CONGRUÊNCIA DE HIPERSUPERFÍCIES PELO MÉTODO DO REFERENCIAL MÓVEL

Jacques Charles Bouchara

Tese apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, cumprindo parte das exigências para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Augusto Martins Rodrigues

Durante a realização deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq e da FINEP.

Junho de 1978.

SÃO PAULO

Ao Nini, com saudades

Ao Jean Michel, com esperanças.

INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma demonstração dos teoremas fundamentais das superfícies, usando os métodos de Grupos de Lie e do Referencial Móvel de E. Cartan.

Os fatos que as superfícies do espaço euclidiano E^3 são unicamente determinadas, a menos de congruências, por suas duas formas quadráticas, o que, dadas duas formas quadráticas definidas num aberto U do plano, satisfazendo as equações de Gauss-Codazzi, existe uma imersão $f:U \longrightarrow E^3$ que tem as formas quadráticas em questão como formas quadráticas fundamentais, são resultados clássicos (Bonnet, 1867) cuja demonstração consistia na integração de um sistema de equações a derivadas parciais.

O método do Referencial móvel, como é aplicado aquí, permite transportar o problema da integração deste sistema para o grupo de Lie das congruências do espaço euclidiano, onde ele tem uma solução que decorre diretamente do Teorema de Frobenius.

Além da simplicidade, este método oferece a vantagem de ser suficientemente geral e flexível para descrever, e fornecer a solução, de diversos problemas de existência, unicidade e determinação de invariantes em Geometria diferencial (ver |4| e |7|), já que, essencialmente, ele permite transportar o estudo das propriedades de uma variedade (aqui, a estrutura Riemanniana) para o grupo das Transformações que preservam estas propriedades.

No primeiro capítulo, construímos o fibrado dos referenciais adaptados a uma hipersuperfície do espaço euclidiano

E^n, identificamos este fibrado a uma subvariedade do grupo dos movimentos rígidos de E^n, transportamos para este grupo as formas que descrevem a métrica induzida sobre a hiper superfície e a segunda forma quadrática, e obtemos os dois teoremas fundamentais das superfícies integrando sistemas diferenciais no grupo dos movimentos rígidos.

No segundo capítulo, damos outra aplicação do método do referencial móvel, determinando os invariantes que caracterizam as curvas de uma superfícies de curvatura constante a menos de isometrias desta superfície.

Agradeço ao professor Alexandre Augusto Martins Rodrigues, pela sugestão do assunto do presente trabalho, e pela dedicada orientação, desde o meu ingresso no curso de Pós-Graduação do I.M.E.

Agradeço à Sra. Marli César Paternostro pelo perfeito trabalho de datilografia.

E agradeço a todos os colegas do I.M.E. (Baixinho, Prandini, Zara, Sebastião, Leilá, Paulo, Martha, Gaucho, e os outros), companheiros de tantos anos, já....

Jacques Charles Bouchara.

CAPÍTULO I

I. FIBRADOS DE REFERENCIAIS

No que segue, E^n designa o espaço euclidiano de dimensão n, com produto interno denotado por $< , >$. Identificaremos o espaço vetorial tangente E^n_p, $P \in E^n$, com $\mathbb{R}^n$, e, portanto, se $\sigma : E^n \longrightarrow E^n$ é uma aplicação Linear-Afim, sua diferencial $d\sigma$ será identificada com a parte linear σ^* de σ.

FIBRADOS PRINCIPAIS DIFERENCIAIS (E.F.P.D.)

DEFINIÇÃO 1: Se E e B são variedades C^∞, G um grupo de Lie, $\pi : E \longrightarrow B$ uma aplicação diferenciável sobrejetora, então (E, B, π, G) se diz Espaço Fibrado Principal Diferenciável, de base B e grupo estrutural G e projeção π, quando as seguintes condições estiverem verificadas:

a) G atua diferenciavelmente à direita sobre E, isto é, existe uma aplicação diferenciável $E \times G \longrightarrow E$,

$$(z,g) \longmapsto z \cdot g$$

verificando $(z\cdot g)\cdot g' = z\cdot(gg')$ e $z\cdot e = z$ se $z \in E, g, g' \in G$, e é o neutro de G.

b) em cada fibra $\pi^{-1}(x)$, $x \in B$, a ação de G é simplesmente transitiva, isto é, $\forall y, \forall y' \in \pi^{-1}(x)$, $\exists ! g \in G$ tal que $y' = y.g$.

c) Para todo $x_0 \in B$, existe uma vizinhança U de x_0 em B e uma seção diferenciável $\sigma_u : U \longrightarrow E$ (isto é, $\pi \circ \sigma_u = 1_u$), tal que a aplicação ϕ_u definida por

$$\phi_u : U \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U)$$

$$\phi_u : (x\,,\,g) \longmapsto \sigma_u(x)\cdot g$$

é um difeomorfismo.

DEFINIÇÃO 2: Se (E, B, G, π) e (E', B, G, π') são dois EFPD com mesma base B e mesmo grupo estrutural G, um difeomorfismo $i : E \longrightarrow E'$ se diz isomorfismo entre os dois espaços fibrados se

$$i(z.g) = i(z)\cdot g \quad \text{e} \quad \forall\, z \in E$$

$$\forall\, g \in G$$

$$i^{-1}(z'.g) = i^{-1}(z')\cdot g \qquad \forall\, z' \in E'$$

EXEMPLO: Se B é uma variedade e G um grupo de Lie, a variedade produto $E= B \times G$ é um EFPD se colocarmos $\pi : E \longrightarrow B$ a projeção do produto, e se definirmos a ação de G por $(x,g)\cdot g' = (x,gg')$. Temos uma seção global sobre B, dada por $\sigma(x) = (x,e)$ e o difeomorfismo ϕ é simplesmente a identidade.

Todo fibrado isomorfo ao fibrado $B \times G$ se diz Trivial.

OBSERVAÇÕES:

a) Como $\phi_u : U \times G \longrightarrow E$ é um difeomorfismo, tem se $\dim E = \dim B + \dim G$.

b) π tem posto máximo em todo ponto: de $\pi \circ \sigma_u = 1_u$ segue $d\pi \circ d\sigma_u = 1_u$ e portanto $d\pi$ é sobrejetora.

c) (E, B, π, G) é um espaço fibrado localmente trivial, com base B, projeção π e fibra típica G. As trivializações são as aplicações ϕ_u. De fato, se $\pi_1 : U \times G \longrightarrow U$ denota a primeira projeção, temos $\pi_1 \circ \phi_u^{-1} = \pi$. Segue que, para todo $x \in B$, $\pi^{-1}(x)$ é uma variedade fechada difeomorfa a G.

d) Para todo $z \in E$, os vetores de E_z que são tangentes à fibra passando por z são caracterizados por

$$\tau \varepsilon \left[\pi^{-1}(\pi(z))\right]_z \iff d\pi(\tau) = 0 .$$

De fato $\pi^{-1}(\pi(z))$ é a variedade caracterizada pela equação $\pi(y) = \pi(z)$, e π é regular.

I.1. O ESPAÇO FIBRADO DOS REFERENCIAIS LINEARES

Seja E^n o espaço euclidiano de dimensão n. Um referencial p de E^n é um conjunto $(P, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ onde P é um ponto de E^n e $(\vec{e}_i)$ uma base de E^n_p, ou seja, de $\mathbb{R}^n$.

Seja F o conjunto dos referenciais de E^n, e $\pi : F \longrightarrow E^n$ a projeção $\pi(P, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = P$. Então,

PROPOSIÇÃO 1: F é um espaço fibrado principal diferenciável trivial, de base E^n, projeção π e grupo estrutural $GL(n, \mathbb{R})$.

<u>*DEMONSTRAÇÃO*</u>: Definimos uma bijeção $\phi: F \longrightarrow E^n \times GL(n,\mathbb{R})$ da seguinte maneira: fixado $p = (0, \vec{v}_1, \ldots \vec{v}_n)$ onde $0 \in E^n$ e $(\vec{v}_i)$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$, colocamos $\phi: (P, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) \longrightarrow (P, (a^i_j))$ onde (a^i_j) é a matriz dos vetores $\vec{e}_i$ na base $(\vec{v}_i)$. Definimos em F a topologia induzida por ϕ e então F é homeomorfo a $E^n \times GL(n,\mathbb{R})$. Consideremos $\overline{X}: E^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ o difeomorfismo $P \longmapsto \overrightarrow{OP}$. Então $\overline{X} = (\overline{x}_1, \ldots \overline{x}_n)$ onde $\overline{x}_i$ são as funções coordenadas de E^n no referencial $p = (0, \vec{v}_1, \ldots \vec{v}_n)$.
Então, munindo F da estrutura diferencial obtida tomando o Atlas maximal que contém $(\overline{X} \times 1) \circ \phi$, temos que F é uma variedade e $\phi: F \longrightarrow E^n \times GL(n, \mathbb{R})$ um difeomorfismo.

Definindo a ação de $GL(n, \mathbb{R})$ em F por $(P, \vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n) \cdot g = (P, g(\vec{e}_1), \ldots, g(\vec{e}_n))$ temos sobre F uma estrutura de espaço fibrado isomorfa a $E^n \times GL(n,\mathbb{R})$ de dimensão $n + n^2$. ∎

1.2. <u>O ESPAÇO FIBRADO DOS REFERENCIAIS ORTONORMAIS</u>

Denotamos por H o subconjunto de F determinado por

$$H = \left\{(0, \vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n) \in F \,|\, \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}\right\}$$

A restrição de π a H será denotada do mesmo modo.

PROPOSIÇÃO 2: H é um Espaço fibrado principal diferenciável trivial, de base E^n, grupo estrutural $O(n, \mathbb{R})$, e projeção π;

fixado $p = (0, \vec{f}_1, \ldots \vec{f}_n)$ fica definida a bijeção $\phi: H \longrightarrow \mathbb{R}^n \times O(n, \mathbb{R})$ onde $\phi = \phi_p\big|_H$.

Então H é subvariedade de F difeomorfa a $\mathbb{R}^n \times O(n, \mathbb{R})$ e tem portanto dimensão $n + \binom{n}{2}$; a ação de $O(n, \mathbb{R})$ em H é a restrição a H e $O(n, \mathbb{R})$ da ação de $GL(n, \mathbb{R})$ em F.

II. AS FORMAS DE CONEXÃO

Dados M uma variedade, V um espaço vetorial de dimensão n, uma forma diferencial em M, com valores em V, é uma aplicação ω que a cada $x \in M$ associa uma aplicação linear $\omega_x \in L(M_x, V)$. Fixada uma base $(\vec{e}_i)$ de V, ω determina n formas diferenciais escalares dadas por

$$\forall \tau \in M_x, \quad \omega_x(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \omega_x^i(\tau)\, \vec{e}_i \,.$$

Se as n formas ω^i são diferenciáveis, dizemos que ω é diferenciável.

Denotamos então $\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega^i \vec{e}_i$ e definimos $d\omega$ como sendo a forma $d\omega = \sum d\omega^i \vec{e}_i$. Esta definição independe da particular escolha da base $(\vec{e}_i)$. De fato, se $(\vec{f}_j)$ é outra base de V e (a_j^i) é a matriz de passagem, temos

$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega^i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \omega^i \left(\sum_{j=1}^{n} a_i^j \vec{f}_j\right)$ e portanto os "coeficientes" de ω na base $(\vec{f}_j)$ são $(\sum a_i^j \omega^j) = \overline{\omega}^i$ então

$d\omega = \sum_i d\omega^i \vec{e}_i = \sum_{i,j} a_j^i\, d\omega^j \vec{f}_j = \sum_i d\overline{\omega}^i \vec{f}_i$, ou seja, $d\omega$ pode ser calculada a partir da expressão de ω em qualquer base.

Definimos sobre F as seguintes funções:

1) $X : F \longrightarrow \mathbb{R}^n$; $X(P, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = \overrightarrow{OP}$

2) $e_i : F \longrightarrow \mathbb{R}^n$; $e_i(P, \vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n) = \vec{e}_i$

Temos $X = \overline{X} \circ \pi$ onde $\overline{X}$ é o difeomorfismo de E^n, em $\mathbb{R}^n$, $\overline{X}(P) = \overrightarrow{OP}$.

Se (a^i_j) é a matriz de coordenadas de $(\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n)$ na base canônica $(\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_n)$, temos $e_i = \sum a^i_j \vec{v}_j$. As funções $\overline{X} : E^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\pi : F \longrightarrow E^n$, $a^i_j : F \longrightarrow \mathbb{R}$ são diferenciáveis.

X, e_i são então funções diferenciáveis cujas diferenciais são dX_p, $de_{i_p} : F_p \longrightarrow \mathbb{R}^n$; então

$$(dX_p)(\tau) = \sum \omega^i_p (\tau)\, \vec{e}_i = \sum \omega^i_p (\tau)\, e_i(p)$$

$$(de_{i_p})(\tau) = \sum \omega^j_i (\tau)\, \vec{e}_j = \sum \omega^j_{i_p} (\tau)\, e_j(p)$$

então dX, de_i são $n+1$ formas diferenciais a valores em $\mathbb{R}^n$, e ω^i, ω^i_j são n^2+n formas escalares. Escreveremos

$$dX = \sum \omega^i e_i$$

$$de_i = \sum \omega^j_i e_j$$

<u>*PROPOSIÇÃO 1*</u>: As formas diferenciais ω^i, ω^i_j são diferenciáveis e L.I. em cada ponto $p \in F$.

Seja $\sigma = (O, \vec{v}_1, \ldots \vec{v}_n)$ o referencial canônico e $p = (P, \vec{f}_1, \ldots \vec{f}_n)$ um referencial qualquer. Então

$$X(p) = \overrightarrow{OP} = \sum x^i (P)\, \vec{v}_i = \sum \overline{x}^i (p)\, \vec{v}_i$$

donde
$$dX = \sum_{i=1}^{n} d\bar{x}^i \vec{v}_i = \sum_{k=1}^{n} \omega^k \vec{f}_k$$

mas $\vec{f}_k = \sum_{i=1}^{n} a_k^i \vec{v}_i$ onde (a_k^i) é uma matriz com inversa (b_i^j); temos então
$$\vec{v}_i = \sum_{j=1}^{n} b_i^j \vec{f}_j \qquad \text{e portanto}$$

$$dX = \sum_{i=1}^{n} d\bar{x}^i \vec{v}_i = \sum_{k} \omega^k \vec{f}_k = \sum_{i,j} d\bar{x}^i b_i^j \vec{f}_j , \qquad \text{donde}$$

$$\boxed{\omega^k = \sum_{i=1}^{n} d\bar{x}^i b_i^k}$$

do mesmo modo
$$e_i(p) = \vec{f}_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j \vec{v}_j \qquad \text{e portanto}$$

$$de_i = \sum_{j=1}^{n} da_i^j \vec{v}_j = \sum_{k=1}^{n} \omega_i^k \vec{f}_k, \qquad \text{donde}$$

$$\sum_{j,\ell} da_i^j b_j^\ell \vec{f}_\ell = \sum_{k=1}^{n} \omega_i^k \vec{f}_k \qquad \text{e portanto}$$

$$\boxed{\omega_i^k = \sum_{j=1}^{n} da_i^j b_j^k}$$

a diferenciabilidade das formas ω^i, ω_j^i segue então da diferenciabilidade das funções coordenadas $\bar{x}^i$, a^i_j, e das funções b^k_j.

Como $d\bar{x}^i$, da^i_j formam uma base de F^*_p em cada $p \in F$, e como (b^j_i) é uma matriz inversível, segue que as formas ω^i, ω^i_j são linearmente independentes, e formam uma base de F^*_p ∎

Consideremos GA(E), grupo afim de E (Transformações afins de E); se $\sigma \in GA(E)$, denotaremos por σ^* sua parte linear ($\sigma^* = d\sigma$ é dado por $\sigma^*(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{\sigma(O)\,\sigma(P)}$.)

Então a aplicação $F \times GA(E) \longrightarrow F$ dada por

$$((P, \vec{e}_i, \ldots e_n);\sigma) \longrightarrow (\sigma(P), \sigma^*(\vec{e}_i), \ldots \sigma^*(\vec{e}_n))$$

determina uma ação simplesmente transitiva de GA(E) sobre F.

<u>*PROPOSIÇÃO 2*</u>: As formas ω^i, ω^i_j são invariantes sob a ação de GA(E). Isto é, se $\sigma \in GA(E)$,

$$\begin{aligned} \delta R\sigma\,\omega^i &= \omega^i \\ & \qquad\qquad 1 \leqslant i,j \leqslant n \\ \delta R\sigma\,\omega^i_j &= \omega^i_j \end{aligned}$$

<u>Dem</u> para todo referencial p com $\pi(p) = P$, temos

$$X\ (p) = \overrightarrow{OP}, \qquad X \circ R\sigma\ (p) = X(p\cdot\sigma) = \overrightarrow{O\,\sigma\ (P)}$$

Seja $o = (O, \vec{v}_1, \ldots \vec{v}_n)$ o referencial canônico. Então $\pi(o\cdot\sigma) = \sigma(O)$.

Temos

$$X \circ R\sigma\ (o) = X(o\cdot\sigma) = \overrightarrow{O\,\sigma\ (O)}$$

e $\quad \sigma^*(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{O\sigma(P)} - \overrightarrow{O\sigma(O)}$

então

$$(\sigma^* \circ X)(p) = \sigma^*(\overrightarrow{OP}) = \overrightarrow{O\sigma(P)} - \overrightarrow{O\sigma(O)} = X \circ R\sigma(p) - X \circ R\sigma(o)$$

e, portanto,

$$d(\sigma^* \circ X)\Big|_p = d(X \circ R\sigma)\Big|_p$$

ou seja

$$d\sigma^* \circ dX\Big|_p = dX\Big|_{p\sigma} \circ dR\sigma\Big|_p$$

Calculando ambos os membros em $\tau \varepsilon F_p$, e notando que $d\sigma^* = \sigma^*$ temos

$$\sigma^* \circ dX\Big|_p (\tau) = dX\Big|_{p\sigma} \circ dR\sigma\Big|_p (\tau)$$

$$\sigma^*(\sum \omega_p^i(\tau)\,\vec{e}_i) = \sum \omega_{p\sigma}^i (dR\sigma\Big|_p (\tau))\; \sigma^*(e_i)$$

$$\sum \omega_p^i(\tau)\; \sigma^*(\vec{e}_i) = \sum \omega_{p\sigma}^i (dR\sigma\Big|_p (\tau))\; \sigma^*(\vec{e}_i)$$

Mas $(\sigma^*(\vec{e}_i))$ forma uma base de $E_{\sigma(P)}$ e portanto

$$\omega_p^i(\tau) = \omega_{p\sigma}^i (dR\sigma\Big|_p (\tau)) \qquad \text{ou seja}$$

$$\omega^i = \delta R\sigma\,(\omega^i) \qquad 1 \leq i \leq n$$

Do mesmo modo, se $\sigma^*(\vec{e}_i) = \vec{e}_i{}'$, teremos

$$\sigma^*(e^i)(p) = \sigma^*(\vec{e}_i) = \vec{e}_i{}'$$

e portanto

$$e^i(R\sigma)(p) = e^i(\sigma(P),\sigma^*(\vec{e}_1),\ldots\sigma^*(\vec{e}_n)) = \overrightarrow{e_i'} = \sigma^*(e_i)(p)$$

então, de $e^i \circ R\sigma = \sigma^* \circ e^i$ temos

$$d(\sigma^* \circ e^i)\Big|_p = d(e^i \circ R\sigma)\Big|_p \qquad \text{ou seja}$$

$$\sigma^* \circ de^i\Big|_p = de^i\Big|_{p\sigma} \circ dR\sigma\Big|_p$$

para $\tau \in F_p$, calculando ambos os membros, obtemos

$$\sigma^*(\sum_j \omega_i^j\, p(\tau)\vec{e}_j) = \sum_j \omega_i^j\, p\sigma\, (dR\sigma\Big|_p(\tau))\ \sigma^*(\vec{e}_j), \quad \text{e portanto}$$

$$\omega_i^j\, p(\tau) = \omega_i^j\, p\sigma(dR\sigma\Big|_p(\tau)), \qquad \text{ou seja}$$

$$\omega_j^i = \delta R\sigma^* \omega_j^i \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant n$$

∎

A ação <u>simplesmente</u> <u>transitiva</u> de GA(E) sobre F permite identificar F com GA(E) por meio do difeomorfismo

$$\sigma \longmapsto p\sigma \qquad \text{onde} \qquad p \in F \text{ é fixado.}$$

Feita este identificação, ω^i, ω_j^i passam a formar uma base das formas invariantes à direita do grupo afim GA(E), cujas equações de estrutura investigamos a seguir.

II.1. AS EQUAÇÕES DE ESTRUTURA DA GEOMETRIA DIFERENCIAL AFIM

Tomando as diferenciais exteriores de ambos os membros da igualdade

$$dX = \sum \omega^i e_i \qquad \text{temos}$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} d(\omega^i e_i) = \sum_{i=1}^{n} d\omega^i e_i - \omega^i \wedge de_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} d\omega^i e_i - \sum_{i=1}^{n} \omega^i \wedge (\sum_{j=1}^{n} \omega_i^j e_j)$$

donde

$$\sum_i d\omega^i e_i = \sum_{i,j} \omega^i \wedge \omega_i^j e_j$$

e portanto

$$1) \qquad \boxed{d\omega^i = \sum_{j=1}^{n} \omega^j \wedge \omega_j^i} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

Do mesmo modo, diferenciando

$$de_i = \sum_j \omega_i^j e_j \qquad \text{vem}$$

$$0 = d(\sum_j \omega_i^j e_j) = \sum d\omega_i^j e_j - \sum \omega_i^j \wedge de_j$$

$$= \sum_j d\omega_i^j e_j - \sum \omega_i^j \wedge \sum_k \omega_j^k e_k$$

donde

$$\sum_j d\omega_i^j e_j = \sum_{j,k} \omega_i^j \wedge \omega_j^k e_k$$

e portanto

$$2) \qquad \boxed{d\omega_i^j = \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j} \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant n$$

As equações 1) e 2) são as equações de estrutura do grupo GA(E).

II.2. AS EQUAÇÕES DE ESTRUTURA DA GEOMETRIA DIFERENCIAL EUCLIDIANA.

Seja agora H o fibrado dos referenciais ortonormais. As funções X e e_i, (i=1,...n), restritas a H, determinam formas ω^i, ω_j^i, que são simplesmente $\omega^i|_H$, $\omega_j^i|_H$ e que denotaremos pelas mesmas letras.

Temos então:

- a inclusão $i: H \longrightarrow F$ sendo injetora, δ_i é sobrejetora e portanto, como $\omega^i|_H = \delta_i\, \omega^i$, $\omega_j^i|_H = \delta_i\, \omega_j^i$, temos que ω^i, ω_j^i geram H_p^* em cada ponto p.

- Para cada referencial $p = (P, \vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n)$ temos $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$, e, portanto, as funções e_i verificam $\langle e_i, e_j \rangle \equiv \delta_{ij}$. Derivando ambos os membros, vem

$$\langle d e_i, e_j \rangle = - \langle e_i, d e_j \rangle$$

finalmente, $de_i = \sum \omega_i^j e_j = \sum \langle de_i, e_j \rangle e_j$, e portanto

$\omega_i^j = \langle de_i, e_j \rangle$. Portanto

3) $\boxed{\omega_j^i + \omega_i^j = 0}$ $1 \leqslant i,j \leqslant n$. Esta identidade, junto com as equações 1) e 2), determina as equações de estrutura da geometria diferencial euclidiana. Em particular, $\omega_i^i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

- Temos então, em H, as formas ω^i, ω_j^i, $1 \leqslant i < j \leqslant n$, em número $n+\binom{n}{2}$; como as formas ω^i, ω_j^i formam um sistema de geradores de H_p^* e $\dim H_p^* = n+\binom{n}{2}$, temos que estas forma determinam em cada ponto uma base de H_p^*.

- finalmente, o grupo GM(E) dos movimentos rígidos de E (transformações afins cuja parte linear pertence a $O(n,\mathbb{R})$) atua simples e transitivamente sobre H. As formas ω^i, ω_j^i são invariantes sob esta ação.

Então H se identifica com GM(E) e (ω^i, ω_j^i), $1 \leqslant i < j \leqslant n$ é uma base das formas invariantes à direita deste grupo. As equações 1), 2), 3) são então as equações de estrutura de GM(E).

III. O FIBRADO DE DARBOUX DE UMA HIPERSUPERFÍCIE

Seja $S \subset E^n$ uma hipersuperfície de E^n (Subvariedade C^∞ de dimensão n-1)

Denotemos por H^+ o fibrado dos referenciais ortonormais diretos de E, ou seja, dos referenciais $(P, \vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n)$ onde $\langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$, $(\vec{e}_i)$ é uma base de E orientada positivamente.

Consideramos então o subconjunto $\mathbb{D}_S \subset H^+$ determinado por

$$\mathbb{D}_S = \left\{ (O, e_1, \ldots e_n) \in H^+ \mid O \in S,\ e_1, \ldots e_{n-1} \in S_O \right\}$$

que é o conjunto dos referenciais de E "adaptado" à superfície S. O vetor $\vec{e}_n$ é sempre normal à superfície, e $\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_{n-1}$ determina uma base ortonormal do plano tangente a S.

PROPOSIÇÃO 1: $\mathbb{D}_S$ é um Espaço Fibrado Principal Diferenciável de base S, grupo estrutural $O(n-1, \mathbb{R})$ e projeção π.

DEMONSTRAÇÃO

a) Seções locais de π

para cada carta (U, ϕ) de S, com funções coordenadas $x^1, \ldots, x^{n-1}$, os vetores $\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_p, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p$ formam uma base de S_p, para todo $p \in U$.

Seja $\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_{n-1}$ a base de S_p obtida por ortonormaliza ção de Gram-Schmidt da base $\left.\frac{\partial}{\partial x'}\right|_p, \ldots \left.\frac{\partial}{\partial x^{n-1}}\right|_p$, e seja

$\vec{e}_n$ o único vetor de E_p tal que $(\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_{n-1}, \vec{e}_n)$

seja base ortonormal positiva de E_p.

Então, definindo σ_u por

$\sigma_u : P \longmapsto (P, \vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n) \in H^+$ temos uma seção de π, sobre o aberto $U \subset S$.

b) A ação de $O(n-1, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{D}_S$ é dada por

$(O, \vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n) \cdot g = (O, g(\vec{e}_1), \ldots g(\vec{e}_{n-1}), \vec{e}_n^{\,*})$ onde

$\vec{e}_n^{\,*}$ faz com que $(O, g(\vec{e}_1), \ldots, g(\vec{e}_{n-1}), \vec{e}_n^{\,*}) \in H^+$. Esta ação é simplesmente transitiva sobre cada fibra $\pi^{-1}(P)$, $P \in S$, pois a ação correspondente de $O(n-1, \mathbb{R})$ sobre S_p é simplesmente transitiva.

c) Para cada carta (U, ϕ), a aplicação

$\psi_u : U \times O(n-1, \mathbb{R}) \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ dada por

$$(P, g) \longrightarrow \sigma_u(P) \cdot g$$

é injetora pois $\psi_u(P,g) = \psi_u(P',g') \Longrightarrow P = P'$ e $g = g'$ (a ação de $O(n-1, \mathbb{R})$ é simplesmente transitiva) e sobrejetora pelo mesmo motivo.

Podemos então definir, sobre $\pi^{-1}(U)$, uma estrutura diferenciável fazendo da bijeção ψ_u um difeomorfismo. $\mathbb{D}_S$ se torna então uma variedade, quando munida da topologia que tem por abertos-base os $\pi^{-1}(U)$ e do atlas maximal que contém as estruturas diferenciáveis de cada $\pi^{-1}(U)$.

d) Esta estrutura de variedade independe da escolha das cartas (U,ϕ) sobre S. De fato, sejam (U,ϕ) e (U',ϕ') duas tais cartas e $P \in U \cap U'$.

Existe um único $g \in O(n-1, \mathbb{R})$ com $\sigma_{u'}(P) = \sigma_u(P) \cdot g$

Definimos assim uma aplicação $g: U \cap U' \longrightarrow O(n-1, \mathbb{R})$

Da diferenciabilidade das aplicações σ_u e $\sigma_{u'}$, e do fato que $\left.\frac{\partial}{\partial x_i'}\right|_P = \sum a_i^j \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_P$ (onde $g = (a_i^j)$ e as funções a_i^j são diferenciáveis), segue a diferenciabilidade de g.

Portanto a estrutura diferenciável obtida sobre $\pi^{-1}(U \cap U')$ é a mesma, seja ela induzida por ψ_u ou por $\psi_{u'}$. Temos então sobre $\mathbb{D}_S$ uma estrutura de variedade, que faz dele um espaço fibrado principal. Temos $\text{Dim } \mathbb{D}_S = \dim S + \dim O(n-1, \mathbb{R}) = n-1 + \binom{n-1}{2}$.

■

OBSERVAÇÕES: 1) As funções coordenadas de $U \times O(n-1, \mathbb{R})$ podem ser transportadas pelas ψ_u para $\mathbb{D}_S$, que fica então parametrizada por

$$(x_1, \ldots, x_{n-1}, g) \longmapsto (P(x_1,\ldots,x_n), \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n) \quad \text{onde}$$

$(\vec{f}_i)$ é o ortonormalizado de $\left(g\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_P\right)\right)$ e $\vec{f}_n$ é o vetor normal a S em P que faz de $(\vec{f}_i)_{i=1,\ldots n}$ uma base positiva de E_P.

2) O fibrado $\mathbb{D}_S$ assim obtido não é, em geral, trivial: a existência de uma seção global de π sobre S acarreta a existência de um campo tangente não nulo sobre toda a superfície S o que não pode ser o caso se $E = E^3$ e $S = S^2$, por exemplo.

3) As hipersuperfícies orientáveis de E podem ser caracterizadas como aquelas cujo fibrado de Darboux é desconexo. $\mathbb{D}$ tem então duas componentes conexas, cada uma correspondendo a uma orientação da hipersuperfície.

III.1. AS EQUAÇÕES DE ESTRUTURA DA HIPERSUPERFÍCIE S

Denotaremos ainda por X, e_i, ω^i e ω^i_j as restrições a $\mathbb{D}_S$ destas funções e formas, ou seja $X = X \circ i$, $e_i = e_i \circ i$

$\omega^i = \delta_i \circ \omega^i$ e $\omega^i_j = \delta_i \circ \omega^i_j$, onde $i : \mathbb{D}_S \longrightarrow F$ é a inclusão.

As formas só serão calculadas sobre vetores tangentes a $\mathbb{D}_S$, o que acarreta:

PROPOSIÇÃO 2: ω^n é nula sobre $\mathbb{D}_S$ e as formas ω^i, $1 \leq i \leq n-1$ são L.I.

DEMONSTRAÇÃO: $dX\big|_{\mathbb{D}_S} : {\mathbb{D}_S}_p \longrightarrow S_{\pi(p)}$ e portanto os valores de dX são sempre vetores tangentes a S. Disto decorre $\langle dX_p, \vec{e}_n \rangle = 0$ para todo $p \in \mathbb{D}_S$ e, como

$dX_p = \sum \omega^i \vec{e}_i$, $\omega^i_p(\tau) = \langle dX_p(\tau), \vec{e}_i \rangle$ e portanto $\omega^n = 0$.

Por outro lado, dado $p = (P, e_1, \ldots e_n) \in \mathbb{D}_S$, temos $\pi(p) = P$. $d\pi : \mathbb{D}_{S_p} \longrightarrow S_p$ é sobrejetora e portanto existem $\tau_1, \ldots, \tau_n \in \mathbb{D}_{S_p}$ com $d\pi(\tau_i) = \vec{e}_i$ $\quad 1 \leq i \leq n-1$

então $dX(\tau_i) = \vec{e}_i = \sum \omega^j(\tau_i)\, \vec{e}_j$ e portanto $\omega^j(\tau_i) = \delta_{ij}$.

Portanto $\omega^1, \ldots \omega^{n-1}$ são linearmente independentes e funcionam como "duais" de $\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_{n-1}$.

Para caracterizar as formas ω^i_j, precisaremos de um resultado algébrico:

<u>LEMA (CARTAN)</u> Se $\omega^1, \ldots \omega^p$ são formas lineares L.I. sobre um espaço vetorial V e $\sigma^1, \ldots \sigma^p$ são formas quaisquer sobre V tais que

$\omega^1 \wedge \sigma^1 + \ldots + \omega^p \wedge \sigma^p = 0$, então existem números a^i_j $\quad 1 \leq i,j \leq p$

verificando

$$\sigma^i = \sum_j a^i_j\, \omega^j \quad \text{e} \quad a^i_j = a^j_i$$

<u>Dem</u>. Sejam formas ω^i, $p = 1 \leq i \leq n$ de forma que as ω^i sejam uma base de V^*. Teremos então

$$\sigma^i = \sum_{j=1}^{p} a^i_j\, \omega^j + \sum_{\ell=p+1}^{n} b^i_\ell\, \omega^\ell$$

de $\sum\limits_{i=1}^{p} \omega^i \wedge \sigma^i = 0$, vem

$$0 = \sum_{i=1}^{p} \left(\omega^i \wedge \sum_{j=1}^{p} a^i_j\, \omega^j\right) + \sum_{i=1}^{p} \left(\omega^i \wedge \sum_{\ell=p+1} b^i_\ell\, \omega^\ell\right) =$$

$$= \sum_{1\leq i<j\leq p} (a^i_j - a^j_i)\, \omega^i \wedge \omega^j + \sum_{i<\ell} b^i_\ell\, \omega^i \wedge \omega^\ell$$

Como $\omega_r \wedge \omega_s$, $1 \leq r < s \leq n$, são formas linearmente independentes, concluímos que $a^i_j = a^j_i$ e $b^i_\ell = 0$, $1\leq i,j\leq p$.

Como $\omega^n = 0$, temos

$$d\omega^n = \sum_{j=1}^{n-1} \omega^j \wedge \omega^n_j = 0 .$$

Como as formas $\omega^1,\ldots\omega^{n-1}$ são linearmente independentes, decorre do lema acima que

$$\omega^n_i = \sum_{j=1}^{n-1} a^i_j\, \omega^j , \quad \text{com} \quad a^i_j = a^j_i$$

Temos então em $\mathbb{D}_S$:

$$\begin{cases} \omega^1,\ldots\omega^{n-1} \quad \text{L.I.}, \quad \omega^n = 0 \\ \omega^i_n = \sum_{j=1}^{n-1} a^i_j\, \omega^j \quad , \quad a^i_j = a^j_i \\ \omega^i_j = -\omega^j_i \end{cases}$$

então as formas ω^i, ω^i_j com $1 \leq i < j \leq n-1$ geram $\mathbb{D}^*_{S_p}$.

Como $\dim \mathbb{D}_S = n-1 + \binom{n-1}{2}$, as formas acima são uma base de $\mathbb{D}^*_{S_p}$. Elas verificam além disto as equações de estrutura

$$\begin{cases} d\omega^i = \sum\limits_{j=1}^{n-1} \omega^j \wedge \omega^i_j \\ \\ d\omega^i_j = \hat{\sum\limits_{\substack{k\neq i \\ k\neq j}}} \omega^k_j \wedge \omega^i_k \end{cases} \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n-1 \ ?$$

além disto, estas equações caracterizam unicamente as formas ω^i_j . De fato,

<u>*PROPOSIÇÃO 3:*</u>

Se existirem, são únicas as formas ω^i_j, $1 \leqslant i,j \leqslant n-1$, tais que

$$1) \quad d\omega^i = \sum_{j=1}^{n-1} \omega^j \wedge \omega^i_j \qquad , \qquad 2) \quad = \omega^i_j = -\omega^j_i$$

<u>*DEMONSTRAÇÃO:*</u>

Suponha dadas sobre $\mathbb{D}_S$ formas $\overline{\omega}^i_j$ satisfazendo 1) e 2).

Então teríamos

$$0 = \sum_{j=1}^{n-1} \omega^j \wedge \omega^i_j - \omega^j \wedge \overline{\omega}^i_j = \sum_{j=1}^{n-1} \omega^j \wedge (\omega^i_j - \overline{\omega}^i_j)$$

Pelo lema de Cartan segue

$$\overline{\omega}^i_j - \omega^i_j = \sum_{k=1}^{n-1} C^i_{jk}\, \omega^k \qquad \text{com} \qquad C^i_{jk} = C^i_{kj}$$

Por outro lado, de

$$\overline{\omega}^i_j - \omega^i_j = -(\overline{\omega}^j_i - \omega^j_i), \qquad \text{ou seja}$$

$$\sum C^i_{jK}\,\omega^k = -\sum C^j_{ik}\,\omega^k \qquad \text{vem} \qquad C^i_{jk} = -C^j_{ik}$$

Então $C^i_{jk} = -C^j_{ik} = -C^j_{ki} = C^k_{ji} = C^k_{ij} = -C^i_{kj} = -C^i_{jk}$ e portanto $C^i_{jk} = 0$, ou seja $\bar{\omega}^i_j - \omega^i_j = 0$, $i=1,\ldots,n-1.$
$j=1,\ldots,n-1.$

∎

III.2. OS ESPAÇOS HORIZONTAL E VERTICAL

Seja $(U,x_1,\ldots x_{n-1})$ uma carta de S e $(x_1,\ldots\ldots, x_{n-1},g^i_j)$ o sistema de coordenadas que esta carta de S permite definir em $\pi^{-1}(U)$.

Temos então que $\left.\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right|_p ,\ldots, \left.\dfrac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right|_p$ e

$\left.\dfrac{\partial}{\partial g^i_j}\right|_p$ $1\leqslant i,j\leqslant n-1$ formam uma base de $\mathbb{D}_{S_p}$ para todo $p\varepsilon U$.

A aplicação $\pi:\pi^{-1}(U)\longrightarrow U$ pode ser definida em coordenadas como sendo simplesmente

$$\pi(x_1,\ldots x_{n-1},\, g^i_j) = (x_1,\ldots x_{n-1})$$

e decorre que $d\pi|_p(\tau) = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i \left.\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\pi(p)}$ ou seja que

$d\pi|_p(\tau) = 0$ se, e somente se, $\tau\ \varepsilon\ \mathbb{D}_{S_p}$ não tem componentes segundo os vetores $\left.\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$; como a condição $d\pi|_p = 0$

caracteriza os vetores $\tau \in \mathbb{D}_{S_p}$ que são tangentes à fibra $\pi^{-1}(\pi(p))$ (ver propriedade 4 dos EFPD), isto nos leva a definir em $\mathbb{D}_{S_p}$ os subespaços $\bar{H}_p = \left[\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p \right]_{i=1,\ldots n-1}$

e $V_p = \left[\left.\frac{\partial}{\partial g^i_j}\right|_p \right]_{i,j=1,\ldots n.}$

Temos que $\mathbb{D}_{S_p} = \bar{H}_p \oplus V_p$ e que $V_p = \left[\pi^{-1}(\pi(p))\right]_p$

$\bar{H}_p$ e V_p são respectivamente o espaço horizontal e o espaço vertical de $\mathbb{D}_{S_p}$, relativamente à carta $\pi^{-1}(U)$.

Dos fatos que $\operatorname{Ker} d\pi = V_p$ e que $d\pi : \mathbb{D}_{S_p} \longrightarrow S_{\pi(p)}$ é sobrejetora decorre que $d\pi|_{H_p} : \bar{H}_p \longrightarrow S_p$ é um isomorfismo.

Então, dada $(\vec{e}_1,\ldots\vec{e}_{n-1})$ uma base de S_p, existe $(\tau_1,\ldots\tau_{n-1})$ uma base de $\bar{H}_p$ com $d\pi(\tau_i) = \vec{e}_i$.

Então, de $dX(\tau) = \sum \omega^i(\tau)e_i$ e $\tau = \sum a_i\,\tau_i$ vem que

$$\omega^i(\tau) = a^i \text{ , ou seja que}$$

$$\tau = \sum_{i=1}^{n-1} \omega^i\,(\tau)\,\tau_i$$

isto é, as formas ω^i funcionam como "duais" de $\vec{e}_i$: o valor de $\omega^i(\tau)$ só depende da componente de τ em $\bar{H}_p$, e as formas ω^i podem ser consideradas como $\delta\pi(\bar{\omega}_i)$ onde $\bar{\omega}^i$ seriam formas de S com $\omega^i(\vec{e}_j) = \delta_{ij}$.

Uma caracterização dos vetores de V_p é portanto que as formas ω^i se anulem sobre ele.

A nossa definição de $\overline{H}_p$ envolve, e depende, das cartas escolhidas sobre S. Como $V_p = \left[\pi^{-1}(\pi(p))\right]_p$ independe das cartas e é caracterizado por $\omega^i=0$, isto nos leva a definir em cada $p \in \mathbb{D}_S$, um espaço horizontal caracterizado por $\omega^i_j = 0$.

Seja então $p \in \mathbb{D}_S$;

Definimos H_p como sendo o subespaço de $\mathbb{D}_{S_p}$ cujo anulador é gerado pelas formas ω^i_j, $1 \leqslant i,j \leqslant n-1$

então:

1) $H_p \oplus V_p = \mathbb{D}_{S_p}$ pois ω^i, ω^i_j são base de $\mathbb{D}^*_{S_p}$

2) H_p é invariante pela ação de $O(n-1, \mathbb{R})$ em $\mathbb{D}_S$, ou seja, se $\sigma \in O(n-1, \mathbb{R})$, $d\,R_\sigma(H_p) = H_{p.\sigma}$.
Isto vem do fato que as formas ω^i_j são invariantes por R_σ.

Então as formas ω^i_j, i, j=1,...,n-1 são as formas de uma conexão em $\mathbb{D}_S$. ?

IV. AS DUAS FORMAS QUADRÁTICAS

No que segue, S é considerada orientada.

Seja $\bar{X} : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\bar{X}(P) = \overrightarrow{OP}$, uma vez fixada uma origem.

Tem-se então $\bar{X} \circ \pi = X : \mathbb{D}_S \longrightarrow \mathbb{R}^n$, e $d\bar{X}_p(\tau) = \tau$, $\forall \tau \in S_p$

Temos então definidas em S duas formas quadráticas, I e II, que a cada $P \in S$ associam uma forma quadrática sob S_p, dadas por

$$I_p = \langle d\bar{X}_p , d\bar{X}_p \rangle \quad \text{e} \quad II_p = -\langle d\vec{e}_{n_p} , d\bar{X}_p \rangle$$ onde $\vec{e}_n$ é o campo normal unitário de S.

Podemos definir formas em $\mathbb{D}_S$ a partir de I e II, a saber

$I^* = \delta\pi(I)$, $II^* = \delta\pi(II)$, que serão dadas por

$$I^*(\tau) = \delta\pi I(\tau) = I(d\pi(\tau)) = \langle d\bar{X} \circ d\pi(\tau) , d\bar{X} \circ d\pi(\tau) \rangle =$$

$$= \langle dX(\tau) , dX(\tau) \rangle$$

$$II^*(\tau) = \delta\pi II(\tau) = II(d\pi(\tau)) = -\langle d\vec{e}_n (d\pi(\tau)), d\bar{X}(d\pi(\tau)) \rangle =$$

$$= -\langle de_n^{(\tau)}, dX^{(\tau)} \rangle$$

Temos então definidas as duas formas quadráticas em $\mathbb{D}_S$

$$I^* = \langle dX , dX \rangle \quad \text{e} \quad II^* = -\langle de_n , dX \rangle$$

podemos exprimir I^* e II^* em termos das formas do fibrado $\mathbb{D}_S$:

de $dX = \sum_{i=1}^{n-1} \omega^i e_i$ vem

$$\boxed{I^* = \langle dX , dX \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} (\omega^i)^2} \qquad (1)$$

e de

$de_n = \sum_{i=1}^{n-1} \omega_n^i e_i$ vem

$$\boxed{II^* = - \sum_{i=1}^{n-1} \omega_n^i . \omega^i = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_j^i \omega^i \omega^j} \qquad (2)$$

onde (a_j^i) é a matriz simétrica tal que $\omega_n^i = \sum a_j^i \omega^j$

A equação (2) nos permite caracterizar as hipersuperfícies de E contidas em hiperplanos:

PROPOSIÇÃO 1: $S \subset E$ uma hipersuperfície está contida num hiperplano de E se, e somente se, sua segunda forma quadrática é nula.

DEMONSTRAÇÃO: A condição é, claramente, necessária. Suponha então que a segunda forma II de S seja nula. Então II^* é nula, ou seja

$$\langle de_n , dX \rangle = 0$$

Mas esta forma quadrática provém da forma bilinear $B(\tau,\mu) = \langle de_n(\tau) , dX(\mu) \rangle$, expressa por $B(\tau,\mu) = \sum a_j^i \omega^i(\tau) \omega^j(\mu)$ e, portanto, simétrica. O fato que $II^* = 0$ acarreta $B=0$ e, portanto, $a_j^i = 0$ $1 \leqslant i,j \leqslant n-1$. Como $\omega_n^i = \sum_{j=1}^{n-1} a_j^i \omega^j$,

decorre que as formas ω_n^i, $1 \leqslant i \leqslant n-1$, são nulas. Finalmente, como $de_n = \sum \omega_n^i e_i$, segue que $de_n = 0$, ou seja,

$\vec{e}_n$ é constante e portanto S está contida num hiperplano de E ortogonal ao vetor $\vec{e}_n$

■

Vimos (III.2) que, em cada espaço tangente $\mathbb{D}_{S_p}$, $\tau \in V_p \iff d\pi(\tau) = 0$; disto decorre que os vetores τ de V_p são exatamente aqueles sobre os quais I^* é nula, isto é

$$\tau \in V_p \iff d\pi(\tau) = 0 \iff \langle dX(\tau), dX(\tau)\rangle = 0 \quad \text{pois} \quad dX = d\bar{X} \circ d\pi.$$

Como $I^* = \sum_{i=1}^{n-1} (\omega^i)^2$, concluímos que $\tau \in V_p \iff \omega^i(\tau) = 0$, $i=1,\ldots,n-1$, ou seja, as formas ω^i geram o anulador de V_p.

Então, <u>sobre H_p</u>, I^* é uma forma quadrática definida positiva, que determina portanto uma estrutura métrica em H_p. Além disto, o isomorfismo $d\pi|_{H_p} : H_p \longrightarrow S_p$ <u>é uma isometria</u> de H_p em $S_{\pi(p)}$. De fato

$$\tau \in H_p \implies I^*(\tau) = I(d\pi(\tau)).$$

As formas ω^i_j são então as formas da conexão de Levi-Cívita de $\mathbb{D}_S$ relativamente à métrica I.

Sejam agora duas hipersuperfícies S e $\bar{S}$ de E, orientadas por dois campos normais e_n e $\bar{e}_n$.

Dada ϕ uma aplicação diferenciável de S em $\bar{S}$, denotaremos por $d\phi$ e $\delta\phi$ as aplicações lineares induzidas sobre vetores tangentes e formas diferenciais, respectivamente.

Dada uma forma quadrática sobre $\bar{S}$, $\bar{Q}:\bar{S}_{\phi(p)} \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos $Q = S_p \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$Q(\tau) = \delta\phi(\bar{Q})(\tau) = \bar{Q}(d\,\phi\,(\tau)) \quad \text{para todo } \tau \in S_p .$$

Se $\bar{B}$ é a forma bilinear obtida por polarização de $\bar{Q}$, então $B = \delta\phi(\bar{B})$ será a forma bilinear obtida de $Q = \delta\phi(\bar{Q})$ por polarização.

DEFINIÇÃO 1:

$\phi:S \longrightarrow \bar{S}$, diferenciável, se diz isometria se preservar a primeira forma fundamental de S, ou seja, se $\delta\phi(\bar{I}) = I$ (*)

Isto é, ϕ é uma isometria se preservar a métrica induzida de E sobre $\bar{S}$ e S

PROPOSIÇÃO 2: Uma isometria $\phi:S \longrightarrow \bar{S}$ induz uma aplicação diferenciável $\tilde{\phi}:\mathbb{D}_S \longrightarrow \mathbb{D}_{\bar{S}}$ que preserva a forma I

DEMONSTRAÇÃO:

Basta definir $\tilde{\phi}:\mathbb{D}_S \longrightarrow \mathbb{D}_{\bar{S}}$ por

$$\tilde{\phi}:p = (P,\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n) \longmapsto (\phi(P),\, d\phi(\vec{e}_1),\ldots,d\phi(\vec{e}_{n-1}),\, \vec{e}_n^{\,*})$$

(*) denotaremos com uma barra todos os entes já definidos, quando correspondentes à hipersuperfície $\bar{S}$.

onde $\vec{e}_n^{\,*}$ é o único vetor de $E_{\phi(P)}$ que faz de $(d\phi(\vec{e}_1),\ldots,d\phi(\vec{e}_{n-1}),\ \vec{e}_n^{\,*})$ uma base ortonormal positiva de $E_{\phi(P)}$.

Notemos que as imagens de $\tilde{\phi}$ pertencem efetivamente a $\mathbb{D}_{\bar{S}}$: ϕ sendo isometria, $d\phi$ transforma bases ortonormais de S_P em bases ortonormais de $\bar{S}_{\phi(P)}$

($\vec{e}_n^{\,*}$ será simplesmente $\pm\,\bar{e}_n$, conforme ϕ preserve ou não a orientação.)

Verificamos agora que esta extensão de ϕ aos fibrados Darboux preserva a forma I^*.

O diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}_S \arrow[r, "\tilde{\phi}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{D}_{\bar{S}} \arrow[d, "\bar{\pi}"] \\ S \arrow[r, "\phi"'] & \bar{S} \end{tikzcd}$$

é claramente comutativo: de fato, se p é um referencial em $P \in S$, $\tilde{\phi}(p)$ é um referencial em $\phi(P) \in \bar{S}$.

Então

$$\delta\tilde{\phi}(\bar{I}^*)\ (\tau) = \bar{I}^*(d\tilde{\phi}(\tau)) = \bar{I}(d\bar{\pi} \circ d\tilde{\phi}(\tau)) = \bar{I}(d\phi \circ d\pi(\tau)) =$$

$$= \delta\phi(\bar{I})\,(d\pi(\tau)) = I(d\pi(\tau)) = I^*(\tau) \quad \text{para todo } \tau \in \mathbb{D}_{S_p}.$$

Então $\delta\tilde{\phi}(\bar{I}^*) = I^*$, e $\tilde{\phi}$ preserva a forma I^*. Em particular, $d\tilde{\phi}$ determina uma isometria entre os espaços H_p e $\bar{H}_{\tilde{\phi}(p)}$.

Temos definidas em $\mathbb{D}_{\bar{S}}$ as formas $\bar{\omega}^i$, $\bar{\omega}^i_j$

$1 \leq i,j \leq n-1$, que verificam

$$\bar{I}^* = \sum_{i=1}^{n-1} (\bar{\omega}^i)^2 \qquad \text{e} \qquad d\bar{\omega}^i = \sum_{j=1}^{n-1} \bar{\omega}^j \wedge \bar{\omega}^i_j$$

veremos agora que a extensão aos fibrados de Darboux da isometria ϕ preserva estas formas.

<u>*PROPOSIÇÃO 3*</u>: $\tilde{\phi}$ preserva as formas ω^i, ω^i_j , $1 \leq i,j \leq n-1$, isto é

$$\delta\tilde{\phi}\bar{\omega}^i = \omega^i \qquad \text{e} \qquad \delta\tilde{\phi}\bar{\omega}^i_j = \omega^i_j$$

<u>*DEMONSTRAÇÃO*</u>: Seja $p \in \mathbb{D}_S$, $p=(P,\vec{e}_1,\ldots\vec{e}_n)$, e $\tau \in \mathbb{D}_{S_p}$.

τ pode ser decomposto nas suas componentes segundo V_p e H_p. Seja então $\tau = \tau_1 + \tau_2$, $\tau_1 \in V_p$, $\tau_2 \in H_p$

a) $\tau_1 \in V_p$ e portanto $\omega^i(\tau_1) = 0$, $i=1,\ldots,n-1$

de $d\tilde{\phi}(\tau_1) \in \bar{V}_{\tilde{\phi}(p)}$ segue $\delta\tilde{\phi}\bar{\omega}^i(\tau_1) = \bar{\omega}^i(d\tilde{\phi}(\tau)) = 0 = \omega^i(\tau_1)$

b) Como $\tau_2 \in H_p$, temos $\tau_2 = \sum_{i=1}^{n-1} \omega^i(\tau_2)v_i$ onde

$(v_i)_{i=1,\ldots n-1}$ é uma base de H_p tal que $d\pi(v_i) = \vec{e}_i$.

$$\text{Então} \quad d\tilde{\phi}(\tau_2) = \sum_{i=1}^{n-1} \omega^i(\tau_2)\, d\tilde{\phi}\,(v_i).$$

Como $\bar{\pi} \circ \tilde{\phi} = \phi \circ \pi$, temos que

$d\bar{\pi}(d\tilde{\phi}(v_i)) = d\phi(d\pi(v_i)) = d\phi(\vec{e}_i)$, ou seja, os vetores

$\bar{v}_i = d\tilde{\phi}(v_i)$ formam a base de $\Pi_{\tilde{\phi}(p)}$ que goza da propriedade $d\bar{\pi}(\bar{v}_i) = d\phi(e_i)$.

então,

$$d\tilde{\phi}(\tau_2) = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\omega}^i (d\tilde{\phi}(\tau_2))\, \bar{v}_i \ . \quad \text{Temos portanto}$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \bar{\omega}^i(d\tilde{\phi}(\tau_2))\, \bar{v}_i = \sum_{i=1}^{n-1} \omega^i(\tau_2)\, \bar{v}_i \qquad .$$

daí concluímos que

$$\bar{\omega}^i\ (d\tilde{\phi}(\tau_2)) = \omega^i\ (\tau_2)\ , \quad i=1,\ldots,n-1$$

ou seja

$$\delta\tilde{\phi}\bar{\omega}^i(\tau_2) = \omega^i(\tau_2)\ .$$

Concluímos então que

$\delta\tilde{\phi}\bar{\omega}^i(\tau) = \omega^i(\tau)$ e, portanto, $\tilde{\phi}$ preserva as formas ω^i ; quanto às formas de conexão ω^i_j , $1 \leqslant i,j \leqslant n-1$, apliquemos $\delta\tilde{\phi}$ às equações de estrutura de $\bar{S}$

$$d\bar{\omega}^i = \sum_{j=1}^{n-1} \bar{\omega}^j \wedge \bar{\omega}^i_j \qquad .$$

vem então

$$d\omega^i = d(\delta\tilde{\phi}\bar{\omega}^i) = \delta\tilde{\phi}(d\bar{\omega}^i) = \delta\tilde{\phi}\Big(\sum_{j=1}^{n-1} \bar{\omega}^j \wedge \bar{\omega}^i_j\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \delta\tilde{\phi}\bar{\omega}^j \wedge \delta\tilde{\phi}\bar{\omega}^i_j = \sum_{j=1}^{n-1} \omega^j \wedge \delta\tilde{\phi}\bar{\omega}^i_j \qquad .$$

Como as formas ω^i_j que verificam as equações $d\omega^i = \sum_{j=1}^{n-1} \omega^j \wedge \omega^i_j$ são únicas (ver III.1) concluímos que

$$\omega^i_j = \delta\phi\tilde{\overline{\omega}}^i_j \quad , \qquad i,j = 1,\dots,n-1$$

$\blacksquare$

IV.1. O CASO DAS SUPERFÍCIES DE E^3. TEOREMA DE GAUSS

A aplicação da proposição anterior ao caso de superfícies do espaço euclidiano de três dimensões permite dar uma interpretação da curvatura Gaussiana em termos das formas de conexão, e uma demonstração do Theorema Egregium de Gauss.

Seja S uma superfície de E^3, orientada por um campo normal unitário $\vec{e}_3$. Consideremos o fibrado de Darboux $\mathbb{D}_S$; temos nele definidas formas

$$\omega^1, \omega^2, \omega^3 = 0, \omega^1_2, \omega^1_3 \quad \text{e} \quad \omega^2_3$$

$\omega^1, \omega^2, \omega^1_2$ é base de $\mathbb{D}^*_{S_p}$ em cada ponto, e as formas ω^1_3, ω^2_3 verificam

$$\omega^1_3 = a\omega^1 + b\omega^2$$

$$\omega^2_3 = b\omega^1 + c\omega^2$$

Temos definidas sobre S as duas formas quadráticas $I = \langle d\overline{X}, d\overline{X}\rangle$ e $II = -\langle de_3, d\overline{X}\rangle$, e, levando-as para $\mathbb{D}_S$, as duas formas quadráticas $I^* = \langle dX, dX\rangle$ e

$II^* = -\langle de_3, dX\rangle$

então $I^* = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$,

$$II^* = -\omega_3^1\,\omega^1 - \omega_3^2\,\omega^2 = -(a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\,\omega^2 + c(\omega^2)^2)$$

além disto, as formas $\omega^1, \omega^2, \omega_2^1, \omega_3^1$ e ω_3^2 verificam as equações de estrutura.

Então

$$d\omega_2^1 = \omega_3^1 \wedge \omega_2^3 = (a\omega^1 + b\omega^2) \wedge (-b\omega^1 + -c\omega^2) = -$$

$$-(ac-b^2)\,\omega^1 \wedge \omega^2$$

PROPOSIÇÃO 4: O número $K = ac-b^2$ é constante em cada fibra $\pi^{-1}(P)$, ou seja, é uma função real definida em S.

DEMONSTRAÇÃO:

$d\omega_2^1 = -K\omega^1 \wedge \omega^2$; derivando ambos os membros exteriormente, vem

$$0 = d(d\omega_2^1) = -dK \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 + K \wedge d\omega^1 \wedge \omega^2 - K \wedge \omega^1 \wedge d\omega^2 =$$

$$= -dK \wedge \omega^1 \wedge \omega^2 \,, \quad \text{pois}$$

$$d\omega^1 \wedge \omega^2 = (\omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^3 \wedge \omega_3^1) \wedge \omega^2 = 0$$

$$\omega^1 \wedge d\omega^2 = \omega^1 \wedge (\omega^1 \wedge \omega_1^2 + \omega^2 \wedge \omega_3^2) = 0$$

Temos então $dK = x\omega^1 + y\omega^2$ pois dK, ω^1, ω^2 são LD e

ω^1, ω^2 LI. Calculada em vetores V_p, $p \in \mathbb{D}_S$, dK é portanto nula pois $v \in V_p \Longrightarrow \omega^1(v) = \omega^2(v) = 0$. Mas $V_p = \pi^{-1}(\pi(p))$, então dK é nula na fibra $\pi^{-1}(P)$, e portanto K é constante nesta fibra.

∎

Se denotamos B a forma bilinear obtida de II por polarização, ou seja, $B(\tau,\mu) = -\langle de_3(\tau), d\bar{X}(\mu)\rangle$ $\forall \tau, \mu \in S_p$, e se τ_1, τ_2 é uma base ortonormal de S_p, a <u>curvatura gaussiana</u> k de S em p é o determinante da matriz de B na base τ_1, τ_2. Se k_1 e k_2 são os autovalores de B, temos $k = k_1 k_2$, e k_1, k_2 são as <u>curvaturas principais</u> de S em p.

PROPOSIÇÃO 5: $K = ac-b^2$ é a curvatura gaussiana de S em P.

DEMONSTRAÇÃO

Temos, em $p \in \mathbb{D}_S$, $II^* = -(a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2)$. Seja (τ_1, τ_2) uma base de H_p dual de ω^1, ω^2 então, nesta base, a matriz de II^* é $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & -c \end{pmatrix}$ pois, se $\tau \in H_p$, $\tau = x_1\tau_1 + x_2\tau_2$, temos

$$II^*(\tau) = -(ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2).$$

Como $d\pi$ é uma isometria de H_p em $S_{\pi(p)}$, $II^* = \delta\pi(II)$, os autovalores de II^* e II são os mesmos.

Mas o produto dos autovalores de II^* é $\det \begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & -c \end{pmatrix} =$ $= K = ac-b^2$. Portanto a curvatura gaussiana $k = k_1 k_2$, produto dos autovalores de II, é igual a K.

■

<u>*PROPOSIÇÃO 5:*</u> (Teorema de Gauss). Sejam S, $\overline{S}$ duas superfícies orientadas de E^3. Uma isometria $\phi : S \longrightarrow \overline{S}$ preserva a curvatura gaussiana, isto é $\overline{k} \circ \phi = k$.

<u>*DEMONSTRAÇÃO:*</u> Vimos que a extensão $\tilde{\phi}$ de ϕ aos fibrados de Darboux preserva as formas ω^i, ω^i_j; no caso presente, ϕ preserva ω^1, ω^2 e ω^1_2.

Então

$$\delta\tilde{\phi}(d\overline{\omega}^1_2) = \delta\tilde{\phi}(-\overline{K}\overline{\omega}^1 \wedge \overline{\omega}^2) = -\overline{K} \circ \tilde{\phi}\,(\delta\tilde{\phi}\,\overline{\omega}^1 \wedge \delta\tilde{\phi}\,\overline{\omega}^2) = -\overline{K} \circ \tilde{\phi}\,\omega^1 \wedge \omega^2.$$

mas $$\delta\tilde{\phi}(d\,\overline{\omega}^1_2) = d(\delta\tilde{\phi}\,\overline{\omega}^1_2) = d\omega^1_2 = -K\omega^1 \wedge \omega^2$$

Portanto

$$\overline{K} \circ \tilde{\phi}\,\omega^1 \wedge \omega^2 = K\omega^1 \wedge \omega^2$$ e, assim,

$$K = \overline{K}\ \tilde{\phi}.$$ Como K é constante nas fibras e $\tilde{\phi}$ preserva fibras, temos então

$$\overline{k} \circ \phi = k$$

■

Podemos generalizar este resultado para hipersuperfícies de E^n. Denotamos ainda por B a forma bilinear obtida de II por polarização, $B(\tau,\mu) = -\langle de_n(\tau), d\overline{X}(\mu)\rangle$.

Os autovalores $k_1,\dots k_{n-1}$ de B se chamam curvaturas principais de S e o determinante de $B = (-1)^{n-1} k_1 k_2 \dots k_{n-1}$ se chama <u>curvatura de Gauss-Kronecker</u> de S e se denota K.

Seja (a^i_j) a matriz simétrica que verifica

$$\omega^i_n = \sum_{k=1}^{n-1} a^i_k \omega^k .$$

Como $II^* = \sum_{i,j=1}^{n-1} - a^i_j \omega^i \omega^j$, a matriz de II^* na base de H_p dual de $\omega^1,\dots\omega^{n-1}$ é $-(a^i_j)$. Como $d\pi : H_p \longrightarrow S_{\pi(p)}$ é um isomorfismo, os autovalores de II^* e de B são os mesmos, e, em particular,

$$K = \det(-a^i_j) = \text{curvatura de Gauss-Kronecker.}$$

Generalizamos agora a equação de Gauss $d\omega^1_2 = -K\,\omega^1 \wedge \omega^2$.

As segundas equações de estrutura podem ser reescritas como

$$d\omega^j_i = \sum_{k=1}^{n-1} \omega^k_i \wedge \omega^j_k + \omega^n_i \wedge \omega^j_n , \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant n-1 .$$

Se S fosse o espaço euclidiano E^{n-1}, teríamos

$d\omega^j_i = \sum_{k=1}^{n-1} \omega^k_i \wedge \omega^j_k$ e portanto o "termo de correção"

$\omega_i^n \wedge \omega_n^j$ mede o quanto S "deixa de ser euclidiana" (de fato, vimos que $\omega_n^i = 0$, $i=1,\dots n-1$ é equivalente ao fato de S ser um hiperplano).

Sejam então as formas

$\Omega_{i,j} = \omega_i^n \wedge \omega_n^j = d\omega_i^j - \sum_{k=1}^{n-1} \omega_i^k \wedge \omega_k^j$. São as <u>formas de curvatura</u> da hipersuperfície.

Vejamos a expressão de $\Omega_{i,j}$ em termos das formas ω^i:

$$\Omega_{i,j} = \omega_i^n \wedge \omega_n^j = -\omega_n^i \wedge \omega_n^j = -\left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k^i \omega^k \wedge \sum_{s=1}^{n-1} a_s^j \omega^s\right) =$$

$$= -\sum_{k<s} (a_k^i a_s^j - a_s^i a_k^j)\, \omega^k \wedge \omega^s .$$

Temos então $\Omega_{i,j} = -\sum_{k<s} C_{k,s}^{i,j} \omega^k \wedge \omega^s$, $C_{k,s}^{i,j} = -C_{s,k}^{i,j}$ onde

$C_{k,s}^{i,j} = a_k^i a_s^j - a_s^i a_k^j$ são <u>os menores de ordem dois</u> da matriz (a_j^i).

Por outro lado, da expressão de $\Omega_{i,j}$ em termos das formas ω_j^i, $1 \leq i,j \leq n-1$, segue que, se $\phi: S \longrightarrow \bar{S}$ é uma isometria, sua extensão $\tilde{\phi}$ aos fibrados de Darboux preserva as formas de curvatura.

Como $\tilde{\phi}$ preserva ω^i, ω_j^i, $\Omega_{i,j}$, $1 \leq i,j \leq n-1$, preserva também os coeficientes $C_{k,s}^{i,j}$, ou seja

$$\bar{C}_{k,s}^{i,j} \circ \tilde{\phi} = C_{k,s}^{i,j}$$

Então os menores da matriz (a^i_j), de ordem 2, só dependem da 1º forma fundamental. Em particular, os produtos $k_i\, k_j$ de dois autovalores de B são preservados por isometrias. Daí segue que, se n-1 é par, a curvatura de Gauss-Kronecker

$K= k_1 \ldots k_{n-1} = (k_1\, k_2)\ (k_3\, k_4) \ldots (k_{n-2}, k_{n-1})$ é preservada por isometrias.

Temos então a versão do Teorema de Gauss para hipersuperfícies de E^n:

TEOREMA:

Uma isometria entre duas hipersuperfícies de dimensão par de um espaço euclidiano preserva a curvatura de Gauss-Kronecker.

IV.2. AS ISOMETRIAS E A SEGUNDA FORMA QUADRÁTICA

Vimos que a extensão aos fibrados de Darboux de uma isometria preserva as formas de conexão (ω^i_j), $i,j=1,\ldots,n-1$. Não é, em geral, verdade que ela preserve também as formas ω^i_n, que dependem do vetor normal e portanto da maneira como S está imersa em E. Existe, por exemplo, uma isometria entre o aberto $]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ do plano e a superfície cilindrica obtida pelo produto $S^1 - \{1\} \times \mathbb{R}$. (Basta tomar $\phi:(\theta,x) \longmapsto (e^{i\theta},x)$). No entanto, ao considerarmos estas duas superfícies como imersas em E^3, temos que ω^1_3 e ω^2_3 são nulas no fibrado de referenciais do plano, o que não é verdade para as formas correspondentes sobre o fibrado da superfície cilíndrica.

Exigir que $\phi : S \longrightarrow \bar{S}$ preserve também as formas ω^i_n, $i=1,\ldots,n-1$, acarreta que ϕ preserva também a segunda forma quadrática. De fato, se $\delta\tilde{\phi}(\bar{\omega}^i_n) = \omega^i_n$, de

$$\omega^i_n = \sum_{j=1}^{n-1} a^i_j \, \omega^j \quad , \quad \bar{\omega}^i_n = \sum_{j=1}^{n-1} \bar{a}^i_j \, \bar{\omega}^j$$ segue que

$$\delta\tilde{\phi}(\bar{\omega}^i_n) = \sum_{j=1}^{n-1} \bar{a}^i_j \circ \phi \;\; \delta\tilde{\phi}(\bar{\omega}^j) = \omega^i_n = \sum_{j=1}^{n-1} a^i_j \, \omega^j \quad .$$

Como $\tilde{\phi}$ preserva as formas ω^i, segue que

$$\bar{a}^i_j \circ \phi = a^i_j \qquad \text{pois } \omega^i \text{ são formas L.I.}$$

Como $II^* = \sum a^i_j \, \omega^i \, \omega^j$ segue que $\delta\tilde{\phi}(\overline{II}^*) = II^*$. Finalmente, como $\tilde{\phi}$ preserva as fibras de $\mathbb{D}_S$, segue $\delta\phi(\overline{II}) = II$

$\blacksquare$

Veremos agora que esta nova condição acarreta que ϕ é a restrição a S de uma isometria de todo o espaço E.

V. O PRIMEIRO TEOREMA FUNDAMENTAL

Provaremos que duas hipersuperfícies orientáveis de E são congruentes se, e somente se, possuem as mesmas formas quadráticas primeira e segunda.

Para tanto identificaremos o fibrado H dos referenciais ortonormais de E com o grupo $GM(E)$ dos movimentos rígidos de E. Os fibrados $\mathbb{D}_S$ e $\mathbb{D}_{\overline{S}}$ serão então duas subvariedades deste grupo e a questão será determinar uma condição para que duas tais variedades se deduzam uma da outra por translação por um elemento do grupo. Mais precisamente, S e $\overline{S}$ se deduzem uma da outra por uma isometria $\sigma \in GM(E)$ se, e somente se, $\mathbb{D}_{\overline{S}} = R_\sigma(\mathbb{D}_S)$. Um teorema sobre subvariedades de grupos de Lie determinará então a condição para que isto ocorra.

<u>*DEFINIÇÃO:*</u> Duas hipersuperfícies S e $\overline{S}$ de E se dizem <u>congruentes</u> quando existe $\sigma \in GM(E)$ tal que $\sigma(S) = \overline{S}$

Vimos (II 2)) que $GM(E)$ atua simplesmente transitivamente sobre o fibrado H, e que portanto $H \simeq GM(E)$. As formas ω^i, ω^i_j de H são então identificadas a uma base das formas de $GM(E)$ invariantes à direita.

Fixado $\sigma \in GM(E)$, temos $R_\sigma : H \longrightarrow H$ dado por $R_\sigma(p) = p\cdot\sigma$ este difeomorfismo preserva as fibras de H, ou seja, se p é um referencial sobre P, $p\cdot\sigma$ é um referencial sobre $\sigma(P)$.

PROPOSIÇÃO 1: S e $\overline{S}$ são congruentes por $\sigma \in GM(E)$ se, e somente se, $R\sigma\,(\mathbb{D}_S) = \mathbb{D}_{\overline{S}}$.

DEMONSTRAÇÃO: Se $\sigma(S) = \overline{S}$, como σ^* leva base ortonormal de E_p em base ortonormal de $E_{\sigma(p)}$ e preserva os planos tangentes de S e $\overline{S}$, $p\cdot\sigma \in \mathbb{D}_{\overline{S}}$ para todo $p \in \mathbb{D}_S$. Do mesmo modo, para $q \in \mathbb{D}_{\overline{S}}$, se $q = (Q, \vec{e}_1,\ldots\vec{e}_n)$, então

$$q = p.\sigma \quad \text{onde} \quad p= (\sigma^{-1}(Q),\ \sigma^{*-1}(\vec{e}_1),\ldots,\sigma^{*-1}(\vec{e}_n))$$

Por outro lado, é claro que $R_\sigma(\mathbb{D}_S) = \mathbb{D}_{\overline{S}}$ implica $\sigma(S)=\overline{S}$

■

V.1. UM TEOREMA SOBRE SUBVARIEDADES TRANSLADADAS DE UM GRUPO DE LIE

TEOREMA: Seja G um grupo de Lie de dimensão n e $\omega^1,\ldots\omega^n$ uma base das formas invariantes à direita de G. Sejam D e $\overline{D}$ duas subvariedades conexas de G, imersas, de mesma dimensão $m < n$.

Então existe $\sigma \in G$ tal que $R\sigma(D) = \overline{D}$ se, e somente se, existir um difeomorfismo $\phi : D \longrightarrow \overline{D}$ que preserve as formas ω^i, ou seja, tal que

$$\delta\phi(\omega^i|_{\overline{D}}) = \omega^i|_D$$

DEMONSTRAÇÃO:

- Esta condição é claramente necessária. De fato, se $R_\sigma(D) = \bar{D}$, basta definir $\phi: D \longrightarrow \bar{D}$ como sendo $R_\sigma\big|_D$.

Então ϕ é um difeomorfismo e, se $i: D \longrightarrow G$, $\bar{i}: \bar{D} \longrightarrow G$ são as inclusões, temos

$$\bar{i} \circ \phi = R_\sigma \circ i \qquad \text{pois} \qquad \phi(x) = x\sigma \quad \forall \; x \in D.$$

Como as formas ω^i são invariantes à direita, temos

$$\delta\phi(\omega^i\big|_{\bar{D}}) = \delta\phi(\delta\bar{i}(\omega^i)) = \delta(\bar{i} \circ \phi)(\omega^i) = \delta(R\sigma \circ i)(\omega^i) =$$

$$= \delta i(\delta R\sigma(\omega^i)) = \delta i(\omega^i) = \omega^i\big|_D \quad .$$

- A demonstração da suficiência é uma aplicação do Teorema de Frobenius em sua versão para formas.

Consideremos a variedade produto $G \times G$ e as duas projeções $\pi_1, \pi_2: G\times G \longrightarrow G$. Levantando pelas π_1 e π_2 as formas ω^i para o produto $G\times G$, temos $\Omega_1^i = \delta\pi_1\omega^i$, $\Omega_2^i = \delta\pi_2\omega^i$, $i=1,\ldots,n$, formas de $G\times G$. Consideremos então as formas $\Gamma^i = \Omega_2^i - \Omega_1^i$, $i=1,\ldots,n$. São n formas diferenciais linearmente independentes sobre $G\times G$.

Consideremos então o sistema diferencial dado por $\Gamma^i = 0$, $i=1,\ldots,n$.

A) O gráfico de uma translação à direita $R_\sigma: G \longrightarrow G$ é uma variedade integral do sistema $(\Gamma^i=0)$.

De fato, seja $M_\sigma = \left\{ (g, g\sigma) \,\middle|\, g \in G \right\} \subset G\times G$ o gráfico de R_σ, para σ fixado em G .

M_σ é uma subvariedade de $G\times G$.

Seja $i: M_\sigma \longrightarrow G\times G$ a inclusão;

devemos provar que $\Gamma^i\big|_{M\sigma} = \delta i(\Gamma^i) = 0$, ou seja, que Γ^i é nula quando calculada em vetores tangentes a M_σ .

Seja então $x = (g, g\sigma) \in M_\sigma$ e $\tau \in M_{\sigma_x}$; então

$$\delta i(\Gamma^i)(\tau) = \delta i(\Omega_2^i(\tau) - \Omega_1^i(\tau)) = \Omega_2^i(d\,i(\tau)) - \Omega_1^i(di(\tau)) =$$

$$= \delta\pi_2\omega^i(d\,i(\tau)) - \delta\pi_1\omega^i(d\,i(\tau)) =$$

$$= \omega^i(d\pi_2(di(\tau))) - \omega^i(d\pi_1(di(\tau))) .$$

Mas $\pi_1(x) = g$, $\pi_2(x) = g\cdot\sigma$ e portanto $\pi_2\big|_{M_\sigma} = R_\sigma \circ \pi_1\big|_{M_\sigma}$

e portanto

$$\delta i(\Gamma^i)(\tau) = \omega^i(dR_\sigma \circ d\pi_1(di(\tau))) - \omega^i(d\pi_1(di(\tau))) =$$

$$= \delta R_\sigma\omega^i(d\pi_1(di(\tau))) - \omega^i(d\pi_1(di(\tau))) = 0$$

pois as formas ω^i são invariantes.

Portanto, por todo ponto, passa uma variedade integral de dimensão máxima, e $(\Gamma^i=0)$ é então involutivo.

B) Reciprocamente, uma variedade integral conexa de $(\Gamma^i=0)$

é parte do gráfico de uma translação R_σ .

Seja, de fato, uma variedade integral conexa S, e $(x,y)\varepsilon S$.

Seja $\sigma \varepsilon G$ tal que $y= x\cdot\sigma$, e seja M_σ o gráfico de R_σ. Então $(x,y)\varepsilon S\cap M_\sigma$. Como duas variedades integrais coincidem num aberto em torno de (x,y), podemos, em cada ponto s de S, determinar um aberto U_s que contém s e um elemento $\sigma \varepsilon G$ com $U_s\subset M_\sigma$. Os abertos U_s cobrem S, conexa. Então a aplicação $S \longrightarrow G$ dada por $(x,y) \longmapsto \sigma$ tal que $y=x\sigma$ é localmente constante. Como S é conexa, σ é constante e portanto $S\subset M_\sigma$.

C) Finalmente, seja $\phi:D \longrightarrow \overline{D}$ com $\omega^i\big|_M = \delta\phi(\omega^i\big|_{\overline{D}})$ e seja $S\subset G\times G$ o gráfico de ϕ . $S\subset G\times G$ é uma subvariedade conexa, pois D e $\overline{D}$ são conexas, de mesma dimensão $m < n$.

Como $\delta\phi(\delta\bar{\imath}\omega^i)= \delta i\omega^i$, e como $\pi_2\big|_S = \phi\circ\pi_1\big|_S$, temos $\Gamma^i = \delta\pi_2\omega^i - \delta\pi_1\omega^i = 0$ quando restrita a S. Portanto S está contida numa variedade integral de $(\Gamma^i=0)$ e portanto no gráfico de uma translação: $S\subset M_\sigma$; então $\phi(x)=x.\sigma$, para todo $x \varepsilon D$ e portanto

$$\overline{D} = R\sigma(D), \text{ como queríamos}$$

∎

V.2. CONGRUÊNCIA DE DUAS HIPERSUPERFÍCIES

Podemos agora enunciar o

1º TEOREMA FUNDAMENTAL: Sejam S, $\overline{S}$ duas hipersuperfícies conexas e orientadas de E. Então S e $\overline{S}$ são congruentes se, e somente se, existir uma aplicação diferenciável $\phi: S \longrightarrow \overline{S}$ que preserva as duas formas quadráticas.

DEMONSTRAÇÃO: A necessidade da condição segue simplesmente fazendo $\phi = \sigma\big|_S$, onde $\sigma \in GM(E)$ é tal que $\sigma(S) = \overline{S}$.

De fato $d\sigma = \sigma^*$ preserva o produto interno de E, os planos tangentes a S e $\overline{S}$ e portanto o vetor normal; então ϕ preserva $I = \langle dX, dX\rangle$ e $II = -\langle de_n, dX\rangle$.

Seja agora $\phi: S \longrightarrow \overline{S}$, diferenciável, com $\delta\phi(\overline{I}) = I$, $\delta\phi(\overline{II}) = II$.

Seja (ver IV) a extensão $\tilde{\phi}$ de ϕ aos fibrados $\mathbb{D}_S$ e $\mathbb{D}_{\overline{S}}$.

Sabemos que $\tilde{\phi}$ preserva I^* e portanto as formas ω^i, ω^i_j, $1 \leqslant i,j \leqslant n-1$.

Como $\tilde{\phi}$ também preserva II^* (de fato, de $\delta\phi(\overline{II}) = II$ segue $\delta\tilde{\phi}(\overline{II}^*) = II^*$ pois $II^* = \delta\pi(II)$ e $\overline{\pi} \circ \tilde{\phi} = \phi \circ \pi$), veremos agora que ela preserva as formas ω^i_n, $i=1,\dots,n-1$.

Temos $II^* = -\sum a^i_j\, \omega^i\, \omega^j$ e $\overline{II}^* = -\sum \overline{a}^i_j\, \overline{\omega}^i\, \overline{\omega}^j$.

Se B e $\overline{B}$ são as formas bilineares $B(\tau_1,\tau_2) = -\langle de_n(\tau_1), dX(\tau_2)\rangle$ e $\overline{B}(\mu_1,\mu_2) = -\langle d\overline{e}_n(\mu_1), dX(\mu_2)\rangle$, como B e $\overline{B}$ são as formas bilineares simétricas obtidas de II^* e $\overline{II}^*$ por polarização, temos $\delta\tilde{\phi}(\overline{B}) = B$. Como $\delta\tilde{\phi}(\overline{\omega}^i) = \omega^i$, segue que $\overline{a}^i_j \circ \tilde{\phi} = a^i_j$ (a^i_j são coeficientes de B na base de $\mathbb{D}_{S_p}$ dual de ω^i, ω^i_j, $1 \leqslant i,j \leqslant n-1$ e $\overline{a}^i_j$ coeficientes de $\overline{B}$ na base de $\mathbb{D}_{S_{\tilde{\phi}(p)}}$ dual de $\overline{\omega}^i$, $\overline{\omega}^i_j$; então $d\tilde{\phi}$ transforma uma destas bases na outra, a^i_j sendo B calculada em pares de vetores desta base, segue o resultado)

Como, finalmente, temos

$$\omega^i_n = \sum a^i_j\, \omega^j \qquad , \qquad \overline{\omega}^i_n = \sum \overline{a}^i_j\, \overline{\omega}^j$$

Temos $\delta\tilde{\phi}(\overline{\omega}^i_n) = \delta\tilde{\phi}(\sum \overline{a}^i_j\, \overline{\omega}^j) = \sum \overline{a}^i_j \circ \tilde{\phi}(\delta\phi\overline{\omega}^j) = \sum a^i_j\, \omega^j = \omega^i_n$.

Portanto

$\tilde{\phi}$ preserva ω^i, $i \leqslant n-1$, e também ω^n pois esta é nula.

$\tilde{\phi}$ preserva ω^i_j, $1 \leqslant i,j \leqslant n$.

então $\delta\tilde{\phi}(\omega^i|_{\mathbb{D}_{\overline{S}}}) = \omega^i|_{\mathbb{D}_S}$, $\delta\tilde{\phi}(\omega^i_j|_{\mathbb{D}_{\overline{S}}}) = \omega^i_j|_{\mathbb{D}_S}$, e sabemos que ω^i, ω^i_j , $1 \leqslant i,j \leqslant n$ é uma base das formas invariantes de $GM(E)$. Considerando $\mathbb{D}_S$ e $\mathbb{D}_{\overline{S}}$ como subvariedades deste grupo, aplicamos agora o Teorema anterior. ?

Para tanto, seja D_1 a componente conexa de $\mathbb{D}_{\overline{S}}$

que contém um elemento dado p, e $\bar{D}_1$ a componente conexa de $\mathbb{D}_{\bar{S}}$ que contenha $\tilde{\phi}(p)$. Chamaremos de D_2 e $\bar{D}_2$ respectivamente as outras componentes conexas.

Temos então D_1 e $\bar{D}_1$ duas subvariedades conexas de mesma dimensão de $GM(E)$, e $\tilde{\phi}: D_1 \longrightarrow \bar{D}_1$ diferenciável, e preservando as restrições a D_1 e $\bar{D}_1$ das formas ω^i, ω^i_j. Segue que existe $\sigma \in GM(E)$ com $\bar{D}_1 = \mathbb{R}\sigma(D_1)$.

É claro que $\bar{D}_2 = \mathbb{R}\sigma(D_2)$. Seja de fato $\rho \in O(n-1,\mathbb{R})$ com determinante -1. D_2 é a componente conexa de $\mathbb{D}_S$ que contém $p.\rho$, e $\bar{D}_2$ a componente conexa de $\mathbb{D}_{\bar{S}}$ que contém $\tilde{\phi}(p.\rho) = (p.\rho).\sigma$.

Existe $\bar{\sigma} \in GM(E)$ tal que $\bar{D}_2 = R_{\bar{\sigma}}(D_2)$, e como $\tilde{\phi}(p.\rho) = (p.\rho).\sigma$, segue que $\bar{\sigma} = \sigma$.

Temos então $\mathbb{D}_{\bar{S}} = R_\sigma(\mathbb{D}_S)$, $\sigma \in GM(E)$. A primeira proposição do presente parágrafo permite então concluir que $\bar{S} = \sigma(S)$

■

VI. O SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL

VI.1. AS FORMAS DE CONEXÃO NUMA VARIEDADE RIEMANNIANA

Estudamos até aqui hipersuperfícies de um espaço Euclidiano. Investigaremos agora como uma variedade Riemanniana qualquer, de dimensão n-1, pode ser imersa, de forma isométrica, no espaço Euclidiano E^n, sendo portanto "representada" como hipersuperfície deste espaço. Desta vez nosso resultado será, em geral, de caráter apenas local. Por outro lado, como novamente aplicaremos o método do Referencial Móvel, e como as formas de conexão não podem mais ser herdadas, pela variedade, das que já estão definidas no "espaço ambiente", teremos que construir, no fibrado dos referenciais, uma conexão diretamente a partir da métrica da variedade.

O objetivo é munir uma variedade Riemanniana M^{n-1} de um firbado de Darboux, definir neste duas formas quadráticas, e investigar condições sobre estas formas para que M^{n-1} possa ser imersa isometricamente em E^n. Isto será possível se as formas quadráticas verificarem equações semelhantes às que já estudamos para hipersuperfícies.

Seja então M uma variedade Riemanniana de dimensão n-1; denotaremos por $<\mu,\tau>_p$ o produto interno definido em M_p pela métrica de M, omitindo o índice p quando possível.

Denotaremos por $\mathbb{D}_M$ o conjunto $\{(P,\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_{n-1})$ $|P \in M, \vec{e}_i \in M_p, <\vec{e}_i, \vec{e}_j>_p = \delta_{ij}\}$ dos referenciais ortonormais de M, e por π a projeção : $\mathbb{D}_M \longrightarrow M$ dada por

$$\pi(P,\vec{e}_1,\ldots\vec{e}_{n-1}) = P \quad .$$

Então $(\mathbb{D}_M, M, O(n-1,\mathbb{R}), \pi)$ é um E.F.P.D de base M, grupo estrutural $O(n-1, \mathbb{R})$ e projeção π. A demonstração deste fato é inteiramente análoga à que foi feita para o fibrado de Darboux de uma hipersuperfície de E^n.

Para definir as formas ω^i do fibrado $\mathbb{D}_M$ colocamos, para $\tau \in \mathbb{D}_{M_p}$, $p = (P,\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$, $d\pi(\tau) = \sum_{i=1}^{n-1} \omega^i(\tau)\vec{e}_i$,

ou seja, $\omega^i_p(\tau) = \langle d\pi(\tau),\vec{e}_i\rangle_p$, $i=1,\ldots,n-1$.

Pode-se então escrever

$$d\pi = \sum_{i=1}^{n-1} \omega^i e_i$$

Como $\mathbb{D}_M$ é um fibrado principal, π é regular. Do fato de $d\pi$ ser sobre, segue que as formas ω^i são linearmente independentes.

<u>*PROPOSIÇÃO*</u> *(Levi-Civita)*

Estão definidas em $\mathbb{D}_M$ formas diferenciais ω^i_j, $1 \leqslant i,j \leqslant n-1$, únicas, satisfazendo às equações de estrutura

$$\omega^i_j = -\omega^j_i \qquad \text{e} \qquad d\omega^i = \sum_{j=1}^{n-1} \omega^j \wedge \omega^i_j \ , \quad i=1,\ldots n-1 \ .$$

<u>*DEMONSTRAÇÃO:*</u> Construiremos as formas ω^i_j primeiro localmente.

Seja $P \in M$. Temos um aberto $U \subset M$ contendo P e no qual está definida uma seção $\sigma : U \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ com $\pi \circ \sigma = 1_u$.

Dar esta seção corresponde a definir em U n-1 campos de vetores E_i tais que, em cada ponto Q de U, $E_1(Q)$, $\ldots E_{n-1}(Q)$ é uma base ortonormal de M_Q. Basta fazer $E_i(Q) = \vec{e}_i$, se $\sigma(Q) = (Q, \vec{e}_1, \ldots \vec{e}_i, \ldots \vec{e}_{n-1})$.

Sejam $\theta_1, \theta_2, \ldots \theta_{n-1}$ as formas diferenciais definidas em U tais que para cada $Q \in U$, $(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1})$ forma uma base de M_Q^* dual de $(E_1(Q), \ldots E_{n-1}(Q))$. (isto é, $\theta_i * (\tau) = \langle \tau, E_i(\theta) \rangle_Q$, $\forall\, \tau \in M_Q$).

Demonstraremos então a existência de formas θ^i_j definidas em U e satisfazendo

$$(1) \quad \theta^i_j = -\theta^i_j \qquad \text{e} \qquad d\theta^i = \sum_{j=1}^{n-1} \theta^j \wedge \theta^i_j \,, \quad i=1, \ldots n-1.$$

As formas $\theta^i \wedge \theta^j$ formam uma base das formas de grau 2 em U. Sejam $C^j_{k,i}$ as componentes de $d\theta^j$ nesta base, ou seja, as funções $C^j_{k,i} : U \longrightarrow \mathbb{R}$ tais que

$$d\theta^j = \sum_{k<i} C^j_{k,i}\, \theta^k \wedge \theta^i$$

queremos então determinar funções $\Gamma^k_{i,j} = -\Gamma^j_{i,k}$ tais que as formas $\theta^k_j = \sum_{i=1}^{n-1} \Gamma^k_{i,j}\, \theta^i$ satisfaçam às equações (1)

Uma condição necessária para a existência de tais funções será

$$d\theta^j = \sum_{k<i} C^j_{k,i}\ \theta^k \wedge \theta^i = \sum_{k=1}^{n-1} \theta^k \wedge \theta^j_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \theta^k \wedge \left(\sum_{i=1}^{n-1} \Gamma^j_{i,k}\ \theta^i\right) = \sum_{k<i} (\Gamma^j_{i,k} - \Gamma^j_{k,i})\theta^k \wedge \theta^i .$$

devemos então ter

$$C^j_{k,i} = \Gamma^j_{i,k} - \Gamma^j_{k,i}$$

$$C^k_{i,j} = \Gamma^k_{j,i} - \Gamma^k_{i,j}$$

$$C^i_{k,j} = \Gamma^i_{j,k} - \Gamma^i_{k,j}$$

devemos então impor que

(2) $\Gamma^j_{i,k} = \dfrac{1}{2}(C^j_{k,i} + C^k_{i,j} + C^i_{k,j})$, relação obtida somando membro a membro as tres equações acima.

Definindo então $\theta^k_j = \sum_{i=1}^{n-1} \Gamma^k_{i,j}\ \theta^i$, onde as funções $\Gamma^i_{k,j}$ são definidas por (2), obtemos formas θ^i_j, $1 \leqslant i,j \leqslant n-1$, que satisfazem às equações (1) (o que se verifica diretamente).

Estas formas são, por outro lado, únicas, em consequência do Lema de Cartan, pois verificam as equações (1).

Temos então definidas formas θ^i_j em cada aberto

U de M sobre a qual há uma seção σ de π.

Definimos agora as formas ω_j^i em $\pi^{-1}(U)$.

Temos $\sigma : U \longrightarrow \pi^{-1}(U)$. Consideremos as formas $\delta\sigma(\omega^i)$, definidas em U, Para todo $\mu \in M_Q$, $Q \in U$, temos

$\delta\sigma(\omega^i)(\mu) = \omega^i(d\sigma(\mu)) = \langle d\pi(d\sigma(\mu)), e_i\rangle_Q = \langle\mu, e_i\rangle_Q$ onde

$\sigma(Q) = (Q, e_1, \ldots e_n)$. Portanto

$$\langle\mu, e_i\rangle_Q = \langle\mu, E_i(Q)\rangle_Q = \theta^i(\mu), \quad \text{ou seja,}$$

$$\delta\sigma(\omega^i) = \theta^i$$

Definamos então ω_j^i em $\pi^{-1}(U)$ por $\omega_j^i = \delta\pi(\theta_j^i)$; de $\pi\circ\sigma = 1$ segue imediatamente que $\theta_j^i = \delta\sigma(\omega_j^i)$, e da equação

$$d\theta^i = \sum \theta^j \wedge \theta_j^i \qquad \text{segue}$$

$$d(\delta\sigma\omega^i) = \sum \delta\sigma\omega^j \wedge \delta\sigma\omega_j^i \qquad \text{ou seja}$$

$$\delta\sigma(d\omega^i - \sum \omega^j \wedge \omega_j^i) = 0 \quad .$$

A forma $d\omega^i - \sum \omega^j \wedge \omega_j^i$ é portanto nula sobre todos os vetores da forma $d\sigma(\tau)$.

Seja agora v um vetor tangente a $\mathbb{D}_M$ no ponto $p \in \pi^{-1}(U)$. Existe (ver I, definição 1) uma seção $\sigma' : U \longrightarrow \pi^{-1}(U)$, com $\sigma'(\pi(p)) = p$, e que se deduz de σ por uma função $g : U \longrightarrow O(n-1, \mathbb{R})$. Os campos $E_1', \ldots E_{n-1}'$ em U que caracterizam σ' se deduzem dos campos $E_1, \ldots E_{n-1}$ por g. O vetor v se escreve como $v = d\sigma'(d\pi(v)) + w$, onde w é um vetor vertical.

A forma $d\omega^i - \sum \omega^j \wedge \omega_j^i$ se anula em $d\sigma'(d\pi(v))$. pois é nula sobre vetores da forma $d\sigma(\tau)$. Por outro lado, é claro que ela se anula sobre vetores verticais.

Então $d\omega^i - \sum \omega^j \wedge \omega_j^i$ se anula sobre qualquer par de vetores tangentes a $\pi^{-1}(U)$ e vale portanto a igualdade

$$d\omega^i = \sum \omega^j \wedge \omega_j^i \qquad \text{em} \quad \pi^{-1}(U).$$

Temos então em cada $\pi^{-1}(U)$ formas ω_j^i que verificam as equações $\omega_j^i = -\omega_i^j$ e $d\omega^i = \sum \omega^j \wedge \omega_j^i$. Os $\pi^{-1}(U)$ cobrem $\mathbb{D}_M$ e, como as formas satisfazendo (1) são únicas, as ω_j^i coincidem nas interseções $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(U')$. Portanto temos ω_j^i definidas em todo $\mathbb{D}_M$, e com $d\omega^i = \sum \omega^j \wedge \omega_j^i$, $\omega_j^i = -\omega_i^j$. A unicidade segue do Lema de Cartan. ∎

<u>*OBSERVAÇÃO:*</u> as formas ω_j^i , $1 \leq j,i \leq n-1$ são as formas da conexão de Levi-Civita associada à métrica $<,>$ que temos em M.

Definimos agora em M a primeira forma quadrática I por

$$I_p(\mu) = <\mu,\mu>_p \qquad \forall\, \mu \in M_p$$

Colocando $I^* = \delta\pi(I)$, temos

$$I^* = \sum_{i=1}^{n-1} (\omega^i)^2 \quad \text{pois, se} \quad \tau \in \mathbb{D}_{M_p}, \quad I^*(\tau) = I(d\pi(\tau)) =$$

$$\langle d\pi(\tau), d\pi(\tau)\rangle_{\pi(p)} = \langle \sum \omega^i(\tau)\, e_i, \sum \omega^i(\tau) e_i \rangle_{\pi(p)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} (\omega^i(\tau))^2 .$$

Para definir a segunda forma quadrática, agora não temos mais uma escolha única. Sejam a^i_j funções reais definidas em $\mathbb{D}_M$, com

$$a^i_j = a^j_i \text{ , e definimos a forma quadrática } II^* \text{ por}$$

$$II^*(\tau) = \sum_{i,j=1}^{n-1} a^i_j\, \omega^i\, \omega^j .$$

isto nos permite definir as formas $\omega^i_n = \sum_{j=1}^{n-1} a^i_j\, \omega^j$ em $\mathbb{D}_M$.

Para toda variedade Riemanniana M^{n-1}, temos então definidas

- ω^i, ω^i_j, $1 \leq i,j \leq n-1$, verificando a 1ª equação de estrutura.
- a 1ª forma quadrática $I^* = \sum(\omega^i)^2$
- e uma 2ª forma quadrática arbitrária $II^* = \sum a^i_j\, \omega^i\, \omega^j$, com formas $\omega^i_n = \sum_{j=1}^{n-1} a^i_j\, \omega^j$, que dependem da escolha da matriz (a^i_j).

Suponhamos que exista um difeomorfismo ϕ de M sobre uma hipersuperfície S de E^n com formas quadráticas $\overline{II}$ e $\overline{I}$, tal que $\delta\phi(\overline{I}) = I$; ϕ pode ser extendida a um difeomorfismo $\tilde{\phi}$ de $\mathbb{D}_M$ em $\mathbb{D}_S$ que preserva a forma quadrática I^*.

Então $\tilde{\phi}$ preserva as formas ω^i, ω^i_j ; $1 \leq i,j \leq n-1$ definidas em $\mathbb{D}_M$. A demonstração deste fato é inteiramente análoga à que foi feita para hipersuperfícies de E^n.

As formas $\overline{\omega}^i$, $\overline{\omega}^i_j$ de $\mathbb{D}_S$ verificam a segunda equação de estrutura $d\overline{\omega}^j_i = \sum_{k=1}^{n} \overline{\omega}^k_i \wedge \overline{\omega}^j_k$, $1 \leq i,j \leq n$, que podem ser reescritas, para $1 \leq i,j \leq n-1$, como

$$d\overline{\omega}^j_i = \sum_{k=1}^{n-1} \overline{\omega}^k_i \wedge \overline{\omega}^j_k + \overline{\Omega}_{i,j} \quad , \text{ onde } \overline{\Omega}_{i,j} = \overline{\omega}^n_i \wedge \overline{\omega}^j_n \text{ são as}$$

formas de curvatura de S .

Definindo em $\mathbb{D}_M$ as formas de curvatura de modo análogo, ou seja $\Omega_{i,j} = d\omega^j_i - \sum_{k=1}^{n-1} \omega^k_i \wedge \omega^j_k$, deveremos ter, necessàriamente $\delta\tilde{\phi}\overline{\Omega}_{i,j} = \Omega_{i,j}$, pois

$$\overline{\Omega}_{i,j} = d\overline{\omega}^j_i - \sum_{k=1}^{n-1} \omega^k_i \wedge \overline{\omega}^j_k \text{ , e } \tilde{\phi} \text{ preser-}$$

va ω^i_j , $1 \leq i,j \leq n-1$.

mas então teremos

$$\delta\tilde{\phi}(\overline{\omega}^n_i \wedge \overline{\omega}^j_n) = \delta\tilde{\phi}(\overline{\Omega}_{i,j}) = \Omega_{i,j} \quad \text{por um lado, e, por}$$

outro; $\delta\tilde{\phi}(d\overline{\omega}^j_i) = d\omega^j_i$.

Existe então neste caso uma maneira de definir as formas ω_n^i , $i=1,\ldots n-1$, ou, o que é equivalente, uma segunda forma quadrática II^*, de tal modo que a segunda equação de estrutura seja verificada, ou seja,

$$(1) \qquad \boxed{d\omega_i^j = \sum_{k=1}^{n} \omega_i^k \wedge \omega_k^j \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant n-1}$$

para tanto, basta que $\Omega_{i,j} = \omega_i^n \wedge \omega_n^j$, $1 \leqslant i,j \leqslant n-1$

pois neste caso

$$d\omega_i^j = \sum_{k=1}^{n-1} \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \Omega_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} \omega_i^k \wedge \omega_k^j \ ;$$

as formas ω_n^i são então construídas como segue:

temos $\bar{\Omega}_{i,j} = \sum_{k<s} \bar{C}_{k,s}^{i,j} \bar{\omega}^k \wedge \bar{\omega}^s$, $\bar{C}_{k,s}^{i,j} = (\bar{a}_k^i \bar{a}_s^j - \bar{a}_s^i \bar{a}_k^j)$

onde $(\bar{a}_j^i)$ é a matriz de $\bar{II}^*$ (ver IV.1)) .

Definimos então II^* por uma matriz (a_j^i) tal que

$$(\bar{a}_k^i \bar{a}_s^j - \bar{a}_s^i \bar{a}_k^j) \circ \tilde{\phi} = a_k^i a_s^j - a_s^i a_k^j \qquad \text{e}$$

temos então

$$\Omega_{i,j} = \delta\tilde{\phi}(\bar{\Omega}_{i,j}) = \omega_i^n \wedge \omega_n^j \ , \quad \text{se}$$

$\omega_n^i = \sum_{k=1}^{n-1} a_j^i \omega^j$, e estas formas verificam as equações de Gauss (1).

Se, além disto, $\tilde{\phi}$ preserva II^*, então temos

$\delta\tilde{\phi}(\overline{\omega}_n^i) = \omega_n^i$, ou seja, $\overline{a}_j^i \circ \phi = a_j^i$, e a segunda equação de estrutura vale também para as formas ω_n^i , $i=1,\dots,n-1$, ou seja

$$(2) \qquad \boxed{d\omega_n^i = \sum_{k=1}^{n} \omega_n^k \wedge \omega_k^i \quad , \quad i=1,\dots,n-1}$$

que são as equações de Codazzi.

Vimos então que, se M pode ser isométricamente imersa em E^n, existe, definida em M, uma segunda forma quadrática II^* que verifica as equações de Gauss-Codazzi (1) e (2).

Veremos a seguir que estas equações são "condições de integrabilidade" suficientes, pelo menos localmente, para que M possa ser imersa isométricamente no espaço euclidiano:

VI.2. A IMERSÃO ISOMÉTRICA DE UMA VARIEDADE RIEMANNIANA M^{n-1} NO ESPAÇO EUCLIDIANO E^n

TEOREMA (*Segundo Teorema fundamental das Superfícies*)

Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão n-1, com primeira forma fundamental I e uma segunda fundamental II tal que $II^* = \delta\pi(II)$ verifica as equações de Gauss-Codazzi (1) e (2).

Então, dado $p \in M$, existe um aberto U de M contendo P e um difeomorfismo ϕ de U sobre uma hipersuperfície S de E^n, tal que

$\delta\phi(\bar{I}) = I$, $\delta\phi(\bar{II}) = II$, onde $\bar{I}$ e $\bar{II}$ são as duas formas quadráticas de S.

Além disso, a hipersuperfície S é determinada únicamente, a menos de um movimento rígido de E^n.

DEMONSTRAÇÃO:

Novamente consideramos H como o grupo dos movimentos rígidos de E^n. Demonstraremos a possibilidade de imergir localmente o fibrado $\mathbb{D}_M$ em H, o que nos permitirá obter S.

Para isto precisaremos do seguinte Teorema sobre grupos de Lie:

TEOREMA:

Seja G um grupo de Lie de dimensão n, $\omega^1,\ldots,\omega^n$ uma base das formas de G invariantes à direita, e sejam C^i_{jk} as constantes de estrutura tais que

$$d\omega^i = \sum C^i_{j,k}\, \omega^j \wedge \omega^k .$$

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão $p \leq n$, $\theta^1,\ldots,\theta^n$ formas diferenciáveis sobre M que verifiquem as equações

$d\theta^i = \sum C^i_{jk}\, \theta^j \wedge \theta^k$, e tais que p delas sejam linearmente independentes.

Então, dado $x \in M$, $\sigma \in G$, existe um aberto U de M contendo x e $\phi : U \longrightarrow G$ uma aplicação diferenciável, injetora, de posto p, tal que

$$\phi(x) = \sigma \quad \text{e}$$

$$\delta\phi(\omega^i) = \theta^i \;, \quad i=1,\ldots,n.$$

DEMONSTRAÇÃO

Consideramos a variedade produto $M \times G$, $\pi_1 : M\times G \longrightarrow M$, $\pi_2 : M\times G \longrightarrow G$ as duas projeções.

Levantamos as formas θ^i, ω^i, respectivamente por π_1 e π_2, ou seja,

$$\overline{\theta}_i = \delta\pi_1 \, \theta^i \quad , \quad \overline{\omega}^i = \delta\pi_2 \omega^i \quad , \quad i=1,\ldots,n.$$

e definimos as n formas de $M\times G$ $\Gamma^i = \overline{\theta}^i - \overline{\omega}^i$, que são L.I.

Consideramos o sistema diferencial dado por $(\Gamma^i=0)$; é um sistema de dimensão $(n+p)-n = p$?

A - Este sistema é involutivo. De fato,

$$d\Gamma^i = d\overline{\theta}^i - d\overline{\omega}^i = d(\delta\pi_1\theta^i) - d(\delta\pi_2\omega^i) =$$

$$= \delta\pi_1(d\theta^i) - \delta\pi_2(d\omega^i) =$$

$$= \delta\pi_1(\sum C^i_{jk} \, \theta^j \wedge \theta^k) - \delta\pi_2(\; C^i_{jk} \, \omega^j \wedge \omega^k) =$$

$$= \sum C^i_{jk} \, (\overline{\theta}^j \wedge \overline{\theta}^k - \overline{\omega}^j \wedge \overline{\omega}^k).$$

Somando e subtraindo $\sum C^i_{jk}\ (\bar{\theta}^j \wedge \bar{\omega}^k)$ ao segundo membro, vem

$$d\Gamma^i = \sum C^i_{jk}\ (\bar{\theta}^j \wedge \bar{\theta}^k - \bar{\theta}^j \wedge \bar{\omega}^k - \bar{\omega}^j \wedge \bar{\omega}^k + \theta^j \wedge \bar{\omega}^k)$$

$$= \sum C^i_{jk}\ (\bar{\theta}^j \wedge (\bar{\theta}^k - \omega^k) + (\bar{\theta}^j - \bar{\omega}^k) \wedge \bar{\omega}^k)$$

$$= \sum C^i_{jk}\ (\bar{\theta}^j \wedge \Gamma^k - \bar{\omega}^k \wedge \Gamma^j)$$ que pertence ao ideal ?

gerado pelas Γ^j .

B - O sistema diferencial $(\Gamma^i=0)_{i=1,\ldots,n}$ é, portanto, completamente integrável. Seja, dado $(x,\sigma) \in M\times G$, uma variedade Integral S de dimensão p passando por (x,σ).

$\pi_1|_S$ é regular em (x,σ) ou seja $(d\pi_1|_S)_{(x,\sigma)}$ é injetora.

De fato, seja $\tau \in S_{(x,\sigma)}$, com $(d\pi_1|_S)_{(x,\sigma)}\ (\tau) = 0$

então

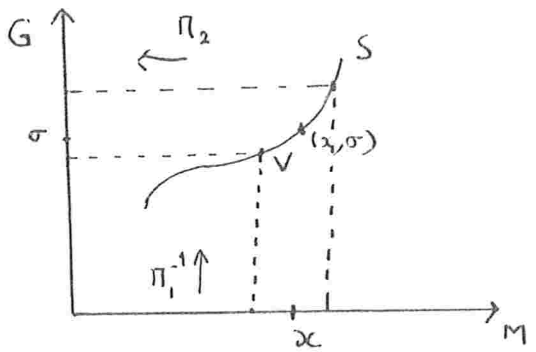
$$\bar{\theta}^i(\tau) = \delta\pi_1(\theta^i)(\tau) = \theta^i(d\pi_1(\tau)) = 0$$

Como S é variedade integral, $\Gamma^i_{(x,\sigma)}\ (\tau) = \bar{\theta}^i(\tau) - \bar{\omega}^i(\tau)=0$, e portanto $\bar{\omega}^i(\tau) = 0$, $i=1,\ldots,n$.

Mas então

$\bar{\omega}^i(\tau) = \omega^i(d\pi_2(\tau)) = 0$, $i=1,\ldots,n$. Como as formas ω^i são uma base das formas invariantes de G segue que $d\pi_2(\tau) = 0$ então $d\pi_1(\tau) = d\pi_2(\tau) = 0$ e portanto $\tau = 0$.

Do mesmo modo prova-se que $\pi_2|_S$ é regular em (x,σ) então, do fato de $(d\pi_1|_S)_{(x,\sigma)}$ e $(d\pi_2|_S)_{(x,\sigma)}$ serem injetoras, segue que existe uma vizinhança V de (x,σ) em S, sobre a qual π_1 e π_2 são injetoras. Consideremos então $\phi : \pi_1(V) \longrightarrow G$ dada por $\phi = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}|_{\pi(V)}$



ϕ é diferenciável e

1) $\phi(x) = \sigma$ 2) ϕ é injetora

3) ϕ tem posto p (a diferencial $d\pi_2 \circ d(\pi_1^{-1}|_{\pi(V)})$ é injetora)

e 4) $\delta\phi(\omega^i) = \delta(\pi_2 \circ \pi_1^{-1})\ \omega^i = \delta\pi_1^{-1}\ \delta\pi_2\ \omega^i =$

$$= \delta\pi_1^{-1}\ \overline{\omega}^i = \delta\pi_1^{-1}\ \overline{\theta}^i = \theta^i \quad \text{pois em } S \ \ \overline{\omega}^i = \overline{\theta}^i .$$

Portanto ϕ é a aplicação diferenciável procurada.

■

Podemos agora concluir a demonstração do segundo Teorema Fundamental.

Consideremos o fibrado de Darboux $\mathbb{D}_M$ da variedade M. Sua dimensão é $n-1 + \binom{n-1}{2}$. Nele temos definidas as formas ω^i, e as formas ω_j^i , $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$, que verificam

$$(1) \qquad d\omega^i = \sum_{j=1}^{n-1} \omega^j \wedge \omega_j^i \qquad i=1,\dots,n-1$$

e que são linearmente independentes. Definamos $\omega^n=0$

Temos também definida uma segunda forma quadrática II , tal que $\delta\pi(II) = II^*$ verifica as equações de integrabilidade. Isto é, se

$$II^* = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_j^i \, \omega^i \omega^j \quad , \text{ com } a_j^i = a_i^j \; ,$$ as formas

$$\omega_n^i = \sum_{j=1}^{n-1} a_j^i \, \omega^j$$ verificam:

$$(2) \qquad d\omega_i^j = \sum_{k=1}^{n} \omega_i^k \wedge \omega_k^j \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant n-1$$

e

$$(3) \qquad d\omega_n^i = \sum_{k=1}^{n} \omega_n^k \wedge \omega_k^i \qquad i=1,\dots,n-1$$

Temos então definidas $n+\binom{n}{2}$ formas ω^i, $i=1,\dots,n$, ω_j^i, $1 \leqslant i < j \leqslant n$ e as equações (1), (2), (3) podem ser reescritas

$$(4) \quad \begin{cases} d\omega^i = \sum_{j=1}^{n} \omega^j \wedge \omega_j^i \; , & i=1,\dots,n \quad \text{pois } \omega^n=0 \;\; ? \\[2ex] d\omega_j^i = \sum_{k=1}^{n} \omega_j^k \wedge \omega_k^i & 1 \leqslant i,j \leqslant n \end{cases}$$

Consideramos agora H, fibrado dos referenciais ortonormais de E^n, que temos identificado com o grupo $GM(E^n)$ dos movimentos rígidos. As formas de conexão de H serão denotadas $\bar{\omega}^i$, $\bar{\omega}^i_j$, e verificam as equações de Estrutura da geometria diferencial Euclidiana

$$(5)\quad \begin{cases} d\bar{\omega}^i = \sum\limits_{j=1}^{n} \bar{\omega}^j \wedge \bar{\omega}^i_j \\ \\ d\bar{\omega}^i_j \quad \sum\limits_{k=1}^{n} \bar{\omega}^k_j \wedge \bar{\omega}^i_k \end{cases}$$

que são as equações de estrutura do grupo $GM(E)$, referidas à base $\bar{\omega}^i$, $\bar{\omega}^i_j$ das formas invariantes à direita.

Estamos então nas condições do Teorema sobre grupos de Lie: Temos uma variedade $\mathbb{D}_M$ de dimensão $n-1+\binom{n-1}{2}$ sobre a qual estão definidas formas que verificam as mesmas equações de estrutura do grupo $GM(E)$, e das quais $n-1+\binom{n-1}{2}$ são linearmente independentes.

Pelo Teorema em questão, concluimos que, para todo $O \in \mathbb{D}_M$ e todo $\sigma \in GM(E)$, existe um aberto U de $\mathbb{D}_M$ contendo O e uma aplicação diferenciável $\tilde{\phi} : U \longrightarrow GM(E)$, injetora e regular,

$$\tilde{\phi}(O) = \sigma$$

$$\delta\tilde{\phi}(\bar{\omega}^i) = \omega^i \quad , \quad \delta\tilde{\phi}(\bar{\omega}^i_j) = \omega^i_j \quad .$$

Ou seja, γ é um difeomorfismo de U sobre uma subvariedade de $\mathbb{D}$ de GM(E) que preserva as formas definidas em $\mathbb{D}_M$.

Denotemos por $\pi : \mathbb{D}_M \longrightarrow M$ e por $\bar{\pi} : H \longrightarrow E^n$ respectivamente as projeções dos fibrados $\mathbb{D}_M$ e H.

Denotemos também por S o conjunto $\bar{\pi}(\mathbb{D})$

Dizemos que uma aplicação $\gamma : \mathbb{D}_M \longrightarrow H$ é <u>fibrada</u> se levar fibras de $\mathbb{D}_M$ em fibras de H, ou, mais precisamente, se existir uma aplicação $\phi : M \longrightarrow E^n$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}_M & \xrightarrow{\gamma} & H \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\bar{\pi}} \\ M & \xrightarrow[\phi]{} & E^n \end{array}$$

seja comutativo

Provamos agora que $\gamma : U \longrightarrow \mathbb{D}$ obtido acima é uma aplicação fibrada. Uma fibra de $\mathbb{D}_M$ é caracterizada pelo fato que, ao longo dela, as formas ω^i são nulas, e, de mesmo modo, uma fibra de H é caracterizada por $\varpi^i=0$ (ver I, observação 4).

Podemos então considerar as fibras de $\mathbb{D}_M$ como variedades integrais do sistema diferencial $(\omega^i=0)$, que é involutivo por causa das equações (4) $d\omega^i = -\sum \omega^i_j \wedge \omega^j$, e, portanto, completamente integrável.

Do mesmo modo as fibras de H são variedades integrais do sistema diferencial $(\varpi^i=0)$ que é completamente integrável em consequência das equações (5).

Como $\tilde{\phi}$ preserva as formas ω^i, uma subvariedade de $\mathbb{D}_\pi$ é variedade integral de $(\omega^i=0)$ se é somente se $\tilde{\phi}$ a leva numa variedade integral de $(\overline{\omega}^i=0)$, ou seja, $\tilde{\phi}$ leva fibras de $\mathbb{D}_\pi$ em fibras de $\mathcal{H}$.

Existe então uma função ϕ, injetora, de $\pi(U)$ em S, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\tilde{\phi}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{D} \arrow[d, "\overline{\pi}"] \\ \pi(U) \arrow[r, "\phi"'] & S \end{tikzcd}$$

é comutativo $(\phi = \overline{\pi}(\tilde{\phi}(\pi^{-1}(P)))$

ou seja, $\phi \circ \pi = \overline{\pi} \circ \tilde{\phi}$

$\pi(U)$ é um aberto de M contendo $P = \pi(0)$. Para concluir a nossa demonstração basta então provar que ϕ é uma aplicação diferenciável, regular, e que S é uma hiper-superfície de E^n cujo fibrado de Darboux é justamente $\mathbb{D}$.

ϕ será então um difeomorfismo de $\pi(U)$ sobre S, $\tilde{\phi}$ a extensão deste difeomorfismo, e teremos $\delta\tilde{\phi}(\overline{I}^*) = I^*$, $\delta\tilde{\phi}(\overline{II}^*) = II^*$, onde $\overline{I}$ e $\overline{II}$ são as formas quadráticas da hipersuperfície S.

De fato, ϕ é diferenciável pois todo x de $\pi(U)$ está contido numa vizinhança V sobre a qual está definida uma seção σ diferenciável.

Mas $\phi = \phi \circ \pi \circ \sigma = \overline{\pi} \circ \tilde{\phi} \circ \sigma$ em $\pi(U) \cap V$ e portanto ϕ é diferenciável pois $\tilde{\phi} \circ \sigma$ é.

Do mesmo modo ϕ^{-1} é diferenciável. Isto se verifica tomando uma seção $\overline{\sigma}$ sobre um aberto de S, o que per mite escrever

$$\phi^{-1} = \phi^{-1} \circ \bar{\pi} \circ \bar{\sigma} = \pi \circ \tilde{\phi}^{-1} \circ \bar{\sigma},$$ que é diferenciável

pois $\tilde{\phi}$ é um difeomorfismo.

Então ϕ é um difeomorfismo de um aberto de M em E^n e portanto

$\phi(\pi(U))$ é uma hipersuperfície S de E^n.

Finalmente, todo elemento de $\mathbb{D}$ pertence ao fibrado $\mathbb{D}_S$ da hipersuperfície S. De fato, $\bar{\omega}^n\big|_{\mathbb{D}}$ é nula pois $\delta\tilde{\phi}(\bar{\omega}^n) = \omega^n = 0$, e portanto

$$dX\big|_{\mathbb{D}} = \sum_{i=1}^{n-1} \omega^i e^i ,$$ o que significa que, para todo ponto $p \in \mathbb{D}$, $p = (P, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, os vetores $\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_{n-1}$ pertencem a S_p, ou seja, $p \in \mathbb{D}_S$. (de fato os valores de $dX\big|_{\mathbb{D}}$ pertencem a S_p); isto significa que ϕ é o difeomorfismo desejado de uma vizinhança de P em M sobre uma hipersuperfície S, cuja extensão $\tilde{\phi}$ aos fibrados $\mathbb{D}_M$ e $\mathbb{D}_S$ preserva as duas formas quadráticas.

A unicidade a menos de movimentos rígidos segue do 1º Teorema fundamental. Se ϕ, ϕ' são difeomorfismo de $U \subset M$ em superfícies $S, \bar{S}$, o difeomorfismo $\phi' \circ \phi^{-1} : S \longrightarrow \bar{S}$ preserva as formas quadráticas de S e $\bar{S}$ e portanto existe um movimento rígido que leva S sobre $\bar{S}$.

Notemos que a escolha de $\sigma \in GM(E)$ no início da demonstração determina o ponto $\phi(P) \in S$ e o espaço tangen te a S neste ponto. Portanto a unicidade a menos de movimento rígido pode ser reformulada como segue:

Dado $Q \varepsilon E^n$ e um subespaço V de E^n_Q de dimensão $n-1$, existe um único difeomorfismo ϕ nas condições exigidas tal que $\phi(p) = Q$ e $S_Q = V$

■

É importante observar que o resultado acima é geralmente apenas local.

Uma Superfície Riemanniana pode estar munida de segunda forma II satisfazendo às equações de Gauss e Codazzi, mesmo que não seja possível imergí-la isométricamente no espaço euclidiano como hipersuperfície.

Um exemplo é dado pelo "Flat Torus":

Consideremos o Toro T como espaço quociente de $\mathbb{R}^2$ pela relação de equivalência $p \sim q \iff q = T_{m,n}(p)$ onde $T_{m,n}$ indicam as translações de $\mathbb{R}^2$ por vetores de coordenadas inteiras m e n. Seja $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T$ a aplicação quociente.

T pode ser munido de uma estrutura de Variedade de dimensão 2:

Cobrimos $\mathbb{R}^2$ por abertos V_i tais que $V_i \cap T_{m,n}(V_i) = \emptyset$, $\forall m$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ (quadrados de lados paralelos aos eixos e de comprimento 1, por exemplo), ou seja, tais que $\pi|_{V_i}$ seja injetora, e munimos T do Atlas maximal contendo as cartas $(\pi(V_i), \theta_i)$ onde $\theta_i = (\pi|_{V_i})^{-1}$. Então $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T$ é um difeomorfismo local (é uma aplicação de recobrimento). As mu danças de cartas são Translações T_{mn} e portanto são C^{∞}.

T pode agora herdar do plano uma métrica Riemanniana, bastando fazer da aplicação π uma isometria local. Dado $P \in T$, definimos em T_p a métrica $<,>_p = \delta\theta_i(<,>)$ onde $<,>$ denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^2$. Esta definição independe da carta θ_i escolhida pois as mudanças de cartas são Translações de $\mathbb{R}^2$, ou seja, isometrias.

Notemos que então T é localmente isométrica ao plano, e que, portanto, sua curvatura Gaussiana é nula.

Munindo T de uma segunda forma quadrática II identicamente nula, temos verificadas trivialmente as equações de estrutura:

$$\omega^1, \omega^2, \omega_2^1 \text{ ,verificam } \begin{array}{l} d\omega^1 = \omega^1 \wedge \omega_2^1 \\ d\omega^2 = \omega^2 \wedge \omega_1^2 \end{array} , \quad d\omega_2^1 = 0$$

e as formas nulas $\omega_3^1 = \omega_3^2 = 0$ fazem com que

$$d\omega_j^i = \sum_{k=1}^{3} \omega_j^k \wedge \omega_k^i \quad , \quad 1 \leqslant i,j \leqslant 3 \ .$$

No entanto não podemos ter um difeomorfismo ϕ de T sobre uma superfície S de E^3 preservando a métrica de T. De fato S seria uma superfície compacta tendo portanto um ponto cuja curvatura Gaussiana é estritamente positiva, o que é impossível, já que T tem curvatura K constante e igual a zero, e que ϕ preserva este curvatura.

VI.3. UMA VERSÃO GLOBAL DO SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL

Podemos porém assegurar que o Segundo Teorema Fundamental se aplica globalmente à variedade Riemanniana M inteira, se introduzirmos a hipótese adicional de que M é simplesmente conexa.

Neste caso extenderemos o difeomorfismo ϕ local obtido em VII.1 à variedade M.

O resultado pode ser enunciado como segue

PROPOSIÇÃO: Seja M uma variedade Riemanniana Simplesmente conexa de dimensão $n-1$, sobre a qual esta definida uma segunda forma quadrática que satisfaz às equações de Gauss e Codazzi. Dados $O \in M$, $P \in E^n$ e um hiperplano V de E^n_p, existe uma única isometria ϕ de M sobre uma hipersuperfície S de E^n, com $\phi(O) = P$, $S_p = V$, e que preserva as formas quadráticas de M.

DEMONSTRAÇÃO: dados O, P, V como nas hipóteses, temos uma imersão Φ_o do aberto U_o de M sobre uma hipersuperfície S_o de E^n preservando as formas quadráticas e verificando $\phi_o(O) = P$, $S_{o_p} = V$.

Extenderemos agora a imersão ϕ_o a toda a variedade M. Seja então $Q \in M$, e seja $\gamma : [0,1] \longrightarrow M$ um arco ligando O a Q. Para todo ponto x de $\gamma([0,1])$ existe uma vizinhança U_x em M sobre a qual pode ser definida uma imersão em E^n satisfazendo as condições desejadas.

O compacto $\gamma([0,1])$ pode ser coberto por um conjunto finito $U_o, U_1, \ldots, U_k$ destas vizinhanças.

A unicidade, a menos de movimentos rígidos, da imersão ϕ garante que existe uma só imersão $\phi_1 : U_1 \longrightarrow E^n$ que coincide com ϕ_o em $U_o \cap U_1$. Podemos então indutivamente escolher em U_i uma imersão ϕ_i que extenda as anteriores, e assim obtemos $\phi : \bigcup_{i=0}^{k} U_i \longrightarrow M$ nas condições desejadas, e que é uma extensão de ϕ_o; obtemos assim o valor $\phi(Q)$.

Da simples conexão de M segue que $\phi(Q)$ não depende da escolha do arco γ ligando O a Q. Seja de fato $\theta : [0,1] \longrightarrow M$ um outro arco ligando O a Q, e $\overline{\phi}$ a extensão de ϕ_o ao longo de θ, construída como acima.

Seja $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow M$, uma homotopia entre γ e θ, isto é, Γ é contínua e

$$\left.\begin{aligned} \Gamma(0,s) &= \gamma(s) \\ \Gamma(1,s) &= \theta(s) \end{aligned}\right. \quad \forall\, s \in [0,1] \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} \Gamma(t,0) &= O \\ \Gamma(t,1) &= O \end{aligned}$$

Denotaremos $\gamma_t = [0,1] \longrightarrow M$ o caminho $\Gamma(t,s)$, $s \in [0,1]$. A extensão de ϕ_o ao longo de γ_t pode ser efetuada como acima, e chamaremos $\phi_t(\theta)$ o valor desta extensão em Q. $\phi_t(Q)$ é uma função de $[0,1]$ em E^n, e temos então

$$\phi(Q) = \phi_o(Q) \quad , \quad \overline{\phi}(Q) = \phi_1(Q) \; .$$

Seja $t \in [0,1]$, ϕ_{t_o} a extensão de ϕ_o ao longo da curva γ_{t_o}, e $V_o, V_1, \ldots, V_k$ os abertos considerados em $\gamma_t([0,1])$ para construir ϕ_{t_o}. Da unicidade das imer sões locais obtidas no segundo Teorema Fundamental, segue que, se $\alpha : [o,1] \longrightarrow M$ é um arco ligando O a Q com $\alpha([0,1]) \subset \bigcup_{i=0}^{k} V_i$, a extensão de ϕ_o ao longo de α coincide com ϕ_{t_o}.

Consideremos então o aberto A de $I = [0,1] \times [0,1]$ dado por $A = \Gamma^{-1}(\bigcup_{i=0}^{k} V_i \cap \Gamma(I))$. Este aberto contém $\{t_o\} \times [0,1]$, e como o intervalo $[0,1]$ é compacto, existe um aberto $]t_o - \varepsilon, t_o+\varepsilon[$ tal que $]t_o-\varepsilon, t_o+\varepsilon[X [0,1] \subset A$. Então, para todo $t \in]t_o-\varepsilon, t_o+\varepsilon[$, o arco γ_t tem imagem contida em $\bigcup_{i=0}^{k} V_i$, e portanto a extensão de ϕ_o ao longo de γ_t coincide com ϕ_{t_o}. Em particular, para todo $t \in]t_o-\varepsilon, t_o+\varepsilon[$, tem se $\phi_t(Q) = \phi_{t_o}(Q)$.

A aplicação $t \longrightarrow \phi_t(Q)$ é, portanto, localmente constante. Como $[0,1]$ é conexo, ela é constante, e portanto $\phi_o(Q) = \phi_1(Q)$, ou seja,

$$\phi(Q) = \overline{\phi}(Q) \quad .$$

Portanto, o valor $\phi(Q)$ independe do caminho γ escolhido. Temos então definida $\phi : M \longrightarrow E^n$, imersão isométrica que preserva a segunda forma fundamental, e que extende

ϕ_o. Segue da própria construção que ϕ é unicamente determinada por ϕ_o, ou seja, pela escolha de $\phi(0) = P$ e de $V=S_p$.

$\blacksquare$

CAPÍTULO II

O problema resolvido no capítulo anterior para o caso das hipersuperfícies do espaço Euclidiano tem a formulação geral seguinte: Dada uma variedade Riemanniana M^n e conhecido o seu grupo G de isometrias, determinar invariantes que caracterizem, a menos de um elemento de G, as subvariedades de M, de dimensão $n-1$.

No caso $M^n = E^n$, obtivemos estes invariantes (a saber, as duas formas quadráticas) identificando G com o fibrado dos referenciais ortonormais de E^n: pudemos então considerar o fibrado de uma hipersuperfície como uma subvariedade de G, e transferimos assim para o grupo G o problema de determinar estes invariantes.

Expomos a seguir, pelo mesmo método, a caracterização das curvas de uma superfície M^2 a menos de congruências, ou seja, a menos de isometrias de M^2.

Para que o método do referencial móvel se aplique da mesma maneira aqui, precisamos identificar o fibrado $\mathbb{D}_M$ dos referenciais de M ao grupo G das isometrias de M. Devemos então impor que G atue transitivamente sobre M e isto acarreta que M deve ter curvatura constante. ?

Damos então a seguir uma caracterização das curvas traçadas sobre uma superfície M, homogênea (isto é, sobre a qual o grupo G das isometrias atua transitivamente) e, portanto, de curvatura constante.

Nos parágrafos seguintes, damos um exemplo para M nos casos $K=0$, $K>0$ e $K<0$, descrevendo-lhe o grupo de iso metrias, e vemos como se aplicam a estes casos os resultados obtidos.

Finalmente mostramos que se M é homogênea e simplesmente conexa, então ela é isométrica a uma das três superfícies estudadas anteriormente, e que, portanto, os resultados obtidos se aplicam a M.

1. FORMAS DE CONEXÃO E EQUAÇÕES DE ESTRUTURA PARA M

Seja então M uma superfície Riemanniana Conexa, orientada e G o grupo de suas isometrias. Denotamos $\mathbb{D}_M$ o seu fibrado de Darboux. Vimos no capítulo I que $(\mathbb{D}_M, M, \pi, O(2, \mathbb{R}))$ é um fibrado principal diferenciável de dimensão 3 e grupo estrutural $O(2, \mathbb{R})$.

Definimos as formas diferenciais ω^1 e ω^2 em $\mathbb{D}_M$ por

$$d\pi\Big|_p (\tau) = \omega^1(\tau)\vec{e}_1 + \omega^2(\tau)\vec{e}_2 \quad \text{onde} \quad \tau \in \mathbb{D}_{M_p}, \quad p=(P,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$$

Isto equivale a colocar

$$\omega^1(\tau) = \langle d\pi(\tau), \vec{e}_1 \rangle$$
$$\omega^2(\tau) = \langle d\pi(\tau), \vec{e}_2 \rangle$$

já que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ é uma base ortonormal de M_p.

Sabemos ainda (Cap. I, VI 1) que existe uma, e uma só, forma ω_2^1 em $\mathbb{D}_M$, verificando

$$\begin{cases} d\omega^1 = \omega_2^1 \wedge \omega^2 \\ d\omega^2 = -\omega_2^1 \wedge \omega^1 \end{cases}$$

e que é a forma da conexão de Levi-Civitá associada à métrica M.

as três formas ω^1, ω^2, ω_2^1 são diferenciáveis e formam uma base de $\mathbb{D}^*_{M_p}$ em cada $p \in \mathbb{D}_M$. Supomos agora que a ação de G sobre $\mathbb{D}_M$, dada por

$(P,\vec{e}_1,\vec{e}_2).\sigma = (\sigma(P), d\sigma(\vec{e}_1), d\sigma(\vec{e}_2))$ é simplesmente transi tiva; e temos então fixado $p \in \mathbb{D}_M$, um difeomorfismo

$$\phi : G \longrightarrow \mathbb{D}_M$$

$$\phi : \sigma \longrightarrow p.\sigma$$

que permite identificar G e $\mathbb{D}_M$. Veremos agora que as tres formas $\omega^1, \omega^2, \omega_2^1$ se transferem por ϕ a uma base das formas invariantes de G:

PROPOSIÇÃO: as formas $\omega^1, \omega^2, \omega_2^1$ são invariantes sob a ação de G.

Dem Seja $\sigma \in G$ e $R_\sigma : \mathbb{D}_M \longrightarrow \mathbb{D}_M$ dada por $R_\sigma(p) = p\sigma$.

então $R_\sigma(P,\vec{e}_1,\vec{e}_2) = (\sigma(P), d\sigma(\vec{e}_1), d\sigma(\vec{e}_2))$ e portanto

$$\pi \circ R_\sigma = \sigma \circ \pi$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}_M \arrow[r, "R_\sigma"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathbb{D}_M \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "\sigma"] & M \end{tikzcd}$$

daí segue que

$$d\sigma\Big|_{\pi(p)} \circ d\pi\Big|_p = d\pi\Big|_{R_\sigma(p)} \circ dR_\sigma\Big|_p$$

para todo referencial $p \in \mathbb{D}_M$.

Seja então $p = (P, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ e calculemos os dois membros da igualdade acima num vetor τ tangente a $\mathbb{D}_M$ em p.

Temos

$$d\sigma\Big|_{\pi(p)} \circ d\pi\Big|_p(\tau) = d\pi\Big|_{p.\sigma} \circ dR_\sigma\Big|_p(\tau) \qquad \text{ou seja}$$

$$d\sigma\Big|_{\pi(p)} (\omega_p^1(\tau)\vec{e}_1 + \omega_p^2(\tau)\vec{e}_2) = \omega_{p.\sigma}^1(dR_\sigma\Big|_p(\tau))\ d\sigma(\vec{e}_1) +$$

$$+ \ \omega_{p\sigma}^2(dR_\sigma\Big|_p(\tau))\ d\sigma(\vec{e}_2)$$

donde vem

$$\omega_p^1(\tau)d\sigma(\vec{e}_1) + \omega_p^2(\tau)\ d\sigma(\vec{e}_2) = \omega_{p\sigma}^1(dR_\sigma\Big|_p(\tau))\ d\sigma(\vec{e}_1) +$$

$$+ \ \omega_{p\sigma}^2(dR_\sigma\Big|_p(\tau))\ d\sigma(\vec{e}_2)$$

como $d\sigma$ é um isomorfismo, $d\sigma(\vec{e}_1)$, $d\sigma(\vec{e}_2)$ é uma base de $M_{\sigma(p)}$ e portanto

$$\omega_p^i(\tau) = \omega_{p\sigma}^i\ (dR_\sigma\Big|_p(\tau)) \qquad \text{ou seja}$$

$$\delta R_\sigma(\omega^i) = \omega^i \qquad i=1,2,$$

provando que de fato ω^1 e ω^2 são invariantes por G.

A invariância de ω_2^1 segue da de ω^1 e ω^2 e das igualdades

$$\begin{cases} d\omega^1 = \omega_2^1 \wedge \omega^2 \\ d\omega^2 = -\omega_2^1 \wedge \omega^1 \end{cases}$$

$\blacksquare$

Portanto G e $\mathbb{D}_M$ se identificam e além disto $\delta\phi(\omega^1)$,

$\delta\phi(\omega^2)$ e $\delta\phi(\omega_2^1)$ formam uma base das formas invariantes de G. As equações de estrutura verificadas por ω^1, ω^2, ω_2^1, ou seja

$$\begin{aligned} d\omega^1 &= \omega_2^1 \wedge \omega^1 \\ d\omega^2 &= -\omega_2^1 \wedge \omega^2 \end{aligned}$$

e $d\omega_2^1 = -K\,\omega^1 \wedge \omega^2$ (onde K é a curvatura Gaussiana, constante, de M) são portanto as equações de Maurer-Cartan de G.

II. CURVAS SOBRE M - CURVAS EM $\mathbb{D}_M$

Seja C uma subvariedade conexa, de dimensão 1, de M. As cartas locais de C sendo curvas, consideramos simplesmente C sendo dada por uma função diferenciável, regular, $\gamma :]a,b[\longrightarrow M$, $]a,b[\subset \mathbb{R}$.

O fibrado de Darboux $\mathbb{D}_C$ é então

$$\left\{ (\gamma(t), \vec{e}_1, \vec{e}_2) \mid t \in]a,b[\ , \ \vec{e}_1 \in C_{\gamma(t)} \right\}$$ ou seja $\mathbb{D}_C \subset \mathbb{D}_M^+$

é descrito por

$$\mathbb{D}_C = \left\{ (\gamma(t), \vec{e}_1, \vec{e}_2) \ | t \in]a,b[, \ \vec{e}_1 = \pm \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \right\}$$

então $(\mathbb{D}_C , C, \pi)$ é um fibrado principal diferenciável, de grupo estrutural $O(1, \mathbb{R})$ ou seja $\{+1,-1\}$ e portanto de dimensão 1.

Suas duas componentes conexas correspondem às duas orientações possíveis da curva C. Consideramos, no que segue, apenas a componente conexa

$$\mathbb{D}_C^+ = \left\{ (\gamma(t), \vec{e}_1, \vec{e}_2) \mid t \in]a,b[, \ \vec{e}_1 = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \right\}$$

que corresponde à orientação "positiva" de C.

Então $\mathbb{D}_C^+$ pode ser considerada simplesmente como <u>uma curva traçada sobre a variedade de Darboux de M</u>, ou seja, como uma função $\mathbb{D}_\gamma :]a,b[\longrightarrow \mathbb{D}_M^+$

$$t \longrightarrow \left(\gamma(t), \frac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|}, \vec{e}_2(t)\right)$$ onde $\vec{e}_2(t)$ é o

único vetor que faz de $\mathbb{D}_\gamma(t)$ um referencial direto.

Determinamos agora as restrições a $\mathbb{D}_c^+$ das formas ω^1, ω^2, ω_2^1, ou seja

$$\omega^1\Big|_{\mathbb{D}_c^+} = \delta\mathbb{D}_\gamma(\omega^1), \quad \omega^2\Big|_{\mathbb{D}_c^+} = \delta\mathbb{D}_\gamma(\omega^2) \quad \omega_2^1\Big|_{\mathbb{D}_c^+} = \delta\mathbb{D}_\gamma(\omega_2^1)$$

Como $\mathbb{D}_c^+$ é uma variedade de dimensão 1, que consideramos como a curva $\mathbb{D}_\gamma(t)$, $t \in |a,b|$, o espaço ${\mathbb{D}_c^+}^*_p$ tem dimensão 1 $\forall\, p \in \mathbb{D}_c^+$ e portanto $\omega^1\Big|_{\mathbb{D}_c^+}$, $\omega^2\Big|_{\mathbb{D}_c^+}$, $\omega_2^1\Big|_{\mathbb{D}_c^+}$

são multiplas da forma dt.

Temos então três funções $a,b,c\colon]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ verificando

$$\omega^1\Big|_{\mathbb{D}_c^+} = a(t)\, dt$$

$$\omega^2\Big|_{\mathbb{D}_c^+} = b(t)\, dt$$

$$\omega_2^1\Big|_{\mathbb{D}_c^+} = c(t)\, dt$$

- a função $b(t)$ é identicamente nula, ou seja, $\omega^2\Big|_{\mathbb{D}_c^+} = 0$

De fato, temos $\pi \circ \mathbb{D}_\gamma = \gamma$ e portanto

$$d\pi(\dot{\mathbb{D}}_\gamma) = \dot{\gamma} = \|\dot{\gamma}\|.\vec{e}_1 \quad \text{pois} \quad \vec{e}_1 = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|}$$

portanto, $\forall\ \tau\ \varepsilon\ \mathbb{D}^+_{c_p}$, temos

$$d\pi\big|_{\mathbb{D}^+_c}(\tau) = \omega^1(\tau)\,\vec{e}_1 + \omega^2(\tau)\vec{e}_2$$ e

$$d\pi\big|_{\mathbb{D}^+_c}(\tau) \quad \text{é múltiplo de} \quad \vec{e}_1$$

Daí segue que $\omega^2(\tau) = 0$, e, portanto, $b(t) = 0$

– a função $a(t)$ é $\frac{ds}{dt}$, onde s é o comprimento de arco da curva γ: isto é, $\omega^1\big|_{\mathbb{D}^+_c} = ds$ se tomarmos s como parâmetro de γ.

De fato, de $\pi \circ \mathbb{D}_\gamma = \gamma$; temos, já que $b(t) = 0$

$$d\pi(\dot{\mathbb{D}}_\gamma) = \dot{\gamma} \quad \|\dot{\gamma}\|.\vec{e}_1 = \omega^1(\dot{\mathbb{D}}_\gamma)\,\vec{e}_1 .$$

donde segue $\omega^1(\dot{\mathbb{D}}_\gamma) = \|\gamma\|$

ou seja, para todo vetor τ tangente a $\mathbb{D}^+_c$ no ponto $p = \mathbb{D}_\gamma(t)$, temos $\tau = x\dot{\mathbb{D}}_\gamma$ e portanto

$$\omega^1(\tau) = x\omega^1(\dot{\mathbb{D}}_\gamma) = x\|\dot{\gamma}(t)\|$$

a forma $\omega^1\big|_{\mathbb{D}^+_c}$ é portanto em todo ponto dual do vetor tangente unitário à curva γ, e portanto

$$\omega^1 = ds \quad , \quad \text{como queríamos.}$$

Podemos considerar a curva γ como sendo parametizada por comprimento de arco, ou seja, $\|\gamma'(s)\| = 1 \ \forall s \in \,]a,b[$. Temos então

$$\omega^1\Big|_{\mathbb{D}_C^+} = a(s)\, ds \quad , \quad \omega^2\Big|_{\mathbb{D}_C^+} = b(s)\, ds \quad \text{e} \quad \omega_2^1\Big|_{\mathbb{D}_C^+} = c(s)\, ds.$$

Provamos acima que neste caso $a(s) = 1$, $b(s) = 0$.

\- Definimos $c(s)$ como sendo a <u>curvatura geodésica</u> de γ no ponto $\gamma(s)$, que denotaremos $kg(s)$. Esta função de s, que generaliza a noção de <u>curvatura</u> de uma curva plana , está bem definida se M e C são orientadas, e muda de sinal se mudarmos a orientação de M ou o sinal de ds.

Temos então

$$\omega^1\Big|_{\mathbb{D}_C^+} = ds \quad ; \quad \omega^2\Big|_{\mathbb{D}_C^+} = 0 \quad \text{e} \quad \omega_2^1\Big|_{\mathbb{D}_C^+} = kg(s)\, ds \ .$$

III. CARACTERIZAÇÃO DAS CURVAS DE M A MENOS DE CONGRUÊNCIAS

Temos que duas subvariedades de M, de dimensão 1, são congruentes se, e somente se, as restrições às duas subvariedades da formas ω^1, ω^2, ω_2^1 forem as mesmas.

Mais precisamente: sejam C e C' duas subvariedades de M de dimensão 1, e $f:C \longrightarrow C'$ uma aplicação diferenciável, que se extende a uma aplicação $\overline{f}:\mathbb{D}_C \longrightarrow \mathbb{D}_{C'}$.

Então C e C' são congruentes se, e somente se,

$$(1)\quad \begin{cases} \delta\overline{f}(\omega^1\big|_{\mathbb{D}^+_{C'}}) = \omega^1\big|_{\mathbb{D}^+_C} \quad ; \quad \delta\overline{f}(\omega^2\big|_{\mathbb{D}^+_{C'}}) = \omega^2\big|_{\mathbb{D}^+_C} \\ \\ \text{e} \quad \delta\overline{f}(\omega_2^1\big|_{\mathbb{D}^+_{C'}}) = \omega_2^1\big|_{\mathbb{D}^+_C} \end{cases}$$

Temos

$$\omega^1\big|_{\mathbb{D}^+_C} = ds \quad , \quad \omega^1\big|_{\mathbb{D}^+_{C'}} = ds'$$

$$\omega^2\big|_{\mathbb{D}^+_C} = \omega^2\big|_{\mathbb{D}^+_{C'}} = 0$$

$$\omega_2^1\big|_{\mathbb{D}^+_C} = kg(s)ds \quad \text{e} \quad \omega_2^1\big|_{\mathbb{D}^+_{C'}} = kg'(s')ds'$$

A condição necessária e suficiente (1) se exprime então

$$\delta f(ds') = ds$$

$$\text{e} \qquad k g' \circ f = kg$$

Ou seja, duas curvas em M são congruentes se, e somente se, elas têm o mesmo comprimento de arco e a mesma curvatura geodésica.

Podemos então enunciar:

PROPOSIÇÃO:

Sejam γ e $\gamma' :]a,b[\longrightarrow M$ duas curvas regulares, parametrizadas pelo comprimento de arco. Existe uma isometria $\sigma \in G$ com $\gamma' = \sigma \circ \gamma$ se, e somente se,

$$kg(s) = k g'(s) \quad \forall\, s \in \,]a,b[$$

∎

Da mesma maneira, o teorema da imersão isometrica vem aqui o seguinte enunciado

PROPOSIÇÃO: Seja $kg:]a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável. Então existe uma curva $\gamma:]a,b[\longrightarrow M$, parametrizada por comprimento de arco, cuja curvatura geodésica é dada pela função kg. Uma tal curva é única a menos de isometrias de M.

IV. EXEMPLOS

Veremos agora um exemplo da variedade M e de seu grupo G de isometrias para cada um dos casos $K=0$, $K>0$, $K<0$.

O caso $K=0$ se reduz a estudar a geometria do plano $\mathbb{R}^2$. O grupo G é então o grupo dos movimentos rígidos do plano. O fibrado $\mathbb{D}_R 2$ é trivial, já que o campo de referenciais $(P,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, $P \in \mathbb{R}^2$, $\vec{e}_1 = (1,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1)$ é uma seção. As formas ω^1, ω^2 são as "duais" de $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, e temos $\omega_2^1 = 0$.

A curvatura geodésica de uma curva é simplesmente a sua curvatura, ou seja, a função $k(s)$ tal que

$\dot{T} = k(s).N$ onde $T(s)$ é o vetor tangente unitário à curva e $N(s)$ o vetor tal que (T,N) é uma base ortonormal direta.

Os resultados estabelecidos acima se reduzem então ao teorema das curvas planas, que determina uma curva pela sua curvatura.

As curvas sobre as quais G atua transitivamente são as de curvatura constante, ou seja, as retas, que são as geodésicas, e os círculos do plano.

Para $K>0$, consideremos $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ como superfície do espalo euclidiano $\mathbb{R}^3$, isto é, com a métrica induzida de $\mathbb{R}^3$. Orientamos S^2 com o vetor normal unitário exterior, isto é, $\vec{e}_3(P) = (x,y,z)$ onde $P=(x,y,z)$.

As formas ω^1, ω^2, ω_2^1 em S^2 são as restrições a S^2 das formas ω^1, ω^2, ω_2^1 de $\mathbb{R}^3$.

Como o vetor $\vec{e}_3$ pode ser considerado como o vetor posição $\overline{X}(p)$, temos $d\vec{e}_3 = d\overline{X}$ e portanto as primeira e segunda formas quadráticas

$I_p = \langle d\overline{X}_p, d\overline{X}_p \rangle$, $II_p = -\langle de_3, d\overline{X}_p \rangle$ são opostas, isto é

$$I_p = - II_p$$

portanto todo difeomorfismo de S^2 que preserva a primeira forma, preserva, também, a segunda; ou seja, a esfera S^2 é rígida: toda isometria de S^2 é restrição a S^2 de uma congruência de $\mathbb{R}^3$ que deixa a esfera invariante.

Temos portanto que o grupo G das isometrias de S^2 é o grupo dos movimentos rígidos de E^3 que deixam a origem fixa, isto é,

$$\boxed{G = O(3, \mathbb{R})}$$

Por outro lado, a aplicação $d\vec{e}_3$ se reduz à identidade pois $d\vec{e}_3 = dX$. Segue que

$d\vec{e}_3 = \omega_3^1 \vec{e}_1 + \omega_3^2 \vec{e}_2 = dX = \omega^1 \vec{e}_1 + \omega^2 \vec{e}_2$ e portanto $\omega^1 = \omega_3^1$, $\omega^2 = \omega_3^2$

donde

$d\omega_2^1 = \omega_3^1 \wedge \omega_2^3 = - \omega^1 \wedge \omega^2$, o que significa que

$$\boxed{K \equiv 1}$$

A curvatura geodésica de uma curva $\gamma(s)$ traçada sobre a esfera tem a seguinte interpretação. Se $(\gamma(s), \vec{e}_1(s), \vec{e}_2(s), \vec{e}_3(s))$ é a curva $\mathbb{D}_\gamma(s)$ traçada em $\mathbb{D}_S 2$, $\vec{e}_1(s) = \dot{\gamma}(s)$

e

$$\dot{\vec{e}}_1(s) = \ddot{\gamma}(s) = kg(s)\ \vec{e}_2(s) + C\vec{e}_3(s), \qquad C \in \mathbb{R}$$

Ou seja, $kg(s)$ é a componente da aceleração de γ tangente à esfera.

Duas curvas são então congruentes se esta componente for a mesma para ambas.

As curvas de curvatura constante são os círculos traçados sobre a esfera, pois $O(3,\mathbb{R})$ atua, transitivamente sobre eles. Os círculos máximos são os de curvatura nula, ou seja, as geodésicas da esfera.

IV.1. O SEMI-PLANO DE POINCARÉ

Passamos agora a dar um modelo para a variedade M no caso $K<0$.

Consideramos o plano $\mathbb{R}^2$, e sobre ele definimos a métrica

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \quad \text{ou seja} \quad \langle\langle \vec{v}_p, \vec{w}_p \rangle\rangle = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{y^2} \quad \text{onde}$$

$\langle\ ,\ \rangle$ denota o produto interno usual e $p = (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Esta forma quadrática é definida e regular no semi-plano $y>0$

Definimos então o semi-plano de Poincaré como sendo o semi-plano $y>0$ munido da métrica riemanniana acima, e o denotamos por P.

Notemos que em cada ponto $p \in P$ temos

$$\ll \ , \ \gg = f(p) < \ , \ >$$

ou seja, a inclusão $i: P \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma transformação conforme se considerarmos P com a métrica ds^2 definida acima e $\mathbb{R}^2$ com a métrica usual. Em particular dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v} \in P_p$ são perpendiculares se, e somente se, o forem, considerados como vetores do plano $\mathbb{R}^2$.

Consideremos agora o fibrado $\mathbb{D}_p$ dos referenciais ortonormais de P. Sabemos que $(\mathbb{D}_p, P, \pi, O(2,\mathbb{R}))$ é um E.F.P.D.. Vejamos agora que este fibrado é trivial.

De fato, π admite uma seção global sobre P: os campos de vetores $\frac{\partial}{\partial x}$ e $\frac{\partial}{\partial y}$ são, em todo ponto, perpendiculares. Basta então considerarmos

$$\sigma: P \longrightarrow \mathbb{D}_p \quad \text{dada por}$$

$$p \longrightarrow \left(p,\ y \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_p ,\ y \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_p \right)$$

σ é uma seção, definida sobre todo P, da projeção π e portanto $\mathbb{D}_p$ é um fibrado trivial.

Isto vai nos permitir determinar as formas ω^1, ω^2, ω_2^1 sobre $\mathbb{D}_p$.

Sejam $a_1 = y \frac{\partial}{\partial x}$, $a_2 = y \frac{\partial}{\partial y}$ campos sobre P. Em cada ponto $p \in P$, temos $(p, a_1, a_2) \in \mathbb{D}_p$.

Sejam θ_1, θ_2 as formas de P duais de a_1, a_2 em todo ponto, então temos

$$1) \quad \left| \begin{array}{ll} \theta_1 = \dfrac{dx}{y} & \theta_2 = \dfrac{dy}{y} \quad \text{e portanto} \\[2ex] d\theta_1 = + \dfrac{1}{y^2}\, dx \wedge dy & \text{e} \quad d\theta_2 = 0 \end{array} \right.$$

Por outro lado $\theta_1 \wedge \theta_2 = \frac{1}{y^2} \, dx \wedge dy$ e portanto

$$d\theta_1 = \theta_1 \wedge \theta_2 \quad \text{e} \quad d\theta_2 = 0$$

Para determinar ω_2^1, notamos que, dado $\tau \in \mathbb{D}_{P_p}$,

$$d\pi(\tau) = \omega^1(\tau)\vec{e}_1 + \omega^2(\tau)\vec{e}_2 \quad \text{onde} \quad p=(\pi(p),\vec{e}_1,\vec{e}_2)$$

$$= \theta_1(d\pi(\tau))\,\vec{a}_1 + \theta_2(d\pi(\tau))\vec{a}_2$$

Seja $\alpha \in [0,2\pi[$ o ângulo entre $\vec{e}_1$ e $\vec{a}_1$, ou seja, o número real verificando

$$2)\quad \begin{cases} \omega^1(\tau) = \cos\alpha\,\theta_1(d\pi(\tau)) + \operatorname{sen}\alpha\;\theta_2(d\pi(\tau)) \\[2ex] \omega^2(\tau) = \operatorname{sen}\alpha\,\theta_1(d\pi(\tau)) + \cos\alpha\;\theta_2(d\pi(\tau)) \end{cases}$$

α é então uma função de $\mathbb{D}_p$ em $\mathbb{R}$.

denotando mais simplesmente as equações (2) escrevemos

$$2')\quad \left|\begin{array}{l} \omega^1 = \cos\alpha\,\delta\pi(\theta_1) + \operatorname{sen}\alpha\,\delta\pi(\theta_2) \\[2ex] \omega^2 = \operatorname{sen}\alpha\,\delta\pi(\theta_1) + \cos\alpha\,\delta\pi(\theta_2) \end{array}\right.$$

Verifica-se diretamente de (2') que $\omega^1 \wedge \omega^2 = \delta\pi(\theta_1) \wedge \delta\pi(\theta_2) = \delta\pi(\theta_1 \wedge \theta_2)$; procuramos agora ω_2^1 verificando

$$d\omega^1 = \omega_2^1 \wedge \omega^2$$

$$d\omega^2 = -\omega_2^1 \wedge \omega^1$$

Para tanto derivamos exteriormente as equações (2').

Denotamos, por simplicidade, $\delta\pi(\theta_1) = \overline{\theta}_1$ $\delta\pi(\theta_2) = \overline{\theta}_2$

então

$$d\omega^1 = -\operatorname{sen}\alpha\, d\alpha \wedge \overline{\theta}_1 + \cos\alpha\, d\overline{\theta}_1 + \cos\alpha\, d\alpha \wedge \overline{\theta}_2 + \\ + \operatorname{sen}\alpha\, d\overline{\theta}_2$$

$$= d\alpha \wedge (-\operatorname{sen}\alpha\, \overline{\theta}_1 + \cos\alpha\, \overline{\theta}_2) + \cos\alpha\, (\overline{\theta}_1 \wedge \overline{\theta}_2)$$

$$= d\alpha \wedge \omega^2 + \cos\alpha\, \omega^1 \wedge \omega^2$$

do mesmo modo temos

$$d\omega^2 = - d\alpha \wedge \omega^1 - \operatorname{sen}\alpha\, \omega^1 \wedge \omega^2$$

Basta então tomar $\omega_2^1 = d\alpha + \overline{\theta}_1 = d\alpha + \delta\pi(\theta_1)$

De fato teremos,

$d\omega^1 = \omega_2^1 \wedge \omega^2$ pois $d\alpha + \overline{\theta}_1 = d\alpha + (\cos\alpha\omega^1 - \operatorname{sen}\alpha\, \omega^2)$

$d\omega^2 = -\omega_2^1 \wedge \omega^1$.

temos então $\boxed{\omega_2^1 = d\alpha + \delta\pi(\theta_1)}$

e portanto

$$d\omega_2^1 = d(\delta\pi(\theta_1)) = \delta\pi(d\theta_1) = \delta\pi(\theta_1 \wedge \theta_2) = \omega^1 \wedge \omega^2$$

portanto

$$\boxed{d\omega_2^1 = \omega^1 \wedge \omega^2 \qquad \text{e então} \quad K \equiv -1}$$

Passamos agora a procurar o grupo G das isometrias de P. Para tanto será útil considerar P como parte do plano complexo ou seja $P = \{z \in \mathbb{C} \mid I_m(z) > 0\}$

Considerada como função complexa, uma isometria $f:P \longrightarrow P$ é uma transformação conforme do semi-plano $\{I_m(z)>0\}$ sobre ele mesmo. De fato, vimos que a métrica ds^2 é conformemente equivalente à de $\mathbb{R}^2$, e portanto uma isometria $f:P \longrightarrow P$ preserva ângulos do plano complexo.

Sabemos, porém, da teoria das funções analíticas, que as transformações conformes que preservam orientação são funções analíticas (pois são diferenciáveis e sua diferencial é uma semelhança), e que as outras são compostas das funções analíticas por uma simetria em torno de um eixo.

O grupo das isometrias de P que preservam orientação é portanto o grupo dos isomorfismos da semi-esfera complexa $I_m(z)>0$, que é o conjunto $\left\{f:z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \;\middle|\; \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} > 0\right\}$

De fato, se $f(z) = Z = \frac{az+b}{cz+d}$, temos, colocando $Z = X + iY$

$$Y = \frac{y}{|cz+d|^2} \quad \text{e portanto} \quad Y>0 \iff y>0.$$

Denotamos então por G^+ o grupo das funções

$$f:z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix} > 0$$

Denotemos por S a simetria $S(x,y) = (-x,y)$ que é, claramente, uma isometria de P, que inverte a orientação.

Concluímos então que o grupo G gerado por G^+ e S é o grupo de todas as isometrias de P.

Devemos agora verificar que G atua simples e transitivamente sobre $\mathbb{D}_p$.

Seja então $p' = ((x,y), \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ um referencial ortonormal de origem (x,y), e seja $p = (i, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ o referencial dado pelo ponto $i = (0,1)$ e pelos vetores

$$\vec{e}_1 = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{(0,1)} \qquad \vec{e}_2 = \left.\frac{\partial}{\partial y}\right|_{(0,1)}$$

a função $f : z \longrightarrow Z = \dfrac{z-x}{y}$ pertence a G^+ pois $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

e além disto $f(x,y) = \dfrac{x+iy-x}{y} = i = (0,1)$

temos então um elemento de G que leva (x,y) sobre i

Por outro lado, seja $v_i' = df|_{(x,y)} (v_i)$ e α o ângulo entre v_1' e $\vec{e}_1$.

$$F : z \longrightarrow Z = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + z}{1 - z \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \quad \text{pertence a } G^+$$

pois $\begin{pmatrix} 1 & \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \\ -\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} & 1 \end{pmatrix} > 0$ e, além disto, temos

$$dZ = e^{i\alpha}\, dz \, , \quad \text{ou seja,}$$

$$dF(\vec{v}_1{}') = \vec{e}_1$$

então, se p e p' são referenciais de mesma orientação, a função $F \circ f$ leva p' sobre p. Se p' for um referencial de orientação contrária, basta tomar o referencial $p \cdot S$ e considerar a composta

$$F \circ f \circ S \; .$$

G é, então, transitivo nos referenciais. De fato, dado $p' \varepsilon \mathbb{D}_p$, existe um elemento de G que leva p' em p.

Isto acarreta claramente que, dados p' e $p'' \varepsilon \mathbb{D}_p$, existe $\sigma \varepsilon G$ com $p'.\sigma = p''$

Para verificar que G atua simplesmente transitivamente nos referenciais, suponhamos que $f:P \longrightarrow P$ é uma isometria de P, que deixa o referencial $p=((x,y)\vec{u},\vec{v}) \varepsilon \mathbb{D}_p$ fixado.

Então

$$f(x,y) = (x,y)$$

$$\left. df \right|_{(x,y)} (\vec{u}) = \vec{u}$$

$$\text{e portanto } \left. df \right|_{(x,y)} = Id.$$

$$\left. df \right|_{(x,y)} (\vec{v}) = \vec{v}$$

Portanto f deixa fixo qualquer referencial com origem em (x,y).

Como f é uma isometria e ω_2^1 é invariante por isometria, f preserva geodésicas. Em particular, f deixa invariantes as geodésicas que passam pelo ponto (x,y), e deixa cada ponto destas geodésicas fixo.

Para provar que f é a identidade, só nos resta verificar que todo ponto pode ser ligado a (x,y) por uma geodésica.

Uma curva γ traçada sobre P é uma geodésica se $\left. \omega_2^1 \right|_{\mathbb{D}_\gamma} \equiv 0$. Vimos que $\omega_2^1 = d\alpha + \delta\pi(\theta_1)$ com as notaçõrs usadas acima. Suponhamos que γ possa ser parametrizada por $y=y(x)$.

Ao longo da curva D_γ , temos $\alpha(x)$ = arcotg $y'(x)$ e a condição $\omega_2^1 = 0$ é então

$$\omega_2^1(x) = \alpha'(x) + \delta\pi\left(\frac{1}{y(x)}\right) = 0,$$ ou seja

$$(\text{arctg } y'(x))' + \frac{1}{y(x)} = 0$$

e então obtemos a condição

$$\frac{y''(x)}{1+y'^2(x)} + \frac{1}{y(x)} = 0$$

$$\boxed{y\,y'' + y'^2 + 1 = 0}$$

esta equação diferencial pode ser integrada, e obtemos

$$y^2 + y^2\,y'^2 = y^2(1+y'^2) = \text{cste}$$

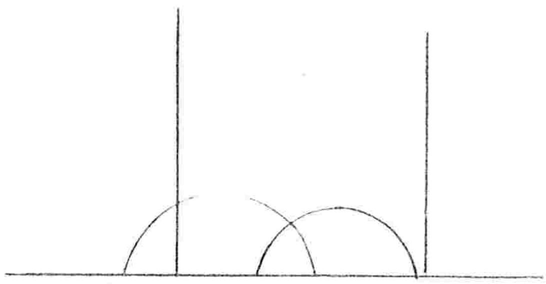
Uma segunda integração fornece

$$(x-a)^2 + y^2 = \text{cste}$$

isto é, as geodésicas consideradas são semi-circulos com centro no eixo dos x.

As outras, isto é, aquelas que não admitem uma parametrização da forma $y=y(x)$ são as semi-retas verticais x=cste.

Então as geodésicas de semi-plano de Poincaré são as semi-circunferências com centro no eixo dos x e as semi-retas verticais e vê-se claramente que dois pontos quaisquer de P são ligados por uma, e uma só, destas geodésicas.



Disto podemos concluir que uma isometria $f:P \longrightarrow P$ que deixa um referencial de $\mathbb{D}_P$ fixado é a identidade. De fato vimos que f deixa fixo todo ponto sobre as geodésicas passando pela origem do referencial. Como todo ponto é ligado a este por uma geodésica, f deixa todos os pontos fixos, e portanto é a identidade.

Portanto G atua simplesmente transitivamente sobre $\mathbb{D}_P$ e nossos resultados sobre congruência de curvas se aplicam a esta variedade; ou seja, duas curvas de P, parametrizadas por comprimento de arco, se deduzem uma da outra por um elemento de G se, e somente se, a forma $\omega_2^1 = d\alpha + \delta\pi(\theta_1)$ for a mesma quando restrita a cada uma delas.

Finalmente, as curvas sobre as quais G atua transitivamente são as de curvatura geodésica constante. No caso $kg \equiv 0$, obtemos as "retas" da geometria hiperbólica, ou seja, por um ponto fora de uma geodésica dada, passam infinitas geodésicas disjuntas da geodésica dada.

VI. <u>O CASO DAS SUPERFÍCIES HOMOGENEAS E SIMPLESMENTE CONEXAS</u>

Mostramos aqui que se, além de ser homogênea, a su perfície S é simplesmente conexa, a identificação feita (ver (I e II)) entre $\mathbb{D}_S$ e G é possível e que, portanto, os resultados sobre curvas de S obtidos acima se aplicam neste caso.

De fato veremos que nestas condições S é isométrica a uma das três superfícies estudadas nos exemplos.

PROPOSIÇÃO: Se S é uma superfície homogênea, então S é geodésicamente completa. (isto é, suas geodésicas são definidas sobre todo $\mathbb{R}$)

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que S não é completa: seja α uma geodésica maximal definida para $s<a$, $a \in \mathbb{R}$. Seja $P \in S$, $\varepsilon>0$ tal que toda geodésica passando por P está definida para $s<\varepsilon$. Seja s_0 tal que $a-s_0 < \frac{\varepsilon}{2}$.

Existe uma isometria $f:S \longrightarrow S$, tal que $f(P) = \alpha(s_0)$, e seja $v \in S_p$ tal que $df_p(v) = \alpha'(s_0)$. Então a geodésica $g_v(s)$ passando por P, com velocidade v, para $s=0$ tem imagem $f \circ g_v(s)$, uma geodésica que coincide com α e que esta definida para $s<s_0+\varepsilon$. Mas $s_0+\varepsilon > a$, logo α não é maximal, contrariando a hipótese.

S é, então, geodésicamente completa.

TEOREMA: (ver Hicks [5]) . Se S é uma superfície Riemanniana geodesicamente completa e de curvatura K constante, então existe $f:M(K) \longrightarrow S$, sobrejetora, localmente isométrica, onde $M(K)$ é o plano euclidiano, a esfera, ou o espaço hiperbólico, conforme $K=0$, $K>0$ ou $K<0$.

OBSERVAÇÃO: Podemos supor $K=0$, ou $K=1$, ou $K=-1$. De fato, se multiplicarmos a métrica de S por uma constante c, K se acha multiplicada por $\frac{1}{c}$.

1º caso: $K \leq 0$

Para $K=0$, $M(0)$ é o plano euclidiano. Fixamos p o referencial canônico do plano, $p = (P, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2})$, onde P é a origem $(0,0)$

Para $K=-1$ $M(-1)$ é o semi-plano de Poincaré. Fixamos p o referencial de origem no ponto $P = (0,1) = i$ e com base $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$.

Seja $p' = (P', e_1, e_2)$ um referencial fixado de S.

Seja x a aplicação do plano em $M(K)$ definida por

$$x(u,v) = g_{\cos v \frac{\partial}{\partial x_1} + \operatorname{sen} v \frac{\partial}{\partial x_2}}(u) \quad \text{onde } g_\alpha(s)$$

é a geodésica passando por P no instante 0, com velocidade α.

Do mesmo modo, definimos $\bar{x}$ do plano em S por

$$\bar{x}(u,v) = g_{\cos v\, e_1 + \operatorname{sen} v\, e_2}(u)$$

Então

- $\bar{x}$ é definida em todo semi-plano $u>0$ pois S é geodesicamente completa.
- $\bar{x}$ é sobre S.
- x é definida em todo semi-plano $u>0$, é sobre $M(K)$, e

a equação $x(u,v) = x$ determina v unicamente, e u a menos de um múltiplo de 2π.

Então a aplicação $f: M(K) \longrightarrow S$ dada por

$$f(x(u,v)) = \bar{x}(u,v)$$

é sobrejetora, e preserva produtos internos.

<u>2º caso</u>: $K>0$. Fixamos um referencial $p = (P, v_1, v_2)$ na esfera $M(K)$, e $p' = (P', e_1, e_2)$ em S.

Desta vez, a equação $x(u,v) = x$ não determina v unicamente: $x(u,v)$ parametriza toda a esfera menos o ponto antípoda $-P$.

Temos, como acima, uma isometria local $f_1: M(K) - \{-P\} \longrightarrow S$ dada por $f_1(x(u,v)) = \bar{x}(u,v)$

Escolhendo um referencial q, com origem num ponto $Q \neq P$, $Q \neq -P$ obtemos uma segunda isometria $f_2: M(K) - \{-Q\} \longrightarrow S$; escolhendo q tal que $f_1(Q) = f_2(Q)$, $df_1(q) = df_2(q)$, as isometrias f_1 e f_2 coincidem na interseção

$M(K) - \{-P\} \cap M(K) - \{-Q\}$, e obtemos assim uma isometria local $f: M(K) \longrightarrow S$.

Da compacidade da esfera e da conexão de S segue que f é sobrejetora. Obtemos assim, em cada caso, uma isometria local sobrejetora $f: M(K) \longrightarrow S$

■

Em cada um dos casos, $f: M(K) \longrightarrow S$ é uma isometria local sobrejetora e, portanto, uma aplicação de recobrimento. (ver Hicks, |5|, Theorem 18, chap 10). Como supomos

S simplesmente conexa, temos que f é um difeomorfismo e assim

TEOREMA: Uma superfície Riemanniana S, geodesicamente completa, de curvatura K constante, e simplesmente conexa, é isometrica a uma das tres superfícies $M(K)$, $K=0$, $K>0$, ou $K<0$.

Os critérios obtidos acima para congruência de curvas se aplicam portanto às superfícies homogêneas simplesmente conexas: uma curva parametrizada por comprimento de arco é caracterizada, a menos de isometrias da superfície, por sua curvatura geodesica.

BIBLIOGRAFIA

[1] Manfredo P. do Carmo - O Método do Referencial móvel. Escola Latino-Americana de Matemática - Rio de Janeiro, 1976.

[2] M. Orellana Chacin - Aplicações da Teoria do Referencial móvel à teoria das superfícies.

[3] Claude Godbillon - Eléments de Topologie Algébrique. Hermann, Paris, 1971.

[4] Griffiths - On Cartan's Method of Lie Groups and Moving Frames as applied to uniqueness and existence problems in Differential Geometry. Duke Mathematical Journal, Vol. 41, nº 4, December 1974.

[5] Noel J. Hicks - Notes on differential Geometry D. Von Nostrand, 1965.

[6] Kobayashi e K. Nomizu - Foundations of differential Geometry - Vol. I Interscience Publishers, 1963.

[7] A.M. Rodrigues- Congruência de Subvariedades de um Espaço Euclidiano. Tese apresentada para concurso de livre docencia. São Paulo, 1964.

[8] Keti Tenenblat - On isometric immersions of Riemannian Manifolds. Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática. vol. 2, nº 2, 1971.

[9] Frank W. Warner - Foundations of differentiable Manifolds and Lie Groups. Glenview, Scott, Foresman, 1971.