

SOBRE A COMPARAÇÃO DE ALGUNS TESTES EM  
MODELO DE DOIS FATORES DE CLASSIFICAÇÃO

HÉLIO DOS SANTOS MIGON

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM  
ESTATÍSTICA

ORIENTADOR: Prof. Dr. J. NORBERTO W. DACHS  
I. T. A.

JUNHO DE 1974

SÃO PAULO

## Í N D I C E

CAP. I - INTRODUÇÃO	
§1º - Descrição do Modelo . . . . .	2
§2º - Os três procedimentos . . . . .	4
2-A - Teste F . . . . .	4
2-B - Teste baseado com postos separados.	4
2-C - Teste baseado com postos após ali- nhamento. . . . .	5
§3º - Comparações . . . . .	5
CAP. II - TESTE F	
§1º - Introdução. . . . .	7
1-A - Modelo Linear Geral . . . . .	7
2-B - Aplicação ao Modelo do Capítulo I .	12
§2º - Distribuição Assintótica sob alternativa.	14
CAP. III - TESTE BASEADO COM POSTOS SEPARADOS	
§1º - O Teste Baseado com Postos Separados. . .	18
§2º - Distribuição Assintótica sob Hipótese Nu- la. . . . .	21
§3º - Distribuição Assintótica sob Alternativa.	25
CAP. IV - TESTE BASEADO COM POSTOS APÓS ALINHAMENTO	
§1º - Introdução. . . . .	27
§2º - Distribuição Assintótica sob Hipótese Nu- la. . . . .	31
§3º - Distribuição Assintótica sob Alternativa.	35
CAP. V - SOBRE AS COMPARAÇÕES	
§1º - Definições e Fatos Básicos. . . . .	38
§2º - Comparações Assintóticas. . . . .	44
§3º - Comparações em Pequenas Amostras. . . . .	47
§4º - Algumas Conclusões. . . . .	54
APÊNDICE I . . . . .	59
APÊNDICE II. . . . .	61
BIBLIOGRAFIA . . . . .	65

## AGRADECIMENTOS

Ao longo de nossa formação foram várias as pessoas que dela participaram, direta ou indiretamente. Agradecemos, indistintamente, a todas e, em particular aos:

Prof. Dr. J. Norberto W. Dachs, orientador desta dissertação, cuja boa vontade e incentivo fizeram com que este trabalho existisse;

Prof. Dr. Carlos Alberto Barbosa Dantas, a quem devemos boa parte de nossa formação e, sobretudo, a existência deste programa de mestrado;

Colegas do Departamento de Estatística que, de algum modo nos ajudaram e incentivaram;

Centro de Computação Eletrônica da USP pela presteza com que realizou a parte de computação;

Colega João Baptista Esteves de Oliveira, pelo trabalho paciente, na datilografia dos manuscritos desta dissertação.

*Hélio S. Migon*

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

Neste trabalho iremos discutir três métodos de análise para experimentos comparativos. Nosso objetivo será comparar estas três técnicas. Assim, dois caminhos se apresentam. No primeiro, obteremos resultados assintóticos, e no outro, utilizaremos técnicas de simulação — Método de Monte Carlo — para fazer comparações em pequenas amostras. Empregaremos simulação devido a dificuldades para se obter resultados exatos. Do ponto de vista assintótico, vários resultados são encontrados em Mehra & Sarangi ([8]).

Esperamos que os resultados da simulação nos possibilitem evidenciar alguns fatos sobre estas três técnicas de análise.

Procuramos desenvolver este trabalho de forma objetiva, evitando demonstrações e tentando descrever somente as três técnicas de análise, juntamente com algumas de suas propriedades. Isto porque temos como objetivo central a obtenção dos resultados numéricos da simulação.

§1º - Descrição do Modelo

Consideremos uma situação experimental para a qual adotamos o seguinte modelo.

Sejam  $K$  tratamentos e  $n$  blocos e façamos  $m_j$  ( $m_j \geq 1$ ) observações na  $(i,j)$ -ésima casela, para  $(i=1,2,\dots,n$  e  $j=1,2,\dots,k)$ .

Seja  $X_{ijl}$  ( $l=1,2,\dots,m_j$ ) a  $l$ -ésima observação, na casela  $(i,j)$ .

A seguir, admitiremos que as  $m_j$  observações independentes, na  $(i,j)$ -ésima casela, têm função de distribuição  $F_{ij}$  contínua, satisfazendo a condição:

$$(1.1) \quad F_{ij}(x) = F_j(x + \xi_i)$$

onde os  $\xi_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ) são constantes desconhecidas que chamaremos de efeitos de bloco.

Este modelo corresponde à suposição de aditividade dos efeitos de bloco, no caso de dois fatores de classificação, isto é:

$$(1.2) \quad E X_{ijl} = \eta + \xi_i + \mu_j$$

onde  $\eta$  é uma contribuição geral e os  $\mu_j$  representam os efeitos dos tratamentos.

Assim, temos:

TRATAMENTOS

		TRATAMENTOS						
		1	2	...	j	...	k	
B L O C O S	$i$	$j$						
	1		$F_1(x+\xi_1)$	$F_2(x+\xi_1)$	...	$F_j(x+\xi_1)$	...	$F_k(x+\xi_1)$
	2		$F_1(x+\xi_2)$	$F_2(x+\xi_2)$	...	$F_j(x+\xi_2)$	...	$F_k(x+\xi_2)$
	⋮		⋮	⋮		⋮		⋮
	i		$F_1(x+\xi_i)$	$F_2(x+\xi_i)$	...	$F_j(x+\xi_i)$	...	$F_k(x+\xi_i)$
	⋮		⋮	⋮		⋮		⋮
	n		$F_1(x+\xi_n)$	$F_2(x+\xi_n)$	...	$F_j(x+\xi_n)$	...	$F_k(x+\xi_n)$

Neste modelo temos interesse em testar a hipótese:

$$(1.3) \quad H: F_1 = F_2 = \dots = F_k$$

ou equivalentemente:  $\mu_j = \mu$  ( $j=1,2,\dots,k$ ), o que significa não existir diferença entre os  $k$  tratamentos.

Consideremos, também, para cada  $n$ , a hipótese alter<sub>n</sub> nativa:

$$(1.4) \quad K_n: F_j(x) = F(x+\theta_j n^{-\frac{1}{2}}) \quad j=1,2,\dots,k$$

onde os  $\theta_j$  não são todos nulos.

Esta sequência de alternativas satisfaz a propriedade de convergir a  $H$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . O porquê de sua escolha ficará clara posteriormente quando conceituarmos eficiência relativa assintótica no sentido de Pitmann.

§2º - Os Três Procedimentos

2-A - TESTE F

Se supusermos, além da condição de continuidade, que as  $F_{ij}$  são normais, temos o modelo:

$$(2.1) \quad X_{ijl} = \eta + \xi_i + \mu_j + e_{ij} \quad \text{onde } e_{ij} \sim N(0, \alpha^2)$$

Observemos que este é um modelo de dois fatores de classificação sem interação ou aditivo.

Nestas condições, o teste F, definido pela razão de variâncias, é usualmente aplicado e tem propriedades "ótimas". No próximo capítulo, descreveremos esta estatística e algumas de suas propriedades necessárias para a determinação das eficiências relativas assintóticas.

2-B - TESTE BASEADO EM PONTOS SEPARADOS

- tipo Kruskal - Wallis -

Este é um teste não paramétrico e sua aplicação ao modelo descrito no parágrafo 1º pode ser encarada como uma generalização do teste de Friedman ([3])

As observações, em cada bloco, são substituídas pelos seus postos. A estatística do teste será uma função das somas de postos em cada tratamento.

No caso de  $k=2$ , isto é, quando temos a comparação de dois tratamentos, o nosso teste é exatamente o teste de si

nal. Por outro lado, se fizermos  $n=1$  recairemos no teste de Kruskall-Wallis ([7]). Assim o teste baseado em postos separados pode ser olhado como uma generalização do Kruskall-Wallis para  $n \geq 2$ .

No capítulo III chamaremos a atenção para algumas vantagens do uso de procedimentos não paramétricos e descreveremos este teste e suas propriedades fundamentais.

## 2-C - TESTE BASEADO EM POSTOS APÓS ALINHAMENTO

Outra técnica de análise, aplicável à nossa situação experimental, é aquela proposta por Hodges & Lehmann ([6]) e desenvolvida posteriormente, para o caso de  $k$  tratamentos, por Mehra & Saranji ([8]). De forma bem sucinta, o que fazemos é: inicialmente "alinhar" nossas observações, isto é, subtrair de cada observação alguma estimativa do efeito de bloco; a seguir, tomamos os postos de nossas observações em conjunto. A estatística do teste é definida em função das somas dos postos para cada tratamento. No Capítulo IV detalharemos este procedimento, chamando atenção para o fato deste ser um teste condicional.

### §3º - Comparações

Desenvolveremos, no último capítulo deste trabalho, o conceito de eficiência relativa assintótica (Noether [10]), e



Hannan [5]. No nosso modelo, a eficiência relativa assintótica é dada pela razão inversa dos parâmetros de não centralidade das distribuições assintóticas das estatísticas.

Apesar de conseguirmos expressões aparentemente simples, para a determinação das eficiências relativas assintóticas, estas se tornam complicadas de calcular, sem a suposição de normalidade.

Como foi mencionado compararemos nossos procedimentos, no caso de pequenas amostras, utilizando técnicas de simulação. O que faremos, basicamente, é gerar determinações da distribuição uniforme no intervalo  $(0,1)$  e a partir destas, obteremos amostras de algumas distribuições contínuas aplicando a transformação integral (ou probabilística) ou variantes desta (ref. [12]). Para a geração dos números pseudo-aleatórios, utilizaremos o gerador inerente ao sistema B 6700 do C.C.E.da USP. O que desejamos é uma estimativa do poder de cada um dos três testes que descrevemos.

O Capítulo V será, então o ponto fundamental do trabalho.

## CAPÍTULO II

### O TESTE F

Descreveremos o teste F, tendo por objetivo estabelecer um resultado que forneça a distribuição assintótica da estatística  $F_n$ , sob alternativas contíguas a  $H$ , como definida no Capítulo I,

Introduziremos os resultados para o modelo linear geral e, como aplicação ao nosso modelo, obteremos a estatística  $F_n$ .

#### §1º - Introdução

##### 1-A - MODELO LINEAR GERAL

Consideremos o vetor  $X = (X_1, \dots, X_n)'$  cujas componentes são variáveis aleatórias independentes e normalmente distribuídas, com média  $\xi_i$  e variância comum  $\sigma^2$ .

Admitamos que  $\xi = E X$  pertence a algum subespaço de  $E_n$  (espaço euclidiano) de dimensão  $k < n$ . Denotemos por  $L$  este subespaço.

A hipótese que temos interesse em testar é que  $\xi \in L_1$  onde  $L_1$  é subespaço de  $L$  de dimensão  $(k-r)$ .

Em forma matricial colocamos:

$$(1.1) \quad \underline{\xi} = E X = A \underline{\theta}$$

onde  $A$  é uma matriz  $n \times k$  de característica  $k \leq n$  e  $\underline{\theta}$  é um vetor  $k \times 1$ .

Nestas condições,  $L$  é gerado pelos vetores coluna de  $A$ . Em resumo, nossa suposição é que

$$(1.2) \quad X \sim N(A\underline{\theta}; \sigma^2 I)$$

onde  $I_{n \times n}$  é a matriz identidade.

Podemos expressar a hipótese nula por:

$$(1.3) \quad H_0: B \underline{\theta} = \underline{0}$$

onde  $B$  é  $r \times k$ , de característica  $r \leq k$ . Assim  $L$  é gerado pelos vetores coluna de  $B$ .

Através de uma transformação ortogonal  $\underline{y} = R X$  colocamos o modelo linear geral em sua forma canônica. Assim o vetor:

$$\underline{y} = (Y_1, \dots, Y_n) \sim N(\underline{\mu}, \sigma^2 I)$$

onde  $\underline{\mu} = E \underline{y}$  é tal que  $\mu_{k+1} = \dots = \mu_n = 0$ .

A hipótese a ser testada é:  $\mu_1 = \dots = \mu_r = 0$ .

Note que necessitamos que  $R$ , além de ser ortogonal satisfaça as condições abaixo:

- i - as últimas  $n-k$  linhas de  $R$  sejam perpendiculares a  $L$ , isto é às colunas de  $A$ ;
- ii - as primeiras  $r$  linhas de  $R$  sejam perpendiculares a  $L_1$ ;
- iii - as restantes  $k-r$  gerem  $L_1$ .

É claro que  $Y \sim N(RA\theta; \sigma^2 I)$  como desejamos. Além disso, como  $\mu = RA\theta$  temos  $\mu_j = 0$  para  $j=k+1, \dots, n$ . Sob a hipótese nula  $\mu_1 = \dots = \mu_r = 0$ , pois as primeiras linhas de  $R$  são perpendiculares a  $L_1$ .

Consideremos, finalmente, a razão:

$$(1.4) \quad F = \frac{1}{r} \sum_1^r Y_i^2 \bigg/ \frac{1}{n-k} \sum_{k+1}^n Y_i^2$$

a qual sob as suposições do modelo linear geral tem distribuição  $F$  não central com  $r$  e  $(n-k)$  graus de liberdade e parâmetro de não centralidade  $\gamma^2 = \sum_1^r \mu_i^2 / \sigma^2$ .

O teste baseado em  $F$  que rejeita  $H_0$  quando  $F > c$  é uniformemente mais poderoso invariante ([2]). A constante  $c$  é determinada da distribuição  $F$  central de forma que o nível de significância do teste seja  $\alpha$ .

Nas aplicações, entretanto, é conveniente desenvolver os cálculos em termos das observações originais -  $X_i$  - ao invés de se encontrar a transformação ortogonal que leva a forma canônica.

Note que:

$$(1.5) \quad s^2 = \sum_{i=1}^k (Y_i - \mu_i)^2 + \sum_{i=k+1}^n Y_i^2$$

é tal que seu mínimo irrestrito é:

$$(1.6) \quad \sum_{i=k+1}^n Y_i^2$$

Como transformações ortogonais preservam distância, temos:

$$(1.7) \quad s^2 = \sum_{i=1}^n (Y_i - E Y_i)^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \xi_i)^2$$

Assim:

$$(1.8) \quad \min s^2 = \min_{\xi \in L} \sum_{i=1}^n (X_i - \xi_i)^2$$

e então, se  $\hat{\xi}_i$  é estimador de mínimos quadrados de  $\xi$ , temos:

$$(1.9) \quad \sum_{i=k+1}^n Y_i^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\xi}_i)^2$$

Analogamente:

$$(1.10) \quad \min_{H_0} \sum_{i=1}^n (Y_i - E Y_i)^2 = \min_{\xi \in L_1} \sum_{i=1}^n (X_i - \xi_i)^2$$

e temos sob  $H_0$ :

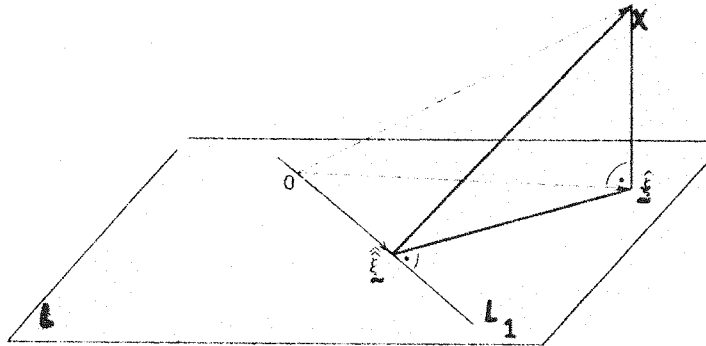
$$(1.11) \quad \sum_{i=1}^r Y_i^2 + \sum_{i=k+1}^n Y_i^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \hat{\xi}_i)^2$$

onde  $\hat{\xi}_i$  é estimador de mínimo quadrado de  $\xi_i$ .

De (1.9) e (1.11) segue-se que:

$$(1.12) \quad \sum_1^r Y_i^2 = \sum_1^n (X_i - \hat{\xi}_i)^2 - \sum_1^n (X_i - \hat{\xi}_i)^2$$

Como os vetores  $\hat{\xi}_i$  e  $\hat{\xi}_i$  são as projeções de  $X$  em  $L$  e  $L_1$ , vemos que estes, juntamente com  $X$ , formam um triângulo retângulo, então:



$$\sum_1^r Y_i^2 = \sum_1^n (\hat{\xi}_i - \hat{\xi}_i)^2$$

e

$$(1.13) \quad F = \frac{\frac{1}{r} \sum_1^n (\hat{\xi}_i - \hat{\xi}_i)^2}{\frac{1}{n-k} \sum_1^n (X_i - \hat{\xi}_i)^2}$$

É desejável expressar, também, o parâmetro de não centralidade em termos dos  $\xi_i$ ,  $i=1,2,\dots,n$ .

Como  $X = R^{-1}Y$  e  $\xi = R^{-1}\mu$ , isto é,  $\xi$  é transformado

como  $X$ . Se expressarmos  $\hat{\xi}$  e  $\hat{\xi}$  como funções de  $X$ , digamos  $\hat{\xi}(X)$  e  $\hat{\xi}(X)$ , então temos analogamente a (1.12),

$$(1.14) \quad \gamma^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_1^k \mu_i^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_1^n \{ \hat{\xi}_i(\xi) - \bar{\xi}_i(\xi) \}^2$$

1-B - APLICAÇÃO AO MODELO DO CAPÍTULO I

Consideremos as variáveis aleatórias  $X_{ijl}$  ( $i=1,2,\dots$   
 $\dots,n; j=1,2,\dots,k; l=1,2,\dots,m_j$ ) independentes e com distri-  
 buição normal de média  $E X_{ijl} = \xi_{ij}$  e variância comum  $\sigma^2$ .

Supondo nosso modelo aditivo, isto é:

$$(1.15) \quad \xi_{ij} = \xi_i' + \mu_j'$$

onde  $\xi_i'$  são os efeitos de bloco (referem-se às linhas); e os  $\mu_j'$  são os efeitos dos tratamentos (referem-se às colunas).

Definindo-se  $\eta = \sum_{i,j} \frac{m_j}{nN'} \xi_{ij}$ , onde  $N' = \sum_{i,j} m_j$ ,  $\xi_{i.} = \sum_j \xi_{ij}/k$  e  $\xi_{.j} = \sum_i \xi_{ij}/n$ , temos:

$$(1.16) \quad \begin{cases} \xi_i = \xi_{i.} - \eta \\ \mu_j = \xi_{.j} - \eta \end{cases} \text{ e } \begin{cases} E X_{ijl} = \eta + \xi_i + \mu_j \\ \text{onde } \sum_i \xi_i = \sum_j \mu_j = 0 \end{cases}$$

Observe que  $\xi_{ij}$  pertence a um subespaço  $L$  de dimensão  $(n+k-1)$ , pois no modelo (1.16) temos  $(n+k+1)$  parâmetros e duas restrições.

Desejamos testar a hipótese  $H_0: \mu_1 = \dots = \mu_k$  ou como exposto anteriormente, se  $\xi_{ij} \in L_1$  onde  $L_1 \subset L$ . Isto implica em

considerarmos, sob  $H_0$ , mais  $(k-1)$  restrições.

Consideremos,

$$(1.17) \quad S^2 = \sum_{i,j,\ell} (X_{ij\ell} - \xi_{ij})^2 = \sum_{i,j,\ell} (X_{ij\ell} - \eta - \xi_i - \mu_j)^2$$

A determinação dos estimadores de mínimos quadrados de  $\eta$ ,  $\xi_i$  e  $\mu_j$  envolveria uma minimização de (1.17) sujeita às condições de (1.16). Para a solução deste problema, deveríamos introduzir multiplicadores de Lagrange. A fim de contornarmos este trabalho, consideremos a expressão:

$$(1.18) \quad S^2 = \sum_{i,j,\ell} (X_{ij\ell} - \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{.j.} - \bar{X}_{...})^2 + \sum_{i,j,\ell} (\bar{X}_{i..} - \bar{X}_{...} - \xi_i)^2 \\ + \sum_{i,j,\ell} (\bar{X}_{.j.} - \bar{X}_{...} - \mu_j)^2 + \sum_{i,j,\ell} (\bar{X}_{...} - \eta)^2$$

onde:

$$\bar{X}_{ij.} = \frac{1}{m_j} \sum_{\ell=1}^{m_j} X_{ij\ell} \\ \bar{X}_{i..} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \bar{X}_{ij.} \\ \bar{X}_{...} = \sum_{ij} \frac{m_j}{nN'} \bar{X}_{ij.}$$

segue-se que:

$$(1.19) \quad \begin{cases} \hat{\eta} &= \bar{X}_{...} \\ \hat{\mu}_j &= \bar{X}_{.j.} - \bar{X}_{...} \\ \hat{\xi}_i &= \bar{X}_{i..} - \bar{X}_{...} \end{cases}$$

são tais que:



$$\sum_{i,j,l} (x_{ijl} - \hat{\xi}_{ij})^2 = \sum_{i,j,l} (x_{ijl} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{...})^2 = \min_{\xi_{ij} \in L} S^2$$

Sob  $H_0$ , temos:

$$(1.20) \quad \hat{\xi} = \bar{x}_{...} ; \hat{\xi}_i = \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{...}$$

Assim, a partir de (1.19) e (1.20), obtemos:

$$(1.21) \quad \sum_{i,j,l} (\hat{\xi}_{ij} - \hat{\xi}_{ij})^2 = \sum_{i,j,l} (\bar{x}_{.j.} - \bar{x}_{...})^2$$

Por (1.13), temos:

$$(1.22) \quad F_n = \frac{n \sum_{j=1}^k m_j (\bar{x}_{.j.} - \bar{x}_{...})^2 / k-1}{\sum_{i,j,l} (x_{ijl} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{...})^2 / (nN' - n - k + 1)}$$

e  $F_n \sim F_{v_1, v_2}(\gamma^2)$  onde:

$v_1 = k-1$ ,  $v_2 = nN' - k - n + 1$  são os graus de liberdade do numerador e denominador, respectivamente.

Assim nosso teste rejeitará  $H_0$  se  $F_n > c$ , onde  $c$  é uma constante. A determinação de  $c$  é feita por meio da tabela da distribuição  $F$  central e tal que  $P[F_n > c] = \alpha$ , onde  $\alpha$  é o nível de significância.

### §2º - Distribuição Assintótica sob a Alternativa

Desejamos mostrar que  $F_n$ , sob a alternativa, converge em distribuição a uma  $\chi^2$  não central. Este resultado será útil no cálculo das eficiências relativas assintóticas.

O lema que enunciamos abaixo encontra-se em Cramer ([1]).

Lema 2.1 - Seja  $(X_n)_{n \geq 1}$  uma seqüência de variáveis aleatórias com função de distribuição  $(F_n(x))_{n \geq 1}$ . Suponhamos que  $F_n(x)$  tenda a  $F(x)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ , onde  $F(x)$  é a função de distribuição de uma variável aleatória  $X$ . Seja  $(Y_n)_{n \geq 1}$ , outra seqüência de variáveis aleatórias, tal que

$$Y_n \xrightarrow{P} k$$

onde  $k$  é uma constante positiva.

Então a seqüência  $Z_n = \frac{X_n}{Y_n}$  é tal que sua função de distribuição converge a  $F(kX)$ .  $\square$

Aplicando este lema podemos demonstrar:

Teorema 2.2 - Seja  $X$  uma variável aleatória com distribuição de  $\chi_r^2(\Delta)$  e  $(Y_n)_{n \geq 1}$  uma seqüência de variáveis aleatórias com distribuição  $(\chi_n^2(\cdot))_{n \geq 1}$  e suponhamos que  $X$  seja independente de  $Y_n$ ,  $\forall n$ . A razão  $F_{r,n} = \frac{X/r}{Y_n/n}$  tem distribuição  $F_{r,n}(\Delta)$ . Assim, quando  $n \rightarrow \infty$ ,  $F_{r,n}(\Delta) \xrightarrow{L} \chi^2(\Delta)$ .

PROVA: Basta mostrar que  $\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{P} 1$ , pois o resultado segue.

Pela desigualdade de Chebyshev, temos:

$$P\left[\left|\frac{Y_n}{n} - \frac{E Y_n}{n}\right| > \varepsilon\right] \leq \frac{\text{Var}(Y/n)}{\varepsilon^2}$$

onde  $E \frac{Y_n}{n} = 1$  e  $\text{Var} \left(\frac{Y_n}{n}\right) = \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$ .

Assim  $P\left[\left|\frac{Y_n}{n} - \frac{E Y_n}{n}\right| > \varepsilon\right] \leq \frac{2}{n\varepsilon^2}$  que tende a zero

quando  $n \rightarrow \infty$ . Logo  $\frac{Y_n}{n} \xrightarrow{P} 1$ .

Corolário 2.3 - Suponhamos que, para todo  $n$ ,  $K_n$  seja verdadeira. Nestas condições a estatística  $F_n$  definida em (1.21), converge em distribuição, quando  $n \rightarrow \infty$ , para uma  $\chi^2$  não central com  $(k-1)$  graus de liberdade e parâmetro de não centralidade  $\Delta_F$ , dado por:

$$(2.1) \quad \Delta_F = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=1}^k m_j (\theta_j - \bar{\theta})^2 \quad \square$$

A expressão (2.1) segue de (1.14) bastando lembrar que  $K_n: F_j(x) = F(x + \theta_j/\sqrt{n})$  ou seja  $\mu_j = \frac{1}{\sqrt{n}}(\theta_j - \bar{\theta})$ , com

$$\bar{\theta} = \frac{\sum_{j=1}^k m_j \theta_j}{N^*} \quad \text{e} \quad N^* = \sum_{j=1}^k m_j.$$

## CAPÍTULO III

### TESTE BASEADO EM POSTOS SEPARADOS

O propósito deste capítulo é descrever um teste baseado em postos, análogo ao F, para o modelo do capítulo I.

Enumeramos a seguir, algumas vantagens, dentre outras, do uso de postos, ao invés das observações originais, na análise estatística:

- i) Os procedimentos não paramétricos, via de regra, só exigem suposições bem gerais acerca do tipo da distribuição de onde estamos amostrando.
- ii) Os testes baseados em postos tem nível de significância exato, independentemente de suposições acerca da distribuição original.
- iii) Estes procedimentos são "razoavelmente insensíveis" a erros grosseiros.

Na comparação de  $k$  tratamentos temos que distinguir duas situações típicas. A primeira, usualmente chamada de modelo de um fator de classificação e a outra de modelo de dois fatores de classificação.

Para o primeiro destes modelos temos o teste de Kruskal-Wallis ([7]). No segundo modelo, quando temos uma ob

servação por casela, o teste de Friedman ([3]) é aplicável.

No modelo que estamos abordando, isto é, dois fatores de classificação com várias observações por casela (frequências proporcionais), usaremos para estatística do teste uma generalização da estatística de Friedman.

Nosso objetivo será descrever este teste e discutir sua distribuição assintótica, tanto sob  $H_0$  como sob  $K_n$ .

### §19 - O Teste Baseado em Postos Separados

Suponha que fazemos  $m_j$  observações na  $(i,j)$ -ésima casela. Sejam  $X_{ij\ell}$  ( $\ell=1,2,\dots,m_j$ ) estas variáveis aleatórias independentes e com função de distribuição satisfazendo (I.1.1).

Sob a hipótese nula, as variáveis aleatórias  $X_{ij\ell}$  ( $j=1,2,\dots,k$  e  $\ell=1,2,\dots,m_j$ ) são identicamente distribuídas, com função distribuição  $F$ , a qual é desconhecida mas do tipo contínuo.

Em cada bloco (para cada  $i=1,2,\dots,n$  fixado) substituiremos as observações originais pelos seus postos, isto é:  $r(x_{ij\ell})$  = número de observações menores ou iguais a  $x_{ij\ell}$  ou de forma equivalente, ordenamos crescentemente as observações e associamos a cada  $x_{ij\ell}$  a sua posição relativa dentre todas as observações deste bloco. Denotemos por  $r_{ij\ell}^*$  ( $i=1,2,\dots,n$ ,  $j=1,2,\dots,k$  e  $\ell=1,2,\dots,m_j$ ) os postos de nossas observações.

Assim sob  $H_0$ , para todo  $i$  fixado, a  $N'$ -upla  $(r_{i11}^*, r_{i12}^*, \dots, r_{i1m}^*, \dots, r_{ik1}^*, \dots, r_{ikm_k}^*)$  assume como valor qualquer uma das  $N'!$  permutações de  $(1, 2, \dots, N')$  com a mesma probabilidade.

Seja:

$$(1.1) \quad R_j^* = \sum_{i=1}^n \sum_{\ell=1}^{m_j} r_{ij\ell}^* \quad , \quad j=1, 2, \dots, k.$$

a soma dos postos em cada tratamento.

Calculando-se a esperança e a variância das  $R_j^*$  obtemos (Apêndice 1)

$$(1.2) \quad \begin{cases} E[R_j^*] = \frac{m_j n (N'+1)}{2} \\ \text{VAR}[R_j^*] = \frac{n m_j (N'+1) (N'-m_j)}{12} \end{cases}$$

Como no modelo de dois fatores de classificação, o teste será baseado na razão:

$$(1.3) \quad \frac{\sum_{j=1}^K m_j^{-1} \{R_j^* - E R_j^*\}^2}{\sum_{i,j,\ell} \{r_{ij\ell}^* - \bar{R}_j^*\}^2} \quad \text{onde} \quad \bar{R}_j^* = \frac{R_j^*}{n \cdot m_j}$$

O numerador de (1.3) representa a variação "entre" os tratamentos e o denominador a variação "dentro" dos tratamentos. A nossa decisão será rejeitar  $H_0$  para valores grandes de (1.3).

É fácil ver que (1.3) é uma função monótona crescente de:

$$(1.4) \quad \frac{\sum_{j=1}^K m_j^{-1} \{R_j^* - E R_j^*\}^2}{\sum_{i,j,l} \{r_{ijl}^* - \frac{N'+1}{2}\}^2}$$

isto é, (1.3) pode ser reescrita como:

$$(1.5) \quad \frac{a}{b+a} = \frac{\sum_{j=1}^k m_j^{-1} \{R_j^* - \frac{n m_j}{2} (N'+1)\}^2}{\sum_{i,j,l} \{R_{ijl}^* - \frac{N'+1}{2}\}^2 + \sum_{i,j,l} m_j^{-1} \{R_j^* - \frac{n m_j}{2} (N'+1)\}^2}$$

É claro que esta é uma função monótona de  $\frac{a}{b}$ , ou seja de (1.4).

Por outro lado verifica-se que o denominador de (1.4) é uma constante (Apêndice 1). Assim podemos escrever:

$$(1.6) \quad W_n^* = \frac{12}{N'(N'+1)n} \sum_{j=k}^k m_j^{-1} \{R_j^* - \frac{m_j n}{2} (N'+1)\}^2$$

Observemos que o numerador de (1.5), devidamente normalizado é:

$$(1.7) \quad \frac{12}{N'^2-1} \cdot \sum_{j=1}^k m_j^{-1} \{R_j^* - \frac{n m_j}{2} (N'-1)\}^2 = \frac{nN'}{N'-1} W_n^*$$

e, ainda que:  $E(W_n^*) = k-1$ .

Assim, é natural esperarmos que (1.6) seja assintoticamente  $\chi^2$  com  $k-1$  graus de liberdade. Na próxima seção estudaremos condições para a convergência em distribuição de  $W_n^*$

à  $\chi^2$  com  $k-1$  graus de liberdade.

A título de ilustração, notemos que a estatística  $W_n^*$  se reduz a estatística do teste de Friedman  $-\chi_n^2$ , quando fazemos  $m_j=1$ ,  $\forall j=1,2,\dots,k$ , isto é:

$$W_n^* = \frac{12}{nk(k+1)} \sum_{j=1}^k \left\{ R_j^* - \frac{n}{2} (K+1) \right\}^2.$$

Por outro lado quando  $n=1$ , temos:

$$W_n^* = \frac{12}{N'(N'+1)} \sum_{j=1}^k m_j^{-1} \left\{ R_j^* - \frac{m_j}{2} (N'+1) \right\}^2,$$

a qual é a estatística de Kruskal-Wallis.

### §2º - Distribuição Assintótica Sob $H_0$

Desejamos mostrar, inicialmente, que o vetor  $R_{-1}^*$  devidamente normalizado tem assintoticamente distribuição normal multivariada com matriz de covariância não singular. Utilizaremos para isto um resultado de Wald-Wolfowitz ([11]) que sob condições bem gerais garante a convergência em distribuição de funções lineares de vetores aleatórios.

#### 2-A - O TEOREMA DE WALD-WOLFOWITZ

Seja  $(A_n)_{n \geq 1}$  uma sequência de  $n$ -uplas ordenadas  $(a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})$ ,  $n=1,2,\dots$ , satisfazendo a condição:



$$(2.1) \quad \frac{\mu_r(A_n)}{\{\mu_2(A_n)\}^{r/2}} = o(1)$$

onde  $\mu_r(A_n) = n^{-1} \sum_{i=1}^n \{A_{ni} - n^{-1} \sum_{j=1}^n A_{nj}\}^r$  e o símbolo  $o$  é definido da maneira usual, isto é, " $\forall f(x)$  e  $g(x)$ , com  $g(x) > 0$ , dizemos que  $f(x) = o(g(x))$  se  $|\frac{f(x)}{g(x)}| \leq M \quad \forall x$  e  $M$ -constante."

Teorema 2.1 - Seja  $(Z_{n1}, \dots, Z_{nn})$  para cada  $n$ , uma  $n$ -upla ordenada assumindo como valores as permutações de  $A_n$ , com distribuição uniforme. Sejam  $(n_i^{(n)})_{n \geq 1}$ ,  $(i=1, 2, \dots, k)$   $k$  sequências de inteiros não negativos tais que:

$$\sum_{i=1}^k n_i^{(n)} = n \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_i^{(n)}}{n} = v_i \quad \text{existe}$$

Consideremos:  $L_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{r-1} Z_{nj}^{(i)}$ , para  $i=1, 2, \dots, k$ , onde a soma varia de  $\alpha = \sum_{j=1}^{r-1} n_j^{(n)} + 1$  a  $\alpha = \sum_{j=1}^i n_j^{(n)}$  e seja  $V_n$  a variância de qualquer  $Z_{n\alpha}$ . Nestas condições a variável aleatória

$$\frac{L_n^{(i)} - E L_n^{(i)}}{[n V_n]^{1/2}}$$

tem assintoticamente distribuição normal multivariada singular, com média zero e matriz de covariância

$$\|\delta_{ii'} v_i - v_i v_{i'}\|, \quad \text{onde} \quad \delta_{ii'} = \begin{cases} 1 & i=i' \\ 0 & i \neq i' \end{cases} \quad \square$$

A demonstração deste resultado é encontrada em Wald-Wolfowitz ([11]).

Teorema 2.2 - Seja o  $j$ -ésimo elemento do vetor  $\underline{T}_i$  definido por:

$$(2.2) \quad t_{ij} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{N'^3 - N'}} \{R_{ij}^* - E R_{ij}^*\}$$

para cada  $i$  fixado.

Então, se admitirmos a existência de  $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{m_j}{N'} = v_j$  onde  $N' = \sum_{j=1}^k m_j$ , temos que  $\underline{T}_i$  será assintoticamente normal multivariado com vetor de média  $\underline{0}$  e matriz de covariância

$$\Lambda = \|\delta_{jj}, v_j - v_j v_j\|$$

Prova - Iremos aplicar o Teorema 2.1. Portanto, sejam  $a_{n\alpha} = \alpha$  e  $A_{N'} = \{1, 2, \dots, N'\}$ . Verifiquemos que  $A_{N'}$  satisfaz (2.1).

Como  $\sum_{i=1}^{N'} i^r = o(N'^{(r+1)})$ , teremos para  $r \geq 3$

$$\mu_r(A_{N'}) = o(N'^r)$$

Por outro lado  $\mu_2(A_{N'}) = o(N'^2)$  e assim:

$$\frac{\mu_r(A_{N'})}{\{\mu_2(A_{N'})\}^{r/2}} = o(1)$$

Façamos agora  $L_n^{(i)} = R_{ij}^*$ , onde  $R_{ij}^* = \sum_{\ell=1}^{m_j} r_{ij\ell}^*$ .

É claro que:

$$E L_n^{(i)} = E R_{ij}^* = \frac{m_j}{2} (N'+1) \quad e$$

$$\text{Var}(L_n^{(i)}) = \text{Var}(R_{ij}^*) = \frac{N'^2 - 1}{12}$$

Assim:  $t_{ij} = \frac{\sqrt{12} \{R_{ij}^* - m_j (\frac{N'+1}{2})\}}{\{N'^3 - N'\}^{1/2}}$  e  $\underline{T}_i = (t_{i1}, \dots, t_{ik})$  é assin

totalmente normal multivariado com média zero e matriz de co variância  $\Lambda = \|\delta_{jj}, v_j - v_j v_j, \|\square$

Se definirmos  $\underline{T} = (t_1, t_2, \dots, t_k)$  onde  $t_j = \sum_{i=1}^n t_{ij}$ , esta é a soma de vetores independentes com distribuição comum  $NM(0, \Lambda)$ , e conseqüentemente sua distribuição será ainda  $NM(0, n\Lambda)$ .

Assim o vetor T cujas componentes são:

$$(2.3) \quad t_j = \frac{R_j - n m_j (N'+1)}{\left\{ \frac{N'^3 - N'}{12} \right\}}$$

é assintoticamente distribuído como uma  $NM(0, n\Lambda)$ .

Teorema 2.3 - Supondo-se os  $v_j > 0$  e definindo a transformação  $\underline{T}^* = C\underline{T}$ , onde  $C = \|\delta_{jj}, (nv_j)^{1/2}\|$  obtemos que  $\underline{T}^*$  é assintoticamente  $NM(0, \Lambda^*)$ , onde  $\Lambda^* = C\Lambda C' = \|\delta_{jj}, - (v_j v_j,)^{1/2}\|$ .

Prova - Segue imediatamente do Teorema 3.22 de Graybill ([4]).

Teorema 2.4 - Se para todo j, existe o  $\lim_{N' \rightarrow \infty} \frac{m_j}{N'} = v_j > 0$  então, sob  $H_0$ , a estatística  $W_n^*$  é assintoticamente  $\chi^2$  com k-1 graus de liberdade.

Prova - Daremos um esboço de prova. Seja a transformação de variáveis definida por:

$$S_0 = \sum_{j'=1}^k v_{j'}^{1/2} T_{j'}^*$$

$$S_j = \sum_{j'=1}^k e_{jj'} T_{j'}^* \quad j=1, 2, \dots, k-1$$

onde os  $e_{jj}$ , são tais que a transformação seja ortogonal. Assim:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k T_j^{*2} &= \sum_{j=1}^{k-1} S_j^2 = \frac{12}{(N'-1)(N'+1)} \sum_{j=1}^k m_j^{-1} \left\{ R_j^* - \frac{m_j}{2} (N'+1) \right\}^2 \\ &= \frac{nN'}{N'-1} W_n^* \end{aligned}$$

Como  $\sum_{j=1}^k T_j^{*2}$  tem distribuição de  $\chi^2$  central com  $k-1$  graus de liberdade. Segue-se o nosso resultado.  $\square$

### §39 - Distribuição Assintótica Sob $K_n$

Desejamos mostrar que  $W_n^*$ , sob  $K_n$ , é assintoticamente  $\chi^2$  com  $k-1$  graus de liberdade e parâmetro de não centralidade:

$$\Delta_{W^*} = \frac{12N'}{N'+1} \left\{ \int F'(x) dFx \right\}^2 \sum_{j=1}^k m_j (\theta_j - \bar{\theta})^2$$

Para obtermos este resultado exigiremos que a função de distribuição -  $F(x)$  - possua densidade de quadrado integrável, isto é:

$$(3.2) \quad \int \{F'(x)\}^2 dF(x) < \infty,$$

pois necessitaremos, em algum momento, trocar limite com integral. Segue-se, então, o lema.

Lema 3.1 - Se a função de distribuição  $F$  possui densidade de quadrado integrável, então:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right\} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \{F'(x)\}^2 dx \quad \square$$

A demonstração deste resultado é encontrada em Mehra-Saranghi ([8]).

Finalmente apresentamos, sem demonstrar, o teorema central deste capítulo. Uma sugestão para sua demonstração é dada em Mehra-Saranghi ([8]). No caso especial em que  $m_j = 1$ ,  $\forall j=1,2,\dots,k$ , este resultado está demonstrado em Van Elteren-Noether ([12]).

Teorema 3.2 - Supondo  $K_n$  verdadeira e satisfeitas as condições do lema 3.1, temos que a estatística  $W_n^*$  converge em distribuição, quando  $n \rightarrow \infty$ , para  $\chi_{k-1}^2(\Delta_{W^*})$ , onde  $\Delta_{W^*}$  é dado por (3.1).

## CAPÍTULO IV

### TESTE BASEADO EM POSTOS APÓS ALINHAMENTO

#### 1 - Introdução

Como veremos no próximo capítulo a eficiência relativa assintótica do teste baseado em postos separados em relação ao teste F é dada por  $\frac{3}{\pi} \frac{k}{k+1}$  (quando  $m_j=1$ ,  $j=1,2,\dots,k$  e sob a distribuição normal), a qual toma o valor  $\frac{2}{\pi} = 0,637$  quando  $K=2$  e tende a  $\frac{3}{\pi} = 0,155$  quando  $k$  tende a infinito.

Com o objetivo de melhorar esta eficiência relativa assintótica Hodges e Lehmann ([6], propuseram um procedimento que introduzisse certas comparações entre os blocos. Uma generalização deste procedimento, para  $k>2$ , foi feita por Mehra e Sarangi ([8]).

O teste de Mehra e Sarangi é baseado nos postos das observações em conjunto após afastar os efeitos de bloco.

Definição 4.1 - Define-se por alinhamento a remoção dos efeitos de bloco  $\xi_i$  ( $i=1,2,\dots,n$ ). De cada uma das observações, num dado bloco, subtraímos uma função das observações  $-\mu$  - a qual satisfaça:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \mu(x_{i11}+a, \dots, x_{i1m_1}+a, \dots, x_{ik1}+a, \dots, x_{ikm_k}+a) &= \\ &= \mu(x_{i11}, \dots, x_{i1m_1}, \dots, x_{ik1}, \dots, x_{ikm_k}). \end{aligned}$$

Como desejamos que as observações alinhadas sejam distribuídas simetricamente, sob  $H_0$ , exigiremos que a função  $\mu$  seja simétrica, pois assim teremos:

Lema 4.2 - Sejam  $X_1, X_2, \dots, X_k$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, e seja  $\mu = \mu(X_1, \dots, X_n)$  uma função simétrica dessas variáveis. Então as variáveis aleatórias  $Z_j = X_j - \mu$ ,  $j=1, 2, \dots, k$  tem distribuição conjunta simétrica.

Prova:

$$\begin{aligned} F(t_2, t_1, \dots, t_k) &= P[Z_1 \leq t_2, Z_2 \leq t_1, \dots, Z_k \leq t_k] = \\ &= P[X_1 - \mu(X_1, \dots, X_k) \leq t_2, X_2 - \mu(X_1, \dots, X_n) \leq t_1, \dots, Z_k \leq t_k] \\ &= P[X_2 - \mu(X_1, X_2, \dots, X_k), X - \mu(X_1, X_2, \dots, X_k) \leq t_1, \dots, Z_k \leq t_k] \end{aligned}$$

pois as  $X_i$  são i.i.d e  $\mu$  é simétrica.

$$\begin{aligned} &= P[Z_2 \leq t_2, Z_1 \leq t_1, \dots, Z_k \leq t_k] \\ &= F(t_1, t_2, \dots, t_k) \quad \square \end{aligned}$$

Outro conceito que será utilizado a seguir é:

Definição 4.3 - Consideremos cada situação condicional dado o conjunto de postos em cada bloco. Definimos como configuração cada uma das situações condicionais.

Note que cada situação condicional é um evento no espaço amostral original.

É claro que dada uma configuração a única aleatorização que resta é devida a designação ao acaso de postos aos tratamentos em cada bloco. É justificável portanto, usar aleatorização completa para associar os postos aos tratamentos, se o vetor de observações alinhadas (em cada bloco) tiver distribuição simétrica, sob  $H_0$ .

### §19 - O Teste de Mehra-Sarangi

Consideremos o modelo descrito no Capítulo I e sejam:  $Z_{ijl}$  ( $l=1, \dots, m_j$ ) as observações alinhadas; e  $r_{ijl}$  o posto de  $Z_{ijl}$  com relação a todas as  $N$  observações, onde

$$N = \sum_i \sum_j m_j = nN'$$

De agora em diante, iremos supor que:

- i) O mesmo método de alinhamento seja usado em cada bloco;
- ii) As condições (I) e (II) abaixo sejam satisfeitas:

(I) - após o alinhamento cada bloco contém pelo menos uma observação positiva e uma negativa;

(II) - em cada bloco usaremos aleatorização completa.

A condição (I) é verificada desde que o método de alinhamento satisfaça (4.1). Iremos utilizar alinhamento na média das observações em cada bloco, embora outros estimadores



satisfaçam (4.1), como por exemplo: a mediana, a média aparada, a média "windsorizada" ou estimadores do tipo Hodges e Lehmann ([6A]).

Por outro lado a condição (II) é razoável uma vez que dada uma configuração a única aleatorização que resta é devida a designação casual dos postos aos tratamentos, em cada bloco. Sejam

$$N' = \sum_{j=1}^k m_j, \quad R_{ij} = \sum_{\ell=1}^{m_j} m_{ij\ell} \text{ e } R_j = \sum_i R_{ij} = \sum_{i,\ell} r_{ij\ell},$$

isto é a soma dos postos para o j-ésimo tratamento.

Denotando-se por  $\bar{E}(\cdot)$ ,  $\bar{V}\text{AR}(\cdot)$  e  $\bar{C}\text{ov}(\cdot)$ , respectivamente, a esperança, variância e covariância condicionais, temos conforme Mehra e Sarangi ([8]):

$$\bar{E} = R_j = n \cdot m_j \frac{nN'+1}{2}$$

$$\text{VAR } R_j = \frac{N' - m_j}{N' - 1} m_j \sum_{i=1}^n \tau_i^2$$

$$\text{Cov } (R_j, R_{j'}) = - \frac{m_j m_{j'}}{N' - 1} \sum_{i=1}^n \tau_i^2$$

onde  $\tau_i^2 = \frac{1}{N'} \sum_{j,\ell} \{r_{ij\ell} - \bar{r}_i\}^2$  e  $\bar{r}_i = \frac{1}{N'} \sum_{j,\ell} r_{ij\ell}$

Como no Capítulo III nosso teste será baseado na razão:

$$(4.2) \quad \frac{\sum_{j=1}^k n^{-1} m_j^{-1} \{R_j - \bar{E}R_j\}^2}{\sum_{i,j,\ell} \{r_{ij\ell} - R_j/nm_j\}^2}$$

Uma vez que o denominador de (4.2) é constante a estatística do teste será uma função do numerador de (4.2), isto é:

$$(4.3) \quad W_n = \frac{N^1 - 1}{N^1 \sum_i \tau_i^2} \sum_{j=1}^k m_i^{-1} \left\{ R - \frac{m_j n}{2} (nN^1 + 1) \right\}^2$$

Rejeitamos a hipótese nula  $H_0$ , a um nível de significância  $\alpha$ , se  $W_n$  exceder a uma constante  $W_{n,\alpha}$ , que depende da configuração, uma vez que o teste é condicional, e tal que:

$$\tilde{P}_{H_0} [W > W_{n,\alpha}] = \alpha$$

### §2º - Distribuição Assintótica Sob $H_0$

Apresentaremos, nesta seção, um resultado sobre a distribuição assintótica da Estatística  $W_n$ , sob  $H_0$ . É importante notar que a convergência a  $\chi_{k-1}^2$  é uniforme na configuração, e além disto que os nossos resultados valem qualquer que seja o método de alinhamento satisfazendo (4.1).

A demonstração do teorema central desta seção requer alguns resultados preliminares. Enunciaremos estes resultados e apresentaremos referências bibliográficas onde são encontradas suas provas.

Seja  $U_i = \sum_{j=1}^{k-1} c_j R_{ij}$  uma combinação linear qualquer dos  $R_{ij}$  para  $j=1, 2, \dots, k-1$ , e:

$$(4.4) \quad \begin{cases} b_i^2 = \text{V\AA R}(U_i) \\ \beta_i = \tilde{E} |U_i - \tilde{E} U_i|^3 \\ S_n = \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{cases}$$

Suponhamos que  $N_i < n$ ,  $\forall i=1, 2, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{R}$  (\*)

Lema 4.4 - Satisfeitas as condições (I) e (II) e (\*) temos:

- i) A distribuição condicional de  $\sum_{i=1}^n \frac{U_i - \tilde{E} U_i}{S_n}$  converge para a distribuição normal padrão, quando  $n \rightarrow \infty$ .
- ii) A convergência é uniforme na configuração.  $\square$

A demonstração deste resultado segue as linhas de ([6]). O objetivo é verificar as condições de aplicação do teorema de Berry-Eseen.

Lema 4.5 - Seja  $(V^{(n)})_{n \geq 1}$  uma sequência de vetores aleatórios de  $R^{(k)}$  com função de distribuição  $F_\theta^n(v)$  dependendo de um parâmetro  $\theta$ . Seja  $G_\theta^n(u)$  a função de distribuição de uma função linear qualquer  $(f: R^{(k)} \rightarrow R^{(1)})$ ,

$$U^{(n)} = f[V^{(n)}] = \sum c_j V_j^{(n)}$$

Se  $F_\theta^{(n)}(v)$  e  $G_\theta^{(n)}(u)$  são tais que:

- i)  $F_\theta^n(v) \rightarrow F_\theta(v) \quad \forall \theta \text{ (e } v)$ , onde  $F_\theta(v)$  é função de distribuição do vetor aleatório  $V$ .
- ii)  $\forall f$ , linear,  $G_\theta^{(n)}(u) \rightarrow G_\theta(u)$  uniformemente em  $\theta$  (e  $u$ ), onde  $G_\theta(u)$  é função de distribuição de uma variável aleatória  $f(V)$ .

Então  $F_{\theta}^{(n)}(v)$  também converge uniformemente em  $\theta$  (e  $v$ ).  $\square$

Para as demonstrações deste lema e do seguinte consultar Mehra e Sarangi ([8]).

Lema 4.6 - Sejam  $(V^{(n)})_{n \geq 1}$  e  $(F_{\theta}^{(n)}(v))_{n \geq 1}$  definidas como no lema 4.5 e suponhamos que  $F_{\theta}^{(n)}(v) \longrightarrow F_{\theta}(v)$  uniformemente em  $\theta$  (e  $v$ ).

Seja  $f: R^{(k)} \longrightarrow R^{(1)}$  uma função mensurável com conjunto de pontos de descontinuidade de medida zero. Então:

- i) A função de distribuição  $G_{\theta}^{(n)}(x)$  de  $f[V^{(n)}]$  converge para a função de distribuição  $G_{\theta}(x)$  de  $f(V)$ , e
- ii) A convergência é uniforme em  $\theta$  (e  $x$ ).  $\square$

Finalmente podemos enunciar e esboçar a prova do seguinte teorema:

Teorema 4.7 - Sob  $H_0$  e usando um método de alinhamento que satisfaça as condições (I) e (II) temos:

- i) A estatística condicional  $W_n^*$ , dada uma configuração, converge em distribuição para uma  $\chi^2$  central com  $(k-1)$  graus de liberdade.
- ii) A convergência é uniforme na configuração.

Prova: Consideremos as variáveis aleatórias  $\frac{V_j}{d^{1/2}}$ ,  $j=1,2,\dots$   
...,  $k$ , onde:

$$V_j = \frac{R_j - \bar{E} R_j}{m_j^{1/2}}$$

$$d = \frac{N'}{N'-1} \sum_{i=1}^n \tau_i^2$$

Satisfeita a condição (\*), e pela parte (i) do lema 4.4, segue-se usando resultados análogos aos de Wald-Wolfowitz ([11] - sc.7), que as variáveis aleatórias acima são condicionalmente (dada uma configuração) distribuídas como uma normal multivariada com  $\underline{\mu} = 0$  e  $\Lambda = \left\| \delta_{jj'} - \left( \frac{m_j}{N'} \right)^{1/2} \left( \frac{m_{j'}}{N'} \right)^{1/2} \right\|$ , no limite.

Através de uma transformação ortogonal,

$$V_0^* = \sum_{j=1}^K \left( \frac{m_{j'}}{N'} \right)^{1/2} \frac{V_{j'}}{d^{1/2}}$$

$$V_j^* = \sum_{j'=1}^K a_{jj'} \frac{V_{j'}}{d^{1/2}}, \quad j=1, 2, \dots, k-1.$$

onde os  $a_{jj'}$ , são propriamente escolhidos, obtemos que:

$$W_n = \sum_{j=1}^K V_j^2 / d = \sum_{j'=1}^K V_{j'}^{*2},$$

Da parte (i) do lema 4.6 segue que  $W_n \xrightarrow{L} \chi_{k-1}^2$ .

A demonstração da parte (ii) do teorema é encontrada em Mehra e Sarangi ([8]).

§3º - Distribuição Assintótica sob  $K_n$

Nesta seção, usaremos como função de alinhamento a média  $\bar{X}$ , embora qualquer método satisfazendo (4.1), (I) e (II) pudesse ser usado. Estes resultados serão úteis na determinação das eficiências relativas assintóticas.

Sejam as alternativas, como no capítulo I, dadas por:

$$K_n: F_j(x) = F(x + \theta_j n^{-1/2}), \quad j=1, 2, \dots, k.$$

Denotemos por  $X_{j\ell}$  ( $j=1, \dots, k; \ell=1, 2, \dots, m_j$ ), as  $N'$  variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com função de distribuição  $F(x)$ .

Seja  $G(u)$  a função de distribuição de  $Z_{11} = X_{11} - \bar{X}$ , onde  $\bar{X} = \frac{1}{N'} \cdot \sum_{j,\ell} X_{j\ell}$  e  $H(u,v)$  a função de distribuição conjunta de  $(Z_{11}, Z_{21})$ . Em nosso modelo  $G(u)$  e  $H(u,v)$  são as distribuições, marginal e conjunta, das observações alinhadas  $Z_{111}$  e  $Z_{121}$ , sob  $H_0$ .

Denotemos por  $\chi^2(\Delta)$  uma variável aleatória com distribuição de  $\chi^2$  não central, onde  $\Delta$  é o parâmetro de não centralidade.

Sejam:

$$\underline{T}_n = (T_{n1}, \dots, T_{nk}) \quad \text{e} \quad \underline{\mu}_n = (\mu_{n1}, \dots, \mu_{nk})$$

onde

$$\mu_j = \lim_n \sum_{j'=1}^k m_{j'} \int_{-\infty}^{\infty} n^{1/2} \{G[x + (\theta_j - \theta_{j'}) n^{-1/2}] - G[x]\} dG(x) \quad \text{e}$$

$$T_{nj} = \frac{\sqrt{3} \left\{ R_j - \frac{nm_j}{2} (nN'+1) \right\}}{m^{1/2} N (1-3\lambda)^{1/2} n^{3/2}}$$

com

$$\lambda = \lambda(N', F) = \int \int_{\mathbb{R}^{(2)}} G(u) G(v) dH(u, v) \quad e$$

$$\Lambda = \left\| \delta_{jj'} - \left( \frac{m_j}{N'} \right)^{1/2} \left( \frac{m_{j'}}{N'} \right)^{1/2} \right\|$$

Suponhamos que, para cada  $n$ , a hipótese alternativa  $K_n$  seja verdadeira, e que  $\forall \eta \in \mathbb{R}'$ ,

$$(4.5) \quad \lim_n \int n^{1/2} \{G[x+nn^{-1/2}] - G[x]\} dG(x)$$

exista e seja finita. Assim temos:

Lema 4.8 - O vetor  $T_{\bar{n}}$ , definido acima, converge em distribuição, quando  $n \rightarrow \infty$ , para uma variável aleatória normal multivariada, com vetor de médias  $\underline{\mu}$  e matriz de covariância  $\Lambda$ .  $\square$

Na demonstração deste resultado, encontrada em Mehra-Saranghi ([8]), são usados alguns fatos sobre estatísticas  $U$  de Hoeffding. O lema seguinte, também demonstrado em Mehra Sarangi ([8]), fornece uma estimativa consistente de  $(1-3\lambda)$ .

Lema 4.9 - Supondo  $K_n$  verdadeira, para cada  $n$ , e satisfeitas as condições do lema anterior, temos:

$$\frac{1}{n^3} \sum_{i,j,l} \{r_{ijl} - \bar{r}_i\}^2 = N'n^{-3} \sum_{i=1}^n \tau_i^2 = \frac{N'^2}{3} (N'-1) (1-3\lambda) + o_p(1)$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

Agora estabeleceremos o teorema:

Teorema 4.10 - Supondo que, para cada  $n$ ,  $K_n$  é verdadeira, e que (\*) esta verificada, temos que:

$$W_n \xrightarrow{L} \chi^2_{k-1}(\Delta_W), \quad \text{onde}$$

$$(4.5) \quad \Delta_W = \frac{3}{N'^2(1-3\lambda)} \sum \frac{\mu_j^2}{m_j^2}$$

e  $\mu_j$  e  $\lambda$  são os definidos anteriormente.

Prova: Pelo lema 4.8,  $T_n^* = (T_{n1}^*, \dots, T_{n,k-1}^*)$  é assintoticamente distribuído como uma  $NM[\mu^*, \Lambda^*]$ , onde  $\mu^* = (\mu_1, \dots, \mu_{k-1})'$  e  $\Lambda^*$  é a submatriz correspondente de  $\Lambda$ . É fácil verificar que  $\sum_{j=1}^k m_j^{1/2} T_{nj} = 0$  e que  $\Lambda$  é não singular. Assim, a estatística

$$\sum T_{n,j}^2 = \frac{3}{N'^2(1-3\lambda)n^3} \sum_{j=1}^k m_j^{-1} \left\{ R_j - \frac{nm_j}{2} (nN'+1) \right\}^2$$

é equivalente a  $T_n^{*'} \Lambda^{*-1} T_n^*$  que, no limite é  $\chi^2_{k-1}(\Delta_W)$ .

Agora, se substituirmos  $(1-3\lambda)$  por sua estimativa consistente (lema 4.9) obtemos  $W_n$ .

Finalmente, usando o lema 2.1 do capítulo 2 obtemos o desejado.  $\square$



## CAPÍTULO V

### SOBRE AS COMPARAÇÕES

Neste capítulo apresentaremos o conceito de eficiência relativa assintótica de Pitman e obteremos expressões para sua avaliação. O teorema de Pitman será enunciado em sua forma geral (Noether - [9]), para o caso em que a distribuição da estatística do teste é assintoticamente normal. Para o nosso problema a extensão do teorema de Pitman é encontrada em Hannan ([5]).

Finalmente discutiremos o método de simulação usado para obter comparações em pequenas amostras e apresentaremos alguns resultados numéricos.

#### §1º - Definições e Fatos Básicos

Definição 1.1 - Dados dois teste do mesmo tamanho para uma mesma hipótese estatística, a eficiência do segundo teste com respeito ao primeiro é dada por:

$$(1.1) \quad e_{21} = \frac{n_1}{n_2} ,$$

onde  $n_2$  é o tamanho de amostra necessário para que o segundo teste atinja o mesmo poder que o primeiro com  $n_1$  observações, para uma dada alternativa.

Em geral (1.1) depende de três argumentos: o nível de significância  $\alpha$ , a alternativa  $\theta$ , e o tamanho da amostra  $n$ . Assim:

$$(1.2) \quad e = e(\alpha, \theta, n)$$

Se fixarmos um ou dois destes argumentos e deixarmos que os outros se aproximem de um limite obteremos uma expressão mais simples.

É razoável considerar o caso assintótico, quando  $n \rightarrow \infty$ . Para evitar a comparação de testes cujos poderes sejam praticamente 1, como ocorre com testes consistentes, consideramos alternativas do tipo  $\theta = \theta_n$  convergindo para a hipótese nula. Assim:

$$(1.3) \quad e = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \theta_n \rightarrow \theta_0}} e(\alpha, \theta, n)$$

Satisfeitas certas condições podemos utilizar o teorema 1.3 abaixo para determinar (1.3).

Consideremos o seguinte problema de teste de hipótese:

$$(1.4) \quad \begin{cases} H: \theta = \theta_0 \\ K_n: \theta_n = \theta_0 + \frac{k}{n\delta}, \text{ k cte. arbitrária e positiva.} \end{cases}$$

e seja um teste baseado na estatística  $T_n = T(x_1, \dots, x_n)$ , onde:

$$(1.5) \quad E T = \psi_n(\theta) \quad e \quad \text{Var}(T_n) = \sigma_n^2(\theta)$$

Consideremos as condições abaixo, onde supomos que as derivadas de  $\psi_n(\theta)$  (até a ordem  $m$ ) existam:

$$(A) - \psi_n'(\theta_0) = \dots = \psi_n^{(m-1)}(\theta_0) = 0 \quad e \quad \psi_n^{(m)}(\theta_0) > 0$$

$$(B) - \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-m\delta} \frac{\psi_n^{(m)}(\theta_0)}{\sigma_n(\theta_0)} = c > 0 \quad \text{para algum } \delta > 0$$

$$(C) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi_n^{(m)}(\theta_n)}{\psi_n^{(m)}(\theta_0)} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n(\theta_n)}{\sigma_n(\theta_0)} = 1$$

$$(C) - \frac{T_n - \psi_n(\theta_n)}{\sigma(\theta_n)} \xrightarrow{L} N(0, 1), \quad \text{tanto sob } H_0 \text{ como sob } K_n, \\ \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Temos então:

Lema 1.2 - Satisfeitas as condições A, B, C e D a função de poder para o problema (1.4) é dada por:

$$(1.6) \quad \beta_n(\theta_n) = P_{\theta_n} [T_n \geq T_{n,\alpha}]$$

onde  $T_{n,\alpha}$  é tal que  $P_{\theta_0} [T_n \geq T_{n,\alpha}] = \alpha$ .

Além disto, quando  $n \rightarrow \infty$ , temos:

$$(1.7) \quad \beta_n(\theta_n) \longrightarrow \phi\left(\lambda_\alpha - \frac{k^m c}{m!}\right), \quad \text{onde}$$

$$\phi(\lambda_\alpha) = \int_{\lambda_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x^2)/2} dx = \alpha \quad \text{e} \quad \lambda_\alpha = \frac{T_{n,\alpha} - \psi_n(\theta_0)}{\sigma_n(\theta_0)}$$

Prova: Para mostrar (1.7) desenvolvemos  $\psi(\theta_n)$  em série obten-  
do:

$$(1.8) \quad \psi_n(\theta_n) = \psi_n\left(\theta_0 + \frac{k}{n\delta}\right) = \psi_n(\theta_0) + \frac{1}{m!} \left(\frac{k}{n\delta}\right)^m \psi_n^{(m)}(\hat{\theta})$$

$$\text{onde } \theta_0 < \hat{\theta} < \theta_n$$

como,

$$\begin{aligned} \beta_n(\theta_n) &= P_{\theta_n} \left[ \frac{T_n - \psi_n(\theta_n)}{\sigma_n(\theta_n)} \geq \frac{T_{n,\alpha} - \psi_n(\theta_n)}{\sigma_n(\theta_n)} \right] \\ &= P_{\theta_n} \left[ \frac{T_n - \psi_n(\theta_n)}{\sigma_n(\theta_n)} \geq \frac{\sigma_n(\theta_0)\lambda_\alpha + \psi_n(\theta_0) - \psi_n(\theta_n)}{\sigma_n(\theta_n)} \right] \end{aligned}$$

pois  $T_{n,\alpha} = \sigma_n(\theta_0)\lambda_\alpha + \psi_n(\theta_0)$  e por hipótese a condição D es-  
tã satisfeita, logo:

$$\beta_n(\theta_n) \longrightarrow \phi(t_n) \quad \text{onde}$$

$$(1.9) \quad t_n = \frac{\sigma_n(\theta_0)\lambda_\alpha + \psi_n(\theta_0) - \psi_n(\theta_n)}{\sigma_n(\theta_n)}$$

Usando (1.8), (B) e (C), obtemos que:

$$t_n \longrightarrow \lambda_\alpha - \frac{k^m c}{m!}. \quad \text{Então:}$$

$$\beta_n(\theta_n) \doteq \phi\left(\lambda_\alpha - \frac{k^m c}{m!}\right). \quad \square$$

Se consideramos  $K'_n : \theta_0 + \frac{k}{n^\gamma}$  onde:

- i)  $\gamma > \delta$ , então  $t_n \rightarrow \lambda_\alpha$ , e nosso teste não distinguiria entre  $H_0$  e  $K'_n$  pois  $\beta_n(\theta_n) \rightarrow \lambda_\alpha$ .
- ii)  $\gamma < \delta$ , então  $t_n \rightarrow -\infty$  e  $\beta_n(\theta_n) \rightarrow 1$ .

A verificação de (i) é imediata uma vez que:

$$t_n = \lambda_\alpha - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^m}{m! n^{(\gamma-\delta)m}} \cdot \frac{\psi_n^{(m)}(\theta_0)}{n^{\delta m} \sigma_n(\theta_0)} \quad \text{e } \gamma > \delta.$$

Analogamente verificamos (ii).

Teorema 1.3 - (Pitmann): Sejam  $T_{1n}$  e  $T_{2n}$  as estatísticas em que se baseam nossos testes. Suponhamos que  $T_{1n}$  e  $T_{2n}$  satisfazem A, B, C e D, com  $\delta_1 = \delta_2$  e  $m_1 = m_2$ . Nestas condições:

$$e_{21} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{R_{2n}(\theta_0)}{R_{1n}(\theta_0)} \right\}^{1/m\delta} \quad \text{onde:}$$

$$R_{in}(\theta_0) = \frac{\psi_{in}^{(m)}(\theta_0)}{\sigma_{in}(\theta_0)}, \quad \text{para } i=1,2.$$

Prova: Pela definição 1.1 devemos impor que os dois testes tenham o mesmo poder sob alternativas idênticas. Por (1.7) teremos o mesmo poder se:

$$(1.10) \quad \frac{k_1^{m_1} c_1}{m_1!} = \frac{k_2^{m_2} c_2}{m_2!}$$

e de (1.4) que as alternativas serão iguais se:

$$(1.11) \quad \frac{k_1}{n_1^\delta} = \frac{k_2}{n_2^\delta}$$

Como, por hipótese,  $m_1 = m_2 = m$  e  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ , te-  
mos:

$$\frac{n_1}{n_2} = \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^{1/\delta} = \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^{1/m\delta} = \lim \left\{ \frac{R_{2n}(\theta_0)}{R_{1n}(\theta_0)} \right\}^{1/m\delta} = e_{21}$$

pois,  $c_i = \frac{\psi_{in}^{(m)}(\theta)}{\sigma_{in}(\theta)} n^{-m\delta}$  para  $i=1,2$ .  $\square$

Corolário 1.4 - Se  $m_1 = 1$  e  $\delta = \frac{1}{2}$  e  $\lim_n \frac{\psi_{2n}^{(m)}(\theta_0)}{\psi_{1n}^{(m)}(\theta_0)} = 1$ . Então

$$(1.12) \quad e_{21} = \frac{\sigma_{1n}^2}{\sigma_{2n}^2}$$

Em particular, se  $T_{1n}$  e  $T_{2n}$  são não viciados para  $\theta$ ,  
vale (1.12).

Prova: Como  $m=1$  e  $\delta=1/2$ , temos:

$$e_{21} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_{2n}^2(\theta_0)}{R_{1n}^2(\theta_0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{1n}^2}{\sigma_{2n}^2}.$$

Se  $\psi_{in}(\theta_0) = \theta_0$ , é claro que  $\psi'_{in}(\theta_0) = 1$ .

Logo  $\lim \frac{\psi'_{2n}(\theta_0)}{\psi'_{1n}(\theta_0)} = 1$  e vale (1.12).  $\square$

No nosso caso as distribuições assintóticas sobre a alternativa são  $\chi^2$  não centrais e assim a condição D não está satisfeita. Uma extensão deste teorema para esta situação é encontrada em Hannan ([5]).

Verifica-se que  $e_{21} = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}$  onde  $\Delta_i$ , para  $i=1,2$ , são os parâmetros de não centralidade das distribuições assintóticas sob a alternativa.

### §2º - Comparações Assintóticas

Inicialmente, apresentamos uma condição suficiente para se trocar limite com integral na expressão do parâmetro de não centralidade da estatística W. Recordemos que

$$\Delta_W = \frac{3}{N^{12}(1-3\lambda)} \sum_{j=1}^k \frac{\mu_j^2}{m_j} \quad \text{onde:}$$

$$\mu_j = \lim_n m_j \sum_{j'=1}^k m_{j'} \int_{-\infty}^{\infty} n^{1/2} \left\{ G \left[ x + \frac{(\theta_{j'}, -\theta_{j'})}{n^{1/2}} \right] - G[x] \right\} dG(x)$$

$$\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(u) \cdot G(v) dH(u,v)$$

Lema 2.1 - Se a distribuição  $F(x)$  possui densidade de quadrado integrável, então:

- i) A distribuição marginal  $G(u)$ , das observações alinhadas, também tem densidade de quadrado integrável,

e

ii) O parâmetro de não centralidade  $\Delta_W$  toma a forma:

$$(2.1) \quad \Delta_W = \frac{3}{1-3\lambda} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \{G'(u)\}^2 du \right]^2 \sum_{j=1}^k m_j (\theta_j - \bar{\theta})^2$$

onde  $\bar{\theta} = \sum_{j=1}^k \frac{m_j \theta_j}{N'}$ .  $\square$

Para a demonstração deste resultado sugerimos o artigo de Mehra e Sarangi ([8]).

Obteremos, finalmente, as expressões das eficiências relativas assintóticas como a razão dos parâmetros de não centralidade, a saber:

i) de (V,2.1) e (III,3.2), temos:

$$(2.2) \quad e_{W,W^*} = \frac{\Delta_W}{\Delta_{W^*}} = \frac{N'+1}{4N'(1-3\lambda)} \frac{\{ \int [G'(u)]^2 du \}^2}{\{ \int [F'(x)]^2 dx \}^2}$$

ii) de (V,2.1) e (II,2.1), segue

$$(2.3) \quad e_{W,F} = \frac{3\sigma^2}{1-3\lambda} \{ \int [G'(u)]^2 du \}^2$$

iii) de (III,3.2) e (II,2.1), obtemos:

$$(2.4) \quad e_{W^*,F} = \frac{12N'\sigma^2}{(N'+1)} \cdot \{ \int [F'(x)]^2 dx \}^2$$

É importante notar que o lema 2.1 é satisfeito para uma classe bastante grande de distribuições, incluindo por exemplo: normal, logística, dupla-exponencial, etc.; mas que mesmo assim o cálculo de (2.2), (2.3) e (2.4) é bastante árduo, a não ser sob a distribuição normal.



Quando  $F(x)$  é normal com média  $\underline{a}$  e variância  $\sigma^2$ , temos:

$$(2.5) \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \{F'(x)\}^2 dx = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} \\ \lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x)G(y) dH(x,y) = P[U>0; V>0] \end{cases}$$

onde  $(U;V)$  tem distribuição normal bivariada com média zero, variância comum  $2\sigma^2 \left(\frac{N'-1}{N'}\right)$  e covariância dada por  $-\frac{\sigma^2}{N'}$ .

De acordo com Cramer, página 333 ([1]), temos:

$$\lambda = P[U>0; V>0] = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \text{arc sen } \rho, \text{ onde } \rho = -\frac{1}{2(N'-1)}$$

Após algumas transformações obtemos:

$$(2.6) \quad \lambda = \frac{1}{\pi} \text{arc tg} \left\{ \frac{2N'-3}{2N'-1} \right\}^{1/2}$$

Verificamos, também, que:

$$(2.7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \{G'(x)\}^2 dx = \frac{N'^{1/2}}{2\sigma^2 \pi^{1/2} (N'-1)^{1/2}}$$

Temos, então:

$$(2.8) \quad \begin{cases} \text{i) } e_{W,W^*} = \frac{\Delta_W}{\Delta_{W^*}} = \frac{N'+1}{4(N'-1)} \left\{ 1 - \frac{3}{\pi} \text{arc tg} \left[ \frac{2N'-3}{2N'-1} \right]^{1/2} \right\} \\ \text{ii) } e_{W,F} = \frac{3N'}{4\pi(N'-1)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{\pi} \text{arc tg} \left[ \frac{2N'-3}{2N'-1} \right]^{1/2}} \\ \text{iii) } e_{W^*,F} = \frac{12N'\sigma^2}{N'+1} \left\{ \frac{1}{2\sigma\pi^{1/2}} \right\}^2 = \frac{N'+1}{N'} \cdot \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Um caso particular interessante é quando  $m_j=1$ ,  $j=1, 2, \dots, k$ . Assim  $N'=k$  e:

$$(2.9) \quad \begin{cases} \text{i) } e_{W, W^*} = \frac{k+1}{4(k-1)} \left\{ 1 - \frac{3}{\pi} \arctan \left[ \frac{2k-3}{2k-1} \right]^{1/2} \right\}^{-1} \\ \text{ii) } e_{W, F} = \frac{3k}{4\pi(k-1)} \left\{ 1 - \frac{3}{\pi} \arctan \left[ \frac{2k-3}{2k-1} \right]^{1/2} \right\}^{-1} \\ \text{iii) } e_{W^*, F} = \frac{k \cdot 3}{k+1 \pi} \end{cases}$$

A tabela 2.1 abaixo fornece os valores de eficiência relativa assintótica quando  $F(x)$  é  $N(\underline{a}, \sigma^2)$ .

TABELA 2.1

k	2	3	4	5	...	$\infty$
NORMAL						
$e_{W, W^*}$	1,5	1,349	1,263	1,210	...	1
$e_{W, F}$	$\frac{3}{\pi}=0,955$	0,966	0,965	0,963	...	$\frac{3}{\pi}$
$e_{W^*, F}$	$\frac{2}{\pi}=0,637$	0,716	0,764	0,796	...	$\frac{3}{\pi}$

§39 - Comparações em Pequenas Amostras

A aplicação da técnica de Monte Carlo a experimentos probabilísticos consiste em observar números aleatórios escolhidos de forma a simular as condições do problema real.

Como nosso objetivo é estimar a função de poder, de vemos gerar amostras aleatórias sob a hipótese alternativa de forma a exprimir as condições do modelo descrito no capítulo I.

Por imposições de ordem técnica, como por exemplo, o tempo de computação, nos restringimos a um modelo com 3 tratamentos, quatro blocos e uma observação por casela.

Lembremos que nossa situação experimental estabelece que  $E X_{ij} = \xi_i + \mu_j$  ( $i=1, \dots, 4$ ;  $j=1, 2, 3$ ), onde os  $\xi_i$  são efeitos de bloco e os  $\mu_j$  efeitos de tratamentos. Nestas condições desejamos testar:  $H: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$  vs.  $K: \mu_j \neq \mu_{j'}$  para algum  $1 \leq j' \neq j \leq 3$ . Assim, fixamos, arbitrariamente, os efeitos de bloco como 0, 2, 4 e 8, e os  $\mu_j = (j-1)\delta$  ( $j=1, 2, 3$ ), com  $\delta$  assumindo os valores 0,0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1,0 e 2,0.

Como os testes não paramétricos descritos nos capítulos III e IV são generalizações do teste da mediana e do de Wilcoxon, e estes têm propriedades "ótimas" sob a distribuição logística e dupla-exponencial, estas foram escolhidas em nossa análise. Por razões análogas, com respeito ao teste F, amostramos da distribuição normal. Além destas distribuições simulamos, ainda, a Cauchy, por suas características especiais (caudas grossas); e distribuições do tipo  $H(x) = \alpha N(0,1) + (1-\alpha)N(0,9)$ , onde N-normal e  $\alpha \in (0;1)$ .

Para a geração destas amostras aleatórias utilizamos, em linhas gerais, o que segue:

- 1- geramos números pseudo-aleatórios no intervalo  $(0,1)$ , isto é determinações de uma uniforme em  $(0,1)$ .
- 2- utilizando a transformação integral obtivemos determinações das distribuições acima, excetuadas a normal e as normais contaminadas.

Para a geração de determinações da normal utilizamos a técnica de Box-Muller ([13]). A partir destas contaminamos com uma proporção  $\alpha$  obtendo amostras de  $H(x)$ , para  $\alpha$  de 5%, 10% e 25%.

- 3- A cada sequência de determinações da uniforme,  $u_1, \dots, u_N$ , aplicamos o descrito acima, obtendo as determinações  $x_{1,1}^0 \dots x_{4,3}^0$ . Estas representam amostras das distribuições enumeradas anteriormente.
- 4- Para obter as amostras sob a hipótese alternativa adicionamos a cada  $x_{i,j}^0$  o efeito de bloco  $\xi_i$  e o efeito de tratamento  $\mu_j$  ( $i=1, \dots, 4$ ;  $j=1, 2, 3$ ) obtendo-se:

$$X_{ij} = x_{ij}^0 + \xi_i + \mu_j.$$

É conveniente atentar para o fato de utilizarmos uma mesma sequência de determinações da uniforme na obtenção das amostras de nossas distribuições para todas as alternativas consideradas. No apêndice 2 encontramos as várias subrotinas utilizadas neste trabalho.

Uma vez geradas as amostras aleatórias aplicamos os três procedimentos de teste e estimamos o poder pela frequên

cia relativa das vezes em que rejeitamos H. Como estamos estimando uma proporção fixamos  $NR = 2.500$  (o número de repetições do experimento), pois assim estaremos com estimativas com erro máximo de 0,02.

Os resultados obtidos pela simulação estão apresentados abaixo:

TABELA 3.1  
ESTIMATIVAS DAS FUNÇÕES DE PODER

$\delta$	NORMAL			LOGÍSTICA			DUPLA - EXP			CAUCHY		
	TF	TKW	TMS	TF	TKW	TMS	TF	TKW	TMS	TF	TKW	TMS
0,0	0,26	0,25	0,27	0,25	0,25	0,25	0,24	0,25	0,25	0,18	0,18	0,18
0,2	0,30	0,28	0,29	0,30	0,30	0,30	0,31	0,31	0,30	0,20	0,20	0,20
0,4	0,41	0,39	0,41	0,43	0,43	0,43	0,45	0,45	0,45	0,24	0,25	0,24
0,6	0,58	0,52	0,56	0,61	0,57	0,60	0,62	0,60	0,62	0,31	0,32	0,31
0,8	0,74	0,67	0,72	0,74	0,69	0,74	0,75	0,72	0,75	0,37	0,39	0,38
1,0	0,87	0,79	0,85	0,85	0,80	0,85	0,85	0,81	0,85	0,42	0,46	0,43
2,0	1,00	0,99	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00	0,98	0,99	0,61	0,69	0,64

$\delta$	5% - 3N			10% - 3N			25% - 3N		
	TF	TKW	TMS	TF	TKW	TMS	TF	TKW	TMS
0,0	0,26	0,24	0,26	0,27	0,24	0,26	0,27	0,24	0,25
0,2	0,29	0,27	0,29	0,30	0,28	0,28	0,30	0,29	0,29
0,4	0,42	0,38	0,41	0,42	0,38	0,40	0,42	0,39	0,41
0,6	0,58	0,52	0,56	0,58	0,52	0,56	0,60	0,54	0,58
0,8	0,74	0,66	0,72	0,75	0,66	0,73	0,76	0,68	0,74
1,0	0,87	0,79	0,86	0,87	0,79	0,85	0,88	0,80	0,86
2,0	1,00	0,99	1,00	1,00	0,99	1,00	1,00	0,99	1,00

Observações: Resultados obtidos por simulação com  $NR = 2.500$ .

Na aplicação do Monte Carlo surgiram vários problemas. Note que utilizamos, sob a normal, um nível de signifi-

cância de 25%. Isto deve-se ao fato das distribuições das estatísticas  $W^*$  e  $W$  serem "severamente" discretas, para esta situação abordada, e necessitarmos aleatorização para atingir ao nível fixado. Como é sabido a estatística  $F$  tem distribuição  $F$  central, sob  $H_0$  se estivermos amostrando da normal. Assim, fixamos um valor crítico  $F_{v_1, v_2, \alpha}$ , nestas condições, e por simulação recalculamos os níveis nas demais distribuições. Nesta pré-simulação, baseada em  $NR = 10.000$  observações, obtivemos os níveis de significância  $\alpha^*$  com um erro máximo de 0,01.

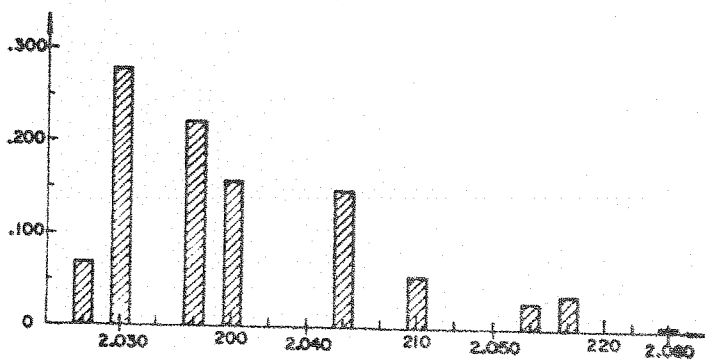
TABELA 3.2

ESTIMATIVAS DO NÍVEL DE SIGNIFICÂNCIA DO TESTE F

	NORMAL	LOGÍSTICA	DUPLA-EXPONENCIAL	CAUCHY	5%-3N	10%-3N	25%-3N
$\alpha^*$	0,250	0,255	0,251	0,181	0,245	0,242	0,239

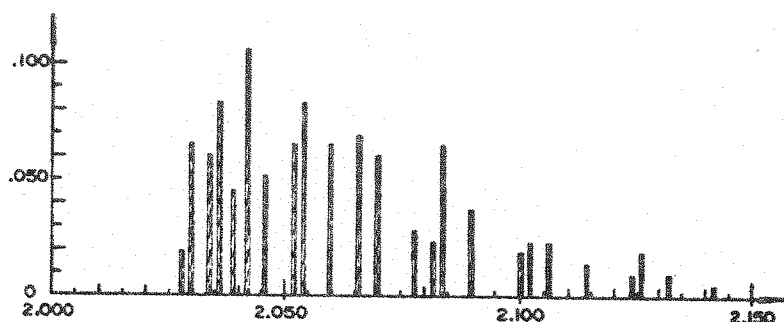
Outro problema decorreu do fato do teste de Mehra e Sarangi ser condicional dada uma configuração. Assim para cada configuração tivemos que avaliar a distribuição de  $W$ .

Figura 3.1 - DISTRIBUIÇÃO DE  $W^*$  E  $W$ , SOB  $H_0$



CONFIGURAÇÃO

b	$t_1$	$t_2$	$t_3$
1	1	2	3
2	4	5	6
3	7	8	9
4	10	11	12



CONFIGURAÇÃO

b	t <sub>1</sub>	t <sub>2</sub>	t <sub>3</sub>
1	6	4	8
2	10	9	12
3	7	5	11
4	3	2	1

Como não podemos fixar previamente um valor crítico para  $W$ , utilizamos o nível descritivo definido por:

$$\hat{\alpha} = \tilde{P}[W > w_0],$$

onde  $w_0$  é o valor da estatística  $W$  para uma dada configuração e decidimos pela rejeição de  $H$  se  $\hat{\alpha} < \alpha^*$  (nível de significância fixado).

O cálculo da distribuição de  $W$ , para cada uma das configurações, justifica de certa forma o tempo excessivo de computador para a realização deste Monte Carlo. Conseguimos, entretanto, uma redução significativa no algoritmo do cálculo da distribuição de  $W$ . É fácil ver que para avaliar a distribuição de  $W$ , sob  $H$ , temos que calcular todas as  $(3!)^4$  determinações de  $W$ . Entretanto, como  $W$  é função do quadrado da soma dos postos das observações alinhadas em cada tratamento, observamos que esta não se alterava ao permutarmos as possíveis soma de postos obtidas, o que equivale a trocar as colunas. Podemos, então, reduzir nosso problema ao cálculo de  $(3!)^3$  determinações de  $W$ .

Ainda, com relação ao cálculo da estatística  $W$ , cha

chamamos a atenção para o fato de termos utilizado no alinhamento um estimador dos efeitos de bloco do tipo Hodges e Lehmann ([6]), definido como:

$$HL = \text{Med}_{j < j'} \left\{ \frac{X_j + X_{j'}}{2} \right\}$$

A subrotina chamada pelo nome de ALINH calcula o valor de HL para cada bloco.

Uma vez obtidas as estimativas da função de poder de cada um dos nossos testes desejavamos estimar as eficiências relativas. Uma forma equivalente à descrita no parágrafo 1 é considerar a razão das derivadas das funções de poder, quando  $\delta$  tende a zero. (ver Noether [9]).

Obtivemos então:

TABELA 3.3

ESTIMATIVAS DAS EFICIÊNCIAS RELATIVAS

	NORMAL	LOGÍSTICA	DUPLA-EXPONENCIAL	CAUCHY	5%-3N	10%-3N	25%-3N
$e_{W, W^*}$	0,7	1,1	0,9	0,8	0,8	0,6	1,0
$e_{W, F}$	0,7	1,0	0,9	1,0	0,8	0,8	1,1
$e_{W^*, F}$	1,0	0,9	0,9	1,0	0,9	1,2	1,1

Observação: Resultados obtidos da Tabela 3.1.

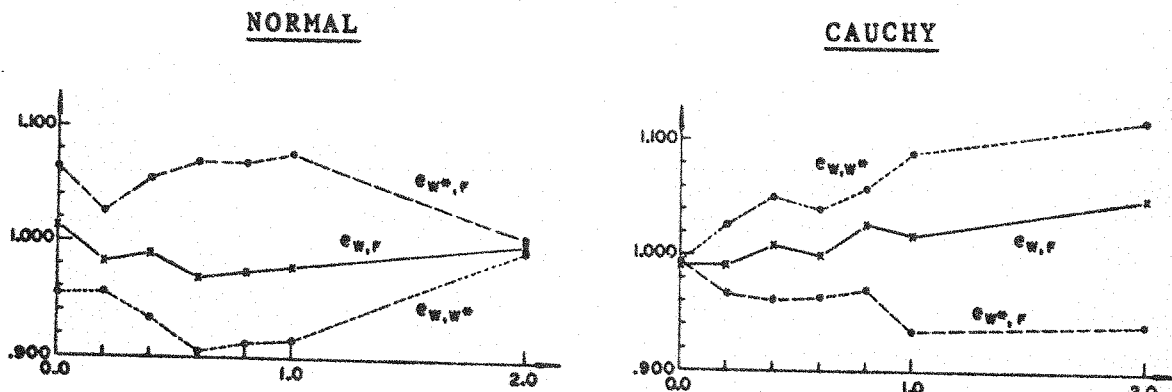
Uma outra abordagem sugerida foi definir uma "curva de eficiência" da seguinte forma:

$$ef(\delta; F) = \frac{\hat{P}_\delta [T_2 > t_{2\alpha}]}{P_\delta [T_1 > t_{1\alpha}]}$$



onde  $\delta$  assume valores sob a alternativa e  $\hat{P}_\delta[\cdot]$  são as estimativas da função de poder. Obtivemos as curvas de eficiência sob a Normal e a Cauchy.

FIGURA 3.2 - CURVAS DE EFICIÊNCIA



§4º - Algumas Conclusões

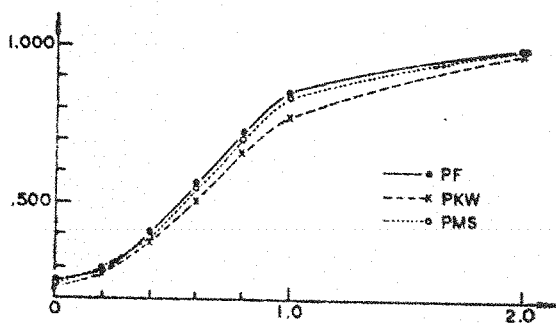
Discutiremos nesta seção os resultados obtidos pelo método de Monte Carlo.

Como, em geral, os procedimentos não paramétricos são mais eficientes que seus correspondentes da teoria clássica quando a distribuição amostrada tem caudas mais grossas do que a normal, esperávamos que em nosso modelo isto também ocorresse. No caso de  $k=2$  tratamentos sabemos que, sob a normal, a eficiência relativa do teste de Wilcoxon com respeito ao teste  $t$  é dada por  $\frac{3}{\pi}$ , e, além disto, que para distribuições com caudas mais grossas que a normal esta eficiência relativa assintótica é, em geral, maior que um. Outros exemplos

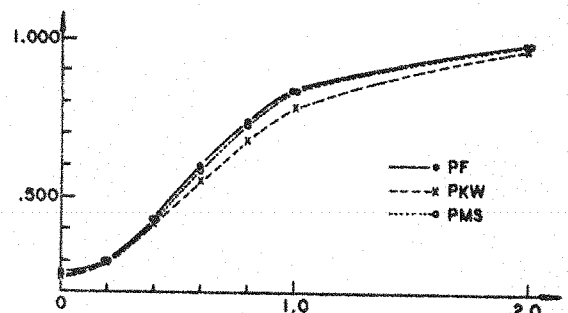
que justificam nossa expectativa são os estimadores de Hodges e Lehmann ([6]), os quais se comportam de forma semelhante aos testes não paramétricos que os originaram. Para uma conceituação precisa de como comparar as caudas de duas distribuições sugerimos ao leitor consultar o capítulo 8 de Hajek ([4]).

Em nosso modelo os testes não paramétricos não se portaram como esperávamos. Observando-se as curvas de poder, figuras abaixo, vemos que os testes não paramétricos são semelhantes ao teste F.

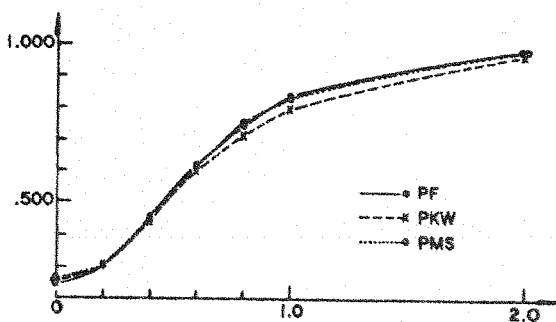
FIGURA 4.1 - CURVAS DE PODER



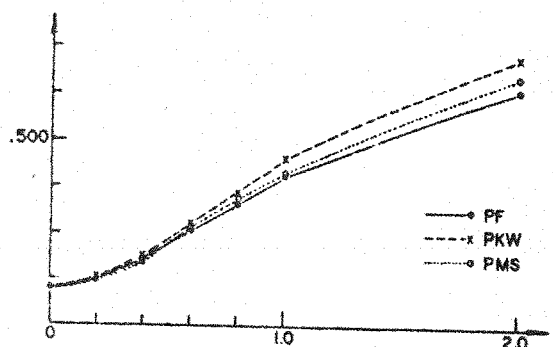
NORMAL



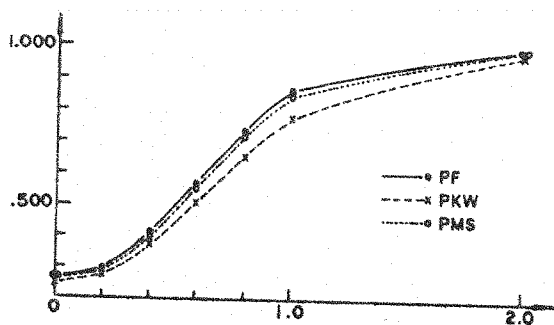
LOGÍSTICA



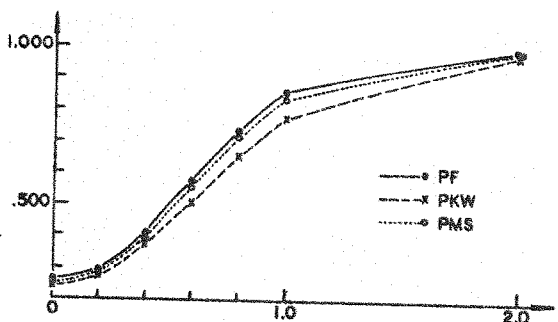
DUPLA-EXPONENCIAL



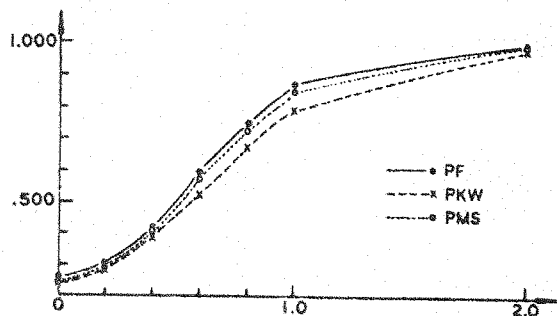
CAUCHY



5% - 3N



10% - 3N



25% - 3N

Em particular, quando a distribuição simulada é a normal, o teste F é mais poderoso que os não paramétricos, o que se justifica por sua propriedade de ser uniformemente mais poderoso invariante ([2]). Ainda sob a normal, o teste de Mehra e Sarangi supera, em poder, o teste do tipo de Kruskall-Wallis, o que é razoável uma vez que no teste de Mehra e Sarangi introduzimos algumas comparações entre blocos com o intuito de melhorar a eficiência (ver Hodges & Lehmann ([6])).

Por outro lado, na distribuição de Cauchy os testes não paramétricos são melhores que o teste de F, e, ainda, o teste do tipo Kruskall-Wallis é mais poderoso que o de Mehra e Sarangi. Estas conclusões vem de encontro ao que imagináva-

mos, pois a distribuição de Cauchy tem caudas bem espessas. Além disto, o teste do tipo Kruskal-Wallis, olhado como uma generalização do teste da mediana, deveria, realmente, ter um bom desempenho em distribuições com caudas grossas.

Em resumo, tanto na normal como na Cauchy os resultados da simulação foram nas direções esperadas.

No caso da dupla-exponencial o teste do capítulo 3 não se apresenta uniformemente mais poderoso como seria esperado, uma vez que é uma generalização do teste da mediana.

Esses nossos comentários são válidos somente para esta situação particular descrita na seção 3. Se não tivéssemos tido problemas de tempo de computação poderíamos variar o tamanho de amostra e, assim, possivelmente, verificaríamos como as eficiências relativas se aproximam de seus valores limites. Para isto dois caminhos viáveis seriam:

- i) manter o número de tratamentos fixo e fazer uma observação por casela, deixando, todavia, o número de blocos crescer. Essa generalização da simulação é justificável pois o teste de Mehra-Sarangi pressupõe que a introdução de comparações entre-blocos aumenta as eficiências relativas.
- ii) uma outra possibilidade seria manter fixo o número de tratamentos e de blocos e aumentar o número de observações em cada casela. Do ponto de vista das aplicações esta situação parece-nos na

tural uma vez que o número de tratamentos e de blocos está a priori fixado pela própria natureza do problema em estudo.

Observando-se a tabela 3.3 notamos que as estimativas das eficiências relativas, sob a normal, estão bem abaixo dos valores assintóticos (tabela 2.1), o que nos leva a crer que a aproximação seja por valores inferiores, podendo no entanto, também, haver oscilações ou *overshoot*.

Finalmente, chamamos a atenção para as distribuições exatas das estatísticas  $W$  e  $W^*$ , sob a hipótese nula, serem muito irregulares (figura 3.1); isto é, assumem valores não equispaçados e tem uma forma que não se "assemelha muito" da distribuição de  $\chi^2$ , principalmente porque suas frequências não decrescem a partir de um dado ponto. É possível que estes fatos nos tenham levado a obter eficiências relativas muito distantes dos respectivos valores assintóticos. Este nosso comentário basea-se no que ocorre com a distribuição da estatística de Kolmogorov-Smirnov (Hodges ([5'])) para problemas de duas amostras. Na referência acima verifica-se que as aproximações são boas quando os tamanhos de amostras são iguais, e se tornam ruins para amostras de tamanhos diferentes, caso no qual os valores da estatística não são equidistantes.

## A P Ê N D I C E I

Apresentamos neste apêndice os cálculos das média e variância de  $R_j^*$  sob a hipótese nula.

Como vimos no Capítulo III,

$$R_j^* = \sum_{i=1}^n R_{ij}^* = \sum_{\ell} r_{ij\ell}^* ,$$

onde  $r_{ij\ell}^*$  são os postos das observações num dado bloco.

Assim:

$$E(R_j^*) = \sum_{i,\ell} E(r_{ij\ell}^*)$$

Como sabemos  $E(r_{ij\ell}^*) = \frac{N'+1}{2}$  e então:

$$(I.1) \quad E(R_j^*) = nm_j \left( \frac{N'+1}{2} \right)$$

Desejamos, ainda, calcular,

$$(I.2) \quad \text{Var}(R_j^*) = \text{Var}\left(\sum_i R_{ij}^*\right) = \sum_i^n \text{Var}(R_{ij}^*)$$

Desta forma:

$$\begin{aligned} \text{Var}(R_{ij}^*) &= \text{Var}\left(\sum_{\ell} r_{ij\ell}^*\right) = \\ &= \sum_{\ell} \text{Var}(r_{ij\ell}^*) + \sum_{\ell \neq s} \text{cov}(r_{ij\ell}^*, r_{ijs}^*) = m_j \tau^2 + m_j (m_j - 1) \lambda \end{aligned}$$

onde  $\tau^2 = \text{Var}(r_{ij\ell}^*)$  e  $\lambda = \text{Cov}(r_{ij\ell}^*, r_{ijs}^*)$ .

Após alguns cálculos obtemos:

$$\lambda = - \frac{\tau^2}{N'-1}$$

Assim temos,

$$\text{Var}(R_{ij}^*) = \frac{m_j \tau^2}{N' - 1} (N' - m_j)$$

$$\text{Como } \tau^2 = \frac{N'^2 - 1}{2}, \text{ obtemos: } \text{Var}(R_{ij}^*) = \frac{m_j (N' - m_j) (N'^2 - 1)}{12 (N' - 1)}$$

Substituindo em (I.2) obtemos:

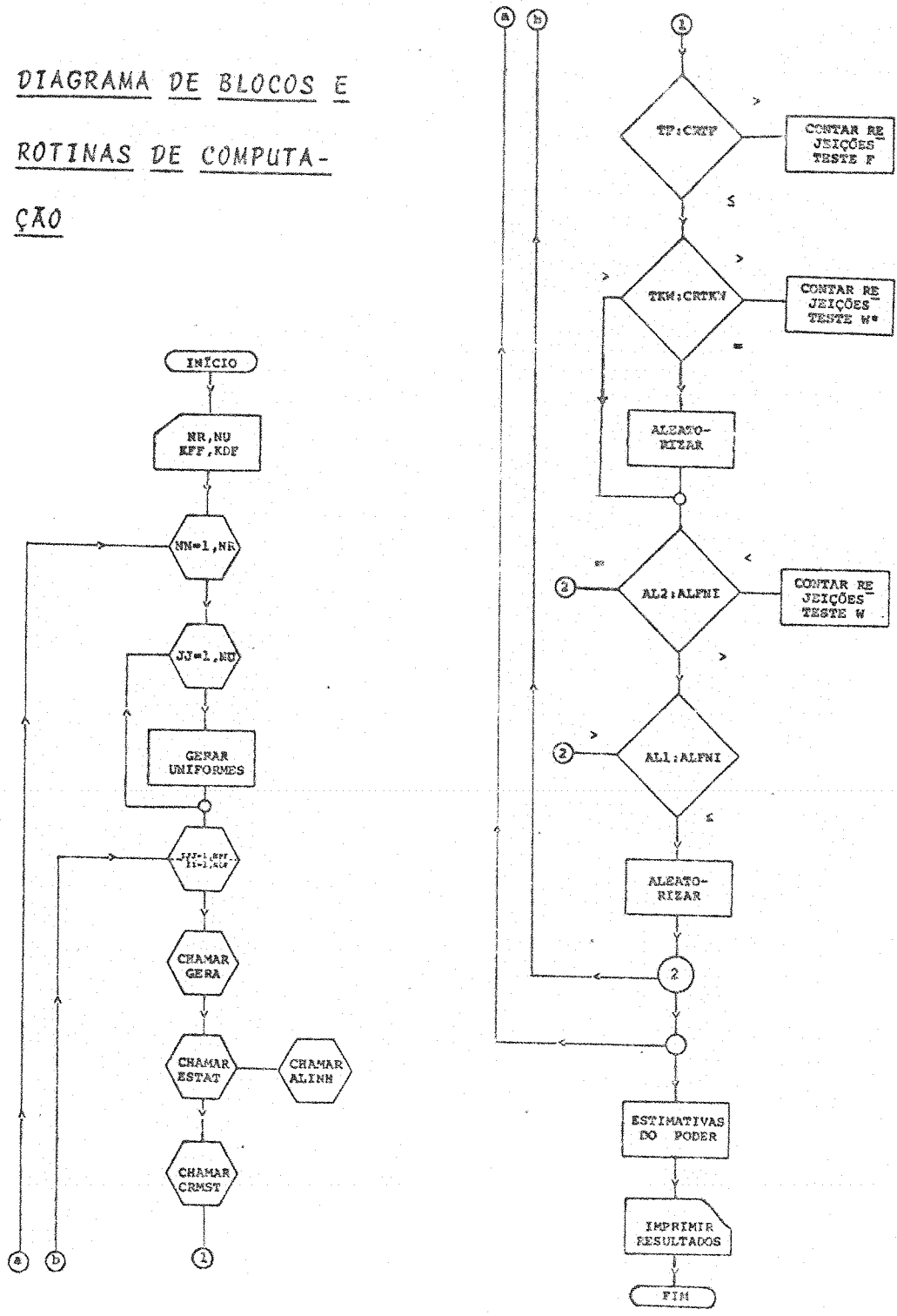
$$\text{Var}(R_j^*) = \frac{nm_j (N' - m_j) (N'^2 - 1)}{12 (N' - 1)}$$

Finalmente mostraremos que o denominador da expressão (1.4) do Capítulo III é constante. Desenvolvendo aquela expressão e somando, temos:

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j \sum_l (r_{ijl}^* - \frac{N'+1}{2})^2 &= \sum_i \left[ \frac{1}{6} N' (N'+1) (2N'+1) - \frac{1}{4} N' (N'+1)^2 \right] = \\ &= \sum_i \left[ \frac{N'}{12} (N'+1) (N'-1) \right] = \frac{nN'}{12} (N'^2 - 1). \quad \nabla \end{aligned}$$

APÊNDICE 11

DIAGRAMA DE BLOCOS E  
ROTINAS DE COMPUTA-  
ÇÃO







```

402 CONTINUE
401 CONTINUE
ALPHAKU12/216.
ALPHAFON11/216.
IF(I1-INT(I)) 464.66.85
85 NF(I,J,I1)=F(I,J,I1)+1
86 IF(I1-INT(I)) 50.51.52
52 NM(I,J,I1)=NM(I,J,I1)+1
50 GO TO 40
51 IF(I1-INT(I)) 55.55.60
55 NM(I,J,I1)=NM(I,J,I1)+1
60 IF(I1-INT(I)) 65.65.66
65 NM(I,J,I1)=NM(I,J,I1)+1
60 TO 40
66 IF(I1-INT(I)) 75.75.80
75 NM(I,J,I1)=NM(I,J,I1)+1
IF(I1-INT(I)) 80.80.80
80 NM(I,J,I1)=NM(I,J,I1)+1
40 CONTINUE
70 CONTINUE
RM=FLOAT(NR)
DO 90 I=1,KOF
WHIT(I,3)
DO 90 I=1,KOF
PMS(I,J,I)=PMS(I,J,I)/NM
PMS(I,J,I)=NM(I,J,I)/NM
PF(I,J,I)=PF(I,J,I)/NM
PRT(I,6,5) ULT(I,11),PF(I,J,I),PMS(I,J,I)
90 CONTINUE
1 FORMAT(11,3X,F4.2,7X,F5.3,8X,F5.3)
3 FORMAT(11,10(/),A2,6DELIA
PF
CALL EXIT
END
PMS0)
PMS)

SUBROUTINE GCRA
SUBROUTINA GCRA=GERCAO DOS VETORES ALGATOIDES
COMMON ALI,AL2,TPTS,TF,TK,DELTA(T),P(4),PROP(3),BETA(I),R(26),
*(12,11,7),*(12,11,7),KOF,MU2,AKK,KII,IRMS(12,11,7)
DIMENSION Y(12),ALFA(I,11)
NORMAL (0,1)
DO 101 I=1,MU2,2
A=SQRT(-ALOG(N(I)))=ALOG(R(I))
B=COS(6.283192*B(I+1))
C=SEN(6.283192*B(I+1))
Y(I,3)=B
Y(I,4)=C
L=0
DO 102 I=1,KOF
DO=DELTA(I)
DO 102 I=1,KII
Z=ZB(I)
DO 102 J=1,KK
L=L+1
JAN=J1
ALFA(I,11)=Z+EE+DO=JA
NORMAL
END

SUBROUTINE ALINH=ALINHAMENTO NA MEDIANA
SUBROUTINA ALINH
COMMON ALI,AL2,TPTS,TF,TK,DELTA(T),P(4),PROP(3),BETA(I),R(26),
*(12,11,7),*(12,11,7),KOF,MU2,AKK,KII,IRMS(12,11,7)
DIMENSION Y(12),ALFA(I,11)
MTR=KAKI
NM=KAKI/2
IG=NM/2
DO 101 I=1,MTR,KK
L=0
NM=KAKI-1
DO 102 I=K,M
DO 102 J=K,M
IF(I=J) 103.103.102
L=L+1
Y(I,11)=Y(I,11)+Y(J,11)/2
DO CONTINUE
DO 104 J=1,M,N
IF(Y(I,11)=Y(J,11)) Y(J,11)=Y(I,11)/2
DO CONTINUE
DO 104 J=1,M,N
AUX=Y(I,11)+Y(J,11)
U(11)=Y(I,11)+Y(J,11)
DO CONTINUE
XMED=C(U(I,11),Y(I,11)+U(10+1),Y(I,11))/2.
DO 104 I=1,M,N
Y(I,11)=X(I,11)+Y(I,11)*XMED
DO CONTINUE
END

```

C

C

C

LEGENDAS DO DIAGRAMA DE BLOCO E ROTINAS DE COMPUTAÇÃO

- AL1 =  $\tilde{P}(W > w_0)$  onde  $w_0$  é uma determinação da estatística W.
- AL2 =  $\tilde{P}(W > w_0)$
- ALFNI = nível de significância fixado.
- ALINH = subrotina de alinhamento ESTIMADOR tipo HODGES e LEHMANN.
- CRTF = Valor crítico do teste F.
- CRTKW = Valor crítico do Teste  $W^*$ .
- CRMS = subrotina para cálculo da distribuição da estatística W.
- ESTAT = subrotina para cálculo das estatísticas F, W e  $W^*$ .
- GERA = subrotina para geração das diversas distribuições simuladas.
- KDF = número de distribuições simuladas.
- KFF = número de pontos sob a alternativa.
- NR = número de repetições.
- NU = número de uniformes geradas.
- TF = valor da estatística F.
- TKW = valor da estatística  $W^*$ .
- TMS = valor da estatística W.

## R E F E R E N C I A S

- [1] CRAMER, H. - Mathematical Methods of Statistics, (1963).
- [2] FERGUSON, T.S.- Mathematical Statistics a Decision Theoretic Approach, Academic Press, (1967).
- [3] FRIEDMAN, M. - The Use of Ranks to avoid the Assumption of Normality Implicit in the Analysis of Variance, JASA, (1937), 675-701.
- [4] GRAYBIL, F.A.- An Introduction to Linear Statistical Models, Vol. I, McGraw-Hill, (1961).
- [4'] HÁJEK, J. - A Course in Nonparametric Statistics, Holden, Day, (1969).
- [5] HANNAN, E.J. - The Asymptotic Powers of Certain tests based on Multiple Correlations, JRSS, (1956), 227 - 233.
- [5'] HODGES, J.L. - The Significance probability of the Smirnov two-sample test, Arkiv för Matematik, 469-486, (1957).
- [6] HODGES, J.L. & LEHMANN, E.L. - Rank Methods for Combination of Independent Experiments in Analysis of Variance, AMS, (1962), 482-497.
- [6'] HODGES, J.L. & LEHMANN, E.L. - Estimates of Location Based on Rank Tests - AMS, (1963), 598-611.
- [7] KRUSKAL, W.H & WALLIS, W.A. - Use of Ranks in One - Criterion Variance Analyses, JASA (1952), 583-621.
- [7'] KRUSKAL, W.L - A Nonparametric test for the Several Sample Problem, (1952), 525-540.

- [8] MEHRA, K.L & SARANGI, J. - Asymptotic Efficiency of Certain Rank tests for Comparative Experiments, *AMS S*, (1967), 90-107.
- [9] NOETHER, G.E. - Elements of Nonparametric Statistics, John Wiley & Sons, (1967).
- [10] NOETHER, G.E. - On a Theorem of Pitman, *AMS*, (1965), 64-68.
- [11] WALD, A & WOLFOWITZ, J.- Statistical Tests Based on Permutations of the observations, *AMS*, (1944), 358-372.
- [12] VAN ELTEREN, PH. & NOETHER, G.E. - The Asymptotic Efficiency of the  $\chi_r^2$ -test for a Balanced Incomplete block Design, *Biometrika*, (1959), 475-477.
- [13] BOX, G.E.P. & MULLER, M.E. - A Note on the Generation of Random Normal Deviates.
- [14] LEWIS, P.A.W, GOODMAN, A.S. & MILLER, J.M. - Pseudo-Random Number generator for the System/360, *ACM*, (1969), 136-145.