Universidade de São Paulo
Instituto de Física

Fonte de luz coerente na banda C de telecomunicações e uso em chips de Si_3N_4

Pablo Jaime Palacios Avila

Orientador(a): Prof. Dr. Paulo Nussenzveig

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física da Universidade de São Paulo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Banca Examinadora:
Prof. Dr. Paulo Nussenzveig - Orientador (IFUSP)
Prof. Dr. Gustavo Wiederhecker (UNICAMP)
Prof. Dr. Felippe Barbosa (UNICAMP)

São Paulo
2018

FICHA CATALOGRÁFICA
Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação
do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Palacios Avila, Pablo Jaime

Fonte de luz coerente na banda C de telecomunicações e uso em chips de Si3N4. São Paulo, 2018.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física. Depto. de Física Experimental

Orientador: Prof. Dr. Paulo Alberto Nussenzveig
Área de Concentração: Ótica Quântica.

Unitermos: 1. Ótica quântica; 2. Ótica não linear; 3. Oscilador paramétrico ótico.

USP/IF/SBI-061/2018

University of São Paulo
Physics Institute

Coherent light source on C-band telecom and use on Si_3N_4 chips

Pablo Jaime Palacios Avila

Supervisor: Prof. Dr. Paulo Nussenzveig

Dissertation submitted to the Physics Institute of the University of São Paulo in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science.

Examining Committee:
Prof. Dr. Paulo Nussenzveig - Supervisor (IFUSP)
Prof. Dr. Gustavo Wiederhecker (UNICAMP)
Prof. Dr. Felippe Barbosa (UNICAMP)

São Paulo
2018

Agradecimentos

A minha etapa como mestrando conclui-se em boa parte com o presente documento. Em cada página e em cada linha ficam minhas tentativas por plasmar o muito ou pouco que aprendi ao longo destes dois anos. Esse tempo compreende uma quantidade inúmera de conhecimentos novos, experiências novas, amadurecimento como persona e como cientista; em poucas palavras, um crescimento em diversas dimensões da minha pessoa.

O caminho não poderia ter sido concluído sem o acompanhamento da minha família que, mesmo pela distância, soube estar do meu lado e me ajudar cada vez que eu precisava de apoio e forças para me levantar e seguir em frente. Agradeço aos meus pais, Pablo Palacios e Irina Avila, duas pessoas maravilhosas que deram tudo o que eles puderam para me oferecer as ferramentas para que eu me tornasse uma pessoa de bem e capaz de dar tudo de si para ajudar a construir um mundo melhor; e ao meu irmão, Pedro Palacios, por ter sido meu mais velho e melhor amigo ao longo da vida toda e de mil batalhas, e com quem aprendi a aprender, a me divertir, e, sobretudo, a me divertir aprendendo.

A minha formação como cientista contou com dois guias excelentes os quais também devo agradecer: Paulo Nussenzveig, meu orientador e a quem valoro muito pelas excelentes discussões sobre conceitos de física e pelo seu interesse genuíno no conhecimento rigoroso e pelo entendimento da física; e Marcelo Martinelli, meu co-orientador e grande exemplo de físico experimental, a quem admiro pela empolgação que transmite quando trata-se de abordar problemas de física, tanto fora quanto dentro do laboratório.

A vida no nosso laboratório, o LMCAL, não poderia ter sido tão frutífera sem o aprendizado do dia a dia junto aos colegas do grupo. Agradeço a Renato Domeneguetti, por ter me ensinado sobre a linha de pesquisa na qual trabalhamos e por reunir boa parte da experiência do laboratório em relação aos chips; a Breno Teixeira, Carlos Gonzales, Igor Konieczniak, Rayssa Bruzaca, Tulio Brasil, pelos grandes ensinamentos, conselhos, experiências, miniaulas e extensas discussões científicas que conformam boa parte das coisas que aprendi sobre o trabalho no laboratório. Agradeço também a

Lucas Faria, Bárbara Ribeiro, Roger Kögler, Luiz Couto, Emmi Herterich, colegas com quem compartilhei momentos agradáveis e que contribuíram para que a experiência no LMCAL fosse também um aprendizado como ser humano. Finalmente, a Álvaro Montana, Raul Rincón e Harold Rojas pela grande amizade, companheirismo e apoio em diferentes momentos ao longo da luta, tanto nos melhores momentos quanto nos mais difíceis.

O mestrado no Instituto de Física precisou também do apoio indispensável de vários funcionários. Quero agradecer a Marcos Souza, Alex Cecotte, Clineu Carreira e a todo o pessoal da oficina mecânica central, pessoas muito profissionais, com quem trabalhei em dezenas de projetos e com quem aprendi a importância dos materiais e de um bom desenho mecânico. A Eduardo Monteiro e a Adriano Moraes, pelo suporte com a eletrônica, a base de quase todos os instrumentos de medição do laboratório, e pela paciência por terem me ajudado em momentos críticos do experimento. A Edi Rezende e Luiz de Queiroz, sempre muito prestativos e amáveis, e que me ajudaram a resolver mais de uma dificuldade administrativa. Aos funcionários da CPG, Éber Pato e Andrea Wirkus, pela atenção e disposição ante os diversos processos e papeladas burocráticas relacionadas ao mestrado.

Este caminho de dois anos fora do meu país de origem, o Peru, não foi simples. Não foram poucos momentos de saudade (aquela palavra tão maravilhosa da língua portuguesa) nos quais a falta da família e dos amigos fizeram os meus dias nublados. Por este motivo, não posso deixar de agradecer às pessoas que estiveram do meu lado nesta jornada. De maneira especial, quero agradecer a Raissa Oblitas, Andrés Cardona e Carlos Mera; por terem me acolhido sob o mesmo teto e com quem compartilhei a última etapa do meu mestrado, com os desafios e vicissitudes advindos dela. A Christian Leonardo, Edy Cuevas, Robert Gavidia e Carolina Rivadeneyra, colegas e amigos peruanos com quem passei vários momentos agradáveis, mas que também souberam estar presentes nos momentos de dificuldades. Quero também mencionar a Sandra Avellaneda, Rosmeri Huaman, Diana Hurtado, Ana Luna, Ana Maria Mosquera e Estefania Sucre, grandes amigas que, mesmo estando a quilômetros de distância, não hesitaram em me acompanhar através de chamadas, bate-papos e memes, essenciais nas horas em que a coragem para não me render era escassa. Finalmente, preciso agradecer especialmente a Karen Jara, a minha namorada e companheira de aventuras ao longo da vida, que conseguiu me inspirar e dar o impulso final nesta longa batalha, fazendo me lembrar de que as coisas que mais valoramos são aquelas que obtemos com esforço e luta.

Não quero deixar de mencionar também a dois professores da graduação que influenciaram na minha formação e a quem devo a minha escolha pela Ótica Quântica. Ao Prof. Holger Valqui da UNI, minha alma mater, quem me inspirou desde os primeiros anos pela sua paixão pela física; qualidade pouco comum na faculdade, e que me marcou para os anos seguintes, mesmo depois da sua partida. Ao Prof. Francisco de Zela da PUCP quem me introduziu no mundo da Ótica Quântica me ensinando os primeiros conceitos teóricos, e a quem admiro profundamente pelas suas qualidades como cientista, professor e ser humano.

Por fim, agradeço o apoio da agência de fomento CNPq, que financiou o desenvolvimento deste trabalho e a minha formação ao longo destes dois anos.

Resumo

Os estados emaranhados da luz são de grande importância para protocolos de comunicação quântica. Uma das principais fontes que vem sendo estudada no Laboratório de Manipulação Coerente de Átomos e Luz - LMCAL é o oscilador paramétrico ótico (OPO) no qual, através de processos paramétricos não lineares de segunda e terceira ordem ($\chi^{(2)}$ e $\chi^{(3)}$), são produzidos feixes intensos que apresentam correlações quânticas. Recentemente, o LMCAL vem explorando o processo de mistura de quatro ondas (fenômeno derivado da susceptibilidade de terceira ordem $\chi^{(3)}$) como fonte geradora de feixes emaranhados. Inicialmente, foi realizado a partir de células de rubídio e agora, em colaboração com o grupo de pesquisa da Profa. Michal Lipson da Universidade de Columbia, em chips de nitreto de silício (Si_3N_4); permitindo assim possibilidades de modulação ultra-rápida, confinamento de luz em volumes muito reduzidos, além da ótica não-linear do OPO. O presente projeto visa estudar as propriedades quânticas da luz nos OPOs em chips de silício, permitindo que sistemas muito eficientes em informação clássica possam ser usados também para implementação de protocolos de informação quântica.

Palavras-chave: Oscilador paramétrico ótico; mistura de quatro ondas; microrressoadores; tecnologia CMOS.

Abstract

Entangled States of light beams are of great importance for quantum communication protocols. One of the most relevant source of such states which is being studied at the Laboratory of Coherent Manipulation of Atoms and Light - LMCAL (in portuguese) is the Optical Parametric Oscillator (OPO) which through second and third order nonlinear parametric processes ($\chi^{(2)}$ and $\chi^{(3)}$) produces intense fields that have quantum correlations. Recently, LMCAL is exploring four-wave mixing (FWM), a third-order nonlinear parametric process, as a source of entangled beams. Initially, on rubidium cells and now, in collaboration with Prof. Michal Lipson from the Columbia University, on silicon nitride (Si_3N_4) chips; opening a new avenue for ultrafast modulation, light confinement in reduced light volumes, as well as the nonlinear optics of the OPO. This project is intended to study quantum properties of light of on-chip OPOs in order to achieve the integration of these highly efficient devices for implementations of quantum information protocols.

Keywords: Optical parametric oscillator; four-wave mixing; microring resonators; CMOS technology

Conteúdo

Introdução **1**

1 Revisão de conceitos básicos **5**

1.1 O campo eletromagnético quantizado 5

1.1.1 A teoria clássica 6

1.1.2 Quantização 10

1.1.3 Fótons 12

1.2 Estados coerentes 14

1.2.1 Propriedades dos estados coerentes 15

1.2.2 Função de onda $\phi_\alpha(q)$ para os estados coerentes de um oscilador harmônico 17

1.2.3 Evolução do estado coerente 17

Evolução dos operadores canônicos $\hat{Q}$ e $\hat{P}$ 18

Movimento do pacote de ondas 19

1.2.4 Estados comprimidos 20

1.2.5 Variância do campo elétrico 22

1.3 Descrição do ruído quântico 25

2 Teoria de cavidades óticas **29**

2.1 As cavidades na Ótica Quântica 29

2.2 Descrição de uma cavidade ótica linear 31

2.3 A resposta em potência 35

2.4 A resposta na fase 37

2.5 Propriedades espaciais das cavidades 39

2.5.1 Acordo de modo 41

2.5.2 Polarização 42

2.6 Dinâmica dos modos da cavidade 43

2.6.1 Equações quânticas de movimento para uma cavidade 44

2.6.2 Propagação de flutuações na cavidade 45

2.7 A cavidade como instrumento de análise de ruído 47

3 Oscilador paramétrico ótico (OPO) em chips de Silício **55**
3.1 Mistura de quatro ondas (FWM) 55
3.2 Descrição do OPO 62
3.3 Chips de Silício 65
3.4 Relações de acoplamento entre microrressoadores e guias de onda 67

4 Instrumentação e resultados experimentais **71**
4.1 Cavidade de análise e sistema de medição de ruido 72
4.2 Filtragem do laser 76
4.2.1 Construção da cavidade de filtro 79
4.2.2 Sistema de travamento 81
4.2.3 Resultados da filtragem 83
4.3 Análise dos chips de Si_3N_4 85
4.3.1 Análise do acoplamento 86
4.3.2 Geração de pentes de frequência 87

5 Conclusões e perspectivas **91**

Bibliografia **93**

Introdução

A transmissão de informação a grandes distâncias é parte indispensável do dia a dia no nosso mundo globalizado atual. Desde o computador pessoal que usamos todos os dias para as nossas atividades cotidianas até o aparelho móvel que carregamos no bolso que nos mantém conectados em todo momento. Tudo isso é sustentado nos grandes avanços da tecnologia e das ciências da computação e informação que fizeram possível o que começou como uma ideia de cientistas como Alan Turing e Claude Shannon, após a Segunda Guerra Mundial.

Esses avanços começaram tomar passos menos acelerados quando os sistemas de processamento se tornaram altamente complexos devido ao reduzido tamanho. Em 1965, Gordon Moore enunciou uma regra para estabelecer como as capacidades computacionais iriam aumentar ao longo dos anos (conhecida como a *lei de Moore* [Moore, 1965]) e que acabou sendo bastante precisa. Segundo aquela lei, o estágio no qual nos encontramos atualmente está próximo ao ponto em que as diminutas dimensões dos transistores que compõem os microprocessadores começam manifestar efeitos quânticos antes não relevantes. Esta situação levou a repensar a maneira em que se levava a cabo a computação e a avaliar uma mudança de paradigma. Uma das opções que surgiram foi a de realizar processos computacionais empregando a mecânica quântica e aproveitando todo o formalismo e as propriedades que ela carrega [Nielsen and Chuang, 2010]. Não foi muito tempo depois que acabou foram percebidas vantagens que esta proposta de *computação quântica* oferecia, em termos velocidade de processamento.

Ao longo dos anos, fizeram-se grandes progressos, como a criação de propostas de algoritmos quânticos e implementações práticas de sistemas de processamento de informação quântica, que avaliaram as vantagens deste novo paradigma. Esta superioridade se baseava no uso de propriedades conhecidas dos estados quânticos, tais como a superposição quântica, *squeezing*, e, provavelmente a que despertou mais interesse, o emaranhamento quântico. O emaranhamento é um efeito único e sem semelhante na física clássica e que se manteve no foco da atenção desde a aparição do famoso artigo de Einstein, Podolsky e Rosen [Einstein et al., 1935] em 1935. No contexto da computação quântica, as pesquisas feitas em áreas como a criptografia quântica deram lugar ao aprofundamento das correlações quânticas envolvidas no emaranhamento [Lam and

Ralph, 2013] e a sua importância no desafio de criar um sistema de computação e processamento de informação quântico [Kimble, 2008].

Devido a este crescente interesse, começou uma importante busca de fontes que permitissem gerar este tipo de estados não-clássicos, e que possibilitem, consequentemente, a implementação de modelos de computação quântica. Surgiram assim uma série de propostas como sistemas atômicos [Lukin, 2003], centros de vacância de nitrogênio em diamante [Nizovtsev, 2005, Neumann et al., 2008], sistemas supercondutores [Clarke and Wilhelm, 2008], entre outros.

A ótica quântica, área de pesquisa que estuda os fenômenos de interação entre luz e matéria através da mecânica quântica, oferecia um candidato promissor: o oscilador paramétrico ótico (OPO) [Yariv, 1989]. Este dispositivo, é composto de um cristal não-linear inserido em uma cavidade ótica, bombeado por um feixe laser. O meio não-linear irá acoplar o campo de bombeio, de frequência ω_0 aos campos de frequência ω_1 e ω_2, chamados de sinal e complementar. Quando a potência de bombeio é suficiente e as condições de casamento de modo e fase forem satisfeitas, a oscilação dos modos sinal e complementar permite a emissão de dois feixes intensos fortemente correlacionados em potência. Além destas características, o OPO também é capaz de gerar campos com emaranhamento, onde as flutuações das quadraturas dos campos de saída violam critérios de separabilidade no regime de variáveis contínuas [Duan et al., 1999, Simon, 2000].

Neste contexto, o Laboratório de Manipulação Coerente de Átomos e Luz - LMCAL, é um grupo de pesquisa que vem trabalhando fortemente em torno deste dispositivo. Ao longo da última década lograram-se grandes avanços em implementações de protocolos de informação quântica usando OPOs como fonte de estados não-clássicos. Entre os trabalhos realizados, podemos mencionar as primeiras descobertas experimentais de correlações quânticas entre feixes multicolor [Cassemiro et al., 2007b, Cassemiro et al., 2007a] e a primeira geração de emaranhamento entre feixes multicolor bipartite e tripartite [Villar et al., 2005, Coelho et al., 2009]. Estes aportes são um exemplo da ampla experiencia acumulada no LMCAL em relação às possibilidades que oferece o OPO para a implementação de protocolos de informação quânticas em variáveis contínuas.

Em paralelo a estes avanços, o grupo da Profa. Michal Lipson na Universidade de Columbia, grupo dedicado à pesquisa em fotônica do silício, obteve grande destaque internacional na produção e caracterização de sistemas fotônicos baseados em

micro(nano)-cavidades em chips de nitreto de silício. Estes sistemas aproveitam efeitos de ótica não-linear para desempenhar tarefas em áreas de processamento e comunicação de informação, mas no nível clássico. No entanto, com a aparição dos primeiros trabalhos que mostravam as potencialidades dos microrressoadores em chips como OPOs [Dutt et al., 2015, Dutt et al., 2016, Levy et al., 2010] se abriu um cenário particularmente atraente para protocolos envolvendo estados comprimidos para comunicações quânticas em distâncias curtas e com alta taxa de repetição. Além disso, a possibilidade de ter plataformas geradoras de estados não-clássicos de tamanhos reduzidos, as capacidades de integração oferecidas pela tecnologia CMOS (abreviação para *Complementary metal-oxide semiconductor*, o tipo de tecnologia usada na fabricação microprocessadores) e as vantagens de trabalhar em comprimentos de onda da banda C de telecomunicações, fizeram os OPOs em chips uma plataforma que poderá ter um grande impacto no campo da computação quântica nos anos próximos.

Nesta dissertação, apresentamos os primeiros avanços feitos no LMCAL para obter um sistema de geração de estados não-clássicos usando chips em nitreto de silício. O nosso ponto de partida é o trabalho feito em [Dutt et al., 2015], onde se provou a existência de squeezing na subtração das quadraturas de amplitude, e buscaremos replicar os resultados obtidos para logo seguir em frente e estudar as correlações de quadratura entre os feixes gerados.

No primeiro capítulo descrevemos os conceitos básicos da teoria quântica da luz, o panorama que esta nos oferece, e como a análise das flutuações do campo eletromagnético nos pode fornecer informação sobre este. No capitulo 2 abarcaremos a teoria de cavidades, uma ferramenta amplamente usada no laboratório e que está relacionada com quase todas as etapas do experimento. O capítulo 3 explora brevemente a dinâmica da mistura de quatro ondas, processo chave no funcionamento dos chips, e também uma descrição clássica da teoria do OPO e a sua implementação em chips.

No capítulo 4 mostramos o aparato experimental desenvolvido até o presente momento e os resultados obtidos. Para isto, precisamos contar com uma fonte de estados coerentes que servirá como fonte de bombeio para os chips. Posteriormente, estudamos a resposta dos microrressoadores para distintas potências de bombeio e acoplamento com a finalidade de caracterizar o seu comportamento como OPO. Os passos próximos serão a busca de parâmetros necessários para a geração de unicamente um par de feixes, com a finalidade de iniciar o estudo e caracterização das correlações envolvidas.

Capítulo 1

Revisão de conceitos básicos

Começamos descrevendo o ferramental teórico que iremos precisar no presente trabalho, tratando principalmente de campos eletromagnéticos e a sua manipulação. Fazemos uso da abordagem quântica que nos fornece uma imagem mais clara em relação às flutuações do campo, que é um aspecto fundamental no nosso estudo. Analisamos também de maneira sucinta a teoria dos estados coerentes e comprimidos que conformam o tipo de estado mais usado no processo de manipulação e geração de estados não clássicos para campos intensos. Por fim, revisamos brevemente a descrição do ruído quântico e a maneira com que ele nos fornecerá informação relevante do nosso sistema.

1.1 O campo eletromagnético quantizado

As equações de Maxwell permitem uma completa descrição dos campos elétricos e magnéticos não interagentes com a materia no espaço livre; isto é, o que se conhece como radiação eletromagnética. Muitos processos que envolvem a interação entre radiação e matéria, tais como a absorção e emissão estimulada, que ocorrem nos lasers, podem ser explicados usando a teoria semi-clássica para a interação átomo-campo. A teoria consiste em tratar a matéria segundo a mecânica quântica e a radiação segundo a teoria clássica. Porém, existem muitos outros fenômenos que não podem ser descritos adequadamente através de uma teoria que não contemple um tratamento quântico para a radiação; este é o caso da emissão espontânea, por exemplo. Em 1927, Dirac apresentou a teoria quântica para o campo eletromagnético e as descrições de como este interage com a matéria [Dirac, 1927], as quais proporcionaram as bases para uma explicação satisfatória da emissão espontânea descrita logo por Weisskopf e Wigner [Weisskopf and Wigner, 1930]. Dirac propôs um tratamento quântico tanto para a matéria quanto para a radiação, fazendo uso das regras de quantização canônica.

Nos anos posteriores, fizeram-se grandes avanços nesta nova abordagem e que permitiram explicar vários outros fenômenos que até aquele momento não eram possíveis de serem compreendidos com a eletrodinâmica clássica. Os mais importantes avanços chegaram por volta dos anos de 1950, com os trabalhos de Feynman, Schwinger, Tomonaga e Dyson, e que permitiram a consolidação da *eletrodinâmica quântica*.

O procedimento de quantização de Dirac parte das equações de Maxwell para a radiação livre dentro do formalismo Hamiltoniano. Para isso, se trabalha com a expansão do potencial vetor magnético nos seus modos normais desacoplados. Com esta descomposição, mostra-se que a energia da radiação pode ser escrita como a soma das energias associadas a cada um dos modos normais; isto permite também identificar aos pares de variáveis canônicas conjugadas, as quais vão ser associadas com os operadores hermitianos respectivos que terão que cumprir as relações de quantização. Uma vez feito isto, encontra-se que que o hamiltoniano obtido para a radiação quantizada é idêntico ao hamiltoniano que se teria para um conjunto de osciladores harmônicos independentes de matéria. É neste contexto que o conceito de *fóton* emerge naturalmente como excitações elementais para o campo eletromagnético quantizado, cujo estado fundamental é o vácuo.

1.1.1 A teoria clássica

O primeiro passo consiste em expressar a teoria clássica de Maxwell em termos dos modos normais, que vai nos permitir descrever a radiação de forma separada para cada modo. Isto pode ser feito de maneira simples se representamos ao campo magnético e ao campo elétrico em termos de potenciais. A vantagem disto, além de poder utilizar vários potenciais para descrever o mesmo campo (dado que nosso assunto de interesse é o campo), é que tanto as equações de Maxwell quanto qualquer outra relação obtida delas devem ser invariantes sob transformações de calibre. A consequência direta é que temos liberdade para escolher o calibre mais conveniente para o nosso estudo, em particular, um que facilite as contas e permita um melhor entendimento.

Nos cálculos a seguir, seguiremos o tratamento feito por [Davidovich, 2015] e [Gottfried and Yan, 2003]. Começamos escrevendo as equações de Maxwell para o campo eletromagnético no vácuo (em unidades Gaussianas):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \qquad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0. \tag{1.1}$$

cujas energia e momento linear associadas ao campo são da forma:

$$\mathcal{H}_\gamma = \frac{1}{8\pi}\int(\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2)d^3r, \tag{1.2}$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{4\pi c}\int(\mathbf{E}\times\mathbf{B})\,d^3r, \tag{1.3}$$

Os campos eletromagnéticos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ podem ser representados em termos dos potenciais eletromagnéticos $(\mathbf{A}, \phi)$:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}, \tag{1.4}$$

onde $\mathbf{A}$ é o potencial vetor magnético e ϕ o potencial escalar elétrico. Tais potenciais possuem simetria de calibre e podem ser transformados sem alterar os campos magnéticos e elétricos associados a estes. As equações de transformação são:

$$\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi, \qquad \phi \longrightarrow \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t}, \tag{1.5}$$

Se impormos as condições $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ e $\phi = 0$ (procedimento conhecido como escolha do calibre de Coulomb) e reescrevendo as equações de Maxwell em função do vetor $\mathbf{A}$, consegue-se isolar uma equação de onda para o vetor $\mathbf{A}$:

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{1.6}$$

Qualquer conjunto de soluções que satisfaçam o calibre de Coulomb poderão ser utilizadas para definir um conjunto de modos normais. A escolha apropriada estará determinada pelas condições de contorno. Para o nosso propósito, que é trabalhar no espaço vazio, vamos empregar a descomposição em ondas planas. Desta forma teremos uma relação simples para o momento linear.

A maneira mais conveniente de construir um espaço de momento discreto é impondo a condição de que as funções de onda sejam periódicas na superfície de um cubo grande de volume L^3. É possível definir um espaço discreto que com uma malha de tamanho finito e que tende a zero (fazendo L^3 tender a infinito) devido ao fato de que os observáveis físicos em um espaço de Hilbert não dependem do tipo de espectro utilizado.

As ondas planas que satisfazem esta condição terão vetores de onda $\mathbf{k}$ da forma:

$$\mathbf{k} = (n_1, n_2, n_3)\cdot(2\pi/L), \qquad n_i = 0, \pm1, \pm2, ... \tag{1.7}$$

Desta forma, as autofunções estarão dadas por:

$$\phi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = L^{-3/2}\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tag{1.8}$$

Elas formam um conjunto ortonormal:

$$\frac{1}{L^3}\int d^3r\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')\cdot\mathbf{r}} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \tag{1.9}$$

$$\frac{1}{L^3}\sum_{\mathbf{k}}\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}'). \tag{1.10}$$

O potencial vetor $\mathbf{A}$ da equação (1.6), em termos das ondas planas é portanto:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}[\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)\,\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \mathbf{A}^*_{\mathbf{k}}(t)\,\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}] = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}[\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)\,\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + c.c.], \tag{1.11}$$

("$c.c.$": complexo conjugado). A equação anterior corresponde a uma série de Fourier sobre todos os possíveis valores de $k_i = (2\pi/L)n_i,\ \ i = 1,2,3$ e $n_i = 0, \pm1, \pm2, ...$ O segundo termo desta expressão é preciso para que a grandeza $\mathbf{A}$ seja real. Para que $\mathbf{A}$ satisfaça o calibre, os coeficientes em (1.11) devem cumprir:

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = 0; \tag{1.12}$$

Desse jeito, os vetores $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ são perpendiculares à direção de propagação (motivo pelo qual $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ é chamado de transverso). Como consequência, $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$ possui duas componentes $A_{\mathbf{k}\alpha}$, $(\alpha = 1,2)$ para cada $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}} = \sum_{\alpha}\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}\alpha}A_{\mathbf{k}\alpha}, \tag{1.13}$$

onde $\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}\alpha}$, $\alpha = 1,2$, são vetores unitários da polarização, tais que $\mathbf{k}\cdot\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}\alpha} = 0$, $\hat{\epsilon}_{\mathbf{k}1} \perp \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}2}$. Substituindo a série de Fourier (1.11) na equação de onda (1.6), obtemos:

$$\frac{d^2\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)}{dt^2} + k^2c^2\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = 0, \tag{1.14}$$

que corresponde à equação diferencial de um oscilador harmônico com frequência $\omega_k = kc$. Por tal motivo, os coeficientes de Fourier de (1.11) oscilam harmonicamente e podemos assumir que $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{A}_{\mathbf{k}}\,\mathrm{e}^{-i\omega_k t}$ e, substituindo em (1.11), temos que:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\mathbf{k}}[\mathbf{A}_{\mathbf{k}}\,\mathrm{e}^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega_k t)} + c.c.]. \tag{1.15}$$

Os campos elétrico e magnético podem ser representados em termos destes coeficientes de Fourier usando as equações em (1.4), obtemos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{i}{c\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \omega_k [\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) - c.c.] = \frac{i}{c\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \omega_k \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, [\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) - \mathbf{A}^*_{-\mathbf{k}}(t)], \tag{1.16}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \times [\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) - c.c.] = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, \mathbf{k} \times [\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) - \mathbf{A}^*_{-\mathbf{k}}(t)], \tag{1.17}$$

onde se assume que $\sum_{\mathbf{k}} \mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{A}^*_{\mathbf{k}}(t) = \sum_{\mathbf{k}} \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{A}^*_{-\mathbf{k}}(t)$ no momento de efetuar a soma sobre todos os valores $\mathbf{k}$.

O passo seguinte consiste em expressar a energia do campo (1.2) em termos das amplitudes $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$. Usamos a notação $\mathcal{H}_\gamma$ pois a partir desta grandeza ser quantizada, torna-se o hamiltoniano do campo eletromagnético livre ou, equivalentemente, de fótons propagando-se livremente. Das equações (1.16) e (1.17) e usando a condição de ortogonalidade (1.9), obtém-se

$$\int_V d\mathbf{r}\, \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* = \sum_{\mathbf{k}} k^2 |\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) - c.c.|^2. \tag{1.18}$$

$$\int_V d\mathbf{r}\, \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^* = \sum_{\mathbf{k}} k^2 |\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) + c.c.|^2. \tag{1.19}$$

e, portanto, a energia do campo é uma forma quadrática em termos das amplitudes $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}$:

$$\mathcal{H}_\gamma = \frac{1}{8\pi} \int_V d\mathbf{r}\, (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2) = \frac{1}{2\pi c^2} \sum_{\mathbf{k}} {\omega_k}^2 \mathbf{A}^*_{\mathbf{k}}(t) \cdot \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) \tag{1.20}$$

A dependência temporal das amplitudes proveem do fato de substituir $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ na equação de onda (1.6), o qual implica que:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} - {\omega_k}^2 \right) \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = 0. \tag{1.21}$$

Assim, a energia do campo $\mathcal{H}_\gamma$ é a de um conjunto infinito de osciladores harmônicos desacoplados. Entenda-se que a dependência temporal desaparece de $\mathcal{H}_\gamma$ pois esta é uma constante de movimento.

Podemos fazer a seguinte substituição:

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{i}{c\sqrt{4\pi}} [\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) - \mathbf{A}^*_{\mathbf{k}}(t)],$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{k}{\sqrt{4\pi}}[\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) + \mathbf{A}^*_{\mathbf{k}}(t)], \tag{1.22}$$

tal que:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = -ic\sqrt{\pi}\,[\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}(t) + (i/\omega_k)\mathbf{P}_{\mathbf{k}}(t)]. \tag{1.23}$$

Em termos destas variáveis e de (1.13), obtemos que:

$$\mathcal{H}_\gamma = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}}(\mathbf{P}^2_{\mathbf{k}} + \omega_k^2\mathbf{Q}^2_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{2}\sum_{\mathbf{k}\alpha}(P^2_{\mathbf{k}\alpha} + \omega_k^2 Q^2_{\mathbf{k}\alpha}). \tag{1.24}$$

De (1.24), podem-se obter as equações de movimento de $\mathbf{P}_{\mathbf{k}}$ $\mathbf{Q}_{\mathbf{k}}$ através das equações de Hamilton:

$$\dot{Q}_{\mathbf{k}\alpha} = \frac{\partial \mathcal{H}_\gamma}{\partial P_{\mathbf{k}\alpha}}, \qquad \dot{P}_{\mathbf{k}\alpha} = -\frac{\partial \mathcal{H}_\gamma}{\partial Q_{\mathbf{k}\alpha}},$$

tendo como resultado:

$$\ddot{Q}_{\mathbf{k}\alpha} + \omega_k^2 Q_{\mathbf{k}\alpha} = 0, \qquad \ddot{P}_{\mathbf{k}\alpha} + \omega_k^2 P_{\mathbf{k}\alpha} = 0,$$

que é, precisamente, a equação de um oscilador harmônico.

1.1.2 Quantização

Para a quantização do campo eletromagnético, Dirac propôs substituir as variáveis canônicas clássicas por operadores hermitianos, tal que satisfaçam as regras de comutação canônica

$$[\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha}\,,\hat{P}_{\mathbf{k}'\alpha'}] = [\hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha}\,,\hat{Q}_{\mathbf{k}'\alpha'}] = 0, \tag{1.25a}$$

$$[\hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha}\,,\hat{P}_{\mathbf{k}'\alpha'}] = i\hbar\delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{\alpha\alpha'}, \tag{1.25b}$$

e considerar (1.24) como o Hamiltoniano do sistema quântico.

Da mesma maneira que ocorre na teoria do oscilador harmônico unidimensional, tanto a imagem intuitiva quanto as equações ficam mais claras e simples se substituímos os operadores hermitianos $\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha}$ e $\hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha}$ pelos operadores não hermitianos

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}(\omega_k\hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha} + \mathrm{i}\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha}), \tag{1.26}$$

$$\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega_k}}(\omega_k\hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha} - \mathrm{i}\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha}), \tag{1.27}$$

chamados de operadores *aniquilação* e *criação*, respectivamente. A regra de comutação destes operadores é dada por

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}\alpha}, \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'\alpha'}] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}\delta_{\alpha\alpha'} \tag{1.28}$$

Podemos escrever, então:

$$\hat{Q}_{\mathbf{k}\alpha} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}}(\hat{a}_{\mathbf{k}\alpha} - \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}),$$

$$\hat{P}_{\mathbf{k}\alpha} = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}}(\hat{a}_{\mathbf{k}\alpha} + \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}) \tag{1.29}$$

e definir o operador número como

$$\hat{N}_{\mathbf{k}\alpha} = \hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\hat{a}_{\mathbf{k}\alpha} \tag{1.30}$$

cujos autovalores são números inteiros: $n_{\mathbf{k}\alpha} = 0, 1, 2,...$ Logo, por (1.24), o hamiltoniano pode-se escrever como

$$\hat{\mathcal{H}}_{\gamma} = \sum_{\mathbf{k},\alpha} \hbar\omega_k \left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\hat{a}_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2}\right) = \sum_{\mathbf{k},\alpha} \hbar\omega_k \left(\hat{N}_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2}\right) = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_k \left(\hat{\mathbf{a}}^{\dagger}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\right) \tag{1.31}$$

onde $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} \equiv \sum_{\alpha} \boldsymbol{\epsilon}_{\mathbf{k}\alpha}\hat{a}_{\mathbf{k}\alpha}$.

A equação anterior é a expressão do hamiltoniano do campo eletromagnético quantizado. Este pode ser escrito da forma $\mathcal{H}_{\gamma} = \sum_{\mathbf{k},\alpha} \hat{\mathcal{H}}_{\gamma\mathbf{k}\alpha}$, onde $\hat{\mathcal{H}}_{\gamma\mathbf{k}\alpha}$ é o hamiltoniano que corresponde ao modo $(\mathbf{k}, \alpha)$ (o modo está especificado pelo vetor de onda e seu estado de polarização), tal que os hamiltonianos associados a modos distintos comutam entre eles. Na representação de Heisenberg, as equações de movimento para $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}$ são:

$$i\hbar\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}(t) = [\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}(t), \hat{\mathcal{H}}_{\gamma}] = \hbar\omega_k\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}(t) \tag{1.32}$$

e cujas soluções são:

$$\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}(t) = \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}(0)e^{-i\omega_k t} \tag{1.33}$$

Claramente, é possível verificar que $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}(t)$ é o análogo quântico do coeficiente de Fourier clássico $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)$. Assim, precisamos somente das equações (1.22) e (1.29) para observar que os campos quantizados são obtidos a partir da mudança

$$\hat{\mathbf{A}}_{\mathbf{k}}(t) \to c\sqrt{\hbar/\omega_k}\,\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}(t), \tag{1.34}$$

Consequentemente, os operadores do campo tornam-se:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{\omega_k V}} \left(\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} + c.h.\right) = \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{\omega_k V}}\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left(\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{a}}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}\right), \tag{1.35}$$

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{V}} \sum_{\mathbf{k}} [\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} - c.h.] = i \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{V}}\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left(\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{a}}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}\right), \tag{1.36}$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}) = i \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{\omega_k V}}\, \mathbf{k} \times \left(\mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} + c.h.\right) = i \sum_{\mathbf{k}} \sqrt{\frac{\hbar c^2}{\omega_k V}}\, \mathrm{e}^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\, \mathbf{k} \times \left(\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{a}}^{\dagger}_{-\mathbf{k}}\right), \tag{1.37}$$

("$c.h.$": conjugada hermitiana). Da nossa experiência com oscilador harmônico, sabemos que os operadores de criação $\mathbf{a}_{\mathbf{k}}$ e aniquilação $\mathbf{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}}$ aumentam ou reduzem, respectivamente, a energia do sistema. No caso do campo eletromagnético, estes operadores também são responsáveis por aumentar ou reduzir o momento linear do campo. Assumindo que o operador de momento linear do campo eletromagnético é o análogo hermitiano da sua expressão clássica,

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{1}{8\pi c} \int d^3\mathbf{r}\, [\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{B}} - \hat{\mathbf{B}} \times \hat{\mathbf{E}}],$$

temos que:

$$\mathbf{P} = \sum_{\mathbf{k},\alpha} \hbar\mathbf{k} \left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\hat{a}_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2}\right) = \sum_{\mathbf{k},\alpha} \hbar\mathbf{k} \left(\hat{N}_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2}\right) = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\mathbf{k} \left(\hat{\mathbf{a}}^{\dagger}_{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2}\right) \tag{1.38}$$

1.1.3 Fótons

A descrição do campo eletromagnético em termos de fótons aparece como consequência direta das expressões obtidas na seção anterior para a energia e o momento do campo livre na ausência de fontes. Estes resultados, como se mostraram nas equações (1.38) e (1.31), manifestam que a descrição física do campo eletromagnético livre é semelhante à descrição que poderíamos obter de um oscilador harmônico e, portanto, o ferramental teórico já conhecido para aquele caso pode ser diretamente aplicado ao tratamento formal do campo eletromagnético quantizado.

Podemos ver que:

$$\hat{\mathcal{H}}_{\gamma} = \sum_{\mathbf{k},\alpha} \hbar\omega_k \left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}\alpha}\hat{a}_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2}\right) = \sum_{\mathbf{k},\alpha} \mathcal{H}_{\mathbf{k},\alpha}. \tag{1.39}$$

Logo, cada modo pode ser tratado como um oscilador harmônico unidimensional. Também podemos ver que um conjunto de autovetores de $\mathcal{H}_\gamma$ é dado por $|\{n_{\mathbf{k},\alpha}\}\rangle$, tal que:

$$|\{n_{\mathbf{k},\alpha}\}\rangle = |n_{\mathbf{k}_1,\alpha_1}\rangle \otimes |n_{\mathbf{k}_2,\alpha_2}\rangle \otimes \cdots \equiv |n_1, n_2, ...\rangle, \tag{1.40}$$

onde: $n_{\mathbf{k},\alpha} \equiv n_i$ e que pode-se provar que:

$$\langle\{n_i\}|\{n_i'\}\rangle = \prod_i \delta_{n_i,n_i'}, \qquad \sum_i |\{n_i\}\rangle\langle\{n_i\}| = \hat{\mathbb{1}}, \tag{1.41}$$

com o qual o conjunto de autovetores de $\mathcal{H}_\gamma$ forma um conjunto completo de autovetores. Analisando a ação dos operadores de aniquilação $\hat{a}_j$ e criação $\hat{a}_j^\dagger$, temos que:

$$\hat{a}_j^\dagger |n_1, n_2, ..., n_j, ...\rangle = \sqrt{n_j + 1}\, |n_1, n_2, ..., n_j + 1, ...\rangle, \tag{1.42}$$

$$\hat{a}_j |n_1, n_2, ..., n_j, ...\rangle = \sqrt{n_j}\, |n_1, n_2, ..., n_j - 1, ...\rangle. \tag{1.43}$$

Os estados $|\{n_i\}\rangle$, chamados de *estados número* ou *estados de Fock* desempenham um papel importante na descrição do campo eletromagnético. A ação do operador de criação sobre o estado $|\{n_i\}\rangle$ produz um estado com energia e momento acrescidos de $\hbar\omega_j$ e $\hbar\mathbf{k}_j$ em relação ao estado inicial. O processo contrário e em igual magnitude acontece com o operador aniquilação, levando a redução da energia e do momento. O tratamento anterior permite interpretar a grandeza n_j como o número de fótons no modo j, e $a_j^\dagger$ e a_j como os operadores de criação e aniquilação de fótons naquele modo. Uma vez que os vetores $|\{n_i\}\rangle$ constituem uma base, podem ser usados para descrever o campo eletromagnético.

No entanto, é importante lembrar que, para os estados de Fock, a variância do operador número é nula em cada modo ($\Delta^2 n = 0$), o que se interpreta como um ruido nulo no número de fótons. Pode-se provar também que $\langle\hat{\mathbf{E}}(\vec{r})\rangle = 0$, o que impede que os estados de Fock descrevam um campo de fase bem definida no limite clássico. Porém, podem-se definir combinações lineares destes estados cujo valor médio do campo elétrico coincida com o valor clássico. Estados deste tipo são chamados de *estado coerentes* e serão tratados a seguir.

1.2 Estados coerentes

Os estados coerentes (chamados também de estados coerentes de Glauber ou estados semiclássicos) são definidos como auto-estados do operador de aniquilação $\hat{a}$:

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \tag{1.44}$$

cujos autovalores α são complexos, pois $\hat{a}$ não é um operador hermitiano e, consequentemente, também não é um observável.

Esta relação pode-se expressar como uma expansão em série de potências de estados de Fock $|n\rangle$:

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \tag{1.45}$$

e, usando as propriedades dos operadores de criação e aniquilação, a equação anterior pode-se reduzir à:

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\, |0\rangle\, \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}. \tag{1.46}$$

Observe que:

$$|0\rangle = \exp(-\alpha^*\hat{a})|0\rangle = \left[1 - \alpha^*\hat{a} + \frac{\alpha^{*2}}{2!}\hat{a}^2 + ...\right]|0\rangle.$$

Logo,

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\, \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger}\, \mathrm{e}^{\alpha^*\hat{a}}\, |0\rangle, \tag{1.47}$$

Fazendo uso da fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff,

$$[[\hat{A},\hat{B}],\hat{A}] = [[\hat{A},\hat{B}],\hat{B}] = 0 \implies \mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}} = \mathrm{e}^{-[\hat{A},\hat{B}]/2}\, \mathrm{e}^{\hat{A}}\, \mathrm{e}^{\hat{B}}, \tag{1.48}$$

tem-se que:

$$\hat{D}(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}} \implies |\alpha\rangle = \mathrm{e}^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}\, |0\rangle = \hat{D}(\alpha)|0\rangle, \tag{1.49}$$

onde $\hat{D}(\alpha)$ é um operador que chamaremos de operador *deslocamento*. A partir de sua definição, pode-se observar que é um operador unitário:

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha^*\hat{a} - \alpha\hat{a}^\dagger} \implies \hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{D}(\alpha) = \hat{D}(\alpha)\hat{D}^\dagger(\alpha) = 1. \tag{1.50}$$

Da equação (1.49) conclui-se que os estados coerentes podem ser formados mediante a aplicação do operador $D(\alpha)$ sobre o estado de Fock mais baixo $|0\rangle$; ou seja, sobre o estado base de um oscilador harmônico.

1.2.1 Propriedades dos estados coerentes

Mencionaremos algumas propriedades importantes dos estados coerentes do campo eletromagnético.

1. Segundo a equação (1.45), o estado coerente $|\alpha\rangle$ resulta de uma superposição linear infinita de estados de Fock $|n\rangle$; portanto, o número de fótons não possui em um valor exato. Porém, pode-se determinar o valor médio do número de fótons de um estado coerente $|\alpha\rangle$. Usando o operador número $\hat{N} = \hat{a}^\dagger a$, pode-se provar que:

$$\langle n\rangle = \langle\alpha|\hat{N}|\alpha\rangle = |\alpha|^2. \tag{1.51}$$

Logo, calculando a probabilidade $p(n)$ de encontrar n fótons em $|\alpha\rangle$, isto é:

$$p(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = \mathrm{e}^{-\langle n\rangle}\frac{\langle n\rangle^n}{n!}, \tag{1.52}$$

podemos concluir que o número de fótons de um estado coerente está definido por uma distribuição de Poisson com valor médio em $|\alpha|^2 = \langle n\rangle$.

A distribuição de fótons em um estado coerente segundo Poisson, sugere um conjunto de partículas independentes distribuídas de maneira aleatória com um valor médio entre estes que esteja dado por $|\alpha|^2$. Esta descrição *corpuscular* da luz em um estado coerente não é completo pois não estamos considerando os aspectos ondulatórios do campo [Grynberg et al., 2010]. Porém, os resultados são bastante úteis para realizar predições estatísticas em experimentos que envolvam contagem de fótons.

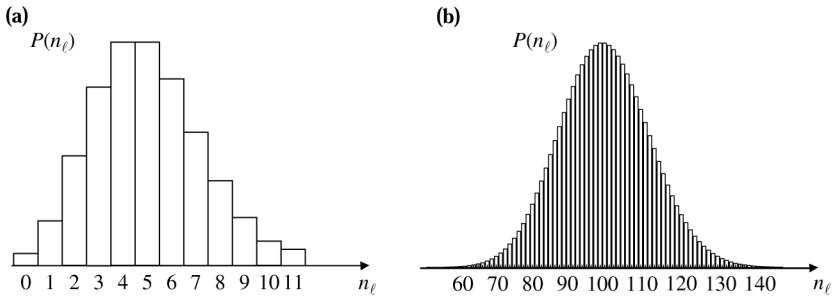

Figura 1.1: Histograma do valor do número médio de fótons quando o campo se encontra em um estado coerente $|\alpha\rangle$, com (a) $|\alpha|^2 = 5$ e (b) $|\alpha|^2 = 100$.
Reproduzido de [Grynberg et al., 2010]

2. Os estados coerentes possuem a mínima incerteza possível pela mecânica quântica. Pode-se provar que os valores das grandezas $\Delta\hat{Q}$ e $\Delta\hat{P}$ para um estado

coerente $|\alpha\rangle$ são:

$$\langle \Delta \hat{Q}_\alpha \rangle = \sqrt{\langle \hat{Q}^2 \rangle_\alpha - \langle \hat{Q}^2 \rangle_\alpha} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}, \tag{1.53a}$$

$$\langle \Delta \hat{P}_\alpha \rangle = \sqrt{\langle \hat{P}^2 \rangle_\alpha - \langle \hat{P}^2 \rangle_\alpha} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}. \tag{1.53b}$$

Notar que nem $\Delta \hat{Q}_\alpha$ nem $\Delta \hat{P}_\alpha$ dependem de α. Calculamos agora o produto de ambas incertezas, obtendo:

$$\langle \Delta \hat{Q}_\alpha \rangle \langle \Delta \hat{P}_\alpha \rangle = \frac{\hbar}{2}, \tag{1.54}$$

o qual indica que satisfazem o principio de incerteza de Heisenberg, ao mesmo tempo que atingem o mínimo grau de incerteza possível.

3. O conjunto de todos os estados coerentes $|\alpha\rangle$ formam um conjunto completo. Assim temos que:

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha = \mathbb{1}. \tag{1.55}$$

4. Dois estados coerentes correspondentes a autovalores α e α' não são ortogonais entre si.

$$|\langle \alpha | \alpha' \rangle|^2 = \mathrm{e}^{-|\alpha - \alpha'|^2}. \tag{1.56}$$

Podemos ver que este resultado é, em geral, distinto de zero e, portanto, $|\{\alpha\}\rangle$ não pode conformar uma base ortonormal. Se a magnitude de $\alpha - \alpha'$ é muito maior que 1, os estados $|\alpha\rangle$ e $|\alpha\rangle'$ serão aproximadamente ortogonais entre si. O grau em que as funções associadas destes estados estão superpostos é dado pelo produto interno $\langle \alpha | \alpha' \rangle$.

Uma consequência de (1.55) é que qualquer estado coerente pode ser expandido em termos de outros estados coerentes:

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha' |\alpha'\rangle\langle\alpha'|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha' |\alpha\rangle' \exp\left(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \alpha'\alpha^* - \frac{1}{2}|\alpha'|^2\right). \tag{1.57}$$

Devido a este fato, se diz que os estados coerentes são *supercompletos*.

1.2.2 Função de onda $\phi_\alpha(q)$ para os estados coerentes de um oscilador harmônico

Para obter a função de onda do estado coerente na representação de posição, só precisamos fazer:

$$\phi_\alpha(q) = \langle q|\alpha\rangle = \langle q|\hat{D}(\alpha)|0\rangle. \tag{1.58}$$

Assumindo que ϕ_0 é a função de onda do estado de vácuo, pode-se verificar que:

$$\phi_\alpha(q) = \mathrm{e}^{\frac{\alpha^{*2}-\alpha^2}{4}} \mathrm{e}^{iq\langle\hat{P}\rangle_\alpha/\hbar}\, \phi_0\left(q - \langle\hat{Q}\rangle_\alpha\right). \tag{1.59}$$

Podemos fazer $\mathrm{e}^{i\theta_\alpha} = \mathrm{e}^{\frac{\alpha^{*2}-\alpha^2}{4}}$ pois é uma fase global. Substituindo ϕ_0 pela função de onda do estado base do oscilador harmônico,

$$\phi_0(q) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{\omega q^2}{2\hbar}\right), \tag{1.60}$$

temos:

$$\phi_\alpha(q) = \mathrm{e}^{i\theta_\alpha}\left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left[-\left(\frac{q-\langle\hat{Q}\rangle_\alpha}{2\Delta\hat{Q}_\alpha}\right)^2 + \frac{iq}{\hbar}\langle\hat{P}\rangle_\alpha\right]. \tag{1.61}$$

Esta última equação mostra que $\phi_\alpha(q)$ pode ser obtida a partir do estado base do oscilador harmônico, deslocado em uma quantidade $\langle\hat{Q}\rangle_\alpha$ e multiplicada por uma fase $\mathrm{e}^{\frac{iq}{\hbar}\langle\hat{P}\rangle_\alpha}$.

Calculando a forma do pacote de onda associado ao estado $|\alpha\rangle$, que é dado pela densidade de probabilidade, temos que:

$$|\phi_\alpha(q)|^2 = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{q-\langle\hat{Q}_\alpha\rangle}{\Delta\hat{Q}_\alpha}\right)^2\right]. \tag{1.62}$$

Em consequência, o pacote de onda para qualquer estado $|\alpha\rangle$ é sempre uma Gaussiana.

1.2.3 Evolução do estado coerente

Para conhecer o estado $|\psi(t)\rangle$ é preciso determinar a sua evolução no tempo, determinada pela equação de Schrödinger, cuja solução é equivalente a ação do operador evolução $\hat{U}(t) = \exp\left(-i\hat{H}t/\hbar\right)$ sobre o estado inicial $|\psi(0)\rangle = |\alpha_0\rangle$. Como o Hamiltoniano é independente do tempo, podemos aplicar o operador evolução sobre um estado

$|\alpha_0\rangle$ como aquela da equação (1.45):

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\alpha_0\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha_0|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}}\mathrm{e}^{-iE_nt/\hbar}|n\rangle \tag{1.63}$$

$$= \mathrm{e}^{-i\omega t/2}\mathrm{e}^{-|\alpha_0|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_0\mathrm{e}^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle \tag{1.64}$$

na qual $E_n = \hbar\omega(n+1/2)$. Se formos comparar o resultado acima com a equação (1.45), observamos que para ir de $|\psi(0)\rangle = |\alpha_0\rangle$ a $|\psi(t)\rangle$, só precisamos de fazer a mudança α_0 por $\alpha_0\mathrm{e}^{-i\omega t}$ e multiplicar o estado resultante por $\mathrm{e}^{-i\omega t}$ (que é um fator de fase global sem consequências físicas):

$$|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{-i\omega t}\left|\alpha = \alpha_0\mathrm{e}^{-i\omega t}\right\rangle, \tag{1.65}$$

com o qual se demostra que um estado coerente se mantém como autoestado do operador criação $\hat{a}$ para todo tempo t, com autovalor $\alpha_0\mathrm{e}^{-i\omega t}$.

Evolução dos operadores canônicos $\hat{Q}$ e $\hat{P}$

Agora vamos determinar a evolução das grandezas $\langle\hat{Q}\rangle$, $\langle\hat{P}\rangle$, $\Delta\hat{Q}_\alpha$ e $\Delta\hat{P}_\alpha$. Pode-se provar que:

$$\langle\hat{Q}\rangle(t) = 2\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\,\mathrm{Re}\,(\alpha_0\mathrm{e}^{-i\omega t}) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(\alpha_0\mathrm{e}^{-i\omega t} + \alpha_0^*\mathrm{e}^{i\omega t}), \tag{1.66a}$$

$$\langle\hat{P}\rangle(t) = 2\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}\,\mathrm{Im}\,(\alpha_0\mathrm{e}^{-i\omega t}) = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(\alpha_0\mathrm{e}^{-i\omega t} - \alpha_0^*\mathrm{e}^{i\omega t}), \tag{1.66b}$$

$$\langle\hat{Q}^2\rangle(t) = \frac{\hbar}{2\omega}(\alpha_0^2\mathrm{e}^{-2i\omega t} + \alpha_0^*\mathrm{e}^{2i\omega t} + 2\alpha_0\alpha_0^* + 1), \tag{1.66c}$$

$$\langle\hat{P}^2\rangle(t) = \frac{\hbar\omega}{2}(1 - \alpha_0^2\mathrm{e}^{-2i\omega t} - \alpha_0^*\mathrm{e}^{2i\omega t} + 2\alpha_0\alpha_0^*). \tag{1.66d}$$

Portanto,

$$\langle\Delta\hat{Q}(t)\rangle = \langle\Delta\hat{Q}\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}, \qquad \langle\Delta\hat{P}(t)\rangle = \langle\Delta\hat{P}\rangle = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}, \tag{1.67}$$

e se conclui que ΔQ e ΔP são independentes do tempo e, portanto, o pacote de ondas preserva a incerteza mínima.

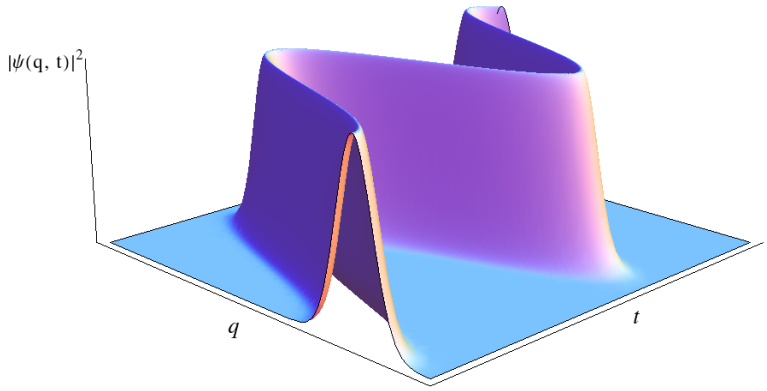

Figura 1.2: Evolução do pacote de ondas Gaussiano associado ao estado coerente $|\alpha\rangle$. Adaptado de [Cohen-Tannoudji et al., 1991].

Movimento do pacote de ondas

A função de onda para o estado $|\psi(t)\rangle$ definido em (1.63) pode-se calcular da seguinte forma:

$$\psi(q,t) = \langle\, q \,|\, \psi(t)\,\rangle\,.$$

Usando (1.61), verifica-se que:

$$|\psi(q,t)|^2 = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{q-\langle Q\rangle(t)}{\Delta Q}\right)^2\right] = \sqrt{\frac{\omega}{\pi\hbar}}\exp\left[-\frac{\omega}{\hbar}\left(q-\langle Q\rangle(t)\right)^2\right]. \tag{1.68}$$

Finalmente, comparando com (1.60):

$$|\psi(q,t)|^2 = |\,\phi_0(q-\langle Q\rangle(t))|^2. \tag{1.69}$$

Sabendo que $\langle Q\rangle(t) = 2\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\,\mathrm{Re}\,(\alpha_0 \mathrm{e}^{-i\omega t})$, corresponde a uma função harmônica em t, podemos afirmar que a densidade de probabilidade corresponde a um pacote de ondas que realiza um movimento oscilatório em torno ao valor $q = 0$. Esta consequência, que proveem do efeito de um potencial de oscilador harmônico, implica que o pacote de ondas corresponde a uma Gaussiana que se desloca de forma periódica e sem perder a sua forma original. Daí que o estado coerente também é conhecido como semiclássico, devido às semelhanças com a dinâmica de partículas macroscópicas.

1.2.4 Estados comprimidos

Segundo a relação (1.67), os estados coerentes preservam a mínima incerteza possível admitida pela mecânica quântica. Redefinindo as quadraturas $\hat{P}$ e $\hat{Q}$ como grandezas adimensionais $\hat{X}_1$ e $\hat{X}_2$, da maneira que:

$$\hat{X}_1 = (\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \qquad \hat{X}_2 = -(\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \tag{1.70}$$

temos que:

$$\langle \Delta^2 \hat{X}_1 \rangle \langle \Delta^2 \hat{X}_2 \rangle = 1, \qquad \langle \Delta^2 X_1 \rangle = \langle \Delta^2 X_2 \rangle = 1, \tag{1.71}$$

o que implica que as variâncias dos operadores acima para um estado coerente são exatamente iguais às do vácuo e que no contexto de fotodetecção como *shot-noise* . No entanto, é possível considerar estados cujas variâncias não sejam as mínimas ao mesmo tempo. Seguindo a descrição feita em [Gerry and Knight, 2005] temos que o estado deste sistema é chamado de comprimido (ou *squeezed*) e cumpre que:

$$\langle \Delta^2 X_1 \rangle < 1, \quad \text{ou} \quad \langle \Delta^2 X_2 \rangle < 1. \tag{1.72}$$

Estados deste tipo possuem uma das quadraturas com uma flutuação menor do que a outra. Deste modo, uma das quadraturas é amplificada e a outra é comprimida.

A teoria desenvolvida para os estados comprimidos teve a sua base na física por trás do processo paramétrico degenerado. Neste fenômeno, o hamiltoniano de interação é do tipo:

$$\hat{H} = i\hbar(g\hat{a}^{\dagger 2} - g^* \hat{a}^2), \tag{1.73}$$

considerando g como a constante de acoplamento. O estado gerado por este hamiltoniano é:

$$|\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{g\hat{a}^{\dagger 2} - g^* \hat{a}^2} |0\rangle \tag{1.74}$$

o que motivou a definir o operador unitário de *squeezing*:

$$\hat{S}(\xi) = \exp\left(\frac{1}{2}\xi^* \hat{a}^2 - \frac{1}{2}\xi \hat{a}^{\dagger 2}\right), \tag{1.75}$$

onde $\xi = r \exp(i\theta)$, é um número complexo arbitrário tal que r é conhecido como parâmetro de compressão e $0 \leq r < \infty$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Este operador é uma espécie de generalização para dois fótons do operador de deslocamento $\hat{D}(\alpha)$ definido para estados coerentes. Para ter uma ideia da ação do operador $\hat{S}(\alpha)$, vamos considerar o

estado

$$|\psi_s\rangle = \hat{S}(\xi)|\psi\rangle,$$

sendo que $|\psi\rangle$ é um estado arbitrário. O resultado de usar o operador de squeezing sobre os operadores de criação e aniquilação resulta em:

$$\begin{aligned} \hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}\hat{S}(\xi) &= \hat{a}\cosh r - \hat{a}^\dagger \mathrm{e}^{i\theta}\mathrm{senh} r, \\ \hat{S}^\dagger(\xi)\hat{a}^\dagger\hat{S}^\dagger(\xi) &= \hat{a}^\dagger\cosh r - \hat{a}\mathrm{e}^{-i\theta}\mathrm{senh} r, \end{aligned} \tag{1.76}$$

e pode-se ver que: $\hat{S}^\dagger(\xi) = \hat{S}(-\xi)$. Para o caso especial onde $|\psi\rangle = |0\rangle$, chamamos ao estado $|\psi_s\rangle$ como $|\xi\rangle$, tal que:

$$|\xi\rangle = \hat{S}(\xi)|0\rangle. \tag{1.77}$$

Logo, usando (1.76) calculamos as variâncias das quadraturas para o estado $|\xi\rangle$

$$\begin{aligned} \langle\Delta^2\hat{X}_1\rangle &= (\cosh^2 r + \mathrm{senh}^2 r - 2\,\mathrm{senh} r\cosh r\cos\theta), \\ \langle\Delta^2\hat{X}_2\rangle &= (\cosh^2 r + \mathrm{senh}^2 r + 2\,\mathrm{senh} r\cosh r\cos\theta). \end{aligned} \tag{1.78}$$

Finalmente, para $\theta = 0$, temos que:

$$\begin{aligned} \langle\Delta^2\hat{X}_1\rangle &= \mathrm{e}^{-2r}, \\ \langle\Delta^2\hat{X}_2\rangle &= \mathrm{e}^{2r}, \end{aligned} \tag{1.79}$$

tendo como consequência evidente que existe uma compressão de ruido para a quadratura $\hat{X}_1$. Se $\theta = \pi$, o efeito de compressão aparece na quadratura $\hat{X}_2$.

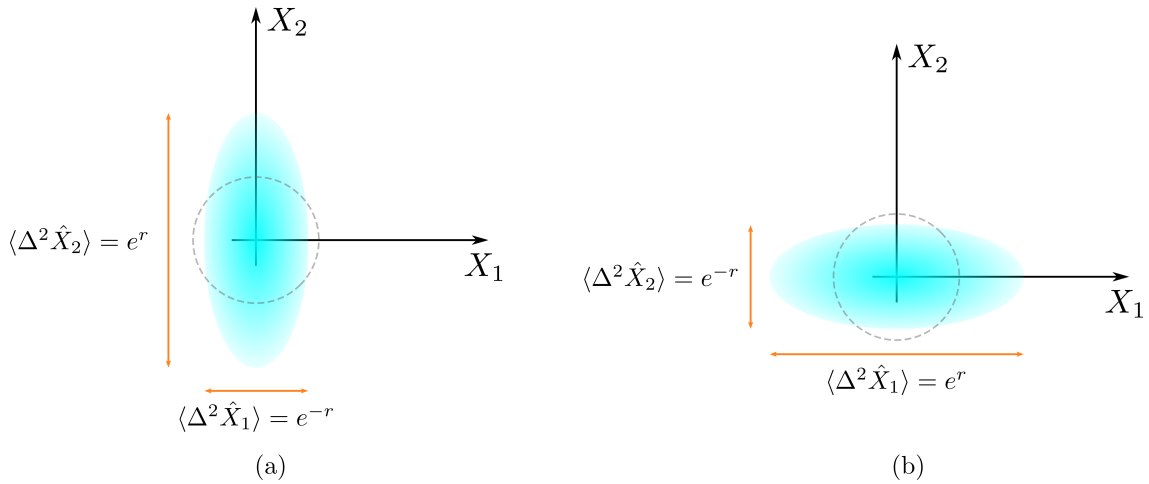

Figura 1.3: Elipse de ruído para um estado comprimido (a) na quadratura $\hat{X}_1$ e (b) na quadratura $\hat{X}_2$. O circulo pontilhado representa um estado coerente.

Em geral, os estados comprimidos podem ser obtidos segundo:

$$|\alpha, \xi\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\xi)|0\rangle, \tag{1.80}$$

e pode-se provar que se trabalhamos num sistema onde o efeito de compressão acontece para um ângulo θ arbitrário de forma que:

$$\hat{Y}_1 + i\hat{Y}_2 = (\hat{X}_1 + i\hat{X}_2)\mathrm{e}^{-i\theta}, \tag{1.81}$$

se obtém:

$$\langle \hat{Y}_1 + i\hat{Y}_2 \rangle = \alpha \mathrm{e}^{-i\theta}, \tag{1.82}$$

e, novamente:

$$\begin{aligned} \langle \Delta^2 Y_1 \rangle &= \mathrm{e}^{-2r}, \\ \langle \Delta^2 Y_2 \rangle &= \mathrm{e}^{2r}. \end{aligned} \tag{1.83}$$

Note que, independente do ângulo θ, o estado de squeezing se mantém com incerteza mínima,

$$\langle \Delta^2 Y_1 \rangle \langle \Delta^2 Y_2 \rangle = 1. \tag{1.84}$$

1.2.5 Variância do campo elétrico

A mecânica quântica oferece, além do vetor de estado $|\psi\rangle$, um conjunto de ferramentas para representar diferentes tipos de sistemas quânticos. Um deles é o operador densidade que se define como [Gerry and Knight, 2005]:

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \tag{1.85}$$

onde p_i são as probabilidades de encontrar o sistema no sub-estado $|\psi_i\rangle$ da mistura estatística e $\langle\psi_i|\psi_i\rangle = 1$. Os termos p_i cumprem as relações

$$0 \leq p_i \leq 1, \quad \sum_i p_i = 1, \quad \sum_i p_i^2 \leq 1. \tag{1.86}$$

Operando sobre os elementos da matriz do operador densidade, pode-se provar que:

$$\mathrm{Tr}\,(\hat{\rho}) = \sum_i p_i = 1. \tag{1.87}$$

O operador densidade pode ser representado em termos dos estados coerentes. Para isto, aproveitamos a relação de completeza (1.55) e fazemos:

$$\begin{aligned}\hat{\rho} = \hat{\mathbb{1}}\,\hat{\rho}\,\hat{\mathbb{1}} &= \frac{1}{\pi^2}\left(\int d^2\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha|\right)\hat{\rho}\left(\int d^2\beta\,|\beta\rangle\langle\beta|\right) \\ &= \iint \langle\alpha|\hat{\rho}|\beta\rangle|\alpha\rangle\langle\beta|\,\frac{d^2\alpha d^2\beta}{\pi^2}.\end{aligned} \tag{1.88}$$

A expressão acima é conhecida como a representação não diagonal. Porém, devido à supercompleteza dos estados coerentes, é possível encontrar representações alternativas que nos permitam uma intuição física melhor [Nussenzveig, 1973]. Deste modo, podemos representar o operador densidade como:

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha)\,|\alpha\rangle\langle\alpha|\,d^2\alpha, \tag{1.89}$$

em que $P(\alpha)$ é uma função de peso conhecida como a função P de Glauber-Sudarshan (ou também como representação diagonal) [Glauber, 1963]. A função P permite gerar uma representação do estado num espaço de coordenadas cujas variáveis são as partes real e imaginária de α, de maneira semelhante como se trabalha em mecânica estatística com o espaço de fase. Devido aos operadores densidade serem hermitianos, a função P é real.

Nesta representação, o valor médio de um operador A é dado por:

$$\begin{aligned}\langle\hat{A}\rangle = \mathrm{Tr}\,(\hat{\rho}\hat{A}) &= \sum_m \langle m|\int P(\alpha)\,|\alpha\rangle\langle\alpha|\,d^2\alpha\,|m\rangle \\ &= \int d^2\alpha P(\alpha)\sum_m \langle\alpha|\hat{A}|m\rangle\langle m|\alpha\rangle = \int d^2\alpha\,P(\alpha)A(\alpha),\end{aligned} \tag{1.90}$$

sendo $A(\alpha) = \langle\alpha|\hat{A}|\alpha\rangle$. O resultado acima indica que podemos escrever o valor médio de um operador como uma média ponderada segundo a distribuição de probabilidade $P(\alpha)$. Porém, a interpretação de $P(\alpha)$ como uma distribuição de probabilidade não sempre é a adequada, pois a função pode tomar valores negativos ou divergir.

Usando a função P podemos fazer um análise interessante da variância do número de fótons para um estado arbitrário. Assim, temos que:

$$\begin{aligned}\langle\Delta^2 n\rangle &= \langle(\hat{a}^\dagger\hat{a})^2\rangle - \langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle^2 \\ &= \langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle - \langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle^2 = \langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle + \langle\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}\rangle - \langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle^2 \\ &= \langle n\rangle + \langle\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}\rangle - \langle\hat{a}^\dagger\hat{a}\rangle^2.\end{aligned} \tag{1.91}$$

Logo, usando (1.90), temos que:

$$\langle \Delta^2 n \rangle = \langle n \rangle + \int d^2\alpha P(\alpha)|\alpha|^4 - \left(\int d^2\alpha P(\alpha)|\alpha|^2 \right)^2 . \tag{1.92}$$

A relação acima é a generalização para um corpo negro arbitrário da relação que Einstein obteve para o corpo negro [Davidovich, 2015] [Peřina, 1977] onde $\langle n \rangle$ é a variância para partículas com estatística de Poisson, que corresponde a um estado coerente e

$$\langle \Delta^2 I \rangle = \int d^2\alpha P(\alpha)|\alpha|^4 - \left(\int d^2\alpha P(\alpha)|\alpha|^2 \right)^2 , \tag{1.93}$$

representa uma variância generalizada de uma onda, tendo assim que:

$$\langle \Delta^2 n \rangle = \langle n \rangle + \langle \Delta^2 I \rangle . \tag{1.94}$$

Segundo Einstein, o valor $\langle n \rangle$ representa a contribuição para as flutuações associada ao caráter corpuscular da luz, enquanto $\langle \Delta^2 I \rangle$ representa a contribuição associada ao caráter ondulatório da luz.

Se o campo é coerente, então $\langle \Delta^2 I \rangle = 0$ e temos que $\langle \Delta^2 n \rangle = \langle n \rangle$ e estamos na situação de shot-noise, onde as flutuações têm a sua origem na energia de ponto zero $\hbar\omega/2$ do hamiltoniano (1.31). Para campos clássicos, como é de se esperar, temos que o efeito de $\langle \Delta^2 I \rangle > 0$ faz que a variância das flutuações sejam acrescentadas.

Embora, existem casos de campos para os quais $\langle \Delta^2 I \rangle < 0$ e que permite que o valor das flutuações do campo entrem num regime por baixo do shot-noise. Estas estados, chamados de sub-poissonianos, tem $P(\alpha)$ necessariamente negativa e teremos que:

$$\langle \Delta^2 n \rangle < \langle n \rangle . \tag{1.95}$$

Os estados sub-poissonianos são estados não clássicos e podem ser produzidos em micromasers usando átomos de Rydberg em uma cavidade [Rempe and Walther, 1993], em lasers semicondutores com retroalimentação negativa [Machida and Yamamoto, 1986], assim como em vários processos óticos não lineares como conversão paramétrica descendente [Walker and Jakeman, 1985], mistura de quatro ondas [Yuen and Shapiro, 1979], etc.

1.3 Descrição do ruído quântico

A abordagem feita no regime de variáveis contínuas envolve estudar as propriedades quânticas de feixes intensos. Estes efeitos estão contidos nas flutuações do campo e expressam a natureza do tipo de luz com que se está trabalhando, tal como se viu na seção anterior.

Para os nossos propósitos, vamos considerar a luz como um sistema de múltiplos modos como se assumiu desde um início em (1.1). Também vamos limitar o nosso foco nos sistemas que são lineares ou podem ser linearizados [Bachor and Ralph, 2004]. Esta aproximação pode ser feita no regime em que as modulações e flutuações como que se está trabalhando são pequenas em comparação com o valor médio do campo. Estas condições se cumprem quando se usam lasers de onda continua ou pulsados, potências óticas detetáveis (acima de microwatts) e sistemas de análise de espectro eletrônico.

Consideremos um feixe laser com um único modo espacial. O campo que representa este feixe de luz estará representado pelo operador $\hat{a}$ e poderá ser descomposto em duas componentes:

1. O valor médio da amplitude, expressado por um número complexo α e representando a parte correspondente à frequência do modo (conhecida também como banda portadora).

2. As flutuações e modulações, representadas pelo operador $\delta\hat{a}(t)$.

Deste modo, descrevemos o campo como:

$$\hat{a}(t) = \alpha + \delta\hat{a}(t), \tag{1.96}$$

em que $\alpha = |\alpha|\mathrm{e}^{i\theta}$ Os feixes de luz são detectados por fotodetetores que medem a fotocorrente que é gerada pela chegada do feixe de luz nas regiões de detecção. O operador $\hat{I}$ associado a esta fotocorrente é dado por:

$$\begin{aligned}\hat{I}(t) &= \hat{a}^\dagger(t)\hat{a}(t)\\ &= (\alpha^* + \delta\hat{a}^\dagger(t))(\alpha + \delta\hat{a}(t))\\ &= |\alpha|^2 + \alpha^*\delta\hat{a}^\dagger(t) + \alpha\,\delta\hat{a}(t) + \delta\hat{a}^\dagger(t)\delta\hat{a}(t)\\ &\approx |\alpha|^2 + |\alpha|\,\delta\hat{X}_1(t).\end{aligned} \tag{1.97}$$

onde utilizamos a definição dada em (1.70) e, segundo as hipóteses consideradas, desprezamos toda flutuação acima daquelas de primeira ordem. Uma vez feito isso, observamos que a fotocorrente está composta por uma componente que está ligada ao valor médio da amplitude do campo mais uma flutuação que é proporcional à amplitude do campo e à flutuação da quadratura X_1. Podemos fatorar a componente do campo e deste modo, redefinimos a X_1 como a quadratura da amplitude. Para dar uma forma mais geral, definimos a quadratura da amplitude como:

$$\delta\hat{p}(t) = e^{-i\theta}\delta\hat{a}(t) + e^{i\theta}\delta\hat{a}^{\dagger}(t). \tag{1.98}$$

É possível, também, introduzir um outro feixe de luz intenso que permita medir as flutuações fora de fase em relação à portadora. Definimos, então, a quadratura de fase:

$$\delta\hat{q}(t) = -i[e^{-i\theta}\delta\hat{a}(t) - e^{i\theta}\delta\hat{a}^{\dagger}(t)]. \tag{1.99}$$

Deste modo, podemos reescrever o operador da fotocorrente como:

$$\hat{I}(t) = \langle\hat{I}(t)\rangle + \delta\hat{I}(t). \tag{1.100}$$

Para trabalhar em termos dos espectros, resulta conveniente passar ao espaço de frequências. Aplicando a transformada de Fourier na equação (1.96), temos que:

$$\hat{a}(\Omega) = \alpha\,\delta(\Omega) + \delta\hat{a}(\Omega), \tag{1.101}$$

tal que $\delta(\Omega)$ é a função delta de Dirac. É importante lembrar que estamos trabalhando em um sistema com referencial na frequência ν da banda portadora do campo, motivo pelo qual se as frequências Ω representam dessintonias em relação à portadora. Os modos do campo obedecem as relações de comutação definidas em (1.28) e que provêm da quantização do campo eletromagnético:

$$[\hat{a}(\Omega), \hat{a}^{\dagger}(\Omega^{'})] = \delta(\Omega - \Omega^{'}), \qquad [\hat{a}(\Omega), \hat{a}(\Omega^{'})] = 0. \tag{1.102}$$

As relações definidas para a fotocorrente descrevem as bases para poder analisar feixes de luz experimentalmente usando um analisador de espectro. Em particular, podemos introduzir modulações no feixe de um laser em determinadas frequências Ω e considerar cada uma destas como um canal individual de informação.

A equação para a fotocorrente no espaço de Fourier é:

$$\hat{I}(\Omega) = |\alpha|^2\,\delta(\Omega) + |\alpha|\,\delta\hat{p}(\Omega). \tag{1.103}$$

Nesta forma, a equação para a fotocorrente indica que ela pode-se descompor em duas contribuições: uma que corresponde à potência média da portadora (o que em termos de medição corresponde à corrente DC), e uma outra que corresponde à quadratura de amplitude na frequência Ω. A variância da fotocorrente é dada por:

$$\Delta^2 \hat{I}(\Omega) = \langle |\delta \hat{I}(\Omega)|^2 \rangle = |\alpha|^2 \Delta^2 \hat{p}(\Omega). \tag{1.104}$$

Este resultado mostra que existe uma relação entre as flutuações da intensidade da fotocorrente medida em uma frequência Ω e as flutuações da quadratura de amplitude do feixe analisado. Aqui é importante ressaltar que estas flutuações são de origem quântica segundo o formalismo utilizado. Se formos incluir algum tipo de ruido clássico no feixe, podemos reescrever a equação (1.101) como:

$$\hat{a}(\Omega) = \alpha\, \delta\Omega + \delta \hat{a}(\Omega) + \delta \mathcal{S}(\Omega), \tag{1.105}$$

onde, $\mathcal{S}$ é a transformada de Fourier de uma variável clássica S. Geralmente, os feixes que se comportam classicamente possuem um espectro de intensidade $\delta\mathcal{S}(\Omega)$ maior do que a parte quântica $\delta\hat{a}(\Omega)$. Os ruídos de natureza clássica podem ser removidos de diferentes formas, no entanto, isto não se aplica para o ruído quântico. Desta forma, nível mínimo de flutuações que podemos medir classicamente está limitado pelo ruído quântico. Este valor é o shot-noise visto na seção anterior.

Capítulo 2

Teoria de cavidades óticas

Neste capítulo vamos cobrir uma descrição ampla sobre a teoria de cavidades óticas e a sua importância no contexto dos experimentos desenvolvidos em Ótica Quântica. Estudaremos a relação entre os campos envolvidos na dinâmica da cavidade ótica, tanto de uma perspectiva clássica e relacionando os valores médios dos campos, quanto desde uma perspectiva quântica e analisando as variâncias dos campos e como elas se relacionam. Finalmente, abarcaremos brevemente o uso das cavidades como ferramenta para diversos usos nos experimentos de Ótica Quântica.

2.1 As cavidades na Ótica Quântica

De amplo uso na Ótica Quântica, as cavidades óticas (também conhecidas como ressonadores óticos) são sistemas ressonantes onde determinadas frequências de luz podem ficar confinadas um tempo. No caso mais simples, o ressonador Fabry-Perot, é composto de dois espelhos alinhados com as faces refletoras frente a frente de forma tal que a luz incidente fique exatamente retro-refletida. Podemos pensar em um caso mais geral onde temos um conjunto de espelhos alinhados de forma tal que o feixe de luz seja refletido entre estes formando um caminho fechado que, após uma volta completa, interfira construtivamente com o feixe incidente depois de uma volta completa. Para atingir esta condição, é necessário considerar parâmetros como a geometria da cavidade, a refletividade dos espelhos, a curvatura destes, etc.

Se considerarmos p o caminho ótico da cavidade, se p for inteiro múltiplo do comprimento de onda da luz incidente, o feixe de luz dentro da cavidade terá superposição

construtiva e gerará um campo intenso devido à ressonância. Toda frequência de ressonância cumpre a condição

$$\nu_{cav} = \frac{jc}{p}, \qquad j \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

sendo $p = nl$, onde l é o comprimento do caminho físico completo da cavidade após uma volta, e n o índice de refração. Mudando levemente[1] o comprimento de onda da luz quanto ou tamanho da cavidade, pode-se fazer uma *varredura* da condição de ressonância da cavidade ótica. Estas frequências de ressonância encontram-se igualmente afastadas em um valor conhecido como *free spectral range* (ν_{FSR}).

$$\nu_{\mathrm{FSR}} = \frac{c}{nl} = \frac{c}{p}. \tag{2.2}$$

O campo intenso gerado dentro da cavidade e a largura do pico de ressonância vão depender da refletividade dos espelhos assim como das perdas da cavidade.

As cavidades óticas são usadas em diferentes aplicações. Podemos enumerar algumas das principais:

- Parte fundamental dos lasers. Junto ao meio de ganho no seu interior, a cavidade fornece um entorno de retroalimentação que permite a oscilação do laser. A cavidade do laser determina as propriedades espaciais do feixe gerado.
- Cavidade de análise. Fazendo uma dessintonia da ressonância da cavidade, a intensidade refletida pode ser utilizada para analisar o espectro de ruído de um feixe incida na cavidade.[2].
- Referência estável para frequência de luz. A dessintonia do feixe incidente em relação à frequência de ressonância da cavidade pode ser medida e servir como um elemento de referência. Desta maneira, pode-se construir um sistema de retroalimentação eletrônico que sirva para estabilizar a frequência do laser através do travamento da cavidade.
- Purificador de modo espacial. A condição de ressonância implica também uma preferência de modo espacial. Isto é, a cavidade ótica será ressonante só com a componente da luz incidente que possua o modo espacial que corresponde ao modo da cavidade. Toda componente que não cumpra as condições acima é refletida, no entanto, a componente ressonante é transmitida, mantendo um modo espacial bem definido.

[1] Trata-se de variações da ordem de múltiplos de p

[2] Na referência [Villar, 2008] se faz um estudo extenso desta função

- Filtro passa-banda ótico. O campo interno da cavidade não é criado de forma instantânea mas sim após um tempo t_{cav}, no qual todas as ondas que compõem a luz que viajam ao longo da cavidade interfiram entre elas e cheguem em um estado estacionário. Desta grandeza, pode ser definida uma frequência de corte $1/t_{cav}$ tal que toda luz com frequência maior é atenuada. Assim, com a cavidade travada na ressonância, as flutuações do feixe incidente que estejam fora da ressonância da cavidade são atenuadas na saída transmitida.

Finalmente, um ponto importante a levar em conta é a resposta da cavidade ótica na fase para determinados feixes incidentes em relação na ressonância da cavidade. No tratamento teórico a seguir, baseado na referência [Bachor and Ralph, 2004], vamos ver como as cavidades óticas respondem a diferentes formas para as bandas laterais dependendo da dessintonia. Esta comportamento permite que uma cavidade ótica sirva também como uma ferramenta para a manipulação e estudo das bandas laterais de um campo incidente, o qual será de uma grande utilidade no estudo das quadraturas de um feixe de luz.

2.2 Descrição de uma cavidade ótica linear

Partindo do modelo mais simples, a cavidade Fabry-Perot, as intensidades e fases relativas entre a luz interna, refletida e transmitida podem ser estudadas com uma abordagem clássica. Este modelo, mesmo simplificado, serve para entender a maioria dos tipos de ressonadores óticos que vamos ver ao longo dos capítulos.

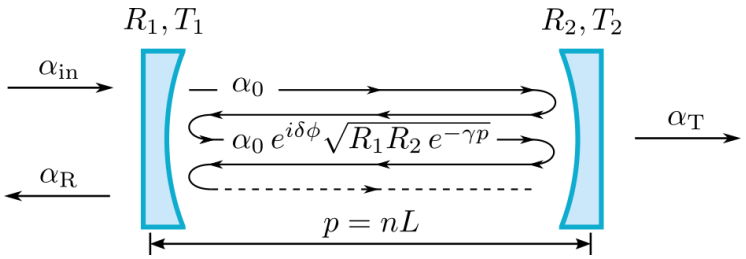

Figura 2.1: Modelo de cavidade linear. O campo incidente $\alpha_{\rm in}$ incide na cavidade com uma amplitude $\alpha_0 = \sqrt{T_1}\alpha_{\rm in}$ e após cada passagem, ganha uma fase $\delta\phi$ e perde $\sqrt{R_1 R_2}$ nos espelhos e $\mathrm{e}^{-\gamma p/2}$ como absorção interna ou espalhamento.

Consideremos dois espelhos, como se mostram na figura (2.1), um de entrada que vamos chamar de (M_1) e outro de saída que chamaremos de (M_2). O espelho M_1 (M_2) possui uma refletividade R_1 (R_2) e transmissividade T_1 (T_2). O campo incidente de amplitude $\alpha_{\rm in}$ será parcialmente transmitido para dentro da cavidade com amplitude

$\alpha_0 = \sqrt{T_1}\alpha_{\text{in}}$. Este campo permanecerá dentro da cavidade, diminuindo a sua amplitude depois de cada volta em um fator g_m,

$$g_m = \sqrt{R_1 R_2 \exp(-\gamma p)}, \tag{2.3}$$

que é um fator que dá conta do efeito das refletividades e das perdas espúrias dentro da cavidade. As grandezas definidas e resumidas na tabela (2.1) definem os parâmetros que vão nos permitir caracterizar uma cavidade ótica.

Parâmetros de uma cavidade linear	
T_1	Transmissividade do espelho M_1
T_2	Transmissividade do espelho M_2
R_1	Refletividade do espelho M_1
R_2	Refletividade do espelho M_2
p	Caminho ótico de uma volta completa
L	Comprimento total de uma volta completa
γ	Coeficiente de perdas espúrias
$\exp(-\gamma p)$	Perda de intensidade em uma volta completa

Tabela 2.1: Parâmetros característicos de uma cavidade ótica

De igual forma, após uma volta completa, o campo ganha uma diferença de fase de $\delta\phi = 2\pi(\nu_0 - \nu_c)p/c$, onde ν_0 é a frequência da portadora do campo incidente e ν_c a frequência de ressonância da cavidade.

Superpondo os campos dentro da cavidade após j voltas, temos:

$$\alpha_{\text{cav}} = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j, \tag{2.4}$$

em que $\alpha_{j+1} = g_m \exp(i\delta\phi(\nu))\,\alpha_j = g(\nu)\alpha_j$ e $g(\nu)$ reúne o efeito total da cavidade após uma volta. Fatorando os termos e como que $|g(\nu)| < 1$, obtemos:

$$\alpha_{\text{cav}} = \alpha_0\left(1 + g(\nu) + g(\nu)^2 + g(\nu)^3 + \cdots\right) = \frac{\alpha_0}{1 - g(\nu)}. \tag{2.5}$$

Tomando o módulo ao quadrado, obtemos:

$$|\alpha_{\text{cav}}|^2 = \frac{|\alpha_0|^2}{|1 - g(\nu)|^2} = \frac{|\alpha_0|^2}{|1 - g_m \exp(i\delta\phi)|^2} = \frac{|\alpha_0|^2}{(1 - g_m)^2 + 4g_m \operatorname{sen}^2(\delta\phi/2)}. \tag{2.6}$$

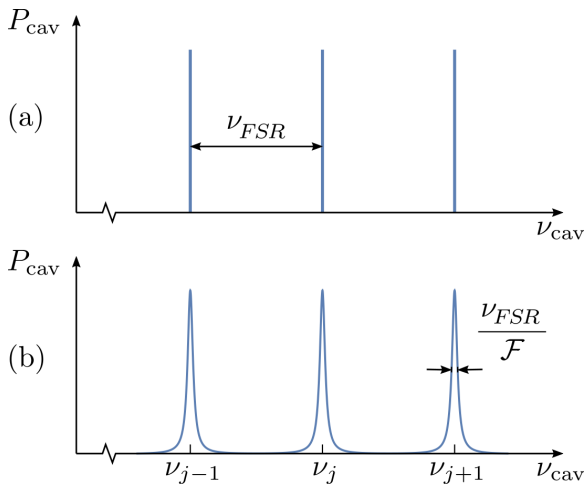

Figura 2.2: (a) Quando a finesse é alta ($\mathcal{F} \to \infty$) a cavidade possui ressonâncias só para frequências precisas ν_j. (b) Em geral, toda cavidade tem perdas e, em consequência, as ressonâncias possuem uma largura $\delta\nu_c$ que indica que elas mantêm uma condição de ressonância para um conjunto de frequências próximas à ν_j. Adaptado de [Saleh and Teich, 2007]

A partir da expressão anterior e sabendo que o modulo ao quadrado de um campo é proporcional à potência associada, a potência no interior da cavidade será igual a:

$$P_{\text{cav}} = P_{max} \frac{1}{1 + (2\mathcal{F}/\pi)^2 \operatorname{sen}^2(\delta\phi/2)}, \tag{2.7}$$

onde $P_{\text{max}} = \left(\frac{\alpha_0}{1 - g_m}\right)^2$ e a finesse $\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{g_m}}{1 - g_m}$.

A finesse acostuma ser utilizada como um parâmetro de qualidade da cavidade, similar ao caso do fator de qualidade de um ressonador. Como pode-se ver da sua definição, ela guarda relação com as perdas totais da cavidade, tanto nas reflexões quanto nas perdas espúrias.

Quando a finesse é suficientemente grande ($\mathcal{F} \gg 1$), os picos de ressonância da cavidade são bem estreitos e a relação entre os valores mínimos e máximos de potência são próximos a zero. Por outro lado, as ressonâncias aparecem a cada $\delta\phi = 2\pi m$ ($m \in \mathbb{Z}$) e, pela condição anterior, podemos levar em conta a aproximação $\operatorname{sen}(\delta\phi/2) \approx \delta\phi/2$. Usando (2.2) podemos escrever $\delta\phi = 2\pi(\nu_0 - \nu_c)/\nu_{\text{FSR}}$ e determinar a largura de linha da cavidade $\delta\nu_c$ determinando a largura à meia altura (*Full Width at Half Maximum - FWHM*) aproveitando a aproximação anterior [Saleh and Teich, 2007]. Desse modo, a largura de linha da cavidade é

$$\delta\nu_c = \frac{2}{\pi} \operatorname{arcsen}\left(\frac{\pi}{2\mathcal{F}}\right) \nu_{\text{FSR}} \approx \frac{\nu_{\text{FSR}}}{\mathcal{F}}. \tag{2.8}$$

Dos cálculos feitos acima, podemos escrever as expressões para os campos após interagir com a cavidade. Definimos α_{T} e $\alpha_{\mathcal{R}}$ como os campos transmitido e refletido, respectivamente. Lembrando que $\alpha_0 = \sqrt{T_1}\alpha_{\mathrm{in}}$ e assumindo que o α_{cav} é o campo da cavidade justo na frente M_1 (direita do espelho M_1), logo após refletir nele,

$$\begin{aligned}
\alpha_{\mathrm{T}} &= \sqrt{T_2}\,\sqrt{\mathrm{e}^{-\gamma p/2}}\mathrm{e}^{i\delta\phi/2}\,\alpha_{\mathrm{cav}} = \frac{\sqrt{T_2\,g(\nu)}}{\sqrt[4]{R_1R_2}}\,\alpha_{\mathrm{cav}} \\
\alpha_{\mathrm{R}} &= -\sqrt{R_1}\,\alpha_{\mathrm{in}} + \sqrt{T_1}\sqrt{R_2}\,\sqrt{\mathrm{e}^{-\gamma p}}\,\mathrm{e}^{i\delta\phi}\alpha_{\mathrm{cav}} = -\sqrt{R_1}\,\alpha_{\mathrm{in}} + \frac{\sqrt{T_1}}{\sqrt{R_1}}\,g(\nu)\,\alpha_{\mathrm{cav}}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

As equações acima foram obtidas assumindo algumas condições. No caso do campo refletido α_{R}, ele se compõe da superposição de uma parte do campo incidente que é imediatamente refletido no espelho M_1 e ganha uma fase de π, com a outra parte do campo incidente que ingressou na cavidade e percorre uma volta completa sem chegar a refletir no espelho M_1. O campo transmitido, por outro lado, é obtido fazendo que o campo da cavidade percorra o caminho até o espelho M_2, o que leva a ganhar uma fase de $\delta\phi/2$ e uma diminuição da amplitude por conta das perdas espúrias ($\sqrt{\mathrm{e}^{-\gamma p/2}}$) e da transmissividade ($\sqrt{T_2}$).

Muitas vezes acostumamos trabalhar com a relação entre o campo incidente e os campos transmitido e refletido. Das equações anteriores, podemos deduzir que:

$$\frac{\alpha_{\mathrm{T}}}{\alpha_{\mathrm{in}}} = \frac{\sqrt{T_1T_2}\,\mathrm{e}^{-\gamma p/4}\mathrm{e}^{i\delta\phi/2}}{1-\sqrt{R_1R_2}\,\mathrm{e}^{-\gamma p/2}\mathrm{e}^{i\delta\phi}}, \tag{2.10}$$

$$\frac{\alpha_{\mathrm{R}}}{\alpha_{\mathrm{in}}} = \frac{-\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2}\,(T_1+R_1)\,\mathrm{e}^{-\gamma p/2}\mathrm{e}^{i\delta\phi}}{1-\sqrt{R_1R_2}\,\mathrm{e}^{-\gamma p/2}\mathrm{e}^{i\delta\phi}}. \tag{2.11}$$

Seguindo o tratamento feito no artigo [Villar, 2008], se assume que as perdas espúrias são desprezíveis ($\gamma = 0$) e espelhos ideais $(R_i + T_i = 1), i = 1, 2$. Além disso, definimos a dessintonia normalizada $\Delta = (\nu_0 - \nu_c)/\delta\nu_c$ e, se a finesse é alta, podemos reescrever a fase como $\delta\phi = 2\pi\Delta/\mathcal{F}$. Desta forma, obtemos:

$$t(\Delta) = \frac{\sqrt{T_1T_2}\,\mathrm{e}^{i\pi\Delta/\mathcal{F}}}{1-\sqrt{R_1R_2}\,\mathrm{e}^{i2\pi\Delta/\mathcal{F}}}, \tag{2.12}$$

$$r(\Delta) = \frac{-\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2}\,\mathrm{e}^{i2\pi\Delta/\mathcal{F}}}{1-\sqrt{R_1R_2}\,\mathrm{e}^{i2\pi\Delta/\mathcal{F}}}. \tag{2.13}$$

onde $t(\Delta) = \alpha_{\mathrm{T}}/\alpha_{\mathrm{in}}$ e $r(\Delta) = \alpha_{\mathrm{R}}/\alpha_{\mathrm{in}}$.

2.3 A resposta em potência

Agora vamos analisar a relação entre as potências dos feixes incidente, refletido e transmitido. Lembrando que $P \propto |\alpha|^2$, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{P_{\mathrm{T}}}{P_{\mathrm{in}}} &= T_1 T_2 \frac{\exp\left(-\gamma p/2\right)}{|1-g(\nu)|^2}, \\
\frac{P_{\mathrm{R}}}{P_{\mathrm{in}}} &= \frac{|R_1 - (R_1+T_1)g(\nu)|^2}{R_1\,|1-g(\nu)|^2}, \\
\frac{P_{\mathrm{cav}}}{P_{\mathrm{in}}} &= \frac{T_1}{|1-g(\nu)|^2}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Novamente, por simplicidade, podemos assumir que não há perdas espúrias e obtemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{P_{\mathrm{T}}}{P_{\mathrm{in}}} &= \frac{T_1 T_2\,|g(\nu)|}{\sqrt{R_1 R_2}\,|1-g(\nu)|^2}, \\
\frac{P_{\mathrm{R}}}{P_{\mathrm{in}}} &= \frac{|R_1 - g(\nu)|^2}{R_1\,|1-g(\nu)|^2}, \\
\frac{P_{\mathrm{cav}}}{P_{\mathrm{in}}} &= \frac{T_1}{|1-g(\nu)|^2}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Das equações acima, cujos gráficos se mostram na figura (3.1), podemos concluir que as respostas em potência da interação entre um feixe incidente e uma cavidade vão depender da relação de fase e das perdas entre elas, tudo aquilo incluso na grandeza $g(\nu)$. Só na condição de ressonância, as potências de resposta dependeram unicamente das perdas da cavidade g_m. A seguir, mencionaremos alguns casos importantes a considerar:

1. Cavidade simétrica sem perdas espúrias. ($T_1 = T_2 = T$ e $\gamma = 0$). Na ressonância, temos que $g_m = R = (1-T)$ e obtemos que $P_{\mathrm{T}}/P_{\mathrm{in}} = 1$ e $P_{\mathrm{R}}/P_{\mathrm{in}} = 0$. A cavidade experimenta uma interferência perfeitamente construtiva e transmite a potência toda sem deixar potência alguma no feixe refletido. As cavidades de filtro podem ser entendidas como uma cavidade deste tipo e que serão estudadas em detalhe mais adiante.

2. Cavidade com perdas. Todas as cavidades possuem perdas. Da relação para a potência refletida na equação (2.15), pode-se observar que, na ressonância, se $R_1 = R_2 \exp(-\gamma p)$, o campo refletido é nulo. Para entender isto, podemos ver a

equação (2.9) e interpretar o efeito mostrado acima como uma superposição destrutiva entre o campo incidente refletido com o campo dentro da cavidade que é transmitido pelo espelho de entrada. Esta condição ótima implica o balanço perfeito entre as perdas do acoplamento, o ingresso da luz pelo espelho de entrada, e as perdas totais na cavidade. Devido à semelhança com o que acontece também nas linhas de transmissão eletrônica, este caso é conhecido como casamento de impedância.

Dependendo da relação entre R_1 e $R_2 \exp(-\gamma p)$, as cavidades podem ser classificadas da forma seguinte:

$$\begin{aligned} \text{Acoplamento sub-crítico:} \quad & R_1 > R_2 \exp(-\gamma p). \\ \text{Acoplamento crítico (ou casamento de impedância):} \quad & R_1 = R_2 \exp(-\gamma p). \\ \text{Acoplamento super-crítico:} \quad & R_1 < R_2 \exp(-\gamma p). \end{aligned}$$

3. Cavidade de entrada única. ($T_2 = 0$). Neste caso não existe transmissão e o feixe refletido contem informação do campo interno. Este é o caso das cavidades de análise mencionadas anteriormente e, no nosso estudo, elas acostumam ser de geometria de anel, com o qual o feixe refletido possui uma direção distinta ao feixe de entrada.

Antes de prosseguir, na tabela (2.2) temos um resumo das grandezas que conformam as propriedades de uma cavidade ótica que devemos levar em conta para o que segue do tratamento que vamos abranger.

Propriedades de uma cavidade linear	
g_m	Parâmetro de perdas
P_{in}	Potência do feixe de entrada
P_{T}	Potência do feixe transmitido
P_{R}	Potência do feixe refletido
$\delta\nu_c$	Largura de linha da cavidade
Δ	Dessintonia normalizada da cavidade
ν_{FSR}	Intervalo espectral livre *(Free Spectral Range)*
$\mathcal{F}$	Finesse

Tabela 2.2: A partir dos parâmetros da tabela (2.1), a cavidade linear define um conjunto de propriedades especificas.

2.4 A resposta na fase

Um dos aspectos mais importantes de uma cavidade é a resposta que ela gera nas fases dos campos refletido, transmitido e intracavidade. A partir das relações de (2.9), podemos definir a relação de fase existente entre estes três campos em função da fase da onda incidente. Em outras palavras, seja ϕ_x a fase do campo de interesse, definimos $\phi_{\mathrm{x}} = \arg(\alpha_{\mathrm{x}}) - \arg(\alpha_{\mathrm{in}}) = \arg(\alpha_{\mathrm{x}}/\alpha_{\mathrm{cav}})$, onde $\arg(z)$ é a fase do número complexo z.

Dos resultados das equações. (2.9), podemos obter

$$\alpha_{\mathrm{cav}} = \arctan\left(\frac{g_m \operatorname{sen}(\delta\phi)}{1 - g_m \cos(\delta\phi)}\right) \tag{2.16}$$

$$\alpha_{\mathrm{T}} = \arctan\left(\frac{-\operatorname{sen}(\delta\phi)}{g_m - \cos(\delta\phi)}\right) \tag{2.17}$$

$$\alpha_{\mathrm{R}} = \arctan\left(\frac{-T_1\, g_m \operatorname{sen}(\delta\phi)}{R_1 + (T_1 + R_1)\, g_m^2 - (2R_1 + T_1)\, g_m \cos(\delta\phi)}\right) \tag{2.18}$$

Na figura (3.1) se mostra a evolução da fase arredor da ressonância para os três casos de acoplamento da cavidade, em função do ângulo de dessintonia $\delta\phi$. Vale a pena clarificar que, a diferença dos casos da fase do feixe intracavidade e do feixe transmitido, o gráfico do feixe refletido foi levemente modificado por conta das limitações da imagem da função arco tangente (lembrar que ela abarca valores entre $-\pi/2$ a $\pi/2$). Naquele caso, só basta lembrar que para uma função $y = \tan(x)$, a soluções possíveis para x estão dadas por $x = \arctan(y) \pm \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

A resposta da fase na ressonância ($\delta\phi = 0$) para os campos transmitido e intracavidade é 0, porém, a fase do campo refletido é 0 ou múltiplo de $\pi/2$, dependendo do tipo de acoplamento da cavidade. O campo refletido, em geral, se mantém fora de fase em relação aos campos intracavidade e transmitido, e se mantém em fase com o campo incidente para valores de dessintonia afastados da ressonância. A fase dos campos transmitido e intracavidade é muito semelhante fora da ressonância. A desfasagem máxima do feixe refletido em uma cavidade com acoplamento crítico é de $\pm\pi/2$ pois a região próxima à ressonância apresenta uma descontinuidade. No caso do acoplamento super-crítico, a desfasagem é ainda menor. O único caso de acoplamento que apresenta uma mudança de fase continua e monótona é o super-crítico. É importante indicar também que enquanto o campo refletido experimenta uma variação de fase de até 2π, os campos transmitido e intracavidade sofrem uma variação de π. A maior variação da fase dos campos acontece em uma região de dessintonia da ordem da largura de linha da cavidade $\delta\nu_c$.

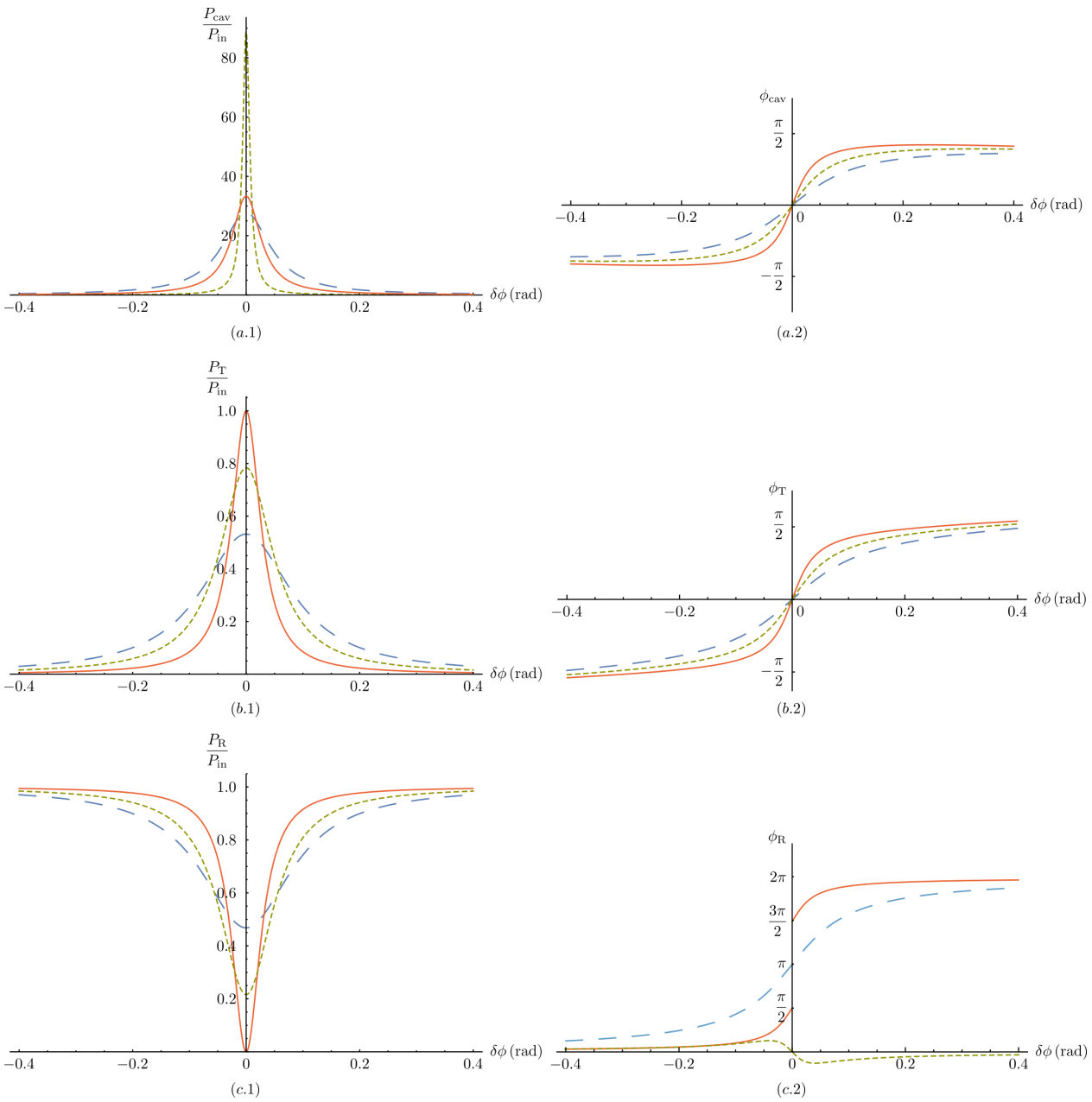

Figura 2.3: Respostas para a potência e fase dos campos intracavidade (a), transmitido (b) e refletido (c) para os três casos de acoplamento: crítico (linha sólida), super-crítico (pontilhado comprido), sub-crítico (pontilhado curto). Adaptado de [Bachor and Ralph, 2004]

Se formos analisar a mudança de fase do campo incidente das bandas laterais[3] da portadora, encontraríamos que esta dependeria de quão afastada em frequência ela se encontre da portadora. Dos gráficos mostrados na figura (3.1), dá para deduzir que para bandas laterais com frequência de modulação $\pm\Omega_{mod}$ muito menores que a largura

[3]Uma maneira intuitiva de fazer este análise consiste em imaginar que a dessintonia esta dada pela variação da frequência do campo e não pela variação do tamanho da cavidade, como é acostumado. No final das contas, trata-se só uma escolha de referencial.

de linha da cavidade ($\Omega_{mod} \ll \delta\nu_c$) a variação de fase em relação à portadora é praticamente nula. Para frequências de modulação muito maiores que a largura de banda da cavidade ($\Omega_{mod} \gg \delta\nu_c$), as duas bandas laterais ganham uma fase de $+\pi$ e $-\pi$ mas se mantêm em fase com a portadora. Por outro lado, quando a frequência de modulação for da ordem da largura de linha da cavidade, as bandas laterais experimentam mudanças de fase distintas.

O efeito da resposta na fase das cavidades é o principio fundamental que esta por trás do funcionamento das cavidades de análise e será importante para o desenvolvimento do presente trabalho e os detalhes serão aprofundados na seção (2.7).

2.5 Propriedades espaciais das cavidades

As cavidades óticas trabalham com feixes de luz que possuem características espaciais que não temos levado em conta até agora. O fato de ter duas cavidades com espelhos, tamanho e perdas semelhantes não garante que as duas funcionem da mesma forma se não foram consideradas também as curvaturas dos espelhos e como o feixe se propaga no interior da cavidade. Para garantir que na ressonância o feixe intracavidade atinja uma interferência construtiva consigo mesmo, precisamos que o perfil espacial do feixe propagante mantenha as suas características iniciais após uma volta completa. O perfil espacial define o que se conhece como o modo transversal.

Uma forma de caracterizar se uma cavidade é viável para um tamanho e curvaturas de espelho determinados é usando o critério de estabilidade. Analisaremos o caso para dois espelhos, mas o critério pode ser estendido para diferentes configurações [Kogelnik and Li, 1966]. Consideremos um tamanho de cavidade d_{12} e dois espelhos com raios de curvatura $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, respectivamente, de maneira que a distância focal dos espelhos esteja dada por $f_1 = \mathcal{R}_1/2$ e $f_2 = \mathcal{R}_2/2$. Definimos agora as grandezas:

$$g_1 = 1 - \frac{d_{12}}{2f_1}, \qquad \text{e} \qquad g_2 = 1 - \frac{d_{12}}{2f_2}. \tag{2.19}$$

A condição para que uma cavidade seja estável, ou seja, para que a onda intracavidade consiga interferir consigo mesma construtivamente, é dada pela relação,

$$0 \leq g_1 g_2 \leq 1. \tag{2.20}$$

Uma cavidade que apresente uma configuração que cumpra o critério de estabilidade será capaz de portar um feixe que consiga ser refocalizado periodicamente. No

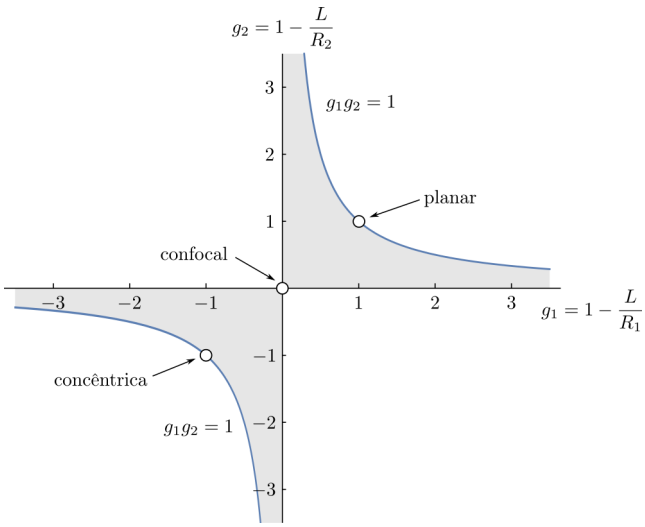

Figura 2.4: Diagrama de estabilidade para uma cavidade (tamanho L) de dois espelhos curvos (de raios R_1 e R_2). A estabilidade é atingida quando o produto $g_1 g_2$ se encontra dentro da área cinza. Adaptado de [Siegman, 1986]

caso contrário, o feixe apresentará efeitos de espalhamento ao longo da passagem pela cavidade sem atingir ressonância.

É importante ressaltar aqui que o critério de estabilidade indica se uma cavidade possui as características de focalização e de tamanho que permitam uma correta retro-alimentação. Porém, a ressonância depende também de que o feixe de entrada esteja no modo espacial da cavidade, ou seja, cumprir a condição de casamento de modo.

Dentro do casos de cavidades estáveis, podemos classificar três casos:

- Cavidade (quase) concêntrica:

$$d_{12} = 2\mathcal{R}_1 = 2\mathcal{R}_2 \quad \rightarrow \quad g_1 = g_2 = -1, \text{ e } \; g_1 g_2 = 1$$

- Cavidade (quase) planar:

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = \infty \quad \rightarrow \quad g_1 = g_2 = 1, \text{ e } \; g_1 g_2 = 1$$

- Cavidade confocal:

$$d_{12} = \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 \quad \rightarrow \quad g_1 = g_2 = 0, \text{ e } \; g_1 g_2 = 0$$

As cavidades concêntricas e planares encontram-se no limite do critério de estabilidade e, mesmo que os casos próximos daqueles sejam estáveis, leves desalinhamentos podem afetar o desempenho delas. As cavidades confocais, por outro lado, encontram-se no meio da região de estabilidade e são configurações que apresentam poucas dificuldades para atingir a condição de ressonância.

2.5.1 Acordo de modo

Uma cavidade possui uma geometria determinada pela curvatura dos espelhos. Da mesma a forma, o modo do campo incidente na cavidade possui uma geometria própria que está dada pela curvatura de sua frente de onda. O acoplamento entre o campo incidente e a cavidade ótica é ótima quando as geometrias destes dois elementos coincidem. Esta situação é conhecida como *casamento de modo*. Para obter este estado, normalmente se usa um conjunto de lentes ou algum sistema similar e um bom sistema de alinhamento.

Para cada separação de espelhos, a cavidade define só um modo espacial ressonante. Na ressonância, a cavidade seleciona a componente do campo incidente que corresponde ao auto-modo ressonante da cavidade. Fora da ressonância da cavidade, dependendo da dessintonia dela, outros modos de ordens superiores podem ressonar. O caso especial acontece nas cavidades confocais, onde todos os modos ressoam simultaneamente.

Os auto-modos ressonantes da cavidade definem uma base muito útil para classificar os modos transversais dos campos incidentes na cavidade. Classificando eles como modos de Hermite-Gauss segundo a notação TEM_{mn}, podemos calcular a fração P_{mn} correspondente a este campo em relação à potência total do campo incidente ressonante. Na maioria dos casos, a cavidade são desenhadas para ressonar com o modo TEM_{00}. Em consequência, a energia da luz daquele modo contribui na amplificação do campo interno na cavidade, enquanto a energia restante é rejeitada no campo refletido. Lembrando que nas equações (2.14) definimos as relações entre as potências dos campos incidente, transmitido e refletido; precisamos agora adicionar o fator P_{mn}. Atingir a condição de casamento de modo vai depender da qualidade dos instrumentos óticos e do bom alinhamento e posicionamento das lentes adequadas. Uma vez alinhada no modo fundamental TEM_{00}, tanto o feixe transmitido e interno terão um perfil de feixe gaussiano. Todo feixe incidente cujo modo transverso possua componentes distintas ao modo gaussiano serão rejeitadas da cavidade, convertendo este em um sistema de limpeza de modo espacial.

A frequência dos modos superiores pode ser calculada levando em conta a dessintonia da fase de Gouy, que mede a diferença de fase entre os modos fundamentais e os distintos modos superiores, e os números de ordem m e n [Siegman, 1986]. A dessintonia da fase de Gouy esta dada por $\arccos(\pm\sqrt{g_1 g_2})$ onde g_1 e g_2 são os parâmetros definidos em (2.19)[4]. Definindo $\Delta\nu_{mn}$ como a distância em frequência entre o modo

[4] As expressões mostradas aqui para a fase de Gouy não aplicam para o caso de cavidades do tipo anel ou geometrias mais complexas. Um caso mais geral, pode-se ver em [Arai, 2013].

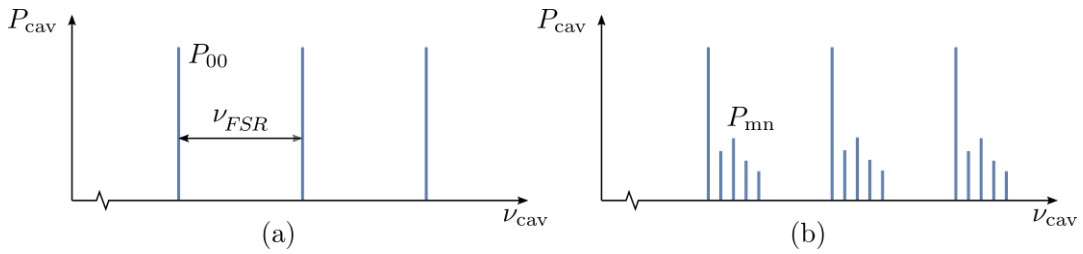

Figura 2.5: Uma cavidade confocal em varredura (*scanning*) arredor de alguns ν_{FSR} mostra as múltiplas ressonâncias da cavidade em todo instante. Quando o campo incidente tem casamento de modo, a cavidade terá uma resposta como na figura (a). No caso contrário, obtém-se o caso (b). Porém, com um bom alinhamento e o conjunto de lentes adequado, é possível passar do caso (b) para o caso (a). Adaptado de [Bachor and Ralph, 2004]

fundamental e o modo TEM_{mn}, temos

$$\Delta\nu_{mn} = \frac{(m+n+1)\,\arccos(\pm\sqrt{g_1 g_2})\,c}{\pi L}, \tag{2.21}$$

e os casos especiais:

$$\Delta\nu_{mn} = \begin{cases} 0, & \text{para cavidades confocais.} \\ \frac{1}{2}\nu_{\text{FSR}}, & \text{para cavidades quase planares.} \\ \nu_{\text{FSR}}, & \text{para cavidades quase concêntricas.} \end{cases} \tag{2.22}$$

Como se mencionou anteriormente, quando a cavidade não é confocal, os modos superiores são ressonantes para leves dessintonias da cavidade. Analisando em um gráfico de potência contra frequência como na figura (2.5), os modos superiores aparecem como picos ao lado do pico correspondente ao modo fundamental da cavidade. Para atingir a condição de casamento de modo, a cavidade deve atingir o caso confocal totalmente. Isto se consegue com um adequado controle da frente de onda do feixe incidente e com um alinhamento correto que consiga reduzir a potência dos modos superiores.

2.5.2 Polarização

Muitas vezes, na construção de uma cavidade se incluem elementos óticos que possuem uma resposta anisotrópica e manifestam efeitos de birrefringência ou dicroísmo [Kogelnik and Li, 1966]. Nessa situação, deverá achar-se o auto-estado de

polarização da cavidade, aquele para o qual a polarização dentro da cavidade se mantém igual ao longo da passagem. A polarização que não corresponda a um dos auto-estados de polarização dará como consequência uma redução na finesse. Usando lâminas retardadoras de meia e quarto de onda, é possível modificar a polarização do campo incidente até atingir o auto-estado de polarização da cavidade.

2.6 Dinâmica dos modos da cavidade

A seguir, estudaremos a evolução da amplitude do campo intracavidade α_{cav} ao completar uma volta na cavidade, sob a suposição de que as mudanças são leves, que a finesse é alta e que a cavidade é do tipo anel como se mostra na figura (2.6). A geometria da cavidade nos facilita a separação angular dos feixes de entrada e saída, o que facilita a nossa análise. Esta cavidade tem dois espelhos parcialmente transmissores (1) e (2) de coeficientes T_1 e T_2, respectivamente, e um espelho com perdas internas T_l. Considera-se também os campos incidentes α_{in_1} e α_{in_2} que entram na cavidade pelos espelhos (1) e (2), respectivamente. Nesse sentido, temos

$$\begin{aligned}\alpha_{cav}(t+\tau) = \alpha_{cav}(t)\,\mathrm{e}^{i\phi}\sqrt{1-T_1}\sqrt{1-T_2}\sqrt{1-T_l} \\ + \alpha_{in_1}(t)\,\mathrm{e}^{i\phi}\sqrt{T_1}\sqrt{1-T_2} + \alpha_{in_2}(t)\,\mathrm{e}^{i\phi}\sqrt{T_2}.\end{aligned} \tag{2.23}$$

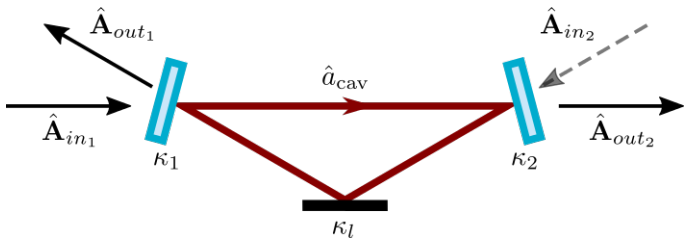

Figura 2.6: A cavidade que utilizaremos para aplicar o modelo quântico será do tipo anel. O espelho (1) e (2) servem como entradas e saídas do campo que vai interagir com a cavidade. O espelho (l) serve como o elemento que introduz perdas no sistema. No espelho (2) se mostra com uma seta pontilhada que existe um feixe de entrada além daquele em (1). Em efeito, o modelo quântico mostrará a importância desse campo.

onde τ é o tempo que demora o campo em completar uma volta e ϕ é a fase ganhada pelos campos naquele tempo. Se T_1, T_2 e $\phi \ll 1$, as mudanças no campo após uma volta serão pequenas. Expandindo o termo da esquerda em uma série de Taylor até primeira ordem e fazendo algumas aproximações nos termos da direita, temos

$$\alpha_{cav}(t)+\tau\dot{\alpha}_{cav}(t) = \left(\alpha_{cav}(t)\left(1-\frac{1}{2}T_1-\frac{1}{2}T_2-\frac{1}{2}T_l\right)+\alpha_{in_1}\sqrt{T_1}+\alpha_{in_2}\sqrt{T_2}\right)\mathrm{e}^{i\phi}. \tag{2.24}$$

Podemos fazer uma aproximação para ângulos pequenos ϕ (ou múltiplos de 2π) devido a estar próximo á ressonância. Desse jeito obtemos

$$\sqrt{\tau}\dot{\alpha}_{cav} = \sqrt{\tau}\alpha_{cav}\left(\frac{i\phi - \frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{2}T_2 - \frac{1}{2}T_l}{\tau}\right) + \alpha_{in_1}\sqrt{\frac{T_1}{\tau}} + \alpha_{in_2}\sqrt{\frac{T_2}{\tau}}. \tag{2.25}$$

Fazendo as substituições: $\alpha = \sqrt{\tau}\alpha_{cav}$ em que α é o campo que se mantém ressonando na cavidade; $\Delta' = \phi/\tau$ é a dessintonia da cavidade após uma volta; $\kappa_i = T_i/(2\tau)$ são as taxas de decaimento da cavidade. A equação (2.25) fica da forma,

$$\dot{\alpha} = \alpha(i\Delta' - \kappa_1 - \kappa_2 - \kappa_l) + \alpha_{in_1}\sqrt{2\kappa_1} + \alpha_{in_2}\sqrt{2\kappa_2}. \tag{2.26}$$

A equação (2.26) define a equação de movimento do campo e servira de base fazer o análise a nível quântico. Das relações entre os campos, temos as condições de contorno

$$\alpha_{out_1} = \sqrt{T_1}\alpha_{cav} - \sqrt{1-T_1}\alpha_{in_1} \approx \sqrt{2\kappa_1}\alpha - \alpha_{in_1}, \tag{2.27}$$

$$\alpha_{out_2} = \sqrt{T_2}\alpha_{cav} - \sqrt{1-T_2}\alpha_{in_2} \approx \sqrt{2\kappa_2}\alpha - \alpha_{in_2}. \tag{2.28}$$

2.6.1 Equações quânticas de movimento para uma cavidade

Para passar às equações quânticas da dinâmica do campo, utilizaremos a abordagem da quantização canônica, apresentada na seção 1.1.2, para equação clássica (2.26). Desta forma, obtemos

$$\dot{\hat{a}} = -(\kappa - i\Delta')\,\hat{a} + \sqrt{2\kappa_1}\,\hat{A}_{in_1} + \sqrt{2\kappa_2}\,\hat{A}_{in_2} + \sqrt{2\kappa_l}\,\hat{A}_l, \tag{2.29}$$

que nos mostra a relação entre o campo intracavidade ressonante $\hat{a}$ com os modos dos campos externos que interagem com a cavidade $\hat{A}_j$. Trabalhamos no regime de alta finesse em que $\kappa = (1-g_m)c/2p \approx \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_l$ é a taxa total de decaimento da cavidade, $\kappa_i = T_i c/2p$ a taxa de decaimento dos espelhos M_1 e M_2 e $\kappa_l = \alpha c/2$ a taxa de decaimento das perdas espúrias. Da mesma forma, temos que as condições de contorno tomam a forma

$$\hat{A}_{out_2} = \sqrt{2\kappa_2}\,\hat{a} - \hat{A}_{in_2}, \tag{2.30}$$

$$\hat{A}_{out_1} = \sqrt{2\kappa_1}\,\hat{a} - \hat{A}_{in_1}, \tag{2.31}$$

onde $\hat{A}_{out_2}$ corresponde ao campo transmitido e $\hat{A}_{out_1}$ ao campo refletido. As equações acima podem ser obtidas também usando o formalismo da teoria *Input - Output* [Gardiner and Collett, 1985, Walls and Milburn, 2008, Orszag, 2000].

2.6.2 Propagação de flutuações na cavidade

Partindo das equações (2.29) e (2.30), assumimos que os operadores do campo são da forma linear $\hat{a} = \alpha + \delta\hat{a}$, na qual α é um número complexo que indica o valor médio da amplitude e que representa a frequência do modo principal ou frequência portadora, e $\delta\hat{a}$ é um operador que representa o conjunto de frequências arredor do modo principal, também conhecidas como bandas laterais. Considerando só a parte das flutuações quânticas, obtemos,

$$\dot{\delta\hat{a}}(t) = -(\kappa - i\Delta')\,\delta\hat{a}(t) + \sqrt{2\kappa_1}\,\delta\hat{A}_{in_1}(t) + \sqrt{2\kappa_2}\,\delta\hat{A}_{in_2}(t) + \sqrt{2\kappa_l}\,\delta\hat{A}_l(t), \tag{2.32}$$

$$\delta\hat{A}_{out_2}(t) = \sqrt{2\kappa_2}\,\delta\hat{a}(t) - \delta\hat{A}_{in_2}(t), \tag{2.33}$$

$$\delta\hat{A}_{out_1}(t) = \sqrt{2\kappa_1}\,\delta\hat{a}(t) - \delta\hat{A}_{out_1}(t). \tag{2.34}$$

Vamos começar estudando as variâncias da quadratura da amplitude. Lembrando que $\hat{p} = \hat{a}^\dagger + \hat{a}$, temos que

$$\delta\dot{\hat{p}}(t) = -\kappa\,\delta\hat{p}(t) + \sqrt{2\kappa_1}\,\delta\hat{p}_{in_1}(t) + \sqrt{2\kappa_2}\,\delta\hat{p}_{in_2}(t) + \sqrt{2\kappa_l}\,\delta\hat{p}_l(t), \tag{2.35}$$

$$\delta\hat{p}_{out_2}(t) = \sqrt{2\kappa_2}\,\delta\hat{p}(t) - \delta\hat{p}_{in_2}(t), \tag{2.36}$$

$$\delta\hat{p}_{out_1}(t) = \sqrt{2\kappa_1}\,\delta\hat{p}(t) - \delta\hat{p}_{in_1}(t). \tag{2.37}$$

Aplicando a transformada de Fourier e lembrando que $\mathcal{F}(df(t)/dt) = -i2\pi\Omega\mathcal{F}(f(t))$, podemos recombinar as equações acima e obter

$$\delta\hat{p}_{out_2}(\Omega) = \frac{\sqrt{\kappa_1\kappa_1}\delta\hat{p}_{in_1}(\Omega) + (2\kappa_2 - \kappa + i2\pi\Omega)\,\delta\hat{p}_{in_2}(\Omega) + \sqrt{4\kappa_1\kappa_l}\,\delta\hat{p}_l(\Omega)}{\kappa - i(2\pi\Omega)}. \tag{2.38}$$

Agora calculamos a variância da quadratura da amplitude para assim obter o espectro das flutuações dos campos. Nesta parte é importante lembrar que $\Delta^2\hat{a} = \langle|\hat{a} - \alpha|^2\rangle = \langle|\delta\hat{a}|^2\rangle$ Operando, obtemos as variâncias das quadraturas dos campos transmitido $\Delta^2\hat{p}_{out_1}$ e refletido $\Delta^2\hat{p}_{out_2}$.

$$\begin{aligned}\Delta^2\hat{p}_{out_2}(\Omega) &= \langle|\delta\hat{p}_{out_2}(\Omega)|^2\rangle \\ &= \frac{4\kappa_1\kappa_2\,\Delta^2\hat{p}_{in_1}(\Omega) + ((2\kappa_2 - \kappa)^2 + (2\pi\Omega)^2)\,\Delta^2\hat{p}_{in_2}(\Omega) + 4\kappa_1\kappa_2\,\Delta^2\hat{p}_l(\Omega)}{\kappa^2 + (2\pi\Omega)^2},\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}\Delta^2\hat{p}_{out_1}(\Omega) &= \langle|\delta\hat{p}_{out_1}(\Omega)|^2\rangle \\ &= \frac{((2\kappa_1-\kappa)^2+(2\pi\Omega)^2)\,\Delta^2\hat{p}_{in_1}(\Omega)+4\kappa_2\kappa_1\,\Delta^2\hat{p}_{in_2}(\Omega)+4\kappa_1\kappa_l\,\Delta^2\hat{p}_l(\Omega)}{\kappa^2+(2\pi\Omega)^2}.\end{aligned} \tag{2.40}$$

As equações acima são conhecidas como as funções de transferência e mostram como se relacionam as variâncias dos campos incidentes e a dinâmica das flutuações no sistema. Neste ponto, vale a pena mostrar o caso particular de ter campos de entrada com ruído no limite quântico (ou *shot-noise*), ou seja, $\Delta^2\hat{p}_{in_i}(\Omega) = 1$. Isto é, que eles sejam vácuo ou estados coerentes. Naquele caso e lembrando que $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_l$, teremos

$$\begin{aligned}\Delta^2\hat{p}_{out_1}(\Omega) &= \frac{(2\kappa_1-\kappa)^2+(2\pi\Omega)^2+4\kappa_2\kappa_1+4\kappa_1\kappa_l}{\kappa^2+(2\pi\Omega)^2} = 1, \\ \Delta^2\hat{p}_{out_2}(\Omega) &= \frac{4\kappa_2\kappa_1+(2\kappa_1-\kappa)^2+(2\pi\Omega)^2+4\kappa_1\kappa_l}{\kappa^2+(2\pi\Omega)^2} = 1.\end{aligned}$$

Os resultados acima indicam que, para todo input shot-noise, a saída também é shot-noise.

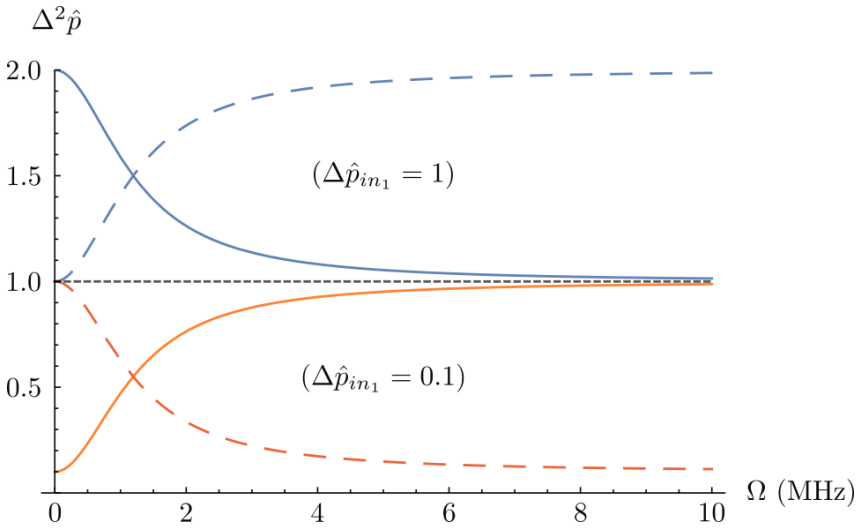

Figura 2.7: Comportamento da variância da quadratura da amplitude (ruído de amplitude) para dois casos de feixes de entrada. O primeiro deles com ruído $\Delta^2\hat{p}_{in_1} = 2$ e o segundo do tipo sub-poissoniano $\Delta^2\hat{p}_{in_1} = 0.1$. A linha sólida representa o ruído da saída transmitida $\Delta^2\hat{p}_{out_2}$ e a linha pontilhada ao ruído da saída refletida $\Delta^2\hat{p}_{out_1}$. Para estes resultados, se assumiu uma cavidade sem perdas espúrias $R_1 = R_2 = 90\%$, $L = 2m$. Adaptado de [Bachor and Ralph, 2004]

Com a finalidade de analisar as consequências das equações (2.39), (2.40), assumimos uma cavidade do tipo anel simétrica $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa/2$, $\kappa_l = 0$. Logo, temos que:

$$\Delta^2\hat{p}_{out_2}(\Omega) = \frac{\kappa^2\Delta^2\hat{p}_{in_1}(\Omega)+(2\pi\Omega)^2\Delta^2\hat{p}_{in_2}(\Omega)}{\kappa^2+(2\pi\Omega)^2}, \tag{2.41}$$

$$\Delta^2\hat{p}_{out_1}(\Omega) = \frac{(2\pi\Omega)^2\Delta^2\hat{p}_{in_1}(\Omega) + \kappa^2\Delta^2\hat{p}_{in_2}(\Omega)}{\kappa^2 + (2\pi\Omega)^2}. \tag{2.42}$$

A figura (2.7) mostra a resposta do ruído da cavidade nas duas saídas. Da para perceber que o ruído do campo incidente na cavidade se preserva para as bandas laterais mais próximas à portadora ($(2\pi\Omega)^2 \ll \kappa^2$). Embora, a cavidade apresenta uma atenuação do ruído para as bandas laterais mais afastadas da portadora ($(2\pi\Omega)^2 \gg \kappa^2$). A cavidade se comporta, portanto, como um filtro passa-banda: só as bandas laterais mais próximas à portadora ($\Omega < \kappa/2\pi$) são transmitidas e o restante é expulsado fora da cavidade através do campo refletido. Pode-se provar que $\delta\nu_c = 2\kappa/\pi\sqrt{g_m}$, logo, a filtragem que pode oferecer uma cavidade é da ordem da largura de banda dela.

O análise feito para a quadratura da amplitude pode ser feito também para a quadratura da fase. Porém, isto envolveria a inclusão da dessintonia Δ' nas contas, o que traz consigo a mistura do ruído entre a quadratura da fase e da amplitude. Em geral, uma cavidade realiza a conversão de ruído entre as quadraturas, o que pode ser utilizado, como veremos a seguir, para realizar a análise de ruído de um campo determinado.

2.7 A cavidade como instrumento de análise de ruído

Como se mencionou no início do capítulo, uma das aplicações das cavidades é o seu uso como um analisador de espectro ótico. A frequência de ressonância de uma cavidade pode ser levemente modificada variando o tamanho dela. Este processo leva consigo que a resposta na fase ganhada pelo campo refletido esteja variando conforme a dessintonia, segundo o visto na seção (2.4).

Nesta parte, vamos fazer o análise das flutuações quânticas como se fossem clássicas, mesmo que a sua origem não tenha explicação clássica [Grynberg et al., 2010] e representaremos o campo como um número complexo. Assim, temos que

$$\alpha(t) = \bar{\alpha} + \delta\hat{a}(t), \qquad \langle\alpha(t)\rangle \equiv \bar{\alpha} = |\alpha|\, e^{i\theta}. \tag{2.43}$$

A partir desta definição, podem se escrever as flutuações da quadratura da amplitude e da fase como

$$\delta p(t) = e^{-i\theta}\delta\alpha(t) + e^{i\theta}\delta\alpha^*(t), \tag{2.44}$$

$$\delta q(t) = -i[e^{-i\theta}\delta\alpha(t) - e^{i\theta}\delta\alpha^*(t)]. \tag{2.45}$$

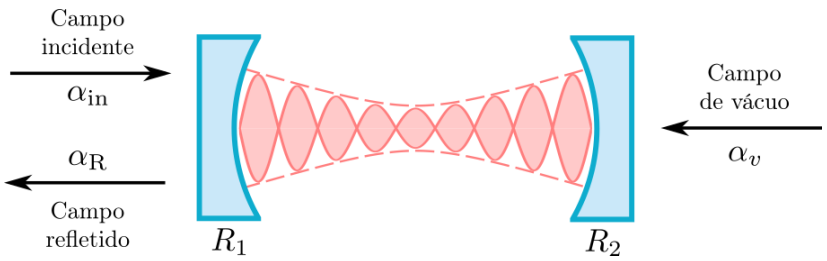

Figura 2.8: Diagrama da cavidade de análise que busca analisar o ruído de um campo incidente α_{in}. Para os fins do nosso estudo, assumimos uma cavidade sem perdas espúrias.

Para o análise do ruído, novamente, resulta conveniente trabalhar no espaço de frequências. Aplicando a transformada de Fourier, obtemos que

$$\delta p(\nu) = e^{-i\theta}\delta\alpha(\nu) + e^{i\theta}\delta\alpha^*(-\nu), \tag{2.46}$$

$$\delta q(\nu) = -i[e^{-i\theta}\delta\alpha(\nu) - e^{i\theta}\delta\alpha^*(-\nu)], \tag{2.47}$$

em que $[\delta\alpha(\nu)]^* = \delta\alpha^*(-\nu)$ e $\delta\alpha^*(\nu)$ e a transformada de Fourier de $\delta\alpha^*(t)$.

Vamos definir agora o nosso sistema. Consideremos o campo refletido de uma cavidade como aquela que se mostra na figura (2.8). A resposta na reflexão estará composta pela superposição do campo incidente α_{in} logo de ser refletido pela cavidade, com o campo de vácuo α_v que incide pelo segundo espelho e é transmitido pela cavidade. Usando as equações (2.13), (2.12) e trabalhando com frequências de análise relativas à largura de banda da cavidade ($\Omega = \nu/\delta\nu_c$) temos que o campo refletido é

$$\alpha_R(\Omega) = r(\Delta + \Omega)\,\alpha_{\text{in}}(\Omega) + t(\Delta + \Omega)\,\alpha_v(\Omega). \tag{2.48}$$

Definindo $\bar{\alpha}_R = r(\Delta)\bar{\alpha}_{\text{in}}$, a equação anterior se converte em uma relação entre as flutuações dos campos incidentes. A flutuação do campo refletido é dada por:

$$\delta\alpha_R(\Omega) = r(\Delta + \Omega)\,\delta\alpha_{\text{in}}(\Omega) + t(\Delta + \Omega)\,\delta\alpha_v(\Omega). \tag{2.49}$$

Para facilitar os cálculos posteriores, achamos também a conjugada,

$$\delta\alpha_R^*(-\Omega) = r^*(\Delta - \Omega)\,\delta\alpha_{\text{in}}^*(-\Omega) + t^*(\Delta - \Omega)\,\delta\alpha_v^*(-\Omega). \tag{2.50}$$

Neste ponto vale a pena indicar que quando se efetua um processo de fotodeteção, este envolve a medição de intensidade da luz, grandeza que está diretamente relacionada à quadratura da amplitude do campo. A quadratura da fase, por outro lado, não é

acessível diretamente sem antes fazer algum tipo de conversão para medidas de intensidade. A nossa análise do campo refletido pela cavidade tem como finalidade estudar o espectro de ruído do campo incidente e não os efeitos ocasionados pela cavidade.

Continuando com o nosso estudo e levando em conta que $\exp(i\theta_R(\Delta)) = r(\Delta)/|r(\Delta)|$ onde $\theta_R(\Delta)$ é a fase ganhada na reflexão, calculamos as flutuações da quadratura da amplitude do campo refletido

$$\begin{aligned}\delta p_R(\Delta,\Omega) = {} & \mathrm{e}^{-i\,\theta_R(\Delta)}\, r(\Delta+\Omega)\,\delta\alpha_{\mathrm{in}}(\Omega) + \mathrm{e}^{i\,\theta_R(\Delta)}\, r^*(\Delta-\Omega)\,\delta\alpha_{\mathrm{in}}(-\Omega) \\ & + \mathrm{e}^{-i\,\theta_R(\Delta)}\, t(\Delta+\Omega)\,\delta\alpha_v(\Omega) + \mathrm{e}^{i\,\theta_R(\Delta)}\, t^*(\Delta-\Omega)\,\delta\alpha_v(-\Omega).\end{aligned} \tag{2.51}$$

A partir da equação acima, podemos fazer uma breve análise fazendo a aproximação $|r(\Delta)|^2 = 1$ e $|t(\Delta)|^2 = 0$ e chegaremos em uma relação mais simplificada:

$$\delta p_R(\Delta,\Omega) = \mathrm{e}^{-i\,\theta_R(\Delta)}\mathrm{e}^{i\,\theta_R(\Delta+\Omega)}\,\delta\alpha_{\mathrm{in}}(\Omega) + \mathrm{e}^{i\,\theta_R(\Delta)}\,\mathrm{e}^{-i\,\theta_R(\Delta-\Omega)}\,\delta\alpha_{\mathrm{in}}(-\Omega). \tag{2.52}$$

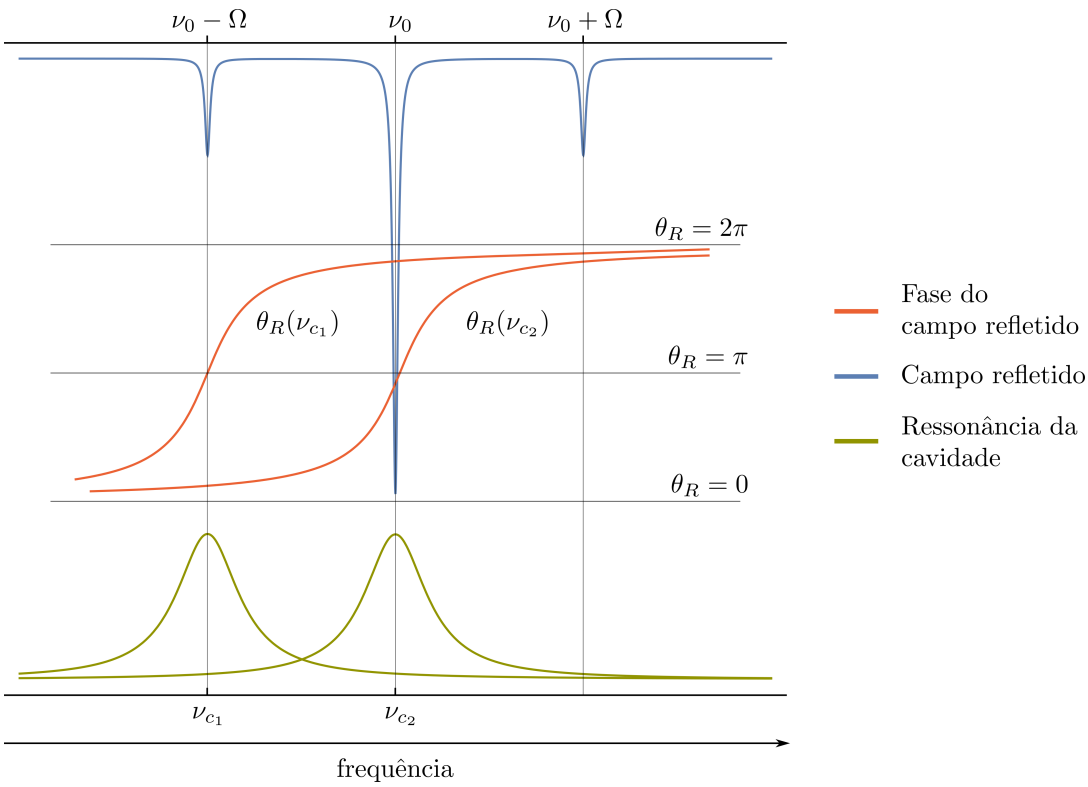

Figura 2.9: Efeito da resposta da fase de uma cavidade sobre um campo incidente de frequência ν_0 na portadora e unicamente duas bandas laterais $\nu_0 - \nu$ e $\nu_0 + \nu$. Mostram-se dois casos de dessintonia da cavidade: $\nu_{c_1} = \nu_0 - \nu$ e $\nu_{c_2} = \nu_0$. Para esses casos, assume-se que a cavidade apresenta acoplamento super-crítico, e que as bandas laterais estão suficientemente afastadas ($\nu \gg \delta\nu_c$).

Das equações (2.46) e (2.47) pode-se ver que o efeito da cavidade mostrado na equação (2.52) é similar a:

$$\delta p(\nu) \rightarrow \delta p'(\nu) = e^{i\phi_1} e^{-i\theta} \delta\alpha(\nu) + e^{i\phi_2} e^{i\theta} \delta\alpha^*(-\nu), \tag{2.53}$$

onde, se $\phi_2 - \phi_1 = \pi$ e definindo $\beta = \frac{\phi_1+\phi_2}{2}$, temos

$$\delta p'(\nu) = e^{-i\beta} \left[(-i)e^{-i\theta}\delta\alpha(\nu) + (i)e^{i\theta}\delta\alpha^*(-\nu)\right] = e^{-i\beta}\, \delta q(\nu). \tag{2.54}$$

As consequências da equação (2.52) são mostradas na figura (2.9). Na parte superior do gráfico são mostrados os espectros do campo refletido para um campo incidente com uma frequência central ν_0 que corresponde à portadora e duas bandas laterais em $\nu_0 \pm \nu$. Na parte inferior se mostram dois casos de dessintonia para a cavidade, uma em ν_{c_1} e outra em ν_{c_2}, sendo que $\nu_{c_1} = \nu_0 - \nu$ e $\nu_{c_2} = \nu_0$. Para cada dessintonia, a fase relativa entre as bandas laterais e a portadora muda. No primeiro caso, a banda lateral esquerda ganha uma fase de π, enquanto a portadora e a banda lateral direita e a portadora, para os fins práticos não ganham fase alguma. No segundo caso, no entanto, é a portadora quem ganha uma fase de π, enquanto as bandas laterais não ganham fase. É importante indicar que se está assumindo que as bandas laterais estão suficientemente afastadas ($\nu \gg \delta\nu_c$) pois, caso contrario, a cavidade não conseguiria fornecer uma fase relativa entre as bandas laterais que seja π ou maior, segundo o que a equação (2.54) indica como exigência necessária para a conversão da quadratura da amplitude para a quadratura da fase do campo incidente.

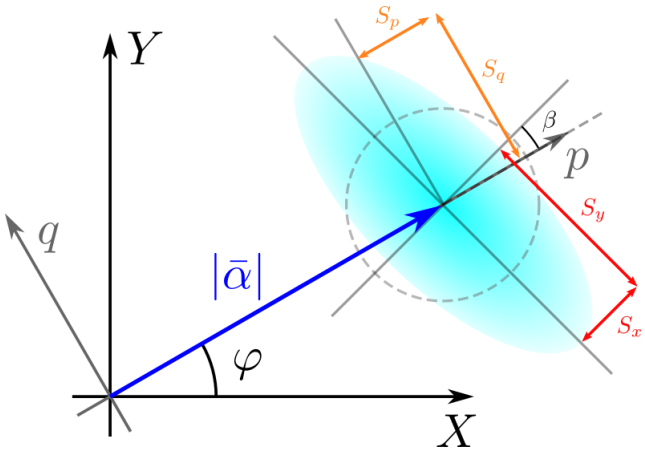

Figura 2.10: Representação da elipse de ruído. S_p e S_q representam as leituras do ruído de amplitude e fase, respectivamente, do campo incidente na cavidade. No entanto, S_x e S_y são os verdadeiros valores do ruído de amplitude e fase do campo incidente. Para fins didáticos, se mostra a representação de um estado comprimido (a elipse). O círculo pontilhado representa o ruído do estado coerente ou shot-noise. O fato de que os eixos da elipse não estejam alinhados com $\bar{\alpha}$ implica que existe uma correlação entre δp e δq. Reproduzido de [Villar, 2008]

Comparando as equações (2.52) e (2.54) se conclui que para poder conseguir uma conversão completa entre as quadraturas, $\theta_R(\Delta) - \theta_R(\Delta - \Omega) = \pi/2$ e isto se consegue para toda frequência de análise $\Omega \geq \sqrt{2}$ [Galatola et al., 1991].

Uma vez estabelecido o critério mínimo para fazer uma análise adequada das quadraturas do campo incidente, prosseguimos com o estudo das flutuações de δp_R. A partir das definições das quadraturas (2.46) e (2.47), podemos reescrever a equação (2.51) da forma

$$\delta p_R(\Delta, \Omega) = g_p\, \delta p_{\text{in}}(\Omega) + i g_q\, \delta q_{\text{in}}(\Omega) + g_{vp}\, \delta v_p(\Omega) + i g_{vq}\, \delta v_q(\Omega), \tag{2.55}$$

onde $\delta\alpha_v = \mathrm{e}^{i\phi}(\delta v_p + i\delta v_q)/2$ e:

$$2g_p = \mathrm{e}^{-i\theta_R(\Delta)}\, r(\Delta + \Omega) + \mathrm{e}^{i\theta_R(\Delta)}\, r^*(\Delta - \Omega), \tag{2.56a}$$

$$2g_q = \mathrm{e}^{-i\theta_R(\Delta)}\, r(\Delta + \Omega) - \mathrm{e}^{i\theta_R(\Delta)}\, r^*(\Delta - \Omega), \tag{2.56b}$$

$$2g_{vp} = \mathrm{e}^{-i\theta_R(\Delta)}\, t(\Delta + \Omega) + \mathrm{e}^{i\theta_R(\Delta)}\, t^*(\Delta - \Omega), \tag{2.56c}$$

$$2g_{vq} = \mathrm{e}^{-i\theta_R(\Delta)}\, t(\Delta + \Omega) - \mathrm{e}^{i\theta_R(\Delta)}\, t^*(\Delta - \Omega). \tag{2.56d}$$

O seguinte será analisar a densidade espectral da grandeza δp_R, que no contexto das flutuações do campo, será conhecido como *espectro de ruído*. Para isto, empregamos o teorema de Wiener-Khitchine [Mandel and Wolf, 1995] de onde se infere que, para uma quadratura generalizada $\delta X_\phi(\Omega) = \exp(-i\phi)\delta\alpha(\Omega) + \exp i\phi\delta\alpha^*(\Omega)$ o espectro de ruído S_{X_ϕ} estará dado por

$$S_{X_\phi}(\Omega)\delta(\Omega - \Omega') = \langle \delta X_\phi(\Omega)\delta X_\phi(-\Omega')\rangle. \tag{2.57}$$

Determinamos agora o espectro de ruído S_R de δp_R a partir da equação (2.55) e obtemos

$$\begin{aligned} S_R(\Delta,\Omega) = {} & |g_p(\Delta,\Omega)|^2\, S_{p_{\text{in}}}(\Omega) + |g_q(\Delta,\Omega)|^2\, S_{q_{\text{in}}}(\Omega) + |g_{vp}(\Delta,\Omega)|^2\, S_{v_{\text{p}}}(\Omega) \\ & + |g_{vq}(\Delta,\Omega)|^2\, S_{v_{\text{q}}}(\Omega) + 2\mathrm{Re}\left\{-i g_p(\Delta,\Omega)\, g_q^*(\Delta,-\Omega)\, C_{p_{\text{in}}q_{\text{in}}}\right\}, \end{aligned} \tag{2.58}$$

no qual o termo $C_{p_{\text{in}}q_{\text{in}}}$ cumpre que:

$$C_{p_{\text{in}}q_{\text{in}}}\delta(\Omega - \Omega') = \langle \delta p_{\text{in}}(\Omega)\delta q_{\text{in}}(-\Omega')\rangle\delta(\Omega - \Omega'). \tag{2.59}$$

Na equação (2.58) substituímos $S_{v_{\text{p}}}(\Delta,\Omega) = S_{v_{\text{q}}}(\Delta,\Omega) = 1$ pois é o ruído do vácuo. Assumindo $C_{p_{\text{in}}q_{\text{in}}} = 0$, obtemos

$$S_R(\Delta,\Omega) = |g_p(\Delta,\Omega)|^2\, S_{p_{\text{in}}}(\Omega) + |g_q(\Delta,\Omega)|^2\, S_{q_{\text{in}}}(\Omega) + |g_{vp}(\Delta,\Omega)|^2 + |g_{vq}(\Delta,\Omega)|^2\,. \tag{2.60}$$

O comportamento da função $S_R(\Delta, \Omega)$ pode ser analisado na figura (2.11). Para uma frequência de análise Ω, a dessintonia relativa Δ vai variando e, com ela, a fase entre as bandas laterais e a portadora do campo incidente. Conforme esse processo acontece, o ruído do campo refletido apresenta flutuações na sua intensidade que estão diretamente relacionadas ao ruído das quadraturas do campo incidente S_p e S_q. Pode-se apreciar que o ruído da amplitude do campo incidente corresponde às etapas (1) e (17) da figura (2.11), pois naquelas regiões a fase ganhada é quase nula. O ruído se converte em ruído de fase de maneira parcial nos pontos (3) e (15) e de maneira total nos pontos (7) e (11), tendo brevemente uma conversão para amplitude no ponto (9).

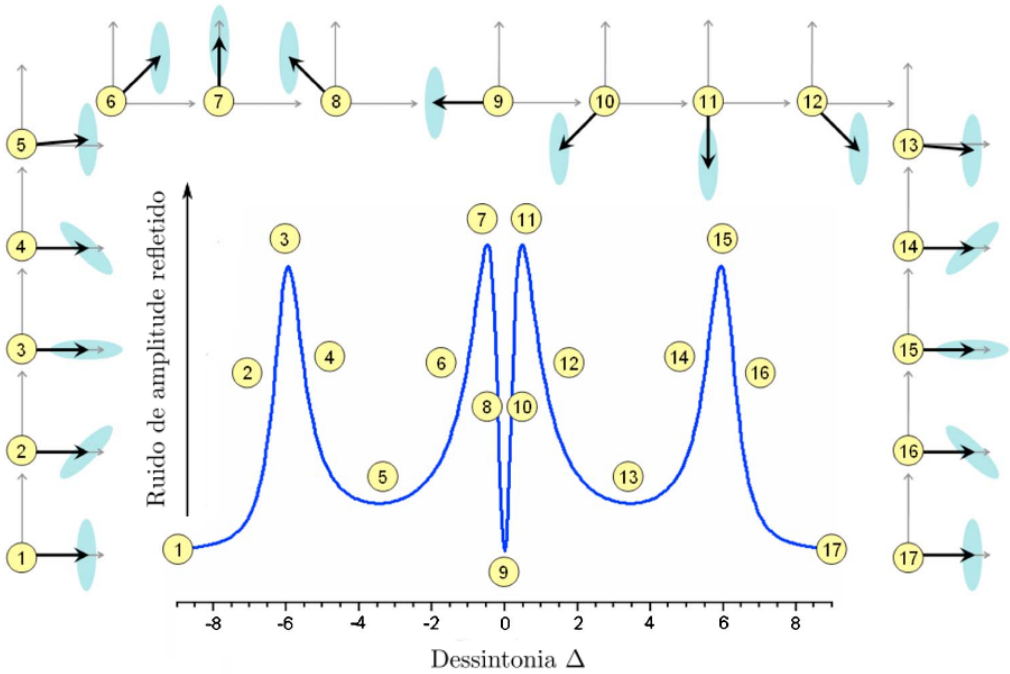

Figura 2.11: Rotação da elipse de ruído em função da dessintonia relativa (δ) da cavidade. A curva central corresponde a $S_R(\Delta, \Omega)$. Nos arredores do gráfico se mostra uma representação pictórica do efeito da cavidade na elipse de ruído. A frequência de análise usada no gráfico é $\Omega = 6$ e $S_p < S_q$ e as refletividades dos espelhos utilizados foram $R_1 = 95\%$ e $R_2 = 97\%$. Reproduzido de [Villar, 2008]

.

Se formos analisar a equação geral (2.58) teremos que incluir as consequências do termo $2\mathrm{Re}\left\{-ig_p(\Delta, \Omega)\, g_q^*(\Delta, -\Omega)\, C_{p_{\mathrm{in}} q_{\mathrm{in}}}\right\}$. Em geral, o termo $C_{p_{\mathrm{in}} q_{\mathrm{in}}}$ está associado a correlações entre as flutuações δp_{in} e δq_{in} [Villar, 2007, Cassemiro, 2008, Coelho, 2013]. Ao mesmo tempo, está relacionado ao ângulo β, que é mostrado na figura (2.10), entre os eixos da elipse de ruído e o eixo da amplitude média $\bar{\alpha}$.

Desta maneira, mostramos que uma cavidade com acoplamento super-crítico e com dessintonia ajustável pode servir como instrumento de análise de ruído de um feixe de luz e, consequentemente, do estado quântico deste. Está aplicação das cavidades é semelhante à detecção homodina mas com a diferença que o oscilador local é o mesmo

feixe incidente na cavidade. Por este motivo, algumas vezes chamamos este método de análise como *auto-homodinagem*. É importante indicar aqui este método de análise permite uma completa reconstrução do estado quântico do feixe de luz, capacidade que não é possível de obter com a detecção homodina [Barbosa et al., 2013].

Capítulo 3

Oscilador paramétrico ótico (OPO) em chips de Silício

Neste capítulo abarcaremos parte da teoria relacionada aos microrressoadores em chips de Silício. Para isto, apresentamos uma explicação breve do fenômeno de mistura de quatro ondas e do oscilador paramétrico ótico. Logo depois, descrevemos um pouco dos chips de silício, a sua importância e alguns detalhes de como foi adquirindo importância no contexto da implementação de protocolos de informação quântica. Por fim, estudaremos como o microrressoador em chip possui semelhanças com o funcionamento de uma cavidade ótica enquanto à resposta da potência e da fase.

3.1 Mistura de quatro ondas (FWM)

Quando uma onda eletromagnética incide sobre um meio linear, esta induz a aparição de dipolos elétricos que oscilam na mesma frequência. Estes dipolos irradiam uma nova onda eletromagnética que interfere com o campo original. O comportamento descrito pode ser explicado através das equações de Maxwell (1.1) considerando que

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi^{(1)} \mathbf{E}, \tag{3.1}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \tag{3.2}$$

onde $\mathbf{P}$ é o vetor de campo polarizado, ligado à resposta dos dipolos e $\mathbf{E}$ ao campo elétrico do campo original, $\mathbf{D}$ é o vetor de deslocamento elétrico, ε_0 é a permitividade elétrica do vácuo e $\chi^{(1)}$ é a susceptibilidade elétrica de primeira ordem do meio. Esta

resposta, no entanto, é um caso particular do vetor de polarização $\mathbf{P}$ que possui a forma

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \left(\chi^{(1)} \cdot \mathbf{E} + \chi^{(2)} : \mathbf{EE} + \chi^{(3)} \vdots \mathbf{EEE} + \cdots \right) \tag{3.3}$$

na qual $\chi^{(j)}$ $(j = 1, 2, ...)$ é um tensor de ordem $j + 1$ que representa a susceptibilidade elétrica de ordem j. A susceptibilidade $\chi^{(1)}$ é predominante nos meios lineares e é responsável por efeitos como o índice de refração e o coeficiente de atenuação. Por outro lado, as susceptibilidades de ordens maiores, como pode-se ver na equação (3.3), destroem a relação linear entre os vetores $\mathbf{P}$ e $\mathbf{E}$, dando lugar à aparição de um conjunto de fenômenos que formam o que conhecemos como a ótica não linear.

A ótica não-linear envolve o estudo dos fenômenos que acontecem quando as propriedades óticas de um determinado material são modificadas pela interação deste meio com a luz [Boyd and Prato, 2008]. Segundo o modelo de Lorentz, este efeito pode ser entendido como uma consequência da força de restituição não-linear exercida sobre os elétrons do meio e que fazem aos dipolos induzidos manifestar uma resposta anarmônica. Entre os fenômenos não lineares, vamos nos focar naqueles nos quais o meio tem um papel passivo que unicamente se limita a permitir a interação entre diferentes ondas eletromagnéticas. Este conjunto de fenômenos são conhecidos como processos paramétricos [Agrawal, 2018]. Como exemplos de processos paramétricos, podemos mencionar a geração de segundo harmônico, ligado à não-linearidade $\chi^{(2)}$, ou a mistura de quatro ondas (também conhecida como *Four-wave mixing - FWM*).

As microcavidades em chip estão construídas de nitreto de silício Si_3N_4 como material que constitui o guia de onda que compõe o ressoador. O Si_3N_4, é um material isotrópico e portanto a susceptibilidade de segunda ordem $\chi^{(2)}$ é desprezível. Devido a isto, os processos paramétricos do nosso interesse serão de terceira ordem. Particularmente, serão processos mistura de quatro ondas.

Os efeitos do FWM podem ser estudados a partir do termo de terceira ordem do vetor de polarização que se mostra na equação (3.3):

$$\mathbf{P_{NL}} = \varepsilon_0 \chi^{(3)} \vdots \mathbf{EEE}, \tag{3.4}$$

e que chamamos de $\mathbf{P_{NL}}$ por ser a polarização não-linear induzida, de modo tal que $\mathbf{P_L}$ seria a polarização linear induzida e $\mathbf{P} = \mathbf{P_L} + \mathbf{P_{NL}}$ coincide com o valor da equação (3.2).

Para analisar a dinâmica do FWM, partimos da equação da onda:

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{P_L}}{\partial t^2} + \mu_0\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{P_{NL}}}{\partial t^2}, \tag{3.5}$$

lembrando que μ_0 é a permeabilidade do vácuo e que $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$. Uma teoria completa do FWM precisaria de um tratamento vetorial que leve em conta as polarizações dos campo envolvidos. No entanto, para os fins de entender a física por trás, podemos considerar o caso escalar no qual todos os quatro campos são linearmente polarizados ao longo do eixo principal do nosso meio, com frequência ω_j e assumindo os campos desacoplados. O campo total pode ser escrito como:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\hat{x}\sum_{j=1}^{4} E_j \exp[\,i(\beta_j z - \omega_j t)] + c.c., \tag{3.6}$$

onde $\beta_j = n_j\omega_j/c$ é o número de onda, n_j é o índice de refração e assumimos que as quatro ondas se propagam na mesma direção. Substituindo o resultado anterior na equação (3.4):

$$\mathbf{P_{NL}} = \frac{1}{2}\hat{x}\sum_{j=1}^{4} P_j \exp[\,i(\beta_j z - \omega_j t)] + c.c., \tag{3.7}$$

Assumimos que os campos não de dependem do tempo e que a dependência espacial do campo é $E_j(\mathbf{r}) = F_j(x,y)A_j(z)$, onde $F_j(x,y)$ corresponde à distribuição espacial do modo j que se propaga através do meio. Adicionalmente, consideramos que $A_j(z)$ varia lentamente e sem perdas ao longo do eixo z e desse modo desprezamos a derivada de segunda ordem. Considerando unicamente os termos quase em fase e $\chi^{(3)}$ não dependente da frequência, obtemos as equações acopladas:

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{in_2'\omega_1}{c}\left[\left(f_{11}|A_1|^2 + 2\sum_{k\neq 1} f_{1k}|A_k|^2\right)A_1 + 2f_{1234}A_2^*A_3A_4\mathrm{e}^{i\Delta\beta z}\right], \tag{3.8a}$$

$$\frac{dA_2}{dz} = \frac{in_2'\omega_2}{c}\left[\left(f_{22}|A_2|^2 + 2\sum_{k\neq 2} f_{2k}|A_k|^2\right)A_2 + 2f_{2134}A_1^*A_3A_4\mathrm{e}^{i\Delta\beta z}\right], \tag{3.8b}$$

$$\frac{dA_3}{dz} = \frac{in_2'\omega_3}{c}\left[\left(f_{33}|A_3|^2 + 2\sum_{k\neq 3} f_{3k}|A_k|^2\right)A_3 + 2f_{3412}A_1A_2A_4^*\mathrm{e}^{-i\Delta\beta z}\right], \tag{3.8c}$$

$$\frac{dA_4}{dz} = \frac{in_2'\omega_4}{c}\left[\left(f_{44}|A_4|^2 + 2\sum_{k\neq 4} f_{4k}|A_k|^2\right)A_4 + 2f_{4312}A_1A_2A_3^*\mathrm{e}^{-i\Delta\beta z}\right], \tag{3.8d}$$

nas quais $n_2' = \frac{3}{8n}\mathrm{Re}(\chi^{(3)}_{xxxx})$ ($\chi^{(3)}_{xxxx}$ é o termo do tensor $\chi^{(3)}$ que afeta ao vetor do campo elétrico que está orientado com o eixo x), $\Delta\beta$ corresponde à diferencia de entre os vectores de onda envolvidos $\beta_j (j = 1, 2, 3, 4)$. Para o FWM, consideramos o efeito pelo

qual dois fótons de frequências ω_1 e ω_2 são destruídos para criar outros dois fótons de frequências ω_3 e ω_4 tal que:

$$\omega_3 + \omega_4 = \omega_1 + \omega_2. \tag{3.9}$$

e, deste modo, duas bandas laterais são geradas com uma desfasagem de frequência $\Omega_s = \omega_1 - \omega_3 = \omega_4 - \omega_1\,(\omega_3 < \omega_4)$. as frequências geradas ω_3 e ω_4 são chamadas de campo Stokes e campo anti-Stokes, respectivamente, por analogia com o processo de espectroscopia Raman estimulada (SRS). No nosso contexto, os modos ω_3 e ω_4 serão chamados de sinal e complementar, respectivamente.

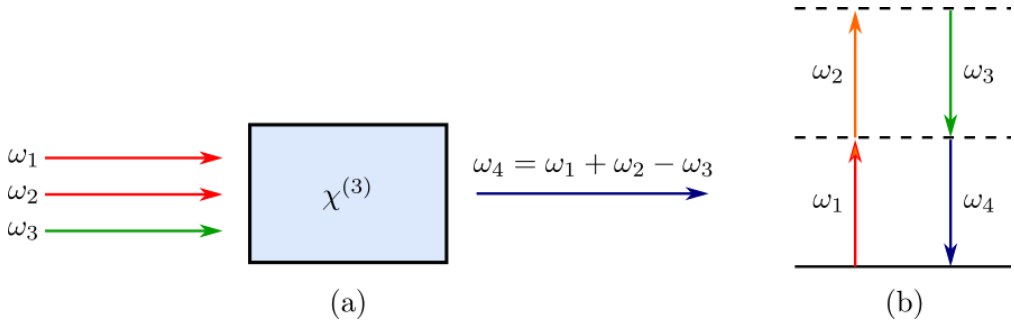

Figura 3.1: Processos envolvidos na consideração (3.9). A figura (a) descreve o processo de interação entre os campos e o meio não-linear. A figura (b) ilustra o processo no qual dois fótons de frequências ω_1 e ω_2 são destruídos ao mesmo tempo em que dois fótons de frequências ω_3 e ω_4 são criados. No caso dos chips, trabalhamos com uma única frequência de bombeio $\omega_1 = \omega_2$.

A condição de casamento de fase para este processo é $\Delta\beta = 0$, sendo que:

$$\Delta\beta = (\tilde{n}_3\omega_3 + \tilde{n}_4\omega_4 - \tilde{n}_1\omega_1 - \tilde{n}_2\omega_2)/c. \tag{3.10}$$

na qual consideramos que $\tilde{n}_j = n_j + n_{2_j}|E_j|^2$ é o índice de refração efetivo, sendo que os campos de bombeio A_1 e A_2 podem ocasionar diferenças nos valores de $\tilde{n}_1$ e $\tilde{n}_2$.

Os termos f_{jk} e f_{ijkl} das equações (3.8) correspondem a integrais de superposição espacial de modos. As integrais de superposição f_{jk} e f_{ijkl} se definem como:

$$f_{jk} = \frac{\langle |F_j|^2 |F_k|^2 \rangle}{\langle |F_j|^2 \rangle \langle |F_k|^2 \rangle}, \tag{3.11}$$

$$f_{ijkl} = \frac{\langle F_i F_j^* F_k F_l \rangle}{(\langle |F_i|^2 \rangle \langle |F_j|^2 \rangle \langle |F_k|^2 \rangle \langle |F_l|^2 \rangle)^{1/2}}, \tag{3.12}$$

sendo que $\langle F_i \rangle = \int\int_{\infty}^{\infty} F_i(x,y)\, dxdy$.

A partir deste ponto, vamos focar o nosso análise em uma solução aproximada das equações anteriores. Uma análise rigorosa dos processos envolvidos implicaria o uso de métodos numéricos que não trataremos no presente trabalho. A motivação principal de desenvolver a solução aproximada é obter um conjunto de resultados que, em termos físicos, nos descreva o fenômeno acontecendo.

Partimos de considerar que as integrais de superposição sejam aproximadamente iguais. Isto é:

$$f_{ijkl} \approx f_{ij} \approx 1/A_{ef} \qquad (i,j,k,l = 1,2,3,4), \tag{3.13}$$

onde A_{ef} é a área efetiva dos modos transversos, sendo que $A_{ef} = \dfrac{(\int\int_{\infty}^{\infty} F_i(x,y)\,dxdy)^2}{\int\int_{\infty}^{\infty} |F_i(x,y)|^4\,dxdy}$.

Esta consideração é valida para sistemas mono-modo, como é o caso dos microcavidades em chip. Introduzimos, também o parâmetro não-linear γ_j usando à definição:

$$\gamma_j \equiv \frac{n_2'\omega_j}{cA_{ef}} \approx \gamma, \tag{3.14}$$

e assumimos que γ é o valor médio dos γ_j se considerarmos que as frequências ω_j são próximas entre si.

Das equações (3.8a) e (3.8b) para os campos de bombeio, obtemos que:

$$A_1(z) = \sqrt{P_1}\exp[i\gamma(P_1 + 2P_2)z], \tag{3.15a}$$

$$A_2(z) = \sqrt{P_2}\exp[i\gamma(P_2 + 2P_1)z], \tag{3.15b}$$

definindo $P_j = |A_j(0)|^2$ e sendo P_1 e P_2 as potências dos feixes de bombeio incidentes para $z = 0$. Substituindo estes resultados nas equações (3.8c) e (3.8d), obtemos:

$$\frac{dA_3(z)}{dz} = 2i\gamma[(P_1 + P_2)A_3 + \sqrt{P_1P_2}\mathrm{e}^{-i\theta}A_4^*], \tag{3.16a}$$

$$\frac{dA_4^*(z)}{dz} = -2i\gamma[(P_1 + P_2)A_4^* + \sqrt{P_1P_2}\mathrm{e}^{i\theta}A_3], \tag{3.16b}$$

onde $\theta = [\Delta\beta - 3\gamma(P_1 + P_2)]z$. Para simplificar os cálculos, definimos a grandeza auxiliar $B_j (j = 3, 4)$ como:

$$B_j = A_j\exp[-2i\gamma(P_1 + P_2)z], \tag{3.17}$$

de modo que logo de resolver as equações (3.16), obtemos:

$$\frac{dB_3(z)}{dz} = 2i\gamma\sqrt{P_1P_2}\exp(-i\kappa z)B_4^*, \tag{3.18a}$$

$$\frac{dB_4^*(z)}{dz} = -2i\gamma\sqrt{P_1P_2}\exp(i\kappa z)B_3, \tag{3.18b}$$

onde o parâmetro de casamento de fase efetivo está dado por $\kappa = \Delta\beta + \gamma(P_1 + P_2)$.

Resolvendo o sistema de equações (3.18), obtemos:

$$\frac{d^2B_3(z)}{dz^2} + i\kappa\frac{dB_3(z)}{dz} - (4\gamma^2P_1P_2)B_3 = 0, \tag{3.19a}$$

$$\frac{d^2B_4^*(z)}{dz^2} + i\kappa\frac{dB_4^*(z)}{dz} - (4\gamma^2P_1P_2)B_4^* = 0. \tag{3.19b}$$

cujas soluções são:

$$B_3(z) = (a_3\mathrm{e}^{gz} + b_3\mathrm{e}^{-gz})\exp(-i\kappa z/2), \tag{3.20a}$$

$$B_4^*(z) = (a_4\mathrm{e}^{gz} + b_4\mathrm{e}^{-gz})\exp(i\kappa z/2), \tag{3.20b}$$

nas quais a_3, b_3, a_4 e b_4 são parâmetros definidos pelas condições de contorno, e definimos o *o ganho paramétrico* g como:

$$g = \sqrt{(\gamma P_0 r)^2 - (\kappa/2)^2}, \tag{3.21}$$

onde os parâmetros r e P_0 estão dados por:

$$r = 2(P_1P_2)^{1/2}/P_0, \qquad P_0 = P_1 + P_2. \tag{3.22}$$

As aproximações feitas para as soluções encontradas em (3.20) são validas unicamente para o caso sem depleção do bombeio. Com o fim de analisar o comportamento dos campos encontrados e determinar as constantes a_j das equações acima, consideramos o caso $z = 0$. Deste modo, de (3.18a) e (3.20a) temos que:

$$a_3 + b_3 = B_3(0), \qquad g(a_3 - b_3) = (i\kappa/2)(a_3 + b_3) + 2i\gamma\sqrt{P_1P_2}B_4^*(0). \tag{3.23}$$

Resolvendo o sistema de equações, obtemos:

$$a_3 = \frac{1}{2}(1 + i\kappa/2g)B_3(0) + iC_0B_4^*(0), \qquad b_3 = \frac{1}{2}(1 - i\kappa/2g)B_3(0) - iC_0B_4^*(0). \tag{3.24}$$

onde $C_0 = (\gamma/g)\sqrt{P_1 P_2}$.. O procedimento feito acima pode ser feito também para encontrar a_4 e b_4. Substituindo estes resultados em (3.20):

$$B_3(z) = \left\{ B_3(0)\left(\cosh(gz) + \frac{i\kappa}{2g}\,\mathrm{senh}(gz)\right) + iC_0 B_4^* \,\mathrm{senh}(gz)\right\} \mathrm{e}^{-i\kappa z/2}, \tag{3.25a}$$

$$B_4^*(z) = \left\{ B_4^*(0)\left(\cosh(gz) - \frac{i\kappa}{2g}\,\mathrm{senh}(gz)\right) - iC_0 B_3 \,\mathrm{senh}(gz)\right\} \mathrm{e}^{i\kappa z/2}, \tag{3.25b}$$

Podemos simplificar os resultados obtidos considerando como condição de contorno que $B_4^*(0) = 0$, ou seja, que feixe complementar ainda não existe para $z = 0$. Deste modo e definindo a potência do modo ω_3 como $P_3 = |B_3|^2$, temos que:

$$P_3(z) = P_3(0)\left[1 + \left(1 + \frac{\kappa^2}{4g^2}\right)\mathrm{senh}^2(gz)\right], \tag{3.26}$$

Da mesma forma, podemos obter uma expressão para a potência o modo ω_4 $P_4 = |B_4|^2$. Para isto, das equações (3.18) obtemos que $d(P_3 - P_4)/dz = 0$ e $P_4(z) = P_3(z) - P_3(0)$. Substituindo no resultado anterior, encontramos que:

$$P_4(z) = P_3(0)\left(1 + \frac{\kappa^2}{4g^2}\right)\mathrm{senh}^2(gz). \tag{3.27}$$

O resultado obtido mostra que o feixe complementar é gerado exatamente depois da aparição do feixe sinal no meio. A partir desdes resultados, podemos considerar o caso do nosso sistema. Seja um sistema com feixe de bombeio degenerado de frequência ω_p e os feixes gerados sinal e complementar de frequências ω_s e ω_i respectivamente, temos que as condições de casamento de fase e de energia são:

$$\Delta\beta = 2\beta_p - \beta_s - \beta_i \qquad 2\omega_p = \omega_s + \omega_i. \tag{3.28}$$

Deste modo, o parâmetro de casamento de fase efetivo é dado por:

$$\kappa = 2\gamma P_p - \Delta\beta. \tag{3.29}$$

Substituindo na equação (3.21), temos que o ganho paramétrico é:

$$g = \sqrt{(\gamma P_p)^2 - \kappa^2/4} = \sqrt{\gamma P_p \Delta\beta - (\Delta\beta)^2/4}, \tag{3.30}$$

Podemos expandir $\beta(\omega)$ em series de potências, temos que:

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_p) + \beta_1(\omega_p)(\omega - \omega_p) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega)(\omega - \omega_p)^2 + \cdots \tag{3.31}$$

Logo, podemos observar que $\Delta\beta$ pode ser aproximado por:

$$\Delta\beta \approx -\beta_2(\omega_s - \omega_p)^2, \tag{3.32}$$

onde o termo β_2 é conhecido como dispersão da velocidade de grupo (*Group velocity dispersion - GVD*). Da equação (3.30), vemos que para o ganho paramétrico ser positivo, é necessario que $\Delta\beta$ seja positivo e, em consequência, β_2 precisa ser negativo.

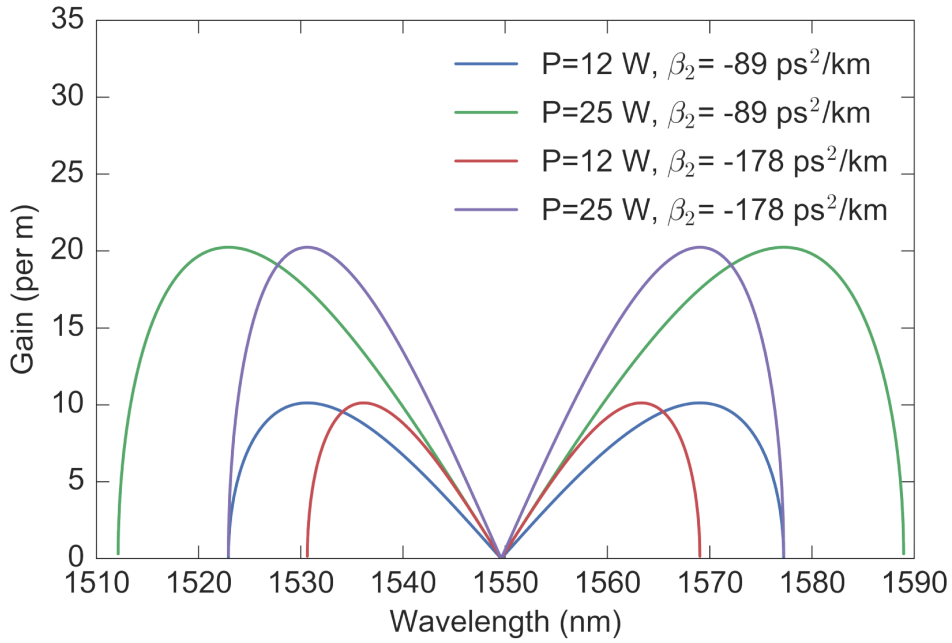

Figura 3.2: Ganho paramétrico para dois casos de β_2 e para distintas potências de bombeio com comprimento de onda em 1560 nm. Reproduzido de [Dutt, 2017].

3.2 Descrição do OPO

Quando um meio não linear é colocado dentro de uma cavidade, podemos aproveitar os efeitos da cavidade como meios ressoadores para amplificar a intensidade dos campos gerados. Estes sistemas são conhecidos como osciladores paramétricos óticos (OPO). O esquema geral do OPO é mostrado na figura (3.3).

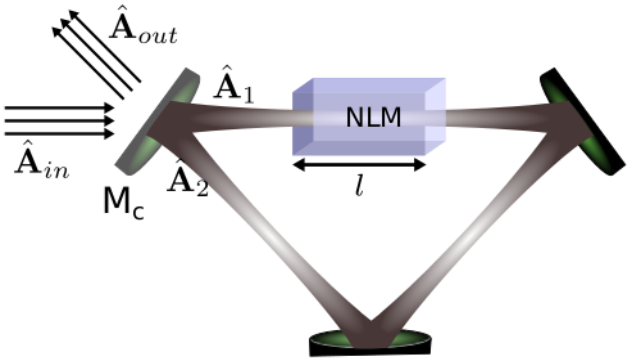

Figura 3.3: Esquema geral do OPO com três espelhos. O espelho de entrada M_c funciona como porta de entrada e saída dos feixes interagentes. Os campos de entrada $\hat{A}_{in}$ ingressam na cavidade e os campos $\hat{A}_{out}$ saem. No interior do OPO, os campos intracavidade $\hat{A}_1$ propagam-se em sentido horário e atravessam o cristal não-linear. $\hat{A}_2$ corresponde aos campos intracavidade depois de completar uma volta na cavidade e justo antes de chegar no espelho M_c. Reproduzido de [González Arciniegas, 2017].

A aplicação mais simple do ganho obtido pelo processo de FWM é usá-lo como meio de ganho de um OPO [Agrawal, 2018]. Levando em conta que o processo que efetuamos nos microrressoadores é iniciado unicamente com um feixe de bombeio (a diferença da seção anterior na qual trabalhamos com um feixe sinal na entrada como *semente*), os feixes sinal e complementar são criados a partir do ruído através de processos de *instabilidade de modulação espontânea*. Os modos dos feixes gerados estarão determinados pelas condições de casamento de fase. O resultado na saída do OPO é o feixe de bombeio e os dois modos sinal e complementar localizados em frequências simetricamente afastadas da frequência do bombeio. Eventualmente, esses modos gerados podem criar outros novos modos, gerando um efeito de FWM em cascata.

Segundo as características da cavidade e o modo do bombeio, existem dois configurações. A primeira é quando a oscilação acontece para só para um modo, aquele modo da cavidade mais próximo ao pico da curva de ganho, caso conhecido como OPO unicamente ressonante (SROPO). A segunda é quando o bombeio não ressoa com a cavidade, conhecida como OPO duplamente ressonante (DROPO). Finalmente, a terceira configuração é quando o bombeio é ressonante com a cavidade, conhecida como OPO triplamente ressonante (TROPO). No caso dos microrressoadores de Si_3N_4, o OPO encontra-se na configuração TROPO.

A geração dos modos sinal e complementar simultaneamente através de FWM indica que os pares de fótons criados podem ter algum grau de correlação quântica. Um dos mais importantes é o squeezing. A análise pode ser feito entendendo a dinâmica do OPO em FWM através do tratamento quântico.

O hamiltoniano de interação FWM é o seguinte [González-Arciniegas et al., 2017]:

$$H_{int} = \hbar\eta^{(3)}\Bigg[\frac{1}{2}\left(\hat{a}_p^\dagger\hat{a}_p^\dagger\hat{a}_p\hat{a}_p + \hat{a}_s^\dagger\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_s\hat{a}_s + \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i\hat{a}_i\right) + \\ 2\left(\hat{a}_p^\dagger\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_p\hat{a}_s + \hat{a}_p^\dagger\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_p\hat{a}_i + \hat{a}_s^\dagger\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_s\hat{a}_i\right) + \left(\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_p\hat{a}_p + \hat{a}_p^\dagger\hat{a}_p^\dagger\hat{a}_s\hat{a}_i\right)\Bigg], \tag{3.33}$$

onde $\eta^{(3)}$ é o fator de não-linearidade; $\hat{a}_j, (j = p, s, i)$ são os operadores de destruição para os modo de bombeio (*pump*), sinal (*signal*) e complementar (*idler*). Do hamiltoniano, pode-se ver que o hamiltoniano de interação de terceira ordem envolve vários efeitos. Os primeiros dos termos entre parêntesis correspondem a fenômenos de automodulação de fase e modulação de fase cruzada, e o último termo corresponde à contribuição do FWM. Aplicando as equações de movimento de Heisenberg-Langevin, obtemos:

$$\frac{d}{dz}\hat{a}_p = -(\Gamma_p + i\Delta_p)\hat{a}_p + i\eta^{(3)}\left[\left(\hat{a}_p^\dagger\hat{a}_p + 2\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_s + 2\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i\right)\hat{a}_p + 2\hat{a}_p^\dagger\hat{a}_s\hat{a}_i\right] + \sqrt{2\gamma_p}\hat{a}_p^{in} + \sqrt{2\mu_p}\hat{a}_p^{loss}, \tag{3.34}$$

$$\frac{d}{dz}\hat{a}_s = -(\Gamma_s + i\Delta_s)\hat{a}_s + i\eta^{(3)}\left[\left(2\hat{a}_p^\dagger\hat{a}_p + \hat{a}_s^\dagger\hat{a}_s + 2\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i\right)\hat{a}_p + \hat{a}_p^2\hat{a}_i^\dagger\right] + \sqrt{2\gamma_s}\hat{a}_s^{in} + \sqrt{2\mu_s}\hat{a}_s^{loss}, \tag{3.35}$$

$$\frac{d}{dz}\hat{a}_i = -(\Gamma_i + i\Delta_i)\hat{a}_i + i\eta^{(3)}\left[\left(2\hat{a}_p^\dagger\hat{a}_p + 2\hat{a}_s^\dagger\hat{a}_s + \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i\right)\hat{a}_s + \hat{a}_p^2\hat{a}_s^\dagger\right] + \sqrt{2\gamma_i}\hat{a}_i^{in} + \sqrt{2\mu_i}\hat{a}_i^{loss}, \tag{3.36}$$

nas quais $\sqrt{2\mu_j}\hat{a}_j^{loss}$ corresponde às perdas espúrias, $+\sqrt{2\gamma_j}\hat{a}_j^{in}$ corresponde às perdas de acoplamento, Γ_j representa as perdas totais intracavidade, e Δ_j representa as fases adquiridas pelo campo no modo j após uma volta na cavidade.

O estudo detalhado da dinâmica pode-ser visto em [González Arciniegas, 2017]. Segundo estes estudos teóricos, o squeezing pode ser entendido como uma deamplificação dos campos sinal e complementar para alguns valores de fase relativa entre estes [Ohashi et al., 1982]. Levando em conta que a emissão espontânea em modos sinal e complementar gera fótons com fases aleatórias, o FWM acrescenta ou diminui o número de pares de fótons com base em sua fase relativa.

3.3 Chips de Silício

A fotônica do silício é uma área de pesquisa que tem experimentado um rápido crescimento desde o ano 2004 devido a um forte investimento de parte da indústria e dos governos. As inúmeras aplicações nas telecomunicações, áreas médicas, espectroscopia, tecnologias de sensores, entre muitas outras; estão principalmente dirigidas pelas capacidades tecnológicas atuais para a fabricação e integração de circuitos optoeletrônicos integrados (*optoelectronic integrated circuit - OEIC)* que sejam capazes de estabelecer sistemas de comunicações rápidos e bidirecionais. Em particular, os *wafers* feitos de silício sobre isolante (*silicon-on-inslator - SOI*), oferecem plataformas ideais para a construção de circuitos de guias de onda planares [Bogaerts et al., 2005]. Isto, junto ao forte confinamento ocasionado pelo contraste entre os índices de refração do silício $(n = 3{,}45)$ e o oxido de silício $\mathrm{SiO_2}$ $(n = 1{,}45)$ fazem possível a construção de sistemas fotônicos a escalas de nanômetros. Por outro lado, o elevado confinamento ótico dá lugar à aparição de efeitos não lineares como efeitos Raman e Kerr, os quais permitiram o aproveitamento em sistemas de amplificação ótica, lasers, conversão de comprimento de onda, entre outros efeitos que não se pensavam possíveis em plataformas de silício [Jalali and Fathpour, 2006]. Estes sistemas, ao mesmo tempo, possuem o potencial para o desenvolvimento de novas tecnologias devido à sua ótima relação custo-benefício e pela integrabilidade que oferece entre sistemas complexos fotônicos e eletrônicos [Soref, 2006].

Os fatos mencionados acima compreendem algumas das motivações do presente projeto para o estudo das possibilidades que oferece a fotônica do silício nas linhas de pesquisa desenvolvidas no *Laboratório de manipulação coerente de átomos e luz - LMCAL* da Universidade de São Paulo. Neste contexto surge o nosso tema de trabalho: o estudo dos osciladores paramétricos óticos - OPO em chips fabricados com a tecnologia do silício.

No artigo [Levy et al., 2010] o grupo de pesquisa da Profa.. Michal Lipson na Universidade de Cornell (atualmente, na Universidade de Columbia), reportou a primeira versão funcional de um OPO fabricado a partir de um microrressoador de nitreto de silício sobre óxido de silício, monolítico e compatível com tecnologias CMOS (*Complementary metal–oxide–semiconductor*), que são usadas atualmente na fabricação de microprocessadores e diversos circuitos lógicos), o qual permite o aproveitamento da estrutura de fabricação já existente [Bogaerts et al., 2010]. O OPO em chip, cujo desenho se mostra na figura (3.4), funcionava empregando FWM. Entre as vantagens deste tipo de OPO está o elevado fator de qualidade $(Q \sim 500\,000\,,\ \mathcal{F} \sim 1000\,)$ do microrressoador

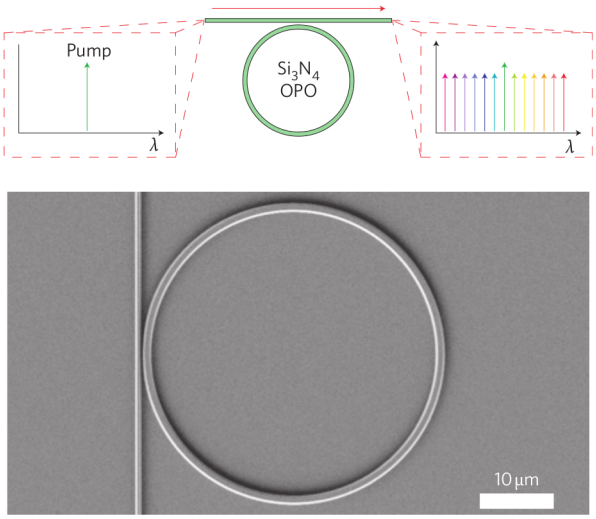

Figura 3.4: OPO em chip apresentado em [Levy et al., 2010]. Acima, a descrição pictórica da geração de múltiplos modos em comprimentos de onda bem definidos. Abaixo, uma fotografia através de um microscópio eletrônico de varredura.

ótico em nitreto de silício, o qual permite que os requerimentos de potência e dimensões necessários para garantir uma eficiência razoável do FWM sejam relativamente baixos; assim como também o fato de trabalhar na banda C de telecomunicações o qual garante a integração com outros dispositivos óticos em chips. Além disso, os autores afirmam que eles conseguem controlar a espessura do do guia de onda fabricado, permitindo deste modo variar a dispersão (GVD) do guia de onda até obter um adequado casamento de fase, requisito fundamental para garantir a geração de FWM, como se viu na seção anterior.

Tempo depois, no artigo [Dutt et al., 2015] o mesmo grupo reportou a geração de squeezing em amplitude naquelas plataformas. Esta descoberta foi obtida ao estudar o ruído de amplitude dos únicos dois modos gerados pelo OPO em chip ao ser bombeado com uma potência levemente acima do limiar de oscilação do FWM, evitando assim a geração de mais modos. A comprovação do efeito quântico gerado abriu assim a porta dos OPO em chips para a sua utilização como fonte de estados comprimidos, objeto de trabalho fundamental da Ótica Quântica e, em particular, de grande interesse para o LMCAL.

O nosso grupo vem realizando um forte desenvolvimento na implementação de protocolos de comunicação quântica e informação quântica em variáveis continuas como pode se apreciar nos trabalhos [Coelho et al., 2009] [Barbosa et al., 2010] que foram desenvolvidos usando como base feixes gêmeos gerados por conversão paramétrica descendente em OPOs com não linearidade $(\chi^{(2)})$. Recentemente, estão explorando-se as possibilidades que oferecem os OPOs em $(\chi^{(3)})$, como consta nos

trabalhos [Rojas, 2017] [Montana, 2017] que fazem os primeiros estudos de FWM gerado em átomos de rubídio. Agora, com a colaboração com o grupo da Profa. Lipson, o LMCAL busca estudar as potencialidades dos chips de silício como fonte de estados não-clássicos.

3.4 Relações de acoplamento entre microrressoadores e guias de onda

Consideremos a geometria mostrada na figura (3.5). Tem-se um feixe incidente α_1 que propaga-se por um guia de onda. Este troca luz com um microrressoador em forma de anel na região de acoplamento[1] segundo a relação:

$$\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & \kappa \\ -\kappa^* & t^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}, \tag{3.37}$$

na qual κ e t são os parâmetros de auto-acoplamento e acoplamento cruzado, respec-

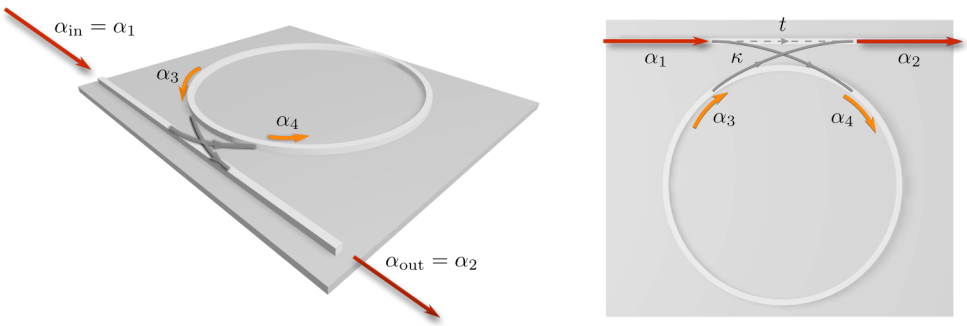

Figura 3.5: Diagrama do microrressoador em chip de Si_3N_4 acoplado ao guia de onda.

tivamente [Heebner and Boyd, 2003], e que cumprem a relação:

$$|\kappa|^2 + |t|^2 = 1. \tag{3.38}$$

A transmissão através do microrressoador está dada por:

$$\alpha_3 = a \exp(i\phi)\, \alpha_4, \tag{3.39}$$

onde $a \equiv \sqrt{\mathrm{e}^{-\gamma p}}$ representa o efeito das perdas espúrias em cada recorrido através do microrressoador, sendo γ é o coeficiente de atenuação definido na seção (2.2). Das

[1] Para fins práticos, pode-se considerar que a região de acoplamento acontece em um ponto localizado [Rowland and Love, 1993].

equações anteriores, pode-se obter a relação entre às amplitudes dos campos:

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{t\mathrm{e}^{-i\phi} - a}{\mathrm{e}^{-i\phi} - t^* a}, \tag{3.40}$$

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \frac{-a\kappa^*}{-at^* + \mathrm{e}^{-i\phi}}. \tag{3.41}$$

Com estes resultados, determinamos a potência de saída do guia de onda e a potência interna, respectivamente. Temos assim:

$$\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right|^2 = \frac{a^2 + |t|^2 - 2a|t|\cos(\phi + \phi_t)}{1 + a^2\,|t|^2 - 2a|t|\cos(\phi + \phi_t)}, \tag{3.42}$$

$$\left|\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right|^2 = \frac{a^2(1 - |t|^2)}{1 + a^2|t|^2 - 2a|t|\cos(\phi + \phi_t)}, \tag{3.43}$$

onde $t = |t|\exp(\phi_t)$. Das relações acima, analisamos o comportamento próximo à ressonância $(\phi + \phi_t = 2m\pi, m \in \mathbb{Z})$ e obtemos que:

$$\left|\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right|^2 = \frac{(a - |t|)^2}{(1 - a|t|)^2} \tag{3.44}$$

$$\left|\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right|^2 = \frac{a^2\,|\kappa|^2}{(1 - a|t|)^2} \tag{3.45}$$

Os resultados acima podem-se comparar com os resultados obtidos na equação (2.15). O campo que sai do guia de onda (3.44) é semelhante a o campo refletido numa cavidade de espelhos, de igual maneira, o campo ao interior do microrressoador é igual ao campo intracavidade.

Também pode-se ver que, em relação à potência de saída, a equação (3.44) mostra que quando as perdas internas, representadas em a, são iguais ao fator de acoplamento, representado por $|t|$, a potência transmitida é nula e toda a luz é dissipada dentro da cavidade em anel. O mecanismo por trás que explica este efeito é exatamente o mesmo que foi descrito na seção (2.3) para descrever o acoplamento crítico e por tal motivo esta condição leva o mesmo nome. Em analogia à classificação feita anteriormente, podemos caracterizar o nível de acoplamento entre o guia de onda e o chip da maneira

seguinte:

$$\begin{aligned} \text{Acoplamento sub-crítico:} \quad & a < |t|. \\ \text{Acoplamento crítico (ou casamento de impedância):} \quad & a = |t|. \\ \text{Acoplamento super-crítico:} \quad & a > |t|. \end{aligned}$$

Deste modo, verificamos que o comportamento dos microrressoadores é igual ao comportamento que existe para cavidades de espelhos enquanto às características de acoplamento e as intensidades intracavidade e na saída da cavidade.

Capítulo 4

Instrumentação e resultados experimentais

Os capítulos precedentes nos deram uma imagem geral da teoria envolvida nos processos que vamos a analisar neste trabalho. O nosso objetivo neste projeto é estabelecer as bases de um sistema que permita-nos explorar as propriedades quânticas dos feixes gerados nos OPO em chips de Si_3N_4, em concreto, squeezing e emaranhamento. Para conseguir isto devemos primeiro atingir as condições de bombeamento e acoplamento adequadas para conseguir um OPO que produza feixes sinal e complementar, os quais nos permitam efetuar uma análise de correlações entre as quadraturas de amplitude e fase. Em uma primeira etapa, busca-se analisar compressão de ruido na diferença de amplitudes dos feixes gerados, como foi encontrado anteriormente em [Dutt et al., 2015]. Uma vez conseguido isto, o passo seguinte consistirá em completar o sistema de análise dos feixes gerados fazendo uso da técnica de auto-homodinagem descrita na seção (2.7) e estudar as correlações de amplitude e fase existentes na base da soma e substração das variâncias das quadraturas. A ideia que se pretende seguir é refazer um caminho similar ao tracejado por trabalhos como [Ou et al., 1992] e [Villar et al., 2005] e comprovar se estas novas plataformas estão em condições de operar como OPOs funcionais e eficientes para o seu aproveitamento em implementações de protocolos de informação quântica desenvolvidos em ótica quântica.

Neste capítulo, apresentamos a montagem experimental utilizada, assim como os resultados obtidos até o presente na construção do sistema de caracterização dos chips de Si_3N_4. Começaremos descrevendo a cavidades de análise que utilizamos para o estudo das flutuações do feixe de bombeio que utilizaremos (um laser RIO Orion em 1560 nm), e como os resultados obtidos nos levaram à necessidade de construir uma cavidade de filtro. Descrevemos também o processo de construção da cavidade de filtro, seguindo os princípios descritos na seção (2.6), e analisaremos a resposta de ruído após

a filtragem. Por fim, analisaremos a resposta em potência dos chips para diferentes casos de acoplamento e, com ajuda de um analisador de espectro ótico, apresentaremos os pentes de frequência gerados e a busca por uma potência apropriada para a geração de unicamente dois modos.

4.1 Cavidade de análise e sistema de medição de ruido

O primeiro passo para gerar um sistema de geração de feixes não-clássicos consiste em contar com uma fonte de luz coerente que sirva como campo de bombeio. Considerando que os OPO em chip utilizam feixes de 1560 nm como bombeio, precisamos de utilizar uma fonte naquele comprimento de onda.

O laser com que conta o LMCAL é um laser de diodo de cavidade externa planar da série *RIO009x Series - 1560nm PLANEX™ Laser*, com comprimento de onda em 1560,6 nm e largura de linha em 7,4 kHz (dados do fabricante). Dado que não temos informação sobre os niveis de ruído do laser, é preciso analisar as flutuações do ruído de amplitude e fase dessa fonte.

Para poder realizar uma caracterização adequada do espectro de ruído, construiremos uma cavidade de análise e aplicamos a técnica da auto-homodinagem. Devemos lembrar que para efetuar a rotação da elipse de ruído, deve-se criar uma desfasagem entre a banda portadora e a banda lateral de $\pi/2$. Segundo o estudado na seção (2.7), e assumindo que a cavidade possei acoplamento sub-crítico e permita fornecer uma mudança de fase como a requerida, isto equivale a $\nu \geq \sqrt{2}\delta\nu_c$.

O nosso interesse é ter uma fonte coerente para frequências de análise por volta de alguns MHz. Isto devido às características do detetor que utilizaremos cuja resposta em alta frequência possui uma resposta confiável até frequências de análise de 20 MHz. Tendo este fato em conta, escolhemos uma frequência de análise mínima de 3 MHz. Logo, temos que:

$$3\,\mathrm{MHz} \geq \sqrt{2}\delta\nu_c \quad \rightarrow \quad \delta\nu_c \leq 2{,}12\,\mathrm{MHz}. \tag{4.1}$$

Em relação aos espelhos, utilizamos três da empresa ATFilms, sendo dois de alta refletividade ($\sim 100\%$) e um de $T = 1\%$, todos estes para um ângulo de incidência (AIO) de 45 graus. Os detalhes se mostram dos espelhos utilizados se mostram na tabela (4.1).

Cav. Análise - Espelhos	
M_1	Plano / AIO° ~ 45 / $R_{1560nm} = 99\%$
M_2	Plano / AIO° $\sim$45 / $R_{1560nm} : HR$
M_3	$R_{oc} = 2\,m$ / AIO° ~ 45 / $R_{1560nm} : HR$

Tabela 4.1: Parâmetros dos espelhos da cavidade de análise.

A largura de banda da cavidade está dada pela equação (2.8) e pode ser utilizada para isolar o tamanho da cavidade segundo $L = c/(\delta\nu_c\mathcal{F})$. Usando a fórmula para a finesse definida em (2.7) e aproximando para um caso sem perdas espúrias, e assumindo que temos um espelho de $R_1 = 99\%$ e outro de $R_2 = 99{,}9\%$, temos que:

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt[4]{R_1R_2}}{1-\sqrt{R_1R_2}} \approx 569 \quad \rightarrow \quad L \geq \frac{c}{(2{,}12\,\mathrm{MHz})(569)} = 24{,}9\,cm. \tag{4.2}$$

Por tanto, a cavidade de análise precisa de um tamanho mínimo de 24,9 cm para conseguir uma largura de banda de 2,12 MHz. Tendo este resultado em conta, escolhemos um tamanho de cavidade de 30 cm de comprimento. Deste modo, a configuração da cavidade é a que se mostra na figura (4.1).

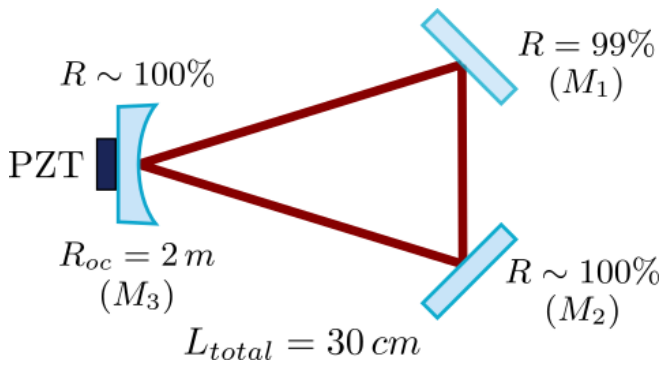

Figura 4.1: Geometria e configuração da cavidade de análise. O feixe a ser analisado ingressa pelo espelho M_1. O feixe refletido neste espelho contém a informação do campo que queremos estudar.

É importante indicar que a cavidade cumpre o critério de estabilidade discutidos na seção (2.5) e trabalhando para o caso de três espelhos, segundo o critério definido em [Kogelnik and Li, 1966] e definindo a cavidade como confocal. As características da cavidade de análise obtidas experimentalmente da montagem são mostradas na tabela (4.2). Para a detecção balanceada, se utiliza um detetor balanceado Thorlabs PDB140C que foi modificado para efetuar tanto a soma dos sinais de alta frequência quanto a substração. Para os outros casos, utilizam-se detetores Thorlabs PDA10CS. A cavidade de análise construída é mostrada na figura (4.2). A estrutura optomecânica utilizada é um suporte construído na oficina mecânica do Instituto de Física da USP e

permite configurar tamanhos de cavidades variáveis até aproximadamente 50 cm de comprimento total. Adicionalmente, possui camadas de madeira e borracha na base que permitem um melhor isolamento mecânico.

Cav. Análise	
Intervalo Espectral livre (ν_{FSR})	1000 MHz
Largura de banda ($\delta\nu_c$)	1,774 MHz
Finesse ($\mathcal{F}$)	563,8

Tabela 4.2: Parâmetros da cavidade de análise.

Uma vez definida a cavidade, montamos o arranjo experimental como se mostra na figura (4.3). O procedimento a seguir consiste em injetar o feixe do laser na cavidade para logo recuperar o feixe refletido que contém a informação das flutuações do campo. O feixe refletido é submetido a uma detecção balanceada (figura 4.4) que consiste em dividir o campo em dos feixes de igual potência com ajuda de um PBS (*polarized beam splitter*) e uma lâmina de meia onda. O sinal de alta frequência é estudado com um analisador de espectro que efetua a transformada de Fourier destes sinais e permite fazer uma análise no domínio da frequência.

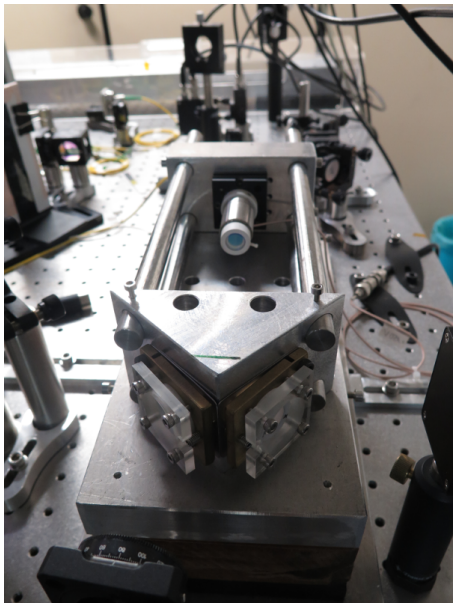

Figura 4.2: Fotografia da cavidade de análise construída.

O propósito que se busca é de efetuar a soma e a substração dos sinais de alta frequência obtidos pelos detetores. Desta forma, como se mostra em [De Araújo, 2015],

temos:

$$\begin{aligned} \delta V_+(t) &= \delta V_1(t) + \delta V_2(t), \\ \delta V_-(t) &= \delta V_1(t) - \delta V_2(t), \end{aligned} \tag{4.3}$$

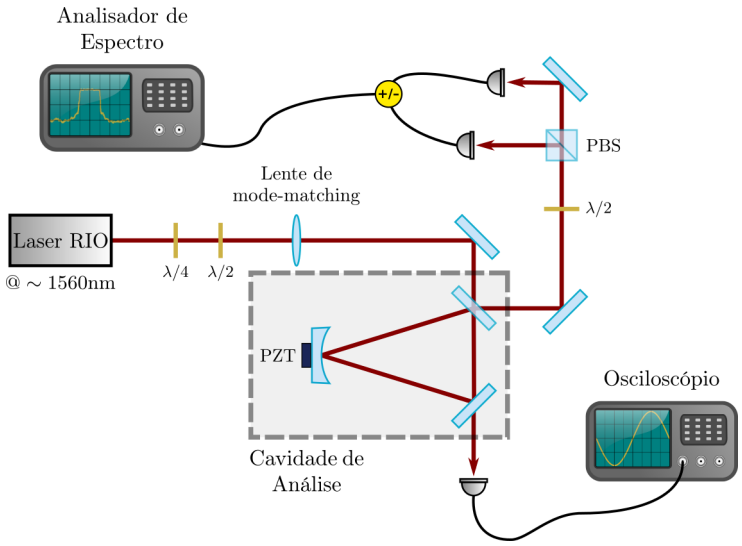

Figura 4.3: Arranjo experimental para análise de ruído do laser RIO.

Na equação (4.3), δV_+ equivale ao ruido total dos feixe e δV_- equivale à substração do ruído de ambos feixes para obter de essa forma o ruído de shot-noise. Desde uma perspectiva semelhante à discutida na seção (1.3), a substração se encarga de eliminar o ruído clássico deixando unicamente o ruído de vácuo, que corresponde justamente ao shot-noise. Para obter a resposta do ruído de amplitude normalizado pelo shot-noise, efetuamos a operação:

$$\Delta^2 p = \frac{\Delta^2 V_+ - \Delta^2 e}{\Delta^2 V_- - \Delta^2 e} \tag{4.4}$$

na qual, consideramos $\Delta^2 e$ como a contribuição do ruído eletrônico ou também conhecido como ruído de Johnson-Nyquist [Nyquist, 1928]. O resultado anterior consiste em uma versão normalizada do ruído de amplitude definido na seção (1.3) e que utilizaremos para efetuar a análise de ruído. Sendo que a cavidade de análise efetua a rotação da elipse de ruído, o valor do ruído de amplitude da equação (4.4) é transformado em ruído de fase dependendo da dessintonia da cavidade, tal como se mostrou na figura (2.11).

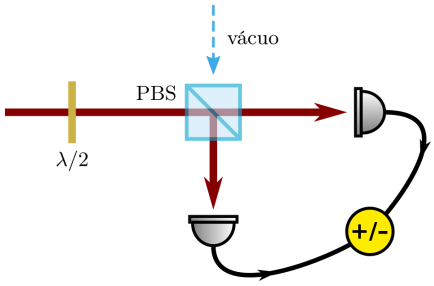

Figura 4.4: Esquema da detecção balanceada.

Para as nossas análises, configuramos o analisador de espectro com os parâmetros mostrados na tabela (4.3). A resolução da largura de banda (*resolution bandwidth - RBW*), está relacionada com a janela de detecção, enquanto a largura de banda do vídeo (*video bandwidth - VBW*) está relacionada a um filtro que permite uma visualização mais clara do sinal. Configuramos o RBW em um valor suficientemente fino para poder ter uma resolução adequada do ruído que queremos analisar. O VBW, a velocidade de varredura do analisador de espectro (*sweep time*) e o número de pontos a serem obtidos, devem ser acertados de maneira que a consiga-se obter uma leitura completa da rotação da elipse enquanto a varredura da cavidade de análise acontece.

Analisador de espectro - parâmetros de leitura			
RBW	**VBW**	**Sweep time**	**Pontos**
100 kHz	100 Hz	1 s	1000

Tabela 4.3: Parâmetros da cavidade de análise.

4.2 Filtragem do laser

A seguir, analisamos o ruído do laser RIO em função da frequência. Com a detecção balanceada, obtemos a medida do shot-noise para a substração dos sinais de alta frequência e para o ruído de amplitude com a soma. Usando a opção de *max-hold* do analisador de espectro, podemos ter uma leitura dos pontos de maior ruído enquanto a cavidade efetua a rotação da elipse, os quais correspondem ao ruído de fase, segundo o estudado na seção (2.7). Na figura (4.5) mostramos a leitura do ruído do RIO para uma potência de entrada no detetor (P_{in}) de 50 μW:

Se escolhemos uma frequência de análise e analisamos em *span* 0 (modo do analisador de espectro no qual se analisa em uma única frequência ao longo do tempo de varredura), a resposta de ruído é como se mostra na figura (4.6). Nesta figura, pode-ser

ver que o perfil do ruído ao longo da rotação da elipse é semelhante à figura do ruído mostrada em (2.11).

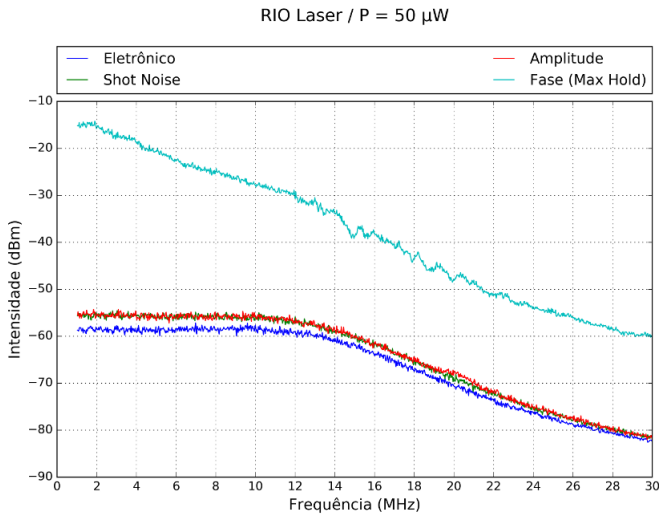

Figura 4.5: Espectro de ruído do laser RIO para $P_{\text{in}} = 50\,\mu\text{W}$ em função da frequência.

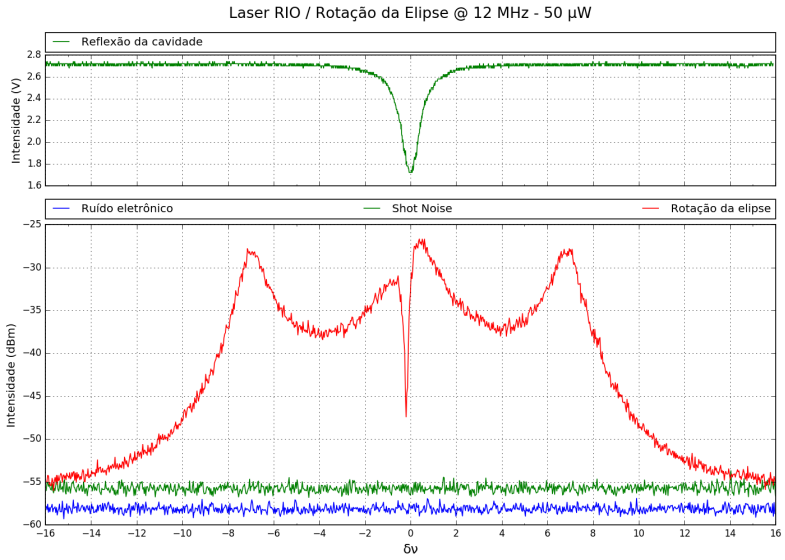

Figura 4.6: Espectro de ruído do laser RIO para uma frequência de análise de $12\,\text{MHz}$ e $P_{\text{in}} = 50\,\mu\text{W}$ em sincronia com a varredura ao redor da ressonância da cavidade de analise.

Na figura acima, $\delta\nu$ é uma unidade de deslocamento da ressonância em termos da largura de banda da cavidade. O sincronia entre a varredura da cavidade e a rotação da elipse é feita utilizando um trigger común entre o osciloscópio que analisa o pico de ressonância da cavidade e o analisador de espectro que mostra o efeito da cavidade no ruído observado. Para visualizar melhor os resultados anteriores, aplicamos uma

normalização sobre os dados em relação ao shot-noise usando (4.4). Os resultados renormalizados se mostram nas figuras (4.7) e (4.8):

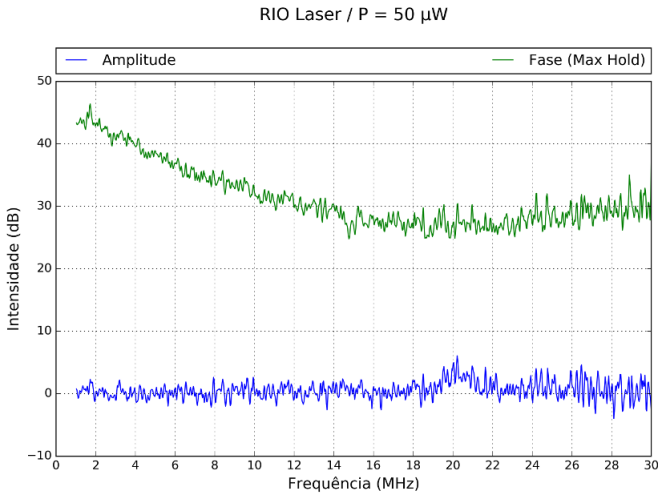

Figura 4.7: Espectro de ruído do laser RIO normalizado para $P_{\text{in}} = 50\,\mu\text{W}$ para em função da frequência.

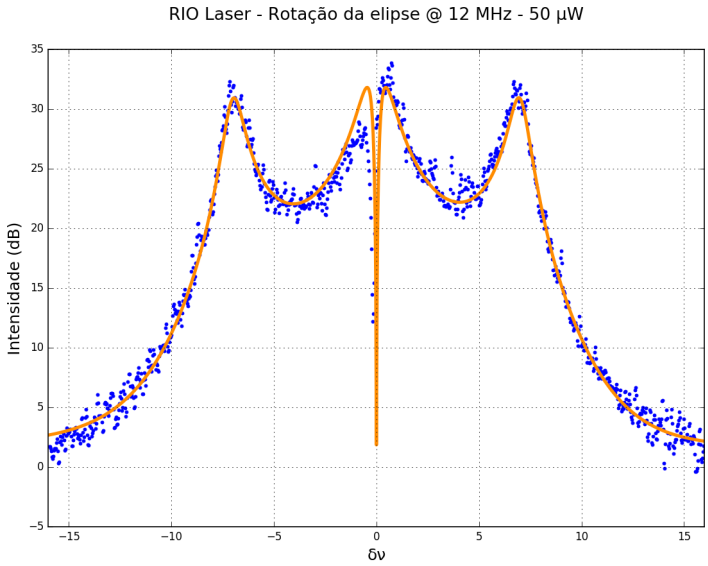

Figura 4.8: Espectro de ruído do laser RIO para uma frequência de análise de $12\,\text{MHz}$ e $P_{\text{in}} = 50\,\mu\text{W}$ em função da dessintonia da cavidade de analise.

Em resumo, os gráficos anteriores mostram um excesso de ruído de fase em relação ao ruído de amplitude de, aproximadamente $\sim 35\,dB$. O ruído de amplitude, por outro lado, é praticamente igual ao ruído de shot-noise. Do ajuste feito, se obtém que $\Delta^2 p = 1.7\,dB$ e $\Delta^2 q = 31.8\,dB$

Ante este cenário, a solução para transformar o nosso laser em uma fonte coerente consistirá em construir uma cavidade de filtro.

4.2.1 Construção da cavidade de filtro

Para a construção da cavidade de filtro, partimos da equação (2.41) que relaciona as flutuações de entrada da cavidade com as flutuações da saída transmitida. Reescrevendo a equação da forma:

$$\Delta^2\hat{p}_{trans.}(\Omega) = \frac{\Delta^2\hat{p}_{in_1}(\Omega) + \left(\frac{2\pi\Omega}{\kappa}\right)^2 \Delta^2\hat{p}_{in_2}(\Omega)}{1 + \left(\frac{2\pi\Omega}{\kappa}\right)^2}, \tag{4.5}$$

onde $\kappa = (c/2L)(1 - g_m)$ e Ω a frequência de análise. Se tenta uma configuração de geometria do tipo *borboleta (bow-tie)* de uns $5\,m$ de comprimento total com dois espelhos de alta refletividade $(R \sim 100\%)$ e dos de refletividade de 99%. Aproximando $g_m \approx \sqrt{R_1 R_2}$ onde $R_1 = R_2 = 99\%$, assumindo que o ruído de entrada $\Delta^2\hat{p}_{in_1}(\Omega) = 10^4$ (40 dB) e $\Delta^2\hat{p}_{in_2}(\Omega) = 1$ (vácuo), temos que a resposta de uma cavidade em tal configuração possui um ruído de amplitude como se mostra na figura (4.9):

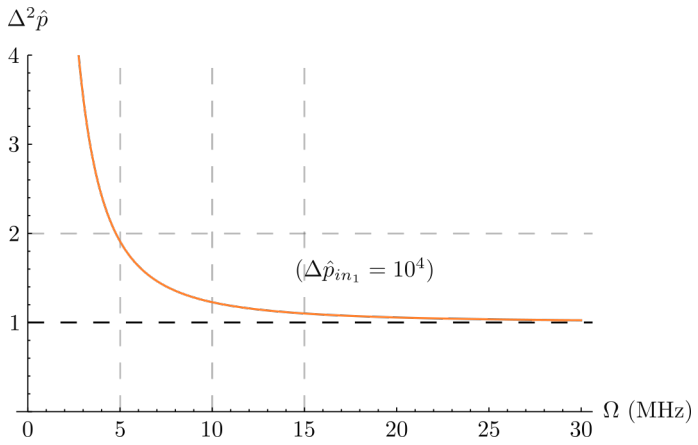

Figura 4.9: Filtragem teórica da cavidade de filtro, normalizado em relação ao shot-noise.

A equação (4.5) nos oferece uma aproximação da flutuação do ruído de amplitude $\Delta^2\hat{p}$ transmitida pela cavidade quando está encontra-se na ressonância. Esta estimativa funciona também para o ruído de fase $\Delta^2\hat{q}$ considerando que a cavidade realiza uma conversão entre os ruídos quando esta se encontra próxima à ressonância, tal como se estudou na seção (2.7). A filtragem do ruído depende também da estabilidade do travamento que vai se utilizar para manter a cavidade no ponto de ressonância. Contudo, podemos considerar o resultado anterior como uma estimativa para a construção da cavidade que se precisa.

O nosso requerimento principal está relacionado à resposta eletrônica do detetor balanceado Thorlabs PDB140C. A escolha deste modelo de detetor foi devido ao ao baixo ruído do dispositivo em relação a outros detetores disponíveis no laboratório, característica importante para trabalhar com feixes de luz com potências baixas (da ordem de dezenas de microwatts) na hora de medir flutuações de ruído da ordem do nível de shot-noise. O ruído eletrônico do detetor Thorlabs PDB140C é mostrado na figura (4.5) para diferentes frequências de análise, sendo este constante para frequências de análise entre 0 e, aproximadamente, 12 MHz. Para valores maiores, o detetor começa a apresentar uma resposta que diminui e que não brinda muita confiança para efetuar medições. Por este motivo, precisamos que a cavidade de filtro consiga fornecer uma fonte coerente para frequências de análise como as mencionadas. Das estimações feitas para a cavidade de filtro planejada, pode-se ver que para frequências de análise a partir de 10 MHz, o ruído é atenuado até valores próximos à unidade. Deste modo, uma cavidade de filtro como a proposta cumpre com os nossos requerimentos.

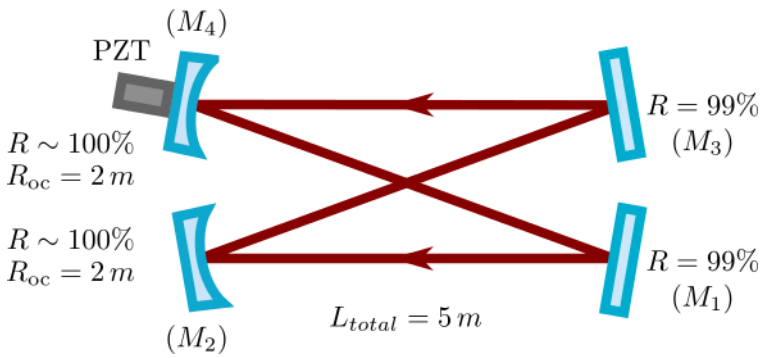

Figura 4.10: Geometria e configuração da cavidade de filtro.

A configuração da cavidade de filtro construída pode-se ver na figura (4.10) e nas fotografias da figura (4.11). Os espelhos curvos usados foram ATFilms com coating HR para 1560 nm e raio de curvatura de 2 m. Os espelhos planos usados foram da empresa Layertec com coating de transmitância de 0,5% para 1560 nm para ângulo de incidência entre 0 - 10° e servem como entrada e saída do feixe a ser filtrado. Os espelhos curvos foram da empresa ATFilms, sendo ambas de alta refletividade. Os detalhes se mostram na tabela (4.4).

Em relação ao sistema optomecânico da cavidade de filtro, utilizou-se uma estrutura de alumínio em forma de tubo retangular como se mostra na figura (4.11) de 1,25 m de comprimento e 6 cm de largura. Nos extremos do tubo, se empregaram suportes de espelho Newport MFM-100 que seguravam os espelhos da cavidade.

Cav. Filtro - Espelhos	
M_1	Plano / AIO° $\sim$ 0-10 / $R_{1560nm} = 99\%$
M_2	$R_{oc} = 2\,m$ / AIO° $\sim$ 0-10 / $R_{1560nm} : HR$
M_3	Plano / AIO° $\sim$ 0-10 / $R_{1560nm} = 99\%$
M_3	$R_{oc} = 2\,m$ / AIO° $\sim$ 0-10 / $R_{1560nm} : HR$

Tabela 4.4: Parâmetros dos espelhos da cavidade de análise.

As características da cavidade de filtro obtidas experimentalmente se mostram na tabela (4.5):

Cav. Filtro	
Intervalo Espectral livre (ν_{FSR})	62,4 MHz
Largura de banda ($\delta\nu_c$)	209,2 kHz
Finesse ($\mathcal{F}$)	298,1

Tabela 4.5: Parâmetros da cavidade de filtro.

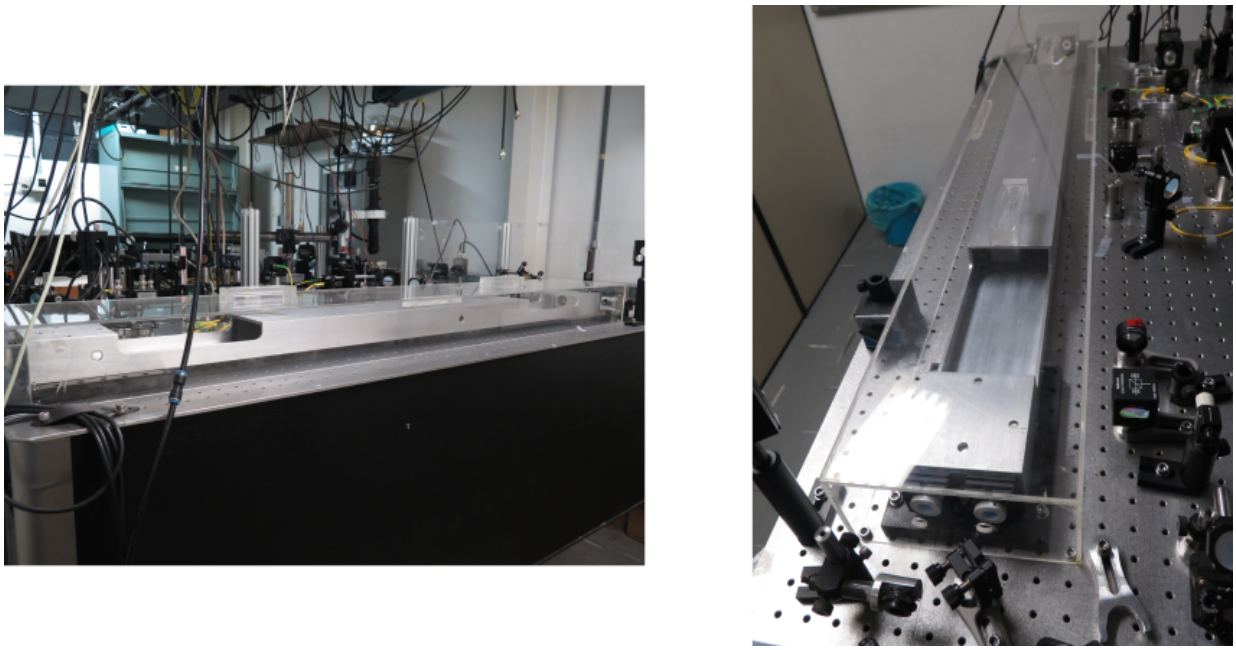

Figura 4.11: Fotografias da cavidade de filtro construída.

4.2.2 Sistema de travamento

Uma vez alinhada a cavidade, levando em conta as condições do perfil espacial do modo ressonante e realizando a acordo de modo apropriado, o passo a seguir consistiu

em fazer o travamento da cavidade na linha de ressonância. Para isto, fizeram-se duas tentativas de travamento.

A primeira foi usando o modelo Dither-Locking [Li, 2017], fazendo uma modulação da corrente do laser RIO em alguns kilo-hertz e gerando o sinal de erro com um amplificador Lock-in. O sinal de erro era logo introduzido num circuito PID e reinjetado em forma de modulação no PZT da cavidade. A figura (4.12) mostra o esquema descrito.

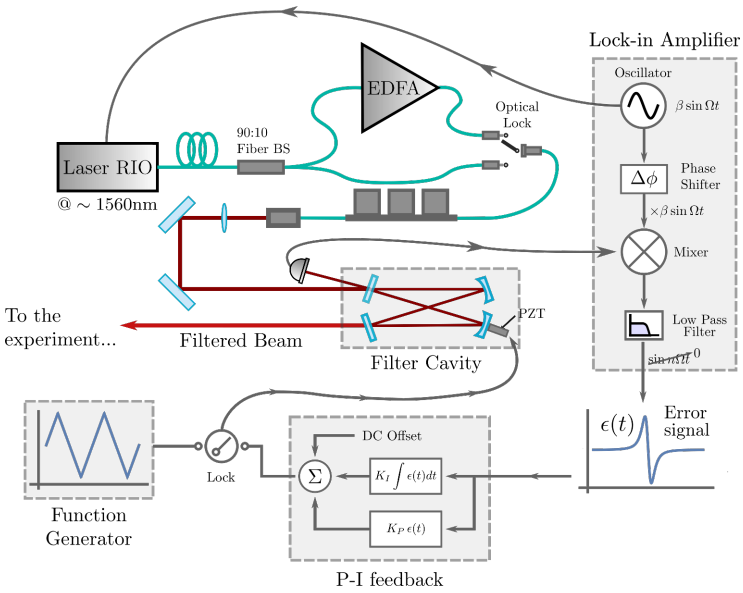

Figura 4.12: Sistema de travamento Dither-Locking com modulação na frequência do laser.

Esse modelo de travamento, no entanto, era muito sensível a vibrações mecânicas, o qual dificultava ter um bom nível de atenuação de ruído.

A segunda opção de travamento foi seguir o modelo Hänsch–Couillaud [Hansch and Couillaud, 1980] no qual não é necessária uma modulação, mas sim um controle adequado da polarização do feixe ressonante e do controle de polarização do feixe refletido que é utilizado para gerar o sinal de erro [Libson et al., 2015]. Usando um PBS, além do controle de polarização, garantiu-se que o feixe de entrada na cavidade estivesse na polarização horizontal (polarização P), favorecendo assim a ressonância do modo da cavidade com finesse de 300. No feixe refletido da cavidade, encontravam-se uma componente horizontal com uma fase adicional como consequência da passagem pela cavidade, além de uma componente vertical quase nula. Essa última componente, mesmo de baixa intensidade, tem sua origem na polarização preferencial da cavidade que não era perfeitamente horizontal. O passo a seguir foi a rotação das duas componentes em polarizações vertical e horizontal de igual magnitude usando uma lâmina

de meia onda, para logo atravessar um PBS que permita a divisão dos feixes e a posterior substração para a geração do sinal de erro. A figura (4.13) detalha o esquema de travamento utilizado nesse caso.

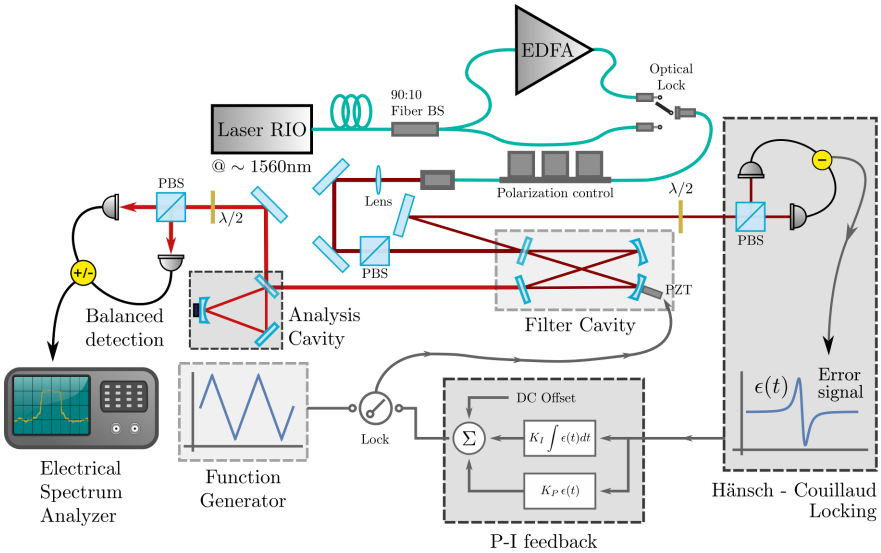

Figura 4.13: Sistema de travamento Hänsch–Couillaud. Após a saída da cavidade de filtro, mostra-se a cavidade de análise que permite estudar a rotação da elipse de ruído.

Os resultados obtidos com esse modelo foram satisfatórios, tanto pela robustez do sistema quanto pelo nível de atenuação de ruído obtida.

4.2.3 Resultados da filtragem

Com o travamento do laser obtido, a última etapa da filtragem consistiu em analisar a qualidade do ruído do laser. Estudou-se o nível de ruído para potências entre 40 e 90 μW, sendo que as potências dos feixes gêmeos a serem gerados no OPO em chips são destas ordens. A análise do ruído filtrado efetuou-se tanto para a filtragem direta do laser RIO quanto para a filtragem após a amplificação com o EDFA (Erbium-doped fiber amplifier). Os resultados obtidos para potências de 50 μW são mostrados nas figuras (4.14) e (4.15). Dos gráficos apresentados, pode-se observar claramente que o nível dos ruídos de amplitude e fase estão no nível de shot-noise para frequências a partir de 12 MHz, com o qual se conclui que a cavidade de filtro fornece um estado coerente para as frequências de análise de interesse.

A largura de banda do OPO em chips é por volta de 200 MHz, possibilitando o uso de frequências de análise relativamente altas em comparação com as versões usuais macroscópicas do OPO que existem no LMCAL (alguns MHz). Por tanto, trabalhar para uma frequência de análise de 12 MHz não supõe maior dificuldade para enxergar

efeitos de squeezing na saída do OPO. A única limitante, embora, estaria na resposta do detetor balanceado, que impõe um limite de leitura de até uns 15 MHz de frequência de análise. Dos gráficos mostrados, pode-se notar que a distância entre o ruído eletrônico e o shot-noise se reduz conforme a frequência de análise aumenta. Embora, escolhendo 12 MHz, a distancia se mantém em 3 dB, o qual é um valor aceitável para a detecção de efeitos de squeezing.

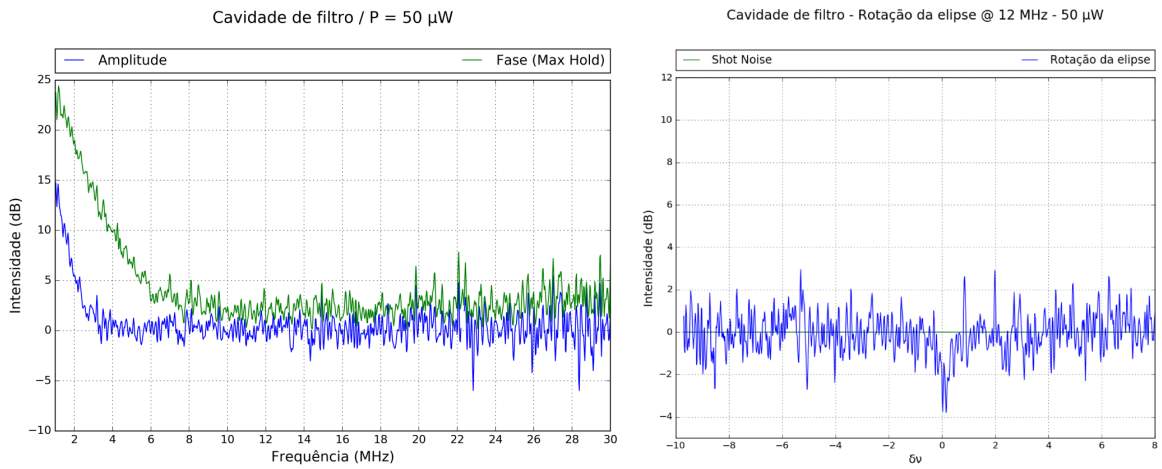

Figura 4.14: Estudo do ruído do laser RIO filtrado. No gráfico da esquerda, mostra-se a varredura para frequências entre 1 e 30 MHz. Os gráfico da direita mostra o ruído para a frequência de análise de 12 MHz.

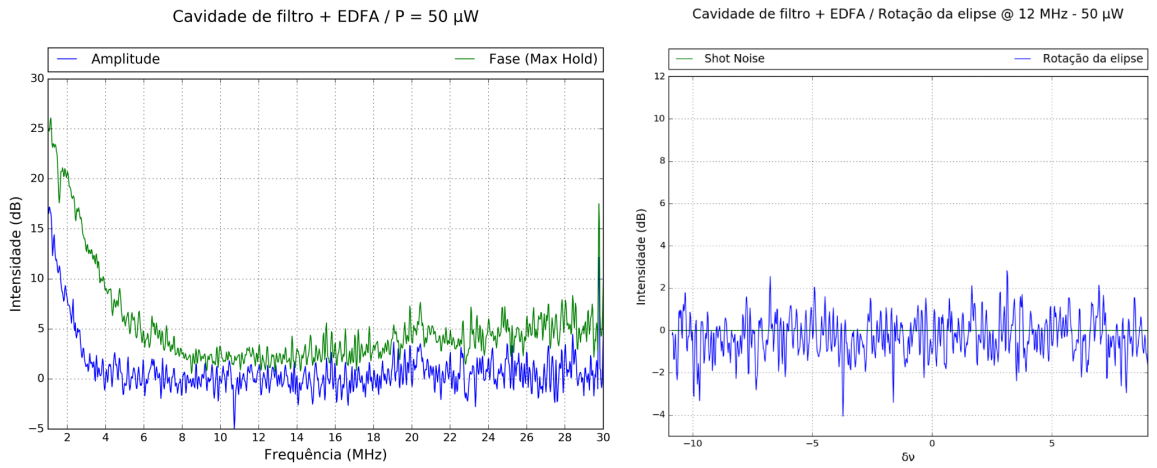

Figura 4.15: Estudo do ruído do laser RIO filtrado após amplificação no EDFA.No gráfico da esquerda, mostra-se a varredura para frequências entre 1 e 30 MHz. Os gráfico da direita mostra o ruído para a frequência de análise de 12 MHz.

4.3 Análise dos chips de Si_3N_4

O objetivo do presente trabalho é analisar o comportamento dos chips para o seu funcionamento como OPOs. Para isso, o primeiro requerimento para a montagem de um sistema de geração de estados não-clássicos, a fonte coerente, foi obtida. O passo próximo consiste em estudar a resposta dos chips uma vez que se faz incidir o feixe de bombeio com uma potência suficientemente alta para fazer que a microcavidade esteja em ressonância. Nesta seção, explicaremos a análise que foi efetuada, começando pelo estudo do acoplamento dos microrressoadores e, posteriormente, analisando os pentes de frequências gerados, na busca de um microrressoador que possua uma potência de limiar suficiente para gerar unicamente dois modos e, ao mesmo tempo, permita um travamento estável.

A montagem utilizada é mostrada na figura (4.16). O chip tem dimensões de, aproximadamente 2 mm x 12 mm. Devido às dimensões reduzidas, é preciso utilizar um sistema de fibras taper (fibras com extremo final estreito) ou lentes com distância focal de alguns milímetros. Para a manipulação dos sistemas de entrada e saída de luz, usamos deslocadores de 3 eixos Thorlabs NanoMax. O chip se mantém encima de uma plataforma de cobre que possui uma pastilha Peltier para eventuais controles de temperatura que forem requeridos. O controle visual consegue-se com um microscópio Navitar de zoom de 12X.

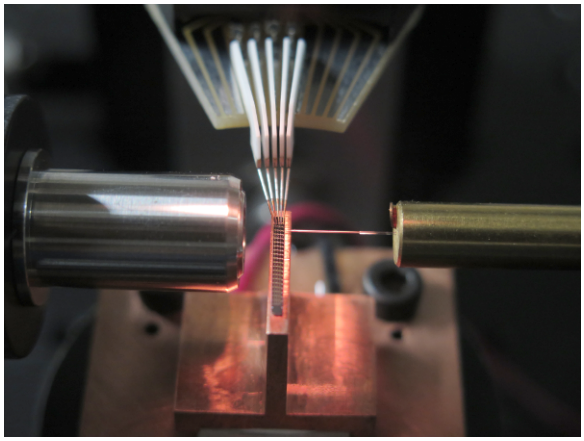

Figura 4.16: Fotografia da montagem do chip de Si_3N_4.

A configuração dos chips é mostrada na figura 4.17. Estes dispositivos foram fabricados no grupo da Profa. Lipson na Universidade de Columbia. A imagem da esquerda observa-se uma fotografia do chip vista pelo microscópio. À direita, se mostra um esquema da fotografia. Os guias de onda dirigem a luz e esta ingressa e saí dos

microrressoadores por efeito das ondas evanescentes. Logo, a luz continua seu caminho até a saída. Os anéis possuem um raio de 133 μm e estão afastados do guia de onda em distâncias indicadas em nanômetros no centro ou do lado do anel. As dimensões transversais de tanto os guias de onda quanto os microrressoadores são de, aproximadamente, 730 nm de altura e 2000 nm de largura . Os caminhos indicados em cor amarela são contatos elétricos que permitem estabelecer uma diferença de potencial nos *heaters*, localizados embaixo dos microrressoadores. Os heaters permitem variar a dessintonia das microcavidades por efeito termo-ótico [Green et al., 2007], que faz mudar o índice de refração efetivo do microrressoador e, deste modo, variar ressonância dele. Com este dispositivo podemos realizar um efeito semelhante ao que efetuam os PZT em cavidades com espelhos. A diferença de potencial se consegue aplicar utilizando umas pontas de prova de 0,2 mm de separação da empresa GGB Industries Inc.

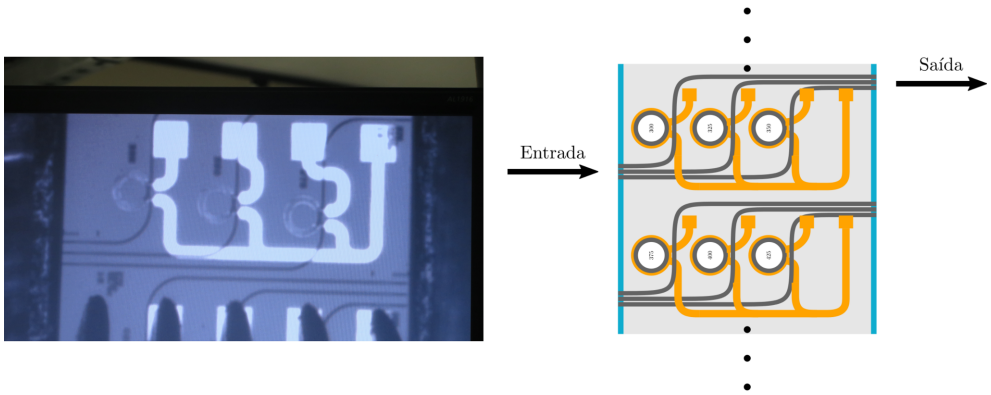

Figura 4.17: Estrutura do chip. À direita, fotografia ao microscópio. À esquerda, esquema do chip, segundo a fotografia. No esquema, representam-se em cor cinza os guias de onda e em cor amarela o sistema de contatos elétricos.

4.3.1 Análise do acoplamento

O acoplamento do OPO cumpre um papel importante na geração de feixes com squeezing. Segundo [Dutt et al., 2016], maior acoplamento, melhor qualidade de squeezing. No entanto, o acoplamento também afeta a qualidade do ressoador pois, segundo se viu na seção (2.4), acoplamentos diferentes ao crítico fazem que a potência intracavidade seja menor e, com isso, a potência de limiar necessária para a oscilação aumenta.

A caracterização foi feita usando um feixe de bombeio de potência ao redor de algumas dezenas de microwatts. Isto com a finalidade de não gerar efeitos térmicos que comprometam a caracterização. O heater foi submetido a uma tensão rampa fornecida

pelo gerador de funções, para poder fazer dessintonias e observar picos de ressonância. A polarização utilizada foi TM, segundo os dados de fabricação para a qual foi feito o casamento de fase para geração de FWM.

Os resultados obtidos são mostrados na figura (4.18). Da figura, pode-se ver que o acoplamento é máximo para o caso de *gap* de 350 nm. Este caso é o mais próximo ao acoplamento crítico que se obteve. Temos que lembrar que, segundo o visto na seção (3.4), o acoplamento depende das perdas espúrias e das perdas pelo acoplamento. Sendo que as perdas espúrias de cada microrressoador são idênticas, o acoplamento depende unicamente do *gap*. Quando o *gap* é menor, o ingresso de luz na cavidade aumenta e temos um acoplamento super-crítico. Conforme o *gap* aumenta, passa pelos estágios de acoplamento crítico e sub-crítico. Por este motivo, podemos observar que o acoplamento diminui e logo aumenta.

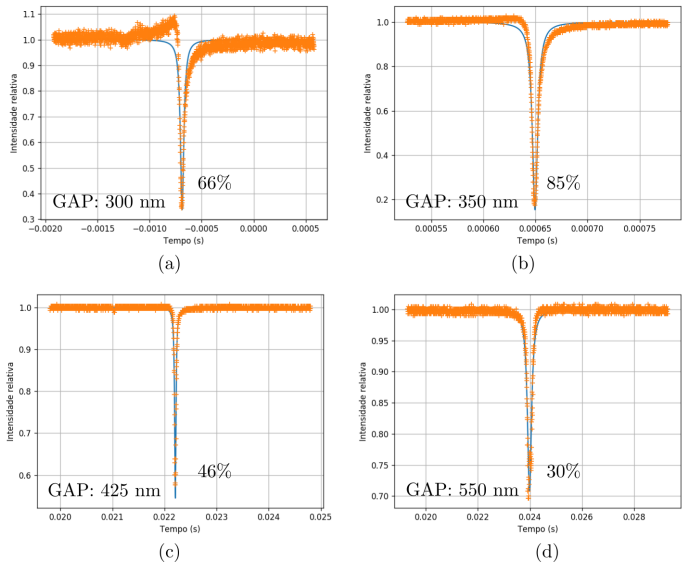

Figura 4.18: Acoplamentos analisados em alguns ressoadores. (a) *gap*: 300 nm, (b) *gap*: 350 nm, (c) *gap*: 420 nm, (d) *gap*: 550 nm

4.3.2 Geração de pentes de frequência

O passo seguinte consiste em estudar a resposta dos microrressoadores com potências de bombeio próximas ao limiar de oscilação e observar o que se gera com ajuda de um analisador de espectro ótico. Na nossa análise, iniciamos com o microrressoador de *gap* de 350 nm, por ser aquele que oferecia acoplamento crítico e uma menor potência de limiar. Na figura (4.19) se mostram os modos gerados para este microrressoador.

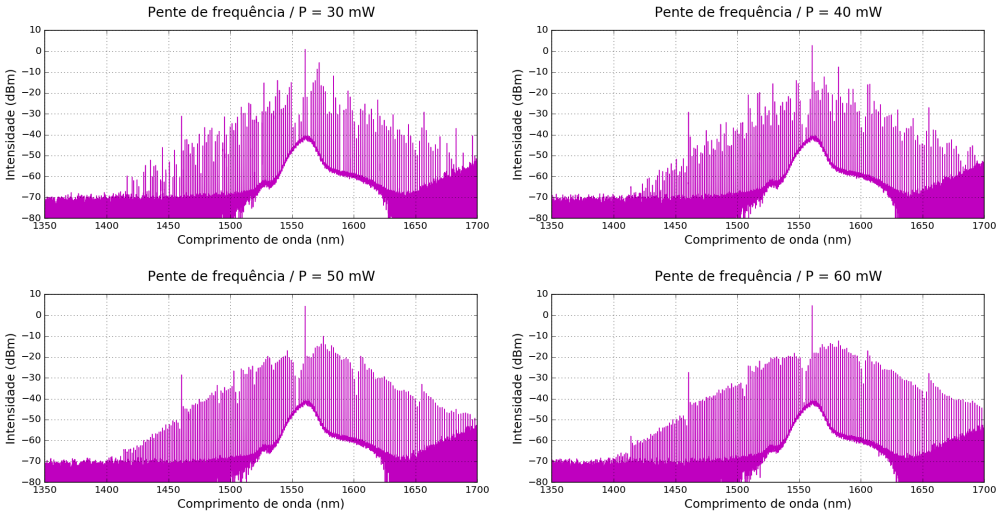

Figura 4.19: Pentes de frequência gerados para o microrressoador con *gap* 350 (acoplamento crítico).

O microrressoador de *gap* 350 possui uma grande facilidade para gerar pentes de frequência. Este efeito se da quando os modos de FWM gerados conseguem gerar outros modos adicionais sucessivamente, dando lugar a um efeito cascata. Os casos mostrados na figura (4.19) foram feitos fazendo um travamento manual da tensão do heater, sendo que a potência mínima para a qual se conseguiu travar foi de 30 μW de potência de entrada no chip.

O passo seguinte será analisar outro ressoador com acoplamento mais super-crítico (maior potência de limiar e maior qualidade de squeezing), e observar se este caso permite gerar menos modos ressonantes. O resultado da análise se mostra na figura (4.20).

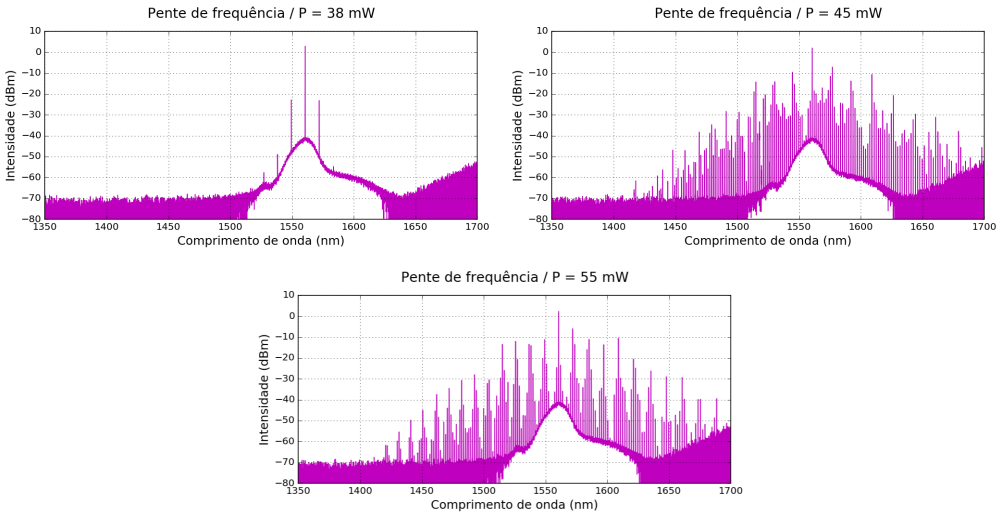

Figura 4.20: Pentes de frequência gerados para o microrressoador con *gap* 300 (acoplamento super-crítico).

Da figura (4.20), observa-se que para uma potência de 38 μW foi possível obter um conjunto de quatro modos gerados. Este fato nos indica que, escolhendo microrressoadores com potências de limiar maiores, as possibilidades de gerar pentes de frequência com menor número de modos aumenta.

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas

Nesta dissertação, mostramos os primeiros avanços na construção de um sistema de caracterização dos microrressoadores em chips operando como OPOs, com o objetivo final de analisar as propriedades quânticas dos feixes gerados e explorar as potencialidades que esta plataforma oferece.

A construção da cavidade de filtro permitiu uma redução do excesso de ruído de fase do nosso laser RIO, originalmente em torno de 40 dB, para valores praticamente nulos, chegando ao shot noise, semelhante ao que é visto no ruido de amplitude. Esta filtragem converte a luz do laser em um estado coerente nas quadraturas de fase e amplitude, ideal para ser utilizado como fonte de bombeio para processos de geração de feixes sinal e complementar em OPOs. Esta fonte laser coerente em 1560 nm manifesta um comportamento de tal tipo para frequências de análise a partir de 12 MHz, valor para o qual temos uma resposta aceitável nos nossos detetores para potências de detecção da ordem de algumas dezenas de microwatts.

Fizemos análises da resposta dos chips para algumas potências de bombeio. Dependendo do tipo de acoplamento, observamos, indiretamente (para uma mesma potência, o número de modos gerados variava de um microrressoador para outro), potências de limiar distintas para a geração efeitos cascata de FWM, gerando pentes de frequência, que acontecem em potências acima do limiar de oscilação. Porém, ao longo das tentativas por obter uma potência suficientemente baixa e que permitisse um travamento aceitável e geração de unicamente dois modos, não foi possível conseguir uma situação com tais características. Uma alternativa seria procurar um microressoador com acoplamento mais supercrítico ou, em outros termos, com menor distância entre o microrressoador e o guia de onda (menor que 300 nm, que foi o valor mínimo utilizado), o qual permita ter uma potência de limiar superior. Deste modo, para potências maiores, espera-se encontrar situações mais favoráveis para a geração de unicamente

dois modos, levando em conta, além disso, que a potência de limiar obtida em [Dutt et al., 2015] foi em torno de ∼90mW.

As perspectivas para o presente projeto envolvem a culminação do sistema de caracterização. Isto é, uma vez obtidas as condições para as quais pode-se obter um sistema OPO que gere dois feixes sinal e complementar, iniciar o processo de análise através de auto-homodinagem para determinar a existência de squeezing. De obter um caso favorável, o passo seguinte consistirá em fazer uma análise com auto-homodinagem individual para cada feixe gerado, o que nos permitirá analisar correlações quânticas entre eles. A figura (5.1) mostra um esquema do arranjo experimental final.

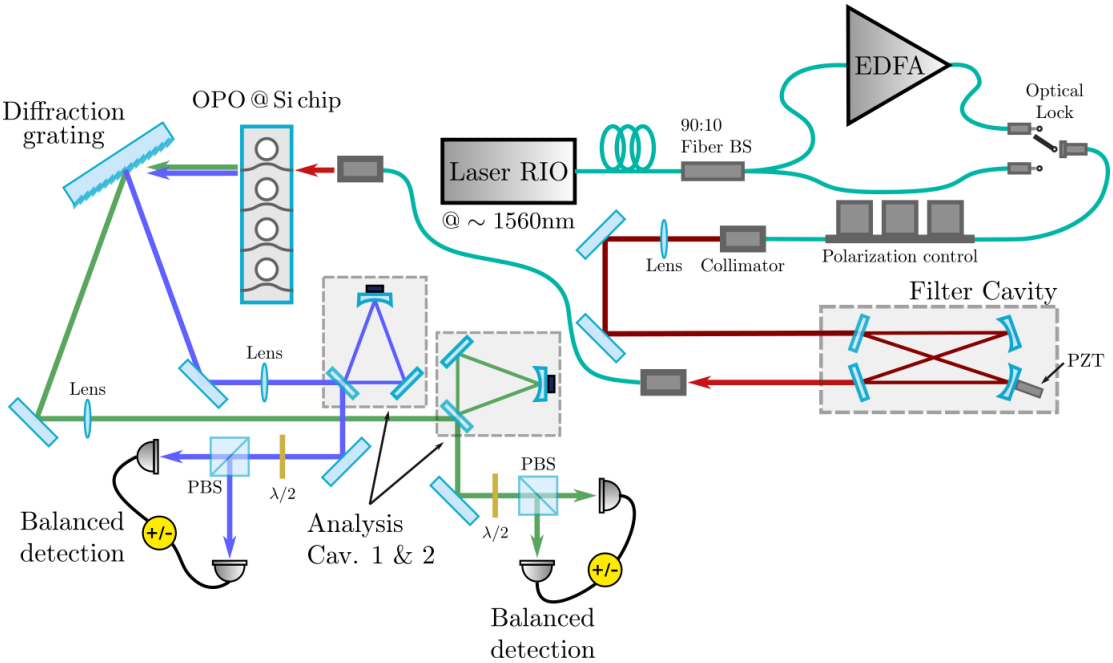

Figura 5.1: Esquema do aparato experimental que será usado para a completa caracterização das correlações quânticas dos feixes sinal e complementar gerados no OPO em chip.

Bibliografia

[Agrawal, 2018] Agrawal, G. (2018). *Nonlinear Fiber Optics*. Optics and Photonics. Elsevier Science & Technology Books.

[Arai, 2013] Arai, K. (2013). On the accumulated round-trip gouy phase shift for a general optical cavity. *LIGO Technical Report*. T1300189–v1.

[Bachor and Ralph, 2004] Bachor, H. and Ralph, T. (2004). *A Guide to Experiments in Quantum Optics*. Wiley.

[Barbosa et al., 2013] Barbosa, F. A., Coelho, A. S., Cassemiro, K. N., Nussenzveig, P., Fabre, C., Martinelli, M., and Villar, A. S. (2013). Beyond spectral homodyne detection: Complete quantum measurement of spectral modes of light. *Physical Review Letters*, 111(20):1–5.

[Barbosa et al., 2010] Barbosa, F. A. S., Coelho, A. S., de Faria, A. J., Cassemiro, K. N., Villar, A. S., Nussenzveig, P., and Martinelli, M. (2010). Robustness of bipartite Gaussian entangled beams propagating in lossy channels. *Nature Photonics*, 4(12):858–861.

[Bogaerts et al., 2005] Bogaerts, W., Baets, R., Dumon, P., Wiaux, V., Beckx, S., Taillaert, D., Luyssaert, B., Van Campenhout, J., Bienstman, P., and Van Thourhout, D. (2005). Nanophotonic waveguides in silicon-on-insulator fabricated with CMOS technology. *Journal of Lightwave Technology*, 23(1):401–412.

[Bogaerts et al., 2010] Bogaerts, W., Selvaraja, S. K., Dumon, P., Brouckaert, J., De Vos, K., Van Thourhout, D., and Baets, R. (2010). Silicon-on-insulator spectral filters fabricated with CMOS technology. *IEEE Journal on Selected Topics in Quantum Electronics*, 16(1):33–44.

[Boyd and Prato, 2008] Boyd, R. and Prato, D. (2008). *Nonlinear Optics*. Nonlinear Optics Series. Elsevier Science.

[Cassemiro, 2008] Cassemiro, K. N. (2008). *Correlações quânticas multicolores no oscilador paramétrico ótico*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, São Paulo.

[Cassemiro et al., 2007a] Cassemiro, K. N., Villar, a. S., Martinelli, M., and Nussenzveig, P. (2007a). The quest for three-color entanglement: experimental investigation of new multipartite quantum correlations. *Optics express*, 15(26):18236–46.

[Cassemiro et al., 2007b] Cassemiro, K. N., Villar, A. S., Valente, P., Martinelli, M., and Nussenzveig, P. (2007b). Experimental observation of three-color optical quantum correlations. *Optics letters*, 32(6):695–697.

[Clarke and Wilhelm, 2008] Clarke, J. and Wilhelm, F. K. (2008). Superconducting quantum bits. *Nature*, 453(7198):1031–1042.

[Coelho et al., 2009] Coelho, A. S., Barbosa, F. A. S., Cassemiro, K. N., Villar, A. S., Martinelli, M., and Nussenzveig, P. (2009). Three-Color Entanglement. *Science*, 326(5954):823–826.

[Coelho, 2013] Coelho, A. S. O. (2013). *Emaranhamento multicor para redes de informação quântica*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, São Paulo.

[Cohen-Tannoudji et al., 1991] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., and Laloe, F. (1991). *Quantum Mechanics*. Number v. 1 in Quantum Mechanics. Wiley.

[Davidovich, 2015] Davidovich, L. (2015). Teoria quântica do laser (notas de aula). Instituto de Física. Universidade Federal do Rio de Janeiro.

[De Araújo, 2015] De Araújo, R. M. (2015). Basics for measuring light quantum fluctuations and correlations in the lab. LMCAL - Laboratory Notes.

[Dirac, 1927] Dirac, P. A. M. (1927). The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 114(767):243–265.

[Duan et al., 1999] Duan, L.-M., Giedke, G., Cirac, J. I., and Zoller, P. (1999). Inseparability criterion for continuous variable systems. *Physical Review Letters*, 84(1):2722–2725.

[Dutt, 2017] Dutt, A. (2017). *On-Chip Quantum and Nonlinear Optics: From Squeezing To Spectroscopy*. PhD thesis, Cornell University.

[Dutt et al., 2015] Dutt, A., Luke, K., Manipatruni, S., Gaeta, A. L., Nussenzveig, P., and Lipson, M. (2015). On-Chip Optical Squeezing. *Physical Review Applied*, 3(4):1–7.

[Dutt et al., 2016] Dutt, A., Miller, S., Luke, K., Cardenas, J., Gaeta, A. L., Nussenzveig, P., and Lipson, M. (2016). Tunable squeezing using coupled ring resonators on a silicon nitride chip. *Optics Letters*, 41(2):223.

[Einstein et al., 1935] Einstein, A., Podolsky, B., and Rosen, N. (1935). Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Correct? *Foundations of Physics*, 40(4):463–468.

[Galatola et al., 1991] Galatola, P., Lugiato, L. A., Porreca, M. G., Tombesi, P., and Leuchs, G. (1991). System control by variation of the squeezing phase. *Optics Communications*, 85(1):95–103.

[Gardiner and Collett, 1985] Gardiner, C. W. and Collett, M. J. (1985). Input and output in damped quantum systems: Quantum stochastic differential equations and the master equation. *Physical Review A*, 31(6):3761–3774.

[Gerry and Knight, 2005] Gerry, C. and Knight, P. (2005). *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press.

[Glauber, 1963] Glauber, R. J. (1963). Coherent and incoherent states of the radiation field. *Phys. Rev.*, 131:2766–2788.

[González-Arciniegas et al., 2017] González-Arciniegas, C., Treps, N., and Nussenzveig, P. (2017). Third-order nonlinearity OPO: Schmidt Mode Decomposition And Tripartite Entanglement. 42(23):1–4.

[González Arciniegas, 2017] González Arciniegas, C. A. (2017). *Properties of the light emitted by a silicon on-chip Optical Parametric Oscillator (OPO)*. PhD thesis, Universidade de São Paulo.

[Gottfried and Yan, 2003] Gottfried, K. and Yan, T. (2003). *Quantum Mechanics: Fundamentals*. Graduate Texts in Contemporary Physics. Springer New York.

[Green et al., 2007] Green, W. M. J., Hamann, H. F., Sekaric, L., Rooks, M. J., and Vlasov, Y. A. (2007). Ultra-compact reconfigurable silicon optical devices using micron-scale localized thermal heating. In *OFC/NFOEC 2007 - 2007 Conference on Optical Fiber Communication and the National Fiber Optic Engineers Conference*, pages 1–3. IEEE.

[Grynberg et al., 2010] Grynberg, G., Aspect, A., Fabre, C., and Cohen-Tannoudji, C. (2010). *Introduction to Quantum Optics: From the Semi-classical Approach to Quantized Light*. Cambridge University Press.

[Hansch and Couillaud, 1980] Hansch, T. and Couillaud, B. (1980). Laser frequency stabilization by polarization spectroscopy of a reflecting reference cavity. *Optics Communications*, 35(3):441–444.

[Heebner and Boyd, 2003] Heebner, J. E. and Boyd, R. W. (2003). *Nonlinear Optical Whispering Gallery Microresonators for Photonics*. PhD thesis, University of Rochester.

[Jalali and Fathpour, 2006] Jalali, B. and Fathpour, S. (2006). Silicon Photonics. *Journal of Lightwave Technology*, 24(12):4600–4615.

[Kimble, 2008] Kimble, H. J. (2008). The quantum internet. *Nature*, 453(7198):1023–1030.

[Kogelnik and Li, 1966] Kogelnik, H. and Li, T. (1966). Laser Beams and Resonators. *Proceedings of the IEEE*, 54(10):1312–1329.

[Lam and Ralph, 2013] Lam, P. K. and Ralph, T. C. (2013). Quantum Cryptography: Continuous improvement. *Nature Photonics*, 7(5):350–352.

[Levy et al., 2010] Levy, J. S., Gondarenko, A., Foster, M. A., Turner-Foster, A. C., Gaeta, A. L., and Lipson, M. (2010). CMOS-compatible multiple-wavelength oscillator for on-chip optical interconnects. *Nature Photonics*, 4(1):37–40.

[Li, 2017] Li, X. (2017). Laser frequency stabilization. Caltech Institute of Technology. Ph77 - Caltech Senior Physics Laboratory. Atomic and Optical Physics, Lecture Notes. URL: http://pmaweb.caltech.edu/~ph77/ (Acessado em 28 de Novembro de 2017).

[Libson et al., 2015] Libson, A., Brown, N., Buikema, A., López, C. C., Dordevic, T., Heising, M., and Evans, M. (2015). Simple method for locking birefringent resonators. *Optics Express*, 23(3):3809.

[Lukin, 2003] Lukin, M. D. (2003). Colloquium: Trapping and manipulating photon states in atomic ensembles. *Reviews of Modern Physics*, 75(2):457–472.

[Machida and Yamamoto, 1986] Machida, S. and Yamamoto, Y. (1986). Observation of sub-poissonian photoelectron statistics in a negative feedback semiconductor laser. *Optics Communications*, 57(4):290–296.

[Mandel and Wolf, 1995] Mandel, L. and Wolf, E. (1995). *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press.

[Montana, 2017] Montana, A. (2017). Oscilador Paramétrico Ótico baseado em mistura de quatro ondas em vapor de rubídio. Master's thesis, Universidade de São Paulo.

[Moore, 1965] Moore, G. E. (1965). Cramming More Components onto Integrated Circuits. *Electronics*, 38(8):114–117.

[Neumann et al., 2008] Neumann, P., Mizuochi, N., Rempp, F., Hemmer, P., Watanabe, H., Yamasaki, S., Jacques, V., Gaebel, T., Jelezko, F., and Wrachtrup, J. (2008). Multipartite entanglement among single spins in diamond. *Science*, 320(5881):1326–1329.

[Nielsen and Chuang, 2010] Nielsen, M. and Chuang, I. (2010). *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition*. Cambridge University Press.

[Nizovtsev, 2005] Nizovtsev, A. P. (2005). A Quantum Computer Based on NV Centers in Diamond: Optically Detected Nutations of Single Electron and Nuclear Spins. *Optics and Spectroscopy*, 99(2):233.

[Nussenzveig, 1973] Nussenzveig, H. (1973). *Introduction to Quantum Optics*. Documents on Modern Physics: Gordon and Breach. Gordon and Breach Science Publishers.

[Nyquist, 1928] Nyquist, H. (1928). Thermal agitation of electric charge in conductors. *Phys. Rev.*, 32:110–113.

[Ohashi et al., 1982] Ohashi, M., Kitayama, K., Ishida, Y., and Uchida, N. (1982). Phase-matched light amplification by three-wave mixing process in a birefringent fiber due to externally applied stress. *Applied Physics Letters*, 41(12):1111–1113.

[Orszag, 2000] Orszag, M. (2000). *Quantum Optics:*. Advanced texts in physics. Springer.

[Ou et al., 1992] Ou, Z. Y., Pereira, S. F., Kimble, H. J., and Peng, K. C. (1992). Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox for continuous variables. *Physical Review Letters*, 68(25):3663–3666.

[Peřina, 1977] Peřina, F. (1977). Photon statistics and quantum limits of measurements. In Buzuloiu, V., editor, *Image Processing for Future High Energy Physics Detectors*, page 172. Wiley.

[Rempe and Walther, 1993] Rempe, G. and Walther, H. (1993). *The One-Atom Maser and the Generation of Nonclassical Light*, pages 123–144. Springer US, Boston, MA.

[Rojas, 2017] Rojas, H. (2017). Caracterização da amplificação paramétrica no processo de mistura de quatro ondas na configuração duplo-lambda em vapor de Rubídio. Master's thesis, Universidade de São Paulo.

[Rowland and Love, 1993] Rowland, D. R. and Love, J. D. (1993). Evanescent-wave coupling of whispering-gallery modes of a dielectric cylinder. *IEEE Proceedings-J Optoelectronics*, 140(3):177–188.

[Saleh and Teich, 2007] Saleh, B. and Teich, M. (2007). *Fundamentals of Photonics*. Wiley Series in Pure and Applied Optics. Wiley.

[Siegman, 1986] Siegman, A. (1986). *Lasers*. University Science Books.

[Simon, 2000] Simon, R. (2000). Peres-Horodecki separability criterion for continuous variable systemss. *Physical Review Letters*, 84(12):2726–2729.

[Soref, 2006] Soref, R. (2006). The Past, Present, and Future of Silicon Photonics. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 12(6):1678–1687.

[Villar, 2007] Villar, A. d. S. (2007). *Emaranhamento multicolor entre feixes intensos de luz*. PhD thesis, Universidade de São Paulo, São Paulo.

[Villar, 2008] Villar, A. S. (2008). The conversion of phase to amplitude fluctuations of a light beam by an optical cavity. *American Journal of Physics*, 76(10):922.

[Villar et al., 2005] Villar, A. S., Cruz, L. S., Cassemiro, K. N., Martinelli, M., and Nussenzveig, P. (2005). Generation of bright two-color continuous variable entanglement. *Physical Review Letters*, 95(24):1–4.

[Walker and Jakeman, 1985] Walker, J. G. and Jakeman, E. (1985). Optical Dead Time Effects And Sub Poissonion Photo-Electron Counting Statistics. Number March 1985, page 274.

[Walls and Milburn, 2008] Walls, D. and Milburn, G. (2008). *Quantum Optics*. SpringerLink: Springer e-Books. Springer Berlin Heidelberg.

[Weisskopf and Wigner, 1930] Weisskopf, V. and Wigner, E. (1930). Berechnung der natürlichen linienbreite auf grund der diracschen lichttheorie. *Zeitschrift für Physik*, 63(1):54–73.

[Yariv, 1989] Yariv, A. (1989). *Quantum electronics*. Wiley.

[Yuen and Shapiro, 1979] Yuen, H. P. and Shapiro, J. H. (1979). Generation and detection of two-photon coherent states in degenerate four-wave mixing. *Optics Letters*, 4(10):334.