

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física

Férmions em Teorias de Campos de Supercordas

Luciano Barosi de Lemos

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para obtenção do título de doutor em ciências.

Orientador:

Prof. Dr. Nathan Jacob Berkovits



Banca Examinadora

Prof. Dr. Élcio Abdalla (IFUSP)

Prof. Dr. Marcelo Otavio Caminha Gomes (IFUSP)

Prof. Dr. Vladimir Perchine (IFT)

Prof. Dr. Galen Mihaylov Sotkov (IFT)

INSTITUTO DE FÍSICA

Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3820 ex.1

São Paulo
2003



Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

530.14
L557 F
D
ex. 1

FICHA CATALOGRÁFICA

Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Lemos, Luciano Barosi de

Férmions em Teorias de Campos de Supercordas.
São Paulo, 2003.

Tese (Doutoramento) - Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Departamento de Física Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Nathan Jacob Berkovits
Área de Concentração: Física de Partículas Elementares

Unitermos: 1. Supersimetria;
2. Supercordas;
3. Teorias de Campos de Supercordas;
3. Teoria Conforme de Campos;
3. Táquion;

USP/IF/SBI-028/2003

Resumo

O objetivo deste trabalho é calcular a ação de teoria de campos de supercordas para os dois primeiros níveis de massa da supercorda, incluindo os dois setores de projeção GSO. Considerando uma corda tipo II-A na presença de uma D9-brana instável, calcula-se a ação para o táquion, o campo de gauge e os férmions $GSO(+)$ e $GSO(-)$. O trabalho é realizado usando o formalismo híbrido e usando-se a ação de campos de supercordas de Berkovits, que inclui o setor Ramond. Para tanto, inclui-se amplo material de revisão sobre teorias conformes e superconformes; supercordas RNS e formalismo híbrido e teorias de campos de supercordas. A construção de operadores de vértice $GSO(-)$ no formalismo híbrido é feita em detalhes. Considerações sobre a ação obtida e perspectivas futuras do trabalho são discutidas no final.

Abstract

The goal of this work is to compute the superstring field theory action contribution for the two first mass level of the superstring, including both GSO sectors. A type IIA superstring in the presence of an unstable non-BPS D9 brane is considered and the computation of the action for the Tachyon, Gauge Field and Massless fermions from $GSO(+)$ and $GSO(-)$ sectors is done. The main work is accomplished using the hybrid formalism and the superstring field theory action of Berkovits, including the Ramond Sector. This task is accomplished by including revision material thoroughly, for conformal and superconformal field theory, RNS superstrings, hybrid formalism and superstring field theory. Construction of physical $GSO(-)$ vertex operators is considered in detail. At the end, there's a discussion about the action for these fields and some future perspectives are considered.

*À Luiza,
Pelo seu sorriso, pela sua
existência, e nada mais!*

Índice

Índice	iv
Agradecimentos	vii
Advertência ao Leitor	ix
I Elementos	1
1 Introdução	3
2 Teoria Conforme de Campos	7
2.1 Invariância Conforme Clássica	8
2.2 Teorias Conformes de Campos em 2 dimensões	10
2.2.1 Invariância Conforme em 2 Dimensões	10
2.2.2 Quantização Radial	12
2.2.3 Expansão de Produtos de Operadores (OPE)	12
2.2.4 Álgebra de Virasoro	14
2.2.5 Espaço de Hilbert e Módulos de Verma	16
2.2.6 Bóson Livre	20
2.2.7 Férmion Livre	25
2.2.8 Tópicos de Invariância Modular	29
2.2.9 Bosonização	33
2.3 Teorias Superconformes de Campos	37
2.3.1 $N = 1$ Superconforme	38
2.3.2 $N = 2$ Superconforme	40
2.4 Nota Bibliográfica	43

3 Supercordas RNS	45
3.1 Corda Bosônica	46
3.1.1 Teoria clássica e suas simetrias	46
3.1.2 Quantização da Corda Bosônica	48
3.1.3 Quantização BRST	51
3.2 Supercordas	54
3.2.1 Ação e espectro	55
3.2.2 BRST, Picture e Operadores de Vértice	60
3.2.3 Compactificações	62
3.3 Nota Bibliográfica	66
4 Supercordas no Formalismo Híbrido	67
4.1 Ação para a Supercorda	68
4.2 Álgebra Superconforme $N = 2$ Torcida	72
4.2.1 Álgebra Superconforme $N = 4$	73
4.2.2 Condições para Operadores de Vértices Físicos	75
4.2.3 Operadores de Vértices Físicos	78
5 D-Branas	87
5.1 Supercordas Tipo I	88
5.2 D-Branas	89
5.3 D-Branas Não-BPS	93
5.4 Conjectura de Sen	97
II Teoria de Campos de Cordas	99
6 Teoria de Campos de Cordas Bosônicas	101
6.1 Ação de Witten	101
6.2 Interação de Ponto Médio	103
6.3 Cálculo da Ação - Um Exemplo	106
7 Teoria de Campos de Supercordas	109
III Férmions em Teoria de Campos de Supercordas	115
8 Motivação	117

9 Preliminares - Campos de Cordas	121
10 Cálculo da Ação de SSFT	125
Conclusão e Perspectivas	131
Apêndices	133
OPEs de Variáveis Híbridas mais utilizadas	135
Operadores de Vértice e algumas propriedades	136
Bibliografia	139
Índice Remissivo	144

Agradecimentos

Nel mezzo del cammin di nostra vita
mi ritrovai per una selva oscura,
ché la diritta via era smarrita.

Ahi quanto a dir qual era è cosa dura
esta selva selvaggia e aspra e forte
che nel pensier rinova la paura

INFERNO I 1-6

Encerram-se aqui cinco anos de um longo trabalho de doutoramento, culminando a minha formação como um Físico. Evidentemente este trabalho não teria sido levado a termo sem o inestimável auxílio de muitas pessoas. Julgo ser este o momento adequado de dar o devido crédito aqueles que me ajudaram nesta tarefa, desculpando-me de antemão pelas omissões.

Em primeiro lugar, tenho a obrigação de ressaltar a importância de quem mais agüentou o meu freqüente mau-humor, mais me deu forças e incentivo para continuar, que soube compreender e respeitar os diversos momentos difíceis que passamos juntos, alguém que sempre estava ali, ao alcance da mão, pronta para a acolhida e que me deu o mais valioso dos presentes - a preciosa Luiza. Obrigado, Sílvia! Pela paciência, força e coragem.

Agradeço especialmente também aos meus primos Alfredo e Fernando, que despertaram em mim a paixão pela ciência, em uma tarde especial há 16 anos. À Flávia, Edieh, Brenilde, Constantino, Lêucio e a memória de Renata, por me criarem dignamente. A Odete e Tadeu, por repetidos auxílios, sobretudo em meus estudos secundários.

Muitos amigos me ajudaram a prosseguir na Física e na conclusão desta tese, agradeço especialmente ao Cedric, companheiro há mais tempo do que posso lembrar, um verdadeiro irmão. Aos ocupantes da sala 307, Alessandro e Amílcar, por importantes discussões e apoio nos momentos mais difíceis.

Também agradeço ao Chopps, pelas agradáveis conversas regadas à boa cerveja.

Um carinhoso agradecimento às amigas Karina e Rita, por sua ajuda em diversos momentos.

Alguns amigos que se formaram na minha turma, Thiago, Matheus e Pedro e ao pessoal do IFT: Brenno, Cabelo, Dáfni, Gadelha, Érica, Cristina e Cristiane.

Algumas instituições também me ajudaram de diferentes formas. Agradeço à FAPESP - Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, pelo suporte financeiro; ao Abdus Salam International Centre of Theoretical Physics por me dar várias oportunidades de participar de excelentes reuniões científicas; ao Instituto de Física Teórica UNESP, onde parte do trabalho foi realizado; Ao Departamento de Física Matemática da USP, pelo ambiente acadêmico saudável onde finalizei esta tese. Um especial agradecimento a Amélia e Simone, pela sua solicitude.

Não posso deixar de agradecer ao O'Malleys e ao Finnegans Pub, lugares onde pude encontrar descanso e divertimento, sem os quais teria enlouquecido. Agradeço a AMBEV por manter no mercado a cerveja Serramalte, a melhor do Brasil e também a Morland Brewing Co. por fabricar a cerveja Old Speckeld Hen. Finalmente, obrigado Ali, por trazer a oldie para o Brasil.

Por fim, um agradecimento especial a Nathan Jacob Berkovits, por acolher-me no momento necessário e pelo inestimável auxílio e guia para a consecução de meu doutorado.

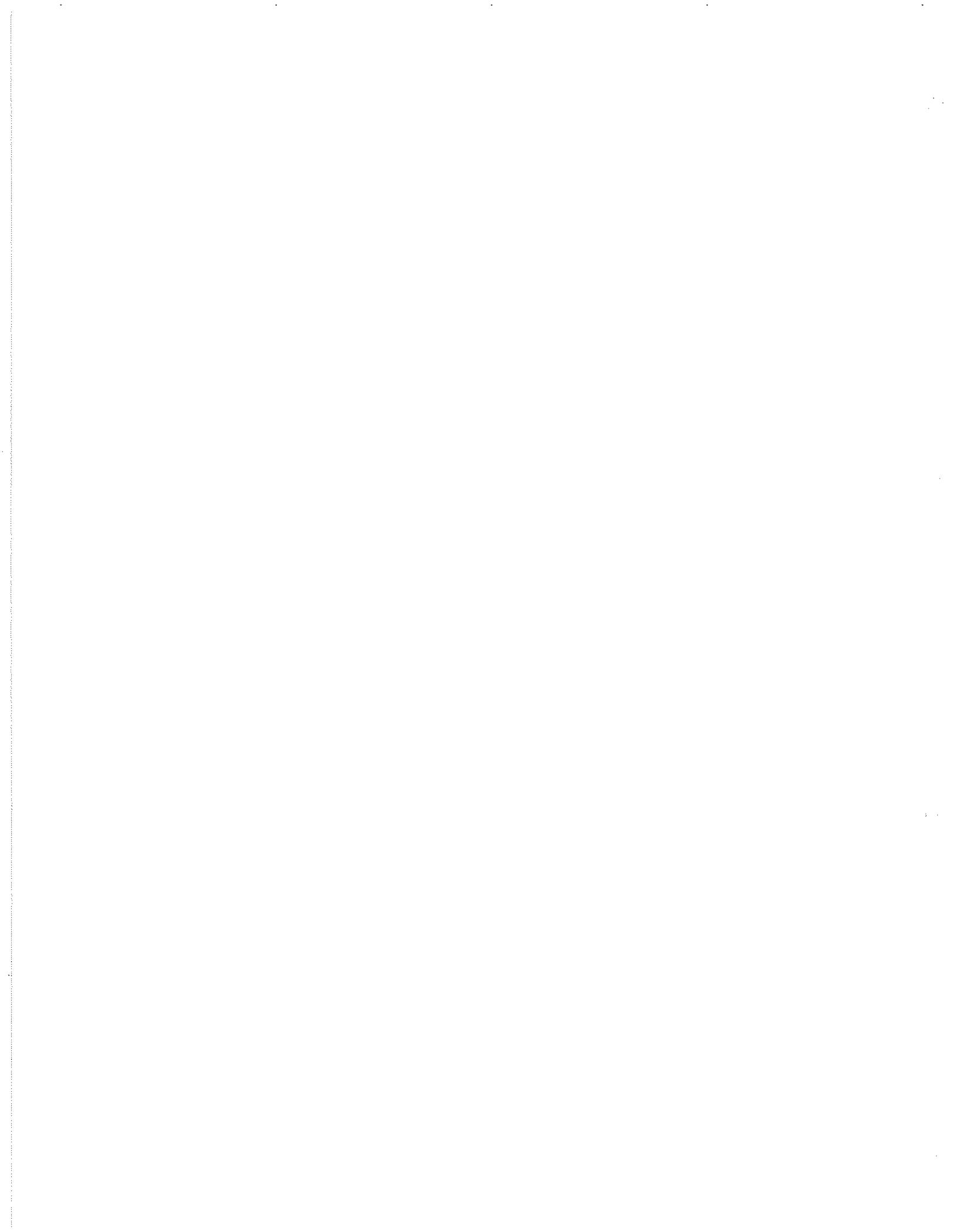
Advertência ao Leitor

A organização deste trabalho foi escolhida de forma a incluir grande parte de material necessário para o entendimento completo do assunto tratado, de uma maneira construtiva e logicamente coerente, sem contudo garantir que este objetivo seja cumprido formalmente. Explica-se, a seqüência lógica das seções e capítulos reflete de maneira clara os tópicos necessários para a compreensão do tema, embora alguns tópicos importantes tenham sido tratados esparsamente. Grande parte dos assuntos de revisão é tratada de maneira um pouco esquemática, não sendo o objetivo aqui a introdução pedagógica destes conceitos, mas o de familiarizar o leitor com os conceitos utilizados, frisando os resultados mais importantes que serão utilizados no texto subsequente e, algumas vezes, exemplificando o uso de algumas técnicas comuns.

Na parte I, devotada inteiramente ao material de revisão, demonstrações e detalhes excessivamente trabalhosos (do ponto de vista operacional) são deixados de lado e ao final de cada capítulo pode-se encontrar uma lista de referências comentadas onde o material é apresentado de maneira mais completa. Há a preocupação de enfatizar algumas conexões importantes entre vários aspectos dos assuntos tratados, ou a possibilidade de generalização destes conceitos sobre pontos de vista mais abstratos, embora estes aspectos não sejam desenvolvidos. Apenas o material necessário para a compreensão efetiva das partes II e III são tratados com mais cuidado, sendo este o objetivo maior do trabalho.

Assume-se durante o trabalho que o leitor tenha conhecimento de teoria clássica e quântica de campos, noções de quantização BRST e conhecimento da quantização da corda no gauge do cone-de-luz (ou covariante), embora esta última não seja estritamente necessária. Ainda, é presumido o conhecimento de supersimetria, no nível de [WB92], do qual a notação é utilizada.

Os capítulos centrais, que contém os resultados do trabalho são os capítulo 4, 7, 8, 9 e 10.



Parte I

Elementos

PER ME SI VA NE LA CITTA DOLENTE,
PER ME SI VA NE L'ETTERNO DOLORE,
PER ME SI VA TRA LA PERDUTA GENTE.

GIUSTIZIA MOSSE IL MIO ALTO FATTORE;
FECEMI LA DIVINA POTESTADE,
LA SOMMA SAPIENZA E'L PRIMO AMORE.

DINANZI A ME NON FUOR COSE CREATE
SE NON ETTERNE, E IO ETTERNO DURO.
LASCIATE OGNE SPERANZA, VOI CH'INTRATE.

INFERNO III 1-6

Capítulo 1

Introdução

Durante as últimas três décadas, desde o estudo dos modelos ressonantes duais até o presente, a teoria de cordas evoluiu drasticamente. Embora o problema original de compreender-se a interação hadrônica tenha fracassado, em primeira instância, o estudo de cordas relativísticas atraiu atenção de diversos pesquisadores a medida em que foi se mostrando enormemente rico. No modelo inicial de cordas bosônicas foi introduzida a supersimetria e a partir de então uma considerável parcela de físicos teóricos tenta desvendar a riqueza de uma teoria, suas sutilezas, ao passo em que conceitos novos não são introduzidos *ad hoc*, mas revelados como inerentes na teoria original, embora até o momento desconhecidos. Os mais fascinantes conceitos descobertos desta forma são a vasta rede de dualidades que interconecta as (aparentemente) diferentes teorias de (super)cordas e o descobrimento das D-branas.

Embora pouco se tenha avançado na direção de uma aplicação fenomenológica para a teoria de supercordas, a despeito dos inúmeros e continuados esforços; embora ainda não seja possível responder com propriedade e firmeza quais os graus de liberdade fundamentais da teoria de supercordas, os avanços obtidos no seu entendimento, a beleza em que a teoria se sustenta sobre poucos conceitos fundamentais e a riqueza de sua estrutura singular garantem que seu conhecimento mais profundo pode ajudar na compreensão de vários dos grandes problemas fundamentais da Física. Nenhuma outra teoria disponível permite o ataque de problemas tão variados quanto a estrutura do espaço-tempo, a evolução do universo, a noção de dimensão, definições não-perturbativas de teorias de gauge e o problema do confinamento em QCD, entre outros, ao mesmo tempo.

Estes fatores já garantiriam o interesse no estudo de supercordas, sem que se precisasse mencionar a estrutura matemática cheia de sutilezas e as interconexões com a fronteira das pesquisas em matemática em diversas áreas, encontrando aplicações tão amplas como geometria, topologia, análise e até mesmo teoria dos números.

Tendo exposto os motivos primários, eminentemente estéticos, que me levaram a me interessar pela teoria de cordas, prossigo descrevendo meus objetivos concretos com este trabalho, após o que apresento alguns conceitos gerais necessários para a formulação dos problemas tratados, antes da formalização e concretização das idéias que seguirão nos capítulos subsequentes.

Grande parte do trabalho desenvolvido em teoria de supercordas é realizado em um formalismo primeiro quantizado. Apesar das limitações implícitas no método para acessar o setor não perturbativo, muitos resultados foram obtidos graças ao auxílio de dualidade entre os diferentes regimes da teoria. No entanto, se entendemos a teoria de supercordas como uma teoria unificada, no sentido em que todas as diferentes supercordas (Tipo I, Tipo IIA/B e Heteróticas $SO(32)$ e $E_8 \times E_8$) são efetivamente manifestações de uma mesma teoria sob diferentes regimes, percebemos que existe um gigantesco espaço de parâmetros (*Moduli*) e devemos ser capazes de compreender como ocorre a seleção destes parâmetros. Isto é, se supercordas descreve o mundo em que vivemos, dentro de uma gigantesca gama de possibilidades aparentemente distintas, a supercorda escolhe um determinado vácuo, no qual descreve a física 4-dimensional que experimentamos.

A compreensão do processo dinâmico em que supercordas escolhem um determinado vácuo envolve o conhecimento de como os diferentes estados da corda se comportam fora de suas camadas de massa e este parece um problema para ser atacado sob o ponto de vista de segunda quantização. A assim chamada teoria de campos de supercordas mostrou-se um assunto difícil de ser tratado, apresentando diversas dificuldades técnicas e conceituais, tendo seu desenvolvimento ocorrido em poucos saltos, ao longo das últimas duas décadas. Em meados da década de 90, no entanto, o interesse nestas teorias ressurgiu graças a admirável conjectura de Sen, que nos deu um entendimento muito melhor sobre o táquion presente em diversos sistemas de (super)cordas.

O presente trabalho tem por objetivo estudar férmions (no espaço-tempo) através da teoria de campos de supercorda, em particular, estudei o papel destes férmions em sistemas instáveis de supercordas através de

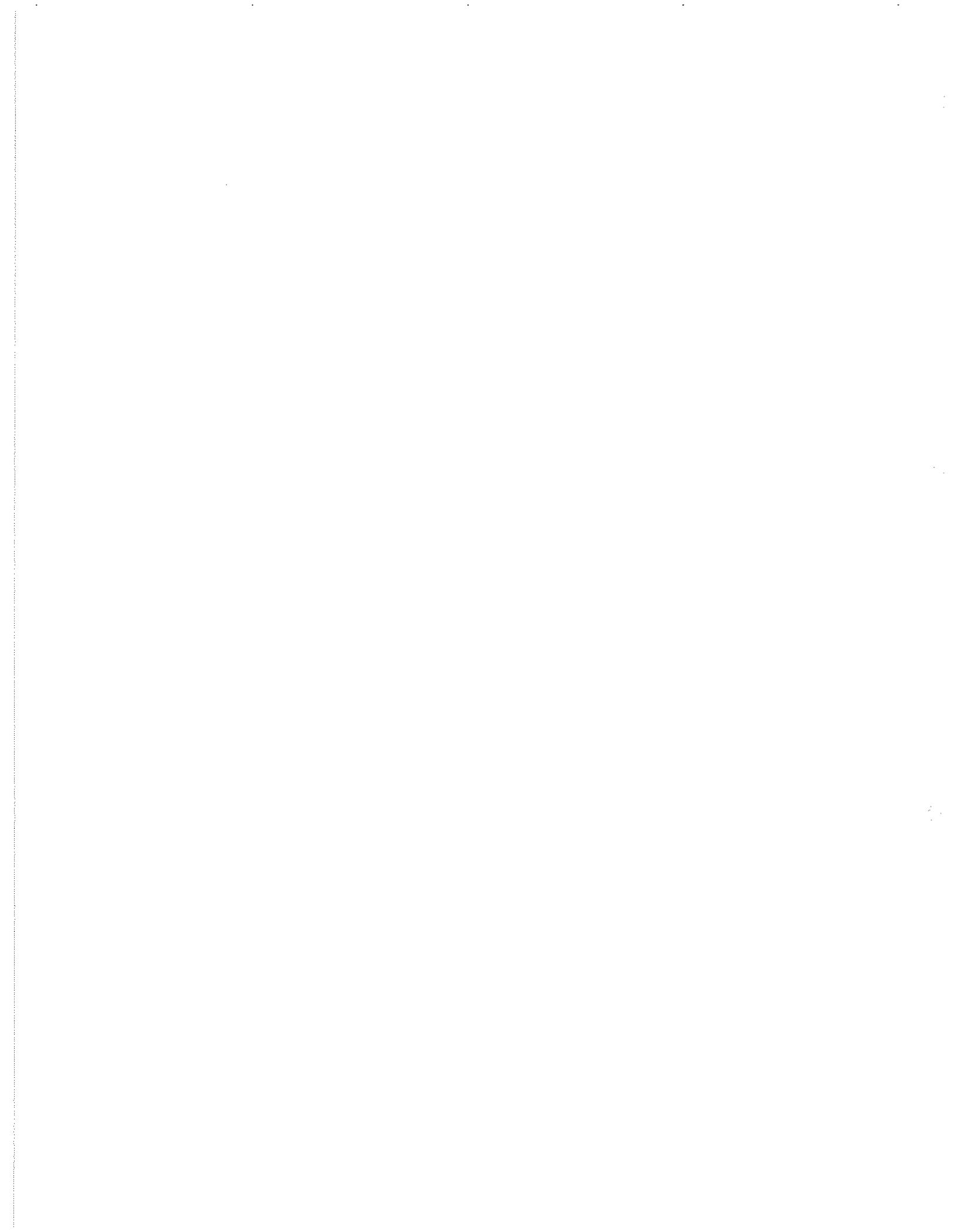
uma ação não-polinomial para a teoria de campo de supercordas desenvolvida por Nathan Jacob Berkovits. Muito ainda precisa ser entendida sobre supersimetria e condensação taquiônica em sistemas de supercordas, considero este o primeiro passo, dentro de uma abordagem construtiva para o entendimento de diversas questões ainda em discussão.

Na primeira parte da tese faço uma revisão dos conceitos fundamentais da supercorda no formalismo de primeira quantização. Começo com uma introdução a teoria de campos conformes e superconformes, uma ferramenta indispensável para todos os modernos avanços na área. Segue-se uma revisão sobre a supercorda, sob o ponto de vista de teorias conformes, onde os formalismos RNS (Ramond-Neveu-Schwarz) e Híbrido são discutidos. Apresento então uma discussão sobre D-branas em teorias de supercordas e finalmente uma apresentação da conjectura de Sen, unindo diferentes conceitos apresentados até o momento.

A segunda parte é dedicada a teoria de campos de cordas. A apresentação envolve uma discussão geral sobre os problemas que devem ser enfrentados em sua formulação. Segue-se uma apresentação do formalismo de Witten para a corda bosônica e uma detalhada discussão sobre a teoria de campos de supercordas de Berkovits, incluindo os setores NS e R. Esta seção é central para o restante do trabalho.

Na parte final apresento os problemas da inclusão de férmions (no espaço tempo) na teoria de campos de supercordas, terminando esta parte com o cálculo da ação da supercorda para os dois primeiros níveis de massa, incluindo os dois setores de projeção GSO.

Um resumo dos resultados importantes e uma análise crítica sobre as perspectivas do trabalho são apresentados na conclusão.



Capítulo 2

Teoria Conforme de Campos

Os elementos fundamentais de teorias conformes e superconformes em duas dimensões são introduzidos, fixando a notação que será usada no texto subsequente, bem como o ferramental necessário. Assume-se do leitor um conhecimento moderado de teorias clássicas e quânticas de campos e alguns conceitos sobre álgebras e grupos de Lie.

O estudo de simetrias e seu inevitável apelo estético têm influenciado o pensamento do homem há muito tempo. Foi na Física Moderna, no entanto, que o estudo rigoroso das simetrias, fundamentado nos trabalhos matemáticos dos séculos XIX e XX, mostrou-se finalmente poderoso o bastante para nos ajudar a compreender o mundo. A teoria de grupos e álgebras de Lie se tornou uma linguagem corrente na Física, notadamente da teoria de campos.

Teorias conformes de campos são uma arena em que este intercâmbio entre a Física e a Matemática tem se dado de maneira espetacular, em que ambos os campos se beneficiam de seus *insights* mútuos, onde a simetria envolvida é tão grande que permite extraordinárias simplificações na resolução de problemas que, de outra maneira, seriam absolutamente intratáveis.

Estas teorias encontram, sob o ponto de vista da Física, aplicações em diversas áreas, notadamente, na Mecânica Estatística no estudo de fenômenos críticos e na Teoria de Campos, através das supercordas e do estudo de modelos integráveis. Suas implicações matemáticas também são de largo escopo, notadamente no estudo de teorias de representações, variedades algébricas e topologia.

Os elementos destas teorias serão apresentados a seguir, com o objetivo de introduzir-se o material necessário para o estudo de teorias de cor-

das realizado durante o resto do trabalho. Não há nenhuma pretensão de fazer desta introdução às teorias conformes uma exposição auto-contida, ou abrangente.

2.1 Invariância Conforme Clássica

Considere teorias de campos clássicos em d dimensões, em um espaço dotado de métrica $g_{\mu\nu}$. Em geral lidar-se-á com espaços planos, com métrica Minkowski $g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, \dots, +1)$ ou com a métrica euclídeana (com todos os sinais positivos).

Considere uma **transformação geral de coordenadas**:

$$g_{\mu\nu} \mapsto g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu},$$

sob esta transformação, a ação de uma teoria definida em d dimensões tem a variação:

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu},$$

definindo o **tensor momento-energia** T . Se a teoria é invariante sobre transformações gerais de coordenadas, pode-se mostrar (Teorema de Noether) que $\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$ (ou, em um espaço curvo, que a derivada covariante se anula).

Sob uma **transformação de Weyl**:

$$g_{\mu\nu}(x) \mapsto \Omega(x) g_{\mu\nu}(x),$$

ou, sob forma infinitesimal:

$$g_{\mu\nu}(x) \mapsto g_{\mu\nu}(x) + \omega(x) g_{\mu\nu}(x),$$

a variação da ação é:

$$\delta S = \frac{1}{2} \int \sqrt{g} T^\mu_\mu \omega(x),$$

invariância desta teoria sobre invariância de Weyl acarreta então:

$$T^\mu_\mu = 0 \tag{2.1}$$

Pode-se agora enunciar uma definição:

Def. 1 (Transformação Conforme) *É o subgrupo (ou sub-álgebra) das transformações de coordenadas gerais que atua na métrica como uma transformação de Weyl.*

$$\begin{aligned} x &\mapsto x' \\ g_{\mu\nu} &\mapsto g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x) = \Omega(x) g_{\mu\nu}(x) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Nota 1 *As transformações conformes assim definidas são aquelas que preservam ângulos entre vetores.*

Nota 2 *O grupo de Poincaré é trivialmente um subgrupo do grupo conforme, com $\Omega(x) \equiv 1$.*

Analisando a definição para transformações infinitesimais:

$$\begin{aligned} x^\mu &\mapsto x^\mu + \epsilon^\mu \\ ds^2 &\mapsto ds^2 + (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) dx^\mu dx^\nu \end{aligned}$$

Se esta transformação satisfaz eq.(2.2), então:

$$\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d} (\partial \cdot \epsilon) \eta_{\mu\nu} \Rightarrow \Omega(x) = 1 + \frac{2}{D} (\partial \cdot \epsilon)$$

Considere por um instante que a dimensão do espaço-tempo é $d > 2$. O parâmetro ϵ é no máximo quadrático e os seguintes casos particulares são distinguidos:

Translações $\epsilon^\mu = a^\mu$, ou, na forma finita $x'^\mu = x^\mu + A^\mu$

Dilatações $\epsilon^\mu = \lambda x^\mu$, ou em forma finita $x'^\mu = \Lambda x^\mu$

Rotações $\epsilon^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu$, para $\omega_{\mu\nu}$ anti-simétrico. Na forma finita $x'^\mu = M^\mu{}_\nu x^\nu$.

Conformas Especiais $\epsilon^\mu = b^\mu x^2 - 2x^\mu b \cdot x$. Na forma finita $x'^\mu = \frac{x^\mu - b^\mu x^2}{1 - 2b \cdot x + b^2 x^2}$.

Localmente o grupo conforme é $SO(2, d)$, para métricas de assinatura Minkowski.

2.2 Teorias Conformes de Campos em 2 dimensões

2.2.1 Invariância Conforme em 2 Dimensões

Em duas dimensões eq.(2.1) fornece as equações de **Cauchy-Riemann**. É mais natural considerar variáveis complexas:

$$z = x^1 + ix^2, \quad \bar{z} = x^1 - ix^2,$$

e as transformações conformes em 2 dimensões são representadas por qualquer função analítica no plano complexo (em verdade na **esfera de Riemann**, ou seja o plano complexo adicionado do ponto no infinito),

$$z \mapsto f(z), \quad \bar{z} \mapsto f(\bar{z}) \quad (2.3)$$

que geram uma álgebra de dimensão infinita. Aí reside a origem das simplificações que ocorrem no estudo destas teorias.

Para discutir um *grupo* conforme em 2 dimensões, deve-se procurar o subconjunto destas transformações que admite inversa sendo definida globalmente, já que até o momento todas as conclusões são locais, baseadas apenas nas transformações infinitesimais.

O grupo global de transformações conformes é constituído de transformações projetivas:

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc = 1, \quad (2.4)$$

Estas transformações estão associadas a uma matriz complexa 2×2 com determinante unitário:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})/\mathbb{Z}_2.$$

Pode-se, agora, definir as propriedades de uma teoria de campos conforme:

Def. 2 (Teoria Conforme de Campos) contém um conjunto de campos Φ_i de forma que valem as seguintes condições:

1. Existe um subconjunto $\phi_j \subset \Phi_i$ de **campos quase-primários**. Sob transformações globais de coordenadas:

$$\phi'_i(w, \bar{w}) = \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-h} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right)^{-\bar{h}} \phi_i(z, \bar{z}), \quad (2.5)$$

Onde h é a **dimensão holomórfica conforme** do campo ϕ_i e \bar{h} sua análoga anti-holomórfica.

2. A teoria é covariante sob transformações globais, no sentido de suas funções de correlação, isto é:

$$\begin{aligned} \langle \phi_1(w_1, \bar{w}_1) \dots \phi_n(w_n, \bar{w}_n) \rangle &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^{-h_i} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right)^{-\bar{h}_i} \times \\ &\times \langle \phi_i(z_i, \bar{z}_i), \dots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle \end{aligned} \quad (2.6)$$

3. Todos os outros campos Φ_i podem ser escritos como combinações lineares dos campos quase-primários ϕ_i e de suas derivadas.
4. Existe um vácuo invariante sobre transformações globais conformes, isto é, existe um vácuo $SL(2, \mathbb{C})$.

Nota 3 Se os campos ϕ_i quase-primários seguem a mesma regra de transformação para uma transformação conforme arbitrária (não-necessariamente global), são denominados **Campos Primários**.

Nota 4 As dimensões conformes holomórfica e anti-holomórfica h e \bar{h} são dois números reais independentes.

Funções de Correlação

As restrições impostas pela eq.(2.6) permitem determinar completamente a função de dois pontos de qualquer campo na teoria (a menos de normalização). As funções de três pontos são determinadas a menos de uma constante e há algumas restrições às funções de ordem mais alta, embora estas não sejam determinadas completamente apenas pelo uso da invariância conforme. Como todos os campos da teoria podem ser escritos através dos campos (quase)-primários, apenas a forma explícita das funções de dois e três pontos para os campos primários será mostrada. Obtê-las é meramente

uma tarefa de impor-se invariância de translação, escala, rotação e transformações conformes especiais:

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \rangle = \begin{cases} \frac{C_{12}}{z_{12}^{2h_1} \bar{z}_{12}^{2\bar{h}_1}} & h_1 = h_2 \wedge \bar{h}_1 = \bar{h}_2 \\ 0 & \text{outra forma} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \phi_2(z_2, \bar{z}_2) \phi_3(z_3, \bar{z}_3) \rangle = C_{123} \frac{1}{z_{12}^{h_1+h_2-h_3} z_{23}^{h_2+h_3-h_1} z_{13}^{h_1+h_3-h_2}} \frac{1}{\bar{z}_{12}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2-\bar{h}_3} \bar{z}_{23}^{\bar{h}_2+\bar{h}_3-\bar{h}_1} \bar{z}_{13}^{\bar{h}_1+\bar{h}_3-\bar{h}_2}} \quad (2.8)$$

2.2.2 Quantização Radial

O formalismo de operadores em espaços de Hilbert distingue uma direção temporal. Enquanto no espaço euclideo esta escolha é essencialmente arbitrária, no espaço de Minkowski há escolhas naturais.

Considerando uma teoria definida em um cilindro infinito, onde a coordenada plana é identificada com o tempo $-\infty < t < +\infty$ e a outra coordenada periódica $0 < x \leq L$ é identificada com o espaço. Pode-se mapear o cilindro para o plano complexo, como indicado na figura 2.1, continuando para o espaço euclideo e usando a transformação:

$$z = e^{2\pi \frac{t-ix}{L}}$$

De forma que $t \rightarrow -\infty$ é mapeado na origem do plano e $t \rightarrow \infty$ é mapeado no ponto no infinito da esfera de Riemann.

A utilização das técnicas do cálculo com variáveis complexas permite enorme simplificação computacional. É importante notar que curvas de tempos iguais no cilindro são mapeadas em círculos com centro na origem no plano, o operador de translação temporal (hamiltoniana) é mapeado no operador de dilatações e o ordenamento temporal que deve ser imposto no cilindro para a construção de uma teoria quântica de campos consistente se torna um ordenamento radial no plano complexo.

2.2.3 Expansão de Produtos de Operadores (OPE)

Em teorias quânticas de campos, funções de correlação apresentam singularidades quando campos (quânticos) encontram-se na mesma posição. Como

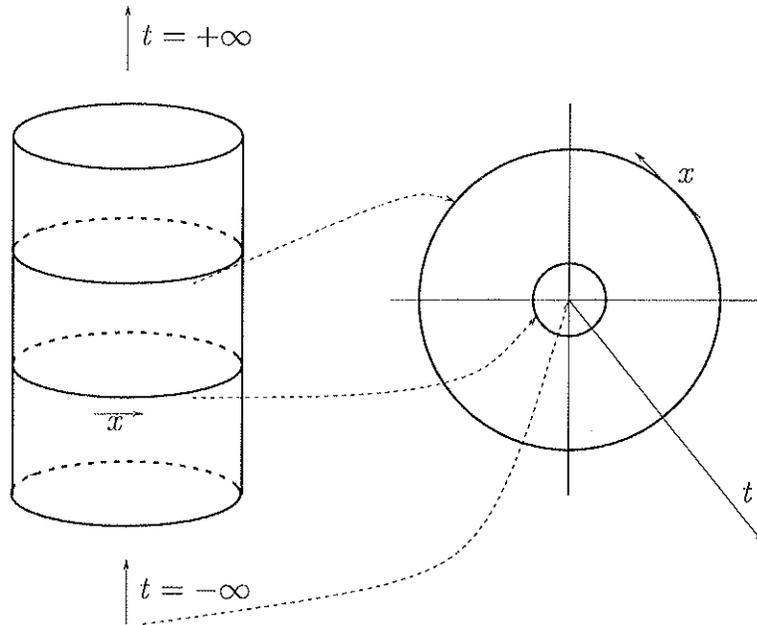


Figura 2.1: Mapeamento do cilindro para o plano complexo.

os operadores formam uma álgebra (local), pode-se expandir produtos de operadores em séries, utilizando os outros operadores da teoria e extraindo a informação sobre o comportamento dos operadores a curta-distância. Este é um procedimento, introduzido por Wilson, amplamente utilizado em teoria de campos, mas adquire um significado especial em teorias de campos conformes, uma vez que, nestas teorias a expansão de produto de operadores é exata. Uma maneira de entender este fato é perceber que, em geral, as expansões são válidas em uma forma assintótica, mas invariância conforme impede o surgimento de um parâmetro de comprimento (invariância de escala) que assinalaria a falha da expansão.

Desta forma:

$$\mathcal{R} [\Phi_i(z, \bar{z}) \Phi_j(w, \bar{w})] = \sum_k C_{ij}^k(z - w, \bar{z} - \bar{w}) \Phi_k(w, \bar{w})$$

Onde os coeficientes C codificam todo o comportamento singular quando $z \rightarrow w$ e \mathcal{R} representa ordenamento radial. Frequentemente o símbolo de ordenamento será omitido.

OPE's fornecem uma maneira de calcular relações de comutação mais facilmente. Para simplificar a notação a dependência anti-holomórfica dos campos será omitida. Considerando dois campos holomórficos $a(z)$ e $b(z)$, toma-se a integral:

$$\oint_w dza(z)b(w)$$

Com a integração no sentido anti-horário em torno do ponto w . separando esta integral em duas integrais a tempos fixos e em direções opostas, segue imediatamente que:

$$\oint_w dza(z)b(w) = \oint_{C_1} dza(z)b(w) - \oint_{C_2} dza(z)b(w) = [A, b(w)] \quad (2.9)$$

$$A = \oint a(z)dz \quad (2.10)$$

Note que quando não há indicação de caminho na integração, ela é feita sobre tempo igual. A ilustração pictórica do chamado **argumento do contorno** discutido acima está na figura 2.2.

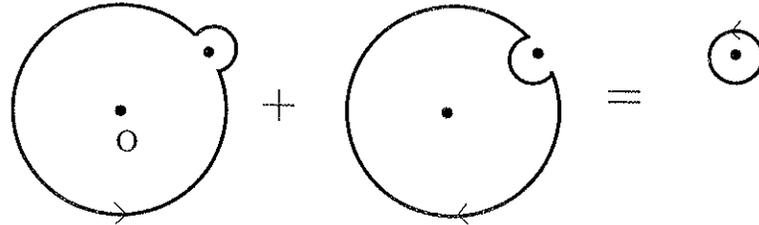


Figura 2.2: Argumento do Contorno.

2.2.4 Álgebra de Virasoro

Invariância conforme implica no anulamento do traço do tensor momento-energia, em duas dimensões temos apenas duas componentes para este tensor, uma holomórfica, denotada por $T(z)$ e outra anti-holomórfica $\bar{T}(\bar{z})$. Como este tensor é o gerador das transformações conformes, define-se a carga conforme por:

$$Q_\epsilon = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \epsilon(z) T(z). \quad (2.11)$$

Uma transformação conforme é dada então por:

$$\delta_\epsilon \Phi(w) = -[Q_\epsilon, \Phi(w)] \quad (2.12)$$

Considerando agora eq.(2.5), para um campo primário esta equação é válida para qualquer transformação conforme. Na forma infinitesimal:

$$\delta_{\epsilon, \bar{\epsilon}} \phi = -(h\phi \partial_z \epsilon + \epsilon \partial_z \phi) - (\bar{h}\phi \partial_{\bar{z}} \bar{\epsilon} + \bar{\epsilon} \partial_{\bar{z}} \phi) \quad (2.13)$$

Comparando as duas definições, pode-se determinar a OPE entre o tensor momento-energia e campos primários:

$$T(z)\phi(w, \bar{w}) \sim \frac{h}{(z-w)^2} \phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{z-w} \partial_w \phi(w, \bar{w}) \quad (2.14)$$

Onde o símbolo \sim significa que apenas os termos singulares são mostrados, omitindo-se os infinitos termos regulares da expansão. Para a parte anti-holomórfica o procedimento é análogo.

A OPE do tensor momento-energia com si mesmo, no entanto, é dada por:

$$\boxed{T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2} T(w) + \frac{1}{z-w} \partial_w T(w)} \quad (2.15)$$

Esta é a OPE mais geral possível para o tensor momento-energia de uma teoria conforme. Note que este tensor não é um campo primário, apenas um campo quase-primário (embora não seja evidente, pode-se determinar como este tensor se transforma sobre transformações conformes e verificar a existência do termo adicional devido a c na eq.(2.15) e verificar que este termo se anula para transformações conformes globais). Assim, este é um campo conforme quase-primário de dimensão (ou **peso**) conforme 2.

A expansão dos campos em modos é realizada da seguinte forma:

$$\phi(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^{-m-h} \phi_m \quad (2.16)$$

$$\phi_m = \frac{1}{2\pi i} \oint dz z^{m+h-1} \phi(z) \quad (2.17)$$

Os modos do tensor momento-energia serão denotados pela letra L , são os **geradores de Virasoro**, responsáveis por gerar as transformações conformes no espaço de Hilbert. Alguns comentários são em ordem:

- L_{-1}, L_0, L_1 mais os análogos anti-holomórficos são os geradores do grupo conforme global $SL(2, \mathbb{C})$.
- O operador $L_0 + \bar{L}_0$ gera dilatações no plano complexo, representando então a Hamiltoniana.

Usando a definição de comutadores eq.(2.9) e a OPE dos tensores eq.(2.15), a **álgebra de Virasoro** pode ser escrita em termos dos modos:

$$\begin{cases} [L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \\ [L_n, \bar{L}_m] = 0 \\ [\bar{L}_n, \bar{L}_m] = (n-m)\bar{L}_{n+m} + \frac{c}{12}n(n^2-1)\delta_{n+m,0} \end{cases}$$

A constante c que apareceu tanto na OPE do tensor momento-energia como na álgebra de Virasoro é denominada **carga central** e não é determinada pela invariância conforme, mas sim pela teoria particular que se considera. A carga central é, essencialmente, uma medida extensiva dos graus de liberdade do sistema considerado.

2.2.5 Espaço de Hilbert e Módulos de Verma

Assumindo a existência de um vácuo $|0\rangle$ aniquilado pela parte de frequência positiva dos campos, um estado *in* no plano complexo é definido como:

$$|\phi_{in}\rangle = \lim_{z, \bar{z} \rightarrow 0} \phi(z, \bar{z})|0\rangle.$$

Para definir um produto interno adequado no espaço de Hilbert é necessária uma noção de hermiticidade. O tempo euclidiano $\tau = it$ deve ser revertido $\tau \mapsto -\tau$ para preservar o tempo Minkowski, o que, no plano complexo representa a inversão $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$. Desta forma, a seguinte definição de hermiticidade para um campo quase-primário:

$$\phi^\dagger(z, \bar{z}) = \bar{z}^{-2h} z^{-2\bar{h}} \phi\left(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{z}\right) \quad (2.18)$$

$$\langle \phi_{out} | = |\phi_{in}\rangle^\dagger \quad (2.19)$$

$$\langle \phi_{out} | \phi_{in} \rangle = \lim_{\xi, \bar{\xi} \rightarrow 0} \langle 0 | \phi(\bar{\xi}, \xi) \phi(0, 0) | 0 \rangle \quad (2.20)$$

$$\phi_m^\dagger \rightarrow \phi_{-m} \quad (2.21)$$

Na última equação a consequência da definição para a expansão em modos é descrita, mostrando apenas a parte holomórfica. A parte anti-holomórfica segue analogamente.

O tensor momento-energia atuando no vácuo:

$$T(z)|0\rangle = \sum_n L_n z^{-n-2}|0\rangle,$$

impondo regularidade em $z = 0$, a seguinte condição é necessária:

$$\begin{aligned} L_n|0\rangle &= 0, & n \geq -1 \\ \bar{L}_n|0\rangle &= 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

esta condição automaticamente garante a invariância do vácuo com respeito ao grupo conforme global (gerado por L_{-1}, L_0, L_1).

Um elemento necessário para a construção dos estados é o estado assintótico:

$$|h, \bar{h}\rangle \equiv \phi(0, 0)|0\rangle, \quad (2.23)$$

de onde segue:

$$\begin{aligned} [L_n, \phi(w, \bar{w})] &= \frac{1}{2\pi i} \oint_w dz z^{n+1} T(z) \phi(w, \bar{w}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_w dz z^{n+1} \left[\frac{h\phi(w, \bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial\phi(w, \bar{w})}{z-w} + \text{termos regulares} \right] \\ &= h(n+1)w^n \phi(w, \bar{w}) + w^{n+1} \partial\phi(w, \bar{w}). \quad (n \geq -1) \end{aligned}$$

Assim, pode-se ver que o estado assintótico definido na eq.(2.23) satisfaz as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} L_0|h, \bar{h}\rangle &= h|h, \bar{h}\rangle, & \bar{L}_0|h, \bar{h}\rangle &= \bar{h}|h, \bar{h}\rangle \\ L_n|h, \bar{h}\rangle &= 0, & \bar{L}_n|h, \bar{h}\rangle &= 0 \\ & & n &> 0 \end{aligned} \quad (2.24)$$

Os estados $|h, \bar{h}\rangle$ são auto-estados da hamiltoniana (uma vez que a hamiltoniana é proporcional a $L_0 + \bar{L}_0$) e são denominados **Estados de Peso Máximo** (*highest-weight states*).

Estados excitados são obtidos por aplicações sucessivas dos geradores de Virasoro L_{-m} , ($m > 0$):

$$\begin{aligned} |\chi\rangle &\equiv L_{-k_1} L_{-k_2} \cdots L_{-k_n} |h\rangle \quad (1 \leq k_1 \leq k_2 \cdots \leq k_n) \\ L_0 |\chi\rangle &= h + N \\ N &= \sum_i k_i \end{aligned} \quad (2.25)$$

Como as partes holomórficas e anti-holomórficas desacoplam, apenas uma delas será considerada e pode-se tomar o produto tensorial no final (ao menos para os casos de interesse neste trabalho), desta forma, na expressão acima e nas que se seguem, considera-se apenas a parte holomórfica. $|\chi\rangle$ são **estados descendentes**. N é o **nível** do estado.

Evidentemente podem existir vários estados em um mesmo nível, seu número pode ser obtido através do número de partições do inteiro N , cuja função geratriz (em termos da função de Euler) é:

$$\frac{1}{\varphi(q)} \equiv \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^n} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n$$

O subconjunto do espaço de Hilbert gerado por $|h\rangle$ e seus descendentes é fechado sobre ação da álgebra de Virasoro e é denominado **módulo de Verma**, $V(c, h)$.

O trabalho de construção do espaço de Hilbert é, então, o estudo das representações da álgebra de Virasoro.

Prossegue-se com mais alguns elementos da teoria de representações. O módulo de Verma é um espaço de representação e tem a estrutura de um espaço de Hilbert. O produto interno é definido através da noção de hermiticidade do espaço de Hilbert original, $L_m^\dagger = L_{-m}$. e valem as seguintes propriedades:

- L_0 é um operador hermitiano diagonalizado em $V(c, h)$.
- h é um auto-valor de L_0 , logo $h \in \mathbb{R}$.
- Sejam $|\chi\rangle, |\chi'\rangle \in V(c, h)$, $L_0 |\chi\rangle = (h + N) |\chi\rangle$ e $L_0 |\chi'\rangle = (h + N') |\chi'\rangle$, se $N \neq N' \Rightarrow \langle \chi | \chi' \rangle = 0$.

O espaço de Hilbert total é definido por:

$$\mathcal{H} = \sum_{h, \bar{h}} V(c, h) \otimes \bar{V}(c, \bar{h})$$

Se um sub-módulo de $V(c, h)$ é fechado sobre a ação dos geradores de Virasoro, a representação da álgebra é redutível, assinalando a existência de **estados-nulos**, isto é, estados diferentes do estado de peso máximo que também satisfazem $L_n|\chi\rangle = 0, (n > 0)$. Estes estados são ortogonais a qualquer elemento do módulo de Verma, em particular a si próprios:

$$\begin{aligned}\langle\chi|L_{-k_1}L_{-k_2}\cdots L_{-k_n}|h\rangle &= \langle h|L_{k_1}L_{k_2}\cdots L_{k_n}|\chi\rangle \\ \langle\chi|\chi\rangle &= 0\end{aligned}$$

De forma que os estados-nulos e todos os seus descendentes têm norma nula.

Pode-se construir um módulo de Verma irredutível $M(c, h)$ a partir de um módulo redutível identificando-se estados que diferem apenas por estados-nulos:

$$M(c, h) = V(c, h)/V^{\text{null}}(c, h_0) \quad (2.26)$$

onde $V^{\text{null}}(c, h_0)$ é o módulo de verma gerado pelo estado-nulo de peso h_0 .

Também podem existir estados com norma negativa (**fantasmas**), caso em que a representação não é **unitária**. Estes fantasmas não devem ser confundidos com os **fantasmas de Fadeev-Popov** que serão introduzidos na quantização BRST.

Unitariedade coloca restrições sobre os valores possíveis de h e c , o estudo sistemático destas condições é feito através do **determinante de Kac**. Este procedimento não será discutido aqui mas, mesmo assim, pode-se ver algumas condições necessárias de maneira simples, considerando a norma do estado $L_{-n}|h\rangle$:

$$\begin{aligned}\langle h|L_n L_{-n}|h\rangle &= \langle h|L_{-n}L_n + 2nL_0 + \frac{1}{12}cn(n^2 - 1)|h\rangle \\ &= \left(2nh + \frac{1}{12}cn(n^2 - 1)\right) \langle h|h\rangle\end{aligned}$$

De onde vê-se que $c \geq 0$ e $h > 0$ são condições necessárias para unitariedade.

Da análise formal do determinante de Kac considerar-se-á apenas o resultado:

Teorema 1 (Unitariedade) *Toda teoria conforme com $c < 1$ é uma teoria não-unitária, com exceção de um conjunto discreto de **modelos mínimos***

satisfazendo a seguinte relação:

$$\begin{aligned} c &= 1 - \frac{6}{m(m+1)} \\ h_{rs} &= \frac{[(m+1)r - ms]^2 - 1}{4m(m+1)} \\ 1 \leq r < m, \quad 1 \leq s \leq r, \end{aligned}$$

onde h_{rs} são os valores dos pesos conformes permitidos para a teoria unitária com a dada carga central.

Para $c \geq 1$ e $h \geq 0$ as teorias conformes são unitárias, constituindo famílias contínuas de teorias.

Seguem-se dois exemplos concretos dos conceitos apresentados até o momento. Estes dois casos serão amplamente utilizados em todas as seções subseqüentes.

2.2.6 Bóson Livre

Considere a ação:

$$S = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2z \partial X \bar{\partial} X \quad (2.27)$$

A equação de movimento é uma equação de Laplace: $\partial \bar{\partial} X(z, \bar{z}) = 0$. O propagador é solução de:

$$\begin{aligned} \bar{\partial} \partial \langle X(z, \bar{z}) X(w, \bar{w}) \rangle &= \pi \alpha' \delta^2(z, w) \Rightarrow \\ \langle X(z, \bar{z}) X(w, \bar{w}) \rangle &= -\frac{\alpha'}{2} \ln |z - w|^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

O tensor momento-energia (parte holomórfica) é:

$$\begin{aligned} T(z) &= -\frac{1}{\alpha'} : \partial X \partial X : \\ &= -\frac{1}{\alpha'} \lim_{w \rightarrow z} (\partial X(z) \partial X(w) - \langle \partial X(z) \partial X(w) \rangle) \\ &= -\frac{1}{\alpha'} \lim_{w \rightarrow z} \left(\partial X(z) \partial X(w) + \frac{\alpha'}{2} \ln |z - w|^2 \right) \end{aligned} \quad (2.29)$$

onde o **ordenamento normal** (denotado por $::$) foi definido através da subtração da divergência quando os dois operadores estão no mesmo ponto. Pode-se considerar algumas OPE's que serão úteis a seguir:

$$\partial X(z)\partial X(w) \sim \partial_z \partial_w \langle X(z)X(w) \rangle \sim -\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{(z-w)^2} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} T(z)\partial X(w) &= -\frac{1}{\alpha'} : \partial X(z)\partial X(z) : \partial X(w) \\ &\sim -\frac{1}{\alpha'} \partial X(z) \cdot 2 \cdot \langle \partial X(z)\partial X(w) \rangle \quad (\text{Teorema de Wick}) \\ &\sim -\frac{2}{\alpha'} \partial X(z) \left(-\frac{\alpha'}{2} \frac{1}{(z-w)^2} \right) \quad (\text{Eq.2.30}) \\ &\sim [\partial X(w) + (z-w)\partial^2 X(w)] \frac{1}{(z-w)^2} \quad (\text{Expansão em Taylor}) \\ &\sim \frac{\partial X(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial^2 X(w)}{z-w}, \end{aligned}$$

logo $\partial X(z)$ é um campo conforme primário de peso conforme $h = 1$.

$$\begin{aligned} T(z)T(w) &= \frac{1}{\alpha'^2} : \partial X(z)\partial X(z) :: \partial X(w)\partial X(w) : \\ &= \frac{1}{\alpha'^2} [2\langle \partial X(z)\partial X(w) \rangle^2 + 4\partial X(z)\partial X(w)\langle \partial X(z)\partial X(w) \rangle] \\ &\sim \frac{1}{\alpha'^2} \left[\frac{\alpha'^2}{2} \frac{1}{(z-w)^4} - 2\alpha' \frac{\partial X(z)\partial X(w)}{(z-w)^2} \right] \\ &\sim \frac{1}{\alpha'^2} \left[\frac{\alpha'^2}{2} \frac{1}{(z-w)^4} - 2\alpha' \frac{\partial X(w)\partial X(w) + (z-w)\partial^2 X(w)\partial X(w)}{(z-w)^2} \right] \\ &\sim \frac{1/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \end{aligned}$$

Comparando com eq.(2.15) pode-se notar que a carga central para o bóson livre é $c = 1$ e o tensor momento-energia é um campo quase-primário de peso conforme $h = 2$.

Considere também:

$$\begin{aligned}
 T(z) : \exp ikX(w) : &= -\frac{1}{\alpha} : \partial X(z) \partial X(z) :: \exp ikX(w) \\
 &\sim -\frac{1}{\alpha} \langle \partial X(z) ikX(w) \rangle^2 \exp ikX(w) \\
 &\quad - \frac{1}{\alpha} 2 \cdot \partial X(z) \langle \partial X(z) ikX(w) \rangle \exp ikX(w) \\
 &\sim \frac{\alpha' k^2 / 4}{(z-w)^2} \exp ikX(w) + \frac{\partial \exp ikX(w)}{z-w}
 \end{aligned}$$

logo $\exp ikX(w)$ tem peso conforme $h = \frac{\alpha' k^2}{4}$. Uma relação muito útil é:

$$: \exp(aX(z)) :: \exp(bX(w)) : \sim : \exp((a+b)X(w)) : \exp(a \cdot b \langle X(z) X(w) \rangle)$$

Pode-se proceder a quantização canônica do bóson livre sobre um cilindro de circunferência L . Impõe-se condições periódicas de contorno sobre $X(t, x)$:

$$X(x+L, t) = X(x, t),$$

expandindo o campo em modos de Fourier:

$$\begin{aligned}
 X(x, t) &= \sum_n \exp \frac{2\pi i n x}{L} X_n(t) \\
 X_n(t) &= \frac{1}{L} \int dx \exp -\frac{2\pi i n x}{L} X(x, t).
 \end{aligned}$$

Da ação: $\frac{1}{2\pi\alpha'} \int d^2x [(\partial_t X)^2 - (\partial_x X)^2]$ determina-se o momento conjugado:

$$\pi_n = \frac{1}{\pi\alpha'} L \dot{X}_{-n}, \quad [X_n, \pi_m] = i\delta_{n+m}$$

Pode-se escrever a hamiltoniana:

$$H = \frac{\pi\alpha'}{2L} \sum_n \left[\pi_n \pi_{-n} + \left[\frac{2n}{\alpha'} \right]^2 X_n X_{-n} \right]$$

e os operadores de criação e aniquilação são definidos observando-se que o modo zero deve ser tratado especialmente uma vez que sua frequência se anula:

$$\tilde{a}_n = \frac{\sqrt{\alpha'}}{2\sqrt{|n|}} \left(\frac{1}{\alpha'} |n| X_n + i\pi_{-n} \right)$$

$$a_n = \begin{cases} -i\sqrt{n}\tilde{a}_n & n > 0 \\ i\sqrt{-n}\tilde{a}_{-n}^\dagger & n < 0 \end{cases}$$

$$\bar{a}_n = \begin{cases} -i\sqrt{n}\tilde{a}_{-n} & n > 0 \\ i\sqrt{-n}\tilde{a}_n^\dagger & n < 0 \end{cases}$$

As relações de comutação são:

$$[a_n, a_m] = n\delta_{n+m} \quad [a_n, \bar{a}_m] = 0 \quad [\bar{a}_n, \bar{a}_m] = n\delta_{n+m}$$

a hamiltoniana, expressa em termos destes operadores é:

$$H = \frac{\pi\alpha'}{2L}\pi_0^2 + \frac{2\pi}{L} \sum_{n>0} (a_{-n}a_n + \bar{a}_{-n}\bar{a}_n).$$

e pode-se expressar a expansão em modos do campo X como:

$$X(x, t) = X_0 + \frac{\pi\alpha'}{L}\pi_0 t + i\frac{\alpha'}{2} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \left[a_n \exp\left(\frac{2\pi i n(x-t)}{L}\right) + \bar{a}_n \exp\left(\frac{2\pi i n(x+t)}{L}\right) \right],$$

passando para o espaço euclidiano e transformando para coordenadas complexas:

$$X(z, \bar{z}) = X_0 - \underbrace{i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\pi_0}_{a_0} \ln(z\bar{z}) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} [a_n z^{-n} + \bar{a}_{-n} \bar{z}^{-n}]$$

introduzindo a definição de a_0 como o modo zero dos operadores de aniquilação (ou destruição).

Para construir o espaço de Fock deve-se notar que o autovalor de π_0 é um bom número quântico, já que π_0 comuta com todos os operadores. Seja

então $k \in \mathbb{R}$ o autovalor de π_0 , que será utilizado para rotular o vácuo de Fock:

$$\begin{aligned} a_n |k\rangle &= \bar{a}_n |k\rangle = 0 \quad (n > 0) \\ \pi_0 |k\rangle &= |k\rangle \end{aligned}$$

O tensor momento-energia eq.(2.29) pode ser escrito como:

$$T(z) = -\frac{1}{\alpha'} \sum_{n,m} z^{-n-m-2} : a_n a_m :$$

o que implica na seguinte relação entre os geradores de Virasoro e os osciladores:

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{2} \sum_m a_{n-m} a_m \quad n \neq 0 \\ L_0 &= \sum_{n>0} a_{-n} a_n + \frac{1}{2} a_0^2 \\ H &= \frac{2\pi}{L} (L_0 + \bar{L}_0) \end{aligned}$$

Destas equações vê-se que o vácuo $|k\rangle$ tem peso conforme $h = \frac{\alpha' k^2}{4}$. Os elementos do espaço de Fock são obtidos através da aplicação sucessiva de operadores de criação

$$a_{-1}^{n_1} a_{-2}^{n_2} \cdots \bar{a}_{-1}^{m_1} \bar{a}_{-2}^{m_2} \cdots |k\rangle, \quad (n_i, m_j \geq 0)$$

Estes estados são auto-valores de L_0 e \bar{L}_0 (e portanto auto-valores de energia) e seus pesos conformes são:

$$h = \frac{\alpha' k^2}{4} + \sum_j j n_j \quad \bar{h} = \frac{\alpha' k^2}{4} + \sum_j j m_j$$

Cada estado fundamental $|k\rangle$ pode ser obtido a partir do vácuo $|0\rangle$ (SL(2, C) invariante) através da aplicação do operador $\mathcal{V}_k \equiv \exp(ikX(z, \bar{z}))$

$$|k\rangle = \mathcal{V}_k(0)|0\rangle$$

Desta forma, há um contínuo de vácuos rotulados por k , cada um gerando um módulo de Verma associado ao campo primário \mathcal{V}_k . Os descendentes são os outros elementos do espaço de Fock, obtidos atuando-se os operadores de criação a_{-n} , o que é análogo à atuação dos operadores de Virasoro L_{-m} .

2.2.7 Férmião Livre

Considere a ação para um férmion Majorana-Weyl em 2 dimensões:

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (\psi \bar{\partial} \psi - \bar{\psi} \partial \bar{\psi}), \quad (2.31)$$

as equações de movimento são $\partial \bar{\psi} = 0$ e $\bar{\partial} \psi = 0$. O propagador é solução da equação:

$$\begin{aligned} \bar{\partial} \langle \psi(z) \psi(w) \rangle &= 2\pi \delta(z-w) \\ \partial \langle \bar{\psi}(\bar{z}) \bar{\psi}(\bar{w}) \rangle &= 2\pi \delta(\bar{z}-\bar{w}). \end{aligned}$$

logo, a solução é:

$$\psi(z)\psi(w) = -\frac{1}{z-w}, \quad \bar{\psi}(\bar{z})\bar{\psi}(\bar{w}) = -\frac{1}{\bar{z}-\bar{w}} \quad (2.32)$$

O tensor momento-energia:

$$T(z) = \frac{1}{2} : \psi(z) \partial \psi(z) :, \quad \bar{T}(\bar{z}) = \frac{1}{2} : \bar{\psi}(\bar{z}) \bar{\partial} \bar{\psi}(\bar{z}) : \quad (2.33)$$

Para o cálculo das OPE's deve-se levar em conta que os campos $\psi(z)$ anti-comutam entre si. Para determinar o comportamento de ψ sobre transformações conformes, considere:

$$\begin{aligned} T(z)\psi(w) &= \frac{1}{2} : \psi(z) \partial \psi(z) : \psi(w) \\ &\sim \frac{1}{2} \psi(z) \langle \partial \psi(z) \psi(w) \rangle - \frac{1}{2} \partial \psi(z) \langle \psi(z) \psi(w) \rangle \\ &\sim \frac{1}{2} \psi(z) \frac{1}{(z-w)^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi(z)}{z-w} \\ &\sim \frac{\frac{1}{2} \psi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial \psi(w)}{z-w} \end{aligned}$$

De onde vê-se que ψ é um campo conforme primário de peso conforme $h = \frac{1}{2}$ e $\bar{h} = 0$. (A OPE de $\bar{T}\psi$ é trivial).

Para o cálculo da carga central desta teoria, basta fazer a OPE do tensor momento-energia com ele mesmo, seguindo o mesmo procedimento feito acima:

$$T(z)T(w) \sim \frac{1/4}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w}$$

Assim, a carga central do modelo de férmion livre é $c = \frac{1}{2}$.

Na seção anterior mostrou-se explicitamente a relação entre a quantização do cilindro e no plano complexo. Dadas as vantagens computacionais desta última, considerar-se-á apenas esta nesta seção. Expandindo em modos os campos:

$$\begin{aligned}\psi(z) &= -i \sum_n \psi_n z^{-n-1/2} \\ \psi_n &= \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1/2} i\psi(z).\end{aligned}$$

Usando o argumento do contorno eq.(2.9), tem-se:

$$\{\psi_n, \psi_m\} = \delta_{n+m,0}$$

Até o momento não se discutiu sobre qual domínio de variação dos parâmetros n dos modos. Para isso, deve-se notar que existem duas escolhas de condições de contorno para férmions, uma periódica e uma anti-periódica:

$$\begin{aligned}\psi(e^{2\pi i} z) &= +\psi(z) & n \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2} & \text{NEVEU-SCHWARZ} \\ \psi(e^{2\pi i} z) &= -\psi(z) & n \in \mathbb{Z} & \text{RAMOND}\end{aligned}$$

A função de dois pontos para o caso **Neveu-Schwarz** (periódico) pode ser calculada facilmente usando-se a expansão em modos:

$$\begin{aligned}\langle \psi(z)\psi(w) \rangle &= \left\langle \sum_{n=1/2}^{\infty} \psi_n z^{-n-1/2} \sum_{m=1/2}^{\infty} \psi_m w^{-m-1/2} \right\rangle \\ &= \sum_{n=1/2}^{\infty} z^{-n-1/2} w^{n-1/2} \\ &= \frac{1}{z-w}\end{aligned}$$

que concorda com a expressão para a OPE $\psi(z)\psi(w)$.

Para o caso **Ramond** (anti-periódico), introduz-se um **operador de torção**, responsável por criar um corte de ramificação de raiz quadrada, trocando o sinal do campo ψ quando este cruza o ramo, isto é, o operador de torção efetua a troca de condição de contorno. Assim, considere

$$\psi(z)\sigma(w) \sim (z-w)^{-1/2}\mu(w), \quad (2.34)$$

$\sigma(z)$ e $\mu(z)$ são os operadores de torção, com mesmo peso conforme. Com o auxílio do operador σ pode-se definir um novo vácuo, que seleciona os férmions de condições de contorno Ramond. Calcular a função de dois pontos dos férmions com condições de contorno Ramond é então, calcular a seguinte função de correlação:

$$\langle \psi(z)\psi(w) \rangle_R \equiv \langle 0 | \sigma(\infty) \psi(z) \psi(w) \sigma(0) | 0 \rangle$$

Como a expansão em modos neste setor toma valores inteiros, temos modos zero ψ_0 , com importantes conseqüências que serão analisadas em breve. Por ora basta notar que as relações de anti-comutação fixam $\psi_0^2 = \frac{1}{2}$. Calculando a função de dois pontos:

$$\begin{aligned} \langle \psi(z)\psi(w) \rangle_R &= \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n z^{-n-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \psi_m w^{-m-1/2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{zw}} \left(\frac{w}{z-w} - \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{z}{w}} + \sqrt{\frac{w}{z}}}{z-w} \end{aligned}$$

Esta expressão concorda com a expressão anterior para $z \rightarrow w$. Usando esta expressão e o tensor momento-energia regularizado:

$$T(z) = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow w} \left[\psi(z) \partial_w \psi(w) + \frac{1}{(z-w)^2} \right]$$

pode-se determinar o peso conforme do campo $\sigma(z)$. Para tanto basta calcular o valor de espera no vácuo do tensor momento-energia, já que o vácuo (Ramond) contém o campo σ e este valor de espera será proporcional a OPE de T com σ . Usando a função de dois pontos para os férmions Ramond e derivando com respeito a w , $\langle T(z) \rangle_R = \frac{1}{16z^2}$, logo o peso conforme do operador de torção é $h_\sigma = 1/16$.

A introdução de operadores de torção é uma técnica extremamente versátil para lidar com condições de contorno “não-usuais” (em algum sentido). No presente caso, a análise dos modos zero dos campos $\psi(z)$ clarifica o papel destes operadores.

Considere primeiro o operador $(-1)^F$, satisfazendo as seguinte propriedades:

$$\{(-1)^F, \psi_n = 0\}, (\forall n) \quad \{(-1)^F, (-1)^F\} = 2$$

De forma que este operador tem autovalores ± 1 atuando em um estado com número par ou ímpar de operadores fermiônicos de criação.

Dados os seguintes comutadores:

$$\begin{aligned} \{\psi_0, \psi_0\} &= 1 \\ \{\psi_0, \psi_n\} &= 0 \quad (n \neq 0) \\ \{(-1)^F, \psi_0\} &= 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

pode-se verificar que ψ_0 não altera o autovalor de $L_0 = \sum_{n>0} (n\psi_{-n}\psi_n + \frac{1}{16})^1$. O vácuo deve carregar uma representação da álgebra de Clifford eq.(2.35). A menor representação irredutível tem 2 dimensões, $|\frac{1}{16}\rangle_{\pm}$ e é construída explicitamente através de matrizes de Pauli. É natural a identificação:

$$\begin{aligned} \sigma(0)|0\rangle &\equiv |\frac{1}{16}\rangle_+ \\ \mu(0)|0\rangle &\equiv |\frac{1}{16}\rangle_- \end{aligned}$$

Esta representação diagonaliza $(-1)^F$ com autovalor indicado.

A ação para os férmions eq.(2.31) contém férmions holomórficos e anti-holomórficos. Pode-se generalizar a análise dos modos zero definindo-se um operador $(-1)^F$ para cada setor:

$$\{(-1)^{FL}, \psi(z)\} = \{(-1)^{FR}, \bar{\psi}(\bar{z})\} = 0$$

e o vácuo é o produto tensorial:

$$|\frac{1}{16}\rangle_{L\pm} \otimes |\frac{1}{16}\rangle_{R\pm} \quad (2.36)$$

notando agora que $\{\psi_n, \bar{\psi}_m\} = 0$, vê-se que ψ e $\bar{\psi}$ formam, por si, uma álgebra de Clifford 2-dimensional que pode ser utilizada para definir o operador $(-1)^F \equiv (-1)^{FL+FR}$, sobre a qual a representação 4-dimensional eq.(2.36) é redutível, dividindo-se em:

$$|\frac{1}{16}, \frac{1}{16}\rangle_{\pm}, \quad |\frac{1}{16}, \frac{1}{16}\rangle'_{\pm},$$

¹Obtido através do tensor momento-energia de maneira análoga ao caso do bóson livre. O termo $\frac{1}{16}$ é análogo ao termo $\frac{1}{2}a_0^2$, fornecendo o peso conforme do vácuo.

Isto garante que, no que se refere a álgebra de $\{\psi, \bar{\psi}, (-1)^F\}$ pode-se consistentemente considerar apenas um destes setores, projetando o outro para fora do espectro da teoria. Mais adiante será clara a conexão entre este procedimento algébrico e a projeção *GSO* na supercorda.

2.2.8 Tópicos de Invariância Modular

Até o momento considerou-se apenas teorias conformes definidas na esfera de Riemann, no entanto, pode-se requerer que estas teorias sejam definidas em superfícies de Riemann de genus arbitrário.

A seguir são apresentadas restrições às teorias conformes definidas em um toro. O toro pode ser definido através de identificações no plano complexo. A partir de dois vetores de base, forma-se uma rede, onde todos os pontos conectados por uma combinação linear dos vetores de base são identificados.

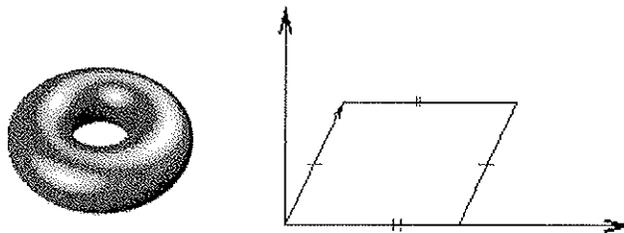


Figura 2.3: Duas visões do toro. Uma visão artística e uma implementação operacional como uma rede no plano complexo

As simetrias de reparametrização, rotação, translação e dilatação podem ser utilizadas para fixar um dos vetores paralelo ao eixo real e de módulo unitário, de forma que o toro é parametrizado por um único parâmetro complexo τ , conforme indicado na figura 2.3.

Considerando o tempo na direção imaginária e o espaço na direção real, lembrando que a Hamiltoniana H gera translações temporais e o operador

de momento P gera translações espaciais, a função de partição de um campo se propagando no toro é:

$$Z(\tau) \equiv \int D\phi e^{-S_E(\phi)} = \text{Tr} e^{-2\pi\text{Im}(\tau)H} e^{i2\pi\text{Re}(\tau)P}, \quad (2.37)$$

onde o traço é tomado sobre todo o espaço de Hilbert e S_E é a ação euclideana.

Para entender melhor esta expressão para a função de partição, deve-se voltar um pouco e compreender a relação entre o plano e o cilindro. Em particular, o tensor momento-energia não é um campo conforme primário, tendo uma transformação conforme diferente:

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon T(w) &= [Q_\epsilon, T(w)] = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \epsilon(z) T(z) T(w) \\ &= \epsilon(w) \partial T(w) + 2\partial\epsilon(w) T(w) + \frac{c}{12} \partial^3 \epsilon(w) \end{aligned}$$

Na forma finita esta transformação é:

$$\begin{aligned} T(w) &\mapsto [\partial f]^2 T(f(w)) + \frac{c}{12} S(f, w) \\ S(f, z) &= \frac{\partial f \partial^3 f - \frac{3}{2} (\partial^2 f)^2}{(\partial f)^2} \end{aligned}$$

A transformação do plano para o cilindro é $w = e^{iz}$, para a qual:

$$T_{\text{cil}}(z) = - \left[w^2 T(w) - \frac{c}{24} \right]$$

lembrando da expansão em modos no plano complexo $T(w) = \sum_n w^{-n-2} L_n$:

$$\begin{aligned} T_{\text{cil}}(z) &= - \left[\sum_n e^{-nz} L_n - \frac{c}{24} \right] \\ H &= L_0 \bar{L}_0 - \frac{c}{12} \\ P &= L_0 - \bar{L}_0. \end{aligned}$$

Com estes resultados, pode-se re-escrever a função de partição para o toro:

$$\begin{aligned} Z(\tau) &= \text{Tr} e^{2\pi i \tau (L_0 - \frac{c}{24})} e^{-2\pi i \bar{\tau} (\bar{L}_0 - \frac{c}{24})} \equiv \sum_{h, \bar{h}} M_{h, \bar{h}} \chi_{c, h}(\tau) \chi_{c, \bar{h}}(\bar{\tau}) \\ \chi_{c, h} &= \text{Tr}_{V(c, h)} e^{2\pi i (L_0 - \frac{c}{24})} \end{aligned}$$

onde define-se o **Caracter de Virasoro** $\chi_{(c,h)}(\tau)^2$. A matriz M representa as multiplicidades de cada estado de peso máximo $|h, \bar{h}\rangle$ no espectro da teoria considerada.

Até o momento o toro foi definido por uma escolha de rede gerada pelos vetores correspondentes aos pontos 1 e τ no plano complexo. No entanto, qualquer transformação da forma:

$$\tau \mapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1$$

preserva a mesma rede e portanto o mesmo toro. O grupo gerado por estas transformações é o **Grupo Modular** $SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}_2$, gerado pelas transformações:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \tau &\mapsto \tau + 1 \\ \mathcal{S} : \tau &\mapsto -\frac{1}{\tau}. \end{aligned}$$

A imposição de que a função de partição $Z(\tau)$ seja **invariante modular**, isto é, que não seja sensível a mudança da parametrização do toro impõe severas restrições a teoria. Para compreender melhor como este procedimento funciona é conveniente o tratamento de um exemplo:

Férmion Livre no Toro

A ação para o férmion já discutida é:

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2z (\psi \bar{\partial} \psi + \bar{\psi} \partial \bar{\psi})$$

define uma teoria conforme com $c = 1/2$. Conforme a condição de contorno pode-se ter estados Neveu-Schwarz (NS) ou Ramond (R). Para o primeiro caso a expansão em modos toma valores semi-inteiros, $L_0 = \sum_{n>0} n \psi_{-n} \psi_n$ e os primeiros estados deste setor são:

h	$Estado$
0	$ 0\rangle$
$\frac{1}{2}$	$\psi_{-1/2} 0\rangle$
$\frac{3}{2}$	$\psi_{-3/2} 0\rangle$
2	$\psi_{-3/2}\psi_{-1/2} 0\rangle$
...	...

²O caracter de Virasoro é uma característica da representação do grupo conforme global, codificando informação sobre todo o módulo de Verma $V(c, h)$

esta representação não é irredutível. De fato, os autovalores de L_0 não variam em passo inteiro e, observando os dois primeiros níveis, vê-se que os módulos de Verma $V_{(\frac{1}{2},0)}$ e $V_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}$ estão misturados, cada um com multiplicidade 1. Como os estados de autovalor h inteiro têm número par de operadores fermiônicos e os estados de h semi-inteiro têm número ímpar de operadores fermiônicos, pode-se separar os dois módulos deste setor através do operador de projeção $\frac{1}{2}(1 + (-1)^F)$:

$$\begin{aligned}\chi_{(\frac{1}{2},0)}(\tau) &= q^{-\frac{1}{48}} \text{Tr}_{NS} \frac{1}{2} (1 + (-1)^F) q^{L_0} \\ \chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(\tau) &= q^{-\frac{1}{48}} \text{Tr}_{NS} \frac{1}{2} (1 - (-1)^F) q^{L_0} \\ q &= e^{2\pi i \tau},\end{aligned}$$

notando ainda que:

$$\begin{aligned}\left(\chi_{(\frac{1}{2},0)} + \chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}\right) &= \text{Tr}_{NS} q^{L_0 - \frac{c}{24}} = q^{-\frac{1}{48}} \prod_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} (1 + q^r) \\ \left(\chi_{(\frac{1}{2},0)} - \chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}\right) &= \text{Tr}_{NS} (-1)^F q^{L_0 - \frac{c}{24}} = q^{-\frac{1}{48}} \prod_{r=\frac{1}{2}}^{\infty} (1 - q^r)\end{aligned}$$

Para o setor Ramond, $L_0 = \sum_{n>0} \psi_{-n} \psi_n + \frac{1}{16}$ e existem dois vácuos, conforme a discussão anterior sobre os modos zero. É evidente que dois módulos de Verma $V_{(\frac{1}{2},\frac{1}{16})}$, cada um com multiplicidade 1, aparecem neste setor:

$$\begin{aligned}\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{16})} &= \text{Tr}_R \frac{1}{2} (1 \pm (-1)^F) q^{L_0 - \frac{1}{48}} \\ \text{Tr}_R (-1)^F q^{L_0} &= 0.\end{aligned}$$

Em um toro existem 2 ciclos para os quais pode-se escolher as condições de contorno R ou NS , num total de quatro possibilidades:

$$(NS, NS) \quad (R, NS) \quad (NS, R) \quad (R, R)$$

a primeira entrada indica a condição de contorno na coordenada espacial e a segunda entrada indica a condição de contorno na coordenada temporal. Do ponto de vista de operadores, a primeira letra indica se os osciladores têm modos inteiros ou semi-inteiros. A alteração da condição de contorno na direção temporal é feita através do operador $(-1)^F$, que anti-comuta com todos os férmions.

Pode-se escrever a função de partição para cada setor, tanto em termos de osciladores quanto em termos de caracteres:

$$\begin{aligned} Z_{(NS,NS)} &= q^{-\frac{1}{48}} \text{Tr}_{NS} q^{L_0} = q^{-\frac{1}{48}} \Pi_{n \geq 0} \left(1 + q^{n+\frac{1}{2}} \right) = \chi_{(\frac{1}{2},0)} + \chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} \\ Z_{(R,NS)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} q^{-\frac{1}{48}} \text{Tr}_R q^{L_0} = \frac{1}{\sqrt{2}} q^{\frac{1}{24}} \Pi_{n \geq 0} (1 + q^n) = \sqrt{2} \chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{16})} \\ Z_{(NSR)} &= q^{-\frac{1}{48}} \text{Tr}_{NS} (-1)^F q^{L_0} = q^{-\frac{1}{48}} \Pi_{n \geq 0} \left(1 - q^{n+\frac{1}{2}} \right) = \chi_{(\frac{1}{2},0)} - \chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} \\ Z_{(R,R)} &= \frac{1}{\sqrt{2}} q^{-\frac{1}{48}} \text{Tr}_R (-1)^F q^{L_0} = 0 \end{aligned}$$

onde fatores convencionais de $\sqrt{2}$ foram inseridos.

Transformações modulares misturam estas condições de contorno (à exceção do setor RR , que é invariante modular por si mesmo), de forma que não é consistente reter apenas um dos setores, todos devem estar incluídos na teoria. Na ação escrita no começo desta discussão haviam férmions holomórficos e anti-holomórficos, aparentemente pode-se fazer as mesmas quatro escolhas de condições de contorno para estes férmions independentemente. Invariância modular impõe restrições aqui também, e deve-se considerar as mesmas condições de contorno para o setor holomórfico e anti-holomórfico. Pode-se agora escrever a função de partição para o modelo do férmion livre no toro:

$$Z(\tau) = |\chi_{(\frac{1}{2},0)}|^2 + |\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}|^2 + |\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{16})}|^2$$

obtendo uma função de partição da forma esperada a partir da exposição anterior. Resta ainda notar que selecionou-se o autovalor $(-1)^F = 1$ neste cálculo, embora o outro autovalor também fosse possível. A escolha deste autovalor, na supercorda, é a **Projeção GSO**, como será discutido mais tarde.

2.2.9 Bosonização

Em duas dimensões a álgebra de Virasoro impõe severas restrições às teorias com esta simetria, possibilitando diversas equivalências surpreendentes entre modelos aparentemente distintos.

Nesta seção a relação entre bósons e férmions em 2-dimensões é estudada através de alguns exemplos úteis no que segue. É importante salientar que

esta equivalência aqui descrita é muito mais geral do que parece a primeira vista, encontrando suas raízes na teoria de representações de álgebras de Lie afins.

Para abranger os casos de interesse no restante do trabalho considera-se modelos bosônicos e fermiônicos um pouco generalizados:

Bóson Livre com Carga de Fundo

Considere uma alteração na ação do bóson livre discutido anteriormente de forma que o tensor momento-energia seja:

$$T(z) = -\frac{1}{2} : \partial\phi\partial\phi : + a\partial^2\phi \quad (2.38)$$

O propagador do bóson permanece inalterado $\phi(z)\phi(w) \sim -\ln|z-w|^2$. Calculando a OPE:

$$T(z)\partial\phi(w) \sim \frac{2a}{(z-w)^3} + \frac{\partial\phi}{(z-w)^2} + \frac{\partial^2\phi}{z-w},$$

ou seja, $\partial\phi$ não é mais um campo superconforme primário, embora mantenha o mesmo peso conforme. No entanto, o operador de vértice $V_q =: \exp iq\phi :$ tem a seguinte OPE:

$$\partial^2\phi(z)V_q(w) \sim \frac{iq\phi}{(z-w)^2}V_q$$

logo, o peso conforme deste campo é alterado para $h = q^2/2 + iqa$ e ele permanece sendo um campo primário.

A carga central também sofre alteração, calculando a OPE do último termo do tensor momento-energia, verifica-se que:

$$c = 1 + 12a.$$

Este modelo é obtido acoplado-se o bóson livre a curvatura escalar da variedade em que se define a teoria, embora este aspecto não será abordado aqui. Este modelo é largamente utilizado, junto com a técnica de bosonização que será descrita nesta seção, pela facilidade computacional que proporciona. Evidentemente se toma-se a **carga de fundo** $a = 0$, o bóson livre é re-obtido.

A seguir será apresentada uma generalização do férmion livre.

Sistema bc

Considere campos grassmanianos $b(z)$ e $c(z)$, com a seguinte ação:

$$S = \frac{1}{2\pi} \int d^2z b \bar{\partial} c, \quad (2.39)$$

as equações de movimento são:

$$\begin{aligned} \bar{\partial} b(z) &= \bar{\partial} c(z) = 0 \\ \bar{\partial} b(z) c(0) &= 2\pi \delta^2(z, \bar{z}) \end{aligned}$$

o propagador, portanto, é:

$$b(z)c(w) \sim \frac{1}{z-w}, \quad (2.40)$$

os campos tem os seguintes pesos conformes:

$$h_c = 1 - \lambda \quad h_b = \lambda.$$

O tensor momento-energia é:

$$T(z) = :(\partial b)c: - \lambda \partial(:bc:) \quad (2.41)$$

e a carga central é dada pelo termo com pólo quártico na OPE $T(z)T(w)$. Calculando só os termos com número máximo de contrações:

$$\begin{aligned} :(\partial b)c(z)::(\partial b)c(w): &\sim -\frac{1}{(z-w)^4} + \mathcal{O}[(z-w)^3] \\ :(\partial b)c(z)::(\partial bc(w)):&\sim -\frac{3}{(z-w)^4} + \mathcal{O}[(z-w)^3] \\ :(\partial bc)(z)::(\partial bc(w)):&\sim -\frac{6}{(z-w)^4} + \mathcal{O}[(z-w)^3] \end{aligned}$$

de onde conclui-se que:

$$c = 2 + 12\lambda - 12\lambda^2. \quad (2.42)$$

Para $\lambda = 1/2$, $c = 1$, $h_b = h_c = 1/2$, definindo $b \equiv \psi$ e $c \equiv \bar{\psi}$, pode-se escrever:

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + i\psi_2), \quad \bar{\psi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 - i\psi_2)$$

e verifica-se que se pode construir dois sistemas de férmions livres independentes:

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \psi_1 \bar{\partial} \psi_1 + \psi_2 \bar{\partial} \psi_2$$

recuperando o modelo de férmions livres.

Pode-se considerar ainda o mesmo modelo com campos comutantes, usualmente denotados por β e γ . O sinal das OPE é alterado:

$$\beta(z)\gamma(w) \sim -\frac{1}{z-w}, \quad \gamma(z)\beta(w) \sim \frac{1}{z-w}$$

e a carga central têm o sinal oposto ao caso grassmaniano:

$$c = -2 - 12\lambda + 12\lambda^2$$

Os dois modelos descritos acima são famílias de teorias conformes rotuladas por um parâmetro. A principal característica de uma teoria conforme é a sua carga central, assim:

$$c_{\text{boson}} = b_{\text{bc}} \Rightarrow a = i\left(\lambda - \frac{1}{2}\right),$$

com este valor de carga central verifica-se que:

$$\begin{aligned} h[b] = h[e^{-i\phi}] &= \lambda \\ h[c] = h[e^{i\phi}] &= 1 - \lambda \end{aligned}$$

e as OPE's:

$$\begin{aligned} b(z)c(w) &\sim \frac{1}{z-w} & e^{-i\phi}(z)e^{+i\phi}(z) &\sim \frac{1}{z-w} \\ b(z)b(w) &\sim \mathcal{O}(z-w) & e^{-i\phi}(z)e^{+i\phi}(z) &\sim \mathcal{O}(z-w) \\ b(z)c(w) &\sim \mathcal{O}(z-w) & e^{-i\phi}(z)e^{+i\phi}(z) &\sim \mathcal{O}(z-w) \end{aligned}$$

e as duas famílias de teorias são de fato equivalentes, isto é, qualquer função de correlação calculada é idêntica à função na outra teoria, com a redefinição dos campos. Embora esta equivalência não tenha sido demonstrada aqui, o leitor pode encontrá-la facilmente na literatura disponível. (Note em particular que o tensor momento-energia das duas teorias é igual, através da redefinição dos campos).

Um procedimento análogo pode ser realizado para o sistema $\beta\gamma$, fermionizando-o. Os detalhes da correspondência são mais sutis, mas para os propósitos deste trabalho basta notar que:

$$\begin{aligned} \beta(z) &\equiv e^{-\phi} \partial \xi(z) & \gamma(z) &\equiv e^{\phi} \eta(z) \\ &\text{onde} & & \\ \phi(z)\phi(0) &\sim -\ln z & \eta(z)\xi(0) &\sim \frac{1}{z} \\ \eta(z)\eta(0) &\sim \mathcal{O}(z) & \xi(z)\xi(0) &\sim \mathcal{O}(z) \end{aligned}$$

onde redefiniu-se $\phi \mapsto i\phi$. Para que a equivalência valha, precisa-se determinar o valor da carga de fundo para o bóson quirial ϕ e a carga central do sistema (η, ξ) , análogo ao sistema (b, c) . Não é difícil de ver que os valores devem ser:

$$\begin{aligned} h[\beta] &= \lambda' & h[\gamma] &= 1 - \lambda' \\ h[\eta] &= 1 & h[\xi] &= 0 \\ a &= \frac{1}{2}(1 - 2\lambda') \end{aligned}$$

2.3 Teorias Superconformes de Campos

A álgebra de Virasoro pode ser estendida de várias formas, através da inclusão de correntes, mantendo a estrutura das representações e preservando muitas das notáveis características de teorias conformes. Ainda, uma simetria maior restringe mais fortemente o cálculo de amplitudes e adiciona estruturas não-triviais ao estado fundamental.

A seguir, um particular tipo de extensão da álgebra de Virasoro é considerado, onde são introduzidas correntes fermiônicas de peso conforme $h = 3/2$. Ênfase é dada a caracterização da álgebra e suas representações, uma vez que a maior parte das estruturas da teoria conforme de campos se preservam.

2.3.1 $N = 1$ Superconforme

Define-se a álgebra superconforme $N = 1$ através das OPE's:

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \quad (2.43)$$

$$T(z)G(w) \sim \frac{3/2}{(z-w)^2}G(w) + \frac{\partial G(w)}{z-w} \quad (2.44)$$

$$G(z)G(w) \sim \frac{2c/3}{(z-w)^3} + \frac{2T(w)G(w)}{z-w}, \quad (2.45)$$

onde $T(z)$ é o tensor momento-energia usual e $G(w)$ é um campo grassmaniano de peso conforme $3/2$. Pode-se expandir estes campos em modos, para os modos de T obtém-se os geradores de Virasoro e:

$$G_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+\frac{1}{2}} G(z)$$

estes modos G_n podem ser rotulados por um número inteiro ou semi-inteiro, dando origem aos setores Ramond ou Neveu-Schwarz, respectivamente. Em termos dos modos, a álgebra $N = 1$ é:

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^2-n^2)\delta_{m+n,0} \quad (2.46)$$

$$[L_m, G_n] = [m/2 - n]G_{m+n} \quad (2.47)$$

$$\{G_m, G_n\} = 2L_{m+n} + \frac{c}{3}(m^2 - 1/4)\delta_{m+n,0}. \quad (2.48)$$

Fisicamente o campo $G(z)$ é a corrente de supersimetria (em duas dimensões). Como consequência da expressão em eq.(2.48), $G_0^2 = L_0 - \frac{c}{24}$ e portanto supersimetria (em duas dimensões) não está quebrada se o estado fundamental tem dimensão $h = c/24$.

A teoria de representações desta álgebra é análoga à teoria de representações da álgebra de Virasoro. Um **campo superconforme primário** é associado ao estado de peso máximo $|h\rangle$:

$$\begin{aligned} L_0|h\rangle &= h|h\rangle \\ L_n|h\rangle &= G_n|h\rangle = 0, \quad n > 0. \end{aligned}$$

No entanto, os estados de peso máximo não exaurem o conjunto de campos presentes na teoria. O vácuo $|0\rangle$, tendo peso conforme $h = 0$ deve estar no

setor NS e a operação de campos primários não é capaz de mudar a condição de contorno dos campos, não podendo, assim, gerar estados Ramond.

Um problema análogo já foi discutido na seção sobre férmions livres e a solução aqui também é análoga. Os estados Ramond são criados através da atuação de um **spin field**, análogo ao operador de torção que foi discutido para os férmions livres. Este operador tem uma OPE não local com os campos fermiônicos do setor NS.

Os modos L_0 e G_0 comutam entre si, o que implica nos campos de spin aparecendo em pares:

$$\begin{aligned} |h_{\pm}\rangle &= S^{\pm}(0)|0\rangle \\ |h^+\rangle &= G_0|h^-\rangle \\ (h - \frac{c}{24})|h^-\rangle &= G_0|h^+\rangle, \end{aligned}$$

para construir uma teoria local, isto é, sem OPE's com cortes de raiz quadrada, pode-se efetuar a projeção GSO , escolhendo-se o autovalor do operador $(-1)^F = +1$. De acordo com a discussão anterior, esta escolha é possível e consistente e, de fato, necessária para a construção de uma teoria invariante modular.

Também aqui pode-se discutir as questões de unitariedade com técnicas análogas ao caso conforme. O resultado é:

Teorema 2 (*Unitariedade*) *Apenas para um conjunto discreto de valores de carga central $c < \frac{2}{3}$ uma teoria superconforme $N = 1$ é unitária:*

$$\begin{aligned} \frac{3c}{2} &= 1 - \frac{8}{m(m+2)} \\ h_{p,q} &= \frac{[(m+2)p - mq]^2 - 4}{8m(m+2)} + \frac{1}{32}(1 - (-1)^{p-q}) \\ m = 2, 3, \dots, \quad 1 \leq p < m \quad 1 \leq q < m+2 \\ p - q \in 2\mathbb{Z} &\quad \text{setor NS} \\ p - q \in 2\mathbb{Z} + 1 &\quad \text{setor R} \end{aligned}$$

Se $c \geq \frac{2}{3}$ as teorias superconformes são unitárias para $h \geq 0$ no setor Neveu-Schwarz e $h \geq \frac{3}{8}$ no setor Ramond.

2.3.2 $N = 2$ Superconforme

Pode-se estender a álgebra de Virasoro introduzindo-se mais de um operador G , como G é uma corrente supersimétrica, este procedimento produz uma teoria com supersimetria estendida.

Se dois operadores G são introduzidos, a álgebra superconforme $N = 2$ resultante é:

$$T(z)T(w) \sim \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \quad (2.49)$$

$$T(z)G^\pm(w) \sim \frac{3/2G^\pm}{(z-w)^2} + \frac{\partial G^\pm(w)}{z-w} \quad (2.50)$$

$$T(z)J(w) \sim \frac{J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J(w)}{z-w} \quad (2.51)$$

$$G^+(z)G^-(w) \sim \frac{c2/3}{(z-w)^3} + \frac{2J(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial J(w) + 2T(w)}{z-w} \quad (2.52)$$

$$J(z)G^\pm(w) \sim \pm \frac{G^\pm}{(z-w)} \quad (2.53)$$

$$J(z)J(w) \sim \frac{c/3}{(z-w)} \quad (2.54)$$

nesta álgebra aparecem características adicionais. A primeira equação é a álgebra de Virasoro usual, a OPE de T com G apenas diz que este último é um campo primário de peso conforme $3/2$ e há uma corrente adicional J de peso conforme 1, necessária para escrever a OPE entre os diferentes G 's, devido a considerações dimensionais. A relação entre os diversos termos com carga central é definida através das identidades de Jacobi que devem ser satisfeitas ao se escrever a álgebra em modos, que podem ser definidos da seguinte forma:

$$J(z) = \sum J_n z^{-n-1}$$

$$G^\pm(z) = \sum_{n \pm a}^\pm z^{-(n \pm a) - \frac{3}{2}},$$

onde o parâmetro $a \in [0, 1)$ foi introduzido para controlar as condições de contorno para os férmions:

$$G^\pm(e^{2\pi i} z) = -e^{\mp 2\pi i a} G^\pm(z),$$

como nos exemplos anteriores, se $a \in \mathbb{Z}$ define-se o setor Ramond e para $a \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ define-se o setor Neveu-Schwarz.

Em termos dos modos a álgebra é:

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{c}{12}m(M^2 - 1)\delta_{m+n,0} \quad (2.55)$$

$$[J_m, J_n] = \frac{c}{3}m\delta_{m+n,0}$$

$$[L_m, J_n] = -mJ_{m+n}$$

$$[L_n, G_{m\pm a}^\pm] = \left[\frac{n}{2} - (m \pm a) \right] G_{m+n\pm a}^\pm \quad (2.56)$$

$$[J_n, G_{m\pm a}^\pm] = \pm G_{m+n\pm a}^\pm$$

$$\{G_{n+a}^+, G_{m-a}^-\} = 2L_{m+n} + (n - m + 2a)J_{n+m} + \frac{c}{3} \left((n+a)^2 - \frac{1}{4} \right) \delta_{m+n,0}$$

A teoria de representações desta álgebra também é desenvolvida de maneira semelhante à Álgebra de Virasoro. Um estado de peso máximo é:

$$\begin{aligned} L_0|\phi\rangle &= h|\phi\rangle & J_0|\phi\rangle &= Q|\phi\rangle \\ L_n|\phi\rangle &= 0 & J_m|\phi\rangle &= 0 \\ G_r^\pm|\phi\rangle &= 0 & n, r, m &> 0 \end{aligned}$$

o estado fundamental no setor Ramond é aniquilado por G_0^\pm .

Levando em conta apenas o setor NS no momento, define-se um **campo** $N = 2$ **quiral** se a OPE $G^+(z)\phi(w)$ for regular, ou seja, se $G_{1/2}^+|\phi\rangle = 0$. De forma análoga pode-se definir o **campo** $N = 2$ **anti-quiral**, que tem a OPE com G^- regular.

Estes campos têm propriedades importantes. Se a álgebra $N = 2$ superconforme não é degenerada:

- Existe um número **finito** de campos (anti)-quirais.
- Os campos (anti)quirais formam uma álgebra de operadores não-singular fechada, através do qual pode-se construir um *anel* (anti)quiral.
- $h_\phi \geq Q_\phi/2$ para qualquer estado na álgebra. Esta desigualdade só é saturada para campos (anti)quirais.

A álgebra definida em termos dos modos contém um parâmetro a , mostrando que, para cada valor deste parâmetro, têm-se uma álgebra diferente. Contudo, toda esta família de álgebras é isomorfa. Para compreender

melhor este isomorfismo considere $a \equiv \eta + \frac{1}{2}$, de sorte que:

$$G_{m+a}^+ \equiv G_{m+\frac{1}{2}+\eta}^+ \quad G_{m-a}^- \equiv G_{m-\frac{1}{2}+\eta}^-$$

define-se o **fluxo espectral** como a transformação (unitária):

$$\begin{aligned} T_\eta(z) &= T(z) + \eta J(z) + \frac{c\eta^2}{6} \delta_{n,0} \\ J_\eta(z) &= J(z) + \frac{c}{3} \eta \delta_{n,0} \\ G_{\eta}^\pm &= G_{r \pm \eta}^\pm \end{aligned}$$

estes operadores satisfazem a álgebra $N = 2$ superconforme para qualquer valor do parâmetro η . Note agora que os pesos conformes e as cargas J se alteram sob esta operação:

$$\begin{aligned} h_\eta &= h + \eta Q + \frac{c}{6} \eta^2 \\ Q_\eta &= Q + \frac{c}{3} \eta. \end{aligned}$$

Tomando a corrente J em sua forma bosonizada:

$$J(z) = i\sqrt{\frac{c}{3}} \partial\phi(z)$$

pode-se representar um estado de carga arbitrária Q por:

$$|Q\rangle = e^{i\sqrt{\frac{3}{c}}Q\phi} |\chi\rangle$$

onde χ é um estado com carga $Q = 0$.

O operador de fluxo espectral pode então ser identificado com:

$$U(\eta) = \exp \left[-i\sqrt{\frac{c}{3}} \eta \phi(z) \right]$$

sobre este operador, os geradores da álgebra se transformam na adjunta e os estados na representação fundamental.

O fluxo espectral mapeia os setores NS e R, se η varia de 0 a $\frac{1}{2}$. Variações inteiras de η mapeiam o setor NS em si mesmo, ou o setor Ramond em si mesmo.

Retornando a considerar a parte anti-holomórfica da álgebra, notamos que o **índice de Witten** é invariante com respeito ao fluxo espectral e a seguinte relação pode ser verificada:

$$\begin{aligned} \text{Tr} (-1)^F &= \text{Tr}_R \left[(-1)^{J_0 - \bar{J}_0} q^{L_0 - c/24} \bar{q}^{\bar{L}_0 - c/24} \right] \\ &= \text{Tr}_{NS} \left[(-1)^{J_0 - \bar{J}_0} q^{L_0 - J_0/2} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \bar{J}_0/2} \right] \\ &= \sum_{\mathcal{K}} e^{i\pi(Q + \bar{Q})} \end{aligned}$$

onde usou-se uma particular representação para o operador $(-1)^F = \exp[i\pi(J_0 - \bar{J}_0)]$, devido a OPE da corrente quirial com os operadores G . A segunda igualdade é conseqüência do fluxo espectral e a soma em \mathcal{K} representa a soma sobre o anel quirial-quirial apenas.

O aparecimento da supersimetria no espaço-tempo em teorias de cordas esta relacionado à existência de um fluxo espectral.

Um estado $|s\rangle$ é dito estar no **setor η -torcido** se o operador correspondente $s(z)$ tem uma OPE com os G envolvendo termos da forma $(z-w)^{m \pm \eta}$, onde $m \in \mathbb{Z}$.

Pode-se incluir ainda mais supersimetrias, na seção sobre formalismo híbrido a teoria superconforme $N = 4$ será discutida.

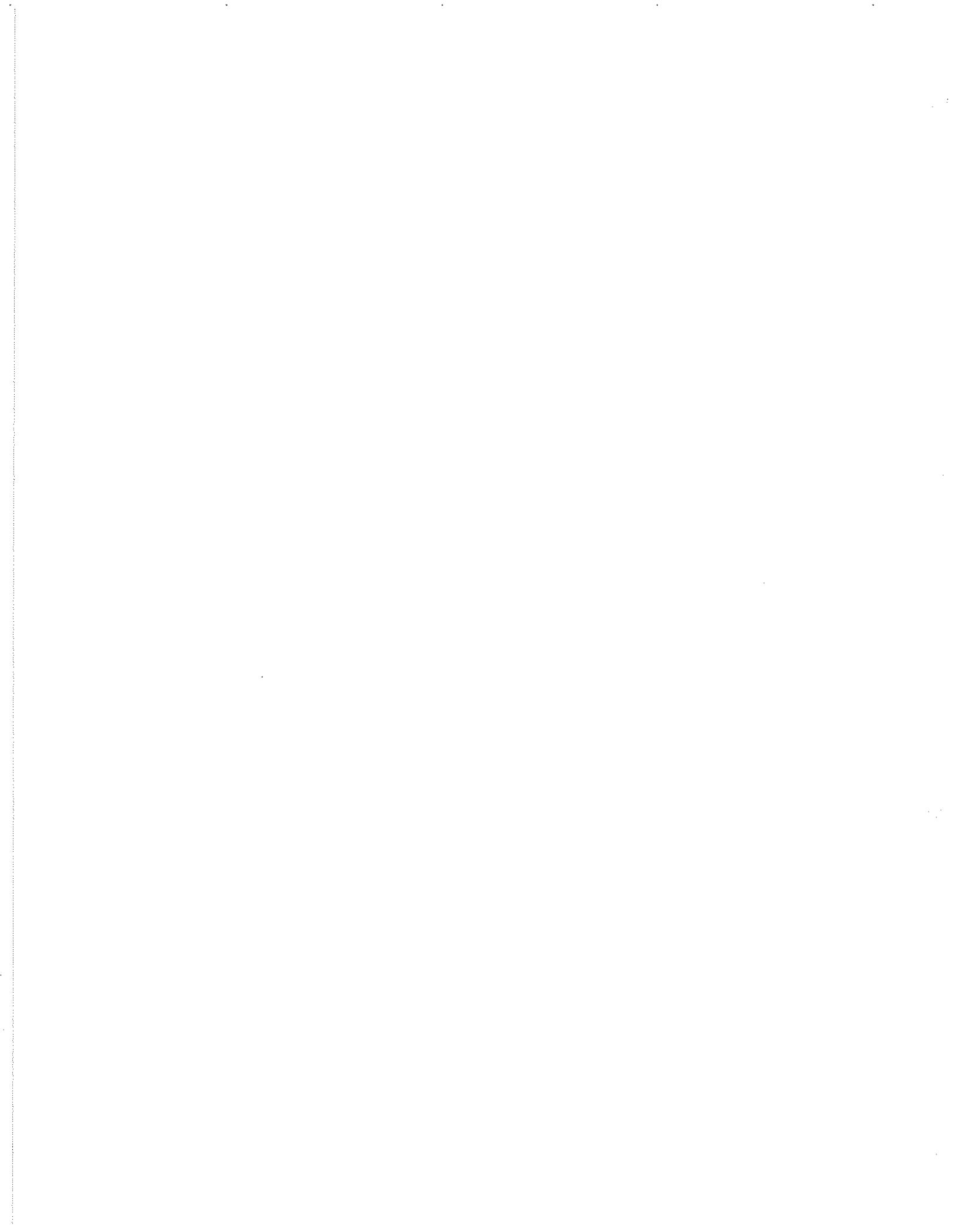
2.4 Nota Bibliográfica

Todo o material contido nesta seção pode ser encontrado em livros texto e artigos de revisão sobre Teorias Conformes de Campos. Nenhuma pretensão quanto a ser esta uma explicação auto-contida, abrangente, ou melhor do que alguns dos excelentes livros a disposição é implicada.

Grande parte do material aqui exposto é baseado em [DFMS97, Pol88a, Gin88, Sch96]. Textos sobre teorias superconformes de campos podem ser encontradas em [LT89, Ket95, FMS86].

Muitos artigos importantes podem ser encontrados em [GO88].

Teorias superconformes $N = 2$ podem ser encontradas com algum detalhe, incluindo aspectos de *moduli* não discutidos aqui, em [Gre96, Asp94, War93].



Capítulo 3

Supercordas RNS

Utilizando o ferramental desenvolvido no capítulo anterior apresenta-se brevemente a supercorda com supersimetria manifesta na folha mundo, com ênfase na quantização BRST e na construção dos operadores de Vértice. Assumindo alguma familiaridade com a corda bosônica, os conceitos de teorias conformes são primeiro introduzidos neste contexto, de maneira um pouco esquemática. No tratamento da supercorda são preenchidos mais detalhes e usa-se extensivamente os resultados do capítulo anterior.

O objetivo deste capítulo é descrever brevemente a propagação de um objeto unidimensional no espaço-tempo, a **corda**, explicitando a ação utilizada e as simetrias desta ação. A corda bosônica é utilizada apenas como aquecimento para o caso mais complexo da supercorda, e os detalhes não serão desenvolvidos.

Introduzindo-se supersimetria na folha-mundo, as técnicas de teorias superconformes são utilizadas extensamente e particular atenção é dada à quantização BRST, a peça fundamental para a formulação da teoria de campos de cordas, devido a estrutura covariante e a interpretação geométrica que nos fornece.

A construção de operadores de vértice para a supercorda é considerada com detalhe e é parte fundamental do trabalho a seguir, em particular, o problema de **Picture** é considerado e tratado com cuidado, a construção de vértices fermiônicos é analisada e algumas noções sobre o cálculo de amplitudes são introduzidas (tanto no caso bosônico como no fermiônico).

O tratamento enfatiza a supercorda fechada, descrevendo, no entanto, apenas um setor desta com detalhes. A supercorda aberta será considerada

com mais detalhe juntamente com as D-branas, uma vez que estes tópicos estão intimamente relacionados.

O material aqui exposto pode ser encontrado em diversas revisões e é material padrão na apresentação de cordas e supercordas, de forma que as referências não serão inseridas no corpo do texto, mas apenas na seção final, com alguns comentários.

3.1 Corda Bosônica

3.1.1 Teoria clássica e suas simetrias

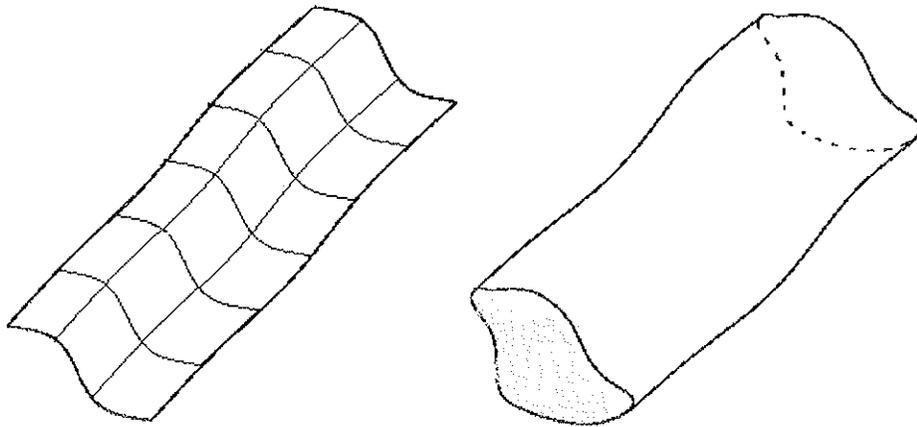


Figura 3.1: Folha-mundo das cordas abertas e fechadas se propagando no espaço-tempo.

A ação que descreve a propagação de uma corda em um espaço \mathcal{M} é a ação de Polyakov:

$$S = -\frac{T}{2} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{-h} h^{\alpha\beta} \partial_{\alpha} X^{\mu} \partial_{\beta} X^{\nu} G_{\mu\nu}(X), \quad (3.1)$$

onde σ parametriza a folha-mundo Σ da corda em sua evolução temporal, dotada de uma métrica $h_{\alpha\beta}$, cujo determinante é $-h$. $X(\sigma)$ descreve a imersão da folha-mundo no espaço-tempo $X : \Sigma \mapsto \mathcal{M}$.

Da forma como está escrita, esta ação descreve cordas se propagando em um espaço curvo de métrica $G_{\mu\nu}$, contudo, no presente trabalho apenas

serão consideradas variedades planas, com métrica Minkowski:

$$G_{\mu\nu}(X) \equiv \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(- + \underbrace{+ \cdots +}_{D-1}).$$

A constante dimensional T multiplicando a ação pode ser interpretada fisicamente como a tensão da corda. Frequentemente será considerado também $T = \frac{1}{2\pi\alpha'}$.

Esta ação possui importantes simetrias, tanto locais como globais:

Invariância de Poincaré Invariância global sobre a transformação:

$$\begin{aligned}\delta X^\mu &= \Lambda^\mu{}_\nu X^\nu + a^\mu \quad (\Lambda_{\mu\nu} = -\Lambda_{\nu\mu}) \\ \delta h_{\alpha\beta} &= 0\end{aligned}$$

Invariância por Reparametrização invariância local sobre as transformações das variáveis da folha-mundo da corda:

$$\begin{aligned}\delta\sigma^\alpha &= \xi^\alpha(\sigma) \\ \delta X^\mu &= \xi^\alpha \partial_\alpha X^\mu \\ \delta h_{\alpha\beta} &= \xi^\gamma \partial_\gamma h_{\alpha\beta} + \partial_\alpha \xi^\gamma h_{\gamma\beta} + \partial_\beta \xi^\gamma h_{\alpha\gamma}\end{aligned}$$

ou, escrevendo de outra forma:

$$\begin{aligned}X'(\sigma') &= X(\sigma) \\ h_{\alpha\beta}(\sigma) &= \frac{\partial\sigma'^\gamma}{\partial\sigma^\alpha} \frac{\partial\sigma'^\delta}{\partial\sigma^\beta} h_{\gamma\delta}(\sigma')\end{aligned}$$

Invariância de Weyl Invariância local que redefine a métrica da folha-mundo:

$$\begin{aligned}\delta X^\mu &= 0 \\ \delta h_{\alpha\beta} &= 2\Lambda h_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

O tensor momento-energia é dado por:

$$T_{\alpha\beta} = -\frac{1}{T} \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{\partial S}{\partial h^{\alpha\beta}} = \frac{1}{2} \partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X_\mu - \frac{1}{4} h_{\alpha\beta} \partial_\gamma X^\mu \partial^\gamma X_\mu$$

e as equações de movimento são:

$$\begin{aligned} T_{\alpha\beta} &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{h}} \partial_\alpha \left(\sqrt{h} h^{\alpha\beta} \partial_\beta X^\mu \right) &= 0. \end{aligned}$$

obviamente as equações de movimento são definidas através de condições de contorno. Para descrever as condições de contorno convém considerar uma parametrização das cordas de forma que as cordas fechadas tenham comprimento 2π e as cordas abertas tenham comprimento π . Assim, **cordas fechadas** significam que as coordenadas obedecem a condições periódicas de contorno:

$$X^\mu(\sigma^0, 0) = X^\mu(\sigma^0, 2\pi), \quad (3.2)$$

para a **corda aberta**, pode-se ver que o termo de superfície é:

$$-\frac{T}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma^0 \sqrt{h} \delta X^\mu \partial^{\sigma^1} X_\mu \Big|_{\sigma^1=0}^{\sigma^1=\pi}$$

e as condições de contorno possíveis são:

Neumann

$$\partial^{\sigma^1} X^\mu(\sigma^0, 0) = \partial^{\sigma^1} X^\mu(\sigma^0, \pi) = 0$$

Dirichlet

$$X^\mu(\sigma^0, 0) = \text{constante} \quad X^\mu(\sigma^0, \pi) = \text{constante},$$

note que a escolha de condições de contorno pode ser diferente para cada X^μ e para cada extremo da corda. A escolha de uma condições Neumann para todas as coordenadas X garante invariância de Poincaré. Condições de Dirichlet serão necessárias para o tratamento de D-branas.

3.1.2 Quantização da Corda Bosônica

É conveniente definir $\alpha = 2$ para poder escrever expressões mais simples, podendo-se retornar a constante através de análise dimensional, uma vez que este é o único parâmetro dimensional.

Invariância por reparametrização e invariância de Weyl permitem, ao menos localmente, a fixação de um gauge $h_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$, onde a métrica da folha mundo reduz-se a métrica de Minkowski em duas dimensões. Os detalhes desta fixação de gauge e as restrições globais para esta escolha não serão tratados aqui, no entanto, pode-se argumentar com base nos graus de liberdade disponíveis que a fixação é possível. De fato, a métrica na folha-mundo tem 3 componentes independentes, reparametrização fixa 2 deles e a simetria de Weyl permite fixar o grau restante.

Fazendo agora uma rotação de Wick, para definir a teoria no espaço euclidiano, a ação de Polyakov é:

$$S = \frac{1}{8\pi} \int d^2\sigma (\partial_1 X^\mu \partial_1 X_\mu + \partial_2 X^\mu \partial_2 X_\mu),$$

utilizando coordenadas complexas:

$$z = \sigma^1 + i\sigma^2 \quad \bar{z} = \sigma^1 - i\sigma^2$$

a ação, nestas variáveis, é essencialmente a ação para o bóson livre em duas dimensões com a simetria global de Poincaré:

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu. \quad (3.3)$$

a quantização desta ação já foi estudada no capítulo anterior e pode-se proceder rapidamente a análise de suas características. Alguns elementos desta quantização serão salientados assumindo que o leitor tenha algum conhecimento sobre outros métodos de quantização desta teoria, de forma que apenas algumas idéias centrais são apresentadas, mostrando-se a relação entre os diferentes formalismos.

Cada bóson contribui com $c = 1$, de forma que a carga central é $c = D$. O tensor momento energia é:

$$T(z) = -\frac{1}{2} : \partial X^\mu \partial X_\mu : \quad (3.4)$$

e os geradores de Virasoro, escritos em termos dos modos de oscilações de X são:

$$L_m = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} : \alpha_{m-n} \alpha_n : \quad (3.5)$$

$$L_0 = \frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \alpha_n, \quad (3.6)$$

onde contração sobre os índices de Lorentz é subentendida. O parâmetro contínuo α_0 pode ser identificado com o momento do centro de massa, de acordo com a análise anterior sobre o bóson no cilindro. Assim, considerando um estado de peso $|a\rangle$, a sua massa é dada pela relação $m^2 = -p^\mu p_\mu$, logo:

$$\begin{aligned} L_0|a\rangle &= a|a\rangle \Rightarrow \\ -\frac{m^2}{2} + \sum_{n=1} \alpha_{-n}\alpha_n|a\rangle &= a|a\rangle \Rightarrow \\ m^2 &= 2(N - a), \end{aligned}$$

onde N é o nível do estado, conforme definido na seção sobre módulos de Verma. Os estados físicos são estados de peso máximo de peso conforme $h = \bar{h} = 1$, de forma que a integral $\int d^2z V_{\text{fis}}$ seja invariante conforme, o que será discutido um pouco mais na seção seguinte.

As condições de estados físicos são então:

$$L_n|\phi\rangle = 0, \quad n > 0 \quad (3.7)$$

$$L_0|\phi\rangle = |\phi\rangle \quad (3.8)$$

e os primeiros estados físicos são:

$$\begin{aligned} |k\rangle &\equiv e^{ikX}(0)|0\rangle \\ L_0|k\rangle &= |k\rangle \Rightarrow m^2 = -2 \end{aligned}$$

e este estado é taquiônico, representando uma instabilidade no vácuo da teoria. O próximo estado é:

$$\begin{aligned} |\xi^\mu; k\rangle &= \xi^\mu \partial X^\mu e^{ikX}(0)|0\rangle \equiv \xi_\mu \alpha_{-1}^\mu |k\rangle \\ L_0|\xi^\mu; k\rangle &= |\xi^\mu; k\rangle \Rightarrow m^2 = 0 \\ L_1|\xi^\mu; k\rangle &= 0 \Rightarrow k^\mu \xi_\mu = 0 \end{aligned}$$

este estado representa um vetor sem massa em D dimensões. Como em qualquer teoria com simetrias locais existem estados espúrios (nulos) e deve-se identificar os estados físicos que diferem entre si apenas por um estado espúrio. Na corda bosônica os estados físicos são identificados com os estados de peso máximo e os estados espúrios são os descendentes no mesmo módulo de Verma. Nada ainda se disse sobre unitariedade desta teoria,

de forma que é fundamental que se verifique a inexistência de estados de norma negativa. Exigir-se a inexistência destes estados é uma das maneiras com que se pode verificar que a corda bosônica só é consistente se $D = 26$ e o peso conforme dos estados físicos é $h = \bar{h} = 1$. Estas condições serão melhor entendidas na seção seguinte.

3.1.3 Quantização BRST

Se uma teoria de campos possui uma simetria local satisfazendo uma álgebra¹ pode-se aplicar o formalismo BRST para quantizá-la. Este procedimento será empregado nesta seção de maneira esquemática.

A cada simetria local introduz-se um par de **fantasmas de Fadeev-Popov**. A simetria local da corda bosônica é a invariância por reparametrização, relacionada com o tensor momento-energia, de forma que os fantasmas associados são fermiônicos (b, c) de pesos conformes (2, -1) respectivamente. Este sistema já foi descrito na seção sobre bosonização do capítulo anterior. A carga central, para um sistema com o peso dado acima é $c = -26$, sendo o tensor momento-energia para os fantasmas dado por:

$$T_{\text{fan}} = c\partial b + 2(\partial c)b, \quad (3.9)$$

e a carga central da corda, adicionada deste sistema de fantasmas é $c = D - 26$, e o anulamento da carga central, que representa uma anomalia na simetria clássica conforme, implica na dimensionalidade do espaço-tempo $D = 26$.

¹Desde que esta álgebra satisfaça uma identidade de Jacobi, isto é, desde que seja uma álgebra de Lie ou possíveis extensões graduadas.

A carga BRST² é

$$j_{\text{BRST}} = c \left[T + \frac{1}{2} T_{\text{fan}} \right] + \frac{3}{2} \partial^2 c \quad (3.10)$$

$$= -\frac{1}{2} c \partial X \partial X + bc \partial c + \frac{3}{2} \partial^2 c$$

$$Q = \oint \frac{dz}{2\pi i} j_{\text{BRST}} \quad (3.11)$$

Pode-se verificar que a carga de BRST assim definida é nilpotente apenas em dimensão $D = 26$ e que a corrente de BRST é de fato um campo primário de peso conforme 1 precisamente sobre as mesmas condições:

$$\begin{aligned} T(z)j(0) &= (T + T_{\text{fan}}(z))(cT + \frac{1}{2}T_{\text{fan}} + \frac{3}{2}\partial^2 c)(0) \\ &\sim \frac{\frac{D-26}{2}}{z^4} c(0) + \frac{1}{z^2} j(0) + \frac{1}{z} \partial j(0), \end{aligned}$$

neste formalismo, estados físicos são estados que estão na cohomologia de Q , isto é:

$$QV_{\text{fis}} = 0 \quad (3.12)$$

$$V_{\text{fis}} \neq Q\Lambda. \quad (3.13)$$

Considere um estado sem inserção de fantasmas, constituído apenas de campos de matéria $|\phi\rangle$, criado a partir do vácuo $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ pela atuação do operador primário $\phi(z)$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dw}{2\pi i} j_{\text{BRST}} \phi(z) &= \oint \frac{dw}{2\pi i} c(w) T(w) \phi(z) \\ &= \oint \frac{dw}{2\pi i} c(w) \left[\frac{h_\phi \phi(z)}{(w-z)^2} + \frac{\partial \phi(z)}{w-z} + \dots \right] \\ &= h_\phi(\partial) c \phi(z) + c \partial \phi \end{aligned}$$

²Para uma álgebra de Vínculos $[K_i, K_j] = f_{ij}^k K_k$ a carga de BRST é $Q = c^i (K_i - 1/2 f_{ij}^k c^j b_k)$, usando a expansão em modos e os coeficientes de estrutura da álgebra de Virasoro $f_{mn}^p = (m-n) \delta_{p, m+n}$ obtém-se o resultado desejado para a carga. A corrente de BRST é definida a menos de uma derivada total, cuja normalização é tal que a corrente seja um operador primário de dimensão conforme 1 e número de fantasmas $\oint \frac{dz}{2\pi} : bc :$ unitário.

e vê-se que para $h = 1$ esta integral é uma derivada total e o estado é BRST invariante.

É importante estudar a contribuição dos fantasmas de Fadeev-Popov. Expandindo em modos:

$$\begin{aligned} c(z) &= \sum c_n z^{-n+1} \\ b(z) &= \sum b_n z^{-n-2} \end{aligned}$$

e pode-se atuar com estes fantasmas no vácuo $SL(2, \mathbb{C})$:

$$\begin{aligned} b_n |0\rangle &= 0, \quad n \geq -1 \\ c_n |0\rangle &= 0, \quad n \geq 2 \end{aligned}$$

logo este vácuo invariante não é um estado fundamental do sistema de fantasmas (b, c) , lembrando que estes estados, sobre quantização canônica, também satisfazem uma álgebra. Existem dois vácuos degenerados para o sistema (b, c) devido a presença dos modos zero destes operadores, satisfazendo $b_0^2 = c_0^2 = 0$ e $\{c_0, b_0\} = 1$, desta forma, pode-se definir:

$$\begin{aligned} c_0 | \uparrow \rangle &= 0 \quad b_0 | \downarrow \rangle = 0 \\ b_0 | \uparrow \rangle &= | \downarrow \rangle \quad c_0 | \uparrow \rangle = 0, \end{aligned}$$

com a identificação:

$$\begin{aligned} c(0)|0\rangle &= c_1|0\rangle = | \downarrow \rangle \\ c\partial c(0)|0\rangle &= c_0 c_1 |0\rangle = | \uparrow \rangle \end{aligned}$$

é evidente que valem as seguintes relações:

$$\langle \uparrow | \uparrow \rangle = \langle \downarrow | \downarrow \rangle = 0, \quad \langle \uparrow | \downarrow \rangle = \langle 0 | c_{-1} c_0 c_1 | 0 \rangle \neq 0,$$

pode-se normalizar a última expressão:

$$\langle 0 | c\partial c\partial^2 c | 0 \rangle = \langle 0 | c_{-1} c_0 c_1 | 0 \rangle = 1 \quad (3.14)$$

o que significa que o vácuo invariante da teoria conforme carrega carga de fantasma 3, isto se deve ao fato da simetria não estar completamente fixada (uma vez que o próprio vácuo possui uma invariância) e os 3 modos zero do fantasma fixam três vetores de Killing conformes na esfera. Geometricamente este resultado é derivado de uma anomalia na corrente de fantasma,

relacionada com características topológicas da world-sheet (isto é, o genus da superfície) através do Teorema de Riemann-Roch. Neste trabalho será considerada apenas a corda ou a supercorda em nível de árvore, o que significa que a superfície de Riemann relevante é a esfera, que contém estes três vetores de Killing conformes já especificados, de forma que não é necessária a discussão sobre o teorema de Riemann-Roch em generalidade.

Conclui-se que os estados BRST invariantes são da forma $\psi(z) = c\phi(z)$, onde ϕ é um campo de matéria (na folha-mundo). Se este campo de matéria têm peso conforme unitário, o estado ψ está na cohomologia de Q . A integral de contorno $\int d^2z\phi(z)$ sob as mesmas condições representa um vértice físico integrado, com sua invariância conforme garantida.

Uma amplitude genérica de N-pontos, em nível de árvore pode ser escrita como:

$$A_N = \langle c\bar{c}\phi(z_1)c\bar{c}\phi(z_2)c\bar{c}\phi(z_3) \prod_{i=4}^N \int d^2z_i\phi(z_i) \rangle,$$

onde se re-introduziu a dependência na parte anti-holomórfica e os operadores envolvidos na amplitude são todos físicos. As amplitudes de 0, 1 e 2 pontos se anulam trivialmente uma vez que não há cancelamento da carga de fundo para os fantasmas.

Após esta brevíssima digressão sobre a corda bosônica, será considerada a generalização desta teoria para uma álgebra superconforme, que será estudada com mais detalhes, muitos dos quais aparecem analogamente na corda bosônica.

3.2 Supercordas

A supercorda RNS é uma generalização da corda bosônica na qual a álgebra conforme (Virasoro) é substituída pela álgebra superconforme $N = (1, 1)$, significando que tanto a parte holomórfica como a parte anti-holomórfica possuem esta simetria.

Desta forma este formalismo inclui férmions em duas dimensões na ação, que são vetores do ponto de vista de D dimensões. Na discussão a seguir é introduzida a ação para estas teorias e considera-se o estudo da álgebra superconforme resultante.

3.2.1 Ação e espectro

Embora a ação para a supercorda possa ser formulada com supersimetria local na folha mundo, adicionada às simetrias presentes na corda bosônica, o procedimento de fixação de gauge permite escrever a ação em um gauge superconforme, o qual será utilizado aqui, sem que haja a preocupação de discutir-se os aspectos da fixação do gauge:

$$S = \frac{1}{4\pi} \int d^2z \left(\partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \psi^\mu \bar{\partial} \psi_\mu + \tilde{\psi}^\mu \partial \tilde{\psi}_\mu \right) \quad (3.15)$$

esta ação representa uma ação para os bósons livre e uma ação para férmions livres conforme apresentado no capítulo anterior, de forma que os geradores da álgebra superconforme são:

$$T = -\frac{1}{2\pi} \partial X^\mu \partial X_\mu - \frac{1}{2} \psi^\mu \partial \psi_\mu \quad (3.16)$$

$$G = i\psi^\mu \partial X_\mu \quad (3.17)$$

$$\tilde{G} = i\tilde{\psi}^\mu \bar{\partial} X_\mu. \quad (3.18)$$

A carga central é simplesmente a soma da carga central do bóson livre com a do férmion livre $c = \frac{3}{2}D$.

A quantização desta ação envolve a introdução de fantasmas de Fadeev-Popov. Como são dois os geradores das simetrias T e G , com pesos conformes 2 e 3/2 respectivamente, há a necessidade de inclusão de 2 pares de fantasmas: um sistema grassmaniano (b, c) com peso conforme $(2, -1)$ idêntico ao da corda bosônica e um sistema adicional comutante (β, γ) , de peso conforme $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. A carga central dos fantasmas é:

$$c_{\text{fan}} = \underbrace{-26}_{(b,c)} + \underbrace{11}_{(\beta,\gamma)} = -15$$

de onde se conclui que o anulamento da carga central da teoria total, com a conseqüente eliminação da anomalia conforme, determina a dimensionalidade crítica da supercorda para ser $D = 10$.

Descrever esta teoria envolve estudar as representações da álgebra superconforme. Para o setor Neveu-Schwarz, onde a expansão em modos para ψ é semi-inteira, as coisas são mais simples e o vácuo super-SL(2, C) invariante $|0\rangle$, aniquilado pelos modos positivos de X e ψ está neste setor.

O vácuo de Ramond é obtido através do vácuo NS pela atuação de um spin field. A determinação explícita deste objeto requer que se observe ainda que a teoria possui uma invariância de Poincaré global $SO(9, 1)$ (ou $SO(10)$ se uma rotação de Wick é realizada) e os modos zero de ψ no setor Ramond satisfazem uma álgebra de Clifford $Spin(10)$, cuja representação de Dirac tem dimensão 32 e é redutível para 2 representações de Weyl, de dimensão 16 e quiralidades opostas, isto é, autovalores opostos sobre o operador $(-1)^F$.

O peso conforme deste spin field deve ser, de acordo com a discussão anterior, $h = \frac{D}{16} = \frac{5}{8}$ e também deve ter um corte de ramo de raiz quadrada com os operadores ψ . A tarefa de identificar este estado é facilitada se os campos ψ são bosonizados:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^{2a} \pm i\psi^{2a+1}) \equiv e^{\pm iH^a}, \quad a = 0, \dots, 4.$$

Pode-se escrever o spin field em termos destes bósons quirais:

$$S_\alpha = \prod_{a=0}^4 e^{\pm \frac{1}{2}H^a}, \quad (3.19)$$

este campo ³ esta escrito em uma base de helicidade, tem o peso conforme correto e apresenta cortes de raiz quadrada em sua OPE com ψ .

É claro desta apresentação que S_α é um spinor no espaço-tempo. Desta forma pode-se notar que os estados NS dão origem a bósons no espaço-tempo, enquanto que o setor Ramond dá origem a Férmions.

Para a corda fechada deve-se considerar o produto dos dois setores:

$(NS - NS)$	Bósons no espaço-tempo
$(NS - R)$	Férmions no espaço-tempo
$(R - NS)$	Férmions no espaço-tempo
$(R - R)$	Bósons no espaço-tempo

O setor (R, R) é um bi-spinor que pode ser decomposto em tensores anti-simétrico da seguinte forma:

³Tecnicamente a expressão deve ser multiplicada por cociclos para garantir que a álgebra de Poincaré seja respeitada, contudo, freqüentemente esta é uma complicação desnecessária que pode ser evitada tomando-se cuidado para escrever expressões covariantes apropriadas.

$(-1)^{F'}$	$(-1)^{F''}$		Repres. $SO(9, 1)$
+1	+1	16×16	$[1] + [3] + [5]_+$
+1	-1	$16 \times 16'$	$[0] + [2] + [4]$
-1	+1	$16' \times 16$	$[0] + [2] + [4]$
-1	-1	$16' \times 16'$	$[1] + [3] + [5]_-$

onde $[n]$ denota a forma anti-simétrica de posto n e os sinais + ou - indicam se a forma é auto-dual ou anti auto-dual.

O sistema de fantasmas (β, γ) deve ter a mesma periodicidade de ψ , de forma que, também para este sistema, há um setor Neveu-Schwarz e um setor Ramond, conseqüentemente, também existem spin fields para os fantasmas. Considerando a bosonização:

$$\beta \equiv e^{-\phi} \partial \xi, \quad \gamma \equiv e^{\phi} \eta, \quad (3.20)$$

pode-se ver que:

$$\Sigma = e^{-\phi/2}, \quad h = \frac{3}{8}$$

é um operador que apresenta cortes de ramo de raiz quadrada com os operadores β e γ e seu peso conforme é tal que o operador de vértice:

$$\mathcal{V}_R = e^{-\frac{\phi}{2}} S_{\alpha} \quad (3.21)$$

tem peso conforme $h = 1$, ou seja, a integração de contorno $\int d^2 \mathcal{V}_R$ é invariante conforme.

Para o setor Neveu-Schwarz as condições sobre o vácuo invariante $SL(2, \mathbb{C})$ são:

$$\begin{aligned} \beta_r |0\rangle &= 0, & r &\geq -\frac{1}{2} \\ \gamma_r |0\rangle &= 0, & r &\geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

e, analogamente ao caso bosônico, este vácuo não é um estado fundamental da álgebra gerada por β e γ . Para este sistema de fantasmas há uma complicação adicional em relação ao caso do sistema (b, c) , uma vez que os fantasmas de supersimetria são bosônicos. É necessário determinar um operador que satisfaça as seguintes relações:

$$\gamma(z)\delta(0) \sim \mathcal{O}(z) \quad \beta(z)\delta(0) \sim \mathcal{O}(z^{-1}),$$

com a bosonização utilizada pode-se verificar que:

$$\delta \equiv e^{-\phi}, \quad h = \frac{1}{2}$$

satisfaz as condições necessárias. Conclui-se, portanto, que os operadores de vértice do setores Neveu-Schwarz devem conter este campo δ .

A análise da contribuição dos fantasmas de reparametrização é idêntica ao caso bosônico, acarretando a presença de um campo c em todos os vértices, independentemente do seu setor de origem.

Antes de prosseguir com a análise dos operadores de Vértice e a quantização BRST, convém analisar o espectro desta teoria.

A maneira mais rápida de determinar o espectro é através do método de quantização canônica, em que a invariância superconforme é imposta como vínculo aos estados físicos, da maneira análoga à quantização de Gupta-Bleuler da QED. Este método consiste da construção de estados de peso máximo para os campos de matéria com peso conforme adequado, a contribuição dos fantasmas servindo apenas para determinar estes pesos, para os quais a representação é construída.

Para o setor Neveu-Schwarz a contribuição dos fantasmas é da forma $ce^{-\phi}|0\rangle$, com peso conforme $\frac{1}{2}$, de forma que um estado físico deste setor deve satisfazer a seguinte condição:

$$\begin{aligned} L_0|\Psi\rangle_{NS} &= \frac{1}{2}|\Psi\rangle_{NS} \\ m^2 &= \frac{1}{2}(N - \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

e as demais condições de um estado de peso máximo. Para o setor Ramond, com a contribuição de fantasmas sendo $ce^{-\phi/2}S_\alpha|0\rangle$, com peso conforme nulo, as condições são:

$$\begin{aligned} L_0|\Psi\rangle_R &= 0 \\ m^2 &= \frac{1}{2}N. \end{aligned}$$

Os primeiros estados podem ser sumarizados na tabela:

Setor	SO(8)	m^2	Vértice
NS+	8_v	0	$\zeta_\mu \psi_{-\frac{1}{2}}^\mu 0; k\rangle_{NS}$
NS-	1	$-\frac{1}{4}$	$ 0; k\rangle_{NS}$
R+	8	0	$ +\pm\pm\pm\pm; 0; k\rangle_R$
R-	$8'$	0	$ +\pm\pm\pm\pm; 0; k\rangle_R$

lembrando que os estados sem massa são classificados pelo subgrupo de Klein do grupo de Lorentz em 10 dimensões. Destarte, 8_v significa uma representação vetorial de $SO(8)$, enquanto 8 e $8'$ são representações spinoriais de quiralidade oposta, a primeira contendo um número par de sinais $+$ e a última contendo um número ímpar de sinais $+$.

Para a supercorda fechada deve-se proceder o produto destas duas representações advindas de cada setor, escolhidos independentemente⁴. O setor $(NS-, NS-)$ é um singlete do grupo de Lorentz em 10 dimensões, ademais, este estado têm massa quadrada negativa, indicando ser um táquion - a sinalização da instabilidade do vácuo perturbativo.

O setor não-massivo para as supercordas fechadas é:

$(NS+, NS+)$	$8_v \times 8_v = [0] + [2] + (2)$	$1 + 28 + 35$
$(R+, R+)$	$8 \times 8 = [0] + [2] + [4]_+$	$1 + 28 + 35_+$
$(R+, R-)$	$8 \times 8' = [1] + [3]$	$8_v + 56_c$
$(R-, R-)$	$8' \times 8' = [0] + [2] + [4]_-$	$1 + 28 + 35_-$
$(NS+, R+)$	$8_v \times 8$	$8' + 56$
$(NS+, R-)$	$8_v \times 8'$	$8 + 56'$

na última coluna estão descritas as dimensões das representações irredutíveis de $SO(8)$ que estão presentes no produto de representações descrito na segunda coluna.

Uma teoria consistente deve satisfazer algumas restrições, em particular os operadores devem ser mutuamente locais, a álgebra de operadores deve ser fechada e a teoria deve ser invariante modular, permitindo introdução consistente de interações e a noção de expansão em loops. Estas condições vinculam os possíveis setores nas teorias de cordas e não é possível escolher-se arbitrariamente os setores direito e esquerdo da supercorda. Estas restrições são satisfeitas através da imposição da projeção GSO . As supercordas fechadas possíveis, segundo este critério estão listadas abaixo:

$II - B$	$(NS+, NS+)$	$(R+, NS+)$	$(NS+, R+)$	$(R+, R+)$
$II - A$	$(NS+, NS+)$	$(R+, NS+)$	$(NS+, R-)$	$(R+, R-)$
$0 - B$	$(NS+, NS+)$	$(NS-, NS-)$	$(R+, R+)$	$(R-, R-)$
$0 - A$	$(NS+, NS+)$	$(NS-, NS-)$	$(R+, R-)$	$(R-, R+)$

⁴a consistência da teoria exige que os setores não sejam completamente independentes entre si, isto será analisado mais adiante.

As duas primeiras possibilidades não contêm o táquion em seu espectro e contêm férmions no espaço-tempo, para ambas as teorias o espectro é constituído de um escalar (dílton), um vetor de gauge, uma 2-forma, 2 gravitinos e n -formas de diferentes ranks (provenientes dos setores (R, R)).

As duas últimas teorias contêm um táquion em seu espectro e nenhum férmion no espaço-tempo.

Neste trabalho será focalizado o estudo das teorias tipo *II* e da teoria de supercordas abertas tipo *I* que será discutida no capítulo sobre D-branas, a seguir.

Além destas cordas já mencionadas, existe mais uma possibilidade. Pode-se escolher cada setor, direito e esquerdo, diferentemente, desde que a carga central total se anule, esta idéia, aplicada a uma corda feita de um setor de corda bosônica e um setor de corda fermiônica, dá origem a supercorda Heterótica, grandemente estudada na década de 80 devida a possibilidade de aplicações fenomenológicas. Estes objetos não serão discutidos aqui, indicando-se ao leitor interessado as referências do final deste capítulo.

3.2.2 BRST, Picture e Operadores de Vértice

A carga de BRST para a supercorda é:

$$\begin{aligned} Q &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \left\{ c \left[T_m + \frac{1}{2} T_{\text{FAN}} \right] - \gamma \left[G_m + \frac{1}{2} G_{\text{FAN}} \right] \right\} \\ &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \left\{ c \left[T_m - b\partial c - \partial^2 \phi - \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \eta\partial\xi \right] + \eta e^\phi G_m - b\eta\partial\eta e^{2\phi} \right\} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$T_m = -\frac{1}{2} \partial X^\mu \partial X_\mu - \frac{1}{2} \psi^\mu \partial \psi_\mu \quad (3.23)$$

$$G_m = i\psi^\mu \partial X_\mu \quad (3.24)$$

e pode-se verificar neste caso que $Q^2 = 0$ se $D = 10$ e os estados físicos são os estados na cohomologia da carga de BRST.

Para o caso bosônico existe uma corrente de fantasmas $\oint \frac{dz}{2\pi i} bc$ anômala, isto é, ela não se transforma como um operador primário de peso conforme $h = 1$, contendo um fator adicional. O significado geométrico desta anomalia é a existência de vetores de Killing conformes, admitindo a fixação adicional de simetrias. O cancelamento desta anomalia, obtido pelo uso do lema de Riemann-Roch, implica que somente as amplitudes com carga de fantasmas igual à 3 não se anulam.

Para a supercorda existe uma corrente associada aos fantasmas (β, γ) também anômala, $j = -\partial\phi$, cujo cancelamento implica em amplitudes não nulas apenas se a carga total dos operadores seja 2.

Em ambos os casos há uma imagem intuitiva: a bosonização dos fantasmas é feita através do uso de um bóson com carga de fundo - o formalismo do gás de Coulomb - isto é, uma teoria de um bóson com uma carga posta no infinito, sendo as amplitudes nulas se não houver o cancelamento desta carga no infinito.

Pode-se definir duas correntes $U(1)$:

$$P = \frac{1}{2\pi i} \oint dz(\xi\eta - \partial\phi) \quad (\text{Picture}) \quad (3.25)$$

$$J_{\text{FAN}} = \frac{1}{2\pi i} \oint dz(\xi\eta + cb) \quad (\text{Número de Fantasma}). \quad (3.26)$$

Evidentemente os estados da teoria podem ser classificados por seu peso conforme, picture e número de fantasma. Note agora que os operadores:

$$\begin{aligned} Z &= \{Q, \xi\} = e^\phi G_m + b\partial\eta e^{2\phi} + \partial(b\eta e^\phi) + c\partial\xi \\ Y &= c\partial\xi e^{-2\phi} \end{aligned}$$

comutam com Q , $[Q, Z] = [Q, Y] = 0$, de forma que se V está na cohomologia de Q , os estados $Z^n V$ e $Y^m V$ também estão, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Tem-se assim um número infinito enumerável de estados físicos equivalentes.

Note ainda que se V está na picture p , $[P, V] = pV$, então $[P, Z^n V] = (n + p)Z^n V$ e $[P, Y^n V] = (p - n)Z^n V$, motivando a denominação destes operadores como operadores de **mudança de Picture**.

A escolha de uma determinada picture para os estados físicos elimina esta sobrecontagem. Convencionalmente escolhe-se a picture do setor NS para ser -1 e a picture do setor Ramond para ser $-\frac{1}{2}$.

A degenerescência de Picture é um dos motivos pelos quais não é possível obter uma formulação RNS manifestamente supersimétrica e torna difícil o cálculo de amplitudes e o estudo de suas simetrias. No capítulo seguinte uma outra abordagem da supercorda será estudada, uma abordagem em que estes problemas têm uma solução mais adequada.

É importante salientar que a bosonização dos fantasmas de supersimetria não envolve o modo zero de ξ e existem dois espaços de Hilbert onde se pode considerar os estados físicos, o espaço de Hilbert pequeno, que não

contém o modo zero de ξ e o espaço de Hilbert grande, com o modo zero de ξ .

A passagem entre estes dois espaços é útil para o cálculo de amplitudes e o estudo de suas propriedades, embora estas técnicas não sejam discutidas neste trabalho por serem desnecessárias no que segue.

Note apenas que a cohomologia de Q no espaço de Hilbert grande é trivial, uma vez que:

$$[Q, V] = 0 \Rightarrow V = [Q, c\xi\partial\xi e^{-2\phi}V].$$

Desta análise infere-se as condições de estado físicos para o formalismo RNS.

Def. 3 (Operadores de Vértice Físicos RNS) V satisfazem as seguintes condições:

- V é um elemento do espaço de Hilbert pequeno.
- V está na cohomologia de BRST Q , isto é:

$$[Q, V] = 0, \quad V \sim V + [Q, \Lambda],$$

onde Λ é um elemento do espaço de Hilbert pequeno.

- V é hermiteano (ou anti-hermiteano). Embora até o momento não se tenha discutido esta característica, pode-se entender sua naturalidade se o operador de vértice é entendido como um **campo de corda**. Esta propriedade é consequência da unitariedade da teoria conforme subjacente.
- Cada vértice está associado a um setor GSO, ou GSO(+) ou GSO(-). Os primeiros são fermiônicos e os últimos são bosônicos (na folha mundo).
- V tem carga de fantasma $j = 1$.
- V têm *picture* definida, -1 para vértices do setor Neveu-Schwarz e $-\frac{1}{2}$ para vértices do setor Ramond.

3.2.3 Compactificações

Embora supercordas tenham sido descritas em um espaço-tempo Minkowski 10-dimensional, não é imperativo que seja este o caso. A supercorda é

definida como uma teoria superconforme cujos campos de matéria formam uma álgebra ($N = 1, c = 15$) e foi escolhida uma particular representação dos campos, mantendo-se explícita a invariância sobre a ação do grupo de Poincaré em 10-dimensões, $SO(9, 1)$.

Dentro das muitas possibilidades de se escolher a variedade alvo M , onde a corda se propaga, uma possibilidade de especial interesse é $M^4 \times K^6$, onde M^4 é um espaço Minkowski em 4-dimensões e K^6 é uma variedade compacta em 6 dimensões. Escolhas do tipo $M^d \times K^{10-d}$ atendem pelo nome genérico de **compactificações**.

Seja então a variedade de propagação da corda:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}^4 \times \mathcal{K}^6,$$

o grupo de simetria global é dado por:

$$SO(3, 1) \times G, \quad G \subset SO(6),$$

onde G é o grupo de isometrias da variedade compacta, o qual é um subgrupo (próprio ou não) do grupo de isometrias do 6-toro T^6 , a variedade compacta mais simples que se pode considerar.

Vários critérios podem ser utilizados para a escolha da variedade compacta, desde escolhas meramente pragmáticas, como a habilidade de se tratar a teoria descrita neste espaço, até escolhas fundamentadas em questões físicas ou matemáticas relevantes.

Evidentemente, se teoria de cordas descreve a natureza, deve haver uma escolha natural adequada, com uma motivação física forte para a supercorda escolher este particular vácuo, ao invés de quaisquer outros dos milhares possíveis (lembrando que o próprio espaço-tempo é um conceito emergente da teoria de cordas). No atual estado de desenvolvimento da teoria não há um entendimento de como esta escolha de vácuo é feita e estudam-se diferentes famílias de soluções que podem servir de ferramentas para o desvendamento da estrutura da teoria.

Um dos critérios mais utilizados para a escolha da variedade compacta é o critério de existência de supersimetria no espaço-tempo. Conquanto o formalismo RNS use explicitamente a supersimetria da teoria na folha mundo, ignorando, *a priori* supersimetria no espaço-tempo, feita a projeção *GSO* de forma a eliminar o táquion, obtem-se uma teoria com supersimetria no espaço-tempo.

De fato, para as supercordas tipo II há SUSY $N = 2$ no espaço-tempo e os níveis de massa contém o mesmo número de graus de liberdade físicos entre bósons e férmions. A supercorda aberta GSO projetada, que será estudada no capítulo sobre D-branas, tem SUSY $N = 1$ no espaço-tempo.

Considerando que supercordas têm por objetivo a descrição de uma teoria no espaço-tempo, é fortemente desejável uma formulação que permitisse a esta supersimetria do espaço-tempo ser explicitamente manifesta. O formalismo RNS não se presta a esta tarefa, mas será o ponto de partida utilizado na busca deste ideal, discutido mais longamente no próximo capítulo.

Há uma vasta literatura sobre compactificações, tanto do ponto de vista geométrico como do ponto de vista da teoria conforme de campos, neste trabalho não será considerada nenhuma compactificação, mas uma escolha de campos que resulta na simetria global:

$$\begin{aligned} \text{SO}(9,1) &\mapsto \text{SO}(3,1) \times \text{SO}(6) \\ &\mapsto \text{SO}(3,1) \times \text{SU}(3) \times \text{U}(1). \end{aligned}$$

Do ponto de vista da teoria conforme, ocorre a seguinte separação:

$$\underbrace{(N = 1, c = 15)}_{D=10 \text{ Minkowski}} \mapsto \underbrace{(N = 1, c = 6)}_{D=4 \text{ Minkowski}} \oplus \underbrace{(N = 2, c = 9)}_{D=6 \text{ Interno}}$$

o que será obtido tomando-se 6 campos bosônicos X^a e 6 campos fermiônicos ψ^a , ($a = 4 \dots 9$) e complexificando-os

$$x^{\pm j} = \frac{1}{\sqrt{2}} (x^{2j+2} \pm ix^{2j+3}) \quad (3.27)$$

$$\psi^{\pm j} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi^{2j+2} \pm i\psi^{2j+3}) \quad (3.28)$$

$$j = 1, 2, 3.$$

A ação para estes campos é:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\pi} \int d^2 \left[\frac{1}{2} \partial X^m \bar{\partial} X_m + \psi^m \bar{\partial} \psi_m + \tilde{\psi}^m \partial \tilde{\psi}_m \right] + \mathcal{S}_C \quad (3.29)$$

$$\mathcal{S}_C = \frac{1}{4\pi} \int d^2 z \left[\frac{1}{2} \partial X^{+i} \bar{\partial} X^{-i} + 2\psi^{+i} \bar{\partial} \psi^{-i} + \tilde{\psi}^{+i} \partial \tilde{\psi}^{-i} \right], \quad (3.30)$$

onde os campos com til representam os campos que se movem à direita, enquanto os campos sem til se movem à esquerda.

Os geradores superconformes são:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} \partial X^m \partial X_m + \frac{1}{2} \psi^m \partial \psi_m + T_C \\
G &= \psi^m \partial X_m + G_C^+ + G_C^- \\
T_C &= \partial X^{+i} \partial X^{-i} + \frac{1}{2} \psi^{+i} \partial \psi_{-i} + \frac{1}{2} \psi_{-i} \partial \psi^{+i} \\
G_C^+ &= \psi^{+j} \bar{\partial} X^{-j} \\
G_C^- &= \psi^{-j} \partial X^{+j} \\
J_C &= \psi^{+i} \psi^{-i} \cong \partial H,
\end{aligned}$$

onde (T, G) satisfazem a álgebra superconforme $(N = 1, c = 15)$, enquanto (T_C, G_C^+, G_C^-, J_C) satisfazem $(N = 2, c = 9)$.

Na última linha considerou-se a bosonização da corrente J através do bóson quirial H , cuja OPE é:

$$H(z)H(w) \sim 3 \ln(z - w). \quad (3.31)$$

O spin field agora não é mais um spinor de $SO(9, 1)$, mas de $SO(3, 1)$, que pode ser obtido bosonizando-se os férmions da folha-mundo em quatro-dimensões:

$$\begin{aligned}
\psi^3 \pm \psi^0 &= e^{\pm i\sigma_0} \\
\psi^1 \pm i\psi^2 &= e^{\pm i\sigma_1} \\
\Sigma^\alpha &= (e^{\frac{i}{2}(+\sigma_0+\sigma_1)}, e^{\frac{i}{2}(-\sigma_0-\sigma_1)}) \equiv (\Sigma^{++}, \Sigma^{--}) \\
\bar{\Sigma}^{\dot{\alpha}} &= (\Sigma^{+-}, \Sigma^{-+}),
\end{aligned} \quad (3.32)$$

introduzindo-se uma notação compacta para os spin fields.

O procedimento de quantização é feito da mesma forma, mas as representações do grupo de Lorentz em 10 dimensões se decompõem em diversos campos, dando origem a uma estrutura mais complexa para o espectro.

Um vetor se decompõe da seguinte forma:

$$10 \rightarrow 4 \oplus 3 \oplus \bar{3} \\ A_m \quad A_{-i} \quad A_{+i}$$

e os spinores têm a seguinte decomposição:

$$\begin{aligned}
 16 &\rightarrow (2, 1_{+3}) \oplus (2, 3_{-1}) \oplus (2', 1_{-3}) \oplus (2', \bar{3}_{+1}) \\
 &\quad \chi_{\alpha}^{+} \quad \lambda_{-i\alpha}^{+} \quad \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}^{+} \quad \bar{\lambda}_{+i\dot{\alpha}}^{+} \\
 16' &\rightarrow (2', 1_{+3}) \oplus (2', 3_{-1}) \oplus (2, 1_{-3}) \oplus (2, \bar{3}_{+1}) \\
 &\quad \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}^{-} \quad \bar{\lambda}_{-i\dot{\alpha}}^{-} \quad \chi_{\alpha}^{-} \quad \lambda_{+i\alpha}^{-}
 \end{aligned}$$

onde a linha indica representação anti-Weyl. Os números entre parênteses representam a dimensão da representação e o subscrito é a carga U(1). Embaixo das representações estão indicados os campos (no espaço-tempo) que se transformam sobre elas.

Deve-se notar, no entanto, que não foram impostas condições físicas, que reduziriam os graus de liberdade. O conteúdo de campos físicos em 10 dimensões, para o setor se movendo a esquerda apenas, é composto por um Táquion $T(x)$, um vetor de gauge sem massa A_{μ} e spinores de SO(8), um 8 (ψ_{α}) e um 8', ($\bar{\psi}^{\alpha}$). Sem a imposição de condições de concha de massa e polarização ⁵ o vetor de gauge é um vetor de SO(9, 1) e os spinores estão nas representações 16 e 16' de SO(9, 1). A forma explícita destes operadores de vértices, juntamente com algumas propriedades estão nas tabelas do apêndice.

3.3 Nota Bibliográfica

Todo o material sobre o formalismo RNS pode ser encontrado em [Pol88b]. Uma discussão clara sobre picture e aplicações de teorias conformes à teorias de cordas está em [FMS86]. Continua uma referência fundamental os dois volumes [GSW87b, GSW87a]. Vários outros artigos de revisão podem ser encontrados disponíveis nos arquivos de Los Alamos.

⁵ Advindas das condições de campo superconforme primário

Capítulo 4

Supercordas no Formalismo Híbrido

Onde é apresentado um formalismo alternativo para a supercorda no qual é possível uma formulação explicitamente super-Poincaré invariante em 4 dimensões, utilizando profusamente resultados de teorias superconformes. Este é o primeiro capítulo central do trabalho, sobre o qual será construída a teoria de campos para a supercorda, na parte II

A álgebra de supersimetria no espaço-tempo para o formalismo RNS não fecha fora da camada de massa, requerendo o uso explícito de operadores de mudança de Picture. De fato, para compactificações em 4 dimensões, discutidas no final do capítulo anterior, a carga supersimétrica, dada pelos modos zero dos modos Ramond, é:

$$q_\alpha = \frac{1}{2\pi i} \oint dz e^{\frac{i}{2}(\phi \pm \sigma_0 \pm \sigma_1 \pm H)}$$
$$\{q_\alpha, q_\beta\} = \frac{1}{2\pi i} \oint dz e^{-\phi} \psi_\mu \gamma_{\alpha\beta}^\mu,$$

embora a álgebra das cargas supersimétricas deva fechar com o momento do centro de massa da corda $\frac{1}{2\pi} \int dz \partial X^\mu$. Pode-se, no entanto, observar que:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint dz Z e^{-\phi} \psi_\mu \gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2\pi} \int dz \partial X_\mu \gamma_{\alpha\beta}^\mu.$$

A tentativa de formular a teoria de supercordas de forma a fechar a álgebra de supersimetria fora da camada de massa, permitindo uma

poderosa formulação em termos de supercampos, deu origem ao formalismo híbrido.

Juntando-se informação sobre o formalismo RNS e sobre o formalismo Green-Schwarz, que não será discutido neste trabalho, foi possível obter uma redefinição dos campos RNS e uma imersão da álgebra superconforme $N = 1$ em uma $N = 2$, que por sua vez pode ser imersa em uma álgebra $N = 4$ *pequena*, construindo-se a teoria de cordas com variáveis supersimétricas e de uma forma manifestamente invariante sobre o grupo de super-Poincaré em 4 dimensões.

A natureza da construção deste formalismo é essencialmente técnica e não será tratada de forma detalhada, sendo mais útil ao leitor a consulta à bibliografia para compreender o desenvolvimento histórico que culminou com esta formulação [Ber94, BV94, BV95, Ber96a]. No que segue, o formalismo híbrido é apresentado em sua forma final e a equivalência com o formalismo RNS é discutida.

4.1 Ação para a Supercorda

Considerando a supercorda RNS compactificada em $D = 4$, os campos do espaço de Hilbert grande são os seguintes:

$$\left[\underbrace{x^m, \psi^m, b, c, \xi, \eta, \phi}_{\text{Matéria } D = 4 + \text{fantasmas}}, \underbrace{x^{\pm j}, \psi^{\pm j}}_{\text{Interno}} \right],$$

e a descrição no formalismo híbrido envolve a introdução de coordenadas fermiônicas do super-espaço θ^α , juntamente com seus momentos conjugados p_α . Os campos são definidos a partir dos campos RNS de forma a misturar fantasmas e campos de matéria, obtendo-se o seguinte conteúdo de campos [BT03, Ber96a]:

$$\left[X^m, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, p_\alpha, \bar{p}_{\dot{\alpha}}, \rho, \Gamma^{+j}, \Gamma^{-j}, X^{+j}, X^{-j} \right],$$

onde X^m é um vetor $D = 4$ e um bóson na folha-mundo, $m = 0, 1, 2, 3$
 θ^α é um spinor quirral em $D = 4$ e um férmion na folha-mundo, $\alpha = 1, 2$;
 $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ é um spinor anti-quiral em $D = 4$ e um férmion na folha-mundo, $\dot{\alpha} = 1, 2$;
 ρ é um bóson quirral na folha mundo;
 $\Gamma^{\pm j}$ são férmions internos da folha-mundo $j = 1, 2, 3$;
 $X^{\pm j}$ são bósons internos da folha-mundo $j = 1, 2, 3$.

A transformação entre estes dois conjuntos de campos é dada por:

$$\begin{aligned}
X^m &= e^{R+\frac{1}{2}U} (x^m) e^{-R-\frac{1}{2}U}, \\
\theta^\alpha &= e^{\frac{\phi}{2}} \Sigma^\alpha e^{-\frac{H}{2}}, \\
\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} &= c\xi e^{-\frac{3}{2}\phi} \Sigma^{\dot{\alpha}} e^{\frac{H}{2}}, \\
p_\alpha &= e^{R+\frac{U}{2}} (e^{-\frac{\phi}{2}} \Sigma_\alpha e^{\frac{H}{2}}) e^{-R-\frac{1}{2}U}, \\
\bar{p}_{\dot{\alpha}} &= e^{R+\frac{1}{2}U} (b\eta e^{\frac{3\phi}{2}} \Sigma_{\dot{\alpha}} e^{-\frac{H}{2}}) e^{-R-\frac{1}{2}U}, \\
\partial\rho &= 3\partial\phi - cb - 2\xi\eta - \partial H, \\
X^{+j} &= e^{R+\frac{1}{2}U} (x^{+j}) e^{-R-\frac{1}{2}U}, \\
X^{-j} &= e^{R+\frac{1}{2}U} (x^{-j}) e^{-R-\frac{1}{2}U}, \\
\Gamma^{+j} &= e^{R+\frac{1}{2}U} (\xi e^{-\phi} \psi^{+j}) e^{-R-\frac{1}{2}U}, \\
\Gamma^{-j} &= e^{R+\frac{1}{2}U} (\eta e^{\phi} \psi^{-j}) e^{-R-\frac{1}{2}U},
\end{aligned} \tag{4.1}$$

onde

$$\begin{aligned}
R &= \int dz c\xi e^{-\phi} \psi^{-j} \partial x^{+j}, \\
U &= \int dz [c\xi e^{-\phi} \psi^m \partial x_m + \frac{1}{2}(\partial\phi + \partial H) c\partial c\xi \partial\xi e^{-2\phi}].
\end{aligned}$$

e as OPEs dos campos híbridos são OPEs de campos livres:

$$\begin{aligned}
X^m(z)X^n(w) &= -\eta^{mn} \ln(z-w), \\
p_\alpha(z)\theta^\beta(w) &= \frac{\delta_\alpha^\beta}{z-w}, \\
\rho(z)\rho(w) &= -\ln(z-w), \\
\Gamma^{+i}(z)\Gamma^{-j}(w) &= \frac{\delta^{ij}}{(z-w)}, \\
X^{+i}(z)X^{-j}(w) &= -\delta^{ij} \ln(z-w).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Com estas informações, pode-se determinar a ação da supercorda no formalismo híbrido temporariamente re-introduzindo os modos que se movem

à direita e à esquerda:

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2\pi} \int d^2z \left[\frac{1}{2} \partial X^m \bar{\partial} X_m + p_\alpha \bar{\partial} \theta^\alpha + \hat{p}_{\dot{\alpha}} \bar{\partial} \hat{\theta}^{\dot{\alpha}} + \bar{p}_\alpha \partial \bar{\theta}^\alpha + \bar{\hat{p}}_{\dot{\alpha}} \partial \bar{\hat{\theta}}^{\dot{\alpha}} \right] + \frac{1}{2} \partial \rho \bar{\partial} \rho + \\
&\quad + \frac{1}{2} \partial \hat{\rho} \bar{\partial} \hat{\rho} + S_c, \\
S_c &= \frac{1}{2\pi} \int d^2z \left[\frac{1}{2} \partial^{+i} \bar{\partial} X^{-i} + \Gamma^{+i} \bar{\partial} \Gamma^{-i} + \tilde{\Gamma}^{+i} \partial \tilde{\Gamma}^{-i} \right]
\end{aligned} \tag{4.3}$$

que é uma ação livre, a qual pode ser quantizada com os métodos de teorias conformes já utilizados nos capítulos anteriores, contudo, técnicas mais poderosas serão introduzidas nas seções seguintes através da exploração adequada das simetrias desta ação.

Contudo, há uma diferença fundamental neste formalismo, quando comparado ao RNS, no que se refere aos setores periódicos e anti-periódicos nas variáveis fermiônicas ¹.

Para a parte holomórfica da supercorda RNS há quatro setores:

$$(NS+, R+, NS-, R-)$$

com respeito à projeção *GSO* - que está relacionada com a quiralidade dos férmions no espaço tempo - e com respeito à periodicidade dos férmions da folha-mundo. No formalismo híbrido as cargas supersimétricas do espaço-tempo são:

$$\begin{aligned}
q_\alpha &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz \left[p_\alpha - \frac{i}{2} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial X_{\alpha\dot{\alpha}} - \frac{1}{8} \theta_\alpha \partial (\bar{\theta})^2 \right] \\
\bar{q}_{\dot{\alpha}} &= \frac{1}{2\pi i} \oint dz \left[\bar{p}_{\dot{\alpha}} - \frac{i}{2} \theta^\alpha \partial X_{\alpha\dot{\alpha}} - \frac{1}{8} \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \partial (\theta)^2 \right] \\
X_{\alpha\dot{\alpha}} &= X_m \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m
\end{aligned} \tag{4.4}$$

e qualquer operador construído com potências inteiras dos campos híbridos e de $e^{n\rho}$, $n \in \mathbb{Z}$ não tem cortes de ramo de raiz quadrada em sua OPEs com os geradores de supersimetria, isto é, são operadores *GSO*(+), mapeáveis em operadores RNS dos setores *R* e *NS* [BV95, Ber96a]!

É o setor periódico das variáveis híbridas que dá origem aos operadores *GSO*(-) que devem, então, conter spin fields construídos de variáveis

¹Para evitar confusão na discussão a seguir, a denominação de setores Ramond e Neveu-Schwarz utilizada anteriormente fica reservada para o formalismo RNS.

híbridas. Para a construção destes operadores deve-se bosonizar as variáveis fermiônicas p e θ [BT03]:

$$\begin{aligned}\theta^1 &= e^{\sigma_1}, & \theta^2 &= e^{\sigma_2}, & \bar{\theta}^1 &= e^{\bar{\sigma}_1}, & \bar{\theta}^2 &= e^{\bar{\sigma}_2}, \\ p_1 &= e^{-\sigma_1}, & p_2 &= e^{-\sigma_2}, & \bar{p}_1 &= e^{-\bar{\sigma}_1}, & \bar{p}_2 &= e^{-\bar{\sigma}_2}.\end{aligned}$$

onde os bósons quirais $\sigma_1, \sigma_2, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_1$ satisfazem as OPEs:

$$\begin{aligned}\sigma_1(z)\sigma_1(w) &= \ln(z-w), & \sigma_2(z)\sigma_2(w) &= \ln(z-w), \\ \bar{\sigma}_1(z)\bar{\sigma}_1(w) &= \ln(z-w), & \bar{\sigma}_2(z)\bar{\sigma}_2(w) &= \ln(z-w).\end{aligned}$$

e, em geral, todos operadores de vértices do setor $GSO(-)$ devem conter um spin field da forma genérica:

$$\Lambda^{A_1 A_2 B_1 B_2} = e^{A_1 \sigma_1 + A_2 \sigma_2 + B_1 \bar{\sigma}_1 + B_2 \bar{\sigma}_2}.$$

onde A_1, A_2, B_1, B_2 são todos semi-inteiros e o peso conforme é

$$W[\Lambda^{A_1 A_2 B_1 B_2}] = \frac{1}{2}[A_1(A_1 - 1) + A_2(A_2 - 1) + B_1(B_1 - 1) + B_2(B_2 - 1)]. \quad (4.5)$$

É conveniente usar a seguinte notação: $(+ = \frac{1}{2})$, $(- = -\frac{1}{2})$, $(\oplus = \frac{3}{2})$, $(\ominus = -\frac{3}{2})$, $(\boxplus = \frac{5}{2})$, $(\boxminus = -\frac{5}{2})$.

Define-se ainda $|\Lambda\rangle$ como o vácuo deste setor (com peso conforme $\frac{1}{2}$):

$$|\Lambda\rangle = \Lambda^{++++}|0\rangle =: e^{(\frac{1}{2}\sigma_1 + \frac{1}{2}\sigma_2 + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_1 + \frac{1}{2}\bar{\sigma}_2)}(0) : |0\rangle. \quad (4.6)$$

É clara agora a simplificação que o formalismo híbrido permite, tratando de maneira unificada os setores R e NS , a formulação de operadores de vértice físicos na linguagem de supercampos é possível, no setor $GSO(+)$, onde de fato a supersimetria do espaço-tempo não é quebrada [Ber95]. O setor $GSO(-)$ apresenta vértices que contém os spin fields.

A seguir discute-se a estrutura superconforme subjacente ao formalismo híbrido, o que fornecerá métodos poderosos de discutir-se a determinação dos operadores de vértice e suas amplitudes, além de permitir, como será discutido em capítulo posterior, a formulação de uma teoria de campos de supercordas.

4.2 Álgebra Superconforme $N = 2$ Torcida

A carga de BRST no formalismo RNS pode ser escrita como [ABC99]:

$$Q = \frac{1}{2\pi} \oint dze^R (b\eta\partial\eta e^{2\phi}) e^{-R} \quad (4.7)$$

e define-se a corrente de BRST j_{BRST} como o integrando desta equação. Ademais, calculando a OPE:

$$j_{BRST}(z)b(0) \sim \frac{2}{z^3} + \frac{J_{\text{FAN}}(0)}{z^2} + \frac{T(0)}{z} \quad (4.8)$$

onde $T(z)$ é o tensor momento-energia total, incluindo matéria e fantasmas. Para este tensor, a carga central se anula:

$$T(z)T(0) \sim \frac{2T(0)}{z^2} + \frac{\partial T(0)}{z}, \quad (4.9)$$

e estas 2 OPEs sugerem a existência de uma álgebra superconforme $N = 2$ torcida, e de fato pode-se escrever seus geradores tanto em termos de variáveis RNS como em termos de variáveis híbridas:

$$\begin{aligned} T &= T_{RNS} = \frac{1}{2}\partial X_m\partial X_m + p\partial\theta + \bar{\theta}\bar{\theta} + \frac{1}{2}\partial\rho\partial\rho + \frac{1}{2}\partial^2\rho + T_C + \frac{1}{2}\partial J_C \\ G^+ &= J_{BRST} = e^\rho d_\alpha d^\alpha + G_C^+ \\ G^- &= b = e^{-\rho}\bar{d}_{\dot{\alpha}}\bar{d}^{\dot{\alpha}} + G_C^- \\ J &= bc + \eta\xi = -\partial\rho + J_C, \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde

$$\begin{aligned} d_\alpha &= p_\alpha + \frac{i}{2}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\partial X_{\alpha\dot{\alpha}} - \frac{1}{4}\bar{\theta}^2\partial\theta_\alpha + \frac{1}{8}\theta_\alpha\partial(\bar{\theta})^2 \\ \bar{d}_{\dot{\alpha}} &= \bar{p}_{\dot{\alpha}} + \frac{i}{2}\theta^\alpha\partial X_{\alpha\dot{\alpha}} - \frac{1}{4}\theta^2\partial\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} + \frac{1}{8}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\partial(\theta)^2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

e a álgebra assim definida é uma álgebra superconforme ($N = 2, c = 6$) torcida, a qual pode ser separada em dois conjuntos, ($N = 2, c = -3$) descrevendo os campos em 4 dimensões e ($N = 2, c = 9$) descrevendo os campos internos.

Uma álgebra superconforme (T, G^+, G^-, J) é quantizada através da introdução de fantasmas de Fadeev-Popov para cada gerador:

Gerador	Fantasma	Peso Conforme	Carga Central
T	(b, c)	$(2, -1)$	$c = -26$
G^+	(β, γ)	$(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$	$c = 11$
G^-	(β_1, γ_1)	$(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$	$c = 11$
J	(\tilde{b}, \tilde{c})	$(1, 0)$	$c = -2$
			$c = -6$

e, portanto, $(N = 2, c = 6)$ é uma álgebra superconforme crítica, pode-se proceder a torção inversa $T \mapsto T - \frac{1}{2}J$, adicionar os fantasmas $N = 2$ e proceder a quantização, outrossim, a matéria $N = 2$ desta álgebra é construída da matéria $N = 1$ e dos fantasmas, de forma que pode não haver a necessidade da introdução de novos fantasmas.

De fato, pode-se mostrar que as cohomologias das cargas BRST para $N = 1$ e $N = 2$ são idênticas. Este procedimento é realizado através da construção de uma transformação de similaridade que leva $Q_{N=2}$ em $Q_{N=1}$ mais termos cuja cohomologia define, essencialmente, a independência dos fantasmas $N = 2$ [OP94].

Há mais estruturas para serem exploradas, e uma nova álgebra superconforme, como será discutido a seguir.

4.2.1 Álgebra Superconforme $N = 4$

Assumindo a seguinte identificação [BV95]:

$$\begin{aligned}
T &= T_{N=2} & G^+ &= G_{N=2}^+ & G^- &= G_{N=2}^- \\
\tilde{G}^+ &= iG_{N=2}^-(e^{iH}) & \tilde{G}^- &= -iG_{N=2}^+(e^{-iH}) \\
J &= J_{N=2} & J^{++} &= e^{iH} & J^{--} &= e^{-iH}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

onde $G^+(e^{-H})$ significa o pólo simples da OPE destes dois campos. Verifica-se que estes geradores satisfazem uma álgebra superconforme $(N = 4, c = 6)$ onde $T, G^-, \tilde{G}^-, J^{--}$ têm peso conforme 2, G^+, \tilde{G}^+, J têm peso conforme 1 e J^{++} tem peso conforme 0. Esta álgebra contém as seguintes OPEs entre

seus geradores:

$$\begin{aligned}
G^+ \tilde{G}^- &\sim G^- \tilde{G}^+ \sim 0 \\
G^+(z) G^-(0) &\sim \frac{2}{z^3} + \frac{J(0)}{z^2} + \frac{T(0)}{z} \\
\tilde{G}^+(z) \tilde{G}^-(0) &\sim -\frac{2}{z^3} - \frac{J(0)}{z^2} - \frac{T(0)}{z} \\
G^+(z) \tilde{G}^+(0) &\sim \frac{J^{++}}{z^2} + \frac{\partial J^{++}(0)}{2z} \\
G^-(z) \tilde{G}^-(0) &\sim \frac{J^{--}}{z^2} + \frac{\partial J^{--}(0)}{2z}
\end{aligned}$$

e os geradores, em termos de híbridas, podem ser escritos como:

$$\begin{aligned}
T &= -\frac{1}{2} \partial X^m \partial X_m - p_\alpha \theta^\alpha - \bar{p}_\alpha \bar{\theta}^\alpha - \partial \rho \partial \rho - \frac{1}{2} \partial^2 \rho + T_c, \\
G^+ &= \underbrace{e^\rho (d)^2}_{G_0^+} + \underbrace{\Gamma^{-j} \partial X^{+j}}_{G_{-\frac{1}{3}}^+}, \\
\tilde{G}^+ &= \underbrace{\epsilon^{jkl} \Gamma^{-j} \Gamma^{-k} \Gamma^{-l} e^{-2\rho} (\bar{d})^2}_{G_{-1}^+} + \underbrace{e^{-\rho} \epsilon^{jkl} \Gamma^{-j} \Gamma^{-k} \partial X^{-l}}_{G_{-\frac{2}{3}}^+}, \\
G^- &= \underbrace{e^{-\rho} (\bar{d})^2}_{G_0^-} + \underbrace{\Gamma^{+j} \partial X^{-j}}_{G_{\frac{1}{3}}^-}, \\
\tilde{G}^- &= \underbrace{\epsilon^{jkl} \Gamma^{+j} \Gamma^{+k} \Gamma^{+l} e^{+2\rho} (d)^2}_{G_1^-} + \underbrace{e^\rho \epsilon^{jkl} \Gamma^{+j} \Gamma^{+k} \partial X^{+l}}_{G_{\frac{2}{3}}^-}, \\
J_{gh} &= \partial \rho + \Gamma^{-j} \Gamma^{+j}, \\
J^{++} &= e^{-\rho - \Gamma^{-j} \Gamma^{+j}}, \\
J^{--} &= e^{\rho + \Gamma^{-j} \Gamma^{+j}}.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Definindo também uma carga C :

$$C = \frac{1}{3} \int \Gamma^{+j} \Gamma^{-j}, \tag{4.14}$$

e indicando os termos dos operadores G e \tilde{G} por seus respectivos valores de carga C , para referência futura.

Esta formulação permite a prescrição de um método *topológico* para a construção de amplitudes de espalhamento [BV95, Ber96b], que não será

discutida aqui. Também é o ponto de partida para a formulação da teoria de campos de supercordas [Ber95, Ber01b].

Uma característica importante dos métodos $N = 2$ e $N = 4$ é a determinação dos estados físicos, assunto da próxima seção.

4.2.2 Condições para Operadores de Vértices Físicos

A definição de operadores de vértice físicos seguirá em paralelo à descrição anterior no formalismo RNS. Deve-se definir estes operadores para os dois métodos descritos, $N = 2$ e $N = 4$. Sendo o último mais revelador quanto a estrutura da teoria, será discutido primeiro.

Operadores de Vértice Físicos $N = 4$

Da definição da álgebra superconforme $N = 4$ nota-se que G^+ e \tilde{G}^+ são a corrente BRST e o fantasma η respectivamente e, a partir daí, pode-se traduzir a discussão realizada no caso RNS.

Um vértice V pertencer a cohomologia de Q_{RNS} e estar no espaço de Hilbert pequeno implica:

$$G^+V = \tilde{G}^+V = 0, \quad \delta V = G^+\Lambda, \quad \tilde{G}^+\Lambda = 0.$$

Pode-se resolver a segunda igualdade, devido a trivialidade da cohomologia de η , $V = \tilde{G}^+\Phi$, onde $\Phi = \xi V$ e a condição para este vértice Φ , no espaço de Hilbert grande é:

$$G^+\tilde{G}^+\Phi = 0, \quad \delta\Phi = G^+\Lambda + \tilde{G}^+\tilde{\Lambda}. \quad (4.15)$$

Os operadores podem ter origem nos setores $GSO(+)$ ou $GSO(-)$, em função de conterem ou não spin-fields de variáveis híbridas.

A condição de carga de fantasma nula no RNS traduz-se imediatamente para o anulamento da carga $U(1)$, posto que esta é justamente a corrente de fantasmas.

A questão da escolha de picture é mais delicada, uma vez que esta escolha, no caso —RNS, marca a quebra da supersimetria (espácio-temporal) manifesta. Em termos de variáveis híbridas:

$$P = \frac{1}{2\pi} \oint dz (\partial\rho - \frac{1}{2}p\theta + \frac{1}{2}\bar{p}\bar{\theta}) \quad (4.16)$$

que não comuta com a carga de supersimetria q_α . No entanto, neste formalismo pode-se selecionar não o valor de picture, mas o valor da carga $\oint dz \partial \rho$ que comuta com q_α . A estratégia a ser adotada é a seguinte:

A condição $G^+ \tilde{G}^+ \Phi$ tem infinitas soluções (devido a trivialidade das cohomologias), mas a condição

$$(G^+ + \tilde{G}^+) \Phi = 0, \quad (4.17)$$

tem solução que pode ser expandida em autovalores de picture ou de carga ρ . Considerando esta última opção:

$$\hat{\Phi} = \sum \Phi_n$$

onde o subscrito n denota o autovalor de carga ρ . As soluções de Eq.(4.17) ainda possuem a transformação de gauge:

$$\delta \hat{\Phi} = (G^+ + \tilde{G}^+) \Lambda.$$

Os operadores G tem partes com carga ρ definida:

$$\begin{aligned} G^+ &\mapsto G_1^+ + G_0^+ \\ \tilde{G}^+ &\mapsto \tilde{G}_{-1}^+ + \tilde{G}_{-2}^+ \end{aligned}$$

e, portanto, Eq.(4.17) implica:

$$\begin{aligned} G_1^+ \Phi_n + G_0^+ \Phi_{n+1} + \tilde{G}_{-1}^+ \Phi_{n+2} + \tilde{G}_{-2}^+ \Phi_{n+3} &= 0 \\ \delta \Phi_n = G_1^+ \Lambda_{n-1} + G_0^+ \Lambda_n + \tilde{G}_{-1}^+ \Lambda_{n+1} + \tilde{G}_{-2}^+ \Lambda_{n+2} \end{aligned}$$

usando a trivialidade da cohomologia de G_1^+ e \tilde{G}_{-1}^+ pode-se mostrar que todos os Φ 's podem ser determinados a partir de Φ_{-1} , Φ_0 , Φ_1 , módulo transformações de gauge [Ber95]. Assim, neste formalismo, a necessidade da escolha de picture é substituída pela escolha da carga ρ , Φ_0 representando os vértices dos campos em 4 dimensões e os outros dois representando os campos que dependem das componentes *internas*.

Note a relação estreita entre a carga ρ e a carga C definida na seção anterior. Evidentemente, pode-se fazer uma escolha de autovalores para esta última carga, em vez de escolher-se o autovalor para a carga ρ .

As condições físicas $N = 4$ podem ser sumarizadas no quadro abaixo para facilidade de consulta posterior:

Def. 4 (Operadores de Vértice Físicos $N = 4$) Φ satisfazem as seguintes condições:

- Φ é um elemento do espaço de Hilbert grande.
- Φ satisfaz as seguintes equação e transformação de gauge:

$$G^+ \tilde{G}^+ \Phi = 0, \quad \delta \Phi = G^+ \Lambda + \tilde{G}^+ \tilde{\Lambda}$$

onde Λ e $\tilde{\Lambda}$ são elementos do espaço de Hilbert grande. (Esta é a equação de movimento linearizada para o campo Φ)

- Cada vértice está associado a um setor GSO, ou GSO(+) ou GSO(-). Os primeiros são bosônicos e podem ser escritos como supercampos e os últimos são fermiônicos (na folha mundo) e contem spin fields das variáveis híbridas.
- Φ tem carga J igual a 1.
- Φ tem carga C no conjunto $\{0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\}$, sendo o primeiro valor representante dos campos em 4 dimensões e os dois outros valores representantes dos campos internos.

Operadores de Vértice Físicos $N = 2$

Uma vez que há uma relação um-para-um entre as cohomologias $N = 1$ e $N = 2$ [OP94], considera-se um vértice físico como um elemento de cohomologia BRST $N = 2$ e analogamente ao formalismo RNS, pode-se mostrar que uma particular escolha na dependência dos fantasmas [BKL95], essencialmente a escolha de um gauge de Feynmann-Siegel generalizado, onde b e \tilde{b} (fantasmas para reparametrização e $U(1)$ respectivamente) aniquilam estados físicos, significa que os operadores físicos $N = 2$ são campos superconformes primários $N = 2$ com peso conforme e carga $U(1)$ nulos.

As condições de escolha de picture (ou carga ρ) são semelhantes ao método $N = 4$. Desta forma, pode-se sumarizar as condições de contorno $N = 2$ no quadro abaixo:

Def. 5 (Operadores de Vértice Físicos $N = 2$) Φ satisfazem as seguintes condições:

- Φ é campo superconforme primário $N = 2$.
- Φ tem peso conforme nulo.
- Φ tem carga J igual a 1.
- Cada vértice está associado a um setor GSO , ou $GSO(+)$ ou $GSO(-)$. Os primeiros são bosônicos e podem ser escritos como supercampos e os últimos são fermiônicos (na folha mundo) e contem spin fields das variáveis híbridas.
- Φ tem carga C no conjunto $\{0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\}$, sendo o primeiro valor representante dos campos em 4 dimensões e os dois outros valores representantes dos campos internos.
- Φ não é um campo *espúrio*.

4.2.3 Operadores de Vértices Físicos

Para o setor $GSO(+)$ pode-se escrever os operadores de vértice em termos de supercampos ($N = 1, D = 4$), enquanto o setor $GSO(-)$, que não é supersimétrico, deve conter os spin fields das variáveis híbridas. Os dois primeiros níveis de massa para este setor serão construídos em detalhe no que segue, enquanto o setor $GSO(+)$ terá seu resultado apenas mencionado:

$$\begin{aligned}\Phi_0^+ &= v(x, \theta, \bar{\theta}) \\ \Psi_{\frac{1}{3}}^+ &= e^{\rho} \Gamma^{+j} \omega^{+j}(x, \theta) \bar{\theta}^2 \\ \bar{\Psi}_{-\frac{1}{3}}^+ &= e^{-\rho} \Gamma^{-j} \bar{\omega}^{-j}(x, \bar{\theta}) \theta^2\end{aligned}$$

onde o subscrito é o valor da carga C e a notação foi ligeiramente alterada. O super-campo v é um super-campo real, ω é quiral e $\bar{\omega}$ anti-quiral. Em componentes estes supercampos podem ser escritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}v(x, \theta, \bar{\theta}) &= \theta \sigma^m \bar{\theta} A_m(x) + \theta \theta \bar{\theta} \bar{\chi}^+(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} \theta \chi^+(x) + \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} D(x), \\ \omega_{-i}(x, \theta) &= A_{-i}(x) + \theta \lambda_{-i}^+(x) + \theta \theta F_{-i}(x), \\ \bar{\omega}_{+i}(x, \bar{\theta}) &= A_{+i}(x) + \bar{\theta} \bar{\lambda}_{+i}^+(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} \bar{F}_{+i}(x).\end{aligned}$$

escrevendo o super-campo v no gauge de Wess-Zumino [WB92].

Pode-se notar facilmente que o conteúdo dos supercampos em componentes tem os graus de liberdade corretos, discutidos na seção sobre compactificação do capítulo anterior. Pode-se usar o mapeamento das variáveis RNS para as híbridas para obter estes vértices ou determiná-los diretamente através do formalismo híbrido e das condições discutidas na seção anterior.

De fato, apenas da informação de que há supersimetria manifesta, juntamente com o conhecimento do espectro da supercorda, determina-se que os vértices devem ter esta forma.

Prosegue-se com a construção dos operadores de vértice para o setor $GSO(-)$ [BT03]:

Operador de Vértice: Táquion

O spin field de peso conforme mais baixo é o candidato a ser o vértice do táquion:

$$\Lambda^{++++}T(X), \quad h = -\frac{1}{2} \quad (4.18)$$

Este operador é fermiônico e é mapeado no táquion do formalismo RNS (no espaço de Hilbert grande) $c\xi e^{-\phi}$.

Dado o vértice acima, é trivial verificar que este tem carga de $U(1)$ e carga C nulas.

Por simplicidade, considera-se o vértice do táquion com momento definido $T(k, z) = \Lambda^{++++}e^{ikX}$ (onde kX significa $k_m X^m + k^{+i} X^{-i} + k^{-i} X^{+i}$) e as condições físicas serão verificadas para este vértice.

Condições $N = 2$

Usando o tensor momento-energia:

$$\begin{aligned} T(z)T(k, 0) &= \frac{(-\frac{1}{2} + \frac{k^2}{2})}{z^2} T(k, 0) + \frac{1}{z} \partial T(k, 0) + \dots, \\ k^2 &= k_m k^m + k^{+i} k^{-i}, \end{aligned}$$

e o pólo duplo fornece o peso conforme, anulamento deste força o anulamento do termo de pólo duplo, fornecendo uma condição de concha de massa para o momento k do táquion: $k^2 = 1$.

Um campo superconforme primário $N = 2$ não tem pólos duplos ou maiores com os operadores G . A OPE de G^+ com este vértice é:

$$(e^\rho(\bar{d})^2 + \Gamma^{-j}\partial X^{+j})(z)\Lambda^{++++}e^{ikX}(w) = \frac{1}{(z-w)}\{[-2\Lambda^{---+} + k_m(p\sigma^m\bar{\theta}\Lambda^{++++}) + \frac{1}{2}(k^m k_m - 1)\Lambda^{++\oplus\oplus}]e^\rho + k^{+j}\Gamma^{-j}\Lambda^{++++}\}e^{ikX} + \dots$$

e a OPE $G^-(z)T(k, w)$ é:

$$(e^{-\rho}(\bar{d})^2 + \Gamma^{+j}\partial X^{-j})(z)\Lambda^{++++}e^{ikX}(w) = \frac{1}{(z-w)}\{[-2\Lambda^{++--} + k_m(\bar{p}\bar{\sigma}^m\theta\Lambda^{++++}) + \frac{1}{2}(k^m k_m + 1)\Lambda^{\oplus\oplus--}]e^{-\rho} + k^{+j}\Gamma^{-j}\Lambda^{++++}\}e^{ikX} + \dots$$

onde a notação $(p\sigma\theta\Lambda)$ descreve apenas a estrutura de índices do spin field, sem contrações subentendidas. Vê-se imediatamente que não há pólos duplos nestas OPEs, o que implica neste vértice satisfazer as condições físicas sem que nenhuma condição de polarização sobre os momentos k seja imposta.

Para o formalismo $N = 4$, a única parte não-trivial a ser mostrada é garantir que a equação de movimento seja satisfeita.

Equação de Movimento

A equação de movimento invariante de gauge é $\tilde{G}^+G^+T(k, z) = 0$.

Usando os resultados acima, é necessário calcular apenas as seguintes OPEs (notando que para a primeira parte do operador \tilde{G}^+ os termos relevantes são os pólos cúbicos, enquanto que para a segunda parte deste operador os termos relevantes são os pólos duplos, devida a diferença da dependência em ρ):

$$\begin{aligned} (\bar{d})^2(z)\Lambda^{---+}e^{ikX}(z) &= \frac{1}{(z-w)^3}(k^m k_m)\Lambda^{++++}e^{ikX}(w) + \dots \\ (\bar{d})^2(z)(p\bar{\theta}\Lambda^{++++})e^{ikX}(w) &= \frac{\bar{\sigma}^m}{(z-w)^3}k_m\Lambda^{++++}e^{ikX}(w) + \dots \\ (\bar{d})^2(z)\Lambda^{++\oplus\oplus}e^{ikX}(w) &= (-2)\frac{1}{(z-w)^3}\Lambda^{++++}e^{ikX}(w) + \dots, \\ \partial X^{-k}(z)k^{+j}e^{ikX} &= \frac{1}{(z-w)^2}k^{+j}k^{-j} + \dots \end{aligned}$$

com estas OPEs pode-se ver que:

$$\tilde{G}^+G^+T(k, z) = (k^2 - 1)T(k, z) = 0 \quad (4.19)$$

que é a equação de movimento correta para um táquion na representação de momentos.

Operadores de Vértice: Férmions sem Massa em $D = 4$

No próximo nível do espectro, existem dois pares de spin fields com peso conforme nulo. Para construí-los, note que a OPE entre as variáveis híbridas e os spin fields têm um corte de ramificação de raiz quadrada. Considerando a OPE de p ou θ (e seus conjugados) com Λ^{++++} pode-se construir os operadores desejados.

$$\Theta_\alpha \equiv : \theta_\alpha \Lambda^{++++} := \Lambda^{+\oplus^{++}}, \quad (4.20)$$

$$\bar{\Theta}_{\dot{\alpha}} \equiv : \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \Lambda^{++++} := \Lambda^{++\oplus^+}, \quad (4.21)$$

$$\Pi_\alpha \equiv : p_\alpha \Lambda^{++++} := \Lambda^{+\bar{+}^{++}}, \quad (4.22)$$

$$\bar{\Pi}_{\dot{\alpha}} \equiv : \bar{p}_{\dot{\alpha}} \Lambda^{++++} := \Lambda^{++\bar{+}^+}, \quad (4.23)$$

usando estes spin fields, os candidatos a operadores de vértice para os férmions sem massa em 4-dimensões são:

$$\Phi = (\Theta_\alpha \chi_1^\alpha + \Pi_\alpha \chi_2^\alpha + \bar{\Theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\chi}_{1\dot{\alpha}} + \bar{\Pi}^{\dot{\alpha}} \bar{\chi}_{2\dot{\alpha}}) e^{ikX}, \quad (4.24)$$

onde, novamente, usa-se a representação de momento e os campos χ representam as polarizações dos férmions. Assume-se que o momento dos férmions possua componentes não nulas apenas para as quatro dimensões espaço-temporais de maneira a evitar a mistura entre estes férmions e os férmions internos, lembrando que o espectro contém um férmion em 10 dimensões satisfazendo a equação de Dirac e a forma particular de quebra da simetria explícita de Lorentz utilizada faz com que estes campos fermiônicos de diferentes setores apareçam todos misturados, a não ser que se assuma esta hipótese simplificadora.

Verificando as condições físicas para estes operadores:

Condições $N=2$

O anulamento dos pólos duplos e superiores na OPE do tensor momento-energia com os vértices, isto é, a condição de peso conforme zero, é trivial, uma vez que apenas o primeiro termo na equação eq.(4.13) contribui para

o pólo duplo, produzindo uma condição de concha de massa:

$$k^2 = 0.$$

Os vínculos advindos das OPEs de G s com os vértices são um pouco mais sutis e devem produzir condições de polarização. As OPEs relevantes para esta discussão são:

$$\begin{aligned} G^+(z)(\Pi\chi_2)(0) &\sim \frac{e^\rho}{z} \left[k^2 \Lambda^{\bar{+}+\oplus\oplus} \chi_2 + k_m \chi_2 \sigma^m \Lambda^{\bar{-}\bar{+}\oplus} \right] + \dots \\ G^+(z)(\Theta\chi_1)(0) &\sim \frac{e^\rho}{z^2} [\Pi\chi_1 + k_m \chi_1 \sigma^m \bar{\Theta}] + \frac{e^\rho}{z} \left[k^2 \Lambda^{\oplus+\oplus\oplus} \chi_1 \right] + \dots \\ G^+(z)(\bar{\Pi}\bar{\chi}_2)(0) &\sim \frac{e^\rho}{z^2} [k^2 \bar{\Theta}\bar{\chi}_2 + k_m \bar{\chi}_2 \bar{\sigma}^m \Pi] + \\ &\quad \frac{e^\rho}{z} \left[\Lambda^{\bar{-}\bar{+}\oplus} \bar{\chi}_2 + k_m \bar{\chi}_2 \sigma^m \Lambda^{\oplus+\oplus\oplus} \right] + \dots \\ G^+(z)(\bar{\Theta}\bar{\chi}_1)(0) &\sim \frac{e^\rho}{z} \left[k_m \bar{\chi}_1 \bar{\sigma}^m \Lambda^{\bar{+}\bar{+}\oplus\oplus} + \Lambda^{\bar{-}\bar{+}\oplus} \bar{\chi}_1 \right] + \dots \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde foi omitida a dependência no momento e contrações de índices fermiônicos. Os vínculos vindos de G^- têm a mesma forma da OPE acima e podem ser lidos diretamente destas equações pela mudança do sinal de ρ nas exponenciais e trocando apropriadamente os campos com e sem barras de lugar, por exemplo, $G^-\Pi\chi_2 = G^+\bar{\Pi}\bar{\chi}_2$.

O anulamento dos pólos duplos das equações acima implicam as seguintes condições de polarização:

$$\begin{aligned} \chi_1 &= k_m \sigma^m \bar{\chi}_2, \\ \bar{\chi}_1 &= k_m \bar{\sigma}^m \chi_2. \end{aligned}$$

Lembrando ainda que um vértice superconforme primário é definido módulo estados espúrios (de norma nula), criados pela parte de frequências negativas dos geradores superconformes. Esta identificação fornece transformações de gauge para os vértices, que, no presente caso, são:

$$\begin{aligned} \delta\bar{\chi}_1 &= k^2 \bar{\lambda}, \\ \delta\chi_2 &= k_m \sigma^m \bar{\lambda}, \end{aligned}$$

mais transformações análogas para as outras polarizações. portanto, percebe-se que nem todos os campos (no espaço-tempo) constantes da eq.(4.24) são

independentes. Este procedimento é exatamente análogo ao caso do setor $GSO(+)$, quando se considera supercampos como operadores de vértice para o setor sem massa [Ber96a], permitindo a escolha de um gauge de Wess-Zumino para o super-campo vetorial. Desta forma é claro que há apenas dois spinores sem massa neste setor, com quiralidades opostas.

Agora deve-se checar as condições Físicas para o formalismo $N = 4$.

$N = 4$ Formalismo

A equação de movimento é $\tilde{G}^+ G^+[\Phi] = 0$. Utilizando as OPEs das equações eq.(4.25), pode-se escrever as equações de movimento, tomando-se cuidado apenas com a estrutura de pólos, advinda da dependência diferente em ρ :

$$\begin{aligned}\tilde{G}^+ G^+(\Theta\chi_1) &= k_m \chi_1 \sigma^m \bar{\Pi} + k^2 \Theta \chi_1, \\ \tilde{G}^+ G^+(\bar{\Theta}\bar{\chi}_1) &= k_m \bar{\chi}_1 \bar{\sigma}^m \Pi + k^2 \bar{\Theta} \bar{\chi}_1, \\ \tilde{G}^+ G^+(\Pi\chi_2) &= k^2 k_m \chi_2 \sigma^m \bar{\Theta} + k^2 \Pi \chi_2, \\ \tilde{G}^+ G^+(\bar{\Pi}\bar{\chi}_2) &= k^2 k_m \bar{\chi}_2 \bar{\sigma}^m \Theta + k^2 \bar{\Pi} \bar{\chi}_2.\end{aligned}\tag{4.26}$$

e as equações de movimento implicam:

$$\begin{aligned}k_m \chi_1 \sigma^m + k^2 \bar{\chi}_2 &= 0, \\ k_m \bar{\chi}_1 \bar{\sigma}^m + k^2 \chi_2 &= 0, \\ k^2 (k_m \bar{\chi}_2 \bar{\sigma}^m + \chi_1) &= 0, \\ k^2 (k_m \chi_2 \sigma^m + \bar{\chi}_1) &= 0.\end{aligned}$$

A invariância de gauge, como descrita na seção sobre condições físicas é:

$$\begin{aligned}G^+[e^{-\rho}(\Theta\lambda_1 + \bar{\Pi}\bar{\lambda}_2)] &= \Pi\lambda_1 + k_m \lambda_1 \sigma^m \bar{\Theta} + k^2 \bar{\Theta}\bar{\lambda}_2 + k_m \bar{\lambda}_2 \bar{\sigma}^m \Pi, \\ \tilde{G}^+[e^{2\rho}\Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma^+ \Gamma^+ (\Pi\lambda_2 + \bar{\Theta}\bar{\lambda}_1)] &= \bar{\Pi}\bar{\lambda}_1 + k_m \bar{\lambda}_1 \bar{\sigma}^m \Theta + k^2 \Theta\lambda_2 + k_m \lambda_2 \sigma^m \bar{\Pi}.\end{aligned}$$

e a partir destas relações pode-se ler as transformações de gauge para os campos do espaço-tempo:

$$\begin{aligned}\delta\chi_1 &= k_m \bar{\lambda}_1 \bar{\sigma}^m + k^2 \lambda_2, \\ \delta\bar{\chi}_1 &= k_m \lambda_1 \sigma^m + k^2 \bar{\lambda}_2, \\ \delta\chi_2 &= \lambda_1 + k_m \bar{\lambda}_2 \bar{\sigma}^m, \\ \delta\bar{\chi}_2 &= \bar{\lambda}_1 + k_m \lambda_2 \sigma^m.\end{aligned}$$

Como no caso do setor $GSO(+)$, tem-se apenas dois spinores sem massa no espaço-tempo com quiralidades opostas e a equação de movimento usual (equação de Dirac) é verificada. A escolha do gauge de Wess-Zumino para o setor $GSO(+)$ é aqui substituída pela escolha dos spin fields Θ e $\bar{\Theta}$ para serem os operadores de vértice.

A equivalência entre os dois formalismos descritos aqui é simples. O formalismo $N = 2$ fornece operadores de vértice em um gauge fixado, cuja condição de fixação de gauge é representada pelos vínculos provenientes das OPEs do vértice com os operadores G .

Operadores de Vértice: Férmions *Internos*

Nesta subseção constrói-se os vértices dependentes das componentes internas dos campos. Representando estes vértices por Ψ^- e $\bar{\Psi}^-$ com carga C $1/3$ e $-1/3$ respectivamente. Como os dois vértices são conjugados, pode-se tratá-los de uma maneira unificada.

Os candidatos a vértice neste setor são:

$$\begin{aligned}\Psi(k, z) &= e^{\rho\Gamma^+i} (\Theta\chi_1 + \Pi\chi_2 + \bar{\Theta}\bar{\eta}_1 + \bar{\Pi}\bar{\eta}_2) e^{ikX}, \\ \bar{\Psi}(k, z) &= e^{-\rho\Gamma^-i} (\Theta\eta_1 + \Pi\eta_2 + \bar{\Theta}\bar{\chi}_1 + \bar{\Pi}\bar{\chi}_2) e^{ikX}.\end{aligned}$$

que são obtidos através dos spin fields já discutidos e a inclusão de campos com a carga C e peso conforme corretos.

As OPEs necessárias já foram calculadas em eq.(4.25). Apenas os pólos relevantes são diferentes devido a contribuição de ρ e Γ . Note também que ainda deve-se considerar o momento apenas nas quatro direções espaço-temporais. A verificação das condições físicas segue naturalmente.

Formalismo $N = 2$

O anulamento dos pólos duplos na OPE dos vértices com o tensor momento-energia ainda é trivial, fornecendo apenas uma condição de concha de massa, identificando os vértices com campos sem massa, $k^2 = 0$.

Para checar as restrições que se obtém impondo aniquilamento dos pólos duplos com G^+ e G^- , pode-se usar as OPEs calculadas anteriormente, tomando o cuidado com a estrutura de pólos. De fato, além da dependência diferente em ρ e Γ , as OPEs com G^+ adquirem uma potência negativa a mais, enquanto o oposto se dá com os vínculo impostos por G^- . Como os pólos máximos já eram de segunda ordem, é evidente que este último

operador não impõe restrições adicionais, uma vez que não há mais pólos duplos para gerarem vínculos. G^+ , contudo, impõe restrições adicionais:

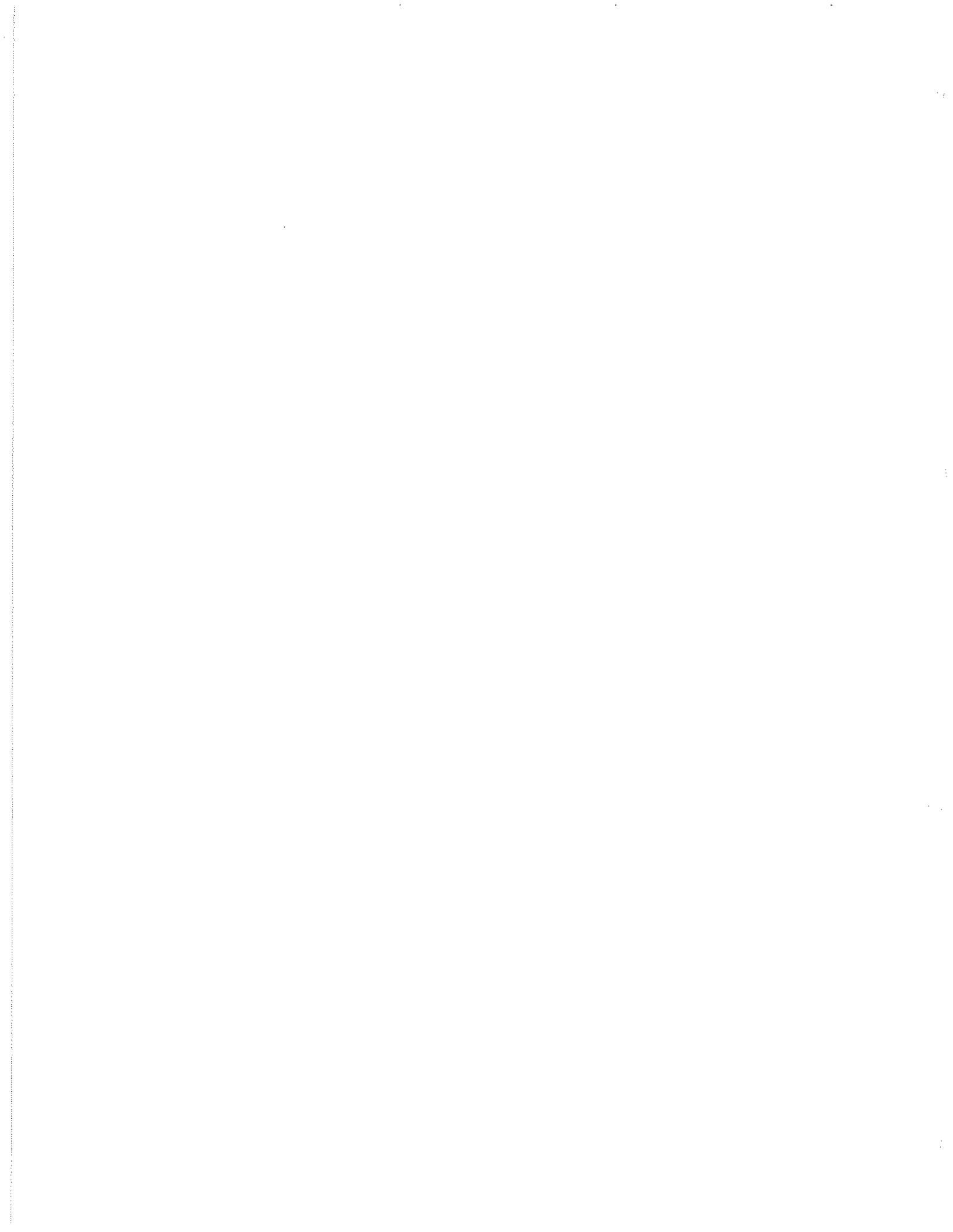
$$\begin{aligned}\bar{\eta}_2 &= 0, \\ \chi_1 &= -k_m \bar{\eta}_2 \bar{\sigma}^m, \\ \bar{\eta}_1 &= k_m \chi_2 \sigma^m,\end{aligned}$$

e é claro que há apenas um spinor sem massa no operador de Vértice Ψ^- e desde que $k^2 = 0$, η , a equação satisfeita é: $k_m \bar{\eta}_1 \sigma^m = 0$.

O mesmo argumento se aplica para o operador de vértice $\bar{\Psi}$, onde apenas sobrevive a combinação Θ e $\bar{\Pi}$.

Formalismo $N = 4$

Todos os cálculos para checar estas condições já foram realizados quando os férmions em $D = 4$ foram discutidos. Evita-se a repetição do conteúdo, apenas notando-se que existem apenas dois spinores sem massa nestes dois vértices e pode-se escolher um gauge tal que Ψ contenha apenas o spin field $\bar{\Theta}$ e $\bar{\Psi}$ contenha apenas Θ , como resultado das 8 equações de movimento e das 8 invariâncias de gauge que são obtidas.



Capítulo 5

D-Branas

Onde é introduzido o elemento-chave na revolução de dualidades ocorrida em teorias de cordas na década passada. Descreve-se a supercorda tipo I e a inclusão de D-branas como superfícies onde os extremos das cordas abertas são livres. Algumas propriedades importantes são descritas em generalidade. Também são introduzidas as D-branas não-BPS e a conjectura de Sen é discutida. A abordagem heurística visa apresentar o material mínimo para o entendimento da motivação do trabalho

Até o momento a descrição de teorias de cordas feita aqui é perturbativa, e o foco principal foram as supercordas fechadas tipos II (A/B). No entanto há muito mais estrutura do que é aparente apenas por esta análise. Em particular, existem estados não-perturbativos que representam objetos estendidos. Uma classe destes objetos tem uma descrição particularmente útil, sendo possível lidá-los através das cordas, perturbativamente. É possível a construção de ações efetivas e há simetrias que protegem os cálculos de correções quânticas. Estes objetos são as D-branas BPS, que serão discutidas a seguir. O entendimento destes objetos ainda está longe de ser completo, apresentando uma miríade de dificuldades. Apesar destas dificuldades muitos já foram os resultados obtidos, particularmente no estudo de dualidades entre os diferentes tipos de supercordas, buracos negros, princípio holográfico e muitas outras aplicações.

Estes objetos serão discutidos a seguir, apresentando-se um conteúdo mínimo para o prosseguimento do trabalho, dado o volume de trabalhos já desenvolvidos nesta área, os quais tornariam impossível um tratamento completo.

Depois de estudar as D-Branas BPS, serão introduzidos sistemas instáveis

de D-branas, a partir de um par de D-brana e anti D-brana, e as D-branas não-BPS estáveis e instáveis serão discutidas a partir daí, como forma de preparar-se o caminho para a notável conjectura de Sen, a qual lançou uma nova e definitiva luz sobre o entendimento do papel do Táquion na teoria de supercordas.

5.1 Supercordas Tipo I

A supercorda tipo II-B tem férmions de mesma quiralidade vindos dos setores se movendo à direita e à esquerda, tendo uma simetria de paridade na folha-mundo Ω . Pode-se então projetar a simetria, obtendo uma teoria $II - B/\Omega$. Este procedimento elimina alguns estados de seu espectro. É fácil de ver que os estados que sobrevivem a projeção (tomando $\Omega = 1$) são [Pol88a]:

$$\begin{array}{cccccc}
 \mathbf{1} & + & \mathbf{28} & + & \mathbf{35} & + & \mathbf{8}' & + & \mathbf{56} & & (5.1) \\
 \underbrace{\phi}_{\text{dilaton}} & + & \underbrace{B_{\mu\nu}^{RR}}_{\text{2-forma RR}} & + & \underbrace{g_{\mu\nu}}_{\text{gráviton}} & + & \underbrace{\lambda}_{\text{gaugino}} & + & \underbrace{\psi_{\mu}}_{\text{gravitino}} & &
 \end{array}$$

como a simetria de paridade troca os setores direito e esquerdo, esta supercorda não é orientada e a presença de apenas um gravitino mostra que existe apenas supersimetria $N = 1$ para esta teoria, logo esta é a **Supercorda Fechada tipo I**.

Supercordas abertas não são consistentes *per se*, uma vez que a interação entre elas só é consistente se introduz-se também um canal de cordas fechadas. Heuristicamente, as cordas abertas interagem através de seus extremos de uma maneira local, e a interação de um extremo da corda com o outro extremo, da mesma corda, produz uma corda fechada. Como as supercordas fechadas têm uma projeção GSO, evidentemente as supercordas abertas também devem sofrer esta projeção, apresentando então as possibilidades:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Tipo } I & (NS+, R+) \quad 8_v + 8 \\
 \text{Tipo } \tilde{I} & (NS+, R-) \quad 8_v + 8'
 \end{array}$$

onde apresentou-se o espectro sem massa das teorias e o táquion é projetado. Os estados são representações da álgebra supersimétrica ($N = 1, D = 10$)

e portanto só podem acoplar com a supercorda não orientada fechada tipo I, descrita acima, e apenas a primeira possibilidade sobrevive, com um acoplamento consistente devido a supersimetria no espaço-tempo. É claro que a teoria de cordas abertas também não é orientada. Esta teoria é a **Supercorda Tipo I**.

Pode-se ainda associar graus de liberdade extras aos extremos das cordas abertas, os **fatores de Chan Paton**. Essencialmente, os extremos das cordas são carregados sobre um grupo de Lie. Ainda existe a restrição de que o vetor sem massa, presente no espectro da supercorda, deva se transformar na adjunta deste grupo, de forma a ser um campo de gauge para o grupo. Para uma supercorda orientada o grupo de gauge deve ser $U(n)$, e para a supercorda não orientada deve-se ter um dos grupos $SO(n)$ ou $Sp(n)$.

Nem todas as escolhas de grupos de gauge são possíveis devido a existência de anomalias e a única supercorda aberta (não-orientada) é a supercorda tipo I com grupo de gauge $SO(32)$. A consistência desta teoria com este grupo de gauge pode ser entendida no contexto das D-branas de uma maneira muito útil, como será descrito a seguir. Por ora, deve-se comentar que a construção da teoria tipo I é feita a partir da supercorda tipo II-B através de um procedimento denominado **orientifold**, no qual projeta-se os estados invariantes sobre uma simetria discreta e inclui-se *setores torcidos*, que são as cordas abertas [GP96, AS02, Sag95, Dab97].

5.2 D-Branas

Para cordas abertas as condições de contorno a serem impostas são de dois tipos. As condições Neumann, em que os extremos das cordas são livres e há uma imposição sobre o momento; e as condições de Dirichlet, em que os extremos da corda são fixos. Evidentemente esta última possibilidade quebra invariância translacional.

Condições de contorno Dirichlet foram pouco consideradas até que houve uma mudança no paradigma conceitual de teoria de cordas, a medida em que uma interpretação física rica e poderosa emergiu do estudo destas condições [PC88, DLP89].

É conveniente agora a introdução das D-Branas, na definição abaixo, que será discutida no texto abaixo.

Def. 6 (D-Branas BPS) são hipersuperfícies $(p + 1)$ -dimensionais nas quais as supercordas abertas têm seus extremos fixos. Isto é, impõe-se condições de contorno de Dirichlet para $9 - d$ coordenadas da supercorda de forma que seus extremos sejam vinculados a se mover nesta hipersuperfície.

- São objetos dinâmicos.
- Existe um campo de gauge A_μ no volume-mundo da D-brana.
- Preservam metade da supersimetria do espaço-tempo.
- Carregam carga RR
- Tem tensão inversamente proporcional a constante de acoplamento da corda.
- São estados BPS.

Vários elementos desta definição merecem uma explicação mais elaborada.

A D-brana, como objeto estendido no espaço-tempo, é de fato um objeto dinâmico, uma vez que cordas estão associadas à ela, da mesma forma que cordas representam flutuações na métrica de um espaço-tempo plano. Como são cordas abertas as cordas associadas as D-branas, o modo de mais baixa energia é o campo de gauge A_m em 10 dimensões, as componentes deste campo paralelas à D-brana representam um campo de gauge no volume-mundo deste objeto, enquanto as coordenadas perpendiculares são coordenadas coletivas [Pol96].

A D-brana impõe restrições a maneira em que se combinam os setores se movendo a direita e a esquerda da corda, impondo uma relação entre as cargas supersimétricas que preserva uma combinação linear apenas, preservando assim, apenas metade da supersimetria.

O fato destes objetos serem carregados sob RR é definitivamente de grande importância. O setor RR das supercordas tipo II é composto de p -formas de posto ímpar para a supercorda tipo IIA e posto par para a supercorda tipo IIB, e não há nenhum objeto no espectro perturbativo que seja carregado segundo esta carga. De fato, um objeto p dimensional carregado eletricamente pode ser acoplado a um campo de gauge $(p + 1)$ -

dimensional segundo a expressão:

$$\mu_p \int_{\Sigma_{p+1}} A^{(p+1)}$$

onde Σ é o volume-mundo do objeto, μ é a carga e A é a $(p+1)$ -forma. Como D-branas são objetos estendidos no espaço-tempo, é razoável considerá-las como candidatas a objetos RR carregados, caso em que a supercorda Tipo IIA apresentaria D-branas $p = 0, 2, 4, 6, 8$ enquanto a tipo IIB apresentaria $p = -1, 1, 3, 5, 7, 9$ (-1 é o D-instanton, com condições de Dirichlet em todas as coordenadas, inclusive o tempo). E de fato, pode-se calcular a tensão e a carga da D-brana e verificar-se que são objetos com carga RR e tensão inversamente proporcional à constante de acoplamento, evidenciando o fato de serem objetos não-perturbativos, uma espécie de sólitons em teorias de cordas. Este cálculo pode ser efetuado calculando-se a interação entre duas D-branas paralelas de mesma dimensionalidade, trocando uma corda entre elas, no que é conhecido como diagrama do cilindro representado na figura 5.1[Pol96, Dab97]:

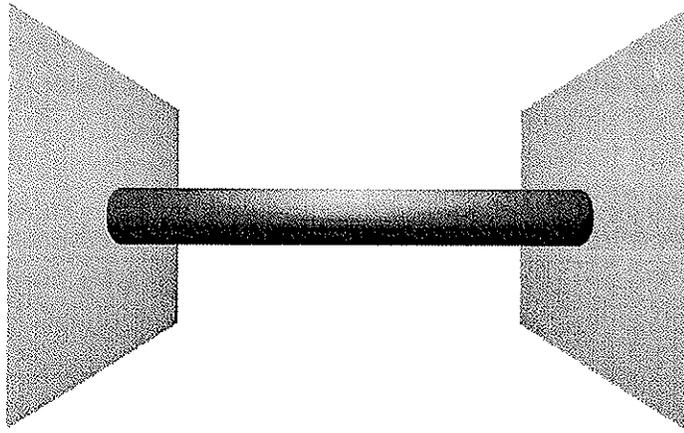


Figura 5.1: Visão artística do diagrama do cilindro: a troca de uma corda por duas D-branas

Este cálculo não será reproduzido aqui, embora seja importante comentar algumas características. Primeiramente este diagrama pode ser lido de duas formas, conforme a escolha da direção temporal na corda que está sendo trocada pelas D-branas, ou como um diagrama de cordas fechadas

em nível de árvore, ou como um diagrama de cordas abertas em nível de 1-loop. Este intercâmbio entre as interpretações de cordas fechadas e abertas é importante e deve ser sempre verificado em situações menos triviais, garantido-se a consistência das interações entre cordas. Do ponto de vista operacional, este cálculo é grandemente simplificado através do uso dos caracteres de Virasoro já discutidos [SS96].

Como resultado do cálculo da força entre duas D-branas, conclui-se que não há força entre elas, havendo um cancelamento, devido a supersimetria, entre as contribuições bosônicas e fermiônicas, caracterizando este objeto como um estado BPS.

É importante salientar-se que esta visão heurística das D-branas absolutamente não esgota suas propriedades e sutilezas. Sua dinâmica é, em grande parte, desconhecida (a menos do setor de baixas energias [Pol88b]) e a própria noção delas como hipersuperfícies perde o seu sentido original em espaços-tempo menos triviais do que Minkowski [Dou01]. Mesmo assim, esta abordagem permite a análise objetivada neste trabalho.

Uma peculiaridade interessante das D-branas provém de sua condição BPS, posto que estes objetos não tem força de interação entre elas, podem ser agrupados em um mesmo ponto, de maneira a surgirem estados sem massa adicionais, dando origem a um realce da simetria. Desta forma, N D-Branas coincidentes dão origem a um grupo de gauge $U(N)$ no volume-mundo, como ilustrado na figura 5.2.

Outrossim, D-Branas fornecem um re-interpretação dos fatores de Chan-Paton, como rótulos das próprias D-branas. Sob esta luz, pode-se entender o grupo $SO(32)$ da supercorda tipo I como resultante de um vácuo preenchido por 32 D9-branas, sob a identificação pela paridade da folha-mundo, responsáveis pelo cancelamento de uma anomalia RR [Dab97].

Encerrando esta discussão informal, note-se que as supercordas tipo II são teorias de cordas fechadas originalmente, mas parecem agora conter um setor de cordas abertas e as cordas abertas necessariamente devem conter um setor de cordas fechadas para haver consistência nas interações de 1-loop. Ademais, a introdução de D-branas, conquanto não seja clara desta apresentação, não é uma introdução *ad hoc* na teoria, mas uma imposição da consistência da teoria sobre suas simetrias, em particular sobre a dualidade T, bem discutida na referência [Pol96].

O papel das D-branas como sólitons de supergravidade, suas aplicações em buracos negros ou seus vários usos do estudo de dualidades, que de fato levaram a unificação das teorias de supercordas consistentes, não serão

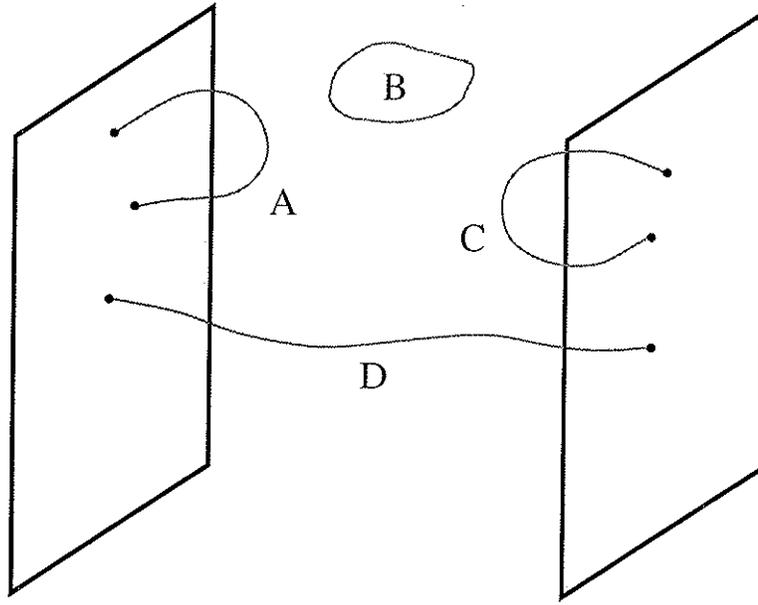


Figura 5.2: Várias cordas entre D-branas. B é uma corda fechada se propagando no espaço-tempo enquanto A, C e D são cordas abertas. Se as duas D-branas são coincidentes, estas três cordas abertas produzem três campos de gauge (sem massa) preenchendo a representação de $SU(2)$.

discutidos aqui, mas encontra-se referência farta sobre o assunto [Ste98, Mal98, Sen97].

5.3 D-Branas Não-BPS

Considere inicialmente um par de $D - \bar{D}$ Branas coincidentes nas supercordas tipo $II - A/II - B$

Algumas características deste sistema são [Sen99b]:

- D e \bar{D} tem orientação oposta.
- Espectro das cordas abertas tem quatro setores rotulados por fatores

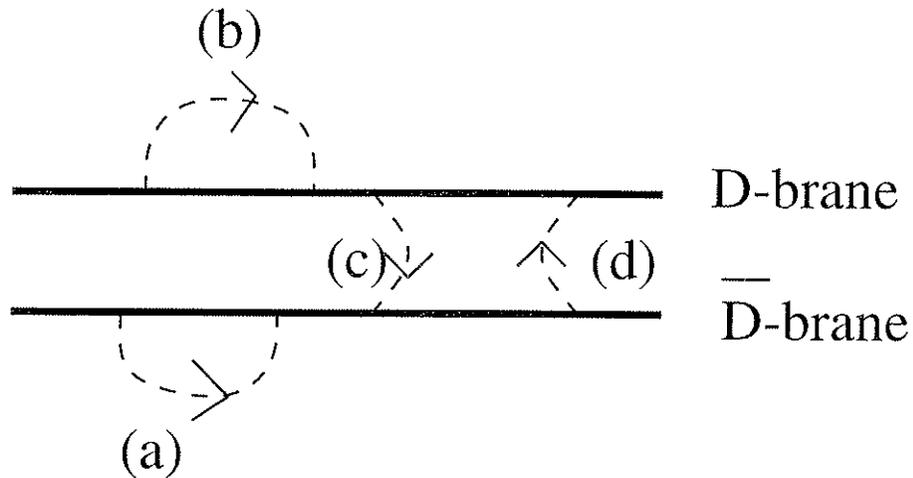


Figura 5.3: Cordas abertas em um sistema $D - \bar{D}$.

de Chan-Paton:

$$\begin{array}{ll}
 (a) : \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & (b) : \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 (c) : \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} & (d) : \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

- A imposição de que o diagrama de cilindro seja interpretado como o annulus ¹ através de uma transformação modular fixa a projeção GSO nos vários tipos de cordas entre as D-Branas. Isto é, temos liberdade de fixar apenas em um setor, os outros automaticamente são determinados. Isto é, deve-se manter a dupla interpretação do diagrama do cilindro como um troca de cordas fechadas em nível de árvore ou uma troca de cordas abertas em 1-loop.

A correspondência entre os canais de cordas abertas e fechadas pode ser sumarizada na tabela [DVL99]:

¹Isto é, que haja uma dupla interpretação do diagrama do cilindro em termos de cordas abertas ou cordas fechadas

Cordas Fechadas	Cordas Abertas
NS-NS	NS
NS-NS $(-1)^F$	R
R-R	NS $(-1)^F$

de forma que $(NS, NS) \oplus (R, R) \equiv NS(1 + (-1)^F)$ produz projeção GSO usual, logo, para os setores (a) e (b) na figura 5.3 os estados físicos são pares sobre $(-1)^F$ e o táquion não é físico (assumindo convenções em que $|0\rangle_{NS}$ é ímpar sobre $(-1)^F$).

Para o caso do sistema $D - \bar{D}$ do ponto de vista da corda fechada não há mudança nos setores $NS - NS$ e $NS - NS(-1)^F$, mas $R - R$ muda de sinal, o que fornece uma projeção GSO diferente para os setores (c) e (d), para os quais o táquion é físico.

- O táquion vem em dois setores reais, isto é, temos um campo taquiônico complexo.
- $D - \bar{D}$ quebra toda a supersimetria da teoria, uma vez que cada uma das D-Branas quebra meia supersimetria e a oposição de cargas delas garante que elas quebram conjuntos disjuntos de geradores supersimétricos.

Devido a presença do táquion o sistema é instável e deve decair em uma configuração indistinguível do vácuo.

Este sistema apresenta uma simetria, sobre o operador $(-1)^{f_L}$ no sistema. f_L é o número de férmions espaço-temporais do setor de movendo a esquerda [Sen].

O operador $(-1)^{f_L}$ troca o sinal de todos os estados no setor Ramond que se move a esquerda da corda fechada e tem uma ação trivial na folha-mundo. Como a diferença entre a D-brana e a \bar{D} -brana é justamente o sinal dos campos Ramond-Ramond, isto significa que este operador troca a D-Brana pela Anti D-brana e vice-versa.

Como não há ação na folha-mundo, deve-se apenas verificar o que acontece nos fatores de Chan-Paton. Seja Λ uma matriz de Chan-Paton, a troca de D-Brana por anti D-brana é implementada por:

$$\Lambda \rightarrow S\Lambda S^{-1}$$

$$S = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

logo

$$CP : \begin{array}{l} I, \quad \sigma_1 \rightarrow \text{pares} \\ \sigma_3, \quad i\sigma_2 \rightarrow \text{ímpares} \end{array}$$

sob a ação do operador $(-1)^{J_L}$.

Define-se uma $D(2p)$ -Branas não-BPS da supercorda II -B da seguinte forma:

Def. 7 *D-Branas não BPS de dimensão $2p$, na supercorda tipo II -B, é obtida pelo orbifold do par $D2p - \overline{D2p}$ na supercorda tipo II -A sob a ação do operador $(-1)^{J_L}$.*

No bulk o resultado deste orbifold é levar a supercorda tipo II -A em II -B [Dab97]. No setor de cordas abertas seleciona-se os setores cujos fatores de Chan-Paton são I e σ_1 , os quais são pares sobre a ação do operador.

Obviamente pode-se definir analogamente uma $D(2p + 1)$ -branas não-BPS da supercorda II -A.

Este procedimento define realmente um único objeto? Partindo de um par de D-branas e anti-D-Branas e após o processo de orbifolds há apenas um objeto, de fato, o grau de liberdade correspondente a afastar as membranas umas das outras reside no setor $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e este setor foi projetado para fora do espectro da D-Branas não-BPS.

Excitações do volume-mundo são cordas abertas com condições de contorno de Dirichlet nas $(9 - 2p)$ coordenadas transversais e condições de contorno tipo Neumann nas $2p + 1$ coordenadas longitudinais. Cordas abertas carregam fatores de Chan-Paton I e σ_1 . O estado fundamental do setor Neveu-Schwarz carregando fator de Chan-Paton σ_1 é físico, logo há um campo taquiônico real na teoria, refletindo sua instabilidade.

Estes objetos têm uma construção inteiramente equivalente, embora muito diferente em sua estrutura. As D-branas não-BPS podem ser construídas através de soluções solitônicas para o perfil taquiônico do par instável original, conjecturando-se que o táquion deste sistema tenha de fato um

mínimo em seu potencial e a solução solitônica interpola entre os vácuos deste potencial [Sen99b, Sen99a].

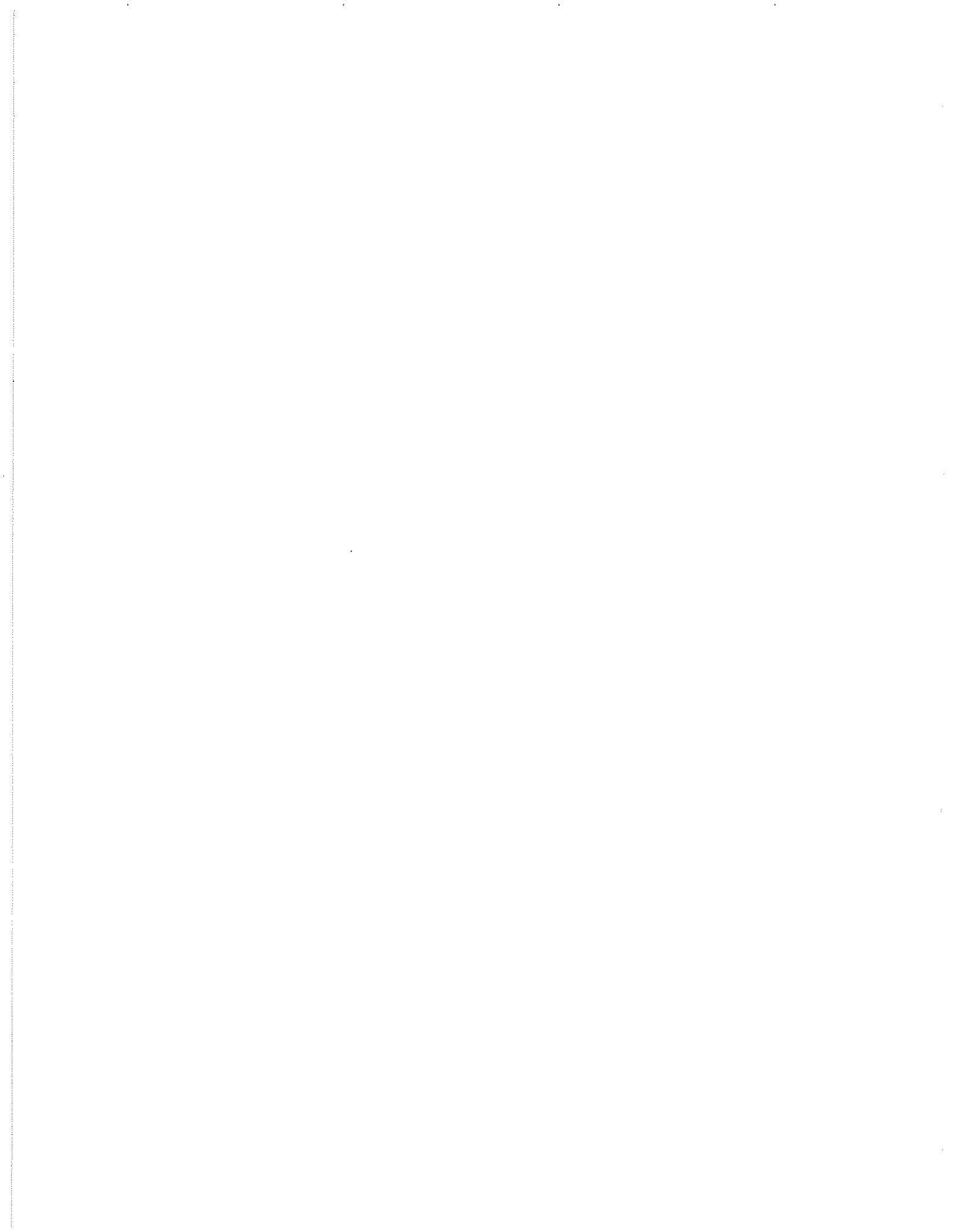
O objetivo deste capítulo inteiro é o de introduzir a linguagem adequada a compreender o papel do táquion e de sistemas instáveis em geral em teorias de cordas, através do enunciado da conjectura de Sen.

5.4 Conjectura de Sen

Def. 8 (Conjectura de Sen): *Para sistemas taquiônicos em supercordas abertas:*

- *Existe um vácuo perturbativo estável. O valor do potencial neste ponto é a massa do sistema instável.*
- *D-Branas de dimensionalidade inferior são obtidos a partir de D-Branas instáveis através de soluções solitônicas para o perfil do táquion.*
- *O Vácuo perturbativamente estável é um vácuo de cordas fechadas.*

O panorama que surge desta conjectura é uma unificação das D-branas, todas podendo ser obtidas através de um par de $D9 - \overline{D9}$ -brana através do processo de condensação do táquion, ou através das construções de orbifolds como descrito acima [Sch99]. A evidência para esta conjectura surgiu através do estudo das teorias conformes descrevendo as duas abordagens, mas o entendimento completo necessita do estudo de amplitudes fora da camada de massa, para descrever a condensação taquiônica, o que é a arena natural da teoria de campos de cordas [SZ00, Ber00, BSZ00], que passa a ser descrita na parte seguinte deste trabalho, com um viés para aplicação nos aspectos da conjectura de Sen.



Parte II

Teoria de Campos de Cordas

Avvegna che la subitana fuga
dispergesse color per la campagna,
rivolvi al monte ove ragion ne fraga,

i' mi ristrinsi a la fida compagna:
e come sare'io senza lui corso?
chi m'avria tratto su per la montagna?

PURGATÓRIO III 1-6

INSTITUTO DE FÍSICA
Serviço de Biblioteca e Informação

Tombo: 3820
ex. 1

Capítulo 6

Teoria de Campos de Cordas Bosônicas

Onde a teoria de campos de cordas bosônicas de Witten é introduzida, do ponto de vista algébrica. Cálculos de amplitudes são ilustrados em teorias conformes e aplicações para a Conjectura de Sen são discutidas

Até o momento, toda a discussão sobre supercordas foi realizada no formalismo de primeira quantização, onde não é possível o cálculo de amplitudes fora da camada de massa. Como muitas informações não perturbativas envolvem estes processos, deve-se considerar uma teoria de campos de cordas.

Efetivamente, Teorias de campos de cordas têm uma utilização difícil e seus resultados são ainda um pouco limitados, mas é uma meta definitivamente importante a ser perseguida para um entendimento adequado da estrutura do vácuo da teoria.

Neste capítulo descreve-se uma teoria de cordas bosônicas abertas, que pode ser formulado sobre um ponto de vista algébrico abstrato, a partir do qual conclusões concretas serão obtidas através de prescrições adequadas que levam a uma formulação cujo cerne é a teoria conforme de campos.

6.1 Ação de Witten

Considere a seguinte estrutura:

Def. 9 Álgebra dos Campos de Cordas: é uma álgebra \mathcal{A} associativa, não comutativa e \mathbb{Z}_2 graduada, com a operação de multiplicação \star e satisfazendo as seguintes propriedades:

- Seja $a \in \mathcal{A}$ e $\text{deg}(a) = (-1)^a = \pm 1$ o grau, o produto satisfaz:

$$\text{deg}(a \star b) = \text{deg}(a) \cdot \text{deg}(b)$$

- Existe uma derivação Q :

$$Q : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}$$

$$a \mapsto Q(a)$$

$$Q(a \star b) = Q(a) \star b + \text{deg}(a)a \star Q(b) \quad (\text{Leibnitz})$$

$$\text{deg}(Q(a)) = -\text{deg}(a) \quad (Q \text{ tem grau ímpar})$$

$$Q(Q(a)) = 0, \quad \forall a \in \mathcal{A}, \quad (\text{Nilpotência})$$

- Existe uma integração

$$\int : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{C}$$

$$a \mapsto \int a$$

$$\int a \star b = (-1)^{ab} \int b \star a$$

$$\int Q(a) = 0,$$

onde $(-1)^{ab}$ é definido de forma a ser -1 apenas se ambos elementos são ímpares.

- Existe uma sub-álgebra das 0-formas, que gera toda a álgebra.

Uma generalização de teorias de gauge é obtida com as seguintes elementos:

$$\begin{aligned}
 A &\in \mathcal{A}_1, \quad \epsilon \in \mathcal{A}_0 \\
 \delta A &= Q(\epsilon) + A \star \epsilon - \epsilon \star A && \text{(Trans. de Gauge)} \\
 F &= Q(A) + A \star A \\
 \delta F &= F \star \epsilon - \epsilon \star F \\
 0 &= Q(F) + A \star F - F \star A && \text{(Bianchi)}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

e evidentemente esta estrutura é muito semelhante a estrutura das p-formas, com a derivação exterior e o produto \wedge [Wit86].

Para construir ações invariantes de gauge, a primeira possibilidade seria $\int F \star F$, que é um invariante topológico para as p-formas e sendo esta alguma generalização das p-formas, esta integral é essencialmente a primeira classe de Pontryagin. Não há mecanismos de levantamento e abaixamento de índices, para escrever-se uma ação de Maxwell usual e a próxima possibilidade é uma ação de chern-Simons:

$$S = \int A \star Q(A) + \frac{2}{3} A \star A \star A, \tag{6.2}$$

a equação de movimento é dada por:

$$F = 0 \Rightarrow (Q + A)^2 = 0, \tag{6.3}$$

de onde é evidente que o campo A é uma deformação da teoria e estas equações estão longe de serem triviais.

Esta é essencialmente a única ação invariante de gauge. Formas de Chern-Simons superiores não são possíveis, como ver-se-á em breve.

Esta estrutura é construída na teoria de cordas, tomando-se a álgebra dos **campos de cordas**, isto é, operadores de vértices, que determinam completamente o estado da corda. A graduação a ser considerada é o número de fantasmas e a derivação é a carga BRST, a integração será compreendida como uma função de correlação. Contudo, ainda não é claro o que é o produto estrela, o que será discutido a seguir.

6.2 Interação de Ponto Médio

A noção de produto de cordas abertas (orientadas) pode ser considerada como uma maneira de se colar duas cordas. No entanto, a mera justaposição

de um dos extremos de cada corda aberta não é invariante sob reparametrização. A saída para este problema é romper definitivamente esta invariância, escolhendo um ponto singular da corda, o seu ponto médio e impondo-se a conservação da carga de BRST ao invés da reparametrização. Desta forma o produto é definido como a junção de duas metades de cordas abertas, como ilustrado na figura 6.1:

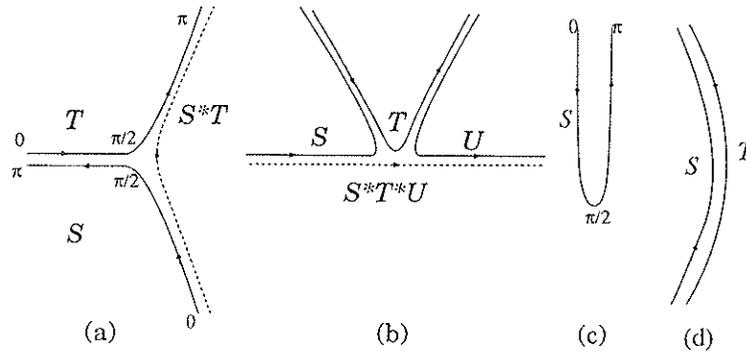


Figura 6.1: (a) Interação de ponto médio entre duas cordas. (b) Associatividade do produto \star . (c) Integração sob um ponto de vista geométrico. (d) Integração de um produto de duas cordas.

Existe uma interpretação geométrica para a associatividade e para a integração, muito embora esta interpretação não permita habilidades operacionais com o produto. Para fazê-lo, note-se que o que se quer é interpretar cada termo da ação como uma função de correlação em uma teoria conforme.

Mas a folha-mundo da corda aberta é o meio disco unitário superior no plano complexo, e pode-se usar transformações conformes globais para mapear N destes objetos em um disco unitário, tomando-se o cuidado de colar os “lados” corretamente [LPP89, Wit86, Ohm01, DS01]. A figura 6.2 mostra este procedimento para três cordas.

O disco unitário ainda pode ser mapeado no plano complexo superior, de forma que para um vértice genérico de n -pontos, as transformações conformes que realizam este mapeamento são:

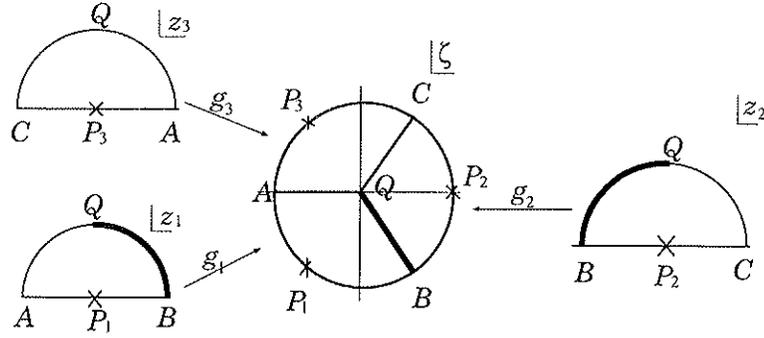


Figura 6.2: Mapeamento da folha-mundo de três cordas no disco unitário.

$$\begin{aligned}
 g_k(z_k) &= e^{\frac{2\pi i}{n}(k-1)} \left(\frac{1 + iz_k}{1 - iz_k} \right)^{\frac{2}{n}} \\
 f_k(z_k) &= h^{-1} \circ g_k(z_k) \\
 h^{-1}(\zeta) &= -i \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

onde g mapeia para o disco unitário e f para o plano complexo. Com esta prescrição, a integral de um produto de campos de cordas é:

$$\int A_1 \star A_2 \star A_3 = \langle g_1 \circ A_1(0) g_2 \circ A_2(0) g_3 \circ A_3 \rangle \tag{6.5}$$

onde a função de correlação é calculada na teoria conforme, onde A são operadores de vértices e, se este é um campo superconforme primário:

$$g \circ A(0) = [g'(0)]^h A(g(0)).$$

Assim, há uma regra clara e completamente operacional para o cálculo da ação, os campos de corda são identificados com operadores de vértices com número de fantasma unitário (o equivalente a 1-formas), Q é a carga de BRST e agora é claro que qualquer função de correlação se anula se não houver o cancelamento da carga de fundo para os fantasmas de reparametrização, isto é, os termos da ação devem ter número de fantasmas 3, como é o caso da ação de Witten, não podendo haver formas mais altas. Note que equação de

movimento recupera a condição de estados físicos estarem na cohomologia de Q de uma maneira natural.

Como definidas aqui, as funções de correlação estão em nível de árvore (clássicas), de forma que as manipulações com esta ação, embora exatas em correções de cordas, recebem correções na constante de acoplamento da corda.

Há ainda uma dificuldade adicional, um campo de corda, sendo um elemento do espaço de Hilbert da corda, contém infinitos campos no espaço tempo, e esta ação tem portanto infinitos termos! A maneira de lidar com este problema é utilizar o **level truncation scheme**, introduzido inicialmente em [KS90]. Esta abordagem é apenas uma simplificação, em que considera-se campos de cordas até um certo nível apenas, onde nível é definido como em teoria conforme, apenas tomando-se o cuidado de ajustar o nível do táquion $c(0)|0\rangle$ para ser nulo. O nível de um vértice é a soma dos níveis de seus campos de cordas e o truncamento acontece em (N, M) , ou seja, mantém-se apenas campos de cordas cujo nível é menor ou igual a N e termos da ação de nível menor ou igual a M .

Não há uma demonstração de que este procedimento seja uma boa aproximação, no entanto, cálculos numéricos parecem indicar uma convergência rápida [DS01, GR02] e em alguns casos há outras maneiras de se efetuar o cálculo de maneira exata, situações nas quais os resultados concordam satisfatoriamente [KL01, RSZ01]. Em particular, esta abordagem foi utilizada para o entendimento da conjectura de Sen e de fato seus resultados parecem concordar com o valor do mínimo do potencial para o táquion [BSZ00].

6.3 Cálculo da Ação - Um Exemplo

Antes de prosseguir discutindo a teoria de campos de supercordas, é conveniente considerar um exemplo do tipo de cálculo que será efetuado no capítulo final. De maneira a considerar o exemplo mais simples que exhibe as características necessárias, o termo cinético para o táquion será calculado.

A campo de corda relevante é:

$$\Phi = c(z)T(X) \tag{6.6}$$

e o termo cinético que deve-se calcular é:

$$\langle \Phi(0) \star Q\Phi(0) \rangle \quad (6.7)$$

usando a prescrição do produto \star como uma função de correlação em teoria conforme, têm-se que $\Phi(z)$ é um campo primário conforme de peso conforme $h = -1$ (em momento zero), e os mapeamentos das folha-mundos das cordas no disco unitário são:

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \frac{1+iz}{1-iz}, & g_2(z) &= -\frac{1+iz}{1-iz} \\ g_1(0) &= 1, & g'_1(0) &= 2i \\ g_2(0) &= -1, & g'_2(0) &= 2-i, \end{aligned}$$

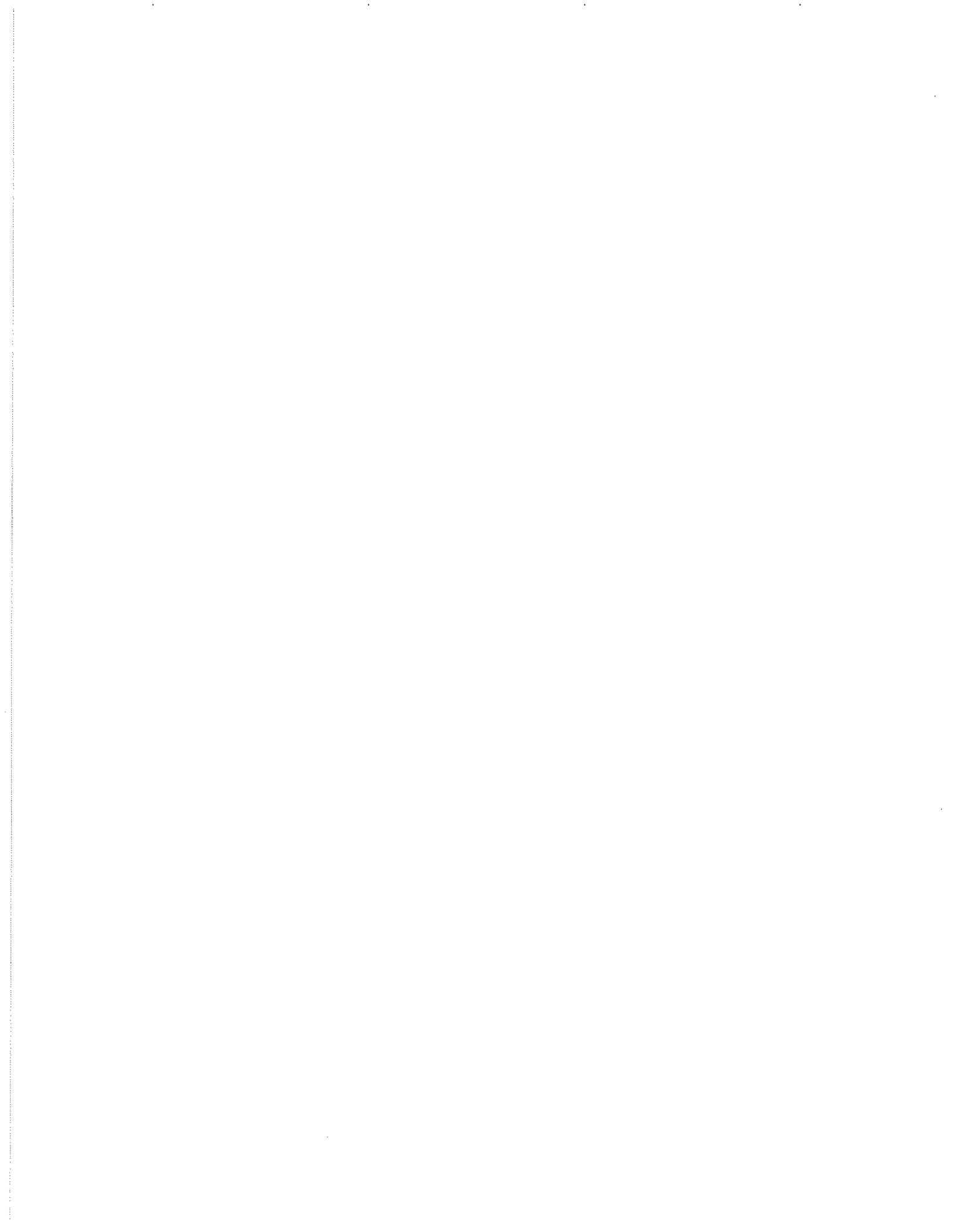
precisa-se ainda do seguinte resultado:

$$\begin{aligned} Q\Phi(0) &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \left(-\frac{1}{2}c(z)\partial X^m\partial X_m + bc\partial c(z) \right) c(0)T(X) \\ &= \oint \frac{dz}{2\pi i} \left(-\frac{1}{2}\frac{c\partial c(0)z}{z^2}\square T(x) + \frac{1}{z}c\partial c(0)T(x) \right) \\ &= \left(-\frac{1}{2}\square T(x) + T(x) \right) c\partial c(0) \end{aligned}$$

e utilizando esta expressão no termo cinético:

$$\langle c(1)T(x)c\partial c(-1) \left(-\frac{1}{2}\square T(x) + T(x) \right) \rangle = \left(-\frac{1}{2}T\square T(x) + T^2(x) \right) \langle c\partial c\partial^2 c \rangle$$

logo, como a última função de correlação é exatamente a carga de fundo, pode-se normalizá-la $\langle c\partial c\partial^2 c \rangle = 1$ e como resultado têm-se uma ação, no espaço-tempo de um bóson escalar de massa $m^2 = -2$, corretamente determinada para a corda bosônica.



Capítulo 7

Teoria de Campos de Supercordas

Onde é introduzida a ação de Berkovits para a supercorda incluindo o setor Ramond. Sua ação é explicada com detalhe e discute-se a sua formulação na presença de D-Branas. Também são comentados alguns resultados obtidos na literatura de cordas através desta ação. Todo o resto do trabalho depende crucialmente deste capítulo.

A generalização direta do formalismo apresentado no capítulo anterior para as supercordas enfrenta dificuldades, devido as peculiaridades da álgebra de supercordas. De fato, a supercorda é bi-graduada, possuindo graduações com respeito ao número de fantasmas e ao picture, o que exige a inclusão de operadores de mudança de picture explicitamente na ação, uma vez que os termos da ação devem ser homogêneos. No formalismo RNS, a inserção dos operadores de Picture produz divergências no nível de árvore e a quebra da invariância de gauge [GK87, Wen89, PTY].

No capítulo 4, a discussão do formalismo híbrido mostrou ser importante para a resolução de problemas advindos de picture e parece ser um candidato natural para a tentativa de se construir uma teoria de campos de supercordas livre dos problemas aludidos.

Devido ao caráter técnico da construção, esta exposição segue muito proximamente a referência [Ber01a].

O ponto de partida é a consideração de três campos de cordas $[\Phi_0, \Psi_{\frac{1}{3}}, \bar{\Psi}_{-\frac{1}{3}}]$, onde o subscrito representa o valor da carga C destes campos [Ber95].

Embora durante a discussão sobre o formalismo híbrido tenha sido dada uma prescrição para esta carga, manter-se-á a generalidade aqui, mostrando

as condições que esta carga deve satisfazer para o método abaixo descrito ser válido.

A idéia fundamental é, em analogia ao caso bosônico, procurar uma generalização não-linear das equações de movimento da forma $(G + A)^2 = 0$, determinando a ação que fornece as equações de movimento desejadas [Ber01b].

Lidar com a supercorda implica a utilização de dois operadores diferenciáveis (BRST), associados a cada graduação, sendo, portanto, natural considerar o formalismo $N = 4$. O operador G pode carregar carga C e assume-se que os valores possíveis de sua carga são restritos:

$$G \equiv G^+ + \tilde{G}^+ = G_0 + G_{-\frac{1}{3}} + G_{-\frac{2}{3}} + G_{-1}, \quad (7.1)$$

supõe-se ainda que os termos G_0 e G_{-1} tenham cohomologia trivial no espaço de Hilbert grande, de forma a ser possível a definição de dois sub-espacos, um quiral e um anti-quiral, com as seguinte propriedades:

$$\begin{aligned} G_{-1}\Omega &= 0 & \Omega &= G_{-1}\Psi \\ G_{-0}\bar{\Omega} &= 0 & \bar{\Omega} &= G_0\bar{\Psi}. \end{aligned}$$

As equações de movimento linearizadas são:

$$G^+\tilde{G}^+\Phi = G^+\tilde{G}^+\Psi = G^+\tilde{G}^+\bar{\Psi} = 0 \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= G_0\Lambda_0 + G_{-\frac{1}{3}}\Lambda_{\frac{1}{3}} + G_{-\frac{2}{3}}\Lambda_{\frac{2}{3}} + G_{-1}\Lambda_1 \\ \delta\Psi &= G_0\Lambda_{\frac{1}{3}} + G_{-\frac{1}{3}}\Lambda_{\frac{2}{3}} + G_{-\frac{2}{3}}\Lambda_1 + G_{-1}\Lambda_{\frac{4}{3}} \\ \delta\bar{\Psi} &= G_0\Lambda_{-\frac{1}{3}} + G_{-\frac{1}{3}}\Lambda_0 + G_{-\frac{2}{3}}\Lambda_{\frac{1}{3}} + G_{-1}\Lambda_{\frac{2}{3}} \end{aligned} \quad (7.3)$$

A definição da generalização não-linear dos campos está longe de ser óbvia, mas pode-se usar como guia o conhecimento da teoria de campos usual para partículas. A teoria de baixas energias para a corda aberta é uma teoria de Super-Yang-Mills em $D = 10$, a qual foi escrita em termos de supercampos ($N = 1, D = 4$) em [MSS83]. Essencialmente, cada termo do operador G representa uma derivada, que deve ser covariantizada para produzir as equações não-lineares, as parte de cohomologia trivial são os análogos das derivadas supersimétricas e os outros dois termos representam

derivadas “internas”. Considerando a seguinte definição:

$$(G + A)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} A_0 = e^{-\Phi} G_0 e^{\Phi} \\ A_{-\frac{1}{3}} = e^{-\Phi} G_{-\frac{1}{3}} e^{\Phi} + e^{-\Phi} \bar{\Omega} e^{\Phi} \\ A_{-\frac{2}{3}} = \Omega \end{cases} \quad (7.4)$$

$$\delta A = G\sigma + [A, \sigma] \Rightarrow \begin{cases} \sigma_{\frac{1}{3}} = \{G_0 + A_0, \Lambda_{\frac{1}{3}} \\ \sigma_0 = G_{-1} \Lambda_1 + \{G_{-\frac{2}{3}} + \Omega, \Lambda_{\frac{2}{3}} \\ \sigma_{-\frac{1}{3}} = G_{-1} \Lambda_{\frac{2}{3}} \end{cases} \quad (7.5)$$

Definindo $\mathcal{G}_n \equiv G_n + A_n$ e tomando os termos homogêneos em C na equação $(G + A)^2$, as equações de movimento são:

$$\begin{aligned} \{G_{-1}, \mathcal{G}_0\} &= -\{\mathcal{G}_{-\frac{2}{3}}, \mathcal{G}_{-\frac{1}{3}}\}, \{\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_{-\frac{2}{3}}\} = -(\mathcal{G}_{\frac{1}{3}})^2, \{\mathcal{G}_{-1}, \mathcal{G}_{-\frac{1}{3}}\} = -(\mathcal{G}_{\frac{2}{3}})^2, \\ \delta \epsilon^{\Phi} &= e^{\Phi} \left(G_{-1} \Lambda_1 + \mathcal{G}_{-\frac{2}{3}} \Lambda_{\frac{2}{3}} - \mathcal{G}_{-\frac{1}{3}} \Lambda_{\frac{1}{3}} \right) + (G_0 \Lambda_0) e^{\Phi} \\ \delta \Psi &= \mathcal{G}_0 \Lambda_{\frac{1}{3}} - \mathcal{G}_{-\frac{2}{3}} \Lambda_1 - \mathcal{G}_{-1} \Lambda_{\frac{2}{3}} - G_{-1} \Lambda_{\frac{4}{3}} \\ \delta \bar{\Psi} &= e^{\Phi} \left(G_{-1} \Lambda_{\frac{2}{3}} - \mathcal{G}_{-\frac{2}{3}} \Lambda_{\frac{1}{3}} \right) e^{\Phi} + \{G_{-\frac{1}{3}} + \bar{\Omega}, \Lambda_0 + G_0 \Lambda_{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

e a ação que produz estas equações de movimento é:

$$\begin{aligned} S &= \langle (e^{-\Phi} G_{-1} e^{\Phi})(e^{-\Phi} G_0 e^{\Phi}) + (e^{-\Phi} G_{\frac{2}{3}} e^{\Phi})(e^{-\Phi} G_{-\frac{1}{3}} e^{\Phi}) + \\ &\int_0^1 dt (e^{-\hat{\Phi}} \partial_t e^{\hat{\Phi}}) \left(\{e^{-\hat{\Phi}} G_{-1} e^{\hat{\Phi}}, e^{-\hat{\Phi}} G_0 e^{\hat{\Phi}}\} + \{e^{-\hat{\Phi}} G_{-\frac{2}{3}} e^{\hat{\Phi}}, e^{-\hat{\Phi}} G_{-\frac{1}{3}} e^{\hat{\Phi}}\} \right) \\ &\quad - e^{-\Phi} \bar{\Omega} e^{\Phi} \Omega + \bar{\Omega} e^{\Phi} G_{-\frac{2}{3}} e^{-\Phi} + \Omega e^{-\Phi} G_{-\frac{1}{3}} e^{+\Phi} \rangle_D \\ &\quad - \langle \frac{1}{2} \bar{\Omega} G_{-\frac{1}{3}} \bar{\Omega} + \frac{1}{3} \bar{\Omega}^3 \rangle_{\bar{F}} + \langle \frac{1}{2} \Omega G_{-\frac{2}{3}} \Omega + \frac{1}{3} \Omega^3 \rangle_F, \end{aligned} \quad (7.6)$$

onde todos os produtos entre campos são o produto de Witten (interação de ponto médio) e as 2 primeiras linhas são ações tipo Wess-Zumino-Witten, na qual se define uma função $\tilde{\Phi}(t)$ no intervalo $[0, 1]$ através das seguintes relações: $\tilde{\Phi}(0) = 0$ e $\tilde{\Phi}(1) = \Phi$. As duas últimas linhas são funções de correlação calculadas nos sub-espacos quiral ou anti-quiral, tendo a forma de ações tipo Chern-Simons.

Toda esta construção é fortemente vinculada, tendo suas raízes em teorias de campos supersimétricas usuais. O particular balanço entre as cargas C dos diferentes termos é imprescindível para esta construção. Note

também que a notação para as funções de correlação é inspirada em teorias de campo supersimétricas, rotulando-se com as letras D e F . De fato, espera-se que estes termos tenham um comportamento semelhante aos seus análogos em teorias de campos usuais, em particular, os termos F não devem sofrer correções quânticas.

Comparação com o caso RNS, onde $\tilde{G}^+ \equiv \eta$ e $G^+ \equiv Q$ implica em escolher a carga C da seguinte forma:

$$C = P + \frac{1}{3}N, \quad (7.7)$$

onde N é uma carga conservada construída exclusivamente da matéria RNS. Para espaços-tempos planos, as possibilidades de escolha de carga C são:

$$C = P + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^J \int \psi^{2i-2} \psi^{2i-1}, \quad J = 1, 3, 5. \quad (7.8)$$

as quais quebram o grupo de Poincaré em 10 dimensões. Do ponto de vista euclidiano o padrão de quebra do grupo é:

$$SO(10) \mapsto SO(10 - 2J) \times U(J)$$

e a carga C discutida no capítulo 4 corresponde à escolha $J = 3$. Note que a escolha de três campos de cordas para a descrição da teoria de campos da supercorda necessariamente quebra a invariância de Lorentz em 10 dimensões, uma vez que os spinors terão que ser separados em grupos adequados, não sendo assim, uma grande surpresa o padrão de quebra descrito acima.

A ação descrita acima é uma ação não-polinomial, de aparência extremamente complicada, sendo difícil sua abordagem de um ponto de vista estritamente algébrico, através da procura de soluções clássicas para suas equações de movimento, por exemplo [LPU02, Klu02]. Através de uma expansão da ação, esta pode ser tratada sob o ponto de vista do Level Truncation Scheme, o que foi realizado para o setor NS apenas, mostrando notável concordância com as previsões da conjectura de Sen. Na próxima parte será considerado também o setor Ramond.

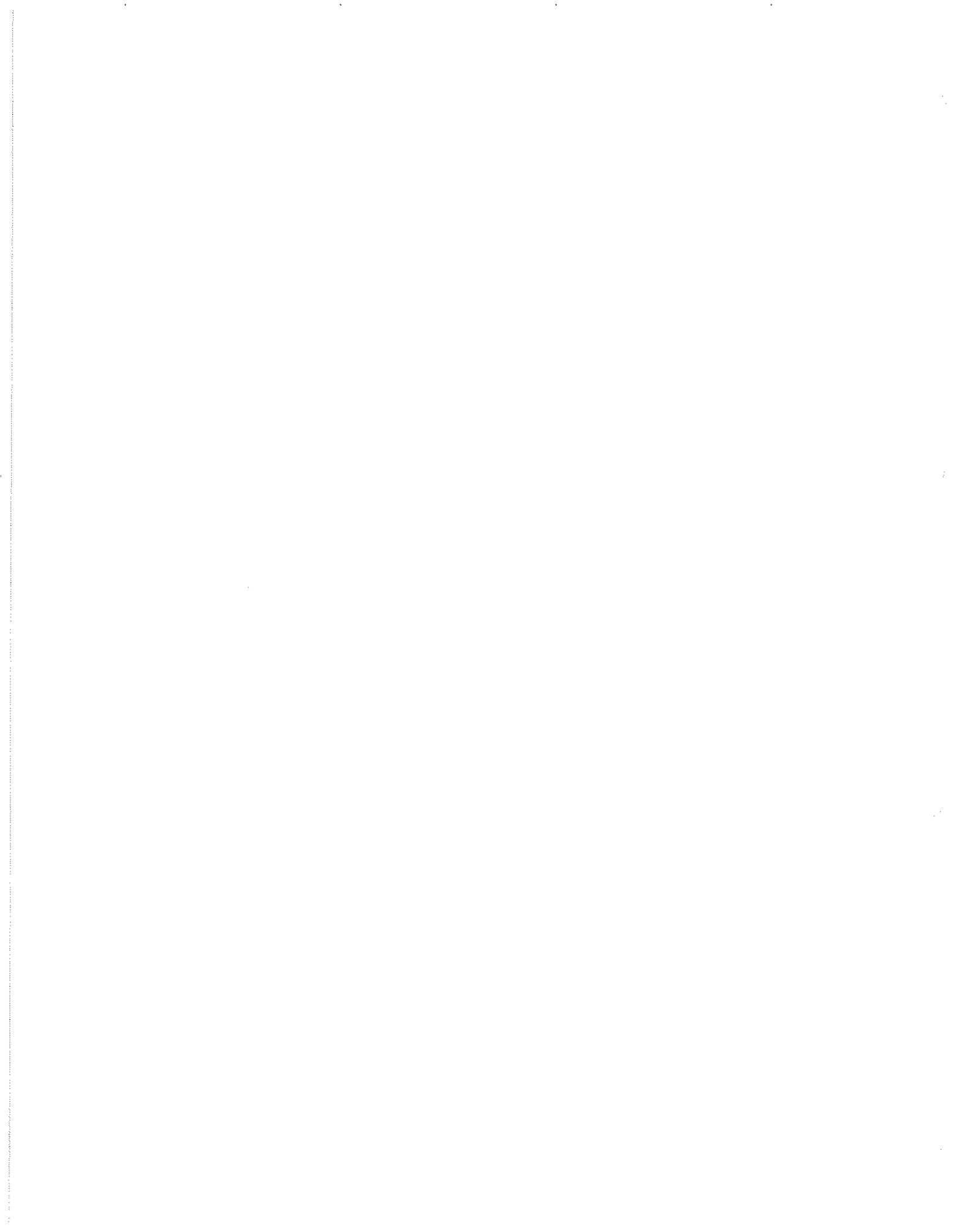
É importante notar que esta ação, como formulada acima, pode ser utilizada para obter informação sobre o setor $GSO(+)$ na teoria de supercordas, e as funções de correlação têm algumas propriedades importantes, que

devem ser preservadas. A maneira de fazer isto é considerar os campos de cordas e os operadores diferenciais com fatores “internos” de Chan-Paton, isto é, matrizes adequadas no produto tensorial que são responsáveis por preservar a estrutura da álgebra, incluindo-se adicionais fatores de $-$ para o setor $GSO(-)$ devido ao fato dos campos deste setor serem férmions na folha-mundo (Grassmann). Considere então:

$$\begin{aligned}
\hat{\Phi} &\equiv \Phi^+ \otimes I + \Phi^- \otimes \sigma_1, & \hat{\Psi} &\equiv \Psi^+ \otimes I + \Psi^- \otimes \sigma_1, \\
\hat{\bar{\Psi}} &\equiv \bar{\Psi}^+ \otimes I + \bar{\Psi}^- \otimes \sigma_1, & \hat{\Omega} &\equiv \Omega^+ \otimes \sigma_3 + \Omega^- \otimes i\sigma_2, \\
\hat{\bar{\Omega}} &\equiv \bar{\Omega}^+ \otimes \sigma_3 + \bar{\Omega}^- \otimes i\sigma_2, & \hat{G}_{-\frac{1}{3}} &\equiv G_{-\frac{1}{3}} \otimes \sigma_3, \\
\hat{G}_{-\frac{2}{3}} &\equiv G_{-\frac{2}{3}} \otimes \sigma_3, & \hat{G}_{-1} &\equiv G_{-1} \otimes \sigma_3, \\
\hat{G}_0 &\equiv G_0 \otimes \sigma_3, & &
\end{aligned} \tag{7.9}$$

onde σ_i são as matrizes de Pauli. Isto apenas significa que cada campo de corda é separado em uma parte $GSO(+)$ e outra $GSO(-)$ e considera-se o produto tensorial com matrizes apropriadas, garantindo a ciclicidade das funções de correlação. Os operadores são tensorizados também de forma a se verificar a identidade de Leibnitz para as derivações. O mesmo procedimento é feito para os campos quirais e anti-quirais, mas como em suas definições eles contêm uma derivação, surge um fator adicional que gera a estrutura descrita acima. Evidentemente, as funções de correlação devem incluir um traço sobre os fatores de Chan-Paton também.

Na próxima parte esta ação será utilizada extensamente, incluindo-se estados $GSO(-)$. Na conclusão os resultados obtidos serão comentados, juntamente com uma discussão sobre as perspectivas e problemas encontrados tanto no problema tratado neste trabalho, quanto no uso de teorias de campos de supercordas em geral.



Parte III

Férmions em Teoria de Campos de Supercordas

Parea dinanzi a me con l'ali aperte
la bella image che nel dolce frui
liete facevan l'anime conserte.

Parea ciascuna rubinetto in cui
raggio di sole ardesse sí acceso,
che ne' miei occhi rifrangesse lui.

E quel che mi convien ritrar testeso,
non portò voce mai, né scrisse incostro,
né fu per fantasia già mai compreso;

PARAISO XXII 55-60



Capítulo 8

Motivação

A introdução de Férmions do espaço-tempo no estudo de teorias de campos de supercordas pode dar informações valiosas sobre a teoria de cordas. Neste capítulo alguns aspectos são discutidos, com particular ênfase nos aspectos relacionados com a condensação taquiônica

Até o presente momento, a ação para a supercorda de Berkovits é a única ação que permite a inclusão do setor Ramond, responsável pelo surgimento de férmions no espaço-tempo, sem os problemas de invariância de gauge ou divergências do formalismo de Witten (cúbico).

A maior parte do interesse renovado em teorias de campos de cordas da última década se deve aos estudos de condensação taquiônica, segundo a linha da conjectura de Sen. Contudo, a determinação do potencial do Táquion prescinde completamente do setor Ramond - em verdade o motivo pelo rápido sucesso obtido nestes cálculos depende exatamente deste fato.

Apesar disto, existem muitos problemas em que certamente os férmions no espaço-tempo desempenham um papel importante, notadamente a análise de supersimetria e sua quebra espontânea. Até o momento poucos avanços foram realizados no entendimento destes objetos de um ponto de vista de cordas.

Este trabalho pretende ser um passo inicial para um estudo sistemático de férmions em teorias de campos de cordas, através do uso destas novas ferramentas. Para tanto, considerou-se um sistema instável em 10 dimensões, que pode ser descrito como uma $D9$ -brana na supercorda tipo II-A, calculando-se a ação para o táquion e para os férmions sem massa vindos dos setores $GSO(+)$ e $GSO(-)$.

A teoria de campos de supercordas considerada descreve então as supercordas neste sistema instável. O potencial do táquion deste sistema tem um mínimo e a física no mínimo deste potencial representa uma situação estável na qual não há mais cordas abertas, isto é, este vácuo estável é um vácuo de cordas fechadas. Inicialmente a supersimetria estava quebrada, mas as cordas fechadas tem supersimetria $N = 2$ no espaço-tempo e parece importante entender como ocorre este processo no qual se recupera a supersimetria $N = 2$ a partir da supercorda aberta.

Yoneya conjecturou que os férmions sem massa do setor $GSO(-)$ podem ser os goldstinos da quebra de supersimetria, desenvolvendo algumas idéias a este respeito em [Yon00, Yon01]. Como a teoria de campos de supercordas é o quadro conceitual mais adequado para a descrição destas questões, procurou-se neste trabalho completar um primeiro passo nesta direção.

Note que modelos com supersimetria espontaneamente quebrada satisfazem a seguinte relação:

$$\text{Tr} [(-1)^F M^2] = 0 \quad (8.1)$$

em teorias de cordas existe um número infinito de estados massivos, contudo pode-se definir um tipo de regularização para esta fórmula:

$$A_n = \lim_{\tau \rightarrow 0} \text{Tr} [(-1)^F M^{2n} e^{-\tau M^2}] = (-1)^n \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{d^n}{d\tau^n} Z(\tau) \quad (8.2)$$

$$Z(\tau) = \text{Tr} [(-1)^F e^{-\tau M^2}] \quad (8.3)$$

e no formalismo RNS :

$$Z(\tau) = \text{Tr}_{NS} [q^{2N_{NS}-1}] - \text{Tr}_R [q^{2N_R-1}] \quad (8.4)$$

$$N_{NS} = \sum \alpha_{-n} \alpha_n + \sum r b_{-r} b_r \quad (8.5)$$

$$N_R = \sum \alpha_{-n} \alpha_n + \sum n d_{-n} d_n \quad (8.6)$$

Assim, a função de partição é dada por:

$$Z(\tau) = \frac{1}{\Pi(1 - q^{2n})^8} \left[\frac{1}{2q} \Pi(1 + q^{2n-1})^8 + \frac{1}{2q} \Pi(1 - q^{2n-1})^8 - 16 \Pi(1 + q^{2n})^8 \right]$$

onde o sinal $+$ no segundo termo é proveniente da ausência da projeção GSO . É o termo q^{-1} que sinaliza a presença do táquion. Para tomar o

limite $\tau \rightarrow 0$ faz-se uma transformação modular $e^{-\pi\sigma} \rightarrow e^{-\frac{\pi}{\sigma}}$, ($\sigma = \tau/2\pi\alpha'$), e tem-se que:

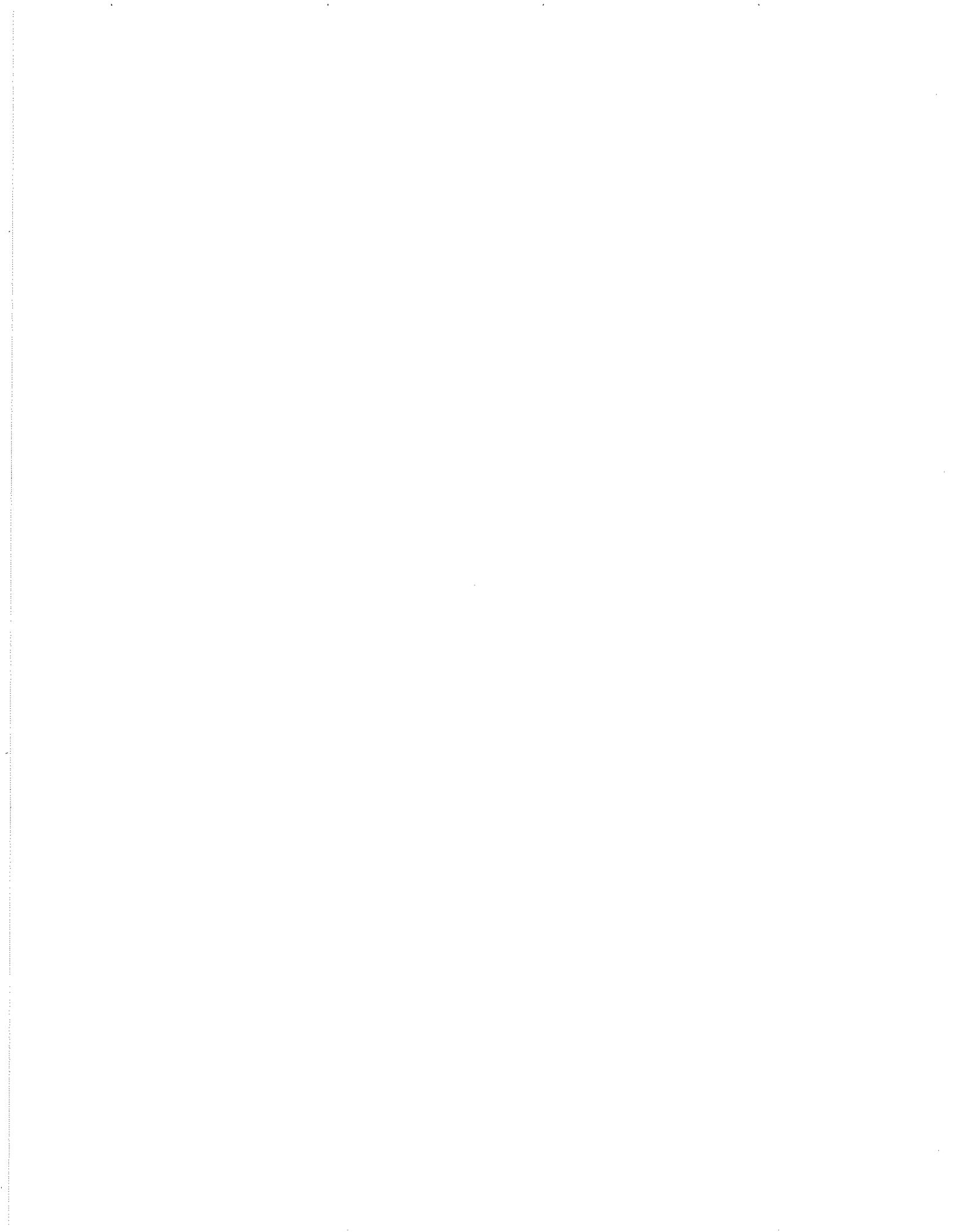
$$Z(\tau) = \frac{\sigma^4}{2} \frac{1}{\prod(1 - e^{-2n\pi/\sigma})^8} [e^{\pi/\sigma} \prod(1 + e^{-(2n-1)\pi/\sigma})^8 + 16\prod(1 + e^{-2n\pi/\sigma})^8 - e^{\pi/\sigma} \prod(1 - e^{-(2n-1)\pi/\sigma})^8]$$

no limite:

$$Z(\tau) = \frac{\sigma^4}{2} (16 + 16 + (256 + 256)e^{-2\pi/\sigma} + \dots) \quad (8.7)$$

e vê-se que $A_n = 0$ para todo n exceto $n = 4$, indicando a possibilidade de haver supersimetria espontaneamente quebrada no sistema em questão.

Note também que, se os férmions $GSO(-)$ são realmente goldstinos para esta quebra, deve haver uma supersimetria não-linearmente realizada na fase quebrada, sobre a qual o goldstino de transforma de maneira usual, com a adição de um termo do tipo Fayet-Iliopoulos, que evidentemente se anula no vácuo estável, onde a supersimetria é recuperada. Esta transformação implica na existência de um termo trilinear, com táquion e dois férmions não-massivos que está, de fato, presente na ação obtida ao fim do trabalho.



Capítulo 9

Preliminares - Campos de Cordas

Todo o material restante para o cálculo da ação de supercordas de Berkovits com os dois primeiros estados de massa é discutido. Os operadores de vértice relevantes são introduzidos e discute-se a expansão da ação e sua normalização.

O produto de Witten será calculado no disco unitário segundo a seguinte prescrição [Ber00]:

$$\langle V_1 V_2 \cdots V_N \rangle = \left(-\frac{4i}{N} \right)^{\sum h_i} e^{\frac{2\pi i}{N} \sum h_j(j-1)} \langle \Pi_j V_j \left(e^{\frac{2\pi i}{N}(j-1)} \right) \rangle,$$

onde V_i são campos conformes primários com peso conforme h_i .

A ação da supercorda será calculada (no nível clássico) para o táquion e o setor não-massivo $GSO(+)$ e $GSO(-)$. Os operadores de vértices, conforme discutidos no capítulo 4 são:

$$\begin{aligned} \Phi^+ &= v(x, \theta, \bar{\theta}), & \Phi^- &= \Lambda^{++++} T(x) + \Theta^\alpha \chi_\alpha^-(x) + \bar{\Theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\chi}_{\dot{\alpha}}^-(x), \\ \Psi^+ &= e^\rho \Gamma^{+j} \omega_{+j}(x, \theta) \bar{\theta}^2, & \Psi^- &= e^\rho \Gamma^{+j} \bar{\Theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\lambda}_{+j\dot{\alpha}}^-(x), \\ \bar{\Psi}^+ &= e^{-\rho} \Gamma^{-j} \bar{\omega}_{-j}(x, \bar{\theta}) \theta^2, & \bar{\Psi}^- &= e^{-\rho} \Gamma^{-j} \Lambda^\alpha \lambda_{-j\alpha}^-(x). \end{aligned} \quad (9.1)$$

lembrando a definição dos supercampos em componentes:

$$\begin{aligned} v(x, \theta, \bar{\theta}) &= \theta \sigma^m \bar{\theta} A_m(x) + \theta \theta \bar{\theta} \bar{\chi}^+(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} \theta \chi^+(x) + \theta \theta \bar{\theta} \bar{\theta} D(x), \\ \omega_{-i}(x, \theta) &= A_{-i}(x) + \theta \lambda_{-i}^+(x) + \theta \theta F_{-i}(x), \\ \bar{\omega}_{+i}(x, \bar{\theta}) &= A_{+i}(x) + \bar{\theta} \bar{\lambda}_{+i}^+(x) + \bar{\theta} \bar{\theta} \bar{F}_{+i}(x). \end{aligned}$$

O setor $GSO(-)$ foi construído no capítulo 4.

Na ação da supercorda aparecem os campos quirais e anti-quirais, os quais devem ser calculados:

$$\begin{aligned}
\Omega^+ &= G_{-1}\Psi^+ = \int \left(\frac{1}{12} \bar{d}^{\dot{\alpha}} \bar{d}_{\dot{\alpha}} e^{-2\rho} \epsilon^{jkl} \Gamma^{-j} \Gamma^{-k} \Gamma^{-l} \right) (e^{\rho} \Gamma^{+j} \omega^{-j}(x, \theta) \bar{\theta}^2), \\
&= \int \frac{1}{12} \frac{2}{z^2} z^2 e^{-\rho} 6 \epsilon^{jkl} \Gamma^{-j} \Gamma^{-k} \frac{1}{z} \omega^{-l}, \\
&= e^{-\rho} \Gamma^{-j} \Gamma^{-k} \omega^{-l} \epsilon^{jkl}.
\end{aligned} \tag{9.2}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Omega}^+ &= G_0 \bar{\Psi}^+ = \int \left(\frac{1}{2} d^{\alpha} d_{\alpha} e^{\rho} \right) (e^{-\rho} \Gamma^{-j} \bar{\omega}^{+j}(x, \bar{\theta}) \theta^2), \\
&= \int \frac{1}{2} \frac{2}{z^2} z \Gamma^{-j} \bar{\omega}^{+j}, \\
&= \Gamma^{-j} \bar{\omega}^{+j}.
\end{aligned} \tag{9.3}$$

$$\begin{aligned}
\Omega^- &= G_{-1}\Psi^- = \int \left(\frac{1}{12} \bar{d}^{\dot{\alpha}} \bar{d}_{\dot{\alpha}} e^{-2\rho} \epsilon^{jkl} \Gamma^{-j} \Gamma^{-k} \Gamma^{-l} \right) (e^{\rho} \Gamma^{+i} \bar{\Theta} \bar{\lambda}^{-i}), \\
&= \int \frac{1}{12} (z^2 e^{-\rho}) \left(\frac{6 \epsilon^{jkl} \Gamma^{-j} \Gamma^{-k} \eta^{il}}{z} \right) \left(\frac{2 \bar{\Pi} \bar{\lambda}^{-i} + i \partial_m \bar{\lambda}^{-j} \bar{\sigma}^m \Theta}{z^2} \right), \\
&= e^{-\rho} \epsilon^{jkl} \Gamma^{-j} \Gamma^{-k} \left(\bar{\Pi} \bar{\lambda}^{-i} + \frac{i}{2} \partial_m \bar{\lambda}^{-j} \bar{\sigma}^m \Theta \right).
\end{aligned} \tag{9.4}$$

$$\bar{\Omega}^- = G_0 \bar{\Psi}^- = \Gamma^{-j} \left(\Pi \lambda^{-i} + \frac{i}{2} \partial_m \lambda^{+j} \sigma^m \bar{\Theta} \right). \tag{9.5}$$

As funções de correlação a serem calculadas tem uma carga de fundo, sem a qual elas se anulam. Para cada espaço de Hilbert considerado (D , F e \bar{F}) usar-se-á a seguinte normalização:

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{1}{24} \theta^2 \bar{\theta}^2 e^{-\rho} \epsilon^{ijk} \Gamma^{-i} \Gamma^{-j} \Gamma^{-k} \right\rangle_D &= 1, \\
\left\langle G_0 \left(\frac{1}{24} \theta^2 \bar{\theta}^2 e^{-\rho} \epsilon^{ijk} \Gamma^{-i} \Gamma^{-j} \Gamma^{-k} \right) \right\rangle_{\bar{F}} &= \left\langle \frac{1}{24} \bar{\theta}^2 \epsilon^{ijk} \Gamma^{-i} \Gamma^{-j} \Gamma^{-k} \right\rangle_{\bar{F}} = 1, \\
\left\langle G_{-1} \left(\frac{1}{24} \theta^2 \bar{\theta}^2 e^{-\rho} \epsilon^{ijk} \Gamma^{-i} \Gamma^{-j} \Gamma^{-k} \right) \right\rangle_F &= \left\langle \frac{1}{4} e^{-3\rho} \theta^2 (\Gamma \cdot \partial \Gamma)^3 \right\rangle = 1.
\end{aligned} \tag{9.6}$$

Note que a primeira norma é exatamente a norma do espaço de Hilbert grande da supercorda, a qual, no formalismo RNS é $\xi e^{-2\phi} c \partial c \partial^2 c$, produzindo

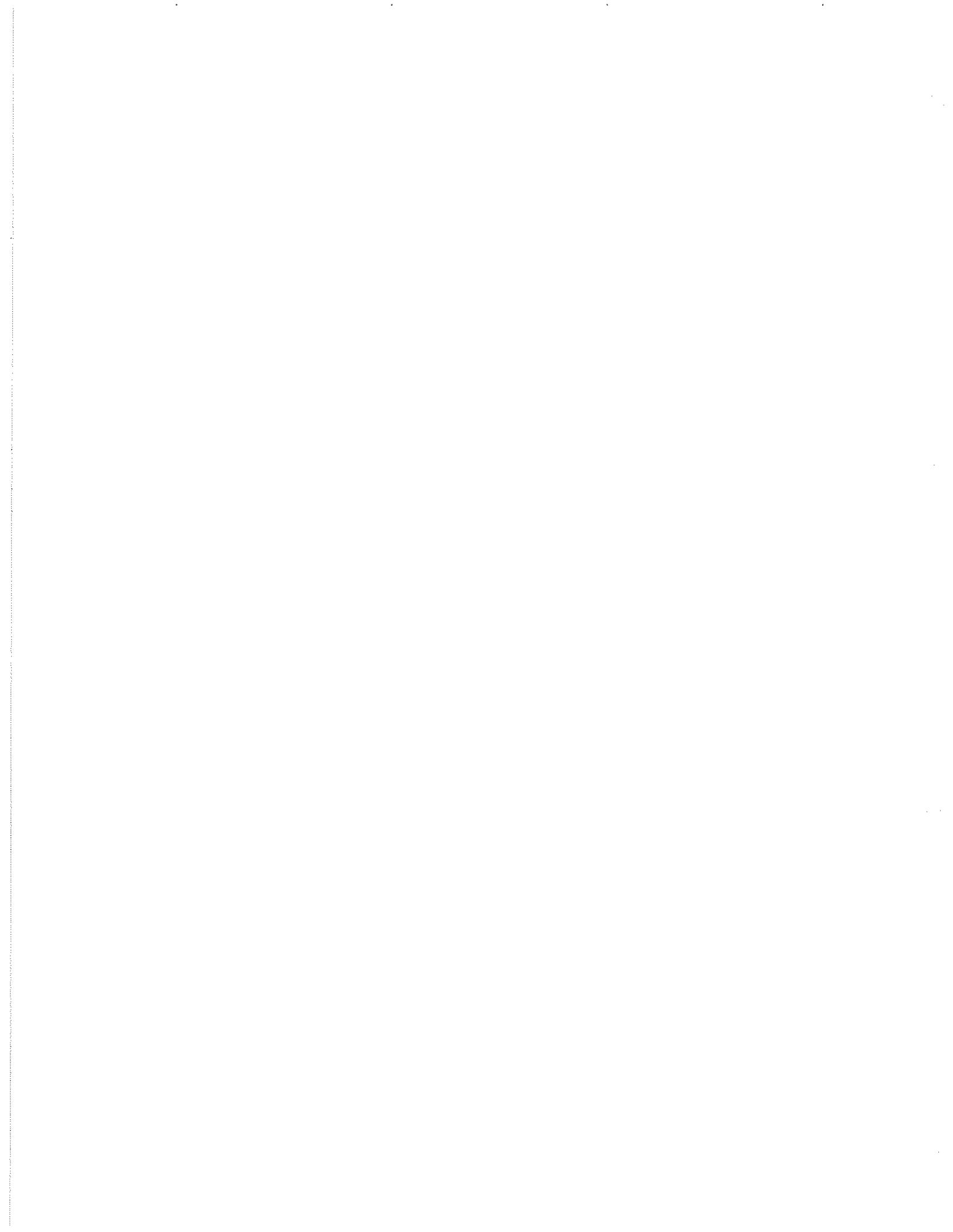
a correta carga de fundo para todos os fantasmas. As normas dos sub-espacos quirais s3o obtidas desta norma atrav3s da aplica33o do operador diferencial adequado (de cohomologia trivial) que define estes sub-espacos.

Finalmente, a a33o n3o-polinomial pode ser expandida. A primeira parte WZW fica:

$$\begin{aligned}
 S_{WZ}^{(1)} &= \langle (e^{-\hat{\Phi}} \hat{G}_{-1} e^{\hat{\Phi}}) (e^{-\hat{\Phi}} \hat{G}_0 e^{\hat{\Phi}}) \rangle_D \\
 &\quad - \langle \int_0^1 dt (e^{-\hat{\Phi}} \hat{\partial}_t e^{\hat{\Phi}}) \{ e^{-\hat{\Phi}} \hat{G}_{-1} e^{\hat{\Phi}}, e^{-\hat{\Phi}} \hat{G}_0 e^{\hat{\Phi}} \} \rangle_D, \\
 &= 2 \sum_{M,N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N}{(M+N+2)!} \binom{M+N}{N} \langle (\hat{G}_{-1} \hat{\Phi}) \hat{\Phi}^M (\hat{G}_0 \hat{\Phi}) \hat{\Phi}^N \rangle_D, \\
 &= 2 \left[\frac{1}{2} \langle (\hat{G}_{-1} \hat{\Phi}) (\hat{G}_0 \hat{\Phi}) \rangle - \langle \frac{1}{6} \hat{\Phi} \{ \hat{G}_{-1} \hat{\Phi} \} \{ \hat{G}_0 \hat{\Phi} \} \rangle_D \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{24} \langle [\hat{\Phi}, \hat{G}_{-1} \hat{\Phi}] [\hat{\Phi}, \hat{G}_0 \hat{\Phi}] \rangle_D \right], \\
 &= \left[\langle (\hat{G}_{-1} \hat{\Phi}) (\hat{G}_0 \hat{\Phi}) \rangle - \langle \frac{1}{3} \hat{\Phi} \{ \hat{G}_{-1} \hat{\Phi} \} \{ \hat{G}_0 \hat{\Phi} \} \rangle_D \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{12} \langle [\hat{\Phi}, \hat{G}_{-1} \hat{\Phi}] [\hat{\Phi}, \hat{G}_0 \hat{\Phi}] \rangle_D \right]. \tag{9.7}
 \end{aligned}$$

para o c3lculo que ser3 considerado, basta a expans3o ser truncada at3 termos com quatro campos de cordas, todos os outros termos se anular3o trivialmente devido ao n3o-cancelamento da carga de fundo.

Note que a notaa3o para os operadores G que aparecem na a33o foi ligeiramente alterada, para simplificar algumas express3es.



Capítulo 10

Cálculo da Ação de SSFT

Finalmente, resultados!

Dividindo os campos de cordas em campos dos setores $GSO(+)$ e $GSO(-)$ e tomando-se o devido cuidado com os fatores de Chan-Paton (internos), os termos que devem ser calculados, para a parte WZW da ação de campos de supercordas são:

$$\langle \hat{G}_{-1} \hat{\Phi}, \hat{G}_0 \hat{\Phi} \rangle_D = \underbrace{\langle G_{-1} \Phi^+ G_0 \Phi^+ \rangle_D}_{GSO(+)} - \langle G_{-1} \Phi^- G_0 \Phi^- \rangle_D, \quad (10.1)$$

$$\begin{aligned} \langle -\frac{1}{3} \hat{\Phi} \{ \hat{G}_{-1} \hat{\Phi}, \hat{G}_0 \hat{\Phi} \} \rangle_D &= \underbrace{\langle \frac{1}{3} \Phi^+ \{ G_{-1} \Phi^+, G_0 \Phi^+ \} \rangle_D}_{GSO(+)} \\ &+ \langle \frac{1}{3} \Phi^+ \{ \hat{G}_{-1} \Phi^-, \hat{G}_0 \Phi^- \} \rangle_D \\ &- \langle \frac{1}{3} \Phi^- [G_{-1} \Phi^+, G_0 \Phi^-] \rangle_D \\ &+ \langle \frac{1}{3} \Phi^- [G_{-1} \Phi^-, G_0 \Phi^+] \rangle_D, \quad (10.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle -\frac{1}{12} [\hat{\Phi}, \hat{G}_{-1}\hat{\Phi}] [\hat{\Phi}, \hat{G}_0\hat{\Phi}] \rangle_D &= \underbrace{-\langle \frac{1}{12} [\Phi^+, G_{-1}\Phi^+] [\Phi^+, G_0\Phi^+] \rangle_D}_{GSO(+)} \\
&\quad - \langle \frac{1}{12} \{\Phi^-, G_{-1}\Phi^-\} \{\Phi^-, G_0\Phi^-\} \rangle_D \\
&\quad + \langle \frac{1}{12} [\Phi^+, G_{-1}\Phi^+] \{\Phi^-, G_0\Phi^-\} \rangle_D \\
&\quad + \langle \frac{1}{12} \{\Phi^-, G_{-1}\Phi^-\} [\Phi^+, G_0\Phi^+] \rangle_D \\
&\quad - \langle \frac{1}{12} [\Phi^+, G_{-1}\Phi^-] [\Phi^+, G_0\Phi^-] \rangle_D \\
&\quad - \langle \frac{1}{12} \{\Phi^-, G_{-1}\Phi^+\} \{\Phi^-, G_0\Phi^+\} \rangle_D \\
&\quad + \langle \frac{1}{12} [\Phi^+, G_{-1}\Phi^-] \{\Phi^-, G_0\Phi^+\} \rangle_D \\
&\quad + \langle \frac{1}{12} \{\Phi^-, G_{-1}\Phi^+\} [\Phi^+, G_0\Phi^-] \rangle_D.
\end{aligned} \tag{10.3}$$

Notando que apenas números pares de campos $GSO(-)$ aparecem.

Para calcular estas funções de correlação, considera-se os spin fields bosonizados, como discutido no capítulo 4. Os cálculos são razoavelmente diretos, embora trabalhosos e podem, em sua maioria, ser implementados em um programa de computação simbólica como MATHEMATICA. É importante tomar cuidado com os resultados finais, uma vez que a bosonização dos spin fields quebra a invariância de Lorentz e o resultado final das funções de correlação deve ser re-escrito para levar este aspecto em conta.

$$\begin{aligned}
\langle -G_{-1}\Phi^- G_0\Phi^- \rangle_D &= T\Box T + \frac{1}{2}T^2 + \\
&\quad 2i(\chi^- \sigma^m \partial_m \bar{\chi}^- + \bar{\chi}^- \bar{\sigma}^m \partial_m \chi^-), \tag{10.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle -\frac{1}{3}\hat{\Phi} \{ \hat{G}_{-1}\hat{\Phi}, \hat{G}_0\hat{\Phi} \} \rangle_D &= 4 \cdot 3^{3/4} T (\chi^+ \chi^- + \bar{\chi}^+ \bar{\chi}^-) \\
&\quad + 2(\chi^+ \sigma^m [A_m, \bar{\chi}^-] + \\
&\quad \bar{\chi}^- \bar{\sigma}^m [A_m, \chi^+]), \tag{10.5}
\end{aligned}$$

$$\langle -\frac{1}{12} \{ \Phi^-, G_{-1} \Phi^- \} \{ \Phi^-, G_0 \Phi^- \} \rangle_D = -T^4, \quad (10.6)$$

$$\langle \frac{1}{12} [\Phi^+, G_{-1} \Phi^+] \{ \Phi^-, G_0 \Phi^- \} \rangle_D = 0, \quad (10.7)$$

$$\langle -\frac{1}{12} \{ \Phi^-, G_{-1} \Phi^- \} [\Phi^+, G_0 \Phi^+] \rangle_D = 0, \quad (10.8)$$

$$\langle -\frac{1}{12} [\Phi^+, G_{-1} \Phi^-] [\Phi^+, G_0 \Phi^-] \rangle_D = \frac{1}{2} [T, A_m] [T, A^m], \quad (10.9)$$

$$\langle \frac{1}{12} \{ \Phi^+, G_{-1} \Phi^- \} \{ \Phi^-, G_0 \Phi^+ \} \rangle_D = 0, \quad (10.10)$$

$$\langle -\frac{1}{12} \{ \Phi^-, G_{-1} \Phi^+ \} \{ \Phi^-, G_0 \Phi^+ \} \rangle_D = \frac{1}{2} [T, A_m] [T, A^m], \quad (10.11)$$

$$\langle \frac{1}{12} \{ \Phi^-, G_{-1} \Phi^+ \} [\Phi^+, G_0 \Phi^-] \rangle_D = 0. \quad (10.12)$$

Para a segunda parte de WZ, isto é, para os termos que dependem dos operadores diferenciais com cohomologia não-trivial $G_{-\frac{2}{3}}$ e $G_{-\frac{1}{3}}$, as coisas são mais simples e poucos termos contribuem:

$$S_{WZ}^{(2)} = -\langle G_{-2/3} \Phi^- G_{-1/3} \Phi^- \rangle_D = 4\partial_{-i} T \partial_{+i} T. \quad (10.13)$$

Os termos restantes na função de correlação no espaço de Hilbert grande (termos D) são:

$$S_D = -\langle e^{-\hat{\Phi}} \hat{\Omega} e^{\hat{\Phi}} \hat{\Omega} \rangle_D + \langle \hat{\Omega} e^{\hat{\Phi}} \hat{G}_{-2/3} e^{-\hat{\Phi}} \rangle_D + \langle \hat{\Omega} e^{-\hat{\Phi}} \hat{G}_{-1/3} e^{\hat{\Phi}} \rangle_D \quad (10.14)$$

Novamente, dividindo os campos em $GSO(+)$ e $GSO(-)$ os termos que devem ser calculados (até quatro campos de cordas) são:

$$\begin{aligned} \langle -e^{-\hat{\Phi}} \hat{\Omega} e^{\hat{\Phi}} \hat{\Omega} \rangle_D &= \underbrace{\langle \bar{\Omega}^+ \Omega^+ \rangle_D}_{GSO(+)} + \langle \bar{\Omega}^- \Omega^- \rangle_D \\ &\quad - \langle [\Phi^+, \bar{\Omega}^-] \Omega^- \rangle_D - \langle [\Phi^-, \bar{\Omega}^-] \Omega^+ \rangle_D \\ &\quad + \langle [\Phi^-, \bar{\Omega}^+] \Omega^- \rangle_D \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle \{ \Phi^- \{ \Phi^-, \bar{\Omega}^+ \} \} \Omega^+ \rangle_D, \end{aligned} \quad (10.15)$$

$$\langle \hat{\Omega} e^{\hat{\Phi}} \hat{G}_{-2/3} e^{-\hat{\Phi}} \rangle_D = -\langle \bar{\Omega}^+ \{ \Phi^-, G_{-2/3} \Phi^- \} \rangle_D, \quad (10.16)$$

$$\langle \hat{\Omega} e^{-\hat{\Phi}} \hat{G}_{-1/3} e^{\hat{\Phi}} \rangle_D = \langle \Omega^+ \{ \Phi^-, G_{-1/3} \Phi^- \} \rangle_D. \quad (10.17)$$

e as funções de correlação são calculadas da mesma maneira que as anteriores, fornecendo a mistura entre os campos 4-dimensionais com os campos “internos”, 6-dimensionais (3-complexas):

$$\begin{aligned} \langle \bar{\Omega}^- \Omega^- \rangle_D &= -i \left(\lambda_{-i}^- \sigma^m \partial_m \bar{\lambda}_{-i}^{(-)} \right. \\ &\quad \left. + \bar{\lambda}_{-i}^{(-)} \sigma^m \partial_m \lambda_{+i}^{(-)} \right), \end{aligned} \quad (10.18)$$

$$\langle - [\Phi^+, \bar{\Omega}^-] \Omega^- \rangle_D = -2 [v_m, \lambda_{+i}^-] \sigma^m \lambda_{+i}^-, \quad (10.19)$$

$$\langle - [\Phi^-, \bar{\Omega}^-] \Omega^+ \rangle_D = 4 \lambda_{+i}^- \chi^- A_{+i} - 2 \cdot 3^{3/4} T \lambda_{+i}^+ \lambda_{-i}^-, \quad (10.20)$$

$$\langle [\Phi^-, \bar{\Omega}^+] \Omega^- \rangle_D = 4 \bar{\lambda}_{-j}^- \bar{\chi}^- A_{-j} - 2 \cdot 3^{3/4} T \bar{\lambda}_{-i}^- \bar{\lambda}_{+i}^+, \quad (10.21)$$

$$\langle -\frac{1}{2} \{ \Phi^- \{ \Phi^-, \bar{\Omega}^+ \} \} \Omega^+ \rangle_D = 2 T^2 A_{+i} A_{-i}, \quad (10.22)$$

$$\langle -\bar{\Omega}^+ \{ \Phi^-, G_{-2/3} \Phi^- \} \rangle_D = 4\sqrt{3} A^{+i} T \partial_{+i} T, \quad (10.23)$$

$$\langle \Omega^+ \{ \Phi^-, G_{-1/3} \Phi^- \} \rangle_D = 4\sqrt{3} A^{-i} T \partial_{-i} T. \quad (10.24)$$

finalmente, os termos de Chern-Simons, nos sub-espacos de Hilbert quiral e anti-quiral:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{CS} &= -\langle \frac{i}{2} \hat{\bar{\Omega}} \hat{G}_{-1/3} \hat{\bar{\Omega}} \rangle_{\bar{F}} - \langle \frac{1}{3} \hat{\bar{\Omega}} \hat{\bar{\Omega}} \hat{\bar{\Omega}} \rangle_{\bar{F}}, \\ &= \underbrace{-\langle \frac{1}{2} \bar{\Omega}^+ G_{-1/3} \bar{\Omega}^+ \rangle_{\bar{F}} - \langle \frac{1}{3} \bar{\Omega}^+ \bar{\Omega}^+ \bar{\Omega}^+ \rangle_{\bar{F}}}_{GSO(+)} \\ &\quad - \langle \frac{1}{2} \bar{\Omega}^- G_{-1/3} \bar{\Omega}^- \rangle_{\bar{F}} - \langle \frac{1}{3} \bar{\Omega}^+ \bar{\Omega}^- \bar{\Omega}^- \rangle_{\bar{F}}, \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \lambda_{+i}^+ \partial_{-j} \lambda_{+k}^+ - \frac{1}{3} \epsilon_{ijk} A_{+i} \lambda_{+j}^+ \lambda_{+k}^+ \\ &\quad - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \lambda_{+i}^- \partial_{-j} \lambda_{+k}^- - \frac{1}{3} \epsilon_{ijk} A_{+i} \lambda_{+j}^- \lambda_{+k}^-. \end{aligned} \quad (10.25)$$

$$\begin{aligned} S_{CS} &= \langle \frac{1}{2} \hat{\Omega} \hat{G}_{-2/3} \hat{\Omega} \rangle_F + \langle \frac{1}{3} \hat{\Omega} \hat{\Omega} \hat{\Omega} \rangle_F, \\ &= \langle \frac{1}{2} \bar{\Omega}^- G_{-2/3} \bar{\Omega}^- \rangle_F + \langle \frac{1}{3} \Omega^+ \Omega^- \Omega^- \rangle_F, \\ &= \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \bar{\lambda}^{-i} \partial_{+j} \bar{\lambda}^{-k} + \frac{1}{3} \epsilon^{ijk} \phi_{-i} \bar{\lambda}^{-j} \bar{\lambda}^{-k}. \end{aligned} \quad (10.26)$$

De uma maneira esquemática, a ação final obtida é:

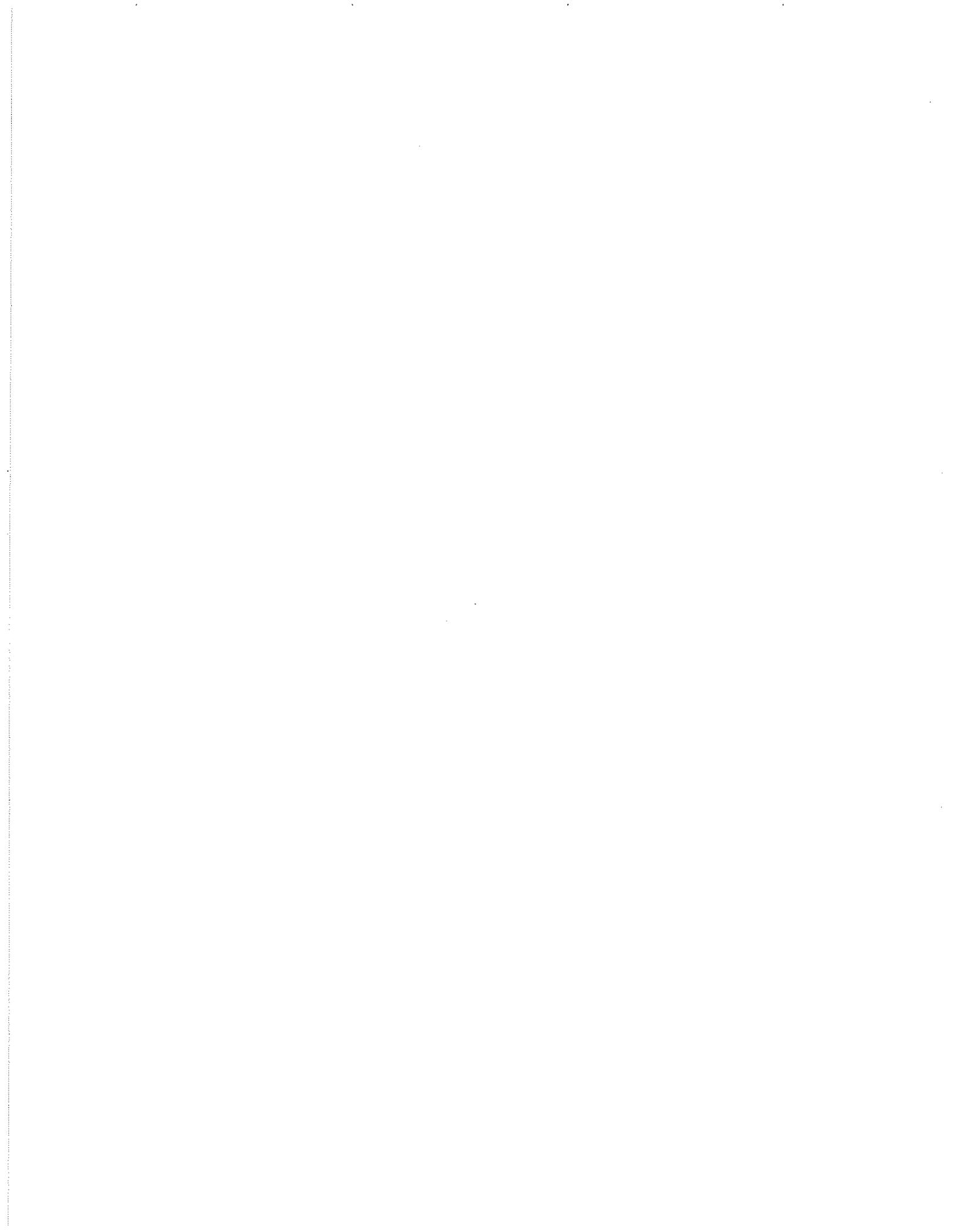
$$S = \underset{\text{eq.(9.7)}}{S_{WZ}^{(1)}} + \underset{\text{eq.(10.13)}}{S_{WZ}^{(2)}} + \underset{\text{eq.(10.14)}}{S_D} + \underset{\text{eq.(10.26)}}{S_{CS}} + \underset{\text{eq.(10.25)}}{\bar{S}_{CS}}.$$

E pode-se agora re-escrever estes campos na linguagem 10-dimensional explícita, levando-se em conta o padrão de quebra de simetria de Lorentz forçado pela escolha da carga C, pode-se reconhecer como os campos em 10-dimensões são compostos a partir deste e construir-se a ação:

$$\begin{aligned} S = \text{Tr} \int d^{10}x & \left[\frac{1}{4} F^{mn} F_{mn} + T \square T + [T, A^m][T, A_m] + \frac{1}{2} T^2 - T^4 \right. \\ & + 3^{\frac{3}{4}} T \chi_{(+)}^\alpha \chi_{(-)\beta} + \chi_{(+)}^\alpha \gamma_{ab}^\mu \left(\partial_\mu \chi_{(+)}^\beta + [A_m, \chi_{(+)}^\beta] \right) + \\ & \left. \chi_{(-)\alpha} \gamma^{\mu ab} \left(\partial_\mu \chi_{(-)\beta} + [A_m, \chi_{(-)\beta}] \right) \right]. \end{aligned} \quad (10.27)$$

Alguns comentários devem ser feitos sobre esta ação:

- O setor $GSO(+)$ não foi calculado neste trabalho, sendo conhecido que o setor $GSO(+)$ da supercorda tipo I tem como ação uma ação de Super Yang-Mills em $D = 10$. Note no entanto que o termo quártico nos campos de gauge, logo no primeiro termo da ação, nunca foi calculado na literatura e deve aparecer com coeficientes errados nesta abordagem. O coeficiente correto deve ser produzido apenas em uma ação efetiva, após a integração dos outros modos. Contudo, este termo não é relevante para o trabalho.
- A ação possui uma forma simples, apresenta o termo cúbico esperado para a interpretação dos férmions $GSO(-)$ como gravitinos.
- Esta ação possui termos de derivadas superiores em todos os termos cúbicos ou quárticos, advindos das OPEs dos diferentes campos do espaço-tempo. Para entender esta questão, deve-se notar, por exemplo, que o campo do táquion é $T(X(z))$, o qual têm OPEs não nulas com um campo situado em outro ponto do plano complexo. Embora aparentemente não seja uma tarefa adicional muito grande, estes termos não foram incluídos no trabalho.



Conclusão e Perspectivas

Or ti riman, lettor, sovra 'l tuo banco,
dietro pensando a ciò che se preliba,
s'esser vuoi lieto assai prima che stanco.

Messo t'ho innanzi: omai per te ti ciba;
ché a sé torce tutta la mia cura
quella materia ond'io son fatto scriba.

PARAISO X 22-27

As contribuições deste trabalho são:

- Os operadores de Vértice do setor $GSO(-)$, táquion e férmions sem massa, foram obtidos diretamente no formalismo híbrido, discutindo-se amplamente suas condições físicas.
- Um primeiro cálculo não-trivial foi realizado para a teoria de campos de supercordas incluindo o setor Ramond foi efetuada, considerando-se uma D9-brana da corda tipo II-A (instável), obtendo-se a ação clássica para os campos considerados acima [BT03].
- Amplo material de revisão foi incluído, sumarizando as técnicas necessárias para o entendimento de teorias de campos de supercordas, com potencial interesse pedagógico para a comunidade.

Também algumas omissões são dignas de nota, em particular, a inclusão de material de revisão sobre supersimetria, discussão sobre a teoria de campos de cordas fechadas [Ber01a] e uma discussão sobre outras abordagens às teorias de campos de supercordas apresentadas, notadamente **Boundary String Field Theory**, que será comentada brevemente a seguir.

Neste formalismo [Wit92], cujas bases residem na técnica de quantização BV, que define o espaço de configuração da teoria de campos de cordas abertas como o espaço de todas as teorias bidimensionais da folha-mundo no disco, conformes no interior deste disco e com interações arbitrárias na borda. Este formalismo une elementos de modelos sigma e de técnicas de grupo de renormalização e permite grande capacidade operacional, ao ponto de se obter potenciais exatos para o táquion (no limite em que $\alpha' \rightarrow 0$) [KL01]. Existem dificuldades de se definir consistentemente loops de cordas neste formalismo, apesar de alguns trabalhos nesta direção [CKL01].

Em BSFT, o vácuo estável do táquion é um ponto fixo infravermelho ($X \rightarrow \infty$), tornando difícil a análise da física ao redor deste vácuo, o que é facilitado no formalismo apresentado neste trabalho. Em verdade, um grande número de avanços foi conseguido utilizando-se *insights* destas duas abordagens para a compreensão de fenômenos taquiônicos.

Tendo sido completada uma parte da análise, é natural que se procure o entendimento da BSFT dentro do formalismo híbrido também, o qual pode lançar luz às importantes questões sobre restauração de supersimetria nestes sistemas instáveis, além de permitir uma análise de *backgrounds* com mais estrutura, como a carga RR por exemplo. Esta linha de pesquisa está em desenvolvimento no momento.

Compreender a supersimetria dentro de teorias de campos de supercordas pode resultar em enormes avanços no entendimento mais profundo da teoria de cordas, uma vez que teorias supersimétricas são muito mais restritas do que teorias usuais, sendo a simetria capaz de resolver um variado número de questões, dotando a teoria de estruturas matemáticas mais ricas e poderosas, podendo facilitar o entendimento acurado da álgebra dos campos de supercordas. Dentre as várias possibilidades para atacar-se este incipiente problema, muitas devem ser trilhadas simultaneamente, para que haja uma auto-fertilização saudável e profícua entre as abordagens.

Este é um começo!

Apêndices

Satius est supervacua discere quam nihil

Seneca

OPEs de Variáveis Híbridas mais utilizadas

a	Πe^{ikX}	Θe^{ikX}	$\bar{\Pi} e^{ikX}$	$\bar{\Theta} e^{ikX}$
$p_\alpha p^\alpha$	$\Lambda^{-\ominus+}$	$\frac{1}{z^2} \Pi$	$\frac{1}{z} \Lambda^{-\ominus+}$	$\frac{1}{z} \Lambda^{-\ominus+}$
$p \sigma^m \bar{\theta}_i \partial X_m$	$-\frac{1}{z} \sigma^m k_m \Lambda^{-\ominus+}$	$-\frac{1}{z^2} \sigma^m k_m \bar{\Theta}$	$-\frac{1}{z^2} \sigma^m k_m \Pi$	$-\frac{1}{z} \sigma^m k_m \Lambda^{-\ominus+}$
$\partial(\theta)^2 \bar{\theta} \sigma^m \theta_i \partial X_m$	$-\bar{\sigma}^m k_m \Lambda^{+\oplus}$	$-\bar{\sigma}^m k_m \Lambda^{+\oplus}$	$-\frac{1}{z} \bar{\sigma}^m k_m \Lambda^{+\oplus}$	$\mathcal{O}(z^3)$
$\theta^2 \partial(\bar{\theta})^2 \partial(\bar{\theta})^2$	$\mathcal{O}(z^2)$	$\mathcal{O}(z^6)$	$\mathcal{O}(z^3)$	$\mathcal{O}(z^5)$
$\bar{\theta}^2 p \partial \theta$	$\frac{1}{z} \Lambda^{+\oplus}$	$\frac{1}{z} \Lambda^{+\oplus}$	reg	reg
$\partial \bar{\theta}^2 p \theta$	$\frac{1}{z} \Lambda^{+\oplus}$	$\frac{1}{z} \Lambda^{+\oplus}$	reg	reg
$\bar{\theta}^2 \partial X^m \partial X_m$	$\frac{1}{z} k^2 \Lambda^{-\ominus+}$	$\frac{1}{z} k^2 \Lambda^{+\oplus}$	$\frac{1}{z^2} k^2 \bar{\Theta}$	$k^2 \Lambda^{+\oplus}$
$\partial \bar{\theta} \partial \bar{\theta}$	$\frac{1}{z} \Lambda^{-\ominus+}$	$\frac{1}{z} k^2 \Lambda^{+\oplus}$	$\frac{1}{z^2} k^2 \bar{\Theta}$	$k^2 \Lambda^{+\oplus}$
$\partial^2 \bar{\theta} \bar{\theta}$	$\frac{1}{z} \Lambda^{-\ominus+}$	$\frac{1}{z} k^2 \Lambda^{+\oplus}$	$\frac{1}{z^2} k^2 \bar{\Theta}$	$k^2 \Lambda^{+\oplus}$

^aOPEs de variáveis híbridas. Primeira coluna representa os termos de d^2 e primeira linha contém vários elementos para a construção de vértices.

Operadores de Vértice e algumas propriedades

Vértice	RNS	Híbrido	h	S	GSO
Φ_0	$c\partial c\xi\partial\xi e^{-\frac{5}{2}\phi}\Sigma^\alpha e^{H/2}\chi_\alpha^+$	$\theta^\alpha(\bar{\theta})^2\chi_\alpha^+$	0	Ff	+
	$c\xi e^{-\frac{1}{2}\phi}\Sigma^{\dot{\alpha}} e^{-H/2}\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}^+$	$\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}(\theta)^2\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}^+$	0	Ff	+
	$c\xi e^{-\phi}\psi^m A_m$	$\theta^\alpha\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}A_m$	0	Bb	+
	$c\xi e^{-\phi}t$	Λt	$-\frac{1}{2}$	Fb	-
	$z^{\frac{1}{2}}c\xi e^{-\frac{1}{2}\phi}\Sigma^\alpha e^{-H/2}\chi_\alpha^-$	$\theta^\alpha\Lambda\chi_\alpha^-$	0	Bf	-
	$z^{\frac{1}{2}}c\partial c\xi\partial\xi e^{-\frac{5}{2}\phi}\Sigma^{\dot{\alpha}} e^{H/2}\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}^-$	$\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\Lambda\bar{\chi}_{\dot{\alpha}}^-$	0	Bf	-
$\Psi_{\frac{1}{3}}$	$c\xi e^{-\frac{1}{2}\phi}\Sigma^\alpha\Xi^{+j}\lambda_{+j\alpha}^+$	$e^\rho\Gamma^{+j}\theta^\alpha(\bar{\theta})^2\lambda_{+j\alpha}^+$	0	Ff	+
	$c\xi e^{-\phi}\psi^{-j}A_{-j}$	$e^\rho\Gamma^{+j}(\theta)^2A_{-j}$	0	Bb	+
	$z^{\frac{1}{2}}c\xi e^{-\frac{1}{2}\phi}\Sigma^{\dot{\alpha}}\Xi^{+j}\bar{\lambda}_{+j\dot{\alpha}}^-$	$e^\rho\Gamma^{+j}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\Lambda\bar{\lambda}_{+j\dot{\alpha}}^-$	0	Bf	-
$\bar{\Psi}_{-\frac{1}{3}}$	$c\partial c\xi\partial\xi e^{-\frac{5}{2}\phi}\Sigma^{\dot{\alpha}}\Xi^{-j}\bar{\lambda}_{-j\dot{\alpha}}^+$	$e^{-\rho}\Gamma^{-j}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}(\theta)^2\bar{\lambda}_{-j\dot{\alpha}}^+$	0	Ff	+
	$c\xi e^{-\phi}\psi^{+j}A_{+j}$	$e^{-\rho}\Gamma^{-j}(\theta)^2A_{+j}$	0	Bb	+
	$z^{\frac{1}{2}}c\partial c\xi\partial\xi e^{-\frac{5}{2}\phi}\Sigma^\alpha\Xi^{-j}\lambda_{-j\alpha}^-$	$e^{-\rho}\Gamma^{-j}\theta^\alpha\Lambda\lambda_{-j\alpha}^-$	0	Bf	-

Tabela 1: Operadores de Vértice nos formalismo RNS e híbrido, para táquion e setores não-massivos. Explicações sobre a notação no texto abaixo.

A primeira coluna mostra o campo de corda ao qual cada vértice pertence, rotulados pela carga C , a coluna h mostra o peso conforme de cada operador de vértice, a coluna S define a estatística dos campos, letras maiúsculas para estatística na folha-mundo e minúsculas para estatísticas no espaço-tempo (F para férmion e B para bóson). A última coluna apenas denota o setor GSO de origem. Alguns campos que aparecem na segunda coluna não foram definidos ainda, o que segue abaixo:

Os férmions “internos” do formalismo RNS $\psi^{\pm j}$ são bosonizados de acordo com:

$$\psi^{\pm j} \equiv e^{\pm\tau_{j+2}} \cong \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^{2j+2} \pm i\psi^{2j+3}) \quad j = 1, 2, 3. \quad (10.28)$$

De forma que os spin fields RNS internos são: Ξ^a e $\bar{\Xi}^{\dot{a}}$

$$\Xi^a \equiv \Xi^{\pm\pm\pm\pm} \equiv e^{\pm\frac{1}{2}\tau_3 \pm\frac{1}{2}\tau_4 \pm\frac{1}{2}\tau_5} \quad (\text{even } +), \quad (10.29)$$

$$\bar{\Xi}^{\dot{a}} \equiv \Xi^{\pm\pm\pm\pm} \equiv e^{\pm\frac{1}{2}\tau_3 \pm\frac{1}{2}\tau_4 \pm\frac{1}{2}\tau_5} \quad (\text{odd } +). \quad (10.30)$$

mais índices spinoriais internos: a (quiral), \dot{a} (anti-quiral)

Ξ^a		$\bar{\Xi}^{\dot{a}}$	
$e^{H/2}$	Ξ^{----}	$e^{-H/2}$	$\bar{\Xi}^{+++}$
	Ξ^{-+++}		$\bar{\Xi}^{+--}$
Ξ^{+j}	Ξ^{+--}	Ξ^{-j}	$\bar{\Xi}^{-+-}$
	Ξ^{++-}		$\bar{\Xi}^{--+}$

	b	c	ξ	η	$e^{q\phi}$	x^m	ψ^m	ψ^{+j}	ψ^{-j}	e^{qH}	x^{+j}	x^{-j}
C	0	0	1	-1	q	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	q	0	0
P	0	0	1	-1	q	0	0	0	0	0	0	0
J_{gh}	-1	1	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
$U(1)$	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	q	0	0
W	2	-1	0	1	$-\frac{1}{2}q(q+2)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}q^2$	0	0
Statistic	F	F	F	F		B	F	F	F		B	B

Tabela 2: Propriedades dos campos no formalismo RNS.

	X^m	p	θ	\bar{p}	θ	$e^{q\rho}$	Γ^{+j}	Γ^{-j}	X^{+j}	X^{-j}
C	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	0
P	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	q	0	0	0	0
J_{FAN}	0	0	0	0	0	q	-1	1	0	0
ρ	0	0	0	0	0	q	0	0	0	0
h	0	1	0	1	0	$-\frac{1}{2}q(q+1)$	1	0	0	0
Estadística	B	F	F	F	F		F	F	B	B

Tabela 3: Propriedades das variáveis híbridas.

Mais uma expressão útil é:

$$\begin{aligned}
 d^\alpha d_\alpha(z) &= p^\alpha p_\alpha(z) + p^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^m \bar{\theta}^{\dot{\alpha}i} \partial X_m(z) + \frac{1}{8} \partial(\bar{\theta})^2 \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{m\dot{\alpha}\alpha} \theta_\alpha i \partial X_m(z) \\
 &+ \frac{1}{64} (\theta)^2 \partial(\bar{\theta})^2 \partial(\bar{\theta})^2(z) - \frac{1}{2} (\bar{\theta})^2 : p^\alpha \partial \theta_\alpha(z) : + \frac{1}{4} \partial(\bar{\theta})^2 : p^\alpha \theta_\alpha(z) : \\
 &+ \frac{1}{4} (\bar{\theta})^2 : \partial X^m \partial X_m(z) : - \frac{1}{2} \partial \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}(z) + \frac{1}{2} \partial^2 \bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}(z). \quad (10.31)
 \end{aligned}$$

Bibliografia

- [ABC99] J. N. Acosta, N. Berkovits and O. Chandia, *A note on the superstring BRST operator*, Phys. Lett. **B454**, 247–248 (1999), hep-th/9902178.
- [AS02] C. Angelantonj and A. Sagnotti, *Open strings*, Phys. Rept. **371**, 1–150 (2002), hep-th/0204089.
- [Asp94] P. S. Aspinwall, *The Moduli space of $N=2$ superconformal field theories*, (1994), hep-th/9412115.
- [Ber94] N. Berkovits, *The Ten-dimensional Green-Schwarz superstring is a twisted Neveu-Schwarz-Ramond string*, Nucl. Phys. **B420**, 332–338 (1994), hep-th/9308129.
- [Ber95] N. Berkovits, *SuperPoincare invariant superstring field theory*, Nucl. Phys. **B450**, 90–102 (1995), hep-th/9503099.
- [Ber96a] N. Berkovits, *A new description of the superstring*, (1996), hep-th/9604123.
- [Ber96b] N. Berkovits, *Super-Poincare Invariant Koba-Nielsen Formulas for the Superstring*, Phys. Lett. **B385**, 109–116 (1996), hep-th/9604120.
- [Ber00] N. Berkovits, *The tachyon potential in open Neveu-Schwarz string field theory*, JHEP **04**, 022 (2000), hep-th/0001084.
- [Ber01a] N. Berkovits, *The Ramond sector of open superstring field theory*, JHEP **11**, 047 (2001), hep-th/0109100.
- [Ber01b] N. Berkovits, *Review of open superstring field theory*, (2001), hep-th/0105230.
- [BKL95] J. Bischoff, S. V. Ketov and O. Lechtenfeld, *The GSO projection, BRST cohomology and picture changing in $N=2$ string theory*, Nucl. Phys. **B438**, 373–410 (1995), hep-th/9406101.

- [BSZ00] N. Berkovits, A. Sen and B. Zwiebach, *Tachyon condensation in superstring field theory*, Nucl. Phys. **B587**, 147–178 (2000), hep-th/0002211.
- [BT03] L. Barosi and C. Tello, *GSO(-) Vertex Operators and Open Superstring Field Theory in Hybrid Variables*, JHEP **05**, 04 (2003), hep-th/0303246.
- [BV94] N. Berkovits and C. Vafa, *On the Uniqueness of string theory*, Mod. Phys. Lett. **A9**, 653–664 (1994), hep-th/9310170.
- [BV95] N. Berkovits and C. Vafa, *N=4 topological strings*, Nucl. Phys. **B433**, 123–180 (1995), hep-th/9407190.
- [CKL01] B. Craps, P. Kraus and F. Larsen, *Loop corrected tachyon condensation*, JHEP **06**, 062 (2001), hep-th/0105227.
- [Dab97] A. Dabholkar, *Lectures on orientifolds and duality*, (1997), hep-th/9804208.
- [DFMS97] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal, *Conformal field theory*, GTCP, Springer, New York, USA, 1997, 890 p.
- [DLP89] J. Dai, R. G. Leigh and J. Polchinski, *NEW CONNECTIONS BETWEEN STRING THEORIES*, Mod. Phys. Lett. **A4**, 2073–2083 (1989).
- [Dou01] M. R. Douglas, *D-branes, categories and N = 1 supersymmetry*, J. Math. Phys. **42**, 2818–2843 (2001), hep-th/0011017.
- [DS01] P.-J. De Smet, *Tachyon condensation: Calculations in string field theory*, (2001), hep-th/0109182.
- [DVL99] P. Di Vecchia and A. Liccardo, *D branes in string theory. I*, (1999), hep-th/9912161.
- [FMS86] D. Friedan, E. J. Martinec and S. H. Shenker, *CONFORMAL INVARIANCE, SUPERSYMMETRY AND STRING THEORY*, Nucl. Phys. **B271**, 93 (1986).
- [Gin88] P. Ginsparg, *APPLIED CONFORMAL FIELD THEORY*, (1988), hep-th/9108028.
- [GK87] J. Greensite and F. R. Klinkhamer, *NEW INTERACTIONS FOR SUPERSTRINGS*, Nucl. Phys. **B281**, 269 (1987).

- [GO88] P. Goddard and D. Olive, editors, *Kac-Moody and Virasoro Algebras: A reprint volume for physicists*, volume 3 of *Advanced Series in Mathematical Physics*, World Scientific, 1988, 586 p.
- [GP96] E. G. Gimon and J. Polchinski, *Consistency Conditions for Orientifolds and D-Manifolds*, *Phys. Rev.* **D54**, 1667–1676 (1996), hep-th/9601038.
- [GR02] D. Gaiotto and L. Rastelli, *Experimental string field theory*, (2002), hep-th/0211012.
- [Gre96] B. R. Greene, *String theory on Calabi-Yau manifolds*, (1996), hep-th/9702155.
- [GSW87a] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *SUPERSTRING THEORY. VOL. 1: INTRODUCTION*, Cambridge Monographs On Mathematical Physics, Cambridge, Uk: Univ. Pr., 1987, 469 P.
- [GSW87b] M. B. Green, J. H. Schwarz and E. Witten, *SUPERSTRING THEORY. VOL. 2: LOOP AMPLITUDES, ANOMALIES AND PHENOMENOLOGY*, Cambridge Monographs On Mathematical Physics, Cambridge, Uk: Univ. Pr., 1987, 596 P.
- [Ket95] S. Ketov, *Conformal Field Theory*, World Scientific, 1995, 486 p.
- [KL01] P. Kraus and F. Larsen, *Boundary string field theory of the DD-bar system*, *Phys. Rev.* **D63**, 106004 (2001), hep-th/0012198.
- [Klu02] J. Kluson, *Some solutions of Berkovits' superstring field theory*, (2002), hep-th/0201054.
- [KS90] V. A. Kostelecky and S. Samuel, *ON A NONPERTURBATIVE VACUUM FOR THE OPEN BOSONIC STRING*, *Nucl. Phys.* **B336**, 263 (1990).
- [LPP89] A. LeClair, M. E. Peskin and C. R. Preitschopf, *STRING FIELD THEORY ON THE CONFORMAL PLANE. 1. KINEMATICAL PRINCIPLES*, *Nucl. Phys.* **B317**, 411 (1989).
- [LPU02] O. Lechtenfeld, A. D. Popov and S. Uhlmann, *Exact solutions of Berkovits' string field theory*, *Nucl. Phys.* **B637**, 119–142 (2002), hep-th/0204155.
- [LT89] D. Lüst and S. Theisen, *Lectures on String Theory*, Number 346 in *Lecture Notes in Physics*, Springer, 1989, 346 p.

- [Mal98] J. M. Maldacena, *Black holes and D-branes*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **61A**, 111–123 (1998), hep-th/9705078.
- [MSS83] N. Marcus, A. Sagnotti and W. Siegel, *TEN-DIMENSIONAL SUPERSYMMETRIC YANG-MILLS THEORY IN TERMS OF FOUR-DIMENSIONAL SUPERFIELDS*, Nucl. Phys. **B224**, 159 (1983).
- [Ohm01] K. Ohmori, *A review on tachyon condensation in open string field theories*, (2001), hep-th/0102085.
- [OP94] N. Ohta and J. L. Petersen, *$N=1$ from $N=2$ superstrings*, Phys. Lett. **B325**, 67–70 (1994), hep-th/9312187.
- [PC88] J. Polchinski and Y. Cai, *CONSISTENCY OF OPEN SUPERSTRING THEORIES*, Nucl. Phys. **B296**, 91 (1988).
- [Pol88a] J. Polchinski, *String theory. An introduction to the bosonic string*, volume 1, Cambridge, UK: Univ. Pr., 1988, 402 p.
- [Pol88b] J. Polchinski, *String theory. Superstring Theory and Beyond*, volume 2, Cambridge, UK: Univ. Pr., 1988, 531 p.
- [Pol96] J. Polchinski, *Lectures on D-branes*, (1996), hep-th/9611050.
- [PTY] C. R. Preitschopf, C. B. Thorn and S. A. Yost, *SUPERSTRING FIELD THEORY*, Invited talk given at Workshop on Superstring and Particle Theory, Tuscaloosa, AL, Nov 8–11, 1989.
- [RSZ01] L. Rastelli, A. Sen and B. Zwiebach, *Boundary CFT construction of D-branes in vacuum string field theory*, JHEP **11**, 045 (2001), hep-th/0105168.
- [Sag95] A. Sagnotti, *Some properties of open string theories*, (1995), hep-th/9509080.
- [Sch96] A. N. Schellekens, *Introduction to conformal field theory*, Fortsch. Phys. **44**, 605–705 (1996).
- [Sch99] J. H. Schwarz, *TASI lectures on non-BPS D-brane systems*, (1999), hep-th/9908144.
- [Sen] A. Sen, *Stable non-BPS states in string theory*, Prepared for 29th International Conference on High-Energy Physics (ICHEP 98), Vancouver, British Columbia, Canada, 23–29 Jul 1998.
- [Sen97] A. Sen, *Unification of string dualities*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **58**, 5–19 (1997), hep-th/9609176.

- [Sen99a] A. Sen, *Descent relations among bosonic D-branes*, Int. J. Mod. Phys. **A14**, 4061–4078 (1999), hep-th/9902105.
- [Sen99b] A. Sen, *Non-BPS states and branes in string theory*, (1999), hep-th/9904207.
- [SS96] A. Sagnotti and Y. S. Stanev, *Open descendants in conformal field theory*, Fortsch. Phys. **44**, 585–596 (1996), hep-th/9605042.
- [Ste98] K. S. Stelle, *BPS branes in supergravity*, (1998), hep-th/9803116.
- [SZ00] A. Sen and B. Zwiebach, *Tachyon condensation in string field theory*, JHEP **03**, 002 (2000), hep-th/9912249.
- [War93] N. P. Warner, *N=2 supersymmetric integrable models and topological field theories*, (1993), hep-th/9301088.
- [WB92] J. Wess and J. Bagger, *Supersymmetry and supergravity*, Princeton, USA: Univ. Pr., 1992, 259p.
- [Wen89] C. Wendt, *SCATTERING AMPLITUDES AND CONTACT INTERACTIONS IN WITTEN'S SUPERSTRING FIELD THEORY*, Nucl. Phys. **B314**, 209 (1989).
- [Wit86] E. Witten, *NONCOMMUTATIVE GEOMETRY AND STRING FIELD THEORY*, Nucl. Phys. **B268**, 253 (1986).
- [Wit92] E. Witten, *On background independent open string field theory*, Phys. Rev. **D46**, 5467–5473 (1992), hep-th/9208027.
- [Yon00] T. Yoneya, *Spontaneously broken space-time supersymmetry in open string theory without GSO projection*, Nucl. Phys. **B576**, 219–240 (2000), hep-th/9912255.
- [Yon01] T. Yoneya, *World-sheet string duality and the hidden supersymmetry*, (2001), hep-th/0109058.

Índice Remissivo

- álgebra de Virasoro, 16
- índice de Witten, 43
- ação de Polyakov, 46
- argumento do contorno, 14
- Boundary String Field Theory, 131
- campo $N = 2$ anti-quiral, 41
- campo $N = 2$ quiral, 41
- campo de corda, 62
- campo superconforme primário, 38
- campos de cordas, 103
- Campos Primários, 11
- campos quase-primários, 11
- Caracter de Virasoro, 31
- carga central, 16
- carga de fundo, 34
- Cauchy-Riemann, 10
- compactificações, 63
- Conformas Especiais, 9
- Conjectura de Sen, 97
- corda, 45
- corda aberta, 48
- cordas fechadas, 48
- D-Branas BPS, 90
- determinante de Kac, 19
- Dilatações, 9
- dimensão holomórfica conforme, 11
- esfera de Riemann, 10
- Estados de Peso Máximo, 17
- estados descendentes, 18
- estados-nulos, 19
- fantasmas, 19
- fantasmas de Fadeev-Popov, 51
- fatores de Chan Paton, 89
- fluxo espectral, 42
- geradores de Virasoro, 15
- Grupo Modular, 31
- Invariância de Poincaré, 47
- Invariância por Reparametrização, 47
- invariante modular, 31
- level truncation scheme, 106
- módulo de Verma, 18
- modelos mínimos, 19
- mudança de Picture, 61
- Número de Fantasma, 61
- nível, 18
- Neveu-Schwarz, 26
- operador de torção, 26
- orbifold, 96
- ordenamento normal, 21
- orientifold, 89

-
- peso, *15*
Picture, *61*
Projeção GSO, *33*
- Ramond, *26*
Rotações, *9*
- setor η -torcido, *43*
spin field, *39*
Supercorda Fechada tipo I, *88*
Supercorda Tipo I, *89*
- tensor momento-energia, *8*
Teoria Conforme de Campos, *10*
Transformação Conforme, *9*
transformação de Weyl, *8*
transformação geral de coordenadas,
8
Translações, *9*
- unitária, *19*

