea desse subconjunto  $Z_{N_{DW}}$  levaria a problemas cosmológicos [81] que foram objeto de relativo interesse no passado. Veja por exemplo Refs. [80], [82], [83], [84].

O que temos a dizer aqui é que os Modelos 3-3-1 não apresentam esse problema dos domínios de parede, pois como vemos da Eq. (3.21) temos que  $N_{DW} = 1$  e, portanto, o subconjunto  $Z_N \subset U(1)_{PQ}$  é trivial de modo que existe somente um vácuo.

### 3.4 Acoplamento áxion-fóton

As buscas pelo o áxion têm se dado, principalmente, através da investigação do acoplamento do áxion com fóton [37]. A razão para isso vem da característica geral do áxion se acoplar com dois fótons, através da interação efetiva gerada pelo diagrama similar ao da anomalia do triângulo da QCD que dá a interação áxion-glúons. Esse diagrama tem o áxion em uma das pontas do triângulo e os fótons nas outras duas e com todos os fermions circulando no loop. O que dá [16]

$$\mathcal{L}_{a\gamma\gamma} = \frac{c_{a\gamma\gamma}\alpha_{em}}{8\pi} \frac{a(x)}{f_a} \tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (3.35)$$

onde se define

$$c_{a\gamma\gamma} = \frac{1}{N_{DW}} \sum_{\text{todos fermions}} X_f Q_f^2 - 1.95. \quad (3.36)$$

$N_{DW}$  é o número de domínios de parede e  $Q_f$  a carga elétrica do férnion em unidades da carga do pósitron. O termo -1.95 é uma contribuição advinda exclusivamente dos quarks leves, se eles tiverem carga  $X$  de  $U(1)_{PQ}$  não nulas e se acoparem com o áxion [16].

Para o Modelo 3-3-1 pode ser checado que  $c_{a\gamma\gamma}$  não depende das cargas de  $U(1)_{PQ}$  dos quarks e léptons conhecidos, ou seja, somente os quarks e léptons exóticos é que contribuem para esse coeficiente. O áxion também só se acopla com os quarks exóticos, pois como pode ser visto dos autoestados em Eq. (3.24)  $a(x)$  só tem componentes em  $\chi^0$  e  $\phi$ . De modo que independente do conjunto de cargas em (3.20) ou (3.29) o resultado é:

$$c_{a\gamma\gamma} = \pm \frac{2}{3} \quad (3.37)$$

onde o sinal  $\pm$  corresponde a normalização  $X_j = \pm 1$ .

Em função do campo elétrico e magnético,  $\tilde{F}_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -4E \cdot B$ . Dessa forma, áxions, atravessando um campo magnético, podem ser convertidos em fótons [85]. Uma das experiências para observação do áxion utiliza o sol como uma fonte dessas partículas que são geradas através de um processo Primakoff (elétrons no núcleo do sol emitindo fótons que, por sua vez, emitiriam áxions) e cujo fluxo na terra é estimado. Um campo magnético no laboratório então converteria os áxion em raios X de frequência específica que seriam detectados em uma cavidade, como está sendo feito em um telescópio da colaboração CAST [86]. Em seu relatório recente, a colaboração CAST reportou que nenhum sinal acima do background foi observado durante uma exposição de seis meses do telescópio, traduzindo o resultado em um limite superior

$$g_{a\gamma\gamma} = \frac{c_{a\gamma\gamma}\alpha_{em}}{2\pi f_a} < 1.16 \times 10^{-9} GeV^{-1}, \quad (3.38)$$

para massas do áxion  $m_a \leq 0.02$  eV; o que implicaria para o Modelo 3-3-1 que  $f_a \geq 10^8$  GeV e, portanto, ainda consistente com as observações diretas.

Outros experimentos tem sido realizados para a busca do áxion, como principal constituinte da matéria escura fria, no halo da nossa galáxia. Essas experiências têm se baseado também no acoplamento áxion-fóton. A experiência recente no Lawrence Livermore National Laboratory (LLNL), mostra que áxions do tipo KSVZ, acoplando-se apenas com quarks, estão excluídos num intervalo de massa  $2.3 \times 10^{-6} \leq m_a \leq 3.4 \times 10^{-6}$  eV, o que corresponde a  $f_a \simeq 4 \times 10^{13}$  GeV [87], [88]. Outra experiência, Cosmic Axion Research with Rydberg Atoms in resonant Cavities in Kyoto (CARRACK), também na busca de áxions cósmicos começa a investigar os intervalos de massa  $2 - 50 \times 10^{-6}$  eV [89].

### 3.5 Modelo com neutrinos direitos

No Modelo com neutrinos direitos, embora tenhamos quatorze tipos de multipletos, incluindo o singuleto do áxion, como vemos em Eqs. (2.20), (2.21), (2.22), (2.23), (2.24), pode-se ver das interações de Yukawa em Eqs. (2.25) e (2.26) que não é possível acomodar uma simetria discreta maior do que  $Z_{12}$  devido às restrições nos acoplamentos ali. No entanto, diferente do modelo anterior, não é claro se tal simetria pode ser acomodada, respeitando todas interações necessárias para a geração de massa. Além disso, nesse caso, o singuleto  $\phi$  deveria ser escolhido, na tentativa de implementar essa simetria, com uma transformação com uma fase muito especial, pois diferente de um grupo  $Z_N$  com  $N$  um número primo, teríamos certos subgrupos em  $Z_{12}$  que permitiriam operadores não renormalizáveis de dimensão menor para o singuleto, desestabilizando a solução do áxion. Em razão disso, será imposta a simetria  $Z_{11}$  nesse modelo. As transformações serão então

$$\begin{aligned}
\phi &\rightarrow \omega_1 \phi, & \psi_{aL} &\rightarrow \omega_1^{-1} \psi_{aL}, \\
\rho &\rightarrow \omega_2 \rho, & d_{aR} &\rightarrow \omega_2^{-1} d_{aR}, \\
\chi &\rightarrow \omega_3 \chi, \quad (e_R, u'_{3R}) &\rightarrow \omega_3^{-1} (e_R, u'_{3R}), \\
Q_{iL} &\rightarrow \omega_4 Q_{iL}, & d'_{iR} &\rightarrow \omega_4^{-1} d'_{iR}, \\
\eta &\rightarrow \omega_5 \eta, & u_{aR} &\rightarrow \omega_5^{-1} u_{aR}, \\
Q_{3L} &\rightarrow \omega_0 Q_{3L}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

É ainda necessário impor uma simetria  $Z_2$  adicional para impedir o termo  $\chi^\dagger \eta \phi^* \phi^*$  que obstrui a simetria  $U(1)_{PQ}$ . Essa  $Z_2$  age na forma

$$(\phi, \chi, d'_R, u'_{3R}) \rightarrow -(\phi, \chi, d'_R, u'_{3R}) \tag{3.40}$$

deixando todos os demais campos inalterados. Com isso, as simetrias  $U(1)_{PQ}$  e de número leptônico passam a ser automáticas.

A limitação, nesse modelo, é que, ao se considerar puramente a simetria  $Z_{11}$ , só é possível proteger a solução do áxion para escalas  $f_a \leq 10^{10}$  GeV para as quais teríamos  $\theta_{eff} < 10^{-9}$ . Se levarmos em conta a simetria  $Z_2$ , então o primeiro operador permitido em Eq. (3.4) teria dimensão  $d = 22$  e, consequentemente, a solução seria estável para todos valores permitidos de  $f_a$ .

O potencial escalar tem a forma idêntica do potencial em Eq. (3.17), isto é,

$$V_{331\text{nd}} = V_H + (\lambda_{10}\epsilon^{ijk}\phi\eta_i\rho_j\chi_k + \text{H. c.}) \quad (3.41)$$

com  $V_H = V_H(\phi, \eta, \rho, \chi)$  colecionando todos os termos hermitianos.

Procedendo da mesma forma anterior, encontramos a simetria  $U(1)_{PQ}$  associando as transformações de fase

$$\begin{aligned} u_{aL} &\rightarrow e^{-i\alpha X_u}u_{aL}, \quad u_{aR} \rightarrow e^{i\alpha X_u}u_{aR}, \\ u'_{3L} &\rightarrow e^{-i\alpha X_u}u'_{3L}, \quad u'_{3R} \rightarrow e^{i\alpha X_u}u'_{3R}, \\ d_{aL} &\rightarrow e^{-i\alpha X_d}d_{aL}, \quad d_{aR} \rightarrow e^{i\alpha X_d}d_{aR}, \\ d'_{iL} &\rightarrow e^{-i\alpha X_d}d'_{iL}, \quad d'_{iR} \rightarrow e^{i\alpha X_d}d'_{iR}, \\ e_{aL} &\rightarrow e^{i\alpha X_e}e_{aL}, \quad e_{aR} \rightarrow e^{i\alpha X_{eR}}e_{aR}, \\ \nu_{aL} &\rightarrow e^{i\alpha X_\nu}\nu_{aL}, \quad \nu_{aR} \rightarrow e^{i\alpha X_{\nu R}}\nu_{aR}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

que junto das interações não hermitianas nas Langrangianas de Yukawa em Eqs. (2.25) e (2.26) e o potencial escalar em (3.41) conduzem à relação entre as cargas

$$X_d = -X_u = -X_e = X_{eR} = X_\nu = -X_{\nu R}. \quad (3.43)$$

Os escalares transformam-se de acordo com

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow e^{-2i\alpha X_d}\phi, & \eta^0 &\rightarrow e^{2i\alpha X_d}\eta^0 \\ \eta^- &\rightarrow \eta^-, & \eta'^0 &\rightarrow e^{2i\alpha X_d}\eta'^0 \\ \rho^+ &\rightarrow \rho^+, & \rho^0 &\rightarrow e^{-2i\alpha X_d}\rho^0 \\ \rho'^+ &\rightarrow \rho'^+, & \chi^0 &\rightarrow e^{2i\alpha X_d}\chi^0 \\ \chi^- &\rightarrow \chi^-, & \chi'^0 &\rightarrow e^{2i\alpha X_d}\chi'^0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Normalizando todas as cargas com  $X_d = 1$ , ângulo  $\theta$  é rodado para

$$\theta \longrightarrow \theta - 2\alpha X_d = \theta - 2\alpha. \quad (3.45)$$

E, portanto, também não há nesse modelo o problema dos domínios de parede.

Para mostrar que não há nenhuma outra simetria global contínua a ser quebrada, a não ser  $U(1)_{PQ}$ , diagonalizamos a matriz de massa proveniente da parte imaginária dos escalares

neutros, supondo que somente  $\chi^0$ ,  $\eta^0$ ,  $\rho^0$  adquirem VEV<sup>2</sup>. Na base  $\text{Im}(\chi^0, \eta^0, \rho^0, \phi)$ , essa matriz tem a forma, após substituir os vínculos para minimização do potencial,

$$M_I = -\frac{\lambda_{10}}{2} v_\eta v_\rho v_{\chi'} f_a \begin{pmatrix} \frac{1}{v_{\chi'}^2} & \frac{1}{v_\eta v_{\chi'}} & \frac{1}{v_\rho v_{\chi'}} & \frac{1}{v_{\chi'} f_a} \\ \frac{1}{v_\eta v_{\chi'}} & \frac{1}{v_\eta^2} & \frac{1}{v_\eta v_\rho} & \frac{1}{v_\eta f_a} \\ \frac{1}{v_\rho v_{\chi'}} & \frac{1}{v_\eta v_\rho} & \frac{1}{v_\rho^2} & \frac{1}{v_\eta v_\rho} \\ \frac{1}{v_{\chi'} f_a} & \frac{1}{v_\eta f_a} & \frac{1}{v_\eta v_\rho} & \frac{1}{f_a^2} \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Os autoestados de massas são

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_{\chi'}^2}{f_a^2}}} \left( -\frac{v_{\chi'}}{f_a}, 0, 0, 1 \right), \\ G_1 &= \sqrt{\frac{\xi}{f_a^2 v_{\chi'}^2 + \xi}} \left( -\frac{f_a^2 v_{\chi'}}{\xi}, 0, 1, -\frac{f_a v_{\chi'}^2}{\xi} \right), \\ G_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_{\chi'}^2}{v_\eta^2}}} \left( \frac{v_{\chi'}}{v_\eta}, 1, 0, 0 \right), \\ G_3 &= \sqrt{\frac{v_\eta^2(f_a^2 v_{\chi'}^2 + \xi)}{v_\rho^2 f_a^2 v_{\chi'}^2 + v_\eta^2(f_a^2 v_{\chi'}^2 + \xi)}} \left( -\frac{v_\rho^2 f_a^2 v_{\chi'}}{v_\eta(f_a^2 v_{\chi'}^2 + \xi)}, 1, -\frac{v_\rho f_a^2 v_{\chi'}^2}{v_\eta(f_a^2 v_{\chi'}^2 + \xi)}, -\frac{v_\rho^2 f_a v_{\chi'}^2}{v_\eta(f_a^2 v_{\chi'}^2 + \xi)} \right), \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f_a^2}{v_\eta^2} + \frac{f_a^2}{v_\rho^2} + \frac{f_a^2}{v_{\chi'}^2}}} \left( \frac{f_a}{v_{\chi'}}, \frac{f_a}{v_\eta}, \frac{f_a}{v_\rho}, 1 \right), \\ A_2 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_\eta^2}{v_{\chi'}^2}}} \left( -\frac{v_\eta}{v_{\chi'}}, 1, 0, 0 \right) \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde definimos  $\xi \equiv v_\rho^2(f_a^2 + v_{\chi'}^2)$ . Identificamos o áxion  $a$  com o primeiro autoestado em (3.48) acima.  $G_1$ ,  $G_2$  e  $G_3$  são bósons de Goldstone serão absorvidos pelos bósons de gauge  $Z^0$ ,  $Z'$  e  $V^{10}$  para formar seus graus de liberdade longitudinais (observe que desde que nesse modelo, temos um bósons de gauge neutro não hermitiano,  $V^{10}$ , e que, portanto, possui um grau de liberdade a mais que  $Z^0$  e  $Z'$ , é necessário que se tenha mais um autoestado sem massa).

De fato, pode-se ver que esse autoestado existe e está na parte real da matriz de massa dos escalares neutros [90]).  $A_1$  e  $A_2$  são dois pseudoescalares massivos. O ponto importante é que

---

<sup>2</sup>Admitindo que  $\chi^0$  e/ou  $\eta^0$  adquiriram VEV então também haverá a quebra espontânea do número leptônico.

o áxion é praticamente a parte imaginária de  $\phi$  pela razão de se ter  $f_a \gg v_{\chi'}$ .

### 3.5.1 Acoplamento áxion-fóton no Modelo com o neutrinos direitos

Os autoestados em Eqs. (3.48) mostram que o áxion nesse modelo só tem componentes nos campos  $\chi^0$  e  $\phi$ , ambos singletos de  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ . Isso significa que o único acoplamento do áxion em nível de árvore com a matéria se dará exclusivamente por meio dos quarks exóticos, uma vez que interage diretamente apenas com essa matéria exótica. Na base dos autoestados físicos,

$$\chi^{0'} = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{v_{\chi'}}{\sqrt{v_{\chi'}^2 + f_a^2}} a + \dots \quad (3.49)$$

O que resulta nos acoplamentos em nível de árvore do áxion com a matéria de acordo com Eq. (2.26) na forma

$$\mathcal{L}_{aq'q'} = \frac{-iv_{\chi'}}{\sqrt{2(f_a^2 + v_{\chi'}^2)}} [G_1 \bar{u}'_3 \gamma_5 u'_3 - G_2^{ij} \bar{d}'_i \gamma_5 d'_j] a. \quad (3.50)$$

O coeficiente em Eq. (3.36) é, nesse caso,  $c_{a\gamma\gamma} = 4/9$  e a conversão de áxions em fótons estaria atrelada à existência de novos quarks na escala dos TeV.

# Capítulo 4

## Induzindo dinamicamente a quebra espontânea da simetria eletrofraca

Neste capítulo, discutiremos uma maneira pela qual o singuleto do áxion pode induzir dinamicamente a quebra espontânea de simetria. Ao impor a invariância por transformações de escala a simetria,  $U(1)_{PQ}$  é quebrada dinamicamente através do potencial efetivo em um loop para o singuleto escalar  $\phi$ . Veremos que a arbitrariedade na quebra do grupo  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$  para o fator eletromagnético  $U(1)_{em}$  será reduzida consideravelmente; uma vez que, com o triplete escalar mais pesado desenvolvendo VEV, os demais tripletos necessariamente deverão condensar para estabilizar o potencial. Além disso, nós terminaremos com número de parâmetros livres menor do que tínhamos antes.

### 4.1 Invariância de escala no Modelo 3-3-1 e o mecanismo de Coleman-Weinberg para $\phi$

Suponhamos que exista uma invariância de escala inicialmente exata na Langrangiana resultante da transformação das coordenadas  $x^\mu \rightarrow e^\alpha x^\mu$  dos campos segundo a forma [91]

$$\varphi_i(x) \rightarrow e^{\alpha d} \varphi_i(e^\alpha x) \quad (4.1)$$

com  $\alpha$  um número real e,  $d$  sendo a dimensão do campo em unidades de massa. A Langrangiana

total é modificada então por um fator de escala

$$\mathcal{L}(\varphi_i(x)) \rightarrow e^{4\alpha} \mathcal{L}(\varphi_i(e^\alpha x)), \quad (4.2)$$

o que deixa a ação invariante. Isso impede parâmetros iniciais com dimensão de massa na Langrangiana. No Modelo 3-3-1 com o singlet do áxion e a simetria  $Z_{13}$ , o potencial em Eq. (2.18) sem os termos quadráticos  $\mu_1^2$ ,  $\mu_2^2$ ,  $\mu_3^2$ , e  $\mu_\phi^2$  fica reduzido para

$$\begin{aligned} V_{331} = & \lambda_1(\eta^\dagger\eta)^2 + \lambda_2(\rho^\dagger\rho)^2 + \lambda_3(\chi^\dagger\chi)^2 + \lambda_\phi(\phi^*\phi)^2 \\ & + \eta^\dagger\eta [\lambda_4(\rho^\dagger\rho) + \lambda_5(\chi^\dagger\chi)] + \lambda_6(\rho^\dagger\rho)(\chi^\dagger\chi) + \lambda_7(\rho^\dagger\eta)(\eta^\dagger\rho) \\ & + \lambda_8(\chi^\dagger\eta)(\eta^\dagger\chi) + \lambda_9(\rho^\dagger\chi)(\chi^\dagger\rho) + (\lambda_{10}\epsilon^{ijk}\phi\eta_i\rho_j\chi_k + \text{H. c.}) \\ & + \phi^*\phi [\lambda_{\phi\eta}(\eta^\dagger\eta) + \lambda_{\phi\rho}(\rho^\dagger\rho) + \lambda_{\phi\chi}(\chi^\dagger\chi)]. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Em uma hierarquia de escalas, a condensação do singleto escalar deve acontecer muito antes do que a condensação dos escalares da escala eletrofraca, dada a disparidade dos valores esperados  $\langle\eta\rangle$ ,  $\langle\rho\rangle$ ,  $\langle\chi\rangle$  em relação a  $\langle\phi\rangle$ . É razoável supor, então, que a condensação do singleto escalar possa ter ocorrido independentemente dos demais campos da escala eletrofraca. A condensação de  $\phi$  deve-se dar então através do mecanismo de Coleman-Weinberg [92] via um potencial efetivo, para a parte do potencial dependente apenas do singleto, i. e.,  $V_\phi(\phi^*\phi) = \lambda_\phi(\phi^*\phi)^2$ .

Existem vários métodos para se calcular esse potencial efetivo que levam a uma fórmula padrão para o caso de um único campo escalar [92], [93], [94]. Definindo

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_c(x)e^{i\frac{\xi(x)}{f_a}}, \quad (4.4)$$

adicionando os contratermos de renormalização

$$V_{CT} = \frac{A}{2}\phi_c^2 + \frac{C}{4}\phi_c^4 + D. \quad (4.5)$$

e usando as condições de renormalização que determinam as constantes de renormalização  $A$ ,  $C$  e  $D$ ,

$$V_{eff}|_{\phi_c=0} = 0, \quad (4.6)$$

$$\frac{d^2V_{eff}}{d\phi_c^2}|_{\phi_c=0} = 0, \quad (4.7)$$

$$\frac{d^4 V_{eff}}{d\phi_c^4} \Big|_{\phi_c=f_a} = 3! \lambda_\phi, \quad (4.8)$$

junto da condição que existe um mínimo do potencial para um valor não trivial do campo singuleto, o resultado para o potencial  $V_{eff}^\phi(\phi^*\phi) \equiv V_{eff}^\phi(\phi_c^2)$  é

$$V_{eff}^\phi(\phi_c^2) = B_{\phi_c} \phi_c^4 \left[ \ln \left( \frac{\phi_c^2}{f_a^2} \right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (4.9)$$

onde o coeficiente  $B_{\phi_c^2}$  é dado por

$$B_{\phi_c} \simeq \frac{3}{128\pi^2} [\lambda_{\phi\eta}^2 + \lambda_{\phi\rho}^2 + \lambda_{\phi\chi}^2]. \quad (4.10)$$

O valor esperado no vácuo para o singuleto é então gerado dinamicamente, uma vez que o mínimo do potencial efetivo em (4.9) ocorre para um valor não nulo de  $\phi_c$ , manifestando a quebra da invariância de escala.

De uma maneira mais realística, deveríamos incluir os efeitos de temperatura no potencial efetivo. Esses efeitos viriam na forma de um termo do tipo  $b\phi_c^2 T^2$  com  $b$  sendo uma constante positiva e  $T$ , a temperatura. Em altas temperaturas, a simetria é restaurada; porém, quando  $T < f_a$ , esse termo deixa de ser importante, de modo que podemos ficar com a aproximação de temperatura zero, sem mudar qualitativamente a análise.

A simetria  $U(1)_{PQ}$  passa a ser quebrada dinamicamente junto com a invariância de escala.

## 4.2 Induzindo a quebra da simetria $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$

A questão que gostaríamos de responder é se a invariância de escala e a quebra dinâmica de simetria na escala do singuleto escalar podem levar a algum vínculo para a rota da quebra das simetrias na escala eletrofraca. Vimos no Capítulo 2 que, à rota de quebra da simetria  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$  para  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , que se quebrava para o fator eletromagnético  $U(1)_{em}$ , estão associadas três escalas de energias arbitrárias. Não havia, portanto, nenhuma relação entre as escalas  $v_\chi$  de  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$  e  $v_\eta$  e  $v_\rho$  de  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , por exemplo no Modelo 3-3-1.

Considerando agora o potencial em Eq. (4.3) com o termo  $\lambda_\phi(\phi^*\phi)^2$ , substituído pela aproximação de um loop em Eq. (4.9) as equações de vínculo

$$\frac{dV_{331}}{d\varphi_i}|_{\varphi_{is}=\langle\varphi_{is}\rangle}=0, \quad (4.11)$$

com  $\varphi_i = \eta^0, \rho^0, \chi^0, \phi_c$ , para minimização do potencial fornecem o conjunto de equações

$$(2\lambda_1 v_\eta^2 + \lambda_4 v_\rho^2 + \lambda_5 v_\chi^2 + \lambda_{\phi\eta} f_a^2) v_\eta + \lambda_{10} v_\rho v_\chi f_a = 0,$$

$$(2\lambda_2 v_\rho^2 + \lambda_4 v_\eta^2 + \lambda_6 v_\chi^2 + \lambda_{\phi\rho} f_a^2) v_\rho + \lambda_{10} v_\eta v_\chi f_a = 0,$$

$$(2\lambda_3 v_\chi^2 + \lambda_5 v_\eta^2 + \lambda_6 v_\rho^2 + \lambda_{\phi\chi} f_a^2) v_\chi + \lambda_{10} v_\eta v_\rho f_a = 0,$$

$$(\lambda_{\phi\eta} v_\eta^2 + \lambda_{\phi\rho} v_\rho^2 + \lambda_{\phi\chi} v_\chi^2) f_a + \lambda_{10} v_\eta v_\rho v_\chi = 0. \quad (4.12)$$

A informação inicial que temos para essas equações é a do valor não nulo para a escala  $f_a$ , pois ela foi gerada dinamicamente através do mecanismo de Coleman-Weinberg. Ao questionarmos, se a condensação do singleto  $\phi$  gerada dinamicamente pode induzir à quebra espontânea de simetria, em baixas energias, estamos questionando se as equações de vínculo acima são consistentes para os valores esperados no vácuo  $v_\eta, v_\rho, v_\chi$  não nulos.

Existem somente duas soluções para as Eqs. (4.12): a primeira é a trivial com  $v_\eta = v_\rho = v_\chi = 0$  e excluída fenomenologicamente; a segunda solução, porém, nos mostra que  $v_\eta, v_\rho, v_\chi$  devem ser todos necessariamente não nulos. Isso pode ser visto, considerando, por exemplo,  $v_\chi \neq 0$  e checando que só existem soluções para  $v_\eta$  e  $v_\rho$  também não nulos. Dessa forma, a quebra espontânea da simetria  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$  deve ocorrer sem nenhuma arbitrariedade na escolha das escalas  $v_\eta$  e  $v_\rho$  intermediárias, que eram postas uma ou ambas diferentes de zero para quebrar o subgrupo  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  para o fator eletromagnético  $U(1)_{em}$ . Isso é diferente do caso onde se têm os parâmetros iniciais com dimensão de massa quadrado  $\mu_1^2, \mu_2^2, \mu_3^2$ , e  $\mu_\phi^2$  com o VEV  $\langle \chi^0 \rangle = 1/\sqrt{2}v_\chi$ , sem nenhuma conexão com a quebra do subgrupo  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ . Estando então  $v_\chi$  na escala dos TeV, o mecanismo apresentado aqui mostra que a quebra da simetria  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  é uma questão não negociável. É nesse sentido que dizemos que a quebra dessa simetria está sendo induzida. Essa é a observação mais importante desse capítulo.

As equações de vínculo em Eqs. (4.12) permitem determinar as constantes de acoplamento das interações com o campo  $\phi$  em favor das demais constantes de acoplamento e valores espe-

rados no v\'acuo,

$$\lambda_{\phi\eta} = \frac{-\lambda_1 v_\eta^4 + \lambda_2 v_\rho^4 + \lambda_3 v_\chi^4 + \lambda_6 v_\rho^2 v_\chi^2}{v_\eta^2 f_a^2} \quad (4.13)$$

$$\lambda_{\phi\rho} = \frac{\lambda_1 v_\eta^4 - \lambda_2 v_\rho^4 + \lambda_3 v_\chi^4 + \lambda_5 v_\eta^2 v_\chi^2}{v_\rho^2 f_a^2} \quad (4.14)$$

$$\lambda_{\phi\chi} = \frac{\lambda_1 v_\eta^4 + \lambda_2 v_\rho^4 - \lambda_3 v_\chi^4 + \lambda_4 v_\eta^2 v_\rho^2}{v_\chi^2 f_a^2} \quad (4.15)$$

$$\lambda_{10} = -\frac{v_\eta^2(\lambda_1 v_\eta^2 + \lambda_4 v_\rho^2) + v_\rho^2(\lambda_2 v_\rho^2 + \lambda_6 v_\chi^2) + v_\chi^2(\lambda_3 v_\chi^2 + \lambda_5 v_\eta^2)}{f_a v_\eta v_\rho v_\chi}. \quad (4.16)$$

Isso mostra que as intera\c{c}\o es do singlet com os triplets \e suprimida por fatores de  $(v_\chi/f_a)$  e  $(v_\chi^2/f_a^2)$ .

Para nos certificarmos de que o potencial com os v\'inculos em Eqs. (4.12) atinge o ponto de m\'inimo fora da origem, devemos verificar que o potencial tem concavidade positiva, ou seja, que se tenha pelo menos um conjunto de par\'ametros  $\lambda_{is}$ ,  $i = 1\dots 9$ , tal que todos os autovalores das matrizes de massa dos escalares carregados da parte real e imagin\'aria dos escalares neutros sejam positivos. Em uma an\'alise num\'erica preliminar, encontramos que \e poss\'ivel ter um conjunto de par\'ametros que cumpram o papel.

Como a matriz de massa da parte imagin\'aria dos escalares neutros \e simples, vale a pena notar que diferente do que vimos no Cap\'itulo 3 em Eq. (3.25) agora o pseudoescalar  $A^0$  n\'ao tem mais nenhuma contribui\c{c}\o dominante da escala  $f_a$ . Sua massa passa a ser dada por

$$M_{A^0}^2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v_\eta^2} + \frac{1}{v_\rho^2} + \frac{1}{v_\chi^2} + \frac{1}{f_a^2} \right) (v_\eta^2(\lambda_1 v_\eta^2 + \lambda_4 v_\rho^2) + v_\rho^2(\lambda_2 v_\rho^2 + \lambda_6 v_\chi^2) + v_\chi^2(\lambda_3 v_\chi^2 + \lambda_5 v_\eta^2)). \quad (4.17)$$

Os autovetores continuam sendo os mesmos da Eq. (3.24). Assim, diferente do caso anterior onde n\'ao t\'inhamos a invari\c{c}\o de escala em n\'ivel de \'arvore, esse escalar passa a poder ser produzido em energias na escala dos TeV supondo que  $v_\chi$  tamb\'em esteja nessa escala de energia.

A an\'alise para o modelo com neutrinos direitos \e similar; por\'em, dado fato que l\'a temos cinco componentes neutras nos triplets escalares, s\'o \e poss\'ivel mostrar que a simetria  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$

é necessariamente quebrada, se apenas uma componente neutra em cada triplete é permitida ganhar um VEV.

Finalizando esse capítulo, ressaltamos na conclusão que a condensação gerada dinamicamente para o singletô  $\phi$  pode vincular a rota de quebra de simetria na escala eletrofraca induzindo necessariamente à quebra da simetria  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , uma vez que o campo  $\chi^0$  deve condensar. Isso foi feito, considerando a invariância de escala que reduziu o número de parâmetros no Modelo 3-3-1. O resultado é resumido no fato que agora a simetria  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$  do setor eletrofraco é quebrada sem a liberdade de escolha dos valores esperados que quebram subgrupo do Modelo Padrão, e assim é reduzida a arbitrariedade na rota de quebra de simetria.

Podemos evidenciar melhor o resultado, lembrando que a introdução do singletô do áxion tem como consequência aumentar em mais quatro, o número de parâmetros desconhecidos do modelo, um parâmetro de massa quadrática  $\mu_\phi$  e mais três constantes de acoplamento no potencial,  $\lambda_{\phi\eta}$ ,  $\lambda_{\phi\rho}$  e  $\lambda_{\phi\chi}$ . A invariância de escala, por sua vez, elimina quatro parâmetros de massa, de modo que o modelo com o singletô escalar continua tendo o mesmo número de parâmetros que o modelo original, isto é, sem o singletô escalar. Assim, não há nenhum custo de indeterminação com a introdução do singletô e, além disso, há a vantagem de se restringir a quebra da simetria eletrofraca.

# Capítulo 5

## O problema do limite perturbativo na escala dos TeV

Vimos, no Capítulo 2, que no Modelo 3-3-1 as constantes de acoplamento de  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$  relacionam-se com o parâmetro  $sw^2$  do setor eletrofraco, de tal forma que  $\alpha_X$  pode ter um valor que invalida o tratamento perturbativo, já em uma escala muito próxima daquela em que todas as simetrias do modelo tornam-se evidentes. Neste Capítulo, analisaremos em mais detalhes esse problema estudando como o limite perturbativo é afetado com a escala de energia do modelo. Mostraremos quais são os campos leves de  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  e como eles contribuem para a evolução das constantes de acoplamento na escala do Modelo Padrão. As versões supersimétricas dos modelos serão também analisadas. Finalizando, uma solução para o problema do limite perturbativo será proposta por nós. A análise será feita sem levar em conta a introdução do singuleto do áxion; porém, os resultados também são válidos quando este campo está presente.

### 5.1 O problema do limite perturbativo

Os Modelos 3-3-1, que têm  $b = \sqrt{3}$  na definição da carga elétrica em Eq. (2.1), ao vincularem o valor do parâmetro  $sw^2$  do setor eletrofraco trazem, também, à tona um problema que poderia deixá-los sem a possibilidade do tratamento perturbativo já nas escalas de energia da ordem dos

TeV. As constantes de acoplamento  $\alpha_L$  e  $\alpha_X$  dessas versões do modelo relacionam-se, de acordo com a Eq. (2.44) no Capítulo 2, de forma a estabelecer que  $sw^2 < 0.25$ . As experiências diretas nas energias acessíveis confirmam isso, para o valor de  $sw^2$ . Porém, a dinâmica das teorias de campo resulta na evolução das constantes de acoplamento à medida em que as escalas de energia são variadas. Assim, sendo  $\mu$  a escala de energia escrevemos a Eq. (2.44) mais apropriadamente como

$$\frac{\alpha_X(\mu)}{\alpha_L(\mu)} = \frac{sw^2(\mu)}{1 - 4sw^2(\mu)}. \quad (5.1)$$

Essa relação é válida para escalas de energia  $\mu \geq \mu_{331}$ . Sendo  $\mu_{331}$  a escala acima da qual as simetrias além do Modelo Padrão tornam-se evidentes dentro do referencial teórico do Modelo 3-3-1. A Eq. (5.1) indica que o tratamento perturbativo será restrito a energias não muito altas. Isso porque a constante de acoplamento  $\alpha_X$  é devida a um fator abeliano,  $U(1)_X$ , e a constante de acoplamento  $\alpha_L$  apresentar a característica de liberdade assintótica com o conteúdo mínimo de representação para os modelos (veja as Eqs. (5.2) e (5.3) a seguir). Somando-se, também, o fato que as medidas precisas do ângulo eletrofraco no pólo de produção da partícula  $Z$  fornecerem o resultado  $sw^2(M_z) = 0.2311$ . E desde que para energias  $\mu \leq \mu_{331}$ , levando em conta apenas os graus de liberdade do Modelo Padrão,  $sw^2(\mu)$  cresce com a energia, como mostram as equações de grupo de renormalização que discutiremos logo abaixo, o problema parece se agravar. Evoluindo o valor de  $sw^2(M_z)$  com os campos leves da teoria efetiva  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  de baixa energia até a escala  $\mu_{331}$ , onde os novos campos nas representações completas do Modelo 3-3-1 começariam a ser excitados, temos através da Eq. (5.1) o valor inicial  $\alpha_X(\mu_{331})$ . Esse valor estará, para valores da escala  $\mu_{331}$  não muito altos, próximo da unidade e a teoria de perturbações não será mais aplicável. Para o valor  $sw^2(\mu) = 0.25$ , temos o conhecido pólo de Landau em  $\alpha_X(\mu)$  onde um valor infinito para a constante de acoplamento é alcançado para um valor finito da escala de energia  $\mu$  [95].

A possível existência de um pólo do tipo de Landau não é inesperada porque essa é uma característica comum à maioria das teorias que não apresentam liberdade assintótica. A novidade aqui é que, em alguns dos modelos, esse pólo pode ser alcançado em energias de poucos TeV. O que implicará no fato de que o cut-off  $\Lambda_{cutoff}$ , na teoria não pode ser eliminado fazendo  $\Lambda_{cutoff} \rightarrow \infty$ , como esperamos em uma teoria renormalizável. Nesse limite, talvez, a teoria poderia ser do tipo trivial, significando que as constantes de acoplamento se anulam no limite do cut-off tendendo ao infinito, colocando dúvidas sobre a consistência da referida teoria des-

crevendo campos em interação. Esse supostamente seria o caso da eletrodinâmica quântica, QED, pura, que seria uma representante das teorias de gauge com o problema do pólo de Landau, onde os cálculos não perturbativos na rede estariam levando a uma conclusão em direção à trivialidade. Do ponto de vista fenomenológico, esse problema não é nada alarmante, pois sabemos que a QED tem de ser imersa em uma teoria eletrofraca já nas energias de poucos GeV, e também porque as correções dos setores eletrofracos e fortes devem ser levados em conta no cálculo de observáveis físicos, mesmo aqueles que são de origem puramente eletromagnética como o fator  $(g - 2)_\mu$ . Existem, na literatura, resultados sugerindo também que a QED poderia escapar do problema do pólo de Landau [96, 97].

De qualquer forma, seja a teoria apresentando o pólo de Landau seja, então, cálculos não perturbativos na rede sugerindo trivialidade, as equações do grupo de renormalização podem nos dar, no mínimo, um guia qualitativo em relação ao comportamento assintótico onde as constantes de acoplamento nas escalas de energia de interesse começam a ficar grandes demais para permitir o uso da teoria de perturbação usual. As equações de grupo de renormalização fornecem uma visão para os possíveis tipos de comportamento das teorias de campo [98].

Não obstante, devemos reforçar que tanto a QED como o Modelo Padrão são teorias efetivas e, portanto, não fundamentais. Da discussão apresentada no Capítulo 1 significa que operadores efetivos com dimensão  $d > 4$  devem ser considerados, por exemplo, para obter um limite contínuo realístico nos cálculos da rede [98]. Isso seria de fato uma tarefa bastante difícil, se não impossível, de se realizar; visto que há uma infinidade de operadores desse tipo permitidos por todas as simetrias da teoria. Assim, usar as versões puras desses modelos para tentar dizer algo sobre trivialidade é ainda inconclusivo e as equações de grupo de renormalização podem de fato dar uma perspectiva sobre a questão perturbativa nos Modelos 3-3-1.

Há alguns anos atrás, utilizando-se a teoria de perturbações, foi calculada a energia em que  $sw^2 = 0.25$  [100, 101, 102]. Considerando apenas os graus de liberdade dos estados do Modelo Padrão, encontrou-se que essa condição é alcançada para valores de energia entre 3-4 TeV. Esse valor seria um limite superior para escala de energia em que um pólo do tipo de Landau ocorre.

O nosso objetivo no que segue será estudar a evolução de  $sw^2$  nos Modelos 3-3-1; porém, desde que, como nós verificamos para o conteúdo mínimo de representação dos modelos, a constante de acoplamento  $\alpha_L$  não varia de forma significativa nas escalas em que estaremos interessados, analisaremos a evolução de  $\alpha_X$ ; o que é, nesse caso, totalmente equivalente. Confirmamos os

resultados anteriores da literatura e consideramos adicionalmente o cenário mais geral, quando a escala da quebra de simetria  $SU(3)_L$ ,  $\mu_{331}$ , está dentro do regime perturbativo, analisando também uma situação em que os quarks exóticos teriam massas acima do regime perturbativo. Será determinada a escala  $M'$  na qual  $\alpha_X > 1$ , o que realmente indica o limite perturbativo dos modelos, desde que acima dessa escala as equações de grupo de renormalização deixam de fazer sentido. Utilizaremos aproximação em nível de 1-loop, mas o caso em 2-loop será brevemente comentado.

## 5.2 As equações do grupo de renormalização e o limite perturbativo

As equações de grupo de renormalização, ditando a evolução das constantes de acoplamento de gauge em nível de 1-loop, são dadas por

$$\frac{1}{\alpha_i(\mu)} = \frac{1}{\alpha_i(M_0)} + \frac{1}{2\pi} b_i \ln \left( \frac{M_0}{\mu} \right), \quad (5.2)$$

com  $i = 1, 2, 3$  e  $\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1$  sendo as constantes de acoplamento dos grupos  $SU(3)_C$ ,  $SU(2)_L$  e  $U(1)_Y$  respectivamente, para quando tratamos das escalas de energia  $\mu \leq \mu_{331}$ , onde, nesse caso, a escala inicial será  $M_0 = M_Z$ . Denotaremos  $\alpha_3^{331}$ ,  $\alpha_L$  e  $\alpha_X$  como as constantes de acoplamento dos grupos  $SU(3)_C$ ,  $SU(3)_L$  e  $U(1)_X$  respectivamente, com os índices  $i = 3, L, X$  para quando tratamos das escalas de energia  $\mu \geq \mu_{331}$  e, nesse caso, o valor inicial será  $M_0 = \mu_{331}$ . Em um grupo genérico de gauge, os coeficientes  $b_i$  são dados por

$$b_i = \frac{2}{3} \sum_{\text{fermions}} T_R(F)_i + \frac{1}{3} \sum_{\text{escalares}} T_R(S)_i - \frac{11}{3} C_2(G)_i \quad (5.3)$$

para férmons de Weyl e escalares complexos, com os geradores  $T^a$ , satisfazendo  $\text{Tr}[T^a(I)T^b(I)] = T_R(I)\delta^{ab}$  onde  $I = F, S$ . Para  $SU(N)$ ,  $T_R(I) = 1/2$  na representação fundamental e  $C_2(G) = N$ .  $C_2(G) = 0$  para  $U(1)$ . Esses números podem ser calculados para outras diferentes representações com a ajuda da identidade  $T_R(I)(N^2 - 1) = C_{2R}(I)d_R(I)$ , onde  $C_{2R}(I)$  é o operador quadrático de Casimir e  $d_R(I)$  é a dimensão da representação [103, 104]. Para  $U(1)_y$  usamos  $\sum T_{R1}(F, S) = \sum y^2$  onde  $y = Y/2$  para o grupo do Modelo Padrão e  $y = X$  para os Modelos 3-3-1.

Abaixo da escala  $\mu_{331}$ , devemos considerar os campos leves nas representações de  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , ou seja, iremos considerar aí os campos do Modelo Padrão mais alguns dubletos e tripletos escalares advindos do Modelo 3-3-1 que podem ser considerados leves, isto é, com massas menores do que  $\mu_{331}$ . Daqui em diante, para ficar claro de quais representações estaremos falando, reservaremos o prefixo *iso* para quando estivermos falando das representações de  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ . De outra forma, isto é, sem prefixo *iso*, fica subentendido que estaremos falando das representações no Modelo 3-3-1. Assim, nas escalas abaixo de  $\mu_{331}$ , temos três gerações de férmions, isto é  $N_g = 3$ . E sendo  $N_{DS}$ , o número de isodubletos escalares;  $N_{DF}$ , o número de novos isodubletos fermiônicos exóticos;  $N_{TS}$  o número de isotripletos escalares e  $N_{TF}$  o número de novos isotripletos fermiônicos exóticos, com  $Y$ , sendo a respectiva hypercarga, então da fórmula na Eq. (5.3) temos

$$b_1 = \frac{1}{3} \left( Y_{DF}^2 N_F + \frac{Y_{DS}^2}{2} N_{DS} + 20 \right) + \frac{1}{2} \left( Y_{TF}^2 N_{TF} + \frac{Y_{TS}^2}{2} N_{TS} \right), \quad (5.4)$$

$$b_2 = \frac{1}{3} \left( N_{DF} + \frac{1}{2} N_{DS} + 4N_{TF} + 2N_{TS} - 10 \right). \quad (5.5)$$

$$b_3 = \frac{4}{3} N_g - 11 = -7. \quad (5.6)$$

Ao lidar com férmions em representações do tipo vetorial, devemos multiplicar  $N_{DF}$  e  $N_{TF}$  por 2, desde que cada componente que forma a representação é, nesse caso, um férmion de quatro componentes. E ainda, nesse regime de energia, da definição de  $sw^2(\mu)$  em função das constantes de acoplamento

$$sw^2(\mu) = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_2(\mu)}{\alpha_1(\mu)}}, \quad \mu \leq \mu_{331}. \quad (5.7)$$

Com essa equação para o ângulo de mistura eletrofraco e os coeficientes nas Eqs. (5.4) e (5.5), obtemos o valor de  $sw^2(\mu_{331})$ , usando as equações para os  $\alpha_{1,2}^{-1}$  dados pelas Eqs. (5.3), que será usado para determinar o valor de partida de  $\alpha_X(\mu_{331})$  e consequentemente sua evolução para energias acima de  $\mu_{331}$ .

Observe que para um conteúdo de  $SU(2)$ , apresentando liberdade assintótica, isto é,  $\alpha_2 \rightarrow 0$  quando  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $\sin^2 \theta_w$  cresce com a energia. Acima da escala  $\mu_{331}$ , os campos são considerados como formando representações de  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$ .

Identificaremos o VEV do campo que quebra a simetria  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$  com a escala  $\mu_{331}$ , ou seja,  $v_\chi/\sqrt{2} \simeq \mu_{331}$ . Os bósons de gauge  $V^\pm$ ,  $U^{\pm\pm}$  e  $Z'$  estão, portanto, de acordo com as

Eqs (2.36), (2.37) e (2.39) fora do espectro de baixa energia. Pode-se observar que os léptons exóticos  $E_a$  e quarks exóticos  $j_m$  e  $J$  estão também fora do espectro de baixa energia; e os únicos campos que poderiam fazer parte junto do espectro do Modelo Padrão resultariam dos tripletos escalares em Eq. (2.15) e do potencial em Eq. (2.18). Olhando, então, para o espectro de massa dos escalares, temos, para a parte real neutra, a seguinte matriz de massa na base  $(\Re\eta^0, \Re\rho^0, \Re\chi^0)$

$$M_0^2 = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 v_\eta^2 - \frac{fv_\rho v_\chi}{2\sqrt{2}v_\eta} & \lambda_4 v_\eta v_\rho + \frac{fv_\chi}{2\sqrt{2}} & \lambda_5 v_\eta v_\chi + \frac{fv_\rho}{2\sqrt{2}} \\ & 2\lambda_2 v_\rho^2 - \frac{fv_\eta v_\chi}{2\sqrt{2}v_\rho} & \lambda_6 v_\rho v_\chi + \frac{fv_\eta}{2\sqrt{2}} \\ & & 2\lambda_3 v_\chi^2 - \frac{fv_\eta v_\rho}{2\sqrt{2}v_\chi} \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

Essa matriz tem os três autovalores diferentes de zero, correspondendo à massa dos três campos escalares reais neutros.

Desde que o parâmetro  $f$  com dimensão de massa é característico dos Modelos 3-3-1, é razoável supor que ele tenha valor próximo da escala  $\mu_{331}$ . Com isso, analisando espectro de massa proveniente dessa matriz pode-se observar que dois dos autovalores não têm dependência forte com  $v_\chi$  e  $f$  e, portanto, têm valores abaixo da escala  $\mu_{331}$ .

Na parte imaginária dos escalares neutros, temos dois bósons de Goldstone que são absorvidos pelos bósons de gauge  $Z$  e  $Z'$ , originando os seus graus de liberdades longitudinais. Um pseudoescalar permanece com a massa dada por

$$M_A^2 = -\frac{fv_\eta v_\rho v_\chi}{2\sqrt{2}} \left( \frac{1}{v_\eta^2} + \frac{1}{v_\rho^2} + \frac{1}{v_\chi^2} \right), \quad (5.9)$$

e estaria, a princípio, também acima de  $\mu_{331}$ . Note que isso implica em que o parâmetro  $f$  com dimensão de massa acoplando os três tripletos escalares no potencial escalar em Eq. (2.18) é tal que  $f < 0$ .

No setor carregado, permaneceria no espectro um escalar duplamente carregado que é uma combinação linear de  $\rho^{++}$  e  $\chi^{++}$  com a massa,

$$M_{++}^2 = \frac{\lambda_9}{2}(v_\rho^2 + v_\chi^2) - \frac{fv_\eta v_\rho v_\chi}{2\sqrt{2}} \left( \frac{1}{v_\rho^2} + \frac{1}{v_\chi^2} \right), \quad (5.10)$$

e dois escalares carregando uma unidade de carga cada um. Um deles, sendo uma combinação linear de  $\eta_1^+$  e  $\rho^+$  e cuja massa é

$$M_{+1}^2 = \frac{\lambda_7}{2}(v_\eta^2 + v_\rho^2) - \frac{fv_\eta v_\rho v_\chi}{2\sqrt{2}} \left( \frac{1}{v_\rho^2} + \frac{1}{v_\chi^2} \right). \quad (5.11)$$

E o outro, sendo uma combinação linear de  $\eta_2^+$  e  $\chi^+$  com a massa

$$M_{+2}^2 = \frac{\lambda_8}{2}(v_\eta^2 + v_\chi^2) - \frac{fv_\eta v_\rho v_\chi}{2\sqrt{2}} \left( \frac{1}{v_\rho^2} + \frac{1}{v_\chi^2} \right). \quad (5.12)$$

Assim, temos, possivelmente, apenas dois escalares que farão parte do espectro de baixa energia. Dessa forma, nas escalas  $\mu < \mu_{331}$ , estaremos considerando apenas dois doubletos escalares, ou seja, levaremos em conta mais um doubleto escalar além daquele usual do Modelo Padrão; contudo, é possível mostrar que, através de um ajuste dos parâmetros, é possível fazer com que quase todos os escalares físicos tenham massa menor do que 500 GeV [53, 54]. Não analisaremos essa possibilidade e os seus efeitos para as evoluções segundo grupo de renormalização. De qualquer maneira, qualitativamente, os escalares não afetam muito a evolução das constantes de acoplamento, pois são os férmiões que dão a maior contribuição.

Os multipletos leves de  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  serão no setor de férmiões, os doubletos usuais  $(\nu_a, l_a)_L \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1)$  and  $(u_\alpha, d_\alpha)_L \sim (\mathbf{3}, \mathbf{2}, 1/3)$ ; os singletos  $l_{aR} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -2)$  (neutrinos de mão direita, bem como singletos neutros, são omitidos, pois eles não afetam a evolução das constantes de acoplamento); e  $u_{aR} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, 4/3)$ ,  $d_{aR} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -2/3)$ . No setor escalar, temos dois doubletos  $(\eta^0, \eta^-_1) \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1)$  e  $(\rho^+, \rho^0) \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2}, +1)$ . Lembramos que os números entre parênteses significam a propriedade de transformação desses multipletos sob  $SU(3)_C$ ,  $SU(2)_L$  e  $U(1)_Y$  respectivamente, ou sob  $SU(3)_C$ ,  $SU(3)_L$  e  $U(1)_X$  quando este for o caso.

Eles formam, portanto, os graus de liberdade ativos em energias  $E < \mu_{331}$ . A contagem para as Eqs. (5.4) e (5.5) (observe que os férmiões usuais já foram contados nas equações para que esses conscientes) dá  $N_{DS} = 2$ ,  $N_{DF} = N_{TF} = N_{TS} = 0$ , o que fornece o seguinte conjunto de coeficientes:

$$(b_1, b_2, b_3) = (7, -3, -7). \quad (5.13)$$

Evoluindo as Eqs. (5.2) e (5.7) a partir da escala  $M_Z$  com esse conjunto de coeficientes, obtemos que a evolução de  $sw^2(\mu)$  tem a forma dada na primeira curva da Fig. 5.1, onde para uso futuro, mostramos não só a mesma evolução, quando o sexteto escalar é adicionado, mas também para as respectivas versões supersimétricas. Em particular, o valor  $sw^2 = 0.25$  é atingido em  $\mu = 4.10$  TeV, o que está em acordo com as Refs [100, 101, 102]. Esse seria um limite de escala acima da qual o modelo não pode mais ser tratado de forma perturbativa.

A seguir, vamos considerar o caso das energias  $E \geq \mu_{331}$ , mostrando nossa preocupação com a evolução da constante de acoplamento do fator abeliano  $U(1)_X$ . De acordo com a Eq. (5.2)

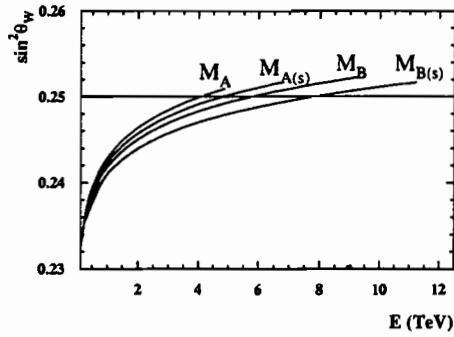


Figura 5.1: Evolução do ângulo de mistura eletrofraco para os Modelos 3-3-1 para energias  $\mu < \mu_{331}$ . O subíndice  $A$  significa o modelo com apenas três tripletos escalares; e  $B$ , o modelo com os três tripletos mais o sexteto escalar; ( $s$ ) significa a respectiva versão supersimétrica.

a evolução será

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_X(\mu)} &= \frac{1}{\alpha_X(\mu_{331})} + \frac{1}{2\pi} b_X \ln \left( \frac{\mu_{331}}{\mu} \right) \\ &= \frac{1}{\alpha_1(\mu_{331})} - \frac{3}{\alpha_2(\mu_{331})} + \frac{1}{2\pi} b_X \ln \left( \frac{\mu_{331}}{\mu} \right); \mu \geq \mu_{331}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Na última linha da equação acima,  $\alpha_X(\mu_{331})$  foi determinado usando as Eqs. (5.1) e (5.7) junto ao fato que  $\alpha_2(\mu_{331}) = \alpha_L(\mu_{331})$ , pois como dissemos, o grupo  $SU(2)_L$  está totalmente imbebido em  $SU(3)_L$ ;  $b_X$  é calculado considerando os campos na representação completa do grupo de simetria do Modelo 3-3-1. Deixando por generalidade, o número de tripletos do tipo  $\rho$ ,  $N_\rho$ , e do tipo  $\chi$ ,  $N_\chi$ , arbitrário, esse coeficiente tem os valores abaixo quando contamos com todos os campos do modelo, e quando omitimos os quarks exóticos, sendo este último caso marcado pelo subíndice  $\not{}$  em  $b_X$ .

$$b_X = 24 + N_\rho + N_\chi, \quad (5.15)$$

$$b_{X\not{}} = 10 + N_\rho + N_\chi. \quad (5.16)$$

No modelo mínimo que estamos tratando aqui,  $N_\rho = N_\chi = 1$ , ou seja,  $b_X = 26$  e  $b_{X\not{}} = 12$ . Observe que os quarks exóticos têm uma contribuição dominante. De fato, o quadrado da carga  $X$  das componentes de mão direita desses campos é muito maior que o de qualquer fermion usual.

$\mu_{331}$	$\hat{\alpha}_X(\mu_{331})$	$M'$	$\Lambda$	$M_{Z'}(\mu_{331})$
2.0	0.55	2.4(3.0)	3.1(5.2)	5.2
1.5	0.39	2.2(3.4)	2.8(5.7)	3.3
1.0	0.28	1.9(3.9)	2.4(6.5)	1.9
0.75	0.23	1.7(4.2)	2.1(7.1)	1.3
0.5	0.19	1.4(4.8)	1.8 (8.2)	0.8

Tabela 5.1: Valores de  $M'$  e  $\Lambda$  para o modelo. Os números entre parênteses são os valores para os quarks exóticos quando porém omitidos na equação de evolução. Na última coluna, mostra-se uma estimativa para a massa de  $Z'$ . Todas as massas são dadas em TeV.

Da Eq. (5.1) temos que  $\alpha_X(\mu) \rightarrow \infty$  quando a escala de energia  $\mu$  se aproxima de um valor finito  $\Lambda$ , o que é concomitante de  $\text{sw}^2(\mu)$  crescer com a escala e passar pelo valor 0.25 em um valor finito de  $\mu$ . Na prática, estudaremos, usando a Eq. (5.14), qual é a energia  $\mu = M'$  em que  $\alpha_X(M') = 1$ , isto é, a escala a partir da qual  $\alpha_X$  deixa de ser perturbativa. Invertendo a Eq. (5.14) temos então

$$M' = \mu_{331} \left[ \frac{M_Z}{\mu_{331}} \right]^{\frac{b_1 - 3b_2}{b_X}} e^{\frac{2\pi}{b_X} \left[ \frac{1}{\alpha(M_Z)} (1 - 4\text{sw}^2(M_Z))^{-1} \right]}. \quad (5.17)$$

$\alpha(M_Z) = 1/128$  é a constante de estrutura fina no pólo do  $Z$ , com  $M_Z = 91.2$  GeV. A escala  $M'$  deve ser da mesma ordem de  $\Lambda$  que caracteriza o pólo do tipo de Landau definido como o valor de  $\mu$  em Eq. (5.14) quando  $\frac{1}{\alpha_X(\mu)} = 0$ .

Os resultados são mostrados na Tabela 5.1 para os diferentes valores da escala  $\mu_{331}$ : 2.0, 1.5, 1.0, 0.75 e 0.5 TeV. É também apresentado o limite inferior para a massa do bóson de gauge  $Z'$ , que é dado por

$$M_{z'} \gtrsim 2 \left[ \alpha_2(\mu_{331}) \frac{1 - \text{sw}^2(\mu_{331})}{1 - 4\text{sw}^2(\mu_{331})} \right]^{\frac{1}{2}} \mu_{331}. \quad (5.18)$$

No modelo em que as terceiras componentes dos tripletos de léptons são ocupadas pelo pósitron e seus primos, um sexteto escalar na forma abaixo deve ser adicionado.

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1^0 & h_1^- & h_2^+ \\ h_1^- & H_1^{--} & \sigma_2^0 \\ h_2^+ & \sigma_2^0 & H_2^{++} \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{6}, 0), \quad (5.19)$$

$\mu_{331}$	$\hat{\alpha}_X(\mu_{331})$	$M'$	$\Lambda$	$M_{Z'}(\mu_{331})$
2.0	0.40	3.0(6.3)	4.0(13.9)	4.5
1.5	0.32	2.7(8.0)	3.8(17.7)	3.0
1.0	0.24	2.4(11.3)	3.2(24.8)	1.7
0.75	0.21	2.2(14.4)	2.9(31.5)	1.2
0.5	0.17	1.9(20.1)	2.5 (44.2)	0.7

Tabela 5.2: O mesmo que a Tabela I mas para o modelo com o sexteto.

Nesse caso, por argumentos parecidos ao que usamos acima, para energias  $E \leq \mu_{331}$ , consideramos no setor escalar, três dubletos,  $(\eta^0, \eta_1^-) \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1)$ ,  $(\rho^+, \rho^0) \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2}, +1)$ ; e um triplete não hermitiano  $(H_1^{--}, h_1^-, \sigma_1^0) \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, -2)$ . O que fornece para as Eqs. (5.4) e (5.5)  $N_{DS} = 3$ ,  $N_{TS} = 1$  e  $N_{DF} = N_{TF} = 0$ , dando o seguinte conjunto de coeficientes:

$$(b_1, b_2, b_3) = (49/6, -13/6, -7). \quad (5.20)$$

Novamente evoluindo a Eq. (5.20), obtemos que o valor  $sw^2 = 0.25$  é atingido em  $\mu = 5.7$  TeV como pode ser visto na Fig. 5.1.

Para energias  $E \geq \mu_{331}$ , temos nesse caso que  $b_X = 22$  e  $b_{XJ} = 8$ . Os resultados são mostrados na Tabela 5.2.

Na Tabela 5.1, observa-se que os valores de  $M'$  e  $\Lambda$  decrescem, conforme diminuímos o valor de  $\mu_{331}$ ; porém, eles crescem, se nós omitimos os quarks exóticos na equação de evolução. Os valores máximos de 4.8 TeV e 8.2 TeV são alcançados para  $M'$  e  $\Lambda$  respectivamente, ocorrem para o valor mínimo  $\mu_{331} = 500$  GeV que utilizamos, quando desconsideramos os quarks exóticos.

Para o modelo com o sexteto escalar, vemos da Tabela 5.2 que os valores máximos são 20.1 TeV e 44.2 TeV para  $M'$  e  $\Lambda$  respectivamente, também ocorrem para o valor mínimo  $\mu_{331} = 500$  GeV que utilizamos, e igualmente quando desconsideramos os quarks exóticos.

Os valores na Tabela 5.1 para  $\Lambda$  são menores do que aqueles obtidos na primeira curva da Fig. 5.1 e nas Refs. [100, 101, 102]. Isso acontece porque os graus de liberdade do Modelo 3-3-1 são levados em conta para energias acima de  $\mu_{331}$ . Vemos que os valores de  $M'$  e  $\Lambda$  crescem com o aumento de  $\mu_{331}$ ; porém, a medida que  $\mu_{331}$  vai crescendo a diferença entre essas duas escalas fica cada vez menor até se tornarem iguais. Notamos, contudo, que quando os

quarks exóticos são omitidos da análise, o limite superior perturbativo tem um comportamento diferente e é aumentado significativamente. Isso acontece porque, como dissemos anteriormente, as componentes direitas dos quarks exóticos carregam os maiores valores das cargas  $U(1)_X$  fazendo  $\alpha_X$  evoluir mais rapidamente para um valor não perturbativo, quando comparado com o caso onde apenas as partículas do Modelo Padrão são levadas em conta. Quando os quarks exóticos são desconsiderados, a evolução de  $\alpha_X$  é bem mais lenta. Calculando o valor do pólo de Landau  $\Lambda$  (usando apenas os graus de liberdade ativos abaixo de  $\mu_{331}$ ) com a condição  $sw^2(\Lambda) = 0.25$  na Eq. (5.7), obtemos os valores onde as curvas cruzam a linha horizontal na Fig. 5.1. Assim, como o valor de  $\mu_{331}$ , deve estar abaixo dessas energias estudamos como o limite perturbativo é modificado quando  $0.5 \leq \mu_{331} \leq 2$  TeV.

### 5.3 O caso supersimétrico e a aproximação de 2-loop

Nessa seção, comentaremos brevemente as análises para as versões supersimétricas dos modelos. Para outros aspectos fenomenológicos sobre as construções supersimétricas dos modelos aqui tratados veja Refs. [105].

A construção das versões supersimétricas baseia-se na introdução de campos chamados parceiros supersimétricos dos campos usuais no modelo, com estatística oposta à deles. Na construção, para cada multipleto de férnion deve existir um multipleto escalar correspondente e vice-versa. Os parceiros supersimétricos dos campos de gauge são férnions na representação adjunta, considerando a menor representação para supersimetria. Assim, temos que, por exemplo, para cada termo em  $T_{Ri}(F)$  nas Eqs. (5.3) haverá um novo termo correspondendo ao parceiro supersimétrico.

Desde que cada multipleto de férnion chiral tem duas vezes mais graus de liberdade do que o mesmo multipleto escalar (veja o fator de proporcionalidade entre  $T_{Ri}(F)$  e  $T_{Ri}(S)$  nas Eqs. (5.3)), e os novos férnions na representação adjunta somam-se ao último termo das Eqs. (5.3) de acordo com o termo  $+2/3C_{2i}(G)$ , os coeficientes  $b_{is}$  no caso supersimétrico têm a forma abaixo

$$b_i^{\text{susy}} = \sum_{\text{fermions}} T_{Ri}(F) + \sum_{\text{escalares}} T_{Ri}(S) - 3C_{2i}(G) \quad (5.21)$$

com a contribuição dos parceiros supersimétricos já implicitamente incluída.

$\mu_{331}$	$\hat{\alpha}_X(\mu_{331})$	$M'$	$\Lambda$	$M_{Z'}(\mu_{331})$
2.0	0.47	2.3(2.6)	2.6(3.3)	4.9
1.5	0.35	1.9(2.3)	2.1(2.9)	3.1
1.0	0.26	1.4(1.9)	1.6(2.4)	1.8
0.75	0.22	1.2(1.7)	1.3(2.1)	1.2
0.50	0.18	0.9(1.4)	1.0 (1.8)	0.75

Tabela 5.3: O mesmo que a Tabela I mas para o caso supersimétrico.

Supomos que a escala de quebra de supersimetria, chamada de  $\mu_{SUSY}$ , é a mesma, ou está bem próxima, da escala de quebra de  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$ , ou seja,  $\mu_{SUSY} \approx \mu_{331}$ . De modo que as partículas parceiras supersimétricas começam a ser produzidas e, portanto, atuar de forma efetiva nas equações de grupo de renormalização na mesma escala das novas partículas previstas pelo Modelo 3-3-1.

Além disso, deve-se considerar que, para cancelar as anomalias chirais, o número de multipletos escalares deve ser duplicado. O único efeito da supersimetria para energias abaixo de  $\mu_{331}$  será a duplicação dos multipletos escalares.

Os graus de liberdade ativos em energias  $E < \mu_{331}$  no caso supersimétrico, dão na contagem para as Eqs. (5.4) e (5.5)  $N_{DS} = 4$ ,  $N_{DF} = N_{TF} = N_{TS} = 0$  fornecendo o seguinte conjunto de coeficientes:

$$(b_1, b_2, b_3) = (22/3, -8/3, -7). \quad (5.22)$$

Vemos na Fig. 5.1 que  $sw^2(\Lambda) = 0.25$  quando  $\Lambda \approx 4.8$  TeV.

Para escalas acima de  $\mu_{331}$ , diferente do que fizemos anteriormente, apresentamos o conjunto completo de coeficientes (veja a discussão abaixo):

$$(b_X, b_L, b_3)^{(susy)} = (48, 0, 0), \quad (5.23)$$

$$(b_X, b_L, b_3)_J^{(susy)} = (27, 0, -3). \quad (5.24)$$

Os valores em que o modelo deixa de ser perturbativo e as escalas são dados na Tabela 5.3.

Para o modelo em que a terceira componente do triplete de léptons é ocupada pelo pósitron e possui o sexteto escalar, temos para escalas abaixo de  $\mu_{331}$   $N_{DS} = 6$ ,  $N_{TS} = 2$  e  $N_{DF} = N_{TF} = 0$

$\mu_{331}$	$\hat{\alpha}_X(\mu_{331})$	$M'$	$\Lambda$	$M_{Z'}(\mu_{331})$
2.0	0.34	2.7(3.5)	3.1(4.8)	4.1
1.5	0.28	2.2(3.2)	2.5(4.4)	2.8
1.0	0.22	1.7(2.8)	1.9(3.8)	1.7
0.75	0.19	1.4(2.5)	1.6(3.4)	1.1
0.5	0.17	1.0(2.2)	1.2(3.0)	0.7

Tabela 5.4: O mesmo que a Tabela I, mas para o modelo supersimétrico com o sexteto escalar. fornecendo o seguinte conjunto de coeficientes:

$$(b_1, b_2, b_3) = (22/3, -8/3, -7). \quad (5.25)$$

Vemos na Fig. 5.1 que  $sw^2(\Lambda) = 0.25$  quando  $\Lambda \approx 7.8$  TeV.

Nas escalas acima de  $\mu_{331}$ , os coeficientes serão

$$(b_X, b_L, b_3)^{(\text{susy})} = (42, 5, 0), \quad (5.26)$$

$$(b_X, b_L, b_3)_j^{(\text{susy})} = (27, 0, -3). \quad (5.27)$$

E os valores em que o modelo deixa de ser perturbativo e as escalas são dados na Tabela 5.4.

É interessante observar que, na versão supersimétrica, temos que para escalas de energia acima de  $\mu_{331}$ , as constantes de acoplamento de  $SU(3)_L$  e  $SU(3)_C$  não apresentam dependência com energia na aproximação de 1-loop, pois os respectivos coeficientes em Eq. (5.23) são nulos, isto é,  $b_L = b_3 = 0$ . E assim,

$$\alpha_L(\mu > \mu_{331}) = \text{constante}, \quad (5.28)$$

$$\alpha_3(\mu > \mu_{331}) = \text{constante}. \quad (5.29)$$

O mesmo ocorre para a constante de acoplamento  $\alpha_3$  no modelo com o pósitron na terceira componente no triplete de léptons como é visto em Eq. (5.26). Surge, então, a questão se isso é só um artefato da aproximação de 1-loop e se a característica de liberdade assintótica para o setor da QCD pode ser resgatado na aproximação seguinte. Para responder isso, vamos considerar a evolução das constantes de acoplamento na aproximação de 2-loop, que é ditada pelo conjunto de equações acopladas

$$\mu \frac{d\alpha_i(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{2\pi} \left[ b_i + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^3 b_{ij} \alpha_j(\mu) \right] \alpha_i(\mu)^2, \quad (5.30)$$

onde desprezamos os acoplamentos de Yukawa, desde que, em qualquer caso, a contribuição dominante deles é positiva. A matriz dos coeficientes  $b_{ij}$  é calculada pela expressão geral dada em Ref. [103], que para nosso caso aqui é

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{784}{3} + 12(N_\rho + N_\chi) & 32 + 16(N_\rho + N_\chi) & 160 \\ 4 + 2(N_\rho + N_\chi) & 14 + \frac{17}{3}(N_\rho + N_\chi) & 48 \\ \frac{62}{3} & 24 & 48 \end{pmatrix} \quad (5.31)$$

onde temos  $N_\rho = N_\chi = 2$ , desde que estamos considerando as versões supersimétricas. Vemos que a liberdade assintótica para o setor da QCD é mesmo perdida para altas energias segundo esses modelos, pois as entradas da matriz  $b_{ij}$  são todas positivas.

A perda da liberdade assintótica pode ser considerada como uma previsão dessas versões supersimétricas dos modelos uma vez que esse resultado não depende da escala  $\mu_{331}$ .

## 5.4 Uma solução com um conteúdo mínimo de matéria adicional

Notamos nas sessões anteriores que o problema do limite perturbativo nos Modelos 3-3-1 se deve ao fato de termos uma evolução relativamente rápida para  $sw^2(\mu)$  e  $\alpha_X(\mu)$ . Sendo que este último recebe uma contribuição dominante dos quarks exóticos em razão dos seus graus de liberdade de cor vezes o alto valor do quadrado da carga  $X$  deles. Dessa forma, parte da capacidade preditiva e computacional como, por exemplo, a produção e decaimento da partícula  $Z'$  nessa classe de modelos com um conteúdo mínimo de representação fica comprometida, uma vez que a massa  $M_{Z'}$  está acima do limite perturbativo para a maior parte do intervalo de energias que estarão no alcance dos experimentos num futuro próximo.

Nas Tabelas 5.1, 5.2, 5.3, 5.4 vimos que a teoria de perturbação não pode mais ser aplicada para calcular processos já na escala de poucos TeV. Por exemplo, vemos na Tabela 5.1 que se  $\mu_{331} = 1$  TeV, então para energias  $E \simeq 1.9$  TeV,  $\alpha_X > 1$  e  $M_{Z'} \gtrsim 1.9$  TeV de modo que o modelo perde o caráter perturbativo ainda abaixo da escala de massa do bósons de gauge  $Z'$ . As componentes direitas dos quarks exóticos  $J$  e  $j_m$  têm valor alto da carga  $X$  e, assim, se esses quarks forem desconsiderados, supondo que sejam muito mais pesados que qualquer outra

partícula do modelo, o limite perturbativo seria aumentado para 3.9 TeV. Por outro lado, ter os quarks exóticos pesados significa que suas constantes de acoplamento de Yukawa são grandes, o que traz de volta ao problema perturbativo, ou então que o valor esperado  $\langle \chi^0 \rangle \simeq \mu_{331}$  é grande. Nesse último caso, desde que esse valor esperado é responsável por dar massa a todos os novos férmons e novos bósons de gauge, quase todas as previsões do modelo ficariam fora do alcance experimental. Consequentemente, o interesse fenomenológico é obviamente reduzido. Queremos manter a possibilidade de observação desses quarks dentro do alcance experimental.

Para resolver esse problema, propõe-se um conteúdo de matéria adicional, tornando o tratamento perturbativo aplicável em um intervalo maior nas escalas de energia dos TeV. Veremos que as mais simples representações a serem acionadas às versões mínimas são quatro octetos: três deles de léptons vetoriais e um de campos escalares, predizendo-se então um comportamento decrescente para  $sw^2(\mu)$  num certo intervalo de energia.

Começaremos fazendo a observação de que se, na teoria efetiva  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  o conteúdo de matéria for tal que a constante de acoplamento do fator não abeliano,  $\alpha_2$ , não apresentar a característica de liberdade assintótica, então  $sw^2(\mu)$  pode decrescer para  $\mu \rightarrow \mu_{331}$ . Isso pode ser visto na Eq. (5.7) de onde deduz-se que a condição para que isso aconteça é que

$$\frac{d}{d\mu} \left( \frac{\alpha_2(\mu)}{\alpha_1(\mu)} \right) > 0, \quad (5.32)$$

resultando em

$$b_2 > \tan^2 \theta_W(M_Z) b_1. \quad (5.33)$$

O que implica em  $b_2 > 0.3b_1$ . Satisfazer essa condição requer a introdução de representações não triviais de  $SU(2)_L$  que tenham hiper carga pequena, preferencialmente zero.

As Eqs. (5.4) e (5.4) mostram que multipletos com hiper carga grande leva à direção contrária de satisfazer a condição (5.33). Poderíamos pensar em ter novos isodubletos de léptons vetoriais e/ou de escalares carregando hiper carga zero. Mas uma análise direta mostra que seria necessário pelo menos 8 isodubletos de léptons vetoriais ou então 32 de escalares cujos componentes teriam carga elétrica  $1/2$  e  $-1/2$ .

A solução mais simples seria ter isotriplets exóticos, preferencialmente de férmons. Das Eqs. (5.4) e (5.4) conclui-se que seria necessário no mínimo três isotriplets de léptons vetoriais

com  $Y = 0$ . Eles teriam a seguinte forma

$$\vec{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}t^0 & t^+ \\ t^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}t^0 \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0). \quad (5.34)$$

Compatibilidade com o verificado comportamento de liberdade assintótica da QCD nas energias até agora acessíveis sugerem que esses multipletos sejam singletos de cor. Esses tripletos se acoplam com a matéria usual como veremos adiante. Eles podem ter consequências interessantes como, por exemplo, na geração de massa para os neutrinos, mecanismo see-saw, sem apresentar problemas cosmológicos se eles pertencerem a escala eletrofraca, de acordo com o estudo desses aspectos fenomenológicos na Ref. [106].

Consistência com o decaimento da partícula  $Z^0$  implica que a massa dos componentes desses tripletos deve ser maior do que  $M_{Z^0}/2$ .

A decomposição das duas representações de menor dimensão após as fundamentais de  $SU(3)_L$ , com carga de  $U(1)_X$  zero, sobre o grupo  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  tem a seguinte forma:

$$\mathbf{6} = \mathbf{3}_{-2} \oplus \mathbf{2}_1 \oplus \mathbf{1}_4,$$

$$\mathbf{8} = \mathbf{3}_0 \oplus \mathbf{2}_{-3} \oplus \mathbf{2}_3 \oplus \mathbf{1}_0,$$

onde os subíndices referem-se ao valor da hiper carga,  $Y$ . Observe que o sexteto tem um isotripleto com  $Y^2 = 2$  que poderia cumprir com o papel, porém ele tem, também, um isosingleto com  $Y^2 = 16$ . Esse isosingleto poderia ser suposto pesado e fora do espectro em energias abaixo de  $\mu_{331}$ . Queremos evitar uma suposição assim. Seriam necessários três sextetos de léptons vetoriais, se as componentes com  $Y^2 = 16$  fossem pesadas, junto de um sexto escalar para ajustar as massas. Já o octeto possui a vantagem de ter um isosingleto e um isotripleto ambos com hiper carga nula que, portanto, não contribuem para o coeficiente  $b_1$ . Os dois isodoubletos com  $Y^2 = 9$  podem desacoplar do espectro de baixa energia se um octeto de campos escalares faz-se presente, e condensando na escala  $\mu_{331}$  como discutiremos abaixo. Por essa razão, vamos considerar aqui léptons vetoriais exóticos em três octetos uma vez que eles dão a solução mais simples. Eles têm a forma

$$\Xi_a = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}t_a^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\lambda_a^0 & t_a^+ & \delta_a^- \\ t_a^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}t_a^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\lambda_a^0 & \delta_a^{--} \\ \xi_a^+ & \xi_a^{++} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\lambda_a^0 \end{pmatrix} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{8}, 0) \quad (5.35)$$

com  $a = 1, 2, 3$ .

Deve ser dito que essas representações não introduzem nenhuma anomalia nova uma vez que são do tipo vetorial.

Diferentemente das construções chirais usuais, a invariância de gauge não pode proibir termos iniciais de massa para campos nas representações acima, onde todas as componentes espinoriais de um dado campo de matéria pertencem a um mesmo multiplet, ou seja, são permitidos termos de massa do tipo

$$M_{ab} \text{Tr} \overline{\Xi}_a \Xi_b \quad (5.36)$$

na Lagrangiana em sua fase simétrica.

Para satisfazer a condição em Eq. (5.33), é necessário então que os léptons de  $Y^2 = 9$  contidos nos isodoubletos  $\delta = (\delta^-, \delta^{--})^T$  e  $\xi = (\xi^{++}, \xi^+)^T$  em Eq. (5.35) devem estar desacoplados das energias abaixo de  $\mu_{331}$ . Isso pode ser obtido com escalares em uma representação de octeto. Chamando essa representação de  $\Sigma$ ,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\phi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\varphi^0 & \phi^+ & \varphi_1^- \\ \phi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}}\phi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}}\varphi^0 & \varphi_1^{--} \\ \varphi_2^+ & \varphi_2^{++} & -\frac{2}{\sqrt{6}}\varphi^0 \end{pmatrix} \sim (1, 8, 0), \quad (5.37)$$

veremos como o desacoplamento ocorre analisando o espectro de massa para esses novos léptons.

As interações de Yukawa possíveis no setor de léptons são agora

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y = & H_{ab}\epsilon_{ijk}\overline{(\Psi_{iaL})^c}\Psi_{jbL}\eta_k + \overline{\Psi}_{aL}(G^l_{ab}l_{bR}\rho + G^E_{ab}E_{bR}\chi) \\ & + G^\Xi_{ab}\overline{\Psi}_{aL}\Xi_b\eta + \frac{1}{2}\text{Tr}[\overline{\Xi}_a(A_{ab}\Xi_b\Sigma + B_{ab}\Sigma\Xi_b + M_{ab}\Xi_b)] + H.c., \end{aligned} \quad (5.38)$$

nos índices repetidos está implícita uma soma.  $H_{ab}$  é uma matriz antisimétrica pela estatística de Fermi,  $G^l_{ab}$ ,  $G^E_{ab}$ ,  $G^\Xi_{ab}$  matrizes gerais complexas e  $A_{ab}$ ,  $B_{ab}$ ,  $M_{ab}$  matrizes reais simétricas que serão consideradas como sendo diagonais por simplicidade.

Os isodoubletos  $Y^2 = 9$  em  $\Xi_a$  desacoplam quando  $\langle \Sigma \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\langle \varphi^0 \rangle \text{diag}(1, 1, -2)$ , e as seguintes relações são satisfeitas

$$(A_{ab} + B_{ab})\frac{\langle \varphi^0 \rangle}{\sqrt{6}} + M_{ab} \simeq m_{SM},$$

$$m_{SM} - 3A_{ab}\frac{\langle \varphi^0 \rangle}{\sqrt{6}} \simeq \mu_{331},$$

$$m_{SM} - 3B_{ab} \frac{\langle \varphi^0 \rangle}{\sqrt{6}} \simeq \mu_{331}. \quad (5.39)$$

Com  $m_{SM}$ , sendo uma escala de massa pertencendo à escala de energia de  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ . A primeira relação acima deixa os campos nos isotriplets  $\vec{T}_a$  em  $\Xi_a$  com massas apropriadas abaixo de  $\mu_{331}$ . As duas últimas relações em Eq. (5.39) garantem que a massa dos componentes dos isodoubletos  $\delta$  e  $\xi$  fiquem acima da escala do Modelo Padrão, pois  $\langle \varphi^0 \rangle \simeq \mu_{331}$ , uma vez que  $\langle \Sigma \rangle$  quebra o grupo da simetria eletrofraca  $SU(3)_L$  para o grupo  $SU(2)_L$ . Os isosingletos  $\lambda_a^0$  nos octetos  $\Xi_a$  têm massa da ordem de  $m_{\lambda_a^0} \simeq M_{aa} - m_{SM}$  que é da mesma ordem de  $\mu_{331}$ , de acordo com as Eqs. (5.39). A condensação de  $\phi^0$  em  $\Sigma$  é severamente restringida pelo parâmetro  $\rho_0$  relacionando as massas dos bósons de gauge  $W^\pm$  e  $Z$ .

Um estudo mais completo poderia ser feito nos parâmetros da matriz de massa, mas essa simples análise acima é suficiente para mostrar que de fato os campos com hypercarga grande podem ser pesados. Assim, somente os tripletos de léptons exóticos junto dos campos conhecidos é que contribuiriam para as equações do grupo de renormalização para energias  $E < \mu_{331}$ .

No último estágio de quebra de simetria, quando o grupo do Modelo Padrão se reduz ao fator eletromagnético,  $U(1)_{em}$ , vemos que há uma mistura entre os léptons conhecidos e os exóticos devido ao termo de interação  $G_{ab}^{\Xi} \bar{\Psi}_{aL} \Xi_b \eta$  na Eq. (5.38); no entanto, essa mistura poderia ser eliminada por algum tipo de simetria discreta.

A seguir, veremos como o limite perturbativo é melhorado com essas novas representações.

#### 5.4.1 O limite perturbativo com as novas representações

Com três octetos leptônicos de  $SU(3)_L$ ,  $\Xi_a$ , ( $a = 1, 2, 3$ ), como em (5.35) teremos então três isotriplets tipo (5.34) em energias  $E < \mu_{331}$ , de modo que  $N_{TF} = 3$  nas Eqs. (5.4) e (5.5). Desde que a contribuição dos escalares é pequena frente aos fermions, podemos supor que os campos em  $\Sigma$ , Eq. (5.37), contribuem com um isotripleto de  $Y^2 = 0$  e dois isodoubletos de  $Y^2 = 9$ . E das Eqs. (5.4) and (5.5) resulta que os coeficientes passam a ser

$$(b_1, b_2) = (10, 6). \quad (5.40)$$

O que satisfaz a condição 5.33.

A evolução de  $\sin^2 \theta_W(\mu)$  tem então um comportamento decrescente conforme a energia é aumentada até escala  $\mu_{331}$  como mostramos na Figura 5.2 (novamente para referência futura nós também mostramos as curvas no modelo com o sexteto escalar).

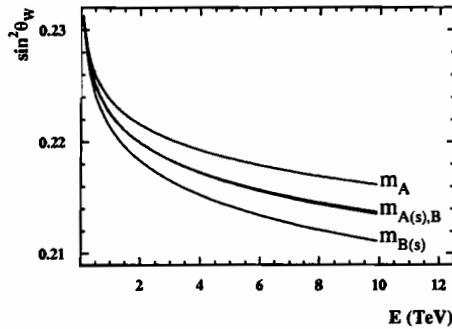


Figura 5.2: Evolução do ângulo de mistura eletrofraco para os modelos estendidos em energias  $E \leq \mu_{331}$ . Modelo A,  $m_A$ , com apenas três tripletos escalares, e Modelo B,  $m_B$ , com um sexteto escalar. (s) significa que os escalares com  $Y^2 = 9$  são desprezados. Os modelos  $m_A(s)$  e  $m_B$  têm curvas curvas degeneradas.

Da Eq. (5.3) temos que para energias  $E > \mu_{331}$ ,  $b_X = 26$ .

Dessa forma, o limite perturbativo é bastante melhorado, tornando o modelo muito mais viável com a adição das representações octeto, por exemplo, na Eq. (5.17) se  $\mu_{331} = 1$  TeV, a escala na qual a teoria de perturbações não pode ser mais aplicada é acima de  $M' = 16.8$  TeV; para  $\mu_{331} = 3$  TeV tem-se então  $M' = 70.6$  TeV. Ao se desconsiderar os isodoubletos escalares com  $Y^2 = 9$ , temos que  $(b_1, b_2) = (7, 17/3)$  e o limite perturbativo torna-se melhor ainda, pois se  $\mu_{331} = 1$  TeV, temos que  $M' = 20.2$  TeV; para  $\mu_{331} = 3$  TeV temos que  $M' = 92.3$  TeV.

### • O modelo com o sexteto escalar

Podemos repetir a mesma análise para o modelo onde o elétron e seus primos ocupam as terceiras componentes dos tripletos de léptons. Nesse caso, um sexteto escalar  $S \sim (\mathbf{1}, \mathbf{6}, 0)$  como na Eq. (5.19) é adicionado para quebrar a degenerescência de massa entre os léptons carregados conhecidos.

E as interações de Yukawa são

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^s &= H_{ab}\epsilon_{ijk}\overline{(\Psi_{iaL})^c}\Psi_{jbL}\eta_k + G^{\Psi}_{ab}\overline{\Psi}_{aL}S(\Psi_{ibL})^c + G^{\Xi}_{ab}\overline{\Psi}_{aL}\Xi_b\eta + F_{ab}\epsilon_{ijk}\overline{\Psi}_{iaL}(S^\dagger\Xi_b)_{jk} \\ &+ \frac{1}{2}\text{Tr}[\Xi_a(A_{ab}\Xi_b\Sigma + B_{ab}\Sigma\Xi_b + M_{ab}\Xi_b)] + H.c. \end{aligned} \quad (5.41)$$

O desacoplamento do isodoubletos com  $Y^2 = 9$  acontece da mesma forma anterior. A mistura entre os léptons conhecidos e exóticos se dá através das interações  $G^{\Xi}_{ab}\overline{\Psi}_{aL}\Xi_b\eta$  e  $F_{ab}\epsilon_{ijk}\overline{\Psi}_{iaL}(S^\dagger\Xi_b)_{jk}$  nesse caso.

Sob  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , essa versão do modelo tem além dos campos do modelo anterior os seguintes multipletos advindos do sexteto escalar  $S$  em Eq. (5.19): um isodoubleto  $(h_2^+, \sigma_2^0) \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2}, +1)$ , um isotripleto não hermitiano  $(H_1^{--}, h_1^-, \sigma_1^0) \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, -2)$ , e um isosingleto  $H_2^{++} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, +2)$ . Assim, para energias  $E < \mu_{331}$ , nós vamos considerar três isodoubletos escalares com  $Y^2 = 1$ , dois isodoubletos de escalares com  $Y^2 = 9$  e dois isotripletos, um deles advindo do sexteto e com  $Y^2 = 4$ , e outro com  $Y^2 = 0$  advindo do octeto escalar. A inclusão dos demais isosingletos escalares não alteram qualitativamente os resultados; portanto, teremos para as Eqs. (5.4) e (5.5)  $N_S = 3$  com  $Y^2 = 1$ ,  $N_S = 2$  com  $Y^2 = 9$ ,  $N_{TS} = 1$  com  $Y^2 = 4$ ,  $N_{TS} = 1$  com  $Y^2 = 0$  e  $N_{TF} = 3$  com  $Y^2 = 0$ . E os coeficientes são então nesse caso:

$$(b_1, b_2) = (64/6, 41/6), \quad (5.42)$$

o que satisfaz a condição (5.33).

Como não há componentes direitas de léptons carregados temos agora que  $b_X = 22$ . Refazendo a mesma análise anterior temos que se  $\mu_{331} = 1$  TeV então  $M' = 32.4$  TeV; se  $\mu_{331} = 3$  TeV então  $M' = 155.0$  TeV. Desconsiderando os isodoubletos escalares com  $Y^2 = 9$  advindos do octeto, o limite perturbativo é melhorado pois o valor de  $b_1$  é diminuído.

## 5.5 Desacoplando os escalares das energias $E < \mu_{331}$

Admitimos que alguns dos escalares faziam parte do espectro em energias  $E < \mu_{331}$  de modo que eles estariam ativos e contribuindo para a evolução de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ . Pode ser, no entanto, que todos os escalares estejam com massa acima de  $\mu_{331}$  já que todos os multipletos escalares acoplam-se diretamente com  $\Sigma$ , pois o potencial escalar para os três tripletos  $\eta, \rho, \chi$  e o octeto

é

$$\begin{aligned} V &= V_T + m_3 \eta^\dagger \Sigma \eta + m_4 \rho^\dagger \Sigma \rho + m_5 \chi^\dagger \Sigma \chi + \text{Tr}[\Sigma^2 (\lambda_1 \Sigma^2 + m_1 \Sigma - m_2^2)] + \lambda_2 (\text{Tr}[\Sigma^2])^2 \\ &+ \text{Tr}[\Sigma^2] (\lambda_3 \eta^\dagger \eta + \lambda_4 \rho^\dagger \rho + \lambda_5 \chi^\dagger \chi). \end{aligned} \quad (5.43)$$

$V_T$  representa a coleção de todos os termos envolvendo somente  $\eta$ ,  $\rho$  e  $\chi$ <sup>1</sup>. Os termos em  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  e  $\lambda_5$  recebem todos uma contribuição de massa da ordem de  $\langle \varphi^0 \rangle^2$  para os tripletos escalares, de modo que pode ser que nenhum dos campos neles permaneça com massa abaixo de  $\mu_{331}$ . De fato, o único estado escalar com massa que poderia estar livre das contribuições vindas de  $\langle \Sigma \rangle$ , seria o correspondente ao pseudoescalar neutro, já que ele provém de uma combinação da parte imaginária dos campos escalares. No entanto, já nos modelos mínimos observa-se que a massa desse pseudoescalar é proporcional a  $\langle \chi^0 \rangle \approx \mu_{331}$ . Isso sugere que os escalares deveriam ser todos pesados; todavia, uma análise mais completa do espectro de massa dos escalares deveria ser feita para confirmar isso. De qualquer forma, a análise do grupo de renormalização não é modificada qualitativamente se os escalares forem todos pesados pois como dissemos, são os férmiões quem dão a contribuição principal.

Resumindo o estudo das duas últimas sessões, observamos que é possível evadir o limite perturbativo adicionado representações octetos nos Modelos 3-3-1, tornando-os computacionalmente viáveis na escala de energia dos TeV. O efeito resultante dessas representações é fazer com que a evolução do ângulo de mistura do setor eletrofraco,  $\theta_W$ , seja tal que  $s w^2$  decresce com o aumento da escala de energia  $E$  até que se tenha  $E = \mu_{331}$ , caracterizando o surgimento da nova simetria eletrofraca  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$ . Esse comportamento está sujeito a um teste direto que pode excluir os modelos estendidos propostos aqui. A evolução para o ângulo eletrofraco permite que a constante acoplamento do fator  $U(1)_X$ ,  $\alpha_X$ , tenha um valor inicial menor do que ela teria nos modelos mínimos. A partir desse ponto,  $s w^2$  começaria a crescer sendo que o valor seria alcançado acima de dezenas de TeV.

Representações diferentes dos octetos poderiam realizar a evolução desejada para resolver o problema perturbativo; porém, os octetos oferecem a forma mais simples para desacoplar, em energias baixas, os isodoubletos com o quadrado da hipercharge grande.

---

<sup>1</sup>Vale a pena observar que não é possível ter uma simetria do tipo  $\Sigma \rightarrow -\Sigma$  já que ela não permite o acoplamento entre  $\Sigma$  e  $\Xi_a$ 's, comprometendo assim o mecanismo para desacoplar os isodoubletos de léptons  $\delta$  e  $\xi$  de hipercharge alta.

A condensação do octeto escalar  $\Sigma$  não tem nenhuma influência na geração de massa para o bóson de gauge  $Z'$  já que, como o fóton e o bóson  $Z^0$ , ele é uma combinação linear das entradas diagonais da matriz dos bósons de gauge em Eq. (2.32). A massa dos bósons de gauge  $W^\pm$  também não é afetada por essa condensação; contudo, ela contribui para a geração de massa dos bósons de gauge exóticos carregados  $V^\pm$  e  $U^{\pm\pm}$ , deixando a diferença de massa quadrática  $\Delta M^2 = M_{V^\pm}^2 - M_{U^{\pm\pm}}^2$  entre eles inalterada, de modo que a análise na Seção 2.2 continuaria válida.

# Capítulo 6

## Discussão final

As extensões 3-3-1 do Modelo Padrão são um arcabouço teórico interessante para uma nova física na escala de energias dos TeV. Uma das principais motivações para se considerar os modelos 3-3-1 é que eles são resultantes de uma construção que restringe fortemente o conteúdo de matéria fermiônica na estrutura de famílias chirais. Em geral permitem-se números de famílias que sejam múltiplos de três. Novos bósons de gauge são previstos contendo interações bastante específicas com os léptons, de acordo com a definição do operador de carga elétrica.

Estudamos duas construções dos modelos com a simetria  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$ : a primeira delas, a qual chamamos de Modelos 3-3-1 requer a existência de novos léptons e quarks, completando as representações do grupo  $SU(3)_L$ . Os novos quarks têm cargas elétricas exóticas. Nessa versão, temos novos bósons de gauge intermediando as interações fracas, sendo dois deles com uma carga,  $V^\pm$ , dois deles duplamente carregados,  $U^{\pm\pm}$  e um real neutro  $Z'$ . É possível evitar a introdução dos léptons exóticos supondo que as terceiras componentes dos tripletos de léptons são ocupadas pelo elétron e seus primos. Nessa configuração há a descrição de processos, intermediados pelos bósons de gauge duplamente carregados, violando o número leptônico de família. Uma característica geral dessas construções é que elas colocam um limite superior para o ângulo de mistura eletrofraco, isto é, elas dão que  $sw^2 < 0.25$ ; a segunda construção acomoda os neutrinos direitos nas terceiras componentes dos tripletos de léptons. Nesse caso, o ângulo de mistura eletrofraco não é tão vinculado como na configuração anterior, sendo apenas tal que  $sw^2 < 0.75$ . E diferente da construção anterior ao invés de bósons vetoriais duplamente carregados, temos dois bósons de gauge neutros não hermitianos,  $U^0$  e  $U^{0\dagger}$ .

Em ambas as construções, prevê-se que o módulo da diferença de massa quadrática dos novos bósons de gauge não hermitianos é tal que  $\Delta M^2 = |M_u^2 - M_v^2| = \frac{q^2}{4} |v_\rho^2 - v_\eta^2| < M_{w^\pm}^2$ . A princípio, os modelos não indicam qual dos novos bósons de gauge não hermitianos é o mais pesado. Supondo que a previsão  $\rho_0 = 1$  do Modelo Padrão em nível de árvore deva ser mantida para as extensões aqui apresentadas vimos, por exemplo, que no Modelo 3-3-1  $V^\pm$  é o novo bósons de gauge não hermitiano mais pesado e que as duas escalas,  $v_\eta$  e  $v_\rho$ , que quebram a simetria do subgrupo  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  ficam determinadas. Justifica-se a suposição pelo fato que as últimas medidas do parâmetro  $\rho_0$  têm-se aproximado ainda mais do valor da unidade.

Vimos nesse trabalho que as extensões 3-3-1 podem acomodar a simetria  $U(1)_{PQ}$  de Peccei-Quinn tornando a solução do problema da violação CP forte natural, isto é, sem que essa simetria precise ser imposta. Isso foi feito com a introdução de simetrias discretas,  $Z_N$ , que faziam com que  $U(1)_{PQ}$  surgisse automaticamente. As simetrias  $Z_N$  têm o papel de proteger a solução com o áxion contra os efeitos gravitacionais, que poderiam desestabilizar a massa do áxion e principalmente o parâmetro  $\theta_{eff}$  que está mais exposto às correções gravitacionais, devido a experiência direta limitar esse parâmetro como tendo um valor extremamente pequeno. Os operadores efetivos não renormalizáveis suprimidos pela massa de Planck e que são perigosos por levarem a correções para  $\theta_{eff}$ , acima do limite experimental são supostamente suprimidos pela simetrias discretas que devem ter uma origem em um grupo local de gauge.

Para os Modelos 3-3-1, apresentamos duas configurações permitindo a proteção contra os efeitos gravitacionais para qualquer valor da escala,  $f_a$ , da quebra da simetria  $U(1)_{PQ}$  no intervalo permitido. Uma delas com a simetria  $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X \otimes Z_{13} \otimes Z_2$ , onde a conservação do pronto número leptônico também é automática. E outra, com a simetria  $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X \otimes Z_{13}$ , cuja simetria de número leptônico é explicitamente violada. Nessa última configuração, temos a geração de massa grande, na escala da quebra de simetria  $U(1)_{PQ}$ , para neutrinos direitos ligando assim a solução do áxion para o problema de violação CP forte com a geração de uma massa de Majorana pequena para os neutrinos ativos, esquerdos, através do usual mecanismo see-saw. Adicionalmente, conseguimos mostrar que a carga elétrica está também quantizada nesse modelo; isto é, não há nenhuma arbitrariedade na escolha das cargas  $X$  do fator abeliano  $U(1)_X$ . Veja Apêndice B.

Para os Modelos 3-3-1 com neutrinos direitos, apresentamos uma configuração na forma  $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X \otimes Z_{11} \otimes Z_2$ , que, a princípio, permitia a estabilização da solução do pro-

blema da violação CP forte para escalas  $f_a \leq 10^{10}$ . Além da simetria  $U(1)_{PQ}$ , obtivemos também nesse modelo que o número leptônico surgia automaticamente como consequência das demais simetrias. Tanto esse modelo quanto o Modelo 3-3-1 que tratamos primeiro estão livres do problema de domínio de parede, o que significando que, após a condensação dos campos escalares, não existem vácuos degenerados acarretando em problemas cosmológicos. Os acoplamentos do áxion com o fóton foram também calculados e estão de acordo com a experiência em ambos os modelos.

Devemos dizer algo sobre as simetrias discretas que ainda não foi possível de mostrar: isso diz respeito ao cancelamento das anomalias para simetrias discretas. De fato, existem condições para estabelecer o cancelamento das anomalias que possivelmente poderiam ser geradas pela simetria discretas supondo que essas têm origem em um grupo local [73]. A configuração para os grupos discretos que utilizamos aqui não satisfazem as condições para o cancelamento dessas anomalias à primeira vista. No entanto, não foi possível provar que não existe nenhuma outra configuração equivalente a essas que poderiam cumprir com as condições para o cancelamento das anomalias. Satisfazer essas condições quando se tem um grupo discreto grande é uma tarefa difícil. Deixaremos isso como um problema em aberto.

Gostaríamos de mencionar que a utilização de simetrias discretas como as que usamos aqui tem sido feita no contexto do grupo de simetria do Modelo Padrão, em uma construção com a solução tipo áxion estabilizada [107], onde as constantes de acoplamento unificam em uma escala de energia da ordem de  $10^{13}$  GeV [108]. O que seria bastante próximo a da quebra de  $U(1)_{PQ}$ . Temos assim outra justificativa para a introdução dessa nova escala. As simetrias discretas proibiam operadores não renormalizáveis de dimensão baixa que violam o número bariônico; consequentemente, a desintegração a rápida do próton é suprimida também.

Voltando ao Modelo 3-3-1, mostramos também uma maneira pela qual a condensação dinâmica do singleto escalar pode vincular a quebra da simetria no setor eletrofraco. Vimos que o mecanismo de Coleman-Weinberg aplicado inicialmente no singleto escalar gera a condensação deste. Com a suposição de que essa condensação ocorre em uma escala muito alta e que as transições para a fase quebrada do setor eletrofraco ocorreu, portanto, muito depois e de forma independente, obtivemos uma redução na arbitrariedade da condensação dos tripletos escalares. O resultado foi que a condensação das componentes neutras dos tripletos estão todas vinculadas. Desse modo, ao admitirmos a condensação de uma dessas componentes,

digamos  $\chi^0$ , então, as demais componentes neutras devem necessariamente condensar, tornando o mecanismo de quebra espontânea de simetria mais consistente.

Por fim, tratamos do limite perturbativo dos Modelos 3-3-1. Estudamos através da evolução da constante de acoplamento  $\alpha_X$  do fator abeliano  $U(1)_X$  deixaria de ter um valor perturbativo, isto é, menor do que um, quando a escala  $\mu_{331}$  é variada. Fizemos isso para duas versões dentro dessa mesma classe de modelos: as versões com e sem léptons exóticos; considerando também as respectivas versões supersimetrizadas.

Os limites perturbativos, em geral, estão dentro de um intervalo de poucos TeV, sendo que o valor máximo até onde a teoria de perturbações pode ser utilizada está em torno de 3 TeV para o modelo com o sexteto escalar. A evolução rápida da constante de acoplamento  $\alpha_X$  se dá por causa do alto valor das cargas  $X$  dos quarks exóticos como pode ser visto, quando omitimos essas partículas, supondo que elas são as mais pesadas do modelo, nas equações de evolução que indicaram um aumento no limite perturbativo.

Para deixar o modelo tratável do ponto de vista da teoria de perturbações propusemos a introdução de um conteúdo de matéria adicional. As representações mais sugestivas e simples para que o limite perturbativo possa ser alargado são férmons na representação adjunta.

Vimos, então, que a evolução de  $sw^2$  é tal que esse parâmetro decresce com o aumento de energia na escala de  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , com os novos férmons, o que deixa os quarks exóticos e também o bóson de gauge  $Z'$  previsto pelos modelos tratáveis perturbativamente até as escalas de até dezenas de TeV, tornando os modelos nessa classe ainda mais atrativos do ponto de vista fenomenológico nas energias que serão alcançadas nos próximos aceleradores.

Esperamos que num futuro breve, novos resultados experimentais possam confrontar com as extensões do Modelo Padrão que apresentamos nesse trabalho. Sejam eles por observação ou não do áxion. Ou, ainda na produção de novos estados nos aceleradores de partículas. Muito provavelmente, as extensões 3-3-1 poderão ser confirmadas ou descartadas frente a novos dados experimentais.

# Apêndice A

## Representações

As matrizes geradoras da álgebra de SU(3) que utilizamos nesse trabalho são dadas pela forma padrão de Gell-Mann. Elas são:

$$\begin{aligned} T_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & T_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & T_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ T_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & T_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & T_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ T_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & T_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

## Apêndice B

# Quantização da carga elétrica no Modelo 331 com o singuleto do áxion

Vamos mostrar aqui a quantização da carga elétrica para o Modelo 331 com a simetria discreta em Eq. (3.27).

O operador de carga elétrica, que define o modelo, necessariamente, envolve uma parte vinda do fator abeliano  $U(1)_X$ . As cargas  $X$  do conteúdo de matéria do modelo são, a princípio, arbitrárias. Mostrar que existe a quantização da carga elétrica significa que a carga  $X$  de cada multiplet está relacionada com a respectiva carga de um único multiplet, sem necessidade da definição de nenhuma carga a priori. Para ver como isso deve se dar, escrevemos o operador de carga elétrica na seguinte forma:

$$Q = T^3 - \sqrt{3}T^8 + q_X X I. \quad (\text{B.1})$$

$q_X$  deverá ser determinado como o inverso da carga de um único campo, dando assim sem nenhuma ambiguidade o valor de  $Q$  para cada campo. Adicionalmente, é feita uma hipótese sobre a geração de massa para os campos através da quebra e espontânea de simetria. Um espectro de massa consistente deve ser gerado pela condensação de campos escalares.

Deixando arbitrárias as cargas  $X$  para os fermions nas representações do modelo, o conteúdo fermiônico que completam as representações junto dos graus de liberdade desses campos são então

$$\Psi_{aL}^T = (\nu_a, l_a, E_a)_L^T \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, X_{\Psi_a}),$$

$$\nu_{aR} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, X_{\nu_a}); \quad l_{aR} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, X_{l_a}); \quad E_{aR} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, X_{E_a});$$

$$Q_{mL}^T = (d_m, u_m, j_m)_L^T \sim (\mathbf{3}, \mathbf{3}^*, X_{Q_m}), \quad Q_{3L}^T = (u_3, d_3, J)_L^T \sim (\mathbf{3}, \mathbf{3}, X_{Q_3}),$$

$$u_{\alpha R} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, X_{u_\alpha}), \quad d_{\alpha R} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, X_{d_\alpha}),$$

$$J_R \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, X_J), \quad j_{mR} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, X_{j_m}). \quad (\text{B.2})$$

O conjunto de multipletos escalares mínimo que pode gerar massa para esses campos e para parte dos bósons de gauge, admitindo que neutrinos são partículas de Majorana, é

$$\eta \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, X_\eta), \quad \rho \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, X_\rho), \quad \chi \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, X_\chi), \quad \phi \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, X_\phi). \quad (\text{B.3})$$

O valor esperado no vácuo desses multipletos deve ter a seguinte forma:

$$\langle \eta \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_\eta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \rho \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_\rho \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \chi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_\chi \end{pmatrix}, \quad \langle \phi \rangle = \frac{f_a}{\sqrt{2}}. \quad (\text{B.4})$$

A simetria discreta em Eq. (3.27) determina a Langrangiana de Yukawa, incluindo o singuleto do áxion, que com a estrutura de vácuo acima, gera massa para todos os férmons.

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^{total} &= G^\nu_{ab} \overline{(\Psi)}_{aL} \nu_{bR} \eta + G^l_{ab} \overline{(\Psi)}_{aL} l_{bR} \rho + G^E_{ab} \overline{(\Psi)}_{aL} E_{bR} \chi \\ &+ \overline{Q}_{iL} (F_{ia} u_{\alpha R} \rho^* + \tilde{F}_{ia} d_{\alpha R} \eta^*) + \overline{Q}_{3L} (G_a u_{\alpha R} \eta + \tilde{G}_a d_{\alpha R} \rho) \\ &+ \lambda' \overline{Q}_{3L} J'_{1R} \chi + \lambda_{im}^j \overline{Q}_{iL} j_{mR} \chi^* + \frac{\lambda_{\alpha\beta}}{2} \phi^* \overline{(\nu_{\alpha R})^c} \nu_{\beta R} + H.c. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

A conservação da carga elétrica significa que o vácuo é aniquilado pelo operador  $Q$  em Eq. (B.1), ou seja,

$$Q\langle \varphi \rangle = 0 \quad (\text{B.6})$$

com  $\varphi = \eta, \rho, \chi, \phi$ . Resulta que o coeficiente de normalização  $q_X$  e as cargas  $X$  dos escalares são tais que

$$q_X = \frac{1}{X_\rho}, \quad X_\eta = X_\phi = 0, \quad X_\rho = -X_\chi. \quad (\text{B.7})$$

A Langrangiana de Yukawa em Eq. (B.5) fornece os vínculos a nível clássico sobre as cargas  $X$  dos férmiões

$$\begin{aligned} X_{\Psi_a} &= X_{\nu_b}, & X_{Q_i} &= X_{u_\alpha} - X_\rho, & X_{Q_3} &= X_{u_\alpha}, \\ X_{\Psi_a} &= X_{l_b} + X_\rho, & X_{Q_i} &= X_{d_\alpha}, & X_{Q_3} &= X_{d_\alpha} + X_\rho, \\ X_{\Psi_a} &= X_{E_b} - X_\rho, & X_{Q_i} &= X_{j_m} + X_\rho, & X_{Q_3} &= X_J - X_\rho, \\ X_{\nu_a} + X_{\nu_b} &= 0. \end{aligned} \tag{B.8}$$

Sendo essas relações válidas para qualquer  $a, b, \alpha, i, m$  tem-se ao fim que

$$\begin{aligned} X_{\Psi_a} = X_{\nu_a} &= 0, & X_{Q_i} &= X_Q, & X_{j_m} &= X_Q - X_\rho, \\ X_{l_b} &= -X_\rho, & X_{d_\alpha} &= X_Q, & X_J &= X_Q + 2X_\rho, \\ X_{E_b} &= X_\rho, & X_{u_\alpha} &= X_Q + X_\rho, & X_{Q_3} &= X_Q + X_\rho. \end{aligned} \tag{B.9}$$

E assim, as cargas de todos os multipletos são escritas em termos das cargas de dois multipletos,  $X_\rho$  e  $X_Q$ , tornando arbitrária a atribuição de cargas em nível clássico. Para eliminar essa arbitrariedade e mostrar que, de fato, as cargas estão quantizadas, é necessário, portanto, uma relação entre  $X_\rho$  e  $X_Q$ . Lança-se mão então dos vínculos quânticos que são as condições para cancelamento de anomalias, Eqs. (2.7), (2.9), e (2.10), envolvendo o fator abeliano  $U(1)_X$  esperando que elas possam oferecer pelo menos uma relação não trivial entre as cargas. Substituindo as cargas em Eq. (B.9), verifica-se que Eqs. (2.7) e (2.10) são trivialmente satisfeitas, e não oferecem, portanto, nenhuma informação. Porém, a Eq. (2.9) fornece a relação que faltava dando

$$[SU(3)_L]^2 U(1)_X : \quad \text{Tr}(\{T^a, T^b\}X) = 0 \rightarrow X_Q = -\frac{1}{3}X_\rho. \tag{B.10}$$

Isso elimina qualquer liberdade na atribuição de cargas  $X$ , o que mostra que a carga elétrica é quantizada no modelo e as cargas dos léptons e quarks conhecidos são reproduzidas corretamente como pode-se verificar substituindo a relação acima em Eq. (B.9).

# Bibliografia

- [1] Para uma organização cronológica dos avanços experimentais e teóricos cruciais veja V. V. Ezhela et al., "Particle Physics: One Hundred Years of Discoveries : An Annotated Chronological Bibliography", ed. AIP Press, 1996.
- [2] F. J. Hasert et al., Phys. Lett. **46B**, (1973) 121; F. J. Hasert et al., Phys. Lett. **46B**, (1973) 138; Nucl. Phys. **B73**, (1974) 1; A. Benvenuti et al., Phys. Rev. Lett. **32**, (1974) 800;
- [3] J. J. Aubert et al., Phys. Rev. Lett. **33**, (1974) 1404; J. E. Augustin et al., Phys. Rev. Lett. **33**, (1974) 1406;
- [4] M. Perl et al., Phys. Rev. Lett. **35**, (1975) 1489; Phys. Lett. **63B**, (1976) 466; Phys. Lett. **70B**, (1977) 487;
- [5] N. Cabibbo, Phys. Rev. Lett. **10**, 531 (1963); M. Kobayashi, T. Maskawa, Progr. of Theor. Phys. **49**, 652 (1973);
- [6] J. P. Barber et al., Phys. Rev. Lett. **43**, 830 (1979).
- [7] UA1 Collaboration, G. Arnison et al., Phys. Lett. **122B**, (1983) 103; UA2 Collaboration, M. Banner et al., Phys. Lett. **122B**, (1983) 476; UA1 Collaboration, G. Arnison et al., Phys. Lett. **126B**, (1983) 398.
- [8] Mark II Collaboration, G. S. Abrams et al., Phys. Rev. Lett. **63**, (1989) 2173; L3 Collaboration, B. Adeva et al., Z Phys. **C51**, (1991) 179.
- [9] CDF Collaboration, F. Abe et al., Phys. Rev. D **50**, 2966 (1994); CDF Collaboration, F. Abe et al., Phys. Rev. Lett. **74**, (1995) 2626.

- [10] B. Kayser, (Particle Data Group), Phys. Lett. **B592**, 13, 145 (2004), e as referências ali citadas.
- [11] G. Senjanović, hep-ph/0501244.
- [12] R. D. Peccei, The Strong CP Problem, in CP Violation, C. Jarlskog (Ed.), World Scientific, Singapura, 1989; p.503.
- [13] L. Susskind, Phys. Rept. 104, 181-193, (1984).
- [14] Para os vários mecanismos de geração de massa para neutrinos veja R. N. Mohapatra, P. B. Pal, *Massive neutrinos in Physics and Astrophysics*, World Scientific Lectures Notes in Physics, Vol. 41 (1991).
- [15] J. E. Kim, hep-ph/0308081 e as referências ali mencionadas.
- [16] J. E. Kim, Phys. Rept. 150, 1-177, (1987).
- [17] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. R. Dvali, Phys. Lett. **B429**, 263, (1998).
- [18] L. Randall, R. Sundrum, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370, (1999).
- [19] M. Schmaltz, D. Tucker-Smith, hep-ph/0502182.
- [20] O. Lahav, A. R. Liddle, (Particle Data Group), Phys. Lett. **B592**, 206 (2004).
- [21] T. Padmanabham, Phys. Rept. 380, 235-320, (2003), hep-th/0212290.
- [22] H. E. Haber, (Particle Data Group), Phys. Lett. **B592**, 1003 (2004).
- [23] M. Dress, G. Gerbier, (Particle Data Group), Phys. Lett. **B592**, 216 (2004).
- [24] G. 't Hooft, *Under the Spell of the Gauge Principle*, Adv. Ser. Math. Phys. 19, 1994.
- [25] A. A. Belavin, A. A. Polyakov, A. S. Schwartz, Yu. S. Tyupkin, Phys. Lett. **B59**, 85 (1975).
- [26] R. D. Peccei, Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.) **72**, 3 (1999).
- [27] I. S. Altarev et al., Phys. Lett. **B102**, 13 (1981).

- [28] V. Baluni, Phys. Rev. D **19**, 2227 (1979); R. Crewther, P. Di Vecchia, G. Veneziano and E. Witten, Phys. Lett. **88B**, 123 (1979); *ibid*, **91B**, 487(E) (1980).
- [29] M. Creutz, hep-ph/0312225.
- [30] R. D. Peccei and H. Quinn, Phys. Rev. Lett. **38**, 1440 (1977); R. D. Peccei and H. Quinn, Phys. Rev. D **16**, 1791 (1977).
- [31] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **40**, 223 (1978); F. Wilczek, *ibid*, **40**, 279 (1978).
- [32] J. E. Kim, Phys. Rev. Lett. **43**, 103 (1979);
- [33] M. A. Shifman, A. I. Vainstein, V. I. Zakharov, Nucl. Phys. **B166**, 493 (1980).
- [34] A. R. Zhitnitsky, Sov. J. Nucl. Phys. **31**, 260 (1980).
- [35] M. Dine, W. Fischler and M. Srednicki, Phys. Lett. **104B**, 199 (1981).
- [36] E. W. Kolb, M. S. Turner, *The Early Universe*, (Frontiers in Physics v.69) (1990), Capítulo 10.
- [37] Y. Murayama (Part.I), G. G. Raffelt (Part.II), C. Hagmann, K. van Bibber, L. J. Rosenberg (Part.III) (Particle Data Group), Phys. Lett. **B592**, 13, 389 (2004).
- [38] S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43**, 199, (1975).
- [39] E. Witten, hep-ph/0006332.
- [40] S. M. Carroll Phys. Rev. Lett. **81** 3067 (1998).
- [41] D. J. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30** 1343 (1973); H. D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30** 1346 (1973);
- [42] M. Yoshimura, Prog. Theo. Phys. **57** 237 (1977); G. Segrê, J. Meyers, Phys. Lett. **B65**, 243 (1976); B. Lee, S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **38** 1237 (1977); P. Langaker, G. Segrê, Phys. Rev. Lett. **39** 259 (1977);
- [43] V. Gupta, H. S. Mani, Phys. Rev. D **10** (1974) 1310; M. Singer, Phys. Rev. D **19** (1979) 296; H. Georgi, A. Pais, Phys. Rev. D **19** (1979) 2746.

- [44] M. Singer, J. W. F. Valle, J. Schechter, Phys. Rev. D **22** (1980) 738.
- [45] F. Pisano and V. Pleitez, Phys. Rev. D **46** (1992) 410; R. Foot, O. F. Hernandez, F. Pisano and V. Pleitez, Phys. Rev. D **47** (1993) 4158; P. Frampton, Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 2889.
- [46] P. H. Frampton and A. Rasin, Phys. Lett. **B482** (2000) 129.
- [47] J. C. Montero, V. Pleitez, and M. C. Rodriguez, Phys. Rev. D **58**, 094026, 097505 (1998), Int. J. Mod. Phys. **A16**, 1147, (2001); and hep-ph/0204130;
- [48] V. Pleitez and M. D. Tonasse, Phys. Rev. D **48**, 2353 (1993).
- [49] D. Politzer, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346; D. Gross, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343.
- [50] D. V. Soa, T. Inami, H. N. Long, Eur. Phys. J. **C34**, 285 (2004), hep-ph/0304300.
- [51] C. A. de S. Pires and O. Ravinez, Phys. Rev. D **58**, 035008 (1998); C. A. de S. Pires, Phys. Rev. D **60**, 075013 (1999).
- [52] K. S. Babu, R. N. Mohapatra, Phys. Rev. Lett. **63** 938 (1989).
- [53] M. D. Tonasse, Phys. Lett. **B 381**, 191 (1996).
- [54] A. G. Dias, V. Pleitez, and M. D. Tonasse, hep-ph/0204121.
- [55] J. C. Montero, F. Pisano, and V. Pleitez, Phys. Rev. D **47**, 2918 (1993); R. Foot, H. N. Long, and T. A. Tran, Phys. Rev. D **50**, R34 (1994); H. N. Long, *ibid.* D **54**, 4691 (1996).
- [56] W. A. Ponce, Y. Giraldo, L. A. Sanches, Phys. Rev. D **67**, 075001 (2003).
- [57] D. A. Gutierrez, W. A. Ponce, L. A. Sanches, hep-ph/0411077.
- [58] C. A. de S. Pires, P. S. Rodrigues da Silva, Eur. Phys. J. **C36**, 397 (2004).
- [59] A. G. Dias, A. Doff, C. A. de S. Pires, P. S. Rodrigues da Silva, hep-ph/0503014.
- [60] S. Eidelman *et al.* (Particle Data Group), Phys. Lett. **B592**, 1 (2004).

- [61] A. G. Dias, R. Martinez, V. Pleitez, Eur. Phys. J. C**39**, 101 (2005), hep-ph/0407141.
- [62] A. G. Dias, Phys. Rev. D **71**, 015009, (2005), hep-ph/0412163.
- [63] M. A. Perez, G. Tavares-Velasco and J. J. Toscano, Phys. Rev. D **69**, 115004 (2004).
- [64] M. B. Tully and G. C. Joshi, Phys. Lett. B**466**, 333 (1999).
- [65] B. Dion, T. Gregoire, D. London, L. Marleau and H. Nadeau, Phys. Rev. D **59** (1999) 075006.
- [66] L. Willmann et. al., Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 49.
- [67] Outros trabalhos recentes em bileptons nos modelos 331 são: E. M. Gregores, A. Gusso and S. F. Novaes, hep-ph/0101048; H. N. Long, and D. V. Soa, hep-ph/0104150; J. L. Garcia-Luna, G. Tavares-Velasco, J. J. Toscano, Phys. Rev. D **69**, 093005 (2004).
- [68] V. Pleitez, Phys. Rev. D **61** (1999) 057903.
- [69] C. Vafa, E. Witten, Phys. Rev. Lett. **53** 534 (1984).
- [70] R. Holman *et al.* Phys. Lett. B**282**, 132 (1992);
- [71] M. Kamionkowski and J. March-Russell, Phys. Lett. B**282**, 137 (1992);
- [72] L. M. Krauss and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **62**, 1221 (1989). Veja também S. Coleman, J. Preskill e F. Wilczek, Nucl. Phys. B**378**, 175 (1992).
- [73] L. E. Ibanez and G. G. Ross, Phys. Lett. B**260**, 291 (1991);
- [74] M. Dine, Proceedings of the Cincinnati Symposium in Quantum gravity and beyond, 157-169, 1992, hep-ph/9207045; and Phys. Rev. D **45**, 1424 (1992).
- [75] C. T. Hill and A. K. Leibovich, Phys. Rev. D **66**, 075010 (2002), hep-ph/0205237; *ibid* **66**, 016006 (2002), hep-ph/020557.
- [76] G. Lazarides, C. Panagiotakopoulos and Q. Shafi, Phys. Rev. Lett. **56**, 432 (1986).
- [77] A. G. Dias, V. Pleitez, and M. D. Tonasse, Phys. Rev. D **67**, 095008 (2003).

- [78] M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, in *Supergravity*, edited by P. van Nieuwenhuisen and D. Z. Freedman, North-Holland, Amsterdam, 1979; T. Yanagida, in *Proceedings of the Workshop on the Unified Theory and the Baryon Number in the Universe*, edited by O. Sawada and A. Sugamoto, KEK Report No. 79-18, Tsukuba, Japan, 1979;
- [79] P. Langacker, hep-ph/0411116.
- [80] P. Sikivie, Phys. Rev. Lett. **48**, 1156 (1982).
- [81] Y. B. Zeldovich, I. Y. Kobzarev and L. B. Okun, Sov. Phys. JETP, **40**, 1 (1975).
- [82] G. Lazarides and Q. Shafi, Phys. Lett. **115B**, 21 (1982); S. M. Barr, D. B. Reiss and A. Zee, Phys. Lett. **116B**, 227 (1982).
- [83] H. Georgi and M. B. Wise, Phys. Lett. **116B**, 123 (1982).
- [84] B. Holdom, Phys. Rev. D **27**, 332 (1983).
- [85] P. Sikivie, Phys. Rev. Lett. **51**, 1415 (1983) [Erratum-ibid. **52**, 695 (1984)].
- [86] CAST Collaboration, hep-exp/0411033.
- [87] S. J. Asztalos et al., Astrophys. J. 571, L27, (2002), astro-ph/0104200.
- [88] S. J. Asztalos et al., Phys. Rev. D**64**, 092003 (2001).
- [89] K. Yamamoto et al., hep-ph/0101200.
- [90] A. G. Dias, C. A. de S. Pires, P. S. Rodrigues da Silva, Phys. Rev. D**68**, 115009 (2003).
- [91] S. Coleman, *Aspects of symmetry*, Ed. Cambridge (1985).
- [92] S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. D**7**, 1888 (1973).
- [93] R. Jackiw, Phys. Rev D **9**, 1686 (1974).
- [94] M. Sher, Phys. Rep. **179**, 273 (1989).
- [95] L. D. Landau, in *Niels Bohr and the Development of Physics*, edited by W. Pauli (Pergamon Press, London, 1955); p. 52.

- [96] M. Göckerler, *et al.*, Phys. Rev. Lett. **19**, 4119 (1998).
- [97] H. Gies and J. Jaeckel, hep-ph/0405183.
- [98] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, (Cambridge University Press, New York, 1996) Vol. II, Sec. 18.3.
- [99] K. Holland, hep-lat/0409112.
- [100] D. Ng, Phys. Rev. D **49**, 4805 (1994).
- [101] P. Jain and S. D. Joglekar, Phys. Lett. **B407**, 151 (1997).
- [102] P. H. Frampton, Int. J. Mod. Phys. **A13**, 2345 (1998). More recently a value of 4 TeV for the energy of the pole has been given in P. H. Frampton, Mod. Phys. Lett. **A18**, 1377 (2003).
- [103] D. R. T. Jones, Phys. Rev. D **25**, 581 (1982), e as referências contidas nele.
- [104] M. E. Machacek and M. T. Vaugh, Nucl. Phys. **B222**, 83 (1983).
- [105] J. C. Montero, V. Pleitez and M. C. Rodriguez, Phys. Rev. D **65**, 035006 (2002); *ibid* D**70**, 075004 (2004), hep-ph/0406299.
- [106] R. Foot, H. Lew, X.-G. He, G. C. Joshi, Z. Phys. C **44**, 441 (1989)
- [107] Alex G. Dias, M. D. Tonasse, V. Pleitez, Phys. Rev. D **69**, 015007 (2004); e hep-ph/0210172.
- [108] Alex G. Dias, V. Pleitez, Phys. Rev. D **65**, 055009 (2004); e hep-ph/0407174.

## Evading the few TeV perturbative limit in 3-3-1 models

Alex Gomes Dias\*

*Instituto de Física, Universidade de São Paulo, C. P. 66.318, 05315-970 São Paulo, SP, Brazil*  
(Received 9 September 2004; published 20 January 2005)

Some versions of the electroweak  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$  models cannot be treated within perturbation theory at energies of few TeV. An extended version for these models is proposed which is perturbative even at TeV scale posing no threatening inconsistency for test at future colliders. The extension presented here needs the addition of three octets of vector leptons, which leave three new leptonic isotriplets in the  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  subgroup. With this representation content the running of the electroweak mixing angle,  $\theta_W(\mu)$ , is such that  $\sin^2 \theta_W(\mu)$  decreases with the increase of the energy scale  $\mu$ , when only the light states of the standard model group are considered. The neutral exotic gauge boson  $Z'$  marks then a new symmetry frontier.

DOI: 10.1103/PhysRevD.71.015009

PACS numbers: 12.60.Cn, 11.10.Hi, 12.60.Fr, 14.60.Hi

## I. INTRODUCTION

The known 3-3-1 models proposed nearly 12 years ago are good candidates to describe some new phenomena we expect to see in the near future [1]. They offer a novel phenomenology like, for example, being an appropriate framework to study in details bilepton through  $e^- e^-$  production in linear colliders [2], also within other observational capabilities [3,4]. They provide a natural theoretical explanation to the families replication problem.

Despite these and other curious features the early model versions present a severe limitation. The problem is that, like in any standard model gauge group extension, they predict a bunch of new particles. If from one side we have a base for computing new states production, on the other side we must worry about the consequences of the additional degrees of freedom. New particles already arising at the TeV scale affect significantly the coupling evolution with energy. In fact, even if these states do not appear directly as on shell states, their degrees of freedom effectively contribute to the dynamics according to the renormalization group equations. This problem is particularly dramatic in the model versions we shall discuss here. Such versions belong to the class of 3-3-1 models where the third component in the lepton triplet is a positive charged particle [1,5]. There the  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$  gauge coupling constants, denoted by  $\alpha_L$  and  $\alpha_X$ , respectively, are linked by the following relation involving the electroweak mixing angle  $\theta_W$

$$\frac{\alpha_X(\mu)}{\alpha_L(\mu)} = \frac{\sin^2 \theta_W(\mu)}{1 - 4\sin^2 \theta_W(\mu)}. \quad (1)$$

This relation is valid above the energy scale  $\mu \geq \mu_{331}$  where all symmetries become evident inside this theoretical framework. Evidently, the symmetry breakdown  $SU(3)_L \otimes U(1)_X \rightarrow SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  has to be postulated to have occurred when a scalar field  $\chi$  condensates with

$\langle \chi \rangle \simeq \mu_{331}$ . But Eq. (1) requires  $\sin^2 \theta_W < 1/4$ , which is in accordance with direct measurement. Equation (1) when confronted with the current value  $\sin^2 \theta_W(M_Z) = 0.23113(15)$  [6] gives rise to a trouble in these models. The point is that their  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  effective theory has almost the same standard model minimal particle content, apart from few additional scalar multiplets. Therefore, the renormalization group equation solutions in this case show us that  $\sin^2 \theta_W$  increases with energy. It means that Eq. (1) points to a nonperturbative regime at energy values which we shall be just interested. The equation defines the initial value  $\alpha_X(\mu_{331})$  and since it comes from an Abelian group it also increases with energy, being close to 1 for energies around few TeV in the minimal models. Consequently it is a serious problem for the perturbative approach and it could make the models less appealing.

For example, running  $\sin^2 \theta_W$  with only the minimal standard model representation content we see that it reaches the value 0.25 at the energy scale  $\mu \sim 4$  TeV [7]. A study of perturbative limits in 3-3-1 models was carried out in [8]. There it was shown that perturbation theory cannot be used already above scales of few TeV if we consider the minimal versions with or without supersymmetry.

There are some 3-3-1 constructions which do not have the problem above [9]. But the ones considered here account for doubly charged bileptons intermediating processes where partial lepton number is violated, representing a very distinct signal to search for [2,3]. Other aspects and recent work on these models can be found in Ref. [10].

In this work it is proposed an additional matter content to the early 3-3-1 models where perturbative treatment can be applied without such tight restrictions. We see that the simplest representations to be added to the minimal versions are four octets, three of vectorial leptons plus a scalar one. With them there is a prediction of a decreasing behavior for  $\sin^2 \theta_W$  in a certain range of energy. The new exotic leptons are interesting also from the phenomenological point of view under the standard model gauge

\*Email address: alexdias@fma.if.usp.br

group in the seesaw mechanism [11], and also under the extended group we consider here [12].

The work is organized as follows. In Sec. II we study the renormalization group equations to understand how the nonperturbative limit appears in the minimal models. We then define a condition which should be satisfied in the model extensions, in order to make them perturbatively safe. We, then, justify the choice of the new representations content to be introduced. In Sec. III we show how the perturbative limit is raised in two 3-3-1 models. In Sec. IV it is suggested a possible decoupling off all the scalars for energies below  $\mu_{331}$ . We finish in Sec. V with the discussion of our results.

## II. THE RUNNING OF THE ELECTROWEAK MIXING ANGLE

At the  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  energy scale the renormalization group equations dictating the running of the gauge couplings at one loop level are given by

$$\frac{1}{\alpha_i(\mu)} = \frac{1}{\alpha_i(M_Z)} + \frac{1}{2\pi} b_i \ln\left(\frac{M_Z}{\mu}\right), \quad \mu \leq \mu_{331}; \quad (2)$$

with  $i = 1, 2$  and  $\alpha_2, \alpha_1$  are the coupling constants of the  $SU(2)_L, U(1)_Y$  groups, respectively. The third equation involving the QCD coupling constant is irrelevant for our purposes here at this approximation level, and so it will not enter in our developments. As we have said above, for posterior use in the context of the 3-3-1 models we denote the gauge coupling constants  $\alpha_L, \alpha_X$  for the groups  $SU(3)_L, U(1)_X$ , respectively. In a generic gauge group the  $b_i$  coefficients are given by

$$b_i = \frac{2}{3} \sum_{\text{fermions}} T_R(F)_i + \frac{1}{3} \sum_{\text{scalars}} T_R(S)_i - \frac{11}{3} C_2(G)_i \quad (3)$$

for Weyl fermions and complex scalars, with the generators  $T^a$  satisfying  $\text{Tr}[T^a(I)T^b(I)] = T_R(I)\delta^{ab}$  where  $I = F, S$ . For  $SU(N)$   $T_R(I) = 1/2$  in the fundamental representation and  $C_2(G) = N$ .  $C_2(G) = 0$  for  $U(1)$ . These numbers can be computed for other different representations with aid of the identity  $T_R(I)(N^2 - 1) = C_{2R}(I)d_R(I)$ , where  $C_{2R}(I)$  is the quadratic Casimir operator and  $d_R(I)$  is the representation dimension. For  $U(1)_Y$  we use  $\sum T_R(I, S) = \sum y^2$  where  $y = Y/2$  for the standard model and  $y = X$  for the 3-3-1 models.

Below  $\mu_{331}$  the  $\sin^2\theta_W$  running is then, according to the standard model gauge group,

$$\sin^2\theta_W(\mu) = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_2(\mu)}{\alpha_1(\mu)}}, \quad \mu \leq \mu_{331}. \quad (4)$$

We see that for a  $SU(2)$  content presenting asymptotic freedom, i.e.,  $\alpha_2 \rightarrow 0$  as  $\mu \rightarrow \infty$ ,  $\sin^2\theta_W$  increases with the energy. Above the scale  $\mu_{331}$  we run the renormalization group equations with particles in the full  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$  representations. In the minimal models when we

consider  $\mu_{331} \leq 2$  TeV, then perturbative expansion in  $\alpha_X$  makes sense only at energy values lower than 2.4 TeV [8]. It jeopardizes the perturbative analysis of the neutral exotic vector boson  $Z'$  which is one of the model predictions, since its mass is naively expected to have a lower limit near this perturbative upper bound.

We observe that for a  $SU(2)$  content *not* presenting asymptotic freedom, i.e., with  $\alpha_2(\mu)$  growing when  $\mu \rightarrow \mu_{331}$ , then  $\sin^2\theta_W(\mu)$  decreases in the same energy interval improving the perturbative validity in such models. From Eqs. (2) and (4) it is deduced that the condition for accomplishing this is that

$$b_2 > \tan^2\theta_W(M_Z)b_1. \quad (5)$$

Inserting the  $\tan^2\theta_W$  value at the  $Z$  pole, the condition between the coefficients turns out to be  $b_2 > 0.3b_1$ . So, if we want to satisfy it some additional fields in nontrivial  $SU(2)$  representations must be considered. In order to give a bigger contribution to  $b_2$  than to  $b_1$  their hypercharge must be small.

To be more explicit we take the 3-3-1 model with only three scalar triplets as our first representative of the class [5]. The electric charge operator  $\mathcal{Q}$  is

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2}(\lambda_3 - \sqrt{3}\lambda_8) + X. \quad (6)$$

The representation content in the quark sector is [the numbers inside parenthesis mean their transformation properties under  $SU(3)_C, SU(3)_L$ , and  $U(1)_X$ , respectively, or under  $SU(3)_C, SU(2)_L$ , and  $U(1)_Y$  when this is the case]  $Q_{mL} = (d_m, u_m, j_m)_L^T \sim (3, 3^*, -1/3)$ ,  $m = 1, 2$ ;  $Q_{3L} = (u_3, d_3, J)_L^T \sim (3, 3, 2/3)$ ; and the respective right-handed components in singlets  $u_{\beta R} \sim (3, 1, 2/3)$ ,  $d_{\beta R} \sim (3, 1, -1/3)$ ,  $\beta = 1, 2, 3$ ;  $J_R \sim (3, 1, 5/3)$  and  $j_{mR} \sim (3, 1, -4/3)$ .

In the scalar sector the three triplets are  $\chi = (\chi^-, \chi^+, \chi^0)^T \sim (1, 3, -1)$ ,  $\rho = (\rho^+, \rho^0, \rho^{++})^T \sim (1, 3, 1)$ , and  $\eta = (\eta^0, \eta_1^-, \eta_2^+)^T \sim (1, 3, 0)$ .

Finally, in this model, leptons come in triplets like

$$\Psi_{aL} = (\nu_a, l_a, E_a)_L^T \sim (1, 3, 0),$$

where  $a = e, \mu, \tau$ . With their right-handed components in singlets  $l_{aR} \sim (1, 1, -1)$ ,  $E_{aR} \sim (1, 1, +1)$ . We have omitted right-handed neutrinos since, like any neutral singlet representation, they are not relevant for our purposes here. The effective  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  theory coming from this model, when the condensation  $\langle \chi^0 \rangle = w/\sqrt{2}$  occurs, have the same light multiplets which dominate the spectrum of the standard model plus an extra scalar isodoublet  $\eta = (\eta^0, \eta_1^-)^T \sim (1, 2, -1)$ . The value  $w/\sqrt{2}$  is going to be identified with  $\mu_{331}$ .

Next we consider the renormalization group coefficients in Eq. (3) at the  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  level with three usual matter generations, taking into account at most the two nontrivial lowest dimensional  $SU(2)$  representations, i.e.,

isodoublets and isotriplets. We reserve the prefix *iso* just for when we talk about  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  representations. Let  $N_S$  be the number of scalar isodoublets,  $N_F$  the number of new exotic fermionic isodoublets,  $N_{TS}$  the number of scalar isotriplets and  $N_{TF}$  the number of new exotic fermionic isotriplets, with  $Y$  being their respective hypercharge, then from Eq. (3)

$$b_1 = \frac{1}{3} \left( Y_F^2 N_F + \frac{Y_S^2}{2} N_S + 20 \right) + \frac{1}{2} \left( Y_{TF}^2 N_{TF} + \frac{Y_{TS}^2}{2} N_{TS} \right), \quad (7)$$

$$b_2 = \frac{1}{3} \left( N_F + \frac{1}{2} N_S + 4N_{TF} + 2N_{TS} - 10 \right). \quad (8)$$

When dealing with fermions in vectorial representations  $N_F$  and  $N_{TF}$  must be multiplied by 2. In the model above we have only two  $Y_S^2 = 1$  scalar isodoublets to be considered, i.e.,  $N_S = 2$ , in the Eqs. (7) and (8) so that  $(b_1, b_2) = (7, -3)$ . And it is not possible to satisfy the condition in (5). In fact the  $\sin^2\theta_W$  running shows that the value 0.25 is reached at 4.1 TeV as we see in Fig. 1 (where for future reference it is also shown the same running for the model with a scalar sextet). The scale  $\mu_{331}$  is then below this value and so the energy  $\Lambda$  at which the pole is attained is such that  $\Lambda \leq 4.1$  TeV. The Landau-like pole behavior with  $\mu_{331}$  has been studied in Ref. [8]. For example, if  $\mu_{331} = 1$  TeV we have that at energies  $E \approx 1.9$  TeV,  $\alpha_X > 1$ , and  $M_{Z'} > \sim 1.9$  TeV so that the model loses its perturbative character below the exotic neutral vector boson  $Z'$  mass. In part this is due to the fact that the right-handed components of the exotic quarks,  $J$  and  $j_m$ , necessary to complete the  $SU(3)_L$  representations have a value of the  $U(1)_X$  charge larger than the other particles. Thus, they are the major contribution to the  $\alpha_X$  running. Under the

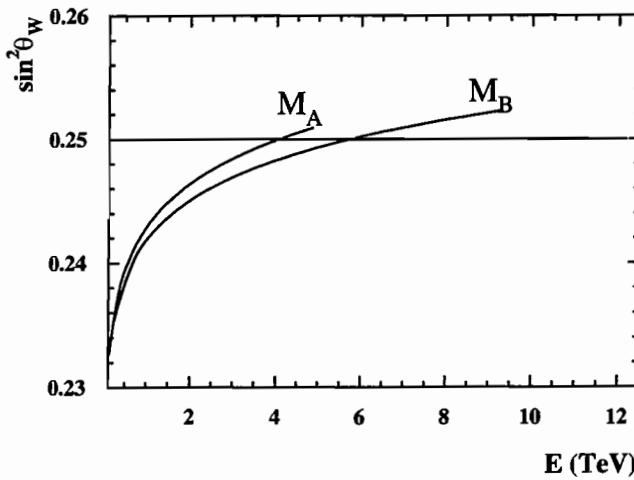


FIG. 1. Running of the electroweak mixing angle for the minimal models considering only light degrees of freedom under the standard model subgroup. Model A with three scalar triplets, and model B, the same as A with a scalar sextet added.

assumption that they are much above the  $Z'$  scale, the perturbative limit is pushed a little above. But this brings these quarks out of experimental reach. We would like to pursue the possibility of keeping them observable at TeV scale. To make the exotic quarks very heavy means that the VEV  $\langle \chi^0 \rangle$  is very high and since this is also responsible for giving mass to all new fermions in the  $SU(3)_L$  triplets and the new gauge bosons, it would bring almost all the predictions of the model out of experimental reach. Of course, this is not interesting from the phenomenological point of view.

We see from Eqs. (7) and (8) that multiplets having large hypercharge take us in the opposite direction of satisfying (5). Isodoublets of vectorial leptons or/and scalars with zero hypercharge could then be considered. But the number of them needed would be, at least, 8 of vectorial leptons or 32 of scalars with components having electric charge  $1/2$  and  $-1/2$ .

The simplest solution is to have exotic isotriplets. Preferentially fermionics. From Eqs. (7) and (8) one can also see that the minimal number of isotriplets are three, all of vectorial leptons with  $Y = 0$ . They are written as

$$\tilde{T} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} t^0 & t^+ \\ t^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} t^0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

transforming as  $(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{0})$  under the standard model group. They must be color singlets, otherwise QCD asymptotic freedom would be lost. This triplet couples with the usual matter. It has interesting consequences in the seesaw mechanism and it does not represent cosmological troubles if they belong to the electroweak scale, as it was studied along with other phenomenological aspects in [11]. To be consistent with the  $Z^0$  decay width, their components must be heavier than  $M_{Z^0}/2$ .

Now the lowest dimensional  $SU(3)$ , with  $U(1)_N$  charge zero, representations which contain an isotriplet decomposes under the standard model  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  group as

$$\mathbf{6} = \mathbf{3}_{-2} \oplus \mathbf{2}_1 \oplus \mathbf{1}_4, \quad \mathbf{8} = \mathbf{3}_0 \oplus \mathbf{2}_{-3} \oplus \mathbf{2}_3 \oplus \mathbf{1}_0.$$

The subscripts refer to their hypercharge value  $Y$ . The sextet gives rise to a  $Y^2 = 4$  isotriplet which could also do the job but it has a  $Y^2 = 16$  isosinglet. It could be assumed to be heavy not affecting the spectra below  $\mu_{331}$ . But we want to avoid such an assumption. It would be needed also three sextets of fermions if the  $Y^2 = 16$  singlet components were heavy, plus a scalar one to generate masses. The octet on the other hand has the advantage of having an isosinglet and an isotriplet both neutrals in hypercharge which, therefore, do not contribute to  $b_1$ . But it has also two isodoublets with  $Y^2 = 9$ . They can be made heavy if a scalar octet is present and it condenses at the  $\mu_{331}$ , as we are going to discuss below. We shall then consider here the exotic vectorial leptons in three fermionic octets since they are the simplest solution. With them

we also do not need to concern with anomalies. They have the form

$$\Xi_a = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} t_a^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \lambda_a^0 & t_a^+ & \delta_a^- \\ t_a^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} t_a^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \lambda_a^0 & \delta_a^{--} \\ \xi_a^+ & \xi_a^{++} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \lambda_a^0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

transforming as  $(\mathbf{1}, \mathbf{8}, 0)$ , where  $a = 1, 2, 3$ .

When it is introduced a representation like this, with all spinor components of the matter fields belonging to the same multiplet, differently from the usual chiral constructions, gauge invariance does allow for initial mass terms for the fields in these representations. Therefore, there would be a bare mass term like  $M_{ab} \text{Tr} \bar{\Xi}_a \Xi_b$  in the Lagrangian in its symmetric phase.

To satisfy the condition in Eq. (5) the  $Y^2 = 9$  lepton isodoublets  $\delta = (\delta^-, \delta^{--})^T$  and  $\xi = (\xi^{++}, \xi^+)^T$  in Eq. (10) must then be decoupled from energies below  $\mu_{331}$ . This can be achieved with an octet representation of scalars similar to the fermions above. Calling this representation  $\Sigma$  its form is

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \phi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \varphi^0 & \phi^+ & \varphi_1^- \\ \phi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \phi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \varphi^0 & \varphi_1^{--} \\ \varphi_2^+ & \varphi_2^{++} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \varphi^0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

transforming as  $(\mathbf{1}, \mathbf{8}, 0)$ . To see how the decoupling can be worked out let us analyze the mass spectra for these new fields.

The Yukawa interactions in the lepton sector are

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y = & H_{ab} \epsilon_{ijk} \overline{(\Psi_{iaL})^c} \Psi_{jbL} \eta_k \\ & + \overline{\Psi}_{aL} (G_{ab}^l l_{bR} \rho + G_{ab}^E E_{bR} \chi) + G_{ab}^{\Xi} \overline{\Psi}_{aL} \Xi_b \eta \\ & + \frac{1}{2} \text{Tr} [\bar{\Xi}_a (A_{ab} \Xi_b \Sigma + B_{ab} \Sigma \Xi_b + M_{ab} \Xi_b)] \\ & + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (12)$$

where repeated indices mean summation.  $H_{ab}$  is an anti-symmetric matrix with  $G_{ab}^l$ ,  $G_{ab}^E$ ,  $G_{ab}^{\Xi}$  general complex matrices and  $A_{ab}$ ,  $B_{ab}$ ,  $M_{ab}$  real symmetric matrices which will be assumed diagonal for simplicity.

Then  $Y^2 = 9$  isodoublets in  $\Xi_a$  decouple when  $\langle \Sigma \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \langle \varphi^0 \rangle \text{diag}(1, 1, -2)$ , when the following relations are satisfied

$$\begin{aligned} (A_{ab} + B_{ab}) \frac{\langle \varphi^0 \rangle}{\sqrt{6}} + M_{ab} & \simeq m_{SM}, \\ m_{SM} - 3A_{ab} \frac{\langle \varphi^0 \rangle}{\sqrt{6}} & \simeq \mu_{331}, \quad m_{SM} - 3B_{ab} \frac{\langle \varphi^0 \rangle}{\sqrt{6}} \simeq \mu_{331}. \end{aligned} \quad (13)$$

Where  $m_{SM}$  is a mass scale belonging to the standard

model mass spectrum. The first relation above leaves the isotriplets  $\tilde{T}_a$  in  $\Xi_a$  with appropriate masses below  $\mu_{331}$ . The last two relations in (13) ensure that the masses of the components of the isodoublets  $\delta$  and  $\xi$  are heavy enough, since  $\langle \Sigma \rangle$  breaks the electroweak  $SU(3)_L$  symmetry down to the  $SU(2)_L$  group  $\langle \varphi^0 \rangle \simeq \mu_{331}$  and the isodoublets are, in this way, decoupled of the standard model particle mass spectrum. The isosinglets  $\lambda_a^0$  in the octet  $\Xi_a$  have then masses of order  $m_{\lambda_a^0} \simeq M_{aa} - m_{SM}$  which is the same order of  $\mu_{331}$  according to the Eqs. (13). The simple analysis presented here is not complete but it is sufficient for the purposes of showing that the higher hypercharge fields  $c$  can be heavy. Thus, only the vector lepton isotriplets  $\tilde{T}_a$  together with the known fields contribute to the renormalization group equations at energies  $E < \mu_{331}$ .

In the last stage of symmetry breakdown when the standard model group reduces to the electromagnetic Abelian gauge group,  $U(1)_{em}$ , we see from the term  $G_{ab}^{\Xi} \overline{\Psi}_{aL} \Xi_b \eta$  in Eq. (12) that there will be a mixing between the known and the exotic leptons. It could be avoided by imposing some sort of discrete symmetry. Their phenomenological consequences will be carried out elsewhere.

Finally, we should say that condensation of  $\phi^0$  in  $\Sigma$  is very constrained by the  $\rho$  parameter relating the  $W^\pm$  and  $Z$  masses.

We are ready now to show how the perturbative limit is improved with these representations.

### III. THE PERTURBATIVE LIMIT

We now turn out to look how the perturbative limit is characterized by the scale  $\mu_{331}$  breaking the  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$  symmetry. The relevant running equation is that of the coupling constant  $\alpha_X$  coming from the Abelian factor  $U(1)_X$ . This running is

$$\frac{1}{\alpha_X(\mu)} = \frac{1}{\alpha_X(\mu_{331})} + \frac{1}{2\pi} b_X \ln\left(\frac{\mu_{331}}{\mu}\right), \quad \mu \geq \mu_{331}. \quad (14)$$

$b_X$  is computed considering the fields in the full 3-3-1 representation. Equation (14) starts with the value  $\alpha_X(\mu_{331})$  which can be determined using Eqs. (1) and (4) and the fact that  $\alpha_2(\mu_{331}) = \alpha_L(\mu_{331})$ . That is,

$$\frac{1}{\alpha_X(\mu_{331})} = \frac{1}{\alpha_1(\mu_{331})} - \frac{3}{\alpha_2(\mu_{331})}. \quad (15)$$

Perturbative expansion does not make sense any more when a scale  $\mu = M'$  such that  $\alpha_X(M') = 1$  is reached. We have then

$$M' = \mu_{331} \left[ \frac{M_Z}{\mu_{331}} \right]^{(b_1 - 3b_2)/b_X} e^{(2\pi/b_X)[1/\alpha(M_Z)][1 - 4\sin^2 \theta_W(M_Z)] - 1}, \quad (16)$$

$\alpha(M_Z) = 1/128$  is the fine structure constant at the  $Z$  pole, with  $M_Z = 91.2$  GeV. We can now see how the perturbative limit is changed with  $\mu_{331}$ .

The additional representations to be considered are then the three leptonic  $SU(3)_L$  octets  $\Xi_a$ , ( $a = 1, 2, 3$ ), like (10) which leave three leptonic isotriplets like (9) at energies  $E \leq \mu_{331}$ , i.e.,  $N_{TF} = 3$  in Eqs. (7) and (8). The scalars in  $\Sigma$  can be assumed to contribute with a  $Y^2 = 0$  isotriplet and two  $Y^2 = 9$  isodoublets. Thus from Eqs. (7) and (8) we have  $(b_1, b_2) = (10, 6)$ , which obviously satisfies the condition (5). In Fig. (2) the  $\sin^2\theta_W$  running in this model is shown (again for future reference it is also shown the curves in the model with a scalar sextet).

From Eq. (3) we also have  $b_X = 26$ . For example, if  $\mu_{331} = 1$  TeV then  $M' = 16.8$  TeV; if  $\mu_{331} = 3$  TeV then  $M' = 70.6$  TeV. Disregarding the  $Y^2 = 9$  scalar isodoublets  $(b_1, b_2) = (7, 17/3)$  and if  $\mu_{331} = 1$  TeV then  $M' = 20.2$  TeV; if  $\mu_{331} = 3$  TeV then  $M' = 92.3$  TeV. The perturbative limit is still improved in this case because  $b_1$  is lowered. We see then that the model is made perturbatively much more viable with the addition of octet representations.

### A. The model with a scalar sextet

Another representation content in the leptonic sector is possible in accordance with the electric charge operator Eq. (6). The positron and his cousins occupying the third component of the leptonic triplets which are represented by [1],

$$\Psi_{aL} = (\nu_a, l_a, l_a^c)^T \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$$

with  $a = e, \mu, \tau$ . A scalar sextet

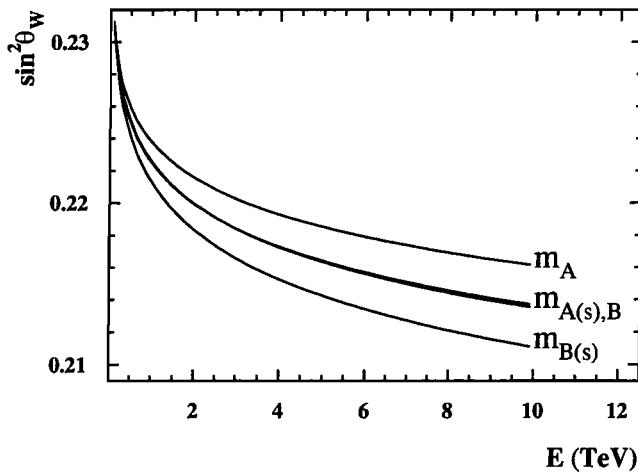


FIG. 2. Running of the electroweak mixing angle for the extended models for energies  $E \leq \mu_{331}$ . Model A,  $m_A$ , with only three scalar triplets, and model B,  $m_B$ , with a scalar sextet. ( $s$ ) means that the  $Y^2 = 9$  scalars are disregarded. The models  $m_A(s)$  and  $m_B$  have degenerate curves.

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1^0 & h_1^- & h_2^+ \\ h_1^- & H_1^{--} & \sigma_2^0 \\ h_2^+ & \sigma_2^0 & H_2^{++} \end{pmatrix}$$

transforming as  $(\mathbf{1}, \mathbf{6}, 0)$  is necessary in the minimal representation content to generate all the lepton masses when  $\langle \sigma_2^0 \rangle \neq 0$ .  $\langle \sigma_1^0 \rangle \neq 0$  could give a Majorana mass to the neutrinos.

The Yukawa interactions in the lepton sector are now

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^s = & H_{ab} \epsilon_{ijk} (\overline{\Psi}_{iaL})^c \Psi_{jbL} \eta_k + G_{ab}^\Psi \overline{\Psi}_{aL} S (\Psi_{ibL})^c \\ & + G_{ab}^{\Xi} \overline{\Psi}_{aL} \Xi_b \eta + F_{ab} \epsilon_{ijk} \overline{\Psi}_{iaL} (S^\dagger \Xi_b)_{jk} \\ & + \frac{1}{2} \text{Tr} [\Xi_a (A_{ab} \Xi_b \Sigma + B_{ab} \Sigma \Xi_b + M_{ab} \Xi_b)] \\ & + \text{H.c.} \end{aligned} \quad (17)$$

And the same decoupling of the  $Y^2 = 9$  lepton doublets can be worked out as before. Mixing between the known and exotic leptons happens through  $G_{ab}^{\Xi} \overline{\Psi}_{aL} \Xi_b \eta$  and  $F_{ab} \epsilon_{ijk} \overline{\Psi}_{iaL} (S^\dagger \Xi_b)_{jk}$  in this case. As before, it could be avoided by imposing some sort of discrete symmetry.

This model has the following additional multiplets under the  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  symmetry besides those in the three triplets model: one isodoublet  $(h_2^+, \sigma_2^0) \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2}, +1)$ , a non-Hermitian isotriplet  $(H_1^{--}, h_1^-, \sigma_1^0) \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, -2)$ , and an isosinglet  $H_2^{++} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, +2)$ . Then, at energies below  $\mu_{331}$  three scalar isodoublets with  $Y^2 = 1$  and two scalar isodoublets with  $Y^2 = 9$  are taken into account but now we have one more scalar isodoublet plus that coming from the scalar octet. The other scalar fields including the isosinglet  $H_2^{++}$  are taken into account only at energies above  $\mu_{331}$ . In this case the inclusion of the isosinglet  $H_2^{++}$  does not affect so significantly the running below  $\mu_{331}$ . Therefore,  $N_S = 3$  with  $Y^2 = 1$ ,  $N_S = 2$  with  $Y^2 = 9$ ,  $N_{TS} = 1$  with  $Y^2 = 4$ ,  $N_{TS} = 1$  with  $Y^2 = 0$  and  $N_{TF} = 3$  with  $Y^2 = 0$ . So that from Eqs. (7) and (8) we have  $(b_1, b_2) = (67/6, 41/6)$ . Obviously, this satisfies the condition (5). From Eq. (3) we also have  $b_X = 22$  since there is no right-handed charged leptons to be counted. For example, if  $\mu_{331} = 1$  TeV then  $M' = 32.4$  TeV; if  $\mu_{331} = 3$  TeV then  $M' = 155.0$  TeV. Disregarding the  $Y^2 = 9$  scalar isodoublets coming from the octet  $\Sigma$ ,  $(b_1, b_2) = (49/6, 13/2)$ , so if  $\mu_{331} = 1$  TeV then  $M' = 40.3$  TeV; if  $\mu_{331} = 3$  TeV then  $M' = 213.0$  TeV. Again, perturbative limit is still improved in this case since  $b_1$  is lowered.

### IV. POSSIBLE DECOUPLING OF ALL SCALARS AT ENERGIES $E < \mu_{331}$

In the preceding discussions it was considered that some scalar multiplets remain light enough, i.e., with masses much below the  $\mu_{331}$  scale, so that they could participate in the counting for the coefficients in Eqs. (7) and (8). It only happens if there is a sort of fine tuning among the scalar self-interaction couplings. The reason for this comes

from the fact that the scalar octet has interactions with all the scalar multiplets. The scalar potential for the three triplets model plus the octet is then

$$\begin{aligned} V = & V_T + m_3 \eta^\dagger \Sigma \eta + m_4 \rho^\dagger \Sigma \rho + m_5 \chi^\dagger \Sigma \chi \\ & + \text{Tr}[\Sigma^2(\lambda_1 \Sigma^2 + m_1 \Sigma - m_2^2)] + \lambda_2 (\text{Tr}[\Sigma^2])^2 \\ & + \text{Tr}[\Sigma^2](\lambda_3 \eta^\dagger \eta + \lambda_4 \rho^\dagger \rho + \lambda_5 \chi^\dagger \chi), \end{aligned} \quad (18)$$

where  $V_T$  stands for the collection of all terms involving only  $\eta$ ,  $\rho$ , and  $\chi$ . Note that we cannot impose invariance under  $\Sigma \rightarrow -\Sigma$ , since it would also forbid the interaction between  $\Sigma$  and the  $\Xi_a$ 's preventing the mechanism of decoupling the lepton isodoublets  $\delta$  and  $\xi$  of the standard model scale. The last term in this potential gives a quadratic mass term of order  $\langle \varphi^0 \rangle^2$  for the triplets unless  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$ , and  $\lambda_5$  are fine tuned. Thus, it can happen that no single scalar be part of the spectrum below  $\mu_{331}$ . In fact, the only massive scalar state which could be free of mass contributions coming from  $\langle \Sigma \rangle$  would belong to the neutral scalar imaginary part, the pseudoscalar. But in the minimal model, i.e., without regarding the octets, there is just one massive pseudoscalar and it might be heavy, since its mass is of order  $\langle \chi^0 \rangle$ . Of course, careful mass spectral analysis should be done but the arguments we just have given indicate that it really should happen. Because of the reason that the major contributions to the renormalization group equations are due to the fermions, it is not expected that the perturbative limit will change significantly when the scalars are omitted below  $\mu_{331}$ . But to produce any fundamental scalar would require energies  $E \geq \mu_{331}$ .

## V. DISCUSSION

We have shown that the addition of octet representations can turn 3-3-1 models perturbatively viable at the upcoming TeV energy scale. The main effect is that they predict a running to the electroweak angle, or better  $\sin^2 \theta_W$ , such that it decreases with the increasing of the energy until the scale  $\mu_{331}$  which characterizes the appearance of a  $SU(3)_L \otimes U(1)_X$  electroweak symmetry. It could be tested providing a direct test of exclusion for the extended models we have presented here. With the electroweak angle evolving in this way the  $U(1)_X$  coupling constant,  $\alpha_X$ , starts to run with a value which is lower than the one appearing in the minimal models. From this point  $\sin^2 \theta_W$  begins to increase with energy but it will reach values near 0.25 at energies bigger than tens of TeV.

The same behavior could be accomplished with other representations different from octets. But these representations would be in general bigger than the ones we have considered here, and they would need more complicated mechanisms to decouple isomultiplets with large hypercharge. If instead we consider exotic leptons in sextets it is necessary to assume that the isosinglets with  $Y^2 = 4$  belonging to them are decoupled at energies  $E \leq \mu_{331}$ . Thus octets are simpler and more convenient.

Although the additional representations turn the  $SU(3)_L$  gauge coupling,  $\alpha_{3L}$ , loses its asymptotic freedom, it becomes bigger than one at energies much higher than  $M'$ . Thus, it does not represent a problem.

Symmetry breakdown at the scale  $\mu_{331}$  is marked with the appearance of four new charged vector bosons, two of them carrying two units of electric charge, and the exotic neutral one  $Z'$ . Different from the exotic charged vector bosons, this neutral one does not receive contribution to its mass due to the scalar octet and it is bounded according to

$$M_{Z'} \gtrsim 2 \left[ \alpha_2(\mu_{331}) \frac{1 - \sin^2 \theta_W(\mu_{331})}{1 - 4 \sin^2 \theta_W(\mu_{331})} \right]^{1/2} \mu_{331}. \quad (19)$$

This is valid for both models here. It is assumed that  $\sqrt{2}\langle \chi_0 \rangle \simeq \mu_{331}$ , which is quite reasonable since as  $\langle \Sigma \rangle$ ,  $\langle \chi \rangle$  also breaks the symmetry down to the standard model group.  $M_{Z'}$  grows then linearly with  $\mu_{331}$  so that its production will mark, according to these models, the scale at which  $SU(3)_W$  should be taken into account. Thus, the  $Z'$  boson would have a mass which could be tens of TeV or even much less, if other phenomenological constraints allow for it.

Finally, we should say that supersymmetry does not relieve the perturbative limit in the minimal model versions [8]. It brings more degrees of freedom with the supersymmetric partners and so it worsens the problem. But for the extended models presented here it is expected that it makes the value of  $M'$  in Eq. (16) increase.

## ACKNOWLEDGMENTS

The author thanks C. A de S. Pires, P. S. R. da Silva, and V. Pleitez for their useful comments and M. Caballero for reading the manuscript. This work has been supported by FAPESP under the process 01/13607-3.

- 
- [1] F. Pisano and V. Pleitez, Phys. Rev. D **46**, 410 (1992); R. Foot, O. F. Hernandez, F. Pisano, and V. Pleitez, Phys. Rev. D **47**, 4158 (1993); P. H. Frampton, Phys. Rev. Lett. **69**, 2889 (1992).
- [2] P. H. Frampton and A. Rasin, Phys. Lett. B **482**, 129 (2000).
- [3] B. Dion, T. Gregoire, D. London, L. Marleau, and H. Nadeau, Phys. Rev. D **59**, 075006 (1999).

- [4] M. B. Tully and G. C. Joshi, Phys. Lett. B **466**, 333 (1999); E. M. Gregores, A. Gusso, and S. F. Novaes, Phys. Rev. D **64**, 015004 (2001); J. L. Garcia-Luna, G. Tavares-Velasco, and J. J. Toscano, Phys. Rev. D **69**, 093005 (2004).
- [5] V. Pleitez and M. D. Tonasse, Phys. Rev. D **48**, 2353 (1993).
- [6] Particle Data Group, K. Hagiwara *et al.*, Phys. Rev. D **66**, 010001 (2002).
- [7] P. H. Frampton, Int. J. Mod. Phys. A **13**, 2345 (1998); Mod. Phys. Lett. A **18**, 1377 (2003).
- [8] A. G. Dias, R. Martinez, and V. Pleitez, hep-ph/0407141.
- [9] J. C. Montero, F. Pisano, and V. Pleitez, Phys. Rev. D **47**, 2918 (1993); R. Foot, H. N. Long, and T. A. Tran, Phys. Rev. D **50**, 34(R) (1994); H. N. Long, Phys. Rev. D **53**, 437 (1996).
- [10] A. G. Dias, V. Pleitez, and M. D. Tonasse, Phys. Rev. D **67**, 095008 (2003); A. G. Dias and V. Pleitez, Phys. Rev. D **69**, 077702 (2004); H. N. Long and N. Q. Lan, Europhys. Lett. **68**, 571 (2003); A. G. Dias, C. A. de S. Pires, and P. S. Rodrigues da Silva, Phys. Rev. D **68**, 115009 (2003); G. Tavares-Velasco and J. J. Toscano, Phys. Rev. D **65**, 013005 (2002); C. A. de S. Pires and P. S. Rodrigues da Silva, Eur. Phys. J. C **36**, 397 (2004); M. A. Perez, G. Tavares-Velasco, and J. J. Toscano, Phys. Rev. D **69**, 115004 (2004); J. C. Montero, V. Pleitez, and M. C. Rodriguez, Phys. Rev. D **70**, 075004 (2004); G. Tavares-Velasco and J. J. Toscano, Phys. Rev. D **70**, 053006 (2004); J. A. Rodriguez and M. Sher, Phys. Rev. D **70**, 117702 (2004).
- [11] R. Foot, H. Lew, X.-G. He, and G. C. Joshi, Z. Phys. C **44**, 441 (1989).
- [12] J. C. Montero, C. A. de S. Pires, and V. Pleitez, Phys. Rev. D **65**, 095001 (2002). The electric charge attribution of the lepton octet must be corrected in this work. But it does not affect their subsequent conclusions.

## Concerning the Landau pole in 3–3–1 models

A.G. Dias<sup>1,a</sup>, R. Martínez<sup>2,b</sup>, V. Pleitez<sup>3,c</sup>

<sup>1</sup> Instituto de Física, Universidade de São Paulo, C.P. 66.318, 05315-970 São Paulo, SP, Brazil

<sup>2</sup> Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia

<sup>3</sup> Instituto de Física, Teórica, Universidade Estadual Paulista, Rua Pamplona 145, São Paulo, SP, Brazil

Received: 12 October 2004 / Revised version: 1 November 2004 /  
Published online: 21 December 2004 – © Springer-Verlag / Società Italiana di Fisica 2004

**Abstract.** Some 3–3–1 models predict the existence of a non-perturbative regime at the TeV scale. We study in these models and their supersymmetric extensions, the energy at which the non-perturbative limit and a Landau-like pole arise. An order of magnitude for the mass of the extra neutral vector boson,  $Z'$ , present in these models is also obtained.

**PACS.** 12.60.Cn, 12.60.Jv

### 1 Introduction

The so called 3–3–1 extensions of the standard model (SM) are interesting options for the physics at the TeV scale [1, 2]. Although these models coincide at low energies with the SM, they explain some fundamental questions that are accommodated, but not explained by the former. For instance, i) in order to cancel chiral anomalies the number of generation  $N_g$  must be a multiple of three, but because of the asymptotic freedom in QCD, which implies that the number of generations must be  $N_g \leq 5$ , it follows that in those models the only number of generations allowed is  $N_g = 3$ ; ii) these models as any with  $SU(3)_W$  symmetry explain why  $\sin^2 \theta_W < 1/4$  at the  $Z$ -pole (see below); iii) the electric charge is quantized independently of the nature of neutrinos [3]; iv) the Peccei-Quinn symmetry is almost an automatic symmetry of the classical Lagrangian [4] and with a minimal modification, the PQ symmetry as the solution to the strong CP problem is automatically implemented and the axion is protected against semiclassical gravity effects [5]; v) the theory becomes non-perturbative at the TeV scale, and the same happens with the respective  $\mathcal{N} = 1$  supersymmetric version [6]. There are other models with  $SU(3)_W$  symmetry [7], but some of them imply charged heavy bileptons which are stable, that in turn lead to potentially cosmological troubles [8]. Another interesting possibility to consider is by introducing extra dimensions [9] and the orbifold compactification [10, 11], or other sort of 3–3–1 models as in [12]. A common feature of models with  $SU(3)_W$  electroweak symmetry is the existence of simply and doubly charged or neutral non-hermitian vector bosons. For instance, the doubly charged and neutral

vector bosons can be discovered by measurement of the left-right asymmetries in lepton-lepton scattering [13, 14], in muonium-antimuonium transitions [15, 16] or in accelerator processes [17, 18].

One of the main feature of these models is the fact that when the  $g_L$  and  $g_X$  coupling constants of the gauge groups  $SU(3)_L$  and  $U(1)_X$ , respectively, are related with the electroweak mixing angle, the following relation is obtained

$$\frac{g_X^2}{g_L^2} = \frac{\sin^2 \theta_W}{1 - 4 \sin^2 \theta_W} \quad (1)$$

in the models of [1, 2]. When  $\sin^2 \theta_W(\mu) = 1/4$  the coupling constant  $g_X(\mu)$  becomes infinite, i.e., a Landau-like pole arises, however the theory loses its perturbative character even at an energy scale lower than  $\mu$ . The other possibility  $g_L \rightarrow 0$  is ruled out since  $g_L$  is the same as in the standard model,  $g_2$ , due to the fact that the  $SU(2)_L$  subgroup is totally embedded into  $SU(3)_L$ .

The possible existence of a Landau-like pole in 3–3–1 models is not unexpected since every non-associatively free theory seems to have such a behavior. The new feature is that in some of these models that behavior may happen at energies of just few TeVs. This will imply that the cut-off,  $\Lambda_{\text{cutoff}}$ , in the theory can not be eliminated, by taking  $\Lambda_{\text{cutoff}} \rightarrow \infty$ , as it is expected in renormalizable theories. In this limit the theory might be a trivial theory. This is supposed to be the case of pure QED since the works of Landau and co-workers [19]. From the phenomenological point of view this result is not very dangerous, we already know that QED has to be embedded in the electroweak theory at a few hundred GeVs, and also that weak and strong correction have to be taken into account in the calculations of physical observables, even those that are purely electromagnetic in origin, like the  $(g-2)_\mu$  factor, etc.

<sup>a</sup> e-mail: alexdias@fma.if.usp.br

<sup>b</sup> e-mail: remartinez@unal.edu.co

<sup>c</sup> e-mail: vicente@ift.unesp.br

However, as a mathematical laboratory it is interesting to study pure QED at arbitrary small distances. In fact, lattice calculation suggests that chiral symmetry breaking allows QED to escape the Landau pole problem [20, 21]. This should happen because the chiral symmetry breaking is always strong enough to push the Landau pole above the cutoff [20]. It is interesting that the possibility of the existence of the Landau pole, or that the theory is a trivial one, arises already at the lower order in perturbation theory. More sophisticated calculations only enhance our confidence that this phenomenon is not an effect of the perturbation theory at lowest order. This is in accord with the point of view that the renormalization group provide qualitative guidance with respect to the asymptotic behavior at very high energies even where coupling constant at the scale of interest are too large to allow the use of perturbation theory. In particular this method provides usual insight into the types of possible behavior in field theories [22].

Notwithstanding, we must remember that both QED and the standard model are effective, and not fundamental theories. It means that effective operators with dimensions higher than  $d = 4$  have to be considered if we want, for instance, to get a realistic continuum limit in lattice calculations [22]. Thus it seem that using the pure versions of these models are still inconclusive and the renormalization group may give an insight in this issue in 3-3-1 models.

The possibility of triviality implies that new phenomena must enter before the reach the Landau pole: or a new phase of the theory or the theory must be embedded in a more general one. This has been used in the context of the standard model to constraint the upper value of the Higgs boson mass [23]. Moreover, recently it has been argued that this upper limit on the Higgs bosons mass does not come from an instability of the vacuum [24].

In the past years some authors, using perturbation theory, have calculated the energy scale at which the weak mixing angle get the 0.25 value [25–27]. They have been found, taking into account only the degrees of freedom of the standard model, that this condition occurs at an energy scale of the order of 3–4 TeV in the model of [1]. This value is an upper limit of the energy scale at which the Landau-like pole occurs (see the discussion in Sect. 6).

Our goal in this paper is to study the running of  $\sin^2 \theta_W$  with energy in 3-3-1 models [1, 2] and their supersymmetric extensions given in [6]. However, since we have verified that, with the representation content of the minimal models  $g_L$  does not change significantly, we study the running of  $g_X$ . We confirm the order of magnitude of the results of the previous works but we considered a more general scenario, when the  $SU(3)_L$  symmetry breakdown scale,  $\mu_{331}$ , is inside the perturbative range and when the exotic quarks or SUSY particles are considered much heavier than the other particles. As previous calculations, ours are also done at the 1-loop level but we briefly comment the 2-loop case. For this reason our result have to be seen as an estimative of the energy scale where  $\sin^2 \theta_W = 0.25$ . Using the perturbation theory to find a singularity could appears self-contradictory, however, we recall that this behavior at relatively low energy, arises because of the constraint in

(1). We think that our calculations as the previous ones in 3-3-1 models are only preliminary results. When lattice calculations, or other more appropriate techniques, were available they could be compared with those 1-loop calculations, as is usually done in the  $\lambda\phi^4$  or QED cases [24].

The outline of this paper is as follows. In Sect. 2 we revise briefly the minimal representation content of two 3-3-1 models that will be considered next. In Sect. 3 we give the evolution equation and calculate the  $b_i$  coefficients in each model with and without supersymmetry. In this section we also reproduce the calculations of [25–27] of the energy at which the condition  $s_W^2 = 0.25$  is satisfied, taking into account only the degrees of freedom of the standard model. In Sect. 4, we study the evolution of  $\alpha_X \equiv g_X^2/4\pi$ , and calculate the energy scale,  $M'$ , at which  $\alpha_X(M') > 1$ . We also compare this energy with  $\Lambda$  defined as  $\alpha_X(\Lambda) = \infty$ , taking into account the degrees of freedom of the 3-3-1 models for energies above an energy scale that we denote  $\mu_{331}$ . The last section is devoted to our conclusions.

## 2 3-3-1 Models with doubly charged vector bosons

The models that we will take into account in this section are characterized by the electric charge operator,

$$\mathcal{Q}_A = \frac{1}{2} (\lambda_3 - \sqrt{3}\lambda_8) + X, \quad (2)$$

with two different representation content in the leptonic sector that are giving either by  $\Psi_{aL} = (\nu_a, l_a, E_a^+)_L^T \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$  (Model A) or by  $\Psi_{aL} = (\nu_a, l_a, l_a^c)_L^T \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$  (Model B),  $a = e, \mu, \tau$ . Both models contain doubly charged vector bosons. In the first case, we have to add singlets  $l_{aR} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1)$ ,  $E_{aR} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, +1)$ ; and neutrinos  $\nu_{aR} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$ , if necessary. In the second case only right-handed neutrinos have to be added, also if necessary. However, since neutral singlet representations do not affect the running of the coupling constants, we will not worry about them here. In both models the quarks transform as follows:  $Q_{iL} = (d_i, u_i, j_i)_L^T \sim (\mathbf{3}, \mathbf{3}^*, -1/3)$ ;  $i = 1, 2$ ;  $Q_{3L} = (u_3, d_3, J)_L^T \sim (\mathbf{3}, \mathbf{3}, 2/3)$ , with the singlets  $u_{\alpha R} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 2/3)$ ,  $d_{\alpha R} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1/3)$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ ,  $j_{iR} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -4/3)$ , and  $J_R \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 5/3)$ ,

In these models there are fields with masses of the order of magnitude of the  $SU(3)_L$  energy scale. For instance, in Model A the scalar fields necessary to break the gauge symmetry down to  $U(1)_Q$  and giving the correct mass to all fermions in the model are three triplets:  $\eta = (\eta^0, \eta_1^-, \eta_2^+) \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$ ,  $\rho = (\rho^+, \rho^0, \rho^{++}) \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, 1)$  and  $\chi = (\chi^-, \chi^{--}, \chi^0) \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, -1)$ . We will denote the vacuum expectation values as follows:  $\langle \eta^0 \rangle = u/\sqrt{2}$ ,  $\langle \rho^0 \rangle = v/\sqrt{2}$  and  $\langle \chi^0 \rangle = w/\sqrt{2}$ . In Model B it is necessary to add an scalar sextet  $S \sim (\mathbf{1}, \mathbf{6}, 0)$

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1^0 & h_1^- & h_2^+ \\ h_1^- & H_1^{--} & \sigma_2^0 \\ h_2^+ & \sigma_2^0 & H_2^{++} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

and we will use the notation  $\langle \sigma_2^0 \rangle = v_2/\sqrt{2}$ . It is also possible to have  $\langle \sigma_1^0 \rangle \neq 0$  giving to the neutrinos a Majorana mass. We will not be concerned with this here.

In Model A the physical scalar spectra are such that a singly charged scalar, which is a linear combination of  $\eta_1^+$  and  $\rho^+$ , has the square mass [28]

$$M_{1+}^2 \propto \left( u^2 + v^2 - \frac{fuv}{u} - \frac{fuv}{v} \right), \quad (4)$$

and the other singly charged scalar is a linear combination of  $\eta_2^+$  and  $\chi^+$  and has a square mass

$$M_{2+}^2 \propto \left( w^2 + v^2 - \frac{fuv}{u} - \frac{fuv}{w} \right), \quad (5)$$

where  $f < 0$  is the trilinear coupling with dimension of mass. We see that even if  $f = 0$  only one of the singly charged scalar has a low mass, the other one has a mass square proportional to  $w^2$ , so it is heavy enough (unless it is fine tuned) to be decoupled from low energy physics (below the breaking of the  $SU(3)_L$  symmetry). The same happens with the doubly charged physical scalar, a linear combination of  $\rho^{++}$  and  $\chi^{++}$ , with a mass square

$$M_{++}^2 \propto \left( w^2 + v^2 - \frac{fuv}{w} - \frac{fuv}{v} \right), \quad (6)$$

and we see that it is also too heavy (unless fine tuned) and it will not be considered at low energies. On the other hand, in the real scalar fields sector, there are three physical scalar Higgs, two states that do not depend on  $w$  and  $f$  having square masses of the order of  $u^2 + v^2$  and the other one is heavy. It means that at low energies we consider two scalar doublets of  $SU(2)_L$  when we use the standard model degrees of freedom. The vector bosons,  $V^-$ ,  $U^{--}$ , the exotic quarks and scalar singlets, all of them may be heavy since their masses are proportional to  $w$ . The extra neutral vector boson  $Z_2$ , has an even higher mass and also it will not be considered at low energies. This vector bosons is a mixture of  $Z$  and  $Z'$ , but if we neglect this mixture  $Z_2 \approx Z'$ .

### 3 The evolution equations

The evolution equations of the coupling constants at the one loop level are given by

$$\frac{1}{\alpha_i(M)} = \frac{1}{\alpha_i(M_Z)} + \frac{1}{2\pi} b_i \ln \left( \frac{M_Z}{M} \right), \quad i = 1, 2, 3; \quad (7)$$

where  $\alpha_i = g_i^2/4\pi$  and  $g_3, g_2, g_1$  are the coupling constant of the  $SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y$  gauge groups, respectively. In the context of 3-3-1 models we define the  $b_i$  coefficients corresponding to the coupling constants  $g_3, g_L, g_X$  of the gauge groups  $SU(3)_C, SU(3)_L, U(1)_X$ , respectively.

For a general  $SU(N)$  gauge group the  $b_i$  coefficients are given by

$$b_i = \frac{2}{3} \sum_{\text{fermions}} T_{Ri}(F) + \frac{1}{3} \sum_{\text{scalars}} T_{Ri}(S) - \frac{11}{3} C_{2i}(G) \quad (8)$$

for Weyl fermions and complex scalars, and  $T_R(I)\delta^{ab} = \text{Tr}[T^a(I)T^b(I)]$  with  $I = F, S$ ;  $T_R(I) = 1/2$  for the fundamental representation,  $C_2(G) = N$  for  $SU(N)$  and  $C_2(G) = 0$  for  $U(1)$ . For  $U(1)_y$  we use  $\sum T_{R1}(F, S) = \sum y^2$  where  $y = Y/2$  for the standard model and  $y = X$  for the 3-3-1 models. On the other hand for the respective supersymmetric version we have

$$b_i^{\text{susy}} = \sum_{\text{fermions}} T_{Ri}(F) + \sum_{\text{scalars}} T_{Ri}(S) - 3 C_{2i}(G), \quad (9)$$

and only the usual non-supersymmetric fields are counted now.

We will assume that the standard model with several scalar multiplets is valid until an energy scale  $\mu_{331}$ , i. e., below  $\mu_{331}$  we consider the SM plus some light scalar doublets or triplets. A  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  model with  $N_g = 3$  fermion generations,  $N_H$  scalar doublets ( $Y = \pm 1$ ) and  $N_T$  non-hermitian scalar triplets ( $Y = 2$ ), using (8) and the representation content above, implies

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{6} N_H + N_T + \frac{20}{3}, \\ b_2 &= \frac{1}{6} N_H + \frac{2}{3} N_T - \frac{10}{3}, \\ b_3 &= -7. \end{aligned} \quad (10)$$

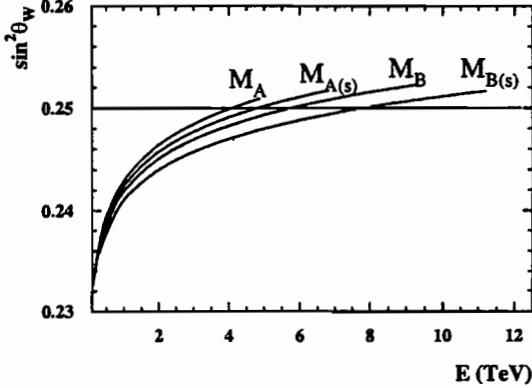
Notice that we have not used a grand unification normalization for the hypercharge  $Y$  assignment. Since we will assume that  $\mu_{\text{susy}} \approx \mu_{331}$  when considering the SUSY extensions of a 3-3-1 model, below  $\mu_{331}$  the only effect of supersymmetry will be the addition of light scalar multiplets. Above  $\mu_{331}$ , we have to consider the degrees of freedom of the 3-3-1 models.

The heavy leptons,  $E_a$  in Model A, quarks  $J$  and  $j_i$ ; the scalar singlets  $\eta_2^+, \rho^{++}$ ; the scalar doublets like  $(\chi^-, \chi^{--})$ ; and finally, the vector doublets like  $(V^-, Y^{--})$  and the extra neutral vector boson,  $Z'$ , will not be considered as active degrees of freedom below  $\mu_{331}$ . Hence, in non-SUSY Model A we have  $N_H = 2$  and  $N_T = 0$ ; in the SUSY version  $N_H = 4$  and  $N_T = 0$ . In the non-SUSY Model B we have to take into account the scalar sextet which implies an additional doublet and an non-hermitian triplet, so that  $N_H = 3$  and  $N_T = 1$ , and  $N_H = 6$  and  $N_T = 2$  in the SUSY case.

In the energy regime below  $\mu_{331}$  we use the standard definition for  $\sin^2 \theta_W(\mu)$ :

$$\sin^2 \theta_W(\mu) = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_2(\mu)}{\alpha_1(\mu)}}, \quad \mu \leq \mu_{331}. \quad (11)$$

With this equation for the weak mixing angle and the  $b_i$  coefficients in (10), we obtain the value of  $\sin^2 \theta_W(\mu_{331})$  using the running equation of  $\alpha_{1,2}^{-1}$  given by (7), which will be used as an input for the case of energies above  $\mu_{331}$ . The values of the energies at which  $\sin^2 \hat{\theta}_W(\Lambda) = 0.25$  (at which the curves cut the values 0.25), in models A and B with and without supersymmetry, are shown in Fig. 1. These energies give an order of magnitude of the energy scale of the Landau Pole. In particular, for the non-SUSY



**Fig. 1.** Running of the electroweak mixing angle for Models A and B considering only the degrees of freedom of the effective 3-2-1 model. (s) stands for the respective supersymmetrized version

Model A (leftmost curve in the figure) we obtain a value for  $\Lambda$  in agreement with that of [25–27], i.e.,  $\approx 4$  TeV.

Next, we consider the case of energies above the scale  $\mu_{331}$ . Now we have to use the relation

$$\sin^2 \theta_W(\mu) = \frac{1}{4} \frac{1}{1 + \frac{\alpha_L(\mu)}{4\alpha_X(\mu)}} \leq 1/4, \quad \mu \geq \mu_{331}, \quad (12)$$

and the running equation we will be concerned is

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_X(\mu)} &= \left[ 1 - 4 \sin^2 \hat{\theta}_W(M_Z) \right] \frac{1}{\alpha(M_Z)} + \frac{1}{2\pi} (b_1 - 3b_2) \\ &\times \ln \left( \frac{M_Z}{\mu_{331}} \right) + \frac{1}{2\pi} b_X^r \ln \left( \frac{\mu_{331}}{\mu} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

where  $b_X^r$ , with  $r = A, B$ , are given below by (14) for Model A, or by (15) for Model B, respectively; with  $\sin^2 \hat{\theta}_W(M_Z) = 0.2311$ ,  $\alpha(M_Z) = 1/128$  and  $M_Z = 91.188$  GeV [29].

The  $b_i$  coefficients in Model A, with and without SUSY, when the degrees of freedom above  $\mu_{331}$  are taken into account, are given by:

$$\begin{aligned} b_X^A &= 24 + N_\rho + N_\chi, \\ b_{XJ}^A &= 10 + N_\rho + N_\chi, \\ b_X^{A(\text{susy})} &= 36 + 3(N_\rho + N_\chi), \\ b_{XJ}^{A(\text{susy})} &= 15 + 3(N_\rho + N_\chi). \end{aligned} \quad (14)$$

Similarly, for the case of Model B, we have

$$\begin{aligned} b_X^B &= 20 + N_\rho + N_\chi, \\ b_{XJ}^B &= 6 + N_\rho + N_\chi, \\ b_X^{B(\text{susy})} &= 30 + 3(N_\rho + N_\chi), \\ b_{XJ}^{B(\text{susy})} &= 9 + 3(N_\rho + N_\chi). \end{aligned} \quad (15)$$

In (14) and (15) we also show the cases when we omit the exotic quarks (this is denoted by  $J$  in  $b_X$ ). We recall that

in the supersymmetric versions we have assumed  $\mu_{\text{susy}} \approx \mu_{331}$ .

In the minimal non-SUSY version of models A and B, we have  $N_\rho = N_\chi = 1$  and  $N_\rho = N_\chi = 2$  in the respective SUSY models. Notice that in both models adding more triplet of scalars like  $\rho$  and  $\chi$  enhance  $b_X$  and produce a lower value for  $\Lambda$ . In the SUSY version the running is always faster.

## 4 The Landau pole

We see from (12) that  $\alpha_X(\mu) \rightarrow \infty$  when  $\mu \rightarrow \Lambda$ , and we have  $\sin^2 \theta_W(\mu) \rightarrow 0.25$ . This is the Landau pole that we have mentioned in Sect. 1. In practice we study, using (13), what is the energy  $\mu = M'$  at which  $\alpha_X(M') > 1$ , i.e., the condition when  $\alpha_X$  becomes non-perturbative and we compare this result with the energy  $\Lambda$  calculated directly by the expression

$$\Lambda = \mu_{331} \exp \left( \frac{2\pi}{b_X \alpha_X(\mu_{331})} \right), \quad (16)$$

which must coincide with, or be of the same order, the value obtained by using the condition  $\sin^2 \theta_W(\Lambda) = 0.25$ . Of course, we expect that  $M' \lesssim \Lambda$ .

### 4.1 The Landau pole in model A

As we said before, at energies below  $\mu_{331}$  there is an approximated  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  symmetry with the particle content of the SM plus a second scalar doublet, i.e., in the context of Model A: in the fermion sector there are the usual doublets ( $\nu_a, l_a)_L \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1)$  and ( $u_\alpha, d_\alpha)_L \sim (\mathbf{3}, \mathbf{2}, 1/3)$ ; the singlets  $l_{aR} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -2)$  (and right-handed neutrinos but they do not affect the running of the constants); and  $u_{\alpha R} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, 4/3)$ ,  $d_{\alpha R} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -2/3)$ . In the scalar sector we have two doublets  $(\eta^0, \eta^-_1) \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1)$  and  $(\rho^+, \rho^0) \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2}, +1)$ .

These are the degrees of freedom that are active at energies  $\mu \leq \mu_{331}$ . Hence, we have  $N_H = 2, N_T = 0$  in the non-SUSY model and  $N_H = 4, N_T = 0$  in the SUSY one. With this particle content we have from (10) [for completeness we include the coefficient  $b_3$ ]:

$$\begin{aligned} (b_1, b_2, b_3) &= (7, -3, -7), \\ (b_1, b_2, b_3)^{\text{susy}} &= (22/3, -8/3, -7), \end{aligned} \quad (17)$$

and using (11) for obtaining  $\alpha_X(\mu_{331})$ . If we use only the degrees of freedom that were used in obtaining the coefficients above we get, using (11), that  $\sin^2 \hat{\theta}_W(\Lambda) = 0.25$  when  $\Lambda \approx 4.10$  TeV in the non-SUSY case and  $\Lambda \approx 4.8$  TeV in the SUSY case, as can be seen from Fig. 1.

Above the  $\mu_{331}$  scale, the full representation of the 3-3-1 model have to be taken into account and we get, according to (14) [for future use we have included the coefficients  $b_L, b_3$ ],

$$(b_X, b_L, b_3)^A = (26, -13/2, -5),$$

**Table 1.** Values of  $M'$  and  $\Lambda$  for the non-SUSY Model A. The number inside parenthesis are the values for the case when we omit the exotic quarks in the running equation. We show, in the last column, an estimative for the mass of the  $Z'$  vector boson. All masses are in TeV

$\mu_{331}$	$\hat{\alpha}_X(\mu_{331})$	$M'$	$\Lambda$	$M_{Z'}(\mu_{331})$
2.0	0.55	2.4(3.0)	3.1(5.2)	5.2
1.5	0.39	2.2(3.4)	2.8(5.7)	3.3
1.0	0.28	1.9(3.9)	2.4(6.5)	1.9
0.75	0.23	1.7(4.2)	2.1(7.1)	1.3
0.5	0.19	1.4(4.8)	1.8 (8.2)	0.8

**Table 2.** Same as Table 1 but for the SUSY Model A

$\mu_{331}$	$\hat{\alpha}_X(\mu_{331})$	$M'$	$\Lambda$	$M_{Z'}(\mu_{331})$
2.0	0.47	2.3(2.6)	2.6(3.3)	4.9
1.5	0.35	1.9(2.3)	2.1(2.9)	3.1
1.0	0.26	1.4(1.9)	1.6(2.4)	1.8
0.75	0.22	1.2(1.7)	1.3(2.1)	1.2
0.50	0.18	0.9(1.4)	1.0 (1.8)	0.75

$$(b_X, b_L, b_3)_J^A = (12, -13/2, -7); \\ (b_X, b_L, b_3)^{A(\text{susy})} = (48, 0, 0), \\ (b_X, b_L, b_3)_J^{A(\text{susy})} = (27, 0, -3). \quad (18)$$

With the exotic quarks we will consider two situations. First, that they have masses below  $\Lambda$  and are taken into account in the evolution equations in the interval  $[\mu_{331}, \Lambda]$ ; second, we assume that their masses are higher than  $\Lambda$  and are not considered in the running coupling constants.

The result for the non-supersymmetric model appear in Table 1 for different values for the  $\mu_{331}$  scale: 2.0, 1.5, 1.0, 0.75 and 0.50 TeV. The same is done in Table 2 for the supersymmetric model. In both cases the  $M'$  and  $\Lambda$  values when the exotic quarks are considered heavy until the Landau pole scale are shown in parenthesis in the respective table. In the last column we show an order of magnitude of the  $Z'$  neutral vector boson (see below).

#### 4.2 The Landau pole in model B

In this case below  $\mu_{331}$  in the scalar sector we have to consider three doublets  $(\eta^0, \eta_1^-) \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1)$ ,  $(\rho^+, \rho^0) \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2}, +1)$ ; and one non-hermitian triplet  $T \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, +2)$ . With this particle content we have from (10), below  $\mu_{331}$  i.e., we have  $N_H = 3$  and  $N_T = 1$  ( $N_H = 6$ ,  $N_T = 2$  in the SUSY case):

$$(b_1, b_2, b_3) = (49/6, -13/6, -7), \\ (b_1, b_2, b_3)^{\text{susy}} = (32/3, -1, -7). \quad (19)$$

If we use only the degrees of freedom that were used in obtaining the coefficients above we get again, from (11), that  $\sin^2 \hat{\theta}_W(\Lambda) = 0.25$  when  $\Lambda \approx 5.7$  TeV in the non-SUSY

**Table 3.** Same as Table 1 but for the Model B

$\mu_{331}$	$\hat{\alpha}_X(\mu_{331})$	$M'$	$\Lambda$	$M_{Z'}(\mu_{331})$
2.0	0.40	3.0(6.3)	4.0(13.9)	4.5
1.5	0.32	2.7(8.0)	3.8(17.7)	3.0
1.0	0.24	2.4(11.3)	3.2(24.8)	1.7
0.75	0.21	2.2(14.4)	2.9(31.5)	1.2
0.5	0.17	1.9(20.1)	2.5 (44.2)	0.7

**Table 4.** Same as Table 2, but for the SUSY Model B

$\mu_{331}$	$\hat{\alpha}_X(\mu_{331})$	$M'$	$\Lambda$	$M_{Z'}(\mu_{331})$
2.0	0.34	2.7(3.5)	3.1(4.8)	4.1
1.5	0.28	2.2(3.2)	2.5(4.4)	2.8
1.0	0.22	1.7(2.8)	1.9(3.8)	1.7
0.75	0.19	1.4(2.5)	1.6(3.4)	1.1
0.5	0.17	1.0(2.2)	1.2(3.0)	0.7

case and  $\Lambda \approx 7.8$  TeV in the SUSY case, as can be seen from Fig. 1. If we consider the doublet  $(h_2^+, \sigma_2^0)$  heavy (but keeping its VEV small) we get  $b_1 = 8$  and  $b_1^{\text{susy}} = 28/3$  and the values for  $M'$  and  $\Lambda$  are a little bit smaller than the case considered here.

Above the  $\mu_{331}$  scale, the full representation of the 3-3-1 model have to be taken into account and we obtain, according to (15) [again for future use we have included again the coefficients  $b_L, b_3$ ],

$$(b_X, b_L, b_3)^B = (22, -17/3, -5), \\ (b_X, b_L, b_3)_J^B = (8, -17/3, -7), \\ (b_X, b_L, b_3)^{B(\text{susy})} = (42, 5, 0), \\ (b_X, b_L, b_3)_J^{B(\text{susy})} = (21, 5, -3). \quad (20)$$

The results are shown in Table 3 for the non-SUSY Model B and in Table 4 for the respective SUSY model.

#### 5 $Z'$ mass and 2-loop evolution equations

The  $Z'$  is the heaviest vector boson of the models, the Landau pole energy scale ( $\Lambda$ ) is supposed to be an upper limit for its mass in the context of a perturbative approach [25]. However, the mass of this boson, at the scale  $\mu_{331}$ , and assuming  $\langle \chi^0 \rangle \approx \mu_{331}$  has an order of magnitude given by

$$M_{Z'}(\mu_{331}) \simeq [4\pi \alpha_X(\mu_{331})]^{1/2} \mu_{331}. \quad (21)$$

The values for the estimative of  $M_{Z'}$  using (21) are shown in the last column of Tables 1-4. We see that for some values of  $\alpha_X$ ,  $M_{Z'}$  is larger than  $M'$  or  $\Lambda$ .

It is interesting to note that in the SUSY version of Model A at energies above  $\mu_{331}$  the dependence with the energy in  $SU(3)_L$  and  $SU(3)_C$  is lost since, as can be seen from (18), at the 1-loop we have that  $b_L = b_3 = 0$ , i.e.,

$$\alpha_L(\mu > \mu_{331}) = \alpha_3(\mu > \mu_{331}) = \text{constant}, \quad (22)$$

and the same occurs for SUSY Model B for  $\alpha_3$  as shown in (20). We can wonder if this is an artifact of the 1-loop approximation. Thus, let us consider the two-loop evolution equations that are given by

$$\mu \frac{d\alpha_i(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{2\pi} \left[ b_i + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^3 b_{ij} \alpha_j(\mu) \right] \alpha_i(\mu)^2, \quad (23)$$

where we have not considered the Yukawa couplings since in any case their dominant contributions seems to be positive. For example, in SUSY Model A [30]

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{784}{3} + 12(N_\rho + N_\chi) & 32 + 16(N_\rho + N_\chi) & 160 \\ 4 + 2(N_\rho + N_\chi) & 14 + \frac{17}{3}(N_\rho + N_\chi) & 48 \\ \frac{62}{3} & 24 & 48 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

In fact, in (23), we have  $N_\rho = N_\chi = 2$  since we are considering the SUSY version. We see that even at this order the asymptotic freedom for QCD has been lost for energies higher than  $\mu_{331}$ . The lose of the asymptotic freedom at higher energies, for both the SUSY Model A and B is a prediction of the models since this result does not depend on the value of  $\mu_{331}$ . Of course, a more careful analysis should be done.

## 6 Discussions

We have re-examined the question of the non-perturbative limit and the Landau-like pole in 3-3-1 models. In addition we have considered the respective supersymmetric versions and also the situation when the exotic quarks are heavy enough and do not enter in the running equation of  $\alpha_X$ . In practice what we have studied is the energy scale at which a model loses its perturbative character,  $M'$ , or calculated directly the Landau pole,  $\Lambda$ , from (16). We find, as expected, that for all these models these energy scales are of the same order of magnitude, i.e.,  $M' \lesssim \Lambda$ .

From Table 1 we see that for Model A, the values of  $M'$  and  $\Lambda$  decrease with the value of  $\mu_{331}$  but increase for lower  $\mu_{331}$  if we omit the exotic quarks in the running equation. The maximal values of 4.8 TeV or 8.2 TeV without the exotic quarks, respectively, occur when  $\mu_{331} = 500$  GeV. For the respective SUSY cases, we see from Table 2 that  $M'$  and  $\Lambda$  always decrease with  $\mu_{331}$  and also that they have lower values than the respective non-SUSY model. The result for the model with the scalar sextet (Model B) are shown in Tables 3 and 4. The largest value for  $M'$  ( $\Lambda$ ) is 20.1 (44.2) TeV when the heavy quarks are not considered. As in Model A, both scales also decrease with the value of  $\mu_{331}$ .

Notice that from Table 1, the value of  $\Lambda$  (or  $M'$ ) for Model A (without SUSY) is always lower than the value obtained in [25–27] and in Fig. 1. As we have mentioned before, the latter value should be an upper limit for  $\Lambda$ . This is confirmed when the extra degrees of freedom of the 3-3-1 model are taken into account, for energies above  $\mu_{331}$ . As said before, we can see from Tables 1–4, the value

of  $\Lambda$  increases when the scale  $\mu_{331}$  increases. But, as  $\mu_{331}$  becomes larger the difference between both energy scales becomes smaller and in some point  $\mu_{331}$  must be equal to  $\Lambda$ . However, notice also that when we omit from the analyses the exotic quarks this upper bound is evaded. This happens because the right-handed components of those quarks have the largest value of the  $U(1)_X$  charge making that  $\alpha_X$  run more rapidly compared to the case where only the standard model particles are taken into account. When the heavy quarks are switched off  $\alpha_X$  run again slowly and the Landau-like pole occurs at a higher energy. The scenarios without the exotic quarks could be realized if there are strong dynamical effects with these degrees of freedom in this range of energy and probably the number of scalar multiplets of these models may be lower than it has been considered [31]. Notice also that since SUSY implies more degrees of freedom the values of  $M'$  and  $\Lambda$  are always lower than in the respective non-SUSY model. If the Landau pole is calculated by using only the degrees of freedom below the 3-3-1 energy and the condition  $\sin^2 \theta_W(\Lambda) = 0.25$  from (11), the value obtained is shown in Fig. 1. Since the value of  $\mu_{331}$  is below of these values we have studied how the value of the pole and the perturbative limit are modified when  $0.5 \leq \mu_{331} \leq 2$  TeV.

Finally, let us mention that there is another type of 3-3-1 model in which the right-handed neutrinos or heavy neutral leptons belong to the same triplet than the ordinary leptons [32,33]. The charge operator is defined in this case as

$$Q_B = \frac{1}{2} \left( \lambda_3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \lambda_8 \right) + X. \quad (25)$$

In this sort of models the Landau pole arise above the Planck scale and for this reason it has no physical consequences. However, models with electric charge operator defined by (2) and (25) are embedded in an  $SU(3)_C \otimes SU(4)_L \otimes U(1)_N$  but in this 3-4-1 model the relating the coupling constant  $g_L$  and  $g_X$  is given also by (1) [34]. Thus, our results are also valid for the case of 3-4-1 models.

*Acknowledgements.* A.G.D. was supported by FAPESP under the process 01/13607-3, R.M. was supported by COLCIENCIAS and V.P. was partially supported by CNPq under the process 306087/88-0.

## References

1. F. Pisano, V. Pleitez, Phys. Rev. D **46** (1992) 410; R. Foot, O.F. Hernandez, F. Pisano, V. Pleitez, Phys. Rev. D **47** (1993) 4158; P. Frampton, Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 2889
2. V. Pleitez, M.D. Tonasse, Phys. Rev. D **48**, 2353 (1993)
3. C.A. de S. Pires, O. Ravinez, Phys. Rev. D **58**, 035008 (1998)
4. P.B. Pal, Phys. Rev. D **52**, 1659 (1995)
5. A.G. Dias, V. Pleitez, M.D. Tonasse, Phys. Rev. D **67**, 095008 (2003); A.G. Dias, V. Pleitez, Phys. Rev. D **69**, 077702 (2004); A.G. Dias, C.A. de S. Pires, P.S. Rodrigues da Silva, Phys. Rev. D **68**, 115009 (2003) and references therein

6. J.C. Montero, V. Pleitez, M.C. Rodriguez, Phys. Rev. D **65**, 035006 (2002); hep-ph/0406299
7. S. Dimopoulos, D.E. Kaplan, Phys. Lett. B **531**, 127 (2002)
8. C. Csáki, J. Erlich, G.D. Kribs, J. Terning, Phys. Rev. D **66**, 075008 (2002)
9. S. Dimopoulos, D.E. Kaplan, N. Weiner, Phys. Lett. B **534**, 124 (2002); T. Li, W. Liao, Phys. Rev. B **545**, 147(2002);
10. W. Chang, J.N. Ng, Phys. Rev. D **69**, 056005 (2004)
11. I. Gogoladze, Y. Mimura, S. Nandi, Phys. Lett. B **554**, 81 (2003)
12. R. Martinez, W.A. Ponce, L.A. Sánchez, Phys. Rev. D **65**, 055013 (2002); W.A. Ponce, Y. Giraldo, L.A. Sánchez, Phys. Rev. D **67** (2003) 075001
13. J.C. Montero, V. Pleitez, M.C. Rodriguez, Phys. Rev. D **58**, 094076, 097505 (1998), Int. J. Mod. Phys. A **16**, 1147, 2001; hep-ph/0204130; P.H. Frampton, A. Rasin, Phys. Lett. B **482**, 129 (2000)
14. M.A. Perez, G. Tavares-Velasco, J.J. Toscano, Phys. Rev. D **69**, 115004 (2004)
15. L. Willmann et. al., Phys. Rev. Lett. **82**, 49 (1999)
16. V. Pleitez, Phys. Rev. D **61**, 057903 (2000)
17. B. Dion, T. Gregoire, D. London, L. Marleau, H. Nadeau, Phys. Rev. D **59**, 075006 (1999)
18. M.B. Tully, G.C. Joshi, Phys. Lett. B **466**, 333 (1999); E.M. Gregores, A. Gusso, S.F. Novaes, Phys. Rev. D **64**, 015004 (2001); J.L. Garcia-Luna, G. Tavares-Velasco, J.J. Toscano, Phys. Rev. D **69**, 093005 (2004)
19. L.D. Landau, in: Niels Bohr and the Development of Physics, edited by W. Pauli (Pergamon Press, London, 1955), p. 52 and references therein
20. M. Göckerler et al., Phys. Rev. Lett. **19**, 4119 (1998)
21. H. Gies, J. Jaeckel, hep-ph/0405183
22. S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields (Cambridge University Press, New York, 1996), Sect. 18.3
23. R. Dashen, H. Neuberger, Phys. Rev. Lett. **24**, 1897 (1983); M.A.B. Bég, C. Panagiotakopoulos, A. Sirlin, Phys. Rev. Lett. **52**, 883 (1984); M. Lindner, Z. Phys. C **31**, 295 (1986); J. Kuti, L. Lin, Y. Shen, Phys. Rev. Lett. **61**, 678 (1988); P. Hasenfratz, J. Nager, Z. Phys. C **37**, 477 (1988); M. Lüscher, P. Weisz, Phys. Lett. B **212**, 472 (1988); T. Hambye, K. Riesselmann, Phys. Rev. D, **55**, 7255 (1997) and references therein
24. K. Holland, hep-lat/0409112
25. D. Ng, Phys. Rev. D **49**, 4805 (1994)
26. P. Jain, S.D. Joglekar, Phys. Lett. B **407**, 151 (1997)
27. P.H. Frampton, Int. J. Mod. Phys. A **13**, 2345 (1998). More recently a value of 4 TeV for the energy of the pole has been given in P.H. Frampton, Mod. Phys. Lett. A **18**, 1377 (2003)
28. J.C. Montero, V. Pleitez, O. Ravinez, Phys. Rev. D **60**, 076003 (1999)
29. S. Eidelman et al. (Particle Data Group), Phys. Lett. B **592**, 1 (2004)
30. D.R.T. Jones, Phys. Rev. D **25**, 581 (1982); M.E. Machacek, M.T. Vaugh, Nucl. Phys. B **222**, 83 (1983)
31. P. Das, P. Jain, Phys. Rev. D **69**, 075001 (2000)
32. J.C. Montero, F. Pisano, V. Pleitez, Phys. Rev. D **47**, 2918 (1993); R. Foot, H.N. Long, T.A. Tran, Phys. Rev. D **50**, R34 (1994); H.N. Long, Phys. Rev. D **54**, 4691 (1996)
33. G. Tavares-Velasco, J.J. Toscano, hep-ph/0407047
34. F. Pisano, V. Pleitez, Phys. Rev. D **51**, 3865 (1995).

# Dynamically Induced Spontaneous Symmetry Breaking in 3-3-1 Models

Alex G. Dias<sup>a</sup> C.A. de S. Pires<sup>b</sup> V. Pleitez<sup>c</sup>  
and P.S. Rodrigues da Silva<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Instituto de Física, Universidade de São Paulo,  
Caixa Postal 66.318, 05315-970, São Paulo-SP, Brazil*

<sup>b</sup>*Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, Caixa Postal 5008,  
58059-970, João Pessoa - PB, Brazil*

<sup>c</sup>*Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista  
Rua Pamplona, 145, 01405-900 São Paulo, SP - Brazil*

---

## Abstract

We show that in  $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_N$  (3-3-1) models embedded with a singlet scalar playing the role of the axion, after imposing scale invariance, dynamical symmetry breaking of Peccei-Quinn symmetry occurs through the one-loop effective potential for the singlet field. We, then, analyze the structure of spontaneous symmetry breaking by studying the new scalar potential for the model, and verify that electroweak symmetry breaking is tightly connected to the 3-3-1 breaking by the strong constraints among their vacuum expectation values. This offers a valuable guide to write down the correct pattern of symmetry breaking for multi-scalar theories. We also obtained that the accompanying massive pseudo-scalar, instead of acquiring mass of order of Peccei-Quinn scale as we would expect, develops a mass at a much lower scale, a consequence solely of the dynamical breaking.

*Key words:* Effective potential, 3-3-1 model, Dynamical symmetry breaking  
*PACS:* 12.60.Cn, 14.80.Mz

---

## 1 Introduction

The origin of mass has been one of the greatest mysteries in Particle Physics. The simplest way we envision particles getting their masses is through Higgs mechanism, which takes place when a gauge invariant theory undergoes spontaneous symmetry breaking (SSB) as its potential develops a non-trivial value (a non zero vacuum expectation value (VEV)) for the scalar field at its minimum.

In the context of the Standard Model (SM) this is achieved by means of the most general gauge invariant and renormalizable potential,  $V = \mu^2\phi^\dagger\phi + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$ . Stability forces us to choose  $\lambda > 0$ . But the choice of the unique dimensional parameter in the model,  $\mu^2$ , is enforced to accommodate the mass generation mechanism. This ad hoc construction brings to the theory an undetermined parameter making impossible to directly predict the scalar particle mass. However, thirty years ago, it was shown that quantum corrections can lead to SSB in a scale invariant theory through the computation of its effective potential, the Coleman-Weinberg (CW) mechanism [1]. In such theories a typical mass scale is connected to the dimensionless parameters through the so called dimensional transmutation, which trades a coupling constant by a mass parameter. So, the particle masses, resulting from the scalar field condensation, would have a dynamical origin.

At one loop level, the dominant contribution arising from the most massive particles leads to the following form for the SM effective potential, according to the CW mechanism [2],

$$V = B_{SM}\phi^4[\ln(\frac{\phi}{\langle\phi\rangle}) - \frac{1}{2}]. \quad (1)$$

The coefficient  $B_{SM}$  is given by

$$B_{SM} = \frac{1}{64\pi^2\langle\phi\rangle^4}(3M_Z^4 + 6M_W^4 - 12M_t^4), \quad (2)$$

where  $M_Z$ ,  $M_W$  and  $M_t$  are the neutral, charged gauge bosons and top quark masses, respectively. In order to have  $V$  bounded from below, the condition  $B_{SM} > 0$  has to be verified. In this way, the Higgs mass could be predicted in terms of the known particle masses of SM. At the time this idea was proposed, it was only possible to put an upper bound on the Higgs mass, since the top quark was not detected yet and there was a lot of uncertainty on the possible value of its mass. However, with the top quark mass determination,  $M_t \approx 174$  GeV, the CW mechanism seemed then definitely discarded in the context of the SM once it implied  $B_{SM} < 0$ . Moreover, Eq. (2) was derived by considering that the Higgs self-coupling was negligible compared to the other couplings in the theory, an assumption which is valid when the Yukawa couplings are small. However, since we already know that top quark is heavy, the Eq. (2) loses its meaning as it stands, and should be properly modified in order to account for a large Higgs self-coupling <sup>1</sup>. By the other side, some simple extensions of SM were studied by adding more scalar fields, allowing for a stable effective

---

<sup>1</sup> Recently, Elias et. al, in the Ref. [3], have shown that renormalization group improved Coleman-Weinberg mechanism in SM predicts a Higgs mass around 216 GeV when leading logarithms are summed over.

potential even for fermion masses above  $M_t$  [4]. Also, one should care about finite temperature effects as addressed in Refs. [2,5,6], but they are important only if fermions are involved in the computation of the effective potential, which is not going to be the case in the study we perform here.

In this work we consider the CW mechanism and its effects, in 3-3-1 models [7] endowed with a singlet scalar field playing the role of the axion [8,9]. These 3-3-1 models are very attractive extensions of the gauge sector of SM, possessing additional scalar multiplets and, among several nice features, they can naturally accommodate a Peccei-Quinn (PQ) symmetry [10],  $U(1)_{PQ}$ , and solve the strong-CP problem with an invisible axion stable under gravitational effects if an appropriate  $Z_N$  symmetry is imposed [8,9]. Their scalar sector can have three [8] or five [9] neutral complex scalars, besides the singlet, which could develop VEV's. It is natural to ask if these VEV's (or some of them) could be an outcome of some dynamically broken symmetry at a higher energy scale. We remark that throughout this text we are going to use the expression *dynamical symmetry breaking* as referring to CW mechanism leading to a nontrivial VEV, which should not be confused with some fermion condensation as, for instance, in Technicolor models. Our aim then is to obtain SSB at the electroweak scale driven by dynamical breaking at this higher scale, specifically the PQ scale around  $10^{12}$  GeV.

It is suitable to stress that the method here developed can be useful in similar situations for models containing multiple scalars able to develop VEV's. Its application to 3-3-1 models contains all the information needed to closely follow the details of our procedure. We believe it is a valuable tool for model builders when dealing with several neutral scalars and facing the need to pick up non-trivial values among several VEV's.

Next we review the field content of the models imposing the scale invariance. Then we perform the one loop calculation of the effective potential and look for the possibility of obtaining SSB driven by dynamical breaking in model I and comment the results for model II, which are very similar. Finally, we present our conclusions.

## 2 The models

The class of models we are going to deal here, known as 3-3-1, first proposed about ten years ago [7], constitute a gauge extension of SM which, among several nice features, requires a multiple of three fermion families for anomaly cancellation [7,11,12]. Also, QCD demands a maximum of sixteen fermions for asymptotic freedom, which in 3-3-1 models translate to the fact that the number of families cannot exceed five (if we believe that asymptotic freedom

stays valid at 3-3-1 scale), automatically implying that only three families are allowed, naturally explaining the outstanding family problem. Besides, there is a bunch of new particles and interactions which make these models phenomenologically rich and attractive as an alternative to the SM <sup>2</sup>, since they can be tested already at next collider experiments aimed to work at the TeV scale. Among the possible field representations, we choose to work with only three scalar triplets, which is the minimal scalar content needed to generate the mass spectrum in two of these models. In the first model, an exotic lepton appears in the leptonic triplets and right-handed neutrinos come in singlets. Although a restriction on its perturbative applicability was found in Ref. [14], the situation can be improved by adding new fermions in non-fundamental representations [15]. The second model is the so-called 3-3-1 with right-handed neutrinos [12,16], where right handed neutrinos naturally belong to the lepton triplets, instead of singlets, avoiding the introduction of heavier leptons.

With a singlet scalar  $\phi \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0)$  embedded in the model [8,9], we are going to impose scale invariance so that no dimensional parameter is allowed at tree level. Without scale invariance, mass terms for the scalars are present in the lagrangian and the naturalness problem sets in, which means we have to fine tune, order by order, the smallness of these masses with the hugeness of Planck scale. Rather than explaining this fine tuning, we assume that the mass terms for the scalars are zero from the beginning, a choice which is no less natural than fine tuning, justifying scale invariance. Below we briefly review these models.

## 2.1 Model I

This version of 3-3-1 model contains exotic charged leptons and quarks, and can be minimally implemented by considering only three scalar triplets [11]. Its lepton content transforms under the gauge symmetry  $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_N$  as follows,

$$f_L^a = (\nu_L^a \ l_L^a \ E_L^a)^T \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0), \\ \nu_{aR} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, 0), \ l_{aR} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1), \ E_{aR} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, +1). \quad (3)$$

with  $a = 1, 2, 3$  representing the three known generations. The left-handed quarks transform as,

---

<sup>2</sup> Electroweak models with  $SU(3)$  symmetry also have some predictive power concerning the observed value of the weak mixing angle and can be embedded in theories of TeV-gravity (see Ref. [13] and references therein).

$$Q_{iL} = (d_{iL} \ u_{iL} \ j_{iL})^T, \quad Q_{3L} = (u_{3L} \ d_{3L} \ J_L)^T, \quad (4)$$

where  $Q_{iL} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{3}^*, -1/3)$  and  $Q_{3L} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{3}, 2/3)$ , while the right-handed ones transform as,

$$\begin{aligned} u_{aR} &\sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, 2/3), \quad d_{aR} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3), \\ j_{mR} &\sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -4/3), \quad J_R \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, 5/3), \end{aligned} \quad (5)$$

with  $i, m = 1, 2$  and  $a = 1, 2, 3$ .

In the scalar sector, this model possess three triplets responsible for the fermion masses,

$$\chi = (\chi^- \ \chi^{--} \ \chi^0)^T, \quad \eta = (\eta^0 \ \eta_1^- \ \eta_2^+)^T, \quad \rho = (\rho^+ \ \rho^0 \ \rho^{++})^T, \quad (6)$$

transforming as  $\chi \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, -1)$ ,  $\eta \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, 0)$  and  $\rho \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, 1)$ , respectively.

Since the number of independent fields is large enough, it was observed in Ref. [8] that a  $Z_{13}$  symmetry can be naturally associated to this model. We can then write the most general, renormalizable, gauge,  $Z_{13}$  and scale invariant potential for this model,

$$\begin{aligned} V = & \lambda_1 \eta^4 + \lambda_2 \rho^4 + \lambda_3 \chi^4 + \lambda_4 (\eta^\dagger \eta) (\rho^\dagger \rho) + \lambda_5 (\eta^\dagger \eta) (\chi^\dagger \chi) + \lambda_6 (\rho^\dagger \rho) (\chi^\dagger \chi) \\ & + \lambda_7 (\rho^\dagger \eta) (\eta^\dagger \rho) + \lambda_8 (\chi^\dagger \eta) (\eta^\dagger \chi) + \lambda_9 (\chi^\dagger \rho) (\rho^\dagger \chi) + [\lambda_{10} \epsilon^{ijk} \eta_i \rho_j \chi_k \phi + H.c.] \\ & + (\phi \phi^*) [\lambda_{\phi \chi} (\chi^\dagger \chi) + \lambda_{\phi \rho} (\rho^\dagger \rho) + \lambda_{\phi \eta} (\eta^\dagger \eta) + \lambda_\phi (\phi \phi^*)]. \end{aligned} \quad (7)$$

An additional symmetry can be easily recognized in the model, a  $U_{PQ}(1)$  symmetry, which after spontaneous breaking implies an invisible axion [8], since it is predominantly formed by the singlet field and couples directly only with exotic quarks. This not only solves the strong-CP problem through an invisible axion but the existence of a  $Z_{13}$  symmetry guarantees the stability of this solution under gravitational effects.

## 2.2 Model II

The 3-3-1 model with right handed neutrinos on a triplet representation was introduced in Ref. [12,16]. This 3-3-1 model differs from the above one basically by its matter content, since it contains no exotic charges for fermions and the

right handed neutrino already belongs to the triplet. Besides, its scalar sector also comes in three triplets but it has a different content, as described below,

$$f_L^a = (\nu_L^a \ e_L^a \ (\nu^c)_L^a)^T \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, -1/3), \quad e_{aR} \sim (\mathbf{1}, \mathbf{1}, -1), \quad (8)$$

where, again,  $a = 1, 2, 3$  label the three families. In the quark sector, one generation comes in the triplet fundamental representation of  $SU(3)_L$  and the other two compose an anti-triplet with the following content,

$$Q_{iL} = (d_{iL} \ - u_{iL} \ d'_{iL})^T, \quad Q_{3L} = (u_{3L} \ d_{3L} \ u'_{3L})^T, \quad (9)$$

where  $Q_{iL} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{3}^*, 0)$  and  $Q_{3L} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{3}, 1/3)$ , and the right-handed quarks transform as,

$$\begin{aligned} u_{aR} &\sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, 2/3), \quad d_{aR} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3), \\ d'_{iR} &\sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, -1/3), \quad u'_{3R} \sim (\mathbf{3}, \mathbf{1}, 2/3), \end{aligned} \quad (10)$$

with  $i = 1, 2$ . The primed quarks are the exotic ones but with the usual electric charges.

In order to generate the masses for the gauge bosons and fermions, the model requires only three triplets of scalars, namely,

$$\chi = (\chi^0 \ \chi^- \ \chi'^0), \quad \eta = (\eta^0 \ \eta^- \ \eta'^0), \quad \rho = (\rho^+ \ \rho^0 \ \rho'^+). \quad (11)$$

with  $\eta$  and  $\chi$  both transforming as  $(\mathbf{1}, \mathbf{3}, -1/3)$  and  $\rho$  transforming as  $(\mathbf{1}, \mathbf{3}, 2/3)$ .

As in model I, we can write the most general scalar potential, invariant under the gauge symmetry, a discrete  $Z_{11} \otimes Z_2$  [9] and also scale symmetry. Its form is exactly the same as the one in Eq. (7), except for the differences in the scalar triplets content. As before, a  $U_{PQ}(1)$  symmetry is identified and as a result of its spontaneous breaking an invisible and stable axion emerges [9].

In the next section we are going to present the effective potential for the singlet scalar field,  $\phi$ , studying the possibility of driving SSB at scales lower than PQ scale in model I. We also comment about the results in model II.

### 3 Induced spontaneous symmetry breaking

The usual procedure in developing the effective potential when dealing with multiple scalars is described in Ref. [2,6,18]. There the quantum corrections to

the effective potential are computed considering the scalar fields altogether. This is done in such a way that guarantees the perturbative validity of the scheme throughout the computation, by choosing a specific direction in field space such that all coupling constants are kept small. What we are going to do here is something different, since the question we wish to answer is whether the dynamical breaking for just one field, the axion in our approach, can induce spontaneous breaking of 3-3-1 as well as the electroweak symmetries. This means that we have only to compute the quantum corrections for the singlet field and check if it leads to a stable effective potential that can trigger nonzero VEV's for some of the remaining neutral scalars of the model, namely,  $v_\chi$ ,  $v_\rho$  and  $v_\eta$  which are in charge of producing the desired pattern of symmetry breakdown.

Applying the CW mechanism by considering only the singlet condensation, we computed the effective potential for the 3-3-1 models above presented. We then obtain the following renormalized effective potential:

$$V_{eff} = B_{v_\phi^2} \phi_c^4 \left[ \ln \left( \frac{\phi_c^2}{v_\phi^2} \right) - \frac{1}{2} \right], \quad (12)$$

where  $\phi_c^2 \equiv \phi^* \phi$ ,  $v_\phi \equiv \langle \phi_c \rangle$  and the coefficient  $B_{v_\phi^2}$  is given by,

$$B_{v_\phi^2} = \frac{3}{128\pi^2} \left[ (\lambda_{\phi\eta}^2 + \lambda_{\phi\rho}^2 + \lambda_{\phi\chi}^2) \right]. \quad (13)$$

Observe that there is no trace of  $\lambda_\phi$  in this equation, since the renormalization procedure, along with the minimum condition, lead to a  $\lambda_\phi \propto \lambda_{\phi i}^2$ , where  $i = \eta, \rho, \chi$ , which are small couplings as we will see ahead, allowing to neglect  $\lambda_\phi$  in Eq. (13). With this result we can already be certain that this effective potential breaks the  $U_{PQ}(1)$  symmetry at  $v_\phi$  scale, which we associate to the PQ scale. It is clearly a stable effective potential since all terms appearing in  $B_{v_\phi^2}$  are definite positive.

In order to address the problem of driving spontaneous breaking by the dynamical one, we have to analyze the constraint equations coming from the full potential. This means that we are going to substitute the  $\lambda_\phi \phi^4$  in Eq. (7), by the term obtained in Eq. (12) and check which, if any, non-trivial VEV's for the neutral scalars are consistent with a minimum. It should be remarked that in this sense we first considered the potential in Eq. (7) and obtained a nontrivial VEV for the singlet field, which we called dynamical breaking. Only then we are going to formulate constraint equations for the VEV's for the remaining scalars, knowing that  $v_\phi$  is guaranteed to be nonzero by CW mechanism. However, now the potential is not given by Eq. (7), but by that potential changed after the dynamical breaking as pointed above. As far as

we know, this approach is new and could prove very useful in establishing the correct pattern of breaking for a multi-Higgs theory, which is our case for the models presented in Sec. 2.

At this point the two models should differ, at least in their neutral scalar content, leading to different constraint equations. We are going to develop the formalism for model I here, just mentioning the results for model II. According to Sec. 2.1, in order to get its constraint equations we first make the shift in each neutral scalar field by its respective VEV, and plug them into the new potential, we obtain the following constraints:

$$\begin{aligned} & \left[ 2\lambda_1 v_\eta^2 + \lambda_4 v_\rho^2 + \lambda_5 v_\chi^2 + \lambda_{\phi\eta} v_\phi^2 \right] v_\eta + \lambda_{10} v_\rho v_\chi v_\phi = 0, \\ & \left[ 2\lambda_2 v_\rho^2 + \lambda_4 v_\eta^2 + \lambda_6 v_\chi^2 + \lambda_{\phi\rho} v_\phi^2 \right] v_\rho + \lambda_{10} v_\eta v_\chi v_\phi = 0, \\ & \left[ 2\lambda_3 v_\chi^2 + \lambda_5 v_\eta^2 + \lambda_6 v_\rho^2 + \lambda_{\phi\chi} v_\phi^2 \right] v_\chi + \lambda_{10} v_\eta v_\rho v_\phi = 0, \\ & \left[ \lambda_{\phi\eta} v_\eta^2 + \lambda_{\phi\rho} v_\rho^2 + \lambda_{\phi\chi} v_\chi^2 \right] v_\phi + \lambda_{10} v_\eta v_\rho v_\chi = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

where we have taken,  $\langle \phi_c \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} v_\phi$ ,  $\langle \chi^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} v_\chi$ ,  $\langle \eta^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} v_\eta$  and  $\langle \rho^0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} v_\rho$ .

Notice that in these equations, the only VEV which is guaranteed to be nonzero is  $v_\phi$ , by the CW mechanism developed above for the  $\phi$  field. When we ask if we can induce SSB at low energies by the dynamical one obtained for  $\phi$  at PQ scale, we are actually asking if the constraint equations are consistent with nontrivial values for the remaining VEV's at TeV, the typical scale for breaking 3-3-1, and electroweak scales, otherwise we would have been in trouble since the known low energy physics could not be recovered with these models. For model I, looking at the set of Eqs. (14), we see that if one of the triplet VEV's is different from zero only nontrivial solutions are possible for the remaining ones. This is easy to see by initially imposing that some of them are null and checking the constraint consistency condition. Hence, if one admits that the couplings in the potential are non-zero (since we have no underlying symmetry implying null couplings), one gets to the conclusion that SSB is a non negotiable outcome.

We also observe that the constraint equations, Eq. (14), allow us to determine the coupling constants in terms of the remaining couplings and VEV's:

$$\lambda_{\phi\eta} = \frac{-\lambda_1 v_\eta^4 + \lambda_2 v_\rho^4 + \lambda_3 v_\chi^4 + \lambda_6 v_\rho^2 v_\chi^2}{v_\eta^2 v_\phi^2}$$

$$\lambda_{\phi\rho} = \frac{\lambda_1 v_\eta^4 - \lambda_2 v_\rho^4 + \lambda_3 v_\chi^4 + \lambda_5 v_\eta^2 v_\chi^2}{v_\rho^2 v_\phi^2}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{\phi\chi} &= \frac{\lambda_1 v_\eta^4 + \lambda_2 v_\rho^4 - \lambda_3 v_\chi^4 + \lambda_4 v_\eta^2 v_\rho^2}{v_\chi^2 v_\phi^2} \\ \lambda_{10} &= -\frac{v_\eta^2 (\lambda_1 v_\eta^2 + \lambda_4 v_\rho^2) + v_\rho^2 (\lambda_2 v_\rho^2 + \lambda_6 v_\chi^2) + v_\chi^2 (\lambda_3 v_\chi^2 + \lambda_5 v_\eta^2)}{v_\eta v_\rho v_\chi v_\phi},\end{aligned}\quad (15)$$

which shows that the singlet interaction with the triplets are suppressed by factors of  $(v_\chi/v_\phi)$  and  $(v_\chi^2/v_\phi^2)$ , since  $v_\phi$  is much bigger than  $v_\chi$ , which is about a few TeV's.

We could go a step further and ask: "what if the highest scale below  $v_\phi$ , which means  $v_\chi$ , is also dynamically non-zero?", we would have to follow the above analysis again and verify the induced spontaneous breaking. The problem of considering radiative symmetry breaking with multiple scalars was already considered before (see second article in Ref. [4]), but here we want this dynamical breaking to be only a part of the whole mechanism of SSB. To proceed with this proposal we remark that, differently from the singlet field, the triplet component  $\chi$  couples not only with scalars but with fermions and vector bosons too. In this way we could expect to have the same problem of instability as in the SM, since now we have heavy exotic quarks and vector bileptons which acquire mass at  $v_\chi$  scale. It would make no difference then if, instead of making assumptions over the masses of these fields, we just assume that  $v_\chi$  is nonzero from the beginning. Observe that this assumption is not worse than that we had in the model without CW mechanism, where besides assuming a nonzero VEV we also had additional free parameters, the mass scales in the scalar potential. In essence, we can argue that our method allows us to eliminate some of the free parameters of 3-3-1 through scale invariance, and this is a step forward in reducing the unknowns in the theory. The fact that we added a scalar singlet into the model has increased the number of parameters though, but it happened in exactly such an amount that we ended up with the same number of parameters as before, where we had no singlet scalar and no scale invariance. This is an interesting result, since we are able to solve strong-CP problem without any additional cost of increasing the number of parameters.

As for model II, the analysis follows exactly in the same way, but things are not so straightforward as in model I. The additional complication comes from the fact that here we have more VEV's at hand, namely,  $v_{\chi'}$  and  $v_{\eta'}$ . Some of the VEV's can remain zero and still keep consistency,  $v_\chi = 0$  and  $v_{\eta'} = 0$  (in this case we would recover the constraints of model I, Eq. (14)), or  $v_{\chi'} = 0$  and  $v_\eta = 0$ , for instance. However, this only points to interesting possibilities with this model, since the second solution would imply spontaneous breaking of lepton number, leading to a triplet majoron [17], while the first solution would have no such a feature. We would have no way to select between these two possibilities by the method here exposed but, again, we would know which allowed pattern of breaking are consistent for this model.

Finally, we mention that when no dynamical breaking is considered, and the VEV's are assumed to be non-trivial, the massive pseudo-scalar,  $A_0$ , acquires a mass which is dominated by a  $v_\phi$  factor,  $M_{A_0} \approx \sqrt{|\lambda_{10}| v_\phi v_\chi}$ . However, in our dynamical scheme, this does not happen and the dominant contribution to  $A_0$  mass is given approximately by,

$$M_{A_0} \approx \sqrt{\frac{|\lambda_3|}{2} \left( \frac{1}{v_\eta^2} + \frac{1}{v_\rho^2} \right) v_\chi^4} \sim \mathcal{O}(\text{TeV}), \quad (16)$$

a result which can be rather interesting phenomenologically, since this scalar can be produced at energy scales around TeV instead of much higher energies as in the case before. Besides, it shows that it is not necessarily true that scalars embedded in such a dynamical context are forced to get mass at the breaking scale. This could have interesting implications for models involving scalars originated at such high energy scales.

The important lesson from this study is the fact that we have SSB driven by dynamical breaking and, in the models here presented, this happens in such a way that there is coherence between their structure and phenomenological aspects. For instance, it could be that some of the low energy VEV's, like  $v_\eta$  or  $v_\rho$ , would not be simultaneously different from zero for the models studied, implying that the scheme for fermion mass generation in these models would need revision. It is clear that what differentiates the view above presented from applying CW mechanism directly to multi-Higgs models is a subtlety. We are using the mechanism to ignite SSB while caring for its consistency. Also, it is a whole new way of dealing with SSB, since this is not an ad hoc assumption of nontrivial VEV's, we are firmly basing its origin on the dynamically generated VEV. We believe this method can serve as a guide for model builders when several scalar multiplets develop VEV's, since they should obey some inherent consistency conditions, as shown above. Moreover, it seems that this approach provides a way of choosing the right pattern of breaking. In our case, model II offers the possibility of having two of the VEV's identically zero, though we could also pick up one or both of them as nonzero if needed. Conversely, we could not arbitrarily impose zero values to VEV's as we wish, which is patently obvious in both models in what concerns  $v_\rho$ . As we have seen, since  $v_\chi \neq 0$ , there is no freedom to assign a null value to this VEV, and we would have been in trouble if for some reason we needed that.

#### 4 Conclusion

We have shown that two models of an electroweak model based in a  $SU(3)_L \otimes U(1)_N$  symmetry, with three scalar triplets and a singlet axion, are able to ac-

commodate dynamical symmetry breaking at high energies and trigger spontaneous breaking at lower scales, which was done considering scale invariance.

By analyzing the effective potential for the singlet scalar field we obtained dynamical breaking of Peccei-Quinn symmetry through CW mechanism. This breaking, along with the assumption that the next highest VEV is nontrivial<sup>3</sup>, lead to effective potential constraint equations for the remaining VEV's that fixed the pattern of spontaneous breaking. This is what we have called *dynamically induced spontaneous symmetry breaking*. It should be remarked that the spectrum of Goldstones in the scale invariant theory would not match the required one if no singlet were added, because without an interaction among the three triplets there would be an additional global symmetry. However, this interaction is reintroduced disguised in quartic terms involving the singlet, stressing the importance of the singlet in this approach.

It is clear that we are not trying to explain the hierarchy of VEV's in such models, or proposing any new mechanism to obtain the masses dynamically. However, we are offering a new way of viewing SSB as something with dynamical origin, though keeping some aspects of usual spontaneous breaking. It would be useless if no advantage were incremented. In general, the virtue of such an approach is the fact that it allows us to reduce the number of free parameters in the multi-scalar models, at least by avoiding dimensional parameters in the lagrangian through scale invariance. This justified the inclusion of a singlet scalar with additional advantages without increasing the number of unknowns in the model. Moreover, it is a powerful method to identify which pattern of breaking we can assume without running into contradictions, for instance, like imposing that some neutral scalars do not develop a VEV when the consistency between CW mechanism and the potential constraint equations demand nontrivial VEV's. We believe that this way of facing the problem can help in several similar situations where multiple scalars can assume VEV's but no guide is available to get it without ambiguity. Besides, it is possible that the structure of other multi-Higgs models would imply that CW mechanism can drive the desired pattern of breaking at once, by considering only that the first breaking at the highest energy is dynamical. In this sense the technique employed here can prove itself powerful and more appealing. Also, we observed that massive scalars generated in the context of dynamical breaking can have mass much lower than the breaking scale. It would be interesting to have further tests of this approach applying it to other multi-Higgs models.

## Acknowledgments

---

<sup>3</sup> As discussed in the text, this VEV could also be generated dynamically depending on the mass relation among the fermions and bosons of the referred models.

This work was supported by Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) (AGD), Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) (CASP, VP, PSRS) and Fundação de Apoio à Pesquisa do Estado da Paraíba (FAPESQ) (CASP).

## References

- [1] S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. D7, (1973) 1888.
- [2] M. Sher, Phys. Rep. 179, (1989) 273.
- [3] V. Elias, R. B. Mann, D. G. C. McKeon and T. G. Steele, Phys. Rev. Lett. 91, (2003) 251601.
- [4] K. Inoue, A. Kakuto and Y. Nakano, Progr. Theor. Phys. 63, (1980) 234; R. Hempfling, Phys. Lett. B379, (1996) 153.
- [5] R. A. Flores and M. Sher, Nucl. Phys. B238, (1984) 702.
- [6] M. Sher, Phys. Rev. D54, (1996) 7071.
- [7] F. Pisano and V. Pleitez, Phys. Rev. D46, (1992) 410; R. Foot, O. F. Hernandez, F. Pisano and V. Pleitez, Phys. Rev. D47, (1993) 4158; P. H. Frampton, Phys. Rev. Lett. 69, (1992) 2889.
- [8] Alex G. Dias, V. Pleitez and M. D. Tonasse, Phys. Rev. D67, (2003) 095008; Alex G. Dias and V. Pleitez, Phys. Rev. D69, (2004) 077702.
- [9] Alex G. Dias, C. A. de S. Pires and P. S. Rodrigues da Silva, Phys. Rev. D68, (2003) 115009.
- [10] P. B. Pal, Phys. Rev. D52, (1995) 1659.
- [11] V. Pleitez and M. D. Tonasse, Phys. Rev. D48, (1993) 2353.
- [12] J. C. Montero, F. Pisano and V. Pleitez, Phys. Rev. D47, (1993) 2918.
- [13] S. Dimopoulos and D. E. Kaplan, Phys. Lett. B531, (2002) 127; S. Dimopoulos, D. E. Kaplan and N. Weiner, Phys. Lett. B534, (2002) 124; I. Gogoladze, Y. Mimura and S. Nandi, Phys. Lett. B554, (2003) 81.
- [14] A. G. Dias, R. Martinez and V. Pleitez, Eur. Phys. J. C39, (2005) 101.
- [15] A. G. Dias, Phys. Rev. D71, (2005) 015009.
- [16] R. Foot, H. N. Long and T. A. Tran, Phys. Rev. D50, (1994) R34; H. N. Long, Phys. Rev. D54, (1996) 4691; H. Ngoc Long and V. T. Van, J. Phys. G25, (1999) 2319; N. A. Ky, H. N. Long and D. V. Soa, Phys. Lett. B486, (2000) 140; H. N. Long and D. V. Soa, Nucl. Phys. B601, (2001) 361; D. T. Binh, D. T. Huong, T. T. Huong, H. N. Long ad D. V. Soa, J. Phys. G29, (2003) 1213.
- [17] C. A. de S. Pires, P. S. Rodrigues da Silva, Eur. Phys. J. C36, (2004) 397.
- [18] E. Gildener and S. Weinberg, Phys. Rev. D13, (1976) 3333.

# Naturally light invisible axion in models with large local discrete symmetries

Alex G. Dias

*Instituto de Física, Universidade de São Paulo, C. P. 66.318, 05315-970, São Paulo, SP, Brazil*

V. Pleitez

*Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, Rua Pamplona 145, 01405-900 São Paulo, SP, Brazil*

M. D. Tonasse

*Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Centro Técnico Aeroespacial, Praça Marechal do Ar Eduardo Gomes 50, 12228-901, São José dos Campos, SP, Brazil*

(Received 12 November 2002; published 13 May 2003)

We show that by introducing appropriate local  $Z_N (N \geq 13)$  symmetries in electroweak models it is possible to implement an automatic Peccei-Quinn symmetry, at the same time keeping the axion protected against gravitational effects. Although we consider here only an extension of the standard model and a particular 3-3-1 model, the strategy can be used in any kind of electroweak model. An interesting feature of this 3-3-1 model is that if we add (i) right-handed neutrinos, (ii) the conservation of the total lepton number, and (iii) a  $Z_2$  symmetry, the  $Z_{13}$  and the chiral Peccei-Quinn  $U(1)_{PQ}$  symmetries are both accidental symmetries in the sense that they are not imposed on the Lagrangian but are just a consequence of the particle content of the model, its gauge invariance, renormalizability, and Lorentz invariance. In addition, this model has no domain wall problem.

DOI: 10.1103/PhysRevD.67.095008

PACS number(s): 14.80.Mz; 11.30.Er; 12.60.Fr

## I. INTRODUCTION

It is well known that an elegant way to solve the strong  $CP$  problem is by introducing a chiral  $U(1)_{PQ}$  [1] symmetry which also implies the existence of a pseudo Goldstone boson—the axion [2]. This particle becomes an interesting candidate for dark matter if its mass is of the order of  $10^{-5}$  eV [3–5]. It was also recently argued [6] that an axion-photon oscillation can explain the observed dimming supernovas [7] if the axion has a rather small mass:  $\sim 10^{-16}$  eV. Which ever of these possibilities (if any) is realized in nature, the existence of a light invisible axion can be prevented by gravity, since it induces renormalizable and nonrenormalizable effective interactions which explicitly break any global symmetry, in particular the  $U(1)_{PQ}$  symmetry, and the axion can gain a mass that is greater than the mass coming from instanton effects [8]. This can be avoided if the dimension of the effective operators is  $d \geq 12$ . Hence, unless  $d$  is high enough, invisible axion models do not solve the strong  $CP$  problem in a natural way. Here we will show how in two electroweak models the axion is protected against gravity effects; however, the strategy can be used in any electroweak model.

It was pointed out several years ago by Krauss and Wilczek that a local gauge symmetry, say  $\mathcal{U}(1)$ , can masquerade as discrete symmetries  $Z_N \subset \mathcal{U}(1)$  to an observer equipped with only low-energy probes [9]. This means that these symmetries evade the no-hair theorem [10]; i.e., unlike continuous symmetries they must be respected even for gravitational interactions. The only implication of the original gauge symmetry for the low-energy effective theory is the absence of interaction terms forbidden by the  $Z_N$  symmetry. For instance, if there were more charged scalar fields in the theory,

the discrete symmetry would forbid many couplings that were otherwise possible.

Here we will not worry about the origin of this  $Z_N$  [or  $\mathcal{U}(1)$ ] symmetry [11–15]. For instance, it might be that the  $Z_N$  symmetries come from a fifth dimension, as was shown for the case of  $U(1)_Y$  in Ref. [12]. We will simply assume that at very high energies we have a model of the form  $\mathcal{U}(1) \otimes G_{EW}$  where  $\mathcal{U}(1)$  is a local symmetry (maybe a subgroup of a larger symmetry) which is broken to  $Z_N$  at a high energy scale and  $G_{EW}$  is an electroweak model, i.e.,  $\mathcal{U}(1) \otimes G_{EW} \rightarrow Z_N \otimes G_{EW}$ . We will use the existence of these local  $Z_N$  symmetries in order to protect the axion against gravitational effects. We get this by enlarging, if necessary, the representation content of the model, so that we can impose symmetries with  $N \geq 13$ . In addition, the  $U(1)_{PQ}$  symmetry (and under some conditions also the  $Z_N$  symmetry) is an automatic symmetry, in the sense that it is not imposed on the Lagrangian but is just a consequence of the particle content of the model, its gauge invariance, renormalizability, and Lorentz invariance.

In these circumstances we show how a naturally light invisible axion (it is almost a singlet  $\phi$  under the gauge symmetry), which is also protected against the effects of quantum gravity, can be obtained in the context of electroweak models as follows. Effective operators like  $\phi^{N-1}/M_{Pl}^{(N-1)-4}$  are automatically suppressed by the (local)  $Z_N$  symmetry. At the same time this symmetry makes the  $U(1)_{PQ}$  symmetry an automatic symmetry of the classical Lagrangian or, as in the 3-3-1 model considered here, both  $Z_N$  and  $U(1)_{PQ}$  are already automatic symmetries of the model under the conditions discussed in Sec. III. For instance, a  $Z_{13}$  symmetry implies that the first nonforbidden operator is of dimension 13 and it implies a contribution to the axion mass square of

$(v_\phi)^{11}/M_{\text{Pl}}^9 \approx 10^{-21} \text{ eV}^2$  or  $10^{-11} m_a^2$ , if  $m_a \sim \Lambda_{\text{QCD}}^2/v_\phi \approx 10^{-5} \text{ eV}$  is the instanton induced mass (we have used  $M_{\text{Pl}} = 10^{19} \text{ GeV}$  and  $v_\phi = 10^{12} \text{ GeV}$ ). The naturalness of the Peccei-Quinn (PQ) solution to the  $\theta$ -strong problem is not spoiled since in this case we have  $\theta_{\text{eff}} \propto v_\phi^N/M_{\text{Pl}}^{N-4}\Lambda_{\text{QCD}}^4$  [16], and it means that  $\theta_{\text{eff}} \propto 10^{-11}$  for  $N=13$ . Recently we applied this strategy in the context of an extension of the electroweak standard model [17]; now we will apply this procedure to a model with 3-3-1 symmetry.

Hence, we see that it is necessary to search for models that have a representation content large enough to allow the implementation of a discrete symmetry  $Z_N$  with  $N \geq 13$ . In the context of a  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  model we have enlarged the representation content by adding several Higgs multiplets, right-handed neutrinos, and the scalar singlet necessary to make the axion invisible. Hence, it is possible to accommodate a  $Z_{13}$  symmetry while keeping a general mixing among fermions of the same charge [17]. Larger  $Z_N$  symmetries are possible if we add more scalar doublets in such a way as to generate appropriate texture of the fermionic mass matrices. On the other hand, we will show in this work that in a 3-3-1 model the minimal representation content plus right-handed neutrinos admit enough large discrete symmetries. In these models the addition of a singlet (or a decuplet [18]) is the reason for maintaining the axion invisible; however, in the 3-3-1 model the axion picture is a mixture of the Dine *et al.* invisible axion [20] and the Kim heavy quark axion [21]. Nevertheless, unlike the model of Ref. [21], here the exotic quarks are already present in the minimal version of the model.

This paper is organized as follows. In Sec. II we review briefly the new invisible axion in the context of an extension of the standard model [17]. In Sec. III we consider one 3-3-1 model. Our conclusions and some phenomenological consequences are in the last section.

## II. AN EXTENSION OF THE STANDARD MODEL

Let us consider the invisible axion in an extension of the  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  model. The representation content is the following:  $Q_L = (ud)_L^T \sim (\mathbf{2}, 1/3)$ ,  $L_L = (\nu l)_L^T \sim (\mathbf{1}, -1)$  denote any quark and lepton doublet;  $u_R \sim (\mathbf{1}, 4/3)$ ,  $d_R \sim (\mathbf{1}, -2/3)$ ,  $l_R \sim (\mathbf{1}, -2)$ ,  $\nu_R \sim (\mathbf{1}, 0)$  are the right-handed components; and we will assume that each charge sector gains mass from a different scalar doublet [19], i.e.,  $\Phi_u$ ,  $\Phi_d$ ,  $\Phi_l$ , and  $\Phi_\nu$  generate Dirac masses for  $u$ -like and  $d$ -like quarks, charged leptons, and neutrinos, respectively [all of them of the form  $(\mathbf{2}, +1) = (\phi^+, \phi^0)^T$ ]. We also add a neutral complex singlet  $\phi \sim (\mathbf{1}, 0)$  as in Refs. [20,21], a singly charged singlet  $h^+ \sim (\mathbf{1}, +2)$  as in Zee's model [22], and finally, a triplet  $\tilde{T} \sim (\mathbf{3}, +2)$  as in Ref. [23]. The introduction of right-handed neutrinos seems a natural option in any electroweak model if neutrinos are massive particles, as strongly suggested by solar [24], reactor [25], and atmospheric [26] neutrino data.

Next, we will impose the following (local in the sense discussed above)  $Z_{13}$  symmetry among those fields:

$$Q_L \rightarrow \omega_5 Q_L, \quad u_R \rightarrow \omega_3 u_R, \quad d_R \rightarrow \omega_5^{-1} d_R, \quad (1)$$

$$L \rightarrow \omega_6 L, \quad \nu_R \rightarrow \omega_0 \nu_R, \quad l_R \rightarrow \omega_4 l_R,$$

$$\Phi_u \rightarrow \omega_2^{-1} \Phi_u, \quad \Phi_d \rightarrow \omega_3^{-1} \Phi_d, \quad \Phi_l \rightarrow \omega_2 \Phi_l,$$

$$\Phi_\nu \rightarrow \omega_6^{-1} \Phi_\nu, \quad \phi \rightarrow \omega_1^{-1} \phi, \quad \tilde{T} \rightarrow \omega_4^{-1} \tilde{T},$$

$$h^+ \rightarrow \omega_1 h^+$$

with  $\omega_k = e^{2\pi i k/13}$ ,  $k=0, 1, \dots, 6$ . With this representation content and the  $Z_{13}$  symmetry defined in Eq. (1) the allowed Yukawa interactions and the scalar potential are automatically invariant under a  $U(1)_{\text{PQ}}$  chiral symmetry. The PQ charges are quantized after imposing an extra  $Z_3$  symmetry with parameters denoted by  $\tilde{\omega}_0$ ,  $\tilde{\omega}_1$ , and  $\tilde{\omega}_1^{-1}$ . Under  $Z_3$  the fields transform as follows:

$$\Phi_u, \Phi_l, T, \nu_R \rightarrow \tilde{\omega}_1(\Phi_u, \Phi_l, T, \nu_R),$$

$$\Phi_\nu, \phi, u_R, l_R \rightarrow \tilde{\omega}_1^{-1}(\Phi_\nu, \phi, u_R, l_R), \quad (2)$$

while all the other fields remain invariant, i.e., transform with  $\tilde{\omega}_0$ . As we said before it is possible to implement larger  $Z_N$  symmetries if more scalar doublets are added in such a way as to generate appropriate texture of the fermionic mass matrices.

The PQ assignment is the following:

$$u'_L = e^{i(2/5)\alpha X_d} u_L, \quad d'_L = e^{-i\alpha X_d} d_L,$$

$$l'_L = e^{-i(4/5)\alpha X_d} l_L, \quad \nu'_L = e^{i(3/5)\alpha X_d} \nu_L,$$

$$\phi_u^{0'} = e^{-i(4/5)\alpha X_d} \phi_u^0, \quad \phi_d^{0'} = e^{-2i\alpha X_d} \phi_d^0,$$

$$\phi_l^{0'} = e^{-i(8/5)\alpha X_d} \phi_l^0, \quad \phi_\nu^{0'} = e^{-i(6/5)\alpha X_d} \phi_\nu^0,$$

$$\phi_u^{+'} = e^{i(3/5)\alpha X_d} \phi_u^+, \quad \phi_d^{+'} = e^{-i(3/5)\alpha X_d} \phi_d^+, \quad (3)$$

$$\phi_l^{+'} = e^{-i(8/5)\alpha X_d} \phi_l^+, \quad \phi_\nu^{+'} = e^{i(1/5)\alpha X_d} \phi_\nu^+,$$

$$T^{0'} = e^{-i(8/5)\alpha X_d} T^0, \quad T^{+'} = e^{i(1/5)\alpha X_d} T^+,$$

$$T^{++'} = e^{i(6/5)\alpha X_d} T^{++}, \quad h^{+'} = e^{i(1/5)\alpha X_d} h^+,$$

$$\phi' = e^{-i(6/5)\alpha X_d} \phi.$$

The axion is invisible since it is almost singlet as in Refs. [20,21]; the scalar triplet is only a small correction for it.

Some axion models [27] lead to the formation of domain walls in the evolution of the universe, which could be inconsistent with the standard cosmology [28]. The domain wall number is defined as [29]

$$N_{DW} = \left| \sum_{f=L} \text{Tr} X_f T_a^2(f) - \sum_{f=R} \text{Tr} X_f T_a^2(f) \right|, \quad (4)$$

where  $X_f$  denotes the PQ charge of the quark  $f$  and there is no summation on  $a$ ; we have  $\text{Tr} T_a T_b = (1/2) \delta_{ab}$  for  $\mathbf{3}$  and  $\mathbf{3}^*$ . Using the PQ assignment in Eq. (3) we obtain  $N_{DW}$

$=|(9/5)X_d|$ . If  $X_d = \pm 5$  we have  $N_{DW} = 9$ . (We choose  $X_d = -5$  in order to have  $\bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} + 2\pi k$ ,  $k = 0, \dots, 8$ .) The  $N = 9$  vacua can be characterized by

$$\begin{aligned} \langle u_L^\dagger u_R \rangle &= \mu_u^3 e^{-i2\pi(2k/9)}, \quad \langle d_L^\dagger d_R \rangle = \mu_d^3 e^{i2\pi(5k/9)}, \\ \langle \phi_u^0 \rangle &= v_u e^{i(\beta_u - 2\pi(2k/9))}, \quad \langle \phi_d^0 \rangle = v_d e^{i(\beta_d - 2\pi(5k/9))}, \\ \langle \phi_l^0 \rangle &= v_l e^{i(\beta_l - 2\pi(4k/9))}, \quad \langle \phi_\nu^0 \rangle = v_\nu e^{i(\beta_\nu - 2\pi(3k/9))}, \\ \langle T^0 \rangle &= v_T e^{i(\beta_T - 2\pi(4k/9))}, \quad \langle \phi \rangle = v_\phi e^{i(\beta_\phi - 2\pi(3k/9))}, \end{aligned} \quad (5)$$

where  $k = 0, \dots, 8$ .

In this extension of the standard electroweak model only the  $U(1)_{PQ}$  is an automatic symmetry and its charges are quantized only if we add an extra  $Z_3$  symmetry. As we showed before, there are genuine discrete symmetries that are not broken by the instanton effects, so this model suffers from the domain wall problem, and it must be solved by any of the methods proposed in the literature [29,30]. Moreover, in this model the  $Z_{13}$  symmetry is not automatic. For more details, see Ref. [17].

### III. THE AXION IN A 3-3-1 MODEL

The so called 3-3-1 models are interesting candidates for physics at the TeV scale [31–34]. In fact, some years ago Pal [18] pointed out that the strong  $CP$  question is solved elegantly in those models. The point was that the Yukawa couplings of these models automatically contain a Peccei-Quinn symmetry [1] if a simple discrete symmetry was also imposed in order to avoid a trilinear term in the scalar potential. Here we will consider one particular 3-3-1 model in which only three scalar triplets are needed [32], but we introduce also a scalar singlet,  $\phi \sim (1,1,0)$ . In this 3-3-1 model if we add (i) right-handed neutrinos, (ii) the conservation of the total lepton number  $L$ , and (iii) a  $Z_2$  symmetry defined below, we have that both  $Z_{13}$  and  $U(1)_{PQ}$  are accidental symmetries of the classical Lagrangian (in the sense discussed in Sec. I).

Before considering the implementation of a naturally light and invisible axion in the context of the 3-3-1 model of Ref. [32], let us briefly review the model.

In the quark sector we have

$$\begin{aligned} Q_{mL} &= (d_m, u_m, j_m)_L^T \sim (3, 3^*, -1/3), \quad m = 1, 2, \\ Q_{3L} &= (u_3, d_3, J)_L^T \sim (3, 3, 2/3), \end{aligned} \quad (6)$$

and the respective right-handed components in the singlets

$$\begin{aligned} u_{\alpha R} &\sim (3, 1, 2/3), \quad d_{\alpha R} \sim (3, 1, -1/3), \quad \alpha = 1, 2, 3, \\ J_R &\sim (3, 1, 5/3), \quad j_{mR} \sim (3, 1, -4/3). \end{aligned} \quad (7)$$

In the scalar sector, this model has only three triplets,

$$\begin{aligned} \chi &= (\chi^-, \chi^{--}, \chi^0)^T, \quad \rho = (\rho^+, \rho^0, \rho^{++})^T, \\ \eta &= (\eta^0, \eta_1^-, \eta_2^+)^T, \end{aligned} \quad (8)$$

transforming as  $(1, 3, -1)$ ,  $(1, 3, 1)$ , and  $(1, 3, 0)$ , respectively. Finally, in this model leptons transform as triplets  $(3_a, 0)$  where  $a = e, \mu, \tau$ :

$$\Psi_{aL} = (\nu_a, l_a, E_a)_L^T, \quad (9)$$

and the corresponding right-handed singlets

$$\nu_{aR} \sim (1, 1, 0), \quad l_{aR} \sim (1, 1, -1), \quad E_{aR} \sim (1, 1, +1), \quad (10)$$

and we have added right-handed neutrinos which are not present in the minimal version of the model. Hence, we see that the model has 15 multiplets, including right-handed neutrinos and the singlet  $\phi$  [in fact, as usual we have to add a scalar singlet  $\phi \sim (1, 1, 0)$  in order to make the axion invisible [20,21]] and it will admit, under the three conditions introduced above, automatic  $Z_{13}$  and  $U(1)_{PQ}$  symmetries as we will show in the following.

With the quark and scalar multiplets above we have the Yukawa interactions

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^q &= \bar{Q}_{iL}(F_{i\alpha}u_{\alpha R}\rho^* + \tilde{F}_{i\alpha}d_{\alpha R}\eta^*) + \bar{Q}_{3L}(G_{1\alpha}u_{\alpha R}\eta \\ &\quad + \tilde{G}_{1\alpha}d_{\alpha R}\rho) + \lambda_1 \bar{Q}_{3L}J'_{1R}\chi + \lambda_{im} \bar{Q}_{iL}j_{mR}\chi^* + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (11)$$

where repeated indices mean summation. In the lepton sector we have

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^l &= G_{ab}^\nu \overline{(\Psi)}_{aL}\nu_{bR}\eta + G_{ab}^l \overline{(\Psi)}_{aL}l_{bR}\rho + G_{ab}^E \overline{(\Psi)}_{aL}E_{bR}\chi \\ &\quad + \text{H.c.} \end{aligned} \quad (12)$$

In both Yukawa interactions above a general mixing in each charge sector is allowed. If we want to implement a given texture for the quark and lepton mass matrices we have to introduce more scalar triplets and a larger  $Z_N$  symmetry will be possible in the model. Interesting possibilities are the cases where  $N$  is a prime number (see below).

The most general  $L$ -,  $Z_2$ -, and gauge-invariant scalar potential is

---


$$\begin{aligned} V_{331} &= \sum_{x=\eta, \rho, \chi, \phi} \mu_x^2 T_x^\dagger T_x + \lambda_1 (\eta^\dagger \eta)^2 + \lambda_2 (\rho^\dagger \rho)^2 + \lambda_3 (\chi^\dagger \chi)^2 + (\eta^\dagger \eta)[\lambda_4 (\rho^\dagger \rho) + \lambda_5 (\chi^\dagger \chi)] + \lambda_6 (\rho^\dagger \rho)(\chi^\dagger \chi) + \lambda_7 (\rho^\dagger \eta) \\ &\quad \times (\eta^\dagger \rho) + \lambda_8 (\chi^\dagger \eta)(\eta^\dagger \chi) + \lambda_9 (\rho^\dagger \chi)(\chi^\dagger \rho) + \lambda_\phi (\phi^* \phi)^2 + \phi^* \phi \sum_{k=\eta, \rho, \chi} \lambda_{\phi k} T_k^\dagger T_k + (\lambda_{10} \phi \epsilon^{ijk} \eta_i \rho_j \chi_k + \text{H.c.}), \end{aligned} \quad (13)$$

where the  $\mu$ 's are parameters with dimension of mass, the  $\lambda$ 's are dimensionless parameters, and we have denoted  $T_x = \eta, \rho, \chi, \phi$  and  $T_k = \eta, \rho, \chi$ . Now we can explain the motivation for the three conditions assumed at the beginning of the section. (i) With the present experimental data [24–26] in any electroweak model right-handed neutrinos are no longer avoided under the assumption that neutrinos are massless. (ii) In Eq. (11) a Majorana mass term is still possible among right-handed neutrinos, say  $M_R(\nu^c)_R \nu_R$ ; on the other hand, in the scalar potential it is possible to have the quartic term  $\chi^\dagger \eta \rho^\dagger \eta$ , which also violates the total lepton number. Both terms are avoided by imposing the conservation of the total lepton number  $L$ . (iii) The trilinear term in the scalar potential  $\eta \rho \chi$  is avoided if we impose a  $Z_2$  symmetry under which  $J_R, j_{mR}, \chi, \phi$  are odd and all the other fields are even. In these conditions, the Yukawa interactions in Eqs. (11), (12) and the scalar potential in Eq. (13) are automatically invariant under the (local)  $Z_{13}$  symmetry:

$$\begin{aligned} Q_{iL} &\rightarrow \omega_5^{-1} Q_{iL}, \quad Q_{3L} \rightarrow \omega_5 Q_{3L}, \\ u_{\alpha R} &\rightarrow \omega_1 u_{\alpha R}, \quad d_{\alpha R} \rightarrow \omega_1^{-1} d_{\alpha R}, \\ J_R &\rightarrow \omega_3 J_R, \quad j_{mR} \rightarrow \omega_3^{-1} j_{mR}, \\ \Psi_L &\rightarrow \omega_0 \Psi_L, \quad l_R \rightarrow \omega_6^{-1} l_R, \\ \nu_R &\rightarrow \omega_4^{-1} \nu_R, \quad E_R \rightarrow \omega_2^{-1} E_R, \\ \eta &\rightarrow \omega_4 \eta, \quad \rho \rightarrow \omega_6 \rho, \\ \chi &\rightarrow \omega_2 \chi, \quad \phi \rightarrow \omega_1 \phi, \end{aligned} \quad (14)$$

where  $\omega_k = e^{2\pi i k/13}$ ,  $k=0, \dots, 6$ . Notice that if  $N$  is a prime number the singlet  $\phi$  can transform under this symmetry with any assignment (but the trivial one); otherwise we have to be careful with the way we choose the singlet  $\phi$  to transform under the  $Z_N$  symmetry. This symmetry implies that the lowest-order effective operator that contributes to the axion mass is  $\phi^{13}/M_{Pl}^9$ , which gives a mass of the order of  $(v_\phi)^{11}/M_{Pl}^9$  and also keeps the  $\bar{\theta}$  parameter small, as discussed previously.

It happens that, like the  $Z_{13}$  symmetry, the  $U(1)_{PQ}$  is also automatic, i.e., a consequence of the gauge symmetry and renormalizability of the model, in the interactions in Eqs. (11), (12), and (13). Let us see the PQ charge assignment for the fermions in the model:

$$\begin{aligned} u'_L &= e^{-i\alpha X_u} u_L, \quad d'_L = e^{-i\alpha X_d} d_L, \quad l'_L = e^{-i\alpha X_l} l_L, \\ \nu'_L &= e^{-i\alpha X_\nu} \nu_L, \quad j'_L = e^{-i\alpha X_j} j_L, \quad J'_L = e^{-i\alpha X_J} J_L, \\ E'_L &= e^{-i\alpha X_E} E_L, \end{aligned} \quad (15)$$

and in the scalar sector we have the following PQ charges:

$$\begin{aligned} \eta'^0 &= e^{-2i\alpha X_u} \eta^0 = e^{+2i\alpha X_d} \eta^0, \\ \eta'_1^- &= e^{-i\alpha(X_u + X_d)} \eta_1^- = e^{+i(X_u + X_d)} \eta_1^-, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_2^+ &= e^{-i\alpha(X_J + X_u)} \eta_2^+ = e^{+i\alpha(X_J + X_d)} \eta_2^+, \\ \rho'^0 &= e^{+2i\alpha X_u} \rho^0 = e^{-2i\alpha X_d} \rho^0, \\ \rho'^+ &= e^{-i\alpha(X_u + X_d)} \rho^+ = e^{+i\alpha(X_u + X_d)} \rho^+, \\ \rho'^++ &= e^{-i\alpha(X_J + X_d)} \rho^{++} = e^{+i\alpha(X_J + X_u)} \rho^{++}, \\ \chi'^- &= e^{-i\alpha(X_u + X_J)} \chi^- = e^{+i\alpha(X_d + X_J)} \chi^-, \\ \chi'^-- &= e^{-i\alpha(X_d + X_J)} \chi^{--} = e^{+i\alpha(X_u + X_J)} \chi^{--}, \\ \chi'^0 &= e^{-2i\alpha X_J} \chi^0 = e^{+2i\alpha X_j} \chi^0, \\ \phi' &= e^{-2iX_j} \phi. \end{aligned} \quad (16)$$

From Eqs. (15) and (16) we obtain the following relations:

$$X_d = -X_u = X_l = -X_\nu, \quad X_j = -X_J = -X_E. \quad (17)$$

In the present model, although we have two independent PQ charges (say,  $X_d$  and  $X_j$ ), the known quark contributions to  $\bar{\theta}$  which are proportional to  $X_d$  cancel out exactly. Only  $X_j$  is important for solving the  $CP$  problem:

$$\bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} - 2\alpha \sum_{\text{all quarks}} X_f = \bar{\theta} - 2\alpha X_j. \quad (18)$$

Hence we can assume that  $X_d = 0$  and the only relevant PQ transformations are

$$\begin{aligned} j'_L &= e^{-i\alpha X_j} j_L, \quad J'_L = e^{i\alpha X_j} J_L, \\ E'_L &= e^{-i\alpha X_j} E_L, \quad \eta_2^+ = e^{i\alpha X_j} \eta_2^+, \\ \rho'^++ &= e^{i\alpha X_j} \rho^{++}, \quad \chi'^- = e^{i\alpha X_j} \chi^-, \\ \chi'^-- &= e^{i\alpha X_j} \chi^{--}, \quad \chi'^0 = e^{2i\alpha X_j} \chi^0, \\ \phi' &= e^{-2i\alpha X_j} \phi. \end{aligned} \quad (19)$$

Notice that, as in Ref. [21], we have an invisible axion (it is almost a singlet; see below), and the PQ charge that solves the strong  $CP$  problem is the charge of the exotic quarks. However, unlike in Ref. [21] the heavy quark is already present in the minimal version of this 3-3-1 model. The condition  $X_u = -X_d$  is not allowed in the context of the standard  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  model since in this case it is not possible to shift the  $\bar{\theta}$ .

We have seen above that the known quark contributions to  $\bar{\theta}$  cancel out exactly. This also happens in the domain wall number  $N_{DW}$  defined in Eq. (4). Using the PQ charges in Eqs. (15) and (16) we obtain  $N_{DW} = X_j$  and since we have always chosen  $X_j = 1$  we see that, as in Kim's axion model, there is no domain wall problem in this 3-3-1 axion model. We stress that the contributions of the known quarks cancel out exactly even if we assume that  $X_d \neq 0$ . Moreover, we will see in Sec. IV that the coupling of the axion with the photon

also does not depend at all on the PQ charge of the usual quarks and leptons since there is an exact cancellation among them. However, if  $X_d \neq 0$  there are still couplings with the usual fermions. Notwithstanding, since  $X_d$  does not play any role in the solution of the strong  $CP$  problem, we can assume at the very start that  $X_d = 0$ , i.e., that the nontrivial PQ transformations are those in Eq. (19). This means that at the tree level there is no coupling of the axion with the known quarks and charged leptons.

We can verify that in fact the axion is almost singlet. After redefining the neutral fields as usual,  $T_k^0 = (v_k + \text{Re } T_k^0 + i \text{Im } T_k^0)/\sqrt{2}$ ,  $\phi = (v_\phi + \text{Re } \phi + i \text{Im } \phi)/\sqrt{2}$ , with  $k = \eta, \rho, \chi$ , we obtain the constraint equations  $t_x = 0$  (where  $x = \eta, \rho, \chi, \phi$ )

$$\begin{aligned} t_\eta &= \text{Re} \left[ \mu_\eta^2 v_\eta + \lambda_1 |v_\eta|^2 v_\eta + \frac{1}{2} (\lambda_4 |v_\rho|^2 + \lambda_5 |v_\chi|^2) v_\eta \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_{10}}{2} v_\rho v_\chi v_\phi + \lambda_{\phi\eta} |v_\phi|^2 v_\eta \right], \\ t_\rho &= \text{Re} \left[ \mu_\rho^2 v_\rho + \lambda_2 |v_\rho|^2 v_\rho + \frac{1}{2} (\lambda_4 |v_\eta|^2 + \lambda_6 |v_\chi|^2) v_\rho \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_{10}}{2} v_\eta v_\chi v_\phi + \lambda_{\phi\rho} |v_\phi|^2 v_\rho \right], \\ t_\chi &= \text{Re} \left[ \mu_\chi^2 v_\chi + \lambda_3 |v_\chi|^2 v_\chi + \frac{1}{2} (\lambda_5 |v_\eta|^2 + \lambda_6 |v_\rho|^2) v_\chi \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_{10}}{2} v_\eta v_\rho v_\phi + \lambda_{\phi\chi} |v_\phi|^2 v_\chi \right], \\ t_\phi &= \text{Re} \left[ \mu_\phi^2 v_\phi + \lambda_\phi |v_\phi|^2 v_\phi + \frac{\lambda_{10}}{2} v_\eta v_\rho v_\chi + \frac{1}{2} (\lambda_{\phi\eta} |v_\eta|^2 \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{\phi\rho} |v_\rho|^2 + \lambda_{\phi\chi} |v_\chi|^2) v_\phi \right], \\ \text{Im}(v_\phi v_\eta v_\rho v_\chi) &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Notice that the solution with  $v_\eta, v_\rho, v_\chi, v_\phi \neq 0$  is allowed. For instance, just for an illustration, assuming for simplicity that all vacuum expectation values (VEV) and parameters (but  $\mu_\phi$  and  $\mu_\chi$ ) are real,  $\lambda_1 v_\eta^2, \lambda_2 v_\rho^2, |\lambda_{\phi k} v_k v_\phi| \leq |\lambda_{10} v_k v_{k'}|$ , we obtain

$$\begin{aligned} v_\phi^2 &\approx -\frac{\mu_\phi^2}{\lambda_\phi}, \quad v_\chi^2 \approx -\frac{\mu_\chi^2}{\lambda_3}, \\ v_\eta &\approx -\lambda_{10} \frac{v_\rho v_\chi v_\phi}{\mu_\eta^2}, \quad v_\rho \approx -\lambda_{10} \frac{v_\eta v_\chi v_\phi}{\mu_\rho^2}, \end{aligned} \quad (21)$$

and the self-consistent condition  $\lambda_{10}^2 v_\chi^2 v_\phi^2 \approx \mu_\eta^2 \mu_\rho^2$ . With all VEVs real the pseudoscalar mass eigenstates, in the basis  $\text{Im}(\eta^0, \rho^0, \chi^0, \phi)$ , are given by

$$\begin{aligned} G_1^0 &= \frac{1}{(v_\eta^2 + v_\rho^2)^{1/2}} (-v_\eta, v_\rho, 0, 0), \\ G_2^0 &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left( \frac{s_1}{s_2} v_\rho^2 v_\eta, \frac{s_1}{s_2} v_\eta^2 v_\rho, \frac{s_2}{s_1} v_\phi^2 v_\chi, \frac{s_2}{s_1} v_\chi^2 v_\phi \right), \\ a &= \frac{1}{(v_\chi^2 + v_\phi^2)^{1/2}} (0, 0, -v_\chi, v_\phi), \\ A^0 &= \frac{1}{\sqrt{N}} (v_\rho v_\chi v_\phi, v_\eta v_\chi v_\phi, v_\eta v_\rho v_\phi, v_\eta v_\rho v_\chi), \end{aligned} \quad (22)$$

where  $s_1 = (v_\chi^2 + v_\phi^2)^{1/2}$ ,  $s_2 = (v_\eta^2 + v_\rho^2)^{1/2}$ , and  $N = v_\eta^2 [v_\rho^2 (v_\chi^2 + v_\phi^2) + v_\chi^2 v_\phi^2] + v_\rho^2 [v_\chi^2 v_\phi^2] + v_\chi^2 v_\phi^2$ ;  $G_{1,2}^0$  are genuine Goldstone bosons (absorbed when the gauge bosons  $Z, Z'$  become massive), and  $a$  is the pseudo Goldstone axion. If  $|v_\phi| \gg |v_k|$  we see that  $a \approx \text{Im } \phi$  and we have an invisible axion [20]. The usual restriction coming from red giants implies  $|v_\phi| > 10^9 \text{ GeV}$  [35];  $A^0$  is a heavy pseudoscalar with  $m_A^2 = -(\lambda_{10}/8C)\{v_\eta^2 [v_\rho^2 (v_\chi^2 + v_\phi^2) + v_\chi^2 v_\phi^2] + v_\rho^2 v_\chi^2 v_\phi^2\}$  with  $\lambda_{10} < 0$  and we have defined  $C = v_\phi v_\eta v_\rho v_\chi$ .

#### IV. CONCLUSION

We have built invisible axion models in which the axion is naturally light (protected against quantum gravity effects) because of a  $Z_{13}$  discrete symmetry. In the context of a  $SU(2) \otimes U(1)$  model this symmetry and a  $Z_3$  have to be imposed and new fields have to be added. On the other hand, in a 3-3-1 model with right-handed neutrinos added, the  $Z_{13}$  is automatic if we impose the conservation of the total lepton number and a  $Z_2$  symmetry. Moreover, in both models  $U(1)_{\text{PQ}}$  is an accidental symmetry. This means that at low energy the gauge symmetries are  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \otimes Z_{13} \otimes Z_3$  or  $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_Y \otimes Z_{13} \otimes Z_2$ . Notice, however, that in the context of the standard model, even by imposing  $L$  conservation and the  $Z_3$  symmetry, the  $Z_{13}$  symmetry is not automatic, but in the 3-3-1 model  $L$  conservation and  $Z_2$  make  $Z_{13}$  an automatic symmetry.

Hence, we have implemented an invisible and naturally light axion in a multi-Higgs-boson extension of the standard model and also in a 3-3-1 model. Unlike the axion of the first model, in the 3-3-1 model considered here the minimal representation content (plus right-handed neutrinos) is already enough to implement a local  $Z_{13}$  symmetry. As we said before, the interesting discrete symmetries are those in which  $N$  is a prime number. In this case  $Z_N$  has no subgroup except itself and the identity [36]. Hence, the next interesting symmetry should be  $Z_{17}$ , which will allow an even lighter axion, i.e.,  $m_a^2(\text{gravity}) = (v_\phi)^{15}/M_{\text{Pl}}^{13} \sim 10^{-67} \text{ eV}^2$  or  $10^{-57} m_a^2$ . Similarly, in this case the contribution to the  $\theta$  parameter is rather small,  $\bar{\theta}_{(\text{gravity})} \sim 10^{-43}$ .

We now consider some phenomenological consequences of the axion in the 3-3-1 model. (The case of the model of

Sec. II has been considered in Ref. [17].) In general, the axion-photon coupling is given by

$$c_{a\gamma\gamma} = \tilde{c}_{a\gamma\gamma} - 1.95, \quad (23)$$

where the first term is defined as

$$\tilde{c}_{a\gamma\gamma} = \frac{1}{N_{DW} \text{ all fermions}} \sum X_f Q_f^2, \quad (24)$$

with  $N_{DW}=1$  in this model since it has no domain wall problem as in Kim's model [21];  $X_f$  and  $Q_f$  are the PQ and electromagnetic charge, respectively, of the fermion  $f$ . The term  $-1.95$  comes from the light quark PQ anomalies and it exists only if these quarks carry PQ charges. In Eq. (24) the contribution proportional to  $X_d$  cancels out exactly even if we assume that  $X_d \neq 0$ . So we have in general that  $c_{a\gamma\gamma} = -(2/3)X_j - 1.95$ , or  $c_{a\gamma\gamma} = 2.62$  ( $-1.28$ ) for  $X_j = +1(-1)$ . In our case in particular, since  $X_d = 0$ , we have just the first contribution in Eq. (23), i.e.,  $c_{a\gamma\gamma} = \tilde{c}_{a\gamma\gamma} = \pm(2/3)$ . We stress that the contributions of the PQ charges of the known quarks cancel out exactly in  $\bar{\theta}$  in Eq. (18), in the domain wall number given in Eq. (4), and also in Eq. (24). Thus, if we assign PQ charges to those quarks it implies only a coupling with the axion at the tree level. On the other hand, if we assume that only the exotic fermions of the model carry a PQ charge, the coupling with the known quarks and leptons arises at higher order in perturbation theory.

We have imposed at the very start the conservation of the total lepton number and a  $Z_2$  symmetry. Another possibility is to impose the discrete symmetry  $Z_{13}$ . In this case only the  $U(1)_{PQ}$  symmetry is automatic and the quartic  $L$ -violating term  $\chi^\dagger \eta \rho^\dagger \eta$  is allowed. This term implies a new relation among the PQ charges of the known particles and the exotic

ones:  $X_j = 3X_d$ . Taking also into account Eqs. (17), it can be shown that there is a surviving symmetry  $Z_3 \subset U(1)_{PQ}$ , which implies a domain wall problem [37].

The 3-3-1 model in which the leptons transform as  $\Psi_{aL} = (\nu_a, l_a, l_a^c)_L^T$  needs also the introduction of a scalar sextet  $S \sim (6,0)$  [or singlet charged leptons  $E \sim (1,1)$ ] [38,39]. In this case the Yukawa interaction in the quark sector is given by Eq. (11) and in the leptonic sector we have

$$-\mathcal{L}_Y^I = G_{ab}^\nu \bar{\Psi}_{aL} \nu_{bR} \eta + G_{ab}(\overline{\Psi})^c_{aL} \psi_{bL} S + G'_{ab} \epsilon_{ijk} (\overline{\Psi})^c_{iaL} \psi_{jbL} \eta_k + \text{H.c.}, \quad (25)$$

where  $G_{ab}^\nu$  is an arbitrary  $3 \times 3$  matrix while  $G_{ab}$  ( $G'$ ) is a symmetric (antisymmetric) matrix and we have omitted some  $SU(3)$  indices. Notice that this model has only 13 multiplets (including right-handed neutrinos and the singlet  $\phi$ ) so we cannot have a symmetry as large as  $Z_{13}$ . However, by adding more scalar multiplets as in Ref. [40] it may be possible to implement, automatically, a large enough  $Z_N$  symmetry. The supersymmetric version of the model can also be considered since in this model, without considering right-handed neutrinos, there are 23 chiral superfields [in the same case, the minimal supersymmetric standard model (MSSM) has 14 chiral superfields] [41].

In the models considered in this work the axion couples to neutrinos too. This coupling may have astrophysical and/or cosmological consequences; we can also implement hard [42], soft [43], or spontaneous [44]  $CP$  violation.

## ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), Conselho Nacional de Ciência e Tecnologia (CNPq), and Programa de Apoio a Núcleos de Excelência (PRONEX).

- 
- [1] R.D. Peccei and H. Quinn, Phys. Rev. Lett. **38**, 1440 (1977); Phys. Rev. D **16**, 1791 (1977).
  - [2] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **40**, 223 (1978); F. Wilczek, *ibid.* **40**, 279 (1978).
  - [3] M. Srednicki, Eur. Phys. J. C **15**, 143 (2000).
  - [4] Y.E. Kim, Phys. Rep. **150**, 1 (1987).
  - [5] H.-Y. Cheng, Phys. Rep. **158**, 1 (1988); G.G. Raffelt, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **49**, 163 (1999); Phys. Rep. **198**, 1 (1990); M.S. Turner, *ibid.* **197**, 67 (1990).
  - [6] C. Csáki, N. Kaloper, and J. Terning, Phys. Rev. Lett. **88**, 161302 (2002); Phys. Lett. B **535**, 33 (2002); see also E. Mörtsell, L. Bergström, and A. Goodbar, Phys. Rev. D **66**, 047702 (2002); Y. Grossman, S. Roy, and J. Zupan, Phys. Lett. B **543**, 23 (2002).
  - [7] Supernova Search Team Collaboration, A.G. Riess *et al.*, Astron. J. **116**, 1009 (1998); Supernova Cosmology Project Collaboration, S. Perlmutter *et al.*, Astrophys. J. **517**, 565 (1999).
  - [8] H. Georgi, L.J. Hall, and M.B. Wise, Nucl. Phys. **B192**, 409 (1981); R. Holman *et al.*, Phys. Lett. B **282**, 132 (1992); M. Kamionkowski and J. March-Russell, *ibid.* **282**, 137 (1992); S.M. Barr and D. Seckel, Phys. Rev. D **46**, 539 (1992); R. Kallosh, A. Linde, D. Linde, and L. Susskind, *ibid.* **52**, 912 (1995); R.D. Peccei, hep-ph/0009030.
  - [9] L.M. Krauss and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **62**, 1221 (1989); see also S. Coleman, J. Preskill, and F. Wilczek, Nucl. Phys. **B378**, 175 (1992).
  - [10] T. Banks, Nucl. Phys. **B323**, 90 (1988); M.G. Alford, J. March-Russell, and F. Wilczek, *ibid.* **B337**, 695 (1990); J. Preskill and L.M. Krauss, *ibid.* **B341**, 50 (1990); M.G. Alford, S. Coleman, and J. March-Russell, *ibid.* **B351**, 735 (1991).
  - [11] M. Dine, in Proceedings of the Cincinnati Symposium on Quantum Gravity and Beyond, 1992, pp. 157–169, hep-ph/9207045; T. Banks and M. Dine, Phys. Rev. D **45**, 1424 (1992).
  - [12] C.T. Hill and A.K. Leibovich, Phys. Rev. D **66**, 075010 (2002); **66**, 016006 (2002).
  - [13] G. Lazarides, C. Panagiotakopoulos, and Q. Shafi, Phys. Rev. Lett. **56**, 432 (1986).
  - [14] E. Ma, M. Raidal, and U. Sarkar, Phys. Lett. B **504**, 296 (2001).
  - [15] S. Chang, S. Tazawa, and M. Yamagushi, Phys. Rev. D **61**, 084005 (2000).

- [16] R.D. Peccei, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **72**, 3 (1999).
- [17] Alex G. Dias, V. Pleitez, and M.D. Tonasse, hep-ph/0210172.
- [18] P.B. Pal, Phys. Rev. D **52**, 1659 (1995).
- [19] S.L. Glashow and S. Weinberg, Phys. Rev. D **15**, 1958 (1977).
- [20] M. Dine, W. Fischler, and M. Srednicki, Phys. Lett. **104B**, 199 (1981).
- [21] J.E. Kim, Phys. Rev. Lett. **43**, 103 (1979).
- [22] A. Zee, Phys. Lett. **93B**, 389 (1980).
- [23] T.P. Cheng and L.-F. Li, Phys. Rev. D **22**, 2860 (1980).
- [24] Homestake Collaboration, B.T. Cleveland *et al.*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **38**, 47 (1995); Kamiokande Collaboration, K.S. Hirata *et al.*, Phys. Rev. D **44**, 2241 (1991); Super-Kamiokande Collaboration, S. Fukuda *et al.*, Phys. Rev. Lett. **86**, 5651 (2001); GALLEX Collaboration, W. Hampel *et al.*, Phys. Lett. B **477**, 127 (1999); SAGE Collaboration, J.N. Abdurashitov *et al.*, Phys. Rev. Lett. **77**, 4708 (1996); SNO Collaboration, Q.R. Ahmad *et al.*, *ibid.* **87**, 071301 (2001).
- [25] KamLAND Collaboration, K. Eguchi *et al.*, Phys. Rev. Lett. **90**, 021802 (2003).
- [26] Super-Kamiokande Collaboration, Y. Fukuda *et al.*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1562 (1998); **81**, 1158 (1998); Phys. Lett. B **436**, 33 (1998); K.S. Hirata *et al.*, *ibid.* **280**, 146 (1992); R. Becker-Szendy *et al.*, Phys. Rev. D **46**, 3720 (1992); W.W.M. Allison *et al.*, Phys. Lett. B **391**, 491 (1997); Y. Fukuda *et al.*, *ibid.* **335**, 237 (1994).
- [27] P. Sikivie, Phys. Rev. Lett. **48**, 1156 (1982).
- [28] Y.B. Zeldovich, I.Y. Kobzarev, and L.B. Okun, Sov. Phys. JETP **40**, 1 (1975).
- [29] H. Georgi and M.B. Wise, Phys. Lett. **116B**, 123 (1982).
- [30] G. Lazarides and Q. Shafi, Phys. Lett. **115B**, 21 (1982); S.M. Barr, D.B. Reiss, and A. Zee, *ibid.* **116B**, 227 (1982).
- [31] F. Pisano and V. Pleitez, Phys. Rev. D **46**, 410 (1992); P. Frampton, Phys. Rev. Lett. **69**, 2889 (1992); R. Foot, O.F. Hernandez, F. Pisano, and V. Pleitez, Phys. Rev. D **47**, 4158 (1993).
- [32] V. Pleitez and M.D. Tonasse, Phys. Rev. D **48**, 2353 (1993).
- [33] J.C. Montero, F. Pisano, and V. Pleitez, Phys. Rev. D **47**, 2918 (1993); R. Foot, H.N. Long, and T.A. Tran, *ibid.* **50**, R34 (1994).
- [34] Electroweak models with  $SU(3)$  symmetry have some predictive power concerning the observed value of the weak mixing angle and can be embedded in theories of TeV gravity; see S. Dimopoulos and D.E. Kaplan, Phys. Lett. B **531**, 127 (2002); S. Dimopoulos, D.E. Kaplan, and N. Weiner, *ibid.* **534**, 124 (2002); I. Gogoladze, Y. Mimura, and S. Nandi, *ibid.* **554**, 81 (2003), and references therein.
- [35] D.A. Dicus, E.W. Colb, V.L. Teplitz, and R. Wagoner, Phys. Rev. D **18**, 1829 (1978); **22**, 839 (1980).
- [36] M. Hall, Jr., *The Theory of Groups* (MacMillan, New York, 1959).
- [37] G. Lazarides, C. Panagiotakopoulos, and Q. Shafi, Phys. Rev. Lett. **56**, 432 (1986).
- [38] T.V. Duong and E. Ma, Phys. Lett. B **306**, 307 (1993).
- [39] J.C. Montero, C.A. de S. Pires, and V. Pleitez, Phys. Rev. D **65**, 093017 (2002).
- [40] J.C. Montero, C.A. de S. Pires, and V. Pleitez, Phys. Rev. D **65**, 113003 (2002).
- [41] J.C. Montero, V. Pleitez, and M.C. Rodriguez, Phys. Rev. D **65**, 035006 (2002); see also Ref. [38]; R.A. Diaz, R. Martinez, and J.A. Rodriguez, Phys. Lett. B **552**, 287 (2003), for other supersymmetric 3-3-1 models.
- [42] M. Kobayashi and T. Maskawa, Prog. Theor. Phys. **49**, 652 (1973); S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **37**, 657 (1976).
- [43] J.C. Montero, V. Pleitez, and O. Ravinez, Phys. Rev. D **60**, 076003 (1999).
- [44] T.D. Lee, Phys. Rev. D **15**, 3394 (1977); L. Epele, H. Fanchiotti, C. García Canal, and D. Gómez Dumm, Phys. Lett. B **343**, 291 (1995).

## Discrete symmetries, invisible axion, and lepton number symmetry in an economic 3-3-1 model

Alex G. Dias\*

*Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66.318, 05315-970, São Paulo-SP, Brazil*

C. A de S. Pires†

*Departamento de Física, Universidade Federal da Paraíba, Caixa Postal 5008, 58051-970, João Pessoa-PB, Brazil*

P. S. Rodrigues da Silva‡

*Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, Rua Pamplona 145, 01405-900 São Paulo-SP, Brazil*

(Received 12 September 2003; published 30 December 2003)

We show that Peccei-Quinn and lepton number symmetries can be a natural outcome in a 3-3-1 model with right-handed neutrinos after imposing a  $Z_{11} \otimes Z_2$  symmetry. This symmetry is suitably accommodated in this model when we augment its spectrum by including merely one singlet scalar field. We work out the breaking of the Peccei-Quinn symmetry, yielding the axion, and study the phenomenological consequences. The main result of this work is that the solution to the strong  $CP$  problem can be implemented in a natural way, implying an invisible axion phenomenologically unconstrained, free of domain wall formation, and constituting a good candidate for the cold dark matter.

DOI: 10.1103/PhysRevD.68.115009

PACS number(s): 12.60.Cn, 14.80.Mz

## I. INTRODUCTION

The standard model (SM) of strong and electroweak interactions  $SU_C(3) \otimes SU_L(2) \otimes U_Y(1)$  has shown its extraordinary accuracy in explaining many features of particle physics along the years. Among the issues not covered by this successful model there is the fact that the QCD vacuum has a nontrivial structure revealed by its nonperturbative regime, implying the so-called strong- $CP$  or  $\theta$  problem (the subject is widely reviewed in Ref. [1]). Violation of  $CP$  by strong interactions appears in the theory after the introduction of an instanton solution to solve the  $U_A(1)$  problem [2]. It induces the so-called  $\theta$  term in the QCD Lagrangian, which violates  $P$ ,  $T$ , and  $CP$ . Additional electroweak effects change this term proportionally to  $\text{Det}[M]$ , where  $M$  is the quark mass matrix. The effective  $\theta$  term  $\theta_{\text{eff}}$  is observable through the electric dipole moment of the neutron, whose experimental bound implies the upper limit  $|\theta_{\text{eff}}| < 10^{-9}$  [3]. The smallness of  $\theta_{\text{eff}}$  is what we call the strong- $CP$  problem.

Among the several solutions proposed to solve the strong- $CP$  problem, there is one which is particularly elegant. It was introduced by Peccei and Quinn [4] and consists of imposing a global chiral symmetry, known as the Peccei-Quinn (PQ) symmetry  $U_{PQ}(1)$ , on the classical Lagrangian so that the dynamics of the theory sets  $\theta_{\text{eff}}$  to zero. Because of the breaking of PQ symmetry, a massless pseudoscalar is generated, the axion, which couples linearly to the axial anomaly. When this axion develops a vacuum expectation value (VEV)  $v_{PQ}$ , it produces a further displacement on  $\theta_{\text{eff}}$ , making it disappear in favor of a dynamical field, the physical axion, eliminating the strong- $CP$  violating term of the theory. The breaking of PQ symmetry brings a

new scale into the theory,  $f_{PQ}$ , the axion decay constant, bounded by astrophysical and cosmological data, and its allowed range is  $10^9 \text{ GeV} < f_{PQ} < 10^{12} \text{ GeV}$  [5].

The first class of models introducing the axion via PQ symmetry in the context of the SM was obtained by Weinberg and Wilczek [6]. This axion was soon shown to be unrealistic mainly due to its nonsuppressed coupling to light matter fields [7], which happens when  $v_{PQ}$  is of order of the electroweak scale. Viable models to solve the strong  $CP$ , introducing an invisible axion, were devised by Kim and independently by Shifman, Vainshtein, and Zakharov [8] (KSVZ) and by Dine, Fischler, and Srednicki as well as Zhitnitskii [9] (DFSZ). Both make axions invisible by increasing  $v_{PQ}$  (the larger  $v_{PQ}$ , the weaker the axion-matter coupling) and obtain the axion through a singlet scalar. In the KSVZ axion model the ordinary quarks and leptons do not carry PQ charges; some heavy new quarks have to be included which carry this quantum number. On the contrary, in the DFSZ model ordinary quarks and leptons do carry PQ charges, although these fermions do not couple directly to the singlet, which happens only at the loop level through interactions in the potential.

The possibility of an invisible axion makes the PQ approach even more attractive since in this case the axion is a natural candidate for explaining the existence of cold dark matter (CDM) [10]. This is possible because the axion receives a tiny mass through a chiral anomaly,  $m_a^2 \sim \Lambda_{QCD}^4/f_{PQ}^2$ , amounting to a mass of  $\mathcal{O}(10^{-5}) \text{ eV}$ . However, it is not easy, in general, to obtain the required PQ symmetry in a natural way; most models have to impose it from the beginning, weakening such a solution to the strong- $CP$  problem. That is the reason we concentrate here on a class of models where the symmetry would arise automatically: namely, a particular version of the  $SU_C(3) \otimes SU_L(3) \otimes U_Y(1)$  model (3-3-1 for short) [11–15].

In 3-3-1 models the anomaly cancellation requires a minimal of three families (or a multiple of three in larger ver-

\*Electronic address: alexdias@fma.if.usp.br

†Electronic address: cpires@fisica.ufpb.br

‡Electronic address: fedel@ift.unesp.br

sions). Besides, there is a bunch of new particles and interactions which make these models phenomenologically rich and attractive as an alternative to the SM. If we assume that in the realm of intermediate energy there are no exotic leptons, then the 3-3-1 symmetry allows for only two possible gauge models for the strong and electroweak interactions, which will be referred as version I and version II.

In the most popular one, version I [11], the triplet of leptons is composed of  $(\nu_L, l_L, l_R^c)^T$ ; it contains exotic quarks with electric charge 4/3 and 5/3 and a doubly charged bilepton gauge boson  $U^{\pm\pm}$ , which prompts rare lepton decays. It also implies an upper bound on the Weinberg angle,  $\sin(\theta_W) < 1/4$ . Version II is the 3-3-1 model with right-handed neutrinos [12]. In it the triplet of leptons is constituted by  $(\nu_L, l_L, \nu_R^c)^T$ . Its bilepton gauge boson is neutral and their exotic quarks carry the usual charges 1/3 and 2/3 [16].

The physical properties of these models were investigated in several works and their different aspects became evident [14,15]. Among these differences it is noticeable that version I requires a minimal of three triplets and one sextet of scalars in order to generate the masses for all fermions and gauge bosons while version II does the same job with only three triplets.

Their shared aspects include the naturalness of massive neutrinos, with the difference that in version I neutrinos are Majorana type, while in version II they are Dirac type. Besides, from their structure these models dispose of enough constraints upon the  $U(1)_N$  quantum numbers, leading to a correct pattern for electric charge quantization [17]. Another of these aspects is that also the PQ symmetry and the leptonic symmetry can emerge naturally in both versions [18–20].

Since version II of 3-3-1 was observed to possess the PQ symmetry with a smaller content [20], although in that context the axion was of the Weinberg-Wilczek kind, we decided to chose this more economical model and investigate the possibility of obtaining an invisible axion by including only one extra scalar singlet field in the model. The presence of CDM candidates in version II of 3-3-1 was recently addressed [21], but here we wish to have the axion playing such a role. There is a crucial issue that has to be addressed when trying to stick with a CDM singlet axion though. It concerns the fact that gravitation induces dangerous effective terms in the Lagrangian, explicitly breaking any global symmetry of the theory. In particular, focusing on  $U_{PQ}(1)$ , this breaking implies a huge contribution to the axion mass. There remains the question of whether an appropriate mechanism exists in order to avoid such terms, stabilizing the axion. Fortunately, the annoying terms can be conveniently suppressed by the presence of suitable discrete symmetries. Moreover, it was noticed in the late 1980s by Kraus and Wilczek [22] that a local continuous symmetry at high energies manifests at low energies as discrete (local) symmetries which, differently from global ones, are expected to be respected by gravity. This means that the needed discrete symmetries can arise in a rather natural way if we assume some underlying local continuous symmetry.

Discrete gauge symmetries have been used to stabilize the axion in a model with extra dimensions by Kamionkowsky

and March-Russell [23] more than ten years ago. It was also pointed out that large discrete symmetries can naturally arise in the context of string theories [24]. The same is true in dimensional deconstruction [25], leading to low-mass pseudo-Nambu-Goldstone bosons as axion and quintessence. Also, in an attempt to prevent  $B-L$  violation in a class of supersymmetric standard model, large discrete symmetries were imposed, implying an automatic PQ symmetry, stabilized against quantum gravity effects [26]. For what we are concerned with, it was noticed in Ref. [19] that 3-3-1 models possess a large enough number of fields to accommodate large discrete symmetries  $Z_N$ . And the larger  $N$  is, the higher are the number of suppressed unwanted terms in the Lagrangian. In order to obtain a  $Z_{13}$  symmetry, the authors in Ref. [19] added some extra fermion fields to the model, resulting in an automatic PQ symmetry and the axion protected under gravitational mass corrections. This constitutes an additional motivation for considering these 3-3-1 models to obtain the invisible axion and solve the strong- $CP$  problem.

This work is divided as follows. We first introduce the model in Sec. II. In Sec. III we impose a  $Z_{11} \otimes Z_2$  symmetry, associating the appropriate charges for the fields, and obtain that the resulting Lagrangian is invariant under  $U_{PQ}(1)$ , identifying the correct PQ charges. This is done within the same spirit as that presented in Refs. [19,27], assigning charges under a discrete symmetry group to the fields at hand and observing that a PQ symmetry emerges automatically if a  $Z_2$  is also imposed. We will see that in this case also lepton number symmetry arises naturally. In Sec. IV, we analyze the symmetry breaking pattern of the model, recognizing the axion and its couplings. We finally present the conclusions in Sec. V.

## II. MODEL

Our investigation on this work relies on version II of the 3-3-1 models [15]. Its lepton content comes in the fundamental representation of the  $SU(3)_L$ , the left-handed composing a triplet and the right-handed a singlet,

$$f_L^a = \begin{pmatrix} \nu_L^a \\ e_L^a \\ (\nu_R^c)^a \end{pmatrix} \sim (1, 3, -1/3), \quad e_{aR} \sim (1, 1, -1), \quad (1)$$

with  $a = 1, 2, 3$  representing the three known generations. We are indicating the transformation under 3-3-1 after the similarity sign “~.” Differently from version I, right-handed neutrinos are already present instead of exotic leptons.

In the quark sector, one generation of left-handed fields comes in the triplet fundamental representation of  $SU(3)_L$  and the other two compose an antitriplet with the content

$$\mathcal{Q}_{iL} = \begin{pmatrix} d_{iL} \\ -u_{iL} \\ d'_{iL} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Q}_{3L} = \begin{pmatrix} u_{3L} \\ d_{3L} \\ u'_{3L} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

transforming as  $(3, \bar{3}, 0)$  and  $(3, 3, 1/3)$ , respectively, and  $i = 1, 2$  represents two different generations. The primed

quarks are the exotic ones but with the usual electric charges. Right-handed quark fields are singlets:

$$\begin{aligned} u_{iR} &\sim (3, 1, 2/3), \quad d_{iR} \sim (3, 1, -1/3), \quad d'_{iR} \sim (3, 1, -1/3) \\ u_{3R} &\sim (3, 1, 2/3), \quad d_{3R} \sim (3, 1, -1/3), \quad u'_{3R} \sim (3, 1, 2/3). \end{aligned} \quad (3)$$

In order to generate the masses for the gauge bosons and fermions, the model requires only three triplets of scalars: namely,

$$\chi = \begin{pmatrix} \chi^0 \\ \chi^- \\ \chi'^0 \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta^0 \\ \eta^- \\ \eta'^0 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho^+ \\ \rho^0 \\ \rho'^+ \end{pmatrix}, \quad (4)$$

where  $\eta$  and  $\chi$  both transform as  $(1, 3, -1/3)$  and  $\rho$  transforms as  $(1, 3, 2/3)$ .

With these scalars and matter fields we can write the Yukawa interactions [28]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^Y = & G_1 \bar{Q}_{3L} u'_{3R} \chi + G_2^{ij} \bar{Q}_{iL} d'_{iR} \chi^* + G_3^{3a} \bar{Q}_{3L} u_{aR} \eta \\ & + G_4^{ia} \bar{Q}_{iL} d_{aR} \eta^* + G_5^{3a} \bar{Q}_{3L} d_{aR} \rho + G_6^{ia} \bar{Q}_{iL} u_{aR} \rho^* \\ & + h_{ab} \bar{f}_{aL} e_{bR} \rho + h'_{ab} \epsilon^{ijk} (\bar{f}_{aL})_i (f_{bL})_j^c (\rho^*)_k + \text{H.c.} \end{aligned} \quad (5)$$

After the breaking of the 3-3-1 symmetry the vector gauge bosons  $W^\pm$ ,  $V^\pm$ ,  $U^0$ , and  $U^{0\dagger}$  interact with matter as follows [29]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{CI} = & -\frac{g}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_L^a \gamma^\mu e_L^a W_\mu^+ + (\bar{\nu}_R^c)^a \gamma^\mu e_L^a V_\mu^+ + \bar{\nu}_L^a \gamma^\mu (\nu_R^c)^a U_\mu^0 \\ & + \bar{u}_L^a \gamma^\mu d_L^a W_\mu^+ + (\bar{u}'_{3L} \gamma^\mu d_{3L} + \bar{u}_{iL} \gamma^\mu d'_{iL}) V_\mu^+ \\ & + (\bar{u}_{3L} \gamma^\mu u'_{3L} - \bar{d}'_{iL} \gamma^\mu d_{iL}) U_\mu^0] + \text{H.c.} \end{aligned} \quad (6)$$

It is through these Lagrangian interactions  $\mathcal{L}^Y$  and  $\mathcal{L}^{CI}$  that we can recognize particles that carry lepton number  $L$  such that total lepton number is conserved at this level. From these interactions we have

$$L(V^+, u'_3, \eta'^0, \rho'^+) = -2, \quad L(U^0, d'_i, \chi^0, \chi^-) = +2. \quad (7)$$

Notice that the new quarks  $u'_3$  and  $d'_i$  are leptoquarks once they carry lepton and baryon numbers;  $V^\pm$  are charged vector bileptons while  $U^0$  and  $U^{0\dagger}$  are neutral vector bileptons. We have also charged scalar bileptons and two neutral scalar bileptons. These last ones would be important in studying spontaneous breaking of lepton number if the associated global symmetry is conserved by the potential, leading to the so-called majoron, as discussed in Ref. [20].

We include also an additional singlet scalar field  $\phi \sim (1, 1, 0)$  in order to complete the spectrum, allowing for the desired discrete symmetry which will enable us to get an axion protected under a large gravitational contribution to its mass.

Finally, we can write the most general, renormalizable, and gauge-invariant potential for this model. We divide into two pieces: one Hermitian,  $V_H$ , and one non-Hermitian,  $V_{NH}$ , which can be written as

$$\begin{aligned} V_H = & \mu_\phi^2 \phi^2 + \mu_\chi^2 \chi^2 + \mu_\eta^2 \eta^2 + \mu_\rho^2 \rho^2 + \lambda_1 \chi^4 + \lambda_2 \eta^4 + \lambda_3 \rho^4 + \lambda_4 (\chi^\dagger \chi)(\eta^\dagger \eta) + \lambda_5 (\chi^\dagger \chi)(\rho^\dagger \rho) + \lambda_6 (\eta^\dagger \eta)(\rho^\dagger \rho) + \lambda_7 (\chi^\dagger \eta) \\ & \times (\eta^\dagger \chi) + \lambda_8 (\chi^\dagger \rho)(\rho^\dagger \chi) + \lambda_9 (\eta^\dagger \rho)(\rho^\dagger \eta) + \lambda_{10} (\phi \phi^*)^2 + \lambda_{11} (\phi \phi^*)(\chi^\dagger \chi) + \lambda_{12} (\phi \phi^*)(\rho^\dagger \rho) + \lambda_{13} (\phi \phi^*)(\eta^\dagger \eta) \end{aligned} \quad (8)$$

and

$$\begin{aligned} V_{NH} = & \mu_{\chi\eta}^2 \chi^\dagger \eta + f_1 \chi^\dagger \eta \phi + f_2 \chi^\dagger \eta \phi^* + \lambda_{14} (\chi^\dagger \eta)^2 + \lambda_{15} \chi^\dagger \eta \phi \phi + \lambda_{16} \chi^\dagger \eta \phi^* \phi + \lambda_{17} \chi^\dagger \eta \phi^* \phi^* + \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon^{ijk} (f_3 \eta_i \rho_j \chi_k \\ & + f_4 \eta_i \eta_j \rho_k + f_5 \chi_i \chi_j \rho_k) + \epsilon^{ijk} (\lambda_{18} \eta_i \rho_j \chi_k + \lambda_{19} \eta_i \eta_j \rho_k + \lambda_{20} \chi_i \chi_j \rho_k) \phi + \epsilon^{ijk} (\lambda_{21} \eta_i \rho_j \chi_k + \lambda_{22} \eta_i \eta_j \rho_k + \lambda_{23} \chi_i \chi_j \rho_k) \phi^* \\ & + \lambda_{24} (\chi^\dagger \rho)(\rho^\dagger \eta) + \lambda_{25} (\chi^\dagger \eta)(\eta^\dagger \eta) + \lambda_{26} (\chi^\dagger \eta)(\rho^\dagger \rho) + \lambda_{27} (\chi^\dagger \eta)(\chi^\dagger \chi) + \text{H.c.} \end{aligned} \quad (9)$$

With this at hand we have all the necessary ingredients to associate a discrete symmetry  $Z_{11}$  to the model. This will allow us to eliminate several terms in the non-Hermitian potential, Eq. (9), and verify that we need only an additional  $Z_2$  symmetry to have PQ symmetry naturally, assigning the appropriate PQ charges to fermions and scalars.

### III. $Z_{11}$ AND PQ SYMMETRIES

A discrete symmetry  $Z_N$  can naturally be accommodated when the theory has a large enough number of fields in its spectrum. It was observed that this is the case for the SM when some scalar multiplets and right-handed neutrinos are

added [27] or for the minimal 3-3-1 model when only right-handed neutrinos need to be included [19]. It was obtained that a  $Z_{13}$  local symmetry could be imposed in this way, leading to a natural PQ symmetry. We remark that this idea was first pursued by Lazarides *et al.* in the context of models embedded in superstring theories [30].

Here we are going to apply such idea to the version of 3-3-1 model presented in Sec. II, which has right-handed neutrinos in its fundamental representation. It was observed that an axion might be a natural outcome when a  $Z_2$  symmetry was imposed in this model [19]. Although this axion is of the Weinberg-Wilczek kind, thus phenomenologically discarded [7], if we consider the enlarged spectrum with a singlet scalar  $\phi$ , the axion can be a mixing of this field with other scalars in the model, with its major component being the pseudoscalar part of the  $\phi$  field. Then, a discrete symmetry can be imposed, allowing for an axion also protected under gravitational mass corrections.

To proceed in this way we first assign the  $Z_N$  charges to all independent fields and check for additional symmetries appearing after eliminating forbidden terms under  $Z_N$ . It will turn out that a chiral  $U(1)$  symmetry arise, and we will see that it is possible to identify it with PQ symmetry. It would be interesting to have a  $Z_{13}$  symmetry so as to obtain a PQ scale in its upper limit  $v_{PQ} \sim 10^{12}$  GeV. Although the model disposes of 14 independent multiplets, it is not possible to accommodate a symmetry greater than  $Z_{12}$ , because the Yukawa interactions in Eq. (5) imply some constraints over the allowed  $Z_N$  charges. It is clear that  $N=12$  is the value of  $N$  that allows for a maximal protection of the axion under gravitational effects in this model. However, besides the seemingly difficulty of avoiding to repeat the phases of the multiplets, the singlet  $\phi$  would have to acquire a very specific phase since 12 is not a prime number. In other words, any even phase would make the transformation to belong to a smaller discrete symmetry, jeopardizing our intent of suppressing some high-order operators involving  $\phi$  products. For this reason the largest discrete symmetry we can use is  $Z_{11}$ , which allows any phase to  $\phi$ , except the trivial one.

The effective operators responsible for the gravitational mass contribution are of the form  $\phi^n/M_{Pl}^{n-4}$ . A  $Z_N$  symmetry automatically suppress terms of this kind until some  $n=N-1$ . The main surviving term contributing to the axion mass is the one with  $n=N$ . It is true that with  $Z_{11}$  the axion is protected only for energy scales not bigger than  $\langle\phi\rangle \simeq 10^{10}$  GeV. Nevertheless, this is not a threat for the model since we still have values for the  $\theta$  angle and axion mass (gravitationally induced) [31]:

$$M_a^{grav} = \sqrt{\frac{\langle\phi\rangle^{N-2}}{M_{Pl}^{N-4}}} \simeq 10^{-12} \text{ eV} \simeq 10^{-7} m_a,$$

$$\theta_{eff} = \frac{\langle\phi\rangle^N}{M_{Pl}^{N-4} \Lambda_{QCD}^4} \simeq 10^{-19}, \quad (10)$$

where we have used  $M_{Pl} \simeq 10^{19}$  GeV and  $\Lambda_{QCD} \simeq 300$  MeV, and  $m_a \simeq 10^{-5}$  eV is the instanton induced axion mass. These values are consistent with astrophysical and

experimental bounds (see PDG [3]). If we had taken  $\langle\phi\rangle \simeq 10^{11}$  GeV, the axion would still be protected under gravitation, but the  $\theta$  value would be on the threshold of its bound  $\theta_{eff} \lesssim 10^{-9}$ . So we can have a valid solution to the strong-CP problem for  $Z_{11}$  for scales  $\langle\phi\rangle \lesssim 10^{10}$  GeV in this version of 3-3-1. In order to seek for this solution let us proceed further by first assigning the correct  $Z_{11}$  charges to the fields. Defining  $\omega_k \equiv e^{\frac{2\pi i k}{11}}$  ( $k=0, \pm 1, \dots, \pm 5$ ), the  $Z_{11}$  transformations are given by

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \omega_1 \phi, & f_{aL} &\rightarrow \omega_1^{-1} f_{aL}, \\ \rho &\rightarrow \omega_2 \rho, & d_{aR} &\rightarrow \omega_2^{-1} d_{aR}, \\ \chi &\rightarrow \omega_3 \chi, & (e_R, u'_{3R}) &\rightarrow \omega_3^{-1} (e_R, u'_{3R}), \\ Q_{iL} &\rightarrow \omega_4 Q_{iL}, & d'_{iR} &\rightarrow \omega_4^{-1} d'_{iR}, \\ \eta &\rightarrow \omega_5 \eta, & u_{aR} &\rightarrow \omega_5^{-1} u_{aR}, \\ Q_{3L} &\rightarrow \omega_0 Q_{3L}. \end{aligned} \quad (11)$$

At this point it is possible to go back to the potential, Eq. (9), and note that this symmetry eliminates all non-Hermitian terms except three: namely,  $\chi^\dagger \eta \phi^* \phi^*$ ,  $\eta \rho \chi \phi$ ,  $\eta \eta \rho \phi^*$ .

If besides the  $Z_{11}$  symmetry we impose a  $Z_2$  symmetry that acts as

$$(\phi, \chi, d'_R, u'_{3R}) \rightarrow -(\phi, \chi, d'_R, u'_{3R}), \quad (12)$$

with the remaining fields transforming trivially, the only term which remains in the non-Hermitian potential is the  $\eta \rho \chi \phi$ . It should be noted that the Yukawa interactions in Eq. (5) do not allow for terms which interchange  $\chi \leftrightarrow \eta$ , since they do not respect  $Z_{11} \otimes Z_2$  given by Eqs. (11) and (12).

We have the stage settled to see that an automatic PQ symmetry arises in the model. To achieve this conclusion we start by assigning the PQ quantum numbers such that quarks of opposite chiralities have opposite charges, yielding chiral quarks under a  $U_{PQ}(1)$  transformation:

$$\begin{aligned} u_{aL} &\rightarrow e^{-i\alpha X_u} u_{aL}, & u_{aR} &\rightarrow e^{i\alpha X_u} u_{aR}, \\ u'_{3L} &\rightarrow e^{-i\alpha X'_u} u'_{3L}, & u'_{3R} &\rightarrow e^{i\alpha X'_u} u'_{3R}, \\ d_{aL} &\rightarrow e^{-i\alpha X_d} d_{aL}, & d_{aR} &\rightarrow e^{i\alpha X_d} d_{aR}, \\ d'_{iL} &\rightarrow e^{-i\alpha X'_d} d'_{iL}, & d'_{iR} &\rightarrow e^{i\alpha X'_d} d'_{iR}. \end{aligned} \quad (13)$$

For the leptons we can define their PQ charges by

$$\begin{aligned} e_{aL} &\rightarrow e^{i\alpha X_e} e_{aL}, & e_{aR} &\rightarrow e^{i\alpha X_{eR}} e_{aR}, \\ \nu_{aL} &\rightarrow e^{i\alpha X_\nu} \nu_{aL}, & \nu_{aR} &\rightarrow e^{i\alpha X_{\nu R}} \nu_{aR}. \end{aligned} \quad (14)$$

With these assignments and taking the Yukawa interactions in Eq. (5) into account, as well as the non-Hermitian terms  $\eta \rho \chi \phi$ , we easily see that the PQ charges for the scalars are constrained and imply the relations

$$X_d = -X_u, \quad X_{d'} = -X_{u'}, \quad X_\nu = X_{eR}, \quad X_e = X_{\nu R}. \quad (15)$$

We can make the further choice  $X_d = X_{d'}$ , leading to

$$X_d = X_{d'} = -X_u = -X_{u'} = -X_e = X_{eR} = X_\nu = -X_{\nu R}, \quad (16)$$

implying that the PQ symmetry is chiral for the leptons too, and the scalars transform as

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow e^{-2i\alpha X_d} \phi, & \eta^0 &\rightarrow e^{2i\alpha X_d} \eta^0, \\ \eta^- &\rightarrow \eta^-, & \eta'^0 &\rightarrow e^{2i\alpha X_d} \eta'^0, \\ \rho^+ &\rightarrow \rho^+, & \rho^0 &\rightarrow e^{-2i\alpha X_d} \rho^0, \\ \rho'^+ &\rightarrow \rho'^+, & \chi^0 &\rightarrow e^{2i\alpha X_d} \chi^0, \\ \chi^- &\rightarrow \chi^-, & \chi'^0 &\rightarrow e^{2i\alpha X_d} \chi'^0. \end{aligned} \quad (17)$$

Now it is transparent that the whole Lagrangian of the model is  $U_{PQ}(1)$  invariant and the strong- $CP$  problem can be solved in the context of this model. The strong- $CP$  violation angle is given by the sum over the quarks PQ charges, which translates to

$$\theta \rightarrow \theta \pm 2\alpha X_d. \quad (18)$$

This result is possible in this version of 3-3-1 because the PQ charges of the exotic quarks  $d'$  and  $u'_3$  do not cancel exactly for the case of interest here,  $X_u = -X_d$ . Moreover, the model is particularly attractive in the sense it does not present the domain wall problem [32]. This means that there is no discrete subset of PQ symmetry that leaves the axion potential invariant—i.e.,  $\exists Z_N \subset U_{PQ}(1)$  such that  $V_{axion}(\theta)$  is invariant. This is similar to what happens in the 3-3-1 version discussed in Ref. [19], although there right-handed neutrinos had to be added to the model besides the singlet scalar.

It is remarkable that under  $Z_{11} \otimes Z_2$ , not only is the PQ chiral symmetry automatic but the lepton number symmetry also appears naturally in the model, once the possibly non-conserving lepton number terms present in the potential completely disappeared. In this sense, discrete symmetries originating at some high-energy scale seem to be enough to generate the desired global symmetries we need at lower energies.

We finally write the most general potential invariant under 3-3-1 and  $Z_{11} \otimes Z_2$  [or  $U_{PQ}(1)$  and lepton number] symmetries,

$$V(\eta, \rho, \chi) = V_H + \lambda_\phi \epsilon^{ijk} \eta_i \rho_j \chi_k \phi + \text{H.c.}, \quad (19)$$

where  $V_H$  is given in Eq. (8).

In the next section we are going to use this potential to recognize the axion, the Goldstone boson originating from the breaking of the PQ symmetry, and verify that it is constituted mostly of the singlet  $\phi$ .

#### IV. SPONTANEOUSLY BROKEN PQ SYMMETRY

The potential given in the previous section, Eq. (19), allows us to obtain the mass eigenstates for the scalars, so we can identify the Goldstone bosons which are absorbed by the massive gauge bosons and extract the axion in terms of the interaction eigenstates. To accomplish this, let us consider that only  $\chi'^0$ ,  $\rho^0$ ,  $\eta^0$  and  $\phi$  develop a VEV and expand such fields around their VEV's in the standard way,

$$\begin{aligned} \chi'^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v_{\chi'} + R_{\chi'} + iI_{\chi'}), & \eta^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\eta + R_\eta + iI_\eta), \\ \rho^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\rho + R_\rho + iI_\rho), & \phi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(v_\phi + R_\phi + iI_\phi). \end{aligned} \quad (20)$$

With such an expansion, the next step is to get the constraints that lead to the minimum of the potential:

$$\begin{aligned} \mu_\chi^2 + \lambda_1 v_{\chi'}^2 + \frac{\lambda_4}{2} v_\eta^2 + \frac{\lambda_5}{2} v_\rho^2 + \frac{\lambda_{11}}{2} v_\phi^2 + \frac{A}{v_{\chi'}^2} &= 0, \\ \mu_\eta^2 + \lambda_2 v_\eta^2 + \frac{\lambda_4}{2} v_{\chi'}^2 + \frac{\lambda_6}{2} v_\rho^2 + \frac{\lambda_{13}}{2} v_\phi^2 + \frac{A}{v_\eta^2} &= 0, \\ \mu_\rho^2 + \lambda_3 v_\rho^2 + \frac{\lambda_5}{2} v_{\chi'}^2 + \frac{\lambda_6}{2} v_\eta^2 + \frac{\lambda_{12}}{2} v_\phi^2 + \frac{A}{v_\rho^2} &= 0, \\ \mu_\phi^2 + \lambda_{10} v_\phi^2 + \frac{\lambda_{11}}{2} v_{\chi'}^2 + \frac{\lambda_{12}}{2} v_\rho^2 + \frac{\lambda_{13}}{2} v_\eta^2 + \frac{A}{v_\phi^2} &= 0, \end{aligned} \quad (21)$$

where we have defined  $A \equiv \lambda_\phi v_\eta v_\rho v_{\chi'} v_\phi$ . Substituting the expansion in Eq. (20) in the potential, Eq. (19), and using the constraints above, we get the mass matrix  $M_R^2(R_\chi, R_\eta)$  for the real scalars in the basis  $(R_\chi, R_\eta)$ ,

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda_7 v_\eta^2}{4} - \frac{A}{2v_{\chi'}^2} & \frac{\lambda_7 v_{\chi'} v_\eta}{4} - \frac{A}{2v_{\chi'} v_\eta} \\ \frac{\lambda_7 v_{\chi'} v_\eta}{4} - \frac{A}{2v_{\chi'} v_\eta} & \frac{\lambda_7 v_{\chi'}^2}{4} - \frac{A}{2v_\eta^2} \end{bmatrix}, \quad (22)$$

and the mass matrix  $M_R^2(R_{\chi'}, R_\eta, R_\rho, R_\phi)$  in the basis  $(R_{\chi'}, R_\eta, R_\rho, R_\phi)$ ,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 v_{\chi'}^2 - \frac{A}{2v_{\chi'}^2} & \frac{\lambda_4 v_{\chi'} v_{\eta}}{2} + \frac{A}{2v_{\eta} v_{\chi'}} & \frac{\lambda_5 v_{\chi'} v_{\rho}}{2} + \frac{A}{2v_{\rho} v_{\chi'}} & \frac{A}{2v_{\phi} v_{\chi'}} \\ \dots & \lambda_2 v_{\eta}^2 - \frac{A}{2v_{\eta}^2} & \frac{\lambda_6 v_{\eta} v_{\rho}}{2} + \frac{A}{2v_{\rho} v_{\eta}} & \frac{A}{2v_{\eta} v_{\phi}} \\ \dots & \dots & \lambda_3 v_{\rho}^2 - \frac{A}{2v_{\rho}^2} & \frac{A}{2v_{\rho} v_{\phi}} \\ \dots & \dots & \dots & \lambda_{10} v_{\phi}^2 - \frac{A}{2v_{\phi}^2} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

These bases are not coupled; that is the reason we have two squared mass matrices. From the first matrix, Eq. (22), after diagonalization it is easy to recognize the following massless scalar in it:

$$R_G = \frac{1}{\sqrt{v_{\eta}^2 + v_{\chi'}^2}} (v_{\eta} R_{\eta} - v_{\chi'} R_{\chi}). \quad (24)$$

The other real scalar mass eigenstate is orthogonal to this one and those coming from the diagonalization of the matrix, Eq. (23), which are a little more intricate but fortunately we do not need them for our purpose.

Regarding the pseudoscalars, similarly to the real scalars, we obtain the mass matrix  $M_I^2(I_{\chi}, I_{\eta'})$  in the basis  $(I_{\chi}, I_{\eta'})$ ,

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda_7 v_{\eta}^2}{4} - \frac{A}{2v_{\chi'}^2} & -\frac{\lambda_7 v_{\chi'} v_{\eta}}{4} + \frac{A}{2v_{\eta} v_{\chi'}} \\ -\frac{\lambda_7 v_{\chi'} v_{\eta}}{4} + \frac{A}{2v_{\eta} v_{\chi'}} & \frac{\lambda_7 v_{\chi'}^2}{4} - \frac{A}{2v_{\eta}^2} \end{bmatrix}, \quad (25)$$

and the mass matrix  $M_I^2(I_{\chi'}, I_{\eta}, I_{\rho}, I_{\phi})$  in the basis  $(I_{\chi'}, I_{\eta}, I_{\rho}, I_{\phi})$ ,

$$-\frac{A}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{v_{\chi'}^2} & \frac{1}{v_{\eta} v_{\chi'}} & \frac{1}{v_{\rho} v_{\chi'}} & \frac{1}{v_{\chi'} v_{\phi}} \\ \dots & \frac{1}{v_{\eta}^2} & \frac{1}{v_{\eta} v_{\rho}} & \frac{1}{v_{\eta} v_{\phi}} \\ \dots & \dots & \frac{1}{v_{\rho}^2} & \frac{1}{v_{\eta} v_{\rho}} \\ \dots & \dots & \dots & \frac{1}{v_{\phi}^2} \end{bmatrix}. \quad (26)$$

From these matrices we can easily obtain the Goldstone bosons and identify the axion as the one whose main component is in the  $\phi$  direction. The Goldstone and pseudo-Goldstone bosons are

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_{\chi'}^2}{v_{\phi}^2}}} \left( I_{\phi} - \frac{v_{\chi'}}{v_{\phi}} I_{\chi'} \right),$$

$$G_1 = \sqrt{\frac{\xi}{v_{\phi}^2 v_{\chi'}^2 + \xi}} \left( I_{\rho} - \frac{v_{\phi}^2 v_{\chi'}}{\xi} I_{\chi'} - \frac{v_{\phi} v_{\chi'}^2}{\xi} I_{\phi} \right),$$

$$G_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_{\chi'}^2}{v_{\eta}^2}}} \left( I_{\eta'} + \frac{v_{\chi'}}{v_{\eta}} I_{\chi} \right),$$

$$G_3 = \sqrt{\frac{v_{\eta}^2 (v_{\phi}^2 v_{\chi'}^2 + \xi)}{v_{\rho}^2 v_{\phi}^2 v_{\chi'}^2 + v_{\eta}^2 (v_{\phi}^2 v_{\chi'}^2 + \xi)}} \left( I_{\eta} - \frac{v_{\rho}^2 v_{\phi}^2 v_{\chi'}}{v_{\eta} (v_{\phi}^2 v_{\chi'}^2 + \xi)} I_{\chi'} - \frac{v_{\rho} v_{\phi}^2 v_{\chi'}^2}{v_{\eta} (v_{\phi}^2 v_{\chi'}^2 + \xi)} I_{\rho} - \frac{v_{\rho}^2 v_{\phi} v_{\chi'}^2}{v_{\eta} (v_{\phi}^2 v_{\chi'}^2 + \xi)} I_{\phi} \right),$$

$$PS_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_{\phi}^2}{v_{\eta}^2} + \frac{v_{\phi}^2}{v_{\rho}^2} + \frac{v_{\phi}^2}{v_{\chi'}^2}}} \times \left( I_{\phi} + \frac{v_{\phi}}{v_{\chi'}} I_{\chi'} + \frac{v_{\phi}}{v_{\eta}} I_{\eta} + \frac{v_{\phi}}{v_{\rho}} I_{\rho} \right),$$

$$PS_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{v_{\eta}^2}{v_{\chi'}^2}}} \left( I_{\eta'} - \frac{v_{\eta}}{v_{\chi'}} I_{\chi} \right), \quad (27)$$

where we have defined  $\xi \equiv v_\rho^2(v_\phi^2 + v_{\chi'}^2)$ . In the above equation, the axion is identified as  $a$ , and the remaining three Goldstone bosons  $G_1$ ,  $G_2$ , and  $G_3$  together with the Goldstone boson in Eq. (24) are those absorbed by the four neutral gauge bosons of the model. The last two linear combinations of the interaction states in Eq. (27),  $PS_1$  and  $PS_2$ , are the massive eigenstates or pseudo-Goldstone bosons. The important point that can be extracted and from these results is that our axion has a small component of  $I_{\chi'}$ . Since,  $v_\phi \approx 10^{10}$  GeV and  $v_{\chi'} \approx 10^3$  GeV, this component is very suppressed and, as expected, our axion is invisible, being almost exclusively the imaginary part of the singlet  $\phi$ . Besides, since  $I_{\chi'}$  couples only to the exotic quarks, our axion is very different even from that obtained in the version of 3-3-1 in Ref. [19], which does couple to neutrinos at the tree level. Its coupling can be easily obtained after rotating the mass eigenstates, Eq. (27), in terms of the interaction eigenstates, and it translates into the Lagrangian term

$$\mathcal{L}_{aq'q'} = \frac{-iv_{\chi'}}{\sqrt{2(v_\phi^2 + v_{\chi'}^2)}} [G_1 \bar{u}'_{3L} u'_{3R} - G_2^{ij} \bar{d}'_{iL} d'_{jR}] a + \text{H.c.}, \quad (28)$$

which is very weak for  $G_1, G_2^{ij} \sim$  of the order of unity, since  $v_\phi \gg v_{\chi'}$ . The pseudo-Goldstone bosons  $PS_1$  and  $PS_2$  are more strongly coupled to fermions and, differently from the axion, also couple to ordinary matter. This leads us to conclude that, in this model, the only candidate for cold dark matter is the axion. We could check if the real massive scalars could fit for this role also, but a rough numerical approximation just confirms that they behave as their partners, as we could expect.

We also checked the coupling of our axion with photons. It is defined through the effective Lagrangian term

$$\mathcal{L}_{a\gamma\gamma} = \frac{\bar{c}_{a\gamma\gamma}}{32\pi^2} \frac{a(x)}{v_{PQ}} \tilde{F}_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (29)$$

In the present model only exotic quarks participate in the loop, leading to the above anomaly term, which leads to

$$\bar{c}_{a\gamma\gamma} = -\frac{2}{3v_{PQ}} \sum_{q'} X_{q'} Q_{q'}^2 = \frac{4}{9} \approx 0.44. \quad (30)$$

This value is very similar to those obtained in different models present in the literature and can be used to make the relevant computations involving axions in astrophysical processes.

## V. SUMMARY AND CONCLUSIONS

We studied the consequences of discrete symmetries in the version of the 3-3-1 model with right-handed neutrinos. One of the main points in this work is that global symmetries appear automatically as a consequence of such discrete symmetries in this model. It turned out that, when the model has a  $Z_{11} \otimes Z_2$  symmetry, the whole Lagrangian is invariant under  $U(1)$  transformations and also total lepton number is con-

served at the classical level. It is remarkable that this happens in this more economical version of the model by adding only one singlet scalar; no other fields are necessary, which makes it a suitable model for implementing the strong- $CP$  problem solution.

We then recognized the global symmetry identifying it with a chiral PQ symmetry  $U_{PQ}(1)$ . In general, solutions to the strong- $CP$  problem through the PQ mechanism lead to domain wall formation, which is a threatening feature to cosmology, but fortunately model dependent. In this version of the 3-3-1 model this problem is absent due to the fact that we chose a relation among PQ charges—namely,  $X_d = X'_d$ —which avoids this situation. Nevertheless, we have to remark that other possibilities would be allowed if we had not imposed a  $Z_2$  symmetry. In this case, we could have let  $X'_d$  free and, working with the non-Hermitian potential terms, look for the relations among the PQ charges that would keep the  $U_{PQ}(1)$  invariance. Such a relation exists and is given by  $3X'_d = -X_d$ , which is consistent with PQ invariance for all three  $Z_{11}$  invariant non-Hermitian terms  $\chi^\dagger \eta \phi^* \phi^*$ ,  $\eta \rho \chi \phi$ , and  $\eta \eta \rho \phi^*$ . In this situation we would have to address the formation of domain walls, and for this reason our previous choice seemed physically more appealing.

We proceeded with the spontaneous breaking of  $U_{PQ}(1)$  and studied its consequences, obtaining the axion and showing that it is mainly constituted of the singlet. It was shown that it interacts with exotic quarks only, through a very suppressed coupling. Hence, our axion is an invisible one. However, since global symmetries are not stable against gravity effects, our axion could be in danger, receiving large mass corrections and losing its appeal as a CDM candidate. This was circumvented by assuming that  $Z_{11}$  is a subgroup of an underlying gauge group at some high-energy scale. Annoying gravity-induced terms contributing to the axion mass are conveniently suppressed thanks to the local  $Z_{11}$ , stabilizing the axion. Although larger discrete symmetries would lead to a better stabilization of the axion against gravity, as well as a  $\theta_{eff}$  safer from experimental constraints, we saw that it is still possible to have a  $Z_{11}$  leading to small mass corrections and  $\theta_{eff}$  below the bound  $\theta_{eff} < 10^{-9}$  if  $v_\phi \equiv \langle \phi \rangle \approx 10^{10}$  GeV. Besides, the fact that 11 is a prime number allows  $\phi$  to acquire any charge under  $Z_{11}$  except the trivial one. This implies no need of assigning a very specific charge to  $\phi$  in order to avoid restriction to smaller subsets of  $Z_N$  which would not lead to axion stabilization.

Finally, there is a point that has to be highlighted when considering the 3-3-1 version with right-handed neutrinos. In the form it was presented here the model generates arbitrary masses for two neutrinos only, which can be deduced from the antisymmetry of the Yukawa coupling  $h'_{ab}$  in Eq. (5). This leads to an antisymmetric neutrino mass matrix, implying a zero eigenvalue and two degenerate ones. Although the massiveness of neutrinos is not the issue here, it would be nice to have a model that at least produces an appropriate arbitrary mass pattern for all fermions of the theory. To accomplish this we have to devise some way of eliminating such mass degeneracy. We can suggest two ways of doing that. One of them makes no enlargement of the spectrum and

seems the preferable one, dealing only with the vacuum of the theory. In Ref. [20], the breaking of leptonic symmetry could be achieved only through a nonconserving PQ symmetry term—namely, the  $\eta\rho\chi$ —when  $\eta'$  acquires a nonvanishing VEV. However, we have seen that our approach allows for an equivalent term which could lead to lepton number violation too, which is  $\eta\rho\chi\phi$ , with the difference that in this case PQ symmetry is still conserved. This term allows for a Majorana neutrino mass through loop corrections, making possible a mass matrix which is arbitrary enough to accommodate nondegenerate and nonzero neutrino masses. Another way out could be traced by including a singlet neutrino in the spectrum. Such a neutrino carries the exact quantum numbers to provide the required invariance under  $Z_{11} \otimes Z_2$  and  $U_{PQ}(1)$  and leave only nondegenerate massive neutrinos in the theory. This second possibility sounds appealing since not many fields can be introduced without jeopardizing the desired discrete and global symmetries here studied. Whatever nature's choice, both would be adequate to fit in our approach.

Summarizing, we obtained automatic  $U_{PQ}(1)$  and lepton number symmetries by imposing a local discrete symmetry in an economic version of 3-3-1 model with right-handed neutrinos. We got an invisible axion stabilized under gravitational mass corrections, absent of the domain wall problem, solving the strong- $CP$  problem and constituting a strong candidate to CDM. These results are a remarkable achievement of our work, considering that the only additional ingredient we have used was the inclusion of a singlet scalar in the model.

## ACKNOWLEDGMENTS

We would like to thank Vicente Pleitez for useful discussions and suggestions. This research was partially supported by Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) (AGD,PSRS) and by Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) (CASP).

- 
- [1] J. Kim, Phys. Rep. **150**, 1 (1987); R.D. Peccei, Adv. Ser. Dir. High Energy Phys. **3**, 503 (1989); J.E. Kim, Prog. Part. Nucl. Phys. **45**, 157 (2000).
- [2] G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. **37**, 8 (1976); Phys. Rev. D **14**, 3432 (1976).
- [3] Particle Data Group, K. Hagiwara *et al.*, Phys. Rev. D **66**, 010001 (2002).
- [4] R.D. Peccei and H.R. Quinn, Phys. Rev. Lett. **38**, 1440 (1977); Phys. Rev. D **16**, 1791 (1977).
- [5] J. Preskill, M.B. Wise, and F. Wilczek, Phys. Lett. **120B**, 127 (1983); L.F. Abbott and P. Sikivie, *ibid.* **120B**, 133 (1983); M. Dine and W. Fischler, *ibid.* **120B**, 137 (1983); G. Raffelt and D. Seckel, Phys. Rev. Lett. **60**, 1793 (1988); M.S. Turner, *ibid.* **60**, 1797 (1988); R. Mayle *et al.*, Phys. Lett. B **203**, 188 (1988).
- [6] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **40**, 223 (1978); F. Wilczek, *ibid.* **40**, 279 (1978).
- [7] R.D. Peccei, in *Proceedings of the 19th ICHEP Meeting, Tokyo, 1978*, edited by H. Homma *et al.* (Physical Society of Japan, Tokyo, 1979), p. 1045.
- [8] J.E. Kim, Phys. Rev. Lett. **43**, 103 (1979); M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, and V.I. Zakharov, Nucl. Phys. **B166**, 493 (1980).
- [9] M. Dine, W. Fischler, and M. Srednicki, Phys. Lett. **104B**, 199 (1981); A.P. Zhitnitskii, Sov. J. Nucl. Phys. **31**, 260 (1980).
- [10] M. Srednicki and N.J.C. Spooner, in [3]; A.D. Lewis, D.A. Buote, and J.T. Stocke, Astrophys. J. **586**, 135 (2003), and references therein.
- [11] F. Pisano and V. Pleitez, Phys. Rev. D **46**, 410 (1992); P.H. Frampton, Phys. Rev. Lett. **69**, 2889 (1992).
- [12] R. Foot, H.N. Long, and T.A. Tran, Phys. Rev. D **50**, R34 (1994); J.C. Montero, F. Pisano, and V. Pleitez, *ibid.* **47**, 2918 (1993).
- [13] L. Clavelli and T.C. Yang, Phys. Rev. D **10**, 658 (1974); B.W. Lee and S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **38**, 1237 (1977); B.W. Lee and R.E. Shrock, Phys. Rev. D **17**, 2410 (1978); M. Singer, *ibid.* **19**, 296 (1979); M. Singer, J.W.F. Valle, and J. Schechter, *ibid.* **22**, 738 (1980).
- [14] R. Foot, O.F. Hernandez, F. Pisano, and V. Pleitez, Phys. Rev. D **47**, 4158 (1993); D. Ng, *ibid.* **49**, 4805 (1994); J.T. Liu, *ibid.* **50**, 542 (1994); F. Pisano, J.A. Silva-Sobrinho, and M.D. Tonasse, Phys. Lett. B **388**, 338 (1996); M.D. Tonasse, *ibid.* **381**, 191 (1996); M. Ozer, Phys. Rev. D **54**, 4561 (1996); P. Das, P. Jain, and D.W. McKay, *ibid.* **59**, 055011 (1999); J.C. Montero, V. Pleitez, and O. Ravinez, *ibid.* **60**, 076003 (1999); Y. Okamoto and M. Yasue, Phys. Lett. B **466**, 267 (1999); G. Tavares-Velasco and J.J. Toscano, *ibid.* **472**, 105 (2000); P.H. Frampton and A. Rasin, *ibid.* **482**, 129 (2000); G. Tavares-Velasco and J.J. Toscano, Europhys. Lett. **53**, 465 (2001); M.B. Tully and G.C. Joshi, Phys. Rev. D **64**, 011301 (2001); J.C. Montero, C.A. de S. Pires, and V. Pleitez, *ibid.* **66**, 113003 (2002); D. Fregolente and M.D. Tonasse, Phys. Lett. B **555**, 7 (2003); I. Gogoladze, Y. Mimura, and S. Nandi, *ibid.* **554**, 81 (2003).
- [15] H.N. Long, Phys. Rev. D **54**, 4691 (1996); H. Ngoc Long and V.T. Van, J. Phys. G **25**, 2319 (1999); N.A. Ky, H.N. Long, and D.V. Soa, Phys. Lett. B **486**, 140 (2000); H.N. Long and D.V. Soa, Nucl. Phys. **B601**, 361 (2001); D.T. Binh, D.T. Huong, T.T. Huong, H.N. Long, and D.V. Soa, J. Phys. G **29**, 1213 (2003).
- [16] These new exotic quarks of both versions carry baryon and lepton numbers as well and are fairly recognized as leptoquarks.
- [17] C.A. de S. Pires and O.P. Ravinez, Phys. Rev. D **58**, 35008 (1998); C.A. de S. Pires, *ibid.* **60**, 075013 (1999).
- [18] P.B. Pal, Phys. Rev. D **52**, 1659 (1995).
- [19] Alex G. Dias, V. Pleitez, and M.D. Tonasse, Phys. Rev. D **67**, 095008 (2003); Alex G. Dias and V. Pleitez, hep-ph/0308037.
- [20] C.A. de S. Pires and P.S. Rodrigues da Silva, hep-ph/0307253.
- [21] H.N. Long and N.Q. Lan, Europhys. Lett. **64**, 571 (2003).
- [22] L.M. Krauss and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **62**, 1221 (1989).
- [23] M. Kamionkowski and J. March-Russell, Phys. Lett. B **282**, 137 (1992).

- [24] M. Dine, in "Proceedings of the Cincinnati Symposium on Quantum Gravity and Beyond," hep-ph/9207045, pp. 157–169; T. Banks, M. Dine, and M. Graesser, Phys. Rev. D **68**, 075011 (2003).
- [25] C.T. Hill and A.K. Leibovich, Phys. Rev. D **66**, 016006 (2002); **66**, 075010 (2002).
- [26] E.J. Chun and A. Lukas, Phys. Lett. B **297**, 298 (1992).
- [27] Alex G. Dias, V. Pleitez, and M.D. Tonasse, hep-ph/0210172.
- [28] Observe that  $\chi$  and  $\eta$  transforming in the same way should have similar couplings with matter. However, the interactions here presented are those which generate the desired mass pattern for the fermions. Later we will see that they are the only ones that will survive under the discrete symmetries of the model.
- [29] We are omitting the neutral current interactions here because throughout this work we will be dealing only with interactions which might provide some global quantum number violation.
- [30] G. Lazarides, C. Panagiotakopoulos, and Q. Shafi, Phys. Rev. Lett. **56**, 432 (1986).
- [31] R.D. Peccei, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **72**, 3 (1999); *Proceedings of 4th International Symposium on Sources and Detection of Dark Matter in the Universe (DM 2000)*, Marina del Rey, California, 23–25 February 2000, in "Marina del Rey 2000, Sources and detection of dark matter and dark energy in the universe," pp. 98–104, hep-ph/0009030.
- [32] Y.B. Zeldovich, I.B. Kobzarev, and L.B. Okun, Sov. Phys. JETP **40**, 1 (1975); Phys. Lett. **50B**, 340 (1974); P. Sikivie, Phys. Rev. Lett. **48**, 1156 (1982); H. Georgi and M.B. Wise, Phys. Lett. **116B**, 123 (1982).

## Stabilizing the invisible axion in 3-3-1 models

Alex G. Dias<sup>1</sup> and V. Pleitez<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Instituto de Física, Universidade de São Paulo, 05315-970 São Paulo, SP, Brazil*

<sup>2</sup>*Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, Rua Pamplona 145, 01405-900 São Paulo, SP, Brazil*

(Received 25 September 2003; published 23 April 2004)

By introducing local  $Z_N$  symmetries with  $N=11,13$  in two 3-3-1 models, it is possible to implement an automatic Peccei-Quinn symmetry, keeping the axion protected against gravitational effects at the same time. Both models have a  $Z_2$  domain wall problem and the neutrinos are strictly Dirac particles.

DOI: 10.1103/PhysRevD.69.077702

PACS number(s): 14.80.Mz, 11.30.Er, 12.60.Fr

### I. INTRODUCTION

Recently, observations of the core mass distribution in the cluster of Galaxies Abell 2029 using the NASA's Chandra X-ray Observatory suggest the existence of cold dark matter (CDM) [1]. On the other hand, the Wilkinson Microwave Anisotropy Probe measurements of the cosmic microwave background temperature anisotropy and polarization are also consistent with CDM and a positive cosmological constant [2]. Although the exact nature of the CDM is not known yet, candidates for this sort of matter are elementary particles such as neutralinos or the invisible axion [3]. However, early invisible axion models [4,5] are unstable against quantum gravitational effects [6], which may generate a large axion mass and also spoil the value of the  $\bar{\theta}_{\text{eff}}$  parameter. One way to stabilize the axion is by considering large discrete gauge symmetries in the sense of Ref. [7] as was done in the multi-Higgs-boson extension of the standard model [8], the 3-3-1 model [9], or the supersymmetric model [10]. The search for dark matter is of course related to the search for new physics beyond the standard model which in turn is related to the existence of new fundamental energy scales. In the literature, the most easily recognized fundamental energy scales are those related to supersymmetry, the neutrino masses, grand unification, and superstring theory.

In this vein, it is worth recalling once more that it has been known for a long time that the measured value of the electroweak mixing angle  $\sin^2 \theta_W(M_Z)=0.23113 \approx 1/4$  appears to obey, at an energy scale  $\mu$ , an  $SU(3)$  symmetry in such a way that  $\sin^2 \theta_W(\mu)=1/4$  [11]. Hence, if the value of  $\sin^2 \theta_W$  is not an accident, it may be considered as an indication of a new fundamental energy scale of the order of a few TeVs. Notwithstanding, in models with  $SU(3)$  electroweak symmetry there is trouble when we try to incorporate quarks. A solution to this issue is to introduce an extra  $U(1)$  factor such as in 3-3-1 models [12,13], to embed the model in a Pati-Salam-like model [14], or even to embed it in theories of TeV gravity [15].

Independently of the axion or dark matter issues, 3-3-1 models are interesting possibilities, on their own, for physics at the TeV scale. At low energies they coincide with the standard model and some of them give at least a partial explanation of some fundamental questions that are accommodated but not explained by the standard model. For instance, (i) in order to cancel the triangle anomalies the number of

generations must be three or a multiple of three; (ii) the model of Ref. [12] predicts that  $(g'/g)^2=\sin^2 \theta_W/(1-4\sin^2 \theta_W)$ ; thus there is a Landau pole at the energy scale  $\mu$  at which  $\sin^2 \theta_W(\mu)=1/4$ , and according to recent calculations  $\mu \sim 4$  TeV [16]; (iii) the quantization of the electric charge [17] and the vectorial character of the electromagnetic interactions [18] do not depend on the nature of the neutrinos, i.e., whether they are Dirac or Majorana particles; and (iv) the model possesses  $\mathcal{N}=1$  supersymmetry naturally at the  $\mu$  scale [19]. If right-handed neutrinos are considered to transform nontrivially, 3-3-1 models [12,13] can be embedded in a model with 3-4-1 gauge symmetry in which leptons transform as  $(\nu_l, l, \nu_l^c, l^c)_L \sim (\mathbf{1}, \mathbf{4}, \mathbf{0})$  under each gauge factor [20].

Models with  $SU(3)$  [or  $SU(4)$ ] symmetry may have doubly charged vector bosons. These types of bileptons may be detected by measuring the left-right asymmetries in Møller scattering [21], for instance, at the E158 SLAC experiments (which use 48 GeV polarized electrons scattering off unpolarized electrons in a liquid hydrogen target [22]); or in future lepton-lepton accelerators. It is interesting that the weak interaction's parity nonconservation has never been observed in lepton-lepton scattering. Those asymmetries may also be used for seeking a heavy neutral  $Z'$  vector boson, which is also a prediction of these models, in  $e\mu$  collisions [23]. Singly and doubly charged vector bileptons may also be produced in  $e^- \gamma$  [24] or  $\gamma\gamma$  [25] or hadron [26] colliders. New heavy quarks are also part of the electroweak quark multiplets in the minimal model representation. They are singlets under the standard model  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  group symmetry. In some versions their electric charge is different from the usual one, so that it can be used to distinguish such a model from their viable competitors. In fact, the  $p\bar{p}$  production and decay of these exotic quarks at the energies of the Tevatron have been studied in Ref. [27] where a lower bound of 250 GeV on their masses was found. This sort of model is also predictive with respect to neutrino masses [28]; the models can implement the large mixing angle Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein solution to the solar neutrino issue [29], and also the almost bimaximal mixing matrix in the lepton sector [30].

Summarizing, from the present experimental data, say those from the CERN  $e^+ e^-$  collider LEP, 3-3-1 models are safe if the symmetry breaking from 3-3-1 to 3-2-1 occurs at the level of TeVs; however, they have rich phenomenological

consequences as we mentioned above. It will be interesting to search for some of the new particles that are present in these models, as extra Higgs scalars, exotic quarks, and vector bileptons, at the energies of the upgraded DESY  $ep$  collider HERA and Tevatron [26,31]. The scalar sectors are equivalent to multi-Higgs-boson extensions of the standard model; for instance, under  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  the model with three triplets has two doublets and several non-Hermitian singlets, while the model with a sextet has three doublets, a complex triplet, and several complex singlets. In particular, the neutral singlet ( $\chi^0$ ) is  $Z$ -phobic [its coupling with  $Z^0$  vanishes when the scale of the  $SU(3)_L$  symmetry goes to infinity] and for this reason it evades the LEP constraints. For a finite  $SU(3)_L$  energy scale there are corrections that can be calculated by using the oblique  $S$ ,  $T$ , and  $U$  radiative parameters which constrain the allowed masses for the leptoquarks and bileptons [32]. These masses are of the same order of magnitude, a few TeV, as those allowed by the running of the coupling constants. Through the condition  $\sin^2\theta_W(\mu)=0.25$ , the running is sensitive to a new degree of freedom. Hence, the masses of exotic scalars and bileptons run from hundreds of GeV to a few TeV [33]. We will return to this point later.

Turning back to the axion, the interesting point is that a Peccei-Quinn (PQ) symmetry [34] is almost automatic in the classical Lagrangian of 3-3-1 models. It is only necessary to avoid a trilinear term in the scalar potential by introducing a  $Z_2$  symmetry [35]. Unfortunately, even in this case the PQ symmetry is explicitly broken by gravity effects. In order to stabilize the axion, and at the same time automatically implement the PQ symmetry, we must introduce local discrete symmetries  $Z_N$ . In fact, recently it was shown that in a version of the Tonasse and Pleitez 3-3-1 model [13] it is possible to implement both symmetries  $Z_{13}$  and PQ automatically; thus the axion is naturally light and there is no domain wall problem [9].

We will consider in this work two 3-3-1 models in which only the known leptons transform nontrivially under the gauge symmetry, as in Ref. [12], but we add also right-handed neutrinos and exotic charged leptons transforming as singlets. In one model (model A) we consider a scalar sextet but it is possible to use only three scalar triplets (model B). Both models admit a large enough discrete  $Z_N$  symmetry, implying a natural light invisible axion.

## II. THE AXION IN TWO 3-3-1 MODELS

We will consider two versions of the 3-3-1 model of Ref. [12]. In model A we use three scalar triplets and a sextet, while in model B we avoid the scalar sextet. In both models we introduce also a scalar singlet,  $\phi \sim (1,1,0)$ , and lepton singlets.

The quark and lepton sectors have the same representation content in both models. We have quarks transforming, under  $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_N$ , as follows:  $Q_{mL} = (d_m, u_m, j_m)^T \sim (3, 3^*, -1/3)$ ,  $m=1, 2$ ;  $Q_{3L} = (u_3, d_3, J)^T \sim (3, 3, 2/3)$ , and the corresponding right-handed components in singlets,  $u_{\alpha R} \sim (3, 1, 2/3)$ ,  $d_{\alpha R} \sim (3, 1, -1/3)$ ,  $\alpha=1, 2, 3$ ;  $J_R \sim (3, 1, 5/3)$ ;  $j_{mR} \sim (3, 1, -4/3)$ ; the leptons are the known ones and transform as triplets  $(3_a, 0)$ ,  $\Psi_{aL} = (\nu_a, l_a, l_a^c)^T$ ,  $a$

$= e, \mu, \tau$ , and we also add right-handed neutrinos and a charged lepton in the singlets  $\nu_{aR} \sim (1, 1, 0)$ ,  $E_{L,R} \sim (1, 1, -1)$  [36,37]. The scalar sector, in the minimal version, has only three triplets  $\chi = (\chi^-, \chi^{--}, \chi^0)^T$ ,  $\rho = (\rho^+, \rho^0, \rho^{++})^T$ ,  $\eta = (\eta^0, \eta_1^-, \eta_2^+)^T$ , transforming as  $(1, 3, -1)$ ,  $(1, 3, 1)$ , and  $(1, 3, 0)$ , respectively, and a scalar singlet  $\phi \sim (1, 1, 0)$ .

With the quark and scalar multiplets above we have the Yukawa interactions

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^q &= \bar{Q}_{iL}(F_{ia}u_{aR}\rho^* + \tilde{F}_{ia}d_{aR}\eta^*) + \lambda_{im}\bar{Q}_{iL}j_{mR}\chi^* \\ &\quad + \bar{Q}_{3L}(G_{1a}u_{aR}\eta + \tilde{G}_{1a}d_{aR}\rho) + \lambda_1\bar{Q}_{3L}J'_{1R}\chi + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (1)$$

where repeated indices mean summation.

### A. Model with a scalar sextet (model A)

In this model we add a scalar sextet  $S \sim (1, 6, 0)$  with the following electric charge assignment:

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1^0 & h_1^- & h_2^+ \\ h_1^- & H_1^{--} & \sigma_2^0 \\ h_2^+ & \sigma_2^0 & H_2^{++} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

and we will assume that only  $\sigma_2^0$  gets a nonzero vacuum expectation value in order to give the correct mass to the known charged leptons plus a mixing with the heavy leptons ( $K_a$  and  $K'_a$  terms below). The Yukawa interactions in the lepton sector are given by

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^l &= H_{ab}^\nu \Psi_{aL} \nu_{bR} \eta + H_{ab}^l \Psi_{aL} S (\Psi_{bL})^c + K_a \Psi_{aL} E_{R\rho} \\ &\quad + K'_a \chi^T \bar{E}_L (\Psi_{aL})^c + G_E \bar{E}_L E_R \phi + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (3)$$

where  $H_{ab}^l$  is a symmetric matrix in the generation space; we have omitted  $SU(3)$  indices. Neutrinos are strictly Dirac particles since the total lepton number will also be automatically conserved.

Next we impose a  $Z_{13}$  discrete symmetry under which the fields transform as  $Q_{iL} \rightarrow \omega_2^{-1} Q_{iL}$ ,  $Q_{3L} \rightarrow \omega_0 Q_{3L}$ ,  $u_{\alpha R} \rightarrow \omega_3 u_{\alpha R}$ ,  $d_{\alpha R} \rightarrow \omega_5^{-1} d_{\alpha R}$ ,  $J_R \rightarrow \omega_4 J_R$ ,  $j_{mR} \rightarrow \omega_6^{-1} j_{mR}$ ,  $\Psi_L \rightarrow \omega_6 \Psi_L$ ,  $E_L \rightarrow \omega_3 E_L$ ,  $\nu_R \rightarrow \omega_4^{-1} \nu_R$ ,  $E_R \rightarrow \omega_1 E_R$ ,  $\eta \rightarrow \omega_3^{-1} \eta$ ,  $\rho \rightarrow \omega_5 \rho$ ,  $\chi \rightarrow \omega_4^{-1} \chi$ ,  $S \rightarrow \omega_1^{-1} S$ ,  $\phi \rightarrow \omega_2 \phi$ , where  $\omega_k = e^{2\pi i k/13}$ ,  $k=0, \dots, 6$ . Notice that if  $N$  is a prime number the singlet  $\phi$  can transform under this symmetry with any assignment (but the trivial one), otherwise we have to be careful with the way we choose the singlet  $\phi$  to transform under the  $Z_N$  symmetry. This symmetry implies that the lowest order effective operator that contributes to the axion mass is  $\phi^{13}/M_{Pl}^9$  which gives a mass of the order  $(v_\phi)^{11}/M_{Pl}^9$  and also keeps the  $\bar{\theta}$  parameter small as discussed in Ref. [9].

The most general scalar potential invariant under the gauge and  $Z_{13}$  discrete symmetries is

$$V_{331}^{(A)} = V_H + (\lambda_{\phi 1} \phi \epsilon^{ijk} \eta_i \rho_j \chi_k + \lambda_{\phi 2} \chi^T S^\dagger \rho \phi^* + \text{H.c.}), \quad (4)$$

where  $V_H$  denotes the Hermitian terms of the potential. This scalar potential has the correct number of Goldstone bosons and an axion field.

After imposing the  $Z_{13}$  symmetry defined above we have that both the total lepton number  $L$  and the PQ symmetry are automatic. The PQ charge assignment is as follows:

$$\begin{aligned} u'_L &= e^{-i\alpha X_u} u_L, \quad d'_L = e^{-i\alpha X_d} d_L, \quad l'_L = e^{-i\alpha X_l} l_L, \\ \nu'_L &= e^{-i\alpha X_\nu} \nu_L, \quad j'_L = e^{-i\alpha X_j} j_L, \quad J'_L = e^{-i\alpha X_J} J_L, \\ E'_L &= e^{-i\alpha X_{E_L}} E_L, \quad E'_R = e^{-i\alpha X_{E_R}} E_R, \end{aligned} \quad (5)$$

and in the scalar sector we have the following PQ charges:

$$\begin{aligned} \eta^0: \quad -2X_u &= 2X_d = X_\nu - X_{\nu_R}, \\ \eta^-_1: \quad -(X_u + X_d) &= X_u + X_d = X_l - X_{\nu_R}, \\ \eta^+_2: \quad -(X_J + X_u) &= X_j + X_d = -(X_l + X_{\nu_R}), \\ \rho^0: \quad 2X_u &= -2X_d = X_l - X_{E_R}, \\ \rho^+: \quad -(X_u + X_d) &= X_u + X_d = X_\nu - X_{E_R}, \\ \rho^{++}: \quad -(X_J + X_d) &= X_j + X_u = -(X_l + X_{E_R}), \\ \chi'^-: \quad -(X_u + X_J) &= X_d + X_j = X_\nu + X_{E_L}, \\ \chi^{--}: \quad -(X_d + X_J) &= X_u + X_j = X_{E_L} + X_l, \\ \chi^0: \quad -2X_J &= 2X_j = X_{E_L} - X_l, \quad \phi: \quad -2X_j, \\ \sigma^0_1: \quad X_d + 3X_j &= 2X_\nu, \quad h^-_1: \quad 3X_j - X_d = X_l + X_\nu, \\ h^+_2: \quad 4X_j &= -X_l + X_\nu, \quad \sigma^0_2: \quad 4X_j - 2X_d = 0, \\ H_1^{--}: \quad 3(X_j - X_d) &= 2X_l, \quad H_2^{++}: \quad 5X_j - X_d = -2X_l. \end{aligned} \quad (6)$$

From Eqs. (6) we obtain the relations  $X_j = -X_J = \frac{1}{2}X_d = -\frac{1}{2}X_u = -\frac{2}{3}X_l = -\frac{2}{3}X_{\nu_R} = \frac{2}{3}X_\nu = \frac{2}{5}X_{E_R} = 2X_{E_L} = -\frac{1}{2}X_\phi$ .

Notice that the mass scale related to the exotic charged lepton  $E$ , up to an arbitrary dimensionless constant  $G_E \sim O(1)$ , is related to the PQ energy scale since the requirement of the symmetries of the model imposes the Yukawa couplings in Eq. (3).

Notice that, at the energy scale below the breakdown of the  $SU(3)_L$  symmetry, this model has scalar multiplets transforming under  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  as follows: two doublets  $(\rho^+, \rho^0) \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2}, +1)$ ,  $(\eta^0, \eta^-) \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1)$  and a non-Hermitian triplet  $(H^{--}, h^-_1, \sigma^0_1) \sim (\mathbf{1}, \mathbf{3}, -2)$ . With the lighter scalar multiplets, and the usual degrees of freedom, the energy scale at which  $\sin^2 \theta_W = 0.25$  is 5.2 TeV. The doublets  $(\chi^-, \chi^{--}) \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2}, -2)$ ,  $(h^+_2, h^0) \sim (\mathbf{1}, \mathbf{2}, +1)$  and the extra vector bosons have masses proportional to  $v_\chi$ ; the lepton singlet  $E$  has a mass of the order of  $v_\phi$ . More details will be given elsewhere.

## B. Model with three scalar triplets (model B)

In this model we do not introduce the scalar sextet and the Yukawa interactions are

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^I &= H_{ab}^\nu \overline{(\Psi)}_{al} \nu_{bR} \eta + H_{ab}^l \epsilon_{ijk} \overline{(\Psi)}_{il}^c \Psi_{jkL} \eta_k \\ &\quad + K_a \Psi_{al} E_R \rho + K'_a \chi^T \overline{E_L} (\Psi_{al})^c + G_E \bar{E}_L E_R \phi^* \\ &\quad + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (7)$$

where  $H_{ab}^I$  is now an antisymmetric matrix. In both Yukawa interactions above, a general mixing is allowed in each charge sector. As in the previous model, neutrinos are strictly Dirac particles. The charged leptons gain mass as in Ref. [37].

If we want to implement a given texture for the quark and lepton mass matrices we have to introduce more scalar triplets, and a larger  $Z_N$  symmetry will be possible in the model.

Let us introduce a  $Z_4$  symmetry with parameters denoted by  $\tilde{\omega}_0$ ,  $\tilde{\omega}_1$ ,  $\tilde{\omega}_1^{-1}$ , and  $\tilde{\omega}_2 \equiv \tilde{\omega}_2^{-1}$ .  $u_{\alpha R}$ ,  $Q_{iL}$ , and  $\nu_{\alpha R}$  transform with  $\tilde{\omega}_1$ ,  $d_{\alpha R}$ ,  $Q_{3L}$ ,  $\Psi_{al}$ ,  $E_R$ ,  $\chi$ , and  $\phi$  transform with  $\tilde{\omega}_1^{-1}$ ,  $\eta$  transforms with  $\tilde{\omega}_2$ , and all the other fields remain invariant, i.e., transform with  $\tilde{\omega}_0$ . After  $Z_4$  is imposed, the total lepton number  $L$  and the PQ and  $Z_{11}$  symmetries are all automatically implemented in the Yukawa sector and in the scalar potential. The most general scalar potential is then

$$V_{331}^{(B)} = V_H + (\lambda \phi \epsilon^{ijk} \eta_i \rho_j \chi_k + \text{H.c.}). \quad (8)$$

The following  $Z_{11}$  symmetry is automatically implemented in both the Yukawa interactions and in the scalar potential:  $Q_{iL} \rightarrow \omega_3 Q_{iL}$ ,  $Q_{3L} \rightarrow \omega_0 Q_{3L}$ ,  $u_{\alpha R} \rightarrow \omega_4 u_{\alpha R}$ ,  $d_{\alpha R} \rightarrow \omega_1^{-1} d_{\alpha R}$ ,  $J_R \rightarrow \omega_5^{-1} J_R$ ,  $j_{mR} \rightarrow \omega_3^{-1} j_{mR}$ ,  $\Psi_L \rightarrow \omega_2 \Psi_L$ ,  $E_L \rightarrow \omega_3 E_L$ ,  $\nu_R \rightarrow \omega_5^{-1} \nu_R$ ,  $E_R \rightarrow \omega_1 E_R$ ,  $\eta \rightarrow \omega_4^{-1} \eta$ ,  $\rho \rightarrow \omega_1 \rho$ ,  $\chi \rightarrow \omega_5 \chi$ ,  $\phi \rightarrow \omega_2^{-1} \phi$ . It happens that, in addition to the  $Z_{11}$  symmetry, the  $U(1)_{\text{PQ}}$  and the conservation of the total lepton number are also automatic, i.e., a consequence of the gauge symmetry and renormalizability of the model, in the interactions in Eqs. (1), (7), and (8). The PQ charge assignments for the fermions in the model are as in Eq. (5); and in the scalar sector we have constraints equations as in the previous subsection. In this case, proceeding as in the model A, we obtain the relations  $X_d = X_u = 0$  and  $X_l = X_{\nu_R} = X_\nu = X_{E_R} = -\frac{1}{2}X_j = \frac{1}{2}X_{E_L} = -\frac{1}{3}X_{E_L} = \frac{1}{4}X_\phi$ . Notice that for leptons the PQ transformations are not a chiral symmetry. As in model A, we see from Eq. (7) that the mass scale related to the singlet charged lepton  $E$  is related to  $v_\phi$ . Moreover, in this model we have that  $\sin^2 \theta_W = 0.25$  at 4 TeV.

## III. CONCLUSIONS

We have built two invisible axion models in which the axion is naturally light and protected against quantum gravity effects. In model A, the  $Z_{13}$  symmetry has to be imposed but in model B the  $Z_{11}$  symmetry is automatically implemented in the classical Lagrangian after imposing a  $Z_4$  symmetry. With a  $Z_{13}$  symmetry the axion is protected from

gravitational effects even if  $v_\phi \approx 10^{12}$  GeV but, with a  $Z_{11}$  symmetry,  $v_\phi \lesssim 10^{10}$  GeV. In both models the PQ symmetry is automatically implemented in the classical Lagrangian in the sense that it is not imposed on the Lagrangian but is just a consequence of the particle content of the model, its gauge invariance, renormalizability, and Lorentz invariance.

We would like to stress the strong constraint put on model building by the approach proposed in Refs. [8,9]. Once the symmetry  $Z_N$  is used, automatic or imposed, there is no choice for new interactions. In this vein, in both models neutrinos are strictly Dirac particles, and for this reason both models will be ruled out if the neutrinos turn to be Majorana particles, say, by observation of the neutrinoless double beta decay.

In the PQ solution to the strong  $CP$  problem the quark contributions to  $\bar{\theta}$  are such that  $\bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} - 2\alpha \Sigma_f X_f$ , where  $f$  denotes any quark. In both models we have  $\bar{\theta} \rightarrow \bar{\theta} - 2\alpha X_j$

and we have the domain wall problem related to  $Z_2 \subset U(1)_{\text{PQ}}$  for  $X_j = 2$ .

Concerning the CDM, we would like to call attention to a new possible candidate: a light and stable scalar in nonsupersymmetric models [38,39]. Although the mass of this scalar is in the range  $32 \text{ GeV} \leq m < M_Z$ , the model is still compatible with the LEP data since the lightest scalar is almost a singlet under  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , and it may be mistaken for a light,  $m_\chi \lesssim 50$  GeV [40], or for the usual,  $m_\chi \gtrsim 50$  GeV, neutralino. We recall that the latter bound comes from LEP2 searches for the corresponding chargino  $m_{\chi^\pm} \gtrsim \sim 100$  GeV.

## ACKNOWLEDGMENTS

This work was supported by Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) and partially by Conselho Nacional de Ciência e Tecnologia (CNPq).

- 
- [1] A.D. Lewis, D.A. Buote, and J.T. Stocke, *Astrophys. J.* **586**, 135 (2003).
  - [2] C.L. Bennett *et al.*, *Astrophys. J., Suppl. Ser.* **148**, 1 (2003).
  - [3] M. Srednicki and N.J.C. Spooner, in Particle Data Group, K. Hagiwara *et al.*, *Phys. Rev. D* **66**, 010001 (2002).
  - [4] M. Dine, W. Fischler, and M. Srednicki, *Phys. Lett.* **104B**, 199 (1981).
  - [5] J.E. Kim, *Phys. Rev. Lett.* **43**, 103 (1979).
  - [6] R. Holman, T.W. Kephart, and S.-J. Rey, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 320 (1993).
  - [7] L.M. Krauss and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **62**, 1221 (1989).
  - [8] Alex G. Dias, V. Pleitez, and M.D. Tonasse, *Phys. Rev. D* **69**, 015007 (2004).
  - [9] Alex G. Dias, V. Pleitez, and M.D. Tonasse, *Phys. Rev. D* **67**, 095008 (2003).
  - [10] K.S. Babu, I. Gogoladze, and K. Wang, *Phys. Lett. B* **560**, 214 (2003).
  - [11] S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **5**, 1962 (1972).
  - [12] F. Pisano and V. Pleitez, *Phys. Rev. D* **46**, 410 (1992); P. Frampton, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2889 (1992); R. Foot, O.F. Hernandez, F. Pisano, and V. Pleitez, *Phys. Rev. D* **47**, 4158 (1993).
  - [13] V. Pleitez and M.D. Tonasse, *Phys. Rev. D* **48**, 2353 (1993); J.C. Montero, F. Pisano, and V. Pleitez, *ibid.* **47**, 2918 (1993); R. Foot, H.N. Long, and T.A. Tran, *ibid.* **50**, 34 (1994); W.A. Ponce, Y. Giraldo, and L.A. Sanchez, *ibid.* **67**, 075001 (2003).
  - [14] S. Dimopoulos and D.E. Kaplan, *Phys. Lett. B* **531**, 127 (2002).
  - [15] S. Dimopoulos, D.E. Kaplan, and N. Weiner, *Phys. Lett. B* **534**, 124 (2002); I. Gogoladze, Y. Mimura, and S. Nandi, *ibid.* **554**, 81 (2003).
  - [16] P.H. Frampton and T.W. Kephart, hep-ph/0306053; P.H. Frampton, hep-th/0306029.
  - [17] C.A. de S. Pires and O. Ravinez, *Phys. Rev. D* **58**, 035008 (1998).
  - [18] C.A. de S. Pires, *Phys. Rev. D* **60**, 075013 (1999).
  - [19] J.C. Montero, V. Pleitez, and M.C. Rodriguez, *Phys. Rev. D* **65**, 035006 (2002).
  - [20] F. Pisano and V. Pleitez, *Phys. Rev. D* **51**, 3865 (1995).
  - [21] J.C. Montero, V. Pleitez, and M.C. Rodriguez, hep-ph/0204130, and references therein.
  - [22] See <http://www.slac.stanford.edu/exp/e158>
  - [23] J.C. Montero, V. Pleitez, and M.C. Rodriguez, *Phys. Rev. D* **58**, 097505 (1998).
  - [24] E.M. Gregores, A. Gusso, and S.F. Novaes, *Phys. Rev. D* **64**, 015004 (2001); D.V. Soa, T. Inami, and H.N. Long, hep-ph/0304300.
  - [25] G. Tavares-Velasco and J.J. Toscano, *Europhys. Lett.* **53**, 465 (2001); *Phys. Lett. B* **472**, 105 (2000).
  - [26] B. Dion, T. Grégoire, D. London, L. Marleau, and H. Nadeu, *Phys. Rev. D* **59**, 075006 (1999).
  - [27] P. Das, P. Jain, and D.W. McKay, *Phys. Rev. D* **59**, 055011 (1999).
  - [28] T. Kitabayashi and M. Yasue, *Phys. Rev. D* **63**, 095006 (2001); T. Kitabayashi, *ibid.* **64**, 057301 (2001).
  - [29] T. Kitabayashi and M. Yasue, *Phys. Lett. B* **508**, 85 (2001).
  - [30] J.C. Montero, C.A. de S. Pires, and V. Pleitez, *Phys. Rev. D* **65**, 095001 (2002).
  - [31] M. Kuze and Y. Sirois, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **50**, 1 (2003).
  - [32] P.H. Frampton and M. Harada, *Phys. Rev. D* **58**, 095013 (1998); H.N. Long and T. Inami, *ibid.* **61**, 075002 (2000).
  - [33] D. Ng, *Phys. Rev. D* **49**, 4805 (1994); P. Jain and S.D. Joglekar, *Phys. Lett. B* **407**, 151 (1997).
  - [34] R.D. Peccei and H. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **38**, 1440 (1977); *Phys. Rev. D* **16**, 1791 (1977).
  - [35] P.B. Pal, *Phys. Rev. D* **52**, 1659 (1995).
  - [36] T.V. Duong and E. Ma, *Phys. Lett. B* **306**, 307 (1993).
  - [37] J.C. Montero, C.A. de S. Pires, and V. Pleitez, *Phys. Rev. D* **65**, 093017 (2002).
  - [38] Alex G. Dias, V. Pleitez, and M.D. Tonasse, hep-ph/0204121.
  - [39] D. Fregolente and M.D. Tonasse, *Phys. Lett. B* **555**, 7 (2003); H.N. Long and N.Q. Lan, *Europhys. Lett.* **64**, 571 (2003).
  - [40] A. Bottino, F. Donato, N. Fornengo, and S. Scopel, *Phys. Rev. D* **69**, 037302 (2004).

## Naturally light invisible axion and local $Z_{13} \otimes Z_3$ symmetries

Alex G. Dias

*Instituto de Física, Universidade de São Paulo, C. P. 66.318, 05315-970 São Paulo, SP, Brazil*

V. Pleitez

*Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, Rua Pamplona 145, 01405-900 São Paulo, SP, Brazil*

M. D. Tonasse

*Instituto Tecnológico de Aeronáutica, Centro Técnico Aeroespacial, Praça Marechal do Ar Eduardo Gomes 50, 12228-901 São José dos Campos, SP, Brazil*

(Received 25 October 2002; published 27 January 2004)

We show that by imposing local  $Z_{13} \otimes Z_3$  symmetries in an  $SU(2) \otimes U(1)$  electroweak model we can implement an invisible axion in such a way that (i) the Peccei-Quinn symmetry is an automatic symmetry of the classical Lagrangian, and (ii) the axion is protected from semiclassical gravitational effects. In order to be able to implement such a large discrete symmetry, and at the same time allow a general mixing in each charge sector, we introduce right-handed neutrinos and enlarge the scalar sector of the model. The domain wall problem is briefly considered.

DOI: 10.1103/PhysRevD.69.015007

PACS number(s): 14.80.Mz, 11.30.Er, 12.60.Fr

It has been known for a long time that the complex nature of the QCD vacuum solves the old  $U(1)_A$  problem [1,2] but also implies the existence of the  $\bar{\theta}F\bar{F}$  term in the classical Lagrangian [3]. This  $CP$ -nonconserving  $\bar{\theta}$  angle (which has also an electroweak contribution) should be smaller than  $10^{-9}$  in order to be consistent with the measurement of the electric dipole moment of the neutron [4]. Why is  $CP$  only weakly violated in QCD? This is the strong  $CP$  problem and an elegant way to solve it is by introducing a chiral symmetry  $U(1)_{PQ}$  [5]. This Peccei-Quinn (PQ) symmetry implies also the existence of a pseudo Goldstone boson—the axion [6]. The invisible axion is almost a singlet (here denoted by  $\phi$ ) under the  $SU(2) \otimes U(1)$  gauge symmetry [7]. In addition, since this particle can occur in the early Universe in the form of a Bose condensate which never comes into thermal equilibrium, it can be a significant component of the cold dark matter if its mass is of the order of  $10^{-5}$  eV [8,9], which makes it important in its own right. However, such a small mass for the axion can be spoiled by semiclassical gravity effects since it could induce renormalizable or non-renormalizable effective interactions which break explicitly any global symmetry, and in particular the PQ symmetry. The most dangerous of these effective operators are of the form  $\phi^D$ , where  $D$  is the mass dimension of the effective operator. In this case the axion could gain a mass which is greater than the mass coming from instanton effects and also the  $\bar{\theta}$  angle is not less than  $10^{-9}$  in a natural way. This can be avoided if the dimension of the effective operators is  $D \geq 12$  [10,11]. Hence, unless  $D$  is high enough, invisible axion models do not solve the strong  $CP$  problem in a natural way. Thus the invisible (very light) axion must be protected against gravity effects.

Some years ago Krauss and Wilczek [12] pointed out that local symmetries can masquerade as discrete global symmetries to an observer equipped with only low-energy probes. We can see this as follows. Consider a  $U(1)$  gauge theory

with two complex scalar fields  $\eta$  and  $\xi$  carrying charge  $Ne$  and  $e$ , respectively. It is possible, for instance, that  $\eta$  undergoes condensation at some very high energy  $v$ , but  $\xi$  does not condensate and produces quanta of relatively small mass. Before the condensation the theory is invariant under the transformation  $\eta'(x) = \exp[iNe\Lambda(x)]\eta(x)$ ,  $\xi'(x) = \exp[ie\Lambda(x)]\xi(x)$  and  $A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu\Lambda(x)$ , here  $A_\mu$  is the  $U(1)$  gauge field. The condensate characterized by the vacuum expectation value  $\langle \eta(x) \rangle = v$  in the homogeneous ground state is invariant only when  $\Lambda$  is an integer multiple of  $2\pi/Ne$ . This residual transformation still acts nontrivially on  $\xi$  but now as a discrete  $Z_N$  group. The effective theory well below  $v$  will be the theory of the single complex scalar field  $\xi$ , neither the gauge field nor the scalar  $\eta$  will appear in the effective theory since these fields are very heavy. The only implication of the original gauge symmetry for the low energy effective theory is the absence of interaction terms forbidden by the  $Z_N$  symmetry. For instance, if there were more charged scalar fields in the theory, the discrete symmetry would forbid many couplings that were otherwise possible. Hence, since no processes like black-hole evaporation or wormhole tunneling can violate a discrete gauge symmetry it means that local  $Z_N$  symmetries violate the no-hair theorem [13]. These symmetries may be the consequences of gauge  $U(1)$ 's symmetries which are embedded in a larger grand unified theory or from a fifth dimension as it was shown for the case of  $U(1)_Y$  in Ref. [14] or even in superstring inspired models [15–17].

In fact, it has long been known that superstring theories exhibit PQ-like symmetries. It happens that in the reduction of a ten-dimensional theory to four dimensions an arbitrary large number of massless (up to the effect of the coupling  $F\bar{F}$ ) scalar four-dimensional fields, which cannot be gauged away, arise [18,19]. On the other hand, in superstring theory, also naturally local discrete symmetries arise [15–18]. These facts are welcome since superstring theory is considered a good candidate for the unification of the four interactions.

Hence it is reasonable to require that any global or local symmetry that is introduced in low energy models can be derived from the superstring theory. However, since we already do not know the details of the theory that describes quantum gravity, we will apply the ideas above in a more conservative scenario: a multi-Higgs extension of the standard model.

We show below that in this situation, the axion, as a solution to the strong  $CP$  problem, can be achieved by introducing appropriated discrete symmetries and also the PQ symmetry arises as an automatic or accidental symmetry of the classical Lagrangian in the sense that it is not imposed on the Lagrangian but it is just a consequence of the particle content, renormalizability, and the gauge and Lorentz invariance of the model [10]. The automatic PQ symmetry has been also considered up to now only in the context of grand unified or supersymmetric theories [20] or, recently, in 3-3-1 models [21,22]. The same can be said with respect to the axion protection from gravity effects [11,16,17,22].

The model we will put forward can be viewed as a way of stabilizing the Dine-Fischler-Srednicki (DFS) axion [7]. As is well known the DFS axion suffers from two difficulties: (i) the PQ symmetry has to be imposed by hand and (ii) the axion is not stable from the gravitational effects as discussed before. With respect to the first problem we expect that the PQ symmetry is not an *ad hoc* symmetry but an accidental one. It could be the consequence of discrete symmetries  $Z_N$  which in addition, if  $N$  is large enough, it can stabilize the axion from the classical gravity effect. In this vain a large  $Z_N$  symmetry solves both difficulties of the DFS axion model. The lowest order effective operator contributing to these parameters have  $D=13$  since operators with dimension up to  $D=12$  are forbidden by the local discrete symmetry  $Z_{13} \otimes Z_3$ . Moreover, after imposing these discrete symmetries the PQ chiral symmetry is automatically implemented in a model with  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  gauge symmetry (a similar analysis for avoiding  $B$ - and  $L$ -violating operators in supersymmetric versions of this model was done in Ref. [23]).

The axion is made invisible if it is almost a singlet under the gauge group and for this reason we add a singlet  $\phi$  which gets a vacuum expectation value denoted by  $v_\phi$  [7]. The suppression of the explicit breakdown of the PQ symmetry by gravity is obtained by adding a large  $Z_N$  symmetry among the matter multiplets, in such a way that effective operators like  $\phi^{N-1}/M_{\text{Pl}}^{(N-1)-4}$ , where  $M_{\text{Pl}}$  is the Planck mass, are automatically suppressed. At the same time this local discrete symmetry makes the PQ symmetry an automatic symmetry of the classical Lagrangian. For instance, a  $Z_{13}$  symmetry implies that the first nonforbidden operator is of dimension thirteen and the first contribution to the axion mass square is proportional to  $v_\phi^{11}/M_{\text{Pl}}^9 \approx 10^{-21} \text{ eV}^2$  or  $10^{-11} m_a^2$ , if  $m_a \sim \Lambda_{\text{QCD}}^2/v_\phi \approx 10^{-5} \text{ eV}$  is the instanton induced mass (we have used  $M_{\text{Pl}} = 10^{19} \text{ GeV}$  and  $v_\phi = 10^{12} \text{ GeV}$ ). We see also that the naturalness of the PQ solution to the  $\bar{\theta}$ -strong problem is not spoiled since in this case we have  $\theta_{\text{eff}} \propto v_\phi^N/M_{\text{Pl}}^{N-4} \Lambda_{\text{QCD}}^4$  [24] and it means also that  $\theta_{\text{eff}} \propto 10^{-11}$  for  $N=13$ .

In order to be able to implement this rather large symmetry the representation content of the model is augmented: we add right-handed neutrinos and several scalar Higgs multiplets. Presently, right-handed neutrinos may be a necessary ingredient of any electroweak model if, as indicated by recent experimental solar [25] and atmospheric [26] data, neutrinos are massive particles. On the other hand, each of the extra Higgs scalar multiplets that we will introduce has already been considered, separately, as viable extensions of the minimal  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  model [27–29]. However, in general the doublets can be coupled to all fermion doublets, having flavor changing neutral currents if we will. In other words, there is not an underlying reason to constraint the interactions of the multi-Higgs extensions. Below we will show how this reason arises in an extension of the DFS axion model.

The representation content is the following:  $Q_L = (ud)_L^T \sim (2, 1/3)$ ,  $L_L = (\nu l)_L^T \sim (2, -1)$  denote any quark and lepton doublet;  $u_R \sim (1, 4/3)$ ,  $d_R \sim (1, -2/3)$ ,  $l_R \sim (1, -2)$ ,  $\nu_R \sim (1, 0)$  are the right-handed components; and we will assume that each charge sector gain mass from a different scalar doublets, i.e.,  $\Phi_u$ ,  $\Phi_d$ ,  $\Phi_l$ , and  $\Phi_\nu$  generate Dirac masses for  $u$ -like,  $d$ -like quarks, charged leptons and neutrinos, respectively [all of them of the form  $(2, +1) = (\varphi^+, \varphi^0)^T$ ]. We also add a neutral complex singlet  $\phi \sim (1, 0)$  as in [7], a singly charged singlet  $h^+ \sim (1, +2)$ , as in the Zee's model [27] and finally, a triplet  $\tilde{T} \sim (3, +2)$  that can be written as [28]

$$T = \epsilon \vec{\tau} \cdot \vec{T} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} T^0 & -T^+ \\ -T^+ & -\sqrt{2} T^{++} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

where  $\epsilon = i\tau_2$ .

Next, we will impose the following  $Z_{13}$  symmetry among those fields:

$$\begin{aligned} Q &\rightarrow \omega_5 Q, \quad u_R \rightarrow \omega_3 u_R, \quad d_R \rightarrow \omega_5^{-1} d_R, \\ L &\rightarrow \omega_6 L, \quad \nu_R \rightarrow \omega_0 \nu_R, \quad l_R \rightarrow \omega_4 l_R, \\ \Phi_u &\rightarrow \omega_2^{-1} \Phi_u, \quad \Phi_d \rightarrow \omega_3^{-1} \Phi_d, \quad \Phi_l \rightarrow \omega_2 \Phi_l, \\ \Phi_\nu &\rightarrow \omega_6^{-1} \Phi_\nu, \quad \phi \rightarrow \omega_1^{-1} \phi, \quad T \rightarrow \omega_4^{-1} T, \\ h^+ &\rightarrow \omega_1 h^+, \end{aligned} \quad (2)$$

with  $\omega_k = e^{2\pi i k/13}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 6$ .

With this representation content and the  $Z_{13}$  symmetry defined in Eq. (2) the allowed Yukawa interactions are given by

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y = & \bar{Q}_{iL} (F_{ia} u_{aR} \tilde{\Phi}_u + \tilde{F}_{ia} d_{aR} \Phi_d) + \overline{L_{aL}} (G_{ab} \nu_{bR} \tilde{\Phi}_\nu \\ & + \tilde{G}_{ab} l_{bR} \Phi_l) + f^{ab} \overline{(L_{aL})^c} L_{bjL} \epsilon_{ij} h^+ + \text{H.c.}, \end{aligned} \quad (3)$$

where  $\tilde{\Phi} = \epsilon \Phi^*$ , with  $i=1,2,3$  and  $a=e,\mu,\tau$ ;  $G, \tilde{G}, F, \tilde{F}$  are arbitrary  $3 \times 3$  matrices and  $f^{ab}$  is a  $3 \times 3$  antisymmetric matrix. Notice that we have the Zee's interaction [27] but the

interaction  $(\overline{L}_{i a L})^c F_{ab} (\epsilon \vec{\tau} \cdot \vec{T})_{ij} L_{b L j}$  is not allowed by the  $Z_{13}$  symmetry, i.e., this is not an automatic symmetry of the model. Moreover, the  $Z_{13}$  symmetry also implies that there is no flavor changing neutral currents since there is a doublet for each charge sector in Eq. (3). The neutrino interactions with the doublet  $\Phi_\nu$  imply a Dirac bare mass; while the singlet  $h^+$  induces, through the radiative corrections, like in

the Zee's model, Majorana masses to the left-handed neutrinos [30].

The most general scalar potential among the several scalar multiplets introduced above must be invariant under the gauge  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  and also under the discrete  $Z_{13}$  symmetry. However, an extra discrete  $Z_3$  symmetry will be added in order to avoid an interaction in the scalar potential and in Eq. (3). We then have

$$\begin{aligned} V = & \mu_k^2 \Phi_k^\dagger \Phi_k + \mu_\phi^2 \phi^* \phi + \mu_T^2 \text{Tr}(T^\dagger T) + \mu_h^2 h^+ h^- + \lambda^k (\Phi_k^\dagger \Phi_k)^2 + \lambda^{kk'} |\Phi_k^\dagger \Phi_{k'}|^2 + \lambda^{k\phi} (\Phi_k^\dagger \Phi_k) \phi^* \phi \\ & + \lambda_1^{kT} \Phi_k^\dagger \Phi_k \text{Tr}(T^\dagger T) + \lambda_2^{kT} (\Phi_k^\dagger T^\dagger)(T \Phi_k) + \lambda^{kh} \Phi_k^\dagger \Phi_k h^- h^+ + \lambda_1 (\phi^* \phi)^2 + \lambda_2 (\text{Tr} T^\dagger T)^2 \\ & + \lambda_3 \text{Tr}(T^\dagger T)^2 + \lambda_4 \text{Tr}(T^\dagger T) |\phi|^2 + \lambda_5 (h^- h^+)^2 + \lambda_6 \text{Tr}(T^\dagger T) h^- h^+ + [\tilde{\lambda}_1 \Phi_d^\dagger \Phi_l \Phi_\nu^\dagger \Phi_l + \tilde{\lambda}_2 \Phi_d^\dagger T \tilde{\Phi}_u \phi \\ & + \tilde{\lambda}_3 \Phi_u^\dagger \Phi_\nu \Phi_u^\dagger \Phi_l + f_1 \Phi_u^\dagger \Phi_d \phi^* + f_2 \tilde{\Phi}_u^\dagger T \tilde{\Phi}_u + f_3 \tilde{\Phi}_l^\dagger T \tilde{\Phi}_\nu + f_4 \Phi_d^\dagger \Phi_u h^- + \text{H.c.}], \end{aligned} \quad (4)$$

where  $k \neq k'$  run over all doublets, i.e.,  $k, k' = u, d, l, \nu$  and we have omitted summation symbols. The trilinear  $\Phi_u \epsilon \Phi_l h^- \phi^*$  is allowed by the  $Z_{13}$  symmetry but it is forbidden by the  $Z_3$  symmetry with parameters denoted by  $\tilde{\omega}_0$ ,  $\tilde{\omega}_1$ , and  $\tilde{\omega}_1^{-1}$  if  $\Phi_l$  transform with  $\tilde{\omega}_1^{-1}$  and  $\Phi_\nu, \nu_R, l_R$  transform with  $\tilde{\omega}_1$  while all the other fields remain invariant i.e., transform with  $\tilde{\omega}_0$ . This  $Z_3$  symmetry forbids also a Majorana mass term  $(\nu_{aR})^c M_{ab} \nu_{bR}$  in Eq. (3). It is in this context that the PQ symmetry is an automatic symmetry of the classical Lagrangian of the model and the axion mass and the  $\bar{\theta}$  angle are protected against gravitational effects, as discussed in the Introduction.

We have confirmed that the axion is an invisible one. After redefining the neutral fields as usual  $\Phi_k^0 = (\nu_k + \text{Re } \Phi_k^0 + i \text{Im } \Phi_k^0)/\sqrt{2}$ ,  $T^0 = (\nu_T + \text{Re } T^0 + i \text{Im } T^0)/\sqrt{2}$ , and  $\phi = (\nu_\phi + \text{Re } \phi + i \text{Im } \phi)/\sqrt{2}$  there are only two neutral Goldstone bosons: one which is eaten by the  $Z^0$ ,  $G^0$ , and another one which has a small mixture with the  $G^0$ , the axion which is almost singlet, i.e.,  $a \approx \text{Im } \phi$ . This has been done considering the full  $6 \times 6$  mass matrix in the pseudo-scalar sector.

Besides, the fact that the Peccei-Quinn chiral symmetry is an automatic symmetry of the model, the discrete  $Z_{13}$  symmetry suppresses also gravitational effects up to operators of dimension twelve. It means that the contributions to the axion mass and to the  $\bar{\theta}$  angle are like those we have shown above. The assignment of the PQ charges for all the fermion and scalar fields in the model are the following (using the notation  $\psi' = e^{-iaX_\psi} \psi$  with  $X_\psi$  the PQ charge of the multiplet  $\psi$ ):  $X_Q = -3$ ,  $X_{u_R} = 3$ ,  $X_{d_R} = 3$ ,  $X_L = -6$ ,  $X_{l_R} = -8$ ,  $X_{\nu_R} = 4$ ,  $X_{\Phi_u} = 6$ ,  $X_{\Phi_d} = -6$ ,  $X_{\Phi_l} = 2$ ,  $X_{\Phi_\nu} = 10$ ,  $X_T = 12$ ,  $X_{h^+} = 12$ ,  $X_\phi = -12$ . It is straightforward to verify that the Yukawa interactions in Eq. (3) and the scalar potential in Eq. (4) are invariant under the PQ transformations given above. In the present model we have still a global discrete symme-

try, namely  $Z_{18} \subset U(1)_{\text{PQ}}$ . Hence, the model has the domain wall problem [31] and the usual mechanism for avoiding it can be applied [32,33].

Larger  $Z_N$  symmetries are possible if we add more fields in any electroweak model. However, notice that if  $N$  is a prime number the axion can transform under this symmetry with any assignment (but the trivial one); otherwise, we have to be careful with the way we choose the singlet  $\phi$  transforms under the  $Z_N$  symmetry.

In the present model the axion couples to quarks and leptons (including neutrinos). Those couplings are proportional to  $X_f m_f v_\phi^{-1}$ , where  $X_f$  and  $m_f$  are the PQ charge and the mass of the fermion  $f$ . On the other hand, the axion-photon coupling  $c_{a\gamma\gamma}$  is, in general, proportional to  $2N_{\text{DW}}^{-1} \Sigma_f X_f Q_f^2 - 1.95$ , where the sum is over all generations and the numerical factor comes from the light quarks through a Fujikawa relation [34] and it is the same in the present model;  $N_{\text{DW}}$  is the domain wall factor which is equal to 18 in the present model. We have  $c_{a\gamma\gamma} \approx -0.62$ , and not 0.75 as in the invisible axion of Refs. [7,35,36]. The coupling of the axion with neutrinos in the present model may have astrophysics and/or cosmological consequences.

It is still possible to assign the PQ charge as in Sec. II of Ref. [22] and the PQ charges are quantized. However, in that case it appears as an extra Goldstone boson coupling with leptons and photons. Thus, in order to avoid such an extra Goldstone we have to break softly the  $Z_3$  symmetry, say, by adding  $\mu^2 \Phi_\nu \Phi_\nu$  in the scalar potential.

Summarizing, we have obtained a model with an automatic PQ symmetry, with an invisible axion which is protected against gravitational effects in the context of a multi-Higgs extension of the standard model. This is important for three reasons. First, multi-Higgs extensions, with or without supersymmetry, are used by the experimentalists as reference models for searching extra scalar particles [29,37]. Second, these models are used by phenomenologists to get an appropriate mass matrix in the lepton and quark sectors. In fact, as we said before, all the extra fields that we have added to the

minimal version of the model have already been introduced in the literature with different goals; we have just put all of them together. The necessity of protecting the invisible axion from gravitational effects, as we have done above, gives a rationale for those scalar multiplets. Finally, we would like to mention that one of the issues that remains arbitrary in most multi-Higgs extensions is the flavor violating neutral currents in the scalar sector. We can implement it or not at will. How-

ever, in our case these effects are automatically avoided since the Yukawa interactions are already determined for the  $Z_{13}$  symmetry. Then, our model automatically does not have flavor changing neutral currents in all sectors of the model.

This work was supported by Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), and partially by Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

- 
- [1] S. Weinberg, Phys. Rev. D **11**, 3583 (1975).
  - [2] G. 't Hooft, Phys. Rev. Lett. **37**, 8 (1976); Phys. Rev. D **14**, 3432 (1976).
  - [3] C.G. Callan, R. Dashen, and D. Gross, Phys. Lett. **63B**, 334 (1976); R. Jackiw and C. Rebbi, Phys. Rev. Lett. **37**, 172 (1976).
  - [4] V. Baluni, Phys. Rev. D **19**, 2227 (1979); R. Crewther, P. Di Vecchia, G. Veneziano, and E. Witten, Phys. Lett. **88B**, 123 (1979); **91B**, 487(E) (1980).
  - [5] R.D. Peccei and H. Quinn, Phys. Rev. Lett. **38**, 1440 (1977); Phys. Rev. D **16**, 1791 (1977).
  - [6] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **40**, 223 (1978); F. Wilczek, *ibid.* **40**, 279 (1978).
  - [7] M. Dine, W. Fischler, and M. Srednicki, Phys. Lett. **104B**, 199 (1981).
  - [8] M. Srednicki and N.J.C. Spooner, in Particle Data Group, K. Hagiwara *et al.*, Phys. Rev. D **66**, 010001 (2002).
  - [9] Y.E. Kim, Phys. Rep. **150**, 1 (1987); H.-Y. Cheng, *ibid.* **158**, 1 (1998); G.G. Raffelt, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **49**, 163 (1999); Phys. Rep. **198**, 1 (1990); M.S. Turner, *ibid.* **197**, 67 (1991).
  - [10] H. Georgi, L.J. Hall, and M.B. Wise, Nucl. Phys. **B192**, 409 (1981).
  - [11] S. Ghigna, M. Lusignoli, and M. Roncadelli, Phys. Lett. B **283**, 278 (1992); R. Holman *et al.*, *ibid.* **282**, 132 (1992); M. Kamionkowski and J. March-Russell, *ibid.* **282**, 137 (1992); S.M. Barr and D. Seckel, Phys. Rev. D **46**, 539 (1992); R. Holman, T.W. Kephart, and S.-J. Rey, Phys. Rev. Lett. **71**, 320 (1993); R. Kallosh, A. Linde, D. Linde, and L. Susskind, Phys. Rev. D **52**, 912 (1995); R.D. Peccei, hep-ph/0009030.
  - [12] L.M. Krauss and F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **62**, 1221 (1989); see also S. Coleman, J. Preskill, and F. Wilczek, Nucl. Phys. **B378**, 175 (1992).
  - [13] T. Banks, Nucl. Phys. **B323**, 90 (1988); M.G. Alford, J. March-Russell, and F. Wilczek, *ibid.* **B337**, 695 (1990); J. Preskill and L.M. Krauss, *ibid.* **B341**, 50 (1990); M.G. Alford, S. Coleman, and J. March-Russell, *ibid.* **B351**, 735 (1991).
  - [14] C.T. Hill and A.K. Leibovich, Phys. Rev. D **66**, 075010 (2002); **66**, 016006 (2002).
  - [15] G. Lazarides, C. Panagiotakopoulos, and Q. Shafi, Phys. Rev. Lett. **56**, 432 (1986); J.A. Casas and G.G. Ross, Phys. Lett. B **192**, 119 (1987).
  - [16] M. Dine, "Problems of Naturalness: Some Lesson From String Theory," hep-th/9207045.
  - [17] H. Georgi, J.E. Kim, and H.P. Nilles, Phys. Lett. B **437**, 325 (1998).
  - [18] E. Witten, Nucl. Phys. **B258**, 75 (1985).
  - [19] M. B. Green, J. H. Schwarz, and E. Witten, *Superstring Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1987), Vol. 2, pp. 380–385.
  - [20] S. Dimopoulos, P.H. Frampton, H. Georgi, and M.B. Wise, Phys. Lett. **117B**, 185 (1982); K. Kang and S. Ouvry, Phys. Rev. D **28**, 2662 (1983); K.S. Soh, Nucl. Phys. **B241**, 129 (1984); Y.J. Park, H.-W. Lee, and Y. Kim, Phys. Rev. D **30**, 2429 (1984); B.A. Dobrescu, Phys. Rev. D **55**, 5826 (1997).
  - [21] P.B. Pal, Phys. Rev. D **52**, 1659 (1995).
  - [22] Alex G. Dias, V. Pleitez, and M.D. Tonasse, Phys. Rev. D **67**, 095008 (2003); Alex G. Dias and V. Pleitez, hep-ph/0308037; A.G. Dias, C.A. de S. Pires, and P.S. Rodrigues da Silva, Phys. Rev. D **68**, 115009 (2003).
  - [23] E.J. Chun and A. Lukas, Phys. Lett. B **297**, 298 (1992).
  - [24] R.D. Peccei, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **72**, 3 (1999).
  - [25] Homestake Collaboration, B.T. Cleveland *et al.*, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **38**, 47 (1995); K.S. Hirata *et al.*, Phys. Rev. D **44**, 2241 (1991); GALLEX Collaboration, W. Hampel *et al.*, Phys. Lett. B **477**, 127 (1999); SAGE Collaboration, J.N. Abdurashitov *et al.*, Phys. Rev. Lett. **77**, 4708 (1996); SNO Collaboration, Q.R. Ahmad *et al.*, *ibid.* **87**, 071301 (2001).
  - [26] Y. Fukuda *et al.*, Phys. Rev. Lett. **81**, 1562 (1998); **81**, 1158 (1998); Phys. Lett. B **436**, 33 (1998); K.S. Hirata *et al.*, *ibid.* **280**, 146 (1992); R. Becker-Szendy *et al.*, Phys. Rev. D **46**, 3720 (1992); W.W.M. Allison *et al.*, Phys. Lett. B **391**, 491 (1997); Y. Fukuda *et al.*, *ibid.* **335**, 237 (1994).
  - [27] A. Zee, Phys. Lett. **93B**, 389 (1980).
  - [28] T.P. Cheng and L.-F. Li, Phys. Rev. D **22**, 2860 (1980).
  - [29] J. F. Gunion, H. E. Haber, G. L. Kane, and S. Dawson, *The Higgs Hunter's Guide* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1990).
  - [30] Y. Kiode, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) **111**, 294 (2002), and references therein.
  - [31] Y.B. Zeldovich, I.Y. Kobzarev, and L.B. Okun, Sov. Phys. JETP **40**, 1 (1975).
  - [32] P. Sikivie, Phys. Rev. Lett. **48**, 1156 (1982).
  - [33] G. Lazarides and Q. Shafi, Phys. Lett. **115B**, 21 (1982); H. Georgi and M.B. Wise, *ibid.* **116B**, 123 (1982).
  - [34] K. Fujikawa, Phys. Rev. Lett. **42**, 1195 (1979); Phys. Rev. D **21**, 2848 (1980).
  - [35] D. Kaplan, Nucl. Phys. **B260**, 215 (1985).
  - [36] C. Hagmann, K. van Bibber, and L.J. Rosenberg, in Hagiwara [8].
  - [37] P. Igo-Kemmes, in Hagiwara [8].

# Grand unification and proton stability near the Peccei-Quinn scale

Alex G. Dias\*

*Instituto de Física, Universidade de São Paulo, C.P. 66.318, 05315-970 São Paulo, SP, Brazil*

V. Pleitez†

*Instituto de Física, Teórica, Universidade Estadual Paulista, Rua Pamplona 145, São Paulo, SP, Brazil*

(Received 16 June 2004; published 15 September 2004)

We show that in an  $SU(2) \otimes U(1)$  model with a Dine-Fischler-Srednicki-like invisible axion it is possible to obtain (i) the convergence of the three gauge coupling constants at an energy scale near the Peccei-Quinn scale; (ii) the correct value for  $\sin^2 \hat{\theta}_W(M_Z)$ ; (iii) the stabilization of the proton by the cyclic  $Z_{13} \otimes Z_3$  symmetries which also stabilize the axion as a solution to the strong  $CP$  problem. Concerning the convergence of the three coupling constants and the prediction of the weak mixing angle at the  $Z$  peak, this model is as good as the minimal supersymmetric standard model with  $\mu_{\text{SUSY}} = M_Z$ . We also consider the standard model with six and seven Higgs doublets. The main calculations were done in the 1-loop approximation but we briefly consider the 2-loop contributions.

DOI: 10.1103/PhysRevD.70.055009

PACS numbers: 12.10.Kt, 12.60.Fr, 14.80.Mz

The convergence of the three gauge coupling constants  $g_3, g_2, g_1 = \sqrt{5/3}g'$  and the prediction of the electroweak mixing angle are some of the motivations for grand unified theories (GUTs) [1–4]. Unfortunately the simplest and more elegant GUTs which break into a simple step to the standard model, like  $SU(5)$  [1,2] and some of the  $SO(10)$  and  $E_6$  GUTs [3,4], were ruled out by two experimental results. The first one is concerned with the fact that using the value of the electroweak mixing angle measured at the  $Z$  peak by LEP, i.e.,  $\sin^2 \hat{\theta}_W(M_Z) = 0.23113(15)$  [5], the running coupling constants extrapolated from the values measured at low energies do not meet at a single point or, inversely, assuming the convergence of the three coupling constants, the prediction of the value of  $\sin^2 \hat{\theta}_W(M_Z)$  [or, alternatively, we can obtain the convergence point of  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  and then the value of  $\alpha_s(M_Z)$  can be predicted] does not agree with the experimental value. On the other hand, in the minimal supersymmetric extension of the standard model (MSSM for short) the coupling constants do intercept at a single point, with a remarkable precision, and the predicted value of the weak mixing angle is also in agreement with the observed value [6]. In fact, this has become one of the most important reasons for believing on the existence of supersymmetry at the TeV scale and, in particular, on the MSSM. In particular, a new scale for physics,  $\mu_{\text{SUSY}}$ , is then required. The second trouble with the simplest GUTs is related to the nonobservation of the proton decay at the predicted lifetime. Recent data by Super-Kamiokande on  $p \rightarrow K^+ \bar{\nu}$  imply that  $\tau_p > 10^{33}$  yr [5,7]. However, this is also a trouble for supersymmetric (SUSY)  $SU(5)$  since this theory has  $d = 5$  effective operators induced by colored-Higgs triplets that produce a

rapid proton decay [8] and it is necessary to appeal to fermion mixing in order to keep (tight) agreement with data [9]. Thus, it appears natural to ask ourselves if there are options for SUSY yielding the convergence of the couplings, the observed value of the weak mixing angle at the  $Z$  pole, and an appropriately stable proton. The importance of the Higgs boson contributions to the convergence of the couplings has been emphasized recently [10], although exotic fermions can also lead to the gauge coupling unification even at the TeV range [11]. In this case, unification at a lower energy scale is possible even without supersymmetry and the proton stability is guaranteed by additional assumptions as extra dimensions or dynamical symmetry breaking [11], by the conservation of the baryon number in the gauge interactions as in the  $[SU(3)]^3$  trinification [10], or in  $[SU(3)]^4$  quartification where the proton decay is mediated only by Higgs scalars [12].

Here, we will show that in a multi-Higgs extension of the standard model we have the convergence of the three gauge coupling constants at an energy scale of the order of  $10^{13}$  GeV, and the weak mixing angle in agreement with the measured value at the  $Z$  pole. The proton decay occurs only throughout dimension 8, 9, 10, and 11 effective operators because discrete  $Z_{13} \otimes Z_3$  symmetries forbid all  $d = 6, 7$  operators. This model was proposed independently of the issue of the gauge unification, and it has a Dine-Fischler-Srednicki-like invisible axion [13] stabilized against a semiclassical gravitational effect by those discrete symmetries [14]. The use of discrete gauge symmetries in the proton decay problem has been used recently in Ref. [15] in a model with a  $Z_6$  symmetry, where baryon number violation low dimension dangerous effective operators are all forbidden. For other recent uses of symmetries like these see [16]. We compare our results with the usual MSSM showing that the convergence of the coupling constants and the prediction of the

\*Email address: alexdias@fma.if.usp.br

†Email address: vicente@if.unesp.br

$\sin^2\hat{\theta}_W(M_Z)$  is, in this model, as good as in the MSSM with  $\mu_{\text{SUSY}} = M_Z$ . We also consider the SM with seven Higgs doublets, and briefly comment on the SM with six Higgs doublets and  $\mu_{\text{SUSY}} = 1 \text{ TeV}$ .

In Ref. [14] the representation content of the standard model was augmented, by adding scalar fields and right-handed neutrinos, in such a way that the discrete  $Z_{13} \otimes Z_3$  symmetries could be implemented in the model. The particle content of the model is the following:  $Q_L = (ud)_L^T \sim (\mathbf{2}, 1/3)$ ,  $L_L = (\nu l)_L^T \sim (\mathbf{2}, -1)$  denote any quark and lepton doublet;  $u_R \sim (\mathbf{1}, 4/3)$ ,  $d_R \sim (\mathbf{1}, -2/3)$ ,  $l_R \sim (\mathbf{1}, -2)$ , and  $\nu_R \sim (\mathbf{1}, 0)$  are the respective right-handed components. It was also assumed that each charge sector gains mass from a different scalar doublet, hence we have the following Higgs multiplets: four doublets  $\Phi_u$ ,  $\Phi_d$ ,  $\Phi_l$ , and  $\Phi_\nu$  [all of them of the form  $(\mathbf{2}, +1) = (\varphi^+, \varphi^0)^T$  under  $SU(2) \otimes U(1)$ ] which generate Dirac masses for  $u$ - and  $d$ -like quarks, charged leptons, and neutrinos, respectively; a neutral complex singlet  $\phi \sim (\mathbf{1}, 0)$ , a singly charged singlet  $h^+ \sim (\mathbf{1}, +2)$ , and, finally, a non-Hermitian triplet  $\vec{T} \sim (\mathbf{3}, +2)$ . With the discrete symmetries flavor changing neutral currents are also naturally suppressed at the tree level.

Next, let us consider the evolution equations of the three gauge coupling constants, at the 1-loop level,

$$\begin{aligned}\alpha_1^{-1}(M) &= \alpha^{-1}(M_Z) \frac{3}{5} \cos^2 \theta_W(M_Z) + \frac{b_1}{2\pi} \ln\left(\frac{M_Z}{M}\right), \\ \alpha_2^{-1}(M) &= \alpha^{-1}(M_Z) \sin^2 \theta_W(M_Z) + \frac{b_2}{2\pi} \ln\left(\frac{M_Z}{M}\right), \\ \alpha_3^{-1}(M) &= \alpha_3^{-1}(M_Z) + \frac{b_3}{2\pi} \ln\left(\frac{M_Z}{M}\right),\end{aligned}\quad (1)$$

where  $b_i$  are the 1-loop beta-function coefficients

$$b_i = \frac{2}{3} \sum_{\text{fermions}} T_{Ri}(F) + \frac{1}{3} \sum_{\text{scalars}} T_{Ri}(S) - \frac{11}{3} C_2(V). \quad (2)$$

For  $SU(N)$ , we have that  $T_R = C_2 = N$ , with  $N \geq 2$ , for fields in the adjoint representation, and  $T_R(S, F) = 1/2$  for fields in the fundamental or antifundamental representation; for  $U(1)$ ,  $C_2(V) = 0$ , and  $T(S_a, F_a) = (3/5)\text{Tr}(Y_a^2/4)$  for a unification in  $SU(5)$  [it is the same for the case of  $SO(10)$ ]. Equation (2) is valid for Weyl spinors and complex scalar fields. Considering the extension of the standard model with  $N_g$  matter generations,  $N_H$  Higgs doublets, and  $N_T$  non-Hermitian scalar triplets, all of them considered relatively light,

$$\begin{aligned}b_1 &= \frac{4}{3} N_g + \frac{1}{10} N_H + \frac{3}{5} N_T, \\ b_2 &= \frac{4}{3} N_g + \frac{1}{6} N_H + \frac{2}{3} N_T - \frac{22}{3}, \quad b_3 = \frac{4}{3} N_g - 11.\end{aligned}\quad (3)$$

Only the scalar singlet  $h^+$  will be considered with mass

of the order of the unification scale. The evolution equations in Eq. (1) imply the unification condition  $\alpha_1^{-1}(M_U) = \alpha_2^{-1}(M_U) = \alpha_3^{-1}(M_U) \equiv \alpha_U^{-1}$ , which also defines the mass scale  $M_U$ :

$$M_U = M_Z \exp\left[2\pi \frac{\alpha^{-1}(M_Z) - \frac{8}{3}\alpha_3^{-1}(M_Z)}{\frac{5}{3}b_1 + b_2 - \frac{8}{3}b_3}\right]. \quad (4)$$

From Eqs. (3) with  $N_g = 3$ ,  $N_H = 1$ , and  $N_T = 0$ , i.e., the standard model, give  $(b_1, b_2, b_3) = (41/10, -19/6, -7)$ . In this case, the evolution of  $g_i$  is shown in Fig. 1. In this figure (and below) we have used the inputs  $M_Z = 91.1876 \text{ GeV}$ ;  $\alpha(M_Z) = 1/128$ ; and  $\alpha_3(M_Z) = 0.1172$  [5]. It is clear that with only the representation content of the SM, there is no convergence of the three  $g_i$  at a given point [6].

On the other hand, with  $N_g = 3$ ,  $N_H = 4$ , and  $N_T = 1$  i.e., the model of Ref. [14], with Eqs. (3) we have  $(b_1, b_2, b_3) = (5, -2, -7)$  and the evolution of the coupling constants in this case is shown in Fig. 2. We obtain that the three forces unify at the energy scale  $M_U \simeq 2.8 \times 10^{13} \text{ GeV}$  and  $\alpha_U^{-1} \simeq 38$ . The value predicted for  $\sin^2\hat{\theta}_W(M_Z)$ , using the unification scale as an input, is

$$\sin^2\hat{\theta}_W = \frac{3}{8} + \frac{5}{16\pi} \alpha(M_Z)(b_1 - b_2) \ln\left(\frac{M_Z}{M_U}\right), \quad (5)$$

and we obtain in this model  $\sin^2\hat{\theta}_W(M_Z) = 0.2311$ , which coincides with the measured value as it should be since the unification occurs with a very good precision. In order to compare this result with others [10] we write at the 1-loop approximation, by eliminating the unification scale from Eq. (3) and also using Eq. (1),

$$\tilde{b} = \frac{11 + \frac{1}{2}N_H + 2N_T}{22 - \frac{1}{5}(N_H + N_T)} = \frac{5}{3} \left[ \frac{\sin^2\hat{\theta}_W(M_Z) - \frac{\alpha(M_Z)}{\alpha_3(M_Z)}}{1 - \frac{8}{3}\sin^2\hat{\theta}_W(M_Z)} \right], \quad (6)$$

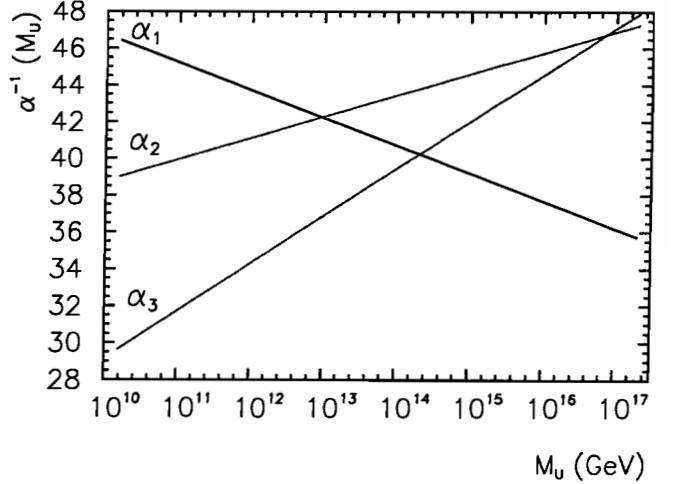


FIG. 1 (color online). Running couplings in the standard model.

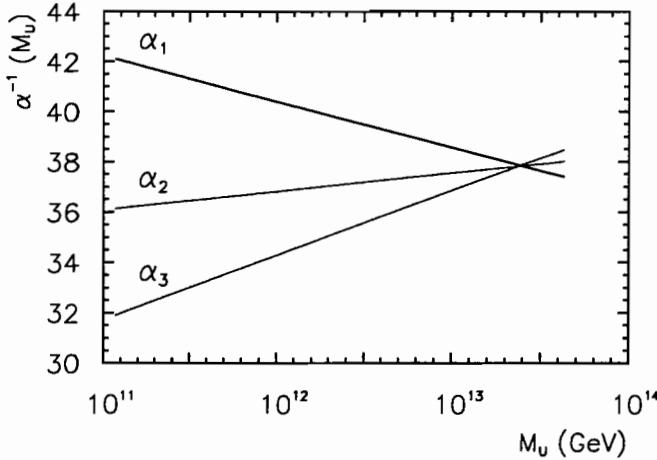


FIG. 2 (color online). Running couplings in the present model.

where  $\tilde{b} = (b_3 - b_2)/(b_2 - b_1)$  [11]. For being more general we let  $N_H$  and  $N_T$  arbitrary to see if there are other values for them which could fit with unification. The theoretical ratio  $\tilde{b}$  defined in the first line of Eq. (6), and which depends mainly on the scalar representation content (notice that, at the 1-loop level,  $\tilde{b}$  does not depend on  $N_g$ ), should coincide with the quantity defined in the second line which depends only on the experimental values of the coupling constants  $\alpha$  and  $\alpha_3$  and  $\sin^2\hat{\theta}_W$  at the  $Z$  peak. The experimental input then implies  $\tilde{b} = 0.714$  using the second line of Eq. (6). Using the first line of Eq. (6) the minimal standard model implies  $\tilde{b} = 115/218 \approx 0.527$  (including the scalar contributions), so that it does not match and  $\sin^2\hat{\theta}_W(M_Z) = 0.204$  according to Eq. (5) and for this reason the unification of this model in nonsupersymmetric  $SU(5)$  was ruled out by LEP data. In the present model we obtain  $\tilde{b} = 5/7 \approx 0.714$  and this value matches in Eq. (6) and gives, then, the observed value for  $\sin^2\hat{\theta}_W(M_Z)$  [5] as we pointed out above.

In the MSSM when  $\mu_{\text{SUSY}} = M_Z$  we have  $(b_1, b_2, b_3) = (33/5, 1, -3)$  and the respective evolution is shown in Fig. 3, with  $M_U \approx 2.1 \times 10^{16}$  GeV and the inverse of the coupling constant at the unification scale, denoted in this case by  $\alpha_5$ , is  $\alpha_5^{-1} \approx 24$ . The weak mixing angle has also the correct value [17] and the same value for  $\tilde{b}$  is obtained as in the present model. The case when the SUSY scale is of the order of  $M_Z$  is better than the case when that scale is of the order of 1 TeV but we do not show the latter case. As can be seen from Figs. 2 and 3 and from the value of  $\tilde{b}$ , concerning the unification and the prediction of the weak mixing angle, the model of Ref. [14] is as good as the MSSM and for this reason it was not necessary in the present work to take into account the theoretical and experimental uncertainties.

Finally, in the case when  $N_g = 3$  but  $N_H = 7$  and  $N_T = 0$  we have  $(b_1, b_2, b_3) = (47/10, -13/6, -7)$ ,  $\tilde{b} =$

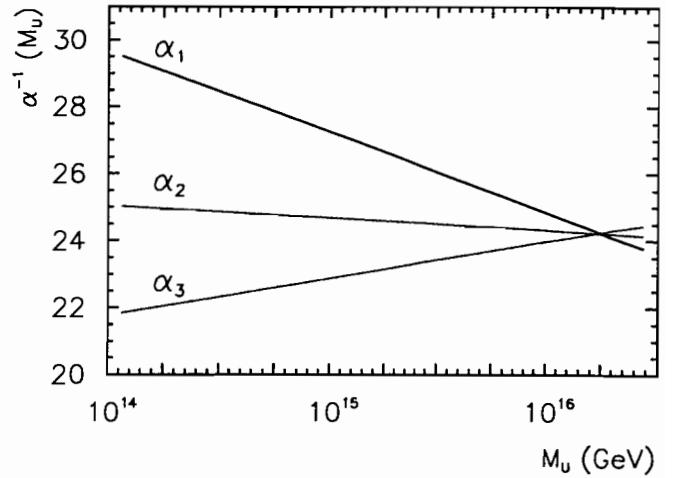


FIG. 3 (color online). Running couplings in the MSSM with  $\mu_{\text{SUSY}} = M_Z$ .

$145/206 \approx 0.704$ , and  $\sin^2\hat{\theta}_W(M_Z) = 0.230$  according to Eq. (5) and the evolution is shown in Fig. 4 with  $M_U \approx 5.8 \times 10^{13}$  GeV [3]. We have also studied the case of the SM with six Higgs doublets. In this case the unification of the coupling coincides with that of Ref. [10] and  $\sin^2\hat{\theta}_W(M_Z) = 0.226$ . Moreover, the convergence of the three coupling constants in the seven Higgs scalar doublets is better than the case of six of such doublets [10].

We see that, in order to have the unification of the couplings and the correct value for the weak mixing angle at the  $Z$  pole it is not necessary to have low energy supersymmetry. On the other hand, four Higgs doublets and a non-Hermitian Higgs triplet are more precise, for the unification of the coupling constant, than just seven Higgs doublets. As we said before, only the singlet  $h^+$  has been considered having a mass of the order of the unification scale. Assuming that this singlet is light we obtain the same value for  $M_U$  but  $\sin^2\hat{\theta}_W(M_Z) = 0.229$ .

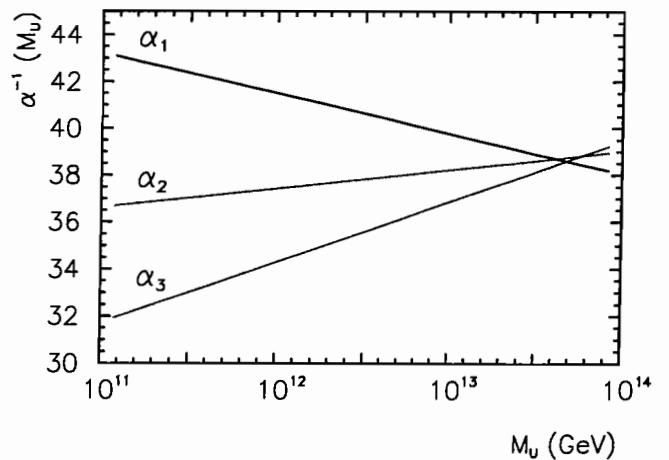


FIG. 4 (color online). Case of the standard model with seven scalar doublets.

The contribution of just one Higgs doublet is almost negligible compared to that of quarks and leptons when dealing with the renormalization group equations. But in models like the multi-Higgs extensions we have discussed here, the Higgs multiplets have a total contribution already important to unify the theories. However, we stress again, looking at Eq. (6), that the value of  $\sin^2\hat{\theta}_W(M_Z)$  depends strongly on  $N_H$  and  $N_T$  selecting in this way only a few possibilities. Moreover, the prediction of the weak mixing angle in this model is not an accident. To see that, with the experimental inputs in the second line of Eq. (6) we have  $N_H = 7.324 - 3.33N_T$  and it is clear that the best solution for  $N_H$  and  $N_T$  integers is when  $N_H = 4$  for  $N_T = 1$ . The seven doublets model  $N_H = 7$  for  $N_T = 0$  is the second best solution. The denominator in the exponent of Eq. (4) can be written as  $(1/3)N_H + (5/3)N_T + 22$ , and we see that a larger number of Higgs multiplets imply a

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{19}{15}N_g + \frac{9}{50}N_H + \frac{36}{5}N_T & \frac{3}{5}N_g + \frac{9}{10}N_H + \frac{72}{5}N_T & \frac{44}{15}N_g \\ \frac{1}{5}N_g + \frac{3}{10}N_H + \frac{24}{5}N_T & \frac{49}{3}N_g + \frac{13}{3}N_H + \frac{56}{3}N_T - \frac{136}{3} & 4N_g \\ \frac{11}{30}N_g & \frac{3}{2}N_g & \frac{76}{3}N_g - 102 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

The quark top Yukawa coupling being of order of unity, is the only one comparable with the  $\alpha_i$ . However its contribution to Eq. (7) is unimportant when compared with the other contributions in Eq. (8) and does not affect the 2-loops running significantly for the values of  $N_H$  and  $N_T$  considered here. A complete treatment includes, of course, all scalar interactions (which in the present model include trilinear interactions) and it is much more complicated. However, as an illustration, we will consider only the corrections of the gauge coupling constants in Eq. (8). In this case, the numerical solutions to the system of equations in Eq. (7) can be found using Eq. (1) after making the simple substitution  $b_i \rightarrow \Delta_i$ , with the  $\Delta_i$  extracted numerically. The values of  $\Delta_i$  and the respective values for  $M_U$  and  $\sin^2\hat{\theta}_W(M_Z)$ , at the 2-loop order, are given in Table I. We see from the table that in the cases with  $N_H = 4, N_T = 1$  and  $N_H = 7, N_H = 0$ , the values of the weak mixing angle at the  $Z$  pole are a little above the experimental value (since this is only an illustration that considers just the evolution of the gauge coupling constants it is not necessary to take into account the experimental and theoretical uncertainties). This does not rule out these models since the correct value of  $\sin^2\hat{\theta}_W(M_Z)$

TABLE I. Values for  $\Delta_i$  and  $\sin^2\hat{\theta}_W(M_Z)$  at the 2-loop level for multi-Higgs models.  $M_U$  is in units of  $10^{13}$  GeV.

$N_H$	$N_T$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$M_U$	$\sin^2\hat{\theta}_W(M_Z)$
4	1	5.102	-1.847	-7.089	1.5	0.235
6	0	4.659	-2.213	-7.089	5.0	0.231
7	0	4.762	-2.035	-7.089	3.4	0.234

smaller value for  $M_U$ , however, we obtain the best match condition for  $\tilde{b}$  with  $N_H = 4$  and  $N_T = 1$ .

Because of the precise measurements in the electro-weak sector higher order corrections to the 1-loop calculations are important to verify if the solutions above can be stable against these corrections. Considering only the gauge coupling constants, their running  $g_i(\mu)$  are now solutions of the corrected renormalization group equations

$$\mu \frac{d\alpha_i(\mu)}{d\mu} = \frac{1}{2\pi} \left[ b_i + \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^3 b_{ij} \alpha_j(\mu) \right] \alpha_i(\mu)^2. \quad (7)$$

The general form of the coefficients  $b_{ij}$  is given in Ref. [18]. For the cases discussed in this paper, i.e., the only nontrivial scalar representations under SU(2) are doublets and triplets, they have the following form:

may be obtained at the 2-loop level by constraining the self-interactions couplings and the masses of the scalars fields. Hence, this partial analysis suggests that solutions in the 1-loop approximation might be stable under higher corrections since they are not drastically changed when 2-loop corrections are included.

Next, we come to the question of the proton stability in the present model. We have seen that the energy scale of the unification of the coupling constants is of the order of  $10^{13}$  GeV, i.e., smaller than the scale of the non-SUSY SU(5) and near, by a 10–1000 factor, to the Peccei-Quinn (PQ) scale. This is, apparently, a disaster from the point of view of the nucleon decay. However, it is not because the model accepts discrete symmetries that forbid potentially dangerous effective operators of  $d = 6, 7$ . With the representation content of the model it is possible to impose the following  $Z_{13}$  symmetry:

$$\begin{aligned} Q &\rightarrow \omega_5 Q, & u_R &\rightarrow \omega_3 u_R, & d_R &\rightarrow \omega_5^{-1} d_R, \\ L &\rightarrow \omega_6 L, & \nu_R &\rightarrow \omega_0 \nu_R, & l_R &\rightarrow \omega_4 l_R, \\ \Phi_u &\rightarrow \omega_2^{-1} \Phi_u, & \Phi_d &\rightarrow \omega_3^{-1} \Phi_d, & \Phi_l &\rightarrow \omega_2 \Phi_b, \\ \Phi_\nu &\rightarrow \omega_6^{-1} \Phi_\nu, & \phi &\rightarrow \omega_1^{-1} \phi, & T &\rightarrow \omega_4^{-1} T, \\ && && h^+ &\rightarrow \omega_1 h^+, \end{aligned} \quad (9)$$

with  $\omega_k = e^{2\pi i k/13}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 6$ . Moreover, in order to have an automatic PQ symmetry [19], it is also necessary to impose a  $Z_3$  with parameters denoted by  $\tilde{\omega}_0$ ,  $\tilde{\omega}_1$ , and  $\tilde{\omega}_1^{-1}$  with  $\Phi_l$  transforming with  $\tilde{\omega}_1^{-1}$ ;  $\Phi_\nu$ ,  $\nu_R$ ,  $l_R$  with  $\tilde{\omega}_1$ , while all other fields transform trivially under  $Z_3$ . For details see Ref. [14].

We search for effective operators that are  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  and  $Z_{13} \otimes Z_3$  invariant. No grand unified model is assumed here. Effective operators with  $d = 6$  which induce a rapid proton decay for  $M_U < 10^{16}$  GeV, are given by [20]

$$\begin{aligned} O_{abcd}^{(1)} &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{\alpha\beta} \overline{(d_R)_{ia}^c} (u_R)_{jb} \overline{(Q_L)_{kac}^c} (L_L)_{\beta d}, \\ O_{abcd}^{(2)} &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{\alpha\beta} \overline{(Q_L)_{iaa}^c} (Q_L)_{j\beta b} \overline{(u_R)_{kc}^c} (l_R)_d, \\ O_{abcd}^{(3)} &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\rho} \overline{(Q_L)_{iaa}^c} (Q_L)_{j\beta b} \overline{(Q_L)_{k\gamma c}^c} (L_L)_{\rho d}, \\ O_{abcd}^{(4)} &= \epsilon_{ijk} (\vec{\tau}\epsilon)_{\alpha\beta} \\ &\quad \cdot (\vec{\tau}\epsilon)_{\gamma\rho} \overline{(Q_L)_{iaa}^c} (Q_L)_{j\beta b} \overline{(Q_L)_{k\gamma c}^c} (L_L)_{\rho d}, \\ O_{abcd}^{(5)} &= \epsilon_{ijk} \overline{(d_R)_{ia}^c} (u_R)_{jb} \overline{(u_R)_{kc}^c} (l_R)_d, \\ O_{abcd}^{(6)} &= \epsilon_{ijk} \overline{(u_R)_{ia}^c} (u_R)_{jb} \overline{(d_R)_{kc}^c} (l_R)_d, \\ O_{abcd}^{(7)} &= \epsilon_{ijk} \overline{(u_R)_{ia}^c} (d_R)_{jb} \overline{(d_R)_{kc}^c} (\nu_R)_d, \\ O_{abcd}^{(8)} &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{\alpha\beta} \overline{(d_R)_{ia}^c} (Q_L)_{jab} \overline{(\nu_R)_c^c} (Q_L)_{k\beta d}, \end{aligned} \quad (10)$$

where  $i, j$ , and  $k$  are  $SU(3)$  indices;  $\alpha, \beta, \gamma$ , and  $\rho$  are  $SU(2)$  indices; and  $a, b, c$ , and  $d$  are generation indices. From Eq. (10), using Fierz transformations, it is possible to obtain all vector and tensor Dirac matrices [20]. All operators in Eq. (10) are forbidden by the  $Z_{13}$  symmetry in Eq. (9);  $d = 7$  operators formed with those of Eq. (10) and the singlet  $\phi$  (or  $\phi^*$ ) are also forbidden. Notice that  $O_{abcd}^{(2,5,6,7,8)}$  are also forbidden by  $Z_3$ . However, there are others  $B - L$  conserving operators allowed by all the symmetries of the model as

$$O_{abcd}^{(1)} \Phi_l^\dagger \Phi_u, \quad O_{abcd}^{(1)} \phi^4, \quad O_{abcd}^{(3,4)} \phi^5, \quad (11)$$

of  $d = 8, 10, 11$ , respectively, that may induce the proton decay, via four fermion interactions, after the spontaneous symmetry breaking. Let us write the proton lifetime as

$$\tau_P \propto \tau_P^5 \left( \frac{\alpha_5}{\alpha_U} \right) \left( \frac{M_U}{M_5} \right)^4 |\xi|^{-2}, \quad (12)$$

where  $\tau_P^5 = M_5^4 \alpha_5^{-1} m_P^{-5}$  with  $M_5$  as the unification scale in the context of the MSSM,  $M_5 \approx 2.1 \times 10^{16}$  GeV;  $\alpha_5$  is the respective coupling constant at that unification scale with  $\alpha_5^{-1} = 24$ ;  $m_P$  is the proton mass; and  $\alpha_U$  is the coupling constant at  $M_U$  in this model with  $\alpha_U^{-1} = 38$ ; finally,  $\xi$  is a factor depending on the effective operator. Although the  $d = 8$  operator is suppressed by  $1/M_U^4$ , after the spontaneous symmetry breaking, it induces a four fermion interaction proportional to  $\xi = v_l^* v_u / M_U^2$ . Since  $|v_l v_u| \lesssim (246 \text{ GeV})^2$  we have that  $|\xi| < 7.7 \times 10^{-23}$  and since  $M_U/M_5 \approx 1.3 \times 10^{-3}$ ,  $\alpha_5/\alpha_U = 38/24 \approx 1.6$ , in Eq. (12) there is a factor  $\gtrsim 8 \times 10^{32}$  with respect to  $\tau_P^5$ . The  $d = 10$  operator is suppressed by  $M_U^{-2} \Lambda^{-4}$  and it

induces four fermion interactions like  $M_U^{-2} (\nu_\phi / \Lambda)^4 O^{(1)}$  where  $\Lambda$  is a mass scale connecting the field  $\phi$  with the four fermion effective operators  $O^{(i)}$ ,  $\Lambda$  may be  $M_U$  (or the PQ scale) or the Planck scale. In this case there is a factor  $|\xi|^{-2} = (\Lambda/\nu_\phi)^8$  in Eq. (12). The enhancement on the proton lifetime depends on the scales  $\Lambda$  and  $\nu_\phi$ . Assuming  $\nu_\phi = 10^{12}$  GeV and  $\Lambda = M_{\text{Planck}} = 10^{19}$  GeV, we have an enhancement factor of  $5 \times 10^{44}$  with respect to  $\tau_P^5$ . If, instead of  $M_{\text{Planck}}$  we use  $\Lambda = M_U$  but  $\nu_\phi = 10^9$  GeV we still obtain an enhancement factor  $1.7 \times 10^{24}$  in the proton lifetime. Finally, if  $\nu_\phi = 10^{12}$  GeV and  $\Lambda = M_U$  the proton lifetime is raised by a factor of 2 with respect to  $\tau_P^5$ . A similar analysis follows for the  $d = 11$  effective operators. Hence, this model survives the proton decay problem since with the natural values of the parameters we have that the proton has a lifetime which is compatible with the no observation of its decays at the present experimental level. Moreover, notice that the  $d = 5$  effective operator  $M_U^{-1} LL \Phi_v \Phi_v$  is allowed by the  $Z_{13}$  symmetry but forbidden by  $Z_3$ . However the  $d = 10$  operator  $M_U^{-1} \Lambda^{-5} LL \Phi_v \Phi_v \phi^5$  gives a Majorana mass to the neutrinos with an upper limit of 2 eV, obtained when  $\Lambda = \nu_\phi$  and  $\langle \Phi_v \rangle = 246$  GeV.

Summarizing, we have obtained a multi-Higgs extension of the standard model with  $Z_{13} \otimes Z_3$  symmetries that imply an automatic PQ,  $B$  and  $L$  symmetries at the tree level. The axion is stabilized against semiclassical gravitational effects by those symmetries and they also stabilize the nucleon allowing, at the same time, the unification of the three gauge coupling constants at an energy near the PQ scale. Last but not least, the correct value of the weak mixing angle at the  $Z$  peak is obtained. Although we can always implement a larger  $Z_N$  by adding more matter multiplets, concerning the unification of the coupling constants, a larger number of multiplets or higher dimensional representation of  $SU(2)$  affect the running of the couplings. Only a limited set of representations is allowed in this respect. We should mention that a unification scale near the PQ scale is also obtained in an  $[SU(3)]^4$  model [12] but this model has no PQ symmetry in its minimal version. The present model cannot be supersymmetric at low energy (of the order of TeVs), since the fermion superpartners of the Higgs scalars would upset the unification of the gauge couplings; however it is possible to have supersymmetry if  $\mu_{\text{SUSY}} \gtrsim M_U$ . It would be interesting to search what sort of non-SUSY GUT embeds this model.

A. G. D. was supported by FAPESP under the process 01/13607-3, and V. P. was supported partially by CNPq under the process 306087/88-0. A. D. G. also thanks J. K. Mizukoshi for helping with the figures.

- [1] H. Georgi and S. L. Glashow, Phys. Rev. Lett. **32**, 438 (1974).
- [2] H. Georgi, H. Quinn, and S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **33**, 451 (1974).
- [3] P. Langacker, Phys. Rep. **72**, 185 (1981).
- [4] R. Slansky, Phys. Rep. **79**, 1 (1981).
- [5] Particle Data Group, K. Hagiwara *et al.*, Phys. Rev. D **66**, 010001 (2002).
- [6] U. Amaldi *et al.*, Phys. Rev. D **36**, 1385 (1987); P. Langacker and M. Luo, Phys. Rev. D **44**, 817 (1991).
- [7] SuperKamiokande Collaboration, Y. Hayato *et al.*, Phys. Rev. Lett. **83**, 1529 (1999).
- [8] S. Weinberg, Phys. Rev. D **26**, 287 (1982); P. Nath, A. H. Shamseddine, and R. Arnowitt, Phys. Rev. D **32**, 2348 (1985); T. Goto and T. Nihei, Phys. Rev. D **59**, 115009 (1999); H. Murayama and A. Pierce, Phys. Rev. D **65**, 055009 (2002); B. Bajc, P. F. Perez, and G. Senjanovic, Phys. Rev. D **66**, 075005 (2002), and references therein.
- [9] P. F. Perez, Phys. Lett. B **595**, 476 (2004).
- [10] S. Willenbrock, Phys. Lett. B **561**, 130 (2003).
- [11] Z. Berezhiani, I. Gogoladze, and A. Kobakhidze, Phys. Lett. B **522**, 107 (2001).
- [12] K. S. Babu, E. Ma, and S. Willenbrock, Phys. Rev. D **69**, 051301 (2004).
- [13] M. Dine, W. Fischler, and M. Srednicki, Phys. Lett. **104B**, 199 (1981).
- [14] A. G. Dias, V. Pleitez, and M. D. Tonasse, Phys. Rev. D **69**, 015007 (2004).
- [15] K. S. Babu, I. Gogoladze, and K. Wang, Phys. Lett. B **570**, 32 (2003); I. Gogoladze, hep-ph/0402087.
- [16] A. G. Dias, V. Pleitez, and M. D. Tonasse, Phys. Rev. D **67**, 095008 (2003); K. S. Babu, I. Gogoladze, and K. Wang, Nucl. Phys. **B660**, 322 (2003); **560**, 214 (2003); A. G. Dias and V. Pleitez, Phys. Rev. D **69**, 077702 (2004); A. G. Dias, C. A. de S. Pires, and P. S. Rodrigues da Silva, Phys. Rev. D **68**, 115009 (2003).
- [17] W. Marciano and G. Senjanovic, Phys. Rev. D **25**, 3092 (1982).
- [18] D. R. T. Jones, Phys. Rev. D **25**, 581 (1982); M. E. Machacek and M. T. Vaughn, Nucl. Phys. **B222**, 83 (1983).
- [19] R. D. Peccei and H. Quinn, Phys. Rev. Lett. **38**, 1440 (1977).
- [20] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **43**, 1566 (1979).

# Dynamical breakdown of symmetry in a (2+1)-dimensional model containing the Chern-Simons field

Alex G. Dias,\* M. Gomes,<sup>†</sup> and A. J. da Silva<sup>‡</sup>

*Instituto de Física, Universidade de São Paulo, Caixa Postal 66318, 05315-970, São Paulo, SP Brazil*

(Received 23 May 2003; published 17 March 2004)

We study the vacuum stability of a model of massless scalar and fermionic fields minimally coupled to a Chern-Simons field. The classical Lagrangian involves only dimensionless parameters, and the model can be thought of as a (2+1)-dimensional analogue of the Coleman-Weinberg model. By calculating the effective potential, we show that dynamical symmetry breakdown occurs in the two-loop approximation. The vacuum becomes asymmetric and mass generation for the boson and fermion fields takes place. Renormalization group arguments are used to clarify some aspects of the solution.

DOI: 10.1103/PhysRevD.69.065011

PACS number(s): 11.10.Kk, 11.10.Gh, 11.30.Qc

## I. INTRODUCTION

Quantum field theories involving the Chern-Simons (CS) field in 2+1 dimensions present many peculiar and surprising aspects. Fractional spins, exotic statistics, and the existence of massive gauge fields are well known examples in this direction. Applications of these models are, for example, the planar Aharonov-Bohm effect, the fractional quantum Hall effect, and surface effects in liquid helium [1].

Physicists working on these theories have a special concern about their phase structure and phase transitions. These properties are investigated through calculation of the renormalization group functions and the effective potential. So renormalization and its intermediate step, regularization, are central issues to these studies. As the Lagrangian density of the CS field involves the Levi-Civita tensor, these models are not easily extendable outside 2+1 dimensions, making the dimensional regularization scheme [2] a very cumbersome procedure. In fact, in addition to the extension out of 2+1 dimensions, dimensional regularization for these models requires the introduction of an extra regularization term in the Lagrangian. Of course, a safe escape would be to avoid the use of regularizations at all, as in the Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann (BPHZ) renormalization program [3], but this is also a complex procedure due to the zero-mass fields involved [4,5]. For these reasons a simple regularization method called dimensional reduction has been largely employed [6–8] to deal with CS models. It consists in a simplification of dimensional regularization in which all tensor contractions appearing in Feynman graphs are first realized in 2+1 dimensions and only the resulting scalar integrals are extended to  $D=3-\epsilon$  dimensions. But, as stressed by several authors [9], this method may lead to ambiguities, jeopardizing the invariance of the theory under gauge transformations. Nevertheless, given its great simplicity it may be worth using dimensional reduction in practical calculations, after validating its consistency through the explicit verification of the Ward identities related to the gauge symmetry.

In this paper, we calculate the effective potential for the theory of a massless complex scalar field with a sextuple self-interaction and minimally coupled with a CS field. Dynamical symmetry breakdown and mass generation are explicitly verified not in one loop as in the Coleman-Weinberg (CW) [11] model, but in the two-loop approximation. The Feynman integrals are regularized by dimensional reduction. The verification that this regularization procedure preserves the Ward identities, was carried out in previous works [7,10].

The model is then extended by including a massless fermion minimally interacting with the CS field, and coupled to the scalar field through a “Yukawa” term [12]. Up to two loops, the new graphs that appear in this extended model involve products of two Levi-Civita tensors at most. As discussed in [9], possible differences between the expressions calculated using dimensional reduction and dimensional regularization appear only in the product of three and more Levi-Civita tensors. Therefore, up to the order we are dealing with, no breakdown of the Ward identities takes place. Here again symmetry breakdown occurs due to two-loop radiative corrections. Curiously, for a certain relation between the Yukawa and the scalar gauge couplings the effective potential is insensitive to the fermion gauge coupling. We also analyze some renormalization group aspects of the extended model by determining the modifications in the anomalous dimension of the scalar field and the beta function associated with the sextuple self-interaction.

The organization of the paper is as follows. In Sec. II the effective potential for the scalar/CS model is calculated and the symmetry breakdown is discussed. In Sec. III this study is extended to the scalar/fermion/CS model. In Sec. IV a renormalization group analysis of the model is performed. In the Conclusions a comparison with the literature is carried out. Three Appendixes present the main integrals necessary in the work and the calculation of the wave function renormalization for the  $\phi$  field.

## II. THE BOSONIC MODEL

In this section we consider the model of a massless complex scalar field with a sextuple self-interaction and minimally interacting with a CS field, whose Lagrangian density is

\*Email address: alexdias@fma.if.usp.br

<sup>†</sup>Email address: mgomes@fma.if.usp.br

<sup>‡</sup>Email address: ajsilva@fma.if.usp.br

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu A^\rho + (D^\mu \varphi)^\dagger (D_\mu \varphi) - \frac{\nu}{6} (\varphi^\dagger \varphi)^3, \quad (1)$$

where  $\nu$  is a positive constant and  $D^\mu = \partial^\mu - ieA^\mu$ . The metric used is  $g^{\mu\nu} = (1, -1, -1)$  and the fully antisymmetric Levi-Civita tensor  $\epsilon_{\mu\nu\rho}$  is normalized as  $\epsilon_{012} = 1$ . It is worth stressing that all the parameters in this Lagrangian are dimensionless, which makes it a (2+1)-dimensional analogue of the well known CW model in 3+1 dimensions. If instead of the CS a Maxwell dynamics for  $A_\nu$  were used, a dimensional parameter would be introduced in the Lagrangian and this analogy would be lost.

It is convenient to decompose the complex scalar field as  $\varphi = (\varphi_1 + i\varphi_2)/\sqrt{2}$ , where  $\varphi_1$  and  $\varphi_2$  are real fields, so that the Lagrangian (1) becomes

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} (\partial^\mu \varphi_i)^2 + e \epsilon^{ij} A_\mu \varphi_j \partial^\mu \varphi_i + \frac{e^2}{2} A^\mu A_\mu \varphi_i \varphi_i \\ & - \frac{\nu}{48} (\varphi_i \varphi_i)^3 + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho} A^\mu \partial^\nu A^\rho, \end{aligned} \quad (2)$$

where  $\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1$  and the summation convention is implied, with  $i$  and  $j$  running over 1 and 2. We shall work in a 't Hooft gauge, which has the advantage of eliminating non-diagonal terms in the free propagators. The gauge fixing term is taken as

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu - \xi e \epsilon^{ij} \varphi_i u_j)^2, \quad (3)$$

and the corresponding Faddeev-Popov Lagrangian is given by

$$\mathcal{L}_{FP} = -c^\dagger (\partial^2 + \xi e^2 \epsilon^{ij} \varphi_i u_j) c, \quad (4)$$

where  $u_i$  is a constant to be chosen later. To calculate the effective potential we follow the functional method [13]. The first step is to consider the action  $\hat{I}(\varphi_i, \chi; \phi_i) = \int d^3x \hat{\mathcal{L}}(\varphi_i, \chi; \phi_i)$ , obtained by shifting the scalar fields by a constant,  $\varphi_i \rightarrow \varphi_i + \phi_i$ , in the original Lagrangian (2) and subtracting the terms that are either independent or linear in the fields, i.e.,

$$\begin{aligned} \hat{I}(\varphi_i, \chi; \phi_i) = & I(\varphi_i + \phi_i, \chi) - I(\phi_i, 0) \\ & - \int d^3x \frac{\delta I}{\delta \varphi_i}(\phi_i, 0) \varphi_i - \int d^3x \frac{\delta I}{\delta \chi}(\phi_i, 0) \chi. \end{aligned} \quad (5)$$

where  $\phi$  is the constant expectation value of  $\varphi$  and  $\chi$  represents the fields  $A_\mu$ ,  $c$ , and  $c^\dagger$ .

By choosing  $u = \phi$ , bilinear terms in  $A_\mu$  and  $\varphi_i$  are eliminated from the resulting  $\hat{\mathcal{L}}$ , which becomes

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}} = & \frac{1}{2} A_\mu \left[ \epsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\rho + m_3 g^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi} \partial^\mu \partial^\nu \right] A_\nu + c^\dagger (-\partial^2 - m_3 \xi) c \\ & + \frac{1}{2} \varphi_i [\delta_{ij} (-\partial^2 - m_1^2 - m_3 \xi) + (m_3 \xi - 4m_1^2) \dot{\phi}_i \dot{\phi}_j] \varphi_j \\ & - e A^\mu \epsilon_{ij} \varphi_i \partial_\mu \varphi_j + e^2 \phi \cdot \varphi A^2 - e^2 \xi \phi \cdot \varphi c^\dagger c - \frac{\nu}{6} (\phi \cdot \varphi)^3 \\ & - \frac{\nu}{4} \phi^2 \phi \cdot \varphi \varphi^2 + \frac{e^2}{2} A^2 \varphi^2 - \frac{\nu}{16} \phi^2 \varphi^4 - \frac{\nu}{4} (\phi \cdot \varphi)^2 \varphi^2 \\ & - \frac{\nu}{8} \phi \cdot \varphi \varphi^4 - \frac{\nu}{48} \varphi^6, \end{aligned} \quad (6)$$

where  $m_1^2 = \nu \phi^4/8$ ,  $m_3 = e^2 \phi^2$ ,  $\dot{\phi}_i = \phi_i / \sqrt{\phi^2}$ , and  $\phi \cdot \varphi$ ,  $\phi^2$ , and  $\varphi^2$  stand, respectively, for  $\phi_i \varphi_i$ ,  $\dot{\phi}_i \dot{\phi}_i$ , and  $\varphi_i \varphi_i$ . For later use we will also define  $m_2^2 = 5m_1^2$ .

The effective potential is given by

$$\begin{aligned} V = & \frac{\nu}{48} \phi^6 - \frac{i}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln \{ \det[i \Delta_{\alpha\beta}^{-1}(k, \phi_i)] \} \\ & + i \langle 0 | T \exp i \int d^3x \hat{\mathcal{L}}_{int} | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (7)$$

The first term in Eq. (7) is the tree approximation as can be read from Eq. (2). The second term is the one-loop correction and the  $i \Delta_{\alpha\beta}^{-1}(k, \phi_i)$  is the coefficient matrix of the quadratic terms of  $\hat{\mathcal{L}}$ . The third term is the sum of the vacuum diagrams with, two and more loops calculated from  $\hat{\mathcal{L}}$ ; it summarizes the infinity sum of all higher order loop diagrams with any number of external scalar lines  $\varphi = \phi$ , obtained from the original Lagrangian (2) [11].

The one-loop effective potential is obtained using the inverse propagators from Eq. (6), which are

$$i \Delta_{ij}^{-1}(k) = \delta_{ij} (k^2 - m_1^2 - \xi m_3) + \dot{\phi}_i \dot{\phi}_j (-4m_1^2 + \xi m_3), \quad (8)$$

$$i \Delta_{\mu\nu}^{-1}(k) = -i \epsilon_{\mu\rho\nu} k^\rho + m_3 g_{\mu\nu} - \frac{1}{\xi} k_\mu k_\nu, \quad (9)$$

$$i \Delta_{ghost}^{-1}(k) = k^2 - \xi m_3 \quad (10)$$

for the scalar, gauge, and ghost fields, respectively. As we said in the Introduction, we employ the dimensional reduction method in which the integrals are promoted to  $D=3-\epsilon$  and a mass scale  $\mu$  is introduced to keep the dimensions of the relevant quantities unchanged ( $\int d^3k \rightarrow \mu^\epsilon \int d^{3-\epsilon}k$ ). Thus, using Eqs. (8)–(10), we obtain that the one-loop contribution is

$$\begin{aligned} V^{B(1)} = & -\frac{1}{12\pi} [m_1^3 (1 + 5^{3/2}) + m_3^3] \\ = & -\frac{1}{12\pi} \left( \nu^{3/2} \frac{1 + 5^{3/2}}{16\sqrt{2}} + e^6 \right) \phi^6. \end{aligned} \quad (11)$$

Here and in what follows we are retaining only the contributions that do not vanish as  $\epsilon$  tends to zero. We have also chosen to work in the Landau limit ( $\xi \rightarrow 0$ ) where the ghosts decouple and do not contribute to the potential.

As a consequence of the dimensional reduction regularization in 2+1 dimensions, in one loop, no infinity appears. Up to one loop, the effective potential is given by  $V(\phi) = \nu/48\phi^6 + V^{B(1)}(\phi) + C/48\phi^6$ , where  $C$  is a convenient finite counterterm. It does not have any nontrivial  $\phi \neq 0$  minimum, and dynamical breakdown of symmetry does not occur. The symmetry breakdown in the CW model in 3+1 dimensions is made possible by the radiative induction of a term of the form  $\phi^4 \ln \phi$ . In the analogous calculation in 2+1 dimensions, the dimension of the phase space precludes the introduction of a similar term (actually  $\phi^6 \ln \phi$ ). The only effect of the one-loop calculation is the change in the coefficient of the  $\phi^6$  term of the classical potential, and so symmetry breakdown does not happen. Thus, to pursue a possible symmetry breakdown we will study the two-loop approximation.

The propagators (in the Landau limit) for the  $A^\mu$  and  $\varphi$  fields obtained from the shifted Lagrangian are

$$\Delta_{\mu\nu}(k) = -\frac{\epsilon_{\mu\nu\rho} k^\rho}{k^2 - m_3^2} - i \frac{m_3}{k^2 - m_3^2} \left( g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad (12)$$

$$\Delta_{ij}(k) = i \left( \frac{1}{k^2 - m_1^2} (\delta_{ij} - \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j) + \frac{1}{k^2 - m_2^2} \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j \right). \quad (13)$$

The interaction vertices are given by (we consider only those vertices that contribute to the two-loop calculation)

$$\text{Quadrilinear } A_\mu A_\nu \varphi_i \varphi_j \text{ vertex} \leftrightarrow \frac{i}{2} e^2 \delta_{ij} g_{\mu\nu}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} &\text{Quadrilinear } \varphi_i \varphi_j \varphi_k \varphi_l \text{ vertex} \\ &\leftrightarrow -i \frac{\nu \phi^2}{8} \left( \frac{1}{2} \delta_{ij} + 2 \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j \right) \delta_{kl}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{Trilinear } \varphi_i \varphi_k \varphi_j \text{ vertex} \leftrightarrow -i \frac{\nu}{4} \phi^3 \hat{\phi}_i \left( \delta_{jk} + \frac{2}{3} \hat{\phi}_j \hat{\phi}_k \right), \quad (16)$$

$$\text{Trilinear } \varphi_i A_\mu A_\nu \text{ vertex} \leftrightarrow i e^2 \phi \hat{\phi}_i g_{\mu\nu}, \quad (17)$$

$$\text{Trilinear } \varphi_i \varphi_j A_\mu \text{ vertex} \leftrightarrow -\frac{e}{2} \epsilon_{ij} (p+q)_\mu. \quad (18)$$

The two-loop contributions to the effective potential are drawn in Fig. 1. The corresponding analytic expressions are listed in Appendix B. In the dimensional reduction approach the Lorentz indices are contracted in three dimensions, and only after all the tensor simplifications are done are the resulting scalar integrals promoted to  $D=3-\epsilon$  dimensions. The calculations, tedious but straightforward, are carried out by using the formulas presented in the Appendixes.  $V_{1a}^{B(2)}$  and

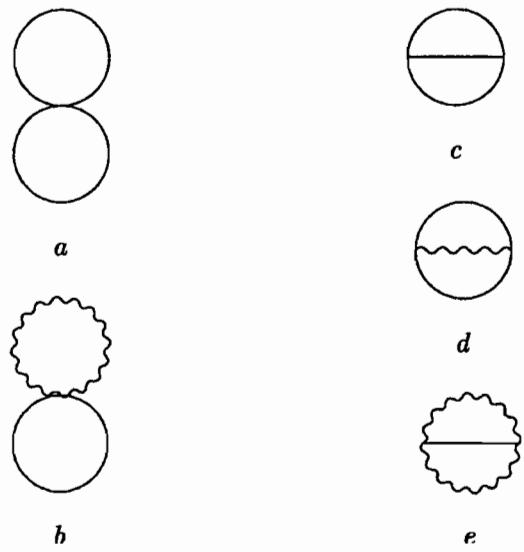


FIG. 1. Diagrams contributing to the two-loop approximation for the effective potential. Continuous and wavy lines represent, respectively, the  $\varphi$  and  $A_\mu$  field propagators.

$V_{1b}^{B(2)}$ , which correspond to the diagrams in Figs. 1(a) and 1(b), respectively, are convergent, since they are given by products of nonoverlapping one-loop integrals. The other three diagrams have divergences proportional to  $\phi^6$ , in accordance with the renormalizability of the model. Summarizing, the results are

$$V_{1a}^{B(2)} = \frac{\nu}{2^7 \pi^2} \phi^2 \left( \frac{3}{2} m_1^2 + 3 m_1 m_2 + \frac{11}{2} m_2^2 \right), \quad (19)$$

$$V_{1b}^{B(2)} = \frac{e^2}{2^4 \pi^2} (m_1 m_3^2 + m_2 m_3^2), \quad (20)$$

$$V_{1c}^{B(2)} = -\frac{1}{2^5} \nu^2 \left( 2I(m_1, m_2, m_1) + \frac{50}{3} I(m_2, m_2, m_2) \right) \phi^6, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} V_{1d}^{B(2)} = & \frac{1}{2} e^2 m_3 \left[ -\frac{1}{2^3 \pi^2} (m_1 m_3 + m_2 m_3) \right. \\ & + 2(m_1^2 + m_2^2) I(m_2, m_1, m_3) \\ & - \frac{2}{m_3^2} [K(m_2, m_1, m_3) + K(m_1, m_2, m_3) \\ & \left. - K(m_2, m_1, 0) - K(m_1, m_2, 0)] \right] \end{aligned} \quad (22)$$

$$V_{1e}^{B(2)} = e^4 \phi^2 \left[ \frac{3}{2^4 \pi^2} m_3 m_2 - 2J(m_3, m_3, m_2) + J(0, m_3, m_2) - 6m_3^2 I(m_3, m_3, m_2) + 3m_3^2 I(0, m_3, m_2) \right. \\ \left. - \frac{1}{m_3^2} [K(m_3, m_3, m_2) - K(m_3, 0, m_2) - K(0, m_3, m_2) + K(0, 0, m_2)] \right]. \quad (23)$$

After using the results of Appendix A, where the functions  $I$ ,  $J$ , and  $K$  are defined, and for convenience introducing  $I_{div} = 1/\epsilon - \gamma + \ln 4\pi + 1$ , we have

$$V_{1a}^{B(2)} = \frac{1}{2^{10} \pi^2} \nu^2 (29 + 3\sqrt{5}) \phi^6, \quad (24)$$

$$V_{1b}^{B(2)} = \frac{1}{2^5 \sqrt{2} \pi^2} e^6 \sqrt{\nu} (1 + \sqrt{5}) \phi^6, \quad (25)$$

$$V_{1c}^{B(2)} = \frac{1}{2^9 3 \pi^2} \nu^2 \phi^6 \left[ 6 \ln(2 + \sqrt{5}) + 56 \ln\left(\sqrt{\frac{\nu}{8}}\right) + 50 \ln 3 + 25 \ln 5 \right] + \frac{7}{2^6 3 \pi^2} \nu^2 \phi^6 \left[ \ln\left(\frac{\phi^2}{\mu}\right) - \frac{1}{2} I_{div} \right], \quad (26)$$

$$V_{1d}^{B(2)} = \frac{1}{2^5 \pi^2} \phi^6 \left[ -\sqrt{\frac{\nu}{8}} e^6 - \sqrt{\frac{5\nu}{8}} e^6 + \left( 3e^8 - \frac{3}{2} \nu e^4 + \frac{1}{4} \nu^2 \right) \ln\left(\sqrt{\frac{\nu}{8}} + \sqrt{\frac{5\nu}{8}} + e^2\right) + \frac{\sqrt{5}}{8} \nu e^4 - \frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{2}} \nu^{3/2} e^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{4\sqrt{2}} \nu^{3/2} e^2 - \frac{1}{4} \nu^2 \ln(1 + \sqrt{5}) - \frac{1}{4} \nu^2 \ln\left(\sqrt{\frac{\nu}{8}} + 2\pi^2 \nu^2\right) + \frac{1}{2^5 \pi^2} \phi^6 \left[ \ln\left(\frac{\phi^2}{\mu}\right) - \frac{1}{2} I_{div} \right] \left( -\frac{3}{2} \nu e^4 + e^8 \right) \right] \quad (27)$$

and

$$V_{1e}^{B(2)} = -\frac{1}{2^7 \pi^2} \phi^6 \left[ -20e^6 \sqrt{\frac{5\nu}{8}} + 10\nu \ln\left(2e^2 + \sqrt{\frac{5\nu}{8}}\right) e^4 + 12e^8 + 20 \ln\left(e^2 + \sqrt{\frac{5\nu}{8}}\right) e^8 - 5 \ln\left(e^2 + \sqrt{\frac{5\nu}{8}}\right) e^4 \nu \right. \\ \left. - 48e^8 \ln\left(2e^2 + \sqrt{\frac{5\nu}{8}}\right) - \frac{5}{4} e^4 \nu - \frac{5^2}{2^5} \ln\left(2e^2 + \sqrt{\frac{5\nu}{8}}\right) \nu^2 + \frac{5^2}{2^4} \ln\left(e^2 + \sqrt{\frac{5\nu}{8}}\right) \nu^2 - \frac{5^2}{2^6} \nu^2 \ln(5) - \frac{5^2}{2^5} \nu^2 \ln\left(\sqrt{\frac{\nu}{8}}\right) \right] \\ + \frac{1}{2^5 \pi^2} \phi^6 \left[ \ln\left(\frac{\phi^2}{\mu}\right) - \frac{1}{2} I_{div} \right] \left( -\frac{5}{4} e^4 \nu + 7e^8 \right). \quad (28)$$

Collecting all these two-loop contributions we obtain

$$V^{B(2)} = X_b(e, \nu, \epsilon) \phi^6 + Z_b(e, \nu) \phi^6 \ln\left(\frac{\phi}{\sqrt{\mu}}\right), \quad (29)$$

with  $X_b(e, \nu, \epsilon)$  standing for the sum of all coefficients of  $\phi^6$  in Eqs. (24)–(28) and

$$Z_b(e, \nu) = \frac{1}{8 \pi^2} \left( 4e^8 - \frac{11}{8} e^4 \nu + \frac{7}{12} \nu^2 \right). \quad (30)$$

From Eqs. (7), (11), and (29) we can write the regularized effective potential up to two loops (with a counterterm  $C$  included) as

$$V_{reg}^B = Z_b \phi^6 \ln(\phi e^{Y_b/Z_b} / \sqrt{\mu}), \quad (31)$$

where  $Y_b(e, \nu)$  is the constant

$$Y_b(e, \nu, \epsilon) = \frac{\nu}{48} - \frac{1+5\sqrt{5}}{2^{13/2} 3 \pi} \nu^{3/2} - \frac{e^6}{12\pi} + X_b(e, \nu, \epsilon) + \frac{C}{48}. \quad (32)$$

The parameters  $\mu$  and  $C$  can be eliminated by imposing the condition

$$\left. \frac{dV_{ren}^B}{d\phi} \right|_{\phi=v} = 0, \quad (33)$$

where  $v$  is an arbitrary non-null parameter. The resulting potential is

$$V_{ren}^B = Z_b \phi^6 \left( \ln \frac{\phi}{v} - \frac{1}{6} \right) \quad (34)$$

and  $\phi=v$  is a local minimum (vacuum) of this effective potential, if the generated squared mass of the scalar field

$$m_\phi^2 = \frac{d^2 V_{ren}^B}{d\phi^2} \Big|_{\phi=v} = 6Z_b v^4 \quad (35)$$

is positive, which means  $Z_b > 0$ . We will choose  $Z_b$  through the condition

$$\frac{d^6 V_{ren}^B}{d\phi^6} \Big|_{\phi=v} = 15\nu = \frac{d^6 V_{tree}^B}{d\phi^6}, \quad (36)$$

which implies

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{548}{5} Z_b = \frac{137}{10\pi^2} \left( 4e^8 - \frac{11}{8}e^4\nu + \frac{7}{12}\nu^2 \right) \\ &\approx 1.39 \left( 4e^8 - \frac{11}{8}e^4\nu + \frac{7}{12}\nu^2 \right). \end{aligned} \quad (37)$$

The solution of this equation for both  $\nu$  and  $e^2$  in the perturbative regime ( $\nu$  and  $e^2 \ll 1$ ) is given by

$$\nu \approx \frac{274}{5\pi^2} e^8 + \mathcal{O}(e^{12}), \quad (38)$$

and in the leading approximation the effective potential and the generated squared mass result as

$$V_{ren}^B(\phi) = \frac{e^8}{2\pi^2} \phi^6 \left( \ln \frac{\phi}{v} - \frac{1}{6} \right), \quad (39)$$

$$m_\phi^2 = \frac{d^2 V_{ren}^B}{d\phi^2} \Big|_{\phi=v} = \frac{3}{\pi^2} e^8 v^4 > 0. \quad (40)$$

The ratio of this mass to the induced squared mass of  $A_\mu$ , that is,  $m_A^2 \approx m_3^2(\phi=v) = e^4 v^4$ , gives  $m_\phi^2/m_A^2 \approx 3e^4/\pi^2$ .

Summarizing, the CW mechanism is operative due to the two-loop radiative corrections, that is, in this approximation a nontrivial vacuum is induced and masses for the boson and CS fields are generated. Similarly to what happens in four dimensions, no symmetry breakdown occurs in the model of a single scalar field in self-interaction. Indeed, by making  $e=0$  in Eq. (37) we get  $\nu=120\pi^2/959 \approx 1.23$  and thus out of the perturbative regime of validity of the calculations.

The two-loop effective potential for the scalar/CS model was previously calculated in [14], using dimensional regularization. As shown by the authors, in that regularization scheme, the extension out of 2+1 dimensions is not enough to regularize the model; it also becomes necessary to introduce in the Lagrangian an extra regularization term, a Maxwell-like term  $-(a/4)F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ , depending on the pa-

rameter  $a$ . No trouble is found when making the regulators  $\epsilon$  and  $a$  go to zero after the renormalization in the calculation of the effective potential. This is not true in the calculation of the renormalization group parameters (see the discussion in Sec. IV).

### III. ADDING FERMIONS TO THE MODEL

Many interesting phenomena in planar physics, which have the CS model as an effective theory, also involve fermionic particles. Since the advent of the CS field theory [15] a vast literature (see [16] and the references therein) on the subject has appeared, but the effect of fermions on the effective potential for a model like (2) does not seem to have been studied. In this section we will extend the model (2), by including a Dirac fermionic field interacting with all the other fields. This is done by adding to Eq. (2) the following Lagrangian density:

$$\mathcal{L}_{Dirac} = i\bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu)\psi - \frac{\alpha}{2}\varphi_i\varphi_i\bar{\psi}\psi, \quad (41)$$

where  $\psi$  is a two-component massless Dirac field that represents a particle and its antiparticle with the same spin projection. The  $\gamma^\mu$  matrices were chosen as  $(\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2) = (\sigma^3, i\sigma^1, i\sigma^2)$ , where  $\sigma^\alpha$  are the Pauli matrices. In addition to the minimal interaction with the CS field, the fermion (charge  $q$ ) also couples to the scalar field through a "Yukawa" term with the coupling constant  $\alpha$ . Like the parameters of the purely bosonic model, these new coupling constants  $\alpha$  and  $q$  are also dimensionless.

After shifting the scalar field  $\varphi \rightarrow \varphi + \phi$  as in Sec. II we get

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{L}}_{Dirac} &= i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi + q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi \\ &- \frac{\alpha\phi^2}{2}\bar{\psi}\psi - \frac{\alpha}{2}\varphi_i\varphi_i\bar{\psi}\psi - \alpha\phi\cdot\varphi\bar{\psi}\psi. \end{aligned} \quad (42)$$

The fermion propagator is  $S(p) = i/(\gamma^\mu p_\mu - m_4)$  with  $m_4 = \alpha\phi^2/2$ , and the interaction vertices are given by

$$\text{Trilinear } A_\mu\bar{\psi}\psi \text{ vertex} \leftrightarrow iq\gamma_\mu, \quad (43)$$

$$\text{Trilinear } \varphi_i\bar{\psi}\psi \text{ vertex} \leftrightarrow -i\alpha\phi\bar{\psi}\psi, \quad (44)$$

$$\text{Quadrilinear } \varphi_i\varphi_j\bar{\psi}\psi \text{ vertex} \leftrightarrow -i\frac{\alpha}{2}\delta_{ij}. \quad (45)$$

The one-loop contribution to the effective potential is

$$V^{F(1)} = i \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \ln \det(\gamma^\mu p_\mu - m_4) = \frac{1}{6\pi} m_4^3 = \frac{\alpha^3}{48\pi} \phi^6, \quad (46)$$

and the new two-loop contributions are represented by the diagrams in Fig. 2. The results are (see Appendix B)

$$V_{2a}^{F(2)} = -\frac{\alpha}{4\pi^2} (m_4^2 m_1 + m_4^2 m_2), \quad (47)$$

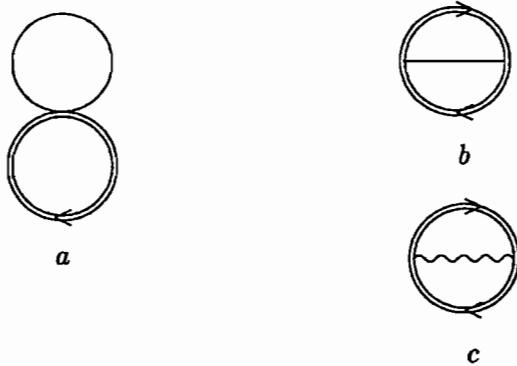


FIG. 2. Additional diagrams contributing to the two-loop approximation to the effective potential when fermions are present. Double lines represent the fermion field propagator.

$$V_{2b}^{F(2)} = \phi^2 \frac{\alpha^2}{2} \left( -\frac{1}{8\pi^2} m_4 m_2 + J(m_4, m_2, m_4) + 4m_4^2 I(m_4, m_2, m_4) \right), \quad (48)$$

and

$$V_{2c}^{F(2)} = 2q^2 \left[ -\frac{1}{16\pi^2} m_4^3 + (m_3^2 m_4 - m_4^2 m_3) I(m_4, m_3, m_4) + \frac{m_3}{2} J(m_4, m_3, m_4) - \frac{1}{m_3} [K(m_4, 0, m_4) - K(m_4, m_3, m_4)] \right]. \quad (49)$$

With the aid of the formulas in the Appendixes we have

$$V_{2a}^{F(2)} = -\frac{\alpha^3}{16\pi^2} \phi^6 \left( \sqrt{\frac{\nu}{8}} + \sqrt{\frac{5\nu}{8}} \right), \quad (50)$$

$$\begin{aligned} V_{2b}^{F(2)} = & -\frac{\alpha^2}{128\pi^2} \phi^6 \left[ 4\alpha \sqrt{\frac{5\nu}{8}} - \frac{20\nu}{8} \ln \left( \alpha + \sqrt{\frac{5\nu}{8}} \right) \right. \\ & \left. - \alpha^2 + 4\alpha^2 \ln \left( \alpha + \sqrt{\frac{5\nu}{8}} \right) \right] \\ & - \frac{1}{32\pi^2} \phi^6 \left[ \ln \left( \frac{\phi^2}{\mu} \right) - \frac{1}{2} I_{div} \right] \left( -\frac{5\nu}{8} \alpha^2 + \alpha^4 \right) \end{aligned} \quad (51)$$

and

$$\begin{aligned} V_{2c}^{F(2)} = & \frac{1}{128\pi^2} q^2 \phi^6 \left[ -2\alpha^3 + 4e^6 \ln(\alpha + e^2) + e^2 \alpha^2 \right. \\ & \left. - 8e^4 \alpha \ln(\alpha + e^2) + 4e^2 \alpha^2 \ln(\alpha + e^2) - 4\alpha e^4 \right] \\ & + \frac{q^2}{32\pi^2} \phi^6 \left[ \ln \left( \frac{\phi^2}{\mu} \right) - \frac{1}{2} I_{div} \right] (e^6 - 2e^4 \alpha + e^2 \alpha^2). \end{aligned} \quad (52)$$

Thus the fermion sector contributes to the effective potential with

$$V^F = X_f \phi^6 + Z_f \phi^6 \ln \left( \frac{\phi}{\sqrt{\mu}} \right), \quad (53)$$

where  $X_f$  is the sum of the coefficients of the terms  $\phi^6$  in the previous expressions and  $Z_f$  is the sum of the coefficients of the terms  $\phi^6 \ln(\phi/\sqrt{\mu})$ , which results in

$$Z_f(q, \alpha, \nu) = \frac{1}{16\pi^2} \left( \frac{5\nu}{8} \alpha^2 - \alpha^4 + q^2 e^6 - 2q^2 e^4 \alpha + q^2 e^2 \alpha^2 \right). \quad (54)$$

The complete effective potential is the sum of Eqs. (31) and (53) and is given by

$$V_{reg} = Z \phi^6 \ln \left( \frac{\phi e^{Y/Z}}{\sqrt{\mu}} \right), \quad (55)$$

where  $Y = Y_b + X_f$  and

$$\begin{aligned} Z = Z_b + Z_f = & \frac{1}{8\pi^2} \left( 4e^8 - \frac{11}{8} e^4 \nu + \frac{7}{12} \nu^2 + \frac{5}{16} \nu \alpha^2 \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \alpha^4 + \frac{1}{2} q^2 e^2 (e^2 - \alpha)^2 \right). \end{aligned} \quad (56)$$

After using the vanishing of the first derivative of  $V(\phi)$  in  $\phi = \nu$ , it can be written as

$$V_{ren}(\phi) = Z \phi^6 \left[ \ln \left( \frac{\phi}{\nu} \right) - \frac{1}{6} \right]. \quad (57)$$

As in the pure bosonic model, the positivity of the induced squared mass requires that  $Z > 0$ , and as there we choose to fix it through the condition (36), which leads to an equation similar to (37) for  $Z$ . In the perturbative regime (that is,  $\nu$ ,  $e$ ,  $q$ , and  $\alpha \ll 1$ ), this equation implies that the second, third, and fourth terms on the right hand side of Eq. (56) are infinitesimals of higher order and can be dropped, leaving the equation

$$\nu = \frac{548}{5} Z \approx \frac{137}{10\pi^2} \left( 4e^8 + \frac{1}{2} q^2 e^2 (e^2 - \alpha)^2 - \frac{1}{2} \alpha^4 \right). \quad (58)$$

Dynamical symmetry breakdown and mass generation occur if the condition  $4e^8 + \frac{1}{2}q^2e^2(e^2 - \alpha)^2 > \frac{1}{2}\alpha^4$  is satisfied, which is true for a continuum of values of the coupling constants, their magnitudes chosen as  $\nu \sim e^8, q^8, \alpha^4 \ll 1$ . Some particular cases are worthy of mention. (1) Choosing  $\alpha = e^2$ , we still have the solution  $\nu \approx (137/10\pi^2)(\frac{7}{2}e^8)$ , but the result becomes independent of the charge of the fermion field. (2) Dropping the Yukawa interaction (by making  $\alpha = 0$ ), we get  $\nu \approx (137/10\pi^2)(4e^8 + q^2e^6/2)$ , showing that the fermion indirect interaction with the scalar field (mediated by its interaction with the CS field) reinforces the symmetry breakdown. (3) For  $e = q = 0$ , that is, for the model of a boson in self-interaction and interacting with a fermion field through a Yukawa term, we see from Eq. (58) that no symmetry breakdown is possible; this result is in agreement with the conclusions of [12] in which (in addition to other possibilities) a similar model with a Dirac two-component fermionic field and a real scalar field was considered. (4) Symmetry breakdown does not occur if we take only  $e = 0$  leaving the scalar field indirectly interacting with the CS through its coupling with the fermion field.

#### IV. RENORMALIZATION GROUP ANALYSIS

In this section some renormalization group aspects of the previous solution for the effective potential will be discussed. The regularized effective potential satisfies the renormalization group equation

$$\left[ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_\nu \frac{\partial}{\partial \nu} + \beta_e \frac{\partial}{\partial e} + \beta_q \frac{\partial}{\partial q} + \beta_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \gamma_\phi \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right] V_{reg}(\mu, \epsilon, \nu, e, q, \alpha, \phi) = 0, \quad (59)$$

where

$$\beta_\nu = \mu \frac{d\nu}{d\mu}, \quad \beta_e = \mu \frac{de}{d\mu}, \quad \beta_q = \mu \frac{dq}{d\mu}, \quad \beta_\alpha = \mu \frac{d\alpha}{d\mu}, \quad (60)$$

and

$$\gamma_\phi = \frac{\mu}{2Z_\phi} \frac{dZ_\phi}{d\mu} \quad (61)$$

are, respectively, the coupling constant beta functions and the scalar field anomalous dimension, and  $Z_\phi$  is the wave function renormalization constant of the scalar field.

As mentioned before, dimensional reduction in 2+1 dimensions automatically removes the divergences of the one-loop graphs. Thus nontrivial renormalization group parameters are obtained only when the two-loop approximation is considered. By applying the operator inside the brackets of Eq. (59) to the regularized expression (55), we get the following result:

$$\left( -\frac{Z}{2} + \frac{\beta_\nu^{(2)}}{48} - \frac{6\nu}{48} \gamma_\phi^{(2)} \right) \phi^6 = 0, \quad (62)$$

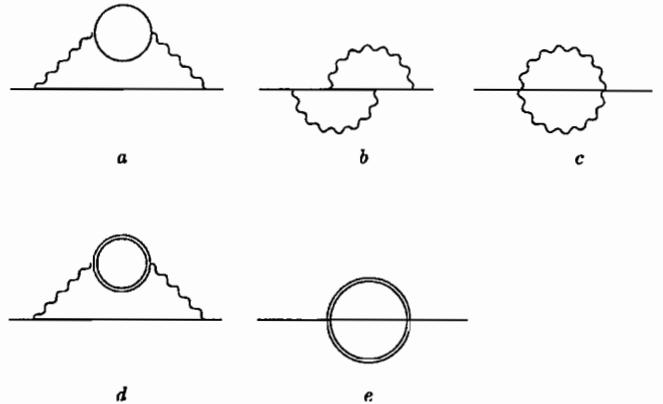


FIG. 3. Divergent diagrams contributing to the two-loop approximation to the two-point function of the scalar field.

where the superscript (2) indicates the loop order of the corresponding function. Thus

$$\beta_\nu^{(2)} = 24Z + 6\nu\gamma_\phi^{(2)}, \quad (63)$$

with  $Z$  given by Eq. (56).

To obtain  $\gamma_\phi^{(2)}$  we have to calculate  $Z_\phi$  up to two loops. This can be done by considering the model in its symmetric phase where all fields are massless. The Feynman diagrams which give nontrivial contributions to  $Z_\phi$  are given in Fig. 3. Three of them were computed in Ref. [7] and the results are quoted in Appendix C where the calculation of the remaining ones is also summarized. From Eq. (C5) we get

$$\gamma_\phi^{(2)} = -\frac{1}{48\pi^2} [7e^4 + 2(q^2e^2 - \alpha^2)]. \quad (64)$$

By replacing this expression in Eq. (63) we finally have

$$\beta_\nu^{(2)} = \frac{1}{\pi^2} \left[ \frac{7}{4} \nu^2 + e^4 (-5\nu + 12e^4) + \frac{\alpha^2}{2} \left( \frac{17}{8} \nu - 3\alpha^2 \right) + \frac{q^2e^2}{2} [(\alpha - e^2)^2 - \nu] \right]. \quad (65)$$

For the bosonic model ( $q = 0 = \alpha$ ) this yields

$$\gamma_\phi^{(2)} = -\frac{7}{48\pi^2} e^4, \quad (66)$$

$$\beta_\nu^{(2)} = \frac{7}{4\pi^2} \left( \nu^2 - \frac{20}{7} \nu e^4 + \frac{48}{7} e^8 \right), \quad (67)$$

confirming the results obtained in [5] by using soft BPHZ [4] and also in [7] by using dimensional reduction. These results are also in qualitative agreement with those of [8] but, unlike what happens with the effective potential, disagree with those of [14] (which in our notation are  $\gamma_\phi = 0$  and  $\beta_\nu = 7/4\pi^2\nu^2$ ) where dimensional regularization with minimal subtraction was used. However, as discussed in [14], dimensional regularization with minimal subtraction is not pertur-

batively consistent for the pure CS model (some of the  $\beta$  functions diverge when the regulating Maxwell term is removed). On general grounds, the authors of [14] argue that  $\gamma_\varphi$  and  $\beta_\nu$  should explicitly depend on  $e^2$ , a characteristic present in our results but not in the ones obtained by the use of dimensional regularization with a minimal subtraction scheme.

An interesting property of the  $\beta_\nu$  function given in Eq. (67) is the fact that it does not vanish for  $\nu=0$ . From the knowledge that  $e$  does not change with the renormalization scale (in [7] we showed that  $\beta_e^{(2)}=0$ ) we conclude that  $\gamma_\varphi$  is a constant and so  $\phi(\mu)=(\mu_0/\mu)^{\gamma_\varphi}\phi(\mu_0)$  and the equation  $\mu d\nu/d\mu=\beta_\nu$  can immediately be integrated, resulting in

$$\frac{2\nu-ce^4}{e^4b} = \left[ \frac{(2\nu_0-ce^4)/e^4b + \tan[a e^4 \ln(\mu/\mu_0)]}{1 - [(2\nu_0-ce^4)/e^4b] \tan[a e^4 \ln(\mu/\mu_0)]} \right], \quad (68)$$

where  $a = \sqrt{59}/(2\pi^2) \approx 0.39$ ,  $b = 4\sqrt{59}/7 \approx 4.39$ , and  $c = 20/7 \approx 2.86$ .

The effective potential is invariant under renormalization group transformations, i.e.,  $V(\phi, \nu, e, \mu) = V(\phi_0, \nu_0, e, \mu_0)$ . Therefore, as the above solution for  $\nu$  is regular at  $\nu_0=0$  ( $\beta_\nu \neq 0$  for  $\nu=0$ ), then by conveniently choosing  $\mu_0$  we get  $V(\phi, \nu, e, \mu) = V(\phi_0, 0, e, \mu_0)$ . This means that the effective potential in the presence of the sextuple self-interaction can be obtained from the simpler model in which the boson interacts only with the CS field.

From the above expressions for  $V$  and  $\phi$  we also have

$$\frac{dV}{d\phi}(\phi, \nu, e, \mu) = \left( \frac{\mu}{\mu_0} \right)^{\gamma_\varphi} \frac{dV}{d\phi_0}(\phi_0, \nu_0, e, \mu_0), \quad (69)$$

so that starting at  $\phi_0=\nu$  and  $\nu_0 \approx (274/5\pi^2)e^4$ , which implies that  $dV/d\phi=0$  for a certain value of  $\mu_0$ , one can go to the values of  $\nu$  specified by Eq. (68) and  $\phi(\mu) = (\mu_0/\mu)^{\gamma_\varphi}\nu$  which due to Eq. (69) also corresponds to  $dV/d\phi=0$ . This shows that the condition (38) for dynamical symmetry breakdown can be relaxed; the only restriction to get a symmetry breakdown is, in fact, that all the coupling constants be small.

A similar analysis for the complete model, i.e., with the inclusion of the fermion fields, would require a lot more calculations ( $\beta_q$ ,  $\beta_\alpha$ , etc.) and we do not pursue it here. However, some observations are in order. (1) Differently from the other couplings, the Yukawa coupling increases the anomalous dimension of  $\phi$  [see Eq. (64)]. (2) As for the bosonic model,  $\beta_\nu$  does not vanish for  $\nu=0$ , and as above the effective potential can be obtained from the simpler model with  $\nu=0$ . (3) As in the purely bosonic model, it is also expected that the constraint (58) on  $\nu$  can be relaxed, the only restriction being that  $\nu \ll 1$  (as it must for the other coupling constants).

## V. CONCLUSIONS

In this paper we calculated the effective potential, up to two loops, for a (2+1)-dimensional model composed of an interacting massless scalar field, a massless fermion field in-

teracting with the scalar field through a Yukawa term, and a CS gauge field, minimally coupled to the scalar and fermionic fields. Like the CW model in 3+1 dimensions, it involves only massless parameters and is classically invariant under scale transformations, which makes it a possible candidate for dynamical symmetry breakdown. As we verified, dynamical symmetry breakdown actually takes place, but unlike the original model of CW, in which this effect is already manifest in one-loop corrections, here it only shows up starting at two loops. For particular values of the couplings, our effective potential coincides with those found in the literature: by discarding the fermion contribution, it agrees with the previous calculations of [14] for the same model without fermions; if instead we drop the contributions involving the CS field, it agrees with the results of [12] for a model without the gauge field.

We also calculated the renormalization group functions  $\beta_\nu$  and  $\gamma_\varphi$  for the extended model. For the pure bosonic (sub)model they agree with our previous calculation using other regularization/renormalization techniques, but disagree with the results of [14]. It would be interesting to compute the other renormalization group functions of the extended model.

## ACKNOWLEDGMENTS

This work was partially supported by Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) and Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

## APPENDIX A: USEFUL INTEGRALS

At two loops the following integrals [14] appear ( $d^D p = \mu^\epsilon d^{3-\epsilon} p$ ):

$$I(m_1, m_2, m_3)$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D}} \frac{1}{((p+q)^2 - m_1^2)(q^2 - m_2^2)(p^2 - m_3^2)} \\ &= \frac{1}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi + 1 \right) - \frac{1}{16\pi^2} \ln \left( \frac{m_1 + m_2 + m_3}{\mu} \right), \end{aligned} \quad (A1)$$

$$K(m_1, m_2, m_3)$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D}} \frac{(p \cdot q)^2}{((p+q)^2 - m_1^2)(q^2 - m_2^2)(p^2 - m_3^2)} \\ &= \frac{1}{64\pi^2} [m_1^2(m_1 m_2 + m_1 m_3 - m_2 m_3) \\ &\quad - m_1(3m_2^3 + 3m_3^3 + m_2^2 m_3 + m_2 m_3^2) \\ &\quad + (m_2^2 + m_3^2)m_2 m_3] \\ &\quad + \frac{1}{4}(m_1^2 - m_2^2 - m_3^2)^2 I(m_1, m_2, m_3), \end{aligned} \quad (A2)$$

and

$$\begin{aligned} J(m_1, m_2, m_3) &= \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D}} \frac{2(p \cdot q)}{((p+q)^2 - m_1^2)(q^2 - m_2^2)(p^2 - m_3^2)} \\ &= (m_1^2 - m_2^2 - m_3^2) I(m_1, m_2, m_3) \\ &\quad - \frac{1}{16\pi^2} [m_2 m_3 - m_1 m_2 - m_1 m_3]. \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

## APPENDIX B: TWO-LOOP DIAGRAMS

The analytic expressions for the two-loop vacuum diagrams contributing to the effective potential shown in Figs. 1 and 2 are

$$\begin{aligned} V_{1a}^{B(2)} &= \frac{\nu}{8} \phi^2 \left( \frac{\delta_{ij}}{2} + 2\hat{\phi}_i \hat{\phi}_j \right) \delta_{kl} \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D}} \\ &\quad \times \{\Delta_{ij}(p) \Delta_{kl}(q) + \Delta_{jl}(p) \Delta_{ki}(q) + \Delta_{jk}(p) \Delta_{li}(q)\}, \end{aligned} \quad (\text{B1})$$

$$V_{1b}^{B(2)} = -\frac{e^2}{2} \delta_{ij} g_{\mu\nu} \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D}} \Delta_{ij}(p) \Delta^{\mu\nu}(q), \quad (\text{B2})$$

$$\begin{aligned} V_{1c}^{B(2)} &= -i \frac{\nu^2 \phi^6}{32} \hat{\phi}_i \left( \delta_{jk} + \frac{2}{3} \hat{\phi}_j \hat{\phi}_k \right) \\ &\quad \times \hat{\phi}_l \left( \delta_{mn} + \frac{2}{3} \hat{\phi}_m \hat{\phi}_n \right) \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D}} \\ &\quad \times \{\Delta_{il}(q) [\Delta_{jm}(p) \Delta_{kn}(p+q) + \Delta_{jn}(p) \Delta_{km}(p+q)] \\ &\quad + \Delta_{im}(q) [\Delta_{jl}(p) \Delta_{kn}(p+q) + \Delta_{jn}(p) \Delta_{kl}(p+q)] \\ &\quad + \Delta_{in}(q) [\Delta_{jm}(p) \Delta_{kl}(p+q) + \Delta_{jl}(p) \Delta_{km}(p+q)]\}, \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

$$\begin{aligned} V_{1d}^{B(2)} &= i \frac{e^2}{4} \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D}} (2q+p)^\mu (2q+p)^\nu \epsilon^{ij} \epsilon^{kl} \Delta_{\nu\mu}(p) \\ &\quad \times [\Delta_{li}(q) \Delta_{jk}(p+q) - \Delta_{ki}(q) \Delta_{jl}(p+q)], \end{aligned} \quad (\text{B4})$$

$$\begin{aligned} V_{1e}^{B(2)} &= -ie^4 \phi^2 \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D}} \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j g_{\mu\nu} g_{\sigma\rho} \\ &\quad \times \Delta^{\sigma\mu}(p+q) \Delta_{ji}(p) \Delta^{\nu\rho}(q), \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

$$V_{2a}^{F(2)} = -\frac{\alpha}{2} \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D}} \text{tr}[S(p) \Delta_{ii}(q)], \quad (\text{B6})$$

$$V_{2b}^{F(2)} = i \frac{(\alpha \phi)^2}{2} \hat{\phi}_i \hat{\phi}_j \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D}} \text{tr}[S(p) S(p+q) \Delta_{ij}(q)], \quad (\text{B7})$$

$$V_{2c}^{F(2)} = i \frac{q^2}{2} \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D}} \text{tr}[S(p) \gamma^\mu S(p+q) \gamma^\nu \Delta_{\nu\mu}(q)]. \quad (\text{B8})$$

## APPENDIX C: WAVE FUNCTION RENORMALIZATION OF THE $\varphi$ FIELD UP TO TWO LOOPS

As known in three dimensions the use of dimensional reduction removes the divergences of one-loop graphs. Therefore the  $\varphi$  field renormalization constant receives non-trivial contributions only starting at two loops.

In two loops the nonvanishing contributions to  $Z_\varphi$  come from the graphs depicted in Fig. 3. The first three graphs Figs. 3(a)–3(c) were calculated in [7] and here we just quote the result

$$Z_{\varphi(a)-(c)}^{(2)} = \frac{7e^4}{48\pi^2} \frac{1}{\epsilon}. \quad (\text{C1})$$

For the remaining graphs, a direct calculation furnishes the following.

Graph in Fig. 3(d)

$$\begin{aligned} &= -i 4 e^2 \epsilon^{\mu\nu\rho} \epsilon^{\alpha\beta\sigma} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k_\rho k_\sigma p_\nu p_\alpha \pi_{\mu\beta}(k)}{(k^2)^2 (p+k)^2} \\ &= -i \frac{e^2 q^2 p^2}{24\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \text{finite terms}, \end{aligned} \quad (\text{C2})$$

where  $\pi_{\mu\beta}$ , given by the upper loop in Fig. 3(d), is the fermion contribution to the polarization tensor

$$\pi_{\mu\beta}(k) = -\frac{q^2}{16} (g_{\mu\beta} k^2 - k_\mu k_\beta) \frac{1}{(k^2)^{2-D/2}}, \quad (\text{C3})$$

and

Graph in Fig. 3(e)

$$\begin{aligned} &= \alpha^2 \int \frac{d^D k d^D q}{(2\pi)^{2D}} \text{tr}[S(q) S(p+q+k)] \Delta(k) \\ &= -2i \alpha^2 \int \frac{d^D k d^D q}{(2\pi)^{2D}} \frac{q^2 + q \cdot (k+p)}{q^2 k^2 (p+k+q)^2} \\ &= i \frac{\alpha^2 p^2}{96\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \text{finite terms}. \end{aligned} \quad (\text{C4})$$

Thus up to two loops the total wave function renormalization of the  $\varphi$  field is

$$Z_\varphi = 1 + \frac{1}{24\pi^2} \left( \frac{7e^4}{2} + e^2 q^2 - \frac{\alpha^2}{4} \right) \frac{1}{\epsilon}. \quad (\text{C5})$$

- [1] *The Quantum Hall Effect*, Graduate Texts in Contemporary Physics, edited by R.E. Prange and S.M. Girvin (Springer-Verlag, Berlin, 1990).
- [2] G. 't Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. **B44**, 189 (1972); G. 't Hooft, *ibid.* **B61**, 465 (1973).
- [3] W. Zimmermann, in *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, 1970 Brandeis Summer Institute in Theoretical Physics, edited by S. Deser, M. Grisaru, and H. Pendleton (MIT Press, Cambridge, 1970); J.H. Lowenstein, in *Renormalization Theory*, Proceedings of the International School Ettore Majorana, edited by G. Velo and A.S. Wightman (Reidel, Dordrecht, 1976).
- [4] M. Gomes and B. Schroer, Phys. Rev. D **10**, 3525 (1974); J.H. Lowenstein, Commun. Math. Phys. **47**, 53 (1976); J.H. Lowenstein and P.K. Mitter, Ann. Phys. (N.Y.) **105**, 138 (1977).
- [5] L.C. de Albuquerque, M. Gomes, and A.J. da Silva, Phys. Rev. D **62**, 085005 (2000).
- [6] G.W. Semenoff, P. Sodano, and Y.S. Wu, Phys. Rev. Lett. **62**, 715 (1989); W. Chen, G.W. Semenoff, and Y.S. Wu, Mod. Phys. Lett. A **5**, (1990); W. Chen, Phys. Lett. B **251**, 415 (1990); W. Chen, G.W. Semenoff, and Y.S. Wu, Phys. Rev. D **46**, 5521 (1992).
- [7] V.S. Alves, M. Gomes, S.L.V. Pinheiro, and A.J. da Silva, Phys. Rev. D **61**, 065003 (2000).
- [8] L.V. Avdeev, G.V. Grigoryev, and D.I. Kazakov, Nucl. Phys. **B382**, 561 (1992).
- [9] C.P. Martin, Phys. Lett. B **241**, 513 (1990); G. Giavarini, C.P. Martin, and F. Ruiz Ruiz, Nucl. Phys. **B381**, 222 (1992); M. Chaichian and W.F. Chen, Phys. Lett. B **457**, 118 (1999).
- [10] Alex G. Dias, M.Sc. thesis, Instituto de Física da Universidade de São Paulo, 2002.
- [11] S. Coleman and E. Weinberg, Phys. Rev. D **7**, 1888 (1973).
- [12] D.G.C. McKeon and K. Nguyen, Phys. Rev. D **60**, 085009 (1999); F.A. Dilkes, D.G.C. McKeon, and K. Nguyen, *ibid.* **57**, 1159 (1998).
- [13] R. Jackiw, Phys. Rev. D **9**, 1686 (1974).
- [14] P.-N. Tan, B. Tekin, and Y. Hosotani, Nucl. Phys. **B502**, 483 (1997); Phys. Lett. B **388**, 611 (1996).
- [15] J. Schonfeld, Nucl. Phys. **B185**, 157 (1991); S. Deser, R. Jackiw, and S. Templeton, Ann. Phys. (N.Y.) **140**, 372 (1982).
- [16] G.V. Dunne, in *Topological Aspects of Low-Dimensional Systems*, Les Houches Lectures 1998, hep-th/9902115.