Fernando Furquim de Almeida

FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA ABSOLUTA NO PLANO

Tese apresentada no concurso para provimento efetivo da Cadeira VII - CRÍTICA DOS PRINCÍPIOS E COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICA - da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de S.Paulo.

S.PAULO

1951

INTRODUÇÃO

Uma das primeiras e mais importantes questões a respeito da "Geometria Elementar", após a descoberta das geometrias não euclidianas, foi a de saber quais as proposições em cuja demonstração se fazia necessário o uso de postulado da continuidade.

Na exposição contida nos famosos "Grundlagen der Geometrie", Hilbert, (1) tomando como noções primitivas, as de ponto, reta e plano, estabeleceu os cinco grupos de postulados de pertinência, ordem, congruência, paralelismo e continuidade, e construiu, axiomàticamente, a partir dêsses postulados, a geometria euclidiana. Mostrou, então, que os postulados de continuidade não são necessários às demonstrações dos teoremas que não exigem, de um modo geral, o emprêgo de limites, como os da equivalência de poliedros, do cálculo do comprimento da circunferência, da área do círculo, das áreas e dos volumes dos corpos redondos.

Com o êxito obtido, foi levado Hilbert ao estudo do problema correspondente na geometria de Lobatchfsky, a qual, como se sabe, difere da euclidiana, ùnicamente pelo postulado das paralelas, de modo que os grupos de postulados da pertinência, ordem, congruência e continuidade são conservados.

O grupo da continuidade é formado pelos postulados de Arquimedes e da completabilidade linear. Nos "Grundlagen der Geometrie", Hilbert não conseguiu evitar o postulado de Arquimedes, na demonstração do segundo teorema de Legendre, a saber: "A soma dos ângulos de um triângulo não pode ser maior do que dois retos". Foi

---

(1) Hilbert, D.- Grundlagen der Geometrie- Teubner- 1899- Sempre que citado êste livro nos referimos à 7a. edição- 1930.

por essa razão que, entre seus célebres problemas propostos no Congresso de Paris, em 1900, Hilbert incluiu o da construção de uma geometria não arquimediana, na qual, êsse teorema não seja verificado. Essa geometria foi obtida por Max Dehn (2), ficando assim definitivamente estabelecida a necessidade do postulado de Arquimedes, na demonstração do segundo teorema de Legendre. Decorre dêsse fato, a impossibilidade de se demonstrar, sem êsse postulado, que a soma dos ângulos de um triângulo, na geometria de Lobatschfsky, é menor do que dois retos.

Mesmo assim, o problema continuava a ter sentido, para a parte relativa à completabilidade linear, e,ainda, bastante complexo. As paralelas,de Lobatschfsky, a uma reta dada, r, por um ponto dado, A, eram definidas como as retas de feixe A, que separam as retas que encontram r das que não a encontram, e, nas demonstrações da existência de uma perpendicular comum a duas retas não secantes, utilizava-se, sempre, da continuidade. Modificando, convenientemente, o postulado das paralelas, Hilbert (3) conseguiu, também, evitar a completabilidade linear nessa geometria, em tôdas as questões que não envolvem o emprêgo de limites.

O conjunto dos postulados de pertinência, ordem,congruência e continuidade e as consequências deles decorrentes constituem o que J. Bolyai denominava "Geometria Absoluta".Algumas proposições da geometria euclidiana não envolvem o conceito de paralelas, nem

---

(2) Dehn, M.- Die Legendres'chen Sätze über die Winkelsumme in Dreieck. Math. Ann. 53 - 1900 - pág. 404.

(3) Hilbert, D. - Neue Begründung der Bolyai- Lobatschfsky Geometrie - Math. Ann. 57 - 1903 - pág. 137.

no enunciado, nem na demonstração. Outras, envolvendo, embora, a noção de paralelas, podem ser modificadas, de modo a se transformarem em teoremas da geometria absoluta. São exemplos do primeiro tipo, os teoremas relativos à pertinência, ordem e congruência, estudados por Hilbert, nos "Grundlagen der Geometrie". Pertence ao segundo tipo o teorema de Desargues: "Dados dois Triângulos ABC e A'B'C' se as retas AA', BB' e CC' passam por um ponto O e se AB e A'B' têm uma perpendicular comum que passa por O, assim como BC e B'C', então, AC e A'C' têm também uma perpendicular comum que passa por O'', enunciado êste absolutamente equivalente à forma euclidiana do mesmo teorema: "Dados dois triângulos ABC e A'B'C', se as retas AA', BB' e CC' passam por um ponto O e se AB // A'B' e BC // B'C' BC // A'C'.

Nesta tese desenvolvemos a geometria absoluta no plano até a demonstração dos teoremas de Desargues e Pascal. Pelos resultados dos trabalhos de Hilbert, que enunciamos acima, a completabilidade linear pode ser abandonada no estudo de muitas questões, entre as quais, sòmente o segundo teorema de Legendre exige o postulado de Arquimedes. Como não vamos abordá-lo, abandonamos completamente o grupo da continuidade e estudamos a geometria absoluta que pode ser construida exclusivamente com os postulados de pertinência, ordem e congruência.

O teorema de Desargues, como se sabe, é consequência direta dos postulados da pertinência e da ordem, se êstes incluirem postulados da geometria espacial de modo que sua demonstração não oferece dificuldade na geometria no espaço. Por outro lado, Hilbert e Moulton (4) deram exemplos de geometrias baseadas nos postulados planos da pertinência e da ordem que são não desarguianas, de modo que o teorema de Desargues não é consequência dêsses axiomas. No entanto, a importância da demonstração daquele teorema mediante postulados da geometria plana, foi posta em relevo por Hilbert (5), demonstrando que a condição necessária e suficiente para que uma geometria plana construída axiomàticamente coincida com a geometria subordinada nesse plano por uma geometria espacial é que se verifique na geometria plana, o teorema de Desargues". Essa é a razão pela qual nos limitamos à geometria absoluta no plano.

Nos dois primeiros capítulos estudamos os teoremas clássicos seguindo de perto os "Grundlagen der Geometrie".

No primeiro enunciamos os postulados da pertinência e da ordem e demonstramos os teoremas de separação e principais consequências enunciados apenas por Hilbert. A demonstração do Teorema de Jordan para polígonos simples foi orientada pelo método de Veblen (6), com algumas modificações. Em nossa exposição, foi também de grande utilidade o livro de Forder: "Euclidean Geometry". (7)

No segundo capítulo, expusemos a teoria da congruência. Na primeira edição dos "Grundlagen der Geometrie" a transitivida-

---

(4) Hilbert, D.- Grundlagen der Geometrie. O exemplo de Moulton está na pág. 85 da 7a. edição e o mais complicado de Hilbert na pág. 66 da 6a. edição.

(5) Hilbert, D. - Grundlagen der Geometrie - pág. 88.

(6) Veblen, - A System of axioms for geometry - Trans. Am. Math. Soc. - 1904 - pág. 343.

(7) Forder - Euclidean Geometry - Cambridge University Press - 1927.

de da congruência de ângulos era tomada como postulado. Rosenthal (8) mostrou que ela era consequência dos demais,e, modificando os postulados conseguiu também demonstrar a reflexividade da congruência de ângulos, também tomada por Hilbert como postulado. Sua demonstração é longa, e preferimos seguir Hilbert conservando entre os axiomas a reflexividade e demonstrando a transitividade. O método de Hilbert nessa demonstração é mais simples que o de Rosenthal. Consiste em demonstrar primeiramente o chamado "terceiro caso de congruência de triângulos", para depois aplicá-lo à dedução da propriedade transitiva da congruência de ângulos. Em 1940, Reidemeister (9), simplificou ainda mais a teoria, demonstrando previamente que todos os ângulos retos são congruentes (um dos postulados de Euclides)e depois a transitividade. Pode-se em seguida fazer a demonstração clássica do terceiro caso de congruência de triângulos. Foi êsse o método que seguimos. Ainda neste capítulo estudamos a existência do ponto médio de um segmento,da bissetriz de um ângulo, e quadrilátero birretângulo isósceles de Pe.Saccheri e o teorema de ângulo externo de um triângulo.

No terceiro capítulo consideramos a soma dos segmentos e ângulos e demonstramos os teoremas de Desargues e Pascal com o auxílio do conceito de produto de um ângulo por um segmento,introduzido por Hilbert nos "Grundlagen der Geometrie"(10).A demonstra

---

(8) Rosenthal, A. - Vereinfachung des Hilbertschen System der Kengruenzaxion - Math. Ann. 71 - 1912 - pág. 257.
(9) Reidemeister, K. - Die Transitivitat der Winkelkongruenz - Jber, der Deutsch. Math. Verein. - 49 - Abt. 2- pg. 74.
(10) Hilbert, D. - Grundlagen der Geometrie - pág. 53.

ção do teorema de Pascal é a mesma que a de Hilbert (11) porém, esta se baseava na propriedade, simbòlicamente representada pela equação $\alpha\beta a = \beta\alpha a$, por êle deduzida no caso euclidiano, que demonstramos ser verdadeira na geometria absoluta. Obtido o teorema de Pascal, poderiamos adatar ao caso a demonstração do teorema de Hessenberg: o teorema de Desargues é uma consequência direta do teorema de Pascal. Preferimos, no entanto, dar uma demonstração direta e que tem a vantagem de se utilizar também do produto de um ângulo por um segmento.

Completando o plano euclidiano com a introdução dos elementos impróprios, o teorema de Desargues da geometria projetiva é consequência do caso euclidiano. Com a álgebra dos pontos de Staudt-Hessenberg (12), podemos, então, introduzir coordenadas na geometria. Aliás, observemos de passagem, que a álgebra dos pontos é uma generalização do cálculo segmentário de Hilbert, baseado no teorema de Desargues (13), com o qual podemos introduzir diretamente coordenadas na geometria euclidiana sem a introdução dos elementos impróprios.

Na geometria absoluta, completando o plano com os pontos e retas ideais, como, por exemplo, fez Hjelmslev (14), podemos tam-

---

(11) Hilbert, D. - Grundlagen der Geometrie - pág. 53.
(12) Hessenberg - Über einem geometrischen Kalkül - Acta Math. - 29 - pág. 1.
Veblen, Young - Projective Geometry - Ginn and Company - pág. 141.
(13) Hilbert, D. - Grundlagen Geometrie - pág. 88.
(14) Hjelmslev - Neue Begründung der ebenen Geometrie - Math. Ann. 64 - pág. 449.

bém demonstrar o teorema projetivo de Desargues, a partir do caso particular que demonstramos, mediante a semi-rotação definida por Hjelmslev. Possìvelmente a álgebra dos pontos virá permitir a introdução das coordenadas na geometria absoluta.

Êste trabalho já estava redigido quando tivemos conhecimento dos resultados de Ugo Cassina (15) que expõe de modo mais perfeito os postulados de Hilbert e retoma o problema de Rosenthal do trabalho acima citado, que é a demonstração da reflexividade da congruência de ângulos. Os enunciados e postulados, dados por Ugo Cassina, são mais claros que os de Hilbert e os teriamos adotado se dêles tivessemos tido conhecimento em tempo. Também só depois de concluída esta tese, pudemos conhecer o livro de G. Verriest - "Introduction à la géometrie non euclidenne par la methode élementaire". - Gauthier - Villars - 1951, que nos teria sido de utilidade.

Queremos agradecer ao Professor Edison Farah que discutiu conosco êste trabalho e ao Professor João Batista Castanho que não mediu esforços para conseguir uma bôa apresentação mimeográfica.

São Paulo, setembro de 1951.

Fernando Furquim de Almeida

---

(15) Cassina, U. - Nuova teoria della congruenza geometrica - Periodico de Matematica, 141, 25(1947)- pág. 196. Ancora sui fondamenti della geometria secondo Hilbert - notas I, II, III. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere - vol. LXXXI - 1949.

CAPÍTULO I

NOÇÕES PRIMITIVAS, POSTULADOS DA PERTINÊNCIA E DA ORDEM, TEOREMAS DE SEPARAÇÃO

1. Tomaremos, como noções primitivas, ponto e reta. Designaremos os pontos com as letras latinas maiúsculas, e as retas com as letras minúsculas. Os pontos e as retas têm certas relações entre si, dadas pelos postulados, que são divididos em três grupos. Cada grupo dá, por assim dizer, precisão ao significado com que usaremos os conceitos "pertencer", "entre" e "congruente". Por êsse motivo, ao primeiro grupo, daremos o nome de postulados da pertinência, ao segundo, o de postulados da ordem, e ao terceiro, o de postulados da congruência. Ao conjunto dos pontos e retas que satisfazem a êsses postulados, chamaremos de plano.

2. Os postulados da pertinência são os seguintes:

I,1 - Dados dois pontos A e B existe uma reta à qual êles pertencem.

II,2 - Dados dois pontos A e B, não existe mais do que uma reta à qual êles pertencem.

II,3 - Em uma reta <u>r</u> existem, pelo menos, dois pontos; existem, pelo menos, três pontos que não pertencem a uma reta.

Embora no enunciado dos postulados acima, usemos sempre o verbo pertencer, iremos, todavia, no decorrer dêste trabalho, substituí-lo por outros já consagrados pelo uso, como passar, encontrar, etc. Assim, diremos "a reta r passa pelo ponto P", para exprimir que o ponto P pertence à reta r ou que r é uma reta que pertence ao ponto P; diremos que "as retas r e s se encontram em um ponto P", para exprimir que P pertence à r e à s. Do mesmo modo, quando dissermos, por comodidade de linguagem, "dois pontos A e B determinam uma reta" entenderemos que existe e é única a reta à qual êles pertencem, isto é, como que resumimos, nessa única frase, os postulados I,1 e I,2, os quais, precisamente, afirmam a existência e a unicidade da reta que passa por êsses pontos.

A reta determinada por A e B será indicada por reta AB.

Uma consequência imediata dêsse grupo de postulados é que duas retas ou não têm ponto comum, ou têm um só. Com efeito, duas retas r e s não têm ponto comum, ou têm um ponto A. Neste último caso, se tivessem mais um ponto B em comum, as duas retas coincidiriam, de acôrdo com o postulado I,1. Portanto, A é o único ponto comum.

3. Os postulados da ordem dão o significado da palavra "entre" e são em número de cinco:

II,1 - Se um ponto B estiver entre um ponto A e um ponto C, A, B, e C serão três pontos distintos de uma reta e B esterá, também, entre C e A.

II,2 - Dados dois pontos A e B, existe, pelo menos, um ponto C, de modo que B esteja entre A e C.

II,3 - Dados três pontos de uma reta, A, B, C, sòmente um deles poderá estar entre os outros dois.

Definição: Chama-se segmento a um par não ordenado de pontos. Dados os pontos A e B, podemos, então, designar o segmento que êles determinam, por AB ou BA. Os pontos A e B são chamados extremos do segmento; os que estão entre A e B, pontos internos, ou simplesmente pontos do segmento; e os pontos da reta, determinada por A e B, que não são do segmento AB, nem como extremos, dizem-se pontos externos do segmento.

III,4 - Postulado de Pasch: Sejam A, B, C três pontos que não pertencem a uma reta e r uma reta do plano ABC que não passa por A nem por B nem por C. Si r passar por um ponto do segmento AB, passará, certamente, ou por um ponto do segmento AC, ou por um ponto do segmento BC.

Convenções; Si A, B e C forem três pontos de uma reta diremos que êles estão na ordem [ABC], se B estiver entre A e C. Da mesma forma se A, B, C, e D forem quatro pontos de uma reta, "ordem [ABCD]" quer dizer que B está entre A e C e entre A e C, e que C está entre A e D e entre B e D. Mais geralmente, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forem n pontos de uma reta, a "ordem

$[A_1A_2\ldots A_n]$ indica que A_j está entre A_i e A_k, se $i < j < k$.

Pelo primeiro postulado da ordem, sabemos que se B estiver entre A e C, estará também entre C e A; portanto, as ordens [ABC] e [CBA] têm o mesmo significado, assim como [ABCD] e [DCBA], $[A_1A_2\ldots A_n]$ e $[A_n\ldots A_2A_1]$.

Teorema 1 : - Dados os pontos A e B existe um ponto entre êles.

Pelo postulado I,3, existe um ponto G que não pertence à reta AB, e, por II, 2, um ponto E, tal que A,G e E estão na ordem [AGE]. Ainda pelo mesmo postulado, podemos tomar F de modo que B,E,F estejam na ordem [BEF]. A reta FG não passa por nenhum dos pontos A, B e E, encontra o segmento AE no ponto G, e a reta BE no ponto F, externo do segmento BE; logo, pelo postulado de Pasch, encontrará o segmento AB num ponto C, interno.

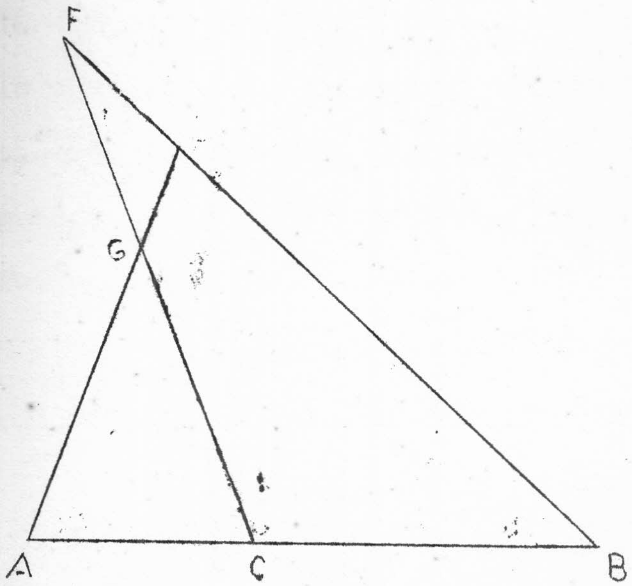


Fig. 1

Teorema 2 : - Se A, B e C forem três pontos de uma reta, um dêles estará entre os outros dois.

Pelo postulado II,3, sòmente um dos três pontos A, B e C pode estar entre os outros dois. Suponhamos, então, que A não esteja entre B e C e C não esteja entre A e B. Temos que demonstrar então, que B está entre A e C. Existe um ponto G fora da reta AC e um ponto E tal que B, G e E estão na ordem [BGE]. A reta AG não passa por B nem por C nem por E, e encontra o segmento BE no ponto interno G; encontrará, pois, pelo postulado de Pasch, o segmento BC, ou o segmento EC num ponto interno. Mas, AG encontra a reta AC no ponto A, externo de BC; logo encontrará EC no ponto interno F. Do mesmo modo se pode demonstrar que CG encontra o segmento AE no ponto interno H. Pelo postulado de Pasch, se considerarmos os pontos A, E, F, e a reta CG, veremos que G é um ponto interno de AF e, considerando os pontos A, C, F e a reta EG, veremos, ainda, que E é um ponto interno de AC.

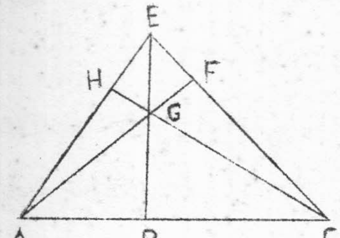


Fig. 2

Corolário. Sejam A, B, C três pontos que não pertencem a uma mesma reta; E um ponto do segmento AE, F do segmento BC e G do segmento AB. Então os pontos E, F e G não podem estar numa mesma reta. Se E, G e F pertencerem a uma reta, pelo teorema anterior, um deles estará entre os outros dois. Suponhamos que G esteja entre E e F e apliquemos o postulado de Pasch

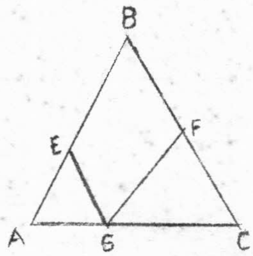


Fig. 3

aos pontos B, E, F e à reta AC. Esta, uma vez que passa pelo ponto G do segmento EF, passará ou por um ponto do segmento BF, o que daria C entre B e F ou por um ponto do segmento BE, donde A estaria entre B e E. Qualquer dos dois casos está em contradição com II,3, pois, por construção,F está entre E e D e E entre A e B.

Uma consequência imediata dêste corolário é que, no postulado de Pasch, se a reta r passar por um ponto do segmento AC, não passará por um ponto entre B e C e vice-versa.

<u>Teorema 3 : - Se A, B, C, D forem quatro pontos de uma reta e se tivermos as ordens [ABC] e [BCD], teremos também as ordens [ABC] e [ACD].</u>

Tomemos um ponto E, fora da reta r , onde estão os pontos A, B, C, D e seja F um ponto tal que C, E, F estejam na ordem [CEF]. Aplicando o postulado de Pasch à reta AC e aos pontos B, C, F teremos a ordem [BGF], e pelo mesmo postulado, aplicado à reta GD e aos pontos B, C, F, a ordem [CHF]. Ainda pelo postulado de Pasch, aplicado aos pontos B, G, D e à reta FC, teremos [GHD], e aplicado aos pontos A, E, C e à reta FG, a ordem [EGA]. Aplicando-o então à A, G, D e à reta FC, teremos a ordem [ACD], e, a segunda parte do teorema está demonstrada. Se

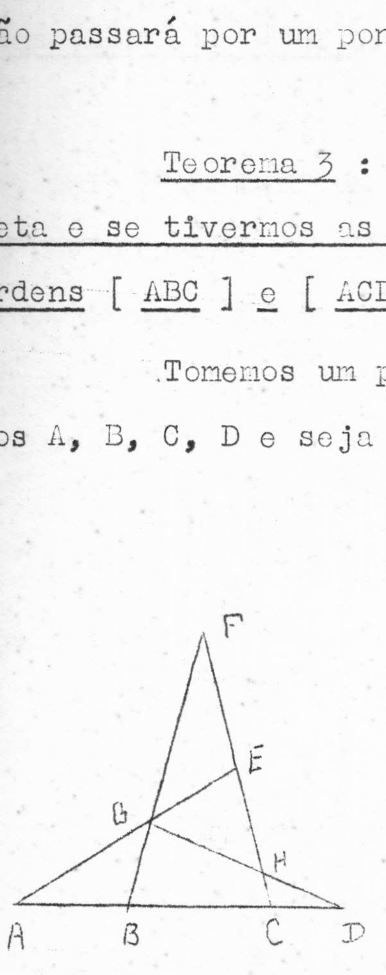


Fig. 4

repetíssimos a demonstração a partir do ponto B, isto é, se tomássemos F de modo que os pontos B, E e F estivessem na ordem [BEF], e, se trocassemos sempre B e C, obteríamos a ordem [ABC], e assim completaríamos a demonstração do teorema.

<u>Teorema 4. Se A, B, C, D forem quatro pontos de uma reta e se tivermos as ordens [ABC] e [ACD], teremos, também, as ordens [ABD] e [BCD].</u>

Se a reta CF encontrasse o segmento AG num ponto interno, pelo postulado de Pasch, passaria por um ponto do segmento AB ou por um ponto do segmento BG. Ora, CF encontra a reta AB no ponto C, externo do segmento AB e a reta BG no ponto F externo do segmento BG, portanto, a reta CF não passa por um ponto interno do segmento AG.

Tomemos o ponto G, fora de r , e F de modo que valha a ordem [BGF](Fig. 4). Estando C no segmento AD, a reta CF, pelo postulado de Pasch, encontra o segmento GD num ponto H, donde, ainda pelo postulado de Pasch, aplicado aos pontos B, G, D e à reta FC, se segue que FC encontra BD no ponto C, interno ao segmento BD, isto é, temos a ordem [BCD].

De [ABC] e [BCD] segue-se, pelo teorema 3, a ordem [ACD], e o teorema está completamente demonstrado.

<u>Teorema 5. Dados quatro pontos de uma reta podemos indicá-los por A, B, C e D de modo que êles estejam na ordem [ABCD].</u>

De fato, tomemos três dentre os quatro pontos. Só um deles, que indicaremos por Q, está entre os outros dois, que chamaremos de P e R. Teremos, então, a ordem [PQR]. Sendo S o quarto ponto, os pontos PR e S estarão numa das seguintes ordens: [PRS], [RPS] ou [PSR]. Como já temos a ordem [PQR], a primeira, [PRS], mostra que os quatro pontos, PQR e S estão na ordem [PQRS]. A segunda, [RPS], com [RQP], que coincide com [PQR], dá a ordem [AQPS]. Vejamos a terceira. Temos, por hipótese, as ordem [PQR] e [PSR]. Consideremos as ordens [PQS], [PSQ] e [QPS], que são as três únicas possíveis para os pontos PQ e S. A primeira, [PQS], com [PSR], dá [PQSR], que não contradiz a ordem [PQR] já existente. Da segunda, [PSQ], combinada com [PQR], vem [PSQR], também possível. A terceira [QPS], com [RPQ] = [QPR] dá [RQPS] na qual P está entre R e S, em contradição com a hipótese [PSR]. Resumindo, vemos que, dados os pontos P,Q,R e S, estarão êles numa e numa só das ordens ; [PQRS], [RQPS], [PQSR] e [PSQR]. Indicando os pontos PQR e S oportunamente por A ,B,C e D, o teorema fica demonstrado.

Observação - Vimos que as ordens [PQR] e [PSR] dão, para os pontos PQR e S, as ordens [PQSR] ou [PSQR], e que mostra que se Q e S estiverem entre P e R, Q estará entre P e S ou entre S e R. Essa observação nos será útil em seguida.

Teorema 6. - Dados n pontos de uma reta, podemos indicá-los por $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de modo que estejam na ordem $[A_1 A_2 \ldots A_n]$.

Este teorema é uma generalização do anterior, e vamos demonstrá-lo por indução completa. Pelos teoremas 2 e 5, é verdadeiro para n = 3,4. Suponhamos que seja verdadeiro para n-1 pontos.Se jam êles $B_1, B_2 \dots, B_{n-1}$ na ordem $[B_1, B_2, \dots, B_{n-1}]$, e P o n-esimo ponto. Considerando os pontos P, B_1 e B_{n-1} teremos uma das três possibilidades :

$$\text{I}\ [\,P B_1\ B_{n-1}\,],$$

$$\text{II}\ [\,B_1\ B_{n-1}\ P\,],$$

$$\text{III}\ [\,B_1\ P\ B_{n-1}\,].$$

No caso I, temos as ordens $[PB_1B_{n-1}]$ e $[B_1B_2 \dots B_{n-1}]$. Vamos demonstrar que os pontos $P_1B_1, \dots, B_{n-1}$ estão na ordem $[PB_1B_2 \dots B_{n-1}]$, para o que basta mostrar que sendo $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1$ devemos ter $[PB_1B]$. Ora, se $i = 1$ e $j = n-1$ temos $[PB_1\ B_{n-1}]$, que é a hipótese. Se $i > 1$ e $j = n-1$, de $[PB_1B_{n-1}]$ e $[B_1B_iB_{n-1}]$ segue-se $[PB_1B_jB_{n-1}]$ tiramos $[PB_iB_j]$.

No caso II as ordens são $[B_1B_{n-1}\ P]$e $[B_1B_2 \dots B_{n-1}]$,que coincidem com $[PB_{n-1}B_1]$ e $[B_{n-1}, \dots, B_1]$, e, pelo caso I, temos a ordem $[PB_{n-1}, \dots, B_1]$que é igual à ordem $[B_1 \dots B_{n-1}\ P]$.

No caso III, de acôrdo com a observação do teorema anterior, P está entre B_1 e B_2 ou entre B_2 e B_{n-1} . Se estiver entre B_2 e B_{n-1}, estará entre B_2 e B_3 ou entre B_3 e B_{n-1} , e assim por diante. Podemos, pois, determinar um indice $j \leqslant n-1$ tal que tenhamos a ordem $[B_{j-1}\ PB_j]$, e, pela própria construção, tem-se, $[B_1PB_{n-1}]$, para $j \leqslant 1 \leqslant j-1$. A fim de completarmos a demonstração, devemos mostrar que $[B_i\ PB_r]$, para $1 \leqslant i \leqslant j-1$ e $j \leqslant k \leqslant n-1$. Se $i = j-1$ e $j=k$, temos a hipótese $[B_{j-1}\ PB_j]$; se $i=j-1$ e $j < k$, de $[B_{j-1}\ PB_j]$ e $[B_{j-1}\ B_jB_r]$segue-se $[B_{j-1}PB_k]$. Finalmente, se

$i < j-1$ e $j < k$, as ordens $[B_i B_{j-1} B_k]$ e $[B_{j-1} P B_k]$ dão a ordem $[B_i P B_k]$.

Vemos, então, que os n pontos $P, B_1, \ldots, N_n$ estão numa das ordens $[PB, \ldots, B_{n-1}]$, $[B_1 \ldots B_{n-1} P]$ ou $[B_1 \ldots B_{j-1} P B_j \ldots B_n]$. Em qualquer caso, podemos indicá-los por $A_1, A_2, \ldots, A_n$, de modo que venha a ordem $[A_1 A_2 \ldots A_n]$.

Teorema 7. Entre dois pontos quaisquer de uma reta existem sempre infinitos pontos.

Sejam A e B dois pontos arbitrários de uma reta e suponhamos que entre êles existam n pontos. Pelo teorema 6, podemos indicá-los por A_1, $A_2, \ldots, A_n$, de modo que os n+2 pontos A, A_1, A_2, $\ldots$, A_n B estejam na ordem $[A\, A_1 \ldots A_n B]$. Tomemos os pontos A_{j-1} A_j. Todos os pontos $A, A_1, \ldots, A_{j-2}, A_{j+1}, \ldots, A_n$ e B são pontos externos do segmento $A_{j-1} A_j$, e entre A_{j-1} e A_j existe um ponto que é, portanto diferente de $A, A_1 \ldots A_{j-1}$, $A_j \ldots A_n$ e B. Ora, das ordens $[A\, A_{j-1} A_j]$ e $[A_{j-1}\, P\, A_j]$ segue-se $[A\, P\, A_j]$ e, desta e da ordem $[A\, A_j\, B]$, segue-se $[A\, P\, B]$, isto é, P é um ponto interno do segmento A B. Logo, no segmento A B existem n+1 pontos.

4. O sistema de segmentos A B , B C , C D ,..., K L chama-se linha poligonal que liga o ponto A com o ponto L, e que será indicada por A B C ... K L. Os pontos internos dos segmentos A B, B C ... K L , assim como os pontos A , B , C ... L são os pontos da linha poligonal. Os pontos A , B , C ...L chamam-se vértices e os segmentos A B , B C ,..., K L , lados. Consideraremos como pontos de

um lado exclusivamente os seus pontos internos.

Uma poligonal com dois vértices é um segmento. Se L coincidir com A, a linha poligonal se chamará <u>polígono</u>. Polígonos com 3, 4 ,..., n vértices tais que três vértices consecutivos não pertencem a uma mesma reta, chaman-se respectivamente <u>triângulos</u>, <u>quadriláteros</u> ,..., n-ágonos. É claro que podemos representar o polígono por A B C ... K , ou por B C ... K A , ou por C D ... K A B , etc.

Se os vértices de uma linha poligonal forem todos diferentes, se nenhum vértice pertencer a um lado e se dois lados quaisquer não tiverem ponto comum, diremos que a linha poligonal é simples.

Nos teoremas que vamos estudar é importante saber se um ponto pertence ou não a uma linha poligonal ou a um polígono, de modo que, se tivermos nessa linha poligonal ou polígono, três vértices consecutivos que pertencem a uma mesma reta, não tem importância considerar o vértice que está entre os outros dois como ponto do lado determinado por êstes últimos. Assim sendo, salvo menção expressa do contrário, suporemos que as linhas poligonais e os polígonos que vamos considerar não tenham três vértices consecutivos alinhados.

Para evitar repetições desnecessárias, avisamos também que só usaremos poligonais e polígonos simples.

Chama-se <u>região</u>, a um conjunto R, não vazio de pontos tais que dois pontos quaisquer de R podem ser ligados por uma li nha poligonal cujos pontos pertencem todos a R. A região será convexa, se, dados dois pontos arbitrários de R, P e Q, o segmento P Q pertencer a R. Por exemplo, a totalidade dos pontos é uma região convexa, assim como, o conjunto dos pontos de uma reta.

Seja R uma região, e S um qualquer conjunto de pontos de R, contendo pelo menos um ponto. Diremos que K <u>está dividido nas regiões</u> R_1 <u>e</u> R_2 <u>separadas por S se:</u>

1) todos os pontos de R que não pertencem a S estão numa e numa só das regiões R_1 e R_2, e os pontos de S não pertencem nem â R_1 nem à R_2.
2) qualquer linha poligonal que liga um ponto de R_1, com um ponto de R_2 contém, pelo menos, um ponto de S.

<u>Teorema 8</u>. - <u>Sejam</u> R_1 <u>e</u> R_2 <u>duas regiões contidas na região R, separadas pelo conjunto S, e suponhamos que</u> R_1' <u>e</u> R_2' <u>sejam também duas regiões contidas em R e separadas pelo mesmo conjunto S. Então, ou</u> $R_1' = R_1$ e $R_2' = R_2$ ou $R_1' = R_2$ e $R_2' = R_1$.

De fato, seja O um ponto de R_1'. Como êle não pertence a S, pertencerá à R_1 ou à R_2. Suponhamos pertencer por exemplo, à R_1. Vamos demonstrar que R_2 e R_2' coincidem. Seja X um ponto de R_2'. Como O pertence à R_1', qualquer linha poligonal que ligue O com X conterá um ponto de S. O, porém, pertence, também, à R_1, logo X pertence à R_2. Assim sendo, qualquer ponto de R_2' é também ponto de R_2. Seja, agora, Y um ponto de R_2. Como O pertence a R_1 , qualquer linha poligonal que ligue O com Y conterá um ponto de S, donde, Y é um ponto de R_2' , pois O pertence também à R_1. Vemos, então, que qualquer ponto de R_2 é também ponto de R_2' .

Como todo ponto da região R_2 pertence à região R_2' e todo ponto desta pertence àquela, R_2 e R_2' coincidem.

Sendo R_1 formada pelos pontos de R, que não pertencem à R_2 e S, e, R_1' , e pelos pontos de R que não pertencem a R_2' e S segue-se que, R_1' e R_1 coincidem, pois, como demonstramos, R_2 e R_2' coincidem.

Se o ponto O pertencesse à R_2 demonstrariamos, com o mesmo processo, que R_2' e R_1 coincidiriam, donde R_2 e R_1' também coincidiriam e o teorema fica, pois, completamente demonstrado.

Definição: Dois pontos P e Q se dizem accessíveis (cada um acessível do outro) com relação a um conjunto de pontos S, se existir uma poligonal que ligue P com Q e que não contenha nenhum ponto de S, salvo, eventualmente, os pontos P e Q.

Vemos, por essa definição, que, se uma região R estiver dividida nas regiões R_1 e R_2 separadas por S, um ponto de S pode ser acessível de qualquer ponto de R_1 ou R_2.

Teorema 9. - Suponhamos a região R dividida nas regiões R_1 e R_2 , separadas por S, e nas regiões R_1' e R_2' , separadas por T. Se todo ponto de R_1' pertencer à R_1, um ponto qualquer T pertencerá à R_1, ou a S.

De fato, conforme a definição de pontos accessíveis, qualquer ponto accessível de um ponto de R_1 pertence à R_1 ou a S. Ora, se um ponto X, qualquer, de T é accessível de todo ponto de R_1' que, por hipótese, é também ponto de R_1 então, X pertence à R_1, ou a S.

5. Teorema 10. - Um ponto O, sôbre uma reta, divide os outros pontos da reta em duas regiões por êle separadas.

Tomemos sôbre a reta r um outro ponto U e seja R o conjunto dos pontos de r, distintos de O, e que determinam, como U, um segmento que contém o ponto O; seja R' o conjunto dos pontos de r, também distintos de O, e que determinam com u um segmento que não contém O. Colocamos o ponto U em R!

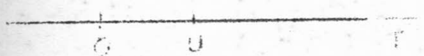


Fig. 5

É claro que nenhum dos dois conjuntos é vazio, pois, R' contém U e, como existe um ponto A tal que O esteja entre A e U, êsse ponto pertencerá à R.

Dados dois pontos Y e Z de r, diferentes de O e U, os quatro pontos O, Y, Z e V, pelo teorema 5, só podem estar numa das 12 ordens seguintes:

[Y Z O U], [Y Z U O], [Y U Z O], [Z Y O U],

[Z Y U O], [O Y U Z], [O Y Z U], [U Y Z O],

[Y O Z U] , [Y O U Z] , [Y U O Z] , [U Y O Z].

Nas oito primeiras ordens os pontos Y e Z pertencem ambos à R ou à R' e, em tôdas elas o segmento YZ não contém o ponto O. Nas quatro últimas, Y e Z pertencem a conjuntos diferentes, isto é, se Y pertencer à R, Z pertencerá à R' , pois, o segmento YZ contém o ponto O.

Se Z coincidir com U, pertencerá a R' e como os três pontos Y, O, U estão numa das ordens, [Y O U], [O Y U] e [O U Y], no primeiro caso, Y pertence à R, e o segmento YU contém O e nos outros dois Y pertence à R' e o segmento UY não contém O.

Apesar de terem sido construidos com o auxílio do ponto U, os dois conjuntos R e R' são independentes dêsse ponto, em virtude do teorema 8.

Como os dois conjuntos R e R' dependem exclusivamente do ponto O, tem sentido a seguinte definição:

Dado um ponto O sôbre uma reta, chama-se semi-reta de <u>origem</u> O, a qualquer dos dois conjuntos de pontos em que êsse ponto O divide a reta .

Se R e R' forem os dois conjuntos em que a reta foi dividida por O, R' chama-se semi-reta <u>oposta</u> de R, e, R, semi-reta <u>oposta</u> de R' .

Diremos que dois pontos que pertençam a uma mesma semi-reta de origem O, estão do <u>mesmo lado</u> de O e dois pontos, que pertençam a semi-retas opostas, estão em <u>lados opostos</u> de O.

<u>Teorema 11. - Uma reta r separa os pontos do plano que não pertencem à r em duas regiões convexas.</u>

Pelo postulado I,3 , existe um ponto <u>O</u> que não pertence à <u>r</u> . Seja R_1 o conjunto dos pontos que não pertencem à <u>r</u> e que determinam com O um segmento que contém um ponto de r; e R_2 e conjunto dos pontos que não pertencem à <u>r</u> nem a R_1 . Colocamos também em R_2 o ponto O.

Pela definição dos conjuntos R_1, R_2 cada ponto de R_2 determina, com O, um segmento que não contém nenhum ponto de r, e todos os pontos que não pertencem à r estão num e num só dêsses conjuntos. Por outro lado, R_1 e R_2 não são vazios, pois O pertence à R_2 e, sendo X um ponto de r de modo que O, X e A estejam na ordem [O X A](que existe certamente, pelo postulado II,2) segue-se que o ponto A pertence à R_1 .

Vamos demonstrar que R_1 e R_2 são regiões convexas separadas por <u>r</u> .

Tomemos dois pontos A e B de R_1 .

Os pontos O, A e B podem estar alinhados. Neste caso, se U for o ponto de encontro da reta O A com <u>r</u>, como U é interno e O A e a O B, teremos para os pontos O, U, A, B, uma das ordens [O U A B] ou [O U B A], isto é, o segmento A B não contém o ponto U. Se, então, for um ponto interno de A B, virá imediatamente, das ordens já estabelecidas, que U é o ponto interno de O X, donde X pertence à R_1 .

Se os pontos O, A, B não estiverem alinhados, sejam U_1

e U_2 os pontos de r, tais que, $[\,O\ U_1\ A\,]$ e $[\,O\ U_2\ B\,]$. Pelo corolário do teorema 6, a reta r não encontra o segmento A B. Então, se X for um ponto do segmento A B, como r não encontra o segmento B X e encontra O B em U_2, encontrará O X num ponto U; portanto, X pertence à R_1.

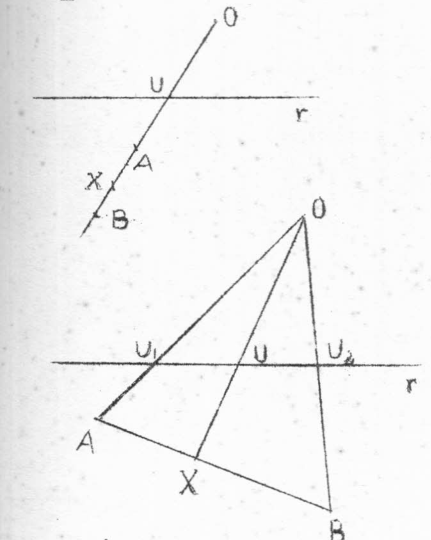


Fig. 6

Sejam, agora, A' e B' dois pontos de R_2. Uma vez que estão alinhados os pontos O, A' e B', o segmento A' B' não pode conter nenhum ponto de r, pois, O A' e O B', não contém pontos de r. Caso O, A' e B' não estejam alinhados, como O A' e O B' não contém nenhum ponto de r, A'B' também não conterá, pelo postulado de Pasch, nenhum ponto de r. Portanto, sendo X' um ponto interno de A'B', o segmento A' X' ou o segmento B'X' também não pode conter pontos de r, donde, o segmento O X' também não possuirá nenhum ponto de r, e, pois X' pertencerá à R_2.

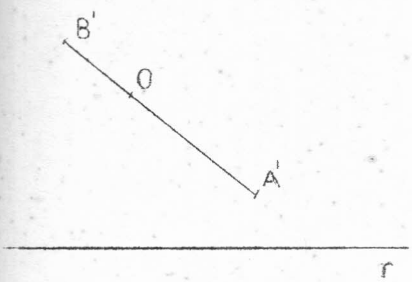


Fig. 7

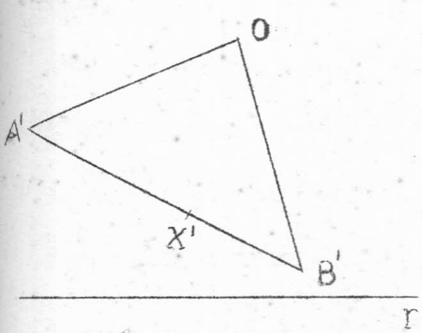
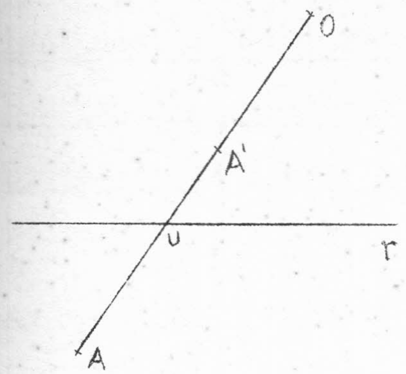


Fig. 8

Está demonstrado, então que R_1 e R_2 são regiões convexas. Passemos a ver que elas estão separados pela reta r .

Tomemos um ponto A de R_1 e um ponto A' de R_2 .

Se os pontos O, A, A' estiverem alinhados, então, pela definição das regiões R_1 e R_2 , teremos as ordens [O U Z] e [O A' U] ou [O U A] e [A' O U] , donde resulta uma das ordens [O A' U A] ou [A' O U A]. Em qualquer caso o segmento A A' contém o ponto U.



Se O, A e A' não estiverem alinhados, como O A contém o ponto U de r e O A' não conterá pontos de r , e, pelo postulado de Pasch, o segmento A A' conterá um ponto V de r.

Vimos assim que o segmento determinado por um ponto de R_1 e um ponto de R_2 contém sempre um ponto

Fig. 9

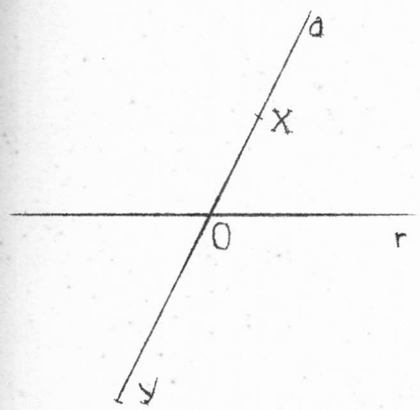
de r . Suponhamos, agora, que exista uma poligonal A $X_1X_2...X_3$A' que ligue A com A' . Os pontos $X_1, X_2, ..., X_s$ podem pertencer, todos, à R_1 , e, então como A' pertence à R_2, o segmento X_s A' conterá um ponto de r. Seja, então X_t o primeiro vértice que pertence à R_2 . Como X_{t-1} pertence à R_1 ou à r, o segmento X_t X_{t-1} ou contém um ponto de r ou terá o extremo X_{y-1}, sôbre r . As regiões R_1 e R_2 estão portanto, separadas por r .

As regiões R_1 e R_2 chamam-se semi-planos de origem

r. Se R_1 e R_2 forem dois semi-planos distintos e de mesma origem, R_1 se dirá semi-plano oposto de R_2, e R_2 semi-plano oposto de R_1. Diremos que dois pontos que pertencem a um mesmo semi-plano de origem r estão de <u>um mesmo lado de r</u>; e dois pontos que pertencem a semi-planos opostos estão <u>em lados opostos de r</u>.

<u>Teorema 12</u>. - <u>Se a for uma semi-reta cuja origem, O, pertencer a uma reta r, diferente da reta que contém a, todos os pontos de a pertencerão a um mesmo semi-plano de origem r, e, os pontos da semi-reta oposta, ao semi-plano oposto.</u>

Seja $\bar{a}$ a reta que contém a. As retas r e $\bar{a}$ se encontram em O. Dois pontos de uma mesma semi-reta de origem O determinam um segmento que não contém O ; logo, pertencem ao mesmo semi-plano de origem r , o que prova a primeira parte do teorema. Por outro lado, se X for um ponto de a, e Y da semi-reta oposta, o segmento X Y conterá o ponto O, donde, <u>a</u> , e a semi-reta que lhe é oposta, estão em semi-planos opostos.



<u>Fig. 10</u>

6. <u>Definição</u> - Chama-se ângulo a um par de semi-retas a, b de mesma origem O que não pertencem a uma mesma reta. As semi-retas <u>a</u> e <u>b</u> chamam-se lados do ângulo, e, a origem O, <u>vérti-</u>

ce do ângulo. Para designar o ângulo, cujos lados são a e b, usaremos a notação $\sphericalangle(a,b)$, ou então $A\hat{O}B$, sendo O o vértice, A um ponto de a, e B um ponto de b.

<u>Teorema 13. - Um ângulo $\sphericalangle(a,b)$ divide os outros pontos do plano em duas regiões por êle separadas.</u>

Seja $\bar{a}$ a reta que contém a, e $\bar{b}$ a que contém b. A reta $\bar{a}$ divide o plano em dois semi-planos. Chamaremos de α o semi-plano que contém b e α' o oposto. Do mesmo mod, $\bar{b}$, divide o plano em dois semi-planos. Seja β' o semi-plano que contém a , e β' o oposto.

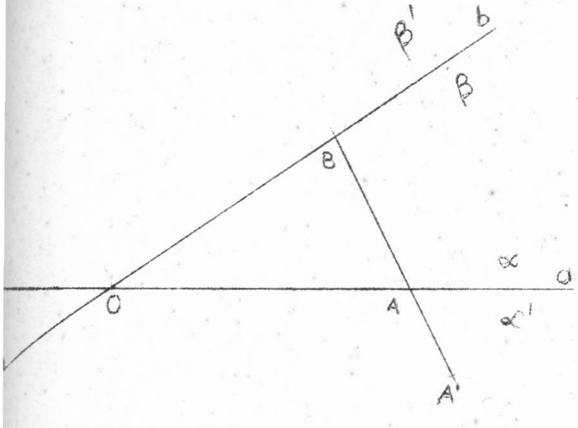


Fig. 11

Coloquemos, num conjunto R_1 , os pontos que pertencem ao mesmo tempo aos semi-planos α e β , e, num conjunto R_2, os outros pontos do plano, isto é, aqueles que não pertencem nem a R_1 nem ao ângulo.

Nenhuma das duas classes é vazia, pois, se A e B são pontos de a e b , respectivamente, os pontos internos do segmento A B, pertencendo a α e β , são pontos de R_1 . Seja A' um ponto tal que os pontos A, B e A' estejam na ordem $[B\ A\ A']$. A' é um ponto de α' , e portanto, de R_2 .

Se X e Y forem dois pontos de R_1 pertencerão êles aos semi-planos α e β ; portanto, os pontos internos do segmento X Y pertencem todos a α e β , ou seja, o segmento X Y está contido em α e β .

Se x' e Y' forem pontos de R_2 , podem êles pertencer ambos ao mesmo semi-plano α (1) e então, o segmento X' Y' pertencerá inteiramente a êsse semi-plano. Se X' e Y' pertencerem a semi-planos diferentes, por exemplo, X' a α' , e Y' a β' , to memos um ponto Z na semi-reta oposta de b. Êsse ponto Z pertencerá a α', logo, o segmento X' Z estará inteiramente em α' e, como Z pertence à origem de β' , o segmento Z Y' está contido em β'. Nessas condições, a poligonal X' Z Y' pertence inteiramente a R_2 , donde, dois pontos de R_2 podem ser ligados por uma poligonal cujos pontos pertencem à R_2 , o que mostra que R_2 é uma região.

Se X for um ponto de R_1 e X' de R_2, suponhamos que X' perten;a a α'. Nesse caso, o segmento XX' encontrará a reta $\bar{a}$ num ponto M. Se M pertencer à a ou coincidir com o vértice O, o segmento XX' conterá um ponto do $\sphericalangle(a,b)$. Se M pertencer à semi-reta oposta de a, pertencerá ao semi-plano β' e, como X pertence a β' , o segmento MX conterá um ponto N de $\bar{b}$. Ora, os pontos X, M e X' estão na ordem [X M X'] e, M, N e X, na ordem [X N M], donde vem a ordem [X N M X'] para êsses quatro pontos, isto é,

---

(1) A demonstração seria a mesma com as modificações oportunas se pertencessem ambos a β' ou a α' .

N é um ponto do segmento X X'. Por outro lado, N deve pertencer ao mesmo tempo à b e ao semi-plano α, pois, sendo um ponto da origem de α, e X um ponto de α, **todo o** segmento M X pertence a α. Assim sendo, N é um ponto de b, e portanto, **do** $\sphericalangle(a,b)$.

Seja agora $XX_1 \ldots X_m X'$ qualquer poligonal que ligue X com X', e X_i o primeiro vértice que não pertence à R_1. Se X_1 pertencer ao ângulo, a poligonal conterá um ponto do ângulo. Se X_1 pertencer à R_2 o segmento $X_{i-1} X_i$ conterá um ponto do ângulo, como acabamos de vêr. Portanto, qualquer poligonal que ligue X com X' conterá um ponto do ângulo, o que mostra que R_1 e R_2 estão separadas pelo ângulo.

<u>Definição</u> - Os pontos de R_1 chamam-se pontos internos do ângulos e os de R_2, externos.

<u>Teorema 14</u>. - <u>Uma semi-reta de origem O, que não seja lado do $\sphericalangle(a,b)$, contém sòmente pontos internos ou sòmente pontos externos do ângulo.</u>

Seja c a semi-reta de origem O, que não coincide nem com a nem com b, e P um ponto de c. Se P for um ponto interno, P pertencerá aos semi-planos α e β, e, como O está na origem dêsses dois semi-planos, a semi-reta O P pertencerá a α e β, donde todos os seus pontos são internos. Se P for um ponto externo, a semi-reta O P não poderá conter nenhum ponto interno, pois, senão, como vimos, a semi-reta conterá sòmente pontos internos.

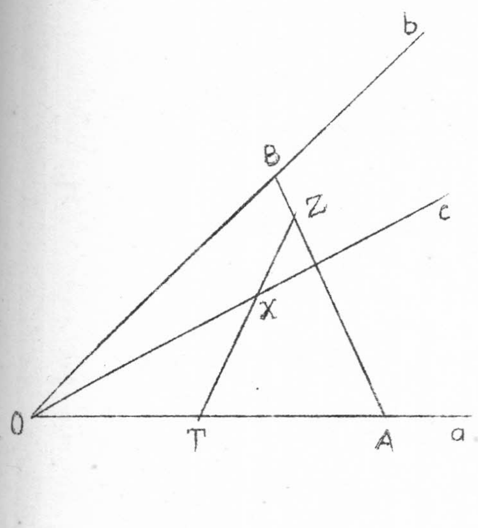
<u>Definição</u> - Uma semi-reta que contém exclusivamente pon-

tos internos chama-se semi-reta <u>interna</u>, e uma semi-reta exclusivamente com pontos externos, semi-reta <u>externa</u>.

<u>Nota</u> - Nos teoremas que se seguem, são consideradas sòmente semi-retas internas e externas, tendo para origem o vértice do ângulo, razão pela qual deixamos de mencionar a origem.

<u>Teorema 15.</u> - <u>Se A for um ponto de a e B um ponto de b, tôda semi-reta interna c, encontrará AB num ponto interno.</u>

De fato, seja X um ponto de c. Se O e X pertencerem a semi-planos opostos, com relação à A B, o segmento O X conterá um ponto de A B que será um ponto interno do ângulo, logo, ponto interno de A B.



<u>Fig. 12</u>

Se X e O estiverem no mesmo semi-plano de origem A B, tomaremos um ponto interno Z, do segmento A B. Se a reta Z X, passar por O, conterá <u>c</u> , e Z será ponto interno de A B que pertence à c. Se Z X não passar por O, pelo postulado de Pasch, encontrará O A ou O B em ponto interno T. Suponhamos que T pertença à O A. A semi-reta c, não passa nem por Z, nem por A, nem por T, e encontra o lado A T, do triângulo A T Z , num ponto externo O, e o lado Z T num ponto interno X ; logo, encontrará A Z num ponto interno X, e, como Z é interno à A B, Y será também interno à A B.

Definição - n semi-retas a_1 , a_2 ,..., a_n , da mesma origem O, estarão na ordem (a_1 a_2 ... a_n) se a_i for semi-reta interna do $\measuredangle(a_j , a_k)$ com $j < i < k$, quaisquer que seja j e k diferentes de i . A ordem (a_n ... a_1) coincide com (a_1 ... a_n), como se vê fàcilmente.

Teorema 16. - Dadas três semi-retas a, b, c de mesma origem O, se b e c estiverem do mesmo lado de a, então ou b será semi-reta interna do $\measuredangle$ (ac) ou c será semi-reta interna do $\measuredangle$ (ab) (1)

Chamaremos de α o semi-plano de origem a, onde estão as semi-retas b e c; e de β o semi-plano de origem b, que contém a .

Se c pertencer, também, a β , será semi-reta interna do $\measuredangle$ (ab). Em caso contrário, tomaremos um ponto A em a, e C em c. Como A e C estão em semi-planos opostos, o segmento A C conterá um ponto da origem dêsses semi-planos. Mas uma vez que o segmento A C pertenceu todo a α , segue-se que êsse ponto pertence a α, e portanto, da semi-reta b, isto é, b é semi-reta interna do $\measuredangle$ (ac).

Vemos que as três semi-retas a, b e c estão numa das origens (abc) ou (acb) .

---

(1) Se r é a reta que contém uma semi-reta r, $\overline{r}$ é origem de dois semi-planos. Para evitar repetições inúteis, diremos que a origem dêsses dois semi-planos é r.

Teorema 17. - Se a, b, c e d forem semi-retas de mesma origem O e se b, c, d estiverem de um mesmo lado da semi-reta a, a, b, c, d, podem ser colocadas na ordem (a b c d) .

I. Demonstraremos, primeiramente, que se a, b e c estiverem na ordem (a b c), e b, c e d na ordem (b c d), teremos as ordens (a b d) e (a c d).

Sendo b semi-reta interna do $\sphericalangle$(a c), e c interna do $\sphericalangle$(b d), tomemos os pontos A e C, respectivamente de a e c ; o segmento A C será encontrado por b num ponto interno B. Tomemos um ponto D sôbre d. A semi-reta c encontrará o segmento B D num ponto interno que será o próprio C, se D estiver na reta A C. Mas, nesse caso, pelo teorema 5, os quatro pontos A, B, C e D estarão na ordem A B C D e teremos as ordens (a b d) e (a c d). Se D não estiver na reta A C, seja E o ponto em que c encontra B D . Ora, a semi-reta c, encontrando o lado A B do triângulo A B D, num ponto externo C, e o lado B D num ponto interno E, encontrará certamente A D num interno F, donde, c é interna ao $\sphericalangle$(ad) .

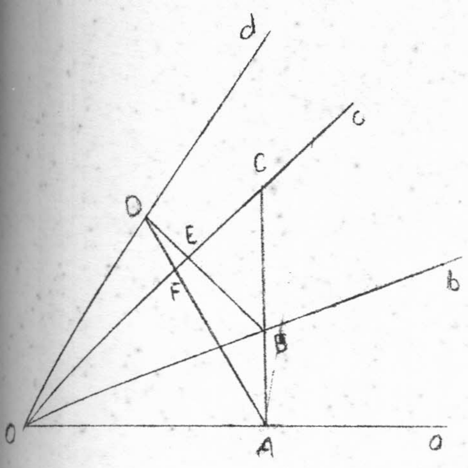


Fig. 13

Seja agora D um ponto de d, C um ponto de c , e A um ponto de a que podemos supor não alinhados. Como temos (a b c), a semi-reta b encontra A C num ponto interno B. A ordem (b c d) nos indica que b não encontra o segmento C D, logo, pelo postulado de Pasch, b encontrará A D num ponto interno K, isto é, <u>b</u> é semi-reta interna de ∢(ad).

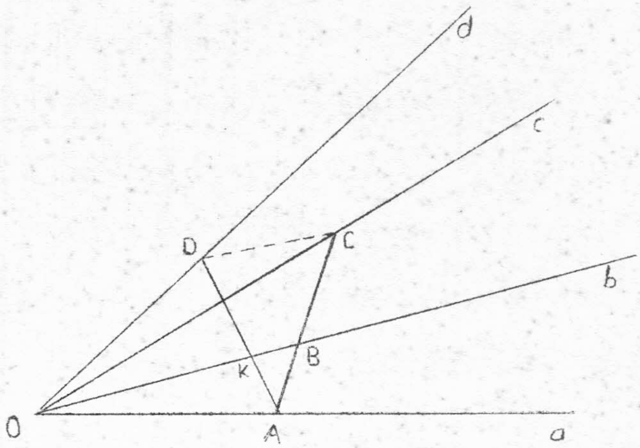
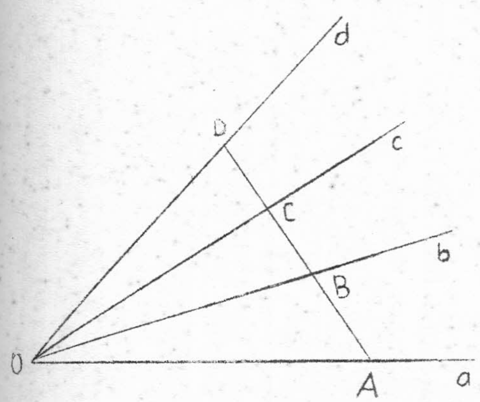


Fig. 14

II. Se tivermos as ordens (a b c) e (a c d), teremos também (a b d) e (b c d) .



Tomemos um ponto A em <u>a</u> e um ponto D em d. Como c é semi-reta interna do ∢(ad), c encontrará A D num ponto C tal que [A C D]; como b é semi-reta interna do ∢(a c), b encontrará A C num ponto D tal que [A B C]; então os quatro pontos A, B, C e D estarão na ordem [ABCD] e as quatro semi-retas a, b, c e d, na ordem [abcd].

Fig. 15

III. A demonstração do teorema segue-se, agora, como no teorema 4.

<u>Teorema 18. - Dadas n-1 semi-retas situadas de um mesmo lado da semi-reta a, e tôdas da mesma orgem O, podemos colocá-las na ordem</u> ($a_1 \ldots a_n$) <u>com</u> $a = a_1$.

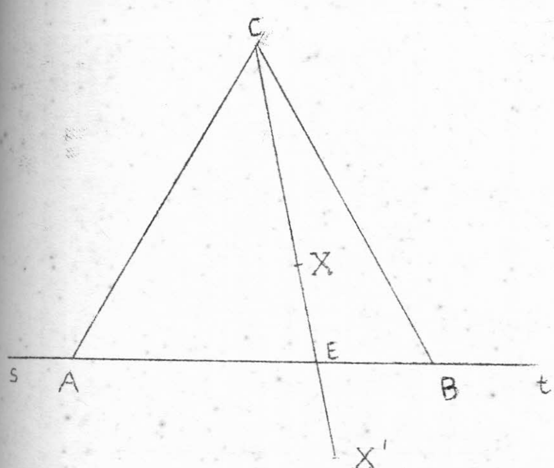
Mesma demonstração que a do teorema 6.

<u>Corolário</u> - Dadas n semi-retas internas do $\sphericalangle$(ab), podemos indicá-las por a_1 , a_2 ,..., a_n de um modo tal que se verifique a ordem (a a_1 ... a_n b) .

7. Como já vimos, chama-se triângulo, um polígono com três vértices. Para indicar o triângulo de vértices A, B e C, usaremos a notação $\triangle$ A B C .

<u>Teorema 19. - Um triângulo separa os outros pontos do plano em duas regiões.</u>

Seja $\triangle$ A B C o triângulo ; α o semi-plano de origem A B que contém o ponto C ; β o semi-plano de origem B C que contém A ; γ o semi-plano de origem C A que contém B ; α', β' e γ' os semi-planos opostos a α , β e γ respectivamente ; <u>s</u> a semi-reta de origem A oposta à semi-reta de mesma origem, que contém B, e t a semi-reta de origem B oposta à semi-reta, de mesma origem, que contém A.



<u>Fig. 16</u>

Coloquemos em um conjunto R_1 todos os pontos do plano que pertencem ao mesmo tempo aos semi-planos α, β e γ, e, em um conjunto R_2, os outros pontos do plano que não pertencem ao triângulo.

Vamos demonstrar que R_1 e R_2 são regiões separadas pelo A B C.

1) R_1 não é vazio, pois, se tomarmos um ponto E no segmento A B, e um ponto X entre C e E, X pertencerá a α, β e γ, logo, à R. Dados dois pontos X e Y de R, como êles pertencem a α, β e γ, todos os pontos do segmento X Y pertencem aos mesmos semi-planos. Assim sendo, R é uma região.

a) R_2 não é vazio, pois, o ponto X', tal que C E X', pertence à α', donde, X' pertence a R_2.

Dados dois pontos X' e Y' de R_2, podemos supor, sem alterar a generalidade da demonstração, que X' pertence a α' (1).

Se Y' pertencer também a α', todo o segmento X'Y' estará contido em α', e, pois, em R_2. Se Y' pertencer à reta A B será um ponto de s ou de t, por exemplo de t. O segmento X' Y' terá todos os seus pontos, com excepção de Y', em α', e, portanto, em R_2.

Se Y' pertencer a α, não poderá pertencer também a e ao mesmo tempo. Suponhamos que pertença a β', e seja Z um

(1) X' sendo um ponto de R', não pode pertencer ao mesmo tempo a α, β e γ. Se pertencesse a α, deveria, então pertencer a β' ou a γ'. Em qualquer dos casos, a demonstração seria a mesma. Por outro lado, se X' pertencesse à reta A B, como êle não é ponto do triângulo, deveria ser um ponto de s ou de t, logo de γ' ou de β'.

ponto de t. Excluido o ponto Z, o segmento X' Z está contido todo em α', e o segmento Z Y' em β'; logo, a poligonal X' Z Y' está contida em R_2. Êste conjunto, é, pois, uma região.

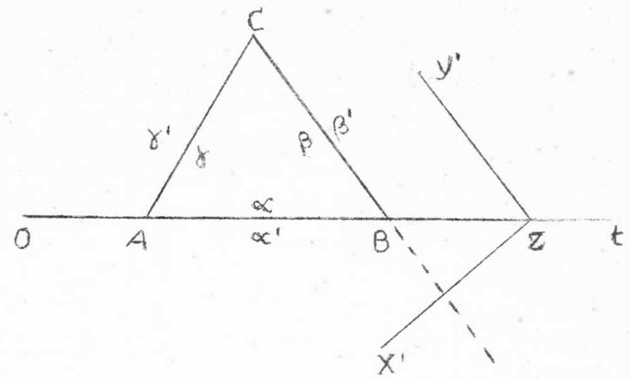


Fig.17

3) Seja X um ponto de R_1 e X' de R_2. Se existir uma poligonal $XB_1 \dots B_kX'$ que liga X com X' e não encontra o triângulo, seja B_i o primeiro vértice que não pertence à R_2. B_{i-1} B_i não deve então encontrar o triângulo. Ora, isso é absurdo, pois sendo B_{i-1} um ponto de R_1 e B_i de R_2, podemos supor, como anteriormente, que B_i pertence a α', de modo que B_{i-1}, pertencendo a α, o segmento B_{i-1} B_i encontrará a reta A B num ponto Z. Êsse ponto, não podendo pertencer ao lado A B, nem coincidir com A ou B, será um ponto de uma das semi-retas s ou t. Suponhamos que seja um ponto de t. B_{i-1} e Z pertencem, ambos ao semi-plano ; portanto o segmento B_{i-1} Z pertence todo a γ. Da mesma forma, o segmento B_{i-1} Z está todo contido em α. Por outro lado, B_{i-1} pertencendo a β, e Z a β' o segmento B_{i-1} Z conterá um ponto da reta B C. Êsse ponto, pertencendo aos semi-planos α e γ, é um

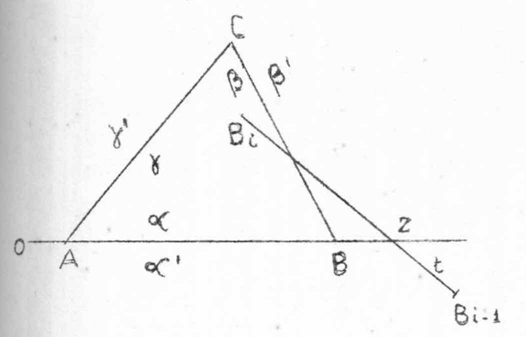


Fig. 18

ponto do segmento B C , que é um lado do triângulo. Vemos assim que R_1 e R_2 estão separadas pelo triângulo $\triangle$ A B C . Os pontos de R_1 chamaremos de pontos <u>internos</u>, e, os de R_2, pontos <u>externos</u>. Uma reta, que só contenha pontos de R_1 ou de R_2, chama-se respectivamente reta interna ou reta externa do triângulo.

É fácil vêr que tôda reta que encontra um triângulo num ponto interno de um lado, o encontrará, ainda, noutro ponto, pois se ela passar por um ponto do lado BC, ou passará por A ou, de acôrdo com o postulado de Pasch, passará por um ponto de A B ou de A C.

<u>Teorema 20.</u> - <u>Existem retas externas a um triângulo.</u>

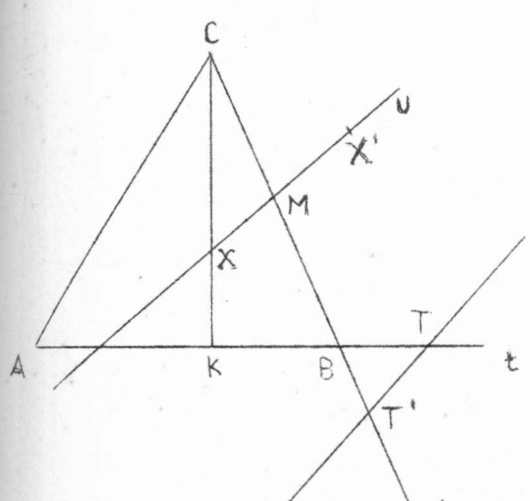


Fig. 19

Dados o $\triangle$ A B C, seja T um ponto da semi-reta t de origem B, oposta à semi-reta de mesma origem, que contém A, e T' um ponto da semi-reta t' de origem B oposta à de mesma origem, que contém C, e r a reta por êles determinada.

Usando a mesma notação do teorema anterior, vemos que T pertence a β , e T' a α' , isto é, são pon tos externos do $\triangle$ A B C. Ora, a semi-reta de origem T que contém T', possui todos os seus pontos em α', e, a semi-reta oposta, está contida em β'; logo, todos os pontos de r, são pontos externos do $\triangle$ A B C .

Teorema 21: - Não existem retas internas a um triângulo.

A própria formação do conjunto R_1 mostra que todo ponto interno do $\triangle$ A B C é também um ponto do ângulo ACB . Assim sendo, se u é uma reta que contém um ponto interno, X do $\triangle$ A B C, (Fig. 19) a semi-reta CX, de origem C, encontrará o lado A B num ponto K, e, pelo postulado de Pasch, u encontrará o lado B C ou o lado K B do $\triangle$ K B C num ponto M. Suponhamos que M pertença a B C. O ponto X' tal que os pontos X, M, X' estão na ordem $|X M X'|$ é um ponto externo do $\triangle$ A B C e pertence a u. Portanto, tôda reta que contenha um ponto interno de um triângulo, conterá, também, necessàriamente, um ponto externo.

Teorema 22: - Se um polígono simples contém um ponto interno e um ponto externo de um triângulo, encontrará o triângulo pelo menos em dois pontos.

Seja q o polígono $X_1X_2...X_n$, Y o ponto externo do $\triangle$ A B C, que pertence a q, e Z o ponto interno. Podemos supor que Y está no lado $X_{i-1}X_i$, ou coincide com um dos vértices, e, Z, em $X_{j-1}X_j$, ou coincidindo com um dos vértices, e ainda $i \leqslant j$. Se $i < j$, sendo Y externo, e Z interno, a poligonal Y $X_i...X_{i-1}$ Z , encontrará o $\triangle ABC$ num ponto, e $Z X_j Z_{j+1} \dots X_m X_1 \dots X_{i-1} Y$, em outro ponto. Êsses dois pontos não podem coincidir, porque, em caso contrário, q não seria simples.

Se $i = j$ o lado $X_{i-1} X_i$ contém um ponto interno e um ponto externo do $\triangle$; logo, o segmento YZ contém um ponto do $\triangle$, ponto êsse que, sendo interno a $X_{i-1} X_i$, pertence ao polígono ; portanto, a poligonal $X_i X_{i+1} \dots X_{i-1}$ encontrará o polígono noutro ponto.

Teorema 23. - Se existirem vértices do polígono $q \equiv A_1 \dots A_n$, internos ao triângulo ABC, poderemos tomar um dêles, A_k, de modo que não existem vértices de q, internos ao triângulo BCA_k, nem sôbre os lados CA_k e A_kB.

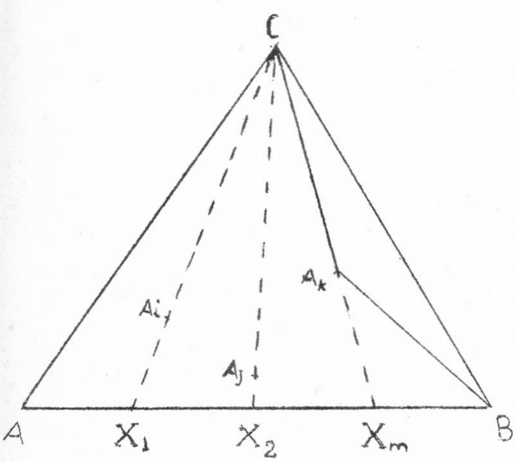


Fig. 20

Com efeito, as semi-retas CA_i, $CA_j \dots CA_k$, de origem C, e que passam pelos vértices de q, internos ao triângulo ABC, encontram o lado AB em pontos X_1, X_2, ..., X_m, que podemos colocar na ordem $(X_1 X_2 \dots X_m)$. Os vértices de q, pertencentes ao segmento CX_m também podem ser ordenados ; seja, então, A_k o vértice tal que o segmento CA_k não contenha mais nenhum deles. Se existisse um vértice A_m interno ao trângulo BCA_k, ou sôbre $A_k B$, a semi-reta CA_m, de origem C, encontraria o lado BA_k, e, pelo postulado de Pasch, aplicado ao triângulo BA_kX_m o lado BX_m, em um ponto X entre B e X_m, o que é absurdo, em virtude da ordem $[X_1X_2 \ldots X_m]$.

8. Antes de iniciarmos o estudo dos polígonos, é bom relembrar que tôdas as poligonais, ou todos os polígonos que usarmos, são simples. Além disso, suporemos, sempre, que não existam três vértices consecutivos alinhados, e, que, como o polígono $A_1\ A_2 \ldots A_n$ é o mesmo que $A_2 \ldots A_n\ A_1$, $A_3\ A_4 \ldots A_n\ A_1\ A_2$, $A_n\ A_1\ A_2\ A_{n-1}$ etc., poderemos mudar a numeração, se necessário, e supor que A_1A_2 seja um lado genérico do polígono.

<u>Teorema 24. - Dado um polígono qualquer, q, e sendo O um ponto distinto dos vértices de q, existe uma reta, que passa por O, e que não contém nenhum vértice de q.</u>

Seja, com efeito, $A_1\ A_2 \ldots A_k$ o polígono q, <u>O</u> o ponto dado e r uma reta qualquer que passe por O. Se r não passar por nenhum dos vértices, será a reta procurada. Se passar por um vértice, consideraremos as retas OA_i ($i = 1, 2, \ldots k$) e, por um ponto de uma delas, traçaremos uma reta que não passe por O. Os pontos de encontro de s com as retas OA_i são em número finito e podemos ordená-los. Sejam êles $C_1, C_2, \ldots, C_t$, na ordem $[\ C_1\ C_2 \ldots C_t\ ]$. Um ponto X, entre C_{j-1} e C_j, determina, com O, uma reta que não passa por nenhum dos vértices.

<u>Teorema 25. - Se um ponto P for acessível do ponto C, sô-</u>

bre o lado $A_{i-1}\ A_i$ do polígono, $p \equiv A_1\ A_2 \ldots A_n$, será, também, acessível do vértice A_i.

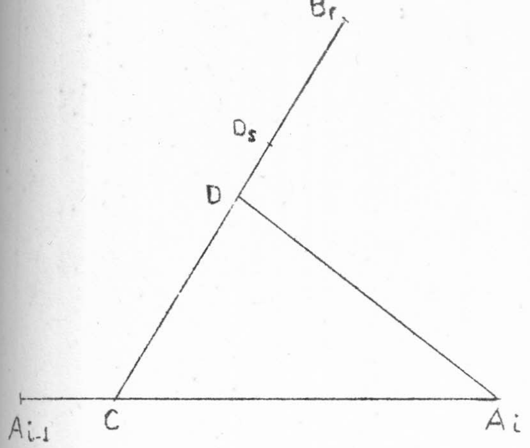


Fig. 21

Seja $P\ B_1 B_2 \ldots B_r C$ a poligonal que liga P com C, sem encontrar o polígono. Liguemos o vértice A_i com os outros vértices A_k de p. As retas $A_i A_k$ encontrarão o segmento $B_r C$ em um número finito de pontos que podem ser colocados na ordem $[B_r D_1 \ldots D_1 C]$. Tomemos um ponto D entre D_s e C. CD não contém nenhum ponto do polígono, porque $B_r C$ não contém, e $A_i C$ também não contém, pois p é um polígono simples. $A_i D$ não pode conter um vértice do polígono, dada a construção do ponto D e nenhum ponto de algum lado, pois, sinão, existiria um vértice do polígono no interior do triângulo, ou sôbre $A_i C$ ou CD, o que é impossível. Logo, o triângulo $A_i CD$ não contém nenhum vértice de p , no seu interior, ou sôbre êle próprio. A poligonal $PB_1 \ldots B_r D\ A_i$ liga P com A_i e não encontra o polígono p ; P e A_i são, então, acessíveis com relação a p.

Teorema 26. - Se um ponto P for acessível de um vértice A_i do polígono $p \equiv A_1\ A_2 \ldots A_n$, será, também, acessível de um ponto qualquer do lado $A_i\ A_{i+1}$.

Seja $P\ B_1 \ldots B_r\ B_i$ uma poligonal que liga P com A_i sem encontrar o polígono, e C um ponto do lado $A_i A_{i+1}$. Vamos distinguir dois casos:

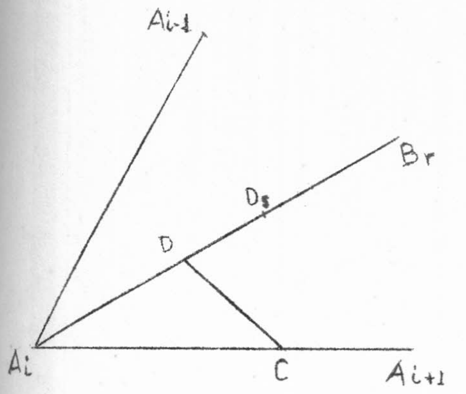


Fig. 22

a) a semi-reta $A_i B_r$ e origem A_i, é interna ao ângulo $A_{i-1} A_i A_{i+1}$.

b) a semi-reta $A_i B_r$, de origem A_i, é externa ao ângulo $A_{i-1} A_i A_{i+1}$.

No caso a), as retas $C A_k$ encontram o segmento $A_i B_r$, em um número finito de pontos que podem ser colocados na ordem $[B_r D_1 \dots D_s A_i]$. Tomemos um ponto D entre D_s e A_i. Os lados A_i D e A_i C não contém nenhum ponto de p, o primeiro porque $A_i B_r$ não contém, e o segundo, porque o polígono é simples. Se CD possuir um ponto X, do polígono, como não existem vértices de p no triângulo A_i C D, com exceção de A_i, os vértices do segmento $A_{j-1} A_j$, ao qual pertence X, são externos ao referido triângulo, e, portanto, A_i C ou A_i D deve conter um ponto de p, o que só será possível se um dos dois vértices for A_i; neste caso, seria X um ponto de $A_{i-1} A_i$ e a semi-reta $A_{i-1} A_i$, de origem A_{i-1}, seria interna ao ângulo $A_{i+1} A_i B_r$, contra a hipótese.

No caso b), consideraremos a semi-reta t, de origem A_i, e que é oposta à semi-reta de mesma origem, que contém A_{i-1}. Essa semi-reta pode conter um ou mais lados de p, mas nenhum dos vértices dêsses lados é A_i, de forma que, como as retas C A_k encontram t em um número finito de pontos, podemos ordenar êsses pon tos e os vértices que estão sôbre t, e tomar um ponto E, de modo

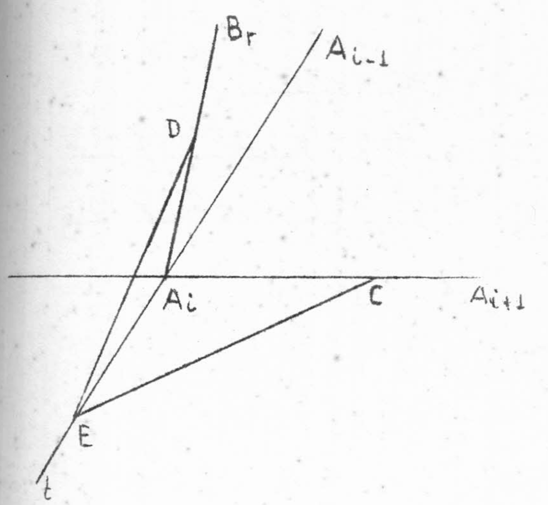


Fig. 23

que entre E e A_i não exista nenhum ponto de p . Procedendo, então, como no caso a) , podemos tomar um ponto D , entre B_r e A_i , de modo que DE , assim como EC , não contenha nenhum ponto de p . A poligonal $PB_i \ldots B_r$DEC não conterá, então, nenhum ponto de p.

Teorema 27. - <u>Qualquer ponto do plano, que não pertença ao polígono $P \equiv A_1A_2\ldots A_n$ é acessível de um ponto sôbre um lado de p.</u>

Seja P um ponto do plano, não pertencente a p, e Q um ponto sôbre o lado A_{s-1} A_s . A reta PQ encontra o polígono p, pelo menos em Q. Se o segmento PQ não contiver outros pontos de p, o teorema estará demonstrado. Se o segmento PQ contiver outros pontos de p, observemos que pode conter um ou mais lados de p, além de vértices e pontos de outros lados. Caso contenha lados, consideremos apenas os vértices. Nessas condições podemos ordenar os pontos de p que estão no segmento PQ e tomar um ponto Y, de modo que o segmento PY não mais contenha pontos de p. Os pontos P e Y serão, então, acessíveis. Se Y for um ponto do lado A_{i-1} A_i $(i \neq s)$ ou se Y coincidir com o vértice A_i , aplicando os teoremas 25 e

26, veremos que P é acessível de Q.

<u>Teorema 28. - Se o polígono p tiver um ponto de um lado em comum com um ponto de um lado de outro polígono q, os polígonos p e q terão mais um ponto em comum.</u>

Seja p o polígono $A_1 A_2 \ldots A_r$, q o polígono $B_1 B_2 \ldots B_k$ e L um ponto de $A_1 A_2$ que também pertence a $B_1 B_2$. Se a reta $B_1 B_2$ coincidir com $A_1 A_2$, o teorema estará demonstrado. Caso contrário, poderemos supor que B_2 e B_3 estejam em semi-planos opostos com relação a $A_1 A_2$, de modo ainda que B_2 seja externo do triângulo $A_1 A_2 A_3$.

Dividamos a demonstração em três partes:

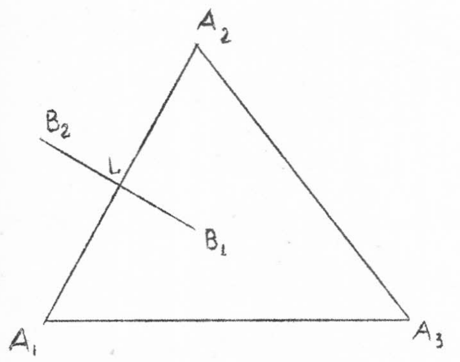


Fig. 24

1a.) Tomemos o vértice B_1 . Se B_1 for um ponto do triângulo $A_1 A_2 A_3$, ou interno a êle, existirá um ponto X , entre L e B_1 , e o polígono q conterá um ponto interno, X, e um ponto externo B_2 , do triângulo $A_1 A_2 A_3$. Portanto, a poligonal $B_2 \ldots B_n B_1$ encontrará o triângulo $A_1 A_2 A_3$ em mais um ponto. Se B_1 for externo, o segmento $B_1 B_2$ conterá, também, mais um ponto do triângulo $A_1 A_2 A_3$. Se êsse novo ponto pertencer a $A_1 A_2$ ou a $A_2 A_3$, coincidirá êle com A_1 , A_2 ou A_3 o teorema estará demonstrado. Suponhamos, então, que pertença a $A_1 A_3$.

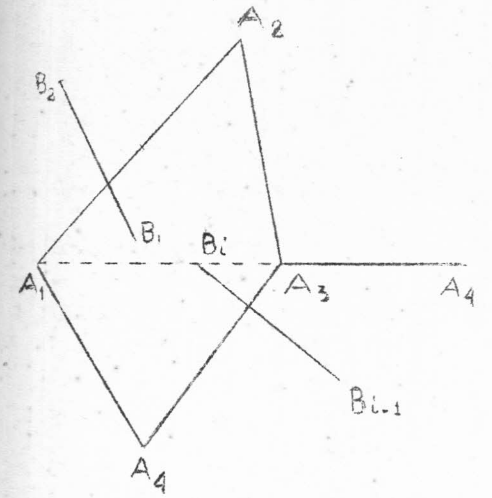


Fig. 25

2a.) Seja N o ponto de q , que pertence a $A_1 A_3$. Se o polígono q tiver um ponto de um lado sôbre A_1A_3, poderemos aplicar a primeira parte da demonstração e, ou o teorema estará demonstrado, ou existirá um ponto de q no segmento $A_1 A_4$.

Suponhamos, então, que sôbre $A_1 A_3$, existam exclusivamente vértices de q. Seja B_i o primeiro deles e B_e o último. A reta $A_1 A_3$ divide o plano em dois semi-planos. Chamaremos de α ao semi-plano que contém A_2 e α' ao oposto. Se B_{i-1} estivesse sôbre $A_1 A_3$, um dos vértices A_1 ou A_3 estaria no segmento $B_{i-1} B_i$, contra as hipóteses desta segunda parte da demonstração. Se B_{i-1} pertencesse a α, se fosse ponto externo do triângulo $A_1 A_2 A_3$, o segmento $B_{i-1} B_i$ encontraria $A_1 A_2$, $A_2 A_3$ ou passaria por A_2. Se fosse um ponto interno ou sôbre o triângulo, um ponto Y entre B_1 e B_2 seria um ponto interno dêsse triângulo; e, como B_2 é externo, a poligonal $B_2 B_3 \ldots$ Y encontraria o triângulo $A_1 A_2 A_3$ em $A_1 A_2$, $A_2 A_3$ ou A_3. Logo B_{i-1} pertence a α'.

Consideremos o vértice A_4. Pode êle estar em $A_1 A_3$, α ou α'. Se A_4 estiver em $A_1 A_3$, B_i pertencerá a $A_3 A_4$ ou coin cidirá com A_4. Então o teorema estará demonstrado ou B_1 pertencerá a $A_1 A_4$.

Se A_4 estiver em , repetindo a mesma demonstração de há pouco, considerando o triângulo $A_1A_3A_4$ em lugar do triângulo $A_1A_2A_3$ veremos que a poligonal $B_2 \ldots B_{i-1} B_i$ conterá um ponto de $A_3 A_4$, ou o vértice A_4, (caso em que o teorema estará demonstrado) ou um ponto de A_1A_4. Se A_4 estiver em α, desde que B_{i-1} está em α, será A_4 um ponto externo do triângulo $A_1A_3A_4$.

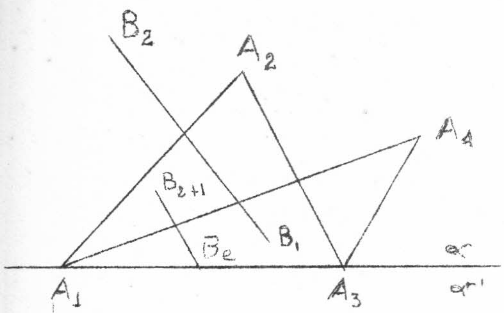


Fig. 26

Seja B_e o último vértice de q que pertence a A_1A_3. O vértice B_{e+1}, então, não pode pertencer a , pois, em caso contrário, seria externo ao triângulo $A_1A_2A_3$; e, como não pode ser B_1 (B_2 pertence a), B_1 é um ponto interno dêsse triângulo; logo, a poligonal $B_e B_{e+1} \ldots B_n B_1$ encontraria o triângulo $A_1A_2A_3$ em um ponto de A_1A_2, ou em um ponto de A_2A_3, ou passaria por A_2, e o teorema estaria demonstrado.

B_{e+1} pertence, portanto, a α e se for um ponto externo, ou um ponto sôbre o triângulo $A_1A_3A_4$, o segmento $B_e B_{e+1}$ (que poderá ser o vértice B_e) conterá um ponto de A_3A_4 ou passará por A_4, e o teorema está demonstrado, ou será um ponto de A_1A_4.

Se B_{e+1} for um ponto interno do triângulo $A_1A_3A_4$, a poligonal $B_{e+1} B_{e+2} \ldots B_{i-1}$ encontrará êsse triângulo em um ponto de A_3A_4, ou passará por A_4 (e o teorema está demonstrado), ou será um ponto de A_1A_4.

3a.) Se q encontrar o triângulo $A_1\ A_3\ A_4$ em um ponto do lado $A_1\ A_4$, consideraremos o vértice A_5. Pela segunda parte da demonstração, ou o teorema estará demonstrado, ou q encontrará o lado $A_1\ A_5$ e assim sucessivamente até tomarmos o triângulo $A_1\ A_{r-1}\ A_r$, para o qual o teorema estará completamente demonstrado, sendo $A_n\ A_1$ lado do polígono p.

<u>Teorema 29. - Um polígono $p \equiv A_1\ A_2\ A_3\ \dots\ A_n$ divide os outros pontos do plano em duas regiões por êle separadas.</u>

Seja r uma reta que encontra o polígono em um ponto e que não passa por nenhum vértice. Essa reta, que existe certamente, teorema 24, encontrará o polígono em um número finito de pontos, que podemos supor na ordem $[X_1\ X_2\ \dots\ X_m]$. Tomemos P, de modo que $[P\ X_1\ X_2]$ e Q, entre X_1 e X_2, sendo X_1 ponto do lado $A_{j-1}\ A_j$ e X_2, do lado $A_{k-1}\ A_k$. Os pontos do plano, que não pertencem a p, colocá-los-emos em um conjunto R, se forem acessíveis de P, e em um conjunto R', se acessíveis de Q.

Vamos demonstrar, em primeiro lugar, que estão em R, ou em R', todos os pontos do plano que não pertencem a p.

Com efeito, qualquer ponto T, que não pertence a p, é acessível de X_1 (teorema 27). Seja $T\ B_1\ \dots\ B_r X_1$ uma poligonal que liga T com X_1. O segmento $B_r\ X_1$ está num dos semi-planos cuja origem é a reta que contém o lado a que pertence X_1. Suponhamos que essa poligonal esteja no mesmo semi-plano em que está P. As retas $P\ A_k$ $(k = 1,2,\dots,n)$ encontram o segmento $B_r\ X_1$ em um nú mero finito de pontos, que podemos colocar na ordem $[B_r Y_1 Y_2 \ldots Y_s Y_1]$. Tomemos um ponto D, entre Y_s e Y_1. Repetindo o raciocínio que já usamos várias vêzes, vemos que P D não contém nenhum ponto de p, logo a poligonal T $B_1 \ldots B_r$ D P liga T com P e não contém pontos de p, isto é, T e P são acessíveis.

É fácil, agora, demonstrar que R e R' são regiões.

Sejam X e Y dois pontos de R. Como X e Y são acessíveis de P, X e Y serão acessíveis entre si. A demonstração para R' é a mesma, bastando trocar P por Q.

Se X for um ponto de R, e X' de R', como X é acessível de P, existe uma poligonal $PB_1 \ldots B_r X$ que não encontra o polígono. Da mesma forma, sendo X acessível de Q, existe uma poligonal $X'C_1 \ldots C_s$ Q, que não encontra o polígono. Seja X $D_1 \ldots D_t$ X' qualquer poligonal que liga X com X'. O polígono q $PB_1 \ldots B_r XD_1 \ldots D_t X'C_1 \ldots C_s Q$, (que suporemos simples) encontra p, no ponto X, de lado P Q, logo, pelo teorema 28, q encontrará p em mais um ponto. Esse ponto, não podendo pertencer às poligonais $PB_1 \ldots B_r X$ ou $XC_1 C_2 \ldots C_s$ Q é um ponto da poligonal $XD_1 \ldots D_t X'$.

<u>Teorema 30:</u> - <u>Tôda reta que não passar por nenhum vértice de um polígono,</u> $p \equiv A_1 A_2 \ldots A_n$, <u>encontra-o em um número par de pontos</u> (<u>0</u> incluido).

A reta r divide o plano em dois semi-planos α e β. O vértice A_1, não pertencendo à r, estará em um dêsses dois semi-planos. Suponhamos que esteja em α. Se os vértices $A_2, \ldots, A_n$ pertencerem a α, o polígono terá zero intersecções com a reta. Em cas contrário, seja A_s o primeiro vértice que pertence a α. Como A_{s-1} pertence a α, a reta r encontrará o lado $A_{s-1}\ A_s$ do polígono em um ponto. Se acontecer que todos os vértices a partir de A_s, estejam em β, então $A_n\ A_1$ encontrará r em mais um ponto, e r e o polígono terão dois pontos de encontro. Se, a partir de s existirem, ainda, vértices que estão em α, seja A_t o primeiro que pertença a α; A_{t-1} estará em β e $A_{t-1}\ A_t$ conterá um ponto de R. Se $A_{t-1}, \ldots, A_n$ estiverem em α, $A_n\ A_1$ conterá mais um ponto de r e a reta e o polígono terão 4 pontos de encontro, e, assim, sucessivamente.

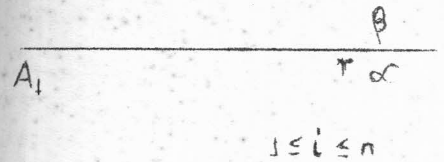


Fig. 27

Teorema 31. - Um ângulo $\sphericalangle(a\ b)$ que não contém nenhum vértice de um polígono, encontra-o em um número par de pontos.

A demonstração é a mesma do teorema anterior, sendo suficiente substituir os semi-planos α e β pelas regiões dos pontos internos e externos.

Definição: - Um vértice A_i de um polígono chama-se projetante, se existir uma reta que encontra os lados $A_{i-1}\ A_i$ e $A_i A_{i+1}$ e não contiver nenhum outro ponto do polígono.

<u>Teorema 32.</u> - <u>Em um polígono existe sempre um vértice projetante.</u>

Seja $A_1 A_2 \ldots A_n$ o polígono, e r uma reta que passa por um ponto X de um lado, e que, porém, não contém nenhum vértice do polígono. A reta r encontrará as n(n-1)/2 retas determinadas pelos vértices em um número finito de pontos $X_1 X_2 \ldots X_m$, que poderemos supor na ordem $[X_1 X_2 \ldots X_m]$. Tomemos um ponto <u>O</u> em r, de modo que X_1 esteja entre <u>O</u> e <u>X</u>.

As semi-retas de orígem O, que passam pelos vértices, contém, cada uma, um só vértice, pois, se contivessem dois, por exemplo A_i e A_k, a reta $A_i A_k$ passaria por O, e êste coincidiria com um dos pontos X_j ($1 \leq j \leq m$), o que é absurdo, dada a sua construção. Observemos, ainda, que se a reta r encontrar um segmento $A_i A_k$, encontrá-lo-á em um dos pontos X.

Chamemos de a_o a semi-reta de orígem O, que contém os pontos $X_1, X_2, \ldots, X_m$, As semi-retas, de orígem O, que passam pelos vértices do polígono e que pertencem a um mesmo semi-plano de orígem r, e a semi-reta <u>a</u>, podem ser ordenadas. Suponhamos que estejam na ordem $[a_o \ldots a_e]$. Da mesma forma, as semi-retas, que pertencem ao semi-plano oposto, podem ser colocadas, com a_o, na ordem $[a_o b_1 \ldots b_t]$.

Consideremos o $\sphericalangle(a_e b_t)$. O segmento cujos extremos são os vértices do polígono que estão nas semi-retas a_e e b_t, encontra <u>r</u> num dos pontos X, pois êsses vértices estão em lados opostos de <u>r</u>. Assim sendo, a_o é semi-reta interna do $\sphericalangle(a_e b_t)$.

Raciocinando do mesmo modo com as semi-retas $b_j (j < t)$ vemos que também elas são internas ao $\sphericalangle (a_e \; b_t)$. Estando cada vértice do polígono numa semi-reta a_i ou numa semi-reta b_j , todos os vértices são internos ao $\sphericalangle (a_e \; b_t)$, com exceção dos dois que pertencem aos lados do ângulo.

Seja A_i o vértice sôbre a_e . Vamos demonstrar que êle é projetante.

Tomemos uma qualquer semi-reta $\underline{s}$ interna ao $\sphericalangle (a_{e-1} \; a_e)$. Se $\underline{s}$ encontrar o lado $A_k \; A_{k+1}$, êsses dois vértices estarão em lados opostos $\underline{s}$, portanto, $k=i$ ou $k+1=i$, isto é, o lado encontrado por $\underline{s}$ será $A_{i-1} \; A_i$ ou $A_i \; A_{i+1}$. Êsses dois lados, porém, são efetivamente encontrados por s, pois, tanto A_{i-1} e A_i , quanto A_i e A_{i+1} , estão em lados opostos da reta que contém $\underline{s}$.

<u>Observações</u>: O vértice A_k sôbre b_t é também projetante.

<u>Teorema 33. -Sejam</u> R_1 e R_2 <u>as regiões do plano separadas pelo polígono</u> $p=A_1 \; A_2 \; \dots \; A_n$. <u>Numa delas existem retas cujos pontos pertencem todos à região, e na outra, não existem.</u>

Sejam A_i e A_k os vértices projetantes de p, construidos no teorema anterior. O ponto O nele já usado, não pertence ao polígono, logo, pertencerá a uma das regiões R_1 ou R_2 . Suponhamos que pertença à R_1 . Os vértices do polígono são todos pontos internos do ângulo $A_k O \; A_i$. Assim sendo, qualquer semi-reta externa dêsse ângulo, terá todos os seus pontos em R_1 . Seja t uma semi-reta externa do ângulo $A_k \hat{O} A_i$, que está no semi-plano de orígem $O A_k$,

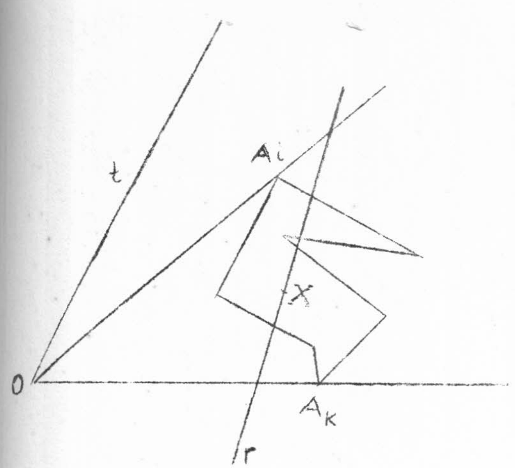


Fig.28

em que está A_i. A semi-reta oposta de t, estando no semi-plano oposto, também não terá nenhum ponto do polígono. A reta t que as contém, é então uma reta cujos pontos pertencem todos à R_1.

Suponhamos que exista uma reta r, exclusivamente com pontos de R_2. O segmento OX conterá, necessàriamente, pontos de p , pois, em caso contrário X pertenceria a R_1 (1). Sejam $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ os pontos de p, sôbre o segmento OX, que admitiremos na ordem $[\, Y_1 \ldots Y_k \,]$. Demonstraremos que k é um número impar.

De fato, como O pertence à R_1 , se Z_1 for um ponto entre $Y_1\ Y_2$, qualquer polígonal, que liga O e Z_1 , encontrará o polígono, logo, Z_1 pertencerá à R_2 . Com o mesmo raciocínio, aplicado a Z_1 e Z_2 , sendo Z_2 um ponto entre Y_2 e Y_3 , vemos que Z_2 pertence à R_1 e assim sucessivamente, de modo que, se entre O e Z_i existir um número par de Y_j , Z_i pertencerá à R_1 , e se existir um número ímpar, Z_i pertencerá à R_2 . Como existem k pontos Y entre O e X, e X é um ponto de R_2 , vemos assim que k é ímpar.

A semi-reta XO, de orígem X, contém, pois, um número ímpar de pontos do polígono. Consideremos uma semi-reta s , de r ,

(1) Podemos sempre supor que a reta OX não passe por vértices de p .

com orígem X. O ângulo $\sphericalangle$(rs) contém, pelo teorema 34, um número par de pontos do polígono, Ora, como r tem um número ímpar de pontos de p , s também conterá um número ímpar de pontos de p, isto é, pelo menos 1 . A reta r não contém, então, sòmente pontos de R_2.

0-0-0-0-0-0-0

CAPÍTULO II

CONGRUÊNCIAS

1. O terceiro grupo de postulados, em número de cinco, é chamado grupo dos postulados da congruência, porque introduz a noção de congruência de segmentos e de ângulos.

São êles os seguintes:

III,1 - Dados dois pontos A e B e uma semi-reta r', de origem A', existe, na semi-reta r', um ponto B' tal que o segmento AB sejá congruente ao segmento A'B'. Em símbolos,

$$AB \equiv A'B'$$

III,2 - Se $AB \equiv A'B'$ e $AB \equiv A''B''$, segue-se que $A'B' \equiv A''B''$.

III,3 - Se AB e BC forem dois segmentos de uma reta r, sem pontos comuns, e A'B' e B'C' dois segmentos sôbre a mesma reta, ou sôbre outra reta r', também sem pontos comuns, e se $AB \equiv A'B'$ e $BC \equiv B'C'$, teremos, $AC \equiv A'C'$.

III,4 - Dado um ângulo $\sphericalangle(a,b)$, uma semi-reta r', de orígem O', um semi-plano de origem r', existe, nêsse semi-plano, uma e uma só semi-reta b', de orígem O', tal que $\sphericalangle(a\,b) \equiv$ $\equiv \sphericalangle(a'b')$. Cada ângulo é congruente a si mesmo.

III,5 - Se nos triângulos ABC e A'B'C' tivermos as congruências $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ e $\widehat{BAC} \equiv B'\widehat{A'}C'$, valerá sempre a congruência $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$.

Na aplicação do postulado III,1 podemos nos exprimir mais simplesmente dizendo : transportemos o segmento AB sôbre a semi-reta de origem O' . Da mesma forma, quando usarmos o postulado do III,4, usaremos a frase : transportemos o ângulo $\measuredangle(a\ b)$ na semi-reta r' de orígem O' e no semi-plano dado.

O postulado III,1 permite o transporte de segmentos e o III,4,o de ângulos;o III,3, a adicionabilidade, e o III,5 liga a noção de congruência de segmentos com a de ângulos.

Vejamos algumas consequências imediatas dêsses postulados:

1) No postulado III,5 temos também $\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$.

Basta trocar a ordem das congruências $AB \equiv A'B'$ e $AC \equiv A'C'$, que a conclusão se segue do próprio postulado III,5.

2) A congruência de segmentos é reflexiva, simétrica e transitiva.

Reflexiva : Transportando o segmento AB sôbre a semi-reta r' de orígem A', temos $AB \equiv A'B'$. Aplicando o postulado III,2 às congruências $AB \equiv A'B'$ e $AB \equiv A'B'$, vem $A'B' \equiv A'B'$.

Simétrica : Como, pela propriedade reflexiva, $A'B' \equiv A'B'$, de $AB \equiv A'B'$, virá, aplicando III,2, $A'B' \equiv AB$.

Transitiva : Se $AB \equiv A'B'$ e $A'B' \equiv A''B''$, teremos, pela propriedade simétrica, as congruências $AB \equiv A'B'$ e $A''B'' \equiv A'B'$, de onde, pelo postulado III,2, $A'B' \equiv A''B''$.

3) O transporte de segmentos é único.

A unicidade do transporte de segmentos implica, pela, convenção que fizemos, na unicidade do ponto B' cuja existência é postulada em III, 1. Suponhamos que o segmento AB, transportado na <u>semi-reta</u> r', de orígem A', dê dois pontos B' e B'' tais que

$$AB \equiv A'B' \quad \text{e} \quad AB \equiv A'B'' .$$

Tomando um ponto C, fóra de $A'B'$, teremos, nos triângulos $A'B'C$ e $A'B''C$, $A'B' \equiv A'B''$, $A'C' \equiv A'C'$ e $B'\hat{A}'C \equiv B''\hat{A}'C$ de onde, por III,5, vem

$$A'\hat{C}B' \equiv A'\hat{C}B'' ,$$

em contradição com a unicidade do transporte de ângulos, exigida por III,4.

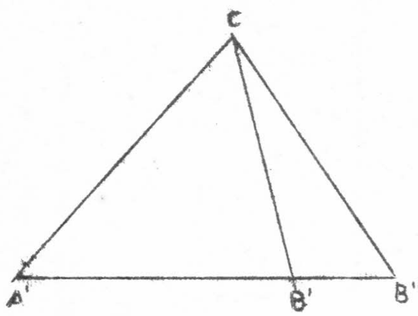


Fig. 29

4. <u>Se C estiver entre A e B, C' entre A' e B', e se tivermos $AB \equiv A'B'$ e $BC \equiv B'C'$, teremos, também, $AC \equiv A'C'$.</u>

Suponhamos que AC não seja congruente a $A'C'$. Transportando, então, o segmento AC na semi-reta $C'A'$, de origem C', e que

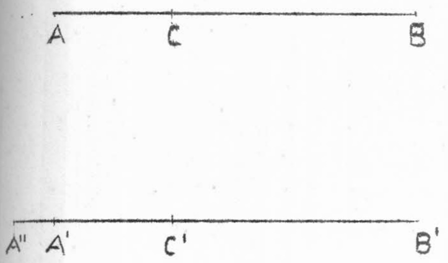


Fig. 30

é oposta à semi-reta de orígem C', que contém B', obteremos um ponto A'' tal que $AC \equiv A''C'$. Mas, AC e CB não têm pontos comuns, assim como A'' C' e C' B', e, por hipóteses $AC \equiv A''C'$ e $BC \equiv B'C'$; logo, por III,3, $AB \equiv A''B'$ e, como $AB \not\equiv A'B'$, o transporte do segmento AB na semi-reta de orígem B', que contém C', não é único, o que contradiz a observação anterior.

5) Se B for um ponto interno do segmento AC, e se $AB \equiv A'B'$ e $AC \equiv A'C'$, então, sendo B' um ponto da semi-reta A'C', B' será também, ponto interno do segmento A'C'.

De fato, se B' fosse um ponto externo do segmento A'C', transportando A'B' na semi-reta de orígem C, oposta à semi-reta CA, obteriamos um ponto D, tal que $C'B' \equiv CD$, e, como AC' e C'B' não têm pontos comuns e AC e CD também não, teremos, aplicando III,3, $AD \equiv A'B'$, em contradição com a unicidade do transporte de segmentos.

2. <u>Definição</u>. Um triângulo ABC se diz <u>congruente</u> a um triângulo A'B'C', em símbolos $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, se e sòmente se:

$$AB \equiv A'B' \quad , \quad AC \equiv A'C' \quad , \quad BC \equiv B'C' \; ,$$

$$B\hat{A}C \equiv B'\hat{A}'C' \; , \; A\hat{B}C \equiv A'\hat{B}'C' \; , \; A\hat{C}B \equiv A'\hat{C}'B' \; .$$

<u>Observação</u>: Vimos que a congruência de segmentos é refle

xiva, simétrica e transitiva, mas, quanto à congruência de ângulos, sabemos apenas que é reflexiva, pelo postulado III,4, de modo que de $\measuredangle(ab) \equiv \measuredangle(a'b')$, não se segue, por ora, $\measuredangle(a'b') \equiv \measuredangle(ab)$. Como a congruência de triângulos foi definida por meio da congruência de segmentos e de ângulos, de $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, não se segue então, ainda, que $\triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC$. Não podemos, portanto, falar de triângulos congruentes a não ser depois de demonstrarmos as propriedades simétrica e transitiva da congruência de ângulos. Enquanto isso não fôr feito só é lícito dizer que um dado triângulo ABC é congruente a um dado triângulo A'B'C'.

<u>Definição</u>. Uma triângulo com dois lados congruentes chama-se <u>isósceles</u>. Os ângulos opostos aos lados congruentes, <u>ângulos da base</u>, e o lado comum a êsses ângulos, base.

<u>Teorema 1</u>: - No triângulo isósceles A B C, se $AB \equiv BC$, $C\hat{A}B \equiv C\hat{B}A$.

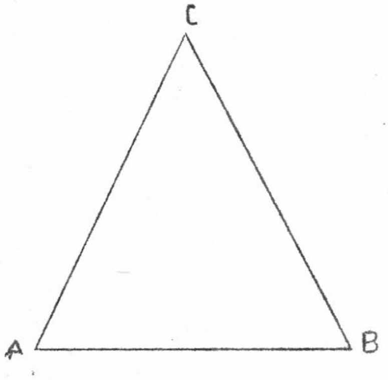


Fig. 31

Consideremos os triângulos ABC e ACB. Temos :

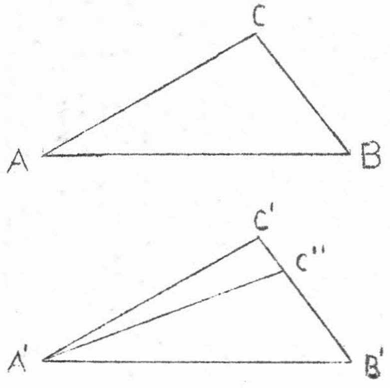
$AB \equiv BC$, $BC \equiv AC$ e $A\hat{B}C \equiv C\hat{B}A$

logo, por III,5 vem $C\hat{A}B \equiv C\hat{B}A$.

Como de III,5, segue-se, também, $C\hat{B}A \equiv C\hat{A}B$, a congruência dos ângulos da base de um triângulo isósceles é simétrica. Podemos, então, enunciar o teorema do seguinte modo:

"<u>num triângulo isósceles os ângulos da base são congruentes</u>".

<u>Teorema 2:</u> - <u>Um triângulo ABC é congruente a um triângulo</u> A'B'C', se AB ≡ A'B' , AC ≡ A'C' e BÂC ≡ B' Â' C' (1º caso de congruência de triângulos).



<u>Fig. 32</u>

Sendo AB ≡ A'B', AC ≡ A'C' e BÂC ≡ B'Â'C', segue-se pelo postulado III,5, que A B̂ C ≡ A' B̂' C' e A Ĉ B ≡ A' Ĉ' B'. O teorema estará então demonstrado, se provarmos que BC ≡ B'C'. Se BC ≢ B'C' (1), o segmento BC transportado na <u>semi-reta</u> B'C', de orígem B' dá um ponto C'', diferente de C', tal que BC ≡ B'C''. Como AB ≡ A'B', AB̂C ≡ A' B̂' D e BC ≡ B'C'', resulta em virtude de III,5, que BÂC ≡ B'A'C''. Ora, sendo já B Â C congruente a B'A'C', chegamos a uma contradição com o postulado III,4, que afirma a unicidade do transporte de ângulos.

<u>Teorema 3:</u> - O triângulo ABC é <u>congruente ao triângulo</u> A'B'C' se AB ≡ A'B' , BÂC ≡ B'Â'C' e A B̂ C ≡ A' B̂' C'.

Se BC não for congruente a B'C', transportando BC na <u>semi-reta</u> B'C' de orígem B', obteremos a congruência BC ≡ B'C''. Mas, por hipótese, temos, também, AB ≡ A'B' e AB̂C ≡ A'B̂'C', de onde, por III,5, BÂC ≡ B'Â'C''. Ora, como B Â C ≡ B'A'C', por hipótese, o transporte de ângulos não será único, em contradição com III,4.

---

(1) BC ≢ B'C' significa que BC não é congruente a B'C'.

Sendo $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$ e $A\hat{B}C \equiv A'\hat{B}'C'$ vem pelo teorema 2, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

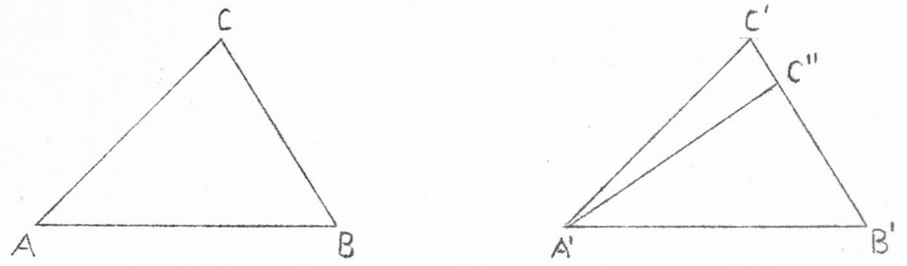


Fig. 33

Definições: Um ângulo se diz oposto pelo vértice a outro, se êles tiverem o vértice comum e os lados dois a dois pertencentes a uma mesma reta. Se um ângulo for oposto pelo vértice a outro, este será também oposto pelo vértice ao primeiro. Diremos, então, simplesmente que êles são opostos pelo vértice.

Teorema 4: - Se $A\hat{B}C \equiv A'\hat{B}'C'$, o ângulo $C\hat{B}D$, adjacente ao primeiro, é congruente ao ângulo $C'\hat{B}'D'$, adjacente ao segundo.

Tomemos os pontos A, A';, C, C' e D, D' de modo que

$$AB \equiv A'B' \ , \quad BD \equiv B'D' \quad e \quad BC \equiv B'C' \ .$$

Estando o ponto D na semi-reta de orígem B, oposta à semi-reta BA, e D' na semi-reta de orígem, oposta à semi-reta B'A', os segmentos AB e BD não têm pontos comuns, bem como A'B' e B'D' .

Então, por III,3 segue-se

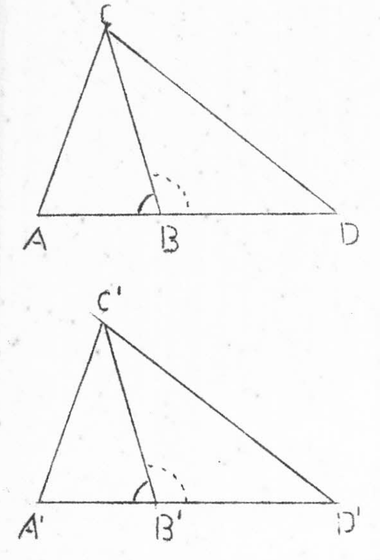


Fig. 34

$$AD \equiv A'D' \, . \quad (1)$$

Nos triângulos ABC e A'B'C' temos $A\hat{B}C \equiv A'\hat{B}'C'$, $AB \equiv A'B'$ e $BC \equiv B'C'$, de onde, pelo teorema 2, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, e, então

$$B\hat{A}C \equiv B'\hat{A}'C' \quad \text{e} \quad AC \equiv A'C' \, . \quad (2)$$

Mas, de (1) e (2), segue-se que $\triangle$ $\triangle ACD \equiv \triangle A'C'D'$, de onde

$$A\hat{D}C \equiv A'\hat{D}'C' \quad \text{e} \quad CD \equiv C'D' ,$$

e, como $BD \equiv B'C'$, segue-se, pelo teorema 2, $\triangle BCD \equiv \triangle B'C'D'$, isto é, $C\hat{B}D \equiv C'\hat{B}'D'$.

<u>Teorema 5:</u> - <u>Se os ângulos $\sphericalangle(ab)$ e $\sphericalangle(a'b')$ são opostos pelo vértice</u>, então $\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(a'b')$.

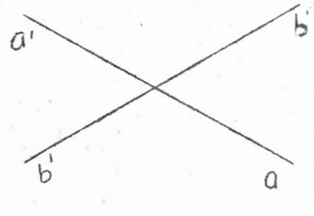


Fig. 35

Sejam a,a' e b,b' as <u>semi-retas</u> opostas. De acôrdo com o postulado do III,4

$$\sphericalangle(a\,b') \equiv \sphericalangle(a\,b') \; ;$$

e como $\sphericalangle(ab)$ é adjacente ao $\sphericalangle(ab')$ e o $\sphericalangle(a'b')$ é também adjacente ao $\sphericalangle(ab')$, temos, pelo teorema 4,

$$\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(a'b') .$$

Examinando a demonstração, vemos que ela poderia ser efetuada de modo que resultasse

$$\sphericalangle (a'b') \equiv \sphericalangle (ab) .$$

Assim sendo, a congruência entre ângulos opostos pelo vértice é simétrica, o que nos permite enunciar o teorema da seguinte fórma: "Ângulos opostos pelo vértice são congruentes."

Teorema 6: - Se b for uma semi-reta interna do (ac) e a'b'c' semi-retas da mesma orígem O', tais que b' e c' estejam do mesmo lado da reta que contém a', e ainda

$$\sphericalangle (ac) \equiv \sphericalangle (a'c') , \quad \sphericalangle (ab) \equiv \sphericalangle (a'b') ,$$

então b' será semi-reta interna do $\sphericalangle (a'c')$.

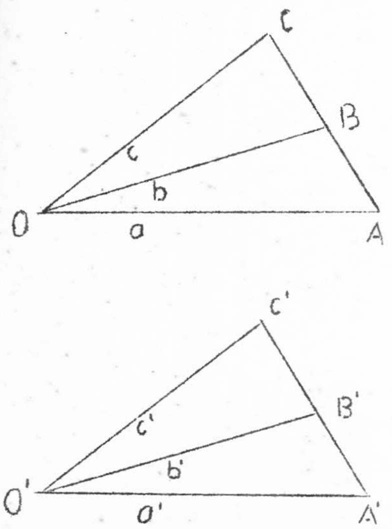


Fig. 36

Sendo a semi-reta b, interna ao (ac), A um ponto de a e C um ponto de c, a semi-reta b encontrará o segmento AC num ponto interno B. Tomemos, sôbre a'b' e c', respectivamente, os pontos A', B', C' de modo que

$$OA \equiv O'A' , \quad OB \equiv O'B' \text{ e } OC \equiv O'C'.$$

Aplicando o teorema 1 aos triângulos OAB e O'A'B' e aos triângulos O A C e O' A' C' vem,

$$O\hat{A}B \equiv O'\hat{A}'B' \quad , \quad AB \equiv A'B' \quad ,$$

$$O\hat{A}C \equiv O'\hat{A}'C' \quad , \quad AC \equiv A'C' \quad .$$

Como o transporte de ângulos é único, as congruências $O\hat{A}B \equiv O'\hat{A}'D'$ e $O\hat{A}C \equiv O'\hat{A}'C'$ mostram que as semi-retas $A'B'$ e $A'C'$, de orígem A', coincidem. O ponto B' é então um ponto da semi-reta $A'C'$. Mas, sendo B interno ao segmento AC, $AB \equiv A'B'$ e $AC \equiv A'C'$, de acôrdo com a consequência 4 dos postulados, B' é um ponto interno do segmento $A'C'$. Daqui se segue que b' é semi-reta interna do $\sphericalangle(a'c')$.

Teorema 7: - Se a, b, c forem três semi-retas, de orígem O, e a' , b' , c' , três semi-retas, de orígem O', e tais que b, c e b' c' estejam contemporaneamente do mesmo lado, ou de lados diferentes de a e a', respectivamente, se

$$\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(a'b') \ , \quad \sphericalangle(ac) \equiv \sphericalangle(a'c') \ ,$$

teremos

$$\sphericalangle(bc) \equiv \sphericalangle(b'c') \ .$$

Em primeiro lugar, suponhamos que b e c estejam de um mesmo lado de a, assim como b' e c' de um mesmo lado de a' .

Estando b e c de um mesmo lado de a, sabemos que uma delas, por exemplo b, é semi-reta interna do ângulo $\sphericalangle(ac)$. Se tomarmos em a e c, os pontos A e C, a semi-reta b encontrará AC , em um ponto interno B. (Fig. 36) Se $A'B'C'$ forem pontos de a', b' e c', respectivamente, e tais que

$$OA \equiv O'A' \ , \quad OB \equiv O'B' \quad e \quad OC \equiv O'C' \ ,$$

resultará do teorema anterior, que

$$AB \equiv A'B' \ , \quad AC \equiv A'C' \ ,$$

e que B' será um ponto interno do segmento A'C'. Pela consequência 4 dos postulados, teremos

$$BC \equiv B'C' \ ,$$

e, pelo teorema 1, aplicado aos triângulos OAC e O'A'C',

$$O\hat{C}A \equiv O'\hat{C}'A' \ ;$$

então, pelo mesmo teorema 1,

$$\triangle OBC \equiv \triangle O'B'C' \ ,$$

de onde

$$\sphericalangle(bc) \equiv \sphericalangle(b'c') \ .$$

Suponhamos, agora, que b e c estejam em lados opostos de a. Pelas hipóteses do teorema, b' e c' também estarão em semi-planos opostos em relação à a'. Chamando de $\bar{c}$ e $\bar{c}'$ as semi-retas b e $\bar{c}$ estarão no mesmo semi-plano de orígem a e b', c' do mesmo lado de a'.

O $\sphericalangle(a\bar{c})$ é **adjacente** ao $\sphericalangle(ac)$ e o $\sphericalangle(a'\bar{c}')$ adjacente ao $\sphericalangle(a'c')$. Como por hipótese, $\sphericalangle(ac) \equiv \sphericalangle(a'c')$, temos, pelo teorema 4,

$$\sphericalangle(a\bar{c}) \equiv \sphericalangle(a'\bar{c}'),$$

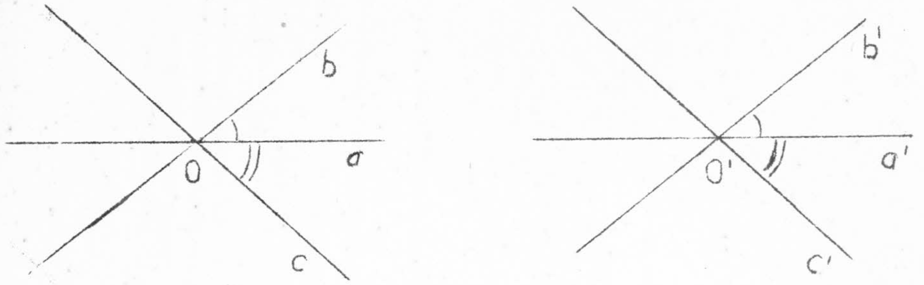


Fig.37

e, pelo que já foi demonstrado,

$$\sphericalangle(b\bar{c}) \equiv \sphericalangle(b'\bar{c}').$$

Mas, o $\sphericalangle(bc)$ é adjacente ao $\sphericalangle(b\bar{c})$ e o $\sphericalangle(b'\bar{c}')$ adjacente ao $\sphericalangle(b'\,\bar{c}')$, logo, de novo pelo teorema 4,

$$\sphericalangle(bc) \equiv \sphericalangle(b'c')$$

<u>Teorema 8:</u> - <u>Se b for uma semi-reta interna do</u> $\sphericalangle(ac)$ <u>e se</u> $\sphericalangle(ac) \equiv \sphericalangle(a'c')$, <u>existirá uma e uma só semi-reta b', interna ao</u> $\sphericalangle(a'c')$, <u>de modo que</u>

$$\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(a'b'),$$
$$\sphericalangle(ac) \equiv \sphericalangle(a'c').$$

Transportemos o ângulo $\sphericalangle(ab)$ na semi-reta <u>a'</u> de orígem O', no mesmo semi-plano em que está c'. Obteremos uma e uma só semi-reta b' tal que

$$\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(a'b') ,$$

e, pelo teorema 6, b' é uma semi-reta interna do $\sphericalangle(a'b')$. Mas, como $\sphericalangle(ac) \equiv \sphericalangle(a'c')$, teremos, pelo teorema 7,

$$\sphericalangle(bc) \equiv \sphericalangle(b'c') .$$

3. <u>Definição</u>. Ângulo reto é o ângulo congruente a um ângulo adjacente a êle próprio.

<u>Teorema 9: - Existem ângulos retos.</u>

Uma reta <u>r</u> divide o plano em dois semi-planos α e β. Tomemos um ponto O sôbre ela e seja <u>a</u> uma das duas semi-retas de orígem O, e, $\bar{a}$ a semi-reta oposta. No semi-plano α, tomemos uma semi-reta b de orígem O. Transportemos o $\sphericalangle(bc)$ sôbre a semi-reta <u>a</u> no semi-plano . Obteremos uma semi-reta c, tal que $\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(ac)$.

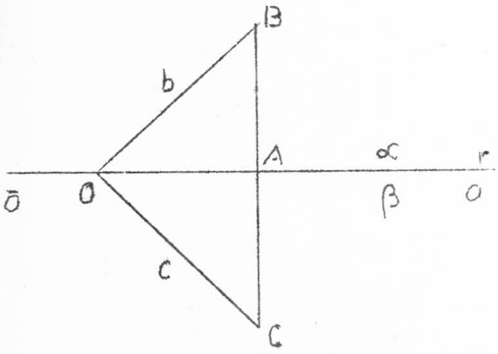


Fig. 38

Tomemos um ponto B na semi-reta b e um ponto C em c tal que

$$OB \equiv OC .$$

Estando os pontos B e C em semi-planos opostos, de orígem $\underline{r}$, o segmento BC conterá um ponto A da reta $\underline{r}$, o qual pertencerá à $\underline{a}$, $\bar{a}$, ou coincidirá com O .

Se os pontos B, C e O pertencerem a uma mesma reta, os ângulos $\sphericalangle(ab)$ e $\sphericalangle(ac)$ serão adjacentes e, em virtude de (1) o $\sphericalangle(ab)$ será reto.

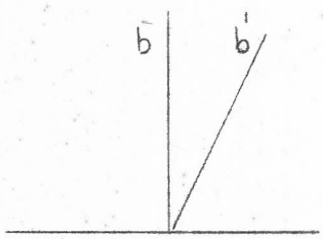
Se A pertencer à $\underline{a}$, $\triangle OAB \equiv \triangle OAC$, pelo teorema 1, pois, $OB \equiv OC$, $B\hat{O}A \equiv C\hat{O}A$ é $OA \equiv OA$. Então, $O\hat{A}B \equiv O\hat{A}C$ e $D\hat{A}B$ é reto.

Se A pertencer à $\bar{a}$, como o $\sphericalangle(\bar{a}\, b)$ é adjacente ao $\sphericalangle(a,b)$, e $\sphericalangle(\bar{a}\, c)$ adjacente ao $\sphericalangle(ac)$, e $\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(ac)$, segue-se pelo teorema 4,

$$\sphericalangle(\bar{a}\, b) \equiv \sphericalangle(\bar{a}\, c) ,$$

e, pelo que já foi demonstrado, $O\hat{A}B$ é reto.

<u>Teorema 10:</u> - <u>Sejam $\sphericalangle(ab)$ e $\sphericalangle(ab')$ dois ângulos retos com um lado comum $\underline{a}$, de modo que b, b' estejam do mesmo lado de a. Então, b e b' coincidem.</u>



<u>Fig. 39</u>

Chamemos de $\bar{a}$ a semi-reta oposta de a. Se b e b' não coincidirem, b' será semi-reta interna ou externa de $\sphericalangle(a,b)$. Suponhamos que seja interna do $\sphericalangle(\bar{a}\, b)$. Ora, o $\sphericalangle(ab)$ é reto, assim como o $\sphericalangle(ab')$, de onde, por definição de ângulo reto

$$\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(\bar{a}\, b) \quad \text{e}$$

$$\sphericalangle(ab') \equiv \sphericalangle(\bar{a}\, b'). \quad (1)$$

Como b' é semi-reta interna do $\sphericalangle$(ab), de (1) e do teorema 6, segue-se que b' é semi-reta interna do $\sphericalangle(\bar{a}\,b)$, o que é absurdo, pois, uma semi-reta não pode ser interna e externa do mesmo ângulo.

<u>Teorema 11: - Se $\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(a'b')$ e o $\sphericalangle(ab)$ é reto, o $\sphericalangle(a'b')$ é também reto.</u>

Sejam $\bar{b}$ e $\bar{b}'$ respectivamente as semi-retas opostas de b e b', e tomemos, sôbre as semi-retas a, b e $\bar{b}$, os pontos A, C, B, e sôbre a', b' e $\bar{b}'$ os pontos A', C', B' respectivamente, de modo que

$$OA \equiv O'A' \qquad OB \equiv O'B' \quad e \quad OC \equiv O'C' .$$

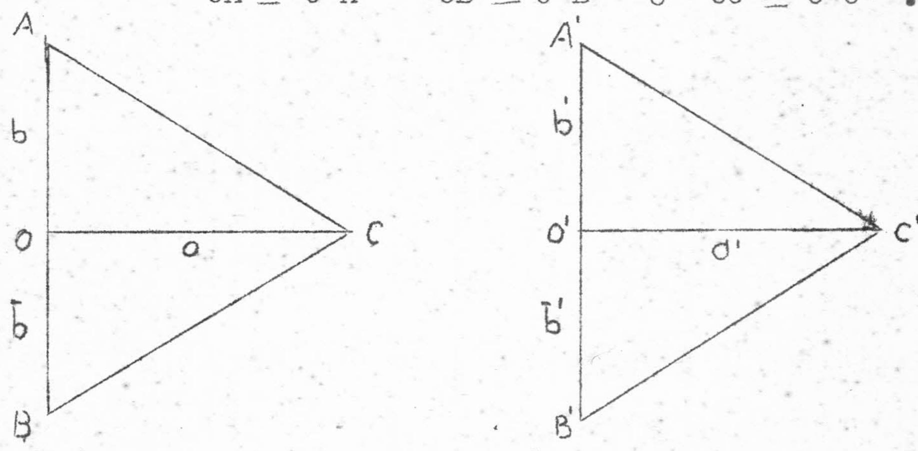


Fig. 40

Como OA e OB não possuem pontos internos comuns, assim como O'A' e O'B', vem, pelo postulado III,3 :

$$AB \equiv A'B'$$

Comparando os triângulos OAC e OCB, vemos que $OA \equiv O'A'$, $OC \equiv O'C'$ e $A\hat{O}C \equiv A'\hat{O}'C'$, onde, $\triangle\ OAC \equiv \triangle\ O'A'C'$, e, pois,

$$AC \equiv BC \quad (2)$$

Consideremos, agora, os triângulos OAC e O'A'C'. Sendo $OA \equiv O'A'$, $OC \equiv O'C'$ e $C\hat{O}A \equiv C'\hat{O}'A'$, segue-se, $\triangle OAC \equiv \triangle O'A'C'$, e, por conseguinte,

$$AC \equiv A'C' \quad \text{e} \quad O\hat{A}C \equiv O'\hat{A}'C' \,, \quad (3)$$

Sendo $AC \equiv A'C'$ e $O\hat{A}C \equiv O'\hat{A}'C'$, como já vimos que $AB \equiv A'B'$, temos $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, de onde

$$BC \equiv B'C' \qquad (4)$$

Mas, de (2), (3) e (4), isto é, de $AC \equiv BC$, $AC \equiv A'C'$ e $BC \equiv B'C'$, resulta

$$A'C' \equiv B'C' \,;$$

portanto, o triângulo A'B'C' é isósceles, e pelo teorema 1 ,

$$A'\hat{B}'C' \equiv B'\hat{A}'C' \,.$$

Comparemos, então, os triângulos O'A'B' e O'B'C'. Temos $O'A' \equiv O'B'$, $A'C' \equiv B'C'$ e $A'\hat{B}'C' \equiv B'\hat{A}'C'$, de onde, $\triangle O'A'C' \equiv \triangle O'B'C'$, e, portanto,

$$A'\hat{O}'C' \equiv C'O'B' \,,$$

ou seja, $A'O'C'$, que é o $\sphericalangle(a'b')$, é reto.

<u>Teorema 12</u>: - <u>Todos os ângulos retos são congruentes.</u>

Sejam $\sphericalangle(ab)$ e $\sphericalangle(a'b')$ dois ângulos retos. Transportando o $\sphericalangle$(ab) na semi-reta a' do mesmo lado em que está b', obteremos uma semi-reta b'' tal que

$$\sphericalangle(a\,b) \equiv \sphericalangle(a'b''), \qquad (1)$$

e, sendo $\sphericalangle$(ab) reto, o $\sphericalangle$(a' b''), é, também, reto pelo teorema anterior. Mas, como o $\sphericalangle$(a' b') é também reto e b' e b'' estão do mesmo lado de a' , pelo teorema 10, b' e b'' coincidem, e onde, por (1).

$$\sphericalangle(a\,b) \equiv \sphericalangle(a'b').$$

Definição: - Sejam a e b duas retas que se encontram no ponto O, a' uma semi-reta de origem O, contida em a, e b' uma semi-reta, de orígem O, contida em b. Se o $\sphericalangle$(a'b') for reto, diremos que a e b são perpendiculares.

Teorema 13: - Dados o ponto A e a reta e existe uma e uma só reta b, perpendicular à a, que passa por A.

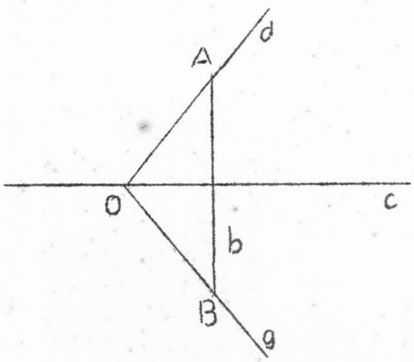


Fig. 41

Já vimos, no teorema 9, que existem ângulos retos.

Se A pertencer a , transportando um ângulo reto em qualquer das semi-retas de a, cuja orígem e A, e em qualquer dos semi-planos de orígem a, obteremos uma e uma só semi-reta que forma com a semi-reta dada um ângulo reto. Se b for a reta que a contém, a e b serão perpendiculares, e b é a única perpendicular à a que passa por A.

Se A não pertencer à a , seja O um ponto qualquer de a e c uma das semi-retas, de orígem O, contidas em a. Chamemos de d à semi-reta OA, de orígem O, e transportemos o $\sphericalangle$(cd), no semi-plano de orígem c , que não contém o ponto A. Obteremos uma semi-reta g sôbre a qual tomaremos um ponto B de modo que

$$OA \equiv OB \ .$$

Repetindo a demonstração do teorema 9, obteremos, como resultado, que a reta b determinada por A e B, é a perpendicular desejada.

A unicidade segue-se por absurdo. Suponhamos que, pelo ponto A, passem as perpendiculares AB e AC, à reta b. Na semi-reta de orígem C, oposta à semi-reta CA, tomemos D de modo que

$$CD \equiv AB$$

Comparemos o triângulo ABC com o triângulo BCD.

Como $BC \equiv BC$, $CD \equiv AB$ e $A\hat{C}B \equiv B\hat{C}D$, segue-se $\triangle ABC \equiv \triangle BCD$,

donde,

$$A\hat{C}B \equiv C\hat{B}D \ .$$

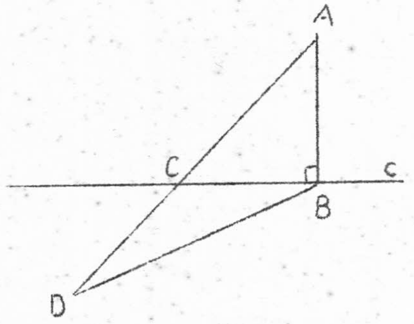
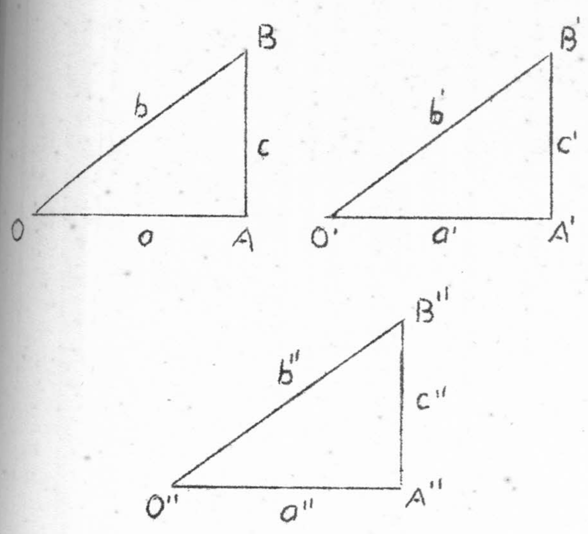


Fig. 41

Sendo $A\hat{C}B$ reto, então, $C\hat{B}D$ também será reto, logo, as semi-retas BD e BA, de orígem B, pertencerão a uma mesma reta, is to é, C pertencerá à reta AB e as retas AB e AC coincidirão.

<u>Teorema 14:</u> - Se $\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(a'b')$ <u>e</u> $\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(a''b'')$, então, $\sphericalangle(a'b') \equiv \sphericalangle(a''b'')$.



<u>Fig. 43</u>

Chamemos de O, O', O'' os vértices dos ângulos $\sphericalangle(ab)$, $\sphericalangle(a'b')$, $\sphericalangle(a''b'')$. De um ponto B na semi-reta b, tracemos a perpendicular c, à reta <u>a</u>, e seja A o ponto de encontro de <u>a</u> e <u>c</u>. Nas semi-retas <u>a'</u> e <u>a''</u>, tomemos os pontos A' e A'', de modo que

$$OA \equiv O'A' \equiv O''A''. \qquad (1)$$

Transportemos o $\hat{O}AB$ na semi-reta A'O' e A''O'' do mesmo lado em que estão b' e b'' respectivamente. Existem, pelo postulado III,4, as semi-retas c' e c'' tais que

$$\sphericalangle(ac) \equiv \sphericalangle(a'c') \quad e \quad \sphericalangle(ac) \equiv \sphericalangle(a''c''). \qquad (2)$$

Como o $\sphericalangle(ac)$ é reto, os ângulos $\sphericalangle(a'c')$ e $\sphericalangle(a''c'')$ também o serão e, pelo teorema 12,

$$\sphericalangle(a'c') \equiv \sphericalangle(a''c''). \qquad (3)$$

Em c' e c'' tomemos os pontos B' e b'' que

$$AB \equiv A'B' \equiv A''B''. \qquad (4)$$

Por (1), (2) e (4) temos

$$\triangle\, OAB \equiv \triangle\, O'A'B' \quad , \qquad (5)$$

$$\triangle\, OAB \equiv \triangle\, O''A''B'' \, , \qquad (6).$$

De (5) então, segue-se que $A\hat{O}B \equiv A'\hat{O}'B'$ e de (6), $A\hat{O}B \equiv A''O''B''$. Como por hipótese, $A\hat{O}B \equiv \sphericalangle(a'b')$, e $A\hat{O}B \equiv \sphericalangle(a''b'')$, temos que B' pertence a b' e B'' à b, pois, de acôrdo com III,4, o transporte de ângulos é único.

Mas, de (1), (3) e (4) vem

$$\triangle\, A'O'B' \equiv \triangle\, A''O''B'' \, ;$$

logo,

$$\sphericalangle(a'b') \equiv \sphericalangle(a''b'') \, .$$

<u>Teorema 15: - A congruência de ângulos é simétrica e transitiva.</u>

<u>Simétrica</u> - Se $\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(a'b')$, $\sphericalangle(a'b') \equiv \sphericalangle(ab)$.

Se $\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(a'b')$, como, pelo postulado III,4, $\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(ab)$, vem, pelo teorema anterior,

$$\sphericalangle(a'b') \equiv \sphericalangle(ab) \, .$$

<u>Transitiva</u> - Se $\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(a'b')$ e $\sphericalangle(a'b') \equiv \sphericalangle(a''b'')$, $\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(a''b'')$.

De fato, pela propriedade simétrica se $\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(a'b')$,

$\sphericalangle(a'b') \equiv \sphericalangle(ab)$, e, como por hipótese, $\sphericalangle(a'b') \equiv \sphericalangle(a''b'')$, temos pelo teorema anterior

$$\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(a''b'') .$$

<u>Teorema 16:</u> - <u>A congruência de triângulos é reflexiva, simétrica e transitiva.</u>

A congruência de triângulos foi definida por meio da congruência de segmentos e de ângulos. Pelo teorema anterior, a congruência de ângulos é reflexiva, simétrica e transitiva e, pela consequência 2 dos postulados, a congruência de segmentos também goza dessas propriedades. Portanto, o mesmo acontecerá com a congruência de triângulos.

<u>Teorema 17:</u> - <u>Dois triângulos ABC e A'B'C' são congruentes se $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$ e $BC \equiv B'C'$</u>. (Terceiro caso de congruência de triângulos).

Transportemos o $\triangle A'\hat{B}'C'$, na semi-reta BA, de orígem B, no semi-plano de orígem AB, oposto ao semi-plano que contém C, e, na semi-reta obtida com êsse transporte, tomemos um ponto C tal que

$$B'C' \equiv BC'' .$$

Teremos, então,

$$AB \equiv A'B' \text{ , } B'C' \equiv BC'' \text{ e } A'\hat{B}'C' \equiv A\hat{B}C''$$

de onde, pelo teorema 2,

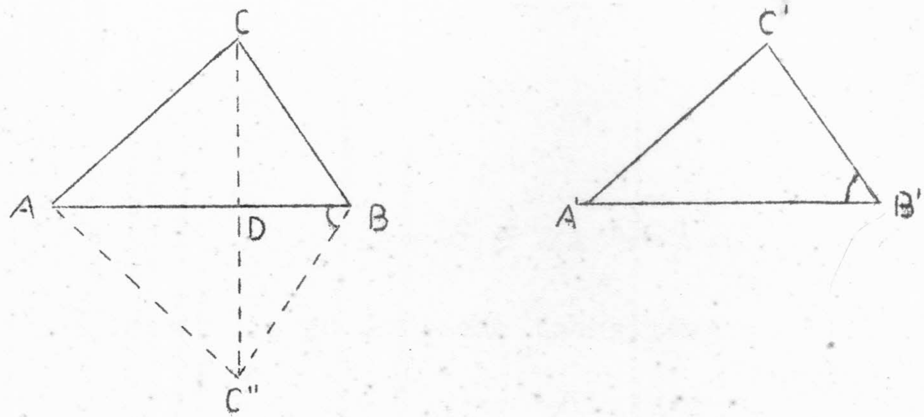


Fig.44

$$\triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC'' \quad . \quad (1)$$

Estando os pontos c e c" em semi-planos opostos, de origem AB, o segmento CC" conterá um ponto D da reta AB, que poderá coincidir com A ou B, ser ponto interno do segmento AB ou ponto externo. No segundo caso, as semi-retas CA e CB, de orígem C, estarão em lados diferentes de C C" assim como as semi-retas C" A e C" B. No terceiro, tanto CA e CB como C" A e C" B estarão do mesmo lado de C C".

Sendo $BC \equiv B'C'$ e $B'C' \equiv B\,C''$, temos $BC \equiv B\,C''$; logo, o triângulo BCC" é isósceles e $B\hat{C}C'' \equiv B\hat{C}''C$. Se D coincidir com A, $\triangle ABC \equiv \triangle ABC''$, por ser, também, $CA \equiv C''A$. Se D não coincidir com A, como $CA \equiv C''A$, o $\triangle ACC''$ será, também isósceles, e teremos : $A\hat{C}C'' \equiv A\hat{C}''C$. E se, D coincidir com B, tiramos, também, $\triangle ABC \equiv \triangle ABC''$.

Se D não coincidir nem com A nem com B, pelo que já vimos podemos aplicar o teorema 7, o que dá,

$$A\hat{C}B \equiv A\hat{C}''B \,,$$

e, pelo teorema 2,

$$\triangle ABC \equiv \triangle ABC'' , \qquad (2)$$

e, aplicando a propriedade transitiva a (1) e (2) ,

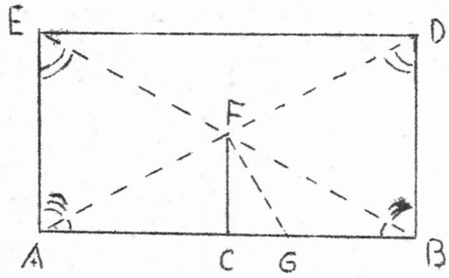
$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' .$$

4. <u>Definição</u>: Chama-se ponto médio de um segmento AB a um ponto C dêsse segmento, que satisfaz à seguinte congruência: $AC \equiv CB$.

<u>Teorema 18: - Todo segmento tem um e um só ponto médio.</u>

Dado o segmento AB, levantemos as perpendiculares à AB nos pontos A e B, e, sôbre elas, tomemos os pontos E e D, de um mesmo lado de AB, de modo que

$$AE \equiv BD .$$



<u>Fig. 45</u>

As retas AE e BD não se encontram, pois, em caso contrário, teríamos, pelo ponto de encontro, duas perpendiculares a u'a mesma reta. A semi-reta AD, de orígem A, é interna ao ângulo $\widehat{BAE}$ e encontra, portanto, o segmento BE, em um ponto interno F.

Igualmente, BE, de orígem B, é uma semi-reta interna do ângulo ABD e, portanto, encontra AD em um ponto interno, precisamente o próprio F. Comparemos os triângulos ABE e ABD. Temos :

$$\triangle ABE \equiv \triangle ABD ,$$

pois, $\widehat{BAE} \equiv \widehat{ABD}$, $AE \equiv DB$ e $AB \equiv AB$. Consequentemente ,

$$\widehat{AEB} \equiv \widehat{ADB} , \qquad (2)$$

e

$$\widehat{DAB} \equiv \widehat{EBA} \qquad (3) .$$

Segundo o teorema 7, segue-se, de (3),

$$\widehat{FAE} \equiv \widehat{FBD} \qquad (4)$$

e, de (4), (2) e (1) ,

$$\triangle AEF \equiv \triangle BDF ,$$

de onde,

$$AF \equiv FB . \qquad (5)$$

Seja C o ponto de encontro de AB com a perpendicular baixada de F sôbre AB. Temos

$$AC \equiv CB .$$

De fato, transportando AC na semi-reta BA, de orígem B, teríamos um ponto G tal que

$$AC \equiv BG ;$$

dessa congruência e de (3) e (5), viria

$$\triangle ACF \not\equiv \triangle BFG ,$$

de onde

$$A\hat{C}F \equiv B\hat{G}F ,$$

e, como ACF é ângulo reto, BGF também o será, de onde, pela unicidade da perpendicular, C coincide com G (Teorema 13).

<u>Definição</u> - Uma semi-reta <u>c</u>, interna ao ângulo (ab), e de modo que

$$\sphericalangle(ac) \equiv \sphericalangle(cb) ,$$

chama-se bissetriz do ângulo (ab) .

<u>Teorema 19:</u> - <u>Todo ângulo tem uma bissetriz.</u>

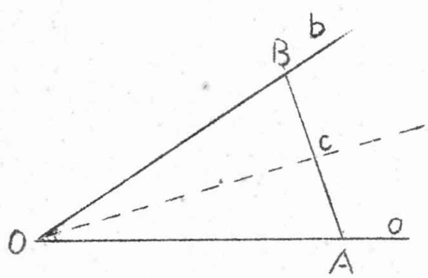


Fig.46

Seja O o vértice do ângulo (ab), A um ponto da semi-reta a, B da semi-reta b, de modo que se tenha

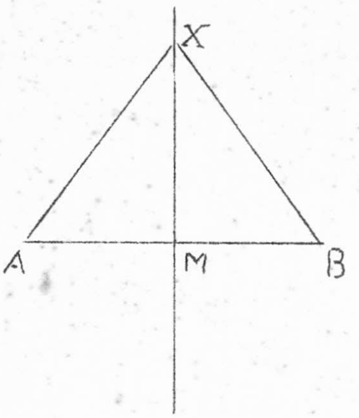
$$OA \equiv OB .$$

De acôrdo com o teorema anterior, existe o ponto médio C do segmento AB. A semi-reta OC, de orígem O, é a bissetriz desejada, porquanto, das congruências $OA \equiv OB$, $AC \equiv CB$ e $OC \equiv OC$, teremos, a congruência dos triângulos OAC e OBC, de onde, como consequência,

$$\widehat{AOC} \equiv \widehat{BOC} .$$

<u>Teorema 20</u>: - <u>Dado o segmento AB, condição necessária e suficiente para que um ponto X pertença à perpendicular que passa pelo ponto médio do segmento AB é que</u>

$$AX \equiv BX .$$



<u>Fig.47</u>

Seja M o ponto médio AB e X um ponto da perpendicular à AB, que passa por M. Temos $A\hat{M}X \equiv B\hat{M}X$, $MA \equiv MB$ e $MX \equiv MX$, de onde, $\triangle AMX \equiv \triangle BMX$ e $AX \equiv BX$. A condição é, portanto, necessária.

Suponhamos, aogra, que X seja um ponto tal que $AX \equiv BX$. Baixemos, de X, a perpendicular à AB, é seja M o pé dessa perpendicular. Como $AX \equiv BX$, o triângulo ABX é isósceles e $X\hat{A}M \equiv X\hat{B}M$. Mas, sendo, também, $MX \equiv MX$, $\triangle AMX \equiv \triangle BMX$ e $AM \equiv BM$, isto é, M é o ponto médio de AB e a condição é suficiente.

<u>Definição</u>: A perpendicular à reta AB, que passa pelo ponto médio do segmento AB, chama-se mediatriz do segmento AB.

7. <u>Definição</u>: - Se o quadrilátero ABCD tiver os ângulos $D\hat{A}B$ e $C\hat{B}A$ retos, e $AD \equiv BC$, diremos que é êle <u>bi-retângulo isósceles</u>.

Teorema 21: - Se ABCD for um quadrilátero bi-retângulo isósceles, $A\hat{D}C \equiv B\hat{C}D$.

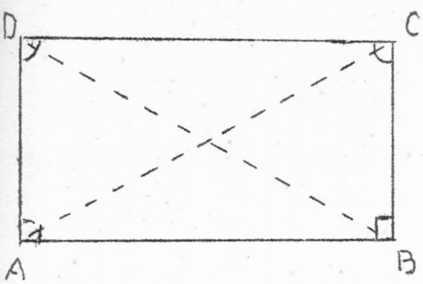


Fig. 48

Liguemos os pontos A e C e os pontos B e D. Comparando os triângulos ABD e ABC, em virtude das congruências $AB \equiv AB$, $AD \equiv BC$ e $A\hat{B}C \equiv B\hat{A}D$, temos, $\triangle ABD \equiv \triangle ABC$, e, portanto, $BD \equiv AC$ e $A\hat{B}D \equiv B\hat{A}C$.

Mas, então, $C\hat{B}D \equiv C\hat{A}D$, e, de $BD \equiv AC$ e $AD \equiv BC$, vem $\triangle BCD \equiv \triangle ACD$, logo,

$$A\hat{D}C \equiv B\hat{C}D .$$

Teorema 22: - (Teorema do Pe.Saccheri) - Existe um quadrilátero com três ângulos retos.

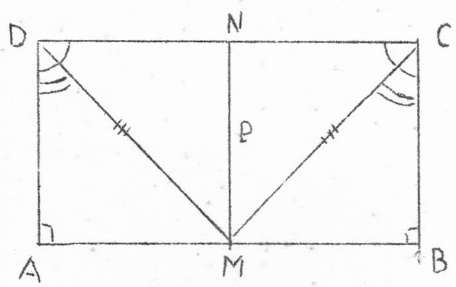


Fig. 49

Seja ABCD um quadrilátero bi-retângulo isósceles, no qual $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são os ângulos retos e $AD \equiv BC$. Pelo teorema 21, sabemos que vale também a congruência $\hat{C} \equiv \hat{D}$.

Seja M o ponto médio de AB e p a perpendicular à reta AB, que passa por M. Os pontos A e B estão em lados diferentes de p. As retas p e BC, sendo perpendiculares à AB, não se encontram. Portanto, B e C estão de um mesmo lado de p. Do mesmo modo, vemos que A e D estão de um mesmo lado de p. Logo, C e D estão em lados opostos. Assim sendo, a reta p passa por um ponto interno N, do segmento CD, e a semi-reta MN, de orígem M, é,uma semi-reta interna do ângulo $C\hat{M}D$.

Comparemos os triângulos AMD e MBC. Como $MA \equiv MB$, $AD \equiv BC$ e $\hat{A} \equiv \hat{B}$, são êsses triângulos congruentes, de onde

$$A\hat{D}M \equiv M\hat{C}B \,, \qquad (1)$$

$$A\hat{M}D \equiv B\hat{M}C \,, \qquad (2)$$

$$DM \equiv MC \,. \qquad (3)$$

Como $\hat{C}$ $\hat{D}$, de (1) segue-se

$$M\hat{D}N \equiv M\hat{C}N \qquad (4)$$

e, sendo MN perpendicular à AB, de (2) vem

$$D\hat{M}N \equiv C\hat{M}B \,. \qquad (5)$$

Das congruências (3), (4), (5), resulta a dos triângulos DMN e CMN, e, pois :

$$D\hat{N}M \equiv M\hat{N}C \,, \qquad (6)$$

$$DN \equiv NC \,. \qquad (7)$$

A congruência (6) exprime que o ângulo $M\hat{N}D$ é reto, (7), que N é o ponto médio do segmento CD.

O quadrilátero AMND tem três ângulos retos que são $A\hat{M}N$, MN̂C e DÂM.

Como N é o ponto médio de CD, segue-se, o seguinte corolário:

<u>Se Â e B̂ forem os ângulos retos do quadrilátero bi-retângulo isósceles ABCD, a mediatriz de AB também será mediatriz de CD.</u>

<u>Teorema 23: - Se D for o ponto médio do lado BC do triângulo ABC, e E ponto médio de AC, a mediatriz de AB será, também, perpendicular à CE.</u>

Sejam AF, CG e BH as perpendiculares baixadas, respectivamente de A, C e B sôbre ED. Os triângulos CGD e DHB são congruentes porque CD DB, CD̂G BD̂H e CĜD BĤD, de onde

$$CG \equiv BH \,. \qquad (1)$$

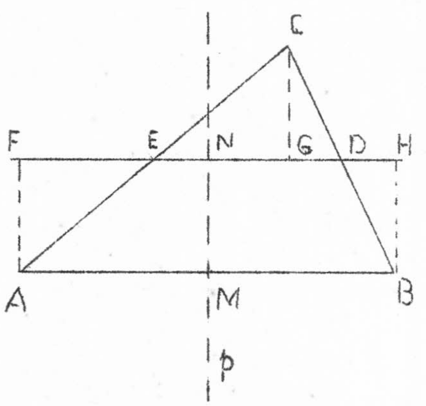


Fig. 50

Os triângulos AEF e EGC são também congruentes, pois, CÊG ≡ AÊF, AF̂E ≡ CĜE e EC ≡ AE. Logo,

$$AF \equiv CG \,. \qquad (2)$$

Se (1) e (2) segue-se

$$AF \equiv BH \,,$$

de modo que o quadrilátero ABHF é bi-retângulo isósceles e a mediatriz de FH é também mediatriz de AB ; e o teorema fica demons trado, em virtude da unicidade da perpendicular a uma reta que passa por um ponto dado.

5. <u>Definição:</u> - Dados os segmentos AB e CD, se o extremo B' do segmento CB', que se obtém transportando AB, sôbre a semi-reta CD, de orígem C, for um ponto interno de CD, diremos que o segmento AB é menor que CD. Em símbolos : $AB < CD$.

Se o transporte AB, na semi-reta CD, de orígem C, definir um ponto externo de CD, diremos que AB é maior do que CD. Em símbolos : $AB > CD$.

<u>Consequências :</u> 1) Se $AB < CD$, $CD > AB$, e reciprocamente. De fato, se $AB < CD$ o transporte de AB na semi-reta CD de orígem C dará um ponto B' interno a CD e tal que

$$AB \equiv CB' \ .$$

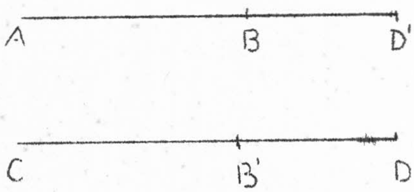


Fig. 5

Transportando CD na semi-reta AB de orígem A teremos um ponto D' tal que

$$CD \equiv AD'$$

Como $CD \equiv AD'$ e $CB' \equiv AB$, e B' é ponto interno do segmento CD, então pela consequência 4) dos postulados, o ponto B deve ser interno ao segmento AD', de onde D' é externo ao segmento AB e, pois,

$$CD > AB \ .$$

2) Dados os segmentos AB e CD, teremos sempre um e um só dos três casos

$$AB < CD \quad , \quad AB \equiv CD \quad , \quad AB > CD \quad .$$

O transporte do segmento AB na semi-reta CD, de orígem C, dá um ponto B' que estará numa e numa só das três situações, com relação à CD :

a) B' interno a CD e, então, $AB < CD$;

b) B' coincide com D e $AB \equiv CD$;

c) B' externo a CD e $AB > CD$.

3) Propriedade transitiva. Dada uma das três hipóteses : 1) $AB \equiv CD$ e $CD < EF$; 2) $AB < CD$ e $CD \equiv EF$;3) $AB < CD$ e $CD < EF$, segue-se

$$AB < EF \quad .$$

Se $AB \equiv CD$ e $CD < EF$, transportando o segmento CD na semi-reta EF, de orígem E, teremos um ponto H de modo que

$$CD \equiv EH \quad ,$$

sendo H interno à EF. Como $AB \equiv CD$, pela propriedade transitiva da congruência de segmentos,

$$AB \equiv EH \quad ,$$

e, sendo único o transporte de segmentos, o transporte de AB na semi-reta EF, de orígem E, dará o próprio ponto H ; logo,

$$AB < EF \quad .$$

Se $AB < CD$ e $CD \equiv EF$, se não tivermos

$$AB < EF \quad ,$$

teremos,

$$AB \equiv EF,$$

ou

$$EF < AB .$$

Na primeira alternativa, pela transitividade da congruência, tiramos

$$AB \equiv CD ,$$

o que é absurdo, e na segunda, pelo caso anterior, $CD < AB$, o que é, novamente absurdo.

No caso em que $AB < CD$ e $CD < EF$, demonstra-se por absurdo, que

$$AB < EF ,$$

supondo-se $EF \leqslant AB$, e aplicando-se os casos anteriores.

4) Aplicando a consequência 1 , à transitividade acima demonstrada, se tivermos um dos três casos :

1) $AB \equiv CD$ e $CD > EF$

2) $AB > CD$ e $CD \equiv EF$

3) $AB > CD$ e $CD > EF$,

vem, como consequência

$$AB < EF .$$

Definição: - Dados os ângulos (a,b) e (cd) , se o transporte do ângulo (a,b), sôbre a semi-reta c, do mesmo lado em que está d , der uma semi-reta interna do ângulo$\nless$(ab), diremos que o ângulo (ab) é menor do que o ângulo (cd) .

Em símbolos,

$$\sphericalangle(ab) < \sphericalangle(cd) .$$

Se o transporte acima dér uma semi-reta externa do $\sphericalangle$ (cd), diremos que o $\sphericalangle$ (ab) é maior do que o $\sphericalangle$ (cd), isto é, em símbolos,

$$\sphericalangle(ab) > \sphericalangle(cd) .$$

<u>Consequências</u>: 1) Se $\sphericalangle(ab) < \sphericalangle(cd)$, $\sphericalangle(cd) < \sphericalangle(ab)$, e reciprocamente.

Se $\sphericalangle(ab) < \sphericalangle(cd)$, o transporte do $\sphericalangle$ (ab) na semi-reta c, do lado em que está <u>d</u> , dá uma semi-reta interna e, e temos

$$\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(ce) .$$

Transportando o $\sphericalangle$ (cd) na semi-reta <u>a</u> do mesmo lado em que está <u>b</u> , obteremos uma semi-reta f e a congruência

$$\sphericalangle(cd) \equiv \sphericalangle(af) .$$

Sendo $\sphericalangle(cd) \equiv \sphericalangle(af)$ e $\sphericalangle(ce) \equiv \sphericalangle(ab)$ e <u>e</u> semi-reta interna do $\sphericalangle$ (cd), pelo teorema 6, b é semi-reta interna do $\sphericalangle$(af), ou, o que vem dar na mesma, f é semi-reta externa do $\sphericalangle$(ab) , donde ,

$$\sphericalangle(cd) > \sphericalangle(ab)$$

2) Dados os ângulos $\sphericalangle$(ab) e $\sphericalangle$(cd), valerá sempre um e um só dos casos

$$\sphericalangle(ab) < \sphericalangle(cd) \quad , \quad \sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(cd) \quad ,$$

$$\sphericalangle(ab) > \sphericalangle(cd) \; .$$

O transporte do $\sphericalangle(ab)$ na semi-reta $\underline{c}$, do mesmo lado em que está $\underline{d}$, dará uma semi-reta $\underline{e}$ em uma das três seguintes situações, com relação ao $\sphericalangle(cd)$:

$\underline{e}$ interna ao $\sphericalangle(cd)$ e, então, $\sphericalangle(ab) < \sphericalangle(cd)$;
$\underline{e}$ coincidindo com $\underline{d}$ e $\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(cd)$;
$\underline{e}$ externo ao $\sphericalangle(cd)$ e $\sphericalangle(ab) > \sphericalangle(cd)$.

3) Propriedade transitiva. Dada uma das três hipóteses: $\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(cd)$ e $\sphericalangle(cd) < \sphericalangle(ef)$; $\sphericalangle(ab) < \sphericalangle(cd)$ e $\sphericalangle(cd) \equiv \sphericalangle(ef)$; $\sphericalangle(ab) < \sphericalangle(cd)$ e $\sphericalangle(cd) < \sphericalangle(ef)$, segue-se

$$\sphericalangle(ab) < \sphericalangle(ef) \; .$$

Se $\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(cd)$ e $\sphericalangle(cd) < \sphericalangle(ef)$, transportando o $\sphericalangle(cd)$, sôbre a semi-reta $\underline{e}$ do mesmo lado em que está f, virá uma semi-reta h interna ao $\sphericalangle(ef)$ e a congruência

$$\sphericalangle(cd) \equiv \sphericalangle(eh) \; ,$$

e, como a congruência de ângulos é transitiva ,

$$\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(eh) \; ,$$

de modo que

$$\sphericalangle(ab) < \sphericalangle(ef) \; .$$

Se $\sphericalangle(ab) < \sphericalangle(cd)$ e $\sphericalangle(cd) \equiv \sphericalangle(eh)$, se não tivermos

$$\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(ef) ,$$

teremos

$$\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(ef)$$

ou

$$\sphericalangle(ef) < \sphericalangle(ab) .$$

Na primeira alternativa, pela transitividade da congruência, tiramos

$$\sphericalangle(ab) \equiv \sphericalangle(cd),$$

o que é absurdo e na segunda, pelo caso anterior, $\sphericalangle(cd) < \sphericalangle(ab)$, o que é novamente absurdo.

<u>Observação:</u> - As relações $AB < CD$, $AB > CD$ chamam-se desigualdades entre segmentos e $\sphericalangle(ab) < \sphericalangle(cd)$ ou $\sphericalangle(ab) > \sphericalangle(cd)$, desigualdades entre ângulos.

6. <u>Definições:</u> - Um ângulo maior do que um ângulo reto chama-se obtuso ; um ângulo menor do que um reto, agudo.

Em um triângulo ABC, os ângulos $A\hat{B}C$, $B\hat{C}A$ e $C\hat{A}B$ chamam-se ângulos internos do triângulo e seus adjacentes ângulos externos.

<u>Teorema 24:</u> - <u>Em todo triângulo, cada ângulo externo é maior do que qualquer ângulo interno não adjacente.</u>

Seja α um ângulo externo do triângulo ABC adjacente ao ângulo CÂB e β o ângulo interno A$\hat{C}$B não adjacente a α, D o ponto meio de AC. Tomemos na semi-reta oposta à semi-reta DB de orígem D um ponto E tal que

$$DB \equiv DE .$$

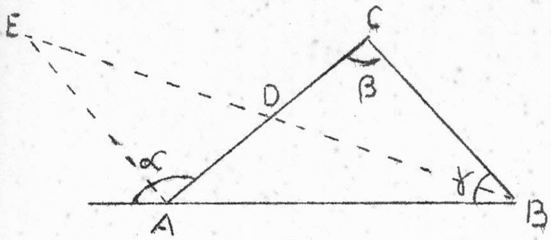


Fig. 52

A semi-reta AE será interna ao ângulo α visto que o ponto E está no semi-plano de orígem AB, que contém o ponto C, e no semi-plano de orígem AC que não contém, o ponto B, de onde,

$$E\hat{A}C < \alpha .$$

Ora, comparando os triângulos BCD e ADE, temos

$$\triangle BCD \equiv \triangle ADE , \qquad (1)$$

pois, AD $\equiv$ DC, BD $\equiv$ DE e B$\hat{D}$E $\equiv$ A$\hat{D}$E, como opostos pelo vértice. Da congruência (1) segue-se

$$E\hat{A}C \equiv \beta ,$$

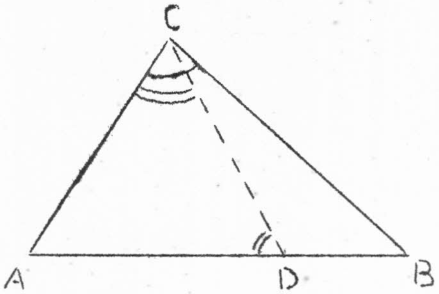
e pela propriedade transitiva da desigualdade de ângulos,

$$\beta < \alpha .$$

Sendo α o ângulo A$\hat{B}$C, do que ficou demonstrado segue-se que o ângulo oposto pelo vértice a α é maior do que γ; e co mo ângulos opostos pelo vértice são congruentes, resulta

$$\gamma < \alpha .$$

<u>Teorema 25:</u> - Em todo triângulo, ao maior lado se opõe o maior ângulo.



<u>Fig. 53</u>

Seja AB o maior lado. Suponhamos que $AC < AB$. Transportando AC na semi-reta AB de orígem A obteremos um ponto D interno ao segmento AB e tal que $AC \equiv AD$. No triângulo ACD teremos, pelo teorema 1, $A\hat{C}D \equiv A\hat{D}C$, de onde, pela transitividade da desigualdade entre ângulos

$$A\hat{C}B > A\hat{D}C ,$$

e, pelo teorema do ângulo externo,

$$A\hat{D}C > A\hat{B}C ,$$

de onde, aplicando de novo a transitividade da desigualdade de ângulos,

$$A\hat{C}B > A\hat{B}C .$$

<u>Teorema 26:</u> - Um triângulo que tem dois ângulos congruentes é isósceles.

Seja $A\hat{B}C \equiv C\hat{A}B$. Se $AC \equiv BC$, o triângulo ABC é isósceles. Suponhamos $AC < BC$. Transportando, então o lado AC na semi-reta CB de orígem C obteremos um ponto interno D, do segmento CB e de modo que AC $\equiv$ CD. No triângulo ACD, sendo AC $\equiv$ CD, CD̂A, pelo teorema 1. Mas, AD é semi-reta interna do CÂB, de onde

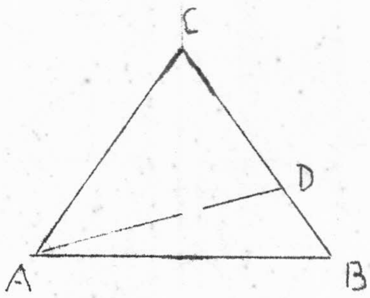


Fig. 54

$$C\hat{A}B > C\hat{A}D \; ,$$

e, como $C\hat{A}D > C\hat{D}A$, vem :

$$C\hat{A}B > C\hat{D}A \; . \qquad (1)$$

Por outro lado, CD̂A é ângulo externo do triângulo ABD ; logo, pelo teorema do ângulo externo,

$$C\hat{D}A > A\hat{B}C \; , \qquad (2)$$

e, de (1) e (2)

$$C\hat{A}B > A\hat{B}C \; ,$$

em contradição com hipótese .

Se AC $>$ BC, chegaríamos também a uma contradição, com o mesmo processo transportando o lado BC na semi-reta CA, de orígem C.

Teorema 27: - Dois triângulos ABC e A'B'C' são congruentes se

$$AB \equiv A'B' \; , \quad C\hat{B}A \equiv C'\hat{B}'A' \quad e \quad A\hat{C}B \equiv A'\hat{C}'B' \; .$$

Se BC $\equiv$ B'C' o teorema estará demonstrado, pelo primeiro caso de congruência de triângulos. Suponhamos BC $<$ B'C'. Trans portando BC na semi-reta B'C' de orígem B', obteremos o ponto C, de modo que

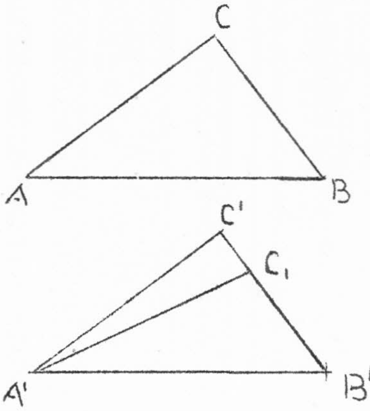


Fig. 55

$$BC \equiv B'C_1 .$$

Como, por hipótese, $AB \equiv A'B'$ e $C\hat{B}A \equiv C'\hat{B}'A'$, a congruência acima acarreta a congruência dos triângulos ABC e $A'B'C_1$, de onde,

$$A\hat{C}B \equiv A'\ \hat{C}_1\ B' ; \qquad (1)$$

ora, $A'C_1$ é semi-reta interna do $C'\ \hat{A}'\ B'$, de onde $A'\ \widehat{C_1}\ B'$ é ângulo externo do triângulo $A'C'C_1$ e, pelo teorema do ângulo externo, pois, podemos escrever :

$$A'\ \hat{C}_1\ B' > A'\ \hat{C}'\ B' , \qquad (2)$$

de onde, por (1) e (2)

$$A\hat{C}B > A'\ \hat{C}'\ B' ,$$

em contradição com a hipótese ,

$$A\hat{C}B \equiv A'\ \hat{C}'\ B' .$$

Se BC fosse maior do que B'C', segue-se-ia a mesma contradição, usado que fosse o mesmo método, isto é, o de transportando B'C' na semi-reta BC de orígem B.

<u>Teorema 28</u>: - Se o segmento XY for interno ao triângulo ABC, e se $AB \leq BC \leq CA$, $XY < CA$.

Seja ABC o triângulo e suponhamos que

$$\hat{C} \geqslant \hat{A} \geqslant \hat{B} \,,$$

entre $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são os ângulos internos. Pelo teorema , vem, então,

$$AB \geqslant BC \geqslant AC \,. \qquad (1)$$

Se os extremos X e Y do segmento ou um dêles sòmente for ponto interno do triângulo, como a reta XY encontra o triângulo em dois pontos D e E, temos, $XY < DE$, de modo que basta demonstrar o teorema quando os extremos do segmento pertencem ao triângulo.

Vamos distinguir três casos:

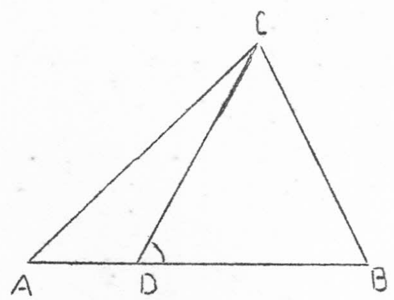


Fig. 56

1) O extremo E coincide com C. Pelo teorema do ângulo externo,

$$B\hat{D}C > \hat{A} \geqslant \hat{B} \,,$$

logo,

$$BC > CD \,,$$

e, por (1)

$$AB > CD \,.$$

2) E é um ponto do lado BC e D do lado AB. Liguemos a com E. Temos,

$$A\hat{E}B > \hat{C} \geqslant \hat{B} \,,$$

de onde,

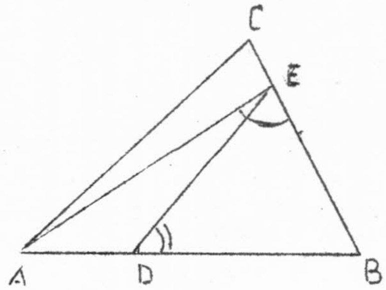


Fig.57

$$AB > AE \,. \qquad (2)$$

Mas, no triângulo AEB,

$$A\hat{E}B \geqslant \hat{B} \geqslant E\hat{A}B$$

e o extremo E coincide com um vértice do triângulo. Logo, pelo caso anterior,

$$DE < AE \,,$$

e, por (2)

$$AB > DE \,.$$

3) D é um ponto do lado AC e E do lado BC. Liguemos D com B. No triângulo BDC

$$A\hat{D}B > \hat{C} \,,$$

e, como $C \geqslant \hat{B} > A\hat{B}D$, vem, para o triângulo ABD ,

$$AB > BD \qquad (3)$$

ora,

$$D\hat{E}B > C \geqslant \hat{B} \geqslant D\hat{B}E$$

portanto,

$$BD > DE$$

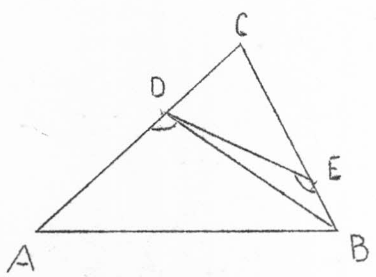


Fig.58

e, por (3)

$$AB > DE \,.$$

0-0-0-0-0-0-0

C A P Í T U L O III

SOMA DE SEGMENTOS E DE ÂNGULOS. PRODUTO DE ÂNGULO POR SEGMENTO. TEOREMAS DE PASCAL E DE DESARGUES

1. Soma de segmentos. Para cada segmento, podemos considerar a classe dos que lhe são congruentes. Obtemos, assim, um sistema de classes, precisamente as classes de equivalência, segundo a congruência de segmentos. Tais classes serão indicadas pelas letras latinas minúsculas.

Dadas duas classes a e b, seja A um ponto de uma reta r e B, C dois pontos sôbre r, de modo que A, B e C estejam na ordem A B C e o segmentos AB e BC pertençam à classe a e b, respectivamente. O segmento AC pertencerá a uma classe c, que chamaremos de soma de a com b, e que indicaremos por

$$a + b = c .$$

Em virtude da transitividade da congruência de segmentos, e, de acôrdo com o postulado III,3, é fácil verificar que a definição da soma a + b é independente do ponto A e da reta r, e que a soma é associativa e comutativa. (Observe-se que a soma de mais de dois segmentos se define habitualmente, isto é, por recorrência).

Se n for um número natural maior do que 1, chamaremos de na à soma a+a+a+...+a (n têrmos). Definiremos, também, 1.a = a.

Diremos que uma classe a é maior do que uma classe b, se um segmento da classe a for maior do que um segmento de classe b. Essa definição tem sentido, pois, se um segmento da classe a for maior do que um segmento da classe b, qualquer outro segmento de a será maior do que qualquer segmento de b, em virtude da propriedade transitiva da desigualdade de segmentos.

Da própria definição de soma das classes a e b segue-se, então,

$$a + b > a \quad \text{e} \quad a + b > b \, .$$

<u>Teorema 1: - Se a > b, existe uma classe c, tal que a = b + c .</u>

Com efeito, tomando um ponto O sôbre uma reta r, sejam OA e OB os segmentos das classes a e b, respectivamente, que pertencem a uma dada semi-reta de r, de orígem O . Como a b, segue-se, da definição, OA OB, de onde, o ponto B está entre O e A. Sendo c a classe a que pertence o segmento BA, temos, por definição de soma

$$a = b + c \, .$$

<u>Teorema 2: - Se a > b, segue-se a + c > b + c .</u>

Pelo teorema anterior, de a b, resulta a = b + c_1, de onde, por definição de soma, vem

$$a + c = (b + c_1) + c$$

ou seja

$$a + c = (b + c) + c_1 ,$$

de onde

$$a + c > b + c .$$

<u>Definição:</u> - Dados dois segmentos AB e CD, chamaremos de soma dos dois segmentos, a um qualquer dos segmentos da classe soma das classes a que AB e CD pertencem, e, de agora em diante, falaremos exclusivamente de soma de segmentos em substituição à soma das classes.

2. <u>Soma de ângulos.</u>

Usaremos para definir soma de ângulos o mesmo processo empregado para os segmentos. Dividimos os ângulos em classes, colocando em u'a mesma classe ângulos congruentes e, em classes diferentes, ângulos não congruentes. Indicaremos as classes de ângulos pelas letras gregas minúsculas.

Se um ângulo $\sphericalangle(r,s)$ da classe α for maior do que o ângulo $\sphericalangle(r's')$ da classe β, segue-se pela transitividade da desigualdade de ângulos, que qualquer ângulo da classe α é maior do que qualquer ângulo da classe β. Diremos, então, que $\alpha > \beta$.

Seja ρ a classe dos ângulos retos, α e β duas classes que satisfazem às desigualdades

$$\alpha + \rho \quad \text{e} \quad \beta < \rho$$

r uma semi-reta de orígem O e I um lado fixado de r, e s a semi-reta perpendicular à r em O, que pertence a I. Seja $\sphericalangle(r,a)$ o ângulo da classe que se obtém transportando um qualquer ângulo dessa classe na semi-reta r e no semi-plano I, e $\sphericalangle(ab)$ o ângulo que se obtém transportando um ângulo de na semi-reta a no semi-plano oposto a que pertence r. Como

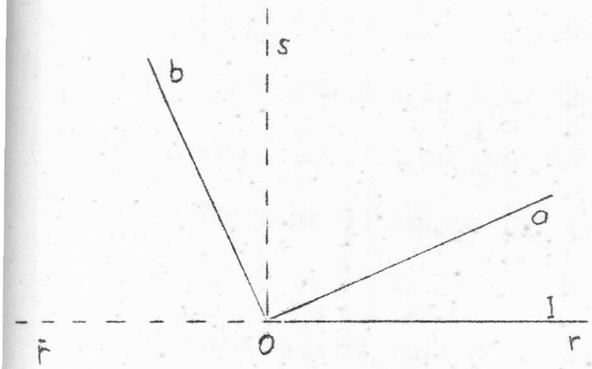


Fig. 59

$\alpha < \rho$, a é uma semi-reta interna do $\sphericalangle(rs)$. Logo, $\sphericalangle(\bar{r},a) > \rho$; sendo então $\bar{r}$ a semi-reta oposta de r, segue-se, em virtude de que $\beta < \rho$, $\sphericalangle(ab) < \sphericalangle(a\,\bar{r})$, isto é, b é uma semi-reta interna do $\sphericalangle(\bar{r},a)$, de onde b pertence a I. A classe γ, a que pertence o $\sphericalangle(rb)$ chama-se soma de α e β, o que representamos por

$$\gamma = \alpha + \beta .$$

Se α_1, α_2 e α_3 forem três classes tais que $\alpha_i < \rho$, $(i = 1,2,3)$, poderemos efetuar a adição $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$. Chamemos de a_2 a semi-reta, de orígem O, e que está em I, de modo que o $\sphericalangle(ra_1)$ pertença a α. Se o transporte de um ângulo de α_3, na semi-reta a_2, no semi-plano oposto ao que contém r, der uma semi-reta a_3, ainda em I, a classe α' a que pertence o $\sphericalangle(r\,a_3)$, chamar-se-á soma de α_1, α_2 e α_3, isto é,

$$\alpha' = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 .$$

Com êsse processo, podemos efetuar a soma $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_e$, enquanto obtivermos, com os transportes successivos, semi-retas de I, e a transitividade da congruência de ângulos e o teorema6,IInos permitem demonstrar imediatamente que a soma das classes de ângulos, quando possível nesse sentido, é independente de r e do lado fixado, assim como a associatividade e a comutatividade da adição.

A adição de duas classes de ângulos, que introduzimos acima, não pode ser efetuada em geral, quando não satisfizerem à condição (1). Realmente, se α ou β não satisfizerem à condição (1), pode acontecer que a semi-reta b , obtida com o transporte de um ângulo da classe β , na semi-reta a, do lado oposto ao que contém r, coincida com $\bar{r}$, e as semi-retas r e $\bar{r}$ não formem um ângulo.

É, por exemplo, o que acontece se = e = . E natural, portanto, colocar, neste caso, como soma das classes e ,

$$\alpha + \beta = 2\rho. \qquad (2)$$

Fig. 60

A soma (2) é, também, comutativa. De fato, se o $\sphericalangle$(ra) for um ângulo de α e $\sphericalangle$(a $\bar{r}$) de β , assim como $\sphericalangle$(a'r), veremos, imediatamente, pelo teorema da congruência dos ângulos adjacentes, que o ângulo $\sphericalangle$(a' $\bar{r}$) também pertence a α, de onde

$$\beta + \alpha = 2\rho = \alpha + \beta .$$

Da mesma fórma, se na adição $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_e$ os transportes successivos até um ângulo de x_{e-1} dérem semi-retas de I, e o transporte de α_e, a semi-reta $\bar{r}$, teremos :

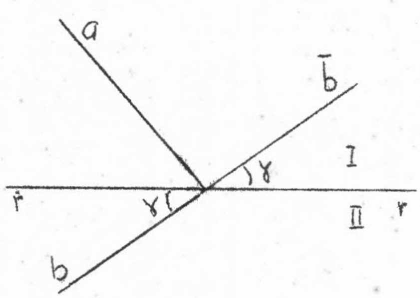
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_e = 2\rho .$$

A adição, neste caso, é, também associativa, como se verifica fàcilmente.

Suponhamos, agora, que o processo usado para efetuar a adição dos ângulos α e β dê uma semi-reta b no semi-plano II . Poremos, por definição,

$$\alpha + \beta = 2\rho + \gamma .$$

sendo γ a classe a que pertence o ângulo $\sphericalangle(\bar{r}\ b)$.



Fig, 61

Pelo teorema da congruência de ângulos opostos pelo vértice, $\sphericalangle(b\bar{r}) \equiv \sphericalangle(\bar{r}\ \bar{b})$, de forma que, se efetuamos a soma $\beta + \alpha$, a partir da semi-reta b, no semi-plano de origem b , que contém a , vamos obter a semi-reta r, de forma que

$$\beta + \alpha = 2\rho + \gamma = \alpha + \beta ,$$

o que mostra a comutatividade da adição neste novo caso.

Dados r ângulos α_1 , α_2 ,......, α_r , se o transporte successivo de α_1 , α_2 ,..., α_{r-1} , der uma semi-reta a_{r-1}, de (1) ou $\bar{r}$, e o transporte de α_r em a_{r-1} , no semi-plano que não contém r, der uma semi-reta b de II, colocaremos

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = 2\rho + \gamma,$$

sendo γ a classe a que pertence o ângulo $\gamma(\bar{r}\, b)$.

A propriedade associativa segue-se imediatamente.

Sejam, agora, n ângulos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}$ na semi-reta $\underline{r}$ e no semi-plano I, dê semi-retas de I, ou $\bar{r}$, e que o transporte de α_{i_1} dê uma semi-reta de II, formando o ângulo β_1 com $\bar{r}$. Temos

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_{i_1} = 2\rho + \beta_1 .$$

Adicionemos $\alpha_{i_1+1}, \ldots, \alpha_{i_2-1}$ à classe β, no semi-plano II, e suponhamos que α_{i_2} dê uma semi-reta de I, novamente.

Teremos, pelas definições,

$$\beta_1 + \beta_{i_1+1} + \ldots + \beta_{i_2} = 2\rho + \beta_2 .$$

Continuando dêsse modo até somarmos tôdas as classes teremos

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_{i_1} = 2\rho + \beta_1 ,$$

$$\beta_1 + \alpha_{i_1+1} + \ldots + \alpha_{i_2} = 2\rho + \beta_2 ,$$

$$\beta_{j-1} + \alpha_{i_{j-1}+1} + \ldots + \alpha_n = 2\rho + \beta_j .$$

Efetuando, então, a soma $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{i_1} + \ldots + \alpha_{i_2}$, vem, pelas duas primeiras

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_{i_1} + \alpha_{i_1+1} + \ldots + \alpha_{i_2} = 2j\rho + (2\rho + \beta_2) = 4\rho + \beta_2$$

e assim successivamente, de forma que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots\ldots + \alpha_n = 2j\rho + \beta_j .$$

<u>Definição</u>: Dados dois ângulos $\sphericalangle(ab)$ e $\sphericalangle(cd)$, chamamos de soma dêsses ângulos, a um ângulo qualquer da classe soma das classes e que êles pertencem,e, de agora em diante, falaremos de soma de ângulos em lugar de soma das classes de ângulos.

Como vimos, a soma de dois ângulos α e β é um ângulo, ou dois retos ou um ângulo acrescentado de 2 retos. No primeiro caso, segue-se da própria definição que

$$\alpha + \beta > \alpha \quad e \quad \alpha + \beta > \beta.$$

No segundo e terceiros casos, por definição,

$$\alpha + \beta > \alpha \quad e \quad \alpha + \beta > \beta.$$

<u>Teorema 3</u>: - Em todo triângulo, a soma de dois lados é maior do que o terceiro.

Na semi-reta, de orígem C, oposta à que contém A, tomemos o ponto D, de modo que $BC \equiv CD$.

O triângulo B C D é isósceles, logo,

$$C\hat{B}D \equiv C\hat{D}B .$$

Mas, sendo B C uma semi-reta interna do ângulo $A\widehat{B}D$, vem

$$A\hat{B}D > C\hat{B}D \equiv A\hat{D}B .$$

de onde, no triângulo ABD,

$$AD > AB \therefore$$

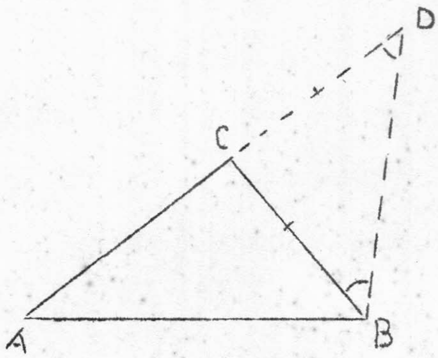


Fig. 62

Ora, $AD = AC + CB$, e, portanto,

$$AC + CB > AB .$$

2.Definição: Dado um ângulo α e um segmento a, transportemos a, sôbre um dos lados do ângulo, a partir do ponto O. Seja $OA = a$ e AB perpendicular à reta que contém o outro lado do ângulo. O segmento $b = OB$ chama-se produto do ângulo α pelo segmento a , o que representaremos por

$$b = \alpha a.$$

Dada a unicidade da perpendicular a uma reta, por um ponto dado sôbre ela, segue-se da definição, que $\alpha a = \alpha c$ acarreta $a = c$, resultado que usaremos frequentemente.

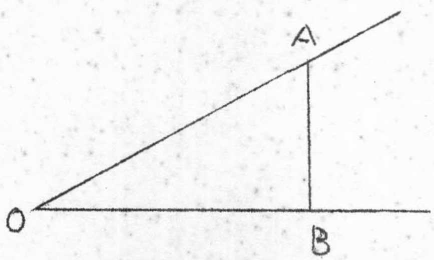


Fig. 63

A noção de produto de ângulo por segmento nos permitirá demonstrar casos especiais dos teoremas de Pappus e de Desargues, graças ao seguinte teorema, que é central para toda a teoria :

Teorema 4: - Sejam a, b, c três semi-retas da mesma orígem O, de modo que a e c estejam em lados opostos de b. Tomemos um ponto B, qualquer, de b. Se BA for perpendicular à a , BC à c, e CD à reta CA, teremos:

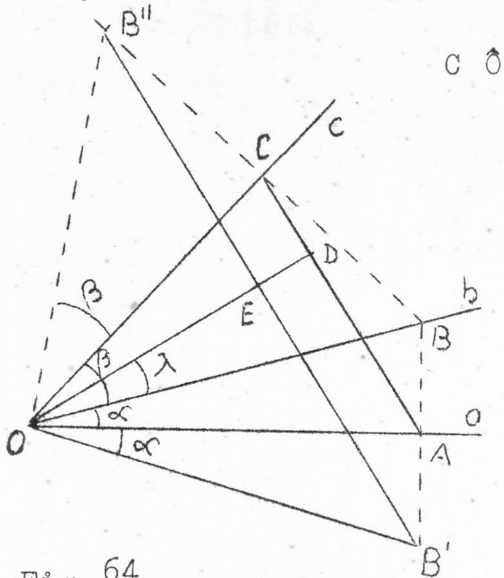


Fig. 64

$$C\hat{O}D \equiv \sphericalangle(a, b).$$

Tomemos na semi-reta oposta de AB, de orígem A, um ponto B', de modo que

$$AB \equiv AB',$$

e na semi-reta oposta de CB, de orígem C, o ponto B, de modo que

$$BC \equiv CB.$$

Sendo a reta mediatriz do segmento BB', e pertencendo O à a, teremos

$$OB \equiv OB''.$$

Da mesma forma, sendo o mediatriz de B B'' , teremos

$$OB \equiv OB'',$$

de onde

$$O B' \equiv O B'',$$

isto é, O pertence à mediatriz de B' B''. A perpendicular OE baixada de O à B' B'' e, pois, a mediatriz de B' B'' ; logo, E é o ponto médio de B' B''. Ora, no triângulo B B' B'' , C é o ponto médio de BB'', e, A, de BB'; como OE é a mediatriz de $B'B''$, segue-se pelo teorema deo Capítulo II, que OE é também, perpendicular à AC, isto é, coincide com OD.

Chamemos de α ao ângulo $\sphericalangle(ab)$ e de β ao ângulo $\sphericalangle(bc)$. Como $\underline{a}$ é a mediatriz de BB', $\alpha = B'\hat{O}A$ e $\beta = C\hat{O}B$, por ser C mediatriz de BB''; e como OE é mediatriz de $B'B''$, temos, também

$$B'\hat{O}E \equiv B''\hat{O}E. \qquad (1)$$

Se OE coincidir com b, de (1) segue-se que

$$2\alpha = 2\beta,$$

de onde

$$\alpha = \beta,$$

e o teorema está demonstrado.

Se OE não coincidir com b, poderemos supor que seja interna ao ângulo COD, sem alterar a generalidade da demonstração. Virá, então chamando de λ ao ângulo DOB,

$$C\hat{O}D = B - \lambda$$

e, de (1)

$$2\alpha + \lambda = 2\beta - \lambda,$$

ou seja

$$2\alpha = 2(\beta - \lambda),$$

o que dá

$$\alpha = C\hat{O}D.$$

Teorema 5: - $\alpha\beta a = \beta\alpha a$.

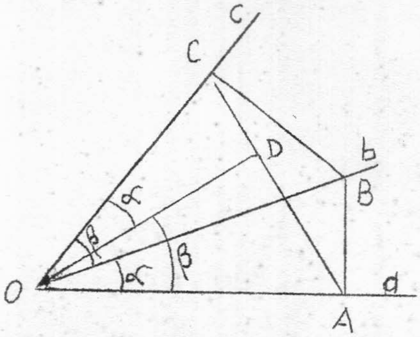


Fig. 65

Seja b uma semi-reta de orígem O. Transportemos o ângulo α , sôbre b, de um lado qualquer de b, e o ângulo β do lado oposto. Tomemos, sôbre b, o ponto B de modo que OB = a, e seja BA perpendicular ao outro lado de α e BC ao outro lado de β . Seja OD perpendicular à AC. Pelo teorema anterior, teremos, então, COD = α , e portanto, AOD = β .

Efetuemos os produtos $\alpha\beta a$ e $\beta\alpha a$:

$$\alpha\beta a = \alpha(OC) = OD ,$$

$$\beta\alpha a = \beta(OA) = OD ,$$

ou seja,

$$\alpha\beta a = \beta\alpha a .$$

O teorema 2 nos permite demonstrar os teorema de Pascal e Desargues, sob a seguintes formas particulares :

a) Teorema de Pascal : Sejam r e r' duas retas que se encontram em um ponto O e AC' BA' CB' um hexágono com os vértices alternadamente sôbre r e r'. Se AC' e A'C admitirem uma perpendicular comum que passa por O, assim como AB' e A'B, então BC' e B'C admitirão também, uma perpendicular comum, que passa por O.

b) Teorema de Desargues : Sejam ABC e A'B'C' dois triângulos tais que as retas AA', BB' e CC' passem por um ponto O. Se

AB e A'B' admitirem uma perpendicular comum, que passe por O, as sim como BC e B'C' , então o mesmo acontecerá com AC e A'C' .

Demonstremos o teorema de Pascal.

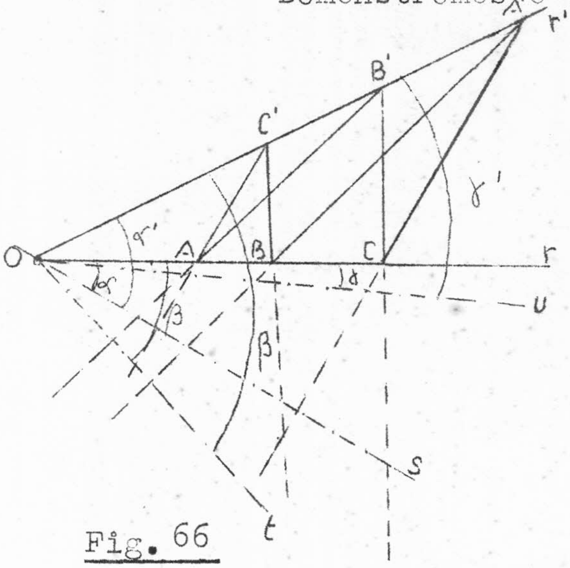


Fig. 66

Seja $\underline{s}$ a perpendicular comum à A' e AC', $\underline{t}$ a AB' e A'B e $\underline{u}$ a perpendicular baixada de O à BC'. Devemos demostrar que $\underline{u}$ é, também, perpendicular à B'C .

Façamos $\alpha = \sphericalangle(r,s)$,

$\alpha' = \sphericalangle(r',s)$,

$\beta = \sphericalangle(r, t)$,

$\beta' = \sphericalangle(r',t)$, $\gamma = \sphericalangle(r,u)$, $\gamma' = \sphericalangle(r',u)$, $OA = a$, $OB = b$,

$OC = c$, $OA' = a'$, $OB' = g'$ e $OC' = C'$.

Pelas hipóteses do teorema, temos, aplicando a definição de produto de ângulo por segmento :

$\alpha a = \alpha' c'$ (1) $\beta a = \beta' b'$ (3) $\beta b = \beta' a'$ (4)

$\alpha c = \alpha' a'$ (2) $\gamma b = \gamma' c'$ (5) .

Ora, $\underline{u}$ será perpendicular à B'C, se tivermos, também

$$\gamma c = \gamma' b' ;$$

portanto, teremos demonstrado o teorema se verificarmos essa igualdade.

Para isso multipliquemos ambos os membros de $\gamma b = \gamma c'$ por $\alpha' \beta$ e depois, ambos os membros da igualdade que resulta, por

α'. Virá

$$\alpha'\beta\gamma b = \alpha'\beta\gamma c',$$

ou segundo o teorema 2,

$$\alpha'\gamma\beta b = \beta\gamma'\alpha' c',$$

Aplicando nessa igualdade, à esquerda (4), e à direita (1), teremos

$$\alpha\gamma\beta' a' = \beta\gamma'\alpha a$$

ou seja :

$$\beta'\gamma\alpha' a' = \gamma'\alpha\beta a,$$

de onde, aplicando à esquerda (2), e à direita (3),

$$\beta'\gamma\alpha c = \gamma'\alpha\beta' b',$$

isto é,

$$\alpha\beta'\gamma c = \alpha\beta'\gamma' b'$$

portanto,

$$\gamma c = \gamma' b'$$

e o teorema fica demonstrado.

Passemos agora, ao teorema de Desargues :

Sejam r e t as perpendiculares comuns à AB, A'B' e BC, B'C', respectivamente; s à perpendicular à AC, que passa por O, e u perpendicular à reta A'B . O teorema estará demonstrado, se mostrarmos que s é perpendicular à A'C' .

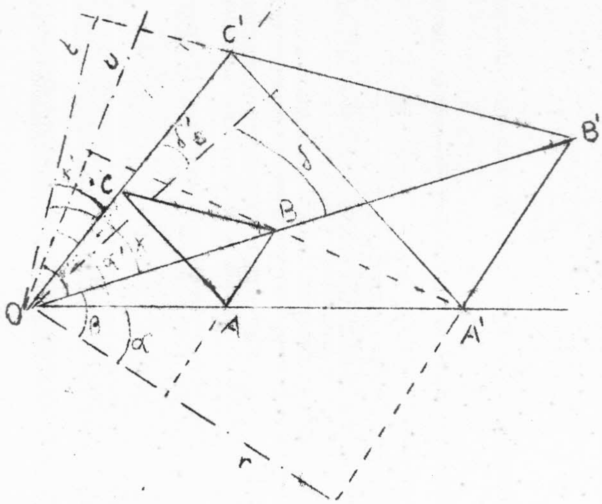


Fig. 67

Façamos $\alpha = \sphericalangle(r, AA')$, $\beta = \sphericalangle(r, BB')$,

$\alpha' = \sphericalangle(u, AA')$, $\beta' = \sphericalangle(u, BB')$,

$\gamma' = \sphericalangle(t, CC')$, $\gamma = \sphericalangle(t, BB')$,

$\delta = \sphericalangle(s, BB')$, $\delta' = \sphericalangle(s, CC')$,

$OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OA' = a'$,

$OB' = b'$, $OC' = c'$.

De acôrdo com a definição de produto ângulo por segmento, as hipóteses do teorema dão :

$$
\begin{aligned}
\alpha a &= \beta b \qquad (1)\\
\gamma b &= \gamma' c \qquad (2)\\
\delta a &= \delta' c \qquad (3)\\
\alpha a' &= \beta b' \qquad (4)\\
\gamma b' &= \gamma' c' \qquad (5)
\end{aligned}
$$

e se s fôr perpendicular à A'C', virá, também

$$\delta a' = \delta' c' \qquad (6)$$

Tudo se resume, portanto, na verificação de (6).

Ora, como u é perpendicular à A'B, temos, também,

$\alpha' a' = \beta' b$. (2)

Multiplicando (1) por β', vem

$$\beta' \alpha a = \beta' \beta b ,$$

de onde, pelo teorema 2,

$$\alpha \beta' a = \beta \beta' b .$$

Aplicando (7) ao segundo membro desta igualdade, vem

$$\alpha\beta' a = \beta\alpha' a' .$$

Multiplicando (4) por α', vem

$$\alpha\alpha' a' = \beta\alpha' b' ,$$

e, como $\alpha' a' = \beta' b$, tiramos,

$$\alpha\beta' b = \beta\alpha' b' .$$

Multipliquemos (9) por γ, e apliquemos o teorema 2. Temos

$$\alpha\beta'\gamma b = \beta\alpha'\gamma b' ,$$

e, por (2) e (5),

$$\alpha\beta'\gamma' c = \alpha'\beta\gamma c'$$

de onde,

$$\alpha\beta' c = \alpha'\beta c' .$$

Multipliquemos (10) por δ ; temos, pelos teoremas 2, e por (3) ,

$$\alpha\beta'(\delta' c) = \alpha\beta'(\delta a) = \alpha'\beta\delta c' ,$$

de onde, em virtude de (8),

$$\delta(\alpha\beta' a) = \delta(\alpha'\beta a') = \alpha'\beta\delta c' ;$$

logo,

$$\delta a = \delta' c'$$

como queríamos demonstrar.

0-0-0-0-0-0-0

MIMEOGRAFADA

por

ZILAH DE ARRUDA NOVAIS

FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS

da

UNIVERSIDADE DE S. PAULO

1 9 5 1