RADICAIS DE ANÉIS DE GRUPO

Sônia Coelho Hansen

Tese apresentada ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Alfredo Rosálio Jones Rodriguez

Durante a elaboração deste trabalho, a autora recebeu apoio financeiro do BNDE , contratos FUNTEC nº 100 e 154 e FINEP convênio 184/C.T.

Fevereiro de 1975
São Paulo

AGRADECIMENTOS

Agradeço

ao Prof. Dr. Alfredo R. Jones Rodriguez, pela paciente e constante orientação na elaboração deste trabalho;

aos colegas e professores que me incentivaram neste início de carreira;

ao CNPq , ao BNDE e à FINEP que possibilitaram minha dedicação ao estudo da matemática;

à Marilene Breves Zuffo, pelos trabalhos de datilografia, e

ao Sr. Armando Garcia Segura, pelo trabalho de impressão.

Sônia C. Hansen

INTRODUÇÃO

A noção de elemento quase-regular de um anel, introduzida por S.Perlis em 1942 (13), e desenvolvida por Jacobson a partir de 1945, tornou-se de importância significativa para o estudo de anéis sem condições de cadeia. Por exemplo, se J é o radical de Jacobson de um anel R, é conhecido que R/J é isomorfo a uma soma subdireta de anéis primitivos à direita.

Em vista disso, é natural procurar descrever o radical de Jacobson de anéis particulares, e, mais especificamente, procurar condições necessárias e suficientes para que o radical de um anel seja trivial, isto é, para que o anel seja semi-simples.

Neste trabalho, nos atemos a um certo tipo de anel, conhecido por anel de grupo.

Se A é um anel e G é um grupo, os elementos do anel de grupo AG são as combinações lineares formais finitas da forma $x = \sigma\sum_{g} x_g . g$, em que $x_g \in A$ e $g \in G$. A adição é definida por:

$$\Sigma\, x_g \cdot g + \Sigma\, y_g \cdot g = \Sigma\, (x_g + y_g) \cdot g$$

e a multiplicação por:

$$(\Sigma\, x_g \cdot g) \cdot (\Sigma\, x_{g'} \cdot g') = \sum_{g,g'} (x_g \cdot x_{g'})\, g \cdot g'$$

AG tem ainda uma estrutura natural de álgebra sobre A .

Na maior parte deste trabalho, o anel A é suposto um corpo F. Eventualmente, demonstraremos resultados para o caso em que os coeficientes da álgebra de grupo estão em um anel, com o fim de obter resultados para FG.

Este trabalho é um estudo do radical de FG , que segue de perto o tratamento desenvolvido por Amitsur de 1956 a 1959 (Ver (2), (3), (4)), cuja ênfase é principalmente sobre o papel do corpo F na semi-simplicidade.

Estes resultados se revelaram particularmente fecundos para estudar a semi-simplicidade de FG quando F é um corpo de característica zero.

Em 1 950, foi provada a semi-simplicidade de FG, para o caso em que F é o corpo das reais ou dos complexos, por métodos de álgebras de Banach.

Em (2), Amitsur obteve provas algébricas destes resultados, com uma generalização para extensões transcendentes do corpo dos racionais. Em 1 962, com a mesma técnica, e empregando um resultado de Amitsur (1), Passman obteve em (11) a semi-simplicidade de FG para corpos não enumeráveis de característica p e grupos G que não contêm elementos de ordem p . Mas apenas em 1970 conseguiu o resultado análogo ao de Amitsur para característica p(ver (12)). No entanto, foi necessário introduzir uma técnica diferente.

Conforme se observará no capítulo III, para o caso de característica p, é necessário estudar com mais detalhes o papel do grupo G na semi-simplicidade.

No capítulo I, encontramos os resultados básicos de (4), que são utilizados nas aplicações.

No capítulo II, exibimos condições suficientes para a semi-simplicidade de FG, em que F é um corpo de característica zero. Na Seção 2.1, estão os resultados obtidos por Amitsur, sem hipótese alguma sobre o grupo G . O mais importante é o que estabelece a semi-simplicidade de FG, quando F é uma extensão transcendente do corpo Q dos racionais. Na seção 2.2, conforme sugestão de Connell (5), provamos a semi-simplicidade de AG , com uma hipótese sobre o anel A, no caso em que G tem um fator direto cíclico infinito $G_1 = (g)$. Nesta situação, o elemento $g \in G$ parece determinar a semi-simplicidade de AG da mesma forma que um elemento $x \in F$, transcendente sobre Q, determina a semi-simplicidade de FG. Nesta seção, temos ainda uma redução importante do problema ao caso em que G é um grupo finitamente gerado. Em 2.3, com a hipótese de que o grupo G é abeliano, demonstramos que FG é semi-simples, para corpos F arbitrários de característica zero (ver (2),(5),(15)).

No Capítulo III, encontramos condições suficientes para a semi-simplicidade de FG , em que F é um corpo de característica p . Empregamos um tratamento análogo ao do Capítulo II, de modo a realçar naturalmente as dificuldades que aparecem devido à característica do corpo. Em 3.1, encontram-se os teoremas de Passman (ver (11),(12)), que permitem demonstrar a semi-simplicidade de FG , quando F é uma extensão transcendente de seu corpo primo e G não contém elementos de ordem p . Este teorema encontra-se em 3.2. Em 3.3, estão os resultados análogos aos de 2.3 para característica p, incluindo o teorema completo para grupos abelianos, que estabelece condições necessárias e suficientes para a semi-simplicidade de FG , e cuja prova é diferente da apresentada por Connell em (5) (ver também (15)). Em 3.4, mostramos que a condição "G não contém elementos de ordem p" não é, de modo geral, essencial para a semi-simplicidade de FG . O Lema que possibilitou a construção do exemplo foi demonstrado por Passman, em (11).

Sônia C. Hansen

INDICE

NOTAÇÕES

$(R:F)$	-	dimensão de R (espaço vetorial) sobre F (corpo)
$a = \sum_g a_g . g$	-	um elemento genérico do anel de grupo AG
$\sup(a)$	-	conjunto dos elementos do grupo G tais que $a_g \neq 0$
$M_n(R)$	-	anel das matrizes $n x n$ sobre R (anel)
$\partial(f)$	-	grau do polinômio f
Z_p	-	corpo dos inteiros módulo p
N	-	conjunto dos números naturais

CAPÍTULO 0

PRELIMINARES

Neste capítulo, damos a definição do radical de Jacobson de um anel e sua principais propriedades. Incluimos também, na última seção, o enunciado de dois teoremas básicos, utilizados no trabalho.

0.1 O Radical e suas propriedades

Seja R um anel.

Def.1 : Um elemento $z \in R$ diz-se quase-regular à direita se existe $z' \in R$ tal que

$$z + z' + zz' = 0$$

Um elemento z' satisfazendo a equação acima é chamado um quase-inverso à direita de z .

Referir-nos-emos a esta equação como a equação do quase-inverso.

Analogamente, definimos elemento quase-regular à esquerda e quase-inverso à esquerda.

Por conveniência, introduzimos a notação:

$$z \circ z' = z + z' + zz'$$

É fácil verificar que $(R,\circ)$ é um semi-grupo, e que o elemento $0 \in R$ age como identidade relativamente à operação $\circ$.

Reinterpretando as definições acima em termos da operação $\circ$, temos: z é quase regular à direita se tem um inverso à direita relativamente à operação $\circ$. Analogamente, z é quase-regular à esquerda se tem um inverso à esquerda relativamente à operação $\circ$.

<u>Def. 2</u>: Um elemento $z \in R$ é quase regular se existe $z' \in R$ tal que

$$z \circ z' = 0 = z' \circ z$$

z' é chamado um quase-inverso de z .

Se z é quase-regular à esquerda e à direita , então z é quase-regular e o quase-inverso é único.

<u>Def. 3</u>: Um ideal à direita de R é quase-regular se todo elemento de R é quase-regular à direita.

Analogamente, define-se ideal à esquerda quase-regular.

A proposição seguinte é de verificação simples:

Prop. 1: Todo elemento de um ideal à direita quase-regular é quase-regular.

Antes de dar a definição de radical, enunciamos o seguinte teorema:

Teorema I ((6), pág. 92): A união de todos os ideais à direita quase-regulares de um anel R é um ideal bilateral de R .

Def. 4 : O radical de Jacobson de R é a união de todos os ideais à direita quase-regulares do anel R .
Notação : J(R)

Da Proposição 1, é imediato que todo elemento de J (R) tem um único quase-inverso.

Introduzimos agora a definição de radical nil , que será usada em alguns pontos do trabalho.

Def. 5 : Um ideal (à esquerda, à direita, bilateral) de R diz-se nil se, para todo $x \in R$, existe $n \in N$ tal que $x^n = 0$.

Teorema II ((7), pág. 193): A união de todos os ideais bilaterais nil de R é um ideal bilateral nil de R .

Def. 6 : O radical nil de R é a união de todos os ideais bilaterais nil de R .

Notação: Nil (R)

A proposição abaixo é de demonstração simples :

Prop. 2: Todo ideal nil está contido em J (R).

Temos, então, a seguinte relação entre os radicais :

Prop. 3: Nil (R) $\subseteq$ J (R)

Pode-se demonstrar que a definição do radical de Jacobson é simétrica. Mais precisamente:

Teorema III ((7), pág. 9): J (R) é a união de todos os ideais à esquerda quase-regulares de R .

Damos ainda a seguinte caracterização externa do radical, que será utilizada no Capítulo III:

Teorema IV ((7), pág. 4): J (R) é a intersecção dos anuladores de todos os R-módulos à direita irredutíveis.

Analogamente, podemos obter J(R) fazendo a intersecção dos anuladores de todos os R-módulos à esquerda irredutíveis.

Outras propriedades importantes são:

<u>Teorema V</u> ((14),pág.68): i) $J(R)$ é o menor ideal bilateral Q de R tal que $J(R/Q)$ é nulo.

ii) Se I é um ideal bilateral contido em $J(R)$, $J(R/I) = J(R)/I$.

<u>Teorema VI</u> (Lema de Nakayama)((14),pág.66): Se R é um anel com unidade e N é um ideal de R tal que $J(R) + N = R$, então, $N = R$.

<u>Prop. 4</u>: Sejam R e S anéis tais que $R \cong S$ e seja Φ este isomorfismo. Então, a restrição de Φ a $J(R)$ tem por imagem $J(S)$. Isto é, $J(R) \cong J(S)$.

<u>Prop. 5</u>: Sejam R um anel, $J(R)$ o seu radical. Então, $J(Mn(R)) = Mn(J(R))$.

Finalmente, observamos que se R é um anel com unidade, pode-se demonstrar que $J(R)$ é a intersecção dos ideais à direita (esquerda) maximais de R.

0.2 <u>Dois teoremas básicos</u>

<u>Teorema VII</u> ((8), pág.104): Sejam R uma álgebra central simples com unidade sobre um corpo F e B uma subálgebra simples contendo 1. Então, se B^* é o centralizador de B em R, temos:

$$(R: F) = (B : F) \cdot (B^* : F)$$

<u>Teorema VIII</u> (Teorema de Maschke Generalizado)((9),pág.156): Seja A um anel. O anel de grupo AG é completamente redutível se e somente se:

i) A é completamente redutível

ii) G é finito

iii) a ordem de G é uma unidade em A.

É conhecido que, se R é um anel com unidade completamente redutível, $R = R_1 \oplus \ldots \oplus R_t$, em que os R_i são anéis simples e $R_i R_j = 0$ se $i \neq j$. Além disso, R admite t módulos irredutíveis não isomorfos, cada um deles isomorfo a um dos R_i.

Assim, $\alpha \in J(R)$ se, e somente se

$$(1) \quad \alpha \cdot R_1 = 0, \ldots, \alpha \cdot R_t = 0$$

Tomando a unidade 1 de R, temos:

$$1 = e_1 + \ldots + e_t, \; e_i \in R_i$$

Logo,

$$\alpha = \alpha.1 = \alpha \cdot e_1 + \ldots + \alpha \cdot e_t = 0,$$

por causa das igualdades (1).

Resumindo: Se R é um anel com unidade completamente redutível, então $J(R) = 0$.

CAPÍTULO I

EXTENSÕES DE CORPOS

Sejam R uma álgebra com unidade sobre um corpo C, F uma extensão de C. Neste capítulo, estudaremos relações entre $J(R)$ e $J(R \otimes_C F)$.

Se nada fôr mencionado explicitamente os produtos tensoriais considerados serão sempre sobre o corpo C.

Provaremos os seguintes teoremas:

Teorema I (Amitsur, (4)): Se F é uma extensão algébrica separável de C, então $J(R \otimes F) = J(R) \otimes F$.

Teorema II (Amitsur, (4)): Se F é uma extensão transcendente pura de C, então $J(R \otimes F) = N \otimes F$ em que $N = J(R \otimes F) \cap R$ é um ideal nil de R (e, portanto, contido em $J(R)$).

1.1 Extensões algébricas

Para provar o Teorema I, precisamos de alguns lemas.

<u>Lema 1</u>: Seja R um anel (não necessariamente com unidade). Se $x \in R$ é tal que $x + nx = 0$, para algum $n \in J(R)$, então $x = 0$.

<u>Demonstração</u>: Seja m o quase-inverso de n, isto é, $n + m + mn = 0$. Temos:

$$x = -nx = (m + mn)\, x = m(x + nx) = 0 \qquad \square$$

<u>Lema 2</u>: Sejam R um anel (não necessariamente com unidade), e $n \in J(R)$ com quase-inverso m. Então, os elementos de R que comutam com n também comutam com m.

<u>Demonstração</u>: Seja y tal que $ny - yn = 0$. Como $n+m+nm = 0$, temos:

$$0 = (n + m + nm)\, y - y(n + m + nm) = ny - yn + my - ym + nmy - ynm = (my - ym) + n(my - ym)$$

Então pelo Lema 1, $my - ym = 0$ $\square$

A seguir, consideraremos sempre uma álgebra R com unidade sobre um corpo C. Usaremos seguidamente o seguinte fato:

Sejam $(r_\alpha)_{\alpha \in L}$ uma base de R sobre C, V um espaço vetorial sobre C. Então, os elementos de $R \otimes V$ podem ser escritos de uma única forma como $\sum_\alpha r_\alpha \otimes v_\alpha$, em que $v_\alpha \in V$.

Lema 3: Sejam S uma subálgebra de $Mn(C)$ e S^* o seu centralizador em $Mn(C)$. Então, o centralizador de S em $R \otimes Mn(C)$ é $R \otimes S^*$.

Demonstração: Conforme já observamos, os elementos de $R \otimes Mn(C)$ podem ser escritos de uma única forma como $\sum_\alpha r_\alpha \otimes c_\alpha$, $c_\alpha \in Mn(C)$. Seja $1 \otimes s \in 1 \otimes S$. Então,

$$(\sum r_\alpha \otimes c_\alpha)(1 \otimes s) - (1 \otimes s)(\sum r_\alpha \otimes c_\alpha) = 0$$

se, e somente se, $\sum r_\alpha \otimes (c_\alpha s - s c_\alpha) = 0$. Mas, tendo em vista a observação acima, isto acontece se e somente se $c_\alpha s - s c_\alpha = 0$, $\forall_\alpha$. Então $c_\alpha \in S^*, \forall_\alpha$, e $\sum r_\alpha \otimes c_\alpha \in R \otimes S^*$ $\square$

Lema 4: Seja F uma extensão finita de C, com $(F:C) = n$. Então, F pode ser considerado como um subcorpo de $Mn(C)$. Nestas condições, F é seu próprio centralizador em $Mn(C)$.

Demonstração: Seja $L(F,F)$ o anel das transformações lineares do espaço vetorial F sobre C. Vamos definir um monomorfismo de anéis $T:F \longrightarrow L(F,F)$: dados $f, f' \in F$, $T(f)$ é a transformação linear: $T(f)(f') = f.f'$. É fácil verificar que $T(f)$ é uma transformação linear, e que $T(f_1 + f_2) = T(f_1) + T(f_2)$, $T(f_1 . f_2) = T(f_1) \circ T(f_2)$. Então, T é um homomorfismo de anéis. Além disso, $T(f) \equiv 0$ se e somente se $f = 0$, ou seja, T é monomorfismo. Fixando uma base de F sobre C, obtemos um isomorfismo ψ de $L(F, F)$ em $Mn(C)$. Então, a função $\psi \circ T$ é um monomorfismo de F em $Mn(C)$, logo, F pode ser considerado como um subcorpo de $Mn(C)$. Seja F^* o centralizador de F em $Mn(C)$. Então, claramente $F^* \supseteq F$ (pois, $\forall f_1, f_2 \in F$, $T(f_1) \circ T(f_2) =$ $= T(f_1 f_2) = T(f_2 f_1) = T(f_2) \circ T(f_1)$).

Agora, pelo Teorema VII do Capítulo 0, pág. 5, temos:

$$(Mn(C) : C) = (F^*: C)\ (F : C)$$

logo, $(F^*: C) = n$ e, de $F^* \supseteq F$, vem: $F^* = F$ $\square$

Sejam agora H, K extensões de C, $K \subseteq H$ e $\theta \in Aut(H|K)$. Já sabemos que os elementos r de $R \otimes H$ podem ser expressos de uma única forma como:

$$r = \sum_i r_i \otimes h_i$$

em que os elementos r_i são de uma base de R sobre C, e os $h_i \in H$. Definimos então uma função $\theta': R \otimes H \longrightarrow R \otimes H$, da seguinte forma:

$$\theta'(r) = \sum_i r_i \otimes \theta\,(h_i)$$

Verifica-se facilmente que θ' é um automorfismo de $R \otimes H$, que deixa fixos os elementos de R.

<u>Lema 5</u>: Sejam K uma extensão de C contida em H, G um subgrupo de $Aut(H|K)$ $G' = \{\theta' | \theta \in G\}$ e F o corpo fixo de G . Então, G' é um subgrupo de $Aut(R \otimes H)$ e, se $r \in R \otimes H$ é tal que $\theta'(r) = r$, para todo $\theta \in G$, então $r \in R \otimes F$.

<u>Demonstração</u>: A primeira afirmação é de verificação trivial . Agora, se $r = \Sigma\, r_i \otimes h_i$ é tal que $\theta'(r) = \Sigma\, r_i \otimes \theta\,(h_i) = r = \Sigma\, r_i \otimes h_i$, temos:

$$\Sigma\, r_i \otimes (\theta\,(h_i) - h_i) = 0$$

e, como esta expressão é única, concluimos que $\theta(h_i) = h_i$, para todo $\theta \in G$, e para todo i . Logo, $h_i \in F$, para todo i, e $r \in R \otimes F$. $\square$

Podemos agora começar a prova do Teorema I.

<u>Lema 6</u>: Seja F uma extensão finita de C. Então, $J(R) \otimes F \subseteq J(R \otimes F)$.

<u>Demonstração</u>: Suponhamos que $(F : C) = n$.

$$\begin{tikzcd} & R \otimes Mn(C) \arrow[dr, "g^*"] & \\ R \otimes Mn(C) \arrow[ur, "\psi"] \arrow[rr, "g"'] & & Mn(R) \end{tikzcd}$$

Primeiro, vamos mostrar que $R \otimes Mn(C) \cong Mn(R)$.

Definimos $g : R \times Mn(C) \longrightarrow Mn(R), g(r,(\alpha_{ij})_{i,j}) =$ $= (r \cdot \alpha_{ij})_{i,j}$, em que $r \in R$, $(\alpha_{ij}) \in (Mn(C)$. É imediato verificar que g é uma função balanceada. Chamando ψ a função canônica de $R \times Mn(C)$ em $R \otimes Mn(C)$, pela propriedade universal do produto tensorial, sabemos que existe um homomorfismo $g^*: R \otimes Mn(C) \longrightarrow Mn(R)$, tal que

$$g^*(r \otimes (\alpha_{ij})_{i,j}) = g(r,(\alpha_{ij})_{i.j}), \text{ para todo}$$

$r \in R$, e toda matriz $(\alpha_{ij})_{i,j} \in Mn(C)$.

Vamos mostrar que g^* é um isomorfismo. Sejam $(\delta_{ij})_{i,j}, (\delta'_{ij})_{i,j}$ respectivamente as bases usuais de $Mn(C)$ sobre C e de $Mn(R)$ sobre R. Dada $(r_{ij})_{i,j} \in Mn(R)$, $(r_{ij})_{i,j}$ é da forma $\sum_{i,j} r_{ij} \; \delta'_{ij}$, logo é imagem por g^* de $\sum_{i,j} r_{ij} \otimes \delta_{ij}$. Então, g^* é epimorfismo. Suponhamos que

$$g^*(\sum_{i,j} r_{ij} \otimes \delta_{ij}) = 0$$

Então,

$$\sum_{i,j} r_{ij} \; \delta'_{ij} = 0$$

logo, $r_{ij} = 0$, para todo i e todo j, o que mostra que g^* é injetora.

Tendo em vista o Lema 4, podemos considerar:

$$R \otimes F \subseteq R \otimes Mn(C) \cong Mn(R)$$

$$J(R) \otimes F \subseteq J(R) \otimes Mn(C) \cong Mn(J(R)).$$

O isomorfismo da segunda cadeia é obtido restringindo-se g^* a $J(R) \otimes Mn(C)$, e lembrando que se $r \in J(R)$ e $\alpha \in C$, $r.\alpha \in J(R)$. Mas $J(Mn(R)) = Mn(J(R))$, pela proposição 5 do Capítulo 0, pág. 5.

Da segunda inclusão acima, segue então que os elementos de $J(R) \otimes F$ têm quase inverso em $Mn(R)$. Ora, os elementos de $J(R) \otimes F$ comutam com os elementos de F. Então , podemos concluir, pelo Lema 2, que os seus quase-inversos comutam com os elementos de F . Mas, em vista dos Lemas 3 e 4, sabemos que o centralizador de F em $R \otimes Mn(C)$ é $R \otimes F$. Logo, os quase-inversos dos elementos de $J(R) \otimes F$ pertencem a $R \otimes F$.

Como $J(R) \otimes F$ é um ideal de $R \otimes F$, isto demonstra que $J(R) \otimes F$ é um ideal quase-regular em $R \otimes F$, logo , está contido em $J(R \otimes F)$. $\square$

Em geral, não é verdade que, se F é uma extensão finita de C, $J(R \otimes F) \subseteq J(R) \otimes F$. Vamos provar esta inclusão apenas para extensões separáveis. Para ver isso, vamos considerar o seguinte exemplo:

Exemplo: Sejam C um corpo não perfeito, $f(X)$ um polinômio irredutível e não separável Tomamos para R o corpo de raizes de f sobre C. Então, $f(X)$ se decompõe num produto de fatores lineares em R, isto é, $f(X) = ((X - \alpha_1)\dots$ $\dots(X - \alpha_s))^m$, com $\alpha_i \in R$, $i=1, \dots s$, $m > 1$ e $\alpha_i \neq \alpha_j$ se se $i \neq j$.

Tomamos $F = C(\alpha_1)$, e observamos que $F \cong \dfrac{C[X]}{(f(X))}$, em que $(f(X))$ indica o ideal gerado por $f(X)$.

Como R é corpo, $J(R) = 0$ e portanto $J(R) \otimes C(\alpha_1) = 0$.

Por outro lado, $R \otimes_C C(\alpha_1) \cong R \otimes_C \dfrac{C[X]}{(f(X))}$ é isomorfo a $\dfrac{R[X]}{(f(X))}$.

Neste anel, consideramos o ideal I gerado por $\overline{g(X)} = \overline{(X - \alpha_1) \dots (X - \alpha_s)}$. Então, é imediato que $I \neq 0$, e que $I^m = 0$. Logo, I está contido em $J(R \otimes C(\alpha_1))$ que portanto é não nulo.

<u>Lema 7</u>: Sejam H uma extensão galoisiana de C, e R um anel semi-simples. Então, $R \otimes H$ também é semi-simples.

<u>Demonstração</u>: Seja $r \in R \cap J(R \otimes H)$, com quase inverso s em $R \otimes H$. Vamos mostrar que $r = 0$.

Temos: $r + s + rs = 0$.

Dado $\theta \in Aut(H|C)$, consideremos $\theta' : R \otimes H \longrightarrow R \otimes H$. Então:

$\theta'(r) + \theta'(s) + \theta'(r)\,\theta'(s) = 0$, e, como $\theta'(r) = r$,

$r + \theta'(s) + r\,\theta'(s) = 0$.

Pela unicidade do quase inverso para elementos do radical, concluimos que $\theta'(s) = s$, para todo $\theta \in Aut(H|C)$. Como a extensão H de C é galoisiana, o corpo fixo de $Aut(H|C)$ é C e, pelo Lema 5, podemos concluir que $s \in R \otimes C \cong R$. Assim, r é quase-regular em R, e como $R \cap J(R \otimes H)$ é um ideal de R, concluimos que $R \cap J(R \otimes H)$ é um ideal quase--regular de R, portanto, está contido em $J(R) = 0$, ou seja, $R \cap J(R \otimes H) = 0$.

Agora, seja $t \in J(R \otimes H)$, e seja $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ uma base de H sobre C . Então:

$$t = r_1 \otimes \xi_1 + \ldots + r_n \otimes \xi_n \,, \quad r_i \in R \,.$$

Multiplicando por ξ_j, $j = 1, \ldots, n$, temos :

$$t\,\xi_j = r_1 \otimes \xi_1 \xi_j + \ldots + r_n \otimes \xi_n \xi_j \in J(R \otimes H) \,,$$

$$j = 1, \ldots, n.$$

Como o radical permanece invariante sob os automorfismos de $R \otimes H$, temos, para todo $\theta \in \mathrm{Aut}\,(H|C)$:

$$\theta'(t\xi_j) = r_1 \otimes \theta\,(\xi_1 \xi_j) + \ldots + r_n \otimes \theta\,(\xi_n \xi_j) \in$$

$J(R \otimes H)$, $j = 1, \ldots, n$.

Como $\mathrm{Aut}(H|C)$ é finito, podemos somar esta relação para todo θ :

$$r_1 \otimes \sum_\theta \theta\,(\xi_1 \xi_j) + \ldots + r_n \otimes \sum_\theta \theta\,(\xi_n \xi_j) \in$$

$J(R \otimes H)$, $j = 1, ,,,, n$.

Chamando $\mathbf{tr}(a) = \sum_\theta \theta\,(a)$, para $a \in H$, e lembrando que $\mathrm{tr}(a) \in C$ (pois a extensão H de C é galoisiana), temos que a soma acima é um elemento de R, para $j=1,\ldots,n$.

Assim,

(1) $\quad r_1 \otimes tr(\xi_1 \xi_j) + \ldots + r_n \otimes tr(\xi_n \xi_j) = 0, j=1,\ldots,n,$

pois já provamos que $R \cap J(R \otimes H) = 0$.

Ora, H é uma extensão separável de C, portanto a matriz $(tr(\xi_i \xi_j))_{i,j}$ é inversível. Assim, as equações (1) valem apenas para $r_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Logo, $t = r_1 \otimes \xi_1 + \ldots + r_n \otimes \xi_n = 0$, ou seja, $J(R \otimes H) = 0$. $\square$

<u>Lema 8</u>: Se H é uma extensão galoisiana de C, $J(R \otimes H) \subseteq J(R) \otimes H$.

<u>Demonstração</u>: Seja ψ o homomorfismo canônico de R sobre $R/J(R) = \overline{R}$, e consideremos o homomorfismo $\psi \otimes 1$: $R \otimes H \longrightarrow \overline{R} \otimes H$. É imediato que $\psi \otimes 1$ é um epimorfismo. Seja $(h_i)_i$ uma base de H sobre C. Sabemos que um elemento r de $R \otimes H$ se escreve de uma forma única como:

$$r = \sum_i r_i \otimes h_i, \quad r_i \in R. \quad \text{Se} \quad \psi \otimes 1(r) = 0, \quad \text{então}$$

$$\sum_i \overline{r}_i \otimes h_i = 0.$$

Como a expressão dos elementos de $\overline{R} \otimes H$ na forma $\sum \overline{r}_i \otimes h_i$ é única, devemos ter:

$\overline{r}_i = 0$, para todo i, isto é, $r_i \in J(R)$

Então, $r \in J(R) \otimes H$ e temos o isomorfismo

$$\frac{R \otimes H}{J(R) \otimes H} \cong \overline{R} \otimes H$$

Como $\overline{R}$ é semi-simples, vem do Lema anterior que $\overline{R} \otimes H$ também é semi-simples. Como o radical é o menor ideal Q tal que R/Q é semi-simples, concluimos:

$$J(R \otimes H) \subseteq J(R) \otimes H \qquad \square$$

Então, os Lemas 6 e 8 provam o Teorema I em um caso particular:

Corolário 1: Se H é uma extensão galoisiana de C, $J(R \otimes H) = J(R) \otimes H$. $\square$

Lema 9 (Passman, (12)): Seja K um subcorpo de F, contendo C. Então, $J(R \otimes F) \cap R \otimes K \subseteq J(R \otimes K)$.

Demonstração: Podemos considerar $R \otimes F$ como $(R \otimes_C K) \otimes_K F$. Tomando uma base $\{f_i\}_i$ de F sobre K, com $f_1 = 1$, podemos escrever cada elemento y de $R \otimes F$ de forma única como:

$$y = y_1 \otimes 1 + \sum_{i \neq 1} y_i \otimes f_i, \ y_i \in R \otimes K, \text{para todo } i.$$

Seja então $x \in J(R \otimes F) \cap R \otimes K$, com quase

-inverso y em $R \otimes F$. Escrevendo y na forma acima, obtemos para a equação do quase-inverso:

$$(x + y_1 \otimes 1 + x(y_1 \otimes 1)) + (1 + x) \sum_{i \neq 1} y_i \otimes f_i = 0$$

Ora, $(x + y_1 \otimes 1 + x(y_1 \otimes 1)) \in R \otimes K$, e $(1 + x)$. $\sum_{i \neq 1} y_i \otimes f_i \in \sum_{i \neq 1} (R \otimes K) \otimes f_i$. Pela unicidade da expressão dos elementos de $R \otimes F$ na forma acima, devemos ter:

$$x + y_1 \otimes 1 + x(y_1 \otimes 1) = 0$$

Pela unicidade do quase-inverso para elementos do radical, $y = y_1 \otimes 1 \in R \otimes K$. Então, x é quase-regular em $R \otimes K$, e como $J(R \otimes F) \cap R \otimes K$ é um ideal de $R \otimes K$, obtemos:

$$J(R \otimes F) \cap R \otimes K \subseteq J(R \otimes K). \qquad \square$$

<u>Lema 10</u>: Seja F uma extensão separável finita de C. Então, existe uma extensão galoisiana H de C contendo F, e $J(R \otimes F) = J(R \otimes H) \cap R \otimes F$.

<u>Demonstração</u>: Pelo Lema acima, a inclusão $J(R \otimes H) \cap R \otimes F \subseteq J(R \otimes F)$ é imediata. Consideremos agora $R \otimes H$ como $(R \otimes_C F) \otimes_F H$. Como H é também uma extensão galoisiana de F, o Corolário 1 garante que $J(R \otimes H) = J(R \otimes_C F) \otimes_F H$. Em particular, $J(R \otimes F) \subseteq J(R \otimes H) \cap R \otimes F$, e a prova está completa. $\square$

Corolário 2: Se F é uma extensão separável finita de C, $J(R \otimes F) = J(R) \otimes F$.

Demonstração: Pelo Lema 9, existe uma extensão galoisiana H de C contendo F, tal que: $J(R \otimes F) = J(R \otimes H) \cap R \otimes F$.

Pelo Corolário 1, $J(R \otimes H) = J(R) \otimes H$. Queremos mostrar que $J(R) \otimes H \cap R \otimes F = J(R) \otimes F$. Uma inclusão é imediata. Para a outra, tomemos $\{x_i\}_i$ uma base de $J(R)$ sobre C, e $\{x_i\}_i \cup \{y_j\}_j$ uma base de R sobre C. Dado $x \in J(R) \otimes H \cap R \otimes F$, podemos escrever x de forma única como:

$$x = \sum_i x_i \otimes h_i, \quad h_i \in H$$

e também como:

$$x = \sum_i x_i \otimes f_i + \sum_j y_j \otimes f_j, \quad f_i, f_j \in F$$

Mas a forma de escrever x em $R \otimes H$ é única, logo, $f_j = 0$, para todo j, e $h_i = f_i$, para todo i, isto é, $x \in J(R) \otimes F$. {}

Podemos agora proceder à prova do Teorema I.

Teorema I (Amitsur, (4)): Se F é uma extensão separável de C, então, $J(R \otimes F) = J(R) \otimes F$.

Demonstração: Seja $x \in J(R \otimes F)$. Então, x pertence a $R \otimes K$, para alguma extensão finita K de C. Além disso, esta extensão é separável sobre C, então, pelo Corolário 2, $J(R \otimes K) = J(R) \otimes K$.

Como $J(R \otimes F) \cap R \otimes K \subseteq J(R \otimes K)$ (pelo Lema 9), temos: $x \in J(R) \otimes K$, que está contido em $J(R) \otimes F$, o que demonstra uma inclusão.

Seja agora $x \in J(R) \otimes F$. Então, $x \in J(R) \otimes K$, para alguma extensão finita K de C. Como F é separável sobre C, K também é. Então, $J(R) \otimes K = J(R \otimes K)$ pelo Corolário 2. Assim, x possui um quase-inverso à direita em $R \otimes K$, logo em $R \otimes F$, o que mostra que x é quase-regular à direita em $R \otimes F$. Como $J(R) \otimes F$ é um ideal em $R \otimes F$, o argumento acima mostra que $J(R) \otimes F$ é um ideal quase-regular em $R \otimes F$, portanto, está contido em $J(R \otimes F)$. $\square$

Isto completa a prova do Teorema I, para anéis R com unidade. Pode-se demonstrar que o resultado continua válido, se prescindirmos desta hipótese.

1.2 Extensões transcendentes puras

Seja $(X_i)_i$ um conjunto de indeterminadas comutativas (não necessariamente finito) sobre C. $C[\ldots, X_i, \ldots] = C[X]$ denotará o anel dos polinômios nas indeterminadas (X_i), e $C(\ldots, X_i, \ldots) = C(X)$ o corpo das funções racionais nas indeterminadas (X_i). Notaremos ainda:

$R[X] = R \otimes_C C[X]$, e $R(X) = R \otimes_C C(X)$.

É fácil ver que, se $r \in R(X)$, r pode ser escrito na forma $r[X].1 \otimes h[X]^{-1}$ (que notaremos simplesmente $r[X] . h[X]^{-1}$), com $r[X] \in R[X]$ e $h[X] \in C[X]$.

Se F é uma extensão transcendente pura de C, então $F \cong C(X)$ para algum conjunto de indeterminadas $(X_i)_i$. Então, ao considerar extensões transcendentes puras quaisquer, podemos nos limitar ao anel $R(X)$.

Lema 11: Se $J(R(X)) \neq 0$, então $J(R(X)) \cap R \neq 0$.

Demonstração: Primeiro, observamos que $J(R(X)) \cap R[X] \neq 0$. De fato, se $0 \neq r[X] . h[X]^{-1} \in J(R(X))$, então

$$r[X]\, h[X]^{-1}\, h[X] \in J(R(X)). \text{ Isto é,}$$

$$0 \neq r[X] \in J(R(X)) \cap R[X].$$

Entre todos os elementos não nulos $r[X] \in J(R(X))$, existe um de grau total mínimo. Queremos mostrar que este elemento pertence a R. Seja então $r[X] \in J(R(X))$ de grau total mínimo, e suponhamos que $r[X] \notin R$, logo este elemento é de grau $k \geq 1$ para pelo menos uma das indeterminadas, digamos, X_1. Sejam $C'[X]$, $C'(X)$ respectivamente o anel dos polinômios e o corpo das funções racionais nas indeterminadas (X_i), com a omissão de X_1. Usaremos analogamente as notações $R'[X]$ e $R'(X)$. Então, podemos escrever $r[X]$ na forma:

$$r[X] = r_o + r_1 X_1 + \ldots + r_k X_1^k, \quad r_i \in R'[X], i=0,\ldots,k \text{ e}$$

$$r_k \neq 0.$$

O automorfismo τ de $C(X)$ definido pela transformação:

$$X_1 \text{ —— } X_1 + 1$$

$$X_i \text{ —— } X_i \text{ , para } i \neq 1,$$

pode ser extendido univocamente ao anel $R(X)$, do modo usual, de modo a deixar invariantes os elementos de R. Vamos denotar este automorfismo por τ'.

Como $\tau'(J(R(X))) \subseteq J(R(X))$, podemos concluir que o elemento $s[X] = \tau'(r[X]) - r[X]$ pertence a $J(R(X))$.

A esta altura, dividimos a demonstração segundo os diferentes valores da característica de C.

Seja C de característica zero. Então, $s[X] = \sum_{i=0}^{k} r_i((X_1 + 1)^i - X_1^i)$ é de grau em X_1 menor que $r[X]$. Como cada parcela $r_i((X_i + 1)^i - X_1^i)$ tem para grau total: $(\partial(r_i) + i - 1)$, é fácil ver que o grau total de $s[X]$ é menor que o de $r[X]$. Pela condição minimal de $r[X]$, devemos ter $s[X] = 0$. Mas

$$s[X] = k\, r_k X_1^{k-1} + \ldots = 0 \Longrightarrow k\, r_k = 0.$$

Ou seja, $r_k(1 \otimes k) = 0$, e como $k \geq 1$ e C é de característica zero, devemos ter $r_k = 0$, o que é absurdo.

Se a característica de C é um primo p, podemos ter $s|X| = 0$. Mas, neste caso, podemos demonstrar que $r[X]$ é da forma: $r[X] = r'[X_1^p - X_1]$, em que r' é um polinômio em $X_1^p - X_1$, com coeficientes em $R'[X]$.

Suponhamos que este fato tenha sido demonstrado, e prossigamos com a demonstração do Lema 11.

Sejam $C_1[X]$, $C_1(X)$, $R_1[X]$, $R_1(X)$ os anéis obtidos por substituição de X_1 por $X_1^p - X_1$, no conjunto de indeterminadas (X_i).

Queremos obter em $J(R(X))$ um polinômio de grau total menor do que o de $r[X]$.

Observamos primeiro que $r[X] \in J(R_1(X))$. De fato, como $C_1(X)$ é um subcorpo de $C(X)$, podemos considerar $R(X)$ como:

$$R(X) = R \otimes_C C(X) \cong (R \otimes_C C_1(X)) \otimes_{C_1(X)} C(X) =$$

$$= R_1(X) \otimes_{C_1(X)} C(X)$$

Agora, aplicando o Lema 9 para $R = R_1(X)$, $F = C(X)$ e $C = K = C_1(X)$, temos:

$$J(R(X)) \cap (R_1(X) \otimes_{C_1(X)} C_1(X)) \subseteq J(R_1(X) \otimes_{C_1(X)} C_1(X)),$$

ou:

$$J(R(X)) \cap R_1(X) \subseteq J(R_1(X))$$

Como $r[X] = r'[X_1^p - X_1] \in R_1(X)$, obtemos:

$r[X] \in J(R_1(X))$.

Consideremos agora o isomorfismo $\theta: C_1(X) \longrightarrow C(X)$, definido por :

$$\theta\ (X_1^p - X_1) = X_1,\ \theta\ (X_i) = X_i,\ i \neq 1,$$

que deixa fixos os elementos de C . Este isomorfismo pode ser extendido a um isomorfismo θ' de $R_1(X)$ sobre $R(X)$, do modo usual. Como já observamos, $\theta'(J(R_1(X))) \subseteq J(R(X))$.

Como $r[X] \in J(R_1(X))$, temos:

$$\theta'\ (r[X]) = \theta'(r'[X_1^p - X_1]) = r'[X_1] \in J(R(X))$$

Mas o grau total de $r'[X_1]$ é menor do que o de $r[X]$, uma vez que as indeterminadas X_i permanecem fixas por θ', e $X_1^p - X_1$ é trocado por X_1 .

Pela condição minimal de $r[X]$, $r'[X_1]$ deve ser nulo. Mas como $r'[X_1]$ é imagem de $r[X]$ pelo isomorfismo θ', devemos ter $r[X] = 0$, o que é absurdo. Isto completa a demonstração do Lema 11, a menos do seguinte fato, que demonstramos a seguir:

Seja $r[X] = r_o + r_1 X_1 + \dots + r_k X_1^k$, $r_i \in R' |X|$, $i = 0, \dots, k$, $r_k \neq 0$, um polinômio tal que

$\tau'(r[X]) = r[X]$. Então, $r[X]$ é da forma: $r[X] = r'[X_1^p - X_1]$, em que r' é um polinômio em $X_1^p - X_1$, com coeficientes em $R'[X]$.

Vamos proceder a algumas observações preliminares:

1. Podemos supor $k \geqq p$.

   De fato, se $s[X] = \tau(r[X]) - r[X] =$

$$= \sum_{i=0}^{k} r_i((X_1 + 1)^i - X_1^i) = k\, r_k\, X_1^{k-1} + \ldots = 0,$$

então, $k\, r_k = 0$. Isto é equivalente a: $r_k\,(1 \otimes \bar{k}) = 0$, em que $\bar{k}$ é a classe de $k \in N$ em Z_p.

Se $\bar{k} \neq \bar{0}$, então teríamos $r_k = 0$, o que é absurdo. Assim, $\bar{k} = \bar{0}$ e portanto $p|k$. Logo, $k \geqq p$.

2. $r[X]$ pode ser escrito na forma:

   $r[X] = h[X]\,(X_1^p - X_1) + t[X]$, em que $h[X]$, $t[X] \in R[X]$, e $t[X]$ é de grau em $X_1 < p$.

   Para ver isso, basta dividir $r[X]$ por $X_1^p - X_1$.

3. Seja $g[X_1] = g_o + g_1 X_1 + \ldots + g_n X_1^n$ um polinômio com coeficientes em $R'[X]$, com $n < p$. Se $g[\bar{\nu}] = 0$, para

$$\bar{\nu} = \bar{0}, \bar{1}, \ldots, \bar{n} \in Z_p,$$

   então g é o polinômio nulo.

   A prova é feita por indução em n.

   Se $n = 0$, $g[X_1] = g_o$, e como $g(\bar{0}) = 0$, devemos ter $g_o = 0$.

Seja então $n \geq 1$, e suponhamos a observação demonstrada para todo polinômio g de grau $\leq n - 1$.

Consideremos o polinômio:

(i) $f[X_1] = g[X_1] - g_n \cdot X_1(X_1 - \bar{1})\ldots(X_1 - (\overline{n-1}))$.

O grau de f em X_1 é $\leq n - 1$, e temos:

$$f[\bar{0}] = 0,\ f[\bar{1}] = 0, \ldots,\ f[\overline{n-1}] = 0 .$$

Estamos portanto nas condições de aplicar a hipótese de indução ao polinômio f: $f|X_1|$ deve ser nulo. Pela igualdade (i), temos:

(ii) $g[X_1] = g_n \cdot X_1 \cdot (X_1 - \bar{1})\ldots(X_1 - (\overline{n-1}))$

Agora, $g[\bar{n}] = 0$, isto é,

(iii) $g_n \cdot \bar{n}\ (\overline{n-1})\ \ldots\ (\bar{1}) = 0$, e como $n < p$,

$$\bar{n} \cdot (\overline{n-1})\ \ldots(\bar{1}) = (\overline{n!}) \neq 0 \text{ em } Z_p$$

Dividindo ambos os membros da igualdade (iii) por $(\overline{n\,!})$, obtemos : $g_n = 0$.

Voltando à igualdade (ii), concluimos que: $g\ [X_1] \equiv 0$, como queríamos demonstrar.

Vamos agora à prova de que $r[X]$ tem a forma requerida para a demonstração do Lema 11.

A prova é feita por indução no grau k de $r[X]$ em X_1 .

Por 1, podemos supor $k \geq p$.

Se $k = p$, por 2, temos que $r[X]$ é da forma:

(iv) $r[X] = h_o (X_1^p - X_1) + t[X]$,

em que $h_o \in R'[X]$ e $t[X]$ é um polinômio de grau em $X_1 < p$.

Calculando τ' em ambos os membros de (iv), e lembrando que $((X_1 + 1)^p - (X_1 + 1)) = X_1^p - X_1$, temos:

$$\tau'(r[X]) = h_o(X_1^p - X_1) + \tau'(t[X])$$

Por hipótese, $\tau'(r[X]) = r[X]$, logo:

$$h_o(X_1^p - X_1) + \tau'(t[X]) = h_o(X_1^p - X_1) + t[X],$$

ou seja,

$$\tau'(t[X]) = t[X]$$

Daí, é fácil concluir que

(v) $(\tau')^\nu (t[X]) = t[X]$, para $\nu = 0, 1, \ldots, p-1$.

Suponhamos que $t[X]$ tem a forma:

$$t[X] = t_o + t_1 X_1 + \ldots + t_n X_1^n, \quad \text{com} \quad n < p,$$

$$t_i \in R'[X], \ i = 1, \ldots, n.$$

Escrevendo explicitamente (v), obtemos:

(vi) $\sum_{i=0}^{n} t_i \, (X_1 + \nu)^i = \sum_{i=0}^{n} t_i \, X_1^i$, para $\nu = 0, 1, \ldots, p-1$.

Igualando os termos independentes de X_1 em (vi) temos:

$t_n \, \nu^n + \ldots + t_1 \nu + t_o = t_o$, para $\nu = 0, 1, \ldots, p-1$, ou, equivalentemente,

(vii) $t_n \, \bar{\nu}^n + \ldots + t_1 \bar{\nu} + t_o = t_o$, para $\bar{\nu} = \bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1} \in Z_p$.

Em outros termos, se substituirmos na expressão de $t\,[X]$ a incógnita X_1 por $\bar{\nu}$, para $\bar{\nu} = \bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{p-1}$, devemos obter t_o para resultado, segundo a igualdade (vii).

Então, o polinômio $t[X] - t_o$ está nas condições da observação 3. Logo,

$$t[X] = t_o \in R'[X].$$

Voltando à igualdade (iv), temos:

$$r[X] = h_o(X_1^p - X_1) + t_o,$$

em que h_o, $t_o \in R'[X]$, como queríamos demonstrar.

Do que foi feito acima, queremos ressaltar a seguinte observação:

4. Se $t[X] = t_o + t_1 \, X_1 + \ldots + t_n \, X_1^n$ é um polinômio com coeficientes em $R'[X]$, de grau, $n < p$ em X_1, que satisfaz

à condição: $\tau'(t[X]) = t[X]$, então $t[X] = t_o \in R'[X]$.

Seja agora $k > p$, e suponhamos que todo polinômio de grau em X_1 menor ou igual a $k - 1$, e maior ou igual a p, seja da forma requerida.

Por 2, podemos supor que $r[X]$ tem a forma:

(viii) $r[X] = h[X](X_1^p - X_1) + t[X]$ em que

$h[X]$, $t[X] \in R[X]$, e $t[X]$ é de grau em $X_1 < p$

Lembrando que, por hipótese, $\tau'(r[X]) = r[X]$, e aplicando τ' a ambos os membros de (viii), temos:

$$\tau'(h[X])(X_1^p - X_1) + \tau'(t[X]) = h[X](X_1^p - X_1) + t[X],$$

ou

(ix) $(\tau'(h[X]) - h[X])(X_1^p - X_1) = t[X] - \tau'(t[X])$.

O primeiro membro de (ix), se não nulo, é de grau em $X_1 \geq p$, e o segundo membro é de grau em $X_1 < p$, já que $t[X]$ tem grau em $X_1 < p$.

Assim, devemos ter:

$$\tau'(h[X]) = h[X], \quad \text{e} \quad \tau'(t[X]) = t[X]$$

Pela observação 4, de $\tau'(t[X]) = t[X]$, obtemos: $\tau'(t[X]) = t_o \in R'[X]$.

Agora, por (viii), o grau de $h[X]$ em X_1 é $\leq k-1$. Se este grau é $< p$, ainda pela observação 4, teremos:

$$h[X] = h_o \in R'[X]$$

Substituindo $t[X]$ e $h[X]$ em (viii), temos: $r[X] = h_o(X_1^p - X_1) + t_o$, como queríamos demonstrar.

Se o grau de $h[X]$ é ainda $\geq p$, pela hipótese de indução, $h[X] = h'[X_1^p - X_1]$, em que h' é um polinômio em $X_1^p - X_1$ com coeficientes em $R'[X]$.

Voltando à igualdade (viii), podemos concluir que $r[X]$ tem a forma requerida. □

Podemos agora proceder à prova do Teorema II .

Teorema II (Amitsur, (4)): Se F é uma extensão transcendente pura de C , então $J(R \otimes F) = N \otimes F$, em que $N = J(R \otimes F) \cap R$ é um ideal nil de R (e, portanto, contido em $J(R)$).

Demonstração: Conforme observamos no início desta Seção, ao considerar extensões transcendentes puras, podemos nos limitar ao anel $R(X)$. Nestas condições, o ideal N em consideração é: $N = J(R(X)) \cap R$.

Primeiro, observamos que $N \otimes C(X)$, que denotaremos $N(X)$, está contido em $J(R(X))$. De fato, $N(X) = N \otimes 1$ . . $1 \otimes C(X)$, e como $N \otimes 1 \subseteq J(R(X))$, é imediato que $N(X) \subseteq J(R(X))$.

Como N é um ideal de R , podemos considerar o epimorfismo canônico $\psi: R \longrightarrow \frac{R}{N} = \bar{R}$. Observemos ainda que $\overline{R}$ é uma álgebra sobre C , com a definição natural.

Seja agora o epimorfismo:

$$\psi \otimes 1 : R \otimes C(X) = R(X) \longrightarrow \overline{R} \otimes C(X) = \overline{R}\,(X)$$

Queremos mostrar que $\operatorname{Ker}(\psi \otimes 1) = N(X)$. A inclusão $N(X) \subseteq \operatorname{Ker}(\psi \otimes 1)$ é trivial. Fixemos então uma base $(c_i)_i$ de $C(X)$ sobre C, tomemos um elemento genérico $\sum_i r_i \otimes c_i \in R(X)$, com $r_i \in R$, para todo i, e suponhamos que

$$\psi \otimes 1\left(\sum_i r_i \otimes c_i\right) = \sum_i \psi\,(r_i) \otimes c_i = 0$$

'o fato de $(c_i)_i$ ser uma base de $C(X)$ sobre C, sabemos que os elementos de $\overline{R}\,(X)$ se escrevem de forma única como $\sum_i \overline{r}_i \otimes c_i$, $\overline{r}_i \in \overline{R}$. Então,

$$\sum_i \psi\,(r_i) \otimes c_i = 0 \Longrightarrow \psi\,(r_i) = 0, \text{ para todo } i .$$

Ou seja, $r_i \in N$, para todo i. Então, o elemento $\sum_i r_i \otimes c_i \in N \otimes C(X) = N(X)$, como queríamos demonstrar.

Assim, temos o isomorfismo:

$$\frac{R\,(X)}{N\,(X)} \cong \overline{R}\,(X), \quad \text{que denotaremos por } \Phi.$$

Este isomorfismo, restrito a $\dfrac{R + N(X)}{N(X)}$, tem por imagem $\overline{R}$, isto é,

$$\frac{R + N\,(X)}{N\,(X)} \cong \overline{R}$$

Observamos ainda que, como $N(X) \subseteq J(R(X))$, pelo Teorema IV do Cap. 0, pág. 4 , temos:

$$J\left(\frac{R(X)}{N(X)}\right) = \frac{J(R(X))}{N(X)} .$$

Vamos agora calcular $J(\overline{R}(X)) \cap \overline{R}$, através do isomorfismo Φ .

$$J(\overline{R}(X)) \cap \overline{R} \cong J\left(\frac{R(X)}{N(X)}\right) \cap \frac{R + N(X)}{N(X)} =$$

$$\frac{J(R(X))}{N(X)} \cap \frac{R + N(X)}{N(X)} = \frac{(J(R(X)) \cap R) + N(X)}{N(X)} =$$

$$= \frac{N + N(X)}{N(X)} = 0.$$

Pelo Lema 11, devemos ter $J(\overline{R}(X)) = 0$. Agora, o isomorfismo Φ, restrito aos radicais, produz :

$$0 = J(\overline{R}(X)) \cong J\left(\frac{R(X)}{N(X)}\right)$$

Como $J\left(\frac{R(X)}{N(X)}\right) = \frac{J(R(X))}{N(X)}$, devemos ter: $J(R(X)) = N(X)$, o que demonstra a primeira parte do Teorema II.

Vamos agora à demonstração de que N é um ideal nil.

Seja $r \in N$, e consideremos o elemento $r.X_1$, em que X_1 é uma indeterminada arbitrária. Como $r . X_1 \in J(R(X))$, tem um quase-inverso $r[X]\ h[X]^{-1} \in R(X)$.

Escrevendo a equação do quase-inverso, temos:

$$r X_1 + r[X] \; h[X]^{-1} + r[X] \; h[X]^{-1} \; r X_1 = 0$$

Multiplicando por $h[X]$, obtemos:

$$(x) \quad h[X] \,.\, r X_1 + r[X] + r[X] \; r X_1 = 0$$

Sejam então:

$$r[X] = r_o + r_1 X_1 + \ldots + r_m X_1^m \, , \; r_i \in R'[X].$$

$$h[X] = h_o + h_1 X_1 + \ldots + h_n X_1^n \, , \; h_i \in R'[X], \; h_n \neq 0$$

Computando os graus em X_1 dos diversos termos de (x), devemos ter:

$$\partial(h[X] \; r X_1) = n + 1$$

Logo, $\partial(r[X] + r[X] \; r X_1)$ deve ser $n+1$. Mas, por outro lado,

$$\partial(r[X] + r[X] \; r \,.\, X_1) \leq m + 1, \text{ por } (x).$$

Assim, obtemos: $n + 1 \leq m + 1$, ou $n \leq m$.

Agora, basta computar os coeficientes de potências convenientes de X_1.

Se $n = m$, computamos os coeficientes de X_1^{m+1}, e obtemos:

(xi) $h_m r + r_m r = 0$

Observamos agora que os coeficientes $r_i \in J(R'(X))$. De fato, podemos considerar $R(X)$ como:

(xii) $R(X) = R \otimes C(X) \cong (R \otimes_C C'(X)) \otimes_{C'(X)} C(X) =$

$$= R'(X) \otimes_{C'(X)} C(X).$$

Podemos aplicar a primeira parte do Teorema II ao anel $R'(X)$ e aos corpos $C(X)$ e $C'(X)$, uma vez que $C(X) = C'(X)(X_1)$ é uma extensão transcendente pura de $C'(X)$. Obtemos:

$$J(R'(X) \otimes_{C'(X)} C(X)) = N' \otimes_{C'(X)} C(X),$$

em que

$$N' = J(R'(X) \otimes_{C'(X)} C(X)) \cap R'(X).$$

Como $r[X] \in J(R(X))$, via o isomorfismo de (xii), obtemos:

(xiii) $r_o \otimes 1 + \ldots + r_m \otimes X_1^m \in J(R'(X) \otimes_{C'(X)} C(X))$

Mas os elementos $1, X_1, \ldots, X_1^m \in C(X)$ são linearmente independentes sobre $C'(X)$, logo, fazem parte de uma base $(c_i)_i$ de $C(X)$ sobre $C'(X)$.

Lembrando que a expressão dos elementos de

$N' \otimes_{C'(X)} C(X)$ é única na forma $\sum_i r_i \otimes c_i$, $r_i \in N'$, devemos ter, por (xiii): $r_i \in N'$, $i = 0,\ldots, m$.

Assim, $r_i \in J(R'(X) \otimes_{C'(X)} C(X))$. Novamente, via o isomorfismo de (xii), obtemos:

$$r_i \in J(R(X)) .$$

Multiplicando (xi) por h_m^{-1}, temos:

$$r + h_m^{-1} \; r_m \, r = 0.$$

Agora, $h_m^{-1} \; r_m \in J(R(X))$, e o Lema 1 de 1.1 garante que, neste caso, devemos ter $r = 0$, e portanto nilpotente.

Se $n < m$, computamos os coeficientes de $x_1^{m+1},\ldots, x_1^{n+1}$:

$x_1^{m+1} \longrightarrow$ (0) $r_m \, r = 0$

$x_1^{m} \longrightarrow$ (1) $r_{m-1} \, r + r_m = 0$, se $m > n + 1$

$x_1^{m-1} \longrightarrow$ (2) $r_{m-2} \, r + r_{m-1} = 0$, se $m - 1 > n + 1$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$x_1^{m-j+1} \longrightarrow$ (j) $r_{m-j} \, r + r_{m-j+1} = 0$, se $m-j+1 > n+1$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$x^{n+1} \longrightarrow$ (m-n) $r_n \cdot r + r_{n+1} + h_n \, r = 0$, se $m-j+1=n+1$, ou $j=m-n$

Agora, multiplicando (1) por r, e usando (0) , obtemos:

$$r_{m-1}\ r^2 = 0$$

Analogamente, multiplicando (2) por r^2, e usando (1), obtemos:

$$r_{m-2}\ r^3 = 0$$

De modo geral, multiplicando (j) por r^j , e usando (j-1), obtemos:

$$r_{m-j}\ r^{j+1} = 0$$

Para $j = m - n - 1$, temos:

$$r_{n+1}\ r^{m-n} = 0$$

Multiplicando (m-n) por r^{m-n}, temos:

$$r_n\ r^{m-n+1} + r_{n+1}\ r^{m-n} + h_n\ r^{m-n+1} = 0,$$

e, usando a anterior, temos:

$$r_n\ r^{m-n+1} + h_n\ r^{m-n+1} = 0$$

Multiplicando esta última igualdade por h_n^{-1} , vem:

$$r^{m-n+1} + h_n^{-1}\ r_n\ r^{m-n+1} = 0$$

Como $h_n^{-1}\ r_n \in J(R(X))$, uma nova aplicação do

Lema 1 conduz a:

$$r^{m-n+1} = 0,$$

o que mostra que N é um ideal nil. Isto completa a prova do Teorema II. $\square$

Pode-se demonstrar que o Teorema II ainda é verdadeiro, para álgebras R sem unidade.

CAPÍTULO II

APLICAÇÃO AO ANEL DE GRUPO FG, EM QUE F É UM CORPO DE CARACTERÍSTICA ZERO.

Vamos agora aplicar os resultados do capítulo anterior para reduzir o problema de determinar se o anel de grupo FG é semi-simples ao caso em que $F = Q$, o corpo dos números racionais. Além disso vamos estabelecer a semi-simplicidade de FG, com algumas hipóteses sobre o corpo F e o grupo G.

2.1 Aplicações Imediatas

Teorema I (Amitsur, (4)): Se G é um grupo tal que QG é semi-simples, então, para todo corpo F de característica zero, FG é semi-simples.

Demonstração: Se F é um corpo de característica zero, F pode ser considerado como uma extensão de Q. Seja H uma extensão transcendente pura maximal de Q em F. Assim, a extensão F de H é algébrica.

Da definição de álgebra de grupo, é claro que $FG \cong KG \otimes_K F$, para corpos arbitrários $K \subseteq F$.

Então, $HG \cong QG \otimes_Q H$. Pelo Teorema II do capítulo I, $J(HG) \cong N \otimes_Q H$, em que N é um ideal nil de QG, logo, contido em $J(QG)$. Por hipótese, $J(QG) = 0$. Assim, $N = 0$ e $J(HG) = 0$.

Agora, $FG \cong HG \otimes_H F$. Como H tem característica zero, a extensão algébrica F de H é separável. Pelo Teorema I do Capítulo I, $J(FG) \cong J(HG) \otimes_H F$. Mas já provamos que $J(HG) = 0$, portanto, $J(FG) = 0$. $\square$

Para obter o segundo resultado, vamos provar um lema.

<u>Lema 1</u>: Para todo grupo G, QG não contém ideais nil não nulos.

<u>Demonstração</u>: Seja $0 \neq x = \sum_g x_g\, g \in QG$, e tomemos

$$x^* = \sum_g x_g^* \cdot g = \sum_g x_g\, g^{-1} .$$

Seja agora o elemento $y = xx^* = \sum_h y_h \cdot h$. Temos:

$$y_h = \sum_{f.g=h} x_f\, x_g^* = \sum_g x_{hg^{-1}}\, x_{g^{-1}} ,$$

$$y_{h^{-1}} = \sum_{f.g=h^{-1}} x_f\, x_g^* = \sum_f x_f\, x_{hf}$$

Mudando a variável na soma de y_h, temos:

$z = g^{-1}$, $y_h = \sum_z x_{hz}\, x_z = y_{h^{-1}}$, e portanto $y_e = \sum_g x_g^2$.

Logo, $y_e \neq 0$ e portanto $y \neq 0$.

Observamos ainda que, se $z = \sum z_g . g$ tem as propriedades: $z_e \neq 0$, $z_g = z_{g^{-1}}$, então z^2 tem as mesmas propriedades:

$$z^2 = \sum_h w_h \,.\, h.$$

$$w_h = \sum_{fg=h} z_f\, z_g = \sum_g z_{hg^{-1}}\, z_g,$$

$$w_{h^{-1}} = \sum_{fg=h^{-1}} z_f\, z_g = \sum_f z_{f^{-1}}\, z_{f^{-1}h^{-1}} = \sum_f z_f\, z_{hf}.$$

Mudando a variável na soma de w_h, temos:

$$k = g^{-1},\ w_h = \sum_k z_{hk}\, z_{k^{-1}} = \sum_k z_{hk}\, z_k = w_{h^{-1}}$$

Ainda, $w_e = \sum_f z_f^2 \neq 0$.

Agora, se $x \neq 0$ pertence a um ideal nil, $y = xx^*$ também pertence, e portanto é nilpotente. Mas, em vista da observação acima, $y^{2^n} \neq 0$ para todo n , o que é absurdo. Logo, todo ideal nil é nulo. $\square$

<u>Teorema II</u> (Amitsur,(2)): Se F é uma extensão transcendente de Q , para todo grupo G , FG é semi-simples.

<u>Demonstração:</u> Seja $K \subseteq F$ uma extensão transcendente pura maximal de Q . Então, F é uma extensão algébrica separável de K . Pelo Teorema II do Capítulo I, $J(KG) \cong N \otimes_Q K$,

em que N é um ideal nil de QG , e o Lema anterior mostra que $N = 0$. Consequentemente, KG é semi-simples.

Agora, pelo Teorema I do Capítulo I,

$$J(FG) \cong J(KG) \otimes_K F = 0 \qquad \square$$

2.2 Alguns Teoremas Gerais

Demonstraremos agora um resultado para o caso em que os coeficientes da álgebra de grupo estão num anel qualquer, para estabelecer a semi-simplicidade de FG em mais alguns casos.

Lema 2: Sejam A um anel, $G = [g]$ um grupo cíclico infinito. Se B é um ideal bilateral não nulo de AG , B contém um polinômio em g de grau mínimo, $p(g) = a_o + a_1 g + \dots + a_n g^n$, $a_n \neq 0$ e os $a_i \in A$. Se $r(g)$ é um polinômio em g tal que $a_n^{\nu} r(g) = 0$ para algum $\nu \geq 1$, então $a_n^{\nu-1} p(g) r(g) = 0$.

Demonstração: Como $B \neq 0$, B contém um elemento $a \neq 0$,

$$a = \sum_{i \in Z} a_i g^i.$$

Multiplicando a por g^k, para k suficientemente grande, obtemos um polinômio em g não nulo, que ainda pertence a B . Agora, basta tomar um polinômio $p(g)$ de grau mínimo entre os polinômios não nulos de B .

Seja $r(g) = r_o + r_1 g + \ldots + r_m g^m$ com $r_m \neq 0$, nas condições da hipótese. Primeiro, observamos que

$$a_n^\nu \, r(g) = 0 \text{ é equivalente a: } a_n^\nu \, r_i = 0,$$

para $i = 0, 1, \ldots, m$. Agora, $a_n^{\nu-1} p(g) \, r(g) = a_n^{\nu-1} p(g) r^*(g) + a_n^{\nu-1} p(g) \, r_m \, g^m$, em que $r^*(g) = r_o + r_1 g + \ldots + r_{m-1} g^{m-1}$ é um polinômio que também satisfaz $a_n^\nu \, r^*(g) = 0$. Se o lema é verdadeiro para todo polinômio r de grau $\leq m-1$, temos:

$$a_n^{\nu-1} p(g) \, r(g) = 0 \text{ é equivalente a } a_n^{\nu-1} p(g) r_m g^m = 0,$$

ou seja, a $a_n^{\nu-1} p(g) \, r_m = 0$. Mas r_m é um polinômio de grau zero, logo, basta provar o teorema neste caso, e o resultado segue por indução.

Seja então $r(g) = r_o \in A$. O polinômio $a_n^{\nu-1} p(g) \, r_o$ tem, para coeficiente de g^n, $a_n^\nu \, r_o$, que é zero por hipótese. Mas $a_n^{\nu-1} p(g) \, r_o \in B$, e pela condição minimal de $p(g)$, $a_n^{\nu-1} p(g) \, r_o = 0$. $\square$

<u>Teorema III</u> (Connell, (5)): Se A é um anel que não contém ideais nil não nulos, e $G = [g]$ é um grupo cíclico infinito, então AG é semi-simples.

<u>Demonstração</u>: Suponhamos que $J(AG) \neq 0$, e seja M o conjunto de todos os polinômios não nulos, de grau mínimo, per

tencentes a $J(AG)$. Pelo lema acima, $M \neq \Phi$. O conjunto dos coeficientes dominantes destes polinômios, reunido com $\{0\}$, é um ideal bilateral $N \neq \{0\}$: a verificação de que N é fechado em relação à soma é trivial. Agora, dados $r \in A$, $p(g) \in M$, $r \cdot p(g)$ é um polinômio de $J(AG)$, de grau mínimo ou nulo; analogamente para $p(g) \cdot r$. Queremos mostrar que N é um ideal nil de A. Seja $p(g) = a_o + a_1 g + \ldots + a_n g^n \in M$, $a_n \neq 0$. Sabemos que $p(g) \cdot g$ é quase-regular em AG . Então, existe $b \in AG$ tal que:

(1) $p(g)\, g + b + p(g)\, g \cdot b = 0$ e

(2) $p(g)\, g + b + b \cdot p(g) g = 0$

Queremos mostrar que b também é um polinômio em g, e que, além disso, b não tem termo independente de g.

Suponhamos então, por absurdo, que a menor potência de g que aparece em b seja g^m, com $m \leqq 0$. Ora, a menor potência de g que aparece em $p(g) \cdot g$ é $\geqq 1$,e em $p(g)g \cdot bb$ é $\geqq m + 1$. Temos ainda, na equação (1), o termo b, que tem, como menor potência de g, g^m, com $m \leqq 0$. Assim, para que se verifique a equação (1) (ou (2)), devemos ter $m > 0$. Isto é, b é um polinômio em g, sem termo independente.

Como $m \geqq 1$, podemos dividir (1) e (2) acima por g , obtendo ainda polinômios em g :

(3) $p(g) + t(g) + g\, p(g)\, t(g) = 0$

(4) $\quad p(g) + t(g) + g\, t(g)\, p(g) = 0,$

em que $t(g)$ é obtido de b pela substituição de g^{i+1} por g^i.

Agora mostraremos que $a_n^{\ell}\, t(g) = 0$, para ℓ suficientemente grande. Suponhamos então, por absurdo, que

$$a_n^{\ell}\ t(g) \neq 0, \text{ para todo } \ell \geq 1, \text{ e seja } \nu \geq 0$$

o grau mínimo destes polinômios.

Podemos escrever $t(g)$ na forma:

$$t(g) = t_1(g) + g^{\nu+1}\, t_2(g), \text{ em que}$$

$$t_1(g) = r_o + r_1\, g + \ldots + r_\nu\, g^\nu$$

Então, existe $\ell_o \geq 1$ tal que $a_n^{\ell_o}\, t_2(g) = 0$. (Basta tomar ℓ_o tal que $a_n^{\ell}\ t(g)$ é de grau ν). Além disso, $a_n^{\ell}\, r_\nu \neq 0$, para todo $\ell \geq 1$ (se $a_n^{\ell}\, r_\nu = 0$, para algum $\ell < \ell_o$, $a_n^{\ell_o}\, t(g)$ é um polinômio de grau $< \nu$, logo nulo pela condição minimal de ν, o que é absurdo; se $a_n^{\ell}\, r_\nu = 0$ para algum $\ell \geq \ell_o$, $a_n^{\ell}\ t(g)$ é um polinômio de grau $< \nu$, o que também conduz a um absurdo).

Estamos agora em condições de aplicar o lema anterior: $p(g)$ é um polinômio de $J(AG)$, de grau mínimo, não nulo. Como $a_n^{\ell_o}\ t_2(g) = 0$, $\ell_o \geq 1$, pelo Lema 2, temos:

$$a_n^{\ell_o - 1}\ p(g)\ t_2(g) = 0, \quad \text{ou ainda,}$$

$$a_n^{\ell_o}\ p(g)\ t_2(g) = 0$$

multiplicando (3) por $a_n^{\ell_o}$, temos:

$$a_n^{\ell_o}\ p(g) + a_n^{\ell_o}\ t_1(g) + a_n^{\ell_o}\ g^{\nu+1}\ t_2(g) + a_n^{\ell_o} g\ p(g) t_1(g) +$$

$$+ a_n^{\ell_o} g\ p(g)\ g^{\nu+1}\ t_2(g) = 0$$

Como $a_n^{\ell_o}\ t_2(g) = 0$, vem:

$$\underbrace{a_n^{\ell_o}\ p(g)}_{\text{grau} \leqq n} + \underbrace{a_n^{\ell_o}\ t_1(g)}_{\text{grau} = \nu} + \underbrace{a_n^{\ell_o} g\ p(g)\ t_1(g)}_{\text{grau} \leqq n+\nu+1} = 0$$

O coeficiente de $g^{n+\nu+1}$ é $a_n^{\ell_o+1}\ r_\nu$, que é nulo pela equação acima. Mas já vimos que $a_n^{\ell}\ r_\nu \neq 0$, para todo ℓ. Isto mostra que $a_n^{\ell}\ t(g) = 0$, para ℓ conveniente.

Multiplicando (4) à esquerda por a_n^{ℓ}, temos:

$$a_n^{\ell}\ p(g) = 0, \quad \text{logo} \quad a_n^{\ell+1} = 0.$$

Isto prova que N é um ideal nil não nulo, o que completa a demonstração do teorema. $\square$

Mostremos agora que, para provar que FG é semi-simples, basta provar que FH é semi-simples, para todo subgrupo H de G , finitamente gerado.

Lema 3 (Passman, (11)): Sejam H um subgrupo de G, e $a \in FH$. Se a é quase regular em FG , a é quase regular em FH .

Demonstração: Seja $b = \Sigma\, b_g \cdot g$ o quase-inverso de a em FG, isto é,

$$a + b + ab = 0$$

Consideremos o elemento b^H de FH ,

$$b^H = \sum_{h \in H} b_h \cdot h$$

(isto é, b^H é a projeção de b sobre FH). Temos:

$$b = b^H + \sum_{g \notin H} b_g \cdot g \qquad \text{e}$$

$$a + (b^H + \sum_{g \notin H} b_g \cdot g) + a\,(b^H + \sum_{g \notin H} b_g \cdot g) = 0, \text{ ou:}$$

$$a + b^H + \sum_{g \notin H} b_g \cdot g + ab^H + a \sum_{g \notin H} b_g \cdot g = 0$$

Como $a + b^H + ab^H \in H$, e

$$\sum_{g\in H} b_g \cdot g + a \sum_{g\notin H} b_g \cdot g \notin H, \text{ temos:}$$

$$a + b^H + ab^H = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{g\notin H} b_g \cdot g + a \sum_{g\notin H} b_g \cdot g = 0.$$

Portanto, b^H é quase-inverso de a e $b^H \varepsilon H$. Pela unicidade do quase-inverso para elementos quase-regulares, $b = b^H$ e a é quase-regular em FH. $\square$

Lema 4 (Amitsur (2)): Se FH é semi-simples, para todo sub-grupo H finitamente gerado de G, então FG é semi-simples.

Demonstração: De fato, seja $a \ \varepsilon \ J(FG)$, e seja H o sub-grupo gerado por $sup(a)$. Então, $a \ \varepsilon \ J(FG) \cap FH$, e o lema acima mostra que este é um ideal quase-regular de FH. Logo, $J(FG) \cap FH \subseteq J(FH)$, e como H é finitamente gerado, $J(FH) = 0$ e $a = 0$. $\square$

2.3 Outras Aplicações

Teorema IV: Se G tem um fator direto cíclico infinito, QG é semi-simples.

Demonstração: Seja $G = G_1 \times G_2$, em que G_2 é um grupo cícli co infinito. Basta observar que $QG = Q(G_1 \times G_2) \cong (QG_1) \cdot G_2$, e que QG_1 não contém ideais nil não nulos, pelo Lema 1.

Agora, o resultado segue do Teorema III. $\square$

Teorema V (Connell (5)): Se G tem um fator direto cíclico infinito, então, para todo corpo F de característica zero, FG é semi-simples.

Demonstração: Segue imediatamente dos Teoremas I e IV. $\square$

Podemos agora obter um teorema completo para grupos abelianos:

Teorema VI (Connell (5)): Seja G um grupo abeliano. Então, FG é semi-simples, para todo corpo F de característica zero.

Demonstração: Pelo Lema 4, podemos supor que G é finitamente gerado. Pelo Teorema Fundamental sobre Grupos Abelianos finitamente gerados, sabemos que G é produto direto de subgrupos cíclicos. Se um destes subgrupos é cíclico infinito, o resultado segue do Teorema V. Se todos os fatores diretos são cíclicos finitos, então G é finito e o resultado segue pelo Teorema de Maschke (Cap. 0, pág. 6). $\square$

OBSERVAÇÃO: É fácil ver que as condições "G comutativo" ou "G tem um fator direto cíclico infinito" são suficientes mas não são necessárias para a semi-simplicidade de FG . Basta tomar uma extensão transcendente F de Q , e lembrar que, pelo Teorema II , FG é semi-simples, para todo grupo G . Também a condição "F é uma extensão transcendente de Q " não é essencial para a semi-simplicidade, conforme mostram os teoremas V e VI .

CAPÍTULO III

APLICAÇÃO AO ANEL DE GRUPO FG , EM QUE F É UM CORPO DE CARACTERÍSTICA $p > 0$

3.1 Alguns teoremas gerais

Nesta secção, os produtos tensoriais considerados serão sempre sobre um corpo C .

Não podemos obter imediatamente um análogo do Teorema II do Capítulo II para característica p em virtude da falta da condição de separabilidade necessária para aplicar o Teorema I do Capítulo I . Contornaremos esta dificuldade com o auxílio do Teorema seguinte:

Teorema I (Passman (12)): Sejam R uma álgebra com unidade sobre um corpo C , F uma extensão finita de C , com $(F : C) = n$. Então, $(J(R \otimes F))^n \subseteq J(R) \otimes F$.

Demonstração: Conforme fizemos notar na demonstração do Lema 6 do Capítulo I, existe um monomorfismo, que denotaremos por ψ , de $R \otimes F$ em $M_n(R)$ (ver pág.12 $R \otimes F \subseteq R \otimes M_n(C) \cong M_n(R)$). Este monomorfismo está definido a partir de uma base de F sobre C , fixada de início , conforme se pode observar na demonstração do Lema 4 do Capítulo I . Nesta demonstração, suporemos que a base fixada tem a forma : $\{x_1 = 1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Observamos os seguintes fatos, que são de fácil verificação tendo em vista a definição de ψ e a base fixada:

i) Se $r \in R$, $\psi(r) = r \cdot I_n$.

ii) Para todo i, $\psi(1 \otimes x_i)$ é uma matriz que tem a 1a. coluna formada por elementos todos nulos, exceto o i-ésimo, que é 1 .

Seja agora V um R-módulo à esquerda e consideremos o conjunto $\overline{V} = \{(v_1,\ldots,v_n) \mid v_i \in V,\ i = 1,\ldots,n\}$. Sobre $\overline{V}$, definiremos uma estrutura de $R \otimes F$-módulo à esquerda:

Se $(v_i)_i$ e $(u_i)_i \in \overline{V}$, definimos:

$$(v_i)_i + (u_i)_i = (v_i + u_i)_i$$

Se $\alpha \in R \otimes F$ e $(v_i) \in \overline{V}$, definimos:

$$\alpha \cdot (v_i) = \left(\psi(\alpha) \begin{pmatrix} v_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \right)^t$$

Seja V_i o subconjunto de $\overline{V}$ formado pelas n-uplas que são nulas exceto no i-ésimo lugar. Devido à observação i), se chamarmos de $\overline{V}_R$ o módulo que se obtém restringindo os escalares a R, temos:

$$\overline{V}_R = V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$$

Ainda, é fácil ver que cada V_i é R-isomorfo a V, portanto:

$$\overline{V}_R \cong \underbrace{V \oplus \ldots \oplus V}_{n \text{ vêzes}}$$

Seja agora V um R-módulo irredutível. Então, $\overline{V}$ tem uma sequência de composição de comprimento $\leq n$, uma vez que $\overline{V}_R$ tem uma sequência de composição de comprimento n. Seja

$$0 \subseteq \overline{V}_1 \subseteq \overline{V}_2 \subseteq \ldots \subseteq \overline{V}_n = \overline{V}$$

esta sequência. Como $\alpha \cdot M = 0$ para todo $R \otimes F$-módulo à esquerda irredutível M e para todo $\alpha \in J(R \otimes F)$, temos:

$$J(R \otimes F) \cdot \frac{\overline{V}_{i+1}}{\overline{V}_i} = 0,$$

ou:

$$J(R \otimes F) \cdot \overline{V}_{i+1} \subseteq \overline{V}_i \text{ , para } i = 0,\ldots,n$$

Portanto:

$$J(R \otimes F)\, \overline{V}_1 = 0,\ J(R \otimes F)\, \overline{V}_2 \subseteq \overline{V}_1,\ \ldots$$

$$\ldots,\ J(R \otimes F)\, \overline{V}_n \subseteq \overline{V}_{n-1},$$

donde concluimos que:

$$(J(R \otimes F))^n . \overline{V} = 0$$

Sejam então $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \otimes x_i \in (J(R) \otimes F)^n$, $\alpha_i \in R$, e $v_1 \in V$. Como $(J(R \otimes F))^n . \overline{V} = 0$, temos:

$$0 = \alpha (v_1, 0, \ldots, 0) = (\sum_i \alpha_i \otimes x_i).(v_1, 0, \ldots, 0).$$

Pela observação ii), $(1 \otimes x_i) . (v_1, 0, \ldots, 0)$ é a n-upla que tem v_1 na posição i e zero nos demais lugares. A igualdade acima se transforma então em:

$$\sum_i \left[(\alpha_i \otimes 1) (0, \ldots, 0, \underbrace{v_1}_{\text{i-ésimo lugar}}, 0, \ldots, 0)\right] = 0$$

Ora, $(0, \ldots, 0, v_1, 0, \ldots, 0) \in V_i$, e $\overline{V}_R$ é soma direta dos V_i. Portanto, desta última igualdade, podemos concluir que:

$$(\alpha_i \otimes 1) (0, \ldots, 0, v_1, 0, \ldots, 0) = 0, \ i=1, \ldots, n$$

Logo, pela observação i),

$$\alpha_i . v_1 = 0, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Então, para todo R-módulo irredutível V, temos: $\alpha_i . V = 0$, $i=1, \ldots, n$. Portanto, $\alpha_i \in J(R)$, e $\alpha = \sum \alpha_i \otimes x_i \in J(R) \otimes F$, donde concluimos que $(J(R \otimes F))^n \subseteq J(R) \otimes F$. $\square$

O Lema seguinte é o análogo para característica p do Lema 1 do Capítulo II:

<u>Lema 1</u> (Passman,(12)): Se G é um grupo que não contém elementos de ordem p, e F é um corpo de característica $p > 0$, o anel FG não contém ideais nil não nulos.

<u>Demonstração</u>: Se $I \neq 0$ é um ideal de FG, I contém um elemento $x = \Sigma\, x_g \,.\, g$ tal que $x_e = 1$. De fato, se $0 \neq x' = \Sigma x'_g \,.\, g \in I$, existe $g \in G$ tal que $x'_g = k \neq 0$. Basta então tomar $x = k^{-1} x' g^{-1}$. Vamos mostrar que, neste caso, $x^{p^n} \neq 0$, para todo n.

Seja $x^p = \Sigma\, y_g \,.\, g$. Então,

$$y_e = \Sigma\, x_{g_1} \cdots x_{g_p} ,$$

em que a soma se extende a todas as p-uplas $(g_1,\ldots,g_p)$ tais que $g_1 \ldots g_p = e$. Seja $\sigma : \{1,\ldots, p\} \longrightarrow \{1,\ldots, p\}$ o p-ciclo: $\sigma = (1\ 2 \ldots p)$. De $g_1 \ldots g_p = e$, obtemos:

$$g_{\sigma^i(1)} \cdots g_{\sigma^i(p)} = e,\ i = 0,1,\ldots,p-1.$$

Assim, se a p-upla $(g_1,\ldots,g_p)$ comparece na soma, as p-uplas $(g_{\sigma^i(1)},\ldots,g_{\sigma^i(p)})$ também comparecem, para $i=0,\ldots,p-1$. Se estas p-uplas são todas distintas, a sua contribuição total para a soma é $p.x_{g_1} \ldots x_{g_p}$, logo zero em F. Assim, para obter y_e, podemos considerar as p-uplas

$(g_{\sigma^i(1)}, \ldots, g_{\sigma^i(p)})$ que não verificam a condição de serem todas distintas para $i = 0, \ldots, p-1$.

Mas, se $(g_{\sigma^i(1)}, \ldots, g_{\sigma^i(p)}) = (g_{\sigma^j(1)}, \ldots\ldots, g_{\sigma^j(p)})$, para $0 \leq i < j < p$, então:

$$(*) \qquad g_{\sigma^i(1)} = g_{\sigma^j(1)}, \ldots, g_{\sigma^i(p)} = g_{\sigma^j(p)}$$

Consideremos a permutação δ do intervalo $[1,p]$: $\delta(\sigma^i(1)) = \sigma^j(1), \ldots, \delta(\sigma^i(p)) = \sigma^j(p)$.

Para cada $k \in [1,p]$, temos:

$$k \xrightarrow{\sigma^i} \sigma^i(k) \xrightarrow{\delta} \sigma^j(k) \xrightarrow{\sigma^{p-j}} k$$

Então, $(\sigma^{p-j} \circ \delta \circ \sigma^i) = 1$, ou seja,

$$\delta = \sigma^{j-i}.$$

Como $0 \leq i < j < p$, σ^{j-i} é um p-ciclo, e daí a partir das igualdades (*), conclui-se que $g_1 = g_2 = \ldots = g_p$.

Então, $g_1 g_2 \ldots g_p = e \Longrightarrow g_1^p = e$, e como G não contém elementos de ordem p, $g_1 = \ldots = g_p = e$. Assim, $y_e = \underbrace{x_e \ldots x_e}_{p \text{ vezes}} = 1^p = 1 \neq 0$.

Daí se conclui que $x^{p^n} \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, I não pode ser um ideal nil. $\square$

3.2 Aplicação às extensões transcendentes

Podemos agora obter um análogo do Teorema II do capítulo II:

Teorema II (Passman,(12)): Seja F uma extensão transcendente de Z_p. Se G é um grupo que não contém elementos de ordem p, FG é semi-simples.

Demonstração: Seja F_o uma extensão transcendente pura maximal de Z_p contida em F. Pelo Teorema II do Capítulo I, temos:

$$J(F_o G) \cong N \otimes_{Z_p} F_o,$$

em que N é um ideal nil de $Z_p G$. Como G não contém elementos de ordem p, $N = 0$ pelo Lema 1 de 3.1, e portanto

$$J(F_o G) = 0$$

Seja agora $\alpha \varepsilon J(FG)$. Então, $\alpha \varepsilon F_1 G$ onde F_1 é uma extensão algébrica finita de F_o, com $(F_1 : F_o) = n$. Pelo Lema 9 do Capítulo I, $\alpha \varepsilon J(F_1 G)$. Mas, pelo Teorema I de 3.1,

$$(J(F_o G \otimes_{F_o} F_1))^n \subseteq J(F_o G) \otimes_{F_o} F_1$$

Como $J(F_o G) = 0$, temos $(J(F_o G \otimes_{F_o} F_1))^n = 0$.

Ou seja, $J(F_o G \otimes_{F_o} F_1)$ é um ideal nilpotente.

Mas, $J(F_o G \otimes_{F_o} F_1) \cong J(F_1 G)$, e mais uma aplicação do Lema 1 de 3.1 mostra que $J(F_1 G) = 0$, logo $\alpha = 0$ e $J(FG) = 0$. □

Devido à condição de separabilidade do Teorema I do Capítulo I, não podemos obter um análogo completo do Teorema I do Capítulo II . Entretanto, com um argumento idêntico ao da demonstração anterior, podemos obter um teorema semelhante:

Teorema III: i) Se G é um grupo tal que $J(Z_p G) = 0$, então , para toda extensão algébrica F de Z_p , $J(FG) = 0$.

ii) Se G é um grupo tal que $Nil(Z_p G) = 0$, então, para toda extensão transcendente F de Z_p ,$J(FG)$ é um ideal nil.

Demonstração: Para i), basta notar que F é uma extensão separável de Z_p . Então, pelo Teorema I do Capítulo I,

$$J(FG) \cong J(Z_p G) \otimes_{Z_p} F = 0$$

Vamos à demonstração de ii). Seja F_o uma extensão transcendente pura maximal de Z_p, contida em F , e tomemos $\alpha \in J(FG)$. Então, como na demonstração do Teorema anterior, α pertence a $F_1 G$, em que F_1 é uma extensão algébrica finita de F_o , com $(F_1 : F_o) = n$ e ainda $\alpha \in J(F_1 G)$.

Pelo Teorema I de 3.1,

$$(J(F_o G \otimes_{F_o} F_1))^n \subseteq J(F_o G) \otimes_{F_o} F_1$$

Agora, pelo Teorema II do Capítulo I, $J(F_o G) \cong$ $\cong N \otimes_{Z_p} F_o$, em que N é um ideal nil de $Z_p G$, portanto nulo por hipótese. Assim, $J(F_o G) = 0$, logo $(J(F_o G \otimes_{F_o} F_1))^n = 0$. Como $J(F_o G \otimes_{F_o} F_1) \cong J(F_1 G)$, temos: $(J(F_1 G))^n = 0$.

Assim, $\alpha^n = 0$ e portanto $J(FG)$ é um ideal nil. □

3.3 Outras Aplicações

Estabeleceremos agora resultados análogos da Secção 2.3.

Teorema IV (Connell (5)): Seja G um grupo que não contém elementos de ordem p, com um fator direto cíclico infinito. Então, se F é um corpo de característica p, FG é semi-simples.

Demonstração: Seja $G = G_1 \times G_2$, em que G_2 é um grupo cíclico infinito. Temos:

$$FG = F(G_1 \times G_2) \cong (FG_1) . G_2$$

Agora, G_1 não contém elementos de ordem p, então, pelo Lema 1, FG_1 não contém ideais nil não nulos. Agora, basta aplicar o Teorema III do Capítulo II . □

Se G é um grupo comutativo, podemos dar condições necessárias e suficientes para a semi-simplicidade de FG .

Teorema V (Connell (5)): Sejam G um grupo comutativo e F um corpo de característica p . Então, FG é semi-simples se, e somente se, G não contém elementos de ordem p .

Demonstração: Suponhamos que G não contém elementos de ordem p . Pelo Lema 4 do Capítulo II, podemos supor que G é finitamente gerado. Pelo Teorema Fundamental sobre grupos abelianos finitamente gerados, G é produto direto de subgrupos cíclicos. Se um destes subgrupos é cíclico infinito, o resultado segue pelo Teorema IV acima. Se todos os fatores diretos são cíclicos finitos , G é finito e o resultado segue pelo Teorema de Maschke.

Seja agora FG semi-simples, e suponhamos que G contém um elemento g de ordem p . Seja I o ideal de FG gerado por $1 + g + \ldots + g^{p-1}$. Se $x = a(1+\ldots+g^{p-1}) \in I$, com $a \in FG$, temos :

$$x^p = a^p \cdot \underbrace{(1 + \ldots + 1)}_{p \text{ vezes}} = a^p \cdot p \cdot 1 = 0$$

Então, I é um ideal nilpotente não nulo, logo $I \subseteq J(FG)$, o que é absurdo. Portanto, G não contém elementos de ordem p. $\square$

3.4 Um exemplo

O objetivo deste exemplo é mostrar que, nas condições do Teorema II, a condição "G não contem elementos de ordem p" não é necessária para a semi-simplicidade de FG.

Sejam A um grupo abeliano sem elementos de ordem 2, e $X = \{1, x\}$ um grupo de ordem 2. Seja G o conjunto: $G = AX\{1,x\}$. Para dar a G uma estrutura de produto semi-direto de A por X, sabemos que basta definir um homomorfismo $\theta: X$ ——— $\mathrm{Aut}(A)$:

$$\theta(1) = 1, \qquad \theta(x)_{(a)} = a^{-1},$$

para todo $a \in A$.

Então, temos a seguinte operação, que dá a G uma estrutura de grupo:

$$(a,b) \cdot (a',b') = (a \cdot \theta(b)_{(a')}, bb'),$$

para todos $a, a' \in A$, $b,b' \in X$.

Para facilitar os cálculos no Lema seguinte, damos uma tabela de operação em G, conforme o segundo elemento do par ordenado seja e ou x:

$$(1) \quad \begin{aligned} (a,x) \,.\, (a',x) &= (aa'^{-1},e) \\ (a,e) \,.\, (a',x) &= (aa',x) \\ (a,x) \,.\, (a',e) &= (a\,a'^{-1},x) \\ (a,e) \,.\, (a',e) &= (aa',e) \end{aligned}$$

Lema 3 (Passman, (11)): Seja K um corpo de característica 2 . Então, com as notações acima, se A é infinito,

$$Nil(KG) = \{0\}$$

Demonstração: Primeiro, observamos que se $a \in KA$ é nilpotente, como A é comutativo, a gera um ideal nil em KA . Mas, pelo Lema 1 de 3.1, $Nil(KA) = 0$, já que A não contém elementos de ordem 2 . Assim, se $a \in KA$ é nilpotente, a deve ser zero.

Vamos usar a notação: $a,b \in KA$. Assim, cada elemento de KG pode ser escrito de forma única como $a+bx$, $a,b \in A$.

Se $a = \sum_{\sigma\in A} k_\sigma \,.\, \sigma$, colocamos $a^{-1} = \sum_{\sigma\in A} k_\sigma . \sigma^{-1}$

Agora, observamos que $ax = xa^{-1}$:

$$ax = \sum_{\sigma\in A} k_\sigma\, \sigma \,.\, x,$$

$$xa^{-1} = \sum_{\sigma\in A} k_\sigma\, x\, \sigma^{-1},$$

e da Tabela (1) é imediato que $(\sigma,e).(e,x)=(e,x).(\sigma^{-1},e)$.

Seja $a + bx \in Nil(KG)$. Então:

$$(a + bx)(a^{-1} + bx) = (aa^{-1} + bxbx) + (bx a^{-1} + abx)$$
$$= (aa^{-1} + bb^{-1}) + (ba + ab)x$$
$$= (aa^{-1} + bb^{-1}) \in Nil(KG),$$

em que a segunda e a terceira igualdades são consequência respectivamente das relações:

$bx\,bx = bx\,xb^{-1} = bb^{-1}$

$bx\,a^{-1} = bax$

$ba + ab = 2\,ab = 0$ (pois a característica de K é 2 e KA é comutativo).

Agora, $aa^{-1} + bb^{-1} \in Nil(KG) \cap KA$, logo é um elemento nilpotente de KA. Pela observação feita no início, $aa^{-1} = bb^{-1}$.

Portanto,

$$(a + bx)^2 = (aa + bx\,bx) + (abx + bxa)$$
$$= (aa + bb^{-1}) + (abx + a^{-1}bx)$$

$$= (a + a^{-1})(a + bx),$$

em que a 3a. igualdade ocorre porque $xa = ax^{-1}$ e $bxa^{-1} = a^{-1}bx$

Demonstramos agora que:

$$(a + bx)^m = (a + a^{-1})^j (a + bx)^{m-j}, \quad m > 0,\ j=0,\dots,m-1.$$

Procederemos por indução em j. Para $j = 0$, a igualdade é trivial. Suponhamos agora a igualdade demonstrada para $0 < j - 1 < m - 1$.

$$(a + bx)^m = (a + a^{-1})^{j-1}(a + bx)^{m-j+1}$$

Como $m - j + 1 \geq 2$, temos:

$$\begin{aligned}(a + bx)^m &= (a + a^{-1})^{j-1}(a + bx)^2(a + bx)^{m-j-1}\\ &= (a + a^{-1})^{j-1}(a + a^{-1})(a + bx)(a + bx)^{m-j+1}\\ &= (a + a^{-1})^{j}(a + bx)^{m-j}\end{aligned}$$

Assim, se $(a + bx)^m = 0$,

$(a + a^{-1})^{m-1}(a + bx) = 0$, ou $(a + a^{-1})^{m-1}a + (a+a^{-1})^{m-1}bx = 0$

Pela unicidade da expressão dos elementos y de KG como $y = a + bx$, $a,b \in KA$, temos:

$$(2) \qquad (a + a^{-1})^{m-1}a = 0$$

Além disso,

$$(3) \qquad (a + a^{-1})a^{-1} = x\left[(a + a^{-1})^{m-1}a\right]x = 0,$$

uma vez que $x(a + a^{-1})^j = (a + a^{-1})^j x$, para todo $j \geq 1$.

Somando (2) e (3), temos:

$$(a + a^{-1})^m = 0$$

Então, $a + a^{-1}$ é nilpotente, logo $a = a^{-1}$.

Agora, se $\sigma \in A$, então, $\sigma(a + bx) \in Nil(KG)$, e acabamos de concluir que, neste caso, $\sigma a = (\sigma a)^{-1}$.

Por conveniência, vamos agora introduzir a seguinte notação:

Para todo grupo G, e para todo corpo K, se $x = \sum_g x_g . g \in KG$, definimos: $\Theta(x) = x_e$.

Suponhamos agora que o a de $a + bx \in Nil(KG)$ é não nulo, e seja $\sigma \in A$ tal que $\Theta(\sigma a) \neq 0$. Como A não tem elementos de ordem 2, o único elemento de A que é seu próprio inverso é a identidade. De $\sigma a = (\sigma a)^{-1}$, temos: o número de termos não nulos de σa, e portanto de a, é ímpar (pois, para $g \neq e$, cada k_g aparece duas vezes). Mas, se $\tau \in A$ e o coeficiente de τ em a é zero, então $\Theta(\tau^{-1} a) = 0$. Disto decorre que o número de termos não nulos de a é par. Então, se $a \neq 0$, todos os elementos de A devem aparecer em sup a, caso contrário, teríamos um absurdo.

Assim, se A é infinito, a deve ser nulo. Então, $a + bx \in Nil(KG)$ é necessàriamente da forma bx. Mas $(bx).x = b$ também pertence a $Nil(KG)$, e como $b \in A$, b deve ser zero.

Então, se A é infinito, $Nil(KA) = \{0\}$ $\square$

Para obter o exemplo, tomamos agora um grupo G nas condições do Lema anterior, com A infinito. x é um elemento de ordem 2 de G. Seja então K uma extensão transcendente de Z_2. Pelo Lema anterior, $Nil(Z_2G) = \{0\}$, donde se conclui, pelo Teorema III - ii), que $J(KG)$ é um ideal nil, logo $J(KG) = \text{Nil}\ (KG)$. Agora, uma nova aplicação do lema acima conduz a $J(KG) = 0$. Acabamos de exibir um grupo G com elementos de ordem 2 , tal que $J(KG) = 0$, para uma extensão transcendente K de Z_2 . (Ver Teorema II, 3.2).

O Lema 3 mostra ainda que podemos ter

$$\text{Nil}\ (KG) = 0$$

em que K é um corpo de característica p , ainda que G contenha elementos de ordem p . (Ver Lema 1, 3.1).

Capítulo IV

CONCLUSÕES

O problema geral de encontrar condições necessárias e suficientes para que o anel de grupo KG seja semi-simples ainda não foi resolvido completamente.

Conforme salientou D.S.Passman em (10), uma das questões mais interessantes, e provavelmente a mais difícil, é determinar se KG é ou não semi-simples, quando K é uma extensão algébrica de seu corpo primo K_0 e G é um grupo arbitrário. Sabemos, por exemplo, que a resposta é afirmativa se $J(K_0G) = 0$ (ver Teorema I, Capítulo I). O aprofundamento desta questão praticamente esgota o estudo do papel do corpo K na semi-simplicidade de KG , uma vez que, para extensões transcendentes, já temos a resposta.

Algumas questões especiais, que seriam um bom início para estudar o problema geral colocado acima, são:

1) J(KG) é sempre um ideal nil ?

2) Se $J(Z_pG) = 0$, então $J(KG) = 0$, para todo corpo K de característica p ?

3) Se G é um grupo que não contém elementos de ordem P e K é um corpo de característica P, KG é semi-simples ?

Sabemos que Nil(KG) = 0, se K é um corpo de característica p e G é um grupo que não contém elementos de ordem p . Passman demonstrou que, se K é um corpo de característica zero e G é um grupo arbitrário, Nil(KG) é sempre nulo (Ver (10), pág.77). Uma resposta afirmativa de 1) conduziria portanto à semi-simplicidade de KG , para corpos K de característica zero e grupos arbitrários G .

Quanto a 2), sabemos que é verdadeira se a extensão K de Z_p é algébrica (ver Teorema I, Capítulo I) . Uma resposta afirmativa de 2) produziria um teorema completamente análogo, para característica p , do Teorema I do Capítulo II . Então, teríamos tantas informações para característica p quantas temos para característica zero.

Sabemos que a resposta da 3a. questão é afirmativa, se K é uma extensão transcendente de seu corpo primo. Assim, é suficiente ater-se a extensões algébricas de Z_p . Como o radical se comporta bem para extensões algébricas separáveis do corpo base, basta estudar $J(Z_p G)$.

BIBLIOGRAFIA

(1) Amitsur, S.A. - Álgebras over infinite fields, Proc.Am. Math. Soc., 7, 35-48 (1956)

(2) - On the Semisimplicity of Group Algebras, Michigan Math. J., 6,251-253(1959)

(3) - Radicals of Polynomial Rings, Canad. J.Math. 8, 355-361 (1956)

(4) - The Radical of Field Extensions, Bull.Res. Concil of Israel, 7F, 1-10 (1959)

(5) Connell, I.G. - On the Group Ring, Canad. J. Math, 15, 650-685 (1963)

(6) Divinsky, N.J.- Rings and Radicals, George Allen and Unwin, London (1965)

(7) Jacobson, N. - Structure of Rings, Am. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol 28, Providence,Rhode Island (1956)

(8) - The theory of Rings, Mathematical Survey II, Am.Math. Soc., New York (1943)

(9) Lambek, J. - Lectures on Rings and Modules, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Massachussets (1966)

(10) Passman, D.S. - Infinite Group Rings, Marcel Dekker Inc. New York (1971)

(11) - Nil Ideals in Group Rings, Mich. Math.J., 9, 375-384 (1962)

(12) Passman, D.S. - On the Semi-simplicity of Twisted Group Algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 25, 161-166 (1970)

(13) Perlis, S. - A Characterization of the Radical of an Algebra, Bull. Am. Math. Soc., 48, 128-132 (1942)

(14) Ribenboim, P. - Rings and Modules, N. 24, Interscience Publishers, New York (1969)

(15) Villamayor, O.E. - On the Semisimplicity of Group Algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 9, 621-627 (1958)

(16) - On the semisimplicity of Group Algebras II, Proc. Amer. Math. Soc., 10, 27-31 (1959).

(17) Zariski, O. and Samuel, P. - Commutative Algebra, Vol. II D. Van Nostrand Company, Inc.- Princeton - New Jersey (1959).