

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
FACULDADE DE FILOSOFIA, CIÊNCIAS E LETRAS

*INTEGRAÇÃO FORMAL DE SISTEMAS DE  
EQUAÇÕES A DERIVADAS PARCIAIS*

**Junia Borges Botelho**

**1969**

17/16

INTRODUÇÃO FORMAL DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES A DERIVADAS PARCIAIS

Junia Borges Botelho

1969

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
LIVRO 1

## Introdução

Este trabalho apresenta uma demonstração da integrabilidade formal de um sistema de equações a derivadas parciais, segundo as ideias desenvolvidas por Quillen em sua tese de doutoramento, elaboradas posteriormente por Goldschmidt.

⊙ Capítulo 0, de caráter introdutório, avança as definições acerca de variedades fibradas e fatos de seções que serão utilizados no decorrer do trabalho. ⊙ Capítulo I apresenta uma introdução geral sobre o prolongamento de sistemas de equações diferenciais e alguns lemas básicos. ⊙ Capítulo II trata da cohomologia de Spencer e o Capítulo III da existência propriamente das soluções formais.

⊙ Apêndice apresenta, em condições mais gerais que as estritamente necessárias à aplicação no presente trabalho, a demonstração de que os grupos de cohomologia de Spencer de ordem suficientemente elevada são nulos. Esta parte, de natureza algébrica, foi baseada na resposta de R. B. Doucette.

No presente trabalho, não é abordada a questão da convergência das soluções mas unicamente a existência das soluções formais, a partir da qual a convergência poderá ser demonstrada.

Este trabalho foi realizado no 1º semestre de 1968, durante minha permanência no "Institut de Mathématiques Pures" de Grenoble, no qual tive a oportunidade de participar de uma série de seminários sobre sistemas de equações a derivadas parciais sob a orientação do Prof. A.A. Martin Rodriguez. A este meus agradecimentos que estendo a meus colegas E. S. Ferreira e M. Cuellar e ao Prof. Elze F. Gomide, pela leitura dos originais.

Junia Borges Bhera.

Cap. 9 Variiedades Fibradas e Fibrados  
Exercícios

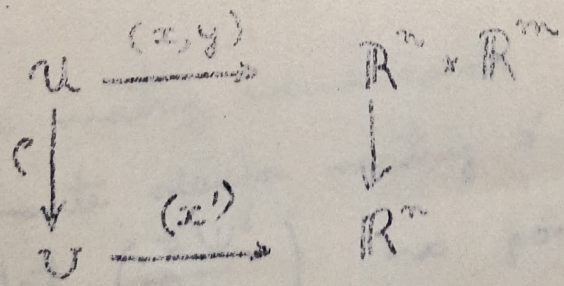
Salvo menção em contrário, todas as variedades e aplicações são supostas infinitamente diferenciáveis.

9.1. Definição 0.1

Uma variedade fibrada é uma terna  $(M, N, p)$  onde  $M, N$  são variedades e  $p: M \rightarrow N$  é uma aplicação diferenciável, sobrejetora e de posto máximo, isto é, para todo  $p \in M$ ,  $d_p$  é de posto máximo.

Observação 0.1

Se  $(M, N, p)$  é uma variedade fibrada, então para todo  $p \in M$ , existe uma carta  $(x, y): U \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  de  $M$ , com centro  $p$  e uma carta  $(x'): U \rightarrow \mathbb{R}^n$  com centro  $p(p)$ , sendo  $V = p(U)$  tal que o diagrama



é comutativo, onde  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  é a projeção canônica.

Uma tal carta  $(x, y)$  de  $M$  diz-se uma carta fibrada de  $M$  em torno de  $p$ .

De fato, seja  $p$  um ponto de  $M$  e sejam  $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$  e  $\varphi': V' \rightarrow \mathbb{R}^m$  cartas quaisquer de  $M$  e  $N$  em torno de  $p$  e  $\varphi(p)$  respectivamente. Sendo  $\varphi$  diferenciável, podemos admitir que  $V$  é tal que  $\varphi(V) \subset V'$  e considerar a aplicação

$\Psi = \varphi' \circ \varphi \circ \varphi^{-1}: \varphi(V) \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Seja  $\Psi$  expressa por  $\Psi(q) = (\Psi^1(q), \dots, \Psi^m(q))$  onde  $q = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ .

Como  $d\varphi$  é de posto máximo, podemos supor que  $\det \left( \frac{\partial \Psi^i}{\partial x_j} \right)$  é não nulo no ponto  $\varphi(p)$ .

Definamos a aplicação  $\alpha: \varphi(V) \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ , onde  $\alpha(q) = (\Psi^1(q), \dots, \Psi^m(q), y_1, \dots, y_m)$ .

Então a matriz jacobiana de  $\alpha$  no ponto  $\varphi(p)$  é

$$\begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \Psi^i}{\partial x_j} \right) & \left( \frac{\partial \Psi^i}{\partial y_j} \right) \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

onde  $I$  é a matriz identidade. Segue que o determinante dessa matriz é  $\neq 0$  pois é igual a  $\det \left( \frac{\partial \Psi^i}{\partial x_j} \right)$  no ponto  $\varphi(p)$ .

Pelo teorema da função inversa, é restrita a uma vizinhança  $W$  de  $\varphi(p)$  é um difeomorfismo. Seja  $K^{n+m} \subset \mathbb{R}^{n+m}$  um cubo

aberto de centro  $p$ ,  $\psi(p)$  contido em  $W_2$   
 e pendamos  $W_2 = \psi^{-1}(K^{n+m})$ . Entao  $\psi$   
 restita a  $W_2$  e um difeomorfismo de  $W_2$   
 sobre  $K^{n+m}$  e se  $\pi: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  denota  
 a projecao canonica,  $\psi|_{W_2} = \pi \circ \alpha|_{W_2}$   
 chamando  $U = \psi^{-1}(W_2)$  e' claro que  
 $(x, y) = \alpha \circ \psi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$  e' uma mora  
 curta em torno de  $p$ . Adicional,

$$\pi \circ (x, y) = \pi \circ \alpha \circ \psi|_U = \psi \circ \psi|_U$$

Como  $\psi = \psi' \circ \rho \circ \psi^{-1}$ , segue que

$$\pi \circ (x, y) = \psi' \circ \rho|_U$$

Mostramos que  $\rho(U)$  e' um aberto  
 em  $N$ . De fato,

$$\psi' \circ \rho(U) = \pi \circ (x, y)(U) = K^n$$

um aberto contido em  $\psi'(V')$ , donde  
 $\psi'^{-1}(K^n) = \rho(U)$  e' um aberto em  $V'$ , sendo  
 portanto aberto em  $N$ . Assim,

$$(x, y): U \rightarrow \mathbb{R}^{n+m} \quad \text{e} \quad (x') = \psi'|_{\rho(U)} : \rho(U) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

sao curvas que tornam comutativo o  
 diagrama da pg 1.

Exercício 0.2

Seja  $(M, N, \rho)$  uma tripla e  
 $M$  e  $N$  são variedades e  $\rho: M \rightarrow N$  e' sobrejetora.

(4)

Se para todo  $p \in N$ , é possível achar uma carta  $(U, \phi)$  em torno de  $p$ , e imediato que  $d\phi_p$  é de posto máximo, donde  $(M, N, \rho)$  é uma variedade fibrada segundo a definição 0.1.

Se  $f$  é uma função definida em  $N$ , denotaremos ainda por  $f$  a função  $f \circ \rho$ , salvo possibilidade de confusão. Assim, as igualdades  $(x) = \pi \circ (x, y) = (x') \circ \rho$  permitirão-nos substituir  $(x')$  por  $(x)$ .

Segue da Def. 0.1 que se  $x$  é um ponto de  $N$ ,  $\rho^{-1}(x)$  é uma subvariedade de  $M$ . Chamaremos  $\rho^{-1}(x)$  fibra sobre  $x$  e a denotaremos também por  $M_x$ .

É fácil ver que  $(T(M), M, \pi)$  onde  $T(M) = \{ (p, v) ; p \in M \text{ e } v \text{ é vetor tangente a } M \text{ em } p \}$

está munido da estrutura usual de variedade e  $\pi: T(M) \rightarrow M$  é definida por  $\pi(p, v) = p$ , é uma variedade fibrada. Uma secção de  $(M, N, \rho)$  é

uma aplicação  $s: V \rightarrow M$ , onde  $V$  é um aberto de  $N$ , tal que  $\rho \circ s$  é a aplicação identidade de  $V$ . Diremos que  $V$  é o domínio da secção  $s$ . Seja  $(x, y)$  uma



... de uma fibra de  $p \in U$ .

...  $(x, y)$ . Assim,  $s$  pode ser expressa por  $y_\lambda = s_\lambda(x)$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots, m$ , onde  $(x, y)$  é ponto da fibra  $(x, y)$ .

Sejam  $(M, N, \rho)$  e  $(M', N', \rho')$  duas variedades fibradas. Uma aplicação  $\phi: M \rightarrow M'$  se diz uma aplicação fibrada de  $(M, N, \rho)$  em  $(M', N', \rho')$  se e somente se  $\rho' = \rho \circ \phi$ .

§0.2 Fatos de Grupos de Seções

Sejam  $s_1: U_1 \rightarrow M$  e  $s_2: U_2 \rightarrow M$  duas seções de  $(M, N, \rho)$  e  $x$  um ponto de  $U_1 \cap U_2$ . Dizemos que  $s_1$  e  $s_2$  são equivalentes em  $x$  se existe uma vizinhança  $V$  de  $x$  tal que  $s_1$  e  $s_2$ , restritas a  $V$ , coincidam. É claro que fica assim definida uma relação de equivalência no conjunto das seções cujo domínio contém a classe a qual pertence uma seção  $s$  é dita grupo de  $s$  em  $x$  e será denotado por  $\Gamma_x(s)$ .

Sejam  $[f]$  e  $[g]$  germs de funções de  $(M, N, \rho)$  em  $x_0 \in N$ . Seja  $l$  um inteiro  $\geq 0$ . Dizemos que  $[f]$  e  $[g]$  são  $l$ -equivalentes em  $x_0$  se a seguinte condição é satisfeita:

Para toda carta fibrada  $(x, y)$  cujo domínio de  $(x)$  contém  $x_0$  e toda derivação parcial  $D$  de ordem  $\leq l$ , vale

$$D f_{\lambda}(x_0) = D g_{\lambda}(x_0),$$

onde  $y_{\lambda} = f_{\lambda}(x)$  e  $y_{\lambda} = g_{\lambda}(x)$  são as expressões de representantes  $f$  e  $g$  de  $[f]$  e  $[g]$ , respectivamente, em termos da carta  $(x, y)$ .

É evidente que a  $l$ -equivalência está bem definida, isto é, independe da particular seção representante dos germs.

É fácil ver que basta verificar a condição acima para uma carta em torno de  $x_0$ . De fato, supobamos que, em termos da carta  $(x, y)$ , vale

$$D f_{\lambda}(x_0) = D g_{\lambda}(x_0), \quad \lambda = 1, 2, \dots, m, \text{ para toda}$$

derivação  $D$  de ordem  $\leq l$ . Sejam  $y'_{\lambda} = f'_{\lambda}(x')$ ,  $y'_{\lambda} = g'_{\lambda}(x')$  as expressões de  $f$  e  $g$  em termos de outra carta  $(x', y')$ .

Se na mudança de coordenadas de  $(x, y)$  para  $(x', y')$ ,  $y'_{\lambda} = y'_{\lambda}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ ,  $\lambda = 1, 2, \dots, m$ , temos

$$y'_\lambda = y'_\lambda(x'_1, \dots, x'_n), \quad f'_j(x'_1, \dots, x'_n), \quad \begin{matrix} j=1, 2, \dots, m \\ \lambda=1, 2, \dots, m \end{matrix}$$

$$= f'_\lambda(x'_1, \dots, x'_n).$$

Segue do teorema das funções compostas que  $D f'_\lambda(x'_1, \dots, x'_n)$  depende apenas das mudanças de coordenadas e de suas derivadas, de  $f'_j$   $j=1, 2, \dots, m$  e de suas derivadas em  $x_0$ . Como

$$D f'_\lambda(x_0) = D g'_\lambda(x_0), \quad \lambda=1, \dots, m, \text{ resulta}$$

$$D f'_\lambda(x_0) = D g'_\lambda(x_0).$$

É imediato que a  $l$ -equivaleência em  $x_0$  é uma relação de equivalência definida no conjunto dos germes de seções em  $x_0$ . Se  $[f]$  é um germe de seções em  $x_0$ , a classe contendo o germe de  $f$  será chamada  $l$ -jato de  $[f]$  em  $x_0$  e denotada por  $J_{x_0}^l f$ . Assim, o  $l$ -jato de  $[f]$  em  $x_0$  fica caracterizado pela expansão de  $f'_\lambda$ ,  $\lambda=1, \dots, m$  em fórmula de Taylor em  $x_0$ , até a ordem  $l$ . Denotaremos por  $J_{x_0}^l(M, N, \rho)$  o conjunto de todos  $l$ -jatos em  $x_0$  de germes de seções de  $(M, N, \rho)$  e por  $J^l(M, N, \rho)$  o conjunto de todos os  $l$ -jatos de germes de seções de  $(M, N, \rho)$  em todos os pontos de  $N$ . Escreveremos frequentemente  $J_{x_0}^l M$  e  $J^l M$  no lugar de  $J_{x_0}^l(M, N, \rho)$  e  $J^l(M, N, \rho)$  respectivamente.

Se  $X = \gamma_x^{-1} s$ , definiremos as aplicações  
 $\alpha: J^1 M \rightarrow N$  por  $\alpha(X) = x$  e  $\beta: J^1 M \rightarrow M$   
 por  $\beta(X) = s(x)$  e as chamaremos, respectiva-  
 mente, aplicações fonte e alvo.

No que segue, denotaremos o germe  
 $[f]$  de  $f$  operas por  $f$ .

### §. 0.3 Estrutura de Variedade em $J^1(M, N, \rho)$ .

Seja  $I_k = (i_1, \dots, i_k)$  uma k-upla ordenada  
 de inteiros de  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Se  $x = (x_1, \dots, x_n)$   
 é uma carta de  $N$ , podemos

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{I_k}} = \left( \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \right) \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_{i_k}} \right)$$

Consideremos uma carta fibrada  
 $(x, y)$  de  $(M, N, \rho)$  definida em  $U$ . Se  $X = \gamma_x^{-1} s \in \beta^{-1}(U)$   
 e  $y_\lambda = s_\lambda(x)$ ,  $\lambda = 1, \dots, m$ , é a expressão de  $s$   
 em termos da carta  $(x, y)$ , podemos

$$P_\lambda^{I_k}(X) = \frac{\partial^k}{\partial x_{I_k}} s_\lambda(x_0), \quad \text{onde } 1 \leq k \leq l.$$

É evidente que  $P_\lambda^{I_k}$  está bem definida pois  
 independe do particular representante de  $X$ ,  
 sendo portanto uma função definida em  
 $\beta^{-1}(U)$ . É claro que as funções  $P_\lambda^{I_k}$  são  
 simétricas em relação a permutações dos

índices de  $I_k$ . Seja  $R_k$  o conjunto de todos os  $k$ -uplos  $I_k$  com  $1 \leq k \leq l$ , tais que  $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k$  e seja  $n_k$  o número cardinal de  $R_k$ . É imediato que a aplicação  $\beta^{-1}(u) \rightarrow u \times \mathbb{R}^{m, n_k}$  dada por  $(\beta(x), \dots, P_\lambda^{I_k}(x))$  é bijetiva. Assim, temos aplicações  $\beta^{-1}(u) \rightarrow \mathbb{R}^{m+n} \times \mathbb{R}^{m, n_k}$  dadas por

$$x \mapsto (x, y) (\beta(x), \dots, P_\lambda^{I_k}(x) \dots)$$

e denotadas por  $(x, y, \dots, P_\lambda^{I_k}, \dots)$  cujos domínios cobrem  $J^1 M$  definidas através das cartas  $(x, y)$  de  $(M, N, P)$ . É claro que mudanças de coordenadas  $(x, y)$  acarretam mudanças nas correspondentes  $(x, y, \dots, P_\lambda^{I_k}, \dots)$  que são diferenciáveis. Assim, fica induzida através das cartas  $(x, y, \dots, P_\lambda^{I_k}, \dots)$  que denotaremos abreviadamente por  $(x, y, p)$  uma estrutura de variedade diferenciável sobre  $J^1 M$ . A carta  $(x, y, p)$  será chamada carta de  $J^1 M$  associada à carta  $(x, y)$ .

## §0.4. Fibrados Vetoriais

### Definição 0.2

Um fibrado vetorial sobre uma variedade  $X$  é uma variedade fibrada  $(E, X, \rho)$  tal que

- 1) Para todo  $x \in X$ ,  $\rho^{-1}(x) = E_x$  tem

uma estrutura de espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ .

2) Para todo  $x \in X$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $x$  e uma carta fibrada  $(\alpha, \gamma): \rho^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$  de  $(E, X, \rho)$  cuja restrição a  $E_z$ , para todo  $z \in U$  é um isomorfismo de espaço vetorial de  $E_z$  sobre  $\bar{z} \times \mathbb{R}^m$ , onde  $\bar{z}$  é a imagem de  $z$  pela carta  $(\alpha)$ .

É imediato que um fibrado vetorial é localmente trivial, a saber  $\rho^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^m$ .

Um fibrado vetorial  $(E, X, \rho)$  será representado abreviadamente por  $E$ .

Definiremos sobre  $J^1(E, X, \rho)$  uma estrutura de fibrado vetorial do seguinte modo: se  $X, Y \in J^1_x E$ , onde  $X = \frac{1}{2} f$  e  $Y = \frac{1}{2} g$ , é claro que  $a f + g$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , é ainda uma seção de  $E$ . Pomo

$$a X + Y = \frac{1}{2} (a f + g)$$

o que define uma estrutura de espaço vetorial sobre  $J^1_x E$ . Ademais, para  $x \in X$ , seja  $\rho^{-1}(U) \subset E$  o domínio da carta fibrada  $(\alpha, \gamma)$  cuja existência está assegurada por 2) da

Def. 0.2. Então, se  $\pi$  denota a projeção de  $J^1 E$  sobre  $X$ , a aplicação  $\pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times m}$

dado por  $\frac{1}{2} f \rightarrow (x, y, \dots, p_1, \dots, I_k)$

é tal que, restrita a  $J^1_z E$ , para todo  $z \in U$  é um isomorfismo de espaços vetoriais de  $J^1_z E$  sobre  $\bar{z} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m \times m}$ . Como as imagens

dessas aplicações são abertas e as mudanças correspondentes às mudanças de coordenadas em  $E$  são diferenciáveis, fica induzida uma estrutura de fibrado vetorial sobre  $J^1 E$ .

Definição 0.3 Sejam  $(E, X, \rho)$  e  $(E', X, \rho')$  fibrados vetoriais. Uma aplicação fibrada  $\phi: E \rightarrow E'$  diz-se um morfismo de fibrado vetorial se e somente se  $\phi_x$  restrita a  $E_x$  é uma aplicação linear de  $E_x$  em  $E'_x$  para todo  $x \in X$ .

Formas diferenciais

Seja  $X$  uma variedade diferenciável de dimensão  $n$ .  
 O espaço fibrado dual de  $T^*X$  é o espaço fibrado dual de  $T^*X$ , a potência simétrica  $k$ -ésima de  $T^*$ , e potenciais exteriores  $k$ -ésima de  $T^*$  e o produto tensorial de  $k$  cópias de  $T^*$  serão denotados, respectivamente, por  $\Lambda^k T^*$  e  $\otimes^k T^*$ .

Dado um fibrado vetorial  $(E, X, \rho)$ , o conjunto de germes de seções diferenciáveis de  $E$  será denotado  $\underline{E}$ . Se  $s: U \rightarrow E$  é uma seção de  $E$ , a aplicação  $f^k s: U \rightarrow \Lambda^k E$  definida por  $x \mapsto f_x^k s$  é uma seção de  $\Lambda^k E$  sobre  $U$ . A aplicação  $s \mapsto f^k s$  induz uma aplicação  $f^k: \underline{E} \rightarrow \underline{\Lambda^k E}$ .

Seja  $\mathcal{D}$  o conjunto das funções  $C^\infty$  definidas em  $X$ . É claro que um morfismo  $g: E \rightarrow E'$  de fibrados vetoriais induz uma aplicação  $\underline{g}: \underline{E} \rightarrow \underline{E'}$ ,  $\mathcal{D}$ -linear, definida por  $\underline{g}(s)(y) = g(s(y))$ ,  $s: U \rightarrow E$ ,  $y \in U$ .

De fato, sejam  $s$  e  $s'$  dois germes de seções de  $E$ , e seja  $\lambda \in \mathcal{D}$ . Então

$$\begin{aligned} \underline{g}(\lambda s + s')(y) &= g(\lambda s + s')(y) = g(\lambda s(y) + s'(y)) \\ &= \lambda g(s(y)) + g(s'(y)) = [\lambda \underline{g}(s) + \underline{g}(s')](y) \end{aligned}$$

Denotaremos, em geral, um morfismo de fibrados vetoriais e a aplicação por ele induzida nas seções pela mesma letra.



Seja  $\pi_{k-1} : \underline{J^k E} \rightarrow \underline{J^{k-1} E}$  a aplicação  
 $\mathcal{O}$ -linear definida por  $\pi_{k-1} f^k s = f^{k-1} s$ , e seja  
 $\underline{E} : \underline{S^k T^* \otimes E} \rightarrow \underline{J^k E}$  a aplicação  $\mathcal{O}$ -linear  
 definida por  

$$\underline{E}(df_1 \dots df_k \otimes s)(x) = f_x^k \left( (f_1 - f_1(x))(f_2 - f_2(x)) \dots (f_k - f_k(x))^k \right)$$
  
 onde  $f_j \in \mathcal{O}(x)$ ,  $s \in \underline{E}$

### lema I.1

A sequência

$$(1) \quad 0 \rightarrow \underline{S^k T^* \otimes E} \xrightarrow{\underline{E}} \underline{J^k E} \xrightarrow{\pi_{k-1}} \underline{J^{k-1} E} \rightarrow 0$$

é exata.

### Demonstração

Dado  $x \in X$ , seja  $(U; x_1, \dots, x_n)$  uma  
 carta local de  $X$  em torno de  $x$  tal que  $E$   
 é trivial sobre  $U$ , isto é,  $\rho^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^m$ .  
 Uma secção  $s$  de  $E$  sobre  $U$  pode então ser  
 identificada a uma função  $g$  de  $U$  em  
 $\mathbb{R}^m$ . Então, se  $z \in J_x^k E$ ,  $z$  pode ser  
 considerado como uma classe de equivalência  
 de funções a valores em  $\mathbb{R}^m$ , donde  $z$  contém  
 um único polinômio  $P$  de grau  $\leq k$  nas  
 coordenadas. Se  $I = (i_1, \dots, i_n)$  é uma  $n$ -upla  
 de inteiros não negativos e  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  
 designaremos  $x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n}$  por  $x^I$  e

$$\frac{\partial^{|I|} f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} \quad \text{onde } |I| = i_1 + \dots + i_n \quad \text{por } \frac{\partial^I f}{\partial x^I}$$

Com esta notação,  $P$  se escreve por

$$y \mapsto \sum_{|i| \leq k} (y_1 - x_1)^{i_1} \cdots (y_m - x_m)^{i_m} a_i = \sum_{|i| \leq k} (y-x)^i a_i \text{ onde}$$

$a_i \in \mathbb{R}^m$ . Posto isto, escreveremos, por abuso de notação,  $y = \sum_{|i| \leq k} (y_i - x_i)^i a_i$ ,  $a_i \in \mathbb{R}^m$ . Uma secção

de  $T^k E$  será então dada por uma aplicação que leva  $x \in U \subset X$  no polinómio  $y \mapsto \sum_{|i| \leq k} (y-x)^i a_i(x)$  onde  $a_i(x)$  são funções diferenciáveis de  $x$  e valores em  $\mathbb{R}^m$ . É claro que

$$\prod_{k-1} \left( \sum_{|i| \leq k} (y-x)^i a_i(x) \right) = \sum_{|i| \leq k-1} (y-x)^i a_i(x)$$

donde resulta que (1) é exata em  $T^{k-1} E$ .

Ademais, se  $s$  é uma secção de  $E$  sobre  $U$ , pelo teorema de Taylor, temos

$$\frac{\partial^k s}{\partial x^i} = \sum_{|i| \leq k} (y-x)^i \frac{1}{|i|!} \frac{\partial^i s}{\partial x^i}(x)$$

Então, se  $|l| = k$  e  $f$  é uma secção de  $E$  sobre  $U$ ,

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}(dx^l \otimes f)(x) &= \frac{\partial^k}{\partial x^l} \left( (y-x)^l f(y) \right) \\ &= \sum_{|i| \leq k} (y-x)^i \frac{1}{|i|!} \left( \frac{\partial^i}{\partial y^i} \left[ (y-x)^l f(y) \right] \Big|_x \right) \\ &= (y-x)^l f(x). \end{aligned}$$

Orá, como  $a_i(x)$  são funções diferenciáveis de  $x$  a valores em  $\mathbb{R}^m$ , identificam-se a secção de  $E$ , logo  $\underline{\varepsilon} \left( \sum_{|i| \leq k} dx^i \otimes a_i(x) \right) = \sum_{|i| \leq k} (y-x)^i a_i(x)$

o que termina a demonstração da validade de (4).

Seja  $E : S^k T^* \otimes E \rightarrow J^k E$  definida por

$$E(df_1, \dots, df_k \otimes z) = \underline{E}(df_1, \dots, df_k \otimes s)(x)$$

onde  $x = p(z)$  e  $s$  é uma secção de  $E$  tal que  $s(x) = z$ . A demonstração do lema I, 1 mostra que  $E$  está bem definida. Ademais, vale o

lema I.1.1.

A sequência

$$0 \rightarrow S^k T^* \otimes E \xrightarrow{E} J^k E \xrightarrow{\pi_{k-1}^*} J^{k-1} E \rightarrow 0$$

é exata.

Se  $F$  é outro fibrado vetorial sobre  $X$  e se  $\varphi : J^k E \rightarrow F$  é um morfismo de fibrados vetoriais, chamaremos símbolo de  $\varphi$  a composição  $\varphi \circ E : S^k T^* \otimes E \rightarrow F$  que denotaremos  $\sigma(\varphi)$ .

Definição I.1.

Sejam  $E$  e  $F$  fibrados vetoriais sobre  $X$ . Um operador diferencial de  $E$  para  $F$  de ordem  $k$  é uma aplicação de  $\underline{E}$  em  $\underline{F}$  da forma  $\underline{\varphi} \circ j^k$  onde  $\underline{\varphi} : \underline{J^k E} \rightarrow \underline{F}$  é a aplicação induzida nas secções por um morfismo  $\varphi : J^k E \rightarrow F$ .

Definição I.2

Sejam  $E$  e  $F$  dois fibrados vetoriais,  $\varphi : J^k E \rightarrow F$  um morfismo de fibrados vetoriais e  $X \in J^{k+l} E$ , onde  $X = j_x \sigma$ . Chamaremos prolongado de  $\varphi$  o morfismo  $p^l \varphi : J^{k+l} E \rightarrow J^l F$

definido por  $p^l \varphi(X) = j_0^l (\varphi \circ j^k \sigma)$

É claro que  $p^l \varphi$  está bem definido, isto é independente da  $\sigma$  escolhida. Ademais, é fácil ver que  $p^l \varphi$  é um morfismo de fibrados vetoriais, pois preserva as fibras, sendo linear nas mesmas. De fato, se  $X_i = j_{x_0}^{k+l} \sigma_i$ ,  $\sigma_i: U \rightarrow E$   $i=1,2,\dots$

é  $\varphi \circ (j^k \sigma_1 + j^k \sigma_2) = \varphi \circ j^k \sigma_1 + \varphi \circ j^k \sigma_2$ , pois se  $x \in U$

$$\begin{aligned} \varphi \circ (j^k \sigma_1 + j^k \sigma_2)(x) &= \varphi(j_x^k \sigma_1 + j_x^k \sigma_2) \\ &= \varphi j_x^k \sigma_1 + \varphi j_x^k \sigma_2 \\ &= (\varphi \circ j^k \sigma_1)(x) + (\varphi \circ j^k \sigma_2)(x) \end{aligned}$$

desde que  $\varphi$  é um morfismo de fibrados vetoriais

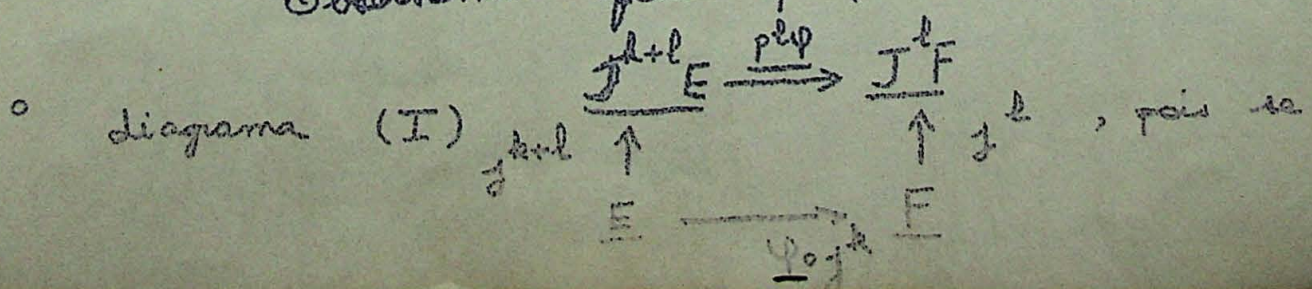
Então,  
$$\begin{aligned} p^l \varphi(X_1 + X_2) &= j_{x_0}^l (\varphi \circ j^k (\sigma_1 + \sigma_2)) = j_{x_0}^l (\varphi \circ (j^k \sigma_1 + j^k \sigma_2)) \\ &= j_{x_0}^l (\varphi j^k \sigma_1 + \varphi j^k \sigma_2) = p^l \varphi(X_1) + p^l \varphi(X_2) \end{aligned}$$

Em particular, o prolongamento da identidade de  $J^k E$  é um monomorfismo de fibrados vetoriais  $p^l I: J^{k+l} E \rightarrow J^l(J^k E)$ . De fato, se

$X \in J_{x_0}^{k+l} E$ ,  $p^l I(X) = j_{x_0}^l (I \circ j^k \sigma) = j_{x_0}^l j^k \sigma$ .

Então, se  $p^l I(X) = 0$ , o valor de  $\sigma$  e todas as suas derivadas até a ordem  $k$  em  $x_0$  são nulos bem como o valor das derivadas deitas até a ordem  $l$ , donde resulta  $X = 0$ .

Observamos que  $p^l \varphi$  torna comutativo



$\sigma: U \rightarrow E$  é uma secção de  $E$ , para todo  $x \in U$ ,  
temos  $\underline{p^l \psi} \circ j^{k+l} \sigma(x) = p^l \psi(j_x^{k+l} \sigma) = j_x^l (\underline{p^l \psi} \circ j^k \sigma)(x)$

O morfismo  $\psi: J^k E \rightarrow F$  induz também  
um morfismo  $j^l \psi: J^l(J^k E) \rightarrow J^l F$ :

### Definição I.3.

A  $X \in J^l(J^k E)$ ,  $X = j_x^l \sigma$  onde  $\sigma: U \rightarrow J^k E$   
é uma secção, fazemos corresponder  $j^l \psi(X) = j_x^l (\underline{p^l \psi} \circ \sigma)$

O morfismo  $j^l \psi$  está bem definido e  
torna comutativo o diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} J^l(J^k E) & \xrightarrow{j^l \psi} & J^l F \\ \uparrow j^l & & \uparrow j^l \\ J^k E & \xrightarrow{\psi} & F \end{array}$$

### Observação I.1

Consideremos  $J^{k+l} E$  identificado com sua  
imagem por  $p^l I$ . Então  $j^l \psi / J^{k+l} E$  coincide com  $p^l \psi$

De fato, se  $X \in J^{k+l} E$ ,  $X = j_x^{k+l} \sigma$ ,  $\sigma: U \rightarrow E$

temos:

$$\begin{aligned} \underline{j^l \psi} \circ p^l I (j_x^{k+l} \sigma)(x) &= j^l \psi \circ p^l I X = j^l \psi(j_x^l j^k \sigma) \\ &= j_x^l (\underline{p^l \psi} \circ j^k \sigma) = j_x^l (\underline{p^l \psi} \circ j^k \sigma)(x) \end{aligned}$$

Como  $p^l \psi$  é o único morfismo que torna o  
diagrama I comutativo, resulta  $\underline{j^l \psi} \circ p^l I = p^l \psi$ ,  
isto é,  $p^l \psi$  coincide com  $j^l \psi$  restrito aos elementos  
de  $J^l(J^k E)$  que são imagens de elementos de  
 $J^{k+l} E$  pelo morfismo  $p^l I$ .

Proposição I.2

O símbolo de  $f^l \psi$  é a composição

$$S^l T^* \otimes J^k E \xrightarrow{I \otimes \psi} S^l T^* \otimes F \xrightarrow{\epsilon} J^l F.$$

De fato, resulta das definições de  $\epsilon$  e de  $f^l \psi$  que o diagrama abaixo é comutativo;

$$\begin{array}{ccc} S^l T^* \otimes J^k E & \xrightarrow{I \otimes \psi} & S^l T^* \otimes F \\ \epsilon \downarrow & & \downarrow \epsilon \\ J^l(J^k E) & \xrightarrow{f^l \psi} & J^l F \end{array}$$

isto é, o símbolo de  $f^l \psi$  que definimos como  $f^l \psi \circ \epsilon$  é a composição  $\epsilon \circ I \otimes \psi$ .

Lema I.2

Para  $l \geq 1$ , o diagrama abaixo é exato e comutativo.

$$\begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^{k+l} T^* \otimes E & \xrightarrow{f^l \psi} & S^l T^* \otimes F \\ \epsilon \downarrow & & \downarrow \epsilon \\ J^{k+l} E & \xrightarrow{f^l \psi} & J^l F \\ \pi_{k+l-1} \downarrow & & \downarrow \pi_{l-1} \\ J^{k+l-1} E & \xrightarrow{f^{l-1} \psi} & J^{l-1} F \\ \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & 0 \end{array}$$

De fato, pelo lema I.1.1, as duas seqüências verticais são exatas. Ademais, o quadrado  $A$  é comutativo, pois se  $f_x^{k+l} \sigma \in J^{k+l} E$ , temos

$$\begin{aligned} \pi_{l-1} \circ f^l \psi (f_x^{k+l} \sigma) &= \pi_{l-1} f_x^l \psi \circ f_x^k \sigma = f_x^{l-1} \psi \circ f_x^k \sigma = \\ &= f_x^{l-1} \psi f_x^{k+l-1} \sigma = f_x^{l-1} \psi \circ \pi_{k+l-1} f_x^{k+l} \sigma \end{aligned}$$

A exatidão e comutatividade do diagrama anterior permite definir a aplicação  $\sigma^l \psi: S^{k+l} T^* \otimes E \rightarrow S^l T^* \otimes E$  para  $l \geq 1$ , pondo  $\sigma^l \psi = \rho^l \psi \circ \epsilon$ . De fato, se  $z \in S^{k+l} T^* \otimes E$

$$\pi_{l-1}^* \circ \rho^l \psi \circ \epsilon(z) = \rho^{l-1} \psi \circ \pi_{k+l-1}^* \circ \epsilon(z) = 0. \text{ Ent\~{a}o } \rho^l \psi \circ \epsilon(z)$$

pertence ao n\u00favelo de  $\pi_{l-1}^*$  o qual coincide com a imagem de  $S^l T^* \otimes E$  pelo monomorfismo  $\epsilon$ , o que mostra que  $\sigma^l \psi$  pode ser considerada como uma aplica\u00e7\u00e3o a valores em  $S^l T^* \otimes E$ .

Por defini\u00e7\u00e3o,  $\sigma^0 \psi = \sigma(\psi)$ .

#### Defini\u00e7\u00e3o I.4

Um sistema linear de equa\u00e7\u00f5es diferenciais  $R^k$  de ordem  $k$  sobre  $E$  \u00e9 um sub-fibrado vetorial de  $J^k E$ . Uma solu\u00e7\u00e3o de  $R^k$  \u00e9 uma se\u00e7\u00e3o  $\sigma$  de  $E$  sobre um aberto  $U \subset X$  tal que  $j_x^k \sigma \in R^k$ , para todo  $x \in U$ .

#### Defini\u00e7\u00e3o I.5

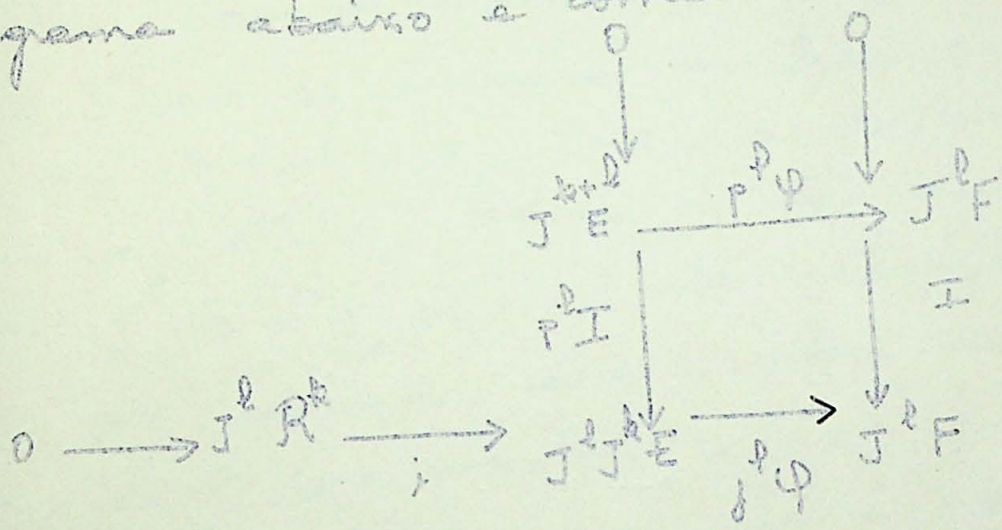
O prolongamento de ordem  $l$  de  $R^k$  \u00e9 o conjunto  $R^{k+l} = J^l R^k \cap J^{k+l} E$  onde  $J^l R^k$  e  $J^{k+l} E$  s\u00e3o considerados como sub-conjuntos de  $J^l(J^k E)$ .

Se  $F$  \u00e9 um fibrado vetorial sobre  $X$  e se  $\psi: J^k E \rightarrow F$  \u00e9 um morfismo de fibrados vetoriais tal que  $\ker \psi = R^k$ , dizemos que  $R^k$  \u00e9 o sistema de equa\u00e7\u00f5es diferenciais associado ao operador diferencial  $\psi \circ j^k: E \rightarrow F$ . \u00c9 f\u00e1cil ver que sempre existem  $F$  e  $\psi$  nas condi\u00e7\u00f5es acima.

lema I.3.

Seja  $\varphi: J^k E \rightarrow F$  um morfismo de fibrados vetoriais cujo núcleo é o sub-fibrado  $R^k$ . Então  $R^{k+l}$  é o núcleo de  $p^l \varphi$ .

Demonstração:  
 Resulta da observação I-1 que o diagrama abaixo é comutativo.



Ademais, a sequência horizontal é exata. Com efeito, seja  $y \in J^l R^k$ , isto é,  $y = j_x^l \sigma$  onde  $\sigma: U \rightarrow R^k$  é uma seção. Então  $j^l \varphi y = j_x^l \varphi \circ \sigma = 0$  pois é o jato de uma seção constantemente nula, desde que  $R^k$  é o núcleo de  $\varphi$ . Concluímos que  $j^l \varphi y = 0$  para  $y \in J^l R^k$ . Mostraremos que  $\ker j^l \varphi \subset j^l R^k$ , utilizando coordenadas. De fato, como  $R^k$  é um sub-fibrado de  $J^k E$ , podemos escolher coordenadas  $y^1, \dots, y^s$  em  $J^k E$  tais que  $R^k$  seja definido por  $y^{q+1} = 0, \dots, y^s = 0$ , onde  $q$  é a dimensão da fibra de  $R^k$ . Seja  $y \in \ker j^l \varphi$ ,  $y = j_x^l \sigma$ , onde  $\sigma: U \rightarrow J^k E$  é definido pelas equações  $y^i = y^i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $1 \leq i \leq s$ . Temos



$\int_a^b \Psi = \int_a^b \Psi \circ \sigma = 0$ , isto é,  $\Psi(\sigma(x)) = 0$  e as derivadas de  $\Psi \circ \sigma$  são nulas até a ordem  $l$  em  $x$ .

Construimos uma seção  $\alpha: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ ,  $\alpha = (\alpha^1, \dots, \alpha^q, 0, \dots, 0)$  tal que  $\alpha(x) = \sigma(x)$  e as derivadas até a ordem  $l$  de  $\alpha^i$ ,  $1 \leq i \leq q$ , coincidem com as derivadas correspondentes de

seção  $\sigma$  em  $x$ . Devemos mostrar que, para todo  $k$ ,  $q < k \leq s$ , todas as derivadas de  $y^k$  em  $x$  até a ordem  $l$  são nulas donde teremos  $\int_x^t \sigma = \int_x^t \alpha$ . A demonstração será feita por indução sobre a ordem das derivadas parciais de  $y^k$ . Ora como  $\Psi(y^1(x_1, \dots, x_n), \dots, y^q(x_1, \dots, x_n), 0, \dots, 0) = 0$  identicamente, segue que para  $k \in \{1, \dots, q\}$  fixado,  $\sum_{i=q+1}^s \frac{\partial \Psi_i}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x_n} = 0$  em  $x$ . Como o posto de  $(\frac{\partial \Psi_i}{\partial y^k})$  é  $s-q$ , existe um menor de  $(\frac{\partial \Psi_i}{\partial y^k})$  cujo determinante é não nulo. Resulta então que  $\frac{\partial y^k}{\partial x_n} = 0$  em  $x$ ,  $q+1 \leq k \leq s$ . Supondamos agora que todas as derivadas de  $y^k$ ,  $q+1 \leq k \leq s$ , até a ordem  $j-1$  sejam nulas e provemos que são nulas também as de ordem  $j$ . Pela hipótese de indução, nas derivadas de ordem  $j$

de  $y^k$ ,  $q+1 \leq k \leq s$ , até a ordem  $j-1$  são nulas e provemos que são nulas também as de ordem  $j$ . Pela hipótese de indução, nas derivadas de ordem  $j$

de  $\psi_i(y^1(x_1, \dots, x_n), \dots, y^l(x_1, \dots, x_n))$  restam apenas somas da forma  $\sum_{k=q+1}^l \frac{\partial \psi_i}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_q}}$ , donde, como acima, resulta  $\frac{\partial y^k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_q}} = 0$ , o que

termina a demonstração da exatidão da seqüência. Mostremos que  $\ker p^l \psi \subset \mathbb{R}^{k+l}$ . Seja  $\xi \in \mathbb{R}^{k+l}$  tal que  $p^l \psi(\xi) = 0$ . Pela comutatividade do diagrama da pg 20, resulta  $p^l \psi \circ p^l I(\xi) = 0$ , isto é,  $p^l \psi \circ p^l I(\xi) = 0$ , e

pela exatidão da seqüência segue que  $p^l I(\xi) \in \mathbb{R}^k$ . Então  $p^l I(\xi) = p^l \xi \in \mathbb{R}^k$ , isto é,  $\xi \in \mathbb{R}^{k+l}$ , o que prova que  $\ker p^l \psi \subset \mathbb{R}^{k+l}$ . Por outro lado, seja  $X \in \mathbb{R}^{k+l}$ , onde  $X = p^l \xi$ .

Como  $\psi \circ \sigma(y) = \psi(\sigma(y)) = 0$  para todo  $y \in U$  pois  $\sigma(y) \in \mathbb{R}^k$ , resulta que  $p^l \psi(X) = p^l (\psi \circ \sigma) = 0$ , isto é,  $X \in \ker p^l \psi$ , donde  $\mathbb{R}^{k+l} \subset \ker p^l \psi$  o que termina a prova do lema.

Porém, por definição,  $\mathbb{R}^{k+l} = \mathbb{J}^{k+l} E$ ,  $1 \leq l \leq k$

Seja  $g^{k+l} \subset S^{k+l} T^* \otimes E$  o núcleo de  $\pi_{k+l-1} : \mathbb{R}^{k+l} \rightarrow \mathbb{R}^{k+l-1}$  de modo que temos a seqüência exata  $0 \rightarrow g^{k+l} \rightarrow \mathbb{R}^{k+l} \rightarrow \mathbb{R}^{k+l-1}$  para  $1 \leq l \leq k$ . Porém, por definição,  $g^{k+l} = S^{k+l} T^* \otimes E$  para  $1 \leq l \leq k$

Chamaremos  $g^k$  o símbolo da equação  $R^k$ .  
 Observamos que  $R^{k+l}$ ,  $l \geq 1$  e  $g^{k+l}$ ,  $l \geq 0$ , não  
 são necessariamente fibrados vetoriais, mas  
 famílias de espaços vetoriais.

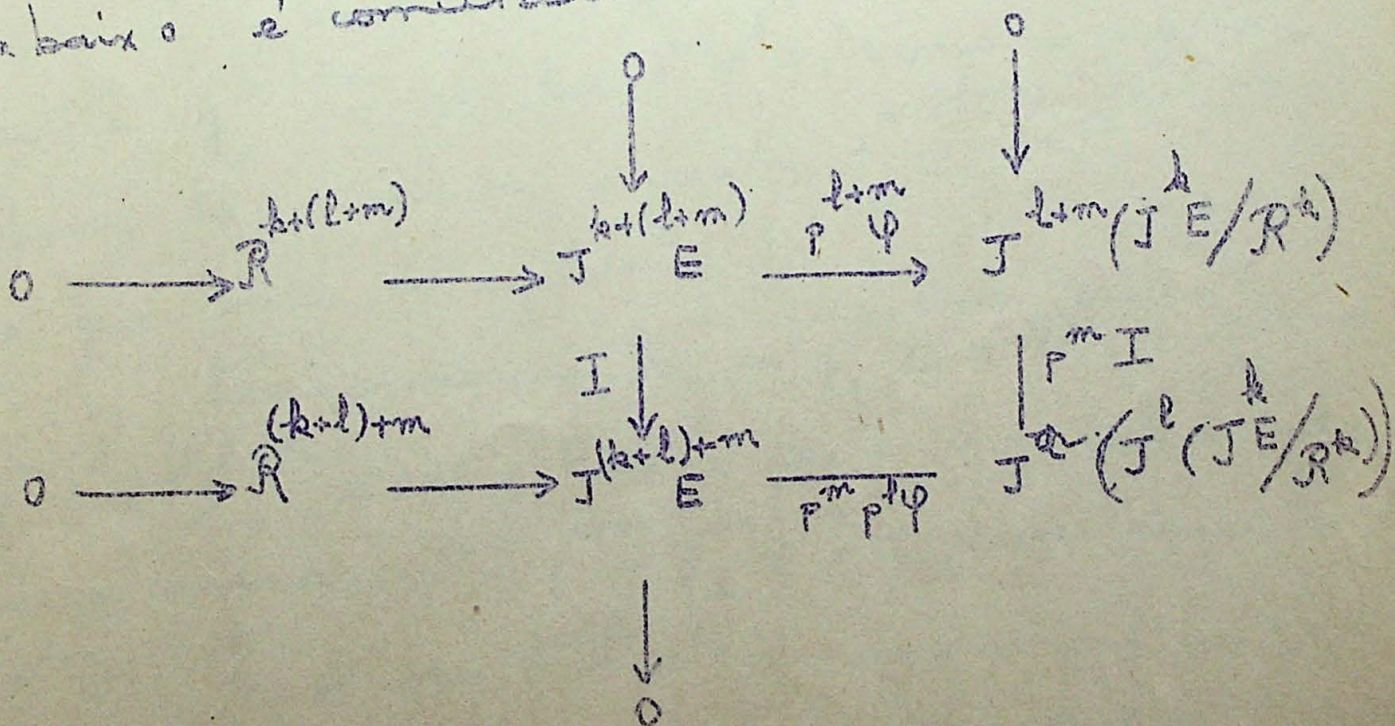
lema I. 4

Seja  $R^k \subset J^k E$  uma equação e derivadas  
 parciais de ordem  $k$  sobre  $E$ . Se  $R^{k+l}$  é um  
 sub-fibrado vetorial de  $J^{k+l} E$ , então  
 $R^{(k+l)+m} = R^{k+(l+m)}$

isto é, o prolongamento de ordem  $m$  de equação  
 $R^{k+l}$  é o prolongamento de ordem  $(l+m)$  da  
 equação  $R^k$ .

Demonstração

Seja  $\psi$  a projeção canônica de  $J^k E$   
 sobre  $J^k E / R^k$ . Verificaremos que o diagrama  
 abaixo é comutativo e exato.



De fato, se  $f_x \in J_x^{k+l+m} \in J_x^{k+l+m}$ , temos:

$$p^m I \circ p^l \Psi (f_x \in J_x^{k+l+m}) = p^m I (f_x^{k+l+m} \Psi \circ f^k \in J_x^{k+l+m}) = \frac{1}{dx} \frac{1}{dy} (\Psi \circ f^k \in J_x^k)$$

Por outro lado,

$$p^m (p^l \Psi (f_x \in J_x^{k+l+m})) = \frac{1}{dx} (p^l \Psi (f_x^{k+l+m} \in J_x^{k+l+m})) =$$

$$\frac{1}{dx} \Psi (f_x^{k+l+m} \in J_x^{k+l+m}) \text{ e } \frac{1}{dy} \Psi (f_y^{k+l} \in J_y^{k+l}) \text{ pois}$$

$$\frac{1}{dx} \Psi (f_x^{k+l+m} \in J_x^{k+l+m}) = \frac{1}{dy} \Psi (f_y^{k+l} \in J_y^{k+l}) = \frac{1}{dy} (\Psi \circ f^k \in J_x^k) = \frac{1}{dy} (\Psi \circ f^k \in J_x^k)(y)$$

resulta que  $p^m p^l \Psi (f_x \in J_x^{k+l+m}) = \frac{1}{dx} \frac{1}{dy} (\Psi \circ f^k \in J_x^k)$ , isto é, o diagrama é comutativo.

Mostraremos inicialmente que  $R^{k+l+m} \subset R^{k+l+m}$

Com efeito, se  $f_x \in J_x^{k+l+m} \in R^{k+l+m}$ , vale  $p^l \Psi (f_x \in J_x^{k+l+m}) = 0$ . Segue da comutatividade do diagrama da pg 23 que  $p^m p^l \Psi (f_x \in J_x^{k+l+m}) = 0$ , isto é,  $f_x \in J_x^{k+l+m} \in \ker p^m p^l \Psi$ . Como a segunda linha do diagrama é exata,  $f_x \in J_x^{k+l+m} \in R^{k+l+m}$  o que prova a inclusão.

Reciprocamente, se  $f_x \in J_x^{(k+l)+m} \in R^{(k+l)+m}$ , temos

$p^m p^l \Psi (f_x \in J_x^{(k+l)+m}) = 0$ . Então, pela comutatividade do diagrama,  $p^m I p^l \Psi (f_x \in J_x^{(k+l)+m}) = 0$ , donde resulta

$p^l \Psi (f_x \in J_x^{(k+l)+m}) = 0$  pois  $p^m I$  é um monomorfismo.

Então  $f_x \in J_x^{k+l+m} \in R^{k+l+m}$  o que prova que  $R^{k+l+m} \subset R^{k+l+m}$ .

## Definição I.6

Dizemos que um sistema de equações diferenciais  $R^k \subset J^k E$  é formalmente integrável se  $R^{k+l}$  é um fibrado vetorial e  $\pi_{k+l} : R^{k+l+1} \rightarrow R^{k+l}$  é um epimorfismo para todo  $l \geq 0$ .

## II. A cohomologia de Spencer.

Seja  $\eta: S^n T^* \rightarrow T^* \otimes S^{n-1} T^*$  a aplicação composta da inclusão natural de  $S^n T^*$  em  $\otimes^n T^* = T^* \otimes \otimes^{n-1} T^*$  e a aplicação de  $T^* \otimes \otimes^{n-1} T^*$  em  $T^* \otimes S^{n-1} T^*$  induzida pela projeção natural de  $\otimes^{n-1} T^*$  em  $S^{n-1} T^*$ , isto é,

$$\mu_1 \dots \mu_n \rightarrow \sum_{\sigma} \mu_{\sigma(1)} \dots \mu_{\sigma(n)} \rightarrow \sum_{k=1}^n \mu_k \otimes \mu_1 \dots \hat{\mu}_k \dots \mu_n$$

Extendemos  $\eta$  a um morfismo de fibrados vetoriais

$$\delta: \wedge^j T^* \otimes S^n T^* \rightarrow \wedge^{j+1} T^* \otimes S^{n-1} T^*$$

por  $\delta(w \otimes \mu) = (-1)^j w \wedge \eta(\mu)$ . Explicitamente,  
 $\delta(\mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_j \otimes y_1 \dots y_n) = (-1)^j \sum_{k=1}^n \mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_j \wedge y_k \otimes y_1 \dots \hat{y}_k \dots y_n$

É fácil ver que  $\delta^2 = 0$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} \delta^2(\mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_j \otimes y_1 \dots y_n) &= (-1)^j \delta \sum_{k=1}^n \mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_j \wedge y_k \otimes y_1 \dots \hat{y}_k \dots y_n \\ &= (-1)^j \sum_{k=1}^n (-1)^{j+1} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^n \mu_1 \wedge \dots \wedge \mu_j \wedge y_k \wedge y_l \otimes y_1 \dots \hat{y}_k \dots \hat{y}_l \dots y_n = 0 \end{aligned}$$

Podemos então considerar o complexo

$$(1) \quad 0 \rightarrow S^m T^* \xrightarrow{\delta} T^* \otimes S^{m-1} T^* \xrightarrow{\delta^2} \wedge^2 T^* \otimes S^{m-2} T^* \rightarrow \dots \rightarrow \wedge^n T^* \otimes S^m T^* \rightarrow 0$$

Lema II.1

© complexo (1) é uma sequência exata para  $m \geq 1$ , onde  $S^l T^* = 0$  se  $l < 0$ .

Demonstração: Seja  $h_{j-1} : V^l T^* \otimes S^l T^* \rightarrow V^{l+1} T^* \otimes S^{l+1} T^*$

onde  $n = m - j$ , definida por

$$h_{j-1}(m_1 v_1 \dots m_j v_j \otimes y_1 \dots y_n) = \sum_{i=1}^{j-1} m_i v_i \dots m_j v_j \otimes m_{i+1} v_{i+1} \dots m_j v_j \otimes y_1 \dots y_n$$

Matrizes inicialmente que

$$h_j \circ \delta + \delta \circ h_{j-1} = K I$$

onde  $K$  é uma constante nula e a aplicação idêntica de  $V^l T^* \otimes S^l T^* \rightarrow V^l T^* \otimes S^l T^*$ ,

$$h_j \delta(m_1 v_1 \dots m_j v_j \otimes y_1 \dots y_n) - h_j(y_1 \dots y_n) = \sum_{i=1}^{j-1} m_i v_i \dots m_j v_j \otimes y_1 \dots y_n \otimes y_{i+1} \dots y_n$$

$$= (-1)^j \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{k=1}^{n-i} m_i v_i \dots m_j v_j \otimes m_k y_k \otimes y_1 \dots y_{k-1} \otimes y_{k+1} \dots y_n +$$

$$+ (-1)^j \sum_{i=1}^{j-1} m_i v_i \dots m_j v_j \otimes y_1 \dots y_{i-1} \otimes y_{i+1} \dots y_n =$$

$$= (-1)^j \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{k=1}^{n-i} m_i v_i \dots m_j v_j \otimes m_k y_k \otimes y_1 \dots y_{k-1} \otimes y_{k+1} \dots y_n +$$

$$+ (-1)^j m_1 v_1 \dots m_j v_j \otimes y_1 \dots y_n$$

Por outro lado,

$$\delta \circ h_{j-1}(m_1 v_1 \dots m_j v_j \otimes y_1 \dots y_n) = \delta \left( \sum_{i=1}^{j-1} m_i v_i \dots m_j v_j \otimes y_1 \dots y_n \otimes y_{i+1} \dots y_n \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{k=1}^{n-i} m_i v_i \dots m_j v_j \otimes y_1 \dots y_{k-1} \otimes y_{k+1} \dots y_n \otimes y_{i+1} \dots y_n +$$

$$+ \sum_{i=1}^{j-1} m_i v_i \dots m_j v_j \otimes y_1 \dots y_{i-1} \otimes y_{i+1} \dots y_n \otimes y_{i+1} \dots y_n$$

$$= \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{k=1}^{n-i} m_i v_i \dots m_j v_j \otimes y_1 \dots y_{k-1} \otimes y_{k+1} \dots y_n \otimes y_{i+1} \dots y_n +$$

$$+ \sum_{i=1}^{j-1} m_i v_i \dots m_j v_j \otimes y_1 \dots y_{i-1} \otimes y_{i+1} \dots y_n \otimes y_{i+1} \dots y_n$$

Resultado, somando membro a membro as expressões de  $h_j \circ \delta$  e  $\delta \circ h_{j-1}$  que  $h_j \circ \delta + \delta \circ h_{j-1} = K I$ .

Mostramos agora que (1) é exata em  $\Lambda^j T^* \otimes S^{m-j} T^*$ ,  $0 \leq j \leq n$ , isto é,  $\ker \delta_{j+1} = \text{im } \delta_j$  em

$$\dots \Lambda^{j-1} T^* \otimes S^{m-j+1} T^* \xrightarrow{\delta_j} \Lambda^j T^* \otimes S^{m-j} T^* \xrightarrow{\delta_{j+1}} \Lambda^{j+1} T^* \otimes S^{m-j-1} T^* \dots$$

$\xleftarrow{h_{j-1}} \qquad \qquad \qquad \xleftarrow{h_j}$

Com efeito, seja  $x \in \Lambda^j T^* \otimes S^{m-j} T^*$  tal que  $x \in \ker \delta_{j+1}$ .

Então de  $h_j \circ \delta_{j+1} + \delta_j \circ h_{j-1} = K I$  resulta que  $\delta_j \circ h_{j-1} \left( \frac{x}{K} \right) = x$ , onde  $\delta_j \circ h_{j-1} \left( \frac{x}{K} \right) = K x$ . Logo  $\delta_j \circ h_{j-1} \left( \frac{x}{K} \right) = x$ , onde

$h_{j-1} \left( \frac{x}{K} \right) \in \Lambda^{j-1} T^* \otimes S^{m-j+1} T^*$ , isto é,  $x \in \text{im } \delta_j$ . Então  $\ker \delta_{j+1} \subset \text{im } \delta_j$ . Por outro lado vimos que  $\delta_{j+1} \delta_j = 0$ ,

isto é,  $\text{im } \delta_j \subset \ker \delta_{j+1}$  donde resulta que a sequência (1) é exata, para  $m \geq 1$ .

lema II. 2

O diagrama seguinte é comutativo.

$$\begin{array}{ccccc}
 S^{k+1} T^* \otimes E & \xrightarrow{\eta \times I_E} & T^* \otimes S^k T^* \otimes E & \xrightarrow{I_T \otimes E} & T^* \otimes J^k E \\
 \downarrow & & & & \downarrow \\
 J^{k+1} E & & & & J^1 (J^k E) \\
 & \xrightarrow{P^1 I} & & & 
 \end{array}$$

Demonstração:

Se  $u_1, \dots, u_{k+1} \otimes z \in S^{k+1} T^* \otimes E$ ,



$$I_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathcal{E} \circ (\eta \otimes I_{\mathcal{E}}) (u_1, \dots, u_{k+1} \otimes z) =$$

$$I_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathcal{E} \left( \sum_{j=1}^{k+1} u_j \otimes u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_{k+1} \otimes z \right) = \sum_{j=1}^{k+1} u_j \otimes f_x^k (f_1, \dots, \hat{f}_j, \dots, f_{k+1}) \hat{f}_j \otimes z$$

com  $\sigma(x) = z$  e  $u_i = df_i$ ,  $f_i(x) = 0$ , e

$$\mathcal{E} \left( \sum_{j=1}^{k+1} u_j \otimes f_x^k (f_1, \dots, \hat{f}_j, \dots, f_{k+1}) \hat{f}_j \otimes z \right) = \sum_{j=1}^{k+1} f_x^k (f_1, \dots, \hat{f}_j, \dots, f_{k+1}) \hat{f}_j \otimes z$$

Por outro lado,

$$p^* I_0 \mathcal{E} (u_1, \dots, u_{k+1} \otimes z) = p^* I \left( f_x^{k+1} f_1, \dots, f_{k+1} \otimes z \right)$$

$$= f_x^k f_1, \dots, f_{k+1} \otimes z$$

Ora,  $f_x^k f_1, \dots, f_{k+1} \otimes z$  é expressa por funções cujas derivadas se anulam em  $x$  salvo as funções  $\sum_{j=1}^{k+1} \frac{\partial f_j(y)}{\partial y_{i_k}} \dots f_j(y), \dots, \frac{\partial f_{k+1}(y)}{\partial y_{i_k}} \otimes z(y)$

cujas derivadas em  $x$  são

$$\sum_{j=1}^{k+1} \frac{\partial f_j}{\partial y_{i_k}} \Big|_x \dots \frac{\partial f_j}{\partial y_{i_k}} \Big|_x \dots \frac{\partial f_{k+1}}{\partial y_{i_k}} \Big|_x \otimes z(x) \text{ que}$$

coincidem com as consideradas nas nulas de

$$\sum_{j=1}^{k+1} f_x^k (f_1, \dots, \hat{f}_j, \dots, f_{k+1}) \hat{f}_j \otimes z.$$

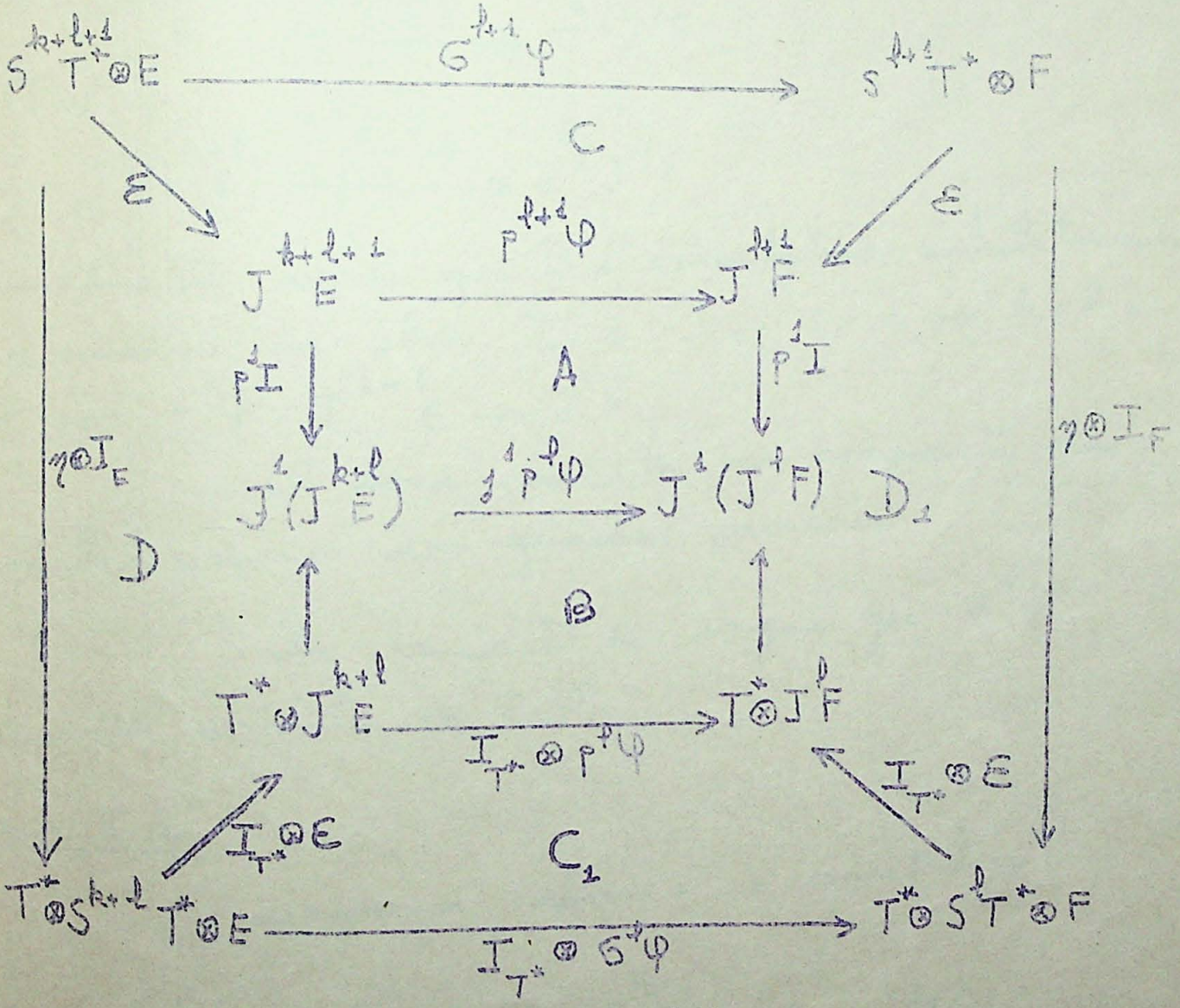
### lema II.2

Se  $F$  é um fibrado vetorial sobre  $X$  e  $\Psi: J^k E \rightarrow F$  é um morfismo de fibrados vetoriais, então o diagrama seguinte é comutativo.

$$\begin{array}{ccc}
 S^{\frac{k+l+1}{T^*}} \otimes E & \xrightarrow{\sigma^{\frac{l+1}{\psi}}} & S^{\frac{l+1}{T^*}} \otimes F \\
 \eta \otimes I_E \downarrow & & \downarrow \eta \otimes I_F \\
 T^* \otimes S^{\frac{k+l}{T^*}} \otimes E & \xrightarrow{I_{T^*} \otimes \sigma^{\frac{l}{\psi}}} & T^* \otimes S^{\frac{l}{T^*}} \otimes F
 \end{array}$$

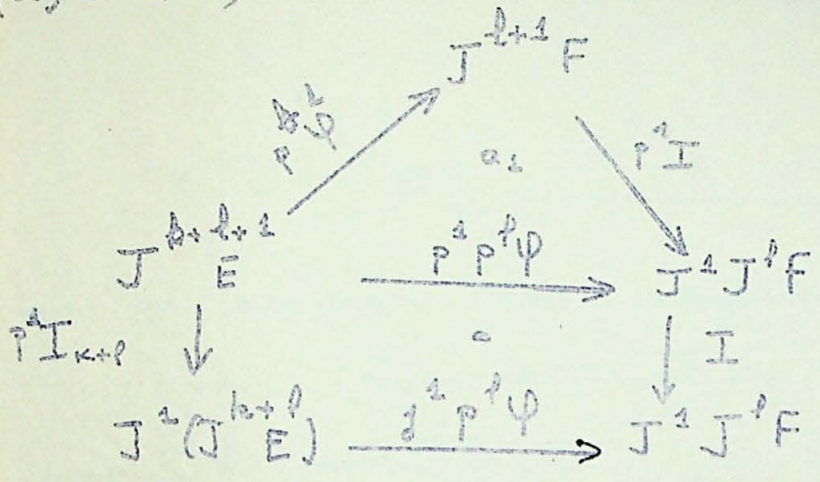
Demonstração

Consideremos o diagrama seguinte



no qual provaremos a comutatividade de seus quadros parciais. De fato, os quadros D e D<sub>1</sub> são comutativos pelo Lema II.1. A comutatividade do quadro A verifica-se do modo seguinte: deca da Obs. I.1 onde se substitui l por 1, k por k+l e  $\psi$  por  $\frac{l}{\psi}$ :  $J^{\frac{k+l}{E}} \rightarrow J^{l+1}F$  segue a comuta

tividade do quadro (a) do diagrama abaixo. Ademais fazendo  $m=1$  no quadro do lema I.4, obtemos o quadro comutativo (a<sub>1</sub>). Da comutatividade de (a) e (a<sub>1</sub>) resulta a de A



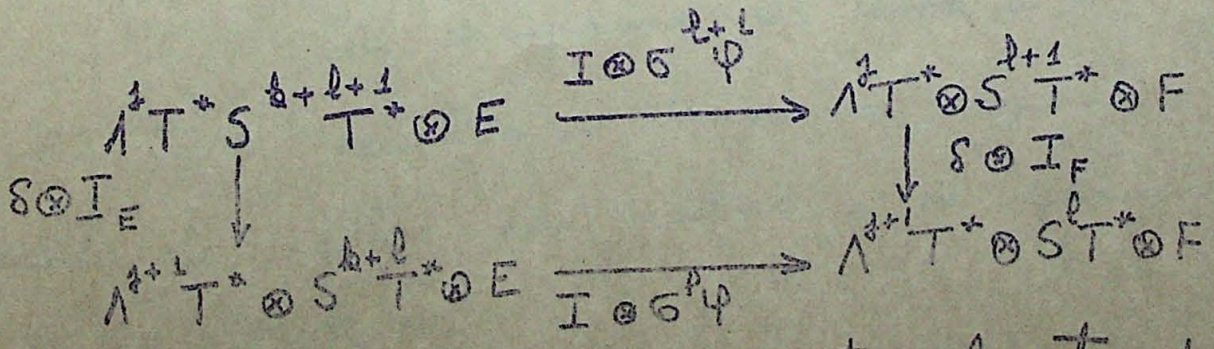
Finalmente, vê-se que B é comutativo, substituindo no quadro da Ober. I.2  $1$  por  $1$ ,  $k$  por  $k+l$  e  $\psi$  por  $p^k \psi: J^{k+l} E \rightarrow J^l F$ .

O lema resulta da composição das comutatividades dos quadros parciais.

Do lema II.2 segue que  $\sigma^k \psi$  depende somente de  $\sigma^k \psi$ .

lema II.3.

○ diagrama abaixo é comutativo.



De fato, a comutatividade segue trivialmente do lema II.2 e da definição de  $\delta$ .

Em particular, se  $F$  é o fibrado vetorial  $J^k E$  e  $\varphi$  a aplicação idêntica de  $J^k E$ , do diagrama anterior resulta o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda^k T^* \otimes S^{k+l} T^* \otimes E & \xrightarrow{\sigma^{l+1} I_k} & \Lambda^k T^* \otimes S^{k+l} T^* \otimes J^k E \\
 \delta \downarrow & & \downarrow \delta \\
 \Lambda^k T^* \otimes S^{k+l} T^* \otimes E & \xrightarrow{\sigma^l I_k} & \Lambda^k T^* \otimes S^l T^* \otimes J^k E
 \end{array}$$

onde as notações dos morfismos foram simplificadas.

Nas mesmas hipóteses, do diagrama do lema I.2 resulta

$$\begin{array}{ccc}
 S^{k+l} T^* \otimes E & \xrightarrow{\sigma^l I_k} & S^l T^* \otimes J^k E \\
 \downarrow & & \downarrow E \\
 J^{k+l} E & \xrightarrow{\rho^l I_k} & J^l(J^k E)
 \end{array}$$

Então, como  $\rho^l I_k$  é um morfismo injetivo, segue que  $\sigma^l I_k$  também o é.

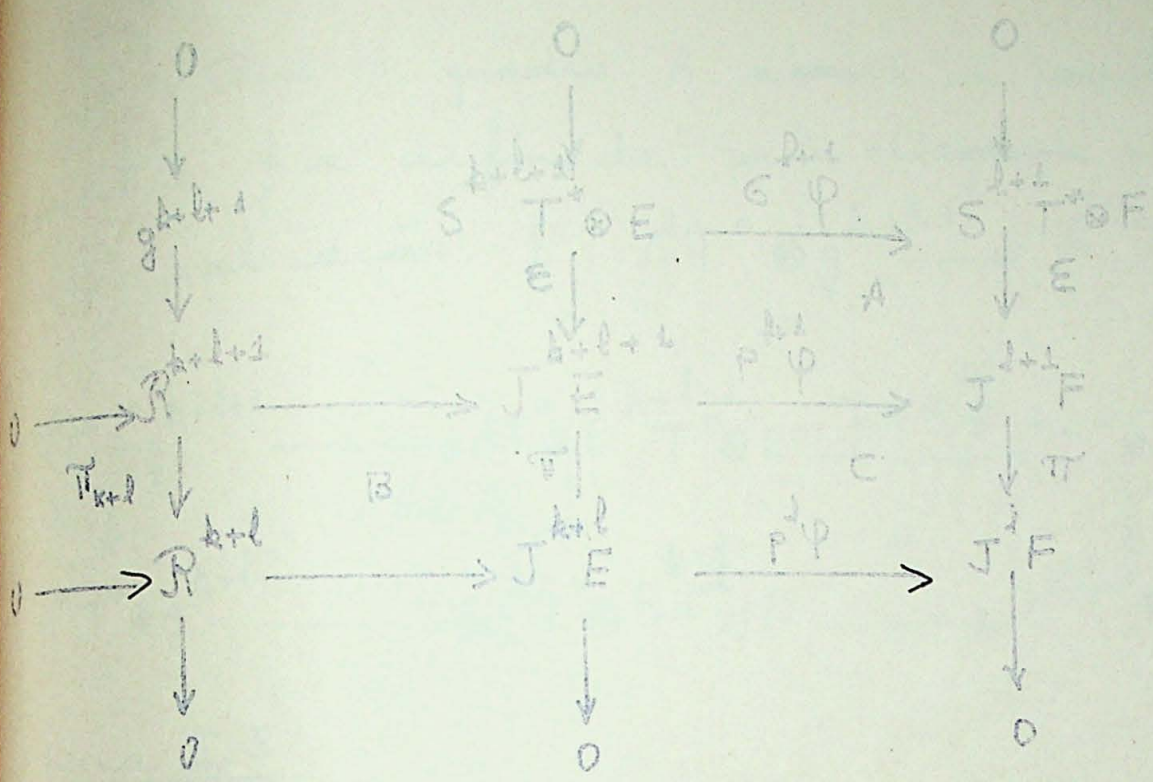
lema II.4

Se o núcleo de  $\varphi: J^k E \rightarrow F$  é  $\mathbb{R}^{k+l}$  então o núcleo de  $\sigma \varphi: S^k T^* \otimes E \rightarrow S^k T^* \otimes F$

é  $\mathbb{R}^{k+l+1}$ .

Demonstrações

Do diagrama do lema I.2 e do lema I.3 resulta o diagrama seguinte, no qual as filas são exatas e os quadros são comutativos.



Mostremos que  $g^{k+l+1} \subset \ker \sigma^{k+l+1} \varphi$ . De fato, se  $x \in g^{k+l+1}$ , como  $g^{k+l+1} \subset R^{k+l+1}$  e a segunda linha é exata, então  $\rho^{k+l} \varphi(x) = 0$ . Mas  $g^{k+l+1}$  é, por definição, o núcleo de  $\pi_{k+l}: R^{k+l+1} \rightarrow R^{k+l}$ , isto é,  $\pi_{k+l}(x) = 0$ . Segue, pela comutatividade do quadro B e exatidão da 2ª coluna que  $x \in S^{k+l+1} \oplus T^{k+l+1} \oplus E$ , uma vez feitas as identificações dos elementos de  $S^{k+l+1} \oplus T^{k+l+1} \oplus E$  com suas imagens por  $E$ . Da comutatividade do quadro A resulta  $\sigma^{k+l+1} \varphi(x) = 0$ , isto é,  $x \in \ker \sigma^{k+l+1} \varphi$ .

Mostremos agora que  $\sigma^{k+l+1} \varphi \subset g^{k+l+1}$ . Se  $x \in \ker \sigma^{k+l+1} \varphi$ ,  $\sigma^{k+l+1} \varphi(x) = 0$  e  $E \circ \sigma^{k+l+1} \varphi(x) = \rho^{k+l} \varphi \circ E(x) = 0$ . Logo  $E(x) \in R^{k+l+1}$ . Como  $\pi_{k+l} E(x) = 0$ ,  $\pi_{k+l} E(x) = 0$ , isto é,  $E(x) \in g^{k+l+1}$ , uma vez feitas as identificações análogas.

Como o quadro  $A$  abaixo é comutativo, pelo lema I.3, fica definida pela diagrama seguinte uma aplicação  $\delta: \Lambda^k T^* \otimes g^{k+l+1} \rightarrow \Lambda^{k+1} T^* \otimes g^{k+l}$ .

$$\begin{array}{ccccc}
 \Lambda^k T^* \otimes g^{k+l+1} & \xrightarrow{\quad} & \Lambda^k T^* \otimes S^{k+l+1} T^* \otimes E & \xrightarrow{I \otimes \delta \psi} & \Lambda^{k+1} T^* \otimes S^{k+l} T^* \otimes F \\
 \delta \downarrow & & \delta \otimes I_E \downarrow & & \downarrow \delta \otimes I_F \\
 \Lambda^{k+1} T^* \otimes g^{k+l} & \xrightarrow{\quad} & \Lambda^{k+1} T^* \otimes S^{k+l} T^* \otimes E & \xrightarrow{A} & \Lambda^{k+1} T^* \otimes S^l T^* \otimes F
 \end{array}$$

lema II.5

As seqüências

$$0 \rightarrow g^{k+l+1} \xrightarrow{\delta} T^* \otimes g^{k+l} \xrightarrow{\delta} \Lambda^2 g^{k+l-1} \rightarrow 0$$

são exatas.

Demonstração

É claro que  $\delta g^{k+l+1} \subset \ker \delta$  pois vemos que  $\delta^2 = 0$ . Mostremos que vale a inclusão no sentido contrario. De fato, do diagrama acima resulta o seguinte:

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & & 0 & & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 g^{k+l+1} & \xrightarrow{\delta} & T^* \otimes g^{k+l} & \xrightarrow{\bar{\delta}} & \Lambda^2 T^* \otimes g^{k+l-1} \\
 \downarrow \delta_1 \otimes I_E & & \downarrow & & \downarrow \\
 S^{k+l+1} T^* \otimes E & \xrightarrow{\delta_1 \otimes I_E} & T^* \otimes S^{k+l} T^* \otimes E & \xrightarrow{\bar{\delta}_1 \otimes I_E} & \Lambda^2 T^* \otimes S^{k+l-1} T^* \otimes E \\
 \downarrow \delta_2 \otimes I_F & & \downarrow & & \downarrow \\
 S^{k+l+1} T^* \otimes F & \xrightarrow{\delta_2 \otimes I_F} & T^* \otimes S^l T^* \otimes F & \xrightarrow{\bar{\delta}_2 \otimes I_F} & \Lambda^2 T^* \otimes S^{l-1} T^* \otimes F
 \end{array}$$

no qual  $\bar{\delta}, \delta_i$  e  $\bar{\delta}_i$  indicam sempre a aplicação  $\delta$

conhecida. Ora, se  $\alpha \in \ker \bar{\delta}$ , como o quadro  $A$  é comutativo,  $(\bar{\delta}_2 \otimes I_E)(\alpha) = 0$ . Sendo a segunda linha exata, existe  $t \in S^{k+l+1} T^* \otimes E$  tal que  $\alpha = (\bar{\delta}_2 \otimes I_E)(t)$ . Mas  $(I \otimes \bar{\sigma}^p \psi)(\bar{\delta}_2 \otimes I_E)(t) = 0$  pela exatidão da segunda coluna, donde, pela comutatividade do quadro  $B$  resulta  $\bar{\delta}_2 \otimes I_F \circ \bar{\sigma}^{k+l} \psi(t) = 0$ . Como  $\bar{\delta}_2 \otimes I_F$  é injetiva, segue que  $\bar{\sigma}^{k+l} \psi(t) = 0$ , isto é,  $t \in \mathfrak{g}^{k+l+1}$ . Então  $\alpha \in \mathfrak{S}(\mathfrak{g}^{k+l+1})$ .

Definição II.1

A cohomologia de Spencer de  $\mathfrak{g}^k$  é a cohomologia das seqüências

$$(2) \quad 0 \longrightarrow \mathfrak{g}^m \xrightarrow{\delta} T^* \otimes \mathfrak{g}^{m-1} \xrightarrow{\delta} \Lambda^2 T^* \otimes \mathfrak{g}^{m-2} \xrightarrow{\delta} \dots$$

$$\dots \longrightarrow \Lambda^{m-k} T^* \otimes \mathfrak{g}^k \xrightarrow{\delta} \Lambda^{m-k+1} T^* \otimes S T^* \otimes E$$

onde  $m \geq k$ .

Denotaremos  $H^{m-j, j} = H^{m-j, j}(\mathfrak{g}^k)$  a cohomologia da seqüência acima em  $\Lambda^j T^* \otimes \mathfrak{g}^{m-j}$ .

Definição II.2

Dizemos que  $\mathfrak{g}^k$  é involutivo se as seqüências (2) são exatas.

Definição II.3

Dizemos que  $\mathfrak{g}^k$  é  $r$ -acíclico se  $H^{m, j} = 0$  para  $m \geq k$ ,  $0 \leq j \leq r$ .

Observamos que se  $X$  é uma variedade conexa, a dimensão da fibra  $E_x$  é constante, para  $x \in X$ .

lema II.6

Se  $X$  é uma variedade conexa, existe um inteiro  $k_0 \geq k$  dependendo apenas da dimensão  $n$  de  $X$ , de  $k$  e da dimensão  $p$  da fibra  $E_x$  tal que  $H^{k_0+m, j} = 0$ , para todo  $m \geq 0, j \geq 0$ .

Demonstração

A demonstração será feita através da construção de um complexo de Koszul obtido por dualização das seqüências (2) ao qual se aplicará um teorema geral provado no Apêndice.

Se  $t \in T$ , seja  $\partial_t: S^m T^* \rightarrow S^{m-1} T^*$

definida por

$$\partial_t(v_1 \wedge \dots \wedge v_m) = \sum_{j=1}^m v_j(t) \cdot v_1 \wedge \dots \wedge \hat{v}_j \wedge \dots \wedge v_m$$

seja  $e(t^*) : \Lambda^j T^* \rightarrow \Lambda^{j+1} T^*$ , onde  $t^* \in T^*$ , a multiplicação exterior por  $t^*$ , isto é,

$$e(t^*)(v_1 \wedge \dots \wedge v_j) = v_1 \wedge \dots \wedge v_j \wedge t^*$$

Seja  $t_1, \dots, t_n$  uma base de  $T$  e seja  $t_1^*, \dots, t_n^*$  sua base dual. Manteremos que

$$\delta = (-1)^j \sum_{i=1}^n e(t_i^*) \otimes \partial_{t_i} \text{ onde } \delta: \Lambda^j T^* \otimes S^m T^* \rightarrow \Lambda^{j+1} T^* \otimes S^{m-1} T^*$$

é a aplicação definida a pg 26.

De fato,

$$\begin{aligned} & (-1)^j \sum_{i=1}^n e(t_i^*) \otimes \partial_{t_i} (t_{i_1}^* \wedge t_{i_2}^* \wedge \dots \wedge t_{i_j}^* \otimes t_{r_1}^* t_{r_2}^* \dots t_{r_m}^*) \\ &= (-1)^j \sum_{i=1}^n t_{i_1}^* \wedge \dots \wedge t_{i_j}^* \wedge t_i^* \otimes \sum_{j=1}^m t_{r_j}^* (t_i) t_{r_1}^* \wedge \dots \wedge t_{r_m}^* \\ &= (-1)^j \sum_{i=1}^n t_{i_1}^* \wedge \dots \wedge t_{i_j}^* \otimes t_{r_1}^* \wedge \dots \wedge t_{r_m}^* \end{aligned}$$



$$= (-1)^j \sum_{k=1}^m t_{i_1}^* \wedge \dots \wedge t_{i_{j-1}}^* \wedge t_{i_{j+1}}^* \wedge \dots \wedge t_{i_m}^* =$$

$$= \delta(t_{i_1}^* \wedge \dots \wedge t_{i_j}^* \otimes t_{r_1}^* \dots t_{r_{m-j}}^*).$$

Ademais, se  $\delta'_t : S^{m-1}T \rightarrow S^m T$  é a transporta de  $\delta_t$ , então  $\delta'_t(t_1 \dots t_{m-1}) = t_1 \dots t_{m-1} t$ .  
De fato, para todo  $v_1, \dots, v_m \in S^m T^*$ ,

$$\langle \delta'_t(t_1 \dots t_{m-1}), v_1 \dots v_m \rangle = \langle t_1 \dots t_{m-1}, \delta'_t(v_1 \dots v_m) \rangle =$$

$$= \langle t_1 \dots t_{m-1}, \sum_{i=1}^m v_i(t) v_1 \dots \hat{v}_i \dots v_m \rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^m v_i(t) \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{m-1}} v_{\sigma(1)} \dots \hat{v}_{\sigma(i)} \dots v_{\sigma(m-1)}$$

$$= v_1 \dots v_m(t_1 \dots t_{m-1}, t) \quad \text{o que prova a afirmação.}$$

Mostremos agora que a transporta de  $\delta$  é a aplicação  $\delta' : \Lambda^{j+1} T \otimes S^{m-j} T \rightarrow \Lambda T \otimes S^m T$  dada por

$$\delta'(t_1 \wedge \dots \wedge t_{j+1} \otimes s_1 \dots s_{m-j}) = \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{k+1} t_1 \wedge \dots \wedge \hat{t}_k \wedge \dots \wedge t_{j+1} \otimes v_1 \dots v_{m-j} t_k$$

Com efeito, seja  $b = t_{s_1} \wedge \dots \wedge t_{s_{j+1}} \otimes t_{r_1} \dots t_{r_{m-j}}$  um elemento genérico da base de  $\Lambda^{j+1} T \otimes S^{m-j} T$ .

Como a transporta do produto tensorial de duas aplicações é o produto tensorial de suas transportas,

$$\delta' = (-1)^j \sum_{i=1}^m e'(t_i^*) \otimes \delta'_t, \quad \text{isto é}$$

$$\delta'(b) = (-1)^j \sum_{i=1}^m (e'(t_i^*) \otimes \delta'_t)(t_{s_1} \wedge \dots \wedge t_{s_{j+1}} \otimes t_{r_1} \dots t_{r_{m-j}}) =$$

$$= (-1)^j \sum_{i=1}^m e'(t_i^*)(t_{s_1} \wedge \dots \wedge t_{s_{j+1}}) \otimes t_{r_1} \dots t_{r_{m-j}} t_i =$$

$$\sum_{k=1}^{j+1} (-1)^k e'(t_{s_k}^*) (t_{s_1} \wedge \dots \wedge t_{s_{j+1}}) \otimes t_{s_2} \dots t_{s_{m-1}} \cdot t_{s_k}$$

pois  $e'(t_i^*) (t_{s_1} \wedge \dots \wedge t_{s_{j+1}}) = 0$  se  $i \notin \{s_1, \dots, s_{j+1}\}$

Oras, para todo  $u_1 \wedge \dots \wedge u_j \in \wedge^j T^*$ ,

$$e'(t_{s_k}^*) (t_{s_1} \wedge \dots \wedge t_{s_k} \wedge \dots \wedge t_{s_{j+1}}) (u_1 \wedge \dots \wedge u_j) = (-1)^{j+k+1} \det t_{s_l} u_j$$

$l \in \{1, \dots, \hat{k}, \dots, j+1\}$ .

Segue que  $e'(t_{s_k}^*) (t_{s_1} \wedge \dots \wedge t_{s_{j+1}}) = (-1)^{j+k+1} (t_{s_1} \wedge \dots \wedge \hat{t}_{s_k} \wedge \dots \wedge t_{s_{j+1}})$

donde 
$$s'(b) = \sum_{k=1}^{j+1} (-1)^{k+1} t_{s_1} \wedge \dots \wedge \hat{t}_{s_k} \wedge \dots \wedge t_{s_{j+1}} \otimes t_{s_2} \dots t_{s_{m-1}} \cdot t_{s_k}$$

como queriamos provar.

Denotando  $\partial_t \otimes I_E$  apenas por  $\partial_t$  e

o anulador de  $\mathfrak{g}^P$  por  $\overline{\mathfrak{g}}^P$ , temos  $\partial_t \overline{\mathfrak{g}}^{P-1} \subset \overline{\mathfrak{g}}^P$  pois  $\partial_t (\mathfrak{g}^P) \subset \mathfrak{g}^{P-1}$ . Entao a aplicacao

$$s': \wedge^{j+1} T \otimes S^{P-1} T \otimes E^* \rightarrow \wedge^j T \otimes S^P T \otimes E^*$$

passa aos quocientes, a saber,  $s': \wedge^{j+1} T \otimes F_{P-1} \rightarrow \wedge^j T \otimes F_P$

onde  $F_P = S^P T \otimes E^* / \overline{\mathfrak{g}}^P \cong \mathfrak{g}^P$  e a sequencia de Spencer e' transformada na sequencia dual

$$\dots \rightarrow \wedge^{j+1} T \otimes F_P \xrightarrow{s'} \wedge^j T \otimes F_{P+1} \xrightarrow{s'} \dots$$

Mostremos que  $F = \oplus F_P$  e' um ST-modulo de tipo finito. Basta verificar que a multiplicacao com  $S^P T \otimes E^*$  por  $S^j T$  passa aos quocientes,

isto é, se  $x \in S^P T \otimes E$  pertence a  $\bar{g}^P \cdot \sigma \in S^P T$ ,  
 então  $\sigma \cdot x \in S^{P+1} T \otimes E$  está em  $\bar{g}^{P+1}$  o que resulta  
 imediatamente do fato de  $\bar{g}$  ser exatamente  
 a multiplicação por  $t$ . Obtemos assim um  
 complexo de Koszul  $K(T, F)$  para o qual  
 estão satisfeitas as hipóteses da Proposição A.2.  
 do Apêndice. Segue que existe  $k_0$  tal que  
 $H_{j,k}(T, F) = 0$ , para todo inteiro  $k > k_0$  e  
 todo inteiro  $j$ , donde também  $H^{k_0+m, l} = 0$   
 para todo  $m > 0$  e todo  $l \geq 0$ , o que termina  
 a demonstração

lema II.7

Se  $g^k$  é 2-acíclico e se  $g^k = g^{b+1}$   
 são fibrados vetoriais, então  $g^{k+l}$  é um  
 fibrado vetorial, para todo  $l \geq 0$ .

Demonstração

A demonstração será feita por  
 indução sobre  $l$ . Suponhamos que  $g^k, g^{k+1}, \dots, g^{k+l}$   
 são fibrados vetoriais. Por hipótese,  $g^k$  é  
 2-acíclico, isto é,  $H^{m,l}(g^k) = 0$ , para  $m \geq k$   
 e  $0 \leq l \leq 2$ , onde  $H^{m,l}(g^k)$  é a cohomologia  
 em  $\Lambda^m T^* \otimes g^l$ ,  $m \geq k$ . Então a sequência  
 $0 \rightarrow g^{k+l+1} \xrightarrow{\delta} T^* \otimes g^{k+l} \xrightarrow{\delta} \Lambda^2 T^* \otimes g^{k+l-1} \xrightarrow{\delta} \Lambda^3 T^* \otimes g^{k+l-2} \dots$   
 é exata.

Com, resulta da hipótese de indução que  $\pi^* \otimes g^{k+l}$ ,  $\Lambda^2 T^* \otimes g^{k+l-1}$  e  $\Lambda^3 T^* \otimes g^{k+l-2}$  são fibrados vetoriais. Assim, o lema II.7 segue imediatamente do lema abaixo através do qual fica provado que  $g^{k+l+1}$  é um fibrado vetorial. Então  $g^{k+l}$  é um fibrado vetorial para todo  $l \geq 0$ .

lema II.8

Se  $E' \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{\psi} E''$  é uma sequência exata de fibrados vetoriais, então o núcleo  $K$  de  $\varphi$  e o núcleo  $\mathcal{L}$  de  $\psi$  são ambos fibrados vetoriais.

Demonstração

A sequência abaixo é exata.

$$0 \rightarrow K \rightarrow E' \xrightarrow{\varphi} E \xrightarrow{\psi} E'' \rightarrow \mathcal{L} \rightarrow 0$$

Então  $\dim K_x = \dim E'_x - \dim \varphi(E'_x)$  donde

$$\dim K_x = \dim E'_x - (\dim E_x - \dim \psi(E_x))$$

$$= \dim E'_x - [\dim E_x - (\dim E''_x - \dim \mathcal{L}_x)]$$

$$= \dim E'_x - \dim E_x + \dim E''_x - \dim \mathcal{L}_x$$

Logo, para todo  $x \in X$ ,  $\dim K_x + \dim \mathcal{L}_x$  é uma constante. Seja  $\|\varphi^i\|_x$  a matriz de  $\varphi$  relativamente a duas bases fixadas de  $E'_x$  e de  $E_x$ . Então

42

$\dim K_x = m - \text{posto } \|\Psi_j^i\|_x$ . Mas os termos de  $\|\Psi_j^i\|$  são funções diferenciáveis de  $x$ , logo o determinante não nulo que determina a característica de  $\|\Psi_j^i\|_x$  é também uma função diferenciável de  $x$ . Então, existe uma vizinhança  $V$  de  $x$

na qual este determinante ainda é  $\neq 0$ , isto é, a característica de  $\|\Psi_j^i\|$  em  $V$  é maior ou igual à característica de  $\|\Psi_j^i\|_x$ . Então,

$\dim K_y = m - \text{posto } \|\Psi_j^i\|_y \leq m - \text{posto } \|\Psi_j^i\|_x = \dim K_x$  para todo  $y \in V$ . Analogamente, mostra-se

que  $\dim Q_y \leq \dim Q_x$ , para  $y$  numa vizinhança  $W$  de  $x$ . Ora, como  $\dim K_y + \dim Q_y = \dim K_x +$

$\dim Q_x$ , se fosse  $\dim K_y < \dim K_x$ , seria  $\dim Q_y > \dim Q_x$  o que é absurdo. Logo,  $\dim K_y$

é constante numa vizinhança conveniente de  $x$ . Analogamente,  $\dim Q_y$  é constante. Então o núcleo de  $\Psi$  e o conúcleo de  $\Psi$  são fibrados vetoriais

# Existência de Soluções Ferrais

Seja  $F$  um fibrado vetorial e  $\varphi: T^k E \rightarrow F$  um morfismo de fibrados vetoriais tal que  $\ker \varphi = R^k$ .

## Proposição III.1

Se  $R^{k+l}$  é um fibrado vetorial, para algum  $l \geq 1$ , então existe um fibrado vetorial  $P^l$  e um morfismo  $\psi^l: J^l F \rightarrow P^l$  tal que a sequência

$$0 \rightarrow R^{k+l} \rightarrow J^{k+l} E \xrightarrow{P^l \varphi} J^l F \xrightarrow{\psi^l} P^l$$

é exata. Se  $h^{k+l, m}$  denota a cohomologia de

$$S^{k+l+m} T^+ \otimes E \xrightarrow{\sigma \varphi} S^{l+m} T^+ \otimes F \xrightarrow{\sigma \psi} S^m T^+ \otimes P^l,$$

para  $m \geq 0$ , então existe, para cada  $m \geq 0$ , um morfismo  $k_m = k_m(R^{k+l}): R^{k+l+m-1} \rightarrow h^{k+l, m}$ , tal

que as sequências

$$(1) \quad R^{k+l} \xrightarrow{\pi_{R^{k+l-1}}} R^{k+l-1} \xrightarrow{k_0} h^{k+l, 0} \rightarrow 0 =$$

$$(2) \quad R^{k+l+m} \xrightarrow{\pi_{R^{k+l+m-1}}} R^{k+l+m-1} \xrightarrow{k_m} h^{k+l, m} \text{ são exatas.}$$

## Demonstração

Como  $R^{k+l} \rightarrow J^{k+l} E \xrightarrow{P^l \varphi} J^l F$  é uma

sequência exata de fibrados vetoriais, então, pelo lema II.8, o conúcleo de  $\psi$ , a saber,  $J^l F / P^l \varphi(J^{k+l} E)$

$\rho$  um fibrado vetorial e a seqüência

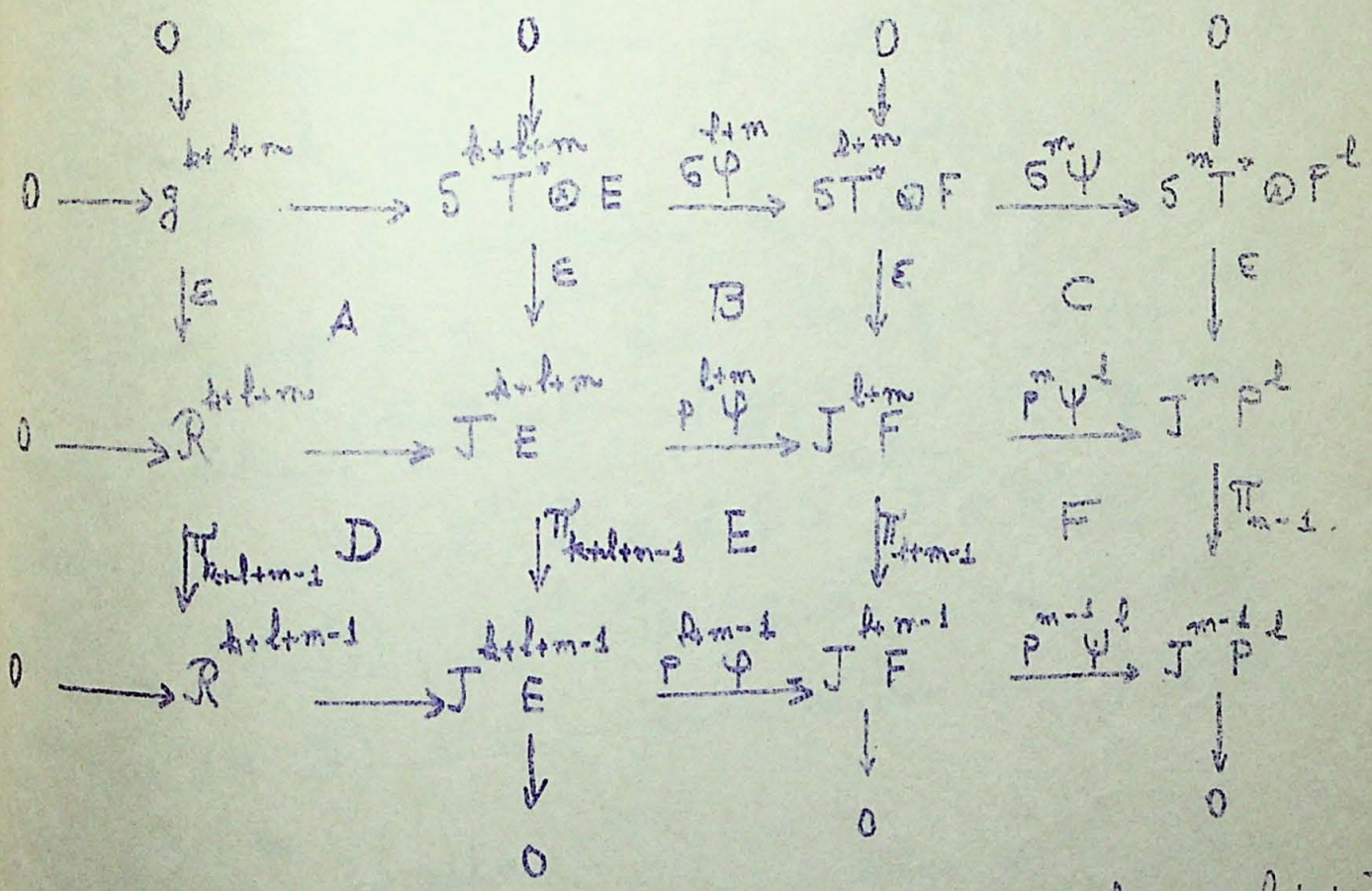
$$0 \rightarrow R^{k+l} \xrightarrow{J^{k+l}} J^k E \xrightarrow{P^l \Psi^l} J^l F \xrightarrow{\Psi^l} P^l$$

é exata, onde  $P^l = J^l F / P^l \Psi^l (J^k E)$  e  $\Psi^l: J^l F \rightarrow P^l$

$\rho$  a projeção canônica.

Definimos  $J^{-1} P^l = 0$  e  $P^{-1} \Psi^l = 0$ .

Consideremos o diagrama:



As colunas são exatas: a 1ª pela definição de  $\mathfrak{g}^{k+l+m}$ , a 2ª, 3ª e 4ª pelo lema I.2.1. As linhas são exatas em  $J^k E$  e  $J^l F$  pelo lema I.3. O diagrama acima é comutativo pois o quadrado A, B, D e E o são pela comutatividade do diagrama a pg 33 e C e F pelo lema I.2.

Definiremos uma aplicação  $k_m: R^{k+l+m-1} \rightarrow h^{k+l,m}$  do modo seguinte: Se  $v \in R^{k+l+m-1}$ , tome  $\tilde{v} \in J^{k+l+m} E$  tal que  $\pi_{k+l+m-1}(\tilde{v}) = v$ . Como a terceira linha é exata em  $J^{k+l+m-1} E$ , temos

$\rho^{k+l+m-1} \circ \pi_{k+l+m-1}(\tilde{v}) = 0$ . Da comutatividade do quadro E resulta  $\pi_{k+l+m-1} \circ \rho^{k+l+m}(\tilde{v}) = 0$ , e sendo a terceira coluna exata,  $\rho^{k+l+m}(\tilde{v}) = \varepsilon w$ , onde

$w \in S^{k+l,m} T^* \otimes F$ . É claro que  $\varepsilon^{-1} \rho^{k+l+m}(\tilde{v}) \in \text{ker } \sigma \psi^{\dagger}$ . Definimos  $k_m(v)$  como a projeção de  $\varepsilon^{-1} \rho^{k+l+m}(\tilde{v})$  em  $h^{k+l,m}$ .

A aplicação  $k_m$  está bem definida, a saber, seja  $\tilde{v} \in J^{k+l+m} E$  tal que  $\pi_{k+l+m-1}(\tilde{v}) = v$ , isto é,  $\pi_{k+l+m-1}(\tilde{v} - \tilde{v}') = 0$ . Logo, como a segunda

coluna é exata,  $\tilde{v} - \tilde{v}' \in E(S^{k+l,m} T^* \otimes E)$  e sendo

$\sigma \psi^{\dagger} \varepsilon^{-1}(\tilde{v} - \tilde{v}') = \varepsilon^{-1} \rho^{k+l+m}(\tilde{v} - \tilde{v}')$ , segue que  $\varepsilon^{-1} \rho^{k+l+m}(\tilde{v} - \tilde{v}')$  é um bordo, donde sua projeção em  $h^{k+l,m}$  é zero.

a) Mostremos que  $R \xrightarrow{\pi_{k+l+m-1}} R \xrightarrow{k_m} h^{k+l,m}$  é exata.

De fato, seja  $v \in R^{k+l+m-1}$ ,  $w \in \text{ker } k_m$ , isto é,  $\varepsilon^{-1} \rho^{k+l+m}(\tilde{v}) = \sigma \psi^{\dagger}(w)$ ,  $w \in S^{k+l,m} T^* \otimes E$ , onde  $\pi_{k+l+m-1}(\tilde{v}) = v$ . Da comutatividade do diagrama da página anterior resulta



$$p^{l+m} \Psi \circ \varepsilon(w) = \varepsilon \circ \delta \Psi(w) = p^{l+m} \Psi(\tilde{v}). \text{ Ent\~{a}o}$$

$$p^{l+m} \Psi(\tilde{v} - \varepsilon(w)) = 0, \text{ donde } \tilde{v} - \varepsilon(w) \in \mathbb{R}^{k+l+m}$$

Como  $\Pi_{k+l+m-1}(\tilde{v} - \varepsilon(w)) = \Pi_{k+l+m-1}(\tilde{v}) = v$ , segue que

Seja  $k_m \subset \Pi(\mathbb{R}^{k+l+m})$ . Reciprocamente, seja

$v \in \Pi(\mathbb{R}^{k+l+m})$  e seja  $\tilde{v} \in \mathbb{R}^{k+l+m}$  tal que  $\Pi(\tilde{v}) = v$

Pela exatidão da segunda linha  $p^{l+m} \Psi(\tilde{v}) = 0$   
 donde  $k_m(v) = 0$ , o que prova (2)

(b) Mostremos que a seqüência

$$\mathbb{R}^{k+l} \xrightarrow{\Pi_{k+l-1}} \mathbb{R}^{k+l} \xrightarrow{k_0} \mathbb{R}^{k+l,0} \rightarrow 0 \text{ e' exata.}$$

Basta verificar que  $k_0$  e' sobjetora. De

feto, do diagrama da pg 49, para  $m=0$ ,  
 resulta que se  $\bar{\beta} \in \mathbb{R}^{k+l,0}$  e' a classe de  
 $\beta \in \ker \delta \circ \Psi^l$ , ent\~{a}o  $0 = \delta \circ \Psi^l(\beta) = \Psi^l \circ \varepsilon(\beta)$ , isto e'  
 $\varepsilon(\beta) \in \ker \Psi^l = p^l \Psi(J^{k+l}E)$ , como vimos.

Seja  $w \in J^{k+l}E$  tal que  $\varepsilon(\beta) = p^l \Psi(w)$ .

Ora  $p^{l+1} \Psi \circ \Pi(w) = \Pi \circ p^l \Psi(w) = \Pi \circ \varepsilon(\beta) = 0$ ,  
 isto e',  $\Pi(w) \in \ker p^{l+1} \Psi = \mathbb{R}^{k+l-1}$  e' claro  
 que  $k_0(\Pi(w)) = \bar{\beta}$ , donde  $k_0$  e' sobjetora.

Conclus\~{a}o III.1.

Se  $\mathbb{R}^{k+l}$  e' um fibrado vetorial, para  
 algum  $l \geq 1$ , e  $\Pi_{k+l-1} : \mathbb{R}^{k+l} \rightarrow \mathbb{R}^{k+l-1}$  e' sobjetora,  
 ent\~{a}o  $\mathbb{R}^{k+l-1}$  e' um fibrado vetorial.

Seja  $\pi_{k+l-1}$  sobrejetora, por hipótese, temos

$R^{k+l-1} = \pi_{k+l-1}^{-1} R^{k+l}$ . Ademais como a sequência

$$R^{k+l} \xrightarrow{\pi_{k+l-1}} R^{k+l-1} \xrightarrow{k_0} h^{k+l,0} \rightarrow 0 \quad \text{é}$$

exata, pela Prop. III.1, resulta  $\pi_{k+l-1}^{-1} R^{k+l} = \ker k_0$ ,  
 donde  $k_0(R^{k+l-1}) = 0$ . Como  $k_0$  é sobrejetora,  $h^{k+l,0} = 0$

Segue que a sequência

$$0 \rightarrow g^{k+l} \rightarrow S^{k+l} \xrightarrow{T^* \otimes E} S^{k+l} \xrightarrow{G^0 \Psi} S^{k+l} \xrightarrow{T^* \otimes F} P^l$$

é exata. De fato, como  $h^{k+l,0} = 0$ , todo ciclo em  $S^{k+l} \otimes F$  é um bordo, a sequência é exata em  $S^{k+l} \otimes F$ . Segue do lema II.8 que  $g^{k+l}$  é um fibrado vetorial.

Ademais, como  $\pi_{k+l-1}$  é sobrejetora,

a sequência

$$0 \rightarrow g^{k+l} \rightarrow R^{k+l} \xrightarrow{\pi_{k+l-1}} R^{k+l-1} \rightarrow 0$$

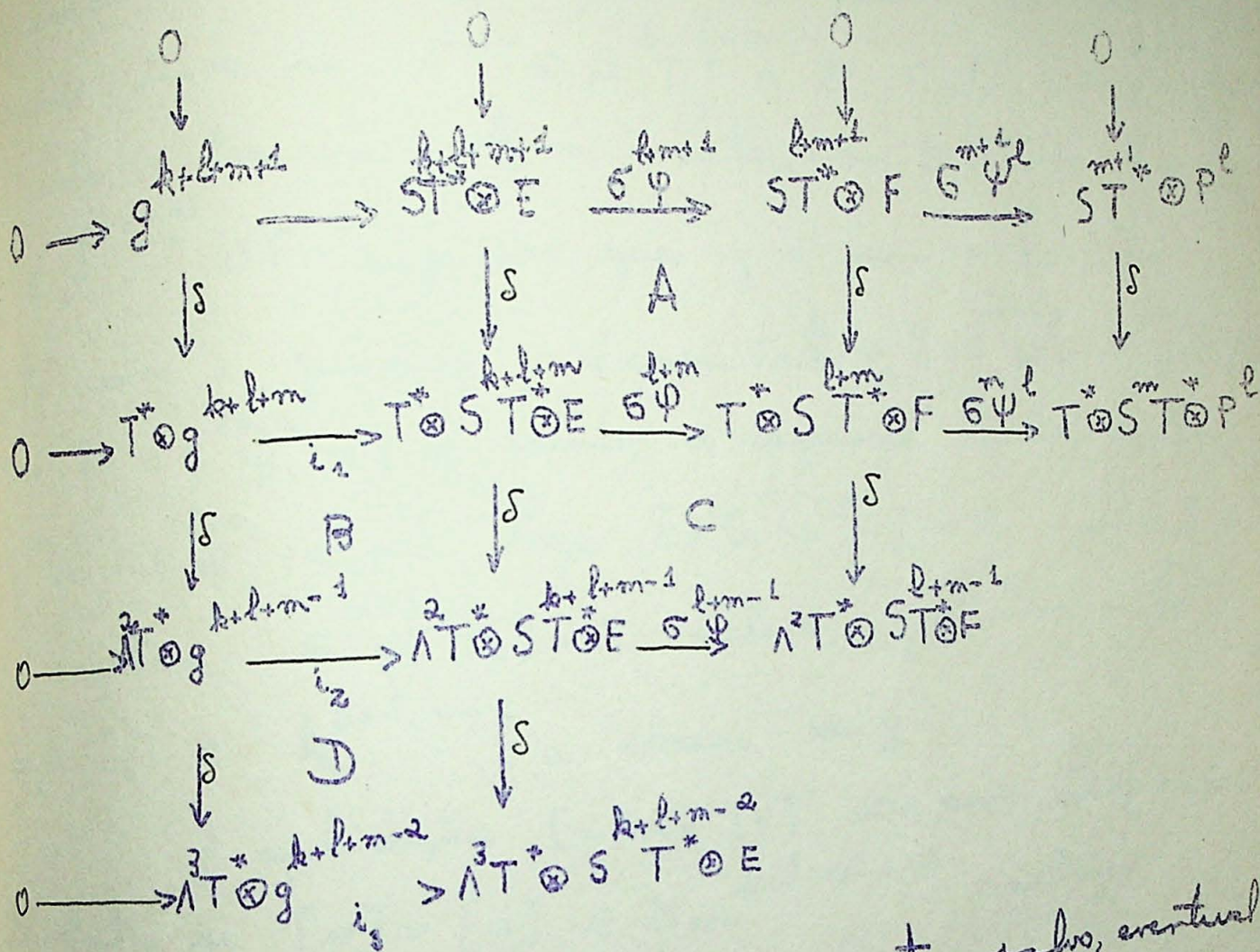
é exata, donde, pelo mesmo lema,  $R^{k+l-1}$  é um fibrado vetorial.

lema III.1.

Se  $R^{k+l}$  é um fibrado vetorial, para algum  $l \geq 1$  e se  $P^l$  e  $\Psi^l$  tem o significado dado na Prop. III.1, então se  $h^{k+l,m} = 0$  para algum  $m$  existe um isomorfismo natural de  $h^{k+l,m+l}$  em  $h^{k+l,m+l-1}$ .

Demonstração

Consideremos o diagrama.



que sabemos ser comutativo e exato, salvo, eventualmente em  $\Lambda^2 T^* \otimes g^{k+l+m-1}$ ,  $S^{k+l+m-1} T^* \otimes F^{k+l+m}$  e  $T^* \otimes S^{k+l+m} T^* \otimes F$ .

Orá, como por hipótese  $h^{k+l, m} = 0$ , então é exato em  $T^* \otimes S^{k+l+m} T^* \otimes F$ .

Construiremos um isomorfismo entre a cohomologia em  $\Lambda^2 T^* \otimes g^{k+l+m-1}$  e a saber,  $H^{k+l, m+1}$  e em  $S^{k+l+m-1} T^* \otimes F$ , a saber,  $H^{k+l+m-1, 2}$ .

Seja  $[x] \in H^{k+l+m-1, 2}$  a classe do ciclo  $x$ . Tomemos  $x$  como elemento de  $\Lambda^2 T^* \otimes S^{k+l+m-1} T^* \otimes E$ .

Como  $x$  é um ciclo,  $\delta(x) = 0$  e sendo o quadro  $D$  comutativo,  $x \in \ker \delta$ ,  $\delta: \Lambda^2 T^* \otimes S^{k+l+m-1} T^* \otimes E \rightarrow \Lambda^3 T^* \otimes S^{k+l+m-2} T^* \otimes E$ .

Como a sequência exata,  $x = \delta x'$ ,  $x' \in T^* \otimes ST^* \otimes E$ .

$\sigma \circ \psi^{l+m}(x') \in T^* \otimes S^{l+m} T^* \otimes F$ . Ademais,

Se  $\sigma \circ \psi^{l+m}(x') = \sigma \circ \psi^{l+m-1} \circ \delta(x')$  pela comutatividade do quadro

Mas  $\sigma \circ \psi^{l+m-1} \circ \delta(x') = 0$  pela exatidão da terceira linha em  $T^* \otimes S^{l+m-1} T^* \otimes E$ . Então  $\sigma \circ \psi^{l+m}(x') = 0$

e sendo a terceira coluna exata, vem  $\sigma \circ \psi^{l+m}(x') = \delta y$ ,

$y \in S^{l+m+1} T^* \otimes F$ . Vejamos que  $y$  é um ciclo. De

fato, como o quadro é comutativo,  $\delta \circ \psi^{m+l+1}(y) = \sigma \circ \psi^m(\delta(y))$ .

Mas  $\delta y = \sigma \circ \psi^{l+m}(x')$  e sendo a segunda linha exata,

$\sigma \circ \psi^m \circ \sigma \circ \psi^{l+m}(x') = 0$ . Logo  $\delta \circ \psi^{m+l+1}(y) = 0$ . Como  $\delta$

é injetiva,  $\sigma \circ \psi^{m+l+1}(y) = 0$ , isto é,  $y$  é um ciclo.

Seja  $[y] \in h^{k+l+1, m+l}$  a classe de  $y$ .

A aplicação  $[x] \rightarrow [y]$  está bem definida.

De fato, se  $[v] = [x] \in \text{Hom}^{k+l+m-1, l}$ , então

$v \cdot x \in \delta z$ ,  $z \in T^* \otimes g^{k+l+m}$ . Logo,

$$\sigma \circ \psi^{l+m} \circ i_0(v) = \sigma \circ \psi^{l+m} \circ i_2(x + \delta z)$$

$$= \sigma \circ \psi^{l+m} \circ i_2(x) + \sigma \circ \psi^{l+m} \circ i_2(\delta z)$$

$$= \sigma \circ \psi^{l+m}(x) + \sigma \circ \psi^{l+m} \circ \delta i_2(z) = \sigma \circ \psi^{l+m} i_0(x)$$

pois a segunda linha é exata.

Verifiquemos que  $\eta: [x] \rightarrow [y]$  é um

isomorfismo. De fato,

(a)  $\eta$  é injetiva

Se  $[y] = 0$ ,  $y = \sigma \circ \psi^{l+m+1}(t)$ ,  $t \in S^{l+m+1} T^* \otimes E$

Logo,  $\sigma \circ \psi^{l+m}(x') = \delta y = \delta \circ \sigma \circ \psi^{l+m+1}(t) = \sigma \circ \psi^{l+m} \circ \delta(t)$ , pela

comutatividade do quadro C. Entã  $\sigma^{\ell+m}(\alpha' - \delta t) = 0$ ,  
donde  $\alpha' - \delta t = i_2(\ell)$ ,  $\ell \in T^* \otimes g^{k+l+m}$ . Mas

$i_2 \circ \delta(\ell) = \delta \circ i_2(\ell)$  pela comutatividade do quadro B

Logo  $i_2 \circ \delta(\ell) = \delta(\alpha' - \delta t) = \delta(\alpha') = \alpha$ , isto é,

$\alpha \in \delta(T^* \otimes g^{k+l+m})$ , donde  $[\alpha] = 0$ .

(b)  $\eta$  é sobrejetora.

De fato, seja  $[y] \in h^{k+l, m+1}$ , a classe do

ciclo  $y$ ,  $y \in S^{l+m+1} T^* \otimes F$ . Como  $\sigma^{m+1} \psi^l(y) = 0$ , existe

$\alpha' \in T^* \otimes S^{k+l+m} T^* \otimes E$  tal que  $\sigma^{\ell+m}(\alpha') = \delta y$ . Da

comutatividade do quadro C segue que

$$0 = \delta \circ \delta(y) = \delta \circ \sigma^{\ell+m}(\alpha') = \sigma^{\ell+m-1} \circ \delta(\alpha')$$

Logo  $\delta(\alpha') = i_2(x)$ ,  $x \in \wedge^2 T^* \otimes g^{k+l+m-1}$ . Como

o quadro D é comutativo,

$$i_3 \circ \delta(x) = \delta \circ i_2(x) = \delta \delta(\alpha') = 0.$$

Logo, sendo  $i_3$  injetiva,  $\delta x = 0$ , isto é,  $x$

é um ciclo. Ademais, a classe  $[x]$  independe

do ciclo  $y$  representante de  $[y]$  e  $\eta[x] = [y]$ ,  
pela construção descrita.

Proposição III. 2

Se  $R^{k+l}$  é um fibrado vetorial e se  $h^{k+l, l-1} = 0$  para algum  $l \geq 1$ , então existe um morfismo  $K = K(R^{k+l}) : R^{k+l} \rightarrow H^{k+l-1, 2}$

tal que a sequência  $R^{k+l+1} \xrightarrow{\pi_{k+l}} R^{k+l} \xrightarrow{K} H^{k+l-1, 2}$

é exata.

Demonstração

Pela Proposição III. 1, fazendo  $l=1$  e  $m=l$ ,

temos que  $R^{k+l+1} \xrightarrow{\pi_{k+l}} R^{k+l} \xrightarrow{k_1} h^{k+1, l} \xrightarrow{h^{k+1, l}} H^{k+l-1, 2}$

é uma sequência exata. Seja  $\alpha : h^{k+1, l} \rightarrow H^{k+l-1, 2}$  o isomorfismo do lema III. 1. A proposição segue imediatamente se definirmos  $K = \alpha \circ k_1$ .

Teorema III. 1

Seja  $R^k \subset J^k E$  um sistema linear de equações diferenciais de ordem  $k$  sobre  $E$  tal que  $R^{k+1}$  é um fibrado vetorial e  $\pi_k : R^{k+1} \rightarrow R^k$  é subjetora. Então, se  $g^k$  é 2-oculto,  $R^k$  é formalmente integrável.

Demonstração

Pela Prop. III. 1 para  $l=1$ , existe um fibrado vetorial  $P^1$  e um morfismo  $\psi^1 : J^1 F \rightarrow P^1$  tal que a sequência  $0 \rightarrow R^{k+1} \rightarrow J^{k+1} E \xrightarrow{\phi^1 \psi^1} J^1 F \xrightarrow{\psi^1} P^1$

é exata.

Adicional, com as mesmas notações de Prop. III.1, para cada  $m \geq 0$ , existe um morfismo  $k_m: R^{k+m} \rightarrow h^{k+m}$ , tal que as seqüências

$$\begin{array}{ccccccc}
 R^{k+1} & \xrightarrow{\pi_k} & R^k & \xrightarrow{k_0} & h^{k+1,0} & \longrightarrow & 0 \\
 R^{k+m+1} & \xrightarrow{\pi_{k+m}} & R^{k+m} & \xrightarrow{k_m} & h^{k+1,m} & & 
 \end{array}$$

são exatas.

Mostramos, por indução sobre  $m$ , que  $h^{k+1,m} = 0$ , para  $m \geq 0$ . De fato, resulta da primeira seqüência que  $h^{k+1,0} = 0$  pois  $\pi_k = 1$  sobjetora. Suponhamos que  $h^{k+1,m-1} = 0$ . Como  $g^k = 1$ , por hipótese 2-acíclicos, temos  $h^{k+m-1,2} = 0$ , para  $m \geq 1$ . Pelo Lema III.1, como  $R^{k+1}$  é um fibrado vetorial pela hipótese do

tenore, segue que  $H^{k+m-1,2} \cong h^{k+1,m}$ , donde  $h^{k+1,m} = 0$ . Segue, por indução, que  $h^{k+1,m} = 0, \forall m \geq 0$ .

Pela Prop. III.2, como  $R^{k+1}$  é um fibrado vetorial e  $h^{k+1,m-1} = 0$ , para  $m \geq 1$ , então existe um morfismo  $K: R^{k+m} \rightarrow H^{k+m-1,2}$  tal que a seqüência

$$R \xrightarrow{\pi_{k+m}} R^{k+m} \xrightarrow{K} H^{k+m-1,2}$$

é exata. Segue que  $\pi_{k+m}$  é sobjetora, para todo  $m \geq 1$  pois  $H^{k+m-1,2} = 0, \forall m \geq 1$ . Como

$\pi_k$  é sobrejetora, por hipótese, então  $\pi_{k+l}$  é sobrejetora,  $\forall l \geq 0$ .

Resta mostrar que  $R^{k+m}$  é um fibrado vetorial para  $m \geq 2$ . Ora, como  $h^{k+1, m} = 0$ ,

para  $m \geq 0$ , segue que a sequência

$$0 \rightarrow \mathcal{G}^{k+m+1} \rightarrow S^{k+m+1} T^* \otimes E \xrightarrow{\Theta \Psi^{k+m+1}} S^{m+1} T^* \otimes F \xrightarrow{\Theta \Psi^k} S^m T^* \otimes F^2$$

é exata. Então, pelo Lema II.8,  $\mathcal{G}^{k+m+1}$  é

um fibrado vetorial para todo  $m \geq 0$ . A

exatidão da sequência

$$0 \rightarrow \mathcal{G}^{k+m+1} \rightarrow R^{k+m+1} \xrightarrow{\pi_{k+m}} R^{k+m} \rightarrow 0$$

acabeta por indução sabe-se que  $R^{k+m}$  é um fibrado vetorial, para todo  $m \geq 2$ , o que termina a demonstração.

### Teorema III.2

Se  $X$  é conexa e se  $R^k \subset J^k E$  é um sistema de equações diferenciais de ordem  $k$  sobre  $E$ , então existe um inteiro  $k_0 \geq k$  dependendo apenas de  $n, k$  e da dimensão  $p$  de  $E$  tal que se  $R^{k_0+1}$  é um fibrado vetorial e  $\pi_{k+l}^i: R^{k+l+1} \rightarrow R^{k+l}$  é sobrejetora para  $0 \leq l \leq k_0 - k$ , então  $R^k$  é formalmente integrável.



Demonstração

Pelo Lema II.6, sabemos que existe um inteiro  $k_0 \geq k$  dependendo apenas de  $n, k$  e  $p$  tal que  $H^{k_0+m, t} = 0, \forall m \geq 0, \forall t \geq 0$ . Como, por hipótese,  $R^{k_0+1}$  é um fibrado vetorial e  $\Pi_{k_0}: R^{k_0+1} \rightarrow R^{k_0}$  é subjetiva, segue do Corolário III.1 que  $R^{k_0}$  é um fibrado vetorial. Repetindo-se sucessivamente o raciocínio, conclui-se que  $R^{k+l}, 1 \leq l \leq k_0 - k$  são fibrados vetoriais.

Seja  $g^{k_0}$  2-aviciado, por um particular  $H^{m, t} = 0, \forall m \geq k_0 + 2, \forall t \geq 2$ , aplicando

o Teorema III.1 ao sistema de equações diferenciais  $R^{k_0}$  segue que  $R^{k_0}$  é formalmente integral, isto é,  $R^{k_0+l}$  é um fibrado vetorial e  $\Pi_{k_0+l}: R^{k_0+l+1} \rightarrow R^{k_0+l}$  é subjetiva para  $l \geq 0$ .

Pelo visto acima, resulta que  $R^{k+l}$  são fibrados vetoriais e  $\Pi_{k+l}: R^{k+l+1} \rightarrow R^{k+l}$  são subjetivas para todo  $l \geq 0$ , isto é,  $R^k$  é formalmente integral.

### Apêndice

#### © Complexo de Koszul.

Sejam  $A$  um anel comutativo com unidade,  $T$  um  $A$ -módulo. Denotaremos  $\Lambda T = \sum \Lambda^p T$  a álgebra exterior e  $S T = \sum S^p T$  a álgebra simétrica de  $T$ . Seja  $M = \bigoplus_{k \geq 0} M_k$  um  $A$ -módulo graduado;

chamaremos  $M_+ = \bigoplus_{k \geq 1} M_k$ . No que segue, um "ST-módulo" designará um ST-módulo graduado  $M$

no sentido seguinte:  $M = \bigoplus_{k \geq 0} M_k$  e a multiplicação verifica  $S^k T \cdot M_k \subset M_{k+l}$ . A todo ST-módulo  $M = \bigoplus_{k \geq 0} M_k$  fazemos corresponder o

complexo de Koszul  $K(T, M) = \{K_p(T, M), d_p\}$

onde  $K_p(T, M) = \Lambda^p T \otimes_A M$  e  $d_p: K_p(T, M) \rightarrow K_{p-1}(T, M)$  é definido da seguinte maneira: sendo

$$\Lambda^p T \otimes_A M \cong \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^p T \otimes_A M_k, \text{ temos } d_p = \bigoplus_{k \geq 0} d_{p,k},$$

$$\text{onde } d_{p,k}: \Lambda^p T \otimes M_k \rightarrow \Lambda^{p-1} T \otimes M_{k+1} \text{ é dada por}$$

$$d_{p,k} (t_1 \wedge \dots \wedge t_p \otimes m) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} t_1 \wedge \dots \wedge \hat{t}_i \wedge \dots \wedge t_p \otimes t_i \cdot m.$$

Notaremos  $K_{p,k}(T, M)$  o produto  $\Lambda^p T \otimes_A M_k$ . Assim,

$$K_p(T, M) \cong \bigoplus_{k \geq 0} K_{p,k}(T, M).$$

E' facil verificar que  $d_{p+1, k+1} \circ d_{p, k} = 0$ .

De fato,  $d_{p+1, k+1} \circ d_{p, k} (t_1 \wedge \dots \wedge t_p \otimes m) =$   
 $d_{p+1, k+1} \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} t_1 \wedge \dots \wedge \hat{t}_i \wedge \dots \wedge t_p \otimes t_i m =$   
 $\sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j+1} (t_1 \wedge \dots \wedge \hat{t}_i \wedge \dots \wedge \hat{t}_j \wedge \dots \wedge t_p \otimes t_j t_i m) + \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} t_1 \wedge \dots \wedge \hat{t}_i \wedge \dots \wedge t_p \otimes t_j t_i m = 0$

E' claro que, para todo  $p$ ,  $K_p(T, M)$  e um ST-modulo com a multiplicação  $ST \times K_p(T, M) \rightarrow K_p(T, M)$  definida por  $(s, t \otimes m_k) \mapsto t \otimes s \cdot m_k$ ,  $s \in ST$ ,  $t \in \wedge^p T$  e  $m_k \in M_k$  onde  $s \cdot m_k$  indica o produto no ST-modulo  $M$ . Ademais  $d_p$  e uma aplicacão ST-linear. De fato, se  $s_1, \dots, s_k \in ST$  e  $m \in M_k$

$$d_{p, k+1} (s_1 \dots s_k \cdot t_1 \wedge \dots \wedge t_p \otimes m_k) =$$

$$= d_{p, k+1} (t_1 \wedge \dots \wedge t_p \otimes s_1 \dots s_k \cdot m_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} t_1 \wedge \dots \wedge \hat{t}_i \wedge \dots \wedge t_p \otimes s_i \cdot s_1 \dots s_k \cdot m_k =$$

$$= s_1 \dots s_k \cdot d_{p, k} (t_1 \wedge \dots \wedge t_p \otimes m_k).$$

Denotamos por  $H_p(T, M)$  a homologia de ordem  $p$  de  $K(T, M) = \text{pr } H_{p, k}(T, M)$  e homologia de

$$\dots \rightarrow K_{p+1, k-1} \xrightarrow{d_{p+1, k-1}} K_{p, k} \xrightarrow{d_{p, k}} K_{p-1, k+1} \rightarrow \dots$$

de ordem  $p, k$ . Ora, como, para todo  $p$

$$K_p(T, M) \cong \bigoplus_{k \geq 0} K_{0, k}(T, M) \text{ e } d_p = \bigoplus_{k \geq 0} d_{p, k},$$

segue que  $H_p(T, M) = \bigoplus_{k \geq 0} H_{p, k}(T, M)$ . Designamos  $H_{p+}(T, M)$  a

$$\bigoplus_{k \geq 1} H_{p, k}(T, M)$$

É claro que  $H_p(T, M)$  é um ST-módulo, isto é,  $S^1 T \cdot H_{p,k}(T, M) \subset H_{p,k+1}(T, M)$ . De fato, sejam  $Z_{p,k}(T, M)$  o conjunto de ciclos e  $B_{p,k}(T, M)$  o dos bordos em  $K_p(T, M)$ . Então se  $z \in Z_{p,k}(T, M)$ ,  $dz = 0$  (onde o índice de  $d$  foi suprimido para simplificação). Como  $d$  é ST-linear, para  $s \in S^1 T$ , temos  $0 = s dz = d s z$ , donde,  $S^1 T \cdot Z_{p,k}(T, M) \subset Z_{p,k+1}(T, M)$ . Do mesmo modo verifica-se que  $S^1 T \cdot B_{p,k}(T, M) \subset B_{p,k+1}(T, M)$  o que mostra que  $H_p(T, M)$  admite uma estrutura de ST-módulo. É claro que  $H_{p+1}(T, M)$  é também um ST-módulo, sendo sub-módulo de  $H_p(T, M)$ .

Propriedades do Complexo de Koszul

para  $k \geq 1$ ,  $H_{q,k}(T, M) = M_k / T M_{k-1}$  para  $k \geq 1$ .

De fato, observando que  $\wedge^1 T \otimes M_k = A \otimes M_k \cong M_k$ , temos, para  $k \geq 1$ ,

$$T \otimes M_{k-1} \xrightarrow{d} M_k \rightarrow 0 \quad \text{onde}$$

$t \otimes m \mapsto t.m.$

Resulta que  $H_{0,k}(T, M) = M_k / T M_{k-1}$ .

- (ii)  $H_{0,0}(T, M) = M_0$ .  
A igualdade segue de  $0 \rightarrow M_0 \rightarrow 0$ .

$M$  é gerado pelos seus elementos de grau zero se e somente se  $H_{0,+}(T, M) = 0$ . Mais geralmente,  $M$  é gerado pelos seus elementos de grau  $\leq k_0$  se e somente se, para todo  $k > k_0$ ,  $H_{0,k}(T, M) = 0$ .

Demonstração

a) Suponhamos que  $M$  é gerado (como ST-módulo) pelos seus elementos de grau zero, isto é,  $M_k = S^k T \cdot M_0$ ,  $\forall k \geq 1$ . Então  $T \cdot M_{k-1} = T \cdot (S^{k-1} T \cdot M_0) = S^k T \cdot M_0 = M_k$ . Logo, pela propriedade (i) da página anterior,  $H_{0,k}(T, M) = 0$ , para todo  $k \geq 1$ . Portanto  $H_{0,+}(T, M) = \bigoplus_{k \geq 1} H_{0,k}(T, M) = 0$ . Por procedente, seja  $H_{0,+}(T, M) = 0$ . Então  $H_{0,k}(T, M) = 0$ , para todos  $k \geq 1$ . Segue que  $M_k = T \cdot M_{k-1}$ ,  $\forall k \geq 1$ . Isto é,  $M_1 = T \cdot M_0$ ,  $M_2 = T \cdot (M_1) = T \cdot (T \cdot M_0)$ , ... donde  $M$  é gerado, como ST-módulo, por  $M_0$ .

b). Suponhamos que  $M$  é gerado, como ST-módulo, por  $M_0, M_1, \dots, M_{k_0}$ . Para  $k \geq 0$  e  $p \geq 1$ , temos

$$M_{k_0+p} = S^{k_0+p} T \cdot M_0 + S^{k_0+p-1} T \cdot M_1 + \dots + S^p T \cdot M_{k_0}$$

Então  $T \cdot M_{k_0+p-1} = T \cdot (S^{k_0+p-1} T \cdot M_0 + S^{k_0+p-2} T \cdot M_1 + \dots + S^p T \cdot M_{k_0}) = M_{k_0+p}$

Logo  $H_{0,k_0+p} = M_{k_0+p} / T \cdot M_{k_0+p-1} = 0$ ;  $\forall p \geq 1$  donde  $H_{0,k}(T, M) = 0$ ,  $\forall k > k_0$ .

Reciprocamente, seja  $H_{0,k}(T, M) = 0, \forall k > k_0 \geq 0$ .  
 Como  $H_{0,k}(T, M) = M_k / T \cdot M_{k-1}$ , para  $k \geq 1$ ,  
 resulta  $M_k = T \cdot M_{k-1}, \forall k > k_0$ , donde

$$M_{k_0+1} = T \cdot M_{k_0}, \quad M_{k_0+2} = T \cdot M_{k_0+1} = T \cdot (T \cdot M_{k_0}), \dots$$

$$\dots M_{k_0+l} = T \cdot \dots \cdot T(T \cdot M_{k_0}), \dots \quad \forall l \geq 1, \text{ logo}$$

$M$  é gerado como ST-módulo por  $M_0, M_1, \dots, M_{k_0}$

### Proposição A-1

Suponhamos que, para todo inteiro  $k, M_k$  é um  $A$ -módulo de tipo finito. É condição necessária e suficiente para que  $M$  seja um ST-módulo de tipo finito que exista um inteiro  $k_0$  tal que  $H_{0,k}(T, M) = 0$ , para todo  $k > k_0$ .

### Demonstração

Seja  $M$  um ST-módulo de tipo finito e seja  $\{m_1, m_2, \dots, m_i\}$  um conjunto de geradores de  $M$ . Sem perda de generalidade, pode-se supor que  $m_j, j=1, 2, \dots, i$  é um elemento homogêneo de  $M$ .  
 Seja  $k_0$  o máximo grau dos elementos  $m_j, j=1, 2, \dots, i$ .  
 Então  $M$  é gerado, como ST-módulo, pelos seus elementos de grau  $\leq k_0$ . Segue do Lema A-1 que  $H_{0,k}(T, M) = 0, \forall k > k_0$ .

Reciprocamente, suponhamos que exista um inteiro  $k_0$  tal que  $H_{0,k}(T, M) = 0, \forall k > k_0$ .  
 Então, pelo Lema A-1,  $M$  é gerado, como ST-módulo por  $M_0, M_1, \dots, M_{k_0}$ . Como estes são, por hipótese, módulos de tipo finito, segue que  $M$  é um ST-módulo de tipo finito.

Proposição A.1

Seja  $E$  um  $A$ -módulo. Então

$H_{p,k}(T, ST \otimes_A E) = 0$  se  $p \neq k$  ou  $k < 0$  ou  $k > n$ .

$H_{0,0}(T, ST \otimes_A E) = E$

Demonstração

Seja  $M = ST \otimes_A E = \bigoplus_{k=0}^n S^k T \otimes_A E$ . Notaremos

$M_k = S^k T \otimes_A E$ . Então  $M = \bigoplus_{k=0}^n M_k$  é um  $ST$ -módulo

com a multiplicação  $S^k T \otimes M_k \rightarrow S^{k+1} T \otimes E$

definida por  $(s_1, \dots, s_k, r_1, \dots, r_k \otimes m_k) \mapsto s_1, \dots, s_k, r_1, \dots, r_k \otimes m_k$

Seja  $d: \Lambda^p T \otimes S^k T \rightarrow \Lambda^{p-1} T \otimes S^{k+1} T$  dada por

$$t_1 \wedge \dots \wedge t_p \otimes s_1, \dots, s_k \mapsto \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} t_1 \wedge \dots \wedge \hat{t}_i \wedge \dots \wedge t_p \otimes s_1, \dots, s_k$$

então temos ainda por  $d$  a aplicação

$$d \otimes I_E: \Lambda^p T \otimes S^k T \otimes E \rightarrow \Lambda^{p-1} T \otimes S^{k+1} T \otimes E$$

produto de  $d$  pela identidade em  $E$ .

Basta mostrar que a homologia é nula em

$\Lambda^p T \otimes S^k T$  donde resultará que a homologia é

também nula em  $\Lambda^p T \otimes S^k T \otimes E$ . De fato, seja

$$h_p: \Lambda^p T \otimes S^k T \rightarrow \Lambda^{p+1} T \otimes S^{k-1} T$$

$$h(t_1 \wedge \dots \wedge t_p \otimes u_1, \dots, u_k) = (-1)^p \sum_{i=1}^k t_1 \wedge \dots \wedge t_p \wedge u_i \otimes u_1, \dots, \hat{u}_i, \dots, u_k$$

Então  $h_{p-2} \circ d_p + d_{p+1} \circ h_p = 0$ , onde  $C \in \mathbb{Z}$ .

com efeito,

$$h_{p-2} \circ d_p(t_1 \wedge \dots \wedge t_p \otimes u_1, \dots, u_k) =$$

$$= h_{p-2} \left( \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} t_1 \wedge \dots \wedge \hat{t}_i \wedge \dots \wedge t_p \otimes t_i, u_1, \dots, u_k \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} (-1)^{p+1} \left[ t_1 \wedge \dots \wedge \hat{t}_i \wedge \dots \wedge t_p \wedge t_i \otimes u_1, \dots, u_k + \sum_{j=1}^k t_1 \wedge \dots \wedge \hat{t}_i \wedge \dots \wedge t_p \wedge u_j \otimes t_i u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_k \right]$$

$$= d_{p+1} \circ h_p(t_1 \wedge \dots \wedge t_p \otimes u_1, \dots, u_k) = d_{p+1} \left( (-1)^p \sum_{j=1}^k t_1 \wedge \dots \wedge t_p \wedge u_j \otimes u_1, \dots, \hat{u}_j, \dots, u_k \right)$$

$$(-1)^j \sum_{j=1}^k \left[ (-1)^p \hat{t}_2 \wedge \dots \wedge \hat{t}_p \otimes u_1 \wedge \dots \wedge \hat{u}_j \wedge \dots \wedge u_k + \sum_{j=1}^p (-1)^{i+j} \hat{t}_2 \wedge \dots \wedge \hat{t}_i \wedge \dots \wedge \hat{t}_p \wedge u_j \otimes \hat{u}_1 \wedge \dots \wedge \hat{u}_j \wedge \dots \wedge u_k \right]$$

Resultado

$$h_{p-1} \circ d_p + d_{p+1} \circ h_p (\hat{t}_2 \wedge \dots \wedge \hat{t}_p \otimes u_1 \wedge \dots \wedge u_k) =$$

$$= \sum_{i=1}^p (-1)^{i+p} \hat{t}_2 \wedge \dots \wedge \hat{t}_i \wedge \dots \wedge \hat{t}_p \otimes u_1 \wedge \dots \wedge u_k + \sum_{j=1}^k (-1)^{2j} \hat{t}_2 \wedge \dots \wedge \hat{t}_p \otimes u_1 \wedge \dots \wedge \hat{u}_j \wedge \dots \wedge u_k =$$

$$= \sum_{i=1}^p (-1)^{2p} \hat{t}_2 \wedge \dots \wedge \hat{t}_p \otimes u_1 \wedge \dots \wedge u_k + \sum_{j=1}^k (-1)^{2j} \hat{t}_2 \wedge \dots \wedge \hat{t}_p \otimes u_1 \wedge \dots \wedge u_k$$

$= (p+k) (\hat{t}_2 \wedge \dots \wedge \hat{t}_p \otimes u_1 \wedge \dots \wedge u_k)$ .  
 Assim,  $h_{p-1} \circ d_p + d_{p+1} \circ h_p = cI$ , donde, como na demonstração do lema II.1, resulta  $H_{p,k}(T, ST) = 0$  e  $p$  e  $k$  não são ambos nulos. Logo  $H_{p,k}(T, ST \otimes_r E) = 0$  e  $p$  e  $k$  não são ambos nulos.

Por outro lado, pela propriedade (ii) do complexo de Koszul,  $H_{0,0}(T, M) = M_0$ . Sendo  $M_0 = S^0 T \otimes_A E = A \otimes E \cong E$ , temos  $H_{0,0}(T, M) = E$ , o que termina a demonstração.

Seja  $t \in T$ . Denotaremos por  $\mu(t): M \rightarrow M$  a multiplicação por  $t$  em  $M$  e por  $e(t): \Lambda T \rightarrow \Lambda T$  a multiplicação por  $t$  em  $\Lambda T$ . Usaremos ainda as notações  $\mu(t)$  e  $e(t)$  para designar as aplicações  $I_{\Lambda T} \otimes \mu(t)$  e  $e(t) \otimes I_M$ , respectivamente. Assim, para  $\mu(t): \Lambda T \otimes M \rightarrow \Lambda T \otimes M$ , vale o seguinte lema:



lema

$$e(t) \circ d + d \circ e(t) = \mu(t)$$

Demonstração

$$\text{Tenemos } \Lambda^{p+1} T \otimes M \xrightarrow[e(t)]{d} \Lambda^p T \otimes M \xrightarrow[e(t)]{d} \Lambda^{p-1} T \otimes M$$

$$\begin{aligned} \text{Assim, } d \circ e(t)(t_1 \wedge \dots \wedge t_p \otimes m) &= d(t_1 \wedge t_2 \wedge \dots \wedge t_p \otimes m) = \\ &= t_1 \wedge \dots \wedge t_p \otimes t_m + \sum_{i=1}^p (-1)^i t_1 \wedge t_2 \wedge \dots \wedge \hat{t}_i \wedge \dots \wedge t_p \otimes t_i m = \\ &= t_1 \wedge \dots \wedge t_p \otimes t_m - \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} t_1 \wedge t_2 \wedge \dots \wedge \hat{t}_i \wedge \dots \wedge t_p \otimes t_i m = \\ &= \mu(t)(t_1 \wedge \dots \wedge t_p \otimes m) - e(t) \circ d(t_1 \wedge \dots \wedge t_p \otimes m), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{pois } e(t) \circ d(t_1 \wedge \dots \wedge t_p \otimes m) &= e(t) \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} t_1 \wedge \dots \wedge \hat{t}_i \wedge \dots \wedge t_p \otimes t_i m, \\ &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} t_1 \wedge t_2 \wedge \dots \wedge \hat{t}_i \wedge \dots \wedge t_p \otimes t_i m, \end{aligned}$$

o que demonstra o lema.

Corolário A-2.

Se  $\alpha$  é um ciclo de  $K_p(T, M)$  e  $\varphi \in S^+ T = \sum_{k \geq 1} S^k T$ , então  $\varphi \alpha$  é um bordo.

De fato, seja  $\alpha \in \Lambda^p T \otimes M$  com  $d\alpha = 0$ .  
 Pelo lema A.2 resulta  $d \circ e(t)(\alpha) = \mu(t)(\alpha) = t \cdot \alpha$ ,  
 donde  $t \cdot \alpha$  é um bordo. Resulta que  
 $t \cdot \alpha$  é um bordo, para todo  $t \in S^k T, k \geq 1$   
 donde  $\varphi \alpha$  é um bordo, para  $\varphi \in S^+ T$ .

Corolário A.2.1.

$S^+ T$  está contido no anulador de  $H(T, M)$

## Demonstração

O anulador de  $H(T, M)$ , isto é, a família dos anuladores dos ST-módulos  $H_p(T, M)$ , é, por definição a classe dos conjuntos

$$\{x \in ST \mid x[\alpha] = 0, \forall [\alpha] \in H_p(T, M)\}, \quad p \geq 0$$

Se  $\xi \in S^+T$ ,  $\xi[\alpha] = [\xi\alpha] = 0$ , por  $\xi\alpha \in$  um bordo pelo Corolário A.2. Portanto que  $S^+T$  está contido no anulador de  $H_p(T, M)$ .

## Proposição A.2

Suponhamos que  $A$  é um anel noetheriano,  $T$  um  $A$ -módulo de tipo finito,  $M$  um ST-módulo de tipo finito. Então existe  $k_0$  tal que  $H_{p, k}(T, M) = 0$  para todo inteiro  $k \geq k_0$  e todo inteiro  $p$ .

## Demonstração

Mostramos inicialmente que  $ST$  é um anel noetheriano.

Suponhamos que  $T$  é um  $A$ -módulo livre de tipo finito. Seja  $\{t_1, \dots, t_n\}$  uma base de  $T$ . Se a  $t_i$  fazemos corresponder  $X_i$ , como  $ST$  é gerada, como álgebra sobre  $A$  por  ${}_A^1$  e  $T$ , resulta que  $ST$  é a álgebra dos polinômios  $A[X_1, \dots, X_n]$  são isomorfas. Mas  $A$  é um anel noetheriano por hipótese, donde

$A[X_1, \dots, X_n]$  é um anel noetheriano. Então  $ST$  é um anel noetheriano. Se  $T$  é um  $A$ -módulo de tipo finito, não necessariamente livre,  $ST \cong A[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}$ , onde  $\mathcal{I}$  é um ideal de  $A[X_1, \dots, X_n]$ . De fato, se  $\varphi: A[X_1, \dots, X_n] \rightarrow ST$  é o homomorfismo tal que  $X_i \rightarrow t_i$  onde  $\{t_1, \dots, t_n\}$  é um sistema de geradores de  $T$ , segue que  $ST \cong A[X_1, \dots, X_n]/\ker \varphi$ . Como todo quociente de um anel noetheriano por um ideal qualquer é noetheriano, resulta que  $ST$  é noetheriano.

Mostremos que  $K(T, M)$  é um módulo de tipo finito sobre  $ST$ . De fato, sendo  $T$  um  $A$ -módulo de tipo finito, existe um número  $m \leq$  número de geradores de  $T$  tal que  $\wedge^p T = 0$ ,  $\forall p > m$ . Então  $K(T, M) = \bigoplus_{0 \leq p \leq m} K_p(T, M)$  por  $K_p(T, M) \cong \bigoplus_{A \geq 0} \wedge^p T \otimes M_A$ . Sendo  $M$ , por hipótese,

um  $ST$ -módulo de tipo finito e  $T$  um módulo de tipo finito sobre  $A \cong S^0 T$ , resulta que  $K_p(T, M) = \wedge^p T \otimes M$  é um  $ST$  módulo de tipo finito. Segue que  $K(T, M)$  é de tipo finito.

Mostramos que  $H(T, M) = \dots \oplus H_p(T, M)$  é um módulo sobre ST de tipo finito, no qual cada  $H_p(T, M)$  é um ST-módulo de tipo finito. Com efeito, os ciclos de  $K_p(T, M)$  constituem um submódulo do módulo de tipo finito  $K_p(T, M)$  sobre o anel noetheriano ST. Como todo submódulo de um módulo de tipo finito sobre um anel noetheriano é de tipo finito, resulta que os ciclos de  $K_p(T, M)$  constituem um ST-módulo de tipo finito. Logo  $H_p(T, M)$  é um ST-módulo de tipo finito, donde  $H(T, M)$  também o é. Mas, pelo Corolário A.21,  $ST \cdot H(T, M) = 0$ , donde  $ST \cdot H(T, M) = A \cdot H(T, M)$ . Logo  $H(T, M)$  é um A-módulo de tipo finito.

Seja  $k_0$  o grau máximo dos geradores de  $H(T, M)$  sobre A, isto é, o grau máximo dos geradores de  $H_p(T, M)$ ,  $0 \leq p \leq m$ . Se  $[x] \in H_p(T, M)$ ,  $[x] = \sum_{i \in I} a_i [m_i] = \sum_{i \in I} a_i m_i$  onde o grau de  $a_i m_i$  é o grau de  $m_i$ . Então se  $k > k_0$ ,  $H_{p, k}(T, M) = 0$  pois se existisse um elemento diferente de zero de ordem superior a  $k_0$ , não seria combinação linear de elementos de ordem  $\leq k_0$ , com coeficientes em A, o que inclui a demonstração.

## Bibliografia.

1. R. Branca, "Modules involutifs", Séminaire sur les structures infinitésimales, Publication du Dep. de Mathématiques, Faculté de Sciences de Besançon (1967)
2. H. Goldschmidt, "Existence theorems for analytical linear partial differential equations" Ann. of Math. Vol. 86 (1967)
3. D. B. Gillen, "Formal properties of overdetermined systems of linear partial differential equations" Ph D Thesis, Harvard Univ. (1964)
4. M. Kuranishi, "Lectures on involutive systems of partial differential equations" Publ. Sc. Matem. de São Paulo (1967)
5. S. Stenberg "Notes on partial differential equations" Micrographed Note, Harvard Univ. (to appear)
6. W. J. Swenson "The S. Poincaré estimate", Pacific J. Math. 20 (1967)