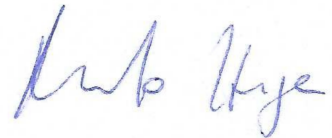


Universidade de São Paulo  
Instituto de Física

# Interação eletromagnética de longo alcance entre nêutrons

Murillo Soares de Godoy



Orientador: Prof. Dr. Renato Higa

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto  
de Física como requisito parcial para a obtenção do  
título de Mestre em Ciências.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Renato Higa - Orientador (IFUSP)

Prof. Dr. Bruno Omar El-Bennich (UNIFESP)

Prof. Dr. Diogo Rodrigues Boito (IFSC)

São Paulo, 2024

**FICHA CATALOGRÁFICA**  
**Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação**  
**do Instituto de Física da Universidade de São Paulo**

Godoy, Murillo Soares de

Interação eletromagnética de longo alcance entre nêutrons. São Paulo, 2024.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, Instituto de Física, Depto. de Física Nuclear.

Orientador: Prof. Dr. Renato Higa

Área de Concentração: Física Nuclear

Unitermos: 1. Física nuclear; 2. Teoria quântica de campo; 3. Teoria do espalhamento; 4. Nêutrons.

USP/IF/SBI-016/2024

University of São Paulo  
Physics Institute

# Long-range electromagnetic interaction between neutrons

Murillo Soares de Godoy

Supervisor: Prof. Dr. Renato Higa

Thesis submitted to the Physics Institute of the  
University of São Paulo in partial fulfillment of the  
requirements for the degree of Master of Science.

Examining Committee:

Prof. Dr. Renato Higa - Supervisor (IFUSP)

Prof. Dr. Bruno Omar El-Bennich (UNIFESP)

Prof. Dr. Diogo Rodrigues Boito (IFSC)

São Paulo, 2024

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente à minha família, em especial minha mãe Valéria, minha irmã Laura, minha cachorra de estimação Charlotte e meu falecido pai José Roberto pelo apoio ao longo da minha vida acadêmica, assim como nos estágios da minha infância e adolescência, talvez mais na forma de puxões de orelha, que também são válidos. Tenho muitas memórias boas de alguns dias tentando explicar alguma ideia a eles, ou então sendo encorajado a continuar estudando. Esse tipo de memória que fez a vida até agora valer a pena.

Gostaria de agradecer ao meu orientador, o Prof. Dr. Renato Higa, pelas discussões que relacionam conceitos físicos muito complicados à primeira vista, mas que sempre conseguiram se fazer acessíveis nos mais diversos níveis, e pelos ensinamentos em técnicas de análise numérica que vi poucas pessoas fazendo.

Gostaria de agradecer a algumas pessoas, que infelizmente já não estão mais tão presentes assim na minha vida, mas que me deram um "empurrão" inicial para o mundo das ciências da natureza, em especial meus amigos Marco Antônio dos Reis, Marco Antônio dos Reis Jr., Lucas Pereira Coutinho da Silva, Andressa Simabucuro, e os professores do ensino médio Emiliano Augusto Chagas, Oertes Souza, Fernanda Zara, e o falecido Ivan L. Esse é um conjunto de pessoas que eu poderia definir como aquelas que eu "gostaria de ser quando crescesse". Não sei se cresci tanto assim até hoje.

Dos amigos da graduação e da pós-graduação, a lista é extensa, mas gostaria de citar com agradecimento especial, por fazer parte dessa fase: Guilherme Ferrari, Breno Agatão, Gabriel Fabiano de Souza, Willian Maximo, João Henrique de Sant'Ana, Thais Abelha, Carolina Spíndola, Leonardo Eiji Tamayose, Caíque Araújo, Christian Talacimon, Nathália Fukase, Joaquim de Paula, Lucas James Faga, André B. Rodrigues, Beatriz Tucci, Fernando Passos, Gustavo Sadao, e por aí vai. Agradeço também aos membros ativos e inativos do grupo de pesquisa mais próximo, sendo eles Pedro Betitto, Leandro Guedes, Vinícius Bet Ader, e Matheus Cichoki. Esses grupos de pessoas com certeza me ensinaram muito mais do que poderia imaginar, e assim como tem sido um prazer para mim ter feito parte da vida deles, talvez o maior privilégio foi poder tê-los na minha vida até hoje.

Gostaria de agradecer também a grandes parceiros, vindos de fora da academia, mas que me apoiaram em diversos momentos: Rodrigo Tenório, Lucas Ribeiro(Lusca), Naomi Gonçalves, Nadhedja Moura, Sabrina Massone, Raquel Dantas Veriato, Reverton Conceição, Felipe Mariotti, Henrique Margarido, João Pedro Frutuoso, Douglas Henrique, Luis Giaccio, Rodrigo Alves, e Karina Mendes.

A respeito de todas as pessoas citadas nos agradecimentos, um pensamento esquisito a respeito do qual sempre me questioneei, e continuo me questionando até hoje é se o nosso mundo pode ser descrito como aleatório (talvez probabilístico) ou determinístico. Esse pensamento também é fortemente incidente em pessoas como Guilherme Ferrari, que sempre divide suas visões e opiniões comigo. Com relação a isso gostaria de propor a minha forma de agradecer à todos vocês, com uma *suposição* (que pode ser entendido aqui como um experimento mental). Vamos supor que, em um dado dia ensolarado, em um país distante, onde existem grandes colinas, um casal apaixonado composto por um homem e uma mulher senta-se no alto de uma dessas montanhas para aproveitar uma ocasião romântica, dessas de começo de namoro. Em um determinado momento, a moça arranca uma pequena flor do chão, coloca as mãos para trás com a flor guardada cuidadosamente, e pergunta a seu amado: "Quantas pétalas você chuta que existem na flor que acabei de esconder atrás de mim?". O rapaz, infelizmente, era azarado (ou sortudo) o suficiente para ter lido alguns dos textos do renomado físico e matemático húngaro-estadunidense John von Neumann (1903 - 1957). Após ter ouvido a pergunta que lhe foi feita, o jovem hesitou - talvez por toda a eternidade - em respondê-la, pois havia se lembrado imediatamente de um dos pensamentos de von Neumann:

*Qualquer pessoa que considere métodos aritméticos para produzir números aleatórios está, é claro, em um estado de pecado.*

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

# Resumo

A interação de Casimir-Polder entre nêutrons foi deduzida pela primeira vez em 1973, porém apenas com polarizabilidades estáticas e valores desatualizados. Cálculos com valores mais precisos e técnicas matemáticas mais rigorosas foram feitos posteriormente, considerando polarizabilidades dinâmicas, sendo relevantes inclusive para realização de experimentos de precisão com nêutrons ultra-frios aprisionados. É conhecido o fato das polarizabilidades dinâmicas terem sido extraídas por meio da teoria de perturbação quiral, que será utilizado como um dos meios de comparação para nossos resultados. O objetivo do presente trabalho é derivar, por meio de técnicas de relações de dispersão uma vez subtraídas na região física, as polarizabilidades dinâmicas do nêutron a partir do espalhamento Compton, que revelam algumas correções de estados intermediários de produção de um pión dentro do modelo da nuvem de píons. A troca de um pión entre nêutrons, chamada de *one pion exchange* (OPE) será a única troca que consideraremos aqui. Posteriormente, comparamos os resultados obtidos para as polarizabilidades com um modelo de expansão em série de potências, e com um modelo fenomenológico já conhecido pela literatura também. Por fim, obtemos resultados para o potencial de Casimir-Polder com os modelos abordados.

**Palavras-chave:** física nuclear; relações de dispersão; polarizabilidade dinâmica; espalhamento Compton.

# Abstract

The Casimir-Polder interaction between neutrons was first deduced in 1973, albeit with only static polarizabilities and outdated values. Subsequent calculations with more precise values and rigorous mathematical techniques were performed, considering dynamic polarizabilities, which are relevant even for precision experiments with ultracold trapped neutrons. It is known that dynamic polarizabilities were extracted through chiral perturbation theory, which will be used as one of the means of comparison for our results. The objective of the present work is to derive, through dispersion relation techniques once subtracted in the physical region, the dynamic polarizabilities of the neutron from Compton scattering, which reveal some corrections of intermediate states of pion production within the pion cloud model. The exchange of a pion between neutrons, called *one pion exchange* (OPE), will be the only exchange we consider here. Subsequently, we compare the results obtained for the polarizabilities with a power series expansion model and with a phenomenological model already known in the literature. Finally, we obtain results for the Casimir-Polder potential with the models discussed.

**Keywords:** nuclear physics; dispersion relations; dynamic polarizability; Compton scattering.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Polarizabilidades do nucleon</b>	<b>12</b>
2.1	Um análogo do eletromagnetismo clássico . . . . .	12
2.2	Operador hamiltoniano eletromagnético para o nucleon . . . . .	14
2.3	Polarizabilidades e espalhamento Compton . . . . .	17
2.4	Decomposição tensorial . . . . .	23
2.5	Amplitudes de L'vov e de Ritus . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Teoria da Resposta e Relações de Dispersão</b>	<b>30</b>
3.1	Panorama de um sistema físico e resposta linear generalizada . . . . .	30
3.2	Continuação analítica da susceptibilidade dinâmica e Relações de Dispersão	33
3.3	Relações de Dispersão Subtraídas . . . . .	37
3.4	Relações de Dispersão aplicadas às amplitudes invariantes . . . . .	39
3.5	Polarizabilidades dinâmicas a partir das amplitudes invariantes . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Teoria de Perturbação Quiral a baixas energias</b>	<b>46</b>
4.1	Lagrangiana fermiônica no limite quiral . . . . .	46
4.2	Quebra da simetria quiral . . . . .	49
4.3	Teoria de Perturbação Quiral de Bárions Pesados . . . . .	50
4.4	Expansão em Pequena Escala (SSE) . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>54</b>
5.1	Polarizabilidades a partir das amplitudes de Ritus . . . . .	54
5.2	Polarizabilidades a partir da LEX . . . . .	56
5.3	Potencial de Casimir-Polder considerando um modelo fenomenológico, LEX, e $HB\chi_{PT}$ . . . . .	63
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>70</b>
	<b>Appendices</b>	<b>73</b>



<b>A</b>	<b>Relações entre amplitudes de Hearn-Leader, L'vov, e Ritus</b>	<b>74</b>
<b>B</b>	<b>Casos importantes das funções-d de Wigner</b>	<b>77</b>
<b>C</b>	<b>Base de Prange, amplitudes de helicidade reduzidas e amplitudes de Ritus</b>	<b>79</b>
<b>D</b>	<b>Pares de Transformadas de Hilbert</b>	<b>82</b>
<b>E</b>	<b>Funções constituintes das partes imaginárias das amplitudes de Ritus</b>	<b>84</b>
	<b>Referências</b>	<b>86</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Ao fim da década dos anos 1940, o físico holandês Hendrik Casimir publicou um trabalho a respeito da interação entre duas placas perfeitamente condutoras e descarregadas [1], que resulta em efeito atrativo a depender da distância, que ficou conhecido como *efeito Casimir*. No mesmo laboratório onde os experimentos de Casimir foram realizados, Philips Laboratory, Hendrik Casimir e Dirk Polder reavaliaram um estudo a respeito de grãos de quartzo em suspensão, cujo modelo havia sido discutido anteriormente por J.T.G. Overbeek. Seus estudos puderam constatar que os grãos em suspensão não respeitavam as conhecidas interações de van der Waals-London de longo alcance, proporcionais a  $1/r^6$ , mas sim proporcionais a  $1/r^7$  devido ao tempo finito de propagação da luz a grandes distâncias. Guiados por um comentário de Niels Bohr, Casimir e Polder puderam rederivar a interação eletromagnética entre duas placas descarregadas do ponto de vista quântico, a partir da energia de ponto zero do vácuo, tendo sido verificada experimentalmente [2, 3].

Para criar uma conexão mais clara entre os efeitos Casimir e Casimir-Polder, podemos dizer que o campo eletromagnético, na visão da teoria quântica de campos, é quantizado em todos os pontos do espaço. Quando inserimos duas placas condutoras em um determinado local, com uma distância de separação fixa e muito pequena, o primeiro estado excitado permitido do vácuo é um estado onde ocorre a troca de dois fótons entre os dois sistemas, resultando em uma carga total nula. Isso significa que a mesma configuração associada às placas paralelas e descarregadas agora é interpretada como a interação entre dois nêutrons.

Curiosamente, o trabalho de Casimir foi pouquíssimo reconhecido até o final da década dos anos 1970, quando as primeiras sugestões experimentais para sondar a estrutura da matéria eletricamente neutra foi sugerida em comparação com a interação de Casimir-Polder, que acumula estudos em física atômica e molecular [5]. Em sistemas estudados como objetos quânticos neutros, como átomos neutros e núcleons como nêutrons, a correspondente flutuação quântica do vácuo é dada pela troca virtual de dois fótons, iterada em todas as ordens por meio de equações dinâmicas, seja equação de Schrödinger

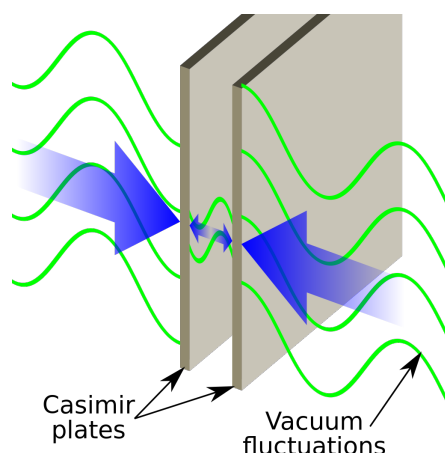


Figura 1.1: Representação de placas perfeitamente condutoras no experimento realizado por Casimir. Retirado de [4]

ou equação de Lippmann-Schwinger. A interação na forma de potencial de Casimir-Polder, quando obtido, depende então majoritariamente de quantificadores de campos eletromagnéticos externos ao sistema, como serão explorados nas seções seguintes. Tais quantificadores são conhecidos como *polarizabilidades dinâmicas* e são obtidos a partir de propriedades analíticas da amplitude do espalhamento Compton [6].

Assim como mencionado no experimento realizado por Casimir representado na Figura 1.1, seria mais intuitivo pensar em induzir polarização em um sistema quântico fazendo o mesmo ficar imerso em uma região com campo elétrico uniforme. No entanto, dado que os constituintes dos nêutrons estão juntos basicamente por uma força de ligação muito intensa, e o volume de um nêutron é muito pequeno se comparado até mesmo com o núcleo atômico, experimentalmente o campo crítico necessário para separar os quarks internos a nêutrons seria da ordem de  $10^{23}$  Volt/m, o que faz com que a principal via de estudos de polarizabilidades dinâmicas seja o espalhamento Compton [7].

A respeito do espalhamento Compton, pode-se dizer que é a principal técnica de investigação para sondagem da estrutura interna de prótons e nêutrons, onde faz-se a medida da resposta dos constituintes dos nucleons sob estímulo do campo eletromagnético dos fótons. A energias dos fótons muito baixas,  $E_\gamma \lesssim 50$  MeV, pode-se fazer uma aproximação para as polarizabilidades dinâmicas como sendo estáticas, revelando as distribuições estáticas de cargas e spin de seus constituintes mais elementares, sendo eles quarks e glúons. No intervalo de energias definido aqui como sendo intermediário, as energias de fótons sendo entre  $50 \text{ MeV} \lesssim E_\gamma \lesssim 500 \text{ MeV}$  fazem com que as polarizabilidades dinâmicas tenham de ser consideradas como funções da energia do fóton, e evidenciam fortemente o regime de flutuações quânticas que levam à produção de píons (modelo de nuvem mesônica) os modos de quase-Nambu-Goldstone vinculados à simetria quirial da Cromodinâmica

Quântica (QCD)[8, 9, 10]. Nas energias de fótons muito altas, definidas aqui como sendo  $E_\gamma \gg 1$  GeV, a estrutura partônica fica cada vez mais evidente, sendo conveniente relacionar o espalhamento Compton altamente virtual (DVCS) ao espalhamento inelástico profundo (DIS).

Considerando o efeito Casimir-Polder sendo representado por uma troca virtual de dois fótons entre dois nêutrons, a interação de Casimir-Polder na forma de potencial pode ser obtida pela análise de Fourier da amplitude de espalhamento Compton. Isto significa dizer que a amplitude de espalhamento pode ser decomposta em componentes da frequência da incidência dos fótons, considerando a região de comportamento singular da amplitude à direita do plano complexo das energias (*right-handed singularities*), e portanto maiores que o limiar de fotoprodução de píons, por exemplo. Desse modo, a expressão algébrica do potencial, assim como a que é exibida na Seção 5.3 resulta da interação das flutuações do campo eletromagnético em distâncias de separação  $r$  grandes o suficiente quando comparadas à dimensão característica do sistema [6]. Como se trata de uma interação a baixas energias, os nêutrons serão considerados como partículas puntiformes.

Existem muitos experimentos dedicados como os de Lebedev Institute (Moscou), MUSL (Illinois), LEGS (Brookhaven), Bates (MIT), MAMI (Mainz) e Jefferson Lab (Virginia) buscam um mapeamento tridimensional da estrutura do nucleon, que, por outro lado, retroalimenta experimentos investigando átomos de hidrogênio muônicos e avançam ainda mais os painéis mais modernos da física hadrônica [7]. Apesar do efeito Casimir ter sido descoberto na década dos anos 1940 e discussões terem levado a um novo estágio do efeito para investigação da matéria na década dos anos 1970, a primeira determinação da interação de Casimir-Polder entre nêutrons foi publicada em 1973 por Arnold [11], utilizando polarizabilidades estáticas com interesse apenas no comportamento mais assintótico da interação, que decresce como  $1/r^7$ . Posteriormente, em 2017, um cálculo mais aprimorado foi publicado por Babb, Higa e Hussein [12], no qual potenciais de Casimir-Polder entre dois nêutrons, entre um nêutron e um próton, entre um nêutron e uma parede condutora neutra, e de um nêutron entre duas paredes condutoras neutras, foram calculados utilizando polarizabilidades dinâmicas. Conforme discutido em [12], este último deve ser relevante em futuros experimentos de nêutrons ultrafrios aprisionados em garrafas magnéticas. As polarizabilidades dinâmicas foram modeladas por meio de uma função (da energia do fóton incidente  $\omega$  no referencial do centro de massa) capaz de simular a descontinuidade da polarizabilidade elétrica devida ao limiar de produção de um píon intermediário, e outra função que simulava o aumento da polarizabilidade magnética devido à ressonância Delta. Os parâmetros destas funções foram ajustados aos respectivos resultados da teoria de perturbação quiral [13]. Uma vez que estas funções tinham o aspecto meramente fenomenológico de reproduzir, de forma simplificada, as

polarizabilidades dinâmicas, seria desejável que as mesmas fossem obtidas como previsões de uma teoria mais robusta. O estudo das polarizabilidades eletromagnéticas do nucleon através do espalhamento Compton associado é um campo de pesquisa bem amadurecido e de longa data [14, 15, 16, 13, 17, 7]. Os principais e mais bem-sucedidos formalismos para tratar o problema são relações de dispersão [14, 16, 17] e teorias efetivas quirais [18, 13, 19]. Pode-se dizer que ambas se complementam, dado que teorias efetivas quirais fornecem uma expansão rigorosa, sistemática e independentemente de modelos para os graus de liberdade piônicos, válidos no regime de energia da ordem da massa do pión  $m_\pi$ , enquanto que relações de dispersão levam em consideração a estrutura analítica da amplitude de espalhamento no plano complexo das variáveis cinemáticas  $\nu$  e  $t$  (a serem definidas adiante), relacionando seu comportamento assintótico com o de baixas energias. No entanto, ambos os formalismos são extremamente técnicos, envolvem contas complicadas e as expressões das polarizabilidades não possuem expressões analíticas simples, mas dadas em termos de integrais de outras quantidades físicas. O que seria uma terceira alternativa foi proposta por Pasquini, Pedroni e Sconfietti [20, 21] em que os autores parametrizam as polarizabilidades elétrica e magnética à baixas energias como uma série de potências em  $\omega$  até a quinta potência. Neste trabalho tentaremos explorar cada uma dessas três abordagens.

Vale mencionar o aumento de interesse, na física nuclear, a respeito da busca de sistemas de nêutrons ligados. Em um trabalho recente, foi observado um excesso na seção de choque de reação  $\alpha(^8\text{He}^8\text{Be})4n$ , com a possível interpretação de ser um estado ressonante de quatro nêutrons a uma energia muito próxima do limiar,  $\sim 1$  MeV [22]. Alguns trabalhos teóricos relacionados a esse experimento sinalizam também a possibilidade de um estado ressonante de três nêutrons [23, 24, 25]. Dado que os efeitos próximos de limiares envolvem conhecer os detalhes da interação entre os objetos, seria interessante especular o quanto que o potencial de longo alcance de Casimir-Polder poderia influenciar as possíveis energias de estados ligados/ressonâncias dos sistemas contendo apenas nêutrons.

Colecionando todas as ideias apresentadas acima, os primeiros capítulos serão dedicados a apresentar o formalismo do espalhamento Compton no nucleon, que é o principal ingrediente para a construção do potencial de Casimir-Polder entre dois nêutrons, unindo um análogo clássico do eletromagnetismo para que se consiga criar uma figura mais próxima da compreensão de portadores de carga e a mecânica quântica. Em seguida, apresenta-se o formalismo de relações de dispersão, que descreve as polarizabilidades dinâmicas como função de  $\omega$  e aplicamos o modelo feito por L'vov [14]. Tal modelo utiliza o fato das amplitudes invariantes obedecerem às relações de dispersão para calcular as polarizabilidades dinâmicas eletromagnéticas de nucleons. Essas relações são úteis tanto matematicamente quanto fisicamente porque fazem com que possamos investigar intervalo

grande de energias  $\omega$ , e também minimizam a dependência de modelos físicos. Após aplicarmos todo formalismo dedicado ao estudo de relações de dispersão e polarizabilidades eletromagnéticas, chegamos à conclusão de que o método utilizado por L'vov juntamente com a implementação numérica do problema não foi suficiente para caracterizar o potencial de Casimir-Polder como gostaríamos, e por isso consideramos utilizar outras técnicas já conhecidas que estudaram as polarizabilidades dinâmicas, mas que não fizeram uso delas para calcular o potencial de Casimir-Polder.

Os trabalhos já conhecidos na área e que são utilizados aqui foram feitos por Pasquini *et al.*, R. Hildebrandt *et al.*, e J Babb, R. Higa e M. Hussein [20, 13, 12]. Utilizando seus resultados, pudemos calcular numericamente o potencial de Casimir-Polder para diferentes energias de incidência dos fótons  $\omega$ , e portanto diferentes distâncias de separação  $r$  entre nêutrons, o que nos permitiu investigar qual a influência dos efeitos do tipo van der Waals e Casimir-Polder nesse contexto.

Segue abaixo um ideograma para reunir as ideias expostas até agora. Geralmente, atacando esse problema do sistema de dois nêutrons, como muitos outros em Física, existem muitas peças que formam um determinado "mosaico" de ideias. Aqui a figura principal é a construção do potencial de Casimir-Polder, para então que se possa entender de maneira melhor qual o papel dessa interação eletromagnética na existência de estados ligados e ressonantes.

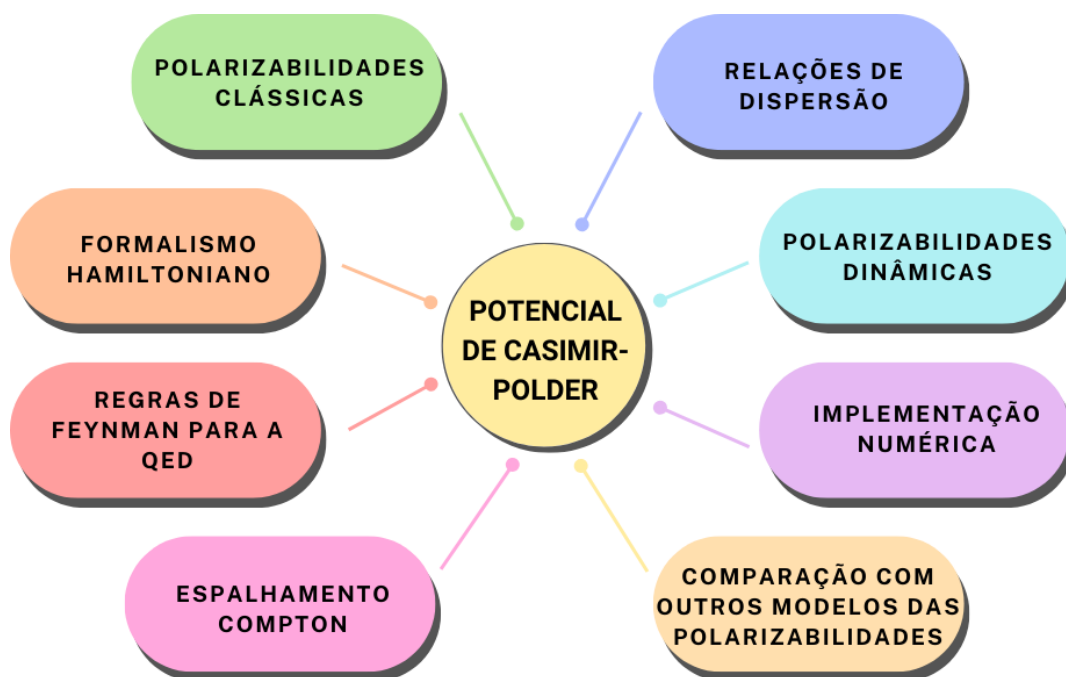


Figura 1.2: Representação de todos os conceitos físicos, ideias matemáticas e implementação computacional do trabalho.

# Capítulo 2

## Polarizabilidades do nucleon

A principal ideia deste capítulo é apresentar uma evolução do conceito de polarizabilidade, começando do conceito mais clássico até chegar em sua versão quântica. Esses conceitos serão aplicados para o nucleon por meio do respectivo espalhamento Compton. Experimentalmente, existem diversos programas em andamento cujo objetivo é mensurar as polarizabilidades (escalar e spinorial) via espalhamento Compton, com fótons reais e virtuais. As amplitudes do espalhamento Compton para o caso do nucleon são simplificadas após a aplicação de operadores de simetria contínua, discreta e de causalidade. A última Seção é destinada a apresentar a relação entre amplitudes de espalhamento e amplitudes invariantes de L'vov e de Ritus.

### 2.1 Um análogo do eletromagnetismo clássico

Classicamente vindo do eletromagnetismo e da óptica física, a polarizabilidade é vista como uma grandeza matemática que quantifica a resposta de um sistema quando o mesmo é imerso em uma região de campo eletromagnético. A forma mais simples de entender é com o modelo atômico de Rutherford [26], no qual existe um núcleo concentrado de carga positiva  $+q$  cercado por uma eletrosfera negativa de raio  $a$ , uniformemente carregada com carga  $-q$ . Esse átomo primitivo então é imerso em uma região com campo elétrico uniforme de módulo  $E$ , e deseja-se saber qual a polarização do átomo. Por questões de simplificação, diz-se que assim que o núcleo se desloca uma distância  $d$  do centro da eletrosfera, o equilíbrio eletrostático é atingido. A Figura 2.1 mostra tal deslocamento quando o campo elétrico  $\mathbf{E}$  é aplicado.

Utilizando o princípio da superposição, o campo produzido pela nuvem de elétrons  $E_e$  é dado por

$$E_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{a^3}. \quad (2.1)$$

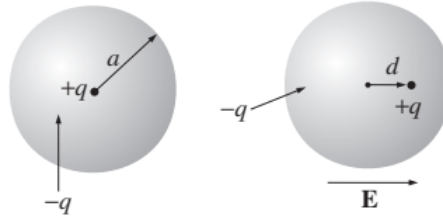


Figura 2.1: Representação do átomo de Rutherford em uma região com campo elétrico uniforme (esquerda), e o equilíbrio eletrostático atingido (direita). Retirado de [27]

Na expressão (2.1), a constante  $a$  representa o raio clássico do átomo e  $\epsilon_0$  a permissividade elétrica do vácuo. De maneira direta, definindo-se a magnitude do vetor polarização atômica nesse caso - como  $p = qd$ , obtém-se

$$\begin{aligned} p &= qd = (4\pi\epsilon_0 a^3) E = \alpha E, \\ \alpha &= 4\pi\epsilon_0 a^3 = 3\epsilon_0 V_{atom}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Pode-se concluir da expressão (2.2) que a *polarizabilidade atômica*  $\alpha$ , nesse caso, é uma grandeza escalar diretamente proporcional ao volume atômico. É importante ressaltar dois aspectos relevantes. O primeiro diz respeito a algo que será discutido mais adiante, a respeito da unidade de polarização ser expressa por unidade de volume. O segundo fato relevante é que nem sempre o vetor polarização está na mesma direção do campo eletromagnético externo, ao contrário do que se pode presumir no modelo simplificado do átomo. Nesses casos mais gerais, escreve-se o campo elétrico em termos das componentes paralela e perpendicular ao vetor polarização, de tal forma que este último é escrito como  $\mathbf{p} = \alpha_{\perp} \mathbf{E}_{\perp} + \alpha_{\parallel} \mathbf{E}_{\parallel}$ . Assim, as polarizabilidades passam a ser expressas por um *tensor polarizabilidade*, e as três componentes do vetor polarização podem ser escritas do seguinte modo:

$$\begin{aligned} p_x &= \alpha_{xx} E_x + \alpha_{xy} E_y + \alpha_{xz} E_z \\ p_y &= \alpha_{yx} E_x + \alpha_{yy} E_y + \alpha_{yz} E_z \\ p_z &= \alpha_{zx} E_x + \alpha_{zy} E_y + \alpha_{zz} E_z. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Observando-se a expressão (2.3), percebe-se que o tensor polarizabilidade é uma matriz 3x3 com nove elementos, e em cada uma das entradas da matriz temos um número real que representa a polarizabilidade elétrica em uma determinada direção para cada uma das componentes do campo elétrico. Um exemplo onde pode-se ver a polarizabilidade elétrica de uma molécula como um tensor é na molécula do dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ) [27].



Quando as polarizabilidades estão na mesma direção do campo elétrico externo e não existem componentes em outras direções para diferentes componentes do campo elétrico, a polarizabilidade do sistema em questão é a diagonal principal do tensor polarizabilidade elétrica, e o restante das componentes é nulo.

Para fins do presente trabalho, o conceito de polarizabilidade, quando transferido para a compreensão de nêutrons pode ser entendido como um sistema dielétrico constituído por portadores de carga elétrica, que são os quarks. Desse modo, quando um campo eletromagnético externo é aplicado, surgirão pequenos momentos dipolares que apontarão na mesma direção do campo externo, em primeira aproximação. Esses pequenos efeitos têm como consequência o sistema se tornar polarizado. Uma forma mais conveniente de definir as polarizabilidades daqui para frente é

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} &\equiv \text{momento dipolar por unidade de volume ,} \\
 \alpha_E &\equiv \text{polarizabilidade elétrica por unidade de volume ,} \\
 \beta_M &\equiv \text{polarizabilidade magnética por unidade de volume .}
 \end{aligned}
 \tag{2.4}$$

Com as definições apresentadas no conjunto (2.4), a partir de agora todas as referências às polarizabilidades elétrica  $\alpha_E$  e magnética  $\beta_M$  têm significado de uma quantidade de polarização do meio por unidade de volume.

## 2.2 Operador hamiltoniano eletromagnético para o nucleon

Nesta seção aprofundamos o conceito de polarizabilidade para o contexto especificamente de nucleons. O entendimento do eletromagnetismo clássico é relevante para criarmos uma imagem física do conceito de polarizabilidade. Essa imagem física ajuda-nos a compreender a extensão da polarizabilidade dinâmica e a sua relação com o espalhamento Compton. O conceito de polarizabilidade foi tomando forma ao longo da década de 1950 [28, 29], juntamente com observações do espalhamento Compton em prótons, que vieram alguns anos mais tarde, próximo ao início da década de 1960 [30, 31]. Desde então, o espalhamento Compton real (RCS) e o espalhamento Compton virtual (VCS) se tornaram algumas das principais técnicas experimentais para os estudos das polarizabilidades dos nucleons.

Para o início de uma descrição ingênua do sistema de um nucleon do ponto de vista de polarizabilidade eletromagnética clássica, pode-se imaginar um único próton ou nêutron confinado entre um capacitor de placas paralelas com campo elétrico uniforme moderado. No momento aplica-se o modelo que foi discutido na Seção 2.1, ou seja, o nucleon como

um sistema dielétrico constituído de três quarks, que serão responsáveis por responder pelos campos eletromagnéticos externos aplicados. Já supracitado anteriormente na Introdução, o modelo a ser utilizado para a interação eletromagnética entre dois nêutrons é a troca de dois fótons. A amplitude que une os dois fótons a cada nêutron é determinada pelo espalhamento Compton. Neste processo, para a energia do fóton  $\omega$  abaixo ou da ordem da massa do pión  $m_\pi$ , a imagem que temos é a do nucleon envolto por uma nuvem de píons virtuais. A resposta da nuvem de píons com a aplicação de campo eletromagnético externo é representada na Figura 2.2.

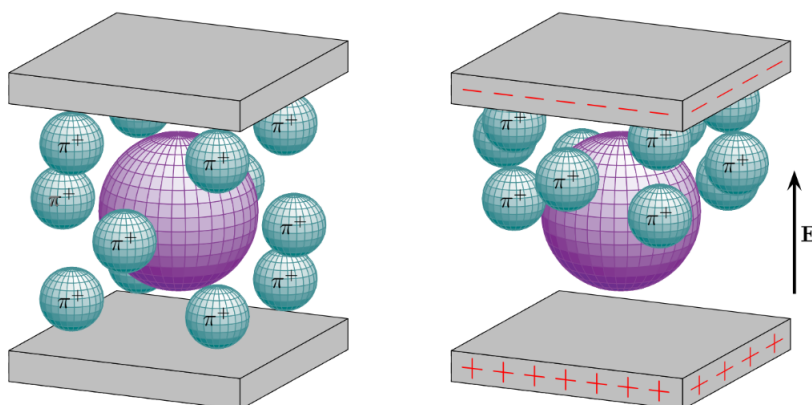


Figura 2.2: Representação de um próton entre um capacitor de placas paralelas descarregado (esquerda) e carregado (direita), imerso em uma região de campo elétrico uniforme. Retirado de [7].

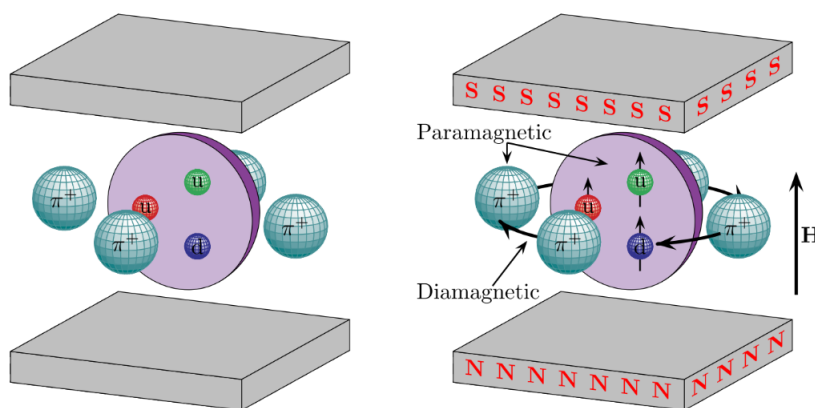


Figura 2.3: Representação de um próton entre dois polos de eletroímãs desligado (esquerda) e ligado (direita), imerso em uma região de campo magnético uniforme. Retirado de [7].

Para a energia do fóton muito acima da escala hadrônica ( $\Lambda_\chi \sim 1 \text{ GeV}$ ), os graus de

liberdade de quarks e glúons começam a ser relevantes. Como o conteúdo de quarks tem carga elétrica diferente entre seus componentes, no caso elétrico, no momento em que o capacitor de placas paralelas for carregado, cria-se um momento de dipolo com força diretamente proporcional ao campo pelo deslocamento interno no modelo de quarks, em que as cargas com sentido oposto se movem também em direções opostas.

Para o caso magnético, a interpretação torna-se um pouco mais complicada. O sistema é imerso em uma região onde dois pólos de ímãs são dispostos alinhados de modo a gerar um campo magnético  $\mathbf{H}$  uniforme e moderado. O interior de quarks do próton produz paramagneticamente um campo resposta ao campo exterior, mas como existem cargas elétricas vindas da nuvem de píons, a nuvem em si se torna um sistema diamagnético. Portanto, existe aqui uma forma de "competição" entre a contribuição paramagnética dos quarks e a contribuição diamagnética da nuvem de píons. Como consequência imediata, é de se esperar que o fator de polarizabilidade magnética  $\beta_{M1}$  seja, em módulo, menor que o fator polarizabilidade elétrica  $\alpha_{E1}$ . O subíndice 1 que acompanha as letras  $E$  e  $M$  diz respeito à ordem da expansão multipolar que se considera da resposta do campo com relação a organização das cargas dos quarks, ou seja, indicando o dipolo eletromagnético. Como existem três portadores de carga no interior dos nucleons, existem ordem superiores no espaço de configuração multipolar.

Como é necessário estudar o sistema de nêutrons e suas polarizabilidades eletromagnéticas do ponto de vista quântico, a utilização do formalismo hamiltoniano para obtenção de regras de Feynman na eletrodinâmica quântica (QED) é fundamental. O operador densidade hamiltoniana - que será referido apenas como hamiltoniana - que expressa a resposta na energia do campo eletromagnético de um nucleon pode ser escrito de acordo com o número de derivadas espaço-temporais de acordo com o 4-vetor potencial  $A_\mu(x)$  [15, 17]

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\text{eff}}^{(2)} &= -4\pi \left( \frac{1}{2} \alpha_{E1} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \beta_{M1} \mathbf{B}^2 \right), \\
\mathcal{H}_{\text{eff}}^{(3)} &= -4\pi \left( \frac{1}{2} \gamma_{E1E1} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{E} \times \dot{\mathbf{E}}) + \frac{1}{2} \gamma_{M1M1} \boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{H} \times \dot{\mathbf{H}}) - \gamma_{M1E2} E_{ij} \sigma_i H_j + \gamma_{E1M2} H_{ij} \sigma_i E_j \right), \\
\mathcal{H}_{\text{eff}}^{(4)} &= -4\pi \left( \frac{1}{2} \alpha_{E1\nu} \dot{\mathbf{E}}^2 + \frac{1}{2} \beta_{M1\nu} \dot{\mathbf{H}}^2 \right) - 4\pi \left( \frac{1}{12} \alpha_{E2} E_{ij}^2 + \frac{1}{12} \beta_{M2} H_{ij}^2 \right).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

No conjunto de expressões (2.5), os campos elétrico  $\mathbf{E}$  e magnético  $\mathbf{H}$  são escritos em suas componentes em termos da definição convencional do tensor eletromagnético covariante

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

o campo  $\mathbf{H}$  é definido por  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ , sendo  $\mu$  a permeabilidade magnética do meio, e a notação para  $E_{ij}$  e  $B_{ij}$  que simplifica um pouco o conjunto de expressões (2.5) nas componentes do campo eletromagnético,

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2}(\nabla_i E_j + \nabla_j E_i), \\ H_{ij} &= \frac{1}{2}(\nabla_i H_j + \nabla_j H_i). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Além dos vetores indicando os campos eletromagnéticos,  $\sigma$  são as matrizes de Pauli, geradores do grupo de transformações especiais unitárias  $SU(2)$ . As outras constantes que aparecem, como  $\alpha_{E1\nu}$ , e  $\beta_{M1\nu}$  são chamados "fatores de recuo", assim como  $\gamma_{E1M2}$  e  $\gamma_{E1M2}$  (que tem índices de ordem 1 de dipolo e 2 de quadrupolo pela ordem da expansão da hamiltoniana efetiva em quadrupolo). É importante também observar que a hamiltoniana é quadrática no campo eletromagnético, o que afeta diretamente na obtenção de observáveis nas regras de Feynman da QED. Outro fator que pode ser observado é que os supraíndices (2), (3), e (4) são vinculados à ordem no espaço multipolar, ou seja, a primeira equação nesse caso é a mais importante para o trabalho, que inclusive acompanha as polarizabilidades elétrica e magnética na ordem de dipolo.

## 2.3 Polarizabilidades e espalhamento Compton

O estudo das polarizabilidades no contexto quântico se dá por meio da descrição do formalismo do espalhamento Compton. Pode-se considerar tal processo como um fóton incidente atingindo uma partícula-alvo, que nesse caso é um nucleon - podendo ser um próton ou um nêutron - no estado inicial. Existe troca de momento entre as duas partículas, e no estado final existe um fóton emergente ou refletido, e o nucleon alvo com um momento diferente do que havia no início, e é claro que a escolha do referencial utilizado aqui é de suma importância. O processo é esquematizado por meio da seguinte reação:  $\gamma(q) + N(p) \rightarrow \gamma(q') + N(p')$ . Considera-se aqui também que a *virtualidade*  $q^2$  dos fótons é nula, ou seja,  $q^2 = q'^2 = 0$ , e portanto trata-se de um Espalhamento Compton Real (RCS). Existem situações mais gerais nas quais as virtualidades (inicial ou final) dos fótons são diferentes entre si e diferentes de zero, ou seja,  $q^2 \neq q'^2 \neq 0$ . Um exemplo

disso seria o processo conhecido como eletroprodução de pares, simbolizado pela reação  $e^- + N \rightarrow e^- + N + e^+e^-$  [7].

O processo que ilustra o espalhamento Compton do ponto de vista da teoria quântica está indicado na Figura 2.4 com auxílio de um diagrama de Feynman, onde a bolha mais ao centro da imagem representa a combinação de todos os estados intermediários permitidos que têm como estados inicial e final um fóton e um nucleon.

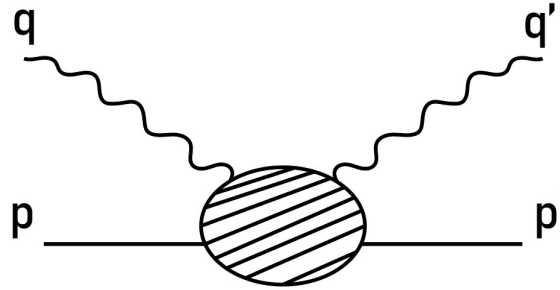


Figura 2.4: Representação dos diagramas de Feynman possíveis para o processo  $\gamma(q) + N(p) \rightarrow \gamma(q') + N(p')$ .

Considera-se aqui também o nucleon na camada de massa - conhecido e referenciado daqui em diante como *on mass shell*, por questão de uso mais frequente na literatura - com massa  $M$ , onde tem-se que  $p^2 = p'^2 = M^2$ . Também é considerada a virtualidade nula dos fótons durante o processo, isto é,  $q^2 = q'^2 = 0$ . Levando em consideração esse sistema de um fóton e um nucleon como um problema de dois corpos, as respectivas variáveis de Mandelstam no espaço quadri-dimensional são representadas por

$$\begin{cases} s = (p + q)^2 = M^2 + 2p \cdot q + q^2 = (p' + q')^2, \\ u = (p' - q)^2 = M^2 - 2p' \cdot q + q^2 = (p - q')^2, \\ t = (p - p')^2 = 2M^2 - 2p \cdot p' = (q - q')^2, \\ s + t + u = 2M^2. \end{cases} \quad (2.7)$$

A virtualidade nula dos fótons garante que, na última das expressões em 2.7,  $s + t + u = 2M^2$ . Dando continuidade à parte que envolve a teoria quântica do espalhamento Compton, após identificar os diagramas que contribuem para um determinado processo, obtém-se uma expressão formal para as amplitudes do espalhamento. Para escrever tais amplitudes, faz-se uso de um segundo conjunto de variáveis cinemáticas invariantes por transformações de Lorentz, representadas por

$$\nu = \frac{p \cdot q}{M}, \quad \nu' = \frac{p \cdot q'}{M}. \quad (2.8)$$

As variáveis  $\nu$  e  $\nu'$  se tornam, respectivamente, a energia do fóton incidente e emergente no referencial do laboratório, e esse conjunto de variáveis será usado extensamente ao longo desse trabalho.

Como tanto as partículas no estado inicial como no estado final do espalhamento Compton possuem spin, os autovalores das projeções do spin na direção do momento de cada objeto (também chamados de helicidade) são dados por  $\lambda_\gamma = \pm 1, 0$  no caso de fótons (considerando fótons reais e virtuais), e  $\lambda_N = \pm 1/2$  no caso do nucleon. Desse modo, o número total de amplitudes a princípio diferentes para o processo é de  $3 \times 2 \times 3 \times 2 = 36$ . Como se trata de um número muito grande de componentes, muitas das quais possivelmente redundantes, precisamos reduzir este número utilizando conhecimentos acerca do espalhamento Compton e simetrias da mecânica quântica. Como mencionado anteriormente, o caso do espalhamento Compton Virtual (VCS) não está sendo considerado, portanto, pode-se eliminar logo de início o autovalor  $\lambda_\gamma = 0$  desse número total, restando  $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$  amplitudes do RCS. Reconhecendo que os autovalores das projeções dos spins citados acima são bons números quânticos, quando subordinados a outros operadores quânticos, eles devem permanecer os mesmos de acordo com a evolução temporal. Desse modo, pode-se aplicar os operadores de reversão temporal  $\mathcal{T}$  e paridade  $\mathcal{P}$  (simetrias discretas) nas amplitudes de helicidade  $T_{\lambda'_\gamma \lambda'_N \lambda_\gamma \lambda_N}(s, t)$  para reduzir o número total de componentes. A aplicação destas simetrias discretas, juntamente com o princípio da invariância de *gauge* (satisfeito por meio das chamadas identidades de Ward) pode ser escrito como

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P} : T_{-\lambda'_\gamma - \lambda'_N - \lambda_\gamma - \lambda_N}(s, t) = (-1)^{\lambda'_\gamma - \lambda'_N - \lambda_\gamma + \lambda_N} T_{\lambda'_\gamma \lambda'_N \lambda_\gamma \lambda_N}(s, t), \\ \mathcal{T} : T_{\lambda'_\gamma \lambda'_N \lambda_\gamma \lambda_N}(s, t) = (-1)^{\lambda'_\gamma - \lambda'_N - \lambda_\gamma + \lambda_N} T_{\lambda'_\gamma \lambda'_N \lambda_\gamma \lambda_N}(s, t), \\ H \equiv \lambda_\gamma - \lambda_N, \quad H' \equiv \lambda'_\gamma - \lambda'_N, \\ T_{H'H}(s, t) \stackrel{\mathcal{P}}{=} (-1)^{H'-H} T_{-H'-H}(s, t) \stackrel{\mathcal{T}}{=} (-1)^{H'-H} T_{HH'}(s, t), \\ q'_\mu T^{\mu\nu}(q', q, P) = q_\nu T^{\mu\nu}(q', q, P) = 0. \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Observando-se o conjunto de equações (2.9), tem-se os parâmetros das helicidades, e pode-se escrever as amplitudes em função dos momentos  $q$  e  $q'$  dos fótons incidente e emergente, e da combinação simétrica  $P = (p + p')/2$ . De acordo com a ação dos operadores de reversão temporal e paridade, observa-se que as amplitudes dependem apenas das combinações de helicidades  $H$  e  $H'$ . Como as helicidades são combinadas em  $H$  ou  $H'$ , os valores possíveis de  $H$  são  $\pm 1/2, \pm 3/2$ , sendo o espectro de  $H$  igual ao de  $H'$  dados por  $\sigma_\lambda(H) = \sigma_{\lambda'}(H') \in \{-3/2, -1/2, +1/2, +3/2\}$ . Com todas essas restrições combinadas, é possível reduzir o número total de amplitudes de 16 para 6. Essas amplitudes são conhecidas como *amplitudes de Hearn-Leader* (ou somente de Hearn)  $\Phi_i$ , definidas no

trabalho original de A.C. Hearn e E. Leader [32] e escritas como segue abaixo:

$$\begin{aligned}
(8\pi s^{1/2})\Phi_1 &\equiv T_{-1/2-1/2} = T_{+1/2+1/2}, \\
(8\pi s^{1/2})\Phi_2 &\equiv T_{-1/2+1/2} = -T_{+1/2-1/2}, \\
(8\pi s^{1/2})\Phi_3 &\equiv T_{-1/2+3/2} = T_{+1/2-3/2} = T_{+3/2-1/2} = T_{-3/2+1/2}, \\
(8\pi s^{1/2})\Phi_4 &\equiv T_{-1/2-3/2} = -T_{+1/2+3/2} = T_{+3/2+1/2} = -T_{-3/2-1/2}, \quad (2.10) \\
(8\pi s^{1/2})\Phi_5 &\equiv T_{+3/2+3/2} = T_{-3/2-3/2}, \\
(8\pi s^{1/2})\Phi_6 &\equiv T_{-3/2+3/2} = -T_{+3/2-3/2}.
\end{aligned}$$

Voltando para o caso das regras de Feynman de QED, os diagramas relevantes para o nível de árvore (*tree-level*) são os diagramas nos canais  $s$  e  $u$ . Estes mesmos canais serão discutidos mais tarde nos casos de estado intermediário para troca de um pión, conhecido como *one pion exchange* (OPE), e a ressonância  $\Delta$ . As três contribuições a nível de árvore, incluindo o vértice do acoplamento de nucleons com fótons da QED e do pólo de píons, são representados abaixo.

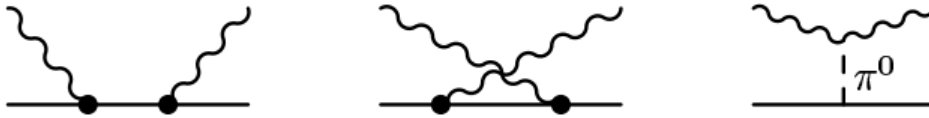


Figura 2.5: Representação dos diagramas de Feynman do canal  $s$  (esquerda), canal  $u$  (centro) e pólo de  $\pi^0$  (direita) para o processo  $\gamma(q) + N(p) \rightarrow \gamma(q') + N(p')$ .

Aplicando as regras convencionais da QED [33], pode-se obter duas amplitudes, uma para cada um dos canais a nível de árvore. Denotando a amplitude  $T_{(s)}$  para o canal  $s$  e

$T_{(u)}$  para o canal  $u$ , sendo expressas por

$$\begin{aligned}
iT_{(s)} &= (-ie)^2 \bar{u}_{\lambda'_N}(\mathbf{p}') \epsilon_{\mu}^{\lambda'_\gamma}(q') \frac{\gamma^\mu i \gamma^\nu}{(\not{p} + \not{q} - M)} \epsilon_{\nu}^{*\lambda_\gamma}(q) u_{\lambda_N}(\mathbf{p}) = \\
&= -ie^2 \bar{u}_{\lambda'_N}(\mathbf{p}') \epsilon_{\mu}^{\lambda'_\gamma}(q') \frac{\gamma^\mu (\not{p} + \not{q} + M) \gamma^\nu}{(p+q)^2 - M^2} \epsilon_{\nu}^{*\lambda_\gamma}(q) u_{\lambda_N}(\mathbf{p}) = \\
&= -ie^2 \bar{u}_{\lambda'_N}(\mathbf{p}') \epsilon_{\mu}^{\lambda'_\gamma}(q') \frac{\gamma^\mu (\not{p} + \not{q} + M) \gamma^\nu}{s - M^2} \epsilon_{\nu}^{*\lambda_\gamma}(q) u_{\lambda_N}(\mathbf{p}), \\
\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}
iT_{(u)} &= (-ie)^2 \bar{u}_{\lambda'_N}(\mathbf{p}') \epsilon_{\nu}^{*\lambda_\gamma}(q) \frac{\gamma^\nu i \gamma^\mu}{(\not{p} - \not{q}' - M)} \epsilon_{\mu}^{\lambda'_\gamma}(q') u_{\lambda_N}(\mathbf{p}) = \\
&= -ie^2 \bar{u}_{\lambda'_N}(\mathbf{p}') \epsilon_{\nu}^{*\lambda_\gamma}(q) \frac{\gamma^\nu (\not{p} - \not{q}' + M) \gamma^\mu}{(p-q')^2 - M^2} \epsilon_{\mu}^{\lambda'_\gamma}(q') u_{\lambda_N}(\mathbf{p}) = \\
&= -ie^2 \bar{u}_{\lambda'_N}(\mathbf{p}') \epsilon_{\nu}^{*\lambda_\gamma}(q) \frac{\gamma^\nu (\not{p} - \not{q}' + M) \gamma^\mu}{u - M^2} \epsilon_{\mu}^{\lambda'_\gamma}(q') u_{\lambda_N}(\mathbf{p}).
\end{aligned}$$

Nas equações representadas em (2.10), foram utilizados os spinores de Dirac  $u_\lambda(\mathbf{p})$ , os vetores de polarização de fótons  $\epsilon_{\mu}^{\lambda_\gamma}$ , a base das matrizes de Dirac na representação convencional e sua contração com 4-vetores como  $\not{p}$ , e relações entre spinores de Dirac no espaço de momentos usuais:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{\lambda'}(\mathbf{p}) u_{\lambda}(\mathbf{p}) &= 2M \delta_{\lambda' \lambda}, \\
\sum_{\lambda} u_{\lambda}(\mathbf{p}) \bar{u}_{\lambda}(\mathbf{p}) &= \not{p} + M, \\
(\not{p} - M) u_{\lambda}(\mathbf{p}) &= 0.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Abrimos aqui um parênteses após um exame um pouco mais detalhado nos dois resultados obtidos na equação (2.11). É possível perceber a existência de uma estrutura geral que detalha a cinemática do processo com relação ao canal relacionado, a saber, uma parte externa multiplicativa tanto pela esquerda quanto pela direita que são responsáveis por adicionar a parte dos fótons e nucleons incidentes e emergentes, no espaço de spinores e vetores de polarização. Pode-se, assim, escrever a amplitude total do RCS em termos desta estrutura externa, que descreve a cinemática do problema, e a parte interna remanescente, que descreve a dinâmica de acordo com cada diagrama de Feynman possível, tanto a nível de árvore, quanto a nível de múltiplas correções quânticas. Sabemos que a amplitude de espalhamento é um escalar, tanto no espaço quadri-dimensional de Minkowski, quanto no espaço interno de spin. Como os fótons externos (inicial e final) possuem polarização, a parte interna da amplitude é um tensor de Lorentz. De forma análoga, como os nucleons externos são caracterizados pelos respectivos spinores, a parte interna da amplitude



também é uma matriz  $4 \times 4$  no espaço espinorial.

Com o objetivo de entender melhor a estrutura acima mencionada, retornamos ao cálculo mais simples dos diagramas em nível de árvore para o RCS. A parte interna é então escrita como a soma dos respectivos diagramas nos canais  $s$  e  $u$ . Neste exemplo de ordem dominante usamos a notação  $T^{(1)\mu\nu}$ . Para simplificar um pouco mais a álgebra, emprega-se o uso da notação de contração de 4-vetores com um único ponto, ou seja,  $q_\mu T^{\mu\nu} p_\nu = q \cdot T \cdot p$ .

Segue que as amplitudes em termos das helicidades, nessa notação, são escritas como

$$T_{\lambda'_\gamma \lambda'_N \lambda_\gamma \lambda_N} = \bar{u}_{\lambda'_N}(\mathbf{p}') \varepsilon_{\lambda'_\gamma}^*(q') \cdot T(q', q, P) \cdot \varepsilon_{\lambda_\gamma}(q) u_{\lambda_N}(\mathbf{p}). \quad (2.13)$$

Da expressão (2.11), as contribuições  $T_{(s)}^{(1)\mu\nu}$  e  $T_{(u)}^{(1)\mu\nu}$  para  $T^{(1)\mu\nu}$  são dadas por

$$T^{(1)\mu\nu} = T_{(s)}^{(1)\mu\nu} + T_{(u)}^{(1)\mu\nu} = -e^2 \left( \gamma^\mu \frac{\not{p} + \not{q} + M}{s - M^2} \gamma^\nu + \gamma^\nu \frac{\not{p}' - \not{q} + M}{u - M^2} \gamma^\mu \right). \quad (2.14)$$

Conforme mencionado anteriormente, essas amplitudes podem ser escritas em termos das helicidades totais (ou combinadas)  $H$  e  $H'$ , as amplitudes de Hearn do espalhamento Compton. Identificaremos, portanto, as amplitudes de *Hearn-Leader* da equação (2.10) originárias dos diagramas de árvore do RCS,

$$\begin{aligned} (8\pi s^{1/2})\Phi_1^{(1)} &\equiv T_{+1+1/2+1+1/2}^{(1)} = -\pi\alpha \frac{(M\eta - 2t\nu)\eta^{1/2}}{M\nu^2\nu'}; \\ (8\pi s^{1/2})\Phi_2^{(1)} &\equiv T_{-1-1/2+1+1/2}^{(1)} = \pi\alpha \frac{(-t)^{3/2}}{\nu^2\nu'}; \\ (8\pi s^{1/2})\Phi_3^{(1)} &\equiv T_{-1+1/2+1+1/2}^{(1)} = \pi\alpha \frac{t\eta^{1/2}}{\nu^2\nu'}; \\ (8\pi s^{1/2})\Phi_4^{(1)} &\equiv T_{+1-1/2+1+1/2}^{(1)} = \pi\alpha \frac{(-t)^{1/2}\eta}{\nu^2\nu'}; \\ (8\pi s^{1/2})\Phi_5^{(1)} &\equiv T_{-1+1/2-1+1/2}^{(1)} = -\pi\alpha \frac{\eta^{3/2}}{\nu^2\nu'}; \\ (8\pi s^{1/2})\Phi_6^{(1)} &\equiv T_{-1+1/2+1-1/2}^{(1)} = -\pi\alpha \frac{(-t)^{3/2}s}{M^2\nu^2\nu'}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Podemos chamar a atenção de dois aspectos importantes nas expressões em (2.15). A primeira delas, mais imediata, é que todas são proporcionais à constante de estrutura fina do eletromagnetismo,  $\alpha = e^2/(4\pi) \approx 1/137$ , servindo como ponto de checagem da nossa conta em nível de árvore, que deve ser proporcional a  $e^2$ . O segundo aspecto é o fato dessas amplitudes dependerem apenas das variáveis de Mandelstam, variáveis

cinemáticas invariantes sob transformações de Lorentz. A variável  $t$  de Mandelstam pode ser interpretada como o momento trocado entre o fótons e nucleons. Em termos das variáveis de Mandelstam, definimos ainda  $\eta = (M^4 - su)/M^2$ , e  $\nu$  e  $\nu'$  da equação (2.8), que também podem ser escritas na forma  $\nu = (s - M^2)/2M$  e  $\nu' = (M^2 - u)/2M$ .

O cálculo simples apresentado acima, do espalhamento Compton em nível de árvore na QED, permite sedimentar o formalismo melhor detalhado nas seções a seguir. O objetivo agora é determinar a estrutura do tensor de segunda ordem de forma mais geral possível, possibilitando manipulá-las de forma mais conveniente para descrever os diversos observáveis do RCS ou que favoreça a predição de determinados modelos.

## 2.4 Decomposição tensorial

Para completar a análise da estrutura tensorial do espalhamento Compton de forma mais geral possível, sem admitir inicialmente qualquer teoria que descreva a dinâmica do processo, apresentamos sua decomposição no menor número possível de tensores. Claro que esta decomposição não é única—existem pelo menos dois modos de se fazer isso, sendo um deles uma decomposição não-covariante (primeira a aparecer historicamente) e a segunda, apresentada por V. Pascalutsa e D. Philips [34], que é uma decomposição covariante da estrutura de Lorentz das amplitudes de helicidade do processo Compton, a ser utilizada a partir de agora no trabalho.

A essência dessa decomposição reside em expressar a estrutura de Lorentz em uma base de tensores que contenha mais do que seis tensores iniciais, lembrando que, após aplicação dos operadores de simetrias discretas e helicidades combinadas, o número de amplitudes de Hearn é seis. A ideia é utilizar um artifício matemático conhecido como base mais que completa (*overcomplete*), em que o número de vetores da base é maior que a dimensão da entrada. Por isso a representação de um vetor (ou um tensor) em determinada base não é uma combinação única de vetores da base, motivo que descreve bem o fato da literatura ter um número relativamente grande de representações de amplitudes, falando apenas do espalhamento Compton.

A importância dessa representação e interpretação física pode ser vista pensando-se no exemplo de uma aplicação da base de Fourier para decomposição de um sinal eletrônico. Caso sejam adicionadas mais frequências, ou seja, ondas sinusoidais a mais que o número mínimo necessário, sinais com muitos ruídos ou um número pequeno podem ser identificados mais facilmente, alcançando uma espécie de super resolução de decomposição dos sinais. A figura algébrica mais simples que se pode pensar disso é imaginar  $x = A \cdot s$ , onde  $x$  é um vetor a ser representado em uma base mais que completa,  $s$  é um vetor de coeficientes já conhecido, e  $A$  é uma matriz retangular, sendo essa a

principal diferença entre uma mudança de base convencional e uma mais que completa.

Acompanhando a forma que se tem em (2.13), a decomposição na base mais que completa pode ser escrita como

$$T = \sum_i T_i = e^2 \bar{u}(p') \sum_{i=1}^8 \mathcal{A}_i(s, t) \mathcal{O}_i^{\mu\nu} \mathcal{E}'_{\mu}(q') \mathcal{E}_{\nu}(q) u(p). \quad (2.16)$$

Essa decomposição segue uma decomposição tensorial convencional, na qual existe uma base de tensores aqui representada por  $\mathcal{O}_i^{\mu\nu}$ , e para cada elemento da base existe uma função escalar complexa que representa os coeficientes dessa base. No presente caso, tais funções são conhecidas como *amplitudes invariantes*  $\mathcal{A}_i$ , e são justamente essas funções que têm muitas representações na literatura. Além disso, os 4-vetores  $\mathcal{E}_{\mu}(q)$  são as polarizações transformadas dos fótons, dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\mu}(q) &= \varepsilon_{\mu}(q) - \frac{P \cdot \varepsilon}{P \cdot q} q_{\mu}, \\ \mathcal{E}'_{\mu}(q') &= \varepsilon'_{\mu}(q') - \frac{P \cdot \varepsilon'}{P \cdot q'} q'_{\mu}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

A base mais que completa  $\mathcal{O}_i^{\mu\nu}$  representada na expressão (2.16) tem todas as suas componentes escritas do seguinte modo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_1^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}, \\ \mathcal{O}_2^{\mu\nu} = q^{\mu} q'^{\nu}, \\ \mathcal{O}_3^{\mu\nu} = -\gamma^{\mu\nu}, \\ \mathcal{O}_4^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} (q' \cdot \gamma \cdot q), \\ \mathcal{O}_5^{\mu\nu} = q^{\mu} q'_{\alpha} \gamma^{\alpha\nu} - \gamma^{\mu\alpha} q_{\alpha} q'^{\nu}, \\ \mathcal{O}_6^{\mu\nu} = q^{\mu} q_{\alpha} \gamma^{\alpha\nu} - \gamma^{\mu\alpha} q'_{\alpha} q'^{\nu}, \\ \mathcal{O}_7^{\mu\nu} = q^{\mu} q'^{\nu} (q' \cdot \gamma \cdot q), \\ \mathcal{O}_8^{\mu\nu} = -i\gamma_5 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} q'_{\alpha} q_{\beta}. \end{array} \right. \quad (2.18)$$

A exemplo da aplicação dessa base para a construção das amplitudes invariantes, faz-se

aqui o uso do primeiro tensor na primeira das componentes, isto é

$$\begin{aligned}
T_1 &= e^2 \bar{u}(p') \mathcal{A}_1(s, t) \mathcal{O}_1^{\mu\nu} \mathcal{E}'_{\mu^*}(q') \mathcal{E}_{\nu}(q) u(p) = \\
&= e^2 \bar{u}(p') \mathcal{A}_1(s, t) (-g^{\mu\nu}) \mathcal{E}'_{\mu^*}(q') \mathcal{E}_{\nu}(q) u(p) = \\
&= -e^2 \bar{u}(p') \mathcal{A}_1(s, t) \mathcal{E}'^{\nu*}(q') \mathcal{E}_{\nu}(q) u(p) = \\
&= e^2 \bar{u}(p') \mathcal{A}_1(s, t) \left( \delta_{\lambda'\lambda} + \frac{P \cdot \epsilon}{P \cdot q} \epsilon' \cdot q' + \frac{P \cdot \epsilon}{P \cdot q} \epsilon \cdot q + \frac{t}{2} \frac{P \cdot \epsilon}{P \cdot q} \frac{P \cdot \epsilon}{P \cdot q} \right) u(p).
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Na expressão (2.19), o produto interno  $\mathcal{E}' \cdot \mathcal{E}$  foi simplificado considerando-se a relação  $\epsilon_{\lambda'} \cdot \epsilon_{\lambda} = -\delta_{\lambda'\lambda}$ , e a definição da variável de Mandelstam  $t = -2q' \cdot q$ . Os outros dois produtos internos restantes podem ser determinados a partir da escolha do referencial no qual o processo é descrito, de modo que  $\epsilon' \cdot q'$  e  $\epsilon \cdot q$  são determinados após essa escolha.

## 2.5 Amplitudes de L'vov e de Ritus

Um dos possíveis conjuntos de amplitudes invariantes mais popular, e possivelmente mais utilizado na literatura, é conhecido como amplitudes de L'vov [14], sobre o qual nos referimos constantemente neste capítulo. Tais amplitudes podem ser escritas como combinação linear das amplitudes de Hearn [32], ou de Ritus [15]. O conjunto das amplitudes invariantes de L'vov, como funções de variáveis complexas tem muitas propriedades importantes e obedecem relações de dispersão descritas no próximo capítulo. As relações entre os diferentes conjuntos de amplitudes estão espalhados na literatura, embora nem sempre fáceis de achar. Em particular, a relação entre as amplitudes de Hearn  $A_i^{HL}$  e as amplitudes de helicidade dadas em (2.10) é

$$\begin{aligned}
T_1 &= A_1^{HL}, \quad T_2 = -A_4^{HL}, \quad T_3 = A_2^{HL}, \\
T_4 &= -A_5^{HL}, \quad T_5 = -A_3^{HL}, \quad T_6 = -A_6^{HL}.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Com relação à questão de referencial utilizado para se estudar o processo Compton, a escolha mais conveniente do ponto de vista teórico é a do referencial do centro de massa(C.M.), conforme ilustra a figura abaixo. Neste referencial, podemos tomar vantagens de algumas relações aplicadas às amplitudes de helicidade  $T_i$ , equação (2.20). Tais relações são subordinadas às simetrias rotacionais e são aplicadas na expansão das amplitudes em

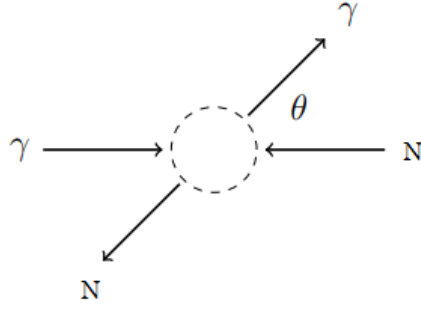


Figura 2.6: Representação do referencial centro de massa do processo  $\gamma(q) + N(p) \rightarrow \gamma(q') + N(p')$ .

ondas parciais no referencial C.M., cuja expressão formal é dada por

$$\begin{aligned}
 T_{H'H}(\omega, \theta) &= \sum_{J=1/2}^{\infty} (2J + 1) T_{H'H}^J(\omega) d_{H'H}^J(\theta), \\
 T_{H'H}(\theta) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} T_{H'H}(\omega, \theta) d_{HH'}^J.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Na expressão (2.21),  $J$  é o momento angular total e  $d_{H'H}^J(\theta)$  são as funções- $d$  de Wigner. O mais importante sobre as duas expressões contidas em (2.21) é que elas também satisfazem as simetrias da equação (2.9). A relação entre as amplitudes de Hearn e as amplitudes invariantes de L'vov, bem como algumas propriedades e funções- $d$  de Wigner mais importantes, estão descritas no Apêndice A e Apêndice B, respectivamente.

As amplitudes de L'vov, de Hearn, de helicidade e de helicidade reduzidas são definidas em termos de bases ortogonais, sugerida por Prange [35] e apresentadas no Apêndice C. As amplitudes de helicidade têm a vantagem de suas componentes terem um significado físico de transição entre as bem definidas helicidades inicial e final, porém, têm a desvantagem de sofrerem de singularidades meramente cinemáticas a ângulos frontais  $\theta = 0^\circ$  e traseiros  $\theta = 180^\circ$ . A grande vantagem das amplitudes de L'vov é que elas foram definidas exclusivamente para não dependerem de tais fatores cinemáticos, e conseqüentemente, satisfazerem as relações de dispersão usuais. Porém, este não é o único conjunto com estas vantagens, citando as amplitudes de Ritus, de Hearn, e helicidades reduzidas como alternativas.

Por fim, enfatizamos a relevância dos processos intermediários entre estados final e inicial que se situam em torno do limiar de produção de um pión  $\omega_\pi$ , sendo

$$\omega_\pi = \frac{m_\pi^2 + 2m_\pi m_N}{2(m_\pi + m_N)} \approx 131 \text{ MeV}. \tag{2.22}$$

O papel que esta região de energia desempenha neste trabalho ficará mais evidente quando analisarmos os resultados do potencial de Casimir-Polder entre dois nêutrons.

De acordo com os limiares de produção de píons e o que é permitido pela teoria quântica, os estados intermediários estudados no presente trabalho são considerados pelos processos de OPE, ou seja, estados  $\pi N$ , que são os maiores contribuintes para as amplitudes, e consequentemente, para a seção de choque do RCS. Abaixo, ilustra-se com uma figura da seção de choque as contribuições de estados intermediários. Como pode ser visto na

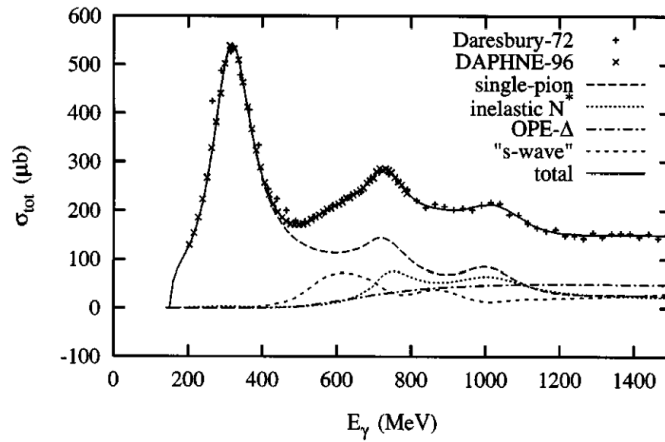


Figura 2.7: Componentes da seção de choque total de fotoabsorção do próton. Retirado de [14]

Figura 2.7, a linha tracejada que representa a troca de um pión fornece a maior contribuição até energias do fóton  $E_\gamma \approx 600$  MeV. Após essa energia, contribuições vindas de mais de um pión, e da ressonância  $\Delta$  passam a contabilizar com uma porcentagem maior na seção de choque total. Na investigação pretendida neste trabalho, apenas as contribuições de um pión serão consideradas. Além da seção de choque total e suas componentes, os processos do RCS que são relevantes são representados também na figura abaixo por seus diagramas de Feynman. Existem regimes de energias nos quais as contribuições para as polarizabilidades são diferentes. Primeiramente, pode-se separar as contribuições das amplitudes de L'vov em duas partes: uma que depende da estrutura (Born) e outra que não depende da estrutura (*non-Born*), traduzido em

$$\begin{aligned} A_i^L(\nu, t) &= A_i^{L,B}(\nu, t) + A_i^{L,NB}(\nu, t) \\ &= A_i^{L,B}(\nu, t) + \bar{A}_i^L(\nu, t) \quad , \quad i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} . \end{aligned} \quad (2.23)$$

Aqui faz-se a separação entre a parte que diz respeito aos diagramas de Born, ou seja, pólos nos canais  $s$  e  $u$ , que são representados por  $A_i^{L,pole}(\nu, t)$ , a contribuição das energias intermediárias que são dependentes da estrutura interna do nucleon, representadas por

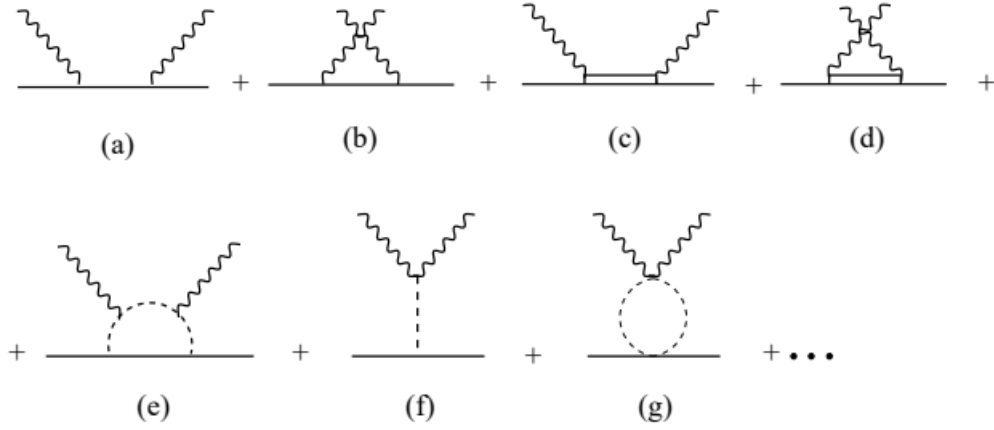


Figura 2.8: Na primeira fileira estão descritos processos típicos dos canais diretos  $s$  (a) e  $u$  (b) do RCS, assim como da ressonância  $\Delta$  no canal  $s$  (c) e  $u$  (d). Na segunda fileira temos contribuições típicas do espalhamento de um fóton com um pión do estado intermediário (e), o pólo do pión (f) e o diagrama que correlaciona a troca de dois pions, conhecido como "méson  $\sigma$ " (g). Retirado de [16].

$A_i^{L,int}(\nu, t)$ , e por fim, a contribuição assintótica que diz respeito às regiões de mais alta energia do fóton, representadas aqui por  $A_i^{L,as}(\nu, t)$ . Como as amplitudes invariantes não exibem mais descontinuidades cinemáticas para ângulos traseiros e frontais, elas são contínuas em ambas as variáveis cinemáticas  $\nu$  e  $t$ . Podemos esperar que ao realizar uma extensão analítica em  $\nu$ , variável relacionada com as energias dos fótons, as amplitudes invariantes sejam funções analíticas em grande parte do plano complexo. Desse modo, podemos escrever as amplitudes de L'vov como uma função complexa  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ , onde  $u(x, y) = \text{Re}[f(x, y)]$  e  $v(x, y) = \text{Im}[f(x, y)]$ . A parte real das amplitudes de L'vov será decomposta da seguinte maneira:

$$\text{Re}[A_i^L(\nu, t)] = A_i^{L,pole}(\nu, t) + A_i^{L,int}(\nu, t) + A_i^{L,as}(\nu, t). \quad (2.24)$$

Tal decomposição é feita com o objetivo de descrever a conexão que existe - e que ficará mais clara no próximo capítulo - entre analiticidade e relações de dispersão. Na equação (2.24) temos a parte real das amplitudes de L'vov, possuindo uma íntima relação com sua parte imaginária através do termo intermediário,  $A_i^{L,int}(\nu, t)$ . Exatamente por esse motivo que é possível empregar relações de dispersão para a descrição mais detalhada das amplitudes invariantes. O próximo capítulo é completamente dedicado ao entendimento subjacente a essas relações. Conforme discutido adiante, é necessário calcular certas contribuições em termos das partes imaginárias das amplitudes de Ritus  $\text{Im}[R_i^{OPE}(\nu, t)]$ . Pode-se expressar as amplitudes de Ritus em termos de combinações lineares das amplitu-

des de L'vov, conforme mostra as equações (A.2) do Apêndice A.



## Capítulo 3

# Teoria da Resposta e Relações de Dispersão

O presente capítulo é dedicado à apresentação do formalismo das Relações de Dispersão. Para que se possa entendê-las, antes é necessário motivar suas origens, passando pela Teoria da Resposta. Ao final do capítulo, as últimas seções serão dedicadas à conexão entre Relações de Dispersão e as amplitudes invariantes de L'vov e Ritus.

### 3.1 Panorama de um sistema físico e resposta linear generalizada

Para justificar a utilização das equações (2.23) e (2.24), primeiro introduz-se aqui uma aplicação direta de Análise Complexa e onde essa área pode ajudar a construir as relações de dispersão que fazem parte da principal componente do trabalho, colocando-as em uma perspectiva em paralelo com a Seção 2.1.

Conforme já foi mencionado na forma de um exemplo da Seção 2.1, o sistema considerado como um nucleon interage com o campo eletromagnético externo, reagindo de forma a criar uma resposta, cujos observáveis são as polarizabilidades eletromagnéticas. A questão é parte de uma categoria muito grande de sistemas físicos que podem ser estimulados, e sua resposta pode ser quantificada de algum modo, através de medidas. Pode-se esperar que quanto maior o estímulo, maior a resposta. Isso configura o que se chama de *resposta linear*. Sistemas mecânicos clássicos, elétricos, quânticos, apresentam modelagem muito parecida quanto ao estudo de estímulos, apesar de toda atenção aqui ser para o sistema descrito por nucleons.

A resposta de um sistema é primeiramente considerada como uma função do tempo  $t$ ,  $R(t)$ , e três condições são enunciadas a respeito dela:

1. A resposta é linear com o estímulo aplicado. Isso implica que pode-se fazer uso do *princípio da superposição*;
2. Em qualquer instante do tempo, o que importa são todos os intervalos de tempo anteriores à aplicação da força, ou seja, o *princípio da causalidade* está sendo empregado.
3. O efeito do estímulo  $F(t')$  (“força”) aplicado no instante  $t'$  na função  $R(t)$  em um instante  $t$  posterior depende apenas do intervalo de tempo transcorrido ( $t - t'$ ), dado que o sistema de um nucleon não muda com o passar do tempo. Isso é conhecido como *resposta retardada*.

Define-se a função  $R(t)$ , que satisfaz as três condições citadas anteriormente, como

$$R(t) = \int_{-\infty}^t dt' \phi(t - t')F(t'). \quad (3.1)$$

A expressão (3.1) utiliza o princípio da superposição para considerar o conjunto de estímulos contínuos da *função resposta*  $\phi(t - t')$ . A função resposta pode ser vista como uma função “peso”, ou espectral, vista em muitos contextos. Em paralelo com o que já foi dito anteriormente, o primeiro membro da equação (3.1) pode ser escrito em termos das componentes dos primeiros membros em (2.3), e a função resposta aqui seria justamente o tensor polarizabilidade.

Matematicamente, é prudente agora fazer uma descrição mais detalhada de funções que dependem do tempo, ou seja,  $R(t)$  e  $F(t)$ . A decomposição feita aqui é na base de Fourier, onde a transformada direta é dada por

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{F}(\omega), \\ R(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{R}(\omega). \end{aligned} \quad (3.2)$$

A transformada inversa é dada por

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{+i\omega t} \tilde{F}(t), \\ \tilde{R}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{+i\omega t} R(t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Aplicando a transformada de Fourier na equação (3.1), tem-se

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{R}(\omega) &= \int_{-\infty}^t dt' \phi(t-t') \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t'} \tilde{F}(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{F}(\omega) \int_{-\infty}^t dt' \phi(t-t') e^{-i\omega t'}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

A ordem das integrais em (3.4) foi trocada preservando-se as funções a serem integradas juntamente com seus elementos de integração. Fazemos a seguinte mudança de variáveis,  $t - t' = \tau \Rightarrow dt' = -d\tau$ . Quando  $t' \rightarrow -\infty$ ,  $\tau \rightarrow +\infty$ ; e quando  $t' = t$ ,  $\tau = 0$ . Como existe um sinal negativo no elemento de integração, pode-se inverter a ordem do intervalo. Aplicando essa mudança de variável, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{F}(\omega) \int_{-\infty}^t dt' \phi(t-t') e^{-i\omega t'} &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{F}(\omega) \int_0^{+\infty} d\tau \phi(\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \tilde{F}(\omega) \int_0^{+\infty} d\tau \phi(\tau) e^{i\omega\tau}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Colecionando os termos da expressão (3.5) e passando para o primeiro membro de (3.4), tem-se

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \left\{ \tilde{R}(\omega) - \left( \int_0^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \phi(\tau) \right) \tilde{F}(\omega) \right\} = 0. \quad (3.6)$$

Como  $e^{-i\omega t}$  indo de  $-\infty$  a  $+\infty$  contempla todos os valores possíveis de  $\omega$ , a exponencial forma um conjunto ortogonal de funções. Isto significa que a combinação dos termos entre as chaves da expressão 3.6 é a parte da expressão que deve resultar em zero, que podem ser vistos como os coeficientes dessa equação. Basicamente, o que se está fazendo é igualando componentes de vetores em um espaço de funções com relação a uma base ortonormal.

$$\begin{aligned} \tilde{R}(\omega) - \left( \int_0^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \phi(\tau) \right) \tilde{F}(\omega) &= 0 \\ \Rightarrow \tilde{R}(\omega) &= \int_0^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \phi(\tau) \tilde{F}(\omega). \end{aligned} \quad (3.7)$$

De acordo com a equação (3.7),  $\tilde{R}(\omega)$  é uma função que depende exclusivamente de  $\omega$ , uma vez que a variável  $\tau$  está sob uma integração. Por outro lado, a integral em  $\tau$  pode ser escrita como uma função  $\chi(\omega)$ . Desse modo,  $\tilde{R}(\omega)$  passa a ser expresso por

$$\tilde{R}(\omega) = \chi(\omega) \tilde{F}(\omega). \quad (3.8)$$

Tal definição é importante para o contexto da Teoria da Resposta, e é chamada de *susceptibilidade generalizada* ou *susceptibilidade dinâmica*. Isto significa dizer que, para cada  $\omega$  existe uma susceptibilidade associada, portanto existe dinâmica de acordo com o espaço das frequências. Como consequência, a susceptibilidade dinâmica é uma transformada da função resposta  $\phi(t)$ , dada por

$$\chi(\omega) = \int_0^{+\infty} dt e^{i\omega t} \phi(t). \quad (3.9)$$

Uma propriedade relevante a respeito da equação (3.9) é definida apenas para  $\phi(t) \geq 0$ , pois a função resposta respeita o princípio da causalidade. Outra peculiaridade de tal expressão é que ela não é uma transformada de Fourier, pois ela não é feita de  $-\infty$  a  $+\infty$ ; e ela também não é uma transformada de Laplace, por conta do argumento da função exponencial ser um número complexo. Por conta disso, a transformada em (3.9) é chamada de *transformada de Fourier-Laplace unilateral*.

A premissa que se faz sobre as transformadas de Fourier-Laplace é que a integral em (3.9) existe. Isto significa que para qualquer frequência real  $\omega$ ,  $\chi(\omega)$  é também uma função bem definida. Utilizando a identidade de Euler, tem-se que  $e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t$ , e portanto  $\chi(\omega)$  é uma função complexa no plano que tem as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[\chi(-\omega)] = \operatorname{Re}[\chi(\omega)] \rightarrow \text{componente par é simétrica,} \\ \operatorname{Im}[\chi(-\omega)] = -\operatorname{Im}[\chi(\omega)] \rightarrow \text{componente ímpar é antisimétrica.} \end{cases} \quad (3.10)$$

## 3.2 Continuação analítica da susceptibilidade dinâmica e Relações de Dispersão

Sabendo que a integral em (3.9) existe para frequências  $\omega$  reais, é natural de se estender analiticamente as mesmas frequências para o domínio complexo, tal que  $\omega = a + ib$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Desse modo, a função exponencial do integrando em (3.9) pode ser escrita como

$$e^{i\omega t} = e^{i(a+ib)t} = e^{-bt} e^{iat}. \quad (3.11)$$

Pela expressão (3.11) o fator extra que corresponde a  $e^{-\operatorname{Im}[\omega]t}$  atua como atenuação do integrando, fazendo com que a convergência da integral melhore, pois os valores de  $t$  são não-negativos. Segue que

1. Contanto que  $\operatorname{Im}[\chi(\omega)] \geq 0$ , existe uma representação dessa função;
2. Se o item anterior for respeitado, a função  $\chi(\omega)$  é analítica (ou holomorfa) no plano superior.

Abaixo, segue uma ilustração da continuação analítica por duas regiões do plano,  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$ .

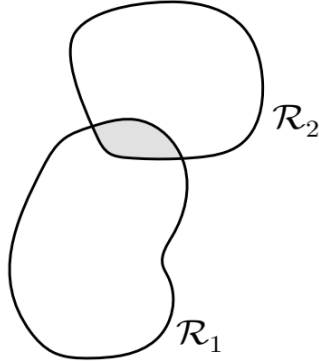


Figura 3.1: Continuação analítica entre dois conjuntos abertos  $\mathcal{R}_1$  e  $\mathcal{R}_2$  do semi-plano superior complexo. Retirado de [36].

A respeito do semi-plano inferior, não se pode dizer nada a respeito da existência da susceptibilidade dinâmica, a não ser em casos particulares. Como a função  $\chi(\omega)$  é analítica no semi-plano superior, pode-se aplicar diretamente o Teorema Integral de Cauchy, obtendo

$$\oint_C \chi(\omega) d\omega = 0, \quad \text{Im}[\chi(\omega)] \geq 0. \quad (3.12)$$

É direto perceber que, por mais que esse Teorema seja muito útil, para qualquer contorno  $C$  no qual a função  $\chi(\omega)$  esteja definida, ele não é de grande ajuda. Nesse momento, o mais útil é estudar qual o limite da analiticidade da função no integrando em (3.12), estudo que nos conduz às Relações de Dispersão (*DRs*).

Para estudar o limite da analiticidade de  $\chi(\omega)$ , começa-se definindo uma função  $f(\omega)$ ,

$$f(\omega') \equiv \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega}, \quad \omega \text{ fixo}, \omega \in \mathbb{R}. \quad (3.13)$$

De acordo com o que já se sabe sobre a analiticidade de  $\chi(\omega)$ , a função  $f(\omega')$  também é analítica em  $\omega'$  na mesma região, a menos de um ponto no eixo real, tal que  $\omega' = \omega$ . Novamente, aplicando o Teorema Integral de Cauchy assim como em (3.12), no semi-plano superior, tem-se que

$$\oint_C f(\omega') d\omega' = \oint_C \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = 0 \quad (3.14)$$

Como o Teorema Integral de Cauchy garante que as curvas que representam os contornos sejam curvas fechadas simples de Jordan, é possível distorcer o contorno até que ele esteja sobreposto no eixo real, e circunde a singularidade simples da reta, assim como mostrado na figura abaixo. Para realizar a integração no contorno proposto na Figura 3.2, temos

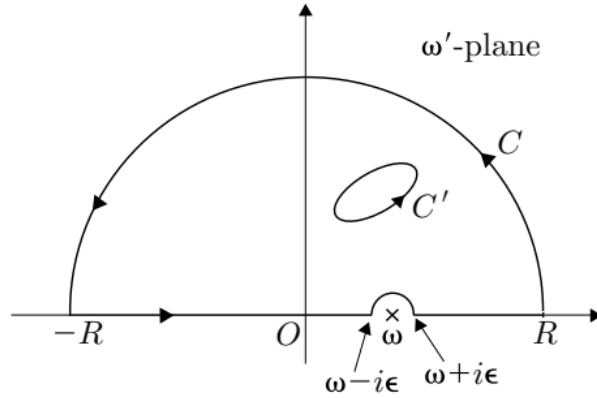


Figura 3.2: Integração de contorno realizada na função  $f(\omega')$ . Retirado de [36].

que lidar com três seções principais: a primeira é a da função  $\chi(\omega')$  sobre o eixo real, no intervalo  $-R$  a  $+R$  considerando a vizinhança simétrica do valor principal de Cauchy  $\mathcal{P}$ . A segunda é o pequeno circuito em torno de  $\omega$ , com  $\omega' = \omega + \epsilon e^{i\theta}$ , tal que  $d\omega' = i\epsilon e^{i\theta} d\theta$ . A última seção é a função  $\chi(\omega')$  avaliada em  $C$ , com o raio do contorno  $\Gamma$  sendo tal que  $\Gamma \rightarrow +\infty$ . Sendo assim, tem-se que

$$\begin{aligned}
 \oint_{C'} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' &= \mathcal{P} \int_{-R}^{+R} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{\pi}^0 \frac{\epsilon e^{i\theta} \chi(\omega + \epsilon e^{i\theta}) d\theta}{\epsilon e^{i\theta}} \\
 &+ \int_0^{\pi} \frac{\Gamma e^{i\theta} \chi(\omega + \Gamma e^{i\theta}) d\theta}{\Gamma e^{i\theta}} = 0 \\
 \Rightarrow \oint_C \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' &= \mathcal{P} \int_{-R}^{+R} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_{\pi}^0 \frac{\epsilon e^{i\theta} \chi(\omega + \epsilon e^{i\theta}) d\theta}{\epsilon e^{i\theta}} \\
 &+ \int_0^{\pi} \frac{\Gamma e^{i\theta} \chi(\omega + \Gamma e^{i\theta}) d\theta}{\Gamma e^{i\theta}} = 0. \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

A seguir, no  $\lim \epsilon \rightarrow 0$ , a primeira integral em  $\theta$  pode ser facilmente avaliada e quando  $\lim \Gamma \rightarrow +\infty$ , desconsiderando que a função  $\chi(\omega')$  tenha pontos de acumulação na região infinita do plano, qualquer que seja a direção tal que  $\omega' \rightarrow +\infty$  no semi-plano superior,  $|\chi(\omega')| \rightarrow 0$ , pois o fator de atenuação devido à parte imaginária da susceptibilidade, assim como em (3.11), diminui cada vez mais o integrando. Logo, a integral que deseja-se ser calculada é reduzida a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' - i\pi\chi(\omega) &= 0 \\
 \Rightarrow \chi(\omega) &= -\frac{\mathcal{P}}{\pi} i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega'. \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

Como a função  $\chi(\omega)$  é uma função complexa, ela pode ser escrita como  $\chi(\omega) = \text{Re}[\chi(\omega)] + i\text{Im}[\chi(\omega)]$ , e a expressão (3.16) é escrita como

$$\chi(\omega) = -\frac{\mathcal{P}}{\pi} i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\{\text{Re}[\chi(\omega')] + i\text{Im}[\chi(\omega')]\}}{\omega' - \omega} d\omega'. \quad (3.17)$$

Do modo em que a expressão (3.17) é escrita, as partes real e imaginária, explicitamente, são dadas por

$$\begin{cases} \text{Re}[\chi(\omega)] = \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im}[\chi(\omega')]}{\omega' - \omega} d\omega', \\ \text{Im}[\chi(\omega)] = -\frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re}[\chi(\omega')]}{\omega' - \omega} d\omega'. \end{cases} \quad (3.18)$$

As duas equações escritas em (3.18) são acopladas pela mesma função  $\chi(\omega)$ . Pode-se dizer que essas duas expressões compreendem um par de *transformadas de Hilbert*. Algumas propriedades desse novo tipo de transformação estão descritas no Apêndice D. Uma pergunta que se poderia fazer agora é: sabendo que as integrais em (3.18) vão de  $-\infty$  a  $+\infty$ , qual é o sentido de frequências negativas?

Pode-se realizar uma transformação de variáveis, por exemplo, na primeira expressão da equação (3.18), obtendo-se

$$\begin{aligned} \text{Re}[\chi(\omega)] &= \frac{\mathcal{P}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im}[\chi(\omega')]}{\omega' - \omega} d\omega' \\ &= \frac{\mathcal{P}}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 \frac{\text{Im}[\chi(\omega')]}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_0^{+\infty} \frac{\text{Im}[\chi(\omega')]}{\omega' - \omega} d\omega' \right\}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

A seguir, a transformação de variáveis é realizada na primeira integral da segunda expressão em (3.19), na qual faz-se  $\omega' = -\omega'$ , portanto,  $d\omega' = -d\omega'$ , e os extremos de integração passam a ser de  $+\infty$  a 0. Utilizando agora a propriedade de antisimetria contida em (3.10), obtém-se

$$\begin{aligned} \text{Re}[\chi(\omega)] &= \frac{\mathcal{P}}{\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 \frac{\text{Im}[\chi(\omega')]}{\omega' - \omega} d\omega' + \int_0^{+\infty} \frac{\text{Im}[\chi(\omega')]}{\omega' - \omega} d\omega' \right\} \\ &= \frac{\mathcal{P}}{\pi} \left\{ - \int_0^{+\infty} \frac{\text{Im}[\chi(-\omega')]}{\omega' + \omega} d\omega' + \int_0^{+\infty} \frac{\text{Im}[\chi(\omega')]}{\omega' - \omega} d\omega' \right\} \\ &= \frac{\mathcal{P}}{\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{\text{Im}[\chi(\omega)]}{\omega' + \omega} d\omega' + \int_0^{+\infty} \frac{\text{Im}[\chi(\omega)]}{\omega' - \omega} d\omega' \right\}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Agora que as duas integrais na última igualdade em (3.20) estão no mesmo intervalo de integração, pode-se utilizar da propriedade da linearidade do operador da integral para somar as duas, resolvendo um mínimo múltiplo comum bem simples entre os dois

denominadores:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}[\chi(\omega)] &= \frac{\mathcal{P}}{\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Im}[\chi(\omega)]}{\omega' + \omega} d\omega' + \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Im}[\chi(\omega)]}{\omega' - \omega} d\omega' \right\} \\ &= \frac{2\mathcal{P}}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega' \operatorname{Im}[\chi(\omega)]}{\omega'^2 + \omega^2} d\omega'.\end{aligned}\quad (3.21)$$

Cabe ressaltar agora que já não existe mais a preocupação com frequências negativas que vêm da definição da integral das partes real e imaginária. Sendo assim, o modo mais geral de se escrever as relações em (3.18), sendo elas

$$\begin{cases} \operatorname{Re}[\chi(\omega)] = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\omega' \operatorname{Im}[\chi(\omega')]}{\omega'^2 + \omega^2} d\omega', \\ \operatorname{Im}[\chi(\omega)] = -\frac{2\omega}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Re}[\chi(\omega')]}{\omega'^2 + \omega^2} d\omega'. \end{cases}\quad (3.22)$$

Como último comentário a respeito das propriedades dessas transformadas, é imediato, por inspeção, que se a parte real da susceptibilidade dinâmica for nula, a parte imaginária necessariamente também será. As relações como estão (3.22) são conhecidas como *Relações de Dispersão*, e recebem esse nome, pois, as partes real e imaginária de funções como o índice de refração podem ser associadas à transmissão e à absorção, relacionando um meio dispersivo entre elas. No trabalho original sobre o assunto, as relações também são conhecidas por *relações de Kramers-Kronig* [37].

### 3.3 Relações de Dispersão Subtraídas

A partir de agora, a suposição de que a susceptibilidade generalizada  $\chi(\omega)$  não possui pontos de acumulação na parte infinita do semi-plano superior, que foi utilizada para resolver as equações em (3.15), é retirada. Isso faz com que  $\chi(\omega') \rightarrow \chi_\infty$  quando  $|\omega'| \rightarrow \infty$ , no caso mais simples, ou seja, a susceptibilidade converge muito lentamente para uma constante no infinito.

Nessa nova consideração, no contorno  $C'$ , quando toma-se  $\lim \Gamma \rightarrow \infty$ , a contribuição integral dessa parte passa a ser

$$\lim_{\Gamma \rightarrow \infty} \int_0^\pi \frac{\chi(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega' = i\pi \chi_\infty.\quad (3.23)$$

Apesar da expressão (3.23) fazer sentido matemático, não existe razão pela qual o semi-plano infinito superior ser isotrópico pela variação de  $\omega'$ , ou seja, nas mais diferentes direções do aumento do valor absoluto de  $\omega'$ , a função  $\chi(\omega')$  poderia ir para constantes



diferentes. Como consequência, a integral em (3.23) não poderia ser resolvida. Desse modo, um truque perspicaz que se pode realizar é uma subtração na relação de dispersão.

Basicamente, uma *relação de dispersão subtraída* é um método que exige o conhecimento do valor da susceptibilidade  $\chi(\omega)$  em um ponto do eixo real. Mais especificamente, conhecer  $\chi(\omega_0)$  no ponto  $\omega_0$ , tal como representado na figura abaixo. Dessa forma, pode-se

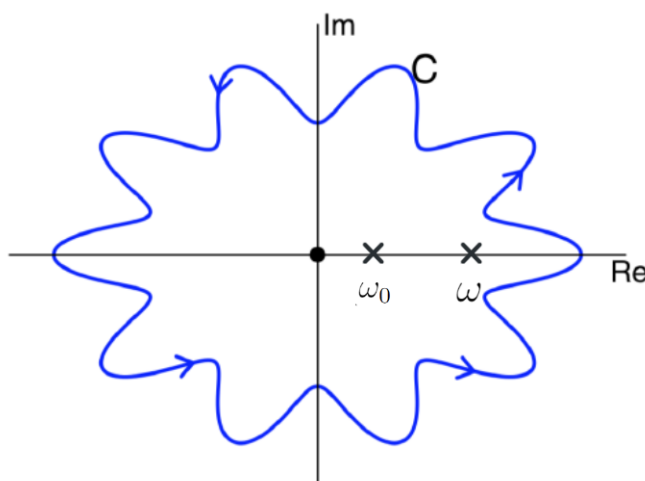


Figura 3.3: Plano complexo de  $\omega'$ , com os pontos conhecidos  $\omega_0$  e  $\omega$ , e um contorno qualquer que inclui os pontos conhecidos em seu interior.

definir novamente a função  $f(\omega')$  como segue:

$$f(\omega') = \frac{\chi(\omega') - \chi(\omega_0)}{(\omega' - \omega)(\omega' - \omega_0)}. \quad (3.24)$$

Após a definição dada em (3.24), contanto que  $\omega'$  não faça com que  $\chi(\omega')$  vá muito rapidamente para um valor saturado no infinito, o mesmo integrando pode ser calculado novamente, mas agora com a função definida em (3.24). Isso faz com que, com essa nova definição, a integral em (3.23) convirja assim como em (3.15). Logo, pode-se calcular a mesma integral, e o resultado agora de (3.16) passa a ser

$$\chi(\omega) = \chi(\omega_0) - \frac{i}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi(\omega') - \chi(\omega_0)}{(\omega' - \omega)(\omega' - \omega_0)} d\omega'. \quad (3.25)$$

Como existe um termo no segundo membro sendo subtraído em vez de uma integral, a relação em (3.25) é conhecida como *relação de dispersão uma vez subtraída*. Caso a função  $\chi(\omega)$  crescesse ainda mais rapidamente com  $\omega'$ , por exemplo  $\omega'^2$ , a relação de dispersão precisaria de mais uma subtração, sendo uma relação de dispersão duas vezes subtraída. É possível generalizar o caso para realizar  $n$ -subtrações, mas é claro, em um número finito, já que seria necessário conhecer um número finito de pontos na reta real do

plano complexo  $\omega'$ .

### 3.4 Relações de Dispersão aplicadas às amplitudes invariantes

Considerando toda discussão anterior a respeito de relações de dispersão e analiticidade ao longo deste capítulo, pode-se agora discutir qual a importância dessa exposição para as amplitudes invariantes. Como pode ser visto nas equações em (A.2) do Apêndice A, as amplitudes invariantes de L'vov podem ser traduzidas para as de Ritus, sem afetar sua analiticidade. No entanto, assim como as susceptibilidades generalizadas, para calcular as partes reais das amplitudes é necessário ter informação da parte imaginária contida no integrando. Como mencionado na Seção 2.5, a maior contribuição dos processos intermediários é dada pela fotoprodução de um pión intermediário (OPE), e os integrandos calculados para as relações de dispersão são [14]

$$\begin{aligned}
\text{Im}[R_1^{OPE}(v, t)] &= qv^2 \left[ (\alpha + z\gamma)(zf_3^2 + f_4^2) - \frac{2}{v}(\alpha + z\gamma - A)f_3f_4 \right], \\
\text{Im}[R_2^{OPE}(v, t)] &= qv^2\gamma \left[ -zf_3^2 - f_4^2 + \frac{2}{v}f_3f_4 \right], \\
\text{Im}[R_3^{OPE}(v, t)] &= qv^2f_3 \left[ [z\alpha + (z^2 - 1)\gamma]f_3 - 2[(z^2 - 1)b + (2z - 1)c]f_4 \right], \\
\text{Im}[R_4^{OPE}(v, t)] &= qv^2f_3 [\alpha f_3 - 2cf_4], \\
\text{Im}[R_5^{OPE}(v, t)] &= qv^2f_3 [-(\alpha + z\gamma)f_3 + (2zb + 3c)f_4], \\
\text{Im}[R_6^{OPE}(v, t)] &= qv^2f_3 [\gamma f_3 - (2b + c)f_4]. \tag{3.26}
\end{aligned}$$

As expressões dadas em (3.26) são funções da velocidade do pión  $v$  no referencial C.M. e de  $z = \cos \theta$ . Todas as definições de funções que aparecem nas expressões (3.26) são dadas no Apêndice E. Primeiramente, é necessário aplicar transformações de variáveis baseadas nas variáveis de Mandelstam e na variável  $\nu$ , passando por  $\omega$  e  $z$ , para expressar essas funções como em (2.24). Portanto duas transformações da forma  $(\nu, z) \rightarrow (\omega, z) \rightarrow (\nu, t)$ . As transformações do conjunto  $(\omega, z) \leftrightarrow (\nu, t)$  são dadas por

$$\begin{aligned}
\nu(\omega, z) &= \frac{\omega}{2M} \left[ 2\sqrt{M^2 + \omega^2} + \omega(1 + z) \right], \\
t(\omega, z) &= 2\omega^2(z - 1). \tag{3.27}
\end{aligned}$$

As respectivas transformações inversas  $(\nu, t) \rightarrow (\omega, z)$  são

$$\begin{aligned}\omega(\nu, t) &= \frac{2M\nu - t/2}{2\sqrt{M^2 + 2M\nu - t/2}}, \\ z(\nu, t) &= 1 + \frac{2t(M^2 + 2M\nu - t/2)}{(2M\nu - t/2)^2}.\end{aligned}\quad (3.28)$$

Conhecidos os conjuntos de transformações das variáveis cinemáticas, agora é possível escrever a velocidade do pión  $v$  como  $v(\omega, z)$  e  $v(\nu, t)$ :

$$\begin{aligned}v(\omega, z) &= \frac{\sqrt{[2\omega^2 + 2\omega\sqrt{M^2 + \omega^2} - m^2]^2 - 4M^2m^2}}{2m[\omega + \sqrt{M^2 + \omega^2}]}, \\ v(\nu, t) &= \frac{\sqrt{[2M\nu - t/2 - m^2]^2 - 4M^2m^2}}{2m\sqrt{M^2 + 2M\nu - t/2}}.\end{aligned}\quad (3.29)$$

Na segunda equação do conjunto (3.29), as massas  $m$  e  $M$  se referem às massas do pión e do nucleon, respectivamente. Além disso, é claro que as partes imaginárias das amplitudes de Ritus descritas em (3.26) precisam ser detalhadas mais profundamente. Todas as suas definições são dadas no Apêndice E.

Assim como mencionado anteriormente, a partir de agora o trabalho mais central será realizado considerando-se que a analiticidade das amplitudes de Ritus segue a das amplitudes de L'vov. Portanto pode-se escrever a expressão (2.24) da forma

$$\text{Re}[R_i(\nu, t)] = R_i^{\text{pole}}(\nu, t) + R_i^{\text{int}}(\nu, t) + R_i^{\text{as}}(\nu, t), \quad i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.\quad (3.30)$$

A componente dos pólos referentes aos canais  $s$  e  $u$  podem ser escritas como

$$\begin{aligned}R_i^{\text{pole}}(\nu, t) &= \frac{a_i(t)}{\nu^2 - t^2/16m^2}, \\ a_i(t=0) &= \frac{2}{\pi} \int_{\nu_0}^{+\infty} \frac{\text{Im}_s[R_i(\nu', t=0)]}{\nu'} d\nu', \quad i \in \{3, 4, 5, 6\}.\end{aligned}\quad (3.31)$$

Pode-se concluir então que as funções  $a_i$  podem ser calculadas com relações de dispersão não subtraídas. As funções  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  são fixas com valor experimental de spin elétrico e magnético das polarizabilidades. Além disso,  $\nu_0 = m_\pi + (m_\pi^2 + t/2)/2M$  é o primeiro limiar inelástico por conta de estados intermediários de pión-nucleon.

A parte assintótica  $R_i^{\text{as}}$  satisfaz também relações de dispersão não subtraídas, e as partes  $R_3^{\text{as}}$ ,  $R_4^{\text{as}}$ ,  $R_5^{\text{as}}$  e  $R_6^{\text{as}}$  são suprimidas quando  $\nu \rightarrow \infty$ . Para as amplitudes  $R_1^{\text{as}}$  e  $R_2^{\text{as}}$  seguem a forma da amplitude de Low [14]:

$$\begin{aligned}
R_1^{as.}(t) &\approx R_1^\sigma(t) = \frac{g_{\sigma NN} F_{\sigma NN}}{t - m_\sigma^2}, \\
R_2^{as.}(t) &\approx R_2^{\pi^0}(t) = \frac{g_{\pi NN} F_{\pi^0 \gamma \gamma}}{t - m_{\pi^0}^2} \tau_3 F_\pi(t).
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Olhando mais atentamente o conjunto de expressões em (3.32), tem-se algumas constantes nos numeradores das duas equações, e nos denominadores aparece uma função da variável  $t$ , com a massa de  $\pi^0$ , e um fator de forma  $F_\pi(t)$  como função da variável de Mandelstam  $t$  vindo do vértice da interação  $\pi NN$  e  $\pi^0 \gamma \gamma$ .

A parte mais central das contribuições da parte real das amplitudes de Ritus vem de  $R_i^{int}(\nu, t)$ , que é uma função das duas variáveis cinemáticas  $(\nu, t)$ , e que obedece uma relação de dispersão subtraída para um dado valor fixo de  $t$ . Assim como o que foi mencionado para as relações de dispersão subtraídas na Seção 3.3, as funções analíticas em uma certa região no plano podem apresentar pontos de acumulação conforme  $|\nu| \rightarrow \infty$ . Sendo assim, optou-se por realizar uma subtração na contribuição integral  $R_i^{int}(\nu, t)$ , para garantir que a contribuição do integrando seja suprimida mais rapidamente que um crescimento  $\nu$ . A outra coisa é que, por conta do denominador em (3.25), faz-se um deslocamento no plano das energias, para que o integrando não passe por zero na sua definição. A expressão algébrica da contribuição integral é dada por

$$\text{Re} [R_i^{int}(\nu, t)] = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_{\nu_0=\nu_{thr}(t)}^{\nu_f=\nu_{max}(t)} \frac{\nu' \text{Im}[R_i^L(\nu', t)]}{(\nu'^2 - \nu^2)} d\nu'. \tag{3.33}$$

Como a subtração é feita para o valor de  $\nu' = 0$ , é esse valor de energia real que é considerado como singularidade. O intervalo de integração é justificado pelo limiar de fotoprodução do pión,  $\nu_{thr}(t) = E_{thr} + t/4M$ , tal que  $E_{thr} \approx 150 \text{ MeV}$ , e  $\nu_{max}(t) = E_{max} + t/4M$ , tal que  $E_{max} \approx 1.5 \text{ GeV}$ . Cabe lembrar que o valor nominal utilizado para a massa do nucleon  $M$  é  $M = 938.9 \text{ MeV}$  e esse intervalo de integração é utilizado fazendo uso da existência da parte imaginária das amplitudes de Ritus, que surge justamente a partir do limiar de fotoprodução de píons, e é limitado superiormente até onde se pode utilizar a subtração na relação de dispersão. Abaixo, segue uma ilustração das possíveis escolhas de contorno que se faz a relação de dispersão da amplitude de Ritus.

Analisando a expressão (3.33), também é notório que o limite de integração depende da variável  $t$ , portanto existe, para cada  $t$  diferente, uma integração a ser resolvida. Desse modo, o esquema de subtração mais completo com a subtração sendo feita com relação a

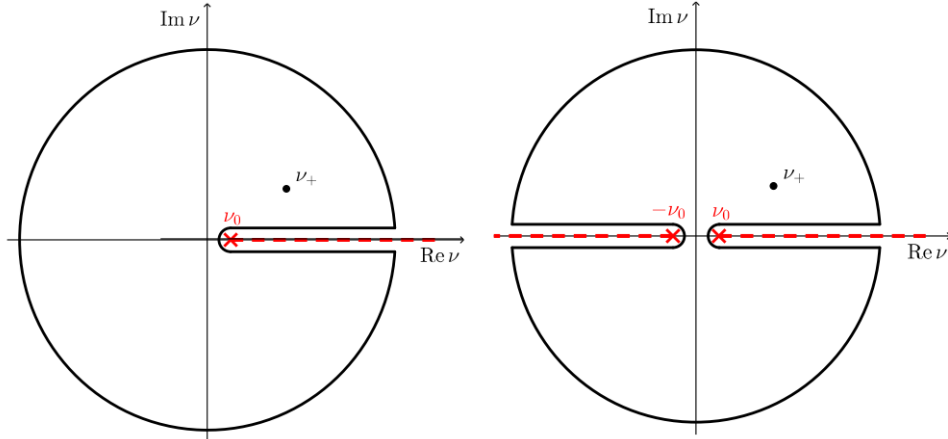


Figura 3.4: Esquema do contorno para subtração unilateral em (a) e bilateral em (b). Retirado de [7].

$(\nu = 0, t)$  pode ser escrito por

$$\begin{aligned} \text{Re}[R_i(\nu, t)] &= R_i^{N-pole}(\nu, t) + [R_i(0, t) - R_i^{N-pole}(0, t)] \\ &+ \frac{2}{\pi} \nu^2 \mathcal{P} \int_{\nu_{thr}}^{\nu_{max}} \frac{\text{Im}_s[R_i(\nu', t)]}{\nu'(\nu'^2 - \nu^2)} d\nu'. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Os  $N$ -pólos referidos em (3.34) dizem respeito aos canais  $s$  e  $u$  dos estados intermediários considerados, sendo majoritariamente governados pela troca de um píon. Restava agora resolver a integração contida na expressão (3.34) para então relacionar toda construção das amplitudes invariantes com as polarizabilidades dinâmicas. A expressão entre colchetes da primeira linha de (3.34) pode ser calculada do seguinte modo,

$$\begin{aligned} R_i(0, t) - R_i^{N-pole}(0, t) &= a_i + [R_i^{\pi^0-pole}(0, t) - R_i^{\pi^0-pole}(0, 0)] \\ &+ \frac{t}{\pi} \int_{(2m_\pi)^2}^{+\infty} \frac{\text{Im}_t[R_i^L(0, t')]}{t'(t' - t)} dt' - \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{-2m_\pi^2 - 4Mm_\pi} \frac{\text{Im}_t[R_i^L(0, t')]}{t'(t' - t)} dt'. \end{aligned} \quad (3.35)$$

É possível também utilizar as funções  $a_i$  escritas em (3.31) para obter as polarizabilidades estáticas  $\bar{\alpha}_{E1}$  e  $\bar{\beta}_{M1}$ , ou seja, aquelas que não dependem da energia dos fótons, e que podem ser consideradas como  $\bar{\alpha}_E = \lim_{\omega \rightarrow 0} \alpha_{E1}(\omega)$  e  $\bar{\alpha}_M = \lim_{\omega \rightarrow 0} \beta_{M1}(\omega)$ . Suas expressões em termos de  $a_i$  são dadas por

$$\begin{cases} \bar{\alpha}_E = -\frac{1}{4\pi}(a_1 + a_3 + a_6), \\ \bar{\beta}_M = -\frac{1}{4\pi}(-a_1 + a_3 + a_1). \end{cases} \quad (3.36)$$

Naturalmente, como os conjuntos de transformações de (3.27)-(3.29) fazem com que a parte imaginárias das amplitudes de Ritus expostas em (3.26) sejam funções muito complicadas e, apesar de serem funções analíticas em uma parte do plano, e portanto integráveis segundo Riemann, sua primitiva não pode ser escrita em termos de uma combinação linear ou de produto de funções elementares. Por esse motivo, um método numérico teve de ser escolhido, que sera discutido mais adiante no presente trabalho.

### 3.5 Polarizabilidades dinâmicas a partir das amplitudes invariantes

Como última parte da composição da aplicação de relações de dispersão e amplitudes invariantes, o ingrediente que resta para construir o potencial de Casimir-Polder são as polarizabilidades dinâmicas. Para seguir a notação mais clássica no assunto, a decomposição de amplitudes nos multipolos de Compton é simbolizada por  $f = f^{born} + \bar{f}$ . As partes *non-born*  $\bar{f}$ , que são dependentes da estrutura da reação, são utilizadas para definir as polarizabilidades dinâmicas conforme a referência [38]:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{E\ell}(\omega) \\ \beta_{M\ell}(\omega) \end{pmatrix} = \frac{[\ell(2\ell - 1)!!]^2}{\omega^{2\ell}} [(\ell + 1)\bar{f}_{E,ME,M}^{\ell+}(\omega) + \ell\bar{f}_{E,ME,M}^{\ell-}(\omega)] . \quad (3.37)$$

Da expressão (3.37),  $\ell = J \pm 1/2$ . No caso atual em consideração, tem-se que  $\ell = 1$  e para a ordem de dipolo elétrico e magnético,  $E, M = EE$  para o caso elétrico e  $E, M = MM$  para o caso magnético. Sendo assim, a expressão (3.37) se reduz a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_{E1}(\omega) \\ \beta_{M1}(\omega) \end{pmatrix} &= \frac{[1(2 \times 1 - 1)!!]^2}{\omega^{2 \times 1}} [(1 + 1)\bar{f}_{E,ME,M}^{1+}(\omega) + 1\bar{f}_{E,ME,M}^{1-}(\omega)] \\ \begin{pmatrix} \alpha_{E1}(\omega) \\ \beta_{M1}(\omega) \end{pmatrix} &= \frac{1}{\omega^2} [2\bar{f}_{E,ME,M}^{1+}(\omega) + \bar{f}_{E,ME,M}^{1-}(\omega)] . \end{aligned} \quad (3.38)$$

Sendo assim, as polarizabilidades na ordem de dipolo elétrico  $\alpha_{E1}(\omega)$  e magnético  $\beta_{M1}(\omega)$  podem ser escritas separadamente de acordo com a equação (3.38), com duas expressões semelhantes:

$$\begin{cases} \alpha_{E1}(\omega) = \frac{1}{\omega^2} [2f_{EE}^{1+}(\omega) + f_{EE}^{1-}(\omega)] , \\ \beta_{M1}(\omega) = \frac{1}{\omega^2} [2f_{MM}^{1+}(\omega) + f_{MM}^{1-}(\omega)] . \end{cases} \quad (3.39)$$

A barra acima das amplitudes de dipolo  $f$  foram omitidas em (3.39) para simplificar um

pouco a notação. A importância das amplitudes de dipolo  $f$  é que elas têm relação com a parte que depende da estrutura das amplitudes invariantes de L'vov, como descrito em [13], onde existem as definições mais gerais para qualquer ordem de expansão de multipolo. Aqui são descritos apenas os casos necessários que compõem as duas equações de (3.39), ou seja,  $f_{EE}^{+1}(\omega)$  e  $f_{EE}^{-1}(\omega)$  para o caso elétrico;  $f_{MM}^{+1}(\omega)$  e  $f_{MM}^{-1}(\omega)$  para o caso magnético. Suas relações são dadas abaixo, por casos.

Primeiramente, para o caso elétrico,

$$\begin{aligned}
f_{EE}^{1+}(\omega) &= \int_{-1}^1 \frac{M}{16 \cdot 4\pi W} \left[ \bar{A}_3^L(\omega, z) (-3 + z^2) \right. \\
&\quad + 4\bar{A}_6^L(\omega, z) (-1 + z^2) + (2\bar{A}_2^L(\omega, z) + \bar{A}_4^L(\omega, z) \\
&\quad \left. + 2\bar{A}_5^L(\omega, z)z(-1 + z^2) + 2\bar{A}_1^L(\omega, z)(1 + z^2) \right] dz. \quad (3.40)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{EE}^{1-}(\omega) &= \int_{-1}^1 \frac{M}{8 \cdot 4\pi W} \left[ -\bar{A}_3^L(\omega, z) (-3 + z^2) \right. \\
&\quad + -4\bar{A}_6^L(\omega, z) (-1 + z^2) - (-\bar{A}_2^L(\omega, z) + \bar{A}_4^L(\omega, z) \\
&\quad \left. + 2\bar{A}_5^L(\omega, z)z(-1 + z^2) + \bar{A}_1^L(\omega, z)(1 + z^2) \right] dz. \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Para o caso magnético, as duas funções importantes para as polarizabilidades são

$$\begin{aligned}
f_{MM}^{1+}(\omega) &= \int_{-1}^1 \frac{M}{16 \cdot 4\pi W} \left[ 2\bar{A}_2^L(\omega, z) (-1 + z^2) \right. \\
&\quad + \bar{A}_4^L(\omega, z) (-1 + z^2) + 2 \left( \bar{A}_5^L(\omega, z)(1 - z^2) \right. \\
&\quad \left. \left. + \bar{A}_1^L(\omega, z)2z - \bar{A}_3^L(\omega, z)z \right) \right] dz. \quad (3.42)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{MM}^{1-}(\omega) &= \int_{-1}^1 \frac{M}{8 \cdot 4\pi W} \left[ \bar{A}_4^L(\omega, z) (1 - z^2) \right. \\
&\quad + \bar{A}_2^L(\omega, z) (-1 + z^2) + 2 \left( \bar{A}_5^L(\omega, z)(-1 + z^2) \right. \\
&\quad \left. \left. + \bar{A}_1^L(\omega, z)z - \bar{A}_3^L(\omega, z)z \right) \right] dz. \quad (3.43)
\end{aligned}$$

Uma vez definidas as expressões (3.42)-(3.43) é possível realizar a combinação linear considerando a linearidade do processo de integração para agregar os termos em cada uma

das expressões de acordo com (3.39). Após a realização da combinação linear das partes dependentes de estrutura das amplitudes de L'vov  $\bar{A}_i^L(\omega, z)$  e considerar que, assim como essas partes dependem da estrutura da reação, a correspondência com as amplitudes de Ritus fica exatamente a mesma. Segue que as polarizabilidades dinâmicas eletromagnéticas, em termos das partes dependentes de estrutura das amplitudes de Ritus  $\bar{R}_i(\omega, z)$  são dadas por

$$\begin{aligned}\alpha_{E1}(\omega) &= \int_{-1}^{+1} \frac{3[\bar{R}_1(\omega, z)(1 + z^2) + 2z\bar{R}_2(\omega, z)]}{8\omega^2} dz, \\ \beta_{M1}(\omega) &= \int_{-1}^{+1} \frac{3[\bar{R}_2(\omega, z)(1 + z^2) + 2z\bar{R}_1(\omega, z)]}{8\omega^2} dz.\end{aligned}\quad (3.44)$$

De acordo com o último conjunto de expressões em (3.44), as polarizabilidades dinâmicas, na região analítica, só dependem de uma integração da combinação linear das primeiras duas componentes das amplitudes de Ritus. É importante notar que justamente as componentes  $R_1(\omega, z)$  e  $R_2(\omega, z)$  têm componentes assintóticas que contribuem, como pode ser visto em (3.32).



# Capítulo 4

## Teoria de Perturbação Quiral a baixas energias

O presente capítulo tem como objetivo primário apresentar o conceito de simetria quiral, sua quebra explícita, de modo a justificar brevemente uma comparação a ser feita nos resultados obtidos no trabalho. Tal justificativa vem do fato de se poder inserir a contribuição da ressonância- $\Delta$  para a função lagrangiana efetiva da Cromodinâmica Quântica(QCD) por meio de uma técnica conhecida como *Small Scale Expansion*(SSE). A expansão é realizada a baixas energias até  $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ , onde  $\epsilon$  é o parâmetro de expansão, considerando-se os píons e nucleons como graus de liberdade ativos da teoria, e a ressonância- $\Delta(1232)$  como grau de liberdade explícito, como ficará mais claro adiante no capítulo.

### 4.1 Lagrangiana fermiônica no limite quiral

Como já se conhece, a QCD é uma teoria que trata basicamente do estudo de férmions puntiformes de spin-1/2, que são os *quarks*, cuja interação é mediada via bósons de calibre(ou *gauge*), chamados *glúons*. Para manter as funções de onda dos férmions totalmente antissimétricas, a simetria de “cor” foi introduzida como um número quântico a mais [39]. Em baixas trocas de momento, a constante de acoplamento da QCD se torna grande, tendo como consequência os quarks e glúons não sendo mais os graus de liberdade relevantes. Tal fato é consequência direta do efeito de confinamento de quarks em objetos de “cor neutra”, chamados *hádrons*, estes passando a ser os graus de liberdade ativos da QCD no regime de baixas energias.

Os quarks da QCD podem ser divididos em dois setores: o setor leve, que contém os quarks *up* ( $u$ ), *down* ( $d$ ) e *strange* ( $s$ ), e o setor pesado, que contém os quarks *charm* ( $c$ ), *bottom* ( $b$ ) e *top* ( $t$ ). É importante ressaltar que o setor leve dos quarks é significativamente mais leve que os nucleons. O nêutron, por exemplo tem uma massa de aproximada-

mente  $m_N \approx 938.9 \text{ MeV}$ , enquanto que o setor leve tem, considerando-se a escala de renormalização da QCD próxima a  $1 \text{ GeV}$ , uma massa de, aproximamente

$$m_u \approx 4 \text{ MeV}, \quad m_d \approx 8 \text{ MeV}, \quad m_s \approx 164 \text{ MeV}. \quad (4.1)$$

Como se pode observar pelos valores dados em (4.1), os quarks  $u$  e  $d$  são muito mais leves que um nêutron, e ainda assim muito mais leves também que os quarks do setor pesado. Por esse motivo, um tratamento mais correto a baixas energias será feito aqui apenas considerando os quarks  $u$  e  $d$ , apesar de o quark  $s$  também fazer parte do setor leve. O chamado *limite quiral* ocorre quando toma-se a aproximação das massas do setor leve de quarks serem nulas. Nesse limite, a lagrangiana da QCD exibe uma simetria global que impede o acoplamento de quarks de helicidade de mão-esquerda aos de mão-direita.

Para tentar criar uma figura mais concreta do que acontece, considera-se a lagrangiana de um férmion livre, sem massa, ou seja,

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi. \quad (4.2)$$

É possível decompor os férmions representados algebricamente no espaço espinorial da expressão (4.2) como uma soma direta de projeções de férmions em uma componente que tem helicidade de mão-esquerda, e helicidade de mão-direita, sendo representados por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_R\gamma_\mu\partial^\mu\psi_R + \bar{\psi}_L\gamma_\mu\partial^\mu\psi_L. \quad (4.3)$$

Na expressão (4.3), a representação dos espinores decompostos em helicidades de mão-esquerda e direita tem relação com o espaço espinorial mais comumente escrito por meio das relações

$$\begin{cases} \psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi, \\ \psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi. \end{cases} \quad (4.4)$$

Como não existe acoplamento entre os dois espinores com helicidades diferentes para um férmion de massa nula, é possível estabelecer uma simetria global unitária bi-dimensional  $U(2)$  no espaço de sabores (ou seja, relativa aos dois sabores  $u$  e  $d$ ), dada por

$$\begin{cases} \psi_R \rightarrow U_R\psi_R = e^{i\theta_R\frac{\tau_a}{2}}\psi_R, \\ \bar{\psi}_R \rightarrow \overline{(U_R\psi_R)} = \bar{\psi}_RU_R^\dagger = e^{-i\theta_R\frac{\tau_a}{2}}\bar{\psi}_R; \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} \psi_L \rightarrow U_L\psi_L = e^{i\theta_L\frac{\tau_a}{2}}\psi_L, \\ \bar{\psi}_L \rightarrow \overline{(U_L\psi_L)} = \bar{\psi}_LU_L^\dagger = e^{-i\theta_L\frac{\tau_a}{2}}\bar{\psi}_L. \end{cases} \quad (4.6)$$

Antes da definição mais precisa de  $\tau_a$  e sua aplicação nos autoestados de isospin, continua-se usando as definições dadas em (4.5) e (4.6) juntamente à unitariedade dos operadores  $U$  da simetria global em  $U(1)$  para então obter

$$\begin{cases} U_R^\dagger U_R = e^{-i\theta_R \frac{\tau_a}{2}} e^{i\theta_R \frac{\tau_a}{2}} = \mathbb{1}_{2 \times 2}, \\ U_L^\dagger U_L = e^{-i\theta_L \frac{\tau_a}{2}} e^{i\theta_L \frac{\tau_a}{2}} = \mathbb{1}_{2 \times 2}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Utilizando as transformações definidas em (4.5) e (4.6), a lagrangiana transformada pode ser escrita como

$$\mathcal{L}' = i\bar{\psi}_R U_R^\dagger U_R (\gamma_\mu \partial^\mu) \psi_R + i\bar{\psi}_L U_L^\dagger U_L (\gamma_\mu \partial^\mu) \psi_L. \quad (4.8)$$

Utilizando a unitariedade da transformação dada em (4.7) e considerando que o operador derivada e as matrizes de Dirac comutam com as transformações globais de  $U$ , fica claro que  $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$ . Restringindo-se ao setor leve de quarks, novamente falando, aos quarks  $u$  e  $d$ , tem-se que  $U_R, U_L \in SU(2)$ , onde os operadores hermitianos  $T^a$  são os geradores do grupo  $SU(2)$ , e

$$\begin{cases} T^a = \frac{\tau_a}{2}, \quad \mathbb{1}_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (4.9)$$

De acordo com as expressões em (4.9), pode-se realizar um conjunto de transformações importantes no dubleto de isospin constituído pelo proton e neutron, obtendo-se

$$\begin{aligned} \tau^3 \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} +p \\ -n \end{pmatrix}, \\ \mathcal{Q} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} (\mathbb{1}_{2 \times 2} + \tau^3) \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +p \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \tau_+ \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} (\tau^1 + i\tau^2) \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \tau_- \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} (\tau^1 - i\tau^2) \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

No conjunto apresentado em (4.10),  $\mathcal{Q}$  é a chamada matriz carga eletromagnética, e  $\tau_+, \tau_-$  são operadores de levantamento e abaixamento, respectivamente, no espaço de isospin.

## 4.2 Quebra da simetria quirial

Incluindo a matriz de massa  $\hat{m} \in SU(2)$ , na lagrangiana em (4.3), nota-se uma quebra explícita da simetria quirial, pois há um fator de mistura de quarks de acordo com a matriz  $\hat{m}$ , dada por

$$\hat{m} = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_d \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Com a aplicação da matriz  $\hat{m}$  na lagrangiana (4.3), surgem dois termos de massa que criam componentes cruzadas da helicidade de mão-esquerda e mão-direita. Essa componente é escrita como

$$\mathcal{L}_m = \bar{\psi}\hat{m}\psi = \bar{\psi}_L\hat{m}\psi_R + \bar{\psi}_R\hat{m}\psi_L. \quad (4.12)$$

Poderia-se continuar com a aproximação da massa dos quarks  $u$  e  $d$  serem nulas, chamada de limite quirial, fazendo com que a simetria quirial se mantivesse exata. Nesta situação, existem dois cenários possíveis de manifestação desta simetria no espectro da teoria. O primeiro, chamado de Wigner-Weil, mantém não apenas a lagrangiana, mas também o vácuo da teoria (estado de menor energia possível) invariante sob transformações quirais. Já no segundo cenário, chamado de Nambu-Goldstone, a lagrangiana da teoria se mantém invariante sob transformações da simetria, porém, não mais o vácuo. Diz-se, neste caso, que a simetria está escondida (ou, na expressão histórica, que a simetria foi espontaneamente quebrada). A assinatura física que distingue esses dois cenários é que, no primeiro, as partículas mais leves da teoria não teriam nenhuma restrição com relação às suas massas, e partículas com paridade bem definida encontrariam-se degeneradas em massa com outras de paridade invertida. Já no segundo cenário, as partículas mais leves seriam de massa nula (no limite quirial), com paridade negativa (bósons de Nambu-Goldstone), com ausência das correspondentes partículas degeneradas com paridade positiva.

Ao observar o espectro hadrônico, é nítida a assinatura do segundo cenário, de quebra espontânea da simetria quirial, dado que os mésons pseudoescalares ( $J^P = 0^-$ ) de mais baixa massa, os píons, são consideravelmente mais leves que os outros mésons existentes com os mesmos números quânticos, além da ausência de partículas com massas próximas às dos píons com paridade positiva. No cenário da simetria de Nambu-Goldstone, o “custo energético” para a criação de bósons de Goldstone quando a simetria quirial é espontaneamente quebrada implica na identificação dos mésons pseudoescalares com tais bósons. A quebra espontânea de simetria com um vácuo degenerado do tipo “chapéu mexicano” é representada na figura abaixo.

Em termos de autoestados do número quântico de isospin, os píons são representados

por

$$\begin{aligned}
|\pi^+\rangle &= |I = 1, I_z = +1\rangle, \\
|\pi^0\rangle &= |I = 1, I_z = +0\rangle, \\
|\pi^-\rangle &= |I = 1, I_z = -1\rangle.
\end{aligned}
\tag{4.13}$$

A pequena massa dos pions se dá por conta do não desaparecimento das massas dos quarks. Como existe uma diferença considerável de massa entre os pions e os demais hádrons, o fato sugere que os pions são os graus de liberdade ativos a baixas energias da QCD. Na teoria efetiva que tem pions como os graus de liberdade ativos, o parâmetro utilizado como parâmetro de expansão em uma abordagem perturbativa é a massa dos pions, ou momento de magnitude equivalente, dividido pela escala característica que limita a validade da teoria,  $\Lambda_\chi = 4\pi f_\pi \approx 1 \text{ GeV}$  [40].

### 4.3 Teoria de Perturbação Quiral de Bárions Pesados

No mesmo sentido do que foi apresentado nas seções anteriores do presente capítulo, a teoria de perturbação quiral de bárions pesados (HB $\chi$ PT) é uma extensão da teoria de perturbação para mésons ( $\chi$ PT) para incluir também os nucleons como graus de liberdade ativos. Há um problema técnico nesta extensão, pois a massa do nucleon não vai para zero no limite quiral. Tal problema pode ser contornado considerando a massa do nucleon como um parâmetro de alta energia, tal como a escala  $\Lambda_\chi \sim 1 \text{ GeV}$ . Submete-se a lagrangiana quiral a uma expansão não-relativística, em inverso de potências da massa do nucleon, o que justifica o nome do formalismo de bárions pesados. Os detalhes técnicos são muito semelhantes à teoria efetiva de quarks pesados, desenvolvida na década de 1970, e foram adaptadas para pions e nucleons na década de 1990 por Weinberg [8] e Jenkins e Manohar [41].

Primeiramente, para construir a HB $\chi$ PT, assume-se que os (tri-)momentos dos nucleons pesados são baixos, portanto, sua energia cinética é incluída somente de forma perturbativa. A lagrangiana até a terceira ordem é descrita por componentes bariônicas e componentes piônicas,

$$\mathcal{L}_{CS}^{(3)} = \mathcal{L}_{\pi N}^{(1)} + \mathcal{L}_{\pi N}^{(2)} + \mathcal{L}_{\pi N}^{(3)} + \mathcal{L}_{\pi\pi}^{(2)} + \mathcal{L}_{\pi\pi}^{(4)}
\tag{4.14}$$

A seguir, faz-se uma listagem até  $\mathcal{O}(p^3)$  das lagrangianas da HB $\chi$ PT relevantes para o

espalhamento Compton (CS), como considerado na expressão (4.14),

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\pi N}^{(1)} &= \bar{N}_v (i v \cdot D + g_A S \cdot u) N_v, \\
\mathcal{L}_{\pi N}^{(2)} &= \frac{1}{2m_N} \bar{N}_v \left\{ (v \cdot D)^2 - D^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{i}{2} [S^\mu, S^\nu] [(1 + \kappa_v) f_{\mu\nu}^+ + 2(1 + \kappa_s) v_{\mu\nu}^{(s)}] + \dots N_v \right\}, \\
\mathcal{L}_{\pi N}^{(3)} &= \frac{-1}{8m_N^2} \bar{N}_v \left\{ (1 + 2\kappa_v) [S_\mu, S_\nu] f_+^{\mu\sigma} v_\sigma D^\nu \right\} \\
&\quad + 2(\kappa_s - \kappa_v) [S_\mu, S_\nu] v_{(s)}^{\mu\sigma} v_\sigma D^\nu + \text{h.c.} + \dots \left. \right\} N_v.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Nas lagrangianas bariônicas em ordens bem definidas, mostradas em (4.15), temos  $g_A$ , o acoplamento axial pión-nucleon em ordem dominante, os momentos magnéticos anômalos isoescalar e isovetoriais do nucleon,  $\kappa_s = \kappa_p + \kappa_n$  e  $\kappa_v = \kappa_p - \kappa_n$ , respectivamente. O operador projeção de 4-velocidade  $v_\mu$  do nucleon

$$P_v^+ = \frac{1}{2} (1 + \not{v}) \tag{4.16}$$

projeta do campo relativístico no espaço de espinores de Dirac  $\psi_N$  para o campo dependente da velocidade do nucleon por meio da transformação

$$N_v = e^{im_N v \cdot x} P_v^+ \psi_N. \tag{4.17}$$

Dando continuidade às definições das outras grandezas das equações em (4.15),  $S_\mu$  é o chamado pseudovetor de Pauli-Lubanski, dado por

$$S_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} M^{\nu\rho} P^\sigma. \tag{4.18}$$

Na expressão (4.18),  $M^{\nu\rho}$  é o 4-vetor energia-momento e  $P^\sigma$  é o 4-vetor momento. Para o nucleon temos ainda a derivada covariante  $D_\mu$ , dada por

$$D_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu - i v_\mu^{(s)}. \tag{4.19}$$

O restante das grandezas são tensores quirais, dados por

$$\begin{aligned}
U &= u^2 = \exp [i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}/f_\pi] , \\
\Gamma_\mu &= \frac{1}{2} \left\{ u^\dagger \left( \partial_\mu - ie\frac{\tau^3}{2}A_\mu \right) u + u \left( \partial_\mu - ie\frac{\tau^3}{2}A_\mu \right) u^\dagger \right\} , \\
u_\mu &= i \left\{ u^\dagger \left( \partial_\mu - ie\frac{\tau^3}{2}A_\mu \right) u - u \left( \partial_\mu - ie\frac{\tau^3}{2}A_\mu \right) u^\dagger \right\} .
\end{aligned} \tag{4.20}$$

No conjunto de expressões (4.20),  $\vec{\pi}$  representa o campo do pión,  $v_\mu^{(s)} = e/2A_\mu$  denota o campo isoescalar do fóton e os respectivos tensores que os definem são dados por

$$\begin{aligned}
v_{\mu\nu}^{(s)} &= \partial_\mu v_\nu^{(s)} - \partial_\nu v_\mu^{(s)} , \\
f_{\mu\nu}^+ &= ue\frac{\tau^3}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) u^\dagger + u^\dagger e\frac{\tau^3}{2} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) u .
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Com relação ao setor puramente piônico da lagrangiana (4.14), listamos as duas ordens relevantes até quarta ordem,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\pi\pi}^{(2)} &= \frac{f_\pi^2}{4} \text{tr} \left[ (\nabla_\mu U)^\dagger \nabla^\mu U + \chi^\dagger U + \chi U^\dagger \right] \\
\mathcal{L}_{\pi\pi}^{(4)} &= -\frac{e^2}{32\pi^2 f_\pi} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} f_{\mu\nu} f_{\alpha\beta} \pi^0 + \dots .
\end{aligned} \tag{4.22}$$

A segunda equação do conjunto de equações em (4.22) é responsável pelo decaimento do pión neutro em dois fótons, simbolizado já no início da apresentação do trabalho na Figura 2.5, ou seja, o pólo do pión. Novamente, as últimas partes faltantes são as definições dos tensores quirais dados na primeira das equações de (4.22), definidos por

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu U &= \partial_\mu U - i\frac{e}{2}A_\mu [\tau_3, U] , \\
\chi &= 2\mathcal{B}\hat{m} .
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Na expressão (4.23),  $\mathcal{B}$  é o parâmetro relacionado ao condensado de quarks, e a matriz  $\hat{m}$  é inserida no limite de isospin dessa representação particular de  $SU(2)$ , ou seja, tal que  $m_u = m_d$ . Finalmente,  $f_{\mu\nu}$  é o conhecido tensor eletromagnético, dado aqui novamente por

$$f_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu . \tag{4.24}$$

Com o que foi exposto até o momento no presente capítulo, a HB $\chi$ PT pode ser bem descrita a partir de nucleons e píons. No entanto, como já é conhecido, a ressonância- $\Delta(1232)$  fornece uma contribuição significativa para o CS, portanto, seria importante tentar

incluir seus efeitos de alguma maneira na teoria efetiva.

## 4.4 Expansão em Pequena Escala (SSE)

No espalhamento Compton, a ressonância- $\Delta(1232)$  é conhecida por ter um papel na contribuição para a amplitude do espalhamento. Sendo assim, na presente seção apresentamos como incluir a ressonância- $\Delta$  como um grau de liberdade explícito na lagrangiana, utilizando um método conhecido como Expansão em Pequena Escala ou *Small Scale Expansion*(SSE) [18, 42]. Neste método, o parâmetro de expansão é chamado de  $\epsilon$ , que pode ser considerado como uma troca de momento pequena, a massa do pión  $m_\pi$ , ou a diferença de massa  $\Delta_0$  que existe entre  $\Delta$  e a massa do nucleon, dada por

$$\Delta_0 = \text{Re}[m_\Delta] - m_N. \quad (4.25)$$

Assim como na seção anterior, faz-se uma listagem da contribuição das componentes da lagrangiana da SSE desta vez, até a  $\mathcal{O}(\epsilon^3)$  para o RCS. Tal listagem é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Delta^{(1)} &= -\bar{T}_i^\mu g_{\mu\nu} [i v \cdot D^{ij} - \Delta \delta^{ij} + \dots] T_j^\nu, \\ \mathcal{L}_{N\Delta}^{(1)} &= g_{\pi N\Delta} \bar{T}_i^\mu w_\mu^i N + \text{h.c.}, \\ \mathcal{L}_{N\Delta}^{(2)} &= \bar{T}_i^\mu \left[ \frac{i b_1}{M} S^\nu f_{+\mu\nu}^i + \dots \right] N + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Da expressão (4.26),  $T_i^\mu$  é a parte “leve” do campo bariônico. Ademais, os tensores quirais que estão no mesmo conjunto de equações são escritos como

$$\begin{aligned} D_\mu^{ij} &= \partial_\mu \delta^{ij} - i \frac{e}{2} (1 + \tau_3) A_\mu \delta^{ij} + e \epsilon^{i3j} A_\mu + \dots, \\ w_\mu^i &= -\frac{1}{f_\pi} \partial_\mu \pi^i - \frac{e}{f_\pi} A_\mu \epsilon^{i3j} \pi^j + \dots, \\ f_{+\mu\nu}^i &= e \delta^{i3} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) + \dots \end{aligned} \quad (4.27)$$

A constante  $g_{\Delta\pi N}$  representa a constante de acoplamento das equações em (4.26) na ordem dominante, e  $b_1$  é a constante de ordem dominante da transição  $\Delta \rightarrow N\gamma$ .

No próximo capítulo, os resultados das polarizabilidades dinâmicas previstos pela teoria quiral apresentada neste capítulo serão utilizadas na construção do potencial de Casimir-Polder correspondente, e comparado com os resultados advindos das relações de dispersão e do trabalho precursor desta dissertação [12].



# Capítulo 5

## Resultados

Este capítulo de Resultados é destinado à apresentação dos resultados numéricos que tiveram como base todo o formalismo apresentado nos capítulos anteriores. Começa-se por justificar a incompatibilidade do modelo utilizado para determinar as polarizabilidades eletromagnéticas com as amplitudes de Ritus [14], onde foi realizada uma integração numérica que teve como método a Quadratura de Gauss-Legendre. Em seguida, um modelo para a expansão a baixas energias, mais especificamente energias abaixo do limiar de fotoprodução de píons é aplicado, conhecido como *Low Energy Expansion* (LEX) [20], para então compará-lo com a inclusão da contribuição da ressonância- $\Delta(1232)$  vindo de um modelo fenomenológico ajustado aos dados das polarizabilidades eletromagnéticas fornecidas pela teoria de perturbação quiral [12, 13]. A última seção é destinada à comparação do cálculo do potencial de Casimir-Polder utilizando os resultados obtidos em [20, 12, 13], apresentados nas Seções 5.2 e 5.3.

### 5.1 Polarizabilidades a partir das amplitudes de Ritus

Nesta seção toda discussão a ser realizada diz respeito ao cálculo numérico das expressões contidas em (3.26), aplicadas às relações de dispersão em (3.33), e juntamente à parte assintótica das amplitudes de L'vov utilizando as relações auxiliares dadas em (A.2), obter as respectivas polarizabilidades eletromagnéticas, definidas em (3.44). Os valores numéricos obtidos para  $\alpha_{E1}(\omega)$  e  $\beta_{M1}(\omega)$  foram comparados diretamente com os resultados da Seção 5 de [13].

Um conjunto discreto de doze valores iniciais de pares  $(\omega, z)$  foi fornecido, especificamente espaçados em  $\omega$  de 10 em 10 MeV, e  $z$  utilizando-se como referência os pontos do método de integração numérica utilizada - ou seja, utilizando o intervalo de  $z$  como pontos da Quadratura de Gauss-Legendre - de modo que pudesse gerar, a partir destes, por meio das transformações (3.27) e (3.28), pares  $(\nu, t)$  para serem argumentos de  $\text{Im}[R_i(\nu, t)]$ ,

$i \in \{1, 2\}$ . Uma vez fixados os pares de  $(\omega, z)$ , os valores das partes assintóticas (3.32) foram adicionados. O que fizemos na prática resume-se à expressão abaixo,

$$\begin{aligned}\bar{R}_{1,2}(\nu, t) &= \text{Re} [\bar{R}_{1,2}^{int}(\nu, t)] + i \text{Im} [\bar{R}_{1,2}(\nu, t)] + \bar{R}_{1,2}^{as}(\nu, t) \\ &= \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_{\nu_0=\nu_{thr}(t)}^{\nu_f=\nu_{max}(t)} \frac{\nu' \text{Im}[\bar{R}_{1,2}(\nu', t)]}{(\nu'^2 - \nu^2)} d\nu' + i \text{Im}[\bar{R}_{1,2}(\nu, t)] \\ &\quad + \bar{R}_{1,2}^{as}(\nu, t).\end{aligned}\tag{5.1}$$

Passamos então a calcular numericamente as expressões acima seguindo as prescrições apresentadas nos capítulos anteriores e nos apêndices. A parte mais trabalhosa, e que infelizmente também causou mais problemas, foi a parte intermediária das amplitudes de Ritus, dada em termos da relação de dispersão. Calculamos a parte imaginária das amplitudes de Ritus,  $\text{Im}[\bar{R}_{1,2}(\nu', t)]$ , cujas expressões, apesar de longas, não envolveriam maiores dificuldades. Estas foram obtidas por L'vov e colaboradores [14] e estão reproduzidas no apêndice E. Elas possuem uma dependência bem clara na variável  $\nu$ , a velocidade do pión no centro de massa do estado intermediário pión-nucleon, e na variável  $z = \cos \theta$ , sendo  $\theta$  o ângulo do fóton espalhado na amplitude Compton. Ao transformarmos as variáveis  $(\nu, z)$  nas variáveis de Mandelstam  $(\nu, t)$ , tomamos o cuidado de verificar que, enquanto a energia incidente do fóton ficasse abaixo do limiar  $\omega_\pi$  de produção de um pión, o processo intermediário pión-nucleon permaneceria virtual, correspondendo a valores negativos de  $\nu$ . Valores positivos de  $\nu$  entre 0 e 1 corresponde à produção de um pión real intermediário, desde seu limiar ( $\nu = 0$ ) até que atinja energia suficiente para a produção de um segundo pión ( $\nu = 1$ ). Todos esses ingredientes físicos puderam ser checados numericamente. Entretanto, ao colocar as expressões de  $\text{Im}[\bar{R}_{1,2}(\nu', t)]$  na integral dispersiva, os resultados numéricos divergiam em uma ordem de grandeza, e sem obtermos o comportamento esperado em  $\omega$ , no que dizem respeito às polarizabilidades. Restringimos a integral em  $\nu'$  aos valores em que  $0 \leq \nu \leq 1$ , situação física em que a parte imaginária da amplitude contribuiria, mas sem muito sucesso. Poderíamos questionar a não-introdução de mais elementos físicos, como a  $\Delta$  e demais estados ressonantes, o estado intermediário com dois ou mais píons, mas sabemos que fisicamente tais processos seriam menos importantes que a produção de um pión intermediário na região abaixo e próximo de  $\omega_\pi$ . Notamos que as expressões para  $\text{Im}[\bar{R}_{1,2}(\nu', t)]$  retornam números complexos para  $\omega < \omega_\pi$  ( $\nu < 0$ ), segundo termo da equação (5.1), mas isso pode ser anulado à força com base na física de que esta parte imaginária não pode contribuir abaixo deste limiar.

Não encontrando o que poderia estar errado na parte intermediária das amplitudes de Ritus, e dado o insucesso na comparação feita para  $\alpha_{E1}(\omega)$  e  $\beta_{M1}(\omega)$  calculado em [13], chegou-se à conclusão de que a parte intermediária dada pelas integrais de relação de

dispersão foi implementada de maneira insuficiente para reproduzir o comportamento das polarizabilidades dinâmicas.

## 5.2 Polarizabilidades a partir da LEX

Como mencionado anteriormente no início do capítulo, como resultado de não obter resultados confiáveis quando comparados com os resultados já conhecidos [13] para a descrição completa pela via analítica das polarizabilidades dinâmicas, optou-se por fazer uma expansão em série de potências das partes não-Born das amplitudes para energias do fóton no referencial C.M. considerando-se energias inferiores ao limiar da fotoprodução de píons, ou seja, tal que  $\omega < \omega_\pi \approx 131$  MeV. Essa expansão em série de potências foi desenvolvida em [20], expandindo-se no espaço de multipolos as amplitudes de espalhamento Compton, com o objetivo de descrever as polarizabilidades dinâmicas escalares  $\alpha_{E1}^L(\omega)$  e  $\beta_{M1}^L(\omega)$ , descritas em (3.39), com o sobrescrito  $L$  para indicar a LEX. É importante ressaltar que, como descrito em [13], a expansão a ser feita convergente rapidamente abaixo de  $\omega_\pi$ . Tal expansão, para a polarizabilidade  $\alpha_{E1}^L(\omega)$  é dada por

$$\begin{aligned}
\alpha_{E1}^L(\omega) = & \alpha_{E1} + \frac{\beta_{M1}}{M}\omega + \left( \alpha_{E1,\nu} + \frac{5\alpha_{E1} - 2\beta_{M1}}{8M^2} \right) \omega^2 \\
& + \left( \frac{8\alpha_{E1,\nu} + \alpha_{E2} + 12\beta_{M1,\nu}}{8M} + \frac{\gamma_{M1E2} - \gamma_{M1M1}}{8M^2} + \frac{\beta_{M1} - 2\alpha_{E1}}{8M^3} \right) \omega^3 \\
& + \left\{ \alpha_4^L - \frac{1}{40M} [15(\gamma_{E1E1,\nu} - \gamma_{E1M2,\nu}) - 69\gamma_{E2E2} + 12(\gamma_{E2M3} - \gamma_{M2E3}) \right. \\
& + 25(\gamma_{M1E2,\nu} - \gamma_{M1M1,\nu}) + 51\gamma_{M2M2}] + \frac{1}{480M^2} (1248\alpha_{E1,\nu} + 95\alpha_{E2} + 540\beta_{M1,\nu} + 26\beta_{M2}) \\
& + \frac{1}{80M^3} [25(\gamma_{E1E1} - \gamma_{E1M2}) + 39(\gamma_{M1E2} - \gamma_{M1M1})] - \frac{1}{160M^4} (24\alpha_{E1} + 19\beta_{M1}) \left. \right\} \omega^4 \\
& + \left\{ \alpha_5^L + \frac{1}{200M^2} (55(\gamma_{E1E1,\nu} - \gamma_{E1M2,\nu}) - 6(35\gamma_{E2E2} - 22\gamma_{E2M3} + 5\gamma_{M1E2,\nu}) \right. \\
& - 5\gamma_{M1M1,\nu} + 38\gamma_{M2E3}) + 555\gamma_{M2M2}) + \frac{1}{480M^3} (612\alpha_{E1,\nu} + 38\alpha_{E2} + 1008\beta_{M1,\nu} + 89\beta_{M2}) \\
& + \frac{1}{160M^4} (-46(\gamma_{E1E1} - \gamma_{E1M2}) + 33(\gamma_{M1M1} - \gamma_{M1E2})) + \frac{1}{160M^5} (\alpha_{E1} - 14\beta_{M1}) \left. \right\} \omega^5.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Quase todos os coeficientes existentes até  $\mathcal{O}(\omega^4)$  podem ser encontrados nas densidades de hamiltonianas efetivas das expressões em (4.5), com exceção de  $\alpha_{E1,\nu}$  e  $\beta_{M1,\nu}$ . Antes de falar melhor sobre esses coeficientes, ainda falta expressar a polarizabilidade  $\beta_{M1}(\omega)$

da mesma forma que se fez acima. A forma algébrica de  $\beta_{M1}^L(\omega)$  é dada por

$$\begin{aligned}
\beta_{M1}^L(\omega) = & \beta_{M1} + \frac{\alpha_{E1}}{M}\omega + \left( \beta_{M1,\nu} + \frac{5\beta_{M1} - 2\alpha_{E1}}{8M^2} \right) \omega^2 \\
& + \left( \frac{8\beta_{M1,\nu} + \beta_{M2} + 12\alpha_{E1,\nu}}{8M} + \frac{\gamma_{E1M2} - \gamma_{E1E1}}{8M^2} + \frac{\alpha_{E1} - 2\beta_{M1}}{8M^3} \right) \omega^3 \\
& + \left\{ \beta_4^L - \frac{1}{40M} [15(\gamma_{M1M1,\nu} - \gamma_{M1E2,\nu}) - 69\gamma_{M2M2} + 12(\gamma_{M2E3} - \gamma_{E2M3}) \right. \\
& + 25(\gamma_{E1M2,\nu} - \gamma_{E1E1,\nu}) + 51\gamma_{E2E2}] + \frac{1}{480M^2} (1248\beta_{M1,\nu} + 95\beta_{M2} + 540\alpha_{E1,\nu} + 26\alpha_{E2}) \\
& + \frac{1}{80M^3} [25(\gamma_{M1M1} - \gamma_{M1E2}) + 39(\gamma_{E1M2} - \gamma_{E1E1})] - \frac{1}{160M^4} (24\beta_{M1} + 19\alpha_{E1}) \left. \right\} \omega^4 \\
& + \left\{ \beta_5^L + \frac{1}{200M^2} (55(\gamma_{M1M1,\nu} - \gamma_{M1E2,\nu}) - 6(35\gamma_{M2M2} + 22\gamma_{M2E3} - 5\gamma_{E1E2,\nu}) \right. \\
& + 5\gamma_{E1E1,\nu} - 38\gamma_{E2M3}) + 555\gamma_{E2E2}) + \frac{1}{480M^3} (612\beta_{M1,\nu} + 38\beta_{M2} + 1008\alpha_{E1,\nu} + 89\alpha_{E2}) \\
& + \frac{1}{160M^4} (-46(\gamma_{M1M1} - \gamma_{M1E2}) + 33(\gamma_{E1E1} - \gamma_{E1M2})) + \frac{1}{160M^5} (\beta_{M1} - 14\alpha_{E1}) \left. \right\} \omega^5.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Com relação às duas expressões (5.2) e (5.3), poderia ser esperado que os termos de ordem superior a  $\alpha_{E1}$  e  $\beta_{M1}$  viessem apenas acompanhados das polarizabilidades de ordem superior, como  $\alpha_{E2}$  e  $\beta_{M2}$ , e também de fatores de retardamento pela mudança de referencial de Breit para o C.M. (retardamento por radiação). No entanto, os fatores chamados de recuo também acabam por se misturar em termos de ordem superior à 3. Justamente  $\alpha_{E1,\nu}$  e  $\beta_{M1,\nu}$ , que são as polarizabilidades de quarta ordem dos dipolos entram como fatores de recuo. Vários dos fatores de recuo podem ser vistos sendo suprimidos por fatores de  $1/M$ ,  $1/M^2$ , e  $1/M^3$ .

Como a convergência da série de potências está limitada a um valor anterior à  $\omega_\pi$ , a LEX falha na tentativa de produzir o comportamento não-analítico da região próxima ao limiar de fotoprodução de píons. Desse modo, ajusta-se de maneira residual um conjunto de duas funções,  $\tilde{f}_\alpha(\omega)$  e  $\tilde{f}_\beta(\omega)$ , de tal modo que

$$\begin{cases} \alpha_{E1}(\omega) = \alpha_{E1}^{L_0}(\omega) + \tilde{f}_\alpha(\omega), \\ \beta_{M1}(\omega) = \beta_{M1}^{L_0}(\omega) + \tilde{f}_\beta(\omega). \end{cases} \tag{5.4}$$

As polarizabilidades escritas com o sobrescrito  $L_0$  têm significado de os termos  $\alpha_4^L$ ,  $\beta_4^L$ ,  $\alpha_5^L$ ,  $\beta_5^L$ , serem todos fixados em zero. Tais termos correspondem às combinações

de muitos coeficientes vindos de polarizabilidades escalares de  $\mathcal{O}(6)$ , que nunca foram calculados pela literatura [20]. Desse modo, o que foi utilizado no presente trabalho foram as expressões analíticas que codificam uma certa "ignorância" com relação aos parâmetros de  $\mathcal{O}(4)$  e  $\mathcal{O}(5)$ . Essas expressões analíticas são dadas por

$$\begin{cases} \alpha_{E1}(\omega) = \sum_{n=1}^3 \mathcal{A}_{\text{eff},n} \omega^n + \alpha_4 \omega^4 + \alpha_5 \omega^5, \\ \beta_{E1}(\omega) = \sum_{m=1}^3 \mathcal{B}_{\text{eff},m} \omega^m + \beta_4 \omega^4 + \beta_5 \omega^5. \end{cases} \quad (5.5)$$

No conjunto de expressões em (5.6), os coeficientes efetivos  $\mathcal{A}_{\text{eff}}$  e  $\mathcal{B}_{\text{eff}}$  acompanham todos os termos nas respectivas ordens como calculados em (5.2) e (5.3), e os  $\alpha_{4,5} = \alpha_{4,5}^L + \tilde{\alpha}_{4,5}^L$  e  $\beta_{4,5} = \beta_{4,5}^L + \tilde{\beta}_{4,5}^L$  respondem pela parametrização feita para os termos das duas últimas ordens da LEX escritos em (5.2) e (5.3).

De agora em diante até o fim desta seção serão exibidas as previsões da LEX quando comparada aos cálculos de relações de dispersão, no qual os fits exibidos foram feitos de acordo com um modelo polinomial até  $\mathcal{O}(\omega^5)$ , juntamente com um parâmetro de compatibilidade, que será o  $\chi^2$ . Estarão fixos os valores de  $\alpha_{E1} = 11.26 \times 10^{-4} \text{ fm}^3$ , e  $\beta_{M1} = 2.514 \times 10^{-4} \text{ fm}^3$ , que correspondem aos coeficientes efetivos proporcionais a  $\omega^0$ ; e  $(\alpha_{E1}/m_N) = 0.01199 \times 10^{-4} \text{ fm}^3$ ,  $(\beta_{M1}/m_N) = 0.002677 \times 10^{-4} \text{ fm}^3$ , correspondentes aos coeficientes efetivos proporcionais a  $\omega$ .

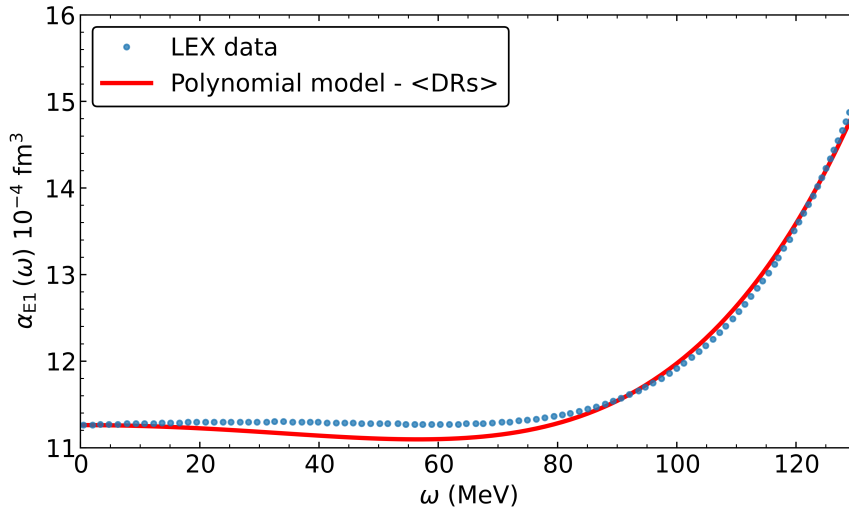


Figura 5.1: Fit 1 -  $\alpha_{E1}(\omega)$  feito com relação à parâmetros indicados abaixo vindo de relações de dispersão [17].

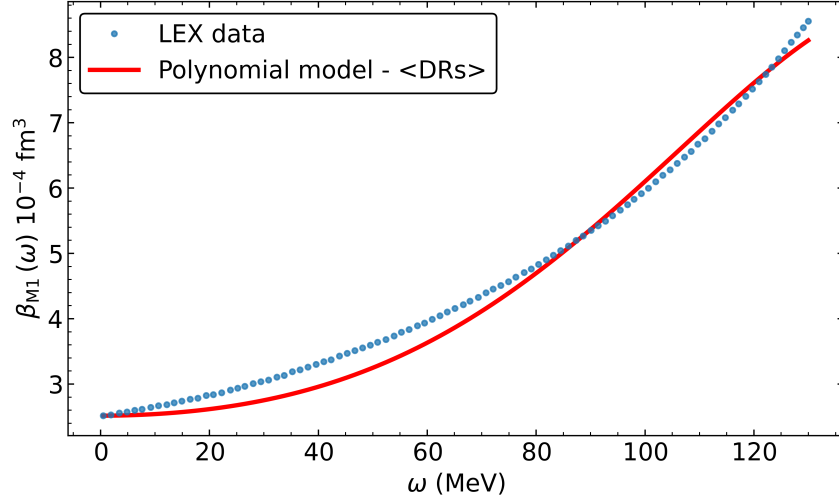


Figura 5.2: Fit 1 -  $\beta_{M1}(\omega)$  feito com relação à parâmetros indicados abaixo vindo de relações de dispersão [17].

Ajuste	$\alpha_4(10^{-4} \text{ fm}^3)$	$\alpha_5(10^{-4} \text{ fm}^3)$	$\chi^2_\alpha$
Fit1	17.11	16.8	1.107
Ajuste	$\beta_4(10^{-4} \text{ fm}^3)$	$\beta_5(10^{-4} \text{ fm}^3)$	$\chi^2_\beta$
Fit1	49.1	-60.4	4.773

Para compor as figuras logo acima, juntamente aos dados obtidos para as ordem proporcionais à  $\omega^4$  e  $\omega^5$ , foram considerados alguns parâmetros das DRs, assim como indicado na legenda correspondentes à média aritmética simples dos valores considerados para  $\alpha_{E1,\nu} = -3.82 \times 10^{-4} \text{ fm}^5$ ,  $\beta_{M1,\nu} = 9.195 \times 10^{-4} \text{ fm}^5$  em [15, 16]. Como pode ser avaliado primeiramente visualmente, e após pelos valores de  $\chi^2$ , os ajustes não são adequados para o intervalo de  $\omega$  de  $20 \lesssim \omega \lesssim 80$  MeV, região na qual começou-se a especular a respeito da dominância da potência  $\omega^2$  para contribuição dominante do intervalo citado.

Em se tratando de valores calculados de acordo com a literatura, como já previamente mencionado, outra forma de calcular os mesmos coeficientes encontrados em (5.2) e (5.3) é incluir correções quando a ressonância- $\Delta(1232)$  é incluída como um grau de liberdade, ou seja, HB $\chi$ PT. Tal consideração faz com que os valores modificados sejam  $\alpha_{E1,\nu} = 1.7 \times 10^{-4} \text{ fm}^5$  e  $\beta_{M1,\nu} = 7.5 \times 10^{-4} \text{ fm}^5$  [17]. Os resultados para os novos ajustes são exibidos abaixo.

Ajuste	$\alpha_4(10^{-4} \text{ fm}^3)$	$\alpha_5(10^{-4} \text{ fm}^3)$	$\chi^2_\alpha$
Fit2	-40.96	86.99	0.0278

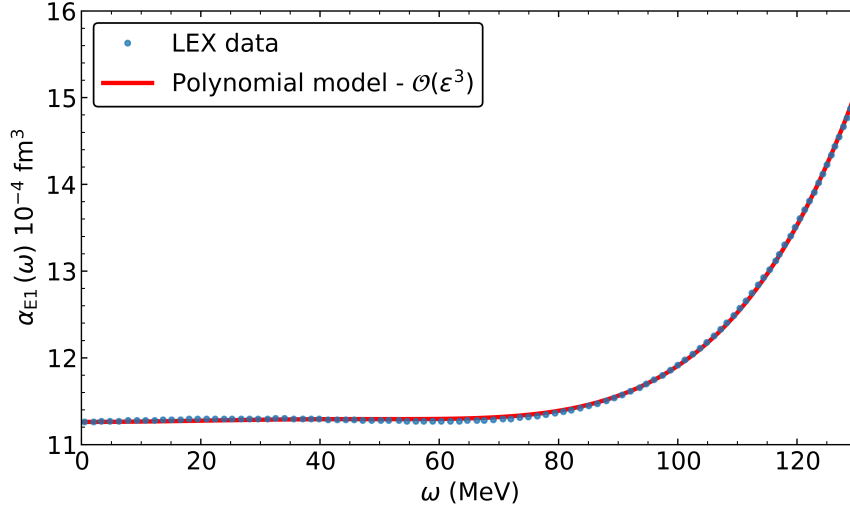


Figura 5.3: Fit 2 -  $\alpha_{E1}(\omega)$  feito com relação à parâmetros indicados abaixo vindo de correções da ressonância- $\Delta(1232)$  até a  $\mathcal{O}(\epsilon^3)$  [17].

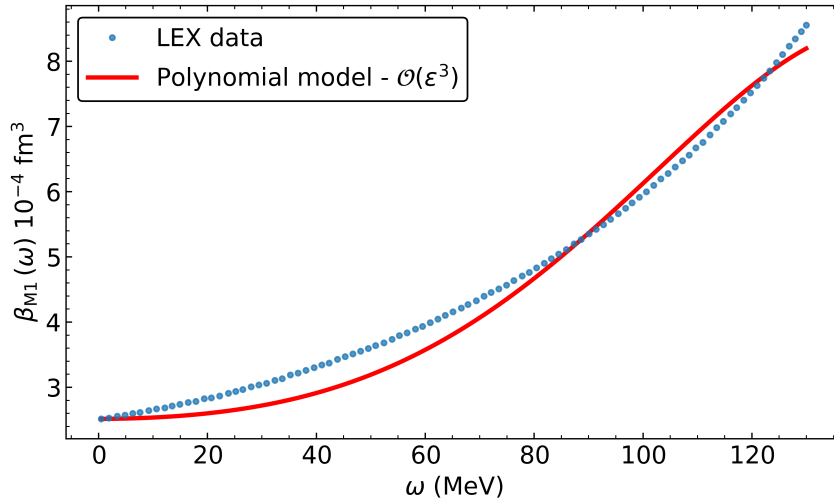


Figura 5.4: Fit 2 -  $\beta_{M1}(\omega)$  feito com relação à parâmetros indicados abaixo vindo de correções da ressonância- $\Delta(1232)$  até a  $\mathcal{O}(\epsilon^3)$  [17].

Ajuste	$\beta_4(10^{-4} \text{ fm}^3)$	$\beta_5(10^{-4} \text{ fm}^3)$	$\chi_\beta^2$
Fit2	67.4	-82.9	6.352

Como pode ser visto pelos dois gráficos imediatamente acima, e os valores obtidos para os parâmetros proporcionais à  $\omega^4$  e  $\omega^5$ , tanto visualmente o Fit 2 para  $\alpha_{E1}(\omega)$  como em termos do  $\chi_\alpha^2$ , o ajuste é bem mais adequado para o comportamento dos dados. O mesmo comportamento quantitativo e qualitativo não é observado para o ajuste de  $\beta_{M1}(\omega)$ , principalmente com relação ao valor de  $\chi_\beta^2$  ter aumentado com relação ao Fit 1.

A partir da comparação dos dois quatro ajustes exibidos anteriormente, primeiro considera-se um adendo da literatura quanto ao valor utilizado para  $\alpha_{E1,\nu}$ . Existe o argumento que esse parâmetro deve ser positivamente definido por questões de regras de soma, e  $\chi$ PT. Observa-se que só o fato do sinal de  $\alpha_{E1,\nu}$  ser oposto considerando-se os dois conjuntos de valores adotados muda consideravelmente a compatibilidade entre os dados e a previsão teórica. Em segundo lugar, com relação a  $\beta_{M1,\nu}$ , existe um fator multiplicativo  $\sim 3.1$  quando considera-se a comparação entre os valores utilizados pela  $\chi$ PT até  $\mathcal{O}(\epsilon^3)$  e correções da ressonância- $\Delta(1232)$ . Nesse sentido, a literatura considera a mesma ordem de grandeza, apenas multiplicada por um fator numérico [17].

Motivando-se por essa observação, um terceiro e último conjunto de ajustes foi feito considerando agora que o coeficiente efetivo proporcional a  $\omega^2$ , ou seja,  $\mathcal{A}_{\text{eff},2}$  e  $\mathcal{B}_{\text{eff},2}$  seriam determinados pelo modelo polinomial. Como os valores de  $\alpha_{E1}$  e  $\beta_{M1}$  são fortemente suprimidos por  $8m_N^2$  no denominador dos termos proporcionais a  $\omega^2$  em (5.2) e (5.3), novos valores de  $\alpha_{E1,\nu}$  e  $\beta_{M1,\nu}$  poderiam ser obtidos com mais confiança.

Os ajustes para  $\alpha_{E1}(\omega)$  e  $\beta_{M1}(\omega)$  são exibidos abaixo.

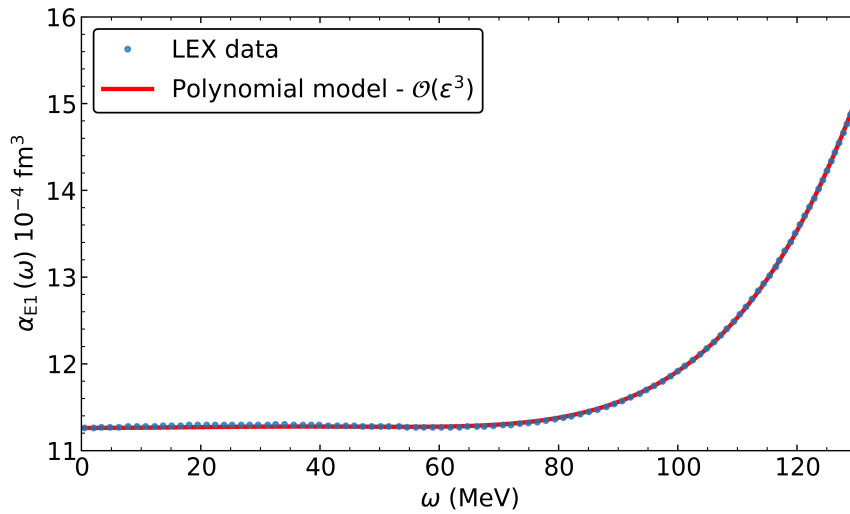


Figura 5.5: Fit 3 -  $\alpha_{E1}(\omega)$  feito com relação à parâmetros indicados abaixo vindo de correções da ressonância- $\Delta(1232)$  [17], mantendo-se livre o parâmetro  $\mathcal{A}_{\text{eff},2}$ .



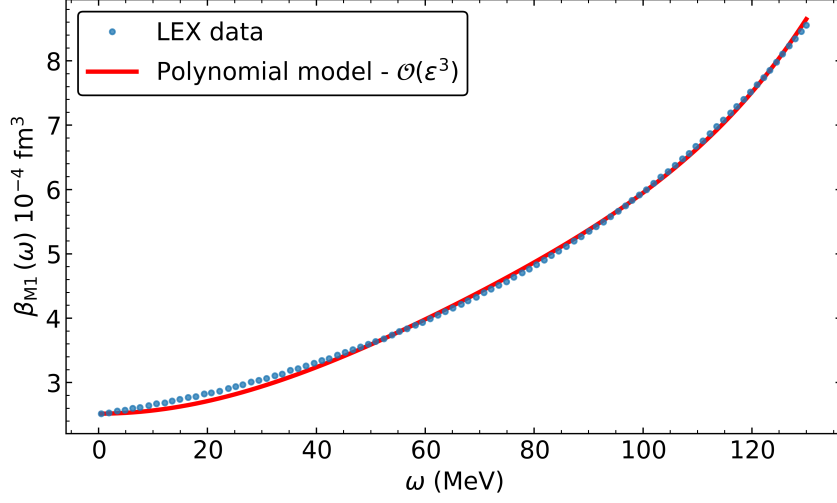


Figura 5.6: Fit 3 -  $\beta_{M1}(\omega)$  feito com relação à parâmetros indicados abaixo vindo de correções da ressonância- $\Delta(1232)$  [17], mantendo-se livre o parâmetro  $\mathcal{B}_{\text{eff},2}$ .

Ajuste	$\alpha_4(10^{-4} \text{ fm}^3)$	$\alpha_5(10^{-4} \text{ fm}^3)$	$\alpha_{E1,\nu}(10^{-4} \text{ fm}^5)$	$\chi_\alpha^2$
Fit3	-35.18	80.00	1.150	0.0144

Ajuste	$\beta_4(10^{-4} \text{ fm}^3)$	$\beta_5(10^{-4} \text{ fm}^3)$	$\beta_{M1,\nu}(10^{-4} \text{ fm}^5)$	$\chi_\beta^2$
Fit3	-61.8	75.20	19.41	0.370

Com os valores obtidos nas tabelas acima, e observando-se os ajustes para  $\alpha_{E1}(\omega)$  e  $\beta_{M1}(\omega)$ , nota-se uma melhora significativa do ajuste para  $\beta_{M1}(\omega)$ , onde houve redução de uma ordem de grandeza para o valor de  $\chi_\beta^2$  e ajuste ficou muito mais compatível com os números da figura. Com relação aos valores dos coeficientes efetivos da ordem proporcional a  $\omega^2$ , nota-se que o valor de  $\alpha_{E1,\nu}$  ainda é próximo do valor calculado para ressonância- $\Delta(1232)$  até  $\mathcal{O}(\epsilon^3)$ , tal que  $\alpha_{E1,\nu} = 1.7 \times 10^{-4} \text{ fm}^5$ . Já para  $\beta_{M1,\nu} = 19.41 \times 10^{-4} \text{ fm}^5$ , pode-se dizer que houve um fator multiplicativo de  $\sim 2.14$  com relação ao cálculo anterior.

Para finalizar esta seção, cabe dizer que os parâmetros que serão utilizados com o objetivo de realizar uma comparação com a interação de Casimir-Polder serão os obtidos no Fit3, tanto para  $\alpha_{E1}(\omega)$ , quanto para  $\beta_{M1}(\omega)$ . Isto significa dizer que um dos comparativos serão feitos com relação ao potencial de Casimir-Polder que será construído até uma região física correspondente à vizinhança de  $\omega_\pi$  utilizando a expressão analítica como a LEX.

### 5.3 Potencial de Casimir-Polder considerando um modelo fenomenológico, LEX, e HB $\chi$ PT

Uma vez que o modelo da LEX teve compatibilidade satisfatória dentro dos resultados obtidos, as outras componentes que restam para a comparação serão descritas a seguir. Começa-se descrevendo as polarizabilidades eletromagnéticas  $\alpha_{E1}^F(\omega)$  e  $\beta_{M1}^F(\omega)$ , onde o sobrescrito "F" denota polarizabilidade fenomenológica.

Conforme dito no Capítulo 4, a ressonância- $\Delta(1232)$  tem contribuição nos estados intermediários no RCS. Sendo assim, a parametrização fenomenológica de  $\alpha_{E1}^F(\omega)$  e de  $\beta_{M1}^F(\omega)$  para incorporar a caracterização do processo de espalhamento a baixas energias é dada por

$$\alpha_{E1}^F(\omega) = \frac{\alpha_{E1} \sqrt{(m_\pi + a_1)(2m_N + a_2)} (0.2a_2)^2}{\sqrt{(\sqrt{|m_\pi^2 - \omega^2|} + a_1) (\sqrt{|4m_N^2 - \omega^2|} + a_2) [|\omega|^2 + (0.2a_2)^2]}}, \quad (5.6)$$

$$\beta_{M1}^F(\omega) = \frac{\beta_{M1} - b_1^2 \omega^2 + b_2^3 \text{Re}(\omega)}{(\omega^2 - \omega_\Delta^2)^2 + |\omega^2 \Gamma_\Delta^2|}. \quad (5.7)$$

Para tentar explicar um pouco a expressão algébrica contida primeiramente em (5.6), existem os dois parâmetros com dimensão de massa  $a_1$  e  $a_2$ . O parâmetro  $a_1$  é utilizado para parear o limiar de fotoprodução de píons,  $\omega_\pi$ , que controla o comportamento a baixas energias de  $\alpha_{E1}^F(\omega)$  [13]. As raízes quadradas contidas tanto no numerador como no denominador são uma tentativa de reproduzir o comportamento da polarizabilidade elétrica de dipolo na vizinhança de  $\omega_\pi$ , considerando que, como os estados intermediários como a troca de um pión faz com que  $\alpha_{E1}^F(\omega)$  desenvolva parte imaginária a partir de  $\omega_\pi$ .

Para a polarizabilidade magnética de dipolo, assim como visto no Fit 3 da Seção 5.2, a ressonância- $\Delta$  é mais importante, e portanto é incorporada. O parâmetro  $\omega_\Delta$  se refere ao  $n - \Delta$  *splitting mass*, ou mais precisamente, proporcional a  $m_N - m_\Delta - \Gamma_\Delta$ ; e  $\Gamma_\Delta$  se refere à largura da ressonância- $\Delta$ . Ademais, o termo  $\text{Re}(\omega)$  se refere ao início da parte imaginária da amplitude Compton acima do limiar de fotoprodução, que estaria ausente abaixo do limiar.

Três conjuntos de dados foram utilizados para parametrizar as equações (5.6) e (5.7), realizando-se o ajuste fenomenológico com relação às curvas obtidas por Lensky *et al.* em [19]. A massa do nucleon  $m_N$  foi fixada para o valor  $m_N = 938.19 \text{ MeV}$ , e  $m_\pi$  foi obtida como sendo  $m_\pi = 134.051 \text{ MeV}$ , valor bem próximo da massa do pión neutro,  $m_{\pi^0} = 134.98 \text{ MeV}$ . Para os parâmetros restantes,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  e  $b_2$ , cada um dos três conjuntos foi utilizado de maneira diferente. Para o propósito do presente trabalho, o

conjunto utilizado na comparação para a construção do potencial de Casimir-Polder a ser utilizado será o Conjunto 3 (chamado Set 3 em [12]), conjunto que tem como valor fixo  $\alpha_{E1} = 12.5 \times 10^{-4} \text{ fm}^3$ , que é o valor central obtido no estudo de Kossert *et al.* [43]. Os valores obtidos para todos os parâmetros restantes, citados acima são dados nas tabelas abaixo.

Ajuste	$\alpha_{E1} (10^{-4} \text{ fm}^3)$	$\beta_{M1}(10^{-4} \text{ fm}^3)$	$a_1(\text{MeV})$	$a_2(\text{MeV})$
Conjunto 3	12.5	2.7	5.91153	2118.79

Ajuste	$b_1(\text{MeV})$	$b_2(\text{MeV})$	$\omega_\Delta(\text{MeV})$	$\Gamma_\Delta(\text{MeV})$
Conjunto 3	9.27719	26.328	241.821	70.8674

Com as tabelas exibidas imediatamente acima, a partir de agora tem-se dois modelos necessários para fazer ajustes do potencial de Casimir-Polder de acordo com os modelos estabelecidos.

O terceiro modelo a ser comparado foi calcular o potencial de Casimir-Polder a partir das polarizabilidades eletromagnéticas obtidas de acordo com a HB $\chi$ PT [13]. Para recapitular rapidamente, então, considera-se a comparação entre três modelos: a LEX da Seção 5.2, a parametrização fenomenológica e a HB $\chi$ PT da presente Seção.

Para definir algebricamente o potencial de Casimir-Polder, considera-se que a teoria é capaz de descrever a interação entre dois nêutrons cuja validade é determinada por distâncias suficientemente grandes de tal modo que as interações de troca podem ser desprezadas [44, 45]. A expressão do potencial de Casimir-Polder  $V_{CP}$  nas condições citadas acima é dado por

$$V_{CP,nn}(r) = -\frac{\alpha_0}{\pi r^6} I_{nn}(r), \quad (5.8)$$

onde a função dependente de  $r$ ,  $I_{nn}(r)$  é dada por

$$I_{nn}(r) = \int_0^{+\infty} e^{-2\alpha_0\omega r} \left\{ [\alpha_{E1}^2(i\omega) + \beta_{M1}^2(i\omega)] P_E(\alpha_0\omega r) + [2\alpha_{E1}(i\omega)\beta_{M1}(i\omega)] P_M(\alpha_0\omega r) \right\} d\omega. \quad (5.9)$$

Na expressão (5.9), as expressões  $P_E(\alpha_0\omega r)$  e  $P_M(\alpha_0\omega r)$  são polinômios referenciados com o índice  $E$  para elétrico, e  $M$  para magnético, cujas expressões são

$$\begin{cases} P_E(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 6x + 3, \\ P_M(x) = -(x^4 + 2x^3 + x^2). \end{cases} \quad (5.10)$$

De acordo com as expressões de (5.8) - (5.10), definido o potencial de Casimir-Polder  $V_{CP}$ , calcular a função  $I_{nn}(r)$  depende da forma algébrica das polarizabilidades de  $\alpha_{E1}(\omega)$  e  $\beta_{M1}(\omega)$ . A respeito disso, tanto o modelo da LEX conforme as equações (5.2) e (5.3), quanto os modelos fenomenológico das equações (5.6) e (5.7) e de HB $\chi$ PT, são implementados em (5.9) para realizar a integração numérica via Quadratura de Gauss-Legendre e determinar valores numéricos para o potencial  $V_{CP}$ .

Imediatamente antes de exibir os resultados para  $V_{CP}$ , alguns plots com relação ao que se espera do comportamento do integrando da equação (5.9) são mostrados logo abaixo:

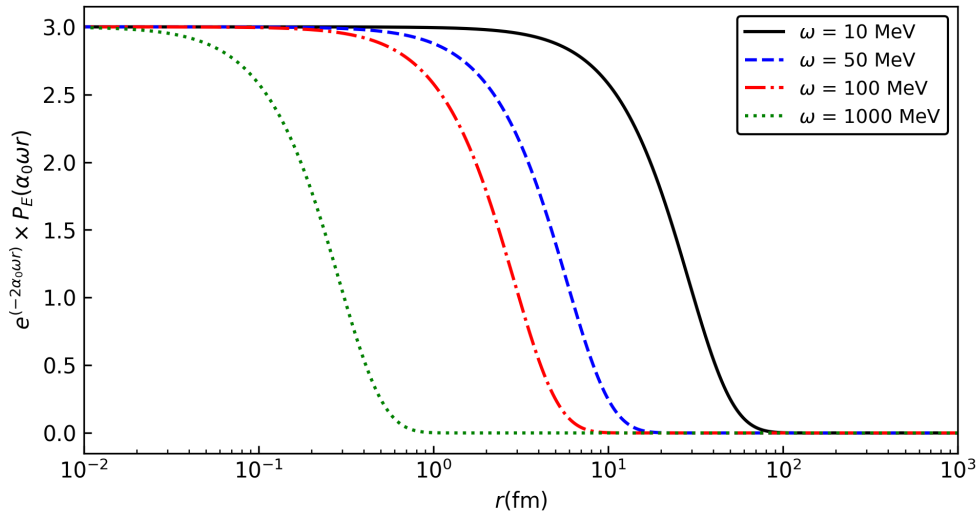


Figura 5.7: Componente do integrando em (5.9) proporcional a  $P_E(\alpha_0\omega r)$ .

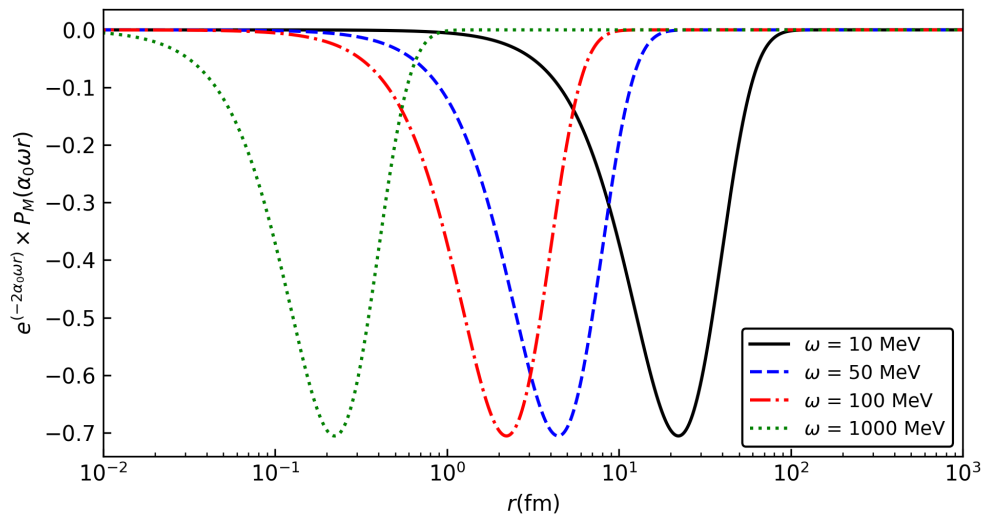


Figura 5.8: Componente do integrando em (5.9) proporcional a  $P_M(\alpha_0\omega r)$ .

Com relação aos dois plots exibidos acima, cada um deles, como indicados, referem-se aos integrandos como produtos da função exponencial, que é um fator altamente atenuante do integrando, pelos polinômios  $P_E(\alpha_0\omega r)$  e  $P_M(\alpha_0\omega r)$ , tal que  $\partial P_E(\alpha_0\omega r) = \partial P_M(\alpha_0\omega r) = 4$ . Analisando os dois plots, o que pode ser concluído de muita importância é que existe um intervalo da distância de separação na vizinhança de  $r \sim 10$  fm no qual o intervalo de frequências  $80 \lesssim \omega \lesssim 120$  MeV tem contribuições relevantes para o integrando em (5.9). Como essas frequências estão longe do limite estático das polarizabilidades dinâmicas, é possível concluir que esse é um bom intervalo para o qual as polarizabilidades dinâmicas têm sua relevância para o potencial de Casimir-Polder. Outro detalhe importante que pode ser observado para o primeiro e segundo plots, das Figura 5.7 e 5.8, é que para distâncias suficientemente grandes, tal que  $r \gtrsim 10^2$  fm o integrando praticamente não tem mais nenhuma contribuição, não importando qual o valor de  $\omega$ . A última informação relevante que se pode tirar a respeito da Figura 5.7 é que esperamos que os plots de  $V_{CP,nn}$  na região de baixas distâncias correspondam às polarizabilidades avaliadas a altas frequências, ou seja, tal que tenham maior contribuição para o integrando.

Dada a análise feita no parágrafo anterior, pode-se esperar que o potencial de Casimir-Polder reflita o comportamento vindo da contribuição de (5.9). Os resultados são exibidos logo abaixo.

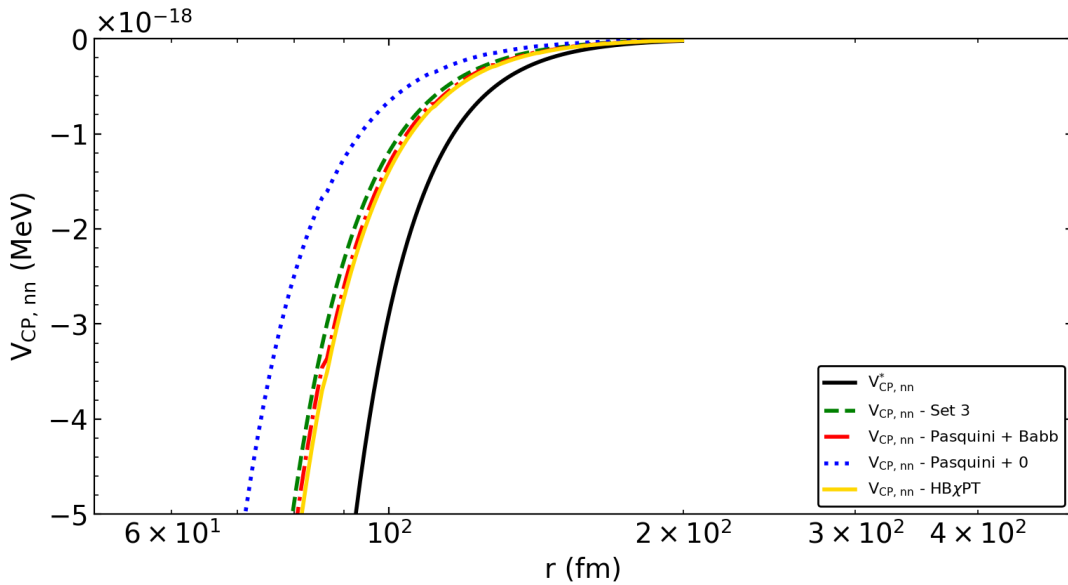


Figura 5.9: Potencial de Casimir-Polder  $V_{CP,nn}$ .

De acordo com a Figura 5.9, o potencial  $V_{CP,nn}^*$  no limite estático é calculado tomando o  $\lim \omega \rightarrow 0$  na expressão (5.9). Com relação às outras quatro curvas, a primeira delas é descrita de acordo com o Conjunto 3, retirado de [12]. A segunda, indicada por "Pasquini

+ Babb” é construída de forma a considerar  $\alpha_{E1}(i\omega)$  e  $\beta_{M1}(i\omega)$  a LEX até a região da vizinhança mais próxima de  $\omega_\pi$ , e posteriormente a ajuste feito fenomenologicamente das equações (5.6) e (5.7) para  $\omega > \omega_\pi$ . A terceira curva indicada por ”Pasquini + 0” foi feita pensando-se em observar a contribuição da LEX para o potencial  $V_{CP,nn}$  desconsiderando-se a região das polarizabilidades onde já existe a fotoprodução de píons. Por último, a quarta curva indicada por ”HB $\chi$ PT” foi ajustada considerando o mesmo conjunto de  $\omega$  para calcular  $\alpha_{E1}^{HB}(i\omega)$  e  $\beta_{M1}^{HB}(i\omega)$ , e a seguir calcular  $V_{CP,nn}$  dado em (5.9). Assim como esperado dado pela análise feita anteriormente, no valor próximo de  $r \sim 50$  fm, a contribuição do integrando da equação (5.9) é a maior que ainda existe, e portanto as polarizabilidades eletromagnéticas no limite estático são mais influentes.

Os próximos dois gráficos são relacionados à investigação da dependência de  $V_{CP,nn}$  com potências de  $r$ , e são mostrados abaixo

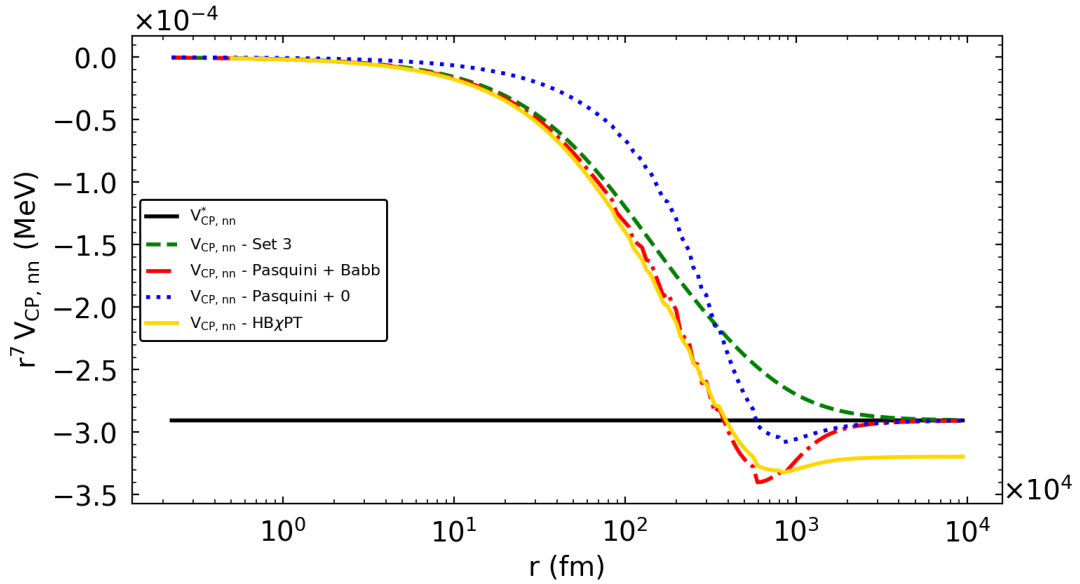


Figura 5.10: Potencial de Casimir-Polder  $V_{CP,nn}$  multiplicado por um fator de  $r^7$ .

O gráfico na Figura 5.10 mostrado logo acima é importante para ajudar a ideia de que no limite assintótico do potencial, para distâncias cada vez maiores, fica claro que as polarizabilidades dinâmicas são cada vez menos importantes para o cálculo de  $V_{CP,nn}$ . Pode-se dizer que a dependência de  $1/r^7$  existe para distâncias de separação pequenas quando consideradas com relação ao que seria o ”longo-alcance” da interação  $nn$ .

Isso também motiva o estudo de uma próxima dependência, de  $1/r^6$  para  $V_{CP,nn}$ . Como o potencial é definido na equação (5.8), proporcional a  $1/r^6$ , caso haja dependência de  $V_{CP,nn}$  em alguma região, significa que o integrando dado (5.9) é aproximadamente constante nesse mesmo intervalo de  $r$ .

Segue logo abaixo o gráfico de  $r^6 V_{CP,nn}$  multiplicado também por um fator  $s = 100$  fm, para que posteriormente se possa estudar todos os gráficos em conjunto. Sendo assim, o gráfico a ser exibido se trata de  $s r^6 V_{CP,nn}$ .

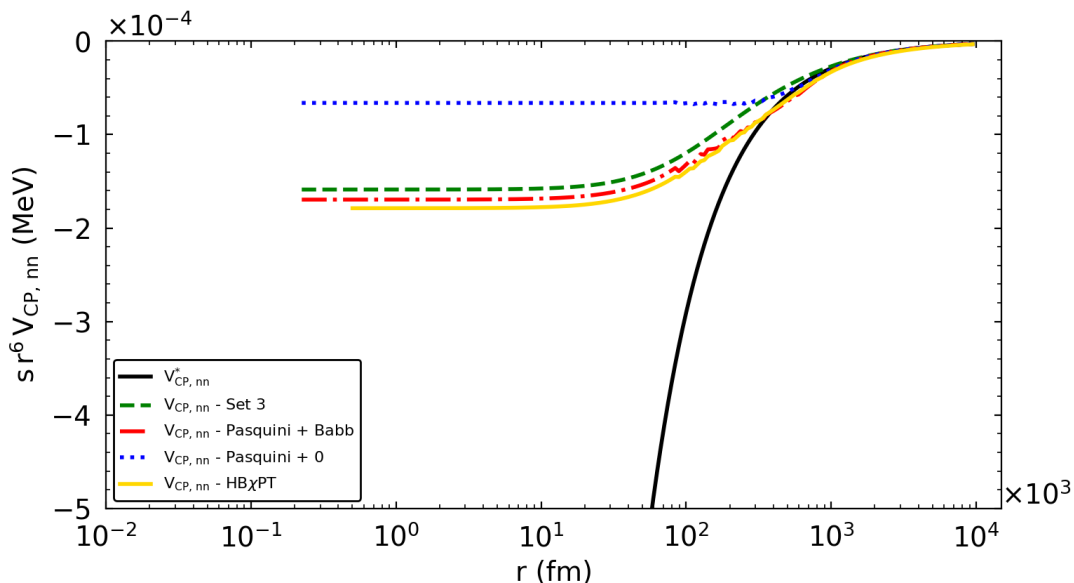


Figura 5.11: Potencial de Casimir-Polder  $V_{CP,nn}$  multiplicado por um fator  $s r^6$ ,  $s = 100$  fm.

De acordo com a Figura 5.11, é possível, muito embora sem tanta clareza, que em um intervalo que contém a vizinhança de  $r \sim 30$  fm,  $0 \lesssim r \lesssim 30$  fm, tal que o integrando segue uma curva muito parecida com  $\log r$ . Por essa razão, e para ver o comportamento que sinaliza uma boa visualização tanto para pequenas distâncias quanto para boas distâncias, o eixo  $\mathcal{O}_x$ , que representa  $r$ , foi feito na escala  $\log r$ .

Na Figura 5.12 mostrada abaixo, em primeiro lugar é possível verificar que, de fato, existe uma vizinhança de  $r \lesssim 20$  fm que faz com que o integrando em (5.9) se torne constante nesse intervalo de pequenas distâncias. Após a fase constante do integrando para as três curvas consideradas, é possível ver uma transição do comportamento do potencial proporcional  $1/r^6$  de pequenas distâncias, do tipo van der Waals, para o comportamento assintótico proporcional a  $1/r^7$  de Casimir-Polder. É possível também fazer uma parametrização com uma função que caracteriza essa transição de comportamento, chamada de parametrização arctan, utilizada em física atômica [46, 47].

A física da ressonância- $\Delta$  pode ser visualizada a partir de  $(2\alpha_0\omega_\Delta)^{-1} \sim 50$  fm. No entanto, como já discutido anteriormente, apenas na forma fenomenológica de  $\beta_{M1}^F(\omega)$  da equação (5.7) que a ressonância- $\Delta$  é importante, e ainda assim, ela corresponde a aproximadamente 10% do valor do integrando (5.9). Como não existem outras considerações em

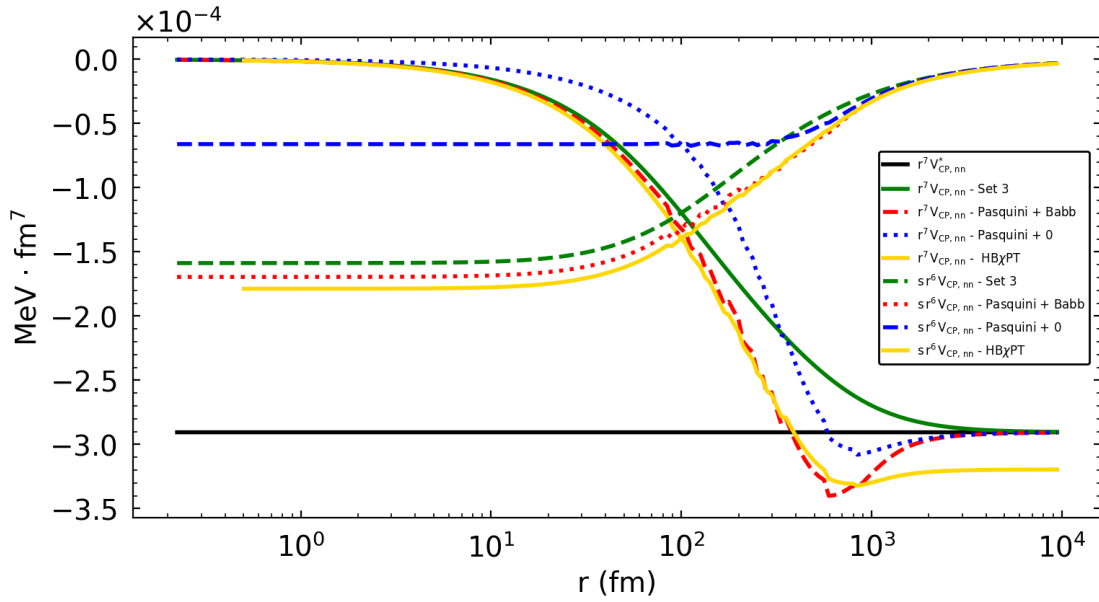


Figura 5.12: Combinação dos gráficos das Figuras 5.9, 5.10, 5.11, onde o eixo  $\mathcal{O}_x$  foi dado na escala  $\log r$ .

nenhuma das duas parametrizações dadas em (5.6) e (5.7), além da produção de píons e  $\Delta$ , sendo que  $\Delta$  contabiliza relativamente pouco para  $V_{CP,nn}$ , é possível dizer que o modelo vale para distâncias maiores que 50 fm. Como última análise a ser feita da Figura 5.12, também é possível dizer que a distâncias a partir de  $r = 10^3$  fm, as curvas que remetem a  $r^7 V_{CP,nn}$  revelam o comportamento dominado pelas polarizabilidades dinâmicas a baixas energias dos fótons, tais que  $\omega \leq 10$  MeV.



# Capítulo 6

## Conclusões

O trabalho desenvolvido que foi apresentado em todos os capítulos iniciais pretendeu fazer uma análise qualitativa e quantitativa da interação nêutron-nêutron do ponto de vista eletromagnético. Durante os Capítulos 1 - 3, tanto a perspectiva física de modelos de potencial de Casimir-Polder, polarização eletromagnética, e teoria do espalhamento, como a perspectiva matemática de teoria da resposta, analiticidade de susceptibilidade generalizada, pares de transformadas de Hilbert, relações de dispersão, e sua conexão com amplitudes invariantes do espalhamento Compton foram estudadas. O Capítulo 4 foi destinado a um breve panorama da teoria de perturbação quiral de bárions pesados, e sua importância para o estudo das polarizabilidades eletromagnéticas e potencial de Casimir-Polder pode ser visto nos resultados apresentados durante o Capítulo 5.

Com relação à implementação das técnicas de relação de dispersão às amplitudes de Ritus, nota-se que o fato de ter sido realizada apenas uma subtração, juntamente à consideração da troca de um pión no estado intermediário da reação  $\gamma N \rightarrow \gamma N$  não descreveu as polarizabilidades eletromagnéticas de maneira satisfatória, e portanto não pode ser utilizada para calcular numericamente valores do potencial  $V_{CP,nn}$ . Alguns fatores têm sido especulados acerca da incompatibilidade dos resultados encontrados. O primeiro, e talvez mais importante fisicamente, é que a relação de dispersão uma vez subtraída, assim como realizada em [14] talvez não seja suficiente para descrever as polarizabilidades eletromagnéticas apenas quando levamos em conta o estado intermediário com a troca de um único pión (OPE). Isto não significa dizer que os cálculos das integrações feitas com a equação (3.33), que contém o integrando com as  $\text{Im}[R_{1,2}(\nu, t)]$  divergiram, mas que os resultados numéricos foram inesperados no sentido de serem números com parte imaginária diferente de zero quando não deveriam ser. Abaixo do limiar de fotoprodução de píons  $\omega_\pi$ , era esperado que a extensão analítica das amplitudes de Ritus fosse ter parte imaginária identicamente nula, pois até anteriormente a  $\omega_\pi$ , não se espera que as amplitudes desenvolvam parte imaginária, mas desenvolveram numericamente. O mesmo

comportamento foi observado para as partes reais das amplitudes  $\bar{R}_1(\nu, t)$  e  $\bar{R}_2(\nu, t)$ . Existe um algoritmo para verificação de possíveis inconsistências no cálculo de relações de dispersão utilizando integrandos do tipo Cauchy, realizado por Matthias Jamin. Este seria um estudo interessante de analisar de maneira adjunta ao trabalho realizado até aqui, pois ele garante que, tendo um pólo simples no integrando no intervalo de integração considerado, a parte principal de Cauchy pode ser calculada mais precisamente.

Conclui-se primeiramente que ainda existem dúvidas quanto a implementação do modelo utilizado. Um estudo mais detalhado numericamente poderia ser feito para investigar se o fato do desenvolvimento de parte imaginária quando não deveria aparecer vem da componente numérica ou física do estudo do problema. Caso o problema seja numérico, o apêndice C2 do trabalho de Matthias Jamin [48] poderia ser útil para rastrear quaisquer problemas do integrando numericamente. Caso o problema seja de ordem física, a introdução de mais estados intermediários, assim como feito em [14], ou tomando mais subtrações na relação de dispersão das amplitudes invariantes, como realizado em [13] pode eliminar as componentes indejadas ao problema. É importante mencionar que, quanto mais subtrações realizadas, menos independente é o modelo utilizado, e também de mais difícil implementação numérica.

No Capítulo 5, utilizando todo aparato físico e matemático dos Capítulos 1 - 4, o modelo da LEX foi implementado [20], onde muitos dos coeficientes em ordens superiores da expansão requerem conhecimento de relações de dispersão para serem calculados. Os resultados observados para a LEX foram que o modelo descreve bem os dados quando comparados ao já existentes que foram utilizados das DRs, mas que no entanto ainda não estão de acordo entre os diversos autores da área. O valor encontrado para  $\alpha_{E1,\nu} = 1.15 \times 10^{-4} \text{fm}^5$  está em concordância com o mesmo valor do ponto de vista da HB $\chi$ PT, e o valor para  $\beta_{M1,\nu} = 19.41 \times 10^{-4} \text{fm}^5$ , quando comparado ao valor citado em [20], é multiplicado por um fator  $\sim 2.14$ . Segundo as discussões mencionadas em [21], também existe um argumento advindo de regras de soma da QCD (QCDSR) de que o valor de  $\beta_{M1,\nu}$  deve ser estritamente maior que zero, caso que não foi obtido quando calculado pelas DRs. Conclui-se pelos ajustes realizados com valores fixos obtidos para  $\omega \sim 0$  de  $\alpha_{E1} = 11.26 \times 10^{-4} \text{fm}^3$  e  $\beta_{M1} = 2.514 \times 10^{-4} \text{fm}^3$  que o modelo da LEX descreve bem a região de baixas energias das polarizabilidades dinâmicas.

Além da aplicação da expansão a baixas energias (LEX), a parametrização fenomenológica de [12] foi implementada, utilizando como referência os dados obtidos por Lensky *et al.*[19]. Como a LEX é um bom modelo para a região anterior ao limiar de fotoprodução de píons, a ideia foi implementar esse modelo em comparação com a parametrização fenomenológica para investigar qual a influência de calcular  $V_{CP,nn}$  apenas com a região que não contém o comportamento após  $\omega_\pi$ , e o que contém um aproximação da composição en-

tre a LEX até  $\omega_\pi$  e a parametrização fenomenológica após  $\omega_\pi$ . Foi constatado que a LEX é um bom modelo para descrever o comportamento do potencial de Casimir-Polder na região de  $\omega < \omega_\pi$ , mas que desvia do comportamento esperado no intervalo de  $r$  correspondente às polarizabilidades dinâmicas, visto como um valor que chega a ultrapassar em modulo o valor máximo dado pelo  $V_{CP,nn}$  no limite estático. Tal comportamento também foi observado ajustando-se os dados obtidos pela HB $\chi$ PT de [13]. Isto permite concluir que, assim como já esperado, existe uma transição de  $V_{CP,nn}$  de uma região predominantemente descrita pelas polarizabilidades eletromagnéticas estáticas, tal que pode ser visto para  $\omega \leq 10\text{MeV}$ , e as polarizabilidades dinâmicas puderam ter um intervalo de aplicabilidade mais bem definido pelo estudo do integrando que define  $V_{CP}$ , dado em (5.9).

Com relação à perspectivas do trabalho, um passo a ser dado para a continuação do estudo seria o de aplicar relações de dispersão duas vezes subtraídas, assim como em [13], para obter resultados numéricos mais consistentes vindos da analiticidade das polarizabilidades dinâmicas. Em seguida, estes resultados seriam utilizados nas polarizabilidades dinâmicas do integrando em (5.9), para então calcular  $V_{CP,nn}(r)$  em todo intervalo que remete  $0 \leq \omega \leq \omega_\pi$  e  $\omega > \omega_\pi$ . Além disso, posteriormente à aplicação dos resultados de  $V_{CP,nn}$  poderiam ser utilizados no espaço de configurações ou, utilizando uma transformada de Fourier, no espaço dos momentos para a investigação de possíveis estados ligados da interação de Casimir-Polder.

Finalmente, pode-se dizer que do ponto de vista de relações de dispersão, o trabalho ainda precisa de refinamentos futuros para eliminação de componentes estranhas, seja numericamente e/ou fisicamente, para então podermos calcular a interação de Casimir-Polder diretamente pelas DRs, que minimizam modelos físicos. A utilização dos outros métodos de comparação para a construção de polarizabilidades dinâmicas, sendo eles a LEX, o modelo fenomenológico proposto em [12], e a HB $\chi$ PT foram capazes de descrever a importância da dependência de  $1/r^6$  e  $1/r^7$  no potencial de Casimir-Polder, e constituem uma componente muito importante para o estudo da interação nêutron-nêutron, nêutron-próton, e nucleon-parede, que servem de modelo para experimentos de confinamento de átomos ultrafrios em garrafas magnéticas [12].

# Apêndices

# Apêndice A

## Relações entre amplitudes de Hearn-Leader, L'vov, e Ritus

Como mencionado na Seção 2.5, a relação que pode ser obtida entre as amplitudes de Hearn  $A_i^{HL}$  e as de L'vov  $A_i^L$  são dadas como combinações lineares das amplitudes de helicidade  $T_i$  assim como descritas em (2.20) foram obtidas por Babusci et al. em [15], e são dadas por

$$\begin{aligned} A_1^L &= \frac{1}{t} [T_1 + T_3 + \nu (T_2 + T_4)] , \\ A_2^L &= \frac{1}{t} [2T_5 + \nu (T_2 + T_4)] , \\ A_3^L &= \frac{1}{\eta} \left[ T_1 - T_3 - \frac{t}{4\nu} (T_2 - T_4) \right] , \\ A_4^L &= \frac{1}{\eta} \left[ 2mT_6 - \frac{t}{4\nu} (T_2 - T_4) \right] , \\ A_5^L &= \frac{1}{4\nu} (T_2 + T_4) , \\ A_6^L &= \frac{1}{4\nu} (T_2 - T_4) . \end{aligned} \tag{A.1}$$

A seguir, são dadas as relações das amplitudes de Ritus como combinações lineares das amplitudes de L'vov, assim como em [15]:

$$\begin{aligned}
R_1 &= C \left\{ c_1 \left( -A_1^L - \frac{W^2}{m^2} A_3^L \right) - \frac{\nu}{m} c_2 A_5 - \frac{W}{m} c_3 A_6^L \right\}, \\
R_2 &= C \left\{ c_1 \left( A_1^L - \frac{W^2}{m^2} A_3^L \right) + \frac{\nu}{m} c_2 A_5^L - \frac{W}{m} c_3 A_6^L \right\}, \\
R_3 &= C \left\{ (W - m)^2 \left( (z - 1) A_1^L + (1 + z) \frac{W^2}{m^2} A_3^L \right) - \frac{\nu}{m} c_3 A_5^L - \frac{W}{m} c_2 A_6^L \right\}, \\
R_4 &= C \left\{ (W - m)^2 \left( (1 - z) A_1^L + (1 + z) \frac{W^2}{m^2} A_3^L \right) + \frac{\nu}{m} c_3 A_5^L - \frac{W}{m} c_2 A_6^L \right\}, \\
R_5 &= C \left\{ (W - m)^2 \left( -A_1^L - \frac{W^2}{m^2} A_3^L \right) + (W^2 - m^2) \left( A_2^L + \frac{W^3}{m^3} A_4^L \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2(W - m) \left( -\nu A_5^L + \frac{W^2}{m} A_6^L \right) \right\}, \\
R_6 &= C \left\{ (W - m)^2 \left( A_1^L - \frac{W^2}{m^2} A_3^L \right) + (W^2 - m^2) \left( -A_2^L + \frac{W^3}{m^3} A_4^L \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2(W - m) \left( \nu A_5^L + \frac{W^2}{m} A_6^L \right) \right\}. \tag{A.2}
\end{aligned}$$

Como pode-se ver no conjunto de expressões A.2, as amplitudes de Ritus  $R_i$  são expressas como combinação linear das amplitudes de L'vov  $A_i^L$ . Ademais,  $z = \cos \theta$  é o ângulo de espalhamento no referencial C.M.,  $W = \sqrt{s}$  e as constantes  $C$  e  $c_i$  são dadas por

$$\begin{aligned}
C &= \frac{(s - m^2)^2}{64\pi s^2}, \\
c_1 &= 4mW + (W - m)^2(1 - z), \\
c_2 &= 4W(W - m) - (W - m)^2(1 - z), \\
c_3 &= 4W^2 - (W - m)^2(1 - z). \tag{A.3}
\end{aligned}$$

Para finalizar, mais uma vez tem-se a definição das quantidades cinemáticas invariantes  $\eta, \nu$  e  $t$

$$\begin{aligned}\nu &= \frac{s - m^2 + t/2}{2m}, \\ t &= \frac{(s - m^2)^2}{2s}(z - 1), \\ \eta &= \frac{(s - m^2)^2}{2m^2}(z + 1).\end{aligned}\tag{A.4}$$

## Apêndice B

# Casos importantes das funções-d de Wigner

Originalmente, as funções-D de Wigner foram introduzidas em 1927 por Eugene Wigner[49], e algebricamente são uma representação irredutível dos grupo  $SU(2)$  e  $SO(3)$ , que como se sabe tem um papel fundamental na teoria do momento angular da mecânica quântica. As funções-D de Wigner podem ser representadas por matrizes quadradas unitárias de dimensão  $2J + 1$  na base esférica cujos elementos são dados por

$$\mathcal{D}_{m'm}^J(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \langle Jm' | \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) | Jm \rangle = e^{-im'\alpha} d_{m'm}^J(\beta) e^{-im\gamma}. \quad (\text{B.1})$$

Da expressão (B.1),  $\mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma)$  é o operador de rotação em três dimensões parametrizado pelos ângulos de Euler  $(\alpha, \beta, \gamma)$  na interpretação ativa de ângulos, dado por

$$\mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha J_z} e^{-i\beta J_y} e^{-i\gamma J_z}. \quad (\text{B.2})$$

Nesse contexto das funções-D, as funções-d de Wigner que aparecem nas equações (2.21) também são conhecidas como *funções-D pequenas de Wigner* ou funções-d. Sua relação mais simples com as funções-D é dada por

$$d_{m'm}^J(\beta) = D_{m'm}^J(0, \beta, 0) = \langle Jm' | e^{-i\beta J_y} | Jm \rangle. \quad (\text{B.3})$$

Em termos dos autovalores das helicidades combinadas pertencentes ao espectro  $\sigma_H$ , as funções-d são calculadas por



$$d_{m'm}^J(\beta) = [(J+m')!(J-m')!(J+m)!(J-m)!]^{(1/2)} \times \\ \times \sum_{s=s_{\min}}^{s_{\max}} \left[ \frac{(-1)^{m'-m+s} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{2J+m-m'-2s} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{m'-m+2s}}{(J+m-s)!s!(m'-m+s)!(J-m'-s)!} \right]. \quad (\text{B.4})$$

Utilizando a equação (B.4), computando os valores para as funções-d utilizadas no espectro  $\sigma_\lambda(H)$ , seguem as expressões abaixo:

para  $J = 1/2$ ,

$$d_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \cos \frac{\theta}{2}, \\ d_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = -\sin \frac{\theta}{2}. \quad (\text{B.5})$$

para  $J = 3/2$ ,

$$d_{+\frac{3}{2},+\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2}, \\ d_{+\frac{3}{2},+\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} (1 + \cos \theta) \sin \frac{\theta}{2}, \\ d_{+\frac{3}{2},-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} (1 - \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2}, \\ d_{+\frac{3}{2},-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} (1 - \cos \theta) \sin \frac{\theta}{2}, \\ d_{+\frac{1}{2},+\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} (3 \cos \theta - 1) \cos \frac{\theta}{2}, \\ d_{+\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2} (3 \cos \theta + 1) \sin \frac{\theta}{2}. \quad (\text{B.6})$$

Os elementos das funções-d de Wigner foram gerados utilizando as simetrias dessa função, seguindo

$$d_{m',m}^J = (-1)^{m-m'} d_{m,m'}^J = d_{-m,-m'}^J. \quad (\text{B.7})$$

# Apêndice C

## Base de Prange, amplitudes de helicidade reduzidas e amplitudes de Ritus

Novamente, para calcular a amplitude do espalhamento Compton, considera-se o processo  $\gamma(k) + N(p) \rightarrow \gamma'(k') + N(p')$ , e a base de Prange [35] é descrita a seguir.

A amplitude em termos de estados final  $f$  e inicial  $i$  pode ser escrita como

$$\langle f | \mathcal{S} - \mathbb{1} | i \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(k + p - k' - p') T_{fi}, \quad (\text{C.1})$$

onde foi considerada a unitariedade da matriz  $\mathcal{S}$ , e as regras de Feynman convencionais que descrevem a distribuição Delta de Dirac com conservação do 4-momento total no processo Compton. Sendo assim, a base ortogonal de Prange, a qual as amplitudes  $T_{fi}$  serão escritas em função é dada por

$$\begin{aligned} T_{fi} = & \bar{u}'(p') \epsilon^{*\mu} \left[ -\frac{P'_\mu P'_\nu}{P'^2} (T_1 + \gamma \cdot T_2) - \frac{N_\mu N_\nu}{N^2} (T_3 + \gamma \cdot K T_4) + \right. \\ & \left. + i \frac{P'_\mu N_\nu - P'_\nu N_\mu}{P'^2 K^2} \gamma_5 T_5 + i \frac{P'_\mu N_\nu - P'_\nu N_\mu}{P'^2 K^2} \gamma_5 \gamma \cdot K T_6 \right] \epsilon^\nu u(p). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Existem quantidades na equação (C.2) como as polarizações dos fótons  $\epsilon_\mu$  e os espinores dos nucleons  $u(p)$  que já foram descritos anteriormente. Os 4-vetores  $P'$ ,  $Q$ ,  $K$  e  $N$  são definidos do seguinte modo para que sejam ortogonais:

$$\begin{aligned}
P'_\mu &= P_\mu - K_\mu \frac{P \cdot K}{K^2}, \quad P_\mu = \frac{1}{2} (p + p')_\mu, \quad K_\mu = \frac{1}{2} (k' + k)_\mu \\
N_\mu &= \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} P'^\alpha Q^\alpha K^\gamma, \quad Q_\mu = \frac{1}{2} (p - p')_\mu = \frac{1}{2} (k - k')_\mu.
\end{aligned} \tag{C.3}$$

Nas equações descritas em (C.3),  $\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}$  é o conhecido tensor de Levi-Civita estendido para 4 dimensões, que continua a ser anti-simétrico, tal que  $\epsilon_{0123} = 1$ . É importante dizer também que as amplitudes de L'vov têm combinações lineares livres de restrições cinemáticas por meio de suas combinações com as amplitudes de Hearn, como descrito no conjunto de equações (A.1)

A seguir, o que se faz é utilizar as amplitudes de helicidade  $T_{\lambda'_\gamma \lambda'_N \lambda_\gamma \lambda_N}$  e escrevê-las como uma combinação linear de *amplitudes de helicidade reduzidas*  $\tau_i$ , que são livres de restrições cinemáticas angulares como potências de  $\cos \theta/2$ ,  $\sin \theta/2$  e das helicidades combinadas  $H'$  e  $H$ :

$$\begin{aligned}
T_{+1+1/2+1+1/2} &= \cos \frac{\theta}{2} \tau_1, \quad T_{-1+1/2-1+1/2} = \cos^3 \frac{\theta}{2} \tau_2, \\
T_{+1-1/2+1+1/2} &= \cos^2 \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \tau_3, \\
T_{+1+1/2-1+1/2} &= \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \tau_4, \\
T_{-1-1/2+1+1/2} &= \sin \frac{\theta}{2} \tau_5, \quad T_{+1-1/2-1+1/2} = \sin^3 \frac{\theta}{2} \tau_6.
\end{aligned} \tag{C.4}$$

Com auxílio das amplitudes de helicidade reduzidas apresentadas em (C.4), as amplitudes de L'vov  $A_i^L(s, t)$  são escritas por

$$\begin{aligned}
A_1^L(s, t) &= \frac{1}{(s - m^2)^2} \left[ -\frac{s}{m} \left( 1 - \sigma \frac{s + m^2}{2s} \right) \tau_4 - \frac{\sqrt{s}}{2} (\tau_5 + \sigma \tau_6) \right], \\
A_2^L(s, t) &= \frac{1}{(s - m^2)^3} \left[ -\frac{s}{m} (s + m^2) \left( 1 - \sigma \frac{s - m^2}{2s} \right) \tau_4 \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sqrt{s}}{2} (s - m^2) \tau_5 + 2s\sqrt{s} \left( 1 - \sigma \frac{s - m^2}{4s} \right) \tau_6 \right], \\
A_3^L(s, t) &= \frac{1}{(s - m^2)^2 (s - m^2 + t/2)} \left[ [m^3 [\tau_1 + (1 - \sigma)\tau_2]] \right. \\
&\quad \left. - 2m^2 \sqrt{s} \left( 1 - \sigma \frac{s + m^2}{2s} \right) \tau_3 \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_4^L(s, t) &= \frac{1}{(s - m^2)^2 (s - m^2 + t/2)} \left[ m^3 \tau_1 - m^3 \left( 1 + \sigma \frac{m^2}{s} \right) \tau_2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{2m^4}{\sqrt{s}} \sigma \tau_3 \right], \\
A_5^L(s, t) &= \frac{1}{(s - m^2)^2 (s - m^2 + t/2)} \left[ m (s + m^2) \sigma \tau_4 \right. \\
&\quad \left. - m^2 \sqrt{s} (\tau_5 + \sigma \tau_6) \right], \\
A_6^L(s, t) &= \frac{1}{(s - m^2)^2 (s - m^2 + t/2)} \left[ -\frac{m}{2} (s + m^2) [\tau_1 + (1 - \sigma) \tau_2] \right. \\
&\quad \left. + 2m^2 \sqrt{s} (1 - \sigma) \tau_3 \right]. \tag{C.5}
\end{aligned}$$

No conjunto de equações (C.5), a variável  $\sigma$  é uma notação para

$$\sigma = \sin^2 \frac{\theta}{2} = -\frac{st}{(s - m^2)^2}. \tag{C.6}$$

As amplitudes de Ritus, mencionadas na Seção (2.5) compõem as amplitudes de helicidade  $\tau_i$ , que podem ser escritas pela combinação linear das amplitudes invariantes, descritas como

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= 8\pi\sqrt{s} \left[ \cos^2 \frac{\theta}{2} (R_1 + R_2 - R_3 - R_4 + 2R_5 + 2R_6) \right. \\
&\quad \left. + 2R_3 + 2R_4 \right], \\
\tau_2 &= 8\pi\sqrt{s} \left[ R_1 + R_2 - R_3 - R_4 - 2R_5 - 2R_6 \right], \\
\tau_3 &= 8\pi\sqrt{s} \left[ R_1 + R_2 - R_3 - R_4 \right], \\
\tau_4 &= 8\pi\sqrt{s} \left[ R_1 - R_2 - R_3 + R_4 \right], \\
\tau_5 &= 8\pi\sqrt{s} \left[ \sin^2 \frac{\theta}{2} (R_1 - R_2 - R_3 + R_4 - 2R_5 - 2R_6) \right. \\
&\quad \left. + 2R_3 - 2R_4 \right], \\
\tau_6 &= 8\pi\sqrt{s} \left[ R_1 - R_2 - R_3 + R_4 - 2R_5 + 2R_6 \right]. \tag{C.7}
\end{aligned}$$

# Apêndice D

## Pares de Transformadas de Hilbert

Com o objetivo de complementar a discussão feita a respeito de transformadas de Hilbert até a equação (3.18), aqui são exibidas características mais gerais dessa transformada, também para que se entenda um aspecto mais global das funções que compreendem essas características, em especial as amplitudes invariantes.

Como a compreensão por uma função da transformada de Hilbert dada em (3.18) diz respeito à transformada e sua inversa, aqui se faz uma definição mais panorâmica de uma função possivelmente complexa no plano,  $h(x)$ , tal que  $x \in \mathbb{R}$ . A transformada de Hilbert  $\mathcal{H}$ , quando existe, é dada por

$$\mathcal{H}[h(x)] \equiv H(x) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x')}{x' - x} dx'. \quad (\text{D.1})$$

De modo que, se a equação (D.1) representa a transformada direta de Hilbert, a transformada inversa  $\mathcal{H}^{-1}$  por ser expressa como

$$\mathcal{H}^{-1}[H(x)] = h(x) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{H(x')}{(x' - x)} dx'. \quad (\text{D.2})$$

Como existe a definição da transformada direta na equação (D.1), pode-se substituir  $H(x)$  diretamente no integrando da equação (D.2), para obter

$$\begin{aligned} h(x) &= -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(x'')}{(x' - x)(x'' - x')} dx'' \\ \Rightarrow h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx'' \left\{ \frac{1}{\pi^2} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx'}{(x' - x)(x' - x'')} \right\} h(x''). \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Na equação (D.3) foi considerado que o Valor Principal de Cauchy de um conjunto unitário é ele mesmo, portanto na passagem da primeira para a segunda linha um dos operadores  $\mathcal{P}$  pode ser eliminado. Além disso, a última expressão foi escrita de modo a

deixar em evidência o fator  $h(x'')$ , pois a transformação realizada na variável  $x''$  de uma função arbitrária  $h(x'')$  resulta em  $h(x)$ . Isso significa que a expressão entre chaves da última equação em (D.3) é o operador unitário nesse espaço de funções, expresso por

$$\frac{1}{\pi^2} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx'}{(x' - x)(x' - x'')} = \delta(x - x''). \quad (\text{D.4})$$

Conclui-se que existe uma representação da distribuição delta de Dirac nesse espaço, dado por (D.4). Também é possível mostrar outras duas importantes identidades quando se considera transformadas, sendo a primeira que a transformada de Hilbert não é um operador idempotente, e a segunda sendo a conhecida *identidade de Parseval*[36], respectivamente abaixo:

$$\begin{cases} \mathcal{H}^2[h(x)] = -h(x), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} |h(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(x)|^2 dx. \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

## Apêndice E

# Funções constituintes das partes imaginárias das amplitudes de Ritus

Das partes imaginárias das amplitudes de Ritus contidas no conjunto (3.26), as funções que compõem as amplitudes são listadas abaixo.[14]

Primeiramente a função  $R(v, z)$ , que é o ingrediente mais básico de todas as outras

$$R(v, z) = \sqrt{(1-z)[2-(1+z)v^2]}. \quad (\text{E.1})$$

A seguir, as funções  $\phi_i(v, z)$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  são definidas por

$$\begin{aligned} \phi_1(v, z) &= \frac{1}{vR(v, z)} \log \left[ \frac{R(v, z) + (1-z)v}{R(v, z) - (1-z)v} \right], \\ \phi_2(v) &= \frac{1}{v} \log \left( \frac{1+v}{1-v} \right), \\ \phi_3(v, z) &= \frac{\phi_1(v, z) - \phi_2(v)}{(1+z)v^2}, \\ \phi_4(v) &= \frac{1}{v^2} [\phi_2(v) - 1]. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

As funções com letras maiúsculas  $A(v)$ ,  $A'(v)$ ,  $B(v)$  e  $B'(v)$  são dadas por

$$\begin{aligned} A(v) &= \frac{1}{2} [\phi_2(v) - \phi_4(v)] \\ A'(v) &= \frac{1}{v} [A(v) - 1/3], \\ B(v) &= \phi_4(v) - A(v), \\ B'(v) &= \frac{1}{v} B(v) - 2A'(v). \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

As funções de letras gregas minúsculas  $\alpha(v, z)$ ,  $\beta(v, z)$  e  $\gamma(v, z)$  são escritas como

$$\begin{aligned}\alpha(v, z) &= \phi_1(v, z) - 2\phi_3(v, z), \\ \beta(v, z) &= \phi_3(v, z) - \alpha(v, z) - z\gamma(v, z), \\ \gamma(v, z) &= \frac{1}{(1-z^2)} [z\phi_1(v, z) + (1-3z)\phi_3(v, z) - \phi_4(v)].\end{aligned}\quad (\text{E.4})$$

As funções de letras latinas minúsculas  $a(v, z)$ ,  $b(v, z)$  e  $c(v, z)$  são

$$\begin{aligned}a(v, z) &= \frac{1}{v}\beta(v, z) - zb(v, z) - 2c(v, z), \\ b(v, z) &= \frac{1}{(1+z)} \left[ \frac{1}{v}\gamma(v, z) - c(v, z) \right], \\ c(v, z) &= \frac{\alpha(v, z) - A(v)}{(1+z)v}.\end{aligned}\quad (\text{E.5})$$

Por fim, as constantes  $f_3$  e  $f_4$  são definidas do seguinte modo:

$$\begin{aligned}f_3 &= \mp \frac{e g_{\pi NN}}{4\pi\sqrt{2s}} \sqrt{\frac{E_{N'} + M}{E_N + M}} \\ f_4 &= \mp \frac{e g_{\pi NN}}{4\pi\sqrt{2s}} v \sqrt{\frac{E_N + M}{E_{N'} + M}}.\end{aligned}\quad (\text{E.6})$$

Nas equações (E.6),  $E_N$  e  $E_{N'}$  são as energias inicial e no estado intermediário do nucleon no referencial C.M., a quantidade  $g_{\pi NN}$  é o acoplamento  $\pi NN$ , de modo que  $g_{\pi NN}^2/4\pi \approx 13.75$ , e o sinal  $\mp$  deve ser levado em conta para a fotoprodução de píons  $\pi^\pm$ .

Em todas as equações em (E.1) - (E.6) é possível aplicar o conjunto de transformações  $(\omega, z) \rightarrow (\nu, t)$ , de modo que todas as expressões serão funções de  $(\nu, t)$ .



## Referências

- [1] H. B. G. Casimir. “On the attraction between two perfectly conducting plates”. Em: Indag. Math. 10.4 (1948), pp. 261–263.
- [2] P. W. Milonni e M. L. Shih. “Casimir forces”. Em: Contemp. Phys. 33 (1992), pp. 313–322. DOI: 10.1080/00107519208223981.
- [3] M. J. Sparnaay. “Attractive Forces between Flat Plates”. Em: Nature 180.4581 (1957), pp. 334–335. ISSN: 1476-4687. DOI: 10.1038/180334b0. URL: <https://doi.org/10.1038/180334b0>.
- [4] Emok. “Casimir forces on parallel plates”. Em: Casimir Effect (). URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Casimir\\_effect](https://en.wikipedia.org/wiki/Casimir_effect).
- [5] P.R. Berman E. Arimondo e C.C. Lin (Eds.) “Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics 59”. Em: (2010), pags. 1 –17.
- [6] Gerald Feinberg e Joseph Sucher. “General Theory of the van der Waals Interaction: A Model-Independent Approach”. Em: Phys. Rev. A 2 (6 1970), pp. 2395–2415. DOI: 10.1103/PhysRevA.2.2395. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.2.2395>.
- [7] Franziska Hagelstein, Rory Miskimen e Vladimir Pascalutsa. “Nucleon polarizabilities: From Compton scattering to hydrogen atom”. Em: 88 (2016), pp. 29–97. ISSN: 0146-6410. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.pnpnp.2015.12.001>. URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0146641015001118>.
- [8] Steven Weinberg. “Phenomenological Lagrangians”. Em: 96.1 (1979), pp. 327–340. ISSN: 0378-4371. DOI: [https://doi.org/10.1016/0378-4371\(79\)90223-1](https://doi.org/10.1016/0378-4371(79)90223-1). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0378437179902231>.

- [9] J Gasser e H Leutwyler. “Chiral perturbation theory to one loop”. Em: Annals of Physics 158.1 (1984), pp. 142–210. ISSN: 0003-4916. DOI: [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(84\)90242-2](https://doi.org/10.1016/0003-4916(84)90242-2). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491684902422>.
- [10] Stefan Scherer. “Recent developments in effective field theory”. Em: Prog. Part. Nucl. Phys. 61 (2008). Ed. por Amand Faessler, pp. 19–26. DOI: 10.1016/j.ppnp.2007.12.029. arXiv: 0711.0309 [nucl-th].
- [11] L.G. Arnold. Em: Physics Letter B 44 (1973), p. 401.
- [12] James F. Babb, Renato Higa e Mahir S. Hussein. “Dipole-dipole dispersion interactions between neutrons”. Em: European Physical Journal A 53 (2017). DOI: 10.1140/epja/i2017-12313-7. URL: <https://link.springer.com/article/10.1140/epja/i2017-12313-7>.
- [13] R. P. Hildebrandt et al. “Signatures of chiral dynamics in low-energy Compton scattering off the nucleon”. Em: The European Physical Journal A - Hadrons and Nuclei 20.2 (2004), pp. 293–315. ISSN: 1434-601X. DOI: 10.1140/epja/i2003-10144-9. URL: <https://doi.org/10.1140/epja/i2003-10144-9>.
- [14] A. I. L’vov, V. A. Petrun’kin e M. Schumacher. “Dispersion theory of proton Compton scattering in the first and second resonance regions”. Em: Phys. Rev. C 55 (1 1997), pp. 359–377. DOI: 10.1103/PhysRevC.55.359. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.55.359>.
- [15] D. Babusci et al. “Low-energy Compton scattering of polarized photons on polarized nucleons”. Em: Phys. Rev. C 58 (2 1998), pp. 1013–1041. DOI: 10.1103/PhysRevC.58.1013. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.58.1013>.
- [16] “Dispersion relations in real and virtual Compton scattering”. Em: Physics Reports 378.2 (2003), pp. 99–205. ISSN: 0370-1573. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0370-1573\(02\)00636-1](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(02)00636-1). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157302006361>.
- [17] Barry R. Holstein et al. “Higher order polarizabilities of the proton”. Em: Phys. Rev. C 61 (3 2000), p. 034316. DOI: 10.1103/PhysRevC.61.034316. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.61.034316>.
- [18] Thomas R. Hemmert, Barry R. Holstein e Joachim Kambor. “Systematic expansion for spin particles in baryon chiral perturbation theory”. Em: Physics Letters B 395.1–2 (mar. de 1997), 89–95. ISSN: 0370-2693. DOI: 10.1016/S0370-

2693 (97) 00049-x. URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693\(97\)00049-x](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693(97)00049-x).

- [19] Vadim Lensky, Judith A. McGovern e Vladimir Pascalutsa. “Predictions of covariant chiral perturbation theory for nucleon polarisabilities and polarised Compton scattering”. Em: The European Physical Journal C 75.12 (2015), p. 604. ISSN: 1434-6052. DOI: 10.1140/epjc/s10052-015-3791-0. URL: <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-015-3791-0>.
- [20] B. Pasquini, P. Pedroni e S. Sconfiatti. “First extraction of the scalar proton dynamical polarizabilities from real Compton scattering data”. Em: Phys. Rev. C 98 (1 2018), p. 015204. DOI: 10.1103/PhysRevC.98.015204. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.98.015204>.
- [21] Sconfiatti, S., Pasquini, B. e Pedroni, P. “Scalar dipole dynamical polarizabilities from real Compton scattering data”. Em: EPJ Web Conf. 199 (2019), p. 05008. DOI: 10.1051/epjconf/201919905008. URL: <https://doi.org/10.1051/epjconf/201919905008>.
- [22] K. Kisamori et al. “Candidate Resonant Tetraneutron State Populated by the  $^4\text{He}(^8\text{He}, ^8\text{Be})$  Reaction”. Em: Phys. Rev. Lett. 116 (5 2016), p. 052501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.052501. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.052501>.
- [23] S. Gandolfi et al. “Is a Trineutron Resonance Lower in Energy than a Tetraneutron Resonance?” Em: Phys. Rev. Lett. 118 (23 2017), p. 232501. DOI: 10.1103/PhysRevLett.118.232501. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.118.232501>.
- [24] K. Fossez et al. “Continuum effects in neutron-drip-line oxygen isotopes”. Em: Phys. Rev. C 96 (2 2017), p. 024308. DOI: 10.1103/PhysRevC.96.024308. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.96.024308>.
- [25] J. G. Li et al. “Ab initio no-core Gamow shell-model calculations of multineutron systems”. Em: Phys. Rev. C 100 (5 2019), p. 054313. DOI: 10.1103/PhysRevC.100.054313. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.100.054313>.
- [26] F.R.S. E. Rutherford. “The Scattering of  $\alpha$  and  $\beta$  Particles by Matter and the Structure of the Atom”. Em: Philosophical Magazine 21 (6 1911), pp. 669–688. URL: <https://www.chemteam.info/Chem-History/Rutherford-1911/Rutherford-1911.html>.

- [27] David J. Griffiths. Introduction to electrodynamics. Includes bibliographical references and index. Fourth edition. Boston : Pearson, ©2013. URL: <https://search.library.wisc.edu/catalog/9910134691602121>.
- [28] Abraham Klein. “Low-Energy Theorems for Renormalizable Field Theories”. Em: Phys. Rev. 99 (3 1955), pp. 998–1008. DOI: 10.1103/PhysRev.99.998. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.99.998>.
- [29] A.M. Baldin. “Polarizability of nucleons”. Em: Nuclear Physics 18 (1960), pp. 310–317. ISSN: 0029-5582. DOI: [https://doi.org/10.1016/0029-5582\(60\)90408-9](https://doi.org/10.1016/0029-5582(60)90408-9). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0029558260904089>.
- [30] George E. Pugh et al. “Nuclear Scattering of 50- to 130-Mev  $\gamma$  Rays”. Em: Phys. Rev. 105 (3 1957), pp. 982–995. DOI: 10.1103/PhysRev.105.982. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.105.982>.
- [31] G. Bernardini et al. “Proton compton effect”. Em: Il Nuovo Cimento (1955-1965) 18.6 (1960), pp. 1203–1236. ISSN: 1827-6121. DOI: 10.1007/BF02733177. URL: <https://doi.org/10.1007/BF02733177>.
- [32] A. C. Hearn e E. Leader. “Fixed-Angle Dispersion Relations for Nucleon Compton Scattering. I”. Em: Phys. Rev. 126 (2 1962), pp. 789–805. DOI: 10.1103/PhysRev.126.789. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.126.789>.
- [33] Michael Edward Peskin e Daniel V. Schroeder. “An Introduction to Quantum Field Theory”. Em: (1995). Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p.
- [34] Vladimir Pascalutsa e Daniel R. Phillips. “Effective theory of the  $\Delta(1232)$  resonance in Compton scattering off the nucleon”. Em: Phys. Rev. C 67 (5 2003), p. 055202. DOI: 10.1103/PhysRevC.67.055202. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevC.67.055202>.
- [35] R. E. Prange. “Dispersion Relations for Compton Scattering”. Em: Phys. Rev. 110 (1 1958), pp. 240–252. DOI: 10.1103/PhysRev.110.240. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.110.240>.
- [36] V. Balakrishnan. “Mathematical Physics: Applications and Problems”. Em: (jan. de 2020). DOI: 10.1007/978-3-030-39680-0.
- [37] H. A. Kramers. “La diffusion de la lumiere par les atomes”. Em: Atti Cong. Intern. Fisica 2 (1927), pp. 545–557. URL: <https://cir.nii.ac.jp/crid/1571135649980336384>.

- [38] I Guiãsu e E.E Radescu. “Higher multipole polarizabilities of hadrons from compton scattering amplitudes”. Em: Annals of Physics 120.1 (1979), pp. 145–174. ISSN: 0003-4916. DOI: [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(79\)90285-9](https://doi.org/10.1016/0003-4916(79)90285-9). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491679902859>.
- [39] T. Muta. “Foundations of Quantum Chromodynamics: An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories”. Em: World Scientific Lecture Notes in Physics (1998). URL: <https://books.google.com.br/books?id=j2JIPwtoPMwC>.
- [40] J Gasser e H Leutwyler. “Chiral perturbation theory to one loop”. Em: Annals of Physics 158.1 (1984), pp. 142–210. ISSN: 0003-4916. DOI: [https://doi.org/10.1016/0003-4916\(84\)90242-2](https://doi.org/10.1016/0003-4916(84)90242-2). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0003491684902422>.
- [41] Elizabeth Jenkins e Aneesh V. Manohar. “Baryon chiral perturbation theory using a heavy fermion lagrangian”. Em: Physics Letters B 255.4 (1991), pp. 558–562. ISSN: 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(91\)90266-S](https://doi.org/10.1016/0370-2693(91)90266-S). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037026939190266S>.
- [42] Thomas R Hemmert, Barry R Holstein e Joachim Kambor. “Heavy baryon chiral perturbation theory with light deltas”. Em: Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics 24.10 (out. de 1998), 1831–1859. ISSN: 1361-6471. DOI: 10.1088/0954-3899/24/10/003. URL: <http://dx.doi.org/10.1088/0954-3899/24/10/003>.
- [43] K. Kossert et al. “Quasi-free Compton scattering and the polarizabilities of the neutron”. Em: The European Physical Journal A - Hadrons and Nuclei 16.2 (2003), pp. 259–273. ISSN: 1434-601X. DOI: 10.1140/epja/i2002-10093-9. URL: <https://doi.org/10.1140/epja/i2002-10093-9>.
- [44] G. Feinberg e J. Sucher. “Is there a strong van der Waals force between hadrons?” Em: Phys. Rev. D 20 (7 1979), pp. 1717–1735. DOI: 10.1103/PhysRevD.20.1717. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.20.1717>.
- [45] Ennio Arimondo Paul R. Berman e Chun C. Lin. “Advances in Atomic, Molecular, and Optical Physics”. Em: 59 (2010), p.1.
- [46] M.O’Carroll e J. Sucher. Em: Phys. Rev. A 85 (1969). URL: <https://journals.aps.org/pr/issues/187/1>.

- [47] Harald Friedrich, Georg Jacoby e Carlo G. Meister. “Quantum reflection by Casimir–van der Waals potential tails”. Em: Phys. Rev. A 65 (3 2002), p. 032902. DOI: 10.1103/PhysRevA.65.032902. URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.65.032902>.
- [48] Matthias Jamin, José Antonio Oller e Antonio Pich. “Strangeness-changing scalar form factors”. Em: Nuclear Physics B 622.1 (2002), pp. 279–308. ISSN: 0550-3213. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0550-3213\(01\)00605-8](https://doi.org/10.1016/S0550-3213(01)00605-8). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0550321301006058>.
- [49] E.P. Wigner e H.S.W. Massey. “Group Theory: And Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra”. Em: (2013). URL: <https://books.google.com.br/books?id=UITNCgAAQBAJ>.