Universidade de São Paulo
Instituto de Física
Departamento de Física Matemática

INSTITUTO DE FÍSICA
Serviço de Biblioteca e Informação
Tombo: 3993 Ex. 1

ALGUNS EFEITOS DA RADIAÇÃO DE PONTO-ZERO

Rodrigo Carvalho Sponchiado

Humberto M. França

Orientador - Prof. Dr. Humberto de Menezes França (IFUSP)

Banca examinadora:

prof. Dr. Humberto de Menezes França (IFUSP)

prof. Dr. Kaled Dechoun (UFF)

prof. Dr. Antônio Vidiella Barranco (UNICAMP)

prof. Dr. Osvaldo Frota Pessoa Jr. (FFLCH)

prof. Dr. Said Rahnamaye Rabbani (IFUSP)

Tese apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo para a obtenção do grau de Doutor em Ciências.

2004

Prof. Armando Corbani Ferraz
Presidente da Comissão de Pós Graduação

SBI-IFUSP
305M810T3993

53416
S

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Sponchiado, Rodrigo Carvalho

Alguns Efeitos da Radiação de Pono-zero.
São Paulo, 2004.

Tese (Doutoramento) Universidade de São Paulo.
Instituto de Física - Depto. de Física Matemática

Orientador: Prof.: Dr. Humberto de Menezes França
Área de Concentração: Física

Unitermos: 1. Ruído de Nyquist;
2. Efeito túnel; 3. Radiação de ponto-zero;
4. Eletrodinâmica Estocástica;
5. Formalismo de Heisemberg-Schrodinger.

USP/IF/SBI-015/2004

Aos meus pais.

Something mysteriously formed,
Born before heaven and earth.
In the silence and the void,
Standing alone and unchanging,
Ever present and in motion.
Perhaps it is the mother of ten thousand things.
I do not know it's name.
Call it Tao.
For lack of a better word, I call it great.
Being great, it flows.
It flows far away.
Having gone far, it returns.

LAO TSU, *Tao Te Ching*,
Tradução de Gia Fu Feng e Jane English

Agradecimentos

Por vezes é muito difícil reconhecer com justiça a colaboração de todos os que me ajudaram na elaboração desse trabalho, de uma maneira ou de outra. Existem companheiros próximos, como o Prof. Humberto França e seu colaborador Alencar J. Faria, os distantes, como os professores Emílio Santos e R. Blanco, de Santander. A nossa atividade como um grupo já foi responsável pela publicação de três artigos em conjunto. Sem eles, esse desempenho não teria sido possível. Também tenho dívidas de gratidão para com colaboradores do passado, cujos trabalhos tiveram desdobramentos neste, como o Prof. Dr. Kaled Dechoum e o Dr. Roberto B. Santos.

Mas não tive apenas colaboradores técnicos. Houve a amizade dos que citei acima, e de outros. Devo gratidão aos meus amigos Paulo Marques e Carlos Mariz e, sobretudo, à minha esposa Denise.

Sumário

1 Introdução **1**

1.1 A Eletrodinâmica Estocástica 1

2 Ruído radiativo no indutor de circuitos simples **10**

2.1 O Ruído de Nyquist-Johnson 10

2.2 O Ruído Radiativo 13

2.3 Propriedades de equilíbrio de um circuito sujeito ao Ruído Radiativo 18

2.4 A Radiação emitida pelo solenóide sujeito ao Ruído Radiativo 21

2.5 O vetor de Poynting na presença do solenóide 25

2.6 A possibilidade de detecção do Ruído Radiativo 29

3 Influência da radiação de ponto-zero no escape de barreiras de potencial **35**

3.1 Escape de barreiras de potencial induzida por flutuações térmicas: a taxa de Kramers 37

3.2 Influência da radiação de ponto-zero no escape da barreira de potencial 44

3.3 Comparação dos resultados com dados experimentais 46

4 Análise crítica do formalismo de Schrödinger na Mecânica Quântica **50**

4.1 A Reação da Radiação e as flutuações eletromagnéticas do vácuo 51
4.2 O oscilador harmônico segundo o formalismo de Heisenberg . . 56
4.3 O oscilador harmônico eletrizado de acordo com o formalismo de Schrödinger 59
4.4 Em busca do motivo para as diferenças entre os dois formalismos 64

5 Conclusão Geral **66**

A Teorema de Wiener-Kintchine **68**

Referências Bibliográficas **71**

Lista de Figuras

2.1 Distribuição espectral da corrente medida no resistor, $S_I(\nu, T)$, em função da freqüência $\nu = \omega/2\pi$ para dois valores de temperatura $T = 4,2$ K (círculos cheios) e $T = 1,6$ K (círculos vazios). A linha contínua é a previsão teórica (2.3). A linha tracejada é $\frac{4h\nu}{R_{ohm}}\left[\frac{h\nu}{e^{h\nu/k_BT}-1}\right]$. A figura é extraída de [16]. . . . 12

2.2 Distribuição espectral da voltagem $S_\varepsilon(\omega, T)$ para dois valores de temperatura $T_1 = 0,02$ K e $T_2 = 3$ K. O solenóide é tal que $l = 0,5$ cm, $a = 0,05$ cm, $b = 0,001$ cm e $N = 250$ espiras. O significado das curvas α_1, α_2 e α_3, β_1 e β_2 é explicado no texto. A figura é extraída de [20]. 31

2.3 Distribuição espectral da voltagem para $T = 4$ K. O solenóide é tal que $l = 3$ cm, $a = 0,3$ cm, $b = 0,01$ cm e $N = 100$ espiras. Mesmo nessa temperatura baixa não é possível distinguir as flutuações de ponto-zero das térmicas. A figura é extraída de [20]. 33

2.4 Distribuição espectral da voltagem para $T = 300$ K. O solenóide é o mesmo que o da figura (2.3). A figura é extraída de [20]. 34

3.1 Potencial metaestável com barreira de altura $\Delta U = U(x_b) - U(x_a)$, um mínimo local x_a e um máximo local x_b. 36

3.2 Os pontos experimentais são dados da taxa de escape associados à migração do CO para a cadeia beta-hemoglobina [38]. A linha contínua é a curva teórica (3.35). Os círculos correspondem à taxa de escape sem as flutuações de ponto-zero (fórmula de Arrhenius). 47

3.3 A linha contínua é o comportamento de alta temperatura de (3.35). Os pontos experimentais são dados da taxa de escape associados à migração do CO para a cadeia beta-hemoglobina [38]. Os círculos correspondem à taxa de escape sem as flutuações de ponto-zero, isto é, à fórmula de Arrhenius $\kappa = \frac{\omega_a}{2\pi} \exp(-\Delta U/k_B T)$. 49

Resumo

A Eletrodinâmica Estocástica é uma combinação da Eletrodinâmica Clássica e a hipótese adicional de que existem campos eletromagnéticos aleatórios, independentes da temperatura, denominados radiação de ponto-zero ou flutuações do vácuo, responsáveis pelo surgimento de certas propriedades peculiares dos sistemas microscópicos, geralmente descritas pela Mecânica Quântica. Diversos novos resultados da teoria são apresentados nesse trabalho. No capítulo 1, é feita uma breve introdução aos principais conceitos e pressupostos da Eletrodinâmica Estocástica, necessários para melhor compreensão dos capítulos seguintes. No capítulo 2, a atuação dos campos do vácuo no indutor de um circuito elétrico simples é estudada. Conclui-se que deve existir um tipo de ruído na voltagem do circuito, adicional ao ruído de Nyquist-Johnson, que pode ser medido dependendo da magnitude de certos parâmetros do circuito e sob certas condições de temperatura. No capítulo 3, é estudado o comportamento de uma partícula eletrizada em um potencial metaestável, com uma barreira de potencial, sujeita às flutuações da radiação térmica e de ponto-zero. Mostra-se que, mesmo à temperatura muito baixa ($T \to 0$), as flutuações do vácuo ainda são capazes de promover o escape da partícula através da barreira de potencial. A Mecânica Quântica atribui o

fenômeno ao tunelamento da partícula através da barreira. Um conjunto de dados experimentais são analisados e observa-se que a descrição da Eletrodinâmica Estocástica produz um excelente acordo com eles. No capítulo 4, é mostrado que os formalismos de Heisenberg e Schrödinger da Mecânica Quântica deixam de ser equivalentes quando se leva em conta os campos do vácuo nos cálculos. Dirac foi o primeiro a apontar essa não equivalência para casos da Eletrodinâmica Quântica Relativísitica. Um exemplo bem mais simples é apresentado, o oscilador harmônico eletrizado, em interação com o campo eletromagnético do vácuo.

Abstract

The Stochastic Electrodynamics Theory is a combination of Classical Electrodynamics and the additional hypothesis that temperature-independent stochastic electromagnetic fields do exist. These electromagnetic fields are called zero-point radiation or vacuum fluctuations and are responsible for some peculiar properties of macroscopic systems, usually described by Quantum Mechanics. Some new results of the theory are given in this work. In chapter 1, a brief introduction of the main concepts and hypothesis of the Stochastic Electrodynamics Theory are given. They are necessary for a better understanding of the following chapters. In chapter 2, the influence of vacuum fields at the inductor of a simple electric circuit is studied. One concludes that a certain type of noise in the voltage, which is additional to the Nyquist-Johnson noise, must exist and can be measured depending on certain circuit parameters and under certain temperatures. In chapter 3, one studies the behavior of an electrified particle inside a metastable potential with a potential barrier, under the influence of the fluctuations of thermal and zero-point radiations. It is shown that, even if the temperature is very low ($T \to 0$), the vacuum fluctuations are still responsible for the escape of the particle through the potential barrier. Quantum Mechanics re-

lates this phenomenon to the tunneling of the particle through the potential barrier. Experimental data are analyzed and it is shown that the description of Stochastic Electrodynamics gives an excellent agreement with them. In chapter 4, it is shown that the Schrödinger and Heisenberg pictures of Quantum Mechanics are not equivalent when the vacuum fields are taken into account. Dirac was the first to point out this non-equivalence for Relativistic Quantum Electrodynamics. A simpler example of this non-equivalence is shown in the context of Stochastic Electrodynamics: an electrified harmonic oscillator interacting with the electromagnetic vacuum fields.

Capítulo 1

Introdução

1.1 A Eletrodinâmica Estocástica

Pode-se apresentar a Eletrodinâmica Estocástica de diversas formas. Nessa seção faz-se menção a alguns de seus aspectos essenciais e mais gerais, principalmente aqueles que serão utilizados posteriormente nos demais capítulos. Para um estudo mais detalhado da teoria pode-se consultar Boyer e de la Peña [1, 2].

A Eletrodinânica Clássica apresenta uma abordagem teórica para descrever partículas e campos eletromagnéticos clássicos em interação. Ela utiliza os seguintes elementos:

- *Equações de movimento* para as partículas clássicas, sujeitas à atuação dos campos eletromagnéticos. Normalmente utilizam-se as leis do movimento de Newton, mas em uma abordagem manifestamente covariante pode-se utilizar as equações relativísticas apropriadas;
- *Equações de Maxwell* para os campos eletromagnéticos;

- *Condições de contorno* para as soluções das Equações de Maxwell.

A equação de movimento não-relativística para partículas clássicas é dada por

$$m\ddot{\vec{r}} = e\vec{E} + \frac{e}{c}\dot{\vec{r}} \times \vec{B} + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dddot{\vec{r}}. \tag{1.1}$$

Os dois primeiros termos do segundo membro correspondem à força de Lorentz e o terceiro termo é a força de reação da radiação, que surge como conseqüência de a partícula ser carregada e emitir energia e momento na forma de radiação. Existe uma grande quantidade de publicações a respeito da reação da radiação, tanto no contexto da Eletrodinâmica Clássica quanto da Eletrodinâmica Quântica. Ela está relacionada com diversas dificuldades teóricas que fogem ao escopo desse trabalho. Um resumo sobre o tema, bem como diversas referências, podem ser encontrados em [3]. No capítulo 4 alguns aspectos relacionados com a reação da radiação serão considerados.

As soluções das Equações de Maxwell podem ser expressas, como é usual, em termos dos potenciais $\phi(\vec{r},t)$ e $\vec{A}(\vec{r},t)$. Os campos elétrico e magnético são, então, escritos como:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \tag{1.2}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{1.3}$$

Em uma abordagem não-relativística pode-se utilizar o Calibre de Coulomb, caso em que as Equações de Maxwell levam às seguintes equações para os potenciais $\phi(\vec{r},t)$ e $\vec{A}(\vec{r},t)$:

$$\vec{\nabla}^2\phi = -4\pi\rho\,; \quad \text{com} \quad \lim_{r\to\infty}\phi(\vec{r},t) = 0 \tag{1.4}$$

$$\vec{\nabla}^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}_\perp\,; \quad \text{e} \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0. \tag{1.5}$$

O termo $\vec{J}_\perp$ é a parte transversal do vetor $\vec{J}$. Uma apresentação detalhada das sutilezas, vantagens e limitações da utilização da decomposição dos campos em parte transversal e longitudinal pode ser encontrada em [4]. As soluções de (1.4) e (1.5) podem ser expressas como:

$$\phi(\vec{r},t) = \int \frac{\rho(\vec{r}\,',t)}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3\vec{r}\,' \tag{1.6}$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0(\vec{r},t) + \int \frac{\vec{J}_\perp(\vec{r}\,',t')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\delta\left(t'-t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right)dt'\,d^3\vec{r}\,' \tag{1.7}$$

Na Eletrodinâmica Clássica tradicional faz-se a hipótese de que a parte homogênea da solução (1.7) é nula, o que significa que não existe campo sem que ele tenha sido originado de alguma fonte. No entanto a Eletrodinâmica Estocástica tem como principal hipótese o não anulamento desse termo, $\vec{A}_0 \neq 0$, fato que não viola as leis da Eletrodinâmica Clássica tradicional.

Mais precisamente, a Eletrodinâmica Estocástica supõe a existência de campos eletromagnéticos clássicos, estocásticos, independentes da temperatura, denominados *radiação de ponto-zero*. As principais propriedades físicas da radiação de ponto-zero são:

- Independência de suas características com a posição e direção do espaço (*homogeneidade* e *isotropia*);
- Independência da temperatura (motivo pelo qual é chamada radiação de ponto-zero);

- *Invariância* por transformação de Lorentz.

As propriedades de homogeneidade, isotropia, independência da temperatura e invariância são necessárias para que esse campo de radiação esteja universalmente presente, sempre com as mesmas características, em qualquer referencial. Uma demonstração resumida e simples da invariância de Lorentz da radiação de ponto-zero pode ser encontrada no trabalho de Boyer de 1975 [1].

A independência da radiação de ponto-zero com respeito à temperatura é necessária para que suas características *não* dependam do estabelecimento de um equilíbrio com a matéria, como ocorre com a radiação térmica de Planck. Na verdade, se houver radiação em equilíbrio com uma cavidade na temperatura T, qualquer variação infinitesimal quasi-estática desse volume, δV, corresponde a uma variação na densidade espectral total da radiação, $\delta\rho(\omega, T)$, dada por [5]

$$\delta\rho(\omega, T) = \left[\rho(\omega, T) - \frac{\omega}{3}\frac{\partial\rho(\omega, T)}{\partial\omega}\right]\delta V. \tag{1.8}$$

Essa é a Lei de Deslocamento de Wien. A parcela da densidade espectral $\rho(\omega, T)$ correspondente à radiação de ponto-zero dá contribuição nula para o termo entre colchetes da expressão acima. A radiação de ponto-zero é independente do tamanho, do estado de movimento e de variações de volume dessa cavidade.

Um modelo muito usado para representar essa radiação corresponde a uma superposição de infinitos modos de oscilação (ondas planas), fases aleatórias e independentes, como apresentado a seguir

$$\vec{A}_0(\vec{r}, t) = \mathrm{Re}\sum_{\alpha=1}^{2}\int d^3\vec{k}\,\frac{c}{i\omega}\,\mathfrak{h}(k)\,\hat{\epsilon}(\vec{k}, \alpha)\,a(\vec{k}, \alpha)e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \tag{1.9}$$

O vetor $\vec{k}$ tem a direção e sentido de propagação da onda plana componente à que se refere, na qual $\omega = |\vec{k}|c$. $\vec{\epsilon}(\vec{k},\alpha)$ são vetores de polarização e α é um índice que pode assumir os valores 1 e 2, correspondente a duas direções de polarização. Todos esses elementos estão relacionados pelas propriedades:

$$\vec{k}\cdot\hat{\epsilon}(\vec{k},\alpha) = 0\,, \tag{1.10}$$

$$\hat{\epsilon}(\vec{k},\alpha)\cdot\hat{\epsilon}(\vec{k},\alpha') = \delta_{\alpha\alpha'}\,, \tag{1.11}$$

$$\frac{k_i k_j}{k^2} + \sum_{\alpha=1}^{2}\epsilon_i(\vec{k},\alpha)\epsilon_j(\vec{k},\alpha) = \delta_{ij}. \tag{1.12}$$

Essas expressões representam o fato de $\vec{k}/k$, $\vec{\epsilon}(\vec{k},1)$ e $\vec{\epsilon}(\vec{k},2)$ formarem uma base ortonormal no espaço $\mathbb{R}^3$. Os $a(\vec{k},\alpha)$ são números complexos aleatórios de módulo unitário. Eles podem ser escritos a partir de fases aleatórias, $\theta(\vec{k},\alpha)$, uniformemente distribuídas entre 0 e 2π:

$$a(\vec{k},\alpha) \equiv e^{i\theta(\vec{k},\alpha)}. \tag{1.13}$$

É importante notar que existe um valor aleatório de θ para cada onda plana caracterizada por $\vec{k}$ e α. As fases aleatórias para $\vec{k}$'s e α's distintos são estatisticamente independentes entre si. Assim, algumas propriedades muito úteis nos cálculos da Eletrodinâmica Estocástica são

$$\langle a^*(\vec{k},\alpha)\,a(\vec{k}',\alpha')\rangle = \langle e^{-i\theta(\vec{k},\alpha)}e^{i\theta(\vec{k}',\alpha')}\rangle = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\alpha\alpha'}\,, \tag{1.14}$$

$$\langle a(\vec{k},\alpha)\,a(\vec{k}',\alpha')\rangle = \langle e^{i\theta(\vec{k},\alpha)}e^{i\theta(\vec{k}',\alpha')}\rangle = 0 \text{ e} \tag{1.15}$$

$$\langle a^*(\vec{k},\alpha)\,a^*(\vec{k}',\alpha')\rangle = \langle e^{-i\theta(\vec{k},\alpha)}e^{-i\theta(\vec{k}',\alpha')}\rangle = 0\,. \tag{1.16}$$

Nessas expressões, os colchetes angulares representam médias nas fases aleatórias. Na Eletrodinâmica Quântica os números complexos aleatórios

$a(\vec{k},\alpha)$ são substituídos por operadores de criação e aniquilação dos quanta do campo eletromagnético, $a(\vec{k},\alpha)$ e $a^\dagger(\vec{k},\alpha)$, e as propriedades estatísticas acima são substituídas pelas relações de comutação:

$$\begin{aligned}
\left[a(\vec{k},\alpha), a^\dagger(\vec{k}',\alpha')\right] &= \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\delta_{\alpha\alpha'}\,, \\
\left[a(\vec{k},\alpha),\, a(\vec{k}',\alpha')\right] &= 0\,, \quad \text{e} \\
\left[a^\dagger(\vec{k},\alpha), a^\dagger(\vec{k}',\alpha)'\right] &= 0\,.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

O termo $\frac{c}{i\omega}\mathfrak{h}(k)$ é a amplitude de cada onda plana componente de $\vec{A}_0$ e depende apenas do módulo de $\vec{k}$. O fator $\frac{c}{i\omega}$ é usado para simplificar a notação ao se escrever os campos de ponto-zero $\vec{E}_{PZ}$ e $\vec{B}_{PZ}$, usando (1.2) e (1.3):

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{PZ}(\vec{r},t) &= \mathrm{Re}\sum_{\alpha=1}^{2}\int d^3k\;\hat{\epsilon}(\vec{k},\alpha)\,\mathfrak{h}(k)\,\left[a(\vec{k},\alpha)e^{-i\omega t+i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right] \\
&\quad \text{e} \\
\vec{B}_{PZ}(\vec{r},t) &= \mathrm{Re}\sum_{\alpha=1}^{2}\int d^3k\,\frac{\vec{k}\times\hat{\epsilon}(\vec{k},\alpha)}{k}\,\mathfrak{h}(k)\,\left[a(\vec{k},\alpha)e^{-i\omega t+i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right].
\end{aligned} \tag{1.18}$$

A expressão para a densidade média de energia dos campos da radiação de ponto-zero (média nas fases aleatórias $\theta(\vec{k},\alpha)$) pode ser escrita em termos de $\mathfrak{h}(k)$ ou, o que é equivalente, $\mathfrak{h}(\omega)$:

$$\frac{1}{8\pi}\langle\vec{E}_{PZ}^{\,2}+\vec{B}_{PZ}^{\,2}\rangle = \frac{1}{8\pi}\sum_{\alpha=1}^{2}\int d^3k\mathfrak{h}^2(\omega) = \int_0^\infty d\omega\,\underbrace{\frac{\omega^2}{c^3}\mathfrak{h}^2(\omega)}_{\rho_{PZ}(\omega)}\,, \tag{1.19}$$

na qual foram utilizadas (1.10)–(1.16) e (1.18). O integrando do último membro de (1.19) pode ser identificado com a densidade espectral de energia da radiação de ponto-zero,

$$\rho_{PZ}(\omega) \equiv \frac{\omega^2}{\pi^2\, c^3}\, \pi^2 \mathfrak{h}^2(\omega). \tag{1.20}$$

Como $\omega^2/\pi^2\, c^3$ é a densidade de modos normais de oscilação do campo eletromagnético de freqüência angular entre ω e $\omega + d\omega$, o termo $\pi^2\mathfrak{h}^2(\omega)$ é a energia por modo normal de oscilação do campo da radiação de ponto-zero. Na Eletrodinâmica Estocástica, assim como na Eletrodinâmica Quântica, faz-se a energia de cada modo igual a $\hbar\omega/2$. Esse é o único modo pelo qual a constante de Planck, $h = 2\pi\hbar$, entra nos cálculos da Eletrodinâmica Estocástica. Muito de seu desenvolvimento teórico visa evidenciar a participação que a radiação de ponto-zero tem nos fenômenos físicos. Assim, sempre que um resultado da Eletrodinâmica Estocástica é obtido, sabe-se que a origem de h só pode ser da radiação de ponto-zero.

Pode-se mostrar que a única possibilidade para a radiação de ponto-zero respeitar as propriedades de homogeneidade, isotropia, independência da temperatura e invariância de Lorentz é possuindo a densidade espectral proporcional a ω^3. Apenas sua intensidade, representada por $\hbar$, é deixada para ser determinada experimentalmente e verifica-se que ela deve coincidir com o valor também utilizado pela Eletrodinâmica Quântica. Assim tem-se de (1.20):

$$\rho_{PZ}(\omega) \equiv \frac{\omega^2}{\pi^2\, c^3} \left(\frac{\hbar\,\omega}{2}\right). \tag{1.21}$$

O termo entre parênteses é a energia por modo normal de oscilação do campo. A dependência de $\rho_{PZ}(\omega)$ com ω^3 torna a integral em (1.19) divergente, um inconveniente também presente na Eletrodinâmica Quântica. No entanto, em geral os sistemas estudados pela Eletrodinâmica Estocástica não envolvem freqüências muito altas, de modo que o intervalo integrado em freqüências maiores que uma freqüência de corte, ω_{max}, não contribui para

as propriedades dos sistemas estudados.

Além das propriedades já citadas, a radiação de ponto-zero descrita pela Eletrodinâmica Estocástica dá origem a certos fenômenos que sempre foram considerados de domínio exclusivo da Mecânica Quântica, como o oscilador harmônico [2]; a radiação de corpo negro [6]; a lei de Debye para o calor específico de sólidos [7]; o paramagnetismo na matéria [8, 9]; forças de van der Waals [10] e outros. Nesse trabalho serão apresentados mais alguns resultados. Na análise desses sistemas físicos, a constante de Planck provém exclusivamente da radiação de ponto-zero.

É usual descrever sistemas em interação com a radiação de ponto-zero adicionada à radiação térmica para incluir efeitos da temperatura. Nesse caso, usa-se a mesma descrição da superposição em ondas planas com fases aleatórias, mas escreve-se a seguinte expressão $\rho(\omega, T)$ no lugar de (1.21).

$$\begin{aligned} \rho(\omega, T) &= \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\left[\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}\right] \\ &= \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3}\underbrace{\frac{\hbar\omega}{2}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)}_{\pi^2\mathfrak{h}^2(\omega,T)}. \end{aligned} \tag{1.22}$$

A densidade espectral da energia da radiação de ponto-zero corresponde à parcela independente da temperatura nessa expressão e a parcela dependente de T é a densidade espectral da energia da radiação de corpo negro de Planck (k_B é a constante de Boltzmann). Pode-se observar que, nesse caso, as amplitudes $\mathfrak{h}(\omega)$ de (1.20) ficam modificadas pela expressão correspondente

$$\rho(\omega, T) \equiv \frac{\omega^2}{\pi^2\, c^3}\,\pi^2\mathfrak{h}^2(\omega, T). \tag{1.23}$$

O acréscimo da radiação térmica de Planck não é uma hipótese adicional da

teoria, mas pode ser obtida a partir do estudo do equilíbrio entre a radiação de ponto-zero e a matéria [6].

Assim, os campos flutuantes de ponto-zero, acrescidos da parte térmica, serão denominados campos do vácuo e escritos analogamente a (1.18):

$$\vec{E}_V(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\sum_{\alpha=1}^{2}\int d^3k\ \hat{\epsilon}(\vec{k},\alpha)\,\mathfrak{h}(k,T)\left[a(\vec{k},\alpha)e^{-i\omega t+i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right] \tag{1.24}$$

e

$$\vec{B}_V(\vec{r},t) = \mathrm{Re}\sum_{\alpha=1}^{2}\int d^3k\,\frac{\vec{k}\times\hat{\epsilon}(\vec{k},\alpha)}{k}\,\mathfrak{h}(k,T)\left[a(\vec{k},\alpha)e^{-i\omega t+i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right], \tag{1.25}$$

nas quais (1.10)–(1.16) continuam válidas e podem ser utilizadas para a obtenção das propriedades estatísticas dos campos do vácuo (1.24) e (1.25). Algumas delas são:

$$\langle E_i(\vec{r},t)\rangle = \langle B_i(\vec{r},t)\rangle = 0\,; \tag{1.26}$$

$$\begin{aligned}\langle E_i(\vec{r},t)E_j(\vec{r'},t')\rangle &= \langle B_i(\vec{r},t)B_j(\vec{r'},t')\rangle = \\ &= \frac{4\pi}{3}\,\delta_{ij}\int_0^\infty \rho(\omega,T)\,cos\omega\left(t-t'-\frac{|\vec{r}-\vec{r'}|}{c}\right)d\omega\,.\end{aligned} \tag{1.27}$$

Nessas expressões, os colchetes angulares $\langle\ \rangle$, assim como no restante desse trabalho, representam médias nas fases aleatórias $\theta(\vec{k},\alpha)$ (também denominadas médias nas flutuações ou no *ensemble*). Essas propriedades estatísticas dos campos do vácuo são essenciais nos resultados da Eletrodinâmica Estocástica, inclusive no desenvolvimento dos resultados apresentados nesse trabalho.

Capítulo 2

Ruído radiativo no indutor de circuitos simples

2.1 O Ruído de Nyquist-Johnson

No início do século XX era de conhecimento dos físicos que trabalhavam com eletrônica de tubos a vácuo, a presença inevitável de ruídos nas correntes elétricas dos circuitos. Uma das origens desse ruído foi associada à natureza quantizada da carga elétrica (*shot noise*), que atingia o anodo do tubo em instantes aleatórios, transferindo uma quantidade indivisível de carga por vez. Um ruído de outra origem foi atribuído à agitação térmica das cargas livres contidas em um condutor em equilíbrio térmico, produzindo uma força eletromotriz flutuante no circuito. Este último ruído eletrônico na voltagem foi observado somente em 1928 por Johnson [11]. Ao mesmo tempo, Nyquist apresentou um modelamento teórico para ele, que ficou conhecido como ruído de Nyquist-Johnson, e calculou a sua distribuição espectral [12], cuja expressão pode ser escrita como

$$S_N(\omega, T) = \frac{R_{ohm}(\omega, T)}{\pi} k_B T. \tag{2.1}$$

k_B é a constante de Boltzmann. A dependência da resistência ôhmica do circuito, $R_{ohm}(\omega, T)$, com a freqüência de oscilação da corrente elétrica deve-se ao efeito pelicular (*skin effect*), que ocorre devido à interação desta com o campo magnético gerado por ela mesma e produz uma força magnética que tende a manter o fluxo de cargas próximo à superfície do condutor (veja, por exemplo, o capítulo 8 de J. P. Jackson [39] ou o capítulo 5 de J. I. Cisneros [22]). No apêndice A apresenta-se mais alguns detalhes sobre a densidade espectral de uma grandeza flutuante.

Muitos anos depois dos trabalhos de Nyquist e Johnson, Callen e Welton apresentaram uma versão mais geral do desenvolvimento teórico de Nyquist, conhecida como *Teorema Flutuação-dissipação* [13], que estabelece uma relação genérica entre as forças flutuantes em sistemas lineares com a força dissipativa que inevitavelmente as acompanha. Esses autores dão um tratamento quântico aos seus cálculos, permitindo uma generalização para o resultado clássico de Nyquist, obtendo-se a seguinte densidade espectral do ruído na voltagem:

$$\begin{aligned} S_N(\omega, T) &= \frac{R_{ohm}(\omega, T)}{\pi} \frac{\hbar\omega}{2} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \\ &= \frac{R_{ohm}(\omega, T)}{\pi} \left[\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}\right]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Essa expressão resulta da substituição do termo $k_B T$ em (2.1) pelo termo correspondente à energia média de um oscilador harmônico quântico em equilíbrio térmico com o ambiente, incluindo o termo de energia de ponto-zero $\hbar\omega/2$, independente da temperatura. Essa expressão coincide com (2.1)

em altas temperaturas ou baixas freqüências ($\hbar\omega/k_BT \to 0$).

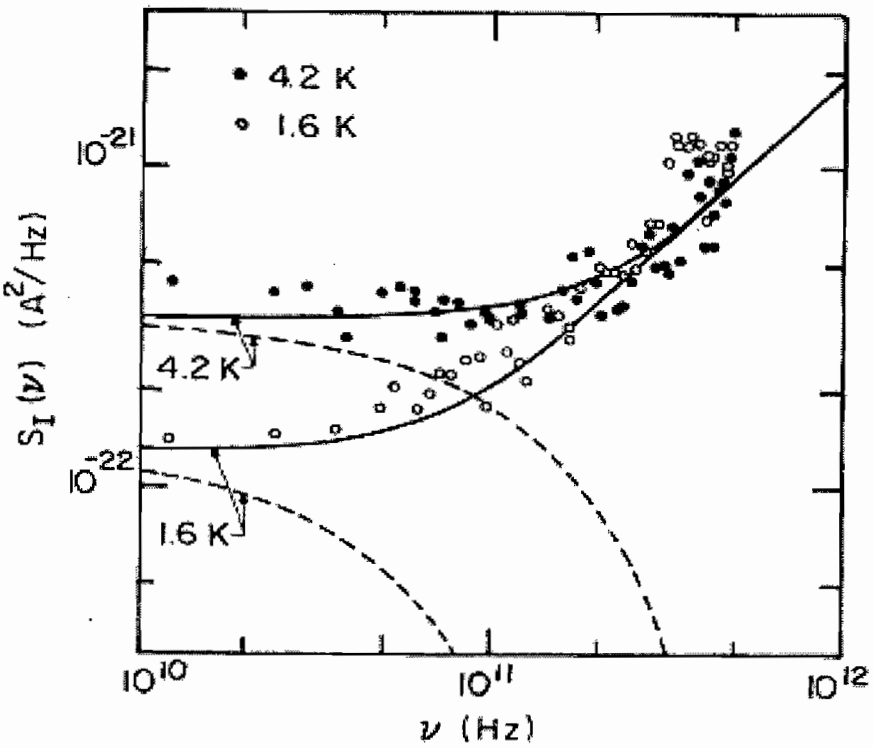

Figura 2.1: Distribuição espectral da corrente medida no resistor, $S_I(\nu, T)$, em função da freqüência $\nu = \omega/2\pi$ para dois valores de temperatura $T = 4,2$ K (círculos cheios) e $T = 1,6$ K (círculos vazios). A linha contínua é a previsão teórica (2.3). A linha tracejada é $\frac{4h\nu}{R_{ohm}}\left[\frac{h\nu}{e^{h\nu/k_BT}-1}\right]$. A figura é extraída de [16].

Observa-se que $S_N(\omega, T)$ em (2.2) é uma função crescente da freqüência ω devido à presença da energia de ponto-zero. Em 1980 Koch *et al.* realizaram alguns experimentos e os seus resultados confirmam a presença do termo de ponto-zero em $S_N(\omega, T)$ [15, 16, 17]. Seus resultados podem ser observados na figura 2.1. Nessa figura está representada a densidade espectral da corrente elétrica $S_I(\nu, T)$ como função da freqüência $\nu = \omega/2\pi$, ao invés da densidade espectral da força eletromotriz $S_N(\omega, T)$:

$$
\begin{aligned}
S_I(\nu, T) &= \frac{2h\nu}{R_{ohm}} \coth\left(\frac{h\nu}{2k_B T}\right) \\
&= \frac{4h\nu}{R_{ohm}} \left[\frac{h\nu}{2} + \frac{h\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}\right]. \qquad (2.3)
\end{aligned}
$$

2.2 O Ruído Radiativo

Nessa seção, uma das predições dos trabalhos de Callen e Welton [13] são verificadas em um sistema físico particular: um solenóide retilíneo sujeito aos campos eletromagnéticos flutuantes do vácuo (térmico e de ponto-zero). Dois tipos de aproximações são feitas. Primeiro, a capacitância do solenóide é desprezada, levando-se em conta apenas seu efeito indutivo. Segundo, apenas os comprimentos de onda grandes em comparação com as dimensões do sistema são levados em conta, ou seja, considerando $\mathcal{L}$ a maior dimensão associada ao sistema,

$$
\lambda \gg \mathcal{L} \quad \text{ou} \quad \omega \ll \frac{2\pi c}{\mathcal{L}}. \qquad (2.4)
$$

Uma diferença desse trabalho em relação aos de Callen e Welton [13] é a utilização de uma abordagem de acordo com a Eletrodinâmica Estocástica, na qual os cálculos são realizados no contexto da física clássica e os campos de radiação de ponto-zero são levados em conta (veja capítulo 1).

O sistema a ser estudado é formado por um solenóide retilíneo de comprimento l, constituído por N espiras de raio a ($a \ll l$) feitas de um fio de raio

b. Seu eixo é disposto ao longo da direção do eixo z. Ele apresenta resistência elétrica ôhmica R_{ohm} e indutância L. A sua capacitância é desprezada nesses cálculos.

Mesmo que o solenóide esteja desligado de baterias há flutuações da voltagem e na corrente associadas à resistência ôhmica do fio (ruído de Nyquist-Johnson), medidas por Johnson, Koch *et al.* [11, 15, 16, 17] e estudadas teoricamente por Nyquist, Callen e Welton [12, 13]. A densidade espectral dessa força eletromotriz flutuante é dada pela expressão (2.2).

A dissipação de energia relacionada com o ruído de Nyquist-Johnson é levada em conta por meio do da resistência ôhmica. No entanto, se houver emissão de radiação pelo solenóide devido à presença de uma corrente elétrica flutuante, outra forma de dissipação de energia deve estar presente no circuito e é levada em conta por meio da *resistência radiativa*, que se adiciona à resistência ôhmica. Se as condições (2.4) forem satisfeitas, a resistência radiativa associada ao solenóide, R_{rad}, é definida pela expressão

$$P(\omega) = \frac{\omega^4}{3c^3}|\tilde{\vec{\mu}}(\omega)|^2 = \frac{1}{2}R_{rad}(\omega)\tilde{I}^2(\omega) \tag{2.5}$$

$\tilde{I}(\omega)$ é a transformada de Fourier da corrente elétrica no circuito $I(t)$. $P(\omega)$ é a potência de Larmor no intervalo entre ω e $\omega + d\omega$ associada à emissão de radiação pelo solenóide, que é aproximado por um dipolo magnético $\vec{\mu}(t)$:

$$\vec{\mu}(t) = \frac{\pi N a^2}{c} I(t)\hat{\mu} \tag{2.6}$$

Na qual $\hat{\mu} = \frac{\vec{\mu}}{|\vec{\mu}|}$. A transformada de Fourier $\tilde{\vec{\mu}}(\omega)$ de $\vec{\mu}(t)$ é dada por:

$$\tilde{\vec{\mu}}(\omega) = \frac{\pi N a^2}{c}\, \tilde{I}(\omega)\, \hat{\mu}. \tag{2.7}$$

Utilizando (2.7) em (2.5), obtém-se a seguinte expressão para a resistência radiativa:

$$R_{rad}(\omega) = \frac{2\pi^2 N^2}{3c}\left(\frac{a\omega}{c}\right)^4. \tag{2.8}$$

Assim, pode-se representar a resistência elétrica total do solenóide por:

$$R_{sol}(\omega, T) = R_{ohm}(\omega, T) + R_{rad}(\omega). \tag{2.9}$$

Pelo *Teorema Flutuação-dissipação*, espera-se que aja no solenóide uma força eletromotriz flutuante adicional àquela de Nyquist-Johnson, relacionada com essa outra forma de dissipação.

Os campos magnéticos de radiação do vácuo, $\vec{B}_V$, de origem térmica e de ponto-zero, são os responsáveis pelo aparecimento dessa força eletromotriz flutuante adicional no solenóide, a qual será denominada *ruído magnético*. Esses campos magnéticos $\vec{B}_V$ são descritos no capítulo 1 pela fórmula (1.25).

Será considerada uma aproximação de ondas longas (2.4), na qual o campo magnético agindo sobre o solenóide é independente da posição. A Lei de Faraday permite determinar a força eletromotriz induzida no solenóide pelos campos flutuantes do vácuo $\vec{B}_V(t)$:

$$\varepsilon_B(t) = -\frac{\pi a^2 N}{c}\frac{\partial B_{Vz}(t)}{\partial t}. \tag{2.10}$$

Foi desprezado o efeito da configuração helicoidal das espiras, considerando-as circulares. Utilizando-se as expressões para os campos $\vec{B}_V$ em (1.25) e desprezando nelas o termo $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$, devido à aproximação de ondas longas, obtém-se

$$\varepsilon_B(t) = \frac{\pi a^2 N}{c} \mathrm{Re} \sum_{\alpha=1}^{2} \int d^3k \; i\omega \, \mathfrak{h}(k,T) \, \hat{\mu} \cdot \frac{\vec{k} \times \hat{\epsilon}(\vec{k},\alpha)}{k} \, e^{-i\omega t + i\theta(\vec{k},\alpha)}. \tag{2.11}$$

Essa força eletromotriz, ε_B, também possui média nula, $\langle \varepsilon_B \rangle = 0$, e seu espectro pode ser determinado a partir das expressões (1.10)–(1.16), das quais se obtém

$$\begin{aligned} S_{\varepsilon_B}(\omega,T) &= \left(\frac{\pi a^2 N}{c}\right)^2 \omega^2 S_B(\omega,T) \\ &= \frac{1}{\pi} \underbrace{\frac{2\pi^2 N^2}{3c} \left(\frac{a\omega}{c}\right)^4}_{R_{rad}(\omega)} \frac{\hbar\omega}{2} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Utilizando a expressão (2.8), pode-se identificar um fator idêntico à resistência radiativa em (2.12), permitindo escrever essa expressão de forma similar à fórmula de Nyquist-Johnson (2.2):

$$\begin{aligned} S_{\varepsilon_B}(\omega,T) &= \frac{R_{rad}(\omega)}{\pi} \frac{\hbar\omega}{2} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \\ &= \frac{R_{rad}(\omega)}{\pi} \left[\frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}\right]. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Pode-se, agora, estabelecer uma *relação de flutuação-dissipação* associada à resistência total, ôhmica e radiativa. Inicialmente denota-se a f.e.m. flutuante total agindo no circuito por

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_N(t) + \varepsilon_B(t). \tag{2.14}$$

$\varepsilon_N(t)$ e $\varepsilon_B(t)$ são estatisticamente independentes devido às suas origens distintas. O ruído de Nyquist-Johnson tem origem na resistência ôhmica do fio

condutor. O ruído magnético, apesar de também agir no fio, é gerado pelo campo magnético do vácuo, $\vec{B}_V$, que atua no indutor. Assim,

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(t) \rangle = \langle \varepsilon_N(t) \rangle + \langle \varepsilon_B(t) \rangle &= 0 \\ \text{e} & \\ \langle \varepsilon_N(t)\, \varepsilon_B(t) \rangle &= 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Conseqüentemente, a partir de (2.14), (2.2) e (2.12), a distribuição espectral da f.e.m. total do solenóide fica

$$S_\varepsilon(\omega, T) = \left[R_{ohm}(\omega, T) + \underbrace{\frac{2\pi^2 N^2}{3c} \left(\frac{a\omega}{c} \right)^4}_{R_{rad}(\omega)} \right] \frac{\hbar\omega}{2\pi} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right), \tag{2.16}$$

a qual é válida para ondas longas $\omega \ll 2\pi c/\mathcal{L}$.

Levando-se em conta (2.8) e (2.9), essa é a expressão do *Teorema Flutuação dissipação* total do solenóide, que relaciona o ruído de Nyquist-Johnson e o ruído magnético com seus respectivos efeitos dissipativos: a resistência ôhmica e a resistência radiativa. Essa nova interligação entre flutuação e dissipação emerge naturalmente da inclusão da atuação dos campos da radiação do vácuo, térmica e de ponto-zero no solenóide.

2.3 Propriedades de equilíbrio de um circuito sujeito ao Ruído Radiativo

Nessa seção, o solenóide sujeito ao ruído radiativo será considerado como fazendo parte de um circuito RLC sem baterias e as propriedades estatísticas das grandezas relevantes serão estudadas. Esse sistema apresenta interesse por dois motivos. Primeiro, todo circuito real apresenta resistência, indutância e capacitância. Segundo, a prova de Ginzburg para a expressão do ruído de Nyquist-Johnson (2.2) faz uso da energia média para um circuito RLC em equilíbrio térmico no limite de resistência pequena, caso em que o circuito comporta-se como um oscilador harmônico [18]. Portanto, para que haja coerência na superposição do ruído de Nyquist-Johnson com o ruído radiativo, este não deve alterar o valor para a energia média do circuito RLC.

Ainda considera-se válida a aproximação (2.4) e a corrente elétrica $I(t)$ assume, então, o mesmo valor em todos os pontos do circuito. Assim, equação para a transformada de Fourier de $I(t)$ é dada por:

$$-i\,\omega\,L\tilde{I}(\omega) + R_c(\omega,T)\tilde{I}(\omega) + \frac{i}{\omega C}\,\tilde{I}(\omega) = \underbrace{\tilde{\varepsilon}_N(\omega) + \tilde{\varepsilon}_B(\omega)}_{\tilde{\varepsilon}(\omega)}, \tag{2.17}$$

na qual i é a unidade imaginária e a transformada de Fourier é definida por:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega)\, e^{-i\,\omega t}\, d\omega. \tag{2.18}$$

A equação (2.17) fornece a expressão usual para a impedância do circuito,

$$Z(\omega) = R_c(\omega,T) - i(\omega L - \frac{1}{\omega C}), \tag{2.19}$$

na qual L é a indutância e C a capacitância. A resistência total do circuito, R_c, inclui a resistência radiativa, R_{rad}, apresentada na seção anterior:

$$R_c(\omega, T) = R_{ohm}(\omega, T) + R_{rad}(\omega, T). \tag{2.20}$$

Nessa expressão R_{ohm} é a resistência ôhmica total do circuito, que tem contribuição do fio condutor do solenóide e dos demais componentes do circuito.

A partir das (2.17)–(2.20), juntamente com a fórmula (A.13) do Apêndice, pode-se determinar a densidade espectral da corrente flutuante $I(t)$ e da carga $q(t)$ no capacitor:

$$S_I(\omega, T) = \frac{S_\varepsilon(\omega, T)}{|Z(\omega)|^2} \tag{2.21}$$

e

$$S_q(\omega, T) = \frac{S_\varepsilon(\omega, T)}{\omega^2 |Z(\omega)|^2}. \tag{2.22}$$

A densidade espectral $S_\varepsilon(\omega, T)$ é dada pela equação (2.16). Nota-se que as flutuações na corrente elétrica apresentam contribuições do ruído de Nyquist-Johnson e do ruído radiativo.

No circuito RLC, a energia média (média nas flutuações da f.e.m. e da corrente), armazenada no conjunto capacitor-indutor, é dada pela expressão:

$$\langle U \rangle = \frac{1}{2} L \langle I^2(t) \rangle + \frac{1}{2} \frac{\langle q^2(t) \rangle}{C}. \tag{2.23}$$

Utilizando as expressões (2.21) e (2.22), juntamente com a fórmula (A.12) do teorema de Wiener-Khintchine, $\langle U \rangle$ fica:

$$
\begin{aligned}
\langle U \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\frac{L}{2} S_I(\omega, T) + \frac{1}{2C} S_q(\omega, T) \right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\frac{L}{2} \frac{S_\varepsilon(\omega, T)}{|Z(\omega)|^2} + \frac{1}{2C} \frac{S_\varepsilon(\omega, T)}{\omega^2 |Z(\omega)|^2} \right] \\
&= L \int_0^{\omega_{max}} d\omega \left[\frac{S_\varepsilon(\omega, T) C^2 \omega^2}{\omega^2 C^2 R_c^2(\omega, T) + (\omega^2/\Omega^2 - 1)^2} \right] + \\
&+ \frac{1}{C} \int_0^{\omega_{max}} d\omega \left[\frac{S_\varepsilon(\omega, T) C^2}{\omega^2 C^2 R_c^2(\omega, T) + (\omega^2/\Omega^2 - 1)^2} \right]. \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

$\Omega = (LC)^{-1/2}$ é a freqüência característica do circuito e $\omega_{max} = 2\pi c/\mathcal{L} \gg \Omega$.

Procedendo como Ginzburg [18], a expressão acima pode ser calculada na condição em que a resistência R_c é pequena:

$$
\frac{R_c(\omega, T)}{L\,\Omega} \equiv C\,\Omega\,R_c(\omega, T) \ll 1. \qquad (2.25)
$$

Essa condição pode ser atingida em temperaturas baixas, na qual $R_{ohm} \to 0$. Além disso, nesta situação os integrandos acima apresentam um "pico" acentuado em $\omega = \Omega$, permitindo aproximá-lo por um delta de Dirac [18], obtendo-se

$$
\langle U \rangle \approx \pi \frac{S_\varepsilon(\omega, T)}{R_c(\omega, T)} \equiv \frac{\hbar\,\Omega}{2} + \frac{\hbar\,\Omega}{e^{\hbar\Omega/k_B T} - 1}. \qquad (2.26)
$$

Esse resultado corresponde ao valor médio da energia associada à um oscilador harmônico quântico em equilíbrio com a radiação de Planck e é uma das pré-condições usadas por Ginzburg na dedução da densidade espectral do ruído de Nyquist-Johnson [18]. O resultado (2.26) é exato no limite $R_c \to 0$, uma condição também usada no cálculo de Ginzburg.

2.4 A Radiação emitida pelo solenóide sujeito ao Ruído Radiativo

Nas seções 2.1 e 2.2, supôs-se que um circuito RLC está sujeito à dois tipos de ruído estatisticamente independentes. Um é o ruído de Nyquist-Johnson, originado na resistência ôhmica total do circuito. Outro, denominado ruído magnético ou ruído radiativo, tem origem na influência que os campos magnéticos flutuantes do vácuo (tanto a parte térmica quanto a de ponto-zero) exercem sobre o indutor do circuito. A densidade espectral da força eletromotriz flutuante sujeita à esses dois ruídos é a fórmula (2.16):

$$S_\varepsilon(\omega, T) = \frac{R_c(\omega, T)}{\pi} \frac{\hbar\omega}{2} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right). \tag{2.27}$$

A resistência radiativa R_{rad} é dada pela expressão (2.8), obtida no desenvolvimento da seção 2.1.

Nessa seção, calculam-se os campos de radiação gerados pelo solenóide sujeito ao ruído de Nyquist-Johnson e ao ruído radiativo. Aproxima-se o solenóide (de raio a e N espiras) por um dipolo magnético $\vec{\mu}$, dado por

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c} \int \vec{r} \times \vec{J} d^3r, \tag{2.28}$$

na qual $\vec{J}$ é a densidade de corrente nas espiras. Escrevendo a corrente flutuante total no solenóide como a soma de duas correntes $I_N(t)$ e $I_B(t)$, originadas dos dois tipos de ruídos considerados, $\vec{\mu}$ fica escrito como

$$\vec{\mu} = \frac{\pi N a^2}{c} [I_B(t) + I_N(t)] \hat{\mu}. \tag{2.29}$$

O vetor unitário $\hat{\mu}$ dispõe-se na direção e sentido do eixo z, coincidente com

o eixo do solenóide. As correntes $I_N(t)$ e $I_B(t)$ são originadas das forças eletromotrizes flutuantes $\varepsilon_N(t)$ e $\varepsilon_B(t)$, respectivamente, e são representadas no espaço de freqüências pelas equações

$$\tilde{I}_N(\omega)Z(\omega) = \tilde{\varepsilon}_N(\omega) \tag{2.30}$$

e

$$\tilde{I}_B(\omega)Z(\omega) = \tilde{\varepsilon}_B(\omega). \tag{2.31}$$

$Z(\omega)$ é dada por (2.19), $\tilde{\varepsilon}_N(\omega)$, $\tilde{\varepsilon}_B(\omega)$, $\tilde{I}_N(\omega)$ e $\tilde{I}_B(\omega)$ são as transformadas de Fourier (veja (2.18)) de $\varepsilon_N(t)$, $\varepsilon_B(t)$, $I_N(t)$ e $I_B(t)$, respectivamente.

A expressão (2.29) pode ser escrita no espaço de freqüências:

$$\begin{aligned}\tilde{\vec{\mu}}(\omega) &= \frac{\pi N a^2}{c}\left[\tilde{I}_B(\omega) + \tilde{I}_N(\omega)\right]\hat{\mu} \\ &= \frac{\pi N a^2}{c}\,\frac{\left[\tilde{\varepsilon}_B(\omega) + \tilde{\varepsilon}_N(\omega)\right]}{Z(\omega)}\,\hat{\mu}\,. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Aproximando o solenóide por um dipolo magnético $\vec{\mu}$, os campos gerados por ele, $\vec{E}_{sol}$ e $\vec{B}_{sol}$, são dados pelas conhecidas expressões (veja capítulo 9 de Jackson, [39]):

$$\vec{E}_{sol}(\vec{r},t) = -2\int_0^\infty d\omega\, e^{i(kr-\omega t)}k^3\left[\frac{1}{kr} + \frac{i}{(kr)^2}\right]\hat{n}\times\tilde{\vec{\mu}}\,, \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}\vec{B}_{sol}(\vec{r},t) &= 2\int_0^\infty d\omega\, e^{i(kr-\omega t)}k^3 \\ &\left\{\frac{1}{kr}(\hat{n}\times\tilde{\vec{\mu}})\times\hat{n} + \left[\frac{1}{(kr)^3} - \frac{i}{(kr)^2}\right]\left[3\hat{n}(\hat{n}\cdot\tilde{\vec{\mu}}) - \tilde{\vec{\mu}}\right]\right\}\,. \end{aligned} \tag{2.34}$$

nas quais $k = \omega/c$ e $\hat{n} = \vec{r}/r$ é o vetor unitário na direção de observação.

Substituindo-se (2.32) em (2.33) e (2.34), os campos gerados por $I_N(t)$ e $I_B(t)$ podem ser expressos separadamente como:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{sol}(\vec{r},t) &= -2\frac{\pi N a^2}{c}\int_0^\infty d\omega\,\frac{\tilde{\varepsilon}_N(\omega)+\tilde{\varepsilon}_B(\omega)}{Z(\omega)}\,e^{-i\omega t}\vec{H} \qquad (2.35)\\ &= \underbrace{-2\frac{\pi N a^2}{c}\int_0^\infty d\omega\,\frac{\tilde{\varepsilon}_N(\omega)}{Z(\omega)}\,e^{-i\omega t}\vec{H}}_{\vec{E}_N}\underbrace{-2\frac{\pi N a^2}{c}\int_0^\infty d\omega\,\frac{\tilde{\varepsilon}_B(\omega)}{Z(\omega)}\,e^{-i\omega t}\vec{H}}_{\vec{E}_B},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\vec{B}_{sol}(\vec{r},t) &= 2\frac{\pi N a^2}{c}\int_0^\infty d\omega\,\frac{\tilde{\varepsilon}_N(\omega)+\tilde{\varepsilon}_B(\omega)}{Z(\omega)}\,e^{-i\omega t}\vec{G} \qquad (2.36)\\ &= \underbrace{2\frac{\pi N a^2}{c}\int_0^\infty d\omega\,\frac{\tilde{\varepsilon}_N(\omega)}{Z(\omega)}\,e^{-i\omega t}\vec{G}}_{\vec{B}_N}+\underbrace{2\frac{\pi N a^2}{c}\int_0^\infty d\omega\,\frac{\tilde{\varepsilon}_B(\omega)}{Z(\omega)}\,e^{-i\omega t}\vec{G}}_{\vec{B}_B}.\end{aligned}$$

Nessas expressões, a origem do sistema de coordenadas é o centro do solenóide. Utilizou-se a notação de Boyer [1], com

$$\vec{H} \equiv k^3 e^{ikr}\left[\frac{1}{kr}+\frac{i}{(kr)^2}\right]\hat{n}\times\hat{\mu}, \qquad (2.37)$$

e

$$\vec{G} \equiv k^3 e^{ikr}\left\{\frac{1}{kr}(\hat{n}\times\hat{\mu})\times\hat{n}+\left[\frac{1}{(kr)^3}-\frac{i}{(kr)^2}\right][3\hat{n}(\hat{n}\cdot\hat{\mu})-\hat{\mu}]\right\}. \qquad (2.38)$$

A partir da expressão (2.10) para o ruído magnético e da expressão (1.25) para o campo magnético da radiação do vácuo, $\vec{B}_V$, o campo eletromagnético gerado por $\tilde{\varepsilon}_B(\omega)$ pode ser escrito como:

$$\vec{E}_B(\vec{r},t) = -2\frac{\pi N a^2}{c}\int_0^\infty d\omega\,\frac{\tilde{\varepsilon}_B(\omega)}{Z(\omega)}\,e^{-i\omega t}\vec{H} \tag{2.39}$$

$$= -\left(\frac{\pi N a^2}{c}\right)^2 \sum_{\alpha=1}^{2}\int d^3k\; i\omega^2\frac{\mathfrak{h}(k,T)}{Z(\omega)}\,e^{-i\omega t+i\theta(\vec{k},\alpha)}\,[\hat{\mu}\cdot\vec{\epsilon}(\vec{k},\alpha)]\vec{H}$$

$$\vec{B}_B(\vec{r},t) = 2\frac{\pi N a^2}{c}\int_0^\infty d\omega\,\frac{\tilde{\varepsilon}_B(\omega)}{Z(\omega)}\,e^{-i\omega t}\vec{G} \tag{2.40}$$

$$= \left(\frac{\pi N a^2}{c}\right)^2 \sum_{\alpha=1}^{2}\int d^3k\; i\omega\frac{\mathfrak{h}(\vec{k},T)}{Z(\omega)}\,e^{-i\omega t+i\theta(\vec{k},\alpha)}\,[\hat{\mu}\cdot\vec{\epsilon}(k,\alpha)]\vec{G}.$$

Note que $\vec{E}_B$ e $\vec{B}_B$ correspondem à contribuição do ruído magnético $\tilde{\varepsilon}_B(\omega)$ nas expressões (2.35) e (2.36). $\vec{H}$ e $\vec{G}$ são as mesmas funções definidas em (2.37), $\vec{\epsilon}(\vec{k},\alpha)$ são os vetores de polarização e $\theta(\vec{k},\alpha)$ são as fases aleatórias características dos campos do vácuo (veja capítulo 1 ou [1]). A função $\mathfrak{h}(\vec{k},T)$ é dada por (1.22) e (1.23).

Finalmente, o campo eletromagnético total à uma distância r do centro do solenóide é resultado da superposição desses três campos:

$$\vec{E}_{tot}(\vec{r},t) = \vec{E}_V(\vec{r},t) + \vec{E}_N(\vec{r},t) + \vec{E}_B(\vec{r},t)\,, \tag{2.41}$$

e

$$\vec{B}_{tot}(\vec{r},t) = \vec{B}_V(\vec{r},t) + \vec{B}_N(\vec{r},t) + \vec{B}_B(\vec{r},t)\,. \tag{2.42}$$

As expressões para os campos do vácuo $\vec{E}_V$ e $\vec{B}_V$ (parte térmica e de ponto-zero) são apresentadas em (1.24) e (1.25) (veja capítulo 1). Nota-se, pela presença da radiação emitida pelas correntes flutuantes do solenóide, $I_N(t)$ e $I_B(t)$, que a densidade espectral total de energia da radiação ao redor do solenóide possivelmente vai mudar em relação ao caso em que este não

está presente. Resta verificar se essa nova densidade espectral é estável. Para que haja consistência nesse modelo, espera-se o estabelecimento de um *regime estacionário.* A taxa de energia eletromagnética absorvida dos campos do vácuo e emitida pelas correntes flutuantes do circuito devem se igualar. Esse fato se manifesta no modelo através do cálculo de (2.26), com $\langle U \rangle$ constante ao longo do tempo. Outro fato importante no estabelecimento do regime estacionário é o *anulamento* da média do vetor de Poynting total em posições distantes do solenóide (zona de radiação). Esse fato será averiguado na próxima seção.

2.5 O vetor de Poynting na presença do solenóide

O vetor de Poynting associado ao campo eletromagnético total, (2.41) e (2.42), na presença do solenóide é dado por

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} \mathrm{Re}\, \vec{E}_{tot}(\vec{r}, t) \times \mathrm{Re}\, \vec{B}_{tot}(\vec{r}, t). \tag{2.43}$$

Deve-se lembrar que apenas a parte real de $\vec{E}_{tot}$ e $\vec{B}_{tot}$ tem significado físico, assim essa expressão pode ser reescrita na forma:

$$\begin{aligned} \vec{S} &= \frac{c}{4\pi} \frac{1}{4} \left(\vec{E}_{tot}(\vec{r}, t) + \vec{E}^*_{tot}(\vec{r}, t) \right) \times \left(\vec{B}_{tot}(\vec{r}, t) + \vec{B}^*_{tot}(\vec{r}, t) \right) \\ &= \frac{c}{4\pi} \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left(\vec{E}^*_{tot}(\vec{r}, t) \times \vec{B}_{tot}(\vec{r}, t) + \vec{E}_{tot}(\vec{r}, t) \times \vec{B}_{tot}(\vec{r}, t) \right). \end{aligned} \tag{2.44}$$

O vetor $\vec{S}$ é um processo estocástico, possui uma média nas flutuações representada por

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\langle\vec{E}^*_{tot}(\vec{r},t)\times\vec{B}_{tot}(\vec{r},t)+\vec{E}_{tot}(\vec{r},t)\times\vec{B}_{tot}(\vec{r},t)\rangle. \tag{2.45}$$

Se for feita também uma média no tempo, o segundo termo dos colchetes angulares anula-se, pois nele está presente o termo periódico $e^{-2i\omega t}$,cuja média no tempo é nula:

$$\langle\vec{S}\rangle = \frac{c}{8\pi}\mathrm{Re}\langle\vec{E}^*_{tot}(\vec{r},t)\times\vec{B}_{tot}(\vec{r},t)\rangle, \tag{2.46}$$

Como $\vec{E}_{tot}$ e $\vec{B}_{tot}$ são dados por (2.41) e (2.42), a expressão acima possui vários termos. Alguns deles são de fácil determinação devido à independência estatística entre alguns campos de origem diversa. Para a determinação de (2.46) é necessário obter as correlações entre os diversos campos.

Pode-se notar que $\vec{E}_N$ e $\vec{B}_N$ provém de origens diferentes de $\vec{E}_B$ e $\vec{B}_B$. Os primeiros têm origem no ruído de Nyquist-Johnson, ε_N, e os segundos, no ruído magnético, ε_B. Esses dois ruídos são estatisticamente independentes:

$$\begin{aligned}\langle\varepsilon_N(t)\tilde{\varepsilon}_B(t')\rangle &= 0\,,\\ &\text{ou}\\ \langle\tilde{\varepsilon}_N(\omega)\tilde{\varepsilon}_B(\omega')\rangle &= 0.\end{aligned} \tag{2.47}$$

Conseqüentemente, $\vec{E}_N$ e $\vec{B}_N$ são estatisticamente independentes de $\vec{E}_B$ e $\vec{B}_B$:

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{E}_B^* \times \vec{E}_N \rangle &= 0\,, \\
\langle \vec{B}_N^* \times \vec{B}_B \rangle &= 0\,, \\
\langle \vec{E}_B^* \times \vec{B}_N \rangle &= 0 \text{ e} \\
\langle \vec{E}_N^* \times \vec{B}_B \rangle &= 0.
\end{aligned} \tag{2.48}
$$

Analogamente, $\vec{E}_N$ e $\vec{B}_N$ são estatisticamente independentes dos campos do vácuo $\vec{E}_V$ e $\vec{B}_V$ devido às suas origens distintas:

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{E}_V^* \times \vec{E}_N \rangle &= 0\,, \\
\langle \vec{B}_N^* \times \vec{B}_V \rangle &= 0\,, \\
\langle \vec{E}_V^* \times \vec{B}_N \rangle &= 0 \text{ e} \\
\langle \vec{E}_N^* \times \vec{B}_V \rangle &= 0.
\end{aligned} \tag{2.49}
$$

No entanto, $\vec{E}_B$ e $\vec{B}_B$ não são estatisticamente independentes dos campos do vácuo $\vec{E}_V$ e $\vec{B}_V$. Suas correlações podem ser determinadas a partir de médias nas fases aleatórias das expressões (2.39), (2.40), (1.24) e (1.25), resultando em

$$
\langle \vec{E}_B^* \times \vec{B}_B \rangle = -\left(\frac{\pi N a^2}{c}\right)^4 \int_0^\infty dk k^2 \frac{8\pi\omega^2}{3} \frac{\mathfrak{h}^2}{|Z(\omega)|^2} \vec{H}^* \times \vec{G}, \tag{2.50}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{E}_V^* \times \vec{B}_B \rangle &= -\left(\frac{\pi N a^2}{c}\right)^2 \\
&\quad \int_0^\infty dk k^2 i\omega \frac{\mathfrak{h}^2}{|Z(\omega)|^2} (-Z^*(\omega)\vec{G}) \times (\frac{4\pi i}{k^3} \mathrm{Re}\vec{H}), \\
\langle \vec{E}_B^* \times \vec{B}_V \rangle &= -\left(\frac{\pi N a^2}{c}\right)^2 \\
&\quad \int_0^\infty dk k^2 i\omega \frac{\mathfrak{h}^2}{|Z(\omega)|^2} (Z(\omega)\vec{H}^*) \times (\frac{4\pi}{k^3} \mathrm{Im}\vec{G})\,.
\end{aligned} \tag{2.51}
$$

Além disso:

$$\langle \vec{E}_V^* \times \vec{B}_V \rangle = 0. \tag{2.52}$$

A correlação $\langle \vec{E}_N^* \times \vec{B}_N \rangle$ é determinada a partir da densidade espectral do ruído de Nyquist-Johnson (2.2), na qual se utiliza a resistência ôhmica total do circuito R_{ohm}:

$$\langle \vec{E}_N^* \times \vec{B}_N \rangle = -\int_0^\infty d\omega \left(\frac{\pi N a^2}{c}\right)^2 \frac{4\pi R_{ohm} \mathfrak{h}^2}{|Z(\omega)|^2} \vec{H}^* \times \vec{G}. \tag{2.53}$$

Reunindo todos esse termos obtém-se:

$$\langle \vec{S} \rangle = -\frac{c}{2}\left(\frac{\pi N a^2}{c}\right)^2 \int_0^\infty d\omega \frac{\mathfrak{h}^2}{|Z(\omega)|^2}\left[\frac{2\pi^2 N^2}{3c}\left(\frac{a\omega}{c}\right)^4 + R_{ohm} - \mathrm{Re}Z(\omega)\right] \cdot$$
$$\cdot(\mathrm{Re}\vec{H} \times \mathrm{Re}\vec{G} + \mathrm{Im}\vec{H} \times \mathrm{Im}\vec{G}). \tag{2.54}$$

O primeiro termo no interior dos colchetes em (2.54) é a contribuição de (2.50). O segundo termo é a contribuição de (2.51) e o último termo é a contribuição de (2.51) e (2.53).

O resultado $\langle \vec{S} \rangle = 0$ segue imediatamente de

$$\mathrm{Re}Z(\omega) = \frac{2\pi^2 N^2}{3c}\left(\frac{a\omega}{c}\right)^4 + R_{ohm} = R_{rad} + R_{ohm}\,. \tag{2.55}$$

A principal conclusão da seção 2.2 é a igualdade entre o fluxo de energia eletromagnética do circuito para o ambiente e o fluxo contrário, proveniente dos campos do vácuo (térmico e de ponto-zero). Esse fato se manifesta na obtenção de uma energia média para o circuito, $\langle U \rangle$, constante no tempo. O anulamento da média do vetor de Poynting total, $\langle \vec{S} \rangle = 0$, completa as condições de balanço de energia desse sistema para que seja atingido o *regime*

estacionário. Apesar da densidade espectral da energia eletromagnética total no ambiente ao redor do circuito manter-se constante, ela pode apresentar uma expressão distinta de (1.22), que corresponde ao espaço livre, sem o circuito [30]. Esse é um assunto importante a ser estudado em outros trabalhos, pois uma modificação no espectro eletromagnético, mesmo que à temperatura zero, tem influência na emissão espontânea de átomos e moléculas [31].

2.6 A possibilidade de detecção do Ruído Radiativo

Nessa seção será avaliada a possibilidade da contribuição do ruído radiativo para o circuito ser mensurável. Observa-se que a parcela do ruído radiativo em (2.13) varia com a quarta potência de $a\omega/c \equiv 2\pi a/\lambda$. Mesmo com a condição $a \ll \lambda$ (aproximação de ondas longas), ele pode não ser desprezível em circuitos em que a resistência radiativa é comparável com a resistência ôhmica total do circuito. Essa situação é mais facilmente acessível em baixas temperaturas, já que a resistência ôhmica decresce com a redução da temperatura. No entanto, dependendo das características do solenóide, o ruído radiativo pode ser relevante mesmo em temperatura ambiente.

Para avaliar as possibilidades de detecção do ruído radiativo, cosidera-se valores numéricos para os parâmetros do solenóide: seu comprimento l, raio a, espessura do fio b e número de espiras N. O material avaliado para sua constituição foi o tungstênio, que apresenta as menores resistividades a baixas temperaturas, além de permitir a fabricação de solenóides de dimensões reduzidas. Fez-se estimativas em altas ($T \geqslant 300K$) e baixas temperaturas. A

temperatura crítica de transição para o estado supercondutor do tungstênio é 0,012K [21]. Também levou-se em consideração a dependência da resistividade do tungstênio com a temperatura, bem como o efeito pelicular (*skin effect*) que ocorre associado à correntes variáveis. Esse efeito caracteriza-se por uma dependência da resistência elétrica com a freqüência na forma (veja capítulo 5 de [22])

$$R_{ohm}(\omega, T) \propto \omega^{1/2}. \tag{2.56}$$

Na figura 2.2 mostra-se as variações de $S_\varepsilon(\omega, T)$ (veja 2.16) com a freqüência $\nu = \omega/2\pi$, no intervalo $2 \cdot 10^8$ Hz $\leqslant \nu \leqslant 10^{10}$ Hz. Nessa figura, os parâmetros do solenóide são:

$$\begin{aligned} l &= 0,5\,\text{cm}, \\ a &= 0,05\,\text{cm}, \\ b &= 0,001\,\text{cm e} \\ N &= 250\,\text{espiras}. \end{aligned}$$

Pode-se observar que a e b são muito maiores que os valores dos solenóides construídos por Möllenstedt e Bayh em 1962 [23], nos quais $a \approx 0,0007$ cm e $b \approx 0,0003$ cm. Portanto, um indutor com as características apresentadas pode ser construído facilmente com a tecnologia atual. Os resultados são apresentados para dois valores de temperatura: $T_1 = 0,02$ K para as curvas α_1, α_2 e α_3; e $T_2 = 3$ K para β_1 e β_2. As curvas α_1 e β_1 correspondem a $S_\varepsilon(\omega, T)$, expressão (2.16), na qual está incluído o ruído radiativo e o ruído de Nyquist-Johnson (ôhmico). As curvas α_2 e β_2 correspondem apenas ao ruído de Nyquist-Johnson, denominado $S_N(\omega, T)$, expressão (2.2). Finalmente, a curva α_3 está associada apenas às flutuações térmicas, cuja densidade espec-

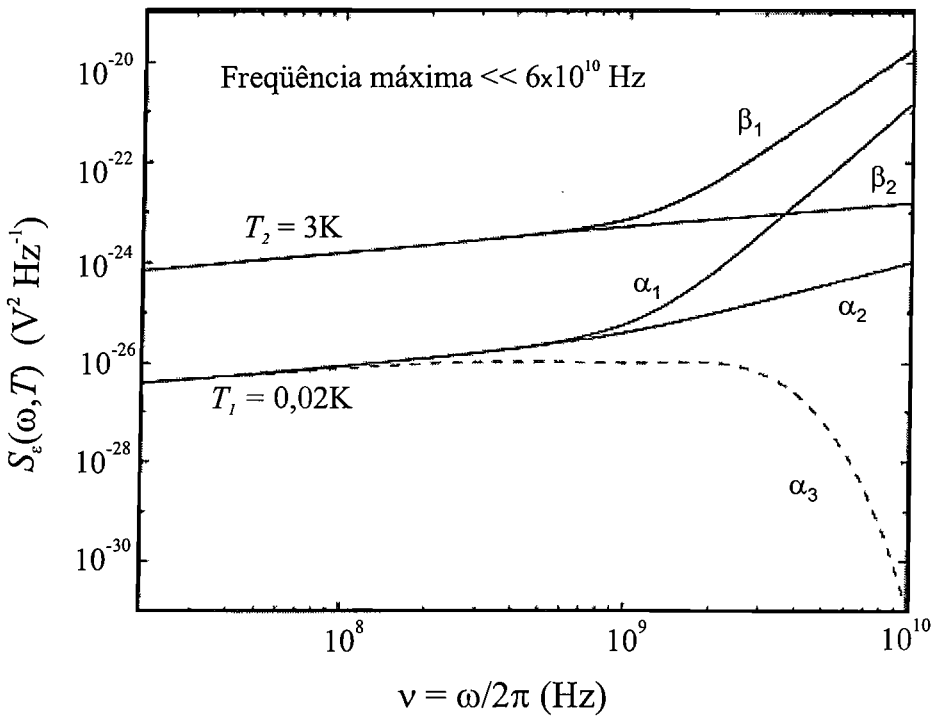

Figura 2.2: Distribuição espectral da voltagem $S_\varepsilon(\omega, T)$ para dois valores de temperatura $T_1 = 0,02$ K e $T_2 = 3$ K. O solenóide é tal que $l = 0,5$ cm, $a = 0,05$ cm, $b = 0,001$ cm e $N = 250$ espiras. O significado das curvas α_1, α_2 e α_3, β_1 e β_2 é explicado no texto. A figura é extraída de [20].

tral fica representada por

$$[S_\varepsilon(\omega, T)]_{\text{térmico}} = \left[R_{ohm}(\omega, T) + \frac{2\pi^2 N^2}{3c}\left(\frac{a\omega}{c}\right)^4\right] \times \left(\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1}\right). \tag{2.57}$$

Essa expressão é obtida de $S_\varepsilon(\omega, T)$ retirando-se o termo de ponto-zero. A contribuição associada a essa expressão para $T = 3$ K é indistinguível de β_1, ou seja, (2.16) e (2.58) coincidem nessa temperatura, pois $k_B T \approx 5\hbar\omega_{max}$ e a contribuição de ponto-zero para $S_\varepsilon(\omega, T = 3)$ é desprezível. No entanto

há uma diferença entre as curvas β_1 e β_2. Esta diferença deve-se ao ruído radiativo $S_{\varepsilon_B}(\omega, T)$ (expressão (2.13)).

Considerando a menor temperatura, $T_1 = 0,02$ K, observa-se que para $\nu = 7 \cdot 10^9$ Hz, $S_\varepsilon = 2,6 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{V^2\,Hz^{-1}}$, $S_N = 6 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{V^2\,Hz^{-1}}$ e $[S_\varepsilon]_{\text{térmico}} = 2,7 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{V^2\,Hz^{-1}}$. Ou seja, $[S_\varepsilon]_{\text{térmico}}$ é desprezível em comparação com S_ε ou S_N. Além disso, tem-se a razão $(S_\varepsilon/S_N) \approx 440$ nessa freqüência. Em $\nu = 10^9$ Hz, essa razão vale apenas $1,5$. Essa grande variação com a freqüência se deve ao efeito do ruído radiativo, $S_{\varepsilon_B}(\omega, T)$, que cresce muito mais rapidamente com a freqüência do que o ruído de Nyquist-Johnson, como pode ser observado pelas expressões (2.16) e (2.56).

Na figura 2.3, considera-se outro solenóide, no qual

$$\begin{aligned} l &= 3\,\mathrm{cm}, \\ a &= 0,3\,\mathrm{cm}, \\ b &= 0,01\,\mathrm{cm} \text{ e} \\ N &= 100\,\text{espiras}. \end{aligned}$$

As duas densidades espectrais S_ε e S_N são calculadas em $T = 4$ K. Para $\nu = 10^8$ Hz observa-se que $S_\varepsilon \approx S_N$. No entanto, a razão $(S_\varepsilon/S_N) \approx 15000$ se estabelece para $\nu = 3 \cdot 10^9$ Hz.

Finalmente, na figura 2.4, as densidades espectrais são calculadas em $T = 300$ K para o mesmo solenóide da figura 2.3. Observa-se, nesse caso, que o ruído magnético começa a diferir do ruído de Nyquist-Johnson a partir de $\nu = 5 \cdot 10^8$ Hz. A razão $(S_\varepsilon/S_N) \approx 9$ se estabelece para $\nu = 2 \cdot 10^9$ Hz e $(S_\varepsilon/S_N) \approx 32$ para $\nu = 3 \cdot 10^9$ Hz.

Estas são situações particulares em que o ruído magnético supera o ruído de Nyquist-Johnson. Conclui-se que essa situação pode ser obtida tanto em

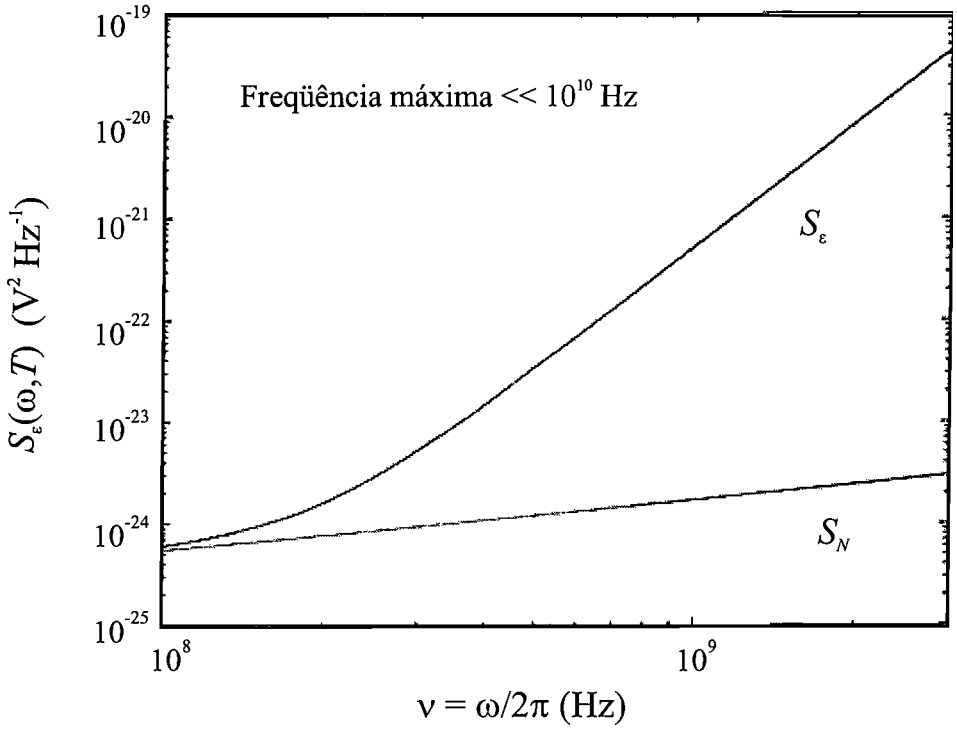

Figura 2.3: Distribuição espectral da voltagem para $T = 4$ K. O solenóide é tal que $l = 3$ cm, $a = 0,3$ cm, $b = 0,01$ cm e $N = 100$ espiras. Mesmo nessa temperatura baixa não é possível distinguir as flutuações de ponto-zero das térmicas. A figura é extraída de [20].

sistemas microscópicos quanto em sistemas macroscópicos, além de poder ocorrer em temperaturas baixas e altas (temperatura ambiente).

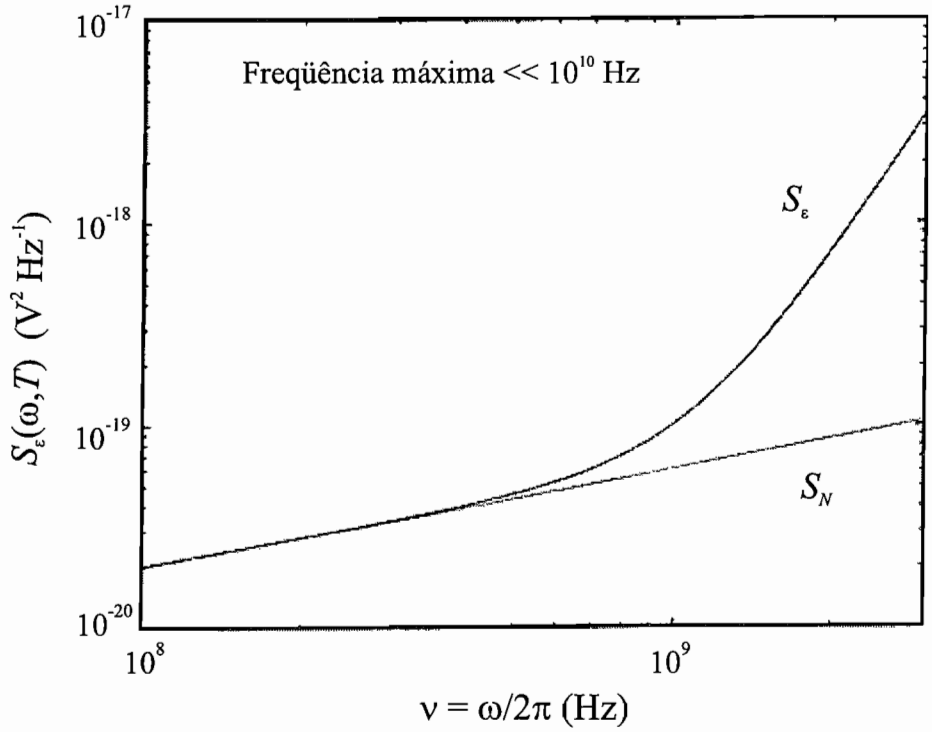

Figura 2.4: Distribuição espectral da voltagem para $T = 300$ K. O solenóide é o mesmo que o da figura (2.3). A figura é extraída de [20].

Capítulo 3

Influência da radiação de ponto-zero no escape de barreiras de potencial

Uma das contribuições mais importantes da teoria de processos estocásticos é o estudo de taxas de escape através de barreiras de potencial. Kramers, em 1940, fez uma das primeiras e mais relevantes abordagens sobre o assunto [27]. Seu trabalho apresenta inúmeras aplicações em cinética química, processos de difusão em sólidos, nucleação, entre outros fenômenos [28]. Os aspectos essenciais dos processos de escape através de barreiras de potencial é a ação conjunta de três tipos de força sobre uma partícula:

- uma força determinística e não linear, com pelo menos uma região metaestável (como o caso da figura 3.1);
- uma força flutuante, cuja ação é capaz de lançar a partícula para fora da região metaestável;
- uma força dissipativa, que inevitavelmente acompanha as flutuações.

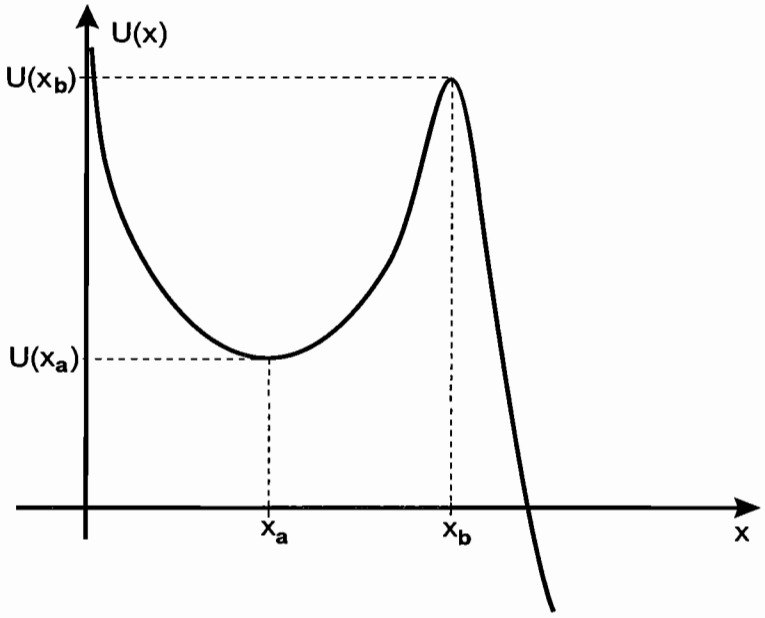

Figura 3.1: Potencial metaestável com barreira de altura $\Delta U = U(x_b) - U(x_a)$, um mínimo local x_a e um máximo local x_b.

Nesse capítulo, descrevem-se as taxas de escape em um modelo particular: uma partícula clássica, eletrizada, movendo-se em um potencial metaestável, como ilustrado na figura 3.1, sob a influência dos campos eletromagnéticos flutuantes (térmicos e de ponto-zero) da Eletrodinâmica Estocástica (veja capítulo 1).

3.1 Escape de barreiras de potencial induzida por flutuações térmicas: a taxa de Kramers

Em seu trabalho, Kramers considerou um sistema físico constituído por uma partícula em um movimento unidimensional de coordenada x (x também pode ser outro tipo de variável dinâmica, como a quantidade de um componente em uma reação química, por exemplo) sob a influência de uma força determinística cujo potencial $U(x)$ possui uma região metaestável (veja figura 3.1). O movimento da partícula é regido pela equação de Langevin

$$m\ddot{x} = -m\gamma\dot{x} - U'(x) + F(t). \tag{3.1}$$

Além da força determinística $-U'(x)$, a partícula está sujeita à força dissipativa $-m\gamma\,\dot{x}$ e à força flutuante $F(t)$, caracterizada pela média $\langle F(t)\rangle = 0$ e pela função de correlação dada por

$$\langle F(t)F(t+\tau)\rangle = 2m\gamma D\delta(\tau). \tag{3.2}$$

Essa é a função de correlação de um ruído gaussiano branco, uma aproximação geralmente utilizada quando o tempo característico médio associado às interações da força flutuante (τ_{fluc}) é considerado muito menor do que o tempo característico em que a força determinística varia apreciavelmente:

$$\tau_{fluc} \ll \tau_{osc}\,.$$

Aqui τ_{osc} é o tempo característico de oscilação no interior do poço de potencial. Nas teorias usuais do movimento browniano, o termo D é igual a k_BT.

Extensas discussões sobre a equação de Langevin podem ser encontradas em [35, 36]. Será visto posteriormente que a presença da radiação térmica e de ponto-zero na força flutuante é responsável por uma modificação considerável em D para temperaturas baixas ($T \to 0$).

Para fazer uma rápida revisão na determinação da taxa de escape de Kramers será utilizada uma abordagem proposta por Chandrasekhar [34], mais simplificada matematicamente que no artigo original de Kramers [27].

É possível mostrar que uma equação de Fokker-Planck no espaço de fase pode ser obtida da equação de Langevin (3.1) e é dada por [35, 36]

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{p}{m}\frac{\partial W}{\partial x} - U'(x)\frac{\partial W}{\partial p} &= \\ \gamma W + \gamma p \frac{\partial W}{\partial p} &+ m\gamma D \frac{\partial^2}{\partial p^2} W, \end{aligned} \tag{3.3}$$

na qual $W = W(x, p, t)$ é a distribuição de probabilidade no espaço de fase. O lado esquerdo da expressão acima corresponde à equação de Liouville para uma partícula sob a ação da força $-U'(x)$. O lado esquerdo decorre da presença de forças flutuantes e dissipativas. Uma solução estacionária aproximada de (3.3) é encontrada fazendo-se $\frac{\partial W}{\partial t} = 0$ e resulta em

$$W(x, p) = C \exp\left[-\frac{p^2/2m + U(x)}{D}\right], \tag{3.4}$$

na qual C é uma constante de normalização. É importante observar, novamente, que o coeficiente D é igual a $k_B T$ nas teorias usuais do movimento browniano e está associada à energia média, $\langle \epsilon \rangle$, da partícula no interior da cavidade do potencial da figura (3.1):

$$D = \langle \epsilon \rangle - U(x_a). \tag{3.5}$$

A equação (3.3) pode ser colocada na forma de uma equação de continuidade, na qual $\vec{J} = (J_x, J_p)$ é a densidade de corrente de probabilidade no espaço de fase:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{m}W\right) - \frac{\partial}{\partial p}\left[-U'(x)W - \gamma p\, W - \frac{\partial}{\partial p} m\gamma\, D\, W\right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}J_x - \frac{\partial}{\partial p}J_p\ . \end{aligned} \tag{3.6}$$

A corrente de probabilidade através da barreira foi definida por Kramers como

$$j \approx \int_{-\infty}^{\infty} J_x(x = x_b, p)\, dp = \int_{-\infty}^{\infty} W(x = x_b, p)\, \frac{p}{m}\, dp. \tag{3.7}$$

A solução (3.4) satisfaz (3.3) ou (3.6) para todo x, no entanto não corresponde a uma situação em que há escape através da barreira de potencial em x_b, pois, substituindo-se (3.4) em (3.7), obtém-se um resultado nulo ($j = 0$). Chandrasekhar determina uma outra distribuição de probabilidade estacionária a partir da seguinte solução tentativa [34]:

$$W(x,p) = CF(x,p) \exp\left[-\frac{p^2/2m + U(x)}{D}\right], \tag{3.8}$$

na qual $F(x,p)$ é uma função desconhecida que será determinada a seguir.

Deseja-se que (3.4) seja uma expressão válida para a solução da equação de Fokker-Planck na região do poço do potencial ($x \approx x_a$). Para isso, deve-se acrescentar a seguinte condição de contorno sobre $F(x,p)$:

$$F(x,p) \approx 1, \ \text{ em } \ x \approx x_a. \tag{3.9}$$

Para que a distribuição de probabilidades seja aproximadamente estacionária dentro do poço de potencial, a corrente de probabilidade sobre a barreira deve ser considerada pequena. Isso corresponde a impor outra condição de contorno sobre $F(x,p)$:

$$F(x,p) \approx 0, \quad \text{para } x \gg x_b. \tag{3.10}$$

Em muitos casos, o potencial pode ser aproximado por uma função quadrática próximo ao topo da barreira ($x \approx x_b$):

$$\begin{aligned} U(x) &\approx U(x_b) - \frac{1}{2}\left|U''(x_b)\right|(x-x_b)^2 \\ &\approx U(x_b) - \frac{1}{2}m\omega_b^2(x-x_b)^2. \end{aligned} \tag{3.11}$$

na qual define-se $m\omega_b^2 = |U''(x_b)|$. Substituindo (3.11) em (3.8) e em seguida em (3.3), obtém-se uma equação diferencial para $F(x,p)$:

$$\frac{p}{m}\frac{\partial F}{\partial x} + m\omega_b^2(x-x_b)\frac{\partial F}{\partial p} = -\gamma p\frac{\partial F}{\partial p} + m\gamma D\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}. \tag{3.12}$$

Chandrasekhar considerou $F(x,p)$ sob uma forma simplificada na qual x e p estão relacionadas linearmente entre si:

$$F(x,p) = F\left(p - am(x-x_b)\right) \equiv F(y). \tag{3.13}$$

Assim, substituindo (3.8) e (3.13) em (3.12) obtém-se:

$$-(a-\gamma)\left[p - \frac{m\omega_b^2}{(a-\gamma)}(x-x_b)\right]\frac{dF}{dy} = m\gamma D\frac{d^2F}{dy^2}. \tag{3.14}$$

Essa mudança de variável é consistente se for assumida a seguinte condição:

$$a = \omega_b^2/(a-\gamma), \tag{3.15}$$

a partir da qual (3.14) é transformada na equação diferencial mais simplificada a seguir:

$$-(a-\gamma)y\frac{dF}{dy} = m\gamma D\,\frac{d^2F}{dy^2}. \tag{3.16}$$

Essa equação pode ser integrada, fornecendo:

$$F = F_0\int^y \exp\left[-\frac{(a-\gamma)y^2}{2m\gamma D}\right]dy. \tag{3.17}$$

F_0 é uma constante que será determinada adiante, a é solução da equação (3.15), que resulta em $a = \gamma/2 \pm \sqrt{\gamma^2/4+\omega_b^2}$. Somente a raiz positiva corresponde a $a-\gamma$ positivo, situação que permitirá à solução atender às condições de contorno.

Reescrevendo as condições de contorno (3.9) e (3.10) sob outra forma:

$$F(x,p) \;\rightarrow\; 1, \;\text{ para } x \ll x_b \tag{3.18}$$

e

$$F(x,p) \;\rightarrow\; 0, \;\text{ para } x \gg x_b. \tag{3.19}$$

considerando $F_0 = \sqrt{(a-\gamma)/2\pi m\gamma D}$ e o limite inferior de integração de (3.17) igual a $-\infty$, obtém-se

$$F(x,p) = \sqrt{\frac{(a-\gamma)}{2\pi m\gamma D}}\int_{-\infty}^{y} \exp\left[-\frac{(a-\gamma)y^2}{2m\gamma D}\right]dy\,. \tag{3.20}$$

Essa expressão satisfaz as condições de contorno (3.18) e (3.19).

Combinando (3.8) e (3.20) tem-se a solução

$$
\begin{aligned}
W(x,p) &\approx C\sqrt{\frac{(a-\gamma)}{2\pi m\gamma D}}\times \\
&\times \exp\left[-\frac{p^2/2m+U(x_b)-\frac{1}{2}m\omega_b^2(x-x_b)^2}{D}\right]\int_{-\infty}^{y}\exp\left[-\frac{(a-\gamma)y^2}{2m\gamma D}\right]dy\,,
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

que é válida apenas na vizinhança de x_b.

Substituindo-se (3.21) em (3.7), obtém-se uma corrente de probabilidade j não nula através da barreira:

$$
\begin{aligned}
j &\approx C\sqrt{\frac{(a-\gamma)}{2\pi m\gamma D}}\exp\left[-\frac{-U(x_b)}{D}\right]\times \\
&\times \int_{-\infty}^{\infty}dp\exp\left[-\frac{p^2/2m}{D}\right]\frac{p}{m}\int_{-\infty}^{p}\exp\left[-\frac{(a-\gamma)y^2}{2m\gamma D}\right]dy.
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

Finalmente, após uma integração por partes, obtém-se

$$
j \approx C\sqrt{\frac{(a-\gamma)}{a}}D\exp\left[-\frac{U(x_b)}{D}\right]. \tag{3.23}
$$

Fazendo-se novamente uma aproximação quadrática para o potencial no interior do poço $x \simeq x_a$:

$$
\begin{aligned}
U(x) &\approx U(x_a)+\frac{1}{2}U''(x_a)(x-x_a)^2 \\
&\approx U(x_a)+\frac{1}{2}m\omega_a^2(x-x_a)^2,
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

a solução aproximada é

$$W(x,p) \approx C \exp\left[-\frac{p^2/2m + U(x_a) + \frac{1}{2}m\omega_a^2(x-x_a)^2}{D}\right]. \quad (3.25)$$

A probabilidade P de se encontrar a partícula no interior do poço de potencial pode ser obtida a partir da integração dessa última expressão:

$$P \approx \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dx\, C \exp\left[-\frac{p^2/2m + U(x_a) + \frac{1}{2}m\omega_a^2(x-x_a)^2}{D}\right]. \quad (3.26)$$

Fazendo-se a integração, obtém-se

$$P \approx C\frac{2\pi D}{\omega_a} \exp\left[-\frac{U(x_a)}{D}\right]. \quad (3.27)$$

A taxa de escape através da barreira de potencial κ é definida através da razão

$$\kappa = \frac{j}{P}.$$

Usando(3.27) e (3.23) obtém-se

$$\kappa \approx \sqrt{\frac{(a-\gamma)}{a}}\frac{\omega_a}{2\pi} \exp\left[-\frac{U(x_b) - U(x_a)}{D}\right]. \quad (3.28)$$

A partir da expressão para a raiz positiva de (3.15), $a = \frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \omega_b^2}$, é possível obter

$$\kappa \approx \frac{\omega_a}{2\pi\omega_b}\left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{4} + \omega_b^2} - \frac{\gamma}{2}\right) \exp\left[-\frac{U(x_b) - U(x_a)}{D}\right]. \quad (3.29)$$

O limite de baixo amortecimento, $\gamma \to 0$, nessa expressão é a fórmula

$$\kappa \approx \frac{\omega_a}{2\pi} \exp\left(-\frac{\Delta U}{D}\right). \tag{3.30}$$

Nessa equação, o escape depende apenas da altura da barreira do potencial, ΔU, e dos parâmetros que caracterizam o movimento da partícula *no interior* do poço: a freqüência ω_a e a energia média da partícula D (veja expressão 3.5).

3.2 Influência da radiação de ponto-zero no escape da barreira de potencial

As taxas de escape das expressões (3.29) e (3.30) apresentam uma forte dependência na altura da barreira ΔU e na energia média da partícula D ($2m\gamma D$ é usualmente denominado coeficiente de difusão). Kramers considerou $D = k_B T$, como nas teorias usuais do movimento browniano (válidos para temperaturas elevadas). O valor $k_B T$ está relacionado com a equipartição de energia da Mecânica Estatística Clássica, na qual $\frac{1}{2}k_B T$ é a energia cinética média e o outro $\frac{1}{2}k_B T$ é a energia potencial média da partícula browniana. A dependência linear desse coeficiente de difusão com a temperatura implica o anulamento da taxa de escape em $T = 0$.

Kramers supôs que as flutuações que agiam sobre a partícula se originavam do seu contato com um reservatório térmico. No entanto, nessa seção será considerada a interação da partícula com os campos eletromagnéticos flutuantes térmicos e de ponto-zero.

Considerando o potencial $U(x)$ aproximadamente harmônico na região

do poço (como indicado na expressão (3.24)), a equação de movimento da partícula carregada (carga e, massa m) próxima de x_a é:

$$m\ddot{\xi} \approx -m\omega_a^2\xi + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dddot{\xi} + eE_{V_x}(t), \tag{3.31}$$

na qual $\xi = x - x_a$ e $E_{V_x}(t)$ é a componente x do campo elétrico do vácuo (1.25). O termo proporcional a $\dddot{\xi}$ é a força de reação da radiação. Os campos do vácuo são tais que $\langle E_{V_x}(t)\rangle = 0$ e

$$\langle E_{V_x}(t)E_{V_x}(0)\rangle = \frac{4\pi}{3}\int_0^\infty d\omega\, \rho(\omega, T)\, \cos(\omega t), \tag{3.32}$$

na qual a densidade espectral $\rho(\omega, T)$ é apresentada em (1.22). É possível mostrar que a força de reação da radiação pode ser escrita de acordo com a seguinte aproximação [39]:

$$\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dddot{\xi} \approx -m\gamma\dot{\xi}, \tag{3.33}$$

válida para $\gamma \ll \omega_a$, na qual $\gamma = 2e^2\omega_a^2/3mc^3$. De acordo com essas aproximações e após um longo desenvolvimento matemático, D é obtido como sendo

$$D = \frac{\hbar\omega_a}{2}\coth\left(\frac{\hbar\omega_a}{2k_BT}\right). \tag{3.34}$$

O cálculo de (3.34) pode ser encontrado em [2]. D aproxima-se do valor usado por Kramers, k_BT, no limite de altas temperaturas ($k_BT \gg \hbar\omega_a$), e é não-nulo quando $T = 0$. De fato, $D \to \hbar\omega_a/2$ a medida que $T \to 0$. A dependência que D tem da constante de Planck $\hbar$ provém da intensidade dos campos de ponto-zero, $E_{V_x}(t)$, que aparecem em (3.31), (3.32) e (1.22). É importante notar que o valor $\hbar\omega_a/2$ é a energia média do estado fundamental do

movimento harmônico. Esse resultado, obtido no contexto da Eletrodinâmica Estocástica, difere do resultado usual da física clássica devido às flutuações de ponto-zero levadas em consideração [2].

A utilização de (3.34) na expressão (3.30) tem como conseqüência a ocorrência de uma taxa de escape não nula, mesmo quando $T \to 0$. Usualmente não se menciona o papel das flutuações de ponto-zero e usa-se o formalismo da Mecânica Quântica para interpretar o não anulamento da taxa de escape como um fenômeno de tunelamento através da barreira de potencial, situação considerada classicamente proibida. Nesse desenvolvimento teórico, será visto que as flutuações de ponto-zero promovem o escape sobre a barreira, mesmo se a energia média da partícula for muito menor que ΔU. No contexto da Mecânica Clássica, o escape seria impossível sem a atuação das flutuações de ponto-zero.

3.3 Comparação dos resultados com dados experimentais

Para ilustrar de maneira quantitativa a analogia entre o tunelamento da mecânica quântica e esse modelo clássico estocástico, os trabalhos experimentais de Alberding *et al.* [38] serão analisados segundo a fórmula (3.30) para a taxa de escape de Kramers. Com o coeficiente de difusão (3.34), a expressão é escrita como:

$$\kappa(T) \approx \frac{\omega_a}{2\pi} \exp\left(-\frac{\Delta U}{\frac{\hbar\omega_a}{2} \coth\left(\frac{\hbar\omega_a}{2k_B T}\right)} \right). \tag{3.35}$$

De acordo com Alberding *et al.* [38], a cadeia beta-hemoglobina (βHb) é ligada ao monóxido de carbono CO, da qual este pode ser separado com um

LASER. A taxa de recombinação pode ser determinada experimentalmente [38]. A fração de moléculas $N(t)$ que se recombinaram ao CO é medida como função do tempo. O tempo τ, necessário para $N(t)$ reduzir-se à 75% do seu valor original é determinado. Considera-se, em [38], que essa recombinação seja uma passagem através de uma barreira de potencial e que $\kappa = 1/\tau$ seja uma boa estimativa da taxa de escape.

Esse procedimento experimental é repetido para diversas temperaturas T. Os resultados para $\kappa(T)$ estão mostrados pelos pontos experimentais indicados no gráfico da figura 3.2, obtida de [38].

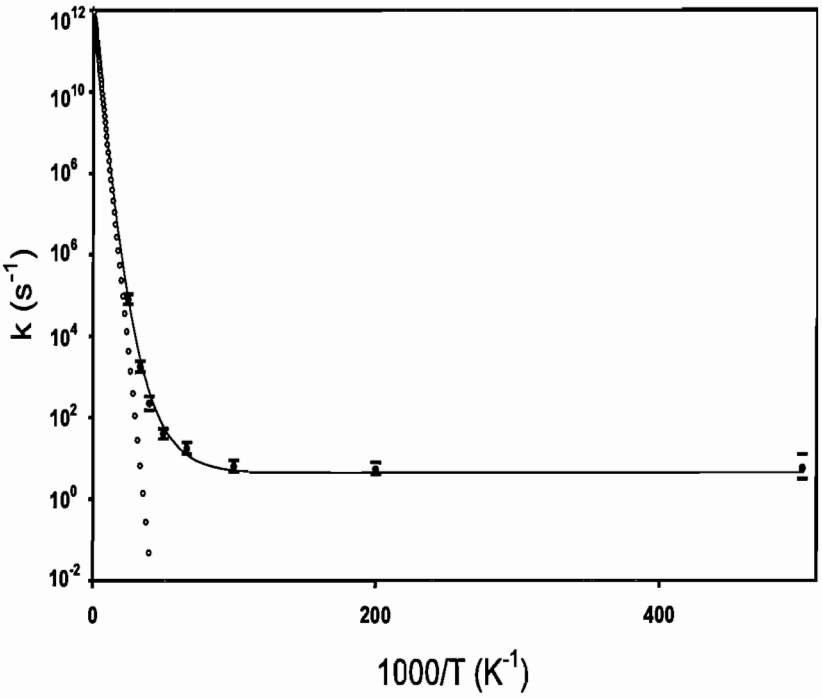

Figura 3.2: Os pontos experimentais são dados da taxa de escape associados à migração do CO para a cadeia beta-hemoglobina [38]. A linha contínua é a curva teórica (3.35). Os círculos correspondem à taxa de escape sem as flutuações de ponto-zero (fórmula de Arrhenius).

Foi feito um ajuste dos dados experimentais fazendo uso da expressão (3.35) e fixando os valores numéricos para os parâmetros desconhecidos ω_a e ΔU. Os melhores valores encontrados foram:

$$\begin{aligned} \frac{\hbar\omega_a}{2} &= 1,53 \cdot 10^{-3} eV, \\ \Delta U &= 6,68 \cdot 10^{-2} eV. \end{aligned} \tag{3.36}$$

A partir desses valores, a taxa de escape em função da temperatura é dada pela curva contínua da figura 3.2. Observa-se que a partícula é capaz de escapar através da barreira de potencial para $T \longrightarrow 0$, mesmo nesse caso em que a altura da barreira ΔU é muito maior que a energia média dentro do poço $\hbar\omega_a/2$:

$$\frac{2\Delta U}{\hbar\omega_a} \approx 26.$$

Na interpretação clássica estocástica do não anulamento da taxa de escape à temperatura zero as flutuações de ponto-zero fornecem energia suficiente para a partícula passar por cima da barreira. A partícula também está sujeita à dissipação, de modo que a energia não é conservada durante a travessia da barreira, podendo terminar o processo com energia menor que $U(x_b)$. Conseqüentemente, o modelo de escape clássico, estocástico fornece um resultado inteiramente análogo ao da Mecânica Quântica, desde que as flutuações eletromagnéticas de ponto-zero sejam incluídas nos cálculos. O acordo com os dados experimentais ocorre em temperatura ambiente e temperatura baixa, no entanto, o ajuste completo da curva (3.35) poderia ser determinado apenas com os pontos experimentais para temperatura ambiente. Esses pontos são realçados na figura 3.3 e são suficientes para a obtenção dos parâmetros (3.36). Mesmo utilizando apenas os pontos experimentais em temperatura ambiente para fazer o ajuste da curva teórica, nota-se, na

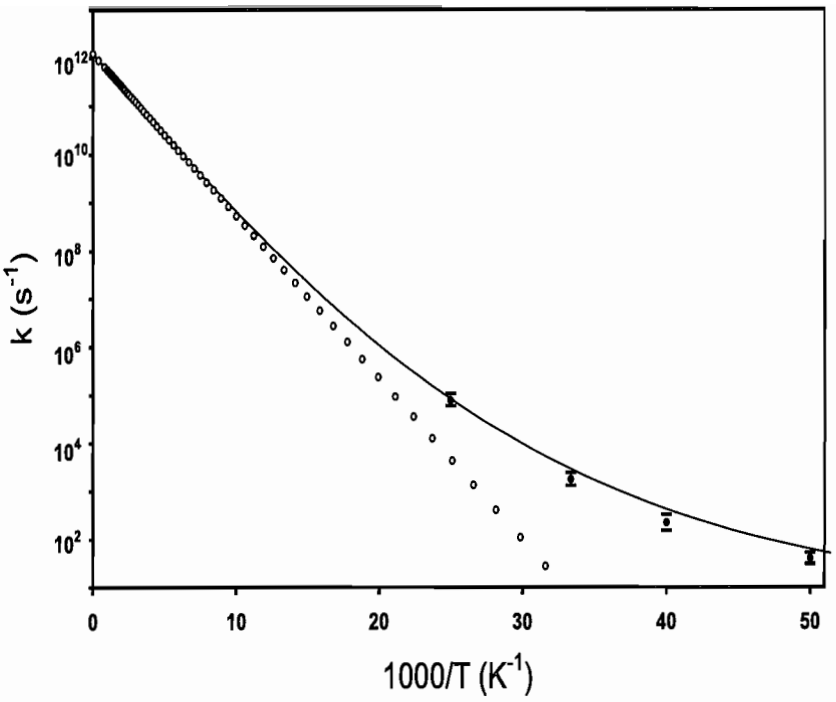

Figura 3.3: A linha contínua é o comportamento de alta temperatura de (3.35). Os pontos experimentais são dados da taxa de escape associados à migração do CO para a cadeia beta-hemoglobina [38]. Os círculos correspondem à taxa de escape sem as flutuações de ponto-zero, isto é, à fórmula de Arrhenius $\kappa = \frac{\omega_a}{2\pi}\exp(-\Delta U/k_B T)$.

figura 3.2, que ele também está em excelente acordo com os pontos experimentais em temperaturas baixas.

Capítulo 4

Análise crítica do formalismo de Schrödinger na Mecânica Quântica

Schrödinger foi o primeiro a apresentar uma prova de que sua formulação da Mecânica Quântica era equivalente à formulação de Heisenberg [42]. Sua prova geralmente é considerada satisfatória. Acredita-se que os dois formalismos são equivalentes e podem ser usados indiscriminadamente. Mas essa equivalência apresenta certas limitações sutis que são analisadas nesse capítulo.

É provável que Dirac tenha sido o primeiro a chamar a atenção para o fato de que o formalismo de Schrödinger e Heisenberg não são equivalentes em qualquer circunstância [43]:

> "*As razões para crer que os dois formalismos não sejam equivalentes surge a partir de situações em que se pode encontrar a hamiltoniana e estar certo de sua expressão ser a correta. Há*

INSTITUTO DE FÍSICA
Serviço de Biblioteca e Informação
Tombo: 3993

o exemplo da eletrodinâmica quântica, na qual se consideram elétrons e pósitrons interagindo com o campo eletromagnético. Pode-se escrever a hamiltoniana para o sistema estando-se confiante de que está correta, porque quando ela é utilizada nas equações de Heisenberg, obtêm-se equações de campo em completa analogia com as equações de campo clássicas, são relativísticas, e parecem adequadas sob qualquer ponto de vista. Por outro lado, quando se usa a hamiltoniana na equação de Schrödinger, encontra-se equações que não apresentam solução alguma (pelo menos nenhuma de importância física)" [43].

Os exemplos dados por Dirac para mostrar a não equivalência dos dois formalismos são o deslocamento Lamb e a anomalia $2-g$ no momento magnético do elétron. No entanto, a comunidade dos físicos não deu muita atenção para a descoberta de Dirac, talvez pela não-equivalência ocorrer em circunstâncias bastante específicas e em cálculos complicados da Eletrodinâmica Quântica. A não-equivalência dos dois formalismos é apresentada aqui em um caso mais simples, o oscilador harmônico eletrizado não-relativístico, sujeito à reação da radiação e às flutuações do vácuo.

4.1 A Reação da Radiação e as flutuações eletromagnéticas do vácuo

As situações de não-equivalência dos formalismos de Schrödinger e Heisenberg ocorrem nas situações de interação de um sistema físico, com *finitos* graus de liberdade, com o campo eletromagnético, que apresenta *infinitos* graus de liberdade. Assim, é importante fazer, nessa seção, o estudo do papel da reação da radiação e das flutuações do vácuo para se compreender as

transições e a estabilidade de um sistema físico no formalismo de Heisenberg.

Considera-se um sistema físico constituído por uma partícula eletrizada não-relativística em interação com o campo eletromagnético. A hamiltoniana desse sistema, para os campos no calibre de Coulomb, é dada por:

$$H = mc^2 + \frac{1}{2m}\left[\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}(\vec{r},t)\right]^2 + U(\vec{r}) + \sum_{\vec{k},\alpha} \hbar\omega \left[\frac{1}{2} + a^\dagger_{\vec{k},\alpha}(t)\, a_{\vec{k},\alpha}(t)\right] \quad (4.1)$$

O primeiro termo da expressão acima (mc^2) é um número real, correspondente à massa de repouso da partícula eletrizada e não dá nenhuma contribuição para a evolução dinâmica do sistema. A presença desse termo é necessária apenas para auxiliar a renormalização de massa devido à auto-energia associada à carga puntiforme (esse problema não será discutido aqui). O segundo e o terceiro termos representam a partícula e a interação dela com o campo de radiação quantizado $\vec{A}$, dado por

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\vec{k}} \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{V\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}} \hat{\epsilon}(\vec{k},\lambda)\left[a_{\vec{k}\alpha}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + a^\dagger_{\vec{k}\alpha}(t)e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\right], \quad (4.2)$$

Os a's são os operadores de criação e aniquilação, cujas relações de comutação são

$$\begin{aligned} \left[a_{\vec{k}\alpha}, a_{\vec{k}'\alpha'}\right] &= 0 \\ \left[a^\dagger_{\vec{k}\alpha}, a^\dagger_{\vec{k}'\alpha'}\right] &= 0 \\ \left[a_{\vec{k}\alpha}, a^\dagger_{\vec{k}'\alpha'}\right] &= \delta^3_{\vec{k},\vec{k}'}\,\delta_{\alpha,\alpha'}\,. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Finalmente, o último termo de (4.1) é a hamiltoniana da radiação eletromagnética.

A expressão (4.1) pode ser reescrita para representar em separado o sistema (partícula), H_S, a radiação, H_R, e a interação entre sistema e radiação, H_I:

$$H = \underbrace{mc^2 + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + U(\vec{r})}_{H_S} + \underbrace{\sum_{\vec{k},\alpha} \hbar\omega \left[\frac{1}{2} + a^{\dagger}_{\vec{k},\alpha}(t)\, a_{\vec{k},\alpha}(t)\right]}_{H_R} + \underbrace{+\frac{q^2}{2mc^2}\vec{A}^{\,2} - \frac{q}{mc}\vec{p}\cdot\vec{A}}_{H_I}. \tag{4.4}$$

Os auto-estados e auto-valores da hamiltoniana da partícula são representados pela equação

$$H_S|\,a\rangle = \epsilon_a|\,a\rangle, \tag{4.5}$$

na qual a energia ϵ_a é o autovalor da hamiltoniana H_S, correspondente ao estado estacionário $|\,a\rangle$. O estado fundamental da radiação ou *vácuo* (sem fótons) é representada por $|\text{vac}\rangle$ e a combinação desses estados é dada por $|\text{vac}, a\rangle \equiv |\text{vac}\rangle|\,a\rangle$.

Dalibard *et al.* [44] estudaram as contribuições das flutuações do vácuo e da reação da radiação para as transições entre os estados $|\,a\rangle$, acompanhadas de emissão de radiação no caso do átomo de hidrogênio. Usando um cálculo perturbativo no contexto do formalismo de Heisenberg, eles resolveram a hamiltoniana total (4.4) e obtiveram até primeira ordem na constante de estrutura fina, $e^2/\hbar c$, uma expressão para a variação da energia da partícula com o tempo:

$$\langle \text{vac}, a | \frac{dH_S}{dt} | \text{vac}, a \rangle = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3} \langle a | (\ddot{\vec{r}})^2 | a \rangle +$$

$$+\frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\left[\sum_{b\,(\epsilon_b > \epsilon_a)} \langle a | \ddot{\vec{r}} | b \rangle \cdot \langle b | \ddot{\vec{r}} | a \rangle - \sum_{b\,(\epsilon_b < \epsilon_a)} \langle a | \ddot{\vec{r}} | b \rangle \cdot \langle b | \ddot{\vec{r}} | a \rangle \right]. \tag{4.6}$$

Foi utilizada, também, a aproximação de dipolo, na qual considera-se que somente campos que dependem apenas do tempo, $\vec{A}(0,t)$, contribuem significativamente para a dinâmica do sistema. Outra aproximação considerada e compatível com essa, foi a exclusão de freqüências altas. A freqüência de corte para a radiação, ω_M, deve ser muito maior que as freqüências características do sistema em consideração, ω_0, mas é muito menor que a freqüência Compton, a partir da qual um tratamento relativístico faz-se necessário,

$$\omega_0 \ll \omega_M \ll \frac{mc^2}{\hbar}. \tag{4.7}$$

O primeiro termo do lado direito da expressão (4.6) é a contribuição da reação da radiação. O segundo e o terceiro termos são contribuições das forças de flutuação do vácuo. Observa-se que, se a reação da radiação agisse sem a presença das flutuações do vácuo atuando no sistema (segundo e terceiro termos nulos), o estado fundamental da partícula não seria estável, já que o primeiro termo de (4.6) seria um número negativo não nulo. Por exemplo, se essa expressão se referir a um elétron atômico, a sua energia continuaria diminuindo e esse átomo não poderia ser estável. Esse resultado coincide com os da Eletrodinâmica Clássica, na qual a inevitável emissão de radiação não permitiria a estabilidade do átomo.

Inserindo o operador identidade $\sum_b |b\rangle\langle b|$ no termo de reação da radiação e usando o fato de $\ddot{\vec{r}}$ ser hermiteano ($\ddot{\vec{r}} = -\frac{e^2\vec{r}}{mr^3}$), a expressão (4.6) pode ser escrita na forma

$$\langle \text{vac}, a|\frac{dH_S}{dt}|\text{vac}, a\rangle = -\frac{4}{3}\frac{e^2}{c^3}\sum_{b(\epsilon_b<\epsilon_a)} \langle a|\ddot{\vec{r}}|b\rangle \cdot \langle b|\ddot{\vec{r}}|a\rangle. \tag{4.8}$$

Se a reação da radiação é levada em conta juntamente com as forças de flutuação do vácuo, observa-se, na expressão (4.8), que o sistema em algum estado excitado perde energia até que esteja no estado fundamental. Assim, o estado fundamental não pode ser estável sem a presença das flutuações do vácuo, que, nesse estado, contrabalançam exatamente a perda de energia devido à reação da radiação. Se a reação da radiação atuasse "sozinha", o estado fundamental colapsaria e a relação de comutação $[q, p_x] = i\hbar$ não seria válida [44].

Um indicativo da participação das flutuações do vácuo na estabilidade e transições atômicas é um resultado teórico importante [45]. A confirmação experimental [46, 47] de que as taxas de transição atômicas mudam significativamente (por um fator 20 em alguns casos), quando um feixe atômico viaja entre dois espelhos bons condutores, indicam que os modos dos campos de ponto-zero são alterados pela presença deles. Uma descrição semiclássica dos experimentos de Jhe *et al.* [46] foi feita por França, Marshall e Santos em [31]. Foi feito também um experimento na região de freqüências de rádio do espectro em que os resultados da Eletrodinâmica Quântica de Cavidades para transições de dipolo atômicos são reproduzidos macroscopicamente, utilizando-se um radiador dipolar entre espelhos condutores, atestando a natureza clássica do fenômeno [48, 49].

Dalibard *et al.* [44] afirmam: "*todos os efeitos da reação da radiação, que são independentes de $\hbar$, são completamente idênticos aos efeitos deduzidos da eletrodinâmica clássica. Além disso, todos os efeitos das flutuações do vácuo, que são proporcionais a $\hbar$, podem ser interpretados como vibrações dos elétrons induzidas por um campo flutuante, apresentando a energia de $\hbar\omega/2$*

por modo de vibração". Além disso, em inúmeras situações, das quais trata a Eletrodinâmica Estocástica, os campos de vácuo podem ser substituídos com sucesso por campos clássicos estocásticos [2, 40].

4.2 O oscilador harmônico segundo o formalismo de Heisenberg

Um oscilador harmônico não relativístico (freqüência ω_0, e massa m) em interação com os campos do vácuo, apresenta hamiltoniana na forma [40]

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega_0^2\vec{r}^{\,2} + H_R, \tag{4.9}$$

com $\vec{A}$ dado por (4.2). A hamiltoniana para os campos de radiação pode ser representada por

$$H_R = \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar\,\omega_k \left(a^\dagger_{\vec{k},\lambda} a_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2}\right). \tag{4.10}$$

com as relações de comutação para os operadores a's dadas em (4.3).

É possível mostrar que a equação de movimento para o operador de posição $\vec{r}(t)$ é dada por [40]

$$\ddot{\vec{r}} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{e}{m}\left[\vec{E}_0(t) + \vec{E}_{RR}(t)\right] \simeq \frac{e}{m}\vec{E}_0(t) + \frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3}\,\dddot{\vec{r}}, \tag{4.11}$$

na qual $\vec{E}_0(t)$ é o operador campo elétrico do vácuo (isto é, livre da influência da partícula) e $e\vec{E}_{RR}(t) \simeq 2e^2\,\dddot{\vec{r}}\,(t)/3c^3$ é a força de reação da radiação. A equação (4.11) é uma aproximação não relativística adequada desde que a partícula apresente uma massa grande ($mc^2 \gg \hbar\omega_0$), de modo que apenas

comprimentos de onda longos contribuem para $\vec{E}_0(t)$. Nessa aproximação de dipolo, $\vec{E}_0(t)$ não varia significativamente na amplitude de oscilação da partícula e possui uma expressão conhecida (veja [40], pag. 51). Sua componente x pode ser representada por:

$$E_0(t) = i\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\vec{k}}\left(\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}\right)^{\frac{1}{2}}\epsilon_x(\vec{k},\lambda)\left[a_{\vec{k}\lambda}(0)e^{-i\omega_k t} - a^{\dagger}_{\vec{k}\lambda}(0)e^{i\omega_k t}\right]. \quad (4.12)$$

Por simplicidade serão discutidas apenas propriedades da componente x do operador $\vec{r}(t)$, sendo que as propriedades das outras componentes são determinadas analogamente aos cálculos para x.

Usando-se a solução estacionária da equação (4.11) e representando por $q(t)$ a componente x do operador de posição $\vec{r}(t)$, o comutador dos operadores de posição e momento podem ser determinados, obtendo-se [40]:

$$\begin{aligned}[q(t), p_x(t)] &= \left[q(t), m\dot{q}(t) + \frac{e}{c}A_x(t)\right] = [q(t), m\dot{q}(t)] = \\ &= \left(\frac{i\hbar e^2}{2\pi^2 mc^3}\right)\left(\frac{8\pi}{3}\right)\int_0^{\infty} d\omega \frac{\omega^4}{(\omega^2-\omega_0^2)^2+\tau^2\omega^6}, \quad (4.13)\end{aligned}$$

na qual $\tau = 2e^2/3mc^3$, $\tau\omega_0 \ll 1$ e $A_x(t)$ é a componente x do potencial vetor. Note que se pode escrever o potencial vetor da equação (4.13) como $A_x(t) = A_0(t) - 2e\ddot{q}(t)/3c^2$. Aqui $A_0(t)$ está associado com os campos de vácuo, correspondentes à (4.12) (veja [50]). $A_{RR}(t) = -2e\ddot{q}(t)/3c^2$ é o potencial vetor associado com a força de reação da radiação ($eE_{RR} = 2e^2\dddot{q}(t)/3c^3$). Se $\omega_0 = 0$, a equação (4.13) conduz ao resultado da relação de comutação de uma particula carregada livre [53]. Essa situação é particularmente interessante. mas não será discutida aqui. O cálculo da integral (4.13) fornece

$$[q(t), p_x(t)] = i\hbar, \tag{4.14}$$

como é mostrado em [40] e [54, 55, 56]. A origem da constante $\hbar$ em (4.14) pode ser identificada como sendo as flutuações do vácuo, de densidade espectral $\rho_0 = \hbar\omega^3/2\pi^2c^3$ (energia média de $\hbar\omega/2$ por modo de oscilação). Será visto mais adiante as implicações dos resultados (4.12), (4.13) e (4.14) para o formalismo de Schrödinger no qual o operador de momento é representado por

$$p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \tag{4.15}$$

na qual a constante $\hbar$ em (4.15) pode ser considerada como tendo sua origem nas flutuações eletromagnéticas do vácuo, como em (4.14).

Outro resultado importante que se segue do formalismo de Heisenberg para o oscilador harmônico é que $\langle \text{vac}|q|\text{vac}\rangle = 0$, e o valor médio de $q^2(t)$ é dado por

$$\langle \text{vac}|q^2(t)|\text{vac}\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega_0} \tag{4.16}$$

no regime estacionário. Esse resultado é obtido a partir da solução exata para a componente x na equação (4.11). O campo quantizado $E_0(t)$ dado por (4.12) é utilizado para se obter a solução estacionária . Note que o campo $E_0(t)$ é um processo estocástico gaussiano (veja [40], seção 2.11). Conseqüentemente a distribuição de probabilidade normalizada para a coordenada $q(t) = x$ é dada por (veja [40], pag. 42).

$$P_0(x) = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{m\omega_0 x^2}{\hbar}\right). \tag{4.17}$$

A expressão (4.16) significa que a energia do estado fundamental do oscilador harmônico é $\hbar\omega_0/2$. Esse mesmo resultado, contido nas expressões (4.16) e (4.17), pode ser obtido considerando campos clássicos presentes no vácuo [33, 50].

A constante $\hbar$, contida nas expressões (4.16) e (4.17), também tem origem no campo eletromagnético do vácuo, de densidade espectral $\rho_0 = \hbar\omega^3/2\pi^2c^3$.

4.3 O oscilador harmônico eletrizado de acordo com o formalismo de Schrödinger

Como foi explicado anteriormente, a estabilidade e as transições atômicas podem ser entendidas pela atuação das forças de flutuação do vácuo e da força de reação da radiação. Sem a participação delas não pode haver decaimento de um estado excitado e o estado fundamental não seria estável [44, 45, 46, 47, 31]. Portanto, essas forças também devem, *necessariamente*, ser levadas em conta no formalismo de Schrödinger.

Nessa seção serão apresentados dois casos no tratamento do oscilador harmônico no formalismo de Schrödinger. Um caso com os campos eletromagnéticos clássicos e o outro, com os campos quantizados.

Campos do vácuo clássicos

Considerando a aproximação de dipolo (aproximação de onda longa), a equação de Schrödinger unidimensional assume a forma [52]

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c}A_x(t)\right)^2 + \frac{m\omega_0^2x^2}{2}\right]\psi(x,t), \qquad (4.18)$$

na qual $A_x(t)$ é a componente x do potencial vetor agindo na partícula carregada. Não se conhece solução exata, isto é, não perturbativa de (4.18) no caso em que $A_x(t)$ é um operador quântico (veja (4.2)). Por isso $A_x(t)$ será suposto um campo *clássico* estocástico e a abordagem desta seção é considerada semiclássica porque a constante de Planck $\hbar$ está presente em três termos de (4.18): os operadores diferenciais $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, $-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$, e $A_x(t)$ que é proporcional a $\sqrt{\hbar}$ (ver (4.2)). A forma analítica do campo clássico $A_x(t)$ ainda deve ser determinada. $A_x(t)$ é uma função somente de t (independente de x). Deve-se notar que essas considerações são válidas para $mc^2 \gg \hbar\omega_0$.

A equação de Schrödinger independente do tempo possui uma solução para o estado fundamental $\phi_0(x)$ dada por

$$\phi_0(x) = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar}\right), \tag{4.19}$$

na qual

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \phi_0^2(x) x^2 = \frac{\hbar}{2m\omega_0}. \tag{4.20}$$

A equação de Schrödinger dependente do tempo (4.20) possui uma solução exata, que pode ser escrita como [52]

$$\psi(x,t) = \phi_0\left(x - q_c(t)\right) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\left(p_c(t) + \frac{e}{c}A_x(t)\right)x - g(t)\right]\right\}, \tag{4.21}$$

na qual $q_c(t)$, $p_c(t)$ e $g(t)$ são funções clássicas ordinárias de t no conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, isto é, não são operadores quânticos. Suas expressões devem ser determinadas substituindo-se (4.21) em (4.18). Esse foi um procedimento desenvolvido por Schrödinger no seu célebre artigo "*The Continuous Transitions from Micro to Macro-Mechanics*" ([42], pag. 41). Fazendo-se a substituição indicada e impondo a validade das expressões obtidas para valores arbitrários de x e t, obtêm-se:

$$p_c(t) = m\dot{q}_c(t), \tag{4.22}$$

e

$$\dot{p}_c(t) = -m\omega_0^2 q_c(t) - \frac{e}{c}\frac{\partial A_x(t)}{\partial t}. \tag{4.23}$$

Também se obtém a equação $2\dot{g}(t) = \hbar\omega_0 + m\dot{q}_c^2(t) - m\omega_0^2 q_c^2(t)$, que pode ser escrita como

$$g(t) = \frac{\hbar\omega_0 t}{2} + \frac{m}{2}\int_0^t dt' \left(\dot{q}_c^2(t') - \omega_0^2 q_c^2(t')\right). \tag{4.24}$$

Combinam-se as equações (4.22) e (4.23), obtendo-se:

$$m\ddot{q}_c(t) = -m\omega_0^2 q_c(t) + eE_x(t), \tag{4.25}$$

na qual foi usado $cE_x(t) = -\partial A_x(t)/\partial t$. Cada termo da equação (4.25) é uma função de t no conjunto $\mathbb{C}$. Além disso, de acordo com as pressuposições anteriores (clássicas):

$$E_x(t) = E_0(t) + E_{RR}(t), \tag{4.26}$$

na qual $E_0(t)$ é o campo clássico estocástico do vácuo e $E_{RR}(t)$ é o campo clássico de reação da radiação (a partícula é carregada, portanto a reação da radiação deve contribuir para $E_x(t)$).

O campo elétrico do vácuo $E_0(t)$ na sua forma clássica estocástica, pode ser obtido a partir da expressão quantizada (4.12) fazendo-se a substituição dos operadores $a_{\vec{k}\lambda}(0)$ e $a^\dagger_{\vec{k}\lambda}(0)$ pelos termos $e^{i\theta_{\vec{k}\lambda}}$ e $e^{-i\theta_{\vec{k}\lambda}}$, respectivamente, isto é

$$E_0(t) = i\sum_{\lambda=1}^{2}\sum_{\vec{k}}\left(\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}\right)^{\frac{1}{2}}\epsilon_x(\vec{k},\lambda)\left[e^{-i(\omega_k t+\theta_{\vec{k}\lambda})} - e^{i(\omega_k t-\theta_{\vec{k}\lambda})}\right]. \qquad (4.27)$$

(veja [50], [40] ou capítulo 1 para maiores detalhes). As fases $\theta_{\vec{k}\lambda}$ são aleatórias e estatisticamente independentes. Este procedimento é muito antigo, como se pode ver nos trabalhos de Boyer [50] (1975) e de Marshall [51] (1963).

A expressão para a reação da radiação $E_{RR}(t)$ é mais difícil de se obter, pois, de acordo com o formalismo de Schrödinger, a partícula não possui uma localização precisa. Pode-se apenas afirmar que

$$|\psi(x,t)|^2 = \left(\frac{m\omega_0}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left[-\frac{m\omega_0(x-q_c(t))^2}{\hbar}\right], \qquad (4.28)$$

é a distribuição de probabilidade da posição da partícula. Para se obter a expressão exata para (4.28) deve-se resolver (4.25), que depende da força de reação da radiação $eE_{RR}(t)$. No entanto essa força pode ser determinada para o caso de massa grande ($mc^2/\hbar\omega_0 \to \infty$). Nessa situação pode-se considerar:

$$eE_{RR}(t) = \frac{2e^2}{3c^3}\,\dddot{q}_c\,(t) \qquad (4.29)$$

como sendo uma boa aproximação, pois a gaussiana (4.28) é tão "estreita", que pode-se considerar que a partícula possui trajetória. A partir dessas considerações a expressão (4.29) é válida no caso em que $mc^2 \gg \hbar\omega_0$, que é consistente com a aproximação de onda longa usada anteriormente. Portanto, a equação (4.25) pode ser escrita como

$$\ddot{q}_c(t) + \omega_0^2 q_c(t) \simeq \frac{e}{m}E_0(t) + \frac{2e^2}{3mc^3}\,\dddot{q}_c\,(t). \qquad (4.30)$$

Note que a equação (4.30) para a variável clássica $q_c(t)$ é formalmente idêntica à equação (4.11) para o operador $\vec{r}(t)$, que necessita da reação da radiação e dos campos do vácuo para preservar as relações de comutação (4.14). Além disso a equação (4.11) foi obtida fazendo-se a aproximação de onda longa, que é consistente com a condição $mc^2 \gg \hbar\omega_0$.

Utilizando-se a solução estacionária $q_c(t)$ para a equação (4.30) e a expressão (4.21), pode-se calcular o valor médio para x^2 e verificar como os campos do vácuo contribuem para seu valor de equilíbrio. Esse resultado é obtido através da integral na variável x, pois se está utilizando a interpretação probabilística de Born, e através da média nas fases aleatórias presentes no campo elétrico clássico estocástico do vácuo, a saber:

$$\langle \text{vac}|x^2|\text{vac}\rangle \equiv \langle \text{vac}| \int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x,t)|^2 \, x^2 |\text{vac}\rangle, \tag{4.31}$$

Aqui $\langle \text{vac}| \;\; |\text{vac}\rangle$ representa uma *média nas fases aleatórias* [50, 40]. Note que $\langle \text{vac}|x|\text{vac}\rangle = \langle \text{vac}|q_c(t)|\text{vac}\rangle = 0$ no regime estacionário.

Levando-se em conta a expressão (4.19) pode-se mostrar que

$$\langle \text{vac}|x^2|\text{vac}\rangle = \langle \text{vac}| \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_0^2(x - q_c(t)) \left[(x - q_c(t))^2 + q_c^2(t)\right] |\text{vac}\rangle. \tag{4.32}$$

Usando o resultado (4.21), obtém-se

$$\langle \text{vac}|x^2|\text{vac}\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega_0} + \langle \text{vac}|q_c^2(t)|\text{vac}\rangle. \tag{4.33}$$

O resultado para $\langle \text{vac}|q_c^2(t)|\text{vac}\rangle$ é bem conhecido. Os detalhes de cálculo podem ser encontrados no trabalho de Boyer [50] (veja seção III-D). Encontra-se $\langle \text{vac}|q_c^2(t)|\text{vac}\rangle = \hbar/2m\omega_0$, portanto

$$\langle \text{vac}|x^2|\text{vac}\rangle = \frac{\hbar}{m\omega_0}. \tag{4.34}$$

Esse cálculo semiclássico conduz a um resultado para a energia do estado fundamental que é o dobro do valor correto. Note que o cálculo semiclássico da mesma quantidade no quadro de Heisemberg (ver (4.16) e o trabalho de Boyer [50]), fornece $\frac{\hbar\omega_0}{2}$ para a energia do estado fundamental.

Campos do vácuo quantizados

Na situação em que os campos também estão quantizados, deve-se considerar o potencial vetor $A_x(t)$, da equação de Schrödinger (4.18), dado por $A_x(0,t)$, definido previamente na expressão (4.2). A presença dos operadores de criação e aniquilação $a^\dagger_{\vec{k}\lambda}(t)$ e $a_{\vec{k}\lambda}(t)$, introduzem grande dificuldade matemática para a solução da equação de Schrödinger (4.18). Não se conhece solução exata desta equação para o oscilador harmônico não relativístico na qual se leva em conta os campos do vácuo da eletrodinâmica quântica. Por solução exata quer-se dizer solução não-perturbativa, da qual se pode calcular a energia do estado fundamental do oscilador e a correspondente distribuição de probabilidades.

4.4 Em busca do motivo para as diferenças entre os dois formalismos

Baseado no estudo do oscilador harmônico nos formalismos de Heisenberg e de Schrödinger, observou-se que há diferenças entre seus resultados, situação ilustrada pelas expressões (4.16) e (4.34), que diferem por um fator dois. Pode-se concluir que a reação da radiação não é a única responsável por essa discrepância. A principal razão é que as flutuações do vácuo entram duas vezes nos cálculos do formalismo de Schrödinger semiclássico, representado pela equação (4.18). O operador de momento $p_x = -i\hbar\partial/\partial x$ já contém uma

parte apreciável dos efeitos não-relativísticos do vácuo (veja as expressões (4.11),(4.13) e (4.14) discutidas no formalismo de Heisenberg). Uma conseqüência clara desse estudo é que o operador de energia cinética usado no formalismo de Schrödinger, dado por

$$\frac{p_x^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \tag{4.35}$$

é a principal maneira pela qual as flutuações do vácuo são incluídas na descrição do movimento de partículas carregadas no formalismo de Schrödinger.

O operador (4.35) possui um papel muito importante na descrição dos fenômenos microscópicos. Um exemplo muito relevante é o tunelamento, descoberto em 1927 com o uso da mecânica ondulatória de Schrödinger e da interpretação probabilística de Max Born da função de onda [57]. Como é mencionado em [58], nós temos que reconhecer que "*a transmissão de partículas através de barreiras de potencial de altura e espessura finitas não é de visualização tão fácil na formulação de Heisenberg-Bohr da mecânica quântica, que fala de partículas atravessando por cima da barreira com uma violação temporária da conservação da energia*".

Em resumo, as formulações de Heisenberg e Schrödinger não parecem ser equivalentes, e as diferenças sutis entre elas merecem muito mais atenção do que tem recebido até o momento. Essa falta de equivalência redescoberta por nós recentemente [41], recebeu a atenção da comunidade científica imediatamente após sua publicação [59]

Capítulo 5

Conclusão Geral

Nos capítulos 2 e 3 desse trabalho apresentaram-se contribuições originais no contexto da Eletrodinâmica Estocástica a respeito de novos efeitos da radiação de ponto-zero.

No capítulo 2 propôs-se a existência de um ruído adicional ao ruído de Nyquist em um circuito elétrico RLC, denominado ruído magnético, que tem origem na atuação dos campos magnéticos da radiação de ponto-zero no indutor do circuito. Mostrou-se que essa nova predição da Eletrodinâmica Estocástica poderá ser verificada experimentalmente.

No capítulo 3 inclui-se a atuação da radiação de ponto-zero em uma partícula sujeita ao escape de um poço de potencial através de uma barreira. Mostrou-se que para temperaturas baixas, $T \to 0$, a taxa de escape através da barreira de potencial não se anula. Esse resultado original do trabalho ajusta-se perfeitamente aos dados experimentais das taxas de recombinação das moléculas de CO com a cadeia de beta-hemoglobina medidas por Alberding *et al*[38].

No capítulo 4 apresentou-se um modelo para o oscilador harmônico car-

regado interagindo com o campo eletromagnético (incluindo a radiação de ponto-zero), no qual os formalismos de Schrödinger e Heisenberg não são equivalentes. Os nossos cálculos estão de acordo com a conjectura de Dirac de 1963 na qual afirma a não equivalência dos dois formalismos para sistemas em interação com o campo eletromagnético. A vantagem do exemplo do oscilador harmônico, apresentado aqui, consiste principalmente na simplicidade da sua abordagem para o estudo de um tema tão sutil.

Apêndice A

Teorema de Wiener-Kintchine

Freqüentemente é preferível estudar as características de uma determinada grandeza flutuante $\xi(t)$ fazendo sua *análise de Fourier*. As suas amplitudes e fases podem fornecer informações mais úteis do que avaliar diretamente as flutuações de $\xi(t)$ com o tempo.

Para se evitar problemas de convergência, faz-se uma redefinição de $\xi(t)$:

$$\xi(t,T) = \begin{cases} \xi(t) & \text{se } |t| \leq T \\ 0 & \text{se } |t| > T \ . \end{cases} \tag{A.1}$$

Esse procedimento matemático não altera a descrição dos fenômenos físicos desde que o valor usado para T seja muito maior que os intervalos de tempo em que a grandeza flutuante $\xi(t)$ atua. Dessa forma, utiliza-se $\xi(t,T)$ nos cálculos associados à análise de Fourier de $\xi(t)$. Em certas situações pode-se tomar o limite $T \to \infty$ posteriormente. No desenvolvimento desse trabalho foi omitido essa redefinição das funções estocásticas, sem prejuízo dos resultados obtidos.

As integrais de Fourier de $\xi(t,T)$ ficam:

$$\tilde{\xi}(\omega, T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \xi(t,T)\, e^{i\omega t}\, dt \tag{A.2}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \xi(t)\, e^{i\omega t}\, dt.$$

$$\xi(t,T) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}(\omega, T)\, e^{-i\omega t}\, dt. \tag{A.3}$$

Para $\xi(t) \in \mathbb{R}$, decorre da expressão acima que

$$\tilde{\xi}^*(\omega, T) = \tilde{\xi}(-\omega, T). \tag{A.4}$$

A *função de correlação*, $K(\tau)$, de $\xi(t)$ é definida pela seguinte expressão:

$$K(\tau) = \langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle. \tag{A.5}$$

Os colchetes angulares $\langle\ \rangle$ representam a média sobre o espaço de valores possíveis de $\xi(t)$ (*ensemble*). Freqüentemente deve-se usar $\xi(t,T)$ ao invés de $\xi(t)$. Devido à definição (A.1), as duas possibilidades coincidem no intervalo $[-T, T]$:

$$\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = \langle \xi(t,T)\xi(t+\tau,T) \rangle \text{ , para } t,\ t+\tau \in [-T,T]. \tag{A.6}$$

No caso em que $\xi(t)$ é um *processo estocástico estacionário*, o mecanismo que produz as flutuações não se altera no decurso do tempo e a expressão acima é independente de t :

$$\langle \xi(t)\xi(t+\tau) \rangle = \langle \xi(0)\xi(\tau) \rangle \text{ , para qualquer valor de } t. \tag{A.7}$$

Além disso, para um tempo suficientemente longo, a média no *ensemble* coincide com a média no tempo, fato denominado *hipótese ergódiga*:

$$\langle \xi(0)\xi(\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\xi(t+\tau)\,dt. \tag{A.8}$$

A *densidade espectral* de $\xi(t,T)$ é definida como:

$$S_\xi(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{\pi}{T}\left|\tilde{\xi}(\omega,T)\right|^2. \tag{A.9}$$

Para $\xi(t) \in \mathbb{R}$, tem-se que, tanto a função de correlação $K(\tau)$ quanto a densidade espectral $S_\xi(\omega)$, são funções pares e reais:

$$\begin{aligned} S_\xi(\omega) &= S_\xi(-\omega) \\ S_\xi^*(\omega) &= S_\xi(\omega) \\ K(\tau) &= K(-\tau) \\ K^*(\tau) &= K(\tau) \end{aligned} \tag{A.10}$$

O Teorema de Wiener-Khintchine relaciona essa densidade espectral $S_\xi(\omega)$ com a função de correlação $K(\tau)$ (veja capítulo 1 de [36] ou capítulo 15 de [37]). Para um *processo estocástico estacionário* e *ergódigo*, pode-se mostrar:

$$
\begin{aligned}
S_\xi(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle \xi(t)\xi(t+\tau)\rangle e^{i\omega\tau} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} d\tau \cos(\omega\tau)\,\langle \xi(t)\xi(t+\tau)\rangle \qquad \text{(A.11)}
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
\langle \xi(t)\xi(t+\tau)\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_\xi(\omega)\, e^{-i\omega\tau} \\
&= \int_{0}^{\infty} d\omega \cos(\omega\tau)\, S_\xi(\omega). \qquad \text{(A.12)}
\end{aligned}
$$

Essas são as expressões do Teorema de Wiener-Khintchine, que podem ser obtidas a partir do desenvolvimento das (A.1)–(A.10).

Pode-se ainda mostrar que, a partir de (A.10) e (A.12), tem-se:

$$
\langle \xi(\omega)\xi^*(\omega')\rangle = \delta(\omega-\omega')\, S_\xi(\omega)\,. \qquad \text{(A.13)}
$$

Referências Bibliográficas

[1] T. H. Boyer, Phys. Rev. D 11 (1975) 790.

[2] L. de la Peña, A. M. Cetto, The Quantum Dice. An Introduction to the Stochastic Electrodynamics, Kluwer Academic, Dordrecht, 1996.

[3] N. P. Klepikov, Sov. Phy. Usp. 28, 6 (1985) 506.

[4] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grymberg, Photons and Atoms, Wiley, New York, 1989.

[5] T. H. Boyer, Phys. Rev. 186 (1969) 1304.

[6] T. H. Boyer, Phys. Rev. 182 (1969) 1374.

[7] R. Blanco, H. M. França, E. Santos, Phys. Rev. A 43 (1991) 693.

[8] T. H. Boyer, Phys. Rev. A 29 (1984) 2389.

[9] A. V. Barranco, S. A. Brunini, H. M. França, Phys. Rev. A 39 (1989) 5492.

[10] T. H. Boyer, Phys. Rev. 180 (1969) 10.

[11] J. B. Johnson, Phys. Rev. 32 (1928) 97.

[12] H. Nyquist, Phys. Rev. 32 (1928) 110.

[13] H. B. Callen, T. E. Welton, Phys. Rev. 83 (1951) 34;

veja também H. B. Callen, R. Greene, Phys. Rev. 86 (1952) 702;

J. L. Jackson, Phys. Rev. 87 (1952) 471;

R. F. Greene, H. B. Callen, Phys. Rev. 88 (1952) 1387.

[14] C. W. Gardiner, Quantum Noise, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

[15] R. H. Koch, D. J. Van Harlingen, J. Clarke, Phys. Rev. Lett. 45 (1980) 2132.

[16] R. H. Koch, D. J. Van Harlingen, J. Clarke, Phys. Rev. Lett. 47 (1981) 1216.

[17] R. H. Koch, D. J. Van Harlingen, J. Clarke, Phys. Rev. B 26 (1982) 74.

[18] V. L. Ginzburg, Applications of Electrodynamics in Theoretical Physics and Astrophysics, Gordon and Breach, New York, 1989, capítulo 14.

[19] Y. Klimontovich, Phys. of Vibrations 8 (2000) 260.

[20] R. Blanco, H. M. França, E. Santos e R. C. Sponchiado, Phys. Lett. A 282 (2001) 349.

[21] A. W. B. Taylor, Superconductivity, Wykeham Publications, London, 1970.

[22] J. I. Cisneros, Ondas eletromagnéticas: fundamentos e aplicações, Editora da UNICAMP, Campinas, 2001.

[23] G. Möllenstedt, W. Bayh, Naturwissenschaften 49 (1962) 81.

[24] A. J. Faria, H. M. França, R. Sponchiado, Phys. Lett. A 295 (2002) 8-12.

[25] H. M. França, R. B. B. Santos, Phys. Lett. A 238 (1998) 227.

[26] H. M. França, R. B. B. Santos, Phys. Lett. A 251 (1999) 100.

[27] H. A. Kramers, Physica 7 (1940) 284.

[28] P. Hänggi, P. Talkner, M. Borkovec, Rev. Mod. Phys. 62, 2 (1990) 251.

[29] T. H. Boyer, Foundations of Radiation Theory and Quantum Electrodynamics, edited. by A. O. Barut, Plenum, New York, 1980, p.59.

[30] R. Blanco, K. Dechoum, H. M. França and E. Santos, Physical Review A 57 (1998) 724, seção II, equação (2.8).

[31] H. M. França, T. W. Marshall, E. Santos, Physical Review A 45 (1992) 6436.

[32] H. M. França, H. Franco, C. P. Malta, Eur. J. Phys. 18 (1997) 343.

[33] P.W. Milonni, Phys. Rep. 25 (1976) 1.

[34] S. Chandrasekhar, Rev. Mod. Phys. 15 (1943) 1.

[35] W. T. Coffey, Yu P. Kalmykov, J. T. Waldron, The Langevin Equation: with applications in physics, chemistry and electrical engineering, Word Scientific, Singapore, 1996.

[36] C. W. Gardiner, Handbook of Stochastic Methods, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[37] F. Reif, Fundamentals of statistical and thermal physics, McGraw-Hill, Auckland, 1985.

[38] N. Alberding, R. H. Austin, K. W. Beeson, S. S. Chan, L. Eisenstein, H. Frauenfelder, T. M. Nordlund, Science 192 (1976) 1002. See also reference [28] p. 254.

[39] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, 3nd ed., Wiley, New York, 1998.

[40] P. W. Milonni, The Quantum Vacuum: An Introduction to Quantum Electrodynamics, Academic Press, Boston, 1994, chapter 2.

[41] A. J. Faria, H. M. França, C. P. Malta, R. Sponchiado, Phys. Lett. A 305 (2002) 322.

[42] E. Schrödinger, Collected Papers on Wave Mechanics, Blackie & Son Limited, London, 1929, pg. 45.

[43] P.A.M. Dirac, Lectures on Quantum Field Theory, Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, New York, 1966, Number Three. Veja também Phys. Rev. 139B (1965) 684.

[44] J. Dalibard, J. Dupont-Roc and C. Cohen-Tannoudji, J. Physique 43 (1982) 1617; 45 (1984) 637.

[45] Veja diversos artigos sobre esse tema publicado em Cavity Quantum Electrodynamics, edited by P.R. Berman, special issue of Adv. At. Mol. Opt. Phys. Suppl. 2 (1994), particularmente o artigo de E.A. Hinds.

[46] W. Jhe, A. Anderson, E.A. Hinds, D. Meschede, L. Moi and S. Haroche, Phys. Rev. Lett. 58 (1987) 666.

[47] S. Haroche and D. Kleppner, Phys. Today 42(1) (1989) 24.

[48] J.P. Dowling, "Spontaneous Emission in Cavities: How Much More Classical Can You Get?", Found. Phys. 23 (1993) 895.

[49] F.B. Seeley, J.E. Alexander, R.W. Connatser, J.S. Conway and J.P. Dowling, Am. J. Phys. 61 (1993) 545.

[50] T.H. Boyer, Phys. Rev. D 11 (1975) 809.

[51] T. W. Marshall; Proc. Royal Soc. (London) 276A (1963) 475.

[52] H.M. França and M.T. Thomaz, Phys. Rev. D 31 (1985) 1337. Erratum: Phys. Rev. D 38 (1988) 2651. Veja também H.M. França and T.W. Marshall, Phys. Rev. A 38 (1988) 3258.

[53] P.W. Milonni, Phys. Lett. A 82 (1981) 225.

[54] A.A. Sokolov and V.S. Tumanov, Sov. Phys. JETP 3 (1957) 958.

[55] R. Schiller and H. Tesser, Phys. Rev. A 3 (1971) 2035.

[56] P.W. Milonni, Am. J. Phys. 49 (1981) 177.

[57] F. Hund, Z. Phys. 40 (1927) 742.

[58] E. Merzbacher, Phys. Today, 55(8) (2002) 44.

[59] Carlos Fioravanti e "A força do vácuo", publicado na revista Pesquisa (FAPESP), n.88 (2003), pg. 52.