Universidade de São Paulo

Instituto de Física

Efeitos Cosmológicos Induzidos por Campos Quantizados

Yul Otani

Orientador:

Prof. Dr. João Carlos Alves Barata

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Física para a obtenção do título de Mestre em Ciências

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Carlos Alves Barata - IFUSP.Prof. Dr. Elcio Abdalla - IFUSP.Prof. Dr. Daniel Augusto Turolla Vanzella - IFSC.

São Paulo 2010

FICHA CATALOGRÁFICA Preparada pelo Serviço de Biblioteca e Informação do Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Otani, Yul

Efeitos cosmológicos induzidos por campos quantizados. São Paulo, 2010.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo. Instituto de Física, Departamento de Física Matemática

Orientador: Prof. Dr. João Carlos Alves Barata Área de Concentração: Física Matemática

Unitermos: 1. Relatividade (Física); 2. Teoria quântica de campo ;3. Física matemática.

USP/IF/SBI-056/2010

Agradecimentos

Agradeço a tudo e todos aqueles que direta ou indiretamente contribuiram para a realização deste trabalho¹. Ou seja, sendo o atual momento e lugar um evento dentro de uma pequena vizinhança U de nosso espaço-tempo, agradeço a todo passado causal de U, dado por $J^{-}(U)$ (veja seção 2.3).

Vale lembrar que {Fapesp, CNPq} $\cap J^-(U) \neq \emptyset$. Então a essas entidades também agradeço, de maneira especial, pois sem elas teria morrido de fome. Também enfatizo que meu orientador tem grande presença em $J^-(U)$, pois sem ele eu nem saberia o que significa essa notação.

 $^{^{\}rm 1}{\rm o}$ agradecimento mais picareta da história

comentaram que era melhor eu ser mais explícito...

Agradeço a meu caro orientador, Prof. João Barata. Motivos não faltam! Pela sua extrema paciência comigo, por sua compreensão quanto a minhas lacunas de formação e limitações, mas também pelo seu voto de confiança em mim nesse trabalho. Agradeço a meu orientador por ter apontado um interessante ramo de pesquisa, o qual não somente merece muita atenção e cuidado no futuro, mas que por si só apresenta muita beleza de pensamento.

Não poderia deixar de agradecer aos professores que passaram por minha vida, principalmente à minha eterna mestra Profa. Alinka. Também agradeço ao Prof. Fleming (pelas inspiradoras histórias), ao Prof. Forger (pelas instrutivas conversas), aos Profs. Adilson e Gomes (por personificarem a simpatia no depto.) e ao Prof. Passos (por ter me emprestado a chave do banheiro, e por muito mais!). Também agradeço ao Prof. Alves (pelas boas conversas sobre matemática e música), ao Pedro Sensei (por me iluminar com palavras importantes do cotidiano japonês, como por exemplo *catapulta*) e ao Prof. Hase (por enfatizar a importância de se utilizar uma boa notação e de se saber somar frações).

Agradeço aos velhos amigos de São José dos Campos e aos tantos novos amigos que encontrei em São Paulo. Nas Ciências Moleculares, Centro de Línguas, Asebex, Farmácia, Ime e Farmime, companheiros de beisebol, softbol, moradia e tanto mais. Menciono com boas lembranças minhas turmas Farma-04 e CCM-TXIV, e digo que guardarei com carinho os incentivos de Fausto Jun, dona Usui, dona Chui e Prof. Truffi. Guardo com muito rancor os insultos da víbora do ocidente, Ana Maria Fedida. Agradeço aos amigos do Pelletron e da Fismat e da Física inteira, em especial a patota do Diretas e o Baiano, Juliano, Roberto, Rone, Lucaix, Gabi, Pinheirinho (minha eterna colega) e Matthias. Devo muito a Pedrinho Lauridsen, Nelson, Daniel e Metal, por valiosas discussões sobre teoria de campos e tudo mais.

Esse trabalho não teria saído sem o grande apoio da minha família. Agradeço ao primeiro físico da minha vida, meu pai, que ententende tanto do que eu faço quanto eu entendo das coisas com que ele trabalha. Agradeço e peço desculpas a minha mãe, por todo transtorno que eu sempre causo. Agradeço o carinho e cuidado de minhas irmãs e meus cunhados, Ly & Gui & Ly & Gui. Agradeço também a minhas tias Rumi e Mika e meus primos Sayaka e Kenyu.

Agradeço especialmente a minha irmã Marina, que sempre me inspira com amor que demonstra pela sua ciência. Também agradeço a meu eterno mentor espiritual, Ronaldo, e a meus queridos amigos Alex (pelo companheirismo sincero), Takeo (pelas lições de vida) e bu (por ser o irmão que eu nunca quis ter).

Agradeço com muito carinho a minha querida flautista grega.

Eu já tinha falado da Fapesp e do CNPq, mas sempre é bom dar ênfase. Obrigado! Instituições como essas permitem que possamos continuar nossas pesquisas.

Resumo

A presente dissertação revisa um modelo, de autoria de C. Dappiaggi, K. Fredenhagen e N. Pinamonti, de um campo escalar real quântico não-interagente acoplado com a métrica de um espaço-tempo FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker). Apresentamos a metodologia de quantização de campos de Klein-Gordon reais em espaçostempos globalmente hiperbólicos e discorremos sobre o procedimento de regularização do tensor de energia-momento via *point-splitting*. Consideramos os campos em espaços FLRW e estados adiabáticos com flutuação média de campo dado por $\langle \Phi^2 \rangle = \alpha m^2 + \beta R$, com α, β constantes provenientes do procedimento de regularização. A retroação do campo quântico gera a equação diferencial para o parâmetro de Hubble H(t) dada por $\dot{H}(H^2 - H_c^2) = -(H^2 - H_+^2)(H^2 - H_-^2)$ com H_c uma constante e H_{\pm} pontos críticos estáveis da equação. Esse simples modelo mostra que efeitos quânticos podem, por si só, fornecer fases de de Sitter estáveis sem adição de uma constante cosmológica a priori. Mesmo que de caráter apenas qualitativo, tal resultado indica que análises cautelosas de processos de quantização são importantes para análise de efeitos cosmológicos de teorias quânticas de campos em espaços curvos.

Abstract

The present dissertation reviews the coupling of a scalar non-interacting quantum field with the metric of a FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker) spacetime, proposed in a work by C. Dappiaggi, K. Fredenhagen and N. Pinamonti. We present methods for the quantization of a real Klein-Gordon field in globally hyperbolic spacetimes and discuss procedures for the point-splitting regularization of the stress-energy tensor. We consider those fields in FLRW spacetimes and point out adiabatic states with mean field fluctuation given by $\langle \Phi^2 \rangle = \alpha m^2 + \beta R$, with α, β being constants that emerge from the regularization procedure. The backreaction of the quantum field provides a differential equation for the Hubble parameter given by $\dot{H}(H^2 - H_c^2) = -(H^2 - H_+^2)(H^2 - H_-^2)$ with H_c a constant and H_{\pm} stable critical points of the equation. In this way, this simple model demonstrates that quantum effects may, by themselves, exibit stable de Sitter phases even without an introduction of a cosmological constant by hand. Althoug in a qualitative way, such result shows that, when dealing with the backreaction issue, a careful analysis of the quantization procedures is important for the analysis of cosmological effects of models of quantum field theories in curved spacetimes. viii

Conteúdo

1	Intr	odução	1
2	Cosmologia FLRW		3
	2.1	Variedades, Vetores, Tensores	3
	2.2	Isometrias em Variedades	9
	2.3	Espaços-Tempos	10
	2.4	Espaços FLRW	12
	2.5	Dinâmica de Friedmann	13
	2.6	Algumas Identidades	18
3	Campo de Klein-Gordon Real		21
	3.1	Operador de Klein-Gordon	22
	3.2	Quantização do Campo Real de Klein-Gordon	25
	3.3	Estados	27
4 Regularização por <i>Point-Splitting</i>		ularização por <i>Point-Splitting</i>	31
	4.1	Tensor de Energia-Momento	31
	4.2	Distância Geodésica	37
	4.3	Parametriz de Hadamard	43
	4.4	Cálculo do Termo $[V_1]$	45
	4.5	Algumas Identidades de <i>Point-Splitting</i>	46
5	Equações de Einstein Semi-Clássicas em Espaços FLRW		49
	5.1	Equações de Einstein Semi-Clássicas	49
	5.2	Estados Adiabáticos	50
	5.3	Caso Não-Massivo	54
	5.4	Caso Massivo	55
	5.5	Conclusões	56
Bi	Bibliografia		

Capítulo 1

Introdução

A presente dissertação tem como objetivo revisar o modelo apresentado por Dappiaggi, Fredenhagen e Pinamonti em [DFP08], no qual um campo escalar real quântico nãointeragente (campo de Klein-Gordon real) se acopla com a métrica de um espaço-tempo de FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker).

No capítulo 2 primeiramente reunimos os pré-requisitos pertinentes à teoria da Relatividade Geral e apresentamos as notações e convenções utilizadas no presente texto. Em seguida, construímos espaços-tempos FLRW como modelos para cosmologia homogênea e isotrópica. Apresentaremos o modelo cosmológico de Friedmann utilizando o espaço FLRW como espaço-tempo que descreve o universo em grandes escalas, sendo a matéria cósmica do universo descrita por um tensor de energia-momento de um fluido perfeito. Apontaremos então os problemas de horizontes e planaridade desse modelo, assim motivando as teorias inflacionárias. Discutiremos brevemente a estrutura de modelos inflacionários, os quais em grande parte utilizam um campo escalar acoplado com a gravidade. Essa é então a motivação para o atual estudo da retroação de campo escalar com a métrica de espaços-tempos FLRW.

No capítulo 3 abordamos a quantização do campo escalar real de Klein-Gordon em espaços globalmente hiperbólicos. Apresentaremos o operador diferencial de Klein-Gordon e o campo clássico de Klein-Gordon. Identificaremos uma estrutura simplética no espaço de soluções da equação de Klein-Gordon e a partir disso quantizaremos o campo em abordagem algébrica. Apresentaremos a definição de estados algébricos e caracterizaremos estados de interesse físicos, os estados de Hadamard.

No capítulo 4 continuamos a discussão sobre campos quânticos, na busca de um observável quântico análogo para o tensor de energia-momento. Discutiremos o procedimento de *point-splitting* para determinação de um tensor de energia-momento gerado pelo campo quântico. Passaremos também por várias tecnicalidades, apresentando um resumo sobre manipulação de bitensores para por fim ter em mãos algumas identidades pertinentes a um tensor de energia-momento quântico.

Por fim, no capítulo 5 analisaremos a retroação do campo de Klein-Gordon real em espaços FLRW, dadas pelas equações de Einstein semi-clássicas. Avaliaremos os campos em espaços FLRW apresentaremos uma discussão sobre estados adiabáticos. Calcularemos a retroação do campo quântico, chegando a uma equação diferencial para o parâmetro de Hubble H(t) dada por $\dot{H}(H^2 - H_c^2) = -(H^2 - H_+)(H^2 - H_-)$ com H_c uma constante e H_{\pm} pontos críticos estáveis da equação. Dessa forma, esse simples modelo mostra que efeitos quânticos podem por si só fornecer fases de de Sitter estáveis sem adição de uma constante cosmológica a priori. Mesmo que de caráter apenas qualitativo, tal resultado indica que análises cautelosas devem ser feitas em se tratando do problema de retroação de campos quânticos.

Capítulo 2

Cosmologia FLRW

No presente capítulo resumimos alguns resultados da teoria da Relatividade Geral para a construção dos modelos de cosmologia homogênea e isotrópica de Friedmann–Lemaître– Robertson–Walker (denotados doravante por FLRW). Utilizaremos em grande parte nesse trabalho as convenções e notações introduzidas no texto de Wald [Wal84], na qual a assinatura para a métrica Lorentziana é dada por (-, +, +, +). Utilizamos também a notação de índices abstratos (sec. 5.4 de [Wal84]) para tensores. Nas primeiras seções (2.1-2.2) apresentaremos de forma resumida as definições geométricas que serão usadas no texto, com o intuito maior de apresentar as notações e convenções utilizadas do que contruir uma exposição formal da teoria (referimos o leitor para qualquer bom livro de relatividade geral, como por exemplo [Wal84]). Em seguida, nas seções (2.4-2.5) descreveremos a cosmologia FLRW.

2.1 Variedades, Vetores, Tensores ...

Descrevemos o espaço-tempo como uma variedade diferenciável Lorentziana (com algumas estruturas adicionais, a serem apresentadas seção2.3), que se aproxima apenas localmente como um espaço \mathbb{R}^n . Seguindo as referências [Wal84, O'N83, BGP08] etc, apresentaremos a seguir os conceitos de variedade, vetores, tensores etc.

Definição 2.1.1. Uma variedade (suave) M de dimensão n (um inteiro positivo) é um espaço topológico Hausdorff dotado de um atlas $\mathcal{A} = \{U_i, V_i, \psi_i\}$, onde

- 1. $\{U_i\}$ é um recombrimento aberto de M,
- 2. cada V_i é um aberto de \mathbf{R}^n ,
- 3. ψ_i é uma bijeção $U_i \rightarrow V_i$ denominada de sistema de coordenadas,
- 4. se $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, então $\psi_{ij} = \psi_i \circ \psi_j^{-1} : \psi_j(U_i \cap U_j) \to \psi_i(U_i \cap U_j)$ é um difeomorfismo, denominado de *mudança de coordenadas*.

Nota. Neste trabalho referiremos a variedades suaves simplesmente por variedades.

Um *evento* será um ponto genérico $x \in M$ e sempre terá uma vizinhança que possa ser representada em \mathbb{R}^n por algum sistema de coordenadas. Para um sistema de coordenadas genérico (que tenha x em seu domínio), designaremos as coordenadas de x por $\psi(x) = \{x^{\mu}\}_{\mu=0,1,2,\dots,n-1} \in \mathbf{R}^n$ (adotando a comum prática de iniciar os índices em 0). Por vezes omitiremos os colchetes e os valores dos índices, denotando apenas $x \to x^{\mu}$. Se outro sistema de coordenadas ψ' levar o mesmo ponto x para as coordenadas $x'^{\mu} \in \mathbf{R}$, temos que $\psi' \circ \psi^{-1} : x^{\mu} \mapsto x'^{\nu}$ é um difeomorfismo e, portanto, a Jacobiana $\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \partial x'^{\mu}/\partial x^{\nu}$ está bem definida, assim como derivadas de ordens superiores.

Funções em variedades. Os sistemas de coordenadas fornecem um elo entre funções f na variedade M e funções locais $f_i = f \circ \psi_i^{-1}$ agindo agora em $V_i \subset \mathbf{R}^n$, de forma que recuperamos f se soubermos todas as f_i em coordenadas. Dessa forma, comumente denotamos f_i pela própria f, sendo que $f(x^{\mu})$ deve ser entendida como uma representação $f \circ \psi^{-1}$ de uma função em um dado sistema de coordenadas. Para funções $M \to \mathbf{R}^k$ os sistemas de coordenadas então fornecem a estrutura diferenciável para a variedade. Por exemplo, uma função $f : M \to \mathbf{R}$ pode ser localmente avaliada em sistemas de coordenadas por $f_i \circ \psi_i^{-1}$ e sua classe de diferenciabilidade (digamos, C^k) é invariante por mudança de coordenadas (já que são difeomorfismos). Então definimos uma função suave em M como uma função de classe C^{∞} sob todos os sistemas de coordenadas. Agora definiremos alguns espaços de funções sob M. $\mathfrak{F}(M) = C^{\infty}(M, \mathbf{R})$ denota o espaço de funções suaves em M. Para $f \in \mathfrak{F}(M)$, denotamos por supp(f) o maior fechado no qual f não se anula e definimos assim o espaço de funções teste como espaço de funções de suporte compacto, denotado por $C_0^{\infty}(M) = \{f \in \mathfrak{F}(M) \mid \operatorname{supp}(f) \in \operatorname{compacto} \}$.

Vetores. Uma função suave naturalmente pode ser diferenciada em termos de coordenadas locais, e o conceito de derivadas direcionais em espaços vetoriais é estendido para a definição de vetores em variedades. Trabalhando em \mathbf{R}^n , a cada vetor v em um ponto x designamos um operador diferencial que leva funções f nas derivadas $v(f) = \lim_{\epsilon \to 0} (f(x + \epsilon v) - f(x))/\epsilon$ que coincide com uma derivada ordinária $v(f) = df(\gamma(t))/dt|_{t=0}$ se a curva γ satisfizer $\gamma(t)|_{t=0} = x, d\gamma(t)/dt|_{t=0} = v$. Assim motivados, voltando para a variedade M, um vetor tangente em x é denotados por v^a (com índice abstrato sobrescrito, veja [Wal84]) e age como operador diferencial **R**-linear de primeira ordem em $\mathfrak{F}(M) \to \mathbf{R}$ que satisfaça a regra de Leibniz $v^a(fg) = f(x)v^a(g) + g(x)v^a(f)$. O espaço tangente a $p \in M$ é o espaço vetorial formado por vetores tangentes em $p \in M$, tem a mesma dimensão que a variedade e em coordenadas locais possui a base vetorial dada pelos operadores de diferenciação parcial $\{\partial/\partial x^{\mu}|_{p}\}_{\mu=0,\dots,n-1}$ (por vezes omitiremos o denotador p e também denotaremos $\partial/\partial x^{\mu}$ simplesmente por ∂_{μ} , quando não houver ameaça de confusão quanto ao ponto base da variedade e/ou ao sistema de coordenadas utilizado). T_pM é isomorfo ao espaço quociente \mathcal{T}_p/\sim dado por curvas diferenciáveis $[-1,1] \rightarrow M$ que passem por p em 0 com mesma derivada em p para algum (e portanto qualquer) sistema de coordenadas. Um vetor v^a pode então ser escrito na forma $\sum_{\mu} v^{\mu} (\partial/\partial x^{\mu})|_{p}$ onde os valores v^{μ} são sua *componentes* no dado sistema de coordenadas.

Sua ação dá-se naturalmente por

$$v^{a}(f) = \sum_{\mu} v^{\mu} \left. \frac{\partial f(x^{\mu})}{\partial x^{\mu}} \right|_{x^{\mu} = \psi^{-1}(p)}.$$

Assim, por mudança de coordenadas, as componentes de um vetor se tranformam por

$$v^{a} = \sum_{\mu} v^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = \sum_{\nu} v^{\prime \nu} \frac{\partial}{\partial x^{\prime \nu}} \quad \Longrightarrow \quad v^{\prime \nu} = \sum_{\mu} v^{\mu} \frac{\partial x^{\prime \nu}}{\partial x^{\mu}}.$$

1-formas, ou covetores. O espaço cotangente em $p \in M$ denotado por T_p^*M é o dual linear de T_pM , *i.e.*, o espaço vetorial de dimensão n formado por funções lineares $T_pM \to \mathbf{R}$. Elementos de T^*M são denominados 1-formas ou covetores, denotados por u_a (com índice abstrato subscrito), O dual linear de T_p^*M identifica-se naturalmente com T_pM e a ação de uma uma-forma u_a num vetor v^a (equivalente a ação de v^a em u_a) denota-se por $u_a v^a = v^a u_a \in \mathbf{R}$. Dada uma base coordenada $\{\partial/\partial x^{\mu}|_p\}$ em T_pM , definimos a base dual dada por elementos $\{dx^{\mu}|_p\} \subset T^*M$, tal que $dx^{\mu}|_p(\partial/\partial x^{\nu}|_p) = \delta^{\mu}{}_{\nu}$ onde δ é o Delta de Kronecker (assim como anteriormente, podemos omitir o denotador p). Uma 1-forma pode então ser expandida em compontentes $u_b = \sum_{\mu} u_{\mu} dx^{\mu}|_p$. Assim, em coordenadas, $u_a v^a = \sum u_{\mu} v^{\mu}$. Sob mudança de coordenadas 1-formas transformam-se por

$$u_a = \sum_{\mu} u_{\mu} \mathrm{d}x^{\mu} = \sum_{\nu} u'_{\nu} \mathrm{d}x'^{\nu} \quad \Longrightarrow \quad u'_{\nu} = \sum_{\mu} u_{\mu} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}.$$

Tensores. Dadas duas 1-formas $u_a, w_a \in T_p^*M$, o produto tensorial das duas é denotado por $u_a \otimes w_b = v_a w_b$ e é encarado como um bilinear em $T_p M \times T_p M \to \mathbf{R}$ descrito por $(x^a, y^a) \in T_p M \times T_p M \mapsto v_a x^a \cdot w_b y^b$. O espaço gerado por produtos tensoriais assim definidos formam o espaço $\mathfrak{T} \binom{0}{2}_p M$, e seus elementos podem ser encarados tanto como bilineares $T_p M \times T_p M \to \mathbf{R}$ como lineares $T_p M \to T_p^* M$ (com $x^a \mapsto (v_a x^a) w_b$). Podemos generalizar o procedimento tomando, para k, l inteiros positivos, produtos tensorias de k vetores e l 1-formas, definimos tensores de tipo (k, l) em $p \in M$ dados por multilineares $\underbrace{T_p^* M \otimes \ldots \otimes T_p^* M}_{k \text{ vezes}} = \mathfrak{T} \binom{l}{k}_p M \to \mathbf{R}$, que por sua vez também podem

ser encarados como multilineares $\mathfrak{T}\binom{l-1}{k}_p M \to \mathfrak{T}\binom{l}{k+1}_p M$ e assim por diante. Temos então as identificações $\mathfrak{T}\binom{0}{0}_p M = \mathbf{R}$ (por definição), $\mathfrak{T}\binom{1}{0}_p M = T_p M$ e $\mathfrak{T}\binom{0}{1}_p M = T_p^* M$. Tensores tipo (k,l) são denotados por $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ com k índices abstratos superscritos e l subscritos. Para tensores de tipo (1,1), a operação de contração (ou traço) leva $T^a_b \in \mathfrak{T}\binom{1}{1}_p M \mapsto T^a_a \in \mathbf{R}$ onde $T^a_a = \sum_{\mu} T(\mathrm{d}x^{\mu}, \partial_{\mu})$. Tal operação é generalizada para tensores de tipo (k,l), resultando em tensores tipo (k-1,l-1). Por vezes, denotaremos uma coleção genérica de índices abstratos por uma letra romana maíuscula, de tal forma que T_A possa simbolizar tensor de qualquer tipo. A base coordenada para o espaço tensorial tipo (k,l) é dada por $\{\partial_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes \mathrm{d}x^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x^{\nu_l}\}$. Em coordenadas, um tensor é dado por $T^{a_1...a_k}_{b_1...b_l} = T^{\mu_1...\mu_k}_{\nu_1...\nu_l} \partial_{\mu_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{\mu_k} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \ldots \otimes dx^{\nu_l}$ e suas componentes se transformam por

$$T'^{\mu_1\dots\mu_k}{}_{\nu_1\dots\nu_l} = T^{\alpha_1\dots\alpha_k}{}_{\beta_1\dots\beta_l} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x'^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial x^{\mu_k}}{\partial x'^{\alpha_k}} \frac{\partial x'^{\beta_1}}{\partial x^{\nu_1}} \cdots \frac{\partial x'^{\beta_l}}{\partial x^{\nu_l}}$$

Fibrados tensoriais e campos. Podemos definir tensores tangentes em qualquer ponto da variedade e assim estender tal estrutura para a variedade inteira. Chamamos tais construções de fibrados tensoriais. O fibrado tangente TM é dado pela união disjunta dos espaços tangentes, expresso por $TM = \prod_{p \in M} T_p M$, possuindo estrutura de variedade dada pelos mapas locais $v^a = v^{\mu} \partial_{\mu}|_p \in T_p M \mapsto (x^{\mu}|_{x^{\mu}=\psi(p)}, v^{\nu})_{\mu,\nu} \in \mathbf{R}^{2n}$. Temos também uma projeção $\pi : TM \ni (v^a) \mapsto p \in M$ tal que $v^a \in T_p M$. Um campo ou seção em TM é uma função $x : M \to TM$ tal que $x \circ \pi = \mathrm{id}_M$, e uma seção é suave se for suave em sistemas de coordenadas. O espaço vetorial de seções suaves em TM é denotado por $C^{\infty}(TM)$. Tais idéias se generalizam para fibrados tensoriais de maneira análoga. Identificamos as seções $C^{\infty}(\mathfrak{T}_0^0)(M)) = \mathfrak{F}(M)$, e em particular e denotamos o espaço de campos vetoriais $C^{\infty}(TM)$ por $\mathfrak{X}(M)$. Denotamos campos tensoriais pelos mesmos índices abstratos dos respectivos espaços tensoriais, sendo que se $T_A \in C^{\infty}(\mathfrak{T}_{l}^k)(M)$, então $T(p)_A$ denota um tensor em $p \in M$.

Voltando a campos vetorias, dois campos suaves u, v geram um terceiro campo através da sua comutação [u, v](f) = u(v(f)) - v(u(f)). O campos [u, v] é denominado *colchete de Lie* dos campos vetorias u, v e satisfaz a identidade de Jacobi para quaisquer três campos vetorias u, v, w, dada por

$$[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0.$$

Métrica. Uma métrica semi-Riemanniana g_{ab} é um campo tensorial tipo (0, 2) simétrico não-degenerado, *i.e.* tal que para qualquer ponto $p \in M$ a transformação $g(p)_{ab} : T_pM \to T_p^*M$ seja não-degenerada, *viz*

$$g(p)_{ab}v^a = 0 \in T_p^*M \quad \Longleftrightarrow \quad v^a = 0 \in T_pM.$$

Uma variedade semi-Rimanniana é uma dupla (M, g_{ab}) onde g_{ab} é uma métrica em M, mas normalmente subentendemos a métrica e dizemos que M é uma variedade semi-Riemanniana. Sendo de tipo (0, 2), uma métrica pode ser vista em coordenadas como uma matriz $g(x) = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}(x) dx^{\mu}|_x \otimes dx^{\nu}|_x$ (inversível e diagonalizável com autovalores reais, sendo que é simétrica e não-degenerada), e sua assinatura conta quantos autovalores positivos e negativos tal matriz possui. Uma métrica é dita ser Riemanniana ou Lorentziana se sua assinatura é do tipo (+ + + + ...) ou (- + + + ...), respectivamente. A inversa da métrica é denotada por g^{ab} , tal que $g^{ab}g_{bc} = \delta^a_{\ c}$, onde delta é o delta de Kronecker dado por $\delta^a_{\ b} = id : TM \to TM$. Por ser não-degenerada, g_{ab} gera então um isomorfismo $\flat : TM \to T^*M, v^a \mapsto g_{ab}v^a = v_b$ e sua inversa gera a inversa de \flat , dada por $\sharp: T^*M \to T^*M, u_a \mapsto g^{ab}u_a = u^b$. Assim, dizemos que a métrica "sobe e desce" índices de tensores, transformando de maneira inversível tensores de tipos (k, l) em tensores tipo (k + m, l - m) (com *m* inteiro e $-k \leq m \leq l$). Geramos também (pseudo) produtos internos para tensores de qualquer através de produtos tensoriais da métrica e de sua inversa, os quais denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ou por $\mathbf{g}(\cdot, \cdot)$, indistintamente do tipo, quando não houver ameaça de confusão. A uma métrica g_{ab} associa-se uma densidade ρ_g dada localmente pelas coordenadas $\sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} d^n x$ que define a integração na variedade (dada uma partição da unidade).

Conexão e curvatura. O conceito de conexão generaliza a diferenciação para fibrados vetoriais de maneira covariante (por essa razão sendo também chamado de *derivada covariante*). Para um dado fibrado E sobre M (E representando aqui qualquer um dos fibrados vetoriais $\mathfrak{T}\binom{k}{l}(M)$), uma conexão é um operador diferencial de primeira ordem ∇ : $C^{\infty}(E) \to C^{\infty}(T^*M \boxtimes E)$ que satisfaça as propriedades: regra de Leibniz ($\nabla_a(T_A U_B) =$ $(\nabla_a T_A)U_B + T_A(\nabla_a U_B)$); comutação com contração ($\nabla_a T^{\dots,b\dots}_{\dots,\dots} = \nabla_a(T^{\dots,b\dots}_{\dots,\dots})$; concorde com a derivada direcional em $\mathfrak{T}\binom{0}{0}(M) = \mathfrak{F}(M)$, viz $X^a \nabla_a f = X(f)$. A conexão então aumenta em um grau nos índices contravariantes do tensor derivado, justificando sua notação ∇_a com índice abstrato subscrito. Denotamos dessa maneira a derivada covariante de um campo tensorial T_A na direção do vetor u^a por $\nabla_u T_A = u^a \nabla_a T_A$. Duas conexões $\nabla, \tilde{\nabla}$ diferem por um tensor C^c_{ab} tal que para 1-formas satisfaz $\nabla_a u_b - \tilde{\nabla}_a u_b = C^c_{ab} u_c$ para todo u_a . Uma conexão é compatível com a métrica g se $\nabla_a g_{bc} = 0$ e sua torção é dada pelo tensor antissimétrico ($\nabla_a \nabla_b - \nabla_a \nabla_b$) $f = T_{ab}$ para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$. A conexão compatível com a métrica e sem torção é única e denominada *conexão de Levi-Civita*. Em coordenadas, ela é expressa por $\nabla_a u_b = (\nabla_\mu u_\nu) dx^{\mu}_a dx^{\nu}_b$ onde

$$\nabla_{\mu}u_{\nu} = \partial_{\mu}u_{\nu} - \sum_{\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\mu\nu}u_{\rho}$$

onde $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ são os símbolos de Christofell para o sistema de coordenadas, dados por

$$\Gamma^{\rho}_{\ \mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} g^{\rho\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} g_{\nu\sigma} + \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} g_{\mu\sigma} - \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} g_{\mu\nu} \right).$$
(2.1)

Derivações covariantes de outros tipos de tensores seguem uma regra análoga, dada por exemplo $\nabla_{\mu}T^{\alpha}{}_{\beta} = \partial_{\mu}T^{\alpha}{}_{\beta} + \sum_{\rho}(-\Gamma^{\rho}{}_{\mu\beta}T^{\alpha}{}_{\rho} + \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\rho}T^{\rho}{}_{\beta})$, adicionando Γ s para derivação em vetores e subtraindo para derivação em 1-formas.

A conexão de Levi-Civita dá origem ao tensor de curvatura de Riemann da métrica g_{ab} , sendo que para todo campo de 1-forma $w_b \in C^{\infty}(T^*M)$ tenhamos

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) w_c = R_{abc}^{\ \ d} w_d. \tag{2.2}$$

Em coordenadas, tal tensor é dado por

$$R_{\mu\nu\rho}{}^{\sigma} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\rho} - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\rho} + \sum_{\alpha} \left(\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\rho} \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\alpha} - \Gamma^{\alpha}{}_{\nu\rho} \Gamma^{\sigma}{}_{\mu\alpha} \right).$$
(2.3)

Definimos então o tensor de Ricci $R_{ab},$ a curvatura escalarRe o tensor de Einstein G_{ab} por

$$R_{ab} = R_{acb}^{\ c} \tag{2.4}$$

$$R = g^{ab} R_{ab} \tag{2.5}$$

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R\tag{2.6}$$

Notação de índices abstratos e convenções. Os índices abstratos permitem a manipulação de tensores de forma que o tipo tensorial de cada termo sendo usado esteja bem claro, sem que a priori precisemos de uma base para expansão em coordenadas. Por exemplo, se escrevemos um tensor $S^a{}_b{}^c$ já sabemos precisamente que ele é um elemento de $TM \boxtimes T^*M \boxtimes TM$ enquanto que suas coordenadas $S^{\mu}{}_{\nu}{}^{\rho}$ são meros escalares, deixando o carater tensorial para os elementos da base $dx^{\mu} \otimes \partial_{\nu} \otimes dx^{\nu} \in \mathfrak{T}^{(2)}_{1}(M)$, de forma que poderíamos escrever a obtusa expressão $S^a{}_b{}^c = \sum_{\mu,\nu,\rho} S^{\mu}{}_{\nu}{}^{\rho}(dx^{\mu})_a (\partial_{\nu})^b (dx^{\nu})_c$, explicitando tal natureza, mas por vezes abdicaremos também dos índices abstratos quando não houver perigo de muita confusão. Para mais detalhes, veja Sec. 2.4 de [Wal84]. Em suma, usaremos aqui o seguinte sistema de índices

- letras latinas do começo do alfabeto para índices abstratos, como em $T_{abc...}$
- letras romanas para componentes em um dado sistema de coordenadas, como em $g_{\mu\nu} = \mathbf{g}(\partial_{\mu}, \partial_{\nu}).$
- letras latinas do meio do alfabeto para componentes espaciais no sistema de coordenadas foleado em tempo e espaço, como $T_a = T_0 dx^0 + \sum_{i=1,2,3} T_i dx^i$, com i, j, \ldots variando entre os índices espaciais de 1 a 3.
- letras latinas maiúsculas do começo do alfabeto para coleção de índices abstratos, como $T_A U_B$ simbolizando o produto tensorial de T_A e U_B tensores de tipo genérico.
- índices alterados com ' (linha) para tensores no segundo argumento de bitensores, tanto para índices abstratos quanto para componentes (usados no capítulo 4).

Transporte paralelo, geodésicas e o mapa exponencial. Dada uma curva $\gamma : I \to M$, seu vetor tangente $\dot{\gamma}^a$ em $T_{\gamma(t)}M$ é o vetor tal que $\dot{\gamma}^a(f) = df \circ \gamma(t)/dt$ para todo $f \in \mathfrak{F}(M)$. Um campo tensorial T_A (definido ao menos na imagem de γ) é transportado paralelamente por γ se $\dot{\gamma}^a \nabla_a T_A = 0$. Uma curva é geodésica se seu vetor tangente for paralelamente transportado por si própria, $viz \dot{\gamma}^a \nabla_a \dot{\gamma}^b = 0$. Em coordenadas, uma geodésica $t \mapsto x^{\mu}(t)$ deve então resolver

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{dt^2} + \sum_{\nu,\rho} \Gamma^{\mu}_{\ \nu\rho} \frac{dx^{\nu}}{dt} \frac{d^2 x^{\rho}}{dt} = 0.$$
(2.7)

Dado um ponto qualquer $x \in M$ e um vetor $v^a \in T_x M$, existe uma geodésica com vetor tangente v^a em x. Mais detalhes sobre geodésicas e a definição do mapa exponencial e distância geodésica são descritas no capítulo 4.

Mapas entre variedades. Dadas variedades M, N, um mapa $\pi : M \to N$ é suave se o for como transição de coordenadas de M para N. Mapas induzem um *pullback* $\pi^* : \mathfrak{F}(N) \to \mathfrak{F}(M)$ dado por $\pi^* f = f \circ \pi$ e dessa maneira induzem um *pushforward* $d\pi : T_p M \to T_{\pi(p)} N$ dado por $d\pi v(f) = v(\pi^* f)$ para todo $f \in \mathfrak{F}(N)$, e mais uma vez um *pullback* $\pi^* : T^*_{\pi(p)}(N) \to T^*_P(M)$ dado por $\pi^* u(v) = u(d\pi v)$ para todo $v \in T_p M$. As aplicações de *pullback* e *pushforward* são lineares e portanto se estendem para tensores de tipo (0, l) e (k, 0), respectivamente. Naturalmente, se a aplicação π for inversível (difeomorfismo) podemos transitar livremente entre os espaços tensoriais em $p \in \pi(p)$ e, assim, definir *pushforwards* de tensores de tipo genérico. Para mais detalhes, veja Apêndice C de [Wal84].

2.2 Isometrias em Variedades

Simetrias do espaço-tempo (M, g) são descritas por **isometrias**, difeomorfismos entre variedades M e N que preservem a estrutura métrica.

Definição 2.2.1. Uma **isometria** entre (M, g_M) e (N, g_N) variedades semi-Riemannianas é um difeomorfismo $\phi : M \to N$ tal que

$$\phi^* g_N = g_M$$

Isometrias então preservam todas as estruturas derivadas localmente da métrica, as quais resumiremos na seguinte proposição.

Proposição 2.2.2. Seja (M,g) variedade semi-Riemanniana e $\phi : M \to M$ uma isometria. Então temos as seguintes estruturas preservadas:

- Derivada covariante. $d\phi(\nabla_u v) = \nabla_{d\phi(u)}(d\phi v)$
- Colchetes de Lie. $d\phi[u, v] = [d\phi u, d\phi v].$
- Geodésicas e mapa exponencial (veja capítulo 4). Se γ é uma geodésica em M, φ ∘ γ também o será. Dessa forma, φ ∘ exp_p = exp_{φ(p)} ∘dφ_p.
- *Curvaturas.* Para o tensor de Riemann, $d\phi(R_{abc}{}^{d}u^{a}v^{b}w^{c}) = R_{abc}{}^{d}d\phi(u)^{a} d\phi(v)^{b} d\phi(w)^{c}$. Para o tensor de Ricci, $R_{ab} d\phi(u)^{a} d\phi(v)^{b} = R_{ab}u^{a}v^{b}$. Para curvatura escalar, $R \circ \phi = R$.

As simetrias de um certo espaço (M, g) são descritas por isometrias $\phi : M \to M$, que por operação de composição formam um grupo I(M). O grupo de isometrias pode ser estruturado como um grupo de Lie de dimensão finita (veja [O'N83], capítulo 9).

2.3 Espaços-Tempos

Para a descrição de espaços-tempos, as variedades de interesse são então de dimensão n = 4 (1 dimensão temporal e 3 espaciais) dotadas de métrica Lorentziana g, com assinatura (- + ++). Nessa convençao, em cada ponto $p \in M$ podemos classificar vetores $v^a \in T_p M$ em tipo tempo (se $\mathbf{g}(v, v) < 0$), tipo espaço (se $\mathbf{g}(v, v) > 0$), e tipo nulo ou tipo luz (se $\mathbf{g}(v, v) = 0$). Estendemos essa noção para campos vetoriais $v^a \in \mathfrak{X}(M)$, dizendo que o campo v^a é tipo tempo, espaço ou nulo (luz) se o for em cada ponto da variedade. Por fim, curvas $\gamma : I \subset \mathbf{R} \to M$ são ditas serem tipo tempo, espaço ou nulo se seus vetores tangentes o forem em cada ponto de sua imagem, e uma curva é dita ser causal se for tipo tempo ou nulo.

Impomos estruturas adicionais nas variedades de interesse físico, exigindo orientabilidade, orientação no tempo, paracompaticidade e hiperbolicidade global. Uma variedade é

- *orientável* se existir um campo de bases ortonormais de vetores suave na variedade inteira;
- orientável no tempo se existir um campo vetorial t^a tipo tempo suave em toda a variedade (outros campos vetoriais X^a tipo tempo serão por definição orientados para o futuro se $g_{ab}X^at^b > 0$ e de maneira análoga, curvas causais são ditas dirigidas para o futuro se seus vetores tangentes v^a satisfizerem $g_{ab}X^at^b > 0$);
- *paracompacta* se todo recobrimento por abertos tiver refinamento localmente finito, o que garante que exista uma partição da unidade para qualquer recobrimento aberto e portanto permite a integração na variedade;
- *globalmente hiperbólica* se admitir uma superfície de Cauchy, fato a ser discutido a seguir.

Para curvas causais γ dirigidas para o futuro, um ponto $x \in M$ é um ponto de limite futuro¹ se para toda reparametrização da curva tivermos $\gamma(t) \to x$ com o parâmetro t"tendendo ao futuro o quanto possível" (indo ou para o limite do intervalo de definição ou para $+\infty$). Definimos analogamente o ponto de limite passado. Uma curva causal dirigida para o futuro é dita ser então *inextensível ao futuro (passado)* se não possuir ponto de limite futuro (passado) e é então dita ser *inextensível* se não possuir ponto limite futuro ou passado.

Definimos, para um ponto $x \in M$ o futuro/passado cronológico de x como o conjunto $I^{\pm}(x)$ de todos os pontos que podem ser alcançados por uma curva tipo tempo dirigida

¹tradução adotada para *future endpoint*

para o futuro/passado e começando em x, e analogamente o futuro/passado causal de <math>x como o conjunto $J^{\pm}(x)$ de todos os pontos alcançados por curvas causais dirigidas para o futuro/passado e começando em x. Definimos também $I(x) = I^+(x) \cup I^-(x)$ e $J(x) = J^+(x) \cup J^-(x)$. Para subconjuntos $O \in M$, definimos seu $futuro/passado cronológico/causal pelos conjuntos <math>I^{\pm}(O) = \bigcup_{x \in D} I^{\pm}(x)$ e $J^{\pm}(O) = \bigcup_{x \in D} J^{\pm}(x)$. Um subconjunto O é dito acronal se $O \cap I^{\pm}(O) = \emptyset$, *i.e.* tal que toda curva tipo tempo que intersecte O o faça em um único ponto. Para um subconjunto acronal O definimos seu $domínio de dependência futuro/passado pelo conjunto <math>D^{\pm}(O)$ que contém todo ponto $x \in M$ tal que toda curva causal começando em x dirigida e inextensível para o passado/futuro intersecte O, e assim definimos o domínio de dependência ou o <math>desenvolvimento de Cauchy do conjunto O por $D(O) = D^+(O) \cup D^-(O)$. Por fim, dizemos que um subconjunto acronal $\Sigma \subset M$ é uma **superfície de Cauchy** para M se $D(\Sigma) = M$.

Definição 2.3.1. Uma variedade (M, g) conexa e orientada no tempo é **globalmente hiperbólica** se possuir uma **superfície de Cauchy**, *i.e.* um subconjunto intersectado exatamente uma vez por toda curva tipo tempo inextensível.

A definição de hiperbolicidade global por superfície de Cauchy é equivalente à propriedade de **causalidade forte**: para todos $p, q \in M$ conectados por uma curva causal dirigida para o futuro, vale que $J^+(p) \cap J^-(q)$ é compacto.

Variedades globalmente hiperbólicas possuem a simpática propriedade de admitirem folheação suave por superfícies de Cauchy [BS05].

Teorema 2.3.2. ([BS05]) Seja Σ uma superfície de Cauchy suave tipo espaço de uma variedade (M,g) globalmente hiperbólica. Então existe uma isometria de (M,g) para a variedade produto $\mathbf{R} \times \Sigma$ com métrica $-\beta^2 dt^2 + h_t$ onde

- β é função suave e positiva em M.
- cada h_t é uma métrica Riemanniana suave em Σ com $t \mapsto h_t$ suave.
- cada superfície $\Sigma_t = \{t\} \times \Sigma$ é uma superfície de Cauchy suave.

O espaço-tempo exerce influência na matéria que por ela se propaga através da sua curvatura. Construindo a ação da teoria como um termo de Einstein-Hilbert somado à ação de outros campos de matéria, derivam-se as equações de Einstein, dadas por

$$G_{ab} = 8\pi G T_{ab},\tag{2.8}$$

onde G_{ab} é o tensor de Einstein e T_{ab} é o tensor de energia-momento proveniente da variação da ação da matéria em relação à métrica (veja *e.g.* Apêndice E de [Wal84]).

¶

2.4 Espaços FLRW

Nesta sessão analisaremos os espaços FLRW para modelos de cosmologia de homogeneidade e isotropia espacial. Construiremos o espaço-tempo como uma variedade produto $I \times_a S$ que por imposições de simetria recairá num *warped product* (conceito a ser apresentado) de métrica

$$g = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2 \pi_S^* g_S$$

O início da seção dedica-se à contextualização das definições e cálculos dos tensores de curvatura em coordenadas e por fim resumiremos os resultados na definição 2.4.1 e na proposição 2.4.2.

Comecemos com a variedade $M = I \times S$ onde $I \subset \mathbf{R}$ é um intervalo aberto (tempo) e (S, g_S) uma variedade Riemanniana tridimensional conexa (espaço), de forma que um evento genérico p é designado pela dupla $(t, x) \in M$, com $t \in I$ e $x \in S$. Designamos também as projeções $\pi_I : M \to I$ e $\pi_S : M \to S$.

Tome o campo vetorial ∂_t como levantamento de d/dt em $I \subset \mathbf{R}$ para M. Tal campo designa as velocidades de observadores isotrópicos dados pelas curvas integrais $\gamma_x : t \in$ $I \mapsto (t, x) \in M$ para cada $x \in S$. Dessa maneira, a função tempo π_I indica o tempo próprio dos referenciais, e tomando um determinado tempo $t \in I$ constante, temos a hipersuperfície

$$S(t) = \{(t, x) \in M \,|\, x \in S\}.$$

Tomando g a métrica de M e considerando a hipótese de homogeneidade, propomos que cada curva integral γ_x represente a linha de mundo de um objeto astronômico com tempo próprio t, de forma que

$$g(\partial_t, \partial_t) = -1. \tag{2.9}$$

Da isotropia, propomos uma certa estaticidade no movimento transversal em larga escala dos objetos astronômicos, pois caso isso ocorresse, uma direção privilegiada em S(t) surgiria. Dessa forma, impomos a ortogonalidade entre o tempo e as superfícies Riemannianas S(t) por

$$\partial_t \perp S(t)$$
 para todo $t \in I$. (2.10)

Por fim, formalizamos a imposição de *isotropia local* da seguinte forma: Qualquer ponto $(t, x) \in M$ possui uma vizinhança U tal que para quaisquer vetores $u, v \in T_{(t,x)}S(t)$ unitários, existe uma isometria $\phi = \mathrm{id}_I \times \phi_S$ em U com $\phi(t, x) = (t, x)$ e $\mathrm{d}\phi(u) = v$.

Por essas imposições, temos que cada superfície S(t) é Riemanniana de curvatura escalar constante k(t), e entre tais superfícies o mapa de translação temporal $\mu_{t,s} : (t,x) \in$ $S(t) \mapsto (s,x) \in S(s)$ é sempre uma homotetia (isometria a menos de uma constante multiplicativa $a(t,s)^2$). As curvaturas espaciais comportam-se então por $a(s,t)^2k(t) =$ k(s) e dessa forma nunca muda de sinal.

Podemos então imbuir S de métrica Riemanniana h com curvatura constante de forma

que cada inclusão $x \in S \mapsto (t, x) \in S(t)$ seja uma homotetia de fator de escala $a(t)^2$. Para cada caso de curvatura k = 0, 1 ou -1 temos as escolhas padrões para o espaço como \mathbf{R}^3 (plano), S^3 (3-esfera) ou H^3 (3-hiperbolóide), respectivamente. Outras superfícies de curvatura constante serão então localmente isométricas a essas.

Por fim, resumimos a construção dos espaços e suas propriedades de curvatura no que segue.

Definição 2.4.1. Seja (S, g_S) uma variedade Riemanniana tridimensional conexa de curvatura constante $k \in \{-1, 0, 1\}$, I um intervalo aberto de \mathbf{R}_1^1 (métrica de assinatura negativa) e $a : I \to \mathbf{R}^+$ uma função suave e positiva. O **espaço FLRW** é então definido pelo *produto deformado* (*warped product*)

$$M(k,a) = I \times_a S. \tag{2.11}$$

Sua métrica então é dada por

$$g = -dt^{2} + (a \circ \pi_{I})^{2} \pi_{S}^{*} h_{S}$$

= $-dt^{2} + a(t)^{2} dx^{2},$ (2.12)

de forma que dx^2 é o levantamento da métrica de S para $I \times S$.

Proposição 2.4.2. Seja M(k, a) o espaço FLRW definido da maneira anterior. Temos então que

- M(k, a) é orientado no tempo com a escolha do campo ∂_t ∈ X(M(k, a)) como campo tipo tempo direcionado para o futuro,
- M(k, a) e é globalmente hiperbólico com S(t) superfície de Cauchy para todo $t \in I$.
- O tensor de Ricci e a curvatura escalar são dadas então por

$$R_{ab} = -3\frac{\ddot{a}}{a}(dt^2)_{ab} + 2\left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{2a}\right](dx^2)_{ab},$$
 (2.13)

$$R = 6\left(\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}\right).$$
(2.14)

2.5 Dinâmica de Friedmann

Nessa seção descreveremos a dinâmica de Friedmann, obtida para os espaços FLRW através das equações de Einstein. Usaremos a métrica na forma

$$g = -dt^{2} + a(t)^{2} \left(\frac{dr^{2}}{1 - kr^{2}} + r^{2}(d\theta^{2} + \sin\theta^{2}d\phi^{2}) \right),$$

¶

onde k designa a curvatura seccional e o fator de escala a(t) é a única função a ser determinada pela dinâmica. Precisamos então de uma descrição do conteúdo de matéria no universo (a qual chamaremos de matéria cósmica), que acopla-se à geometria do espaço pelo seu tensor de energia-momento. Em grandes escalas, vamos supor que tal tensor tome a forma de um fluido perfeito em repouso em relação aos observadores isotrópicos. Tomando $u^a = \partial_t$ o campo tangente dos observadores isotrópicos, o tensor de energiamomento é dado por

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(g_{ab} + u_a u_b). \tag{2.15}$$

Podemos argumentar em favor de tal Ansatz para o tensor da seguinte maneira (discutida em [Wei72]). Utilizando a folheação $I \times S$ do espaço FLRW, em cada ponto (t, x) o espaço tangente pode ser decomposto em $T_{(t,x)}M = T_tI \oplus T_xS(t)$ (sendo a decomposição análoga para 1-formas e tensores de ordem qualquer). Um (4-)vetor v^a pode ser decomposto em sua parte temporal $v^0 \in TI$ e em sua parte espacial $v^i \in TS$. Todo vetor acoplado com a dinâmica da métrica deve ser invariante pelo grupo de isometrias do espaço. Dessa forma, a parte espacial de todo vetor deve se anular (pois caso contrário teríamos uma direção privilegiada na folha) e a parte temporal deve depender apenas do tempo t (pois caso contrário o gradiente espacial do escalar v^0 determinaria uma direção preferencial na folha). Aplicando tal princípio para o vetor $T^{0a} = T^{ba}u_b$, devemos ter $T^{00} = \rho(t)$ e $T^{0i} = T^{i0} = 0$. De maneira análoga, o 3-tensor T_{ij} deverá ser múltiplo da métrica induzida h_{ij} nas folhas e portanto terá forma $T_{ij} = P(t)h_{ij}$, resultando assim na forma descrita por um fluido perfeito de densidade de energia ρ e pressão P, expressas na equação 2.15 (para mais detalhes, veja Cap. 13 de [Wei72]).

A conservação covariante do tensor T_{ab} nos dá

$$\dot{\rho} = -3(\dot{a}/a)(\rho + P).$$
 (2.16)

Se estabelecermos uma equação de estado $(P = P(\rho))$, a equação 2.16 fornece uma relação entre a densidade de energia ρ e o fator de escala *a. e.g.*, se tivermos uma equação linear, do tipo $P = c\rho$ com $c \ge 0$ constante, então $\rho \propto a^{-3-3c}$.

Utilizando as expressões de curvatura da proposição 2.4.2, obtemos através das equações de Einstein as **equações de Friedmann**, dadas por

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2},\tag{2.17}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P).$$
(2.18)

Tais equações permitem a avaliação de como a(t) varia no tempo, dependendo apenas dos 3 parâmetros ρ , $P \in k$. Os modelos de cosmologia padrão utilizam matéria cósmica ordinária, composta de radiação e/ou poeira, de forma que tenhamos P > 0. Veremos agora que tais modelos nos levam a um $a \to 0$ para algum tempo finito no passado, caracterizando uma singularidade (*big bang*). Apresentaremos depois dois "problemas" desses modelos, o da *planaridade* (envolvendo a curvatura seccional k) e o da *presença de horizontes*.

Nota. Convencionaremos as funções com um índice $_0$ (como H_0, a_0, ρ_0 etc) para os valores medidos no tempo atual t_0 .

Ao assumirmos que $\rho, P \ge 0$, a equação 2.18 nos diz que $\ddot{a} < 0$ sempre. Para tempos cada vez mais ao passado, \dot{a} fica cada vez maior e *a* assume valor nulo em um tempo finito no passado. Reparametrizamos o tempo de forma que $a(t) \to 0$ para $t \to 0$. Assim, para $t \to 0$ a métrica torna-se indefinida e chamamos tal singularidade de *big bang*.

Resolveremos agora os casos específicos em que toda a matéria cósmica do universo é constituida de poeira P = 0 e depois de radiação $P = \rho/3$. Determinamos a(t) facilmente para curvatura seccional plana²: k = 0.

Para **matéria não-relativística** (poeira), temos P = 0 e portanto $\rho = \rho_0 (a/a_0)^{-3}$. Interpretamos tal fato por uma densidade de energia diluída num espaço que muda de (3-)volume proporcionalmente a a^3 . No caso de curvatura k = 0, podemos integrar a equação 2.17 para obtermos

$$a(t) \propto t^{2/3}$$

Para **matéria relativística** (radiação), temos $P = \rho/3$ e portanto $\rho = \rho_0 (a/a_0)^{-4}$. A densidade de energia decresce com um fator *a* a mais que para matéria não-relativística pois a radiação sofre também mudança na freqüência, proporcional a 1/a. Novamente, para o caso k = 0 temos a evolução de *a* dada por

$$a(t) \propto t^{1/2}$$

Podemos considerar uma mistura de radiação com poeira, descrevendo a densidade de energia total ρ por uma soma $\rho_r + \rho_p$ das densidades de energia de radiação e poeira, respectivamente. Cada densidade $\rho_{r,p}$ continuará resolvendo a equação 2.16 e portanto terão o mesmo comportamento quanto a variação do fator de escala, dado por $a^4\rho_r$ constante, $a^3\rho_p$ também constante. Para altos valores de *a* esperamos então que a contribuição de poeira sobressaia sobre a radiação. Da mesma forma, para valores de *a* pequenos, a contribuição da radiação deverá sobressair sobre a poeira.

Ilustremos agora o problema da *planaridade*. Defina a *densidade crítica* de energia no universo por $\rho_c = 3H^3/(8\pi G)$. A equação 2.17 reduz-se a

$$\frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}(\rho - \rho_c).$$

Determinar o sinal da curvatura k então reduz-se a determinar se a densidade de energia é menor, igual ou maior que a densidade crítica. Substituindo na equação 2.17 a soma

²veja tabela 5.1 de [Wal84] para os casos $k = \pm 1$.

das densidades de energia, temos

$$H^{2} = -\frac{k}{a^{2}} + \frac{8\pi G a_{0}^{3}/3\rho_{0,p}}{a^{3}} + \frac{8\pi G a_{0}^{4}/\rho_{0,r}}{a^{4}}.$$

Analisando o comportamento de tal equação para $t \to 0$, as densidades de energia $\rho_{p,r}$ devem sobressair sobre o termo de curvatura. Logo, nesse limite,

$$H^2 \sim \frac{8\pi G}{3}\rho.$$

Ou seja, para tempos primordiais, a densidade ρ aproxima-se da densidade crítica. Atualmente, porém, seria de se esperar que, se ρ não fosse estritamente igual a ρ_c (e portanto k não-nulo), o termo $-k/a^2$ deveria se sobressair na equação 2.17. Dessa maneira, com a evolução do universo, a densidade ρ deveria se afastar mais e mais da densidade crítica, caracterizando a condição $\Omega = \rho/\rho_c = 1$ como equilíbrio instável. Porém, dados observacionais indicam que a porção da contribuição da curvatura para a equação 2.17 seja muito pequena mesmo na data atual [KSD+10]. Uma das soluções seria acreditar que k = 0 e que a densidade de energia do universo seja exatamente a densidade crítica sempre. Teorias inflacionárias, porém, fazem com que a partir de condições iniciais mais arbitrárias o fator de curvatura seja suprimido durante um periodo de inflação. Ilustraremos as idéias básicas de inflação mais aidante.

Agora citaremos o problema de *horizontes*. Um observador isotrópico em r = 0 num determinado instante t será causalmente afetado por observadores isotrópicos que tenham coordenada radial máxima de D, dada por

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')} = -\int_D^0 \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{1-kr^2}} = f_k(D).$$

O lado direito da equação é crescente em D (para k = 1, temos $f_k(D) = \sin^{-1}(D)$, mas o domínio de D deve ser restrito até 1), e o lado esquerdo depende apenas do comportamento de a. Sob as hipóteses de pressão positiva, a integral do lado esquerdo converge para todo modelo de k (veja tabela 5.1 de Wald [Wal84]), e temos um valor finito para o horizonte D do observador. A presença de horizontes representa dificuldades para tal modelo no seguinte sentido: ao considerarmos homogeneidade e isotropia de um sistema, geralmente consideramos um estado de equilíbrio atingido após uma termalização na qual eventuais inomogeneidades tenham se dissipado. Nesse modelo cosmológico, entretanto, supõe-se homogeneidade entre partes do espaço que sequer puderam entrar em contato durante a existência do universo, o que sugere que as condições iniciais do universo tenham sido muito especiais. Em modelos inflacionários, as regiões que a princípio pareciam estar causalmente separadas são unidas no passado, antes de uma expansão exponencial do fator de escala. Veremos isso a seguir.

Apresentaremos agora as idéias de modelos inflacionários, os quais oferecem uma in-

teressante alternativa aos problemas de planaridade e horizontes. Guth, criador da teoria da inflação, dá uma breve discussão em [Gut04], por exemplo. Tais modelos têm por base a idéia de um estado de falso vácuo, *e.g.* na inflação de *slow roll*, a expansão exponencial dá-se enquanto um campo escalar ϕ (inflaton) sujeito a um potencial de interação $V(\phi)$ "rolasse" lentamente de um mínimo local do potencial (falso vácuo) ao mínimo global (processo de relaxação). O tensor de energia-momento de tal campo seria descrito por

$$T_{ab} = (\nabla_a \phi)(\nabla_b \phi) - g_{ab} \left(\frac{1}{2}g^{cd}(\nabla_c \phi)(\nabla_d \phi) + V(\phi)\right) + \xi(g_{ab}\Box - \nabla_a \nabla_b - G_{ab})\phi^2.$$

Durante o processo de relaxamento o potencial dominaria sobre os outros termos, gerando uma interação análoga a um tensor de um fluido perfeito de pressão negativa, com $P = -\rho = V(\phi)$. Isso gera uma densidade ρ constante no tempo, o que por sua vez resulta na solução inflacionária para a, na forma

$$a(t) \sim \exp\left(H_I t\right)$$

onde $H_I = \sqrt{\frac{8\pi}{3}G\rho}$ denotaria o parâmetro de Hubble constante durante o período de inflação. O estado de pressão negativa mudaria então a dinâmica de evolução das equações de Friedmann, tendo um efeito equivalente a adição de uma constante cosmológica às equações de Einstein, gerando um aumento exponencial do fator de escala. Se o fator de escala *a* tiver crescimento muito rápido durante o início do universo, os horizontes difeririam drasticamente das predições normais da cosmologia FLRW, fornecendo uma explicação para a isotropia observada de nosso referencial. Ou seja, expansão exponencial seria interpretada como repulsão gravitacional devida a uma alta pressão (negativa), que suavizaria a métrica e diluiria as partículas no início da inflação.

Quanto ao problema da planaridade, lembremos que para os modelos "padrão" de cosmologia FLRW, temos um estado de equilíbrio instável para $\Omega = \rho/\rho_c = 1$. Porém, durante um período inflacionário, Ω flui para 1 de maneira exponencial, dada por $\Omega - 1 \propto e^{-2H_I t}$. Não só isso, mas modelos inflacionários também se mostram como boa alternativa para explicar outros problemas cosmológicos e até mesmo a formação de estruturas no universo [Gut04].

Os diferentes modelos inflacionários seriam então variações sobre esse tema, propondo mecanismos de como começar e/ou como acabar o período de inflação. Os primeiros modelos baseavam-se na idéia exposta acima, com estados de falso vácuo caracterizados por mínimos locais ou *plateaus* no potencial. A inflação ocorreria enquanto o campo relaxa ao mínimo global. Efeitos quânticos desse campo influiriam nessa dinâmica, mas como sabemos, o problema de campos quânticos em espaços curvos é um tanto delicado. Assim motivados, analisaremos nesse texto os efeitos quânticos de um modelo simples de campo real não-interagente (de Klein-Gordon) em espaços FLRW, tratado na referência [DFP08].

2.6 Algumas Identidades.

Antes de prosseguir para a quantização de campos, vamos reunir alguns resultados geométricos. Visto que dados observacionais sugerem que a curvatura seccional de nosso universo seja plana (seção anterior), procederemos no capítulo 5 com a análise da retroação de um campo de Klein-Gordon na métrica para esse caso (k = 0). Nessa seção resumiremos alguns resultados referentes a essa classe de espaços.

Com a escolha de superfície base $S = \mathbf{R}^3$ com a métrica padrão, a métrica do espaçotempo tomará a forma

$$g = -dt^{2} + a(t)^{2} (dx^{2} + dy^{2} + dz^{2}).$$
(2.19)

Os símbolos de Christoffel terão as únicas componentes não-nulas dadas por

$$\Gamma^0_{\ ii} = \dot{a}a,\tag{2.20}$$

$$\Gamma^{i}_{\ 0i} = \Gamma^{i}_{\ i0} = \dot{a}/a, \tag{2.21}$$

E assim, a curvatura de Riemann terá as componentes não-nulas dadas por

$$R_{0i0}^{\ \ i} = -R_{i00}^{\ \ i} = -\ddot{a}/a, \tag{2.22}$$

$$R_{0ii}^{\ 0} = -R_{i0i}^{\ 0} = -\ddot{a}a, \tag{2.23}$$

$$R_{iji}^{\ \ j} = -R_{jii}^{\ \ j} = \dot{a}^2, \quad \text{se } i \neq j.$$
 (2.24)

Veremos no capítulo 5 que os escalares $R_{abcd}R^{abcd}$ e $R_{ab}R^{ab}$ têm sua contribuição na retroação do campo escalar e dessa forma serão calculados a seguir. Teremos

$$R_{abcd}R^{abcd} = \sum_{i=1,2,3} (R_{0i0i}R^{0i0i} + R_{i00i}R^{i00i} + R_{0ii0}R^{0ii0} + R_{i0i0}R^{i0i0}) + \sum_{\substack{i,j=1,2,3\\i\neq j}} (R_{ijij}R^{ijij} + R_{jiij}R^{jiij}) = 12\left(\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^4\right) = 12(\dot{H}^2 + 2\dot{H}H^2 + 2H^4).$$
(2.25)

 \mathbf{e}

$$R_{ab}R^{ab} = R_{00}R^{00} + \sum_{i=1,2,3} R_{ii}R^{ii}$$

= $12\left(\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\ddot{a}}{a}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^4\right) = 12(\dot{H}^2 + 3\dot{H}H^2 + 3H^4)$ (2.26)

É comum utilizarmos a coordenada de tempo conforme, dada por (τ, x, y, z) , onde

$$\tau(t) = \int_{t_0}^t \frac{\mathrm{d}t'}{a(t')}.$$
(2.27)

A métrica toma forma conforme à métrica de Minkowski, na forma

$$g = a(t)^{2} \left(-d\tau^{2} + (dx^{1})^{2} + (dx^{2})^{2} + (dx^{3})^{2} \right).$$
(2.28)

Temos as seguintes transformações:

$$\mathrm{d}\rho_g(x) = a(\tau)^4 \mathrm{d}\tau \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 \tag{2.29}$$

$$\Gamma^{\tau}_{\ ii} = \Gamma^{i}_{\ i\tau} = \Gamma^{i}_{\ \tau i} = \frac{\partial_{\tau}a}{a} \tag{2.30}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{1}{a}\frac{df}{d\tau} \tag{2.31}$$

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{d^2f}{d\tau^2} - \dot{a}\frac{df}{d\tau} \right)$$
(2.32)

Resumem-se aqui os resultados geométricos. No próximo capítulo introduziremos a quantização do campo de Klein-Gordon real em espaços globalmente hiperbólicos para apenas avaliar sua retroação em espaços FLRW no capítulo 5.

Capítulo 3

Campo de Klein-Gordon Real

Trataremos aqui da teoria do campo escalar real livre em uma variedade Lorentziana, partindo de uma teoria clássica e analisando o processo de quantização. O campo escalar clássico associa a cada ponto do espaço-tempo um valor de intensidade de campo, que tomaremos como um número real. Caracterizaremos então tal campo clássico a partir do fibrado trivial $\mathbf{R} \times M$ e das suas seções suaves, denotadas por $C^{\infty}(M, \mathbf{R} \times M)$ ou $\mathfrak{F}(M)$. Para a teoria livre (campo sem interação), as restrições de possíveis configurações do campo serão dadas requisitando que o campo resolva uma dada equação diferencial, obtida pelo operador de Klein-Gordon. Tal equação é gerada a partir da Lagrangeana

$$\mathcal{L}_{KG}[g,\phi,\nabla\phi] = -\frac{1}{2}\rho_g \left(g^{ab}(\nabla_a\phi)(\nabla_b\phi) + (m^2 + \xi R)\phi^2\right).$$

Dessa forma, obtemos expressões para a equação de movimento e para o tensor de energia-momento:

 $P\phi = (-\Box + m^2 + \xi R)\phi = 0.$

$$T_{ab} = (\nabla_a \phi)(\nabla_b \phi) - \frac{1}{2}g_{ab} \Big(g^{cd}(\nabla_c \phi)(\nabla_d \phi) + m^2 \phi^2\Big) + \xi \Big(G_{ab} + g_{ab} \nabla^c \nabla_c - \nabla_a \nabla_b\Big) \phi^2.$$

O tensor de energia-momento relaciona-se com a "retroação" do campo, no qual o mesmo interage com a métrica através das equações de Einstein. A equação de Klein-Gordon, por sua vez, dirá quais são as configurações de campo fisicamente aceitáveis pelo modelo. Trata-se uma equação diferencial de segunda ordem, normalmente hiperbólica e linear, representando um campo livre de interações. Logo, o espaço de soluções toma estrutura vetorial, e dá origem a um espaço vetorial simplético, do qual procedemos com a quantização da teoria, de maneira algébrica, associando por relações de comutação canônica (CCR) uma álgebra $C^* \mathfrak{A}$. De tal álgebra, após designarmos estados algébricos $\omega : \mathfrak{A} \to \mathbf{C}$, podemos calcular valores esperados das grandezas observáveis da teoria a partir das funções de n-pontos $\langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle_{\omega}$, as quais formalmente são encaradas como distribuições em $\mathcal{D}'(M^n)$.

Prosseguiremos nesse capítulo da seguinte forma. Na seção 3.1 analisaremos o operador de Klein-Gordon em variedades globalmente hiperbólicas, seus propagadores e o espaço de soluções com suporte compacto em superfícies de Cauchy, caracterizando assim um espaço vetorial simplético. A seguir, na seção 3.2 procediremos com quantização via operadores de Weyl em álgebras CCR. Na seção 3.3 restringiremos os estados algébricos a algumas classes de interesse físico, descrevendo estados analíticos quase-livres e estados de Hadamard. Na seção 4.1 analisaremos o procedimento de regularização do tensor de energia-momento.

3.1 Operador de Klein-Gordon

Para a teoria do campo escalar real, o fibrado de interesse é o trivial $\mathbf{R} \times M$ e suas seções de funções reais suaves $\mathfrak{F}(M)$, as quais localmente podem ser vistas como funções suaves $V \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ em sistemas de coordenadas. Dentro de $\mathfrak{F}(M)$ destacamos o subespaço de funções suaves de suporte compacto $C_0^{\infty}(M)$. Estamos então interessados em operadores diferenciais agindo nessas seções, em particular no operador de Klein-Gordon, que descreve equações de onda propagando na variedade.

Partimos da teoria em sua formação Lagrangeana, dada pela densidade

$$\mathcal{L}_{KG}[g,\phi,\nabla\phi] = -\frac{1}{2}\rho_g \left(g^{ab}(\nabla_a\phi)(\nabla_b\phi) + (m^2 + \xi R)\phi^2\right).$$
(3.1)

O termo $\xi R \phi^2$ tem a constante ξ adimensional e é adicionada pois para $\xi = 1/6$ (ou $\xi = (n-2)/(4n-4)$ para espaço-tempos de dimensão n) a ação admite invariância conforme no caso m = 0 (veja *e.g.* as notas de aula de Fewster [Few08] ou o livro-texto de Wald [Wal84] em seu apêndice D). Por hora, deixaremos a constante livre.

Pelo princípio da ação estacionária, as configurações de campo fisicamente permitidas pelo modelo são então as que resolvem a **equação de Klein-Gordon**, obtida pela variação da ação em respeito ao campo. Tal equação é dada por

$$\left(-g^{ab}\nabla_a\nabla_b+m^2+\xi R\right)\phi=0.$$

Estudaremos então o operador diferencial de Klein-Gordon $P(m,\xi): \mathfrak{F}(M) \to \mathfrak{F}(M)$, dado por

$$P(m,\xi) = -g^{ab}\nabla_a\nabla_b + m^2 + \xi R \tag{3.2}$$

e em coordenadas locais,

$$\left(P(m,\xi)\phi\right)(x) = \left(-g^{\mu\nu}(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} - \Gamma^{\gamma}_{\mu\nu}(x)\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\right) + m^{2} + \xi R(x)\right)\phi(x) \qquad (3.2b)$$

e seu símbolo principal, para uma 1-forma u, é dado por

$$\sigma_{P(m,\xi)}(u) = -u_a u_b g^{ab} = -\langle u, u \rangle_{\xi}$$

caracterizando o operador $P(m,\xi)$ então como operador hiperbólico. Omitiremos aqui a dependência nos parâmetros m,ξ e denotaremos toda a classe de operadores de Klein-Gordon simplesmente por P.

3.1. OPERADOR DE KLEIN-GORDON

Primeiramente, mostraremos que o operador de Klein-Gordon é formalmente simétrico, i.e. para quaisquer funções teste $\psi, \phi \in C_0^{\infty}(M)$, devemos ter

$$\langle \phi, P\psi \rangle = \int \mathrm{d}vol_g(x) \,\phi(x) \,P\psi(x) = \langle P\phi, \psi \rangle.$$

Basta provarmos então que o operador de ondas \Box é formalmente simétrico. Para isso, basta observar que $\nabla^a(\phi \nabla_a \psi) = \nabla^a \phi \nabla_a \psi + \phi \Box \psi$, e portanto

$$\langle \phi, \Box \psi \rangle - \langle \Box \phi, \psi \rangle = \int \mathrm{d}vol_g \, \nabla^a \big(\phi \nabla_a \psi - (\nabla_a \phi) \psi \big),$$

e tal integral se anula sempre que $\operatorname{supp}(\phi) \cap \operatorname{supp}(\psi)$ for compacto, e portanto, com respeito a tal produto interno, o operador de Klein-Gordon é formalmente simétrico.

Ao lidarmos com variedades globalmente hiperbólicas, o problema de valor inicial para o operador de Klein-Gordon é bem definido. Ou seja, dada uma superfície de Cauchy Σ suave e tipo espaço com campo normal n^a e funções suaves $\phi_0, \dot{\phi_0} : \Sigma \to \mathbf{R}$, temos uma solução $\phi \in \mathfrak{F}(M)$ para $P\phi = 0$ com $\phi|_{\Sigma} = \phi_0$ e $n^a (\nabla_a \phi)|_{\Sigma} = \dot{\phi}_0$. Dessa forma, é possível caracterizar o espaço de soluções a partir do espaço de dados iniciais. Um subespaço de particular interesse é o das soluções de suporte compacto em uma dada superfície de Cauchy, as quais podem ser analisadas através dos propagadores do operador.

Se a variedade M for globalmente hiperbólica, teremos mapas $G^{\pm} : C_0^{\infty}(M) \to C^{\infty}(M)$ tais que para qualquer $f \in C_0^{\infty}(M)$ a função $G^{\pm}f$ resolva a equação de Klein-Gordon inomogênea $P(G^{\pm}f) = f$ com supp $G^{\pm}f \subset J^{\pm}(\text{supp } f)$ (veja *e.g.* [BGP08]). Os mapas G^+, G^- são denominados de **propagadores**, **funções de Green** ou **soluções fundamentais**, **retardada**(+) e **avançada**(-). Dessa forma, $G = G^+ - G^-$ gera soluções para a equação de Klein-Gordon homogênea a partir de funções de suporte compacto, e não só isso, toda solução dessa classe pode ser escrita na forma Gf para algum $f \in C_0^{\infty}(M)$. Ainda, temos ker $G = PC_0^{\infty}(M)$ (teorema 3.4.7 de [BGP08], e dessa forma identificamos o espaço \mathfrak{Sol} de soluções com suporte compacto em superfícies de Cauchy com a imagem de G. Em suma, o **espaço de fase** é dado pelo espaço das condições iniciais em uma superfície de Cauchy, e o espaço de soluções é o gerado por essas condições iniciais. Temos

$$\mathfrak{M} = \left\{ \begin{array}{ll} (\phi, \dot{\phi}) & | & \phi, \dot{\phi} \in C_0^{\infty}(\Sigma, \mathbf{R}) \right\}, \\ \mathfrak{Sol} = \left\{ \begin{array}{ll} \phi \in \mathfrak{F}(M) & | & \phi|_{\Sigma} \in C_0^{\infty}(\Sigma, \mathbf{R}), P\phi = 0 \right\} = \\ = GC_0^{\infty}(M) \cong C_0^{\infty}(M) / PC_0^{\infty}(M). \end{array} \right.$$

O operador G pode então ser visto como uma bidistribuição em $\mathcal{D}'(M \times M)$, tal que para $f_1, f_2 \in C_0^{\infty}(M)$ temos

$$G(f_1, f_2) = \int_M f_1(p) \left(Gf_2\right)(p) \operatorname{d} vol_g(p).$$

G é então um bilinear em $C_0^{\infty}(M)$, degenerado em $PC_0^{\infty}(M)$, ou seja, com $G(f_1, Pf_2) = 0$ para todo f_1, f_2 . Em $C_0^{\infty}(M)/PC_0^{\infty}(M)$ então, o bilinear torna-se não-degenerado, pois para $f \approx 0$, temos $Gf \neq 0$ e portanto $G(f, \cdot) \neq 0$. Ainda mais, provaremos que G é ansissimétrico. Para mostrar tal resultado, basta observar que $\langle f_1, G_{\pm}f_2 \rangle = \langle G_{\mp}f_1, f_2 \rangle$ no produto interno de $L^2(M, dvol_g)$, pois sendo $PG_{\mp} = \mathrm{id}_{C_0^{\infty}(M)}$, temos $\langle f_1, G_{\pm}f_2 \rangle =$ $\langle PG_{\mp}f_1, G_{\pm}f_2 \rangle$ e, sendo $\mathrm{supp}(G_{\mp}f_1) \cap \mathrm{supp}(G_{\pm}f_2)$ compacto devido às propriedades dos propagadores, temos $\langle PG_{\mp}f_1, G_{\pm}f_2 \rangle = \langle G_{\mp}f_1, PG_{\pm}f_2 \rangle$ e dessa maneira, $\langle f_1, G_{\pm}f_2 \rangle =$ $\langle G_{\mp}f_1, f_2 \rangle$. Assim, com $G = G_+ - G_-$, temos $\langle f_1, Gf_2 \rangle = -\langle Gf_1, f_2 \rangle$, q.e.d.. Portanto, \mathfrak{Sol} torna-se um espaço vetorial simplético, com forma simplética dada por

$$G([f_1], [f_2]) = G(f_1, f_2) = \int_M f_1(p) \, (Gf_2)(p) \, \mathrm{d}vol_g(p).$$

Como existe uma identificação entre o espaço de soluções \mathfrak{Sol} e o espaço de fase \mathfrak{M} de condições iniciais, é de se esperar que exista um isomorfismo entre os espaços que preserve um produto simplético em \mathfrak{M} . Para construir essa forma, precisamos recair no formalismo Hamiltoneano da teoria, que pode ser formulado por uma folheação do espaço-tempo. Sendo o espaço-tempo globalmente hiperbólico, tomemos uma folheação por superfícies de Cauchy nas hipóteses do teorema 2.3.2, dado por $I \times S$ com métrica

$$g = -N(t)^2 \mathrm{d}t^2 + h_t.$$

Dessa forma, toda configuração de campo $\phi \in C^{\infty}(M)$ (com suporte compacto quando restringido a uma superfície de Cauchy) pode também ser folheada em funções $I \ni t \mapsto \varphi_t \in C_0^{\infty}(S_t)$. Segundo essa folheação, podemos então integrar a Lagrangeana em

$$S[U] = \int_U \mathcal{L}(\phi) = \int_{t_0}^{t_1} \mathrm{d}t \ L(\varphi_t, \dot{\varphi}_t, t),$$

tal que

$$L(\varphi,\dot{\varphi},t) = \frac{1}{2} \int_{S_t} \left(N^{-1} \dot{\varphi}^2 - N h^{ij} \nabla_i \varphi \nabla_j \varphi - N (m^2 + \xi R) \varphi^2 \right) \rho_{h_t}.$$

O momento canonicamente conjugado é então a densidade dada pela equação

$$\pi = \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}} = \frac{\dot{\varphi}}{N} \rho_{h_t} \tag{3.3}$$

Dessa forma, para duas soluções $\phi_1, \phi_2 \in \mathfrak{Sol}$, para uma dada superfície de Cauchy S_{t_0} temos seus dados iniciais ϕ_{t_0}, π_{t_0} associados ao espaço de fase \mathfrak{M} , com o produto simplético dado por

$$\Omega((\phi, \pi), (\phi', \pi')) = \int_{S_{t_0}} \pi \phi' - \pi' \phi.$$
(3.4)

Por fim, unificamos as duas abordagens para o produto simplético. Um elemento do

espaço de fase $(\varphi_t, \pi_t) \in \mathfrak{M}$ associa-se a uma única condição inicial $(\varphi_t, \dot{\varphi}_t) \in C_0^{\infty}(\Sigma_t) \otimes C_0^{\infty}(\Sigma_t)$ e gera uma única solução $\phi \in \mathfrak{Sol} = GC_0^{\infty}(M) \cong C_0^{\infty}(M)/PC_0^{\infty}(M)$, que por sua vez é também gerada por uma função teste $f \in C_0^{\infty}(M)$ unicamente determinada a menos de adição elementos do kernel $PC_0^{\infty}(M)$. Sejam $f_i \in C_0^{\infty}(M)$ e $(\varphi_i, \dot{\varphi}_i) \in \mathfrak{M}$ referentes á mesma solução $\phi_i \in \mathfrak{Sol}$ para i = 1, 2. Então, pelo Lema A.1 de [Dim80], temos

$$\int_{M^2} \rho_g(x) \rho_g(y) f_1(x) (Gf_2)(y) = \int_{S_t} (\pi_1 \varphi_2 - \pi_2 \varphi_1) = \int_{S_t} \rho_{h_t} \frac{1}{N} (\dot{\varphi}_1 \varphi_2 - \dot{\varphi}_2 \varphi_1), \quad (3.5)$$

ou seja, temos um isomorfismo simplético

$$G(f_1, f_2) = \Omega((\varphi_1, \dot{\varphi_1}), (\varphi_2, \dot{\varphi_2}))$$
(3.6)

Denominamos então o espaço vetorial real simplético (V, σ) , que pode designar livremente qualquer um dos espaços mencionados anteriormente. Frequentemente iremos nos referir a V por $C_0^{\infty}(M)/PC_0^{\infty}(M)$ com a forma simplética $\sigma = G$. Dessa forma podemos então prosseguir com a quantização.

3.2 Quantização do Campo Real de Klein-Gordon

Dado nosso espaço vetorial simplético \mathfrak{Sol}, G , partiremos agora para a quantização da teoria. Notemos que espaço $C_0^{\infty}(M)/PC_0^{\infty}(M)$ pode ser visto também como "observáveis lineares" dos campos, de forma que para $f \in C_0^{\infty}(M)$ e para um estado $\psi \in \mathfrak{Sol}$, o valor do observável $\Phi(f)$ em ψ é dada por

$$\Phi(f)[\psi] = \int_M f(p)\psi(p) \, \mathrm{d}vol_g(p).$$

Tal observável equivale ao valor médio do campo com uma função de peso f de suporte compacto no espaço-tempo, no qual a medida é efetuada. $\Phi(f)[\psi]$ é linear tanto nos estados ψ quanto no parâmentro do peso f, sendo que para f = Pg para algum g resulta em $\Phi(Pg) = 0$, o que deixa $\Phi(f)$ bem-definida para funções de uma mesma classe de equivalência em $C_0^{\infty}(M)/PC_0^{\infty}(M)$. Ainda mais, passando para uma formulação Hamiltoneana, é possível provar [Few08] que os colchetes de Poisson entre os observáveis $\Phi(f_1)$ e $\Phi(f_2)$ dá-se por

$$\{\Phi(f_1), \Phi(f_2)\} = G(f_1, f_2).$$
$$\{\Phi(f_1), \Phi(f_2)\} = \int_{\Sigma} \pi_1 \phi_2 - \pi_2 \phi_1 = G(f_1, f_2)$$

Poderíamos então prescrever a quantização como uma relação entre os observáveis clássicos descritas por $\Phi(f), f \in C_0^{\infty}(M)$ e os observáveis quânticas numa *-álgebra \mathcal{A} , através de um mapa $\Phi(f) \mapsto \hat{\Phi}(f) \in \mathcal{A}$. Tal álgebra tem seus elementos gerados pela unidade id e por produtos finitos dos símbolos $\Phi(f)$ (omitindo o chapéu $\hat{\Phi}$) com $f \in$ $C^{\infty}(M)$, satisfazendo as propriedades: $f \mapsto \Phi(f)$ com **R**-linearidade em $f \in C_0^{\infty}(M)$; $\Phi(f)^* = \Phi(f)$ (observáveis auto-adjuntas); $\Phi(Pf) = 0$ para qualquer f (campo linear de Klein-Gordon); $[\Phi(f_1), \Phi(f_2)] = \Phi(f_1)\Phi(f_2) - \Phi(f_2)\Phi(f_1) = iG(f_1, f_2)$ (comutatividade canônica); Dessa forma, teríamos o equivalente quântico das medidas de campo com funções peso, ou seja, teríamos o **campo quântico** Φ como uma "distribuição a valores de operadores", com $C_0^{\infty}(M) \ni f \mapsto \Phi(f) \in \mathcal{A}$.

A caracterização abstrata dessa álgebra dos campos é dada pela **álgebra de Borchers** $\mathcal{B}(M)$, a qual descreveremos a seguir. Os elementos de \mathcal{A} na forma $\Phi(f_1)\Phi(f_2)\ldots\Phi(f_k)$ são multilineares em $f_1, f_2, \ldots, f_k \in C_0^{\infty}(M)$ e portanto lineares em $f_1 \otimes f_2 \otimes \ldots \otimes f_k \in$ $\bigotimes^k C_0^\infty(M) = C_0^\infty(M^k)$. Tal fato motiva a definição da álgebra $\mathcal{B}(M) = \bigoplus_{k=0}^\infty C_0^\infty(M^k)$, onde por convenção $C_0^{\infty}(M^0) = \mathbf{R}$. Cada elemento da álgebra \mathcal{B} é um conjunto de funções $f = \{f_k \in C_0^\infty(M^k)\}_{k=0}^\infty = \bigoplus_{k=0}^\infty f_k$ tal que apenas um número finito de funções f_k s não sejam identicamente nulas. Além da sua estrutura vetorial, definimos nessa álgebra uma involução e um produto. A involução será dada por $f^* = \bigoplus_{k=0}^{\infty} f_k^*$ onde $f_k^*(x_1, x_2, \dots, x_k) =$ $f_k(x_k, x_{k-1}, \dots, x_1)$. O produto de $f = \bigoplus_{k=0}^{\infty} f_k$ e $g = \bigoplus_{k=0}^{\infty} g_k$ é dado por $f \times g = \bigoplus_{k=0}^{\infty} g_k$ f dado por $f \times g$ $\bigoplus_{k=0}^{\infty} (f \times g)_k \text{ onde } (f \times g)_k (x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{l=0}^k f_l(x_1, x_2, \dots, x_l) g_{k-l}(x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_k).$ Dessa forma, $\mathcal{B}(M)$ torna-se uma álgebra involutiva denominada de álgebra de Borchers. Notamos, porém, que tal álgebra não carrega informação dos campos, *i.g.* não possui estruturas que denotem as regras de comutação em relação ao operador de Klein-Gordon P. Tais estruturas devem ser introduzidas através de representações da álgebra de Borchers na álgebra de campos \mathcal{A} denotada anteriormente. Para mais detalhes, veja *e.g.* [Rad96, Few08].

As regras de comutação como na álgebra de campos \mathcal{A} apresentam o incoveniente de nos dar representações nas quais os operadores de campo sejam ilimitados, e portanto apenas densamente definidos (teorema da reconstrução, veja *e.g.* [SW00]). Uma alternativa comum é quantizar o sistema a partir dos operadores de Weyl, a versão exponenciada dos campos, dada pelos elementos unitários $W(f) = e^{i\Phi(f)}$. A partir da comutação dos campos, a comutação para os operadores de Weyl é dada pela relação W(f)W(g) = $e^{-iG(f,g)/2}W(f+g)$. Os operadores de campo então são recuperados a partir de uma representação minimamente bem comportada dos operadores de Weyl, através de derivadas: dado um estado ω na álgebra C^* gerada pelos operadores de Weyl, teríamos por exemplo a função de 2-pontos dada por $\langle \Phi(f)\Phi(g) \rangle_{\omega} = (\partial/\partial t)(\partial/\partial s) \omega(W(tf)W(sg))|_{t=s=0}$, quando essas derivadas existirem. A teoria se salva pois temos de certa maneira uma unicidade do sistema de Weyl, de forma que para um dado espaço vetorial, diferentes representações são isomorfas. Resumiremos a história no que se segue.

Definição 3.2.1. Dado um espaço vetorial real simplético (V, σ) , um sistema de Weyl desse espaço consiste em uma álgebra $C^* \mathfrak{A}$ com unidade e em um mapa $W : V \to \mathfrak{A}$ tal que para todo $\phi, \psi \in V$

- 1. W(0) = id,
- 2. $W(-\phi) = W(\phi)^*$,

3. $W(\phi)W(\psi) = e^{-i\sigma(\phi,\psi)/2}W(\phi+\psi).$

Tal sistema de Weyl (\mathfrak{A}, W) é dito ser uma **representação CCR** se a álgebra \mathfrak{A} for gerada por elementos $W(\phi), \phi \in V$. Nesse caso, \mathfrak{A} é dita ser uma **álgebra CCR**.

Proposição 3.2.2. (Prop. 4.2.3 de [BGP08]) Seja (\mathfrak{A}, W) um sistema de Weyl do espaço simplético (V, σ) . Então

- 1. W(f) é unitário para todo $f \in V$,
- 2. ||W(f) W(g)|| = 2 para todo $f, g \in V$ com $f \neq g$,
- 3. \mathfrak{A} não é separável a não ser que $V = \{0\}$,
- 4. a família $\{W(f) \mid f \in V\}$ é linearmente independente,
- 5. se (\mathfrak{A}, W) for uma representação CCR, vale que \mathfrak{A} é simples.

¶

Teorema 3.2.3. (Teo. 4.2.9 de [BGP08]) Dado (V, σ) um espaço vetorial real simplético e (\mathfrak{A}_1, W_1) , (\mathfrak{A}_2, W_2) duas representações CCR desse espaço. Então existe um único *isomorfismo $\pi : \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ com $W_2 = \pi \circ W_1$.

Essa metodologia de quantização apresenta a seguinte estrutura: Dado o operador de Klein-Gordon, a partir de uma variedade globalmente hiperbólica, determinamos seus propagadores e dessa maneira, um espaço vetorial simplético, e seu sistema de Weyl nos dá a álgebra C^* de nossa teoria. Ainda mais, determinando uma relação de ortogonalidade dirigida na variedade de origem, obtemos uma estrutura de álgebras C^* quase-locais. Tal procedimento de quantização tem estrutura functorial, que por sua vez obedece os axiomas de Haag-Kastler. Veja *e.g.* [Dim80] e o cap. 4 de [BGP08].

Resta afirmar que o sistema de Weyl gera apenas os "observáveis fundamentais" da teoria, ou seja, grandezas lineares nos campos, mas outras grandezas fisicamente relevantes podem ser de interesse. Por exemplo, para a definição do tensor de energia-momento, será necessária a restrição a estados que satisfaçam a condição de Hadamard, que veremos adiante.

3.3 Estados

Para o sistema de Weyl \mathfrak{A} gerado por (M, g, P), um estado álgebrico é um mapa linear $\omega : \mathfrak{A} \to \mathbb{C}$ normalizado ($\omega(\mathrm{id}) = 1$) e positivo ($\omega(A^*A) \ge 0$ para todo $A \in \mathfrak{A}$), e representa uma determinada configuração física na qual o valor esperado para cada observável A da álgebra é dado por $\omega(A)$. Entretanto, a classe de estados algébricos é muito abrangente, e, por vezes, nos restringimos a uma subcoleção particular de estados por motivações físicas. Apresentaremos a seguir a noção de estados regulares, que nos permitirão a definição dos operadores de campo como geradores dos grupos de Weyl $t \mapsto W(tf)$, e dentro dessa classe, os estados analíticos admitirão valores esperados para produtos de campos.

Sendo \mathfrak{A} uma álgebra C^* , a formulação da teoria via espaço de Hilbert é reproduzida pela representação GNS (em referência a Gelfand, Naimark, Segal), que a um dado estado ω sobre \mathfrak{A} associa uma única (a menos de equivalência unitária) tripla GNS ($\mathcal{H}_{\omega}, \pi_{\omega}, \Omega_{\omega}$) (construção padrão, veja por exemplo [Wal94]). A tripla constitui-se de um espaço de Hilbert para a teoria \mathcal{H}_{ω} , uma *-representação $\pi_{\omega} : \mathfrak{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\omega})$ da álgebra em operadores limitados de \mathcal{H}_{ω} , e um vetor cíclico $\Omega_{\omega} \in \mathcal{H}_{\omega}$ que representa o estado, de forma que

- $\pi_{\omega} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}(\mathcal{H}_{\omega})$ é uma *-representação,
- $\omega(A) = (\Omega_{\omega}, \pi_{\omega}(A)\Omega_{\omega})$ para todo $A \in \mathfrak{A}$,
- $\pi_{\omega}(\mathfrak{A})\Omega_{\omega}$ é denso em \mathcal{H}_{ω} .

Dessa forma, $\pi_{\omega}(W(f))$ representa nosso operador de Weyl referente ao campo exponenciado. O interesse então é recuperarmos operadores de campo através dos operadores de Weyl, de forma que para todo $f \in C_0^{\infty}(M)$ tenhamos o operador de campo $\Phi_{\omega}(f)$ tal que valha $\pi_{\omega}(W(f)) = \exp(i\Phi_{\omega}(f))$. A existência de tais operadores pode ser garantida pelo teorema de Stone [RS81], caso tenhamos grupos untários fortemente contínuos. Ou seja, se tivermos $\mathbf{R} \ni t \mapsto \pi_{\omega}(W(tf))$ um grupo unitário a um parâmetro fortemente contínuo, seu gerador $\Phi_{\omega}(f)$ estará definido como um operador auto-adjunto.

Dessa forma, uma subclasse de interesse são os denominados estados regulares sobre o sistema de Weyl \mathfrak{A} , para os quais $\mathbf{R} \ni t \mapsto \omega(W(tf)) \in \mathbf{C}$ é contínuo para todo f. Assim, sua representação GNS π_{ω} será uma representação regular, *i.e.* gera grupos unitários fortemente contínuos, e portanto operadores de campo podem ser definidos. Porém, mesmo para estados regulares, não temos necessariamente que o vetor cíclico Ω_{ω} pertença ao domínio dos operadores de campo, sendo que grandezas do tipo $\langle \Phi(f) \rangle_{\omega} =$ $\langle \Omega_{\omega}, \Phi_{\omega}(f)\Omega \rangle$ não estariam a priori apropriadamente definidas. Dizemos então que um estado ω é de classe C^m , para m > 0 natural, se para todo $f \in V$ tivermos $t \mapsto \omega(W(tf))$ uma função $C^m(\mathbf{R}, \mathbf{C})$. Para estados da forma $\omega \in C^{2m}$, o vetor cíclico será C^m , ou seja, $t \mapsto \pi_{\omega}(W(tf))\Omega_{\omega}$ será m vezes fortemente diferenciável para todo f, o que equivale a $\Omega_{\omega} \in D(\Phi_{\omega}(f)^m)$. Para estados C^{∞} o valor esperado de produtos de operadores de campo está bem definido. Por fim, um estado ω é analítico se para todo $f \in V$ as funções $t \mapsto \omega(W(tf))$ forem analíticas em uma vizinhança de t = 0, o que equivale a dizer que Ω_{ω} é analítico para todo operador de campo $\Phi_{\omega}(f)$. Se um estado é analítico, então ele é analítico em uma faixa aberta em torno de **R** (sec. 5.2.3, p. 39 de [BR79]). Estados sobre o sistema de Weyl \mathfrak{A} são determinados por seus valores em $\{W(f), f \in V\}$, e, portanto, estados analíticos são determinados pelos valores { $\langle \Omega_{\omega}, \Phi(f)^m \Omega_{\omega} \rangle \mid f \in V, m > 0$ }.

Em suma, estados analíticos são determinados por seus valores esperados nos campos, $\{\langle \Omega_{\omega}, \Phi_{\omega}(f_1)\Phi(f_2)\dots\Phi(f_k)\Omega_{\omega}\rangle \mid k > 0, f_i \in V\}$. Ou seja, a cada estado analítico da álgebra de Weyl corresponde um estado na álgebra de Borchers gerada pelos operadores de campos. Estado nessa álgebra são então conjuntos de valores $\omega(\Phi(f_1) \dots \Phi(f_k))$ e equivalem aos estados analíticos sobre a álgebra de Weyl. Para mais detalhes, veja *e.g.* [Rad96].

Ainda, definimos **estados quase-livres** ω como estados analíticos com a propriedade de ter seus valores truncados $\omega_T(\Phi_{\omega}(f_1), \Phi_{\omega}(f_2), \dots, \Phi_{\omega}(f_k)) = 0$ para k > 2(veja e.g. sec. 5.2.3, p. 41 de [BR79]). Para esses estados, os funcionais $\omega(\Phi_{\omega}(f))$ e $\omega(\Phi_{\omega}(f_1)\Phi_{\omega}(f_2))$ determinam completamente todas suas funções de n pontos. Por vezes exigiremos também que $\langle \Phi_{\omega}(f) \rangle_{\omega}$ se anule para todo $f \in V^{-1}$.

Quanto a estados analíticos e estados sobre álgebras de Borchers, alguma anedota deve ser feita. Para esses estados o conceito de campo como distribuição toma sentido. Todo $f \in V$ pode ser representado por uma função teste em $C_0^{\infty}(M)$ de forma que $(f_1, \ldots, f_k) \in V^k \mapsto \Phi_{\omega}(f_1) \ldots \Phi_{\omega}(f_k) \in \mathbb{C}$ é um funcional em $C_0^{\infty}(M) \otimes \ldots \otimes C_0^{\infty}(M) =$ $C_0^{\infty}(M^k)$. Lembrando que os operadores de campo são **R**-lineares, ou seja $\sum_{i=1}^k \Phi(t_i f_i) =$ $\sum_{i=1}^k t_i \Phi(f_i)$ para $t_i \in \mathbb{R}$ e $f_i \in V$, tal estrutura é carregada para os estados. Ainda mais, dado um estado ω , o mesmo será determinado pelos funcionais $f_1, f_2, \ldots, f_k \mapsto$ $\omega(\Phi(f_1)\Phi(f_2)\ldots\Phi(f_k))$. Tais funcionais são multilineares e contínuos, e portanto são distribuições em $\mathcal{D}'(M) \otimes \ldots \mathcal{D}'(M) = \mathcal{D}'(M^k)$, e portanto, estados analíticos representam uma família de distribuições $\omega_k \in \mathcal{D}'(M^k)$ para k > 0, e as mesmas são chamadas de funções de k pontos, também denotadas por $\omega_k(x_1, \ldots, x_k)$ ou mesmo $\langle \Phi(x_1) \ldots \Phi(x_k) \rangle_{\omega}$. Quando nos referimos a estados quase-livres, nesses termos, exigimos que as funções de k pontos se anulem para k ímpares e para k pares seja completamente determinada por ω_2 .

Uma classe interessante de estados quase-livres são os denominados **estados de Hadamard**, cujas funções de dois pontos têm estrutura singular definida pela parametriz de Hadamard ² Na prática, para espaços-tempos de dimensão n = 4 com x, y pertos, dizemos tal função pode ser escrita na forma

$$\omega_2(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{U(x,y)}{\sigma(x,y)} + V(x,y) \log \sigma(x,y) + W(x,y) \right)$$

onde σ designa a distância geodésica ao quadrado e com sinal, e U, V, W são suaves, sendo que as divergência encontram-se então em forma $1/\sigma$ e log σ . U, V são determinadas a partir apenas da geometria local, enquanto que W codifica a dependência no estado. Para mais detalhes, veja por exemplo [KW91]. No capítulo 4 definimos o biescalar σ e analisamos a parametriz de Hadamard, caracterizando assim algumas propriedades para a regularização de *point-splitting* para estados de Hadamard, procedimento o qual ilustraremos a seguir, na seção 4.1.

 $^{^1}$ Todo estado quase-livre pode ser "colocado" nessa forma subtraindo o valor do campo.

² Parametriz é uma certa generização do conceito de solução fundamental para EDPs. Elas apresentam o mesmo tipo de estrutura singular que a solução fundamental e geralmente são truncadas, e a partir dela a solução fundamental pode ser recuperada. Em suma, para uma parametriz H do operador diferencial P, teremos $PH = \delta + w$ onde w é uma função de suporte compacto.

Capítulo 4

Regularização por Point-Splitting

Neste capítulo estamos interessados em avaliar o tensor de energia-momento para o campo real de Klein-Gordon estudado no capítulo anterior.

Primeiramente, na seção 4.1 descreveremos as idéias do procedimento de *point-splitting* para a definição do tensor de energia-momento, motivando assim a escolha de estados de Hadamard como classe de estados físicos de interesse.

Na seção 4.2 avaliaremos a função de distância geodésica e também resumiremos o cálculo de bitensores. A partir disso, na seção 4.3 trataremos da parametriz de Hadamard, dada pelo Ansatz

$$h(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{U(x,y)}{\sigma(x,y)} + V(x,y) \log \frac{\sigma(x,y)}{\lambda^2} \right),$$

onde $U \in V$ são suaves e simétricos, e V expande-se na forma $V(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(x, y)\sigma(x, y)^k$. Em seguida, na seção 4.5, devemos provar algumas igualdades relacionadas com limites de coincidência de operadores diferenciais agindo em h, importantes para alguns cálculos de prescrição de *point-splitting*. Na seção 4.4 calcularemos explicitamente o termo $[V_1]$ em função da geometria do espaço-tempo, onde $[V_1] = V_1(x, x)$ é o limite de coincidência do biescalar V que entra na definição da parametriz de Hadamard.

Com isso em mãos, na seção 4.1 analizaremos algumas identidades de *point-splitting*, em particular o traço do tensor de energia-momento.

4.1 Tensor de Energia-Momento

Como vimos no capítulo anterior, a quantização da teoria por sistema de Weyl permite uma formulação independente das várias representações unitariamente inequivalentes, e estados algébricos caracterizam valores esperados para todos elementos da álgebra \mathfrak{A} . Porém, existem outras grandezas de interesse físico que não se encontram na álgebra, como por exemplo o tensor de energia-momento. Classicamente, esse tensor advém da variação da Lagrangeana com respeito à métrica (*e.g.* apêndice E de Wald [Wal84]), e para o campo de Klein-Gordon é dado por

$$T_{ab} = (\nabla_a \phi)(\nabla_b \phi) - \frac{1}{2} g_{ab} \Big(g^{cd} (\nabla_c \phi) (\nabla_d \phi) + m^2 \phi^2 \Big) + \xi \Big(G_{ab} + g_{ab} \nabla^c \nabla_c - \nabla_a \nabla_b \Big) \phi^2.$$

Quanto a essa expressão, faremos inicialmente duas ressalvas, quanto ao seu traço e a sua conservação covariante. Utilizando $g^{ab}\nabla_a\phi\nabla_b\phi = (1/2)\Box\phi^2 - \phi\Box\phi$, temos, para um espaço-tempo de dimensão n,

$$T = g^{ab}T_{ab} = \frac{1}{n-1} \left[\xi - \frac{n-2}{4(n-1)} \right] \Box \phi^2 - m^2 \phi^2 + \frac{n-2}{2} \phi P \phi.$$
(4.1)

Dessa forma, para o acoplamento conforme e no caso não massivo, o traço T se anula classicamente, para configurações "on shell", com $P\phi = 0$. E do mesmo modo, teremos a conservação covariante de T_{ab} , pois teremos

$$\nabla^a T_{ab} = -(P\phi) \,\nabla_b \phi. \tag{4.2}$$

Podemos então buscar um tensor quântico através da expressão clássica, substituindo formalmente os campos ϕ por operadores Φ_{ω} , o que traz problemas, pois como os operadores são vistos como distribuições, o produto formal ϕ^2 não se extende de maneira natural para operadores. Entretanto, processos de regularização podem ser tomados para a remoção de divergências a partir da definição formal. A partir daqui, tomaremos como ponto de partida os estudos iniciados por Wald [Wal77, Wal78].

Seguiremos o caminho de definir o tensor de energia-momento para uma classe adequada de estados no sistema de Weyl original \mathfrak{A} , sem necessidade de adicionar estruturas algébricas respectivas aos observáveis de energia-momento. Dessa forma, esperamos que $\langle T_{ab} \rangle_{\omega}$ seja um tensor na variedade de fundo, dado que ω seja um estado admissível pela prescrição. Mas mais do que isso, queremos que tal prescrição proceda não só para o espaço-tempo M avaliado, mas que possa ser efetuada de maneira análoga a toda uma classe razoável de espaço-tempos.

Primeiramente descreveremos o procedimento de *point-splitting*. Estamos interessados em objetos na forma $\langle \Phi(x)\Phi(x)\rangle_{\omega}$, e o procedimento consiste em trocar tal termo por grandezas $\langle \Phi(y)\Phi(y')\rangle_{\omega}$, equivalente a bi-distribuições, e avaliar o limite $y, y' \to x$, que, para uma vizinhança normal U de x, pode ser tomada através das únicas geodésicas que unem os pontos. O procedimento padrão equivalente a tomar o produto de Wick seria subtrair desse termo o valor esperado em um estado de vácuo Ω . Dessa forma, se para um dado estado ω obtivéssemos

$$F_{\omega}(y,y') = \langle \Phi(y)\Phi(y') \rangle_{\omega} - \langle \Phi(y)\Phi(y') \rangle_{\Omega} \in C^{\infty}(M \times M),$$

teríamos efetuado com sucesso uma "subtração do vácuo" e a expressão $\langle \Phi(x)\Phi(x)\rangle_{\omega}$ como um limite de coincidência em $F_{\omega}(y, y')$ com $y, y' \to x$ faria sentido. Assim supondo, podemos proceder com a prescrição tomando $F_{\omega} \in C^{\infty}(U \times U)$ no lugar dos produtos de campo, ou seja, os termos $\phi(x)\phi(x)$ reduzir-se-ão a (omitindo o subscrito ω)

$$\langle \Phi(x)\Phi(x)\rangle \longrightarrow \lim_{y,y'\to x} F(y,y').$$

Na expressão clássica, termos locais agem nos campos, de forma que ainda alguns cuidados devem ser tomados quanto ao quesito de diferenciação. Por exemplo, ao avaliarmos o termo $(\nabla_a \Phi)|_x (\nabla_b \Phi)|_x \in T^*_x M \otimes T^*_x M$, primeiramente deslocaremos um dos fatores para y, e $(\nabla_a \Phi)|_y = \nabla_{(y)a} \Phi \in T^*_y M$, e traremos devolta ao espaço cotangente a x por transporte paralelo ao longo da única geodésica que liga y a x, dado que estejamos dentro de uma vizinhança convexa de x. Assim, para $\nabla_{(y)a'} \Phi \in T^*_y M$, designamos $\Pi^{a'}_a(x,y)\nabla_{(y)a'}\Phi \in T^*_x M$ como tal transporte paralelo. Para simplificarmos a notação, usaremos $\nabla_{(x,y)a} = \Pi^{a'}_a(x,y)\nabla_{(y)a}$. Novamente, para $\nabla_a \Phi(x)\nabla_b \Phi(x)$, primeiramente simetrizamos o separamento da forma

$$\langle \nabla_a \Phi(x) \nabla_b \Phi(x) \rangle \to \frac{1}{2} (\nabla_{(x,y)a} \Phi(y) \nabla_{(x,y')b} \Phi(y') + \nabla_{(x,y)b} \Phi(y) \nabla_{(x,y')a} \Phi(y')),$$

e em seguida regularizamos, para obermos por fim um operador diferencial agindo em F, na forma

$$\langle \nabla_a \Phi(x) \nabla_b \Phi(x) \rangle \to \frac{1}{2} (\nabla_{(x,y)a} \nabla_{(x,y')b} + \nabla_{(x,y)b} \nabla_{(x,y')a}) F(y,y')$$

De maneira análoga, para operadores diferenciais escalares L agindo em $\phi \in \mathfrak{F}(M)$, podemos simetrizar o termo $\Phi(x)L\Phi(x)$ para $\frac{1}{2}[\Phi(y)L_{y'}\Phi(y') + L_y\Phi(y)\Phi(y')]$, e regularizando,

$$\langle \Phi(x)L\Phi(x)\rangle \to \frac{1}{2}(L_y + L_{y'}) F(y,y').$$

Por fim, outros termos locais ainda podem se apresentarem como fatores multiplicativos, a exemplo da métrica ou de termos de curvatura. Como estamos interessados no limite $y, y' \to x$, tais termos podem ser avaliados no próprio ponto x.

Dessa forma, o *point-splitting* do tensor de energia-momento clássico T_{ab} se dá por um operador diferencial agindo na regularização da função de dois pontos. Primeiramente, analisemos a expressão clássica abrindo o termo ϕ^2 ,

$$T_{ab} = (\nabla_a \phi)(\nabla_b \phi) - \frac{1}{2}g_{ab} \left(g^{cd}(\nabla_c \phi)(\nabla_d \phi) + m^2 \phi^2\right) \\ + \xi \left[G_{ab}\phi^2 + 2g_{ab}(\nabla^c \phi \nabla_c \phi + \phi \Box \phi) - 2(\nabla_a \phi \nabla_b \phi + \phi \nabla_a \nabla_b \phi)\right]$$

Aplicando a prescrição de *point-splitting* para a expressão clássica acima, esperamos

que

$$\langle T_{ab} \rangle_{\omega} = \lim_{y,y' \to x} D_{ab}(x)(y,y') F(y,y').$$

$$(4.3)$$

onde o operador $D_{ab}(x)(y, y')$ é dado por

$$D_{ab}(x)(y,y') = \frac{1}{2} \Big(\nabla_{(x,y)a} \nabla_{(x,y')b} + \nabla_{(x,y)b} \nabla_{(x,y')a} \Big) - \frac{1}{2} g_{ab}(x) \Big(g^{cd}(x) \nabla_{(x,y)c} \nabla_{(x,y')d} + m^2 \Big) \\ + \xi \Big[G_{ab}(x) + g_{ab}(x) \Big(2g^{cd}(x) \nabla_{(x,y)c} \nabla_{(x,y')d} + (\Box_y + \Box_{y'}) \Big) \\ - \Big(\nabla_{(x,y)a} \nabla_{(x,y')b} + \nabla_{(x,y)b} \nabla_{(x,y')a} \Big) \\ - \Big(\nabla_{(x,y)a} \nabla_{(x,y)b} + \nabla_{(x,y')b} \nabla_{(x,y')a} \Big) \Big]$$

Notemos que a prescrição por *point-splitting* permite a definição da diferença de valores médios entre estados, de forma que $\langle T_{ab} \rangle_1 - \langle T_{ab} \rangle_2$ faça sentido quando dois estados admissíveis são tais que $\langle \Phi(y)\Phi(y') \rangle_1 - \langle \Phi(y)\Phi(y') \rangle_2$ for suave. Novamente, como num espaço-tempo genérico a noção de estado de vácuo preferencial não existe, a definição dos valores médios em valor absoluto dificulta-se. Contornando tal problema, Wald [Wal77, Wal78, Wal94] toma um caminho axiomático, listando algumas propriedades razoáveis que tais grandezas devam satisfazer.

Axioma 4.1.1. (Axiomas de Wald) [Wal94]. Para uma classe admissível de espaçotempos e classes admissíveis de estados sobre os sistemas de Weyl por aquelas geradas, uma prescrição quântica para um tensor de energia-momento $\langle T_{ab} \rangle$ é uma função que a cada estado ω sobre $\mathfrak{A}(M)$ associa um tensor simétrico $\mathcal{T}(0,2)M$ dado por $\langle T_{ab} \rangle_{\omega}$. Uma prescrição razoável deve satisfazer os seguintes axiomas:

1. A diferença entre os valores esperados para dois estados deve concordar com a prescrição por *point-splitting*. Ou seja, para estados ω_1 , ω_2 admissíveis sobre $\mathfrak{A}(M)$, se $\langle \Phi(x)\Phi(x')\rangle_1 - \langle \Phi(x)\Phi(x')\rangle_2$ for suave, então devemos ter

$$\langle T_{ab} \rangle_1 - \langle T_{ab} \rangle_2 = \lim_{y,y' \to x} D_{ab}(x)(y,y') [\langle \Phi(y)\Phi(y') \rangle_1 - \langle \Phi(y)\Phi(y') \rangle_2].$$

- Localidade. Sejam (M, g), (M', g') espaço-tempos globalmente hiperbólicos, Σ ⊂ M, Σ' ⊂ M' superfícies de Cauchy e U ⊂ M, U' ⊂ M vizinhanças abertas globalmente hiperbólicas com superfícies de Cauchy Σ∩U, Σ'∩U', sendo que exista uma isometria i : U → U'. Então i identifica C₀[∞](U) com C₀[∞](U') e dessa forma, temos uma identificação das subálgebras de Weyl 𝔄_U ⊂ 𝔄(M) com 𝔄_{U'} ⊂ 𝔅(M'). Então, se dados dois estados ω, ω' sobre os sistemas de Weyl 𝔅(M), 𝔅(M') coincidirem com tal identificação, os valores esperados dos tensores de energia-momento também devem concordar, *i.e.* ⟨T_{ab}⟩_ω = i^{*}⟨T_{ab}⟩_{ω'}.
- 3. Conservação covariante. Para todos estados ω admissíveis, devemos ter $\nabla^a \langle T_{ab} \rangle_{\omega} = 0$.

4. No espaço tempo de Minkowski com ω estado de vácuo, temos $\langle T_{ab} \rangle_{\omega} = 0$.

Tais axiomas prescrevem a quantização do tensor de energia-momento a menos de uma ambiguidade no termo $c \in \mathbf{R}$ de *point-splitting* e outra devida a adição de termos com dependência local da curvatura. Avaliemos isso tomando duas prescrições $\langle T_{ab} \rangle$ e $\langle \tilde{T}_{ab} \rangle$ que satisfaçam os axiomas de Wald para uma mesma escolha de c. Para quaisquer dois estados admissíveis $\omega_1 \in \omega_2$ num mesmo espaço-tempo (M, g), pelo primeiro axioma, teremos $\langle T_{ab} \rangle_1 - \langle T_{ab} \rangle_2 = \langle \tilde{T}_{ab} \rangle_1 - \langle \tilde{T}_{ab} \rangle_2$, o que nos diz que o tensor dado por

$$t_{ab} = \langle T_{ab} \rangle_1 - \langle T_{ab} \rangle_1$$

independe do estado. Do segundo axioma, concluimos que t_{ab} avaliado em $x \in M$ depende apenas da geometria de uma vizinhança arbitrariamente pequena de x, e portanto, t_{ab} é um termo de curvatura local. O terceiro axioma nos diz que t_{ab} também é covariantemente conservado, e o quarto axioma nos diz que $t_{ab} = 0$ no espaço-tempo de Minkowski. Assim, Wald resume tal resultado no seguinte teorema de unicidade (Teorema 4.6.1 de [Wal94]).

Teorema 4.1.2. Uma prescrição quântica para o tensor de energia-momento que satisfaça os axiomas de Wald (Axioma 4.1.1) é unicamente definida a menos de um termo de tipo (0,2) simétrico e local na curvatura. Ou seja, dadas duas prescrições $\langle T_{ab} \rangle$ e $\langle \tilde{T}_{ab} \rangle$ que satisfaçam os axiomas de Wald, o termo dado por

$$t_{ab} = \langle T_{ab} \rangle - \langle \tilde{T}_{ab} \rangle$$

é independe do estado, local na curvatura, covariantemente conservado ($\nabla^a t_{ab} = 0$ em qualquer espaço-tempo) e tal que $t_{ab}(p) = 0$ se a geometria local em torno de p for plana.¶

Tal teorema estabelece de certa forma uma unicidade (a menos das ambiguidades mencionadas), mas nada diz a respeito da existência de uma tal prescrição. O procedimento de *point-spliting* no qual retiramos de $\langle \Phi(x)\Phi(y) \rangle$ uma bidistribuição H(x,y) localmente construída de forma que tenhamos uma função suave nos garantiria os axiomas, dado que H(x,y) resolva a equação de onda em $x \in y$ e que se iguale à função de dois pontos do vácuo para o espaço-tempo de Minkowski. H(x,y) deve então conter a estrutura singular comum a todos os estados admissíveis e satisfazer os demais pré-requisitos. Por essas considerações tomamos como estados admissíveis aqueles que satisfaçam a condição de Hadamard (vide seção 3.3), na qual a prescrição mínima retiraríamos a divergência da função de dois pontos através da subtração da parametriz de Hadamard. Aqui ainda alguns cuidados devem ser destacados. Tal prescrição garantiria os primeiros dois axiomas de Wald, por H ser uma bidistribuição com contrução de caráter local. A conservação covariante e compatibilidade com o vácuo de Minkowski são posteriormente implantadas por adição "ad hoc" na forma Qg_{ab} na expressão clássica. Quanto a esse procedimento, como já mencionado anteriormente, em [Mor03] Moretti determina o valor de tal constante de forma que uma prescrição por *point-splitting* seja fisicamente aceitável: Como estamos interessados em quantização, podemos avaliar uma família de grandezas classicamente equivalentes ao tensor de energia-momento, mas que quanticamente gerem prescrições diferentes. Um termo da forma $c g_{ab} (\phi P \phi)$ se anula na camada de massa para um c constante, e portanto sua adição no tensor original não altera a grandeza clássica. Quanticamente tal adição produz efeitos, pois $\langle \hat{\phi}(x) P \hat{\phi}(x) \rangle_{\omega}$ não se anula por uma prescrição de *point-splitting*. Em [Mor03], mostra-se que a adição do termo com $c = c_n = n/(2n+4)$ permite um procedimento de renormalização por *point-splitting* bem comportado, gerando um tensor de energia-momento quântico de acordo com os axiomas de Wald. A ambiguidade restante, codificada no parâmetro λ é responsável pela ambiguidade gerada pelo termo t_{ab} . Dessa forma, a grandeza de importância para a quantização será um "novo" tensor de energia-momento, dado por

$$T_{ab} = T_{ab}^{(c_n)} = T_{ab}^{(0)} + \frac{n}{2(n+2)}g_{ab}(\phi P\phi)$$

que para o caso n = 4, nos dá

$$T_{ab} = (\nabla_a \phi)(\nabla_b \phi) - \frac{1}{6}g_{ab} \left((\nabla^c \phi) (\nabla_c \phi) + m^2 \phi^2 \right) + g_{ab} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \Box \phi^2 + \xi \left(R_{ab} - \frac{1}{6}g_{ab}R - \nabla_a \nabla_b \right) \phi^2$$
(4.4)

Temos então

Definição 4.1.3. (Flutuação média de campo e tensor de energia-momento médio quânticos) [Mor03]. Seja (M, g_{ab}) espaço-tempo globalmente hiperbólico de dimensão n e ω um estado de Hadamard sobre a álgebra de Weyl $\mathfrak{A}(M, g_{ab})$. Definimos a flutuação média de campo $\langle \Phi^2 \rangle$ e o tensor de energia-momento médio $\langle T_{ab} \rangle$ como dados pelas prescrições

$$x \mapsto \langle T_{ab}(x) \rangle_{\omega,\lambda} = \lim_{y,y' \to x} D_{ab}^{(c_n)}(x)(y,y') [\omega_2(y,y') - H_k(y,y')], \tag{4.5}$$

$$x \mapsto \langle \Phi(x)\Phi(x) \rangle_{\omega,\lambda} = \lim_{y,y' \to x} [\omega_2(y,y') - H_k(y,y')], \tag{4.6}$$

nas quais a constante $c_n = n/(2n+4)$ é definido apenas a partir da dimensão do espaçotempo, o operador $D_{ab}^{(c_n)}$ é definido por $D_{ab}(x)(y,y') + (c_n/2)(P_y + P'_y)$ e a constante $\lambda \in \mathbf{R}$ é um parâmetro de escala advindo da parametriz de Hadamard.

Temos então um procedimento para determinar o tensor de energia-momento, a menos de algumas ambiguidades a serem discutidas. Porém, para determinar suas componentes em casos concretos (como queremos fazer em espaços FLRW) devemos ter uma melhor noção sobre a parametriz de Hadamard. Nas seções que se seguem buscaremos completar essas lacunas, avaliando a função de mundo de Synge (seção 4.2) e a parametriz de Hada-

mard (seções 4.3, 4.4), para por fim revisitarmos o tensor de energia-momento na seção 4.5.

4.2 Distância Geodésica

Bidistribuições (como a função de dois pontos) podem ser encaradas como um limite de núcleos de integração suaves, dependentes de duas variáveis do espaço-tempo. Dessa maneira, para analisarmos operadores lineares em $\mathfrak{F}(M)$ e certas derivações, é nessária a noção de cálculo de bitensores, que nada mais são do que tensores na variedade produto M^2 .

Nessa seção revisaremos cálculo básico de bitensores, em particular do biescalar σ definido como o quadrado da distância geodésica entre dois pontos, comumente referido como função de mundo de Synge. Tal função é tratada nas referências [Syn31,Ful89,Poi04], as quais seguiremos nesse texto (utiliza-se com frequência a convenção de σ como meio da distância geodésica ao quadrado, o que acrescenta um fator 1/2 de diferença à convenção utilizada aqui).

Seja $\gamma : [0,1] \to M$ uma curva geodésica em (M,g), mapeando o parâmetro $\lambda \in [0,1]$ em $x(\lambda) \in M$ e seja $v^a(\lambda)$ seu vetor tangente em $T_{x(\lambda)}M$, com componentes dadas por $v^{\mu} = dx^{\mu}(t)/dt$. Por γ ser geodésica, vale que $v^a \nabla_a v^b = 0$. A distância geodésica entre o ponto $x_0 = x(0)$ e o ponto $x_1 = x(1)$ através de γ é então dada por

$$\sigma(x_0, x_1) = \int_0^1 g_{ab}(x(\lambda)) v^a(\lambda) v^b(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda$$

Toda geodésica pode ser reparametrizada de forma a deixar dois pontos quaisquer de sua imagem nos pontos $\gamma(0) \in \gamma(1)$. De forma genérica, dados quaisquer pontos $x_a \in x_b$ ligados por uma geodésica $\gamma \operatorname{com} \gamma(\lambda_a) = x_a, \gamma(\lambda_b) = x_b$, temos

$$\sigma(x_a, x_b) = (b - a) \int_{\lambda_a}^{\lambda_b} g_{ab}(x(\lambda)) v^a(\lambda) v^b(\lambda) \, \mathrm{d}\lambda.$$

A geodésica pode ser reparametrizada "ao contrário", de onde tiramos que o biescalar σ é simétrico. Ou seja,

$$\sigma(x_a, x_b) = \sigma(x_b, x_a).$$

A definição de σ em dois pontos depende de uma geodésica que os ligue, e tal curva pode a princípio não existir ou ser não-única. Porém, para vizinhanças suficientemente pequenas, a unicidade de uma geodésica ligando dois pontos (a menos de reparametrizações) é garantida, e vinhanças que satisfaçam tal propriedades são denominadas **vizinhanças convexas**. Toda variedade lorentziana possui recobrimento aberto constituido por vizinhanças convexas ([O'N83], Cap. 5, Lema 10). Para quaisquer pontos em uma dada vizinhança convexa o biescalar σ torna-se então bem definido.

Seja O um aberto convexo de (M, g). A distância geodésica ao quadrado com sinal é

definida pelo mapa exponencial da forma

$$\sigma(x,y) = g_x \Big(\exp_x^{-1}(y), \exp_x^{-1}(y) \Big).$$
(4.7)

A função σ então define-se em um subconjunto adequado da variedade produto $M \times M$, e define-se então como um biescalar. Tratemos no momento de biescalares e bitensores, a começar por um dado biescalar ω agindo em um domínio dado por um subconjunto adequado de M^2 , bem-definido em todas vizinhanças convexas. Por padrão de notação, designaremos o primeiro argumento como x e o segundo argumento como y ou x'. Podemos fixar uma das variáveis e encarar ω como um escalar em uma vizinhança apropriada de M, e também podemos derivar ω com respeito a seus argumentos. $\nabla_{(x)a}\omega(x,y)$ designa então a 1-forma dada pela diferencial de $x \mapsto \omega(x,y)$, e o análogo segue para $\nabla_{(y)a'}\omega(x,y)$. Por vezes simplificaremos a notação diferencial designando o índice com ou sem o denotador linha (') em se tratando de derivação no primeiro ou segundo argumento. Dessa forma, podemos considerar o mapa $\nabla_a \sigma : (x, y) \mapsto \nabla_a \sigma(x, y)$ como um escalar em y e uma 1-forma em x, generalizando-se de forma análoga para mais derivadas. Como derivadas parciais comutam, podemos comutar diferenciais agindo em argumentos diferentes, de forma que $\nabla_a \nabla_{b'}\sigma = \nabla_{b'} \nabla_a \sigma$.

Podemos então construir bitensores através de derivações. Se tomarmos

$$\nabla_{a_1} \nabla_{a_2} \dots \nabla_{a_p} \nabla_{b'_1} \dots \nabla_{b'_q} \omega(x, y),$$

teremos um bitensor de tipo $\mathfrak{T}\binom{0}{p}_x M \otimes \mathfrak{T}\binom{0}{q}_y M$. De uma maneira geral, consideramos bitensores $T^{a_1...a_p}_{b_1...b_q} \stackrel{c'_1...c'_l}{d'_1...d'_m}(x,y)$ como elementos de $\mathfrak{T}\binom{p}{q}_x M \otimes \mathfrak{T}\binom{l}{m}_y M$. Para simplificarmos a notação, designaremos índices tensoriais arbitrários por A (no primeiro argumento) e B' (no segundo argumento), e assim compactaremos a notação para bitensores $T_{AB'}$. Também podemos atuar em bitensores com operadores diferenciais escalares em qualquer um dos argumentos, como por exemplo $g^{ab}(x)\nabla_{(x)a}\nabla_{(x)b} = \Box_x$. Designaremos operadores escalares agindo no primeiro ou segundo argumento através de um subscrito x ou y, como em \Box_x ou \Box_y , ou também pela notação ('), denotando um operador escalar sem ' como P agindo como P_x e P' agindo como P_y .

Muitas vezes estaremos interessados em valores de bitensores na diagonal, ou seja, no *limite de coincidência*. Presumiremos que os bitensores com os quais lidamos sejam bem-comportados o suficiente para que tal limite independa da escolha de uma geodésica que una os argumentos. Utilizamos a prática notação de colchetes indicando tal limite, dado que

$$[T_{AB'}](z) = \lim_{x,y \to z} T_{AB'}(x,y).$$
(4.8)

Por vezes também tomaremos algum dos argumentos fixos e passaremos o limite no argumento livre. Os índices tensoriais recairão obviamente no espaço do dado ponto, dando a $[T_{AB'}]$ a estrutura de um tensor simples em M, de forma que $[T_{AB'}](z) \in \mathfrak{T}\binom{p+l}{q+m}_z M$. É prático, porém, manter a notação de (') para índices tensoriais no segundo argumento, lembrando sempre da "origem" do tensor antes da coincidência. Na coincidência, porém, podemos identificar os índices (') com os índices normais, de forma que $[T_{AB'}]$ seja um tensor representado por índices $[T]_{AB}$. Podemos também então contrair índices em xe y após a coincidência, como por exemplo $[T_{ab'}]$ para $[T^a_{a'}] = g^{ab}[T]_{ab} = [T_{ab'}]$. Por fim, enunciamos **o teorema de Synge** (demonstração em [Poi04], sec.2.2.2), expresso na igualdade

$$\nabla_a[T_{AB'}] = [\nabla_a T_{AB'}] + [\nabla_{a'} T_{AB'}] \tag{4.9}$$

Biescalares ω podem ser decompostos em parte simétrica ω_+ e antissimétrica ω_- , dadas por

$$\omega_{\pm}(x,y) = \frac{1}{2} \big(\omega(x,y) \pm \omega(y,x) \big). \tag{4.10}$$

No limite de coincidência, teremos obviamente $[\omega_{-}] = 0$ e $[\omega] = [\omega_{+}]$. De particular interesse são os biescalares simétricos, como o biescalar de Synge σ . Para tais biescalares, a regra de Synge toma a forma

$$\nabla_a[\omega] = 2[\nabla_a \omega] = 2[\nabla_{a'} \omega].$$

Isso resume o básico de cálculo de Synge nessessário para o presente texto. Voltemos agora ao biescalar de Synge e avaliemos a primeira derivada de σ , dada por $\nabla_a \sigma$, em um dado sistema de coordenadas. Tome a geodésica parametrizada por $\lambda \in [0, 1]$ descrita pelas coordenadas $z^{\mu}(\lambda)$, com z(0) = x e z(1) = y, com vetor tangente dado por $\dot{z}(\lambda) = \dot{z}^{\mu}(\lambda)\partial_{\mu}|_{z(\lambda)}$. Teremos $\sigma(x, y) = \int_0^1 g_{\mu\nu} \dot{z}^{\mu} \dot{z}^{\nu}$. Desloquemos a curva para uma nova geodésica $\lambda \mapsto z^{\mu}(\lambda) + \delta z^{\mu}(\lambda) \operatorname{com} \delta z^{\mu}(0) = \delta x$ e $\delta z^{\mu}(1) = 0$, ligando o ponto denominado por $x + \delta x$ ao ponto y. Teremos $\sigma(x + \delta x, y) = \sigma(x, y) + \delta \sigma$, onde $\delta \sigma$ é dado por

$$\delta\sigma = \left(\int_0^1 g_{\mu\nu}(z+\delta z) \frac{\mathrm{d}(z^\mu+\delta z^\mu)}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}(z^\nu+\delta z^\nu)}{\mathrm{d}\lambda} - g_{\mu\nu}(z) \frac{\mathrm{d}z^\mu}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}z^\nu}{\mathrm{d}\lambda}\right) \mathrm{d}\lambda$$

Como estamos interessados na forma diferencial, expandiremos a expressão acima até primeira ordem em δz , e chegamos na igualdade

$$\begin{split} \delta\sigma &= \int_0^1 \left(2g_{\mu\nu}(z) \frac{\mathrm{d}(z^{\mu})}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}\delta z^{\nu}}{\mathrm{d}\lambda} + \partial_{\rho}g_{\mu\nu}(z) \frac{\mathrm{d}z^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}z^{\nu}}{\mathrm{d}\lambda} \delta z^{\rho} \right) \mathrm{d}\lambda \\ &= 2g_{\mu\nu}(z) \frac{\mathrm{d}z^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda} \delta z^{\nu} \Big|_{\lambda=0}^1 + \int_0^1 \left(-2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \left(g_{\mu\nu}(z) \frac{\mathrm{d}z^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda} \right) + +\partial_{\nu}g_{\alpha\beta}(z) \frac{\mathrm{d}z^{\alpha}}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}z^{\beta}}{\mathrm{d}\lambda} \right) \delta z^{\nu} \mathrm{d}\lambda \\ &= 2g_{\mu\nu}(z) \frac{\mathrm{d}z^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda} \delta z^{\nu} \Big|_{\lambda=0}^1 - 2\int_0^1 g_{\mu\nu}(z) \left(\frac{\mathrm{d}^2 z^{\mu}}{\mathrm{d}\lambda^2} + \Gamma^{\mu}_{\ \alpha\beta} \frac{\mathrm{d}z^{\alpha}}{\mathrm{d}\lambda} \frac{\mathrm{d}z^{\beta}}{\mathrm{d}\lambda} \right) \delta z^{\nu} \mathrm{d}\lambda. \end{split}$$

O argumento da integral se anula identicamente pois z é uma geodésica, e o termo de borda que sobra após a integração por partes nos dá a diferenciação de σ . No caso descrito, temos $\delta z^{\mu}|_{\lambda=0} = \delta x^{\mu}$ e $\delta z^{\mu}|_{\lambda=1} = 0$, o que resulta em $\delta \sigma = -2g_{\mu\nu}(x)v^{\nu}(x)\delta x^{\nu}$. Protanto, para a diferencial em x, temos então que $\nabla_{(x)a}\sigma(x,y) = -2g_{ab}(x)v^b(x)$, onde v^b é a tangente à geodésica original z que liga x a y. Em notação mais compacta, $\nabla_{(x)a}\sigma(x,y) = -2g_{ab}(x) \exp_x^{-1}(y)^a$. Analogamente, com o deslocamento $\delta z^{\mu}|_{\lambda=0} = 0$ e $\delta z^{\mu}|_{\lambda=1} = \delta y^{\mu}$, obtemos $\nabla_{(y)a'}\sigma(x,y) = 2g_{a'b'}(y)v^b(y)$, onde v^b ainda é a geodésica z que une x a y. Dessa forma, invertendo os argumentos, temos $\nabla_{(y)a'}\sigma(x,y) = -\nabla_{(y)a'}\sigma(y,x)$.

A norma de $\nabla \sigma$ é freqüentemente utilizada, e deriva-se de forma simples,

$$g(x)^{ab} \left(\nabla_{(x)a} \sigma(x, y) \right) \left(\nabla_{(x)b} \sigma(x, y) \right) = 4g_{ab}(x) \left(\exp_x^{-1}(y)^a \right) \left(\exp_x^{-1}(y)^b \right) = 4\sigma(x, y).$$

Trata-se de uma fórmula simples que também serve de guia como uma equação diferencial para σ , para cálculo de derivadas de ordens superiores. Resumimos então os resultados pertinentes a primeira derivada de σ a seguir.

$$\nabla_{(x)a}\sigma(x,y) = -2\exp_x^{-1}(y)_a, \tag{4.11}$$

$$\nabla_{(y)a'}\sigma(x,y) = 2\exp_y^{-1}(x)_{a'},\tag{4.12}$$

$$g(x)^{ab} \left(\nabla_{(x)a} \sigma(x, y) \right) \left(\nabla_{(x)b} \sigma(x, y) \right) = 4\sigma(x, y).$$
(4.13)

Para o cálculo dos limites de coincidência dos termos da parametriz de Hadamard são necessários alguns limites de coincidência de derivadas da distância geodésica. Esses valores podem ser calculados de forma recorrente, derivando-se a equação 4.13 e tomando seu limite de coincidência. Temos interesse em calcular agora a segunda derivada de σ . Apliquemos assim o operador $\nabla_a \nabla_b = \nabla_{(x)a} \nabla_{(x)b}$ à equação 4.13, e teremos

$$4\nabla_a \sigma = \nabla_a \nabla^b \sigma \nabla_b \sigma + \nabla^b \sigma \nabla_a \nabla_b b \sigma = 2\nabla^c \sigma \nabla_a \nabla_c \sigma$$

que nos leva à identidade $\nabla^b \sigma (\nabla_a \nabla_b \sigma - 2g_{ab}) = 0$. Tomando o limite de coincidência por uma geodésica de tipo tempo (ou espaço), temos que $\nabla^b \sigma$ não se anula antes da coincidência, e portanto $\nabla_a \nabla_b \sigma$ na coincidência assume o valor $2g_{ab}$. Assim, temos que $[\sigma] = 0, [\nabla_a \sigma] = 0$ e $[\nabla_b \nabla_a \sigma] = 2g_{ab}$. Se quisermos calcular o termo de $[\nabla_{p_1} \dots \nabla_{p_k} \sigma]$, basta aplicarmos o respectivo operador na equação acima e tomarmos o limite de coincidência.

Por exemplo, para calcularmos $[\nabla_c \nabla_b \nabla_a \sigma]$, aplicamos três derivadas na equação (4.13) (usando aqui o atalho de notação $\nabla_{abc...} = \nabla_a \nabla_b \nabla_c \dots$ e tomando liberdade de misturar índices gregos com o mesmo significado de índices latinos), obtendo assim a expressão

$$\nabla_{cba}\sigma = \frac{1}{4}\nabla_{cba}(\nabla_e\sigma\,\nabla^e\sigma) = \frac{1}{2}\nabla_{cb}(\nabla_{ae}\sigma\,\nabla_e\sigma) \tag{4.14}$$

$$= \frac{1}{2} (\nabla_{cbe} \sigma \,\nabla_a^{\ e} \sigma + \nabla_{cae} \sigma \,\nabla_b^{\ e} \sigma + \nabla_{bae} \sigma \,\nabla_c^{\ e} \sigma + \nabla_{cbae} \sigma \,\nabla^e \sigma). \tag{4.15}$$

Tomando agora a coincidência, os termos com uma derivada de sigma desaparecem, e

teremos por fim

$$[\nabla_{cba}\sigma] = [\nabla_{cba}\sigma] + [\nabla_{cab}\sigma] + [\nabla_{bac}\sigma],$$

mas como σ é escalar e a conexão sem torção, então $\nabla_a \nabla_c \sigma = \nabla_c \nabla_a \sigma$, e portanto $\nabla_{cab} \sigma = \nabla_{cba} \sigma$ e ainda $\nabla_{bac} \sigma = \nabla_{bca} \sigma = \nabla_{cba} \sigma + R_{cba}{}^d \nabla_d \sigma$. No valor de coincidência, como $\nabla_d \sigma$ se anula, teremos então $[\nabla_{bac} \sigma] = [\nabla_{cab} \sigma] = [\nabla_{cba} \sigma]$, e portanto $[\nabla_{cba} \sigma] = 0$. Expressões com mais derivadas são obtidas de maneira análoga. Para o cálculo de $[V_1]$, precisamos da sexta derivada de σ na forma de laplaceano ao cubo. Assim, seguiremos com o cálculo de $[\nabla_{dcba} \sigma]$ e $[\Box^3 \sigma]$. Aplicando o operador ∇_{dcba} na expressão 4.13 obtemos

No limite de coincidência os temos da segunda linha se anulam (múltiplos de $[\nabla_{\mu}\sigma], [\nabla_{\mu\nu\rho}\sigma])$, e obtemos então

$$[\nabla_{dcba}\sigma] + [\nabla_{dbac}\sigma] + [\nabla_{cbad}\sigma] = 0.$$

Notemos dessa vez que

$$[\nabla_{dbac}\sigma] = [\nabla_{dbca}\sigma] = [\nabla_{dcba}\sigma] + [\nabla_d(R_{bca}^{\ \mu}\nabla_\mu\sigma)] = [\nabla_{dcba}\sigma] + 2R_{bcad}.$$
$$[\nabla_{cbad}\sigma] = [\nabla_{cdba}\sigma] + 2R_{bdac} = [\nabla_{dcba}\sigma] + 2R_{bdac}.$$

e portanto chegamos ao resultado

$$[\nabla_{dcba}\sigma] = \frac{2}{3}(R_{bcda} + R_{bdca}).$$

Devemos também calcular o termo $[\Box^3 \sigma]$, que será importante na determinação de $[V_1]$. Para isso, aplicamos o operador ∇_{fedcba} na expressão 4.13 tendo em mente que contrairemos com $g^{ab}g^{cd}g^{ef}$. Obtemos em primeira instância

$$\begin{aligned} 2[\nabla_{fedcba}\sigma] &= 2[\nabla_{fedcba}\sigma] + 2[\nabla_{fedcab}\sigma] + 2[\nabla_{fedbac}\sigma] + \\ &+ 2[\nabla_{fecbad}\sigma] + 2[\nabla_{fdcbae}\sigma] + 2[\nabla_{edcbaf}\sigma] + \\ &+ [\nabla_{fed\mu}\sigma][\nabla_{cba}{}^{\mu}\sigma] + [\nabla_{fec\mu}\sigma][\nabla_{dba}{}^{\mu}\sigma] + [\nabla_{feb\mu}\sigma][\nabla_{dca}{}^{\mu}\sigma] + [\nabla_{fea\mu}\sigma][\nabla_{dcb}{}^{\mu}\sigma] + \\ &+ [\nabla_{fdc\mu}\sigma][\nabla_{eba}{}^{\mu}\sigma] + [\nabla_{fdb\mu}\sigma][\nabla_{eca}{}^{\mu}\sigma] + [\nabla_{fda\mu}\sigma][\nabla_{ecb}{}^{\mu}\sigma] + [\nabla_{fcb\mu}\sigma][\nabla_{eda}{}^{\mu}\sigma] + \\ &+ [\nabla_{fca\mu}\sigma][\nabla_{edb}{}^{\mu}\sigma] + [\nabla_{fba\mu}\sigma][\nabla_{edc}{}^{\mu}\sigma]. \end{aligned}$$

Os termos da forma $[\nabla_{abcd}\sigma][\nabla_{\mu\nu\rho\sigma}\sigma]$, após a contração com termos da métrica, dividir-

se-ão nas seguintes possibilidades

$$\begin{split} [\nabla_{abcd}\sigma][\nabla^{abcd}\sigma] &= +\frac{16}{3}R_{abcd}R^{abcd},\\ [\nabla_{\mu}{}^{\mu}{}_{ab}\sigma][\nabla_{\nu}{}^{\nu ab}\sigma] &= +\frac{32}{9}R_{ab}R^{ab},\\ [\nabla_{\mu}{}^{\mu}{}_{ab}\sigma][\nabla_{\nu}{}^{a}{}^{\nu b}\sigma] &= -\frac{16}{9}R_{ab}R^{ab},\\ [\nabla_{a\mu}{}^{\mu}{}_{b}\sigma][\nabla_{\nu}{}^{a}{}^{\nu b}\sigma] &= +\frac{8}{9}R_{ab}R^{ab}, \end{split}$$

e os termos da forma $[\nabla_{fedcba}\sigma],$ nas possibilidades

$$\begin{split} [\nabla_{\mu \nu \rho}^{\mu \nu \rho} \sigma] &= [\Box^{3} \sigma], \\ [\nabla_{\mu \nu \rho}^{\mu \nu \rho} \sigma] &= [\Box^{3} \sigma] + 4 \Box R - \frac{4}{3} R_{ab} R^{ab}, \\ [\nabla_{\mu \nu \rho}^{\nu \rho \mu} \sigma] &= [\Box^{3} \sigma] + 4 \Box R - \frac{2}{3} R_{ab} R^{ab}. \end{split}$$

Dessa forma, obtemos a expressão

$$\left[\Box^{3}\sigma\right] = \frac{8}{15} \left(R_{ab}R^{ab} - R_{abcd}R^{abcd} - 6\Box R \right).$$

Resumimos então os resultados necessários na seguinte expressão:

$$[\nabla_a \sigma] = 0$$

$$[\nabla_b \nabla_a \sigma] = 2g_{ab}$$

$$[\nabla_b \nabla_{a'} \sigma] = -2g_{ab}$$

$$[\nabla_c \nabla_b \nabla_a \sigma] = 0$$

$$[\nabla_d \nabla_c \nabla_b \nabla_a \sigma] = \frac{2}{3} (R_{bcda} + R_{bdca})$$

$$[\Box_x \sigma] = 2n$$

$$[\Box_x^2 \sigma] = -\frac{4}{3} R$$

$$[\Box_x^3 \sigma] = \frac{8}{15} \left(R_{ab} R^{ab} - R_{abcd} R^{abcd} - 6 \Box R \right)$$
(4.16)

Em seguida, deixaremos para referência algumas expressões de derivação de polinômios e logaritmo de σ , que serão úteis para a análise da parametriz de Hadamard. Assim, temos

que

$$\nabla \sigma^{k} = k \sigma^{k-1} \nabla \sigma$$
$$\Box \sigma^{k} = k (\Box \sigma + 4k - 4) \sigma^{k-1}$$
$$\nabla \log \frac{\sigma}{\lambda^{2}} = \frac{1}{\sigma} \nabla \sigma$$
$$\Box \log \frac{\sigma}{\lambda^{2}} = \frac{\Box \sigma - 4}{\sigma}$$
$$\nabla \left(\sigma^{k} \log \frac{\sigma}{\lambda^{2}} \right) = \left(k \log \frac{\sigma}{\lambda^{2}} + 1 \right) \sigma^{k-1} \nabla \sigma$$
$$\Box \left(\sigma^{k} \log \frac{\sigma}{\lambda^{2}} \right) = \left[k (\Box \sigma + 4k - 4) \log \frac{\sigma}{\lambda^{2}} + (\Box \sigma + 8k - 4) \right] \sigma^{k-1}$$

Por fim, utilizando $P(fg)=(Pf)g-f\Box g-2\langle \nabla f,\nabla g\rangle,$ chegamos a

$$P(f\sigma^{k}) = (Pf)\sigma^{k} - k\left[(\Box\sigma + 4k - 4)f + 2\langle\nabla\sigma,\nabla f\rangle\right]\sigma^{k-1}$$

$$P\left(f\log\frac{\sigma}{\lambda^{2}}\right) = (Pf)\log\frac{\sigma}{\lambda^{2}} - \frac{(\Box\sigma - 4)f + 2\langle\nabla\sigma,\nabla f\rangle}{\sigma}$$

$$P\left(f\sigma^{k}\log\frac{\sigma}{\lambda^{2}}\right) = \left[(Pf)\sigma^{k} - \left[(\Box\sigma + 4k - 4) + 2\langle\nabla\sigma,\nabla f\rangle\right]k\sigma^{k-1}\right]\log\frac{\sigma}{\lambda^{2}}$$

$$- \left[(\Box\sigma + 8k - 4)f + 2\langle\nabla\sigma,\nabla f\rangle\right]\sigma^{k-1}$$

4.3 Parametriz de Hadamard

A parametriz de Hadamard é dada pelo seguinte Ansatz, dependendo dos parâmetros λ e N:

$$h^{(N)}(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{U(x,y)}{\sigma(x,y)} + V^{(n)}(x,y) \log \frac{\sigma(x,y)}{\lambda^2} \right)$$
(4.17)

onde podemos expandir $V^{(N)}$ em

$$V^{(N)}(x,y) = \sum_{k=0}^{N} V_k(x,y) \,\sigma(x,y)^k.$$

Assim, devemos calcular $Ph = (1/4\pi^2)[P(U/\sigma) + P(V\log\sigma/\lambda^2)].$

$$P\left(\frac{U}{\sigma}\right) = \frac{PU}{\sigma} + \frac{(\Box\sigma - 8)U + 2\langle\nabla\sigma,\nabla U\rangle}{\sigma^2}$$
$$P\left(V\log\frac{\sigma}{\lambda^2}\right) = (PV)\log\frac{\sigma}{\lambda^2} - \frac{(\Box\sigma - 4)V + 2\langle\nabla\sigma,\nabla V\rangle}{\sigma}$$
$$= (PV)\log\frac{\sigma}{\lambda^2} - \sum_{k=0}^{(N)} \left[(\Box\sigma + 8k - 4)V_k + 2\langle\nabla\sigma,\nabla V_k\rangle\right]\sigma^{k-1}$$

Exigindo que os termos divergentes se anulem, teremos

$$(\Box \sigma - 8)U + 2\langle \nabla \sigma, \nabla U \rangle = 0$$

CAPÍTULO 4. REGULARIZAÇÃO POR POINT-SPLITTING

$$-PU + (\Box \sigma - 4)V_0 + 2\langle \nabla \sigma, \nabla V_0 \rangle = 0$$
$$PV = 0$$

Expandindo PV = 0, temos

$$PV = \sum_{k} P(V_k \sigma^k) = \sum_{k} (PV_k) \sigma^k - [(\Box \sigma + 4k - 4)V_k + 2\langle \nabla \sigma, \nabla V_k \rangle] k \sigma^{k-1}$$
$$= \sum_{k} \left(PV_{k-1} - k [(\Box \sigma + 4k - 4)V_k + 2\langle \nabla \sigma, \nabla V_k \rangle] \right) \sigma^{k-1}$$

Dessa forma, os termos são recursivamente determinados por equações diferenciais, resumidas nas **relações de recursão de Hadamard**

$$0 = (\Box \sigma - 8)U + 2\langle \nabla \sigma, \nabla U \rangle \tag{4.18}$$

$$PU = (\Box \sigma - 4)V_0 + 2\langle \nabla \sigma, \nabla V_0 \rangle \tag{4.19}$$

$$PV_{k-1} = k \left[(\Box \sigma + 4k - 4)V_k + 2\langle \nabla \sigma, \nabla V_k \rangle \right] \qquad \text{para } k \ge 1$$
(4.20)

Dessa forma, o resultado de Ph resume-se em

$$Ph = -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{k=1}^{(N)} \left[(\Box \sigma + 8k - 4) V_k + 2 \langle \nabla \sigma, \nabla V_k \rangle \right] \sigma^{k-1}$$

e assim, no limite de coincidência, teremos

$$[P_xh](x) = -\frac{12}{4\pi^2}[V_1](x)$$

Diferenciando a fórmula Ph, temos

$$\nabla_{(x)a}P_{x}h = -\frac{1}{4\pi^{2}}\sum_{k=1}^{N} \left((k-1)\sigma^{k-2} \Big((\Box\sigma + 8k - 4)V_{k} + 2\langle \nabla\sigma, \nabla V_{k} \rangle \Big) \nabla_{(x)a}\sigma + \sigma^{k-1} \Big((\Box\sigma + 8k - 4)\nabla_{(x)a}V_{k} + V_{k}\nabla_{(x)a}\Box\sigma + 2g(x)^{cd}\nabla_{(x)a}\nabla_{(x)c}\sigma\nabla_{(x)a}V_{k} + 2g(x)^{cd}\nabla_{(x)c}\sigma\nabla_{(x)a}\nabla_{(x)d}V_{k} \Big) \right)$$

e no limite de coincidência, teremos

$$[\nabla_{(x)a}P_xh](x) = -\frac{1}{4\pi^2} \left([12\nabla_{(x)a}V_1] + 4g^{cd}g_{ac}[\nabla_{(x)d}V_1] \right) = -\frac{8}{4\pi^2} \nabla_a[V_1](x)$$
(4.21)

e analogamente, diferenciando no segundo argumento, teremos

$$[\nabla_{(y)a}P_xh](x) = -\frac{1}{4\pi^2} \left([12\nabla_{(x)a}V_1] - 4g^{cd}g_{ac}[\nabla_{(x)d}V_1] \right) = -\frac{4}{4\pi^2} \nabla_a[V_1](x)$$
(4.22)

4.4 Cálculo do Termo $[V_1]$

Vemos então que a forma algébrica de alguns termos de coincidência são necessárias, em particular o termo $[V_1]$. Devemos calcular tal termo de forma iterativa, começando por [U], $[\Box U]$, $[V_0]$.

Para calcularmos $[V_k]$, basta aplicarmos o limite de coincidência na relação de Hadamard para V_k , assim obtendo

$$4(k+1)[V_k] = [P_x V_{k-1}] = -[\Box_x V_{k-1}] + (m^2 + \xi R)[V_{k-1}].$$

Ou seja, segundo esse tipo de recorrência, vemos que para determinar V_k é necessário sabermos apenas as coincidências anteriores dadas por $[V_{k-1}]$ e $[\Box_x V_{k-1}]$. Para identificarmos derivadas dos termos $[V_k]$, basta aplicarmos a derivação nas relações recursivas e depois tomar a coincidência, obtendo dependências em ordem mais alta de derivadas em V_{k-1} . Dessa forma, para obtermos o termo $[V_1]$, precisamos de $[V_0]$ e de $[\Box_x V_0]$. Esses, por sua vez, necessitam de [U], $[\Box_x U]$ e de $[\Box_x^2 U]$. Resumiremos o procedimento para a determinação de cada termo a seguir.

Primeiramente, saímos da condição inicial de que [U] = 1, e dessa forma, pelo teorema de Synge, temos para a primeira derivada que $[\nabla_a U] = \frac{1}{2} \nabla_a [U] = 0$. Para obtermos a segunda derivada de U, derivamos duas vezes a relação de Hadamard para U, chegando na equação

$$0 = \nabla_a \nabla_b ((\Box_x \sigma - 8)U + 2\nabla^c \sigma \nabla_c U) =$$

= $(\nabla_a \nabla_b \Box_x \sigma)U + (\Box_x \sigma - 8)\nabla_a \nabla_b U + 2(\nabla_{(a} \Box_x \sigma)\nabla_b)U$
+ $2(\nabla_a \nabla_b \nabla^c \sigma) \nabla_c U + 2\nabla^c \sigma (\nabla_a \nabla_b \nabla_c U) + 8(\nabla_{(a} \nabla^c \sigma) \nabla_b)\nabla_c U = 0.$

Tomando então a coincidência, chegamos na igualdade

$$[\nabla_a \nabla_b U] = \frac{1}{6} R_{ab}, \qquad [\Box_x U] = \frac{1}{6} R.$$
 (4.23)

Prosseguimos então, para determinação do termo $[\Box^2 U]$, aplicando o operador \Box^2 na relação de Hadamard e tomando a coincidência. Com algum trabalho, chegamos na expressão

$$[\Box^2 U] = \frac{1}{36}R^2 + \frac{1}{30}R_{abcd}R^{abcd} - \frac{1}{30}R_{ab}R^{ab} + \frac{1}{5}\Box R.$$
(4.24)

Com esses dois valores é possível calcular os termos desejados de V_0 . Primeiramente calculamos a coincidência na relação de Hadamard para V_0 , obtendo o resultado

$$-[\Box U] + (m^2 + \xi R)[U] = [\Box \sigma - 4][V_0],$$

o que nos dá

$$[V_0] = \frac{1}{4} \left[m^2 + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R \right], \qquad (4.25)$$

e analogamente, derivando a relação anterior antes de tomar a coincidência, chegamos na expressão

$$\left[\Box V_{0}\right] = \frac{1}{24}m^{2}R + \frac{1}{24}\left(\xi - \frac{1}{6}\right)R^{2} + \frac{1}{12}\left(\xi - \frac{1}{5}\right)\Box R + \frac{1}{360}R_{ab}R^{ab} - \frac{1}{360}R_{abcd}R^{abcd} \quad (4.26)$$

E por fim, chegamos na esperada expressão para $[V_1]$, dada por

$$[V_1] = \frac{1}{32}m^4 + \frac{1}{16}\left(\xi - \frac{1}{6}\right)m^2R + \frac{1}{32}\left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2R^2 - \frac{1}{96}\left(\xi - \frac{1}{5}\right)\Box R + \frac{1}{2880}R_{abcd}R^{abcd} - \frac{1}{2880}R_{ab}R^{ab}.$$
 (4.27)

Nota. Em muitas referências é comum a utilização de outras convenções, como por exemplo utilizar a expansão em termos da função de mundo de Synge, que denotaremos por $\tilde{\sigma}$, definida como meio da distância geodésica ao quadrado. Dessa maneira, a parametriz de Hadamard toma a forma

$$h = \frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{u}{\tilde{\sigma}} + \sum_{k=0}^{\infty} (v_k \tilde{\sigma}^k) \log \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\lambda}^2} \right).$$

As diferenças entre a convenção usada nesse texto para as usando a previamente citada são então expressas nas igualdades

$$U = u, \qquad V_k = v_k/2^{k+1}, \qquad \lambda = \sqrt{2}\tilde{\lambda}$$

4.5 Algumas Identidades de Point-Splitting

Nessa seção resumiremos algumas identidades de *point-splitting* para estados de Hadamard. Relembrando, um estado sobre a álgebra de Weyl é de Hadamard se for analítico quase-livre e se sua função de 2 pontos possuir estrutura singular definida pela parametriz de Hadamard.

Primeiramente, escrevemos a função de dois pontos na forma

$$\omega_2(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{U(x,y)}{\sigma(x,y)} + V(x,y) \log \sigma(x,y) + W(x,y) \right) = h(x,y) + \frac{1}{4\pi^2} W(x,y)$$

A prescrição para o *point-splitting* do campo ao quadrado nos dá

$$\langle \Phi^2 \rangle = \lim_{x,y \to z} \left(\omega_2(x,y) - h(x,y) \right) = \frac{1}{4\pi^2} [W].$$

A função de dois pontos resolve a equação de Klein-Gordon. Dessa maneira, seguem

as identidades:

$$\left\langle \Phi P \Phi \right\rangle = \left\langle (P \Phi) \Phi \right\rangle = \lim_{x, y \to z} P_x \left(\omega_2(x, y) - h(x, y) \right) = \frac{12}{4\pi^2} [V_1], \tag{4.28}$$

$$\left\langle (\nabla_a P \Phi) \Phi \right\rangle = \lim_{x, y \to z} \nabla_{(x)a} P_x \left(\omega_2(x, y) - h(x, y) \right) = \frac{8}{4\pi^2} \nabla_a [V_1], \tag{4.29}$$

$$\left\langle (P\Phi)(\nabla_a \Phi) \right\rangle = \lim_{x,y \to z} \nabla_{(y)a} P_x \left(\omega_2(x,y) - h(x,y) \right) = \frac{4}{4\pi^2} \nabla_a [V_1]. \tag{4.30}$$

Por fim, provaremos que a prescrição para $\langle \Box(\Phi^2) \rangle$ equivale a $\Box \langle \Phi^2 \rangle$. Para isso, notemos que $\Box(\phi^2) = 2\phi \Box \phi + 2\nabla^a \phi \nabla_a \phi$. Pelas regras de Synge, temos

$$\Box \langle \Phi^2 \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \nabla^a \nabla_a [W] = \frac{2}{4\pi^2} \nabla^a [\nabla_a W] = \frac{2}{4\pi^2} [\nabla^a \nabla_a W + \nabla^{a'} \nabla_a W] =$$
$$= \langle 2\Phi \Box \Phi + 2\nabla^a \Phi \nabla_a \Phi \rangle = \langle \Box \Phi^2 \rangle.$$
(4.31)

Temos agora as ferramentas para o cálculo do traço do tensor de energia momento, grandeza que usaremos no capítulo seguinte para resolução das equações de Einstein em espaços FRLW. Devemos avaliar a expressão

$$\langle T \rangle_{\omega} = g^{ab} \langle T_{ab} \rangle_{\omega} = g^{ab} [D^{c_4}_{(z)ab}(\omega_2 - h)]$$

Temos

$$g^{ab}[D_{ab}w] = [\nabla^a \nabla_{a'}w] - 2[\nabla^a \nabla_{a'}w + m^2w] + \xi([-Rw] + 8[\nabla^a \nabla_{a'}w + \Box w] - 2[\nabla^a \nabla_{a'} + \nabla^a \nabla_a w])$$

Usando o fato de que $\Box[w] = 2([\Box w] + [\nabla^a \nabla_{a'} w])$, chegamos a

$$\langle T \rangle_{\omega} = 3\left(\xi - \frac{1}{6}\right) \Box \langle \Phi^2 \rangle - m^2 \langle \Phi^2 \rangle + \frac{1}{3} \langle \Phi P \Phi \rangle,$$

e portanto,

$$\langle T \rangle_{\omega} = \left(3\left(\xi - \frac{1}{6}\right)\Box - m^2\right)\frac{1}{4\pi^2}[w] + \frac{1}{3}\frac{12}{4\pi^2}[V_1]$$

Utilizaremos sempre a escolha $\xi = 1/6$. Lembremos agora que o tensor $\langle T_{ab} \rangle_{\omega}$ possui uma ambiguidade em termos de adição de um tensor t_{ab} como discutido no teorema 4.1.2. Impomos agora um quinto axioma de Wald [Wal78] (numa versão mais fraca que o apresentada em [Wal77]), exigindo que o valor esperado para o traço do tensor não tenha termos de derivada da métrica de ordem maior que 2. Os possíveis tensores t_{ab} do teorema 4.1.2 possuem sempre traço proporcional a $\Box R$ [DFP08, Hac10], e dessa forma a imposição do quinto axioma de Wald faz com que os termos proporcionais provindos das contribuições de $[V_1]$ e de $g^{ab}t_{ab}$ se cancelem exatamente no valor esperado do traço. Em [HW01] mostra-se que os valores esperados para $\langle \Phi^2 \rangle$ sofrem de ambiguidades do tipo $\alpha R + \beta m^2$. Em [DFP08] usa-se tal construção em espaços FLRW evocando o princípio de covariância geral local [BFV03] para fixar os termos α, β como constantes pertinentes ao processo de regularização e independentes da variedade de fundo. Analisaremos tais construções no capítulo a seguir.

Capítulo 5

Equações de Einstein Semi-Clássicas em Espaços FLRW

Por fim, neste capítulo, analisaremos das equações semi-clássicas a partir das ferramentas desenvolvidas no capítulo anterior. O modelo estudado é o apresentado dor Dappiaggi, Fredenhagen e Pinamonti em [DFP08], para um campo escalar de Klein-Gordon em espaços FLRW de curvatura seccional plana, para análise da retroação de um campo quântico em âmbitos cosmológicos.

5.1 Equações de Einstein Semi-Clássicas

A classe de espaço-tempos a ser analisada são os espaços FLRW de curvatura seccional plana, descritos como variedades $M = I \times_a \mathbb{R}^3$ com $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $a : I \to \mathbb{R}_+$ a função de fator de escala. A métrica em coordenadas é dada por

$$g = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2 \delta_{ij} \,\mathrm{d}x^i \,\mathrm{d}x^j. \tag{5.1}$$

Tal escolha equivale ao espaço FLRW descrito na definição 2.4.1 com escolha de curvatura seccional plana k = 0 (como discutido na seção 2.5, tal suposição é motivada por dados observacionais). Para essa classe de espaços os tensores de curvatura já foram calculados pela proposição 2.4.2. Lembremos apenas que denotamos derivadas no tempo t por pontos (como em $\dot{a}(t) = da(t)/dt$) e derivadas no tempo conforme τ por linhas $(a'(\tau) = da(\tau)/d\tau)$, como na seção 2.4. A curvatura escalar é dada por $R = 6(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2})$ e o parâmetro de Hubble é a função definida por $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$.

A equação de Klein-Gordon em coordenadas toma a forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 3\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{a(t)^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) + m^2 + \xi 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right)\right)\phi(t, x, y, z) = 0.$$
(5.2)

A teoria quântica é aquela advinda por sistema de Weyl $\mathfrak{A}(M, g_{ab})$ e por estados de Hadamard sobre essa álgebra. O tensor de energia-momento quântico é obtido pela prescrição de *point-splitting* de Moretti [Mor03], dado pela definição 4.1.3.

Partiremos agora para a análise das equações semi-clássicas de Einstein. Dada uma classe de variedades denotadas genericamente por (M, g_{ab}) , relacionamos sua curvatura com a retroação do campo quântico de Klein-Gordon em um dado estado ω (de Hadamard)

nesse fundo através das equações de Einstein semi-clássicas, dadas por

$$G_{ab} = 8\pi G \, \langle T_{ab} \rangle_{\omega}.$$

Para o caso estudado, tomaremos o traço da identidade acima, o que nos leva à relação

$$-R = 8\pi G \langle T \rangle_{\omega},$$

que pela prescrição de *point-splitting* é equivalente a

$$-R = -6(\dot{H} + 2H^2) = 8\pi G \langle T \rangle_{\omega} = 8\pi G \left[\left(3\left(\xi - \frac{1}{6}\right) \Box - m^2 \right) \frac{[W]}{4\pi^2} + \frac{4[V_1]}{4\pi^2} \right]$$

Tomando a expressão para $\left[V_1\right]$ (equação 4.27), temos para o espaço-tempo FLRW a expressão

$$[V_1] = \frac{1}{32}m^4 + \frac{3}{8}\left(\xi - \frac{1}{6}\right)m^2(\dot{H} + 2H^2) + \frac{9}{8}\left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2(\dot{H}^2 + 4\dot{H}H^2 + 4H^4) + \frac{1}{96}\left(\xi - \frac{1}{5}\right)\Box R - \frac{1}{240}(\dot{H}H^2 + H^4). \quad (5.3)$$

Examinaremos agora o caso não-massivo e massivo, ambos com acoplamento conforme, dado pela escolha

$$\xi = \frac{1}{6}.\tag{5.4}$$

A equação de evolução torna-se então

$$-6(\dot{H} + 2H^2) = -8\pi Gm^2 \langle \Phi^2 \rangle_{\omega} + \frac{G}{\pi} \left(-\frac{1}{30} (\dot{H}H^2 + H^4) + \frac{m^4}{4} \right).$$
(5.5)

Podemos ver que, para um campo não-massivo, a dinâmica do espaço não é influenciada por algum estado do campo quântico em si (já que o termo proporcional a $\langle \Phi^2 \rangle_{\omega}$ se anula). No caso massivo, entretanto, tal dependência contribuirá para a evolução, e a análise das equações depende da escolha de um determinado estado. A seguir, estudaremos estados adiabáticos (introduzidos em [Par69] em contexto cosmológico como estado que minimiza a criação de partículas em um espaço em expansão). Em seguida analisaremos o caso não-massivo e massivo das equações de evolução, usando a classe de estados adiabáticos.

5.2 Estados Adiabáticos

Nessa seção buscamos um candidato para o estado ω que resolva as equações semiclássicas. Analisaremos os *estados adiabáticos*, desenvolvidos nos trabalhos [Par69, LR90, JS02, Olb07], nos quais a produção de partículas durante a expansão do universo seja minimizada. Apresentaremos nessa seção a exposição feita por [Olb07] e por fim as considerações feitas em [DFP08] para justificar a aproximação de $\langle \Phi^2 \rangle_{\omega} = \alpha m^2 + \beta R$ para um estado adiabático ω .

Trabalharemos nessa seção com a folheação na qual tomamos as superíficies de Cauchy $S(t) = \mathbf{R}^3$ com métrica induzida $h(t)_{ab} = a(t)^2 \mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx}$ e densidade $\rho_{h(t)} = a(t)^3 \mathbf{d}^3 \mathbf{x}$. A superfície S é maximamente simétrica com grupo de isometria $I_S = E(3)$ (grupo euclidiano), que naturalmente se generaliza para o espaço-tempo inteiro de forma $I_S = \mathrm{id}_t \otimes I_S$, preservando as folhas. Tal grupo de simetria é o responsável pela denominação de homogeneidade e isotropia do espaço, e dessa forma, caracterizamos um **estado homogêneo** e isotrópico como um estado quase-livre que satisfaça

$$\omega_2(f,g) = \omega_2(i^*f, i^*g), \quad \text{para todo } f, g \in C_0^\infty(M), i \in I_S.$$
(5.6)

Fixemos um instante t_0 e uma superfície de Cauchy $S_0 = S_{t_0}$. Lembrando que existe um isomorfismo entre as funções teste $[f] \in C_0^{\infty}(M)/PC_0^{\infty}(M) = V$ e o espaço das condições de Cauchy $F = F_0 \oplus F_1 \in C_0^{\infty}(S_0) \oplus C_0^{\infty}(S_0) = \mathfrak{M}$ (veja seção 3.1), podemos considerar ω_2 como um bilinear em \mathfrak{M} , por $\omega_2(F, F') = \omega_2(f, f')$ onde F, F' sejam as respectivas condições iniciais para as funções teste f, f'. O grupo de isometria admite uma representação U em V e em \mathfrak{M} , tal que para todo $i \in I_S$ tenhamos $U(i)f = i^*f$ e $U(i)F = i^*F_0 \otimes i^*F_1$. Um estado quase-livre será então homogêneo e isotrópico se sua função de dois pontos for invariante por U.

Para caracterizar tais estados, a idéia básica é completar o espaço \mathfrak{M} a um espaço de Hilbert \mathcal{H} e identificar o estado por um operador limitado¹ no comutante da representação U de I_S . Ou seja, associamos a ω_2 um operador $\hat{\omega}$ que satisfaça $\langle F, \hat{\omega}F' \rangle = \omega_2(F, F')$ de tal forma que $\hat{\omega}$ pertença ao comutante U' da representação, sendo ω_2 a função de dois pontos de estado homogêneo e isotrópico. U de I_S em \mathcal{H} .

Lembremos que $F \in \mathfrak{M}$ pode ser representada por sua transformada de Fourier

$$\hat{F}_i(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{S_0} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} F_i(\mathbf{x}) d\mu(\mathbf{x}),$$
$$F_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\hat{S}_0} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{F}_i(\mathbf{k}) d\mu(\mathbf{k}),$$

onde em S_0 a medida é dada por $d\mu(\mathbf{x}) = \rho_{h_{t_0}}(x) = a(t_0)^3 \mathrm{d}^3 \mathbf{x}$ e no espaço de momentos \hat{S}_0 , por $d\mu(\mathbf{k}) = a(t_0)^{-3} \mathrm{d}^3 \mathbf{k}$. Um operador em \mathcal{H} pertencerá a U' se for representado por uma multiplicação por função (polinomialmente limitada) no espaço dos momentos \hat{S}_0 . Dessa forma, ω_2 é representado por uma matriz $\hat{\omega}_{ij}$ com elementos que são funções (polinomialmente limitadas) no espaço de momentos e com índices i, j = 0, 1. Assim, a

¹ A escolha do espaço de Hilbert resume-se na escolha de um produto interno em \mathfrak{M} no qual tal espaço será completado, e para os fins apresentados aqui deve possuir a propriedade de tornar a função de dois pontos um bilinear limitado, *i.e.*, tal que exista uma constante K > 0 tal que $\omega_2(F, F') \leq K ||F|| \cdot ||F'||$. Para mais detalhes da discussão, veja [Olb07].

função de dois pontos é dada por

$$\omega_2(F, F') = \int_{\hat{S}_0} d\mu(\mathbf{k}) \, \hat{F}_i(\mathbf{k}) \, \hat{\omega}_{ij}(\mathbf{k}) \, \hat{F}'_j(\mathbf{k}).$$
(5.7)

Ademais, sendo ω um estado, impomos as condições de positividade e comutatividade sobre sua função de dois pontos ω , dadas por

$$\omega_2(F,F) \ge 0,\tag{5.8}$$

$$\omega_2(F,F') - \omega_2(F',F) = i\Omega(F,F') = i\int_{S_0} d\mu(\mathbf{x})(F_1F'_0 - F'_1F_0).$$
(5.9)

Da condição de positividade (equação 5.8) segue que $\hat{\omega}$ seja matricialmente positiva definida, *i.e.* para todo $\mathbf{k} \in \hat{S}_0$ devemos ter

$$\hat{\omega}_{00} \ge 0, \quad \hat{\omega}_{11} \ge 0, \quad \hat{\omega}_{01} = \overline{\hat{\omega}_{01}},$$
$$\det \hat{\omega} = \hat{\omega}_{00}\hat{\omega}_{11} - \hat{\omega}_{01}\hat{\omega}_{10} \ge 0.$$

Ainda mais, se ω for um estado puro, então devemos ter det $\hat{\omega} = 0$, pois caso contrário ω pode ser decomposto em dois estados respectivos aos dois autovalores da matriz $\hat{\omega}$.

Da condição de comutatividade, temos que

$$\hat{\omega}_{01} - \hat{\omega}_{01} = ia(t_0)^3$$

Dessa maneira (Teorema 2.1 de [Olb07]), estados puros quase-livres homogêneos e isotrópicos são descrito por duas funções p, q polinomialmente limitadas no espaço de momentos \hat{S}_0 tal que

$$\hat{\omega}_{00}(\mathbf{k}) = |p(\mathbf{k})|^2, \quad \hat{\omega}_{11}(\mathbf{k}) = a(t_0)^6 |q(\mathbf{k})|^2,$$
(5.10)

$$\hat{\omega}_{01}(\mathbf{k}) = \overline{\hat{\omega}_{01}(\mathbf{k})} = -a(t_0)^3 q(\mathbf{k}) \overline{p(\mathbf{k})}$$
(5.11)

com a condição de normalização para p, q dada por

$$\overline{q(\mathbf{k})}p(\mathbf{k}) - q(\mathbf{k})\overline{p(\mathbf{k})} = i.$$
(5.12)

Resta agora, a partir da ação do estado em \mathfrak{M} , reconstruir sua estrutura em $V = C_0^{\infty}(M)/PC_0^{\infty}(M)$ e dessa maneira determinar o kernel integral da função de dois pontos. Para isso, lembremos que o operador de Klein-Gordon pode ser escrito em coordenadas por

$$P = -\Box + m^{2} + \xi R = \partial_{t}^{2} + 3H\partial_{t} - a(t)^{-2}\Delta_{\mathbf{x}} + m^{2} + \xi R.$$

Para a resolução de tal equação, podemos utilizar separação de variáveis em $\phi(t, \mathbf{x}) = T(t)X(\mathbf{x})$. Sabemos que a parte espacial pode ser decomposta nas autofunções generali-

zadas $X_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-3/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \operatorname{com} \Delta_x X_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{k}^2 X_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$. O produto $T_{\mathbf{k}}(t) X_{\mathbf{k}}$ será então solução da equação de Klein-Gordon se

$$\ddot{T}_{\bf k} + 3H\dot{T}_{\bf k} + (a(t)^{-2}{\bf k}^2 + m^2 + \xi R)T_{\bf k} = 0.$$

Dessa forma, é possível provar [LR90] que a função de dois pontos dada por

$$\omega_2(x,x') = \int d^3 \mathbf{k} \, \overline{T_{\mathbf{k}}(t)} T_{\mathbf{k}}(t') X_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \overline{X_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}')} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \mathbf{k} \, \overline{T_{\mathbf{k}}(t)} T_{\mathbf{k}}(t') e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \tag{5.13}$$

de tal forma que $T_{\mathbf{k}}$ satisfaça a equação diferencial com condições iniciais dada por

$$\ddot{T}_{\mathbf{k}} + 3H\dot{T}_{\mathbf{k}} + (a(t)^{-2}\mathbf{k}^2 + m^2 + \xi R)T_{\mathbf{k}} = 0$$
(5.14)

$$T_{\mathbf{k}}(t_0) = q(\mathbf{k}), \quad \dot{T}_{\mathbf{k}}(t_0) = a(t_0)^{-3} p(\mathbf{k}).$$
 (5.15)

Podemos mudar de coordenadas para o tempo conforme, dado por $\tau(t) = \int_{t_0}^t \frac{dt'}{a(t')}$, para obtermos as expressões na forma utilizada em [DFP08]. Lembremos que, para uma função dependente do tempo, utilizamos o ponto para a derivada em t e a linha para derivada em τ , ou seja, $\dot{f} = df/dt$ e $f' = df/d\tau$. Fazendo a transformação

$$T_{\mathbf{k}}(t) \leftrightarrow \frac{1}{a} \Psi_{\mathbf{k}}(\tau)$$

Obtemos para a função de dois pontos a forma

$$\omega_2(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{1}{a(\tau_x)a(\tau_y)} \int_{\mathbf{R}^3} \mathrm{d}^3 \mathbf{k} \,\overline{\Psi_{\mathbf{k}}(\tau_x)} \Psi_{\mathbf{k}}(\tau_y) \, e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})},\tag{5.16}$$

tal que as funções satisfaçam a equação diferencial (com $\xi = 1/6$)

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\tau^2} + \mathbf{k}^2 + m^2 a(\tau)^2\right) \Psi_{\mathbf{k}}(\tau) = 0, \qquad (5.17)$$

$$\overline{\Psi_{\mathbf{k}}(\tau)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\Psi_{\mathbf{k}}(\tau) - \Psi_{\mathbf{k}}(\tau)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\overline{\Psi_{\mathbf{k}}(\tau)} = i.$$
(5.18)

A partir de tal resultado, o Ansatz de Paker [Par69] coloca os modos $\Psi_{\mathbf{k}}$ na forma

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\Omega_{\mathbf{k}}(\tau)}} e^{-i\int_{\tau_0}^{\tau} \Omega_{\mathbf{k}}(\tau')\mathrm{d}\tau'}$$
(5.19)

sendo que $\Psi_{\mathbf{k}}$ resolve a equação 5.17 se $\Omega_{\mathbf{k}}$ resolver a equação diferencial.

$$\Omega_{\mathbf{k}}^2 = (\mathbf{k}^2 + a^2 m^2) - \frac{1}{2} \frac{\Omega_{\mathbf{k}}''}{\Omega_{\mathbf{k}}} + \frac{3}{4} \left(\frac{\Omega_{\mathbf{k}}'}{\Omega_{\mathbf{k}}}\right)^2$$
(5.20)

No regime de baixas curvaturas (a variando pouco com o tempo), podemos aproximar

 $\Omega_{\mathbf{k}}$ pela solução exata para o caso estático, dada por

$$\Omega_{\mathbf{k}}^{(0)}(\tau)^2 = \mathbf{k}^2 + m^2 a(\tau)^2.$$
(5.21)

A partir dela, podemos então proceder de forma iterativa, aproximando $\Omega_{\mathbf{k}}$ por $\Omega_{\mathbf{k}}^{(n)}$ obtida pela recursão

$$\Omega_{\mathbf{k}}^{(n+1)}(\tau)^{2} = \mathbf{k}^{2} + m^{2}a(\tau)^{2} + \frac{3}{4} \left(\frac{\partial_{\tau}\Omega_{\mathbf{k}}^{(n)}(\tau)}{\Omega_{\mathbf{k}}^{(n)}(\tau)} \right)^{2} - \frac{1}{2} \frac{\partial_{\tau}^{2}\Omega_{\mathbf{k}}^{(n)}(\tau)}{\Omega_{\mathbf{k}}^{(n)}(\tau)} = \\ = \mathbf{k}^{2} + m^{2}a(\tau)^{2} + \frac{5}{4} \left(\frac{\partial_{\tau}(\Omega_{\mathbf{k}}^{(n)}(\tau)^{2})}{2\Omega_{\mathbf{k}}^{(n)}(\tau)^{2}} \right)^{2} - \frac{1}{2} \frac{\partial_{\tau}^{2}(\Omega_{\mathbf{k}}^{(n)}(\tau)^{2})}{2\Omega_{\mathbf{k}}^{(n)}(\tau)^{2}}.$$
 (5.22)

Estados adiabáticos não são em geral estados de Hadamard [JS02], mas em [DFP08, Pin10] mostra-se que é possível a regularização da flutuação média de campo de um estado adiabático de ordem n finita. Tal regularização dá-se pela subtração da freqüência adiabática de ordem zero, de forma que

$$\langle \Phi^2 \rangle^{(n)} = \lim_{y \to x} \omega(x, y)^{(n)} - h(x, y) = \frac{1}{4\pi^2 a(\tau)^2} \int_{\mathbf{R}^3} \mathrm{d}^3 \mathbf{k} \left(\frac{1}{\Omega_{\mathbf{k}}^{(n)}(\tau)} - \frac{1}{\Omega_{\mathbf{k}}^{(0)}(\tau)} \right), \quad (5.23)$$

que para o limite $m^2 \gg R$ pode ser expandido na forma

$$\langle \Phi^2 \rangle^{(n)} = \alpha m^2 + \beta R + O\left(\frac{1}{m^2}\right), \tag{5.24}$$

/

onde α e β são constantes de normalização. Enfatizamos aqui que α e β surgem através do processo de regularização, e portanto não assumem dependência da variedade de fundo, *i.e.* são *constantes* da teoria por excelência da palavra.

5.3 Caso Não-Massivo

Analisaremos agora a equação de evolução para o campo de Klein-Gordon não-massivo. Nesse caso especial, as equações de Einstein independem de um estado específico, pois a equação de evolução é descrita por

$$-6(\dot{H} + 2H^2) = -\frac{G}{30\pi}(\dot{H}H^2 + H^4).$$
(5.25)

Podemos isolar os termos dependentes de \dot{H} e reescrever a equação na forma

$$\dot{H}(H^2 - H_c^2) = -H^2(H^2 - 2H_c^2), \qquad \text{com } H_c = \sqrt{\frac{180\pi}{G}}$$
(5.26)

Identificamos inicialmente dois pontos críticos da equação, que correspondem a duas soluções constantes para H, dadas por $H_{-}(t) = 0$ e $H_{+}(t) = \sqrt{2}H_{c} = \sqrt{\frac{360\pi}{G}}$. Em [DFP08]

5.4. CASO MASSIVO

tal equação é integrada em sua solução

$$Ke^{4H_{+}t} = e^{2H_{+}/H} \left| \frac{H + H_{+}}{H - H_{+}} \right|, \qquad (5.27)$$

onde K é uma constante de integração, definida por uma condição inicial em um dado tempo t_0 . Dada uma condição inicial $H(t_0) = H_c \neq H_+$, então H flui para 0 ou H_+ em tempos grandes, e portanto ambos pontos críticos são estáveis. Veja gráfico 5.1.



Figura 5.1: Solução genérica da equação 5.26, dada por 5.27. Observamos que H flui para H_+ , caracterizando uma fase de de Sitter estável.

Embora tal modelo não possa representar a atual evolução do universo $(H_+ = 6.4 \times 10^{44} s^{-1} \text{ em contraste com o valor atual medido de } H = (2.6 \pm 0.2) \times 10^{-18} s^{-1})$, observa-se que efeitos quânticos podem dar origem a uma fase de de Sitter estável, mesmo sem adição de constante cosmológica nas equações.

5.4 Caso Massivo

No caso massivo, o termo $\langle \Phi^2 \rangle$ entra nas equações de Einstein. Consideramos nesta seção os estados adiabáticos no limite de alta massa $(m^2 \gg R, m \gg H)$, os quais são expressos pela flutuação média de campo na forma

$$\langle \Phi^2 \rangle = \alpha m^2 + \beta R.$$

As constantes $\alpha \in \beta$ são advindas do procedimento de renormalização e portanto não devem variar com o espaço-tempo, como já enfatizado anteriormente.

A equação de Einstein para o traço do tensor de energia-momento se expressa então por

$$-6(\dot{H} + 2H^2) = -8\pi Gm^2(\alpha m^2 + \beta R) + \frac{G}{\pi} \left(-\frac{1}{30}(\dot{H}H^2 + H^4) + \frac{m^4}{4} \right), \qquad (5.28)$$

que pode ser reescrita na simpática forma dada por

$$\dot{H}(H^2 - H_c^2) = -H^4 + 2H_c^2 H^2 + M$$
(5.29)

onde definimos os parâmetros

$$H_c^2 = \frac{180\pi}{G} - 8\pi^2 180m^2\beta, \tag{5.30}$$

$$M = \frac{15}{2}m^4 - 240\pi^2 m^4 \alpha.$$
 (5.31)

Novamente, temos dois pontos críticos H_{\pm} da equação 5.29, dados por

$$H_{\pm}^2 = H_c^2 \pm \sqrt{H_c^4 + M}.$$
 (5.32)

Até o momento, o modelo massivo carrega 3 parâmetros α, β, m . Podemos exigir que o correspondente ao espaço de Minkowski M seja solução do modelo, o que corresponde a exigir que um dos pontos críticos seja dado por $H_- = 0$, fixando assim um dos parâmetros para $\alpha = 1/32\pi^2$. A equação recairá então na mesma forma do caso não-massivo (equação 5.26) com a diferença de que o novo ponto crítico dado por $H_+ = \sqrt{2}H_c$ pode ser ajustado a valores observados a partir do ajuste dos parâmetros $m \in \beta$.

5.5 Conclusões

O modelo estudado em [DFP08] mostra que um processo de regularização sistemática do tensor de energia-momento para um campo de Klein-Gordon real em espaços FLRW podem trazer efeitos consideráveis. No caso estudado, a regularização do tensor de energiamomento introduz por si só uma constante cosmológica efetiva. Também para uma grande classe de condições inicias o modelo reproduz uma fase de rápida expansão, característica pertinente a modelos inflacionários de cosmologia. Dessa forma, a idéia de que efeitos quânticos devam apenas representar termos pequenos de correções é contrariada, uma vez que mesmo nesse simples modelo de campo não-interagente apresente resultados mesmo que apenas qualitativos. Fica então ilustrado que para a avaliação da retroação de campos quânticos na métrica é necessária uma análise um tanto cuidadosa. Tal assunto é foco de trabalhos atuais, como por exemplo a tese de Hack [Hac10], na qual a metodologia empregada em [DFP08] é estendida para campos espinoriais (não-interagentes).

Bibliografia

- [BFV03] R. Brunetti, K. Fredenhagen, and R. Verch. The Generally Covariant Locality Principle - A New Paradigm for Local Quantum Field Theory. *Communications* in Mathematical Physics, 237:31–68, 2003, arXiv:math-ph/0112041.
- [BGP08] C. Baer, N. Ginoux, and F. Pfaeffle. *Wave Equations on Lorentzian Manifolds* and Quantization. Eurepean Mathematical Society, 2008.
- [BR79] Ola. Bratteli and Derek W. Robinson. Operator algebras and quantum statistical mechanics vol. 2. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [BS05] Antonio N. Bernal and Miguel Sanchez. Smoothness of time functions and the metric splitting of globally hyperbolic spacetimes. *Commun. Math. Phys.*, 257:43–50, 2005, gr-qc/0401112.
- [DFP08] Claudio Dappiaggi, Klaus Fredenhagen, and Nicola Pinamonti. Stable cosmological models driven by a free quantum scalar field. *Phys. Rev.*, D77:104015, 2008, 0801.2850.
- [Dim80] J. Dimock. Algebras of local observables on a manifold. Communications in Mathematical Physics, 77:219–228, 1980. 10.1007/BF01269921.
- [Few08] Christopher J. Fewster. Lectures on quantum field theory in curved spacetime, 2008.
- [Ful89] Stephen A Fulling. Aspects of Quantum Field Theory in Curved Space Time. Number 17 in London Mathematical Society, Student Texts. Cambridge University Press, Cambridge, 1989. Series editor: E. B. Davies.
- [Gut04] Alan H. Guth. Inflation. 2004, astro-ph/0404546.
- [Hac10] Thomas-Paul Hack. On the Backreaction of Scalar and Spinor Quantum Fields in Curved Spacetimes - From the Basic Foundations to Cosmological Applications. PhD dissertation, Universität Hamburg, Department Physik, 2010, 1008.1776.
- [HW01] Stefan Hollands and Robert M. Wald. Local Wick polynomials and time ordered products of quantum fields in curved spacetime. *Commun. Math. Phys.*, 223:289–326, 2001, gr-qc/0103074.

- [JS02] W. Junker and E. Schrohe. Adiabatic vacuum states on general spacetime manifolds: Definition, construction, and physical properties. Annales Henri Poincare, 3:1113–1181, 2002. 10.1007/s000230200001.
- [KSD+10] E. Komatsu, K. M. Smith, J. Dunkley, C. L. Bennett, B. Gold, G. Hinshaw, N. Jarosik, D. Larson, M. R. Nolta, L. Page, D. N. Spergel, M. Halpern, R. S. Hill, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, N. Odegard, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, and E. L. Wright. Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation. ArXiv e-prints, January 2010, 1001.4538.
- [KW91] Bernard S. Kay and Robert M. Wald. Theorems on the uniqueness and thermal properties of stationary, nonsingular, quasifree states on spacetimes with a bifurcate killing horizon. *Physics Reports*, 207(2):49 – 136, 1991.
- [LR90] Christian Lüders and John E. Roberts. Local quasiequivalence and adiabatic vacuum states. *Communications in Mathematical Physics*, 134:29–63, 1990. 10.1007/BF02102088.
- [Mor03] Valter Moretti. Comments on the stress-energy tensor operator in curved spacetime. *Commun. Math. Phys.*, 232:189–221, 2003, gr-qc/0109048.
- [Olb07] Heiner Olbermann. States of Low Energy on Robertson-Walker Spacetimes. Class. Quant. Grav., 24:5011–5030, 2007, 0704.2986.
- [O'N83] B. O'Neill. Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity. Academic Press, first edition, 1983.
- [Par69] Leonard Parker. Quantized fields and particle creation in expanding universes.
 1. Phys. Rev., 183:1057–1068, 1969.
- [Pin10] Nicola Pinamonti. On the initial conditions and solutions of the semiclassical Einstein equations in a cosmological scenario. 2010, 1001.0864.
- [Poi04] Eric Poisson. The motion of point particles in curved spacetime. *Living Reviews* in *Relativity*, 7(6), 2004.
- [Rad96] Marek J. Radzikowski. Micro-local approach to the Hadamard condition in quantum field theory on curved space-time. *Commum. Phys. Math.*, 179 3:529– 553, 1996.
- [RS81] Michael Reed and Barry. Simon. Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis. Academic Press, 1981.
- [SW00] R. F. Streater and A. S. Wightman. *PCT, Spin and Statistics, and All That.* Princeton University Press, 2000.

- [Syn31] J. L. Synge. A characteristic function in Riemannian space and its applications to the solution of geodesic triangles. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 32:241, 1931.
- [Wal77] Robert M. Wald. The Back Reaction Effect in Particle Creation in Curved Space-Time. *Commun. Math. Phys.*, 54:1–19, 1977.
- [Wal78] Robert M. Wald. Trace Anomaly of a Conformally Invariant Quantum Field in Curved Space-Time. Phys. Rev., D17:1477–1484, 1978.
- [Wal84] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago, first edition, 1984.
- [Wal94] Robert M. Wald. Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics. The University of Chicago Press, Chicago, first edition, 1994.
- [Wei72] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology*. John Wiley and Sons, second edition, 1972.