Operadores Hipercíclicos e o Critério de Hiperciclicidade

André Quintal Augusto

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE
MESTRE EM CIÊNCIAS

Área de Concentração: **Matemática**

Orientador: **Prof. Dr. Leonardo Pellegrini**

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, agosto de 2015

Operadores Hipercíclicos e o Critério de Hiperciclicidade

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 03/08/2015. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Leonardo Pellegrini (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Rogério Augusto dos Santos Fajardo - IME-USP
- Prof. Dr. Pedro Levit Kaufmann - UNIFESP

Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço ao professor Leonardo Pellegrini por ter aceito ser meu orientador. Sua compreensão, sinceridade, atenção aos detalhes e seus questionamentos foram essenciais para que este trabalho fosse concluído de maneira plenamente satisfatória.

Agradeço aos meus pais por tudo que se possa imaginar. O apoio e o carinho que recebi durante toda a minha vida foram imprescindíveis para mim. Ambos não mediram esforços para que eu pudesse realizar meus objetivos. Sou eternamente grato a eles.

Agradeço aos meus amigos e colegas de graduação e pós-graduação do IME pela convivência nestes últimos anos. Agradeço, em especial, ao Everton, Willian e ao Marcelo pela amizade ao longo de todo esse tempo.

Agradeço a todos os meus amigos do litoral, desde aos amigos do ensino médio até os amigos das partidas de futebol semanais. Em especial, quero agradecer ao meu xará André (Tchongo) e ao Matheus (Mulambo) pela amizade de todas as horas. Ambos são os irmãos que eu nunca tive.

Agradeço também a minha família e a todos aqueles que me agraciaram com seu carinho e amizade.

Por último, mas não menos importante, agradeço a Bárbara Campelo. Não há espaço suficiente para dizer o quanto sou grato pela sua intensa presença na minha vida nestes últimos sete anos. É impossível imaginar o amanhã sem você.

Resumo

AUGUSTO, A. Q. **Operadores Hipercíclicos e o Critério de Hiperciclicidade**. 2015. 95 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

Dado um espaço vetorial topológico X e um operador linear T contínuo em X, dizemos que T é *hipercíclico* se, para algum $y \in X$, o conjunto $\{y, T(y), T^2(y), T^3(y), \ldots T^n(y) \ldots\}$ for denso em X. Um dos principais resultados envolvendo operadores hipercíclicos consiste no chamado *Critério de Hiperciclicidade*. Tal Critério fornece uma condição suficiente para que um operador linear contínuo seja hipercíclico. Por muitos anos, procurou-se saber se o Critério também era uma condição necessária. Em [3], Bayart e Matheron construíram, nos espaços de Banach clássicos c_0 e $\ell_p, 1 \leq p < \infty$, um operador hipercíclico T que não satisfaz o Critério. Neste trabalho, apresentamos a construção realizada por Bayart e Matheron. Além disso, também apresentamos alguns resultados sobre hiperciclicidade.

Palavras-chave: hiperciclicidade, critério de hiperciclicidade, operadores hipercíclicos.

Abstract

AUGUSTO, A. Q. **Hypercyclic Operators and the Hypercyclicity Criterion**. 2015. 95 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

Given a topological vector space X and a continuous linear operator T, we say that T is *hypercylic* if, for some $y \in X$, the set $\{y, T(y), T^2(y), T^3(y), \ldots T^n(y) \ldots\}$ is dense in X. One of the main results concerning hypercyclic operators is the so-called *Hypercyclicity Criterion*. Such Criterion gives a sufficient condition to a continuous linear operator be hypercyclic. For many years, it sought to know if the Criterion was also a necessary condition. In [3], Bayart and Matheron constructed, in the classical Banach spaces c_0 e $\ell_p, 1 \leq p < \infty$, a hypercyclic operator T which doesn't satisfy the Criterion. In this work, we present the Bayart/Matheron construction. We also present some results about hypercyclicity.

Keywords: hypercyclicity, hypercyclicity criterion, hypercyclic operators.

Conteúdo

Notação

$\mathbb{N}$	O conjunto $\{1, 2, 3, 4 \ldots\}$.
$\mathbb{K}$	O corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$B(z, \varepsilon)$	O conjunto $\{x \in X \,:\, d(x, z) < \varepsilon\}$.
B_k	O conjunto $\{x \in X \,:\, d(x, 0) < 1/k\}$.
X^*	O dual topológico do espaço X.
$\mathcal{L}(X)$	O conjunto de todos os operadores lineares em X.
$\mathcal{B}(X)$	O conjunto de todos os operadores lineares contínuos em X.
$\mathbb{K}[X]$	O anel formado por todos os polinômios com coeficientes em $\mathbb{K}$.

Introdução

É um fato bastante conhecido que Per Enflo deu uma resposta negativa ao problema do subespaço invariante em espaços de Banach ao construir um operador em um espaço conveniente. [1] Apesar do problema ainda estar em aberto para os espaços de Hilbert, um avanço talvez não tão conhecido quanto o trabalho de Enflo mas igualmente impressionante foi o feito por C. J. Read em 1988. Ele provou que existe um operador em ℓ_1 que não possui um *subconjunto* fechado invariante não-trivial. Como todo subespaço é, evidentemente, um subconjunto de X, Read resolveu, assim, o problema pela primeira vez em um espaço de Banach clássico.

Ao mostrar que tal operador em ℓ_1 não possuía *subconjuntos* fechados invariantes não-triviais Read despertou o interesse de vários matemáticos para o fenômeno que hoje é conhecido por *hiperciclicidade*.

Definição. *Seja X um espaço vetorial topológico. Um operador linear $T : X \to X$ é dito* **hipercíclico** *se existir um vetor $y \in X$ tal que*

$$\operatorname{orb}(y,T) := \{y, T(y), T^2(y), T^3(y), \ldots T^n(y) \ldots\}$$

é denso em X. Tal vetor y é dito **vetor hipercíclico para** T.

Tendo em vista esta definição, Read demonstrou que existe um operador $T \in \mathcal{B}(\ell_1)$ tal que todo vetor não-nulo $x \in \ell_1$ era um vetor hipercíclico para T. Como há de se suspeitar, o termo *hipercíclico* tem sua origem ligada ao termo *cíclico*.[2] Tal termo foi usado pela primeira vez, segundo Grosse-Erdmann [24, p. 346], por Beauzamy.

Nos anos seguintes ao trabalho de Read, os artigos de Herrero [27],[28] e de Godefroy e Shapiro [19] colocaram novas questões e demonstraram novos teoremas relativos à hiperciclicidade. Ainda, descobriu-se também que tal fenômeno já havia sido estudado anteriormente: a tese de doutorado de Carol Kitai [29], ainda que desconhecida à época, continha resultados que seriam redescobertos mais tarde. Também descobriu-se que exemplos de operadores hipercíclicos (ainda que sem esta nomenclatura) já tinham sido publicados antes, vide os trabalhos de G.R. MacLane [32] e S. Rolewicz [35].

[1] O problema do subespaço invariante é o seguinte: dado um espaço de Banach X de dimensão $n > 1$ e um operador linear T contínuo em X, existe um subespaço $W \subseteq X$ tal que W é fechado, invariante (isto é, $T(W) \subseteq W$) e não-trivial (ou seja, $W \neq \{0\}$ e $W \neq X$).

[2] Lembrando que um operador é dito *cíclico* se existir um $y \in X$ tal que $\operatorname{span}\operatorname{orb}(y,T)$ é denso em X. Dessa forma, é claro que todo operador hipercíclico é um operador cíclico.

Com o passar do tempo, viu-se que hiperciclicidade (e, de maneira mais geral, dinâmica linear) consiste, por si só, em um fenômeno bastante interessante (vide [5, pp. ix–x] e [25, p. v]). Mostrou-se, por exemplo, que todo operador hipercíclico possui um conjunto G_δ denso de vetores hipercíclicos. [3] Tal propriedade não é compartilhada com os operadores cíclicos, como mostra Shapiro [36, pp. 33-34]. Dessa forma, um operador cíclico que por ventura seja hipercíclico terá um conjunto denso de vetores cíclicos. Assim, o estudo de subespaços invariantes de um operador se torna muito mais rico se este for hipercíclico.

Outros teoremas interessantes também foram descobertos: entre eles, podemos citar o Teorema de Ansari (toda potência de um operador hipercíclico é hipercíclico, vide [2]), o Teorema de Bonet e Peris (todo espaço de Fréchet separável e de dimensão infinita admite um operador hipercíclico, vide [12]), o Teorema de Grivaux (todo operador no espaço de Hilbert separável pode ser escrito como a soma de dois operadores hipercíclicos, vide [21]) e o chamado *Critério de Hiperciclicidade*.

A primeira versão de tal critério foi obtida por Carol Kitai, em 1982, em sua tese, vide [29]. Como já dissemos, tal trabalho ficou desconhecido por muito tempo, visto que nunca foi publicado. Anos depois, tal resultado foi demonstrado independentemente por Gethner e Shapiro [18]. Dessa forma, o Critério foi sendo refinado e aprimorado por outros matemáticos até chegar ao seguinte enunciado:

Critério de Hiperciclicidade. *Sejam X um espaço de Fréchet separável e $T : X \to X$ um operador linear limitado. Suponhamos que existem subconjuntos X_0, Y_0 densos, uma sequência crescente de inteiros positivos (n_k) e funções $S_{n_k} : Y_0 \to X$ tais que:*

(i) $T^{n_k}(x) \to 0$, *para todo* $x \in X_0$.

(ii) $S_{n_k}(y) \to 0$, *para todo* $y \in Y_0$.

(iii) $T^{n_k} \circ S_{n_k}(y) \to y$, *para todo* $y \in Y_0$.

Então T é hipercíclico.

Como pode-se ver, o Critério de Hiperciclicidade consiste numa condição *suficiente* para que um operador T seja hipercíclico. Quase que imediatamente surge a pergunta natural: será esta condição também *necessária?* Isto é, será que todo operador hipercíclico satisfaz o Critério de Hiperciclicidade?

Principal Problema em Hiperciclicidade. *Todo operador hipercíclico satisfaz o Critério de Hiperciclicidade?*

Tal problema foi, por muitos anos, o principal problema em aberto na teoria de operadores hipercíclicos e, por isso, recebeu este nome.

[3] Para uma recordação da definição de conjunto G_δ em um espaço topológico, fazemos referência a [34, p. 249].

Em 2006, finalmente C. J. Read e Manuel de la Rosa resolveram tal problema na negativa, como pode-se ver em [16].[4] Ou seja, eles construíram um operador hipercíclico T que não satisfazia o Critério de Hiperciclicidade. Baseada na construção de De La Rosa/Read, Frédéric Bayart e Étienne Matheron conseguiram construir em [3] um contraexemplo nos espaços de Banach clássicos, a saber, c_0 e $\ell_p, 1 \leq p < \infty$. [5]

Nosso objetivo neste trabalho é apresentar a construção feita por Bayart e Matheron. O primeiro capítulo apresenta alguns resultados preliminares de Análise Funcional, de maneira a facilitar o entendimento de todo este trabalho. No segundo capítulo, apresentaremos os conceitos básicos de hiperciclicidade, daremos exemplos e demonstraremos alguns resultados clássicos de maneira a fazermos uma introdução ao tema. Entre os resultados apresentados estão o Critério de Hiperciclicidade e o Teorema de Ansari, já citado anteriormente.

No terceiro capítulo apresentaremos uma estratégia que nos possibilitará resolver o Principal Problema em Hiperciclicidade de maneira satisfatória pois, como veremos durante o texto, tanto De La Rosa/Read como Bayart/Matheron não resolveram o problema de uma maneira "direta". [6] Já o Capítulo 4 é destinado ao nosso objetivo principal: a construção realizada por Bayart e Matheron.

[4] Apesar do artigo ser de 2009, um preprint com a construção foi disponibilizado em 2006.

[5] Apesar de o artigo de Bayart e Matheron ser anterior, um preprint com a construção de De La Rosa e Read já estava em circulação, como Bayart/Matheron dizem (e referenciam) em seu próprio artigo.

[6] O que queremos dizer com *resolver de uma maneira "direta"* será melhor explicado no Capítulo 3, p. 43.

Capítulo 1

Preliminares

Ao longo do texto, assumiremos uma familiaridade com noções básicas de Análise Funcional e Topologia. Entretanto, alguns resultados que não estão presentes em cursos básicos de Análise Funcional serão utilizados. Por isso apresentaremos, neste capítulo, algumas definições e resultados envolvendo Espaços Vetoriais Topológicos, Espaços de Fréchet e Bases de Schauder de maneira a facilitar o entendimento do resto do texto. Tais resultados serão utilizados e referenciados ao longo deste trabalho.

1.1 Espaços Vetoriais Topológicos

Definição 1.1. *Seja V um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e τ um topologia em V. Consideremos as funções adição $+ : V \times V \to V$ dada por $+(a, b) := a + b$ e multiplicação por escalar $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ dada por $\cdot(\lambda, a) := \lambda \cdot a$.*

Se ambas as funções $+, \cdot$ forem contínuas com respeito as respectivas topologias produto em $V \times V$ e $\mathbb{K} \times V$, dizemos então que (V, τ) é um **espaço vetorial topológico.**

Sejam V um espaço vetorial e $\{p_i : i \in \mathbb{N}\}$ uma família de seminormas definidas em V. Seja $B^i_r(x_0) = \{x \in V \,:\, p_i(x - x_0) < r\}$ e tome

$$\mathbf{B} = \{B^i_r(x_0) \,:\, r > 0,\, i \in \mathbb{N},\, x_0 \in X\}.$$

Podemos agora definir uma topologia τ em V tal que **B** é uma subbase para τ, isto é, o conjunto de todas as interseções finitas de elementos de **B** forma uma base para a topologia τ. [1] Tal topologia τ é dita **topologia induzida pela família de seminormas** $\{p_i : i \in \mathbb{N}\}$. Assim, é fácil verificar que (V, τ) é um espaço vetorial topológico.

Proposição 1.2. *Seja V um espaço vetorial topológico cuja topologia τ é induzida pela família de seminormas $\{p_i : i \in \mathbb{N}\}$. Um conjunto $U \subseteq V$ é um aberto em τ se, e somente se, para todo $x_0 \in U$, existem $p_{i_1}, \ldots, p_{i_n}$ e $r > 0$ tais que $\bigcap_{j=1}^{n} B^{i_j}_r(x_0) \subseteq U$.*

[1] Para uma definição de subbase e para uma mostrar que topologia gerada por ela é, de fato, uma topologia, fazemos referência a [34, p. 82].

DEMONSTRAÇÃO: ($\Longrightarrow$). Seja $x_0 \in U$. Como **B** é uma subbase para a topologia τ, então temos que U é formado pelas uniões de interseções finitas de elementos de **B**. Como $x_0 \in U$, então x_0 pertence a alguma dessas interseções finitas. Sendo assim, digamos que $x_0 \in \bigcap_{j=1}^{n} B_{r_j}^{i_j}(x_j) \subseteq U$, para algum $n \in \mathbb{N}$, $i_j \in \mathbb{N}$, $r_j > 0$ e $x_j \in X$.

Logo, para todo $j = 1, \ldots, n$, temos que $x_0 \in B_{r_j}^{i_j}(x_j)$. Assim, por definição, $p_{i_j}(x_0 - x_j) < r_j$. Portanto, $r_j - p_{i_j}(x_0 - x_j) > 0$. Definimos então

$$r = \min\{r_j - p_{i_j}(x_0 - x_j) \, : \, j = 1, \ldots, n\}.$$

Dessa forma, temos que $B_r^{i_j}(x_0) \subseteq B_{r_j}^{i_j}(x_j)$, para todo $j = 1, \ldots, n$. De fato, seja $y \in B_r^{i_j}(x_0)$. Temos que:

$$\begin{aligned} p_{i_j}(y - x_j) &= p_{i_j}(y - x_0 + x_0 - x_j) \leq p_{i_j}(y - x_0) + p_{i_j}(x_0 - x_j) \\ &< r + p_{i_j}(x_0 - x_j) \leq r_j - p_{i_j}(x_0 - x_j) + p_{i_j}(x_0 - x_j) = r_j. \end{aligned}$$

Logo, $p_{i_j}(y - x_j) < r_j$, o que mostra que $y \in B_{r_j}^{i_j}(x_j)$ e, consequentemente, que $B_r^{i_j}(x_0) \subseteq B_{r_j}^{i_j}(x_j)$, para todo $j = 1, \ldots, n$.

Logo, $x_0 \in \bigcap_{j=1}^{n} B_r^{i_j}(x_0) \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} B_{r_j}^{i_j}(x_j) \subseteq U$, como desejado.

($\Longleftarrow$). Sendo **B** uma subbase, tal implicação é imediata.

■

Vejamos agora um exemplo que será bastante útil no próximo capítulo:

Exemplo 1. Seja $X = c_{00}$, isto é, o espaço vetorial de todas as sequências de números reais que possuem apenas uma quantidade finita de coordenadas não-nulas. Tomemos a topologia induzida pela família de normas

$$p_v(x) = \|x\|_v = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \, v_n$$

onde $v = (v_n)$ é uma sequência qualquer de números reais estritamente positivos.

Vamos mostrar que este espaço é separável, isto é, que X admite um conjunto denso e enumerável. Seja $D \subseteq X$ o conjunto de todas as sequências de números racionais que possuem apenas uma quantidade finita de coordenadas não-nulas.

Seja $x \in X$ e seja $U \subseteq X$ uma vizinhança aberta de x. Dessa forma, pela proposição anterior, existem $p_{v_1}, \ldots, p_{v_n}$ e $r > 0$ tais que $x \in \bigcap_{j=1}^{n} B_r^{v_j}(x) \subseteq U$. Vamos denotar a sequência v_k associada a norma p_{v_k} por $v_k = (v_1^k, v_2^k, v_3^k, \ldots)$. Sendo $v_n^k > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, vamos construir uma sequência $w = (w_i)_{i \in \mathbb{N}} \in X$ da seguinte maneira: $w_i = \max\{v_i^1, v_i^2, \ldots, v_i^n\}$; isto é, cada coordenada w_i é igual a maior i-ésima coordenada das sequências $v_1, \ldots, v_k$ anteriores. Observe que $w_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_{00}$, existe um $t \in \mathbb{N}$ tal que $x_t \neq 0$ mas $x_{t+k} = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Vamos construir uma sequência $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in D$ da seguinte maneira: $y_{t+k} = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$; para o restante, tomaremos $y_i \in \mathbb{Q}$ tais que

$$|y_i - x_i| < \frac{r}{t \cdot w_i}$$

onde $i = 1, 2, \ldots t$. Sendo $\mathbb{Q}$ denso em $\mathbb{R}$, então é óbvio que podemos construir tal sequência desta maneira. Assim, também é claro que $y \in D$. Agora, note que

$$\|y - x\|_{v_i} = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n - x_n| \, v_n^i = \sum_{n=1}^{t} |y_n - x_n| \, v_n^i \leq \sum_{n=1}^{t} |y_n - x_n| \, w_n < \sum_{n=1}^{t} \frac{r}{t \cdot w_n} w_n = r$$

para todo $i = 1, 2, \ldots n$.

Dessa forma, $y \in B_r^{v_i}(x)$, para todo $i = 1, 2, \ldots n$. Assim, $y \in \bigcap_{j=1}^{n} B_r^{v_j}(x) \subseteq U$, o que mostra que D é denso em X, como desejado.

Seja V um espaço vetorial topológico cuja topologia é induzida pela família de seminormas. Vimos, na proposição anterior, como podemos caracterizar os abertos de V. Dessa forma, também podemos pensar em como podemos caracterizar a convergência de uma sequência em V. Tal pergunta é pertinente pois sabemos que, em um espaço topológico, a convergência de uma sequência está "associada" aos abertos do espaço.

Neste espírito, temos a proposição a seguir.

Proposição 1.3. *Seja V um espaço vetorial topológico cuja topologia τ é induzida pela família de seminormas $\{p_i : i \in \mathbb{N}\}$. Dada uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ e um $x \in X$, temos que $x_n \to x$ se, e somente se, $p_i(x_n - x) \to 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$.*

DEMONSTRAÇÃO: $\underline{(\Longrightarrow)}$. Suponhamos que $x_n \to x$ e fixemos $\alpha \in \mathbb{N}$ e um $\varepsilon > 0$. Então, $B_\varepsilon^\alpha(x)$ é uma vizinhança aberta de x. Assim, pela definição de convergência em um espaço topológico, existe um n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$, $x_n \in B_\varepsilon^\alpha(x)$.

Logo, para todo $n \geq n_0$, temos que $p_\alpha(x_n - x) < \varepsilon$, o que mostra que $p_\alpha(x_n - x) \to 0$, como desejado.

$\underline{(\Longleftarrow)}$. Seja U uma vizinhança aberta de x. Logo, pela proposição anterior, podemos encontrar

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ e um $r > 0$ tais que

$$x \in \bigcap_{j=1}^{n} B_r^{\alpha_j}(x) \subseteq U.$$

Por hipótese, para cada $j = 1, \ldots, n$, temos que $p_{\alpha_j}(x_n - x) \to 0$. Logo, para cada j, existe um k_j tal que, se $n \geq k_j$, então $p_{\alpha_j}(x_n - x) < r$.

Seja $k = \max\{k_j \,:\, j = 1, \ldots, n\}$. Logo, para todo $n \geq k$, temos que $p_{\alpha_j}(x_n - x) < r$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Portanto, para todo $n \geq k$, temos que $x_n \in \bigcap_{j=1}^{n} B_r^{\alpha_j}(x) \subseteq U$.

Portanto, como U é uma vizinhança aberta qualquer de x, temos que $x_n \to x$, como queríamos provar.

■

1.2 Espaços de Fréchet

Seja X um espaço vetorial topológico. Lembremos que um conjunto $C \subseteq X$ é dito **convexo** se $tx + (1-t)y \in C$, para todo $0 < t < 1$ e para todo $x, y \in C$. Além disso, se o espaço X admitir uma base de abertos formada por conjuntos convexos então ele é dito **localmente convexo**. É fácil verificar que todo espaço vetorial topológico cuja topologia é induzida por uma família de seminormas é um espaço localmente convexo.

Definição 1.4. *Um espaço vetorial topológico X é dito um* **espaço de Fréchet** *se ele for localmente convexo e se sua topologia pode ser induzida por uma métrica d invariante por translações e completa.*

Em particular, todo espaço de Banach é um espaço de Fréchet. Vejamos um exemplo de um espaço de Fréchet cuja topologia é induzida por uma família de seminormas. Tal espaço será lembrado no próximo capítulo.

Exemplo 2. Seja $\mathcal{H}(G)$ o conjunto de todas as funções complexas holomorfas cujo domínio é um aberto $G \subseteq \mathbb{C}$.[2] Seja $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ uma família de compactos tais que $G = \cup_{n=1}^{\infty} K_n$ e $K_n \subseteq \operatorname{int} K_{n+1}$.

Tomemos a família $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de seminormas definidas por

$$p_n(f) = \sup\{|f(z)| \,:\, z \in K_n\}.$$

A topologia induzida por tal família de seminormas é dita **topologia compacto-aberta**. Dessa forma, pelo que comentamos anteriormente, é fácil verificar que $\mathcal{H}(G)$ é um espaço localmente

[2]Neste caso (e também quando não estiver explícito), admitimos que a topologia de $\mathbb{C}$ é a topologia oriunda da métrica usual.

convexo. Para que $\mathcal{H}(G)$ seja um espaço de Fréchet, resta acharmos uma métrica d que seja completa, invariante por translações e induza a mesma topologia que a família de seminormas $\{p_n\}$.

Pela Proposição IV.2.1 de [13, p. 109], temos que $\mathcal{H}(G)$ possui uma métrica d invariante por translações cuja topologia induzida (pela métrica) é a mesma que a topologia induzida pela família de seminormas. Como $(\mathcal{H}(G), d)$ é um espaço métrico completo, vide Corolário VII.2.3 de [14, p. 152], então temos que $\mathcal{H}(G)$ é um espaço de Fréchet.[3]

Estaremos particularmente interessados no caso em que $G = \mathbb{C}$. Neste caso, podemos tomar os compactos $K_n = \overline{B(0,n)}$, isto é, cada compacto é o disco centrado na origem e de raio n. Assim, temos que

$$p_n(f) = \sup\{|f(z)| \,:\, z \leq n\}.$$

Visto este exemplo temos, a seguir, alguns resultados que nos serão úteis ao longo do texto.

Lema 1.5. *Seja X um espaço de Fréchet e sejam $f_1, f_2 \in X^*$ tais que $\{f_1, f_2\}$ é um conjunto linearmente independente em X^*. Então,* $\ker f_i \not\subset \ker f_j$*, para* $i, j = 1, 2$ *com* $i \neq j$.

DEMONSTRAÇÃO: Suponha que $\ker f_1 \subseteq \ker f_2$. Como $f_2 \not\equiv 0$ (pois $\{f_1, f_2\}$ é um conjunto linearmente independente) e $\ker f_1$ é um subespaço maximal, então $\ker f_1 = \ker f_2 \subsetneq X$.

Seja então $x_0 \in X$ tal que $x_0 \notin \ker f_2$. Logo, é claro que $X = \ker f_2 \oplus [x_0]$. Seja $x = y + \lambda x_0 \in X$ qualquer, onde $y \in \ker f_2$. Note agora que $f_2(x) = f_2(y + \lambda x_0) = f_2(y) + \lambda f_2(x_0) = \lambda f_2(x_0)$. Por outro lado, temos que $f_1(x) = f_1(y + \lambda x_0) = f_1(y) + \lambda f_1(x_0) = \lambda f_1(x_0)$, visto que $y \in \ker f_2 = \ker f_1$.

Daí, temos que $f_2(x) = \dfrac{f_2(x_0)}{f_1(x_0)} f_1(x)$, para qualquer $x \in X$. Isto é um absurdo, pois estamos supondo que $\{f_1, f_2\}$ é um conjunto linearmente independente.

■

Corolário 1.6. *Seja X um espaço de Fréchet e sejam $f_1, f_2 \in X^*$ tais que $\{f_1, f_2\}$ é um conjunto linearmente independente em X^*. Seja $\psi : X \to \mathbb{R}^2$ dado por $\psi(y) = (f_1(y), f_2(y))$. Nestas condições, temos que ψ é sobrejetor.*

DEMONSTRAÇÃO: Pelo lema anterior, existe $x' \in X$ tal que $f_1(x') = 0$ e $f_2(x') \neq 0$. Tomando $x = (1/f_2(x')) \cdot x' \in X$, temos então que $f_1(x) = 0$ e $f_2(x) = 1$. De maneira análoga, existe um $y \in X$ tal que $f_1(y) = 1$ e $f_2(y) = 0$.

Seja $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Logo, $\psi(ay + bx) = (f_1(ay + bx), f_2(ay + bx)) = (af_1(y) + bf_1(x), af_2(y) + bf_2(x)) = (a, b)$, como desejado.

[3] Uma demonstração detalhada de que $\mathcal{H}(G)$ é um espaço de Fréchet pode ser encontrada em [14, pp. 142–152].

■

Proposição 1.7. *Sejam X um espaço de Fréchet e $T \in \mathcal{B}(X)$. Então o operador adjunto T^* é injetor se, e somente se, a imagem de T é densa em X.*

DEMONSTRAÇÃO: Lembrando que o adjunto $T^* : X^* \to X^*$ é definido por $T^*(x^*)(y) = x^*(T(y))$ temos que

$$\ker(T^*) = \{x^* \in X^* : x^*(T(y)) = 0, \forall y \in X\} = T(X)^\perp$$

o que mostra o desejado.

■

1.3 Bases de Schauder

Veremos nesta seção, ainda que de maneira breve, algumas propriedades das bases de Schauder. Tais propriedades serão úteis no Capítulo 4. Vamos começar pela definição:

Definição 1.8. *Seja X um espaço de Banach. Então uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ é dita uma* **base de Schauder** *se para todo $x \in X$, existe uma única sequência $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n x_n$.*

Note que se X possui uma base de Schauder, então X é separável. Além disso, é fácil ver que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base de Schauder, então $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto linearmente independente.

Sabemos, da Álgebra Linear, que todo espaço vetorial de dimensão finita admite uma base (de Hamel). No caso das bases de Schauder e os espaços de Banach, este nem sempre é o caso, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 3. Seja $X = c_0$ ou $X = \ell_p, 1 \leq p < \infty$. Então é fácil verificar que se e_i é o vetor tal que a sua única coordenada não-nula é 1 na i-ésima posição, então a sequência $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma base de Schauder para X.

Para o caso $X = \ell_\infty$, observe que ℓ_∞ não é separável. Portanto, ℓ_∞ não admite uma base de Schauder.

Nos espaços de dimensão finita, sabemos da existência das chamadas *projeções*, isto é, operadores lineares π tais que $\pi(V) = W$ e $\pi(w) = w$, para todo $w \in W$, onde W é um subespaço vetorial do espaço vetorial V. Além desta projeção, temos também o chamado *funcional coordenada*, isto é, o funcional linear f_i pertencente a base dual do espaço V^*. Tal funcional tem a propriedade de que, se $(e_j)_{j=1}^n$ é uma base de V, então $f_i(e_j) = \delta_{ij}$, onde δ_{ij} é o chamado delta de Kronecker.

Tais conceitos admitem generalizações para os espaços com bases de Schauder, como veremos a seguir.

Definição 1.9. *Seja X um espaço de Banach e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma base de Schauder para X. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos então as* **projeções canônicas** *$P_m : X \to X$ por $P_m\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right) = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n$. Definimos também, para cada $m \in \mathbb{N}$, os* **funcionais coordenadas** *$x_m^* : X \to \mathbb{K}$ por $x_m^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right) = \alpha_m$.*

Tomemos $W = \operatorname{span}\{x_i : i = 1, \dots, m\}$. Logo, por definição, $P_m(X) = W$ e $P_m(w) = w$, para todo $w \in W$. Assim, as projeções canônicas P_m tem as mesmas propriedades das projeções em espaços de dimensão finita e, portanto, são uma generalização natural destas. Da mesma maneira, os funcionais coordenadas são uma generalização natural dos seus homônimos em espaços de dimensão finita.

É bem sabido que se X é um espaço normado de dimensão finita, então todo $T \in \mathcal{L}(X)$ é contínuo. Logo, todas as projeções, no caso de dimensão finita, são contínuas. Como continuidade é, evidentemente, uma propriedade importante para um operador linear, vamos nos preocupar agora em mostrar que as projeções canônicas são contínuas.

Precisamos, primeiro, da seguinte proposição:

Proposição 1.10. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma base de Schauder para o espaço de Banach $(X, \|\cdot\|)$. Defina $\|\cdot\|_{(x_n)}$ em X por $\|x\|_{(x_n)} = \sup_k \left\|\sum_{n=1}^{k} \alpha_n x_n\right\|$, onde $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$. Então:*

(i) $\|\cdot\|_{(x_n)}$ é uma norma em X, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base de Schauder para $(X, \|\cdot\|_{(x_n)})$ e as projeções canônicas P_m são uniformemente limitadas por 1 sob a norma $\|\cdot\|_{(x_n)}$.

(ii) $\|\cdot\|_{(x_n)}$ é uma norma equivalente a $\|\cdot\|$ em X.

DEMONSTRAÇÃO: Ver [17, pp. 162–163], Lema 6.4.

■

Como as duas normas são equivalentes, então existe um $M > 0$ tal que $M\|x\|_{(x_n)} \leq \|x\|$, para todo $x \in X$. Dessa forma, temos o seguinte teorema:

Teorema 1.11. *Seja X um espaço de Banach e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma base de Schauder para X. Então as projeções canônicas P_m são uniformemente limitadas (com respeito à norma original de X).*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $x \in X$ tal que $\|x\| = 1$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma base de Schauder para X, então podemos escrever $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$. Assim, para todo $m \in \mathbb{N}$, temos:

$$\|P_m(x)\| = \left\|P_m\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right)\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n\right\| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right\|_{(x_n)} \leq M^{-1}\left\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right\| = M^{-1}\|x\|$$

onde a primeira desigualdade é obtida através da definição de $\|\cdot\|_{(x_n)}$ e a segunda é obtida através da equivalência de normas, como comentamos anteriormente. Assim, $\|P_m\| \leq M^{-1}$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Logo, segue que $\sup\limits_m \|P_m\| < \infty$, como desejado.

■

Este teorema nos mostra que as projeções canônicas são contínuas e, além disso, uniformemente limitadas, assim como as projeções em espaços de dimensão finita. A seguir, temos dois corolários. O primeiro nos diz que os funcionais coordenados também são contínuos:

Corolário 1.12. *Seja X um espaço de Banach e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma base de Schauder para X. Então os funcionais coordenadas x_n^* são contínuos.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ qualquer. Seja $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ um elemento de X. Observe que $P_n(x) - P_{n-1}(x) = x_n^*(x) \cdot x_n$. Portanto, temos que $\|P_n(x) - P_{n-1}(x)\| = \|x_n^*(x) \cdot x_n\| = |x_n^*(x)|\,\|x_n\|$, de onde segue que $\|x_n\|^{-1}\|P_n(x) - P_{n-1}(x)\| = |x_n^*(x)|$.

Assim, temos que:

$$
\begin{aligned}
\|x_n^*\| = \sup_{x\in B_X} |x_n^*(x)| &= \sup_{x\in B_X} \{\|x_n\|^{-1}\|P_n(x) - P_{n-1}(x)\|\} \\
&= \|x_n\|^{-1} \sup_{x\in B_X} \{\|P_n(x) - P_{n-1}(x)\|\} \\
&\leq \|x_n\|^{-1} \sup_{x\in B_X} \{\|P_n(x)\| + \|P_{n-1}(x)\|\} \\
&\leq 2\,\|x_n\|^{-1} \sup_n \{\|P_n\|\}
\end{aligned}
$$

Como vimos no teorema anterior, $\sup\limits_n\{\|P_n\|\} < \infty$. Daí, pela desigualdade acima segue que x_n^* é contínuo, para todo $n \geq 2$.

Para o caso de $n = 1$, basta observar que $P_1(x) = x_1^*(x) \cdot x_1$ e, portanto, $\|P_1(x)\| = |x_1^*(x)|\,\|x_1\|$. A partir desta igualdade e com um argumento análogo ao do caso $n \geq 2$, temos que x_1^* é contínuo e, portanto, segue que x_n^* é contínuo para todo $n \in \mathbb{N}$, como desejado.

■

Assim como na Álgebra Linear (no caso das bases de Hamel), dizemos que uma base de Schauder $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de um espaço de Banach X é **normalizada** se $\|x_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Com a hipótese adicional de que a base de Schauder é normalizada, vamos mostrar que, assim como as projeções canônicas, os funcionais coordenados também são uniformemente limitados. Tal resultado será importante no Capítulo 4.

Corolário 1.13. *Seja X um espaço de Banach e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma base de Schauder normalizada para X. Então os funcionais coordenadas x_n^* são uniformemente limitados.*

DEMONSTRAÇÃO: Do corolário anterior, temos que $\|x_n^*\| \leq 2\|x_n\|^{-1}\sup_n\{\|P_n\|\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\|x_n\| = 1$ (pois $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é normalizada), tal desigualdade nos fornece $\|x_n^*\| \leq 2\sup_n\{\|P_n\|\}$. Do Teorema 1.11, temos que $\sup_n\{\|P_n\|\} < \infty$. Chamando tal supremo de a, onde $a \in \mathbb{K}$, segue que $\|x_n^*\| \leq 2a$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\sup_n\{\|x_n^*\|\} \leq 2a < \infty$, como desejado.

■

1.4 Bases Incondicionais

Faremos, nesta seção, um breve estudo de bases incondicionais. Começaremos tal estudo com o teorema a seguir. Tal teorema, como veremos mais adiante, fornece várias caracterizações para o conceito de convergência incondicional.

Teorema 1.14. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de vetores em um espaço de Banach X. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ converge, para toda permutação π de $\mathbb{N}$

(ii) a série $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ converge, para toda escolha de naturais $0 < n_1 < n_2 < n_3 \ldots$

(iii) a série $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n$ converge, para toda escolha dos sinais θ_n (isto é, $\theta_n \in \{1, -1\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.)

(iv) para todo $\varepsilon > 0$, existe um natural N tal que $\left\|\sum_{i\in\sigma} x_i\right\| < \varepsilon$, para todo conjunto finito de naturais σ que satisfaz $\min\{i \in \sigma\} > N$.

DEMONSTRAÇÃO: Vamos provar que (ii) $\Leftrightarrow$ (iv), (i) $\Leftrightarrow$ (iv) e (ii) $\Leftrightarrow$ (iii).

<u>(ii) $\Rightarrow$ (iv)</u> e <u>(i) $\Rightarrow$ (iv)</u>. Para ambos os casos, vamos provar a contrapositiva da implicação desejada. Suponhamos que (iv) não seja verdade. Então, existe um $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $N \in \mathbb{N}$, existe um conjunto finito de naturais F_N tais que $\min(F_N) > N$ mas $\left\|\sum_{i\in F_N} x_i\right\| \geq \varepsilon$.

Seja $G_1 = F_1$ e $N_1 = \max(G_1)$. Tome agora $G_2 = F_{N_1}$ e $N_2 = \max(G_2)$. De maneira geral, temos que $G_{k+1} = F_{N_k}$ e $N_{k+1} = \max(G_{K+1})$. Como $\min(F_N) > N$, temos então que $\min(G_{k+1}) = \min(F_{N_k}) > N_k = \max(G_k)$, vide construção dos G_k.

Como $G_k = F_{N_k}$, segue então que

$$\left\|\sum_{i\in G_k} x_i\right\| \geq \varepsilon.$$

Seja agora $0 < n_1 < n_2 < \ldots$ uma enumeração completa dos elementos de $\bigcup G_K$. Como $\min(G_{k+1}) > \max(G_k)$, então pela equação anterior temos que a sequência das somas parciais da série $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ não é uma sequência de Cauchy e, portanto, não converge. Logo, (ii) não é válido, como desejado.

Seja agora π uma permutação dos naturais obtida enumerando, um conjunto de cada vez, os elementos de

$$G_1,\ \{1,\ldots,\max(G_1)\}\backslash G_1,\ G_2,\ \{\max(G_1)+1,\ldots,\max(G_2)\}\backslash G_2,\ G_3,\ \ldots$$

nesta ordem. Observe que esta é uma lista completa de $\mathbb{N}$ e, portanto, π é de fato uma permutação de $\mathbb{N}$. Porém, como $\min(G_{k+1}) > \max(G_k)$ e $\left\|\sum_{i\in G_k} x_i\right\| \geq \varepsilon$, então segue que a sequência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ não é uma sequência de Cauchy e, portanto, não converge. Logo, assim como o anterior, temos que (i) não é válido, terminando a demonstração.

<u>(iv) $\Rightarrow$ (ii)</u> Suponha que (iv) seja verdade e seja $0 < n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ uma sequência de naturais quaisquer. Vamos mostrar que a sequência das somas parciais da série $\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i}$ é uma sequência de Cauchy e, portanto, converge.

Dado $\varepsilon > 0$, seja N o número natural cuja existência é garantida por hipótese. Seja $j \in \mathbb{N}$ tal que $n_j > N$. Se $l > k \geq j$, então $\min\{n_{k+1},\ldots,n_l\} \geq n_j > N$. Daí, por hipótese, temos que

$$\left\|\sum_{i=k+1}^{l} x_{n_i}\right\| < \varepsilon$$

como desejado.

<u>(iv) $\Rightarrow$ (i)</u> Seja π uma permutação de $\mathbb{N}$ qualquer. Vamos mostrar que a sequência das séries parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ é uma sequência de Cauchy. Daí, teremos que $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ convergirá, como desejado.

Seja $\varepsilon > 0$ e tome N o número natural cuja existência é garantida em (iv). Definimos $N_0 = \max\{\pi^{-1}(1),\ldots,\pi^{-1}(N)\}$. Suponha que $L > K \geq N_0$ e tome $F = \{\pi(K+1),\ldots,\pi(L)\}$. Se $k > K+1$, então $k > N_0$ e daí $k \neq \pi^{-1}(i)$, onde $i = 1,2,\ldots,N$. Logo, $\pi(k) \neq 1,2,\ldots,N$. Portanto,

$$\min(F) = \min\{\pi(K+1),\ldots,\pi(L)\} > N.$$

Assim, por hipótese, temos que

$$\left\| \sum_{n=K+1}^{L} x_{\pi(n)} \right\| = \left\| \sum_{n \in F} x_n \right\| < \varepsilon$$

o que mostra que a sequência das séries parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ é uma sequência de Cauchy, como desejado.

<u>(iii) ⇒ (ii)</u>. Seja $n_1 < n_2 < n_3 \ldots$ uma sequência de naturais quaisquer. Tomemos $\theta_n = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e definimos

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n = n_j \text{ para algum } j. \\ -1, & \text{se } n \neq n_j \text{ para todo } j. \end{cases}$$

Por hipótese, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n$ convergem. Daí, temos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n \right)$$

também converge, provando a tese.

<u>(ii) ⇒ (iii)</u>. Suponha que (ii) seja verdade e seja (θ_n) uma sequência quaisquer de sinais, isto é, $\theta_n = \pm 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos definir

$$F^+ = \{n \ : \ \theta_n = 1\} \quad \text{e} \quad F^- = \{n \ : \ \theta_n = -1\}.$$

Sejam $F^+ = \{n_j^+\}$ e $F^- = \{n_j^-\}$ enumerações em ordem crescente de F^+ e F^-, respectivamente. Por hipótese, tanto $\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_j^+}$ quanto $\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_j^-}$ convergem. Daí, a tese é obtida observando que $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n = \sum_{j=1}^{\infty} x_{n_j^+} - \sum_{j=1}^{\infty} x_{n_j^-}$.

■

A definição usual de convergência incondicional, como pode-se ver em [33, p. 20], Definição 1.3.8 ou [26, p. 88], Definição 3.2, é a seguinte:

Definição 1.15. *Seja $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ uma série em um espaço de Banach X. Então dizemos que a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$* **converge incondicionalmente** *se a série $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_{\pi(n)}$ converge em X, para toda permutação π de $\mathbb{N}$.*

De acordo com o teorema anterior, tal definição é equivalente a quaisquer uma das outras condições listadas. Logo, é claro que pode-se definir convergência incondicional usando quaisquer uma das condições do teorema anterior.

Ainda, como pode-se encontrar em [33, pp. 369-370], Proposição 4.2.1, temos que se a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge incondicionalmente, então $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\pi(n)}$, para toda permutação π de $\mathbb{N}$.

Considere agora um espaço de Banach X com uma base de Schauder $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Tendo em vista o comentário acima, podemos agora pensar em exigir que, dado $x \in X$, a sua representação única $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n x_n$ seja incondicionalmente convergente. Isso nos remete ao conceito de base incondicional.

Definição 1.16. *Seja X um espaço de Banach. Então uma base de Schauder $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ é dita uma* **base incondicional** *se, para todo $x \in X$, a série $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n x_n$ é incondicionalmente convergente.*

Veremos a seguir que os espaços c_0 e $\ell_p, 1 \leq p < \infty$ admitem uma base de Schauder incondicional. Estamos particularmente interessados nestes espaços pois estes serão bastante usados no Capítulo 4.

Proposição 1.17. *Os espaços c_0 e $\ell_p, 1 \leq p < \infty$, admitem uma base de Schauder normalizada incondicional.*

DEMONSTRAÇÃO: Vamos mostrar que a base de Schauder canônica (isto é, a base vista no Exemplo 3) é uma base normalizada incondicional para c_0 e $\ell_p, 1 \leq p < \infty$.

Já vimos que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma base de Schauder para c_0 e $\ell_p, 1 \leq p < \infty$. Além do mais, é fácil ver que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é normalizada em ambos os espaços. Resta mostrar, então, que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge incondicionalmente.

Faremos o caso de c_0, visto que o caso de $\ell_p, 1 \leq p < \infty$ é análogo. Seja $x \in c_0, x = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$. Como a série converge, dado $\varepsilon > 0$, existe um $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $L \geq K > N$, temos que $\left\| \sum_{n=K}^{L} \alpha_n e_n \right\|_\infty < \varepsilon$.

Seja $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de sinais (isto é, $\theta_n = \pm 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$). Para todo $L \geq K > N$, temos que

$$\left\| \sum_{n=K}^{L} \theta_n \alpha_n e_n \right\|_\infty = \sup_{K \leq n \leq L} |\theta_n \alpha_n| = \sup_{K \leq n \leq L} |\alpha_n| = \left\| \sum_{n=K}^{L} \alpha_n e_n \right\|_\infty < \varepsilon.$$

Portanto, a equação acima nos mostra que a série $\sum_{n=K}^{L} \theta_n \alpha_n e_n$ converge, para qualquer escolha da sequência de sinais $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Logo, pelo Teorema 1.14, segue que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n e_n$ converge incondicionalmente. Como $x \in X$ é qualquer, temos que $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é uma base de Schauder normalizada incondicional para c_0.

■

Dessa proposição surge o corolário a seguir. Tal corolário será útil no Capítulo 4:

Corolário 1.18. *Os espaços c_0 e $\ell_p, 1 \leq p < \infty$, admitem uma base de Schauder normalizada incondicional. Se $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ é tal base, então tais espaços também admitem um operador $S : E \to E$ contínuo tal que $S(e_i) = e_{i+1}$, onde $E = \operatorname{span}\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Resta apenas mostrar que S é contínuo. Vamos fazer apenas o caso de $X = c_0$, já que o caso de $X = l_p$ é análogo.

Seja $x \in E \subseteq c_0$ tal que $\|x\|_\infty = 1$. Logo, $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Assim,

$$S(x) = S\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i S(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_{i+1}$$

de onde segue que

$$\|S(x)\|_\infty = \sup_{1\leq i\leq n} |\alpha_i| = \|x\|_\infty .$$

Portanto, como $\|x\|_\infty = 1$, segue que $\|S\| = 1$, como desejado.

■

Assim como uma base de Schauder define uma nova norma sobre um espaço de Banach (vide Proposição 1.10), uma base incondicional também define uma nova norma em um espaço de Banach:

Definição 1.19. *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ uma base incondicional para X. Então a* **norma bmu**-(x_n) [4] *de X é definida por*

$$\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n x_n\right\|_{\text{bmu}-(x_n)} = \sup\left\{\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n \alpha_n x_n\right\| : (\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S_{\ell_\infty}\right\}.$$

O teorema a seguir nos mostra que $\|\cdot\|_{\text{bmu}-(x_n)}$ é, de fato, uma norma.

Teorema 1.20. *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ uma base incondicional para X. Então $\|\cdot\|_{\text{bmu}-(x_n)}$ é uma norma equivalente a norma original de X. Ainda, temos que $\|x\|_{\text{bmu}-(x_n)} \geq \|x\|_{(x_n)} \geq \|x\|$, para todo $x \in X$.*

DEMONSTRAÇÃO: Ver [33, p. 373], Teorema 4.2.16.

[4]Neste caso, bmu é uma abreviação para *bounded multiplier unconditional*.

■

Note que como $\|x\|_{\text{bmu}-(x_n)} \geq \|x\|$ e ambas as normas são equivalentes, vale então que $M\|x\| \geq \|x\|_{\text{bmu}-(x_n)} \geq \|x\|$, para algum $M > 0$. Tal observação será importante no Capítulo 4.

Terminamos este capítulo com a proposição a seguir:

Proposição 1.21. *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ uma base incondicional para X. Então*

$$\left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n \alpha_n x_n\right\|_{\text{bmu}-(x_n)} \leq \|(\beta_n)\|_\infty \left\|\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n x_n\right\|_{\text{bmu}-(x_n)}.$$

DEMONSTRAÇÃO: Ver [33, p. 375], Proposição 4.2.17.

■

Capítulo 2

Resultados Clássicos de Hiperciclicidade

Como dissemos na introdução, apresentaremos neste capítulo o conceito de hiperciclicidade e alguns resultados clássicos sobre o tema. A primeira seção é dedicada a definição e a um exemplo, devido a S. Rolewicz. Na segunda seção apresentamos o Critério de Hiperciclicidade, um resultado que permeia todo este trabalho.

Por fim, fazemos um estudo do conjunto dos vetores hipercíclicos, que culmina no Teorema 2.13, e apresentamos o Teorema de Ansari (Teorema 2.17), já mencionado na introdução deste trabalho.

2.1 Definição e Exemplo

Dado um $\mathbb{K}$-espaço vetorial V, um operador $T : V \to V$ e um elemento qualquer y, lembremos que a **órbita de** y **sob** T consiste no conjunto $\operatorname{orb}(y, T) := \{y, T(y), T^2(y), T^3(y), \ldots T^n(y) \ldots\}$. Sendo $S \subseteq V$ um subconjunto qualquer de V, definimos por $\operatorname{span} S$ o conjunto de todas as combinações lineares (finitas) de elementos de S com coeficientes em $\mathbb{K}$. É claro que $\operatorname{span} S$ é um subespaço vetorial de V (independentemente de S ter estrutura de subespaço ou não) e também é claro que $S \subseteq \operatorname{span} S$.

Lembremos agora que, dado um espaço vetorial topológico X, um operador $T : X \to X$ é dito **cíclico** se existir um vetor $y \in X$ tal que $\operatorname{span} \operatorname{orb}(y, T)$ é denso em X. Tal vetor y é dito **vetor cíclico para** T. Se y é um vetor cíclico em um espaço de dimensão finita, como $\operatorname{span} \operatorname{orb}(y, T)$ é um subespaço e todo subespaço de dimensão finita de um espaço normado é fechado (vide [33, p. 32], Corolário 1.4.20.), teremos que $\operatorname{span} \operatorname{orb}(y, T) = X$, coincidindo com a definição que se é dada nos cursos básicos de Álgebra Linear.

Poderíamos ir além e exigir que $\operatorname{orb}(y, T)$ fosse densa em X. Isto nos remete ao conceito de *hiperciclicidade*. Apesar de já termos colocado a definição na introdução, vamos colocá-la de novo a seguir, de maneira a deixarmos o texto completo.

Definição 2.1. *Seja X um espaço vetorial topológico. Um operador linear $T : X \to X$ é dito* **hipercíclico** *se existir um vetor $y \in X$ tal que*

$$\operatorname{orb}(y, T) := \{y, T(y), T^2(y), T^3(y), \ldots T^n(y) \ldots\}$$

é denso em X. Tal vetor y é dito **vetor hipercíclico para** T.

Denotamos por $H(T)$ o conjunto dos vetores hipercíclicos para T.

Note que $\operatorname{orb}(y,T) \subseteq \operatorname{span}\operatorname{orb}(y,T)$. Portanto, se T é um operador hipercíclico, então ele também é cíclico. Dessa mesma inclusão é claro que se y é um vetor hipercíclico para T, então y também é um vetor cíclico para T.

Assim, faz sentido relacionarmos ciclicidade e hiperciclicidade. Faremos uso dessa relação algumas vezes ao longo do texto de maneira a propormos perguntas e fazermos reflexões acerca de operadores hipercíclicos. Por exemplo, sabemos que em todo espaço vetorial topológico de dimensão finita é fácil acharmos um operador cíclico. Dessa forma, é normal perguntarmos: existem operadores hipercíclicos?

Os primeiros exemplos de operadores hipercíclicos foram dados por G. D. Birkhoff (1929), G.R. MacLane (1952) e S. Rolewicz (1969). Se denotarmos por $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ como sendo o conjunto de todas as funções complexas holomorfas, Birkhoff mostrou, na terminologia de hoje, que o operador $T_a : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C})$ dado por $T_a(f) = f(z+a)$ é hipercíclico. Já MacLane mostrou que o operador derivação definido em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ também é hipercíclico.

O exemplo de Rolewicz, que veremos detalhadamente a seguir, foi o primeiro a ser dado em espaços de Banach clássicos, a saber, nos espaços $\ell_p, 1 \leq p < \infty$. Seguiremos o seu artigo original [35].

Exemplo 4. Vamos considerar $X = \ell_p, 1 \leq p < \infty$. Seja $A : X \to X$ o operador dado por $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = a \cdot (x_2, x_3, x_4, \ldots)$, onde $a \in \mathbb{R}$ é tal que $a > 1$. Temos então que A é hipercíclico.

Seja $B \in \mathcal{B}(X)$ o operador dado por $B(x_1, x_2, x_3, \ldots) = a^{-1} \cdot (x_2, x_3, x_4, \ldots)$. Logo, temos que $\|A\| = a$, $\|B\| = 1/a$ e $AB = BA = Id$, onde Id é o operador identidade.

Vamos mostrar que A é hipercíclico construindo um vetor x_0 tal que $\operatorname{orb}(x_0, A)$ é densa em X. Consideremos um conjunto denso e enumerável $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \ell_p$ com a seguinte propriedade: para cada n, $x^n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n, \ldots)$ possui uma quantidade finita de coordenadas não-nulas. Tal conjunto existe, de fato: podemos tomar todas as combinações lineares finitas com coeficientes racionais de elementos de $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$, onde e_i é o vetor tal que a sua única coordenada não-nula é 1 na i-ésima posição.

Seja, assim, $k(n)$ o maior índice da coordenada não-nula de x^n. Seja também $r(n)$ uma sequência de inteiros tais que

$$r(n) > \max_{1\leq i\leq n} \{k(i)\} \tag{2.1}$$

$$\left\|B^{r(n)}x^n\right\| = \frac{1}{a^{r(n)}}\left\|x^n\right\| < \frac{1}{2^n} \tag{2.2}$$

Escrevendo $p(n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} r(i)$, seja $x_0 = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} B^{p(n)}x^n$. Note que, devido a (2.2), temos que a série converge e, portanto, x_0 está bem definido. De fato, por definição temos que $p(n) \geq r(n)$, o que nos mostra que, como $a > 1$, $\frac{1}{a^{p(n)}} \leq \frac{1}{a^{r(n)}}$. Daí, tomando a norma do termo geral da série, temos que $\left\|B^{p(n)}x^n\right\| = \frac{1}{a^{p(n)}}\|x^n\| \leq \frac{1}{a^{r(n)}}\|x^n\| < \frac{1}{2^n}$ e, como a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ converge, esta desigualdade prova que a série $\sum_{n=1}^{\infty} B^{p(n)}x^n$ converge absolutamente e assim, sendo X um espaço de Banach, ela converge.

Por (2.1), temos que $r(n) > k(i)$, para todo $i \leq n$. Sendo $k(i)$ o maior índice de uma coordenada não-nula, então segue que $A^{r(n)}(x^i) = 0$. Portanto, para um k fixo:

$$A^{p(k)}(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} A^{p(k)}B^{p(n)}x^n = x^k + \sum_{m=k+1}^{\infty} B^{p(m)-p(k)}x^m \tag{2.3}$$

visto que $A^{p(k)}B^{p(k)} = Id$. Porém:

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{m=k+1}^{\infty} B^{p(m)-p(k)}x^m\right\| &\leq \sum_{m=k+1}^{\infty}\left\|B^{p(m)-p(k)}x^m\right\| = \sum_{m=k+1}^{\infty}\frac{1}{a^{p(m)-p(k)}}\|x^m\| \\ &\leq \sum_{m=k+1}^{\infty}\frac{1}{a^{r(m)}}\|x^m\| \leq \sum_{m=k+1}^{\infty}\frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^k}\end{aligned}$$

tendo em vista a equação (2.2), o fato de que $p(m) - p(k) = \sum_{i=k+1}^{m} r(i) > r(m)$ e $a > 1$. Portanto, de (2.3) obtemos $\left\|A^{p(k)}(x_0) - x^k\right\| < \frac{1}{2^k}$.

Feito isso, vamos agora provar a densidade de $\operatorname{orb}(x_0, A)$. Sejam $x \in X$ qualquer e $\varepsilon > 0$. Logo existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$. Como o conjunto $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é denso e X não possui pontos isolados, então o conjunto $\{x^k : k \geq m\}$ também é denso em X. Logo, existe um x^n, com $n \geq m$ tal que $\|x^n - x\| < \varepsilon$. Como $n \geq m$, então $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^m} < \varepsilon$. Assim:

$$\left\|A^{p(n)}(x_0) - x\right\| \leq \left\|A^{p(n)}(x_0) - x^n\right\| + \|x^n - x\| \leq \frac{1}{2^n} + \varepsilon < 2\varepsilon$$

o que, como x e ε são quaisquer, demonstra a densidade de $\operatorname{orb}(x_0, A)$.

Visto um exemplo de um operador hipercíclico, podemos nos perguntar agora: sob quais condições operadores hipercíclicos existem? Em primeiro lugar, é claro que para existir um operador hipercíclico em um determinado espaço vetorial topológico X este precisa ser *separável*, isto é, admitir um conjunto denso enumerável pois, caso contrário, nenhuma órbita poderá ser densa. Entretanto, veremos no exemplo a seguir que nem todo espaço vetorial topológico, ainda que separável, admite um operador hipercíclico.

Exemplo 5. Seja $X = c_{00}$, isto é, o espaço vetorial de todas as sequências de números reais que possuem apenas uma quantidade finita de coordenadas não-nulas. Tomemos a topologia induzida pela família de normas

$$p(x)_v = \|x\|_v = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \, v_n$$

onde $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência qualquer de números reais estritamente positivos. Vimos no Exemplo 1 que este espaço munido desta topologia induzida é separável.

Seja agora $T \in \mathcal{B}(X)$ um operador qualquer. Vamos mostrar que T não pode ser hipercíclico. Para isso, dado $y \in X$ qualquer, vamos mostrar que $\operatorname{orb}(y,T)$ não é denso em X. Fixemos, então, $y \in X$ qualquer. Defina

$$E_n = \{x \in X \,:\, x_k = 0 \text{ para todo } k > n\}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Observe agora que cada E_n não pode conter uma quantidade infinita de elementos de $\operatorname{orb}(y,T)$. Se fosse este o caso, como todos os elementos de $\operatorname{orb}(y,T)$ são linearmente independentes[1], então estes elementos formariam um subespaço de dimensão infinita em E_n, o que é impossível pois é claro que E_n tem dimensão finita.

Temos, então, que cada E_n contém apenas uma quantidade finita de elementos de $\operatorname{orb}(y,T)$. Definimos agora $F_1 = \operatorname{orb}(y,T) \cap (E_1 \backslash \{0\})$ e $F_n = \operatorname{orb}(y,T) \cap (E_n \backslash E_{n-1})$. Em outras palavras, cada F_n consiste no conjunto de todos os vetores que estão em $\operatorname{orb}(y,T)$ tais que sua última coordenada não-nula é exatamente a n-ésima.

Como vimos que cada E_n contém apenas uma quantidade finita de elementos de $\operatorname{orb}(y,T)$, então cada F_n é finito. Além disso, é claro que $\operatorname{orb}(y,T) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ e que todo $z = (z_j)_{j\in\mathbb{N}} \in F_n$ satisfaz $z_n \neq 0$. Vamos definir então

$$v_n = \frac{1}{\min\{|z_n| \,:\, z = (z_j)_{j\in\mathbb{N}} \in F_n\}}$$

se F_n é não-vazio e $v_n = 1$ caso contrário.

Seja agora $x = (x_n) \in \operatorname{orb}(y,T)$. Suponhamos que $x \in F_k$, para algum k, isto é, $x_n = 0$, para todo $n > k$. Dessa maneira, $\min\{|z_k| \,:\, z = (z_j)_{j\in\mathbb{N}} \in F_k\} \leq |x_k|$. Assim, obtemos que

[1]Não justificaremos tal afirmação agora por uma questão de organização: ela é demonstrada logo a seguir (Corolário 2.4). Note que tal corolário não faz uso de nenhuma propriedade específica do espaço no qual o operador T está definido; aliás, tal espaço sequer é citado. Assim, tal corolário continua válido no contexto mais geral de espaços vetoriais topológicos.

$v_k \geq \dfrac{1}{|x_k|}$. Fixada agora a sequência $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida anteriormente, obtemos que

$$\|x\|_v = \sum_{n=1}^{k} |x_n|\, v_n = \sum_{n=1}^{k-1} |x_n|\, v_n + |x_k|\, v_k \geq \sum_{n=1}^{k-1} |x_n|\, v_n + |x_k| \frac{1}{|x_k|} = \sum_{n=1}^{k-1} |x_n|\, v_n + 1 \geq 1.$$

Assim, $\|x\|_v \geq 1$ para todo $x \in \operatorname{orb}(y,T)$. Agora, observe que $B_1^v(0) = \{z : \|z\|_v < 1\}$ é um aberto nesta topologia tal que $B_1^v(0) \cap \operatorname{orb}(y,T) = \emptyset$. Ou seja, $\operatorname{orb}(y,T)$ não é denso em X, o que mostra que y não é um vetor hipercíclico para T. Como y era um vetor qualquer, então T não é um operador hipercíclico. Agora, como $T \in \mathcal{B}(X)$ era um operador qualquer, isto mostra que X não admite operadores hipercíclicos, como queríamos mostrar.

Observe que, no exemplo acima, X possui dimensão infinita e enumerável e, portanto, não é completo. Como veremos neste capítulo, muito dos resultados envolvendo hiperciclicidade são demonstrados com a ajuda do Teorema de Baire. Tal teorema, como sabemos, possui a completude como hipótese imprescindível.

Dessa maneira, a classe dos espaços vetoriais topológicos não é a classe de espaços que procuramos se quisermos obter um teorema geral que garanta a existência de operadores hipercíclicos. Como veremos no teorema a seguir, os espaços que usaremos são os espaços de Fréchet. Tais espaços, tendo em vista a discussão do parágrafo anterior, são completos, vide a Definição 1.4. Logo, são os candidatos naturais a serem a classe de espaços procuradas para tal teorema de existência.

Teorema 2.2 (Bonet e Peris, [12]). *Seja X um espaço de Fréchet separável de dimensão infinita. Então existe $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que T é hipercíclico.*

Não demonstraremos este teorema devido a sua complexidade e por não fazer parte de nossos objetivos. Agora, observe que além da hipótese necessária de X ser separável, há também a hipótese de X ter dimensão infinita. Tal hipótese não aparece sem necessidade: ao contrário do que acontece com *ciclicidade*, onde é possível termos operadores cíclicos em espaços de dimensão finita, o mesmo não acontece com hiperciclicidade. Lembrando que todo espaço de Fréchet de dimensão finita n é isomorfo a $\mathbb{K}^n$, então o teorema a seguir nos mostra que não existem operadores hipercíclicos em espaços de Fréchet de dimensão finita.

Teorema 2.3. *Não existem operadores hipercíclicos em $\mathbb{K}^n$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ um operador linear com um vetor hipercíclico y.

Afirmação. *Temos que $B = \{y, T(y), \ldots, T^{n-1}(y)\}$ é uma base para $\mathbb{K}^n$.*

É claro que basta mostrar que B é linearmente independente. Suponhamos que B seja linearmente dependente. É fácil ver que, neste caso, $\operatorname{span}\operatorname{orb}(y,T) = \operatorname{span} B$. Como y é um vetor hipercíclico, então y é também um vetor cíclico. Logo, pelo que comentamos no início deste capítulo, temos que $\operatorname{span}\operatorname{orb}(y,T) = \mathbb{K}^n$. Portanto, segue que $\operatorname{span} B = \mathbb{K}^n$, o que é um absurdo: B é um conjunto gerador de n elementos linearmente dependentes em um espaço de dimensão n. Dessa forma, B é um conjunto linearmente independente, demonstrando a afirmação acima.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}_+$ qualquer. Sendo y um vetor hipercíclico, existe uma sequência (n_k) de números naturais tais que $T^{(n_k)}(y) \to \alpha \cdot y$, onde $k \to \infty$. Agora, fixado $i < n$, observe que

$$T^{n_k}(T^i(y)) = T^i(T^{n_k}(y)) \to T^i(\alpha \cdot y) = \alpha \cdot T^i(y).$$

Logo, como B é base de $\mathbb{K}^n$, então para todo $z \in \mathbb{K}^n$ segue que $T^{n_k}(z) \to \alpha \cdot z$.

Sendo a dimensão de $\mathbb{K}^n$ finita, T linear e $\det$ uma função contínua, segue que $\det(T^{n_k}) \to \alpha^n$. Assim, como $\det(T^{n_k}) = \det(T)^{n_k}$, segue que $\det(T)^{n_k} \to \alpha^n$. Se denotarmos $a := |\det(T)|$, como $\alpha \in \mathbb{R}_+$ é qualquer e $\det(T)^{n_k} \to \alpha^n$, temos que o conjunto $\{a^n : n \in \mathbb{N}\}$ deve ser denso em $\mathbb{R}_+$, o que é evidentemente impossível.

■

O corolário a seguir é uma generalização da afirmação que fizemos na demonstração do teorema anterior:

Corolário 2.4. *Se y é um vetor hipercíclico para T, então $\operatorname{orb}(y,T)$ é um conjunto linearmente independente.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos, por absurdo, que tal órbita seja linearmente dependente. Isto é, existem $N \in \mathbb{N}$ e escalares $a_0, \ldots, a_{N-1}$ não todos nulos tais que $T^N(y) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k T^k(y)$.

Assim, $M := \operatorname{span}\{T^k(y) : k = 0, \ldots, N-1\}$ é um subespaço T-invariante. Logo, $T\big|_M$ está bem definido. Sendo y um vetor hipercíclico para T, então é claro que y também é um vetor hipercíclico para $T\big|_M$. Porém, M é um espaço de dimensão finita, o que contradiz o teorema anterior.

■

Assim, hiperciclicidade é um fenômeno exclusivo de dimensão infinita. Dessa maneira, o Teorema 2.2 responde de uma maneira bem satisfatória a questão da existência de operadores hipercíclicos. Visto o que o Exemplo 5 e os teoremas anteriores nos dizem, faz sentido estudarmos hiperciclicidade apenas em espaços de Fréchet separáveis e de dimensão infinita. Por isso, ao longo do texto, lidaremos sempre com hiperciclicidade nestes espaços. Assim, vamos adotar a seguinte notação para o resto do capítulo:

Notação. A menos que dito o contrário, denotaremos por X um espaço de Fréchet separável e de dimensão infinita.

Resolvida a questão da existência de operadores hipercíclicos, voltemos ao Exemplo 4. Observe que o operador que Rolewicz mostrou ser hipercíclico é nada mais que um *weighted backward shift*. Por este operador ser razoavelmente simples de se trabalhar, não foi difícil construir um vetor hipercíclico x_0 para ele. Porém, não podemos garantir que o mesmo aconteça para um operador T qualquer: em alguns casos, esta construção pode ser nada trivial. Por isso, seria de extremo interesse acharmos condições que garantissem a hiperciclicidade de um operador. Este será o objetivo de nosso estudo a seguir.

2.2 O Critério de Hiperciclicidade

Um dos primeiros resultados que surgiu na tentativa de dar condições para que um operador T seja hipercíclico sem construirmos explicitamente um vetor hipercíclico é o chamado *Teorema da Transitividade de Birkhoff*. O resultado recebe o nome de G.D. Birkhoff pois em 1920, no contexto de funções em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$, ele provou um resultado bastante semelhante ao que enunciaremos a seguir, ainda que os termos (e a generalidade) não estivessem presentes em sua demonstração original, vide [11, pp. 111–112].

Teorema 2.5 (Teorema da Transitividade de Birkhoff)**.** *Seja X um espaço de Fréchet separável de dimensão infinita e seja T um operador contínuo em X. Então, são equivalentes:*

(i) T é topologicamente transitivo, isto é, dados U, V abertos não-vazios de X existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

(ii) T é um operador hipercíclico.

Para demonstrarmos o Teorema da Transitividade de Birkhoff, precisamos de um lema que, embora simples, é bastante útil e será frequentemente citado ao longo deste trabalho:

Lema 2.6. *Seja X um espaço métrico sem pontos isolados. Seja T uma função contínua em X. Nessas condições, se $y \in X$ é tal que $\operatorname{orb}(y, T)$ é densa em X, então $\operatorname{orb}(T^n(y), T)$ também é densa em X, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Como X não possui pontos isolados, podemos remover uma quantidade finita de pontos de um conjunto denso de maneira a obtermos um conjunto que continue sendo denso. Sendo $\operatorname{orb}(y, T) = \{y, T(y), T^2(y), \ldots, T^n(y), T^{n+1}(y), \ldots\}$ denso em X por hipótese, então temos que $\{T^n(y), T^{n+1}(y), T^{n+2}(y), \ldots\} = \operatorname{orb}(T^n(y), T)$ também é denso em X, como desejado.

■

Seguimos, então, com a demonstração do teorema:

DEMONSTRAÇÃO: (i) $\Rightarrow$ (ii). Suponhamos que T seja topologicamente transitivo e denotemos por $H(T)$ o conjunto dos vetores hipercíclicos de T. Mostraremos que $H(T)$ é não-vazio.

Sendo X separável, ele admite um conjunto denso enumerável $\{y_j : j \in \mathbb{N}\}$. Dessa forma, as bolas abertas de raio $\frac{1}{m}$ e centro y_j, onde $m, j \in \mathbb{N}$, formam uma base enumerável $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ para a topologia de X. Portanto, x é um vetor hipercíclico para T - ou seja, $x \in H(T)$ - se, e somente se, para todo $k \geq 1$, existe um $n = n(k) \geq 0$ tal que $T^{n(k)}(x) \in U_k$. Isto é,

$$H(T) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k).$$

Observamos agora que, fixado $k \geq 1$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} T^{-n}(U_k)$ é aberto (pois T é contínuo) e é denso (pois T é topologicamente transitivo). Pelo Teorema de Baire, temos que $H(T)$ é um conjunto denso e, portanto, não-vazio, como desejado.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Suponhamos que x seja um vetor hipercíclico para T e sejam U, V abertos não-vazios em X. Daí, é claro que existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x) \in U$. Pelo Lema 2.6, $T^n(x)$ é um vetor hipercíclico para T. Logo, existe um $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m(T^n x) \in V$. Isto junto ao fato de que $T^n(x) \in U$ mostra que $T^m(U) \cap V \neq \emptyset$, como desejado.

■

Observe que a demonstração de (i) $\Rightarrow$ (ii) do Teorema da Transitividade de Birkhoff também nos mostra que o conjunto $H(T)$ dos vetores hipercíciclicos é um conjunto G_δ denso em X. [2] Dessa forma, o seguinte corolário é imediato:

Corolário 2.7. *Seja T um operador hipercíclico contínuo em X. Então o conjunto dos vetores hipercíclicos é um conjunto G_δ denso em X.*

Por mais que o Teorema da Transitividade de Birkhoff seja bastante útil e utilizado para provarmos hiperciclicidade (como faremos no próximo capítulo), a transitividade topológica ainda pede a "construção" de vetores específicos: de fato, se U e V são abertos não-vazios quaisquer e queremos provar que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$, temos que achar um $x \in U$ tal que $T^n(x) \in V$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Agora, como já discutimos anteriormente, tal vetor x pode ser difícil de ser encontrado.

Em 1982, Carol Kitai demonstrou em sua tese de doutorado um teorema que dava uma condição suficiente para hiperciclicidade, vide [29]. Embora na demonstração de tal teorema Kitai construa explicitamente um vetor hipercíclico para mostrar que o operador T é hipercíclico, o critério em si não exige tal construção. Apesar de ter feito este avanço importante, Kitai nunca publicou seu resultado. Anos depois, como dissemos na introdução, Gethner e Shapiro descobriram tal critério independentemente, vide [18]. Com o passar dos anos, o Critério foi sendo refinado e aprimorado

[2] Para uma recordação da definição de conjunto G_δ em um espaço topológico, fazemos referência a [34, p. 249].

até chegar à forma que apresentaremos. Este enunciado é devido à Bés e Peris, vide [10], e é igual ao que colocamos na introdução deste trabalho.

Teorema 2.8 (Critério de Hiperciclicidade)**.** *Sejam X um espaço de Fréchet separável e $T : X \to X$ um operador linear limitado. Suponhamos que existem subconjuntos X_0, Y_0 densos, uma sequência crescente de inteiros positivos (n_k) e funções $S_{n_k} : Y_0 \to X$ tais que:*

(i) $T^{n_k}(x) \to 0$*, para todo* $x \in X_0$*.*

(ii) $S_{n_k}(y) \to 0$*, para todo* $y \in Y_0$*.*

(iii) $T^{n_k} \circ S_{n_k}(y) \to y$*, para todo* $y \in Y_0$*.*

Então T é hipercíclico.

DEMONSTRAÇÃO: Sejam U, V dois abertos não-vazios de X. Pela densidade de X_0 e Y_0, podemos achar x, y tais que $x \in X_0 \cap U$ e $y \in Y_0 \cap V$. Como $x \in X_0$, então $T^{n_k}(x) \to 0$, pela condição (i) da hipótese. Da mesma maneira, da condição (ii) temos que $S_{n_k}(y) \to 0$. Logo, definindo $x_k := x + S_{n_k}(y)$, temos que $x_k \to x$. Portanto, como $x \in U$, existe um $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k > k_1$, temos que $x_k \in U$.

Sendo T um operador linear, temos que

$$T^{n_k}(x_k) = T^{n_k}(x + S_{n_k}(y)) = T^{n_k}(x) + T^{n_k} \circ S_{n_k}(y) \to y$$

usando as condições (i) e (iii) da hipótese. Logo, como $y \in V$, existe um $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k > k_2$, devemos ter $T^{n_k}(x_k) \in V$.

Dessa forma, tomando um $k_0 \geq \max\{k_1, k_2\}$, temos que, para todo $k > k_0$, ambos $x_k \in U$ e $T^{n_k}(x_k) \in V$ são satisfeitos. Portanto, segue que $T^{n_k}(U) \cap V \neq \emptyset$, para todo $k > k_0$, o que prova que T é topologicamente transitivo. Logo, pelo Teorema da Transitividade de Birkhoff, T é hipercíclico, como desejado.

■

Faremos refêrencia várias vezes ao Critério de Hiperciclicidade por *HC* [3] ou apenas por *Critério*. Apesar de ter sido o primeiro critério para hiperciclicidade demonstrado, o Critério de Kitai hoje é um corolário imediato do Critério de Hiperciclicidade, como pode ser visto a seguir.

Corolário 2.9 (Critério de Kitai, [29])**.** *Sejam X um espaço de Fréchet separável e $T : X \to X$ um operador linear limitado. Suponhamos que existem subconjuntos X_0, Y_0 densos e uma função $S : Y_0 \to Y_0$ tais que:*

(i) $T^n(x) \to 0$*, para todo* $x \in X_0$*.*

[3] Uma abreviação do nome em inglês, *Hypercyclicity Criterion*.

(ii) $S^n(y) \to 0$, *para todo* $y \in Y_0$.

(iii) $T \circ S(y) = y$, *para todo* $y \in Y_0$.

Então T *é hipercíclico.*

Observação 2.10. Observamos que, tanto no Critério de Hiperciclicidade como no Critério de Kitai, não há necessidade das funções S_{n_k} (no caso do HC) ou de S (no caso do Critério de Kitai) serem lineares nem contínuas. Isto faz com que não precisemos nos preocupar tanto com o modo que construiremos tais funções nos exemplos e teoremas que seguem.

Exemplo 6. Vamos usar o Critério de Kitai para provar que o operador descrito no exemplo de Rolewicz é hipercíclico sem construir um vetor hipercíclico.

Tomemos $X = \ell_p, 1 \leq p < \infty$ e $A : X \to X$ o operador dado por $A(x_1, x_2, x_3, \ldots) = a \cdot (x_2, x_3, x_4, \ldots)$, onde $a \in \mathbb{R}$ é tal que $a > 1$.

Sejam X_0 e Y_0 o espaço das sequências em X com um número finito de coordenadas não-nulas. É claro que X_0 e Y_0 são densos em X. Seja $S : Y_0 \to Y_0$ dado por $S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = a^{-1}(0, x_1, x_2, \ldots)$.

Portanto, pela definição de A e de X_0 é claro que (i) é satisfeito. Como $A \circ S = Id$, então é óbvio que (iii) também é satisfeito. Resta então provarmos (ii). Note que

$$\|S^n(x_1, x_2, \ldots)\| = \frac{1}{a^n} \left\| (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ coordenadas}}, x_1, x_2, \ldots) \right\| = \frac{1}{a^n} \|x\| \to 0$$

quando $n \to \infty$, visto que x está fixo e $a > 1$. Logo, S satisfaz a segunda condição, o que mostra que A é hipercíclico, como queríamos.

Tendo em vista o exemplo, é notório o quanto mais fácil ficou para demonstrarmos que A é hipercíclico de posse do Critério de Kitai. Esta facilidade teve um preço: não sabemos quem é um vetor hipercíclico para A. Para diversificar um pouco os exemplos, vamos fornecer um outro exemplo de um operador hipercíclico que satisfaça o Critério de Kitai.

Exemplo 7. Vamos mostrar que o exemplo dado por MacLane, a saber, o operador diferenciação definido em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, munido da topologia compacto-aberta descrita no Exemplo 2, é hipercíclico usando o Critério de Kitai. Vale ressaltar que MacLane em seu artigo original [32] mostrou que tal operador era hipercíclico construindo um vetor para ele, assim como fez Rolewicz.

Seja $X_0 = Y_0 = \mathcal{P}(\mathbb{C})$, onde $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ é o conjunto dos polinômios com coeficientes complexos. Se $p(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n z^n$, definimos $S : \mathcal{P}(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}(\mathbb{C})$ dado por $S(p)(z) = \sum_{n=0}^{k} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$, para todo $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$.

Então, se $D : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C})$ é o operador diferenciação, então é claro que se $p \in X_0$ tem-se que $D^n(p) \to 0$, satisfazendo (i). Também é fácil ver que $D \circ S(p) = p$ e, portanto, a condição (iii) também é satisfeita.

Resta mostrar que S satisfaz a condição (ii). Ou seja, precisamos mostrar que $(S^j(p))_{j\in\mathbb{N}}$ converge (na topologia compacto-aberta) para a função identicamente nula. Pela Proposição 1.3, precisamos apenas mostrar que $p_r(S^j(p)) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$, para todo $r \in \mathbb{N}$. Neste caso, como descrito no Exemplo 2, temos que

$$p_r(S^j(p)) = \sup\{\left|S^j(p)(z)\right| \; : \; |z| \leq r\}. \tag{2.4}$$

Observe que se $p(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{k} a_n z^n$, então temos que

$$S^j(p)(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n \cdot n! \frac{z^{n+j}}{(n+j)!}.$$

Então, se $|z| \leq r$ temos que

$$\left|S^j(p)(z)\right| \leq \sum_{n=0}^{k} |a_n| \cdot n! \frac{|z|^{n+j}}{(n+j)!} \leq \sum_{n=0}^{k} |a_n| \cdot n! \frac{|r|^{n+j}}{(n+j)!}$$

Agora, como $\dfrac{|r|^{n+j}}{(n+j)!} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$, então $\left|S^j(p)(z)\right| \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$. Portanto, tendo em vista (2.4), temos que $p_r(S^j(p)) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$. Logo, pelo que já comentamos, a condição (ii) está satisfeita.

Assim, D satisfaz o Critério de Kitai e é um operador hipercíclico.

Tendo em vista que o Critério de Hiperciclicidade é uma generalização do Critério de Kitai, poderíamos nos perguntar se todo operador que satisfaz o Critério de Hiperciclicidade também satisfaz o Critério de Kitai. Como pode-se ver no Exemplo 3.11 de [25, pp. 73–74], este não é o caso: o *weighted backward shift* $B_w : c_0 \to c_0$ dado por $B_w(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (w_2x_2, w_3x_3, w_4, x_4, \ldots)$ com $w = (w_1, w_2, w_3, w_4, \ldots) = (1, 2, 2^{-1}, 2, 2, 2^{-1}, 2^{-1}, 2, 2, 2, 2^{-1}, 2^{-1}, 2^{-1}, 2, \ldots)$ é um exemplo de um operador que satisfaz o Critério de Hiperciclicidade mas não satisfaz o Critério de Kitai.

Tome agora T um operador hipercíclico. Levantamos então a seguinte pergunta: quantos vetores hipercíclicos ele possui? Notemos que o Corolário 2.7 já nos diz que o conjunto dos vetores hipercíclicos de um operador hipercíclico T é um G_δ denso. Isto quer dizer que hiperciclicidade é um fenômeno "dualista": ou o operador não possui vetores hipercíclicos ou ele possui uma quantidade "grande" (no sentido topológico) de vetores hipercíclicos.

Shapiro mostra em [36, pp. 33–34] que nem todo operador cíclico possui um conjunto denso de vetores cíclicos: o exemplo que ele fornece é o operador $M_z(f)(x) = z \cdot f(x)$ definido em

$\mathcal{H}(B_1)$, onde $B_1 = B(0,1) \subseteq \mathbb{C}$, $z \in B_1$ e $\mathcal{H}(B_1)$ é o espaço das funções complexas holomorfas com domínio B_1.

Assim, alguém interessado em analisar os subespaços invariantes de um operador T, pode perguntar-se se este operador é hipercíclico. Neste caso, o conjunto dos vetores cíclicos será denso e assim existirá uma quantidade muito maior de subespaços. Além disso tudo, se o operador for hipercíclico veremos na seção a seguir que o conjunto dos vetores hipercíclicos possui algumas propriedades interessantes.

2.3 O Conjunto dos Vetores Hipercíclicos

Vamos mostrar, nesta seção, que, se T é um operador hipercíclico, então $H(T) \cup \{0\}$ contém um subespaço vetorial de dimensão infinita. Para isso, precisamos de um lema:

Lema 2.11 (Bès, [8])**.** *Seja T um operador hipercíclico. Então o adjunto T^* não possui autovalores.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos por absurdo que T^* tenha um autovalor λ e que $f \in X^* \backslash \{0\}$ seja seu autovetor correspondente. Ou seja, dado $x \in X$, temos que $T^*(f)(x) = \lambda f(x)$. Ainda, é fácil ver que $(T^*)^n(f)(x) = \lambda^n f(x)$. Da mesma maneira, como $T^*(f)(x) = f \circ T(x)$, então também é fácil ver que $(T^*)^n(f)(x) = f \circ (T^n)(x)$. Portanto, temos que $f \circ (T^n)(x) = \lambda^n f(x)$.

Tomemos x_0 como sendo um vetor hipercíclico para T. Assim, fixado x_0, temos a seguinte igualdade de conjuntos:

$$\{f \circ (T^n)(x_0) : n = 0, 1, 2, \ldots\} = \{\lambda^n f(x_0) : n = 0, 1, 2, \ldots\}$$

Como x_0 está fixo, então o conjunto $\{\lambda^n f(x_0) : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ claramente não é denso em $\mathbb{K}$. Pela igualdade, segue que $\{f \circ (T^n)(x_0) : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ também não é denso. Sendo f um funcional não nulo, então ele é sobrejetor e daí segue que $\{(T^n)(x_0) : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ também não é denso em X, um absurdo, pois x_0 é um vetor hipercíclico para T.

■

O fato de T^* não possuir autovalores nos diz, por definição, que $T^* - \lambda I$ é injetor, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$. Logo, pela Proposição 1.7, temos que $T - \lambda I$ tem imagem densa, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$.

Com este lema em mente, vamos provar agora o seguinte teorema, que irá fazer quase todo o trabalho na demonstração do teorema principal desta seção:

Teorema 2.12 (Bès, [8])**.** *Seja T um operador hipercíclico e p um polinômio não-nulo. Então o operador $p(T)$ tem imagem densa.*

DEMONSTRAÇÃO: Como as operações de composição e mulitplicação por um escalar não-nulo preservam a densidade da imagem, então podemos assumir que o polinômio p é irredutível e mônico. Se X é um espaço complexo, então todo polinômio irredutível é da forma $p(t) = t - \lambda$, com $\lambda \in \mathbb{C}$. Pelo que comentamos antes do teorema, já sabemos que o operador $p(T) = T - \lambda I$ tem imagem densa. Logo, precisamos apenas nos preocupar com o caso real.

De novo, se $p(t) = t - \lambda$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, então pelo mesmo comentário anterior este caso já está resolvido. Assim, como os polinômios irredutíveis em $\mathbb{R}[x]$ tem grau 1 ou 2, resta então verificar que $p(T)$ tem imagem densa quando p é um polinômio irredutível de grau 2.

Sendo p irredutível de grau 2, podemos supor que $p(t) = t^2 - 2Re(w)t + |w|^2$, onde w é um número complexo. Observe que $w \neq 0$ pois, caso contrário, teríamos $p(t) = t^2$, contradizendo a hipótese de p ser um polinômio irredutível de grau 2.

Suponhamos agora que $p(T)$ não tenha imagem densa. Assim, pela Proposição 1.7, temos que existe $x \neq 0, x \in X^*$ tal que $x \in \ker(p(T)^*)$. Portanto:

$$T^{*2}(x) = a_2 T^*(x) + b_2 x \tag{2.5}$$

onde $a_2 = 2Re(w) = w + \overline{w}$ e $b_2 = -|w|^2$. Observe que

$$p(T)^* T^*(x) = T^* p(T)^*(x) = T^* 0 = 0$$

o que mostra que $T^*(x) \in \ker(p(T)^*)$. Além disso, temos que $T^*(x) \neq 0$ pois, caso contrário, teríamos que $T^{*2}(x) = 0$ o que, por causa da equação (2.5), implicaria que $x = 0$, contradizendo nossa hipótese. Note agora que, por (2.5), temos:

$$\begin{aligned} T^{*3}(x) &= T^*(T^{*2}(x)) = T^*(a_2 T^*(x) + b_2 x) = a_2 T^{*2}(x) + b_2 T^*(x) \\ &= a_2(a_2 T^*(x) + b_2 x) + b_2 T^*(x) = ((a_2)^2 + b_2) T^*(x) + a_2 b_2 x \end{aligned}$$

Denotando $a_3 := (a_2)^2 + b_2$ e $b_3 := a_2 b_2$, temos que $T^{*3}(x) = a_3 T^*(x) + b_3 x$. Usando uma recursão análoga, podemos dizer que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existem escalares a_n, b_n tais que

$$T^{*(n+1)}(x) = a_n T^*(x) + b_n x \tag{2.6}$$

onde $a_{n+1} := a_n a_2 + b_n$ e $b_{n+1} := a_n b_2$. Portanto, temos que

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$$

onde $A = \left[\begin{smallmatrix} a_2 & 1 \\ b_2 & 0 \end{smallmatrix}\right]$. Logo, para todo $n \geq 2$, temos que

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = A^{n-2} \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

de onde segue que:

$$\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} (A^{n-2})^t = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ a_{n+1} & b_{n+1} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

Pelo lema anterior, T^* não possui autovalores. Daí, $\{x, T^*(x)\} \subseteq \ker(p(T)^*)$ é um conjunto linearmente independente. Portanto, o operador $\psi : X \to \mathbb{R}^2$ dado por $\psi(y) = (x(y), T^*(x)(y))$ é sobrejetor, vide o Corolário 1.6.

Sendo ψ sobrejetor, temos que se $z \in X$ é um vetor hipercíclico para T, então $\{\psi(T^n(z))\}_{n\geq 1}$ é um conjunto denso em $\mathbb{R}^2$. Portanto, usando (2.6) e (2.7), temos que:

$$\begin{aligned} \psi(T^n(z)) &= (x(T^n(z)), T^*(x)(T^n(z))) \\ &= (T^{*n}(x)(z), T^{*(n+1)}(x)(z)) \\ &= ((a_n T^*(x) + b_n x)(z), (a_{n+1} T^*(x) + b_{n+1} x)(z)) \\ &= \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ a_{n+1} & b_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T^*(x)(z) \\ x(z) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix} (A^{n-2})^t \begin{bmatrix} T^*(x)(z) \\ x(z) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Assim, a última linha nos diz que, sendo o conjunto $\{\psi(T^n(z))\}_{n\geq 1}$ denso, temos que $\left[\begin{smallmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{smallmatrix}\right]$ é um isomorfismo e também temos que o conjunto $\left\{(A^t)^n(y)\right\}_{n\geq 3}$ é denso em $\mathbb{R}^2$, onde estamos tomando $y := \left[\begin{smallmatrix} T^*(x)(z) \\ x(z) \end{smallmatrix}\right]$.

Portando, sendo o conjunto $\left\{(A^t)^n(y)\right\}_{n\geq 3}$ denso em $\mathbb{R}^2$, temos que o operador A^t é hipercíclico em $\mathbb{R}^2$. Isto, porém, contradiz o Teorema 2.3. Logo, $p(T)$ deve ter imagem densa, como desejado.

■

Teorema 2.13 (Bès, [8]). *Se $T \in \mathcal{B}(X)$ é um operador hipercíclico, então X admite um subespaço denso T-invariante consistindo, com exceção do zero, de vetores hipercíclicos.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja e_0 um vetor hipercíclico para T. Observamos que

$$M = \{p(T)e_0 \ : \ p \text{ é um polinômio } \} = \operatorname{span} \operatorname{orb}(e_0, T)$$

é claramente um subespaço T-invariante. Ainda, é claro que M é denso, visto que $\operatorname{orb}(e_0, T) \subseteq M$ e, sendo e_0 um vetor hipercíclico, tal órbita é densa em X. Resta provar, então, que todo $y \in M$ não-nulo é um vetor hipercíclico para T.

Seja $y = p(T)e_0 \in M \backslash \{0\}$. Observe agora que $T^n(y) = T^n(p(T)e_0) = p(T)(T^n(e_0))$. Assim, $\operatorname{orb}(y, T) = p(T) \operatorname{orb}(e_0, T)$. Sendo $\operatorname{orb}(e_0, T)$ denso em X, para que $\operatorname{orb}(y, T)$ também seja denso em X basta que $p(T)$ tenha imagem densa. Sendo T um operador hipercíclico e p

um polinômio, pelo teorema anterior temos que $p(T)$ tem imagem densa, o que termina a demonstração.

■

Dado um espaço vetorial topológico X, um subconjunto $M \subseteq X$ é dito **lineável** se existir um espaço vetorial Y de dimensão infinita tal que $Y \subseteq M \cup \{0\}$. Se Y também for denso em X, então M é dito **denso-lineável**. Ainda, se Y tiver a mesma dimensão de X, então M é dito **maximal-denso-lineável**.

Usando esta terminologia, o teorema acima nos diz que o conjunto dos vetores hipercíclicos em X é denso-lineável. Ainda, se X é um espaço de Banach, Bernal-González provou em [6] que $H(T)$ é maximal-denso-lineável. Não provaremos este resultado aqui por não fazer parte de nossos planos.

Se $M \subseteq X$ for lineável e tal espaço Y for fechado, dizemos então que M é **espaçável**. Para uma coletânea de resultados envolvendo hiperciclicidade, lineabilidade, espaçabilidade e conceitos relacionados, sugerimos a leitura de [7, pp. 97–109].

Vamos agora usar um resultado básico de topologia para provar uma propriedade topológica do conjunto dos vetores hipercíclicos.

Lema 2.14. *Seja X um espaço topológico e seja A um subconjunto conexo de X. Então se B é tal que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, então B é conexo.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que B não seja conexo. Isto é, existem abertos U e V em X tais que $U \cap B \neq \emptyset, V \cap B \neq \emptyset, U \cap V \cap B = \emptyset$ e $B \subseteq U \cup V$.

Temos que $U \cap A$ é um conjunto não-vazio. De fato, tome $p \in U \cap B$. Como $B \subseteq \overline{A}$, então $p \in \overline{A}$. Se $p \in A$, então $p \in U \cap A$; se $p \notin A$, temos então que p é um ponto de acumulação de A e, por definição, segue que $U \cap A \neq \emptyset$ (visto que $p \in U$ e U é aberto em X), como afirmamos. [4]

De maneira análoga, temos que $V \cap A$ é não-vazio. Logo, como $A \subseteq B$, temos que U e V são abertos disjuntos tais que $U \cap A \neq \emptyset, V \cap A \neq \emptyset, U \cap V \cap A = \emptyset$ e $A \subseteq U \cup V$, contradizendo a conexidade de A.

■

Tomemos agora o conjunto dos vetores hipercíclicos $H(T)$ e o conjunto $M\backslash\{0\}$ como no Teorema 2.13. Como $M\backslash\{0\} \subseteq H(T) \subseteq \overline{M\backslash\{0\}} = X$ e $M\backslash\{0\}$ é conexo (visto que $M = \mathbb{K}[T]x$ é um espaço normado e a dimensão de M é maior que 1 [5]) então pelo lema anterior temos que $H(T)$ também é conexo. Provamos, assim, o seguinte corolário:

Corolário 2.15. *Se T é um operador hipercíclico em X, então o conjunto dos vetores hipercíclicos é um subconjunto conexo de X.*

[4]Para uma recordação da definição de ponto de acumulação em um espaço topológico e outras propriedades, fazemos referência a [34, p. 97].

[5]Pois M é um conjunto denso em um espaço de dimensão infinita.

Assim, acabamos de ver propriedades relativas ao conjunto dos vetores hipercíclicos. Considerando agora $\mathcal{B}(X)$, podemos também nos perguntar: será que o conjunto dos operadores hipercíclicos é denso em $\mathcal{B}(X)$, quando este espaço está munido da norma natural de operador? O teorema a seguir responde a essa pergunta.

Teorema 2.16. *Se T é um operador hipercíclico, então $\|T\| > 1$.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos que $\|T\| \leq 1$. Vamos provar que T não pode ser hipercíclico.

Seja $y \in X$ qualquer. Para que y seja um vetor hipercíclico para T, devemos ter $\operatorname{orb}(y, T)$ densa em X. No entanto, temos que $\|T(y)\| \leq \|T\| \|y\| \leq \|y\|$ visto que, por hipótese, $\|T\| \leq 1$. De maneira análoga, obtemos que

$$\left\|T^N(y)\right\| \leq \left\|T^N\right\| y \leq \|T\|^N \|y\| \leq \|y\|$$

visto que $\left\|T^N\right\| \leq \|T\|^N$.

Dessa maneira, para todo $T^N(y) \in \operatorname{orb}(y, T)$, temos que $\left\|T^N(y)\right\| \leq \|y\|$. Logo, $\operatorname{orb}(y, T) \subseteq B(0, \|y\|)$. Portanto, $\operatorname{orb}(y, T)$ é limitado em X e, evidentemente, não pode ser denso em X.

Sendo $y \in X$ qualquer, então T não pode ser hipercíclico, como desejado.

■

Como todo operador hipercíclico é tal que $\|T\| > 1$, então o conjunto dos operadores hipercíclicos não pode ser denso em $\mathcal{B}(X)$, quando $\mathcal{B}(X)$ está munido da topologia oriunda da norma natural de operador.

Além de tudo isso, o teorema anterior nos dá um critério simples para decidirmos se um operador tem a chance de ser hipercíclico ou não. O exemplo a seguir, além de ser bastente fácil e ilustrar o que acabamos de dizer, também nos permite dar um exemplo de um operador cíclico que não é hipercíclico.

Exemplo 8. Seja $X = \ell_p, 1 \leq p < \infty$. Seja $S \in \mathcal{B}(X)$ o *forward shift* dado por $S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$. Se e_i representa o vetor tal que a sua única coordenada não-nula é 1 na i-ésima posição, então é claro que $S(e_i) = e_{i+1}$.

Logo, é fácil ver que $\operatorname{span}\operatorname{orb}(e_1, S) = c_{00}$ é denso em X e, portanto, S é cíclico. Porém, como $\|S\| = 1$, então S não pode ser hipercíclico.

Observe que este exemplo responde a seguinte pergunta: visto que todo operador hipercíclico é cíclico, existe algum cíclico que não é hipercíclico? Já sabendo da resposta negativa, entre as várias perguntas que poderíamos levantar agora, existe uma que vai nos ajudar a motivar nosso estudo a seguir: sabendo que nem todo operador cíclico é hipercíclico, então quais propriedades que ambas as classes de operadores não compartilham? Isto é, os operadores hipercíclicos possuem quais propriedades que os operadores cíclicos não possuem? [6]

O estudo destas propriedades poderia nos ajudar a levantar alguns critérios para decidir se um dado operador cíclico é hipercíclico ou não. Entretanto, note que ainda que tais propriedades existam, elas podem ser insuficientes para decidir efetivamente se um operador cíclico é ou não hipercíclico. Ainda assim, a sua existência tem um efeito positivo: se tal operador cíclico não possuir uma destas propriedades, então certamente ele não será hipercíclico.

O teorema que veremos na próxima seção nos fornece uma propriedade que será exatamente como aquela que foi descrita acima.

2.4 O Teorema de Ansari

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (-y, -x)$. É fácil ver que $e_1 = (1, 0)$ é um vetor cíclico para T, assim como $e_2 = (0, 1)$. Agora, note que $T^2(x, y) = (x, y)$. Se z é um vetor cíclico para T^2, então $\operatorname{span}\{z, T^2(z)\} = \operatorname{span}\{z, z\} = \operatorname{span}\{z\}$ seria denso em $\mathbb{R}^2$, o que evidentemente é impossível. Este é, portanto, um exemplo de um operador cíclico tal que suas potências não o são.

Um dos primeiros resultados mais significativos obtidos na teoria dos operadores hipercíclicos foi obtido por Ansari em 1995. Ansari provou que o fenômeno descrito acima não acontece com operadores hipercíclicos: um operador é hipercíclico se, e somente se, todas as suas potências também o são.

Por um lado, é fácil ver que se T^N é hipercíclico, para algum $N \in \mathbb{N}$, então T também o é: isto provém do fato de que $\operatorname{orb}(x, T^N) \subseteq \operatorname{orb}(x, T)$. Observamos agora que provar o contrário não é tão trivial. Poderíamos, por exemplo, tentar usar uma técnica parecida com a que foi utilizada no Lema 2.6. Supondo que $\operatorname{orb}(x, T)$ é denso em X, como X não tem pontos isolados (pois estamos supondo que X é um espaço de Fréchet), então retiraríamos os vetores de $\operatorname{orb}(x, T)$ de maneira a esse conjunto continuar denso e, eventualmente, ser igual a $\operatorname{orb}(x, T^N)$. O problema é que tal processo é infinito e, ao final dele, não há garantia de que o resultado seja mesmo um conjunto denso. Por isso, precisamos tomar uma outra estratégia, como veremos na demonstração do chamado *Teorema de Ansari*, enunciado a seguir.

Teorema 2.17 (Ansari, [2]). *Seja X um espaço de Fréchet separável de dimensão infinita e tomemos $T \in \mathcal{B}(X)$. Então um vetor $x \in X$ é um vetor hipercíclico para T se, e somente se, x é um vetor hipercíclico para T^N, para todo $N \in \mathbb{N}$. Em particular, se T é um operador hipercíclico, então toda potência T^N também o é.*

DEMONSTRAÇÃO: Como já discutimos, é claro que se x é um vetor hipercíclico para T^N, então x é um vetor hipercíclico para T. Assim, $H(T^N) \subseteq H(T)$, para todo $N \in \mathbb{N}$. Para a outra inclusão, fixemos $x \in H(T)$. Queremos provar que o conjunto $\{x, T^N(x), T^{2N}(x), \ldots\}$ é denso em X. Dessa forma, teremos que $x \in H(T^N)$, terminando a demonstração.

[6] Note que o contrário não pode acontecer pois todo operador hipercíclico é cíclico.

Pelo Teorema 2.13, o subespaço $M = \{p(T)x \ : \ p \text{ é um polinômio } \}$ é tal que todo vetor não-nulo é um vetor hipercíclico para T. Tomemos agora $A := T\big|_M$. É claro que A é contínuo em M e que todo vetor não-nulo de M, inclusive x, é um vetor hipercíclico para A em M. Seja $S = \{x, A^N(x), A^{2N}(x), \ldots, \}$. Basta, agora, provarmos que S é denso em M, visto que M é denso em X. Para o resto da demonstração, o fecho e o interior de um subconjunto de M serão entendidas como ocorrendo em relação a M, munido da topologia de subespaço. Isto é, para provarmos que S é denso em M, temos que provar que $\overline{S} = M$. Por um lado, é claro que $\overline{S} \subseteq M$. Para terminar a demonstração, precisamos mostrar que $M \subseteq \overline{S}$.

Para isso, tomemos conjuntos da forma

$$S_k = \bigcup \{\overline{A^{i_1}S} \cap \ldots \cap \overline{A^{i_k}S} \ : \ 0 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq N-1\}$$

para cada k com $1 \leq k \leq N$. Claramente temos que S_k é fechado em M e que $S_N \subseteq S_{N-1} \subseteq \ldots \subseteq S_1$. Além disso, como x é um vetor hipercíclico para A em M, temos que $S_1 = \overline{A^0S} \cup \overline{A^1S} \cup \ldots \cup \overline{A^{N-1}S} = M$.

Para provarmos que $M \subseteq \overline{S}$, vamos mostrar que $S_N = M$. Como $S_N = \overline{A^0S} \cap \overline{A^1S} \cap \ldots \cap \overline{A^{N-1}S} \subseteq \overline{S}$, teremos o desejado. Para isso, vamos mostrar primeiro que S_k é A-invariante, para cada $k = 1, \ldots, N$ e que $0 \in S_N$.

Primeiro, para qualquer $0 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq N-1$ existem $0 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq N-1$ tais que $A(\overline{A^{i_1}S} \cap \ldots \cap \overline{A^{i_k}S}) \subseteq \overline{A^{i_1+1}S} \cap \ldots \cap \overline{A^{i_k+1}S} \subseteq \overline{A^{j_1}S} \cap \ldots \cap \overline{A^{j_k}S} \subseteq S_k$. Portanto, $A(S_k) \subseteq S_k$, provando que S_k é A-invariante.

Agora, como $0 \in S_1$ (pois $0 \in M$ e $M = S_1$), pela definição de S_1 temos que $0 \in \overline{A^iS}$, para algum i. Como $A(\overline{A^iS}) \subseteq \overline{A^{i+1}S}$ e $\overline{A^NS} \subseteq \overline{S}$, temos que $0 \in \overline{A^0S} \cap \overline{A^1S} \cap \ldots \cap \overline{A^{N-1}S} = S_N$.

Sabemos que $S_1 = M$. Suponhamos que $S_k = M$, para algum $1 \leq k < N$. Provaremos que $S_{k+1} = M$ e, assim, ficará provado que $S_N = M$. Suponhamos por absurdo que $S_{k+1} \neq M$. Dessa forma, temos que $S_{k+1} = \{0\}$. De fato, como S_{k+1} é fechado, A-invariante e todo vetor de M (e, dessa maneira, S_{k+1}) é hipercíclico para A, então se existisse $y \in S_{k+1}$ não-nulo, teríamos que $\overline{\operatorname{orb}(y, A)} = M \subseteq S_{k+1}$, contradizendo nossa hipótese inicial.

Agora, se $\{i_1, \ldots, i_k\} \neq \{j_1, \ldots, j_k\}$, então

$$(\overline{A^{i_1}S} \cap \ldots \cap \overline{A^{i_k}S}) \cap (\overline{A^{j_1}S} \cap \ldots \cap \overline{A^{j_k}S}) \subseteq S_{k+1}$$

pela definição de S_{k+1}. Logo,

$$[(\overline{A^{i_1}S} \cap \ldots \cap \overline{A^{i_k}S}) \setminus \{0\}] \cap [(\overline{A^{j_1}S} \cap \ldots \cap \overline{A^{j_k}S}) \setminus \{0\}] \subseteq S_{k+1} \setminus \{0\} = \emptyset.$$

Ou seja:

$$[(\overline{A^{i_1}S} \cap \ldots \cap \overline{A^{i_k}S}) \setminus \{0\}] \cap [(\overline{A^{j_1}S} \cap \ldots \cap \overline{A^{j_k}S}) \setminus \{0\}] = \emptyset.$$

Assim, $S_k \backslash \{0\} = M \backslash \{0\}$ é a união finita disjunta de conjuntos fechados (em relação à $M \backslash \{0\}$) da forma $(\overline{A^{i_1}S} \cap \ldots \cap \overline{A^{i_k}S}) \setminus \{0\}$. Como $M \backslash \{0\}$ é conexo (vide Corolário 2.15), um destes conjuntos deve ser igual a $M \backslash \{0\}$ e todos os outros vazios. Se $(\overline{A^{i_1}S} \cap \ldots \cap \overline{A^{i_k}S}) \setminus \{0\} = M \backslash \{0\}$, então, de maneira análoga ao que fizemos quando provamos que S_k é A-invariante, obtemos que

$$A(M \backslash \{0\}) = A((\overline{A^{i_1}S} \cap \ldots \cap \overline{A^{i_k}S}) \setminus \{0\}) = (\overline{A^{j_1}S} \cap \ldots \cap \overline{A^{j_k}S}) \setminus \{0\}.$$

Como concluímos anteriormente, $(\overline{A^{j_1}S} \cap \ldots \cap \overline{A^{j_k}S}) \setminus \{0\}$ deve ser vazio e assim a última equação nos diz que $A(M \backslash \{0\}) = \emptyset$, um absurdo.

Portanto, devemos ter $S_N = M$, concluindo a demonstração.

■

Notemos agora que se T é hipercíclico, pelo teorema anterior temos que T^N também é hipercíclico, para todo $N \in \mathbb{N}$. Assim, aplicando o Teorema 2.16 para este operador, tem origem o seguinte corolário:

Corolário 2.18. *Se T é um operador hipercíclico, então $\|T^N\| > 1$, para todo $N \in \mathbb{N}$.*

Seja T um operador cíclico. Então o Teorema de Ansari nos fornece um critério para testarmos se T pode ser hipercíclico ou não: se T^N não for cíclico, para algum $N \in \mathbb{N}$, então T não pode ser hipercíclico, visto que caso T fosse hipercíclico, então pelo Teorema de Ansari teríamos que T^N também o seria. Neste caso, teríamos, evidentemente, que T^N seria cíclico, contradizendo nossa hipótese inicial.

De maneira análoga, o conjunto dos vetores cíclicos também serve como um critério. Observe que se, para algum $N \in \mathbb{N}$, T^N não possuir um conjunto denso de vetores cíclicos, então T também não pode ser hipercíclico. De fato, se T fosse hipercíclico, pelo Teorema de Ansari teríamos que T^N também o seria. Pelo Teorema 2.13, T^N teria então um conjunto denso de vetores hipercíclicos. Como todo vetor hipercíclico é um vetor cíclico, então T^N teria um conjunto denso de vetores cíclicos, de novo contradizendo nossa hipótese inicial.

Ainda assim, mesmo que, para todo $N \in \mathbb{N}$, T^N seja cíclico e tenha um conjunto denso de vetores cíclicos, nada podemos inferir sobre a hiperciclicidade de T. Por isso, precisamos buscar novas relações envolvendo a hiperciclicidade de T, que é exatamente o que faremos no capítulo a seguir.

Capítulo 3

Relações entre a Hiperciclicidade de T e o operador $T \oplus T$

Vimos, no capítulo anterior, uma condição *suficiente* para que um operador T seja hipercíclico, a saber, o Critério de Hiperciclicidade (Teorema 2.8). Como já dissemos na introdução, o problema de saber se tal condição também era *necessária*, isto é, se todo operador hipercíclico satisfaz o Critério, motivou muitos avanços na teoria de Operadores Hipercíclicos e, segundo Grosse-Erdmann [23, p. 275], tal problema também foi considerado, até sua solução, como sendo *o principal problema em hiperciclicidade*. Vamos enunciá-lo em destaque para futuras referências:

Problema 1 (Principal Problema em Hiperciclicidade)**.** Todo operador hipercíclico satisfaz o Critério de Hiperciclicidade?

Como dissemos, este problema ficou em aberto por muitos anos. Durante esse tempo, contribuições foram feitas, algumas das quais veremos neste capítulo. Na primeira seção, discutiremos a relação entre a hiperciclicidade de um operador com a hiperciclicidade da soma $T \oplus T$. A priori, tal discussão não tem conexão alguma com o problema destacado acima. Entretanto, na segunda seção veremos através de um teorema importantíssimo (Teorema 3.5) que o problema proposto na primeira seção (Problema 2) se relaciona de uma maneira direta com o Problema 1. Já na terceira seção mostraremos alguns resultados que surgiram na tentativa de solucionar o Problema 1.

Notação. Assim como no capítulo anterior, denotaremos por X um espaço de Fréchet separável e de dimensão infinita. Lembremos que um espaço de Fréchet é um espaço vetorial topológico localmente convexo, metrizável, completo e é tal que a sua métrica d é invariante por translações (Definição 1.4).

3.1 O Operador $T \oplus T$

Seja T um operador linear limitado qualquer em X. Considerando o espaço $X \times X$, podemos definir $T \oplus T \in \mathcal{B}(X \times X)$ por $(T \oplus T)(x, y) = (Tx, Ty)$. Dessa maneira, algumas perguntas pertinentes sobre a hiperciclicidade de $T \oplus T$ podem ser feitas, sendo a principal delas a seguinte: se T é hipercíclico, então $T \oplus T$ também o é? Tal pergunta foi feita por Herrero e é colocada em destaque a seguir para facilitar futuras referências:

Problema 2 (Herrero, [27])**.** Seja T um operador hipercíclico. Então é verdade que $T \oplus T$ é hipercíclico?

Em primeiro lugar, note que a resposta para a "recíproca" é trivialmente verdadeira: se $T \oplus T$ for hipercíclico, então é claro que T também o será. Portanto, é natural pensarmos que o Problema 2 admita uma resposta positiva.

Entretanto, precisamos ter cuidado. Se y um vetor hipercíclico para T, note então que não necessariamente (y, y) é um vetor hipercíclico para $T \oplus T$, visto que o fato de $\operatorname{orb}(y, T)$ ser densa em X não necessariamente implica em $\operatorname{orb}((y, y), T \oplus T)$ ser densa em $X \times X$. De fato, $\operatorname{orb}((y, y), T \oplus T) = \{(T \oplus T)^n(y, y) \,:\, n = 0, 1, 2, \ldots\} = \{(T^n y, T^n y) \,:\, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ não é, necessariamente, igual a $\operatorname{orb}(y, T) \times \operatorname{orb}(y, T)$. Sendo assim, não há nada, a priori, que garanta que $T \oplus T$ seja hipercíclico.

Portanto, a solução deste problema não é direta. Por isso, devemos buscar outros meios de resolvê-lo. Como já dissemos, veremos neste capítulo que este problema se relaciona com o Critério de Hiperciclicidade. Para isso, vamos introduzir os conceitos de *Sequências Universais* e *Operadores Hereditariamente Hipercíclicos*.

3.2 Sequências Universais e Operadores Hereditariamente Hipercíclicos

Podemos tentar generalizar o conceito de hiperciclicidade no seguinte sentido: ao invés de considerarmos a sequência de potências de T, podemos considerar uma sequência arbitrária de operadores definidos em um mesmo espaço. Tal generalização natural nos remete ao conceito de *universalidade*.

Definição 3.1. *Seja X um espaço de Fréchet e seja $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma sequência de operadores contínuos em X. Tal sequência é dita* **universal** *se existir um vetor $y \in X$ tal que o conjunto $\{T_i(y) \,:\, i \geq 1\}$ é denso em X. Tal vetor y é dito* **vetor universal para** $(T_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Alguns autores optam por chamar tal sequência de *hipercíclica*, enquanto outros optam por denominá-la *universal*, como fizemos. Escolhemos usar *universal* para reservar o termo *hipercíclico* apenas para o caso das potências de T. Neste caso, note que esta definição é mesmo uma generalização para hiperciclicidade: se fixarmos um $T \in \mathcal{B}(X)$ e considerarmos a sequência $T_i = T^i$, $i \in \mathbb{N}$, obtemos como caso particular a definição de hiperciclicidade. Faremos, agora, uma observação que será de muita utilidade mais adiante.

Observação 3.2. Suponhamos que X seja um espaço métrico sem pontos isolados. Fixemos uma sequência crescente $(n_k)_{k \geq 1}$ de números naturais. De maneira análoga ao Lema 2.6, temos que se y é um vetor universal para uma sequência $(T^{n_k})_{k \geq 1}$, então o vetor $T^m(y)$ também o é, para todo $m \in \mathbb{N}$. Ou seja, temos que o conjunto $\{T^{n_k}(T^m y), k = 1, 2, \ldots\}$ é denso em X. Isto é verdade pois $\{T^{n_k}(y) \,:\, k \geq 1\}$ é denso em X (pois y é universal), $T^{n_k}(T^m y) = T^m(T^{n_k} y)$ e T^m tem imagem densa.

Para vermos que T^m tem mesmo imagem densa, para cada $m \in \mathbb{N}$, primeiro observe que se a sequência $(T^{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é universal, então T é hipercíclico. Daí, tomando $p(t) = x^m$, temos, pelo Teorema 2.12, que $p(T) = T^m$ tem imagem densa, como desejado.

Vejamos agora o conceito de operador hereditariamente hipercíclico.

Definição 3.3. *Seja X um espaço de Fréchet e seja $T \in \mathcal{B}(X)$. Tomemos (n_k) uma sequência de inteiros não-negativos. Dizemos que T é* **hereditariamente hipercíclico com respeito a** (n_k) *se para todas as subsequências $(n_{k_j}) \subseteq (n_k)$ tivermos que a sequência $(T^{n_{k_j}})_{j\geq 1}$ é universal.*

Um operador T é dito **hereditariamente hipercíclico** *se é hereditariamente hipercíclico para alguma sequência (n_k).*

De posse dessas duas definições, estamos em condições de provar um teorema que nos fornecerá uma resposta parcial para o Problema 2. Para a demonstração de tal teorema, precisamos de um lema:

Lema 3.4 (Bès, [9]). *Seja $(T^{n_k})_{k\geq 1} \subseteq \mathcal{B}(X)$. As afirmações a seguir são equivalentes:*

(i) A sequência $(T^{n_k})_{k\geq 1}$ é universal.

(ii) Para todos os abertos não-vazios $U, V \subseteq X$, existe um r arbitrariamente grande tal que

$$T^{n_r}(U) \cap V \neq \emptyset.$$

(iii) O conjunto dos vetores universais para a sequência $(T^{n_k})_{k\geq 1}$ é um subconjunto G_δ denso de X.

DEMONSTRAÇÃO: (i) $\Rightarrow$ (ii). Sejam $U, V \subseteq X$ abertos não-vazios e seja y um vetor universal para a sequência $(T^{n_k})_{k\geq 1}$. Tomemos k_0 tal que

$$T^{n_{k_0}}(y) \in U. \tag{3.1}$$

Sendo y um vetor universal, é claro que tal k_0 existe. Tomemos $y' := T^{n_{k_0}}(y)$. Pela Observação 3.2, y' é um vetor universal para a sequência $(T^{n_k})_{k\geq 1}$. Podemos então tomar um r arbitrariamente grande [1] tal que

$$T^{n_r}(y') \in V.$$

[1] É possível tomarmos tal r arbitrariamente grande pelo seguinte motivo: sendo y um vetor universal, sabemos que o conjunto $\{T^{n_1}(y), T^{n_2}(y), \ldots\}$ é denso em X. Seja k_1 o menor inteiro tal que $T^{n_{k_1}} \in V$. Como X não possui pontos isolados, então o conjunto $\{T^{n_1}(y), T^{n_2}(y), \ldots\}\backslash\{T^{n_{k_1}}(y)\}$ ainda é denso em X. Assim, podemos tomar um k_2 tal que $k_1 < k_2$ e $T^{n_{k_2}}(y) \in V$. De novo, podemos tomar o conjunto denso $\{T^{n_1}(y), T^{n_2}(y), \ldots\}\backslash\{T^{n_{k_1}}(y), T^{n_{k_2}}(y)\}$ e repetir o processo, produzindo então tal r arbitrariamente grande.

Como $y' \in U$ (vide equação (3.1)), então a equação anterior nos diz que $T^{n_r}(U) \cap V \neq \emptyset$, como desejado.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Seja $\{B_s\}_{s\geq 1}$ uma base enumerável para a topologia de X. [2] Tomemos os conjuntos

$$D_s := \bigcup_{k\geq 1} \{z \in X : T^{n_k}(z) \in B_s\}$$

Observe que $D_s = \bigcup_{k\geq 1} (T^{n_k})^{-1}(B_s)$ e, como T^{n_k} é contínuo para todo k, isto mostra que D_s é aberto.

Vamos mostrar agora que D_s é denso. Suponhamos que não seja. Então existe um B_j tal que $D_s \cap B_j = \emptyset$. Pela definição de D_s, isto quer dizer que $T^{n_k}(B_s) \cap B_j = \emptyset$ para todo k, um absurdo por hipótese. Sendo cada D_s aberto e denso, então pelo Teorema de Baire $\bigcap_{s\geq 1} D_s$ é um conjunto G_δ denso em X.

Para finalizar, basta observar que $\bigcap_{s\geq 1} D_s$ é exatamente o conjunto dos vetores universais para a sequência $(T^{n_k})_{k\geq 1}$. De fato, $z \in \bigcap_{s\geq 1} D_s$ se, e somente se, para todo s, existe $k = k(s)$ tal que $T^{n_k}(z) \in B_s$ o que acontece se, e somente se, $\{T^{n_k}(z) : k \geq 1\}$ for denso em X, como desejado.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Trivial.

■

Vamos agora ao teorema:

Teorema 3.5 (Bès e Peris, [10]). *Seja $T \in \mathcal{B}(X)$. As afirmações a seguir são equivalentes:*

(i) T satisfaz o Critério de Hiperciclicidade.

(ii) T é hereditariamente hipercíclico.

(iii) $T \oplus T$ é hipercíclico.

DEMONSTRAÇÃO: (i) $\Rightarrow$ (ii). Sejam $X_0, Y_0, (n_k)$ e $S_{n_k} : Y_0 \to X$ como no Critério de Hiperciclicidade. Vamos mostrar que (T^{n_k}) é universal. Como explicaremos no final, a partir disso concluiremos que T é hereditariamente hipercíclico.

Sejam U, V abertos não-vazios de X. Usando a densidade de X_0 e Y_0, tomemos $x \in X_0$ e $y \in Y_0$ e um $\varepsilon > 0$ tais que $B(x, \varepsilon) \subseteq U$ e $B(y, 2\varepsilon) \subseteq V$. Pelas condições do Critério de

[2] Observe que X é um espaço (vetorial) topológico metrizável e separável. Assim, não é difícil mostrar que X possui base enumerável.

Hiperciclicidade, existe $n_r \in (n_k)$ arbitrariamente grande tal que

$$T^{n_r}(x) \in B(0,\varepsilon) \tag{3.2}$$

$$S_{n_r}(y) \in B(0,\varepsilon) \tag{3.3}$$

$$T^{n_r} \circ S_{n_r}(y) - y \in B(0,\varepsilon) \tag{3.4}$$

Assim, como $B(x,\varepsilon) \subseteq U$ e $S_{n_r}(y) \in B(0,\varepsilon)$, temos que $x + S_{n_r}(y) \in B(x,\varepsilon) \subseteq U$. De fato, por (3.3), $S_{n_r}(y) \in B(0,\varepsilon) \Rightarrow d(S_{n_r}(y),0) < \varepsilon \Rightarrow d(x+S_{n_r}(y),x) < \varepsilon$, usando o fato de que a métrica d é invariante por translações.

Vamos mostrar agora que $T^{n_r}(x+S_{n_r}(y)) \in B(y,2\varepsilon) \subseteq V$. Assim, tomando $z = x+S_{n_r}(y)$, chegaremos então a conclusão de que $z \in U$ (pelo parágrafo anterior) e que $T^{n_r}(z) \in V$. Ou seja, $T^{n_r}(U) \cap V \neq \emptyset$. Pelo lema anterior, teremos que a sequência (T^{n_k}) é universal, como desejamos.

Primeiro, é claro que $T^{n_r}(x+S_{n_r}(y)) = T^{n_r}(x) + T^{n_r} \circ S_{n_r}(y)$. Daí, por (3.4):

$$\begin{aligned}
T^{n_r} \circ S_{n_r}(y) - y \in B(0,\varepsilon) &\Rightarrow d(T^{n_r} \circ S_{n_r}(y) - y, 0) < \varepsilon \\
&\Rightarrow d(T^{n_r} \circ S_{n_r}(y), y) < \varepsilon \\
&\Rightarrow d(T^{n_r} \circ S_{n_r}(y) + T^{n_r}(x), y + T^{n_r}(x)) < \varepsilon
\end{aligned}$$

usando, de novo, a invariância por translações.

Agora, por (3.2), temos que $d(T^{n_r}(x)+y,y) = d(T^{n_r}(x),0) < \varepsilon$. Logo, pela desigualdade triangular:

$$d(T^{n_r}(x) + T^{n_r} \circ S_{n_r}(y), y) \leq \underbrace{d(T^{n_r}(x) + T^{n_r} \circ S_{n_r}(y), T^{n_r}(x)+y)}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(T^{n_r}(x)+y,y)}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$$

como desejado.

Mostramos, então, que dada a sequência (n_k) que satisfaz o Critério, a sequência (T^{n_k}) é universal. Observe agora que o Critério também é satisfeito para qualquer subsequência (n_{k_j}) de (n_k). Assim, da mesma maneira que mostrarmos que (T^{n_k}) é universal, temos também que $(T^{n_{k_j}})$ é universal, para qualquer subsequência (n_{k_j}) de (n_k). Em outras palavras, temos que T é hereditariamente hipercíclico, como desejado.

<u>(ii) $\Rightarrow$ (iii)</u>. Suponhamos que T seja hereditariamente hipercíclico com respeito a uma sequência (n_k). Sejam $U_1 \times U_2$ e $V_1 \times V_2$ abertos não-vazios de $X \times X$. Vamos provar que existe um m tal que

$$(T \oplus T)^m(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset.$$

Dessa maneira, pelo Teorema da Transitividade de Birkhoff (Teorema 2.5), teremos que $T \oplus T$ é hipercíclico.

Tomando como subsequência a própria sequência (n_k) obtemos, por hipótese, que a sequência (T^{n_k}) é universal. Dessa maneira, pelo lema anterior existe uma subsequência [3] $(n_{k_j}) \subseteq (n_k)$ tal que

$$T^{n_{k_j}}(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset.$$

Porém, sendo $(n_{k_j}) \subseteq (n_k)$ e T hereditariamente hipercíclico com respeito a (n_k), temos que a sequência $(T^{n_{k_j}})$ também é universal. Do mesmo jeito, pelo lema anterior obtemos um $m \in (n_{k_j})$ tal que

$$T^m(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset.$$

Portanto, obtemos um $m \in (n_{k_j})$ tal que

$$(T \oplus T)^m(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2)$$

como desejado.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Seja (x, y) um vetor hipercíclico para $T \oplus T$. Note que é claro que x e y são vetores hipercíclicos para T. Logo, dado um aberto não-vazio $U \subseteq X$, existe um $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^k(y) \in U$. Além disso, como X não possui pontos isolados e $\operatorname{orb}(y, T)$ é denso em X, pelo Lema 2.6 temos que $\operatorname{orb}(T^k(y), T)$ é denso em X, para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, temos que tal $T^k(y)$ é um vetor hipercíclico para T.

Afirmamos agora que, para todo $k \in \mathbb{N}$, $(x, T^k(y))$ é um vetor hipercíclico para $T \oplus T$. De fato, primeiro observe que, como T é um operador hipercíclico, então T^k também o é, pelo Teorema de Ansari (Teorema 2.17). Assim, se I é o operador identidade em X, então $I \oplus T^k$ tem imagem densa, para todo $k \in \mathbb{N}$. Agora, como $D = \{(T^n x, T^n y) \, : \, n = 0, 1, 2, \ldots\}$ é denso em X (pois $T \oplus T$ é hipercíclico), então $(I \oplus T^k)(D) = \{(T^n x, T^{n+k} y) \, : \, n = 0, 1, 2, \ldots\} = \operatorname{orb}((x, T^k y), T \oplus T)$ também é denso em X, o que prova que $(x, T^k(y))$ é um vetor hipercíclico para $T \oplus T$. [4]

Dessa maneira, considerando os dois parágrafos anteriores, podemos dizer que para todo aberto não-vazio U, existe um $u \in U$ tal que (x, u) é um vetor hipercíclico para $T \oplus T$.

Fixemos agora uma sequência decrescente $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de abertos que forme uma base para o zero. Pelo que já comentamos, fixado $k \in \mathbb{N}$, podemos achar $u_k \in U_k$ tal que (x, u_k) é um vetor hipercíclico para $T \oplus T$. Logo, por indução, podemos encontrar uma sequência crescente (n_k) de

[3] Observe que a existência dessa subsequência é garantida pelo item (ii) do lema anterior nos permitir tomar um r arbitrariamente grande.

[4] A rigor, $(I \oplus T^k)(D)$ é denso na imagem de $I \oplus T^k$. No entanto, como a imagem de $I \oplus T^k$ é densa em X, então segue que $(I \oplus T^k)(D)$ é denso em X.

números inteiros positivos tais que

$$T^{n_k}(x) \in U_k \tag{3.5}$$

$$T^{n_k}(u_k) \in x + U_k \tag{3.6}$$

De fato, observe que o passo indutivo é análogo ao processo de "retirada" de pontos de um conjunto denso em um espaço sem pontos isolados (como feito no Lema 2.6): definido n_k, tome $u_{k+1} \in U_{k+1}$ tal que (x, u_{k+1}) é um vetor hipercíclico para $T \oplus T$. Assim, temos que $\{(T^n x, T^n u_{k+1}) : n = 0, 1, 2, \ldots\}$ é denso em X. Mas, como X não possui pontos isolados, então $\{(T^m x, T^m u_{k+1}) : m > n_k\}$ também é denso em X. Daí, basta tomar $n_{k+1} > n_k$ de maneira a satisfazer as duas condições acima.

Seja $X_0 = Y_0 := \operatorname{orb}(x, T)$. Sendo x um vetor hipercíclico, X_0, Y_0 são densos em X e, portanto, são candidatos a serem os conjuntos descritos no Critério de Hiperciclidade. Como $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente e é uma base para o zero, então por (3.5) temos que $T^{n_k}(x) \to 0$. Daí, pela continuidade de T obtemos que $T^{n_k}(z) \to 0$, para todo $z \in X_0 = \operatorname{orb}(x, T)$, satisfazendo assim a primeira condição do Critério.

Definimos agora $S_{n_k} : Y_0 \to X$ da seguinte maneira (lembrando que se $z \in Y_0$, então $z = T^n(x)$, para algum n): $S_{n_k}(T^n x) := T^n(u_k)$. Como $u_k \in U_k$ e $(U_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente, então $u_k \to 0$. Logo, $S_{n_k}(z) = T^n(u_k) \to 0$ quando $k \to \infty$, satisfazendo então a segunda condição. [5]

Verifiquemos agora a terceira condição. Seja $z = T^n(x) \in Y_0$. Logo, temos que $T^{n_k} \circ S_{n_k}(z) = T^{n_k} \circ S_{n_k}(T^n x) = T^{n_k}(T^n u_k) = T^n(T^{n_k} u_k) \to T^n(x) = z$, quando $k \to \infty$, pois $T^{n_k}(u_k) \to x$ por (3.6). Logo, a terceira condição do Critério está satisfeita.

Satisfeitas as três condições do Critério de Hiperciclicidade, fica provada a tese.

■

Note que as funções S_{n_k} estão bem definidas mas podem não ser nem lineares nem contínuas. Porém, lembrando da Observação 2.10, isto não cria um problema com Critério de Hiperciclicidade e não torna esta demonstração inválida.

Antes de tecermos alguns comentários sobre este importante teorema e a sua relação com os Problemas 1 e 2, vejamos dois corolários:

Corolário 3.6 (Bès e Peris, [10]). *Suponhamos que $T \in \mathcal{B}(X)$ satisfaça o Critério de Hiperciclicidade. Então T^n também satisfaz o Critério, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Como T satisfaz o Critério de Hiperciclicidade, então $T \oplus T$ é hipercíclico, vide teorema anterior. Pelo Teorema de Ansari (Teorema 2.17) temos que $(T \oplus T)^n$ é hipercíclico. Como $(T \oplus T)^n = T^n \oplus T^n$, então $T^n \oplus T^n$ é hipercíclico. Daí, pelo teorema anterior, segue que T^n satisfaz o Critério, como desejado.

[5] Observe que, neste caso, n está fixo. Portanto, $T^n(u_k) \to 0$ quando $k \to \infty$ não contradiz a equação (3.6).

■

Corolário 3.7 (Bès e Peris, [10]). *Seja $T \in \mathcal{B}(X)$ um operador hipercíclico tal que o conjunto $\{x \in X \ : \ \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } T^n(x) = x\}$ é denso em X. Então T satisfaz o Critério de Hiperciclicidade.*

DEMONSTRAÇÃO: Pelo Teorema 3.5, basta mostrar que $T \oplus T$ é hipercíclico. Tomemos $U_1 \times U_2$ e $V_1 \times V_2$ abertos não-vazios de $X \times X$. Vamos provar que existe um n tal que

$$(T \oplus T)^n (U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset.$$

Ou seja, vamos provar que

$$\begin{cases} T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset \\ T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset \end{cases}$$

Dessa maneira, pelo Teorema da Transitividade de Birkhoff (Teorema 2.5), teremos que $T \oplus T$ é hipercíclico.

Sendo T hipercíclico, pelo Teorema da Transitividade de Birkhoff existe um m tal que

$$T^m(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset. \tag{3.7}$$

Agora, como T é contínuo, denotando $(T^m)^{-1} = T^{-m}$, temos que $T^{-m}(V_1)$ é aberto. Logo, $U_1 \cap T^{-m}(V_1)$ é um aberto; além disso, é não-vazio, em virtude da equação (3.7). Portanto, como o conjunto $\{x \in X \ : \ \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } T^n(x) = x\}$ é denso em X, então existe um $u_1 \in \big(U_1 \cap T^{-m}(V_1)\big)$. Ou seja, existe $u_1 \in X$ tal que $T^m(u_1) \in V_1$ e $T^p(u_1) = u_1$, para algum $p \in \mathbb{N}$.

Pelo Teorema de Ansari (Teorema 2.17), o operador T^p é hipercíclico. Portanto, de novo pelo Teorema da Transitividade de Birkhoff, existe um $r \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^{rp}(U_2) \cap T^{-m}(V_2) \neq \emptyset$$

visto que $T^{-m}(V_2)$ é um conjunto aberto.

Seja $n := rp + m$. Então, pela equação acima, temos que $T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$ e, pela definição de u_1, que

$$T^n(u_1) = T^m(T^{rp} u_1) = T^m(u_1) \in V_1$$

Logo, temos que $T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ e que $T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$, como desejado.

■

Os operadores hipercíclicos tais que o conjunto $\{x \in X \ : \ \text{existe } \ n \in \mathbb{N} \text{ tal que } T^n(x) = x\}$ é denso em X são ditos **caóticos**. Dessa forma, o corolário acima nos mostra que todo operador caótico satisfaz o Critério de Hiperciclicidade.

Voltando agora ao Teorema 3.5, note que tal teorema não responde, de um jeito ou de outro, o Problema 2. O que este teorema nos forneceu foi uma estratégia para respondermos tal problema tanto de maneira positiva quanto de maneira negativa. Se quisermos responder o problema positivamente, então basta mostrarmos que todo operador hipercíclico T satisfaz o Critério. Daí, pelo teorema, o operador $T \oplus T$ será hipercíclico, como desejado. E, para respondermos na negativa, basta exibirmos um contraexemplo, isto é, basta exibirmos um operador hipercíclico T não satisfaça o Critério. Da mesma maneira, o teorema nos dirá que soma $T \oplus T$ não pode ser hipercíclica.

Agora, observe que em ambos os casos a demonstração ou o contraexemplo respondem também o Problema 1. Por isso, este teorema nos forneceu a seguinte equivalência:

$$\text{Problema } 1 \Leftrightarrow \text{Problema } 2$$

Da mesma maneira, também podemos tentar resolver o Problema 1 "usando" o Teorema 3.5 e o operador $T \oplus T$. E foi justamente usando esta estratégia que o Problema 1 foi resolvido. Em [16], De La Rosa e Read construíram um operador hipercíclico T em um espaço de Banach conveniente tal que o operador $T \oplus T$ não é hipercíclico. Logo, através do Teorema 3.5, eles deram uma resposta negativa ao Problema 1. Em [3], Bayart e Matheron foram além construíram um operador hipercíclico T tal que o operador $T \oplus T$ não é hipercíclico nos espaços clássicos c_0 e $\ell_p, 1 \leq p < \infty$. Dessa maneira, podemos dizer que ambos não resolveram negativamente o problema de uma maneira "direta", isto é, construíram um operador hipercíclico T e verificaram efetivamente que ele não satisfazia alguma das condições do Critério.

Como dissemos na introdução, veremos a construção de Bayart e Matheron detalhadamente no próximo capítulo. Por enquanto, veremos na próxima seção algumas caracterizações interessantes que surgiram para o Critério de Hiperciclicidade e o operador $T \oplus T$. Tais caracterizações, feitas antes das soluções de De La Rosa/Read e Bayart/Matheron, foram feitas justamente na tentativa de se solucionar o Problema 1 usando o Teorema 3.5, como dissemos anteriormente.

3.3 Ciclicidade e Hiperciclicidade de $T \oplus T$

Vamos ver, nesta seção, que se supusermos que T é hipercíclico, então $T \oplus T$ é hipercíclico se, e somente se, $T \oplus T$ é cíclico (Teorema 3.11). Veremos ainda que o Critério de Hiperciclicidade também é equivalente a uma condição não-trivial, muitas vezes chamada de *Three Open Set's Condition* (Corolário 3.12), o que forneceu à época mais uma ferramenta na tentativa de solucionar os problemas já mencionados.

Vamos começar com um lema:

Lema 3.8 (Godefroy e Shapiro, [19]). *Seja T um operador limitado em X. Suponha que para todo par (U, V) de abertos não-vazios de X e para toda vizinhança W do zero, existe um inteiro n tal que $T^n(U) \cap W$ e $T^n(W) \cap V$ são não-vazios. Então T é hipercíclico.*

DEMONSTRAÇÃO: Vamos provar que T é topologicamente transitivo, isto é, que dados abertos U

e V não-vazios existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Daí, pelo Teorema da Transitividade de Birkhoff, seguirá a tese.

Sejam U e V dois abertos não-vazios. Tomemos $x \in U$ e $y \in V$. Como U e V são abertos, então existem $U_r = B(x,r)$ e $V_s = B(y,s)$ tais que $x \in U_r \subseteq U$ e $y \in V_s \subseteq V$. Vamos denotar também $W_k = B(0, 1/k)$. Agora, observe que $x \in U_{r/k} \subseteq U_r$ e $y \in V_{s/k} \subseteq V_s$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ temos que, por hipótese, existe um $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n_k}(U_{r/k}) \cap W_k \neq \emptyset$ e $T^{n_k}(W_k) \cap V_{s/k} \neq \emptyset$. O fato de a primeira interseção ser não-vazia implica, ao deixarmos $k \to \infty$, que existe uma sequência $(x'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $x'_k \to x$ e uma sequência $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de inteiros positivos tal que $T^{n_k}(x'_k) \to 0$.

Agora, sendo a segunda interseção não-vazia, ao deixarmos $k \to \infty$ encontramos uma outra sequência $(x''_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $x''_k \to 0$ e $T^{n_k}(x''_k) \to y$. Neste caso, observe que a sequência $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é a mesma utilizada na primeira interseção, vide a hipótese.

Seja $x_k := x'_k + x''_k$. Pelo que vimos acima, temos que $x_k \to x$. Da mesma maneira, usando a linearidade de T, temos que

$$T^{n_k}(x_k) = T^{n_k}(x'_k + x''_k) = T^{n_k}(x'_k) + T^{n_k}(x''_k) \to 0 + y = y.$$

Como $x_k \to x$, então existe um k_1 tal que, para todo $k > k_1$, $x_k \in U$. Agora, como $T^{n_k}(x_k) \to y$, então existe um k_2 tal que $T^{n_k}(x_k) \in V$, para todo $k > k_2$. Dessa forma, tomando um $k_0 > \max\{k_1, k_2\}$, temos que, para todo $k > k_0$, ambos $x_k \in U$ e $T^{n_k}(x_k) \in V$ são satisfeitos. Portanto, segue que $T^{n_k}(U) \cap V \neq \emptyset$, para todo $k > k_0$, o que prova que T é topologicamente transitivo, como desejado.

■

O lema acima nos fornece uma outra condição suficiente para a hiperciclicidade de T. Esta condição, a saber, a propriedade de que *para todo par (U, V) de abertos não-vazios de X e para toda vizinhança W do zero, existe um inteiro n tal que $T^n(U) \cap W$ e $T^n(W) \cap V$ são não-vazios* é condição chamada de **Three Open Set's Condition**, como citamos anteriormente.

Lembrando do Critério de Hiperciclicidade, temos assim dois critérios para averiguar a hiperciclicidade de um operador. Observe que a condição acima implica a condição de ser topologicamente transitivo, da mesma maneira que o Critério. Observe, ainda, que a demonstração deste lema foi bastante parecida com a demonstração do Critério. Dessa maneira, uma pergunta natural a se fazer é: existe alguma relação entre ambos os critérios, isto é, existe a possibilidade de um implicar no outro e vice-versa? Como já respondemos no início desta seção, veremos ao final deste capítulo que a *Three Open Set's Condition* é equivalente ao Critério de Hiperciclicidade.

Lema 3.9 (León-Saavedra, [30]). *Seja T um operador limitado em X. Suponha que para todo par (U, V) de abertos não-vazios de X e para toda vizinhança W do zero, existe um inteiro n tal que $T^n(U) \cap W$ e $T^n(W) \cap V$ são não-vazios. Então existem um vetor hipercíclico z e uma* *sequência de números inteiros positivos (n_k) tais que $T^{n_k}(z) \to 0$ e $T^{n_k}(B_k) \cap (z + B_k) \neq \emptyset$, onde $B_k = B(0, 1/k)$.*

DEMONSTRAÇÃO: Vamos mostrar que o conjunto dos vetores que satisfazem $T^{r_k}(z) \to 0$ e $T^{r_k}(B_k) \cap (z+B_k) \neq \emptyset$, para alguma sequência (r_k) é um G_δ denso em X. Como T é hipercíclico (vide lema anterior), o conjunto dos vetores hipercíclicos também é um G_δ denso em X (Corolário 2.7). Portanto, usando o Teorema de Baire será possível achar um vetor hipercíclico z e uma sequência (n_k) satisfazendo as condições da tese. Vamos denotar $T^{-n} = (T^n)^{-1}$.

Em primeiro lugar, notemos que o conjunto dos vetores que satisfazem $T^{r_k}(z) \to 0$ e $T^{r_k}(B_k) \cap (z + B_k) \neq \emptyset$, para alguma sequência (r_k) é o conjunto

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \big(T^{-n}(B_k) \cap \{z \,:\, T^n(B_k) \cap (z + B_k) \neq \emptyset\}\big)$$

Denotemos por G_k o conjunto $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \big(T^{-n}(B_k) \cap \{z \,:\, T^n(B_k) \cap (z + B_k) \neq \emptyset\}\big)$.Vamos mostrar que G_k é um aberto denso. Daí, pelo Teorema de Baire, seguirá que o conjunto dos vetores satisfazendo as condições da tese é um G_δ denso, como desejado.

- G_k é aberto

Note que G_k é a união enumerável de $A_{k,n} := T^{-n}(B_k) \cap \{z \,:\, T^n(B_k) \cap (z + B_k) \neq \emptyset\}$. Logo, basta provar que $A_{k,n}$ é aberto, para todo n. Como $A_{k,n}$ é a interseção de dois conjuntos, para mostrar que $A_{k,n}$ é aberto vamos mostrar que ambos os conjuntos são abertos. Sendo T contínuo, então $T^{-n}(B_k)$ é aberto. Resta mostrar, finalmente, que $D_{k,n} := \{z \,:\, T^n(B_k) \cap (z + B_k) \neq \emptyset\}$ é aberto.

Sejam $z \in D_{k,n}$ e $y \in B(z, 1/k)$. Vamos mostrar que $y \in D_{k,n}$. Daí, é claro que tal conjunto será aberto, por definição. Como $y \in B(z, 1/k)$, então é claro que $z \in B(y, 1/k)$. Como X é um espaço de Fréchet, então $y + B_k = B(y, 1/k)$ e assim $z \in (y + B_k)$. Por hipótese, temos que $z \in D_{k,n}$, logo $z \in T^n(B_k)$. Portanto, $z \in T^n(B_k) \cap (y + B_k)$. Logo, $T^n(B_k) \cap (y + B_k) \neq \emptyset$ e daí, pela definição de $D_{k,n}$, temos que $y \in D_{k,n}$, como desejado.

- G_k é denso

Sejam $z \in X$ e $\varepsilon > 0$. Queremos mostrar que $B(z, \varepsilon) \cap G_k \neq \emptyset$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\varepsilon < 1/(2k)$. Vamos escrever $B = B(z, \varepsilon)$. Como B_k é uma vizinhança do zero, tomando $U = V = B$ e $W = B_k$ obtemos, por hipótese, que existe um inteiro n tal que $T^n(B) \cap B_k$ e $T^n(B_k) \cap B$ são não-vazios. Dessa maneira, existem $x, y \in B$ tais que $T^n(x) \in B_k$ e $y \in T^n(B_k)$. Afirmamos que $x \in G_k$.

De fato, como $x, y \in B = B(z, \varepsilon)$ e $\varepsilon < 1/(2k)$, temos que $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \varepsilon + \varepsilon < 1/k$. Portanto, $y \in B(x, 1/k)$. Assim como na parte anterior, sendo X um espaço de Fréchet, temos que $B(x, 1/k) = x + B_k$ e, portanto, segue que $y \in (x + B_k)$. Daí, como $y \in T^n(B_k)$, então $y \in T^n(B_k) \cap (x + B_k)$. Por definição de G_k, temos que $x \in G_k$. Como $x \in B$, fica provada a densidade de G_k, terminando a demonstração.

■

Com este lema em mãos, vamos provar uma condição suficiente para que T satisfaça o Critério de Hiperciclicidade. Ela será importante na nossa demonstração do Teorema 3.11, nosso objetivo nesta seção.

Teorema 3.10 (León-Saavedra, [30]). *Seja T um operador limitado em X. Suponha que para todo par (U, V) de abertos não-vazios de X e para toda vizinhança W do zero, existe um inteiro n tal que $T^n(U) \cap W$ e $T^n(W) \cap V$ são não-vazios. Então T satisfaz o Critério de Hiperciclicidade.*

DEMONSTRAÇÃO: Sejam z o vetor hipercíclico e (n_k) a sequência de números inteiros positivos como na tese do lema anterior. Tomaremos como a sequência exigida no Critério de Hiperciclicidade a própria sequência (n_k) e, da mesma maneira que foi feita no Teorema 3.5, tomaremos $X_0 = Y_0 := \operatorname{orb}(z, T)$ como sendo os candidatos a serem os conjuntos descritos no Critério.

Pelo lema anterior, temos que $T^{n_k} z \to 0$. Lembremos que se $x \in X_0$, então $x = T^n z$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Com isso em mente, temos: $T^{n_k}(x) = T^{n_k}(T^n z) = T^n(T^{n_k} z) \to T^n(0) = 0$. Portanto, a condição (i) do Critério de Hiperciclicidade está satisfeita. A seguir, vamos adotar, assim como no lema anterior, $B_k = B(0, 1/k)$.

Ainda seguindo a tese do lema, temos que $T^{n_k}(B_k) \cap (z + B_k) \neq \emptyset$, isto é, existe $y \in X$ tal que $y \in T^{n_k}(B_k)$ e $y \in (z + B_k)$. Como $y \in T^{n_k}(B_k)$, existe $x \in B_k$ tal que $T^{n_k}(x) = y$. Observe agora que $x \in T^{-n_k}(z + B_k)$: de fato, $T^{n_k}(x) = y \in (z + B_k)$. Logo, como $x \in T^{-n_k}(z + B_k) \cap B_k$, então segue que $T^{-n_k}(z + B_k) \cap B_k \neq \emptyset$, para todo k.

Seja, assim, $w_k \in T^{-n_k}(z + B_k) \cap B_k$. Vamos definir $S_{n_k} : Y_0 \to X$ da seguinte maneira: $S_{n_k}(T^n z) = T^n(w_k)$ onde usamos, de novo, o fato de que se $y \in Y_0$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y = T^n(z)$. Como $w_k \in B_k = B(0, 1/k)$, então $w_k \to 0$ quando $k \to \infty$. Portanto, $S_{n_k}(y) = T^n(w_k) \to T^n(0) = 0$ para todo $y \in Y_0$, satisfazendo a condição (ii) do Critério de Hiperciclicidade.

Vamos agora provar que a condição (iii) também é satisfeita. Tomando $y \in Y_0$, então

$$T^{n_k} \circ S_{n_k}(y) = T^{n_k} \circ S_{n_k}(T^n z) = T^{n_k} \circ T^n(w_k) = T^n(T^{n_k}(w_k)) \to T^n(z) = y$$

como pede a condição. Observe que $T^{n_k}(w_k) \to z$ quando $k \to \infty$ pois $w_k \in T^{-n_k}(z + B_k)$ por hipótese e, portanto, $T^{n_k}(w_k) \in (z + B_k)$, o que implica a convergência desejada.

■

Apenas para ressaltar, assim como na demonstração do Teorema 3.5, o fato de as funções S_{n_k} poderem não ser nem lineares nem contínuas não cria problemas na demonstração em virtude da Observação 2.10.

Estamos aptos, então, a enunciar e demonstrar o teorema desejado. Como já dissemos, este teorema surgiu na tentativa de se obter resultados parecidos com o Teorema 3.5 no sentido de obtermos mais caracterizações para a soma $T \oplus T$ de maneira a facilitar a construção de um contraexemplo (ou a demonstração) para o Problema 2, visto que tal problema é equivalente ao Problema 1.

Teorema 3.11 (Grivaux, [20]). *Seja T um operador hipercíclico limitado em X. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $T \oplus T$ *é hipercíclico.*

(ii) $T \oplus T$ *é cíclico.*

(iii) dados abertos não-vazios $U_1 \times U_2$ *e* $V_1 \times V_2$ *de* $X \times X$*, então existe um polinômio* p *tal que* $\Big((p(T) \oplus p(T))(U_1 \times U_2)\Big) \cap (V_1 \times V_2)$ *é não-vazio.*

(iv) para todo par (U, V) *de abertos não-vazios de* X *e para toda vizinhança* W *do zero, existe um polinômio* p *tal que* $p(T)(U) \cap W$ *e* $p(T)(W) \cap V$ *são não-vazios.*

(v) para todo par (U, V) *de abertos não-vazios de* X *e para toda vizinhança* W *do zero, existe um inteiro* n *tal que* $T^n(U) \cap W$ *e* $T^n(W) \cap V$ *são não-vazios.*

DEMONSTRAÇÃO: (i) $\Rightarrow$ (ii). Trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Seja $x \oplus y$ um vetor cíclico para $T \oplus T$. Seja p um polinômio não nulo qualquer. Vamos primeiro mostrar que $p(T)x \oplus p(T)y$ é um vetor cíclico para $T \oplus T$.

Note que sendo T hipercíclico, $p(T)$ tem imagem densa pelo Teorema 2.12. Dessa forma, como $(T \oplus T)^n(p(T)x \oplus p(T)y) = p(T) \oplus p(T)(T \oplus T)^n(x \oplus y)$ e o conjunto $\operatorname{span}\{(T \oplus T)^n(x \oplus y) \,:\, n \geq 1\}$ é denso em $X \times X$, então $\operatorname{span}\{(T \oplus T)^n(p(T)x \oplus p(T)y) \,:\, n \geq 1\}$ é denso em X, mostrando a ciclicidade de $p(T)x \oplus p(T)y$, como desejado.

Consideremos agora $U_1 \times U_2$. Sendo $x \oplus y$ cíclico, existe um polinômio q tal que

$$(q(T) \oplus q(T))(x \oplus y) \in U_1 \times U_2$$

Como $(q(T) \oplus q(T))(x \oplus y) = q(T)x \oplus q(T)y$, pelo que já provamos temos que $q(T)x \oplus q(T)y$ é um vetor cíclico para $T \oplus T$. Logo, considerando agora $V_1 \times V_2$, temos que existe um polinômio p tal que

$$p(T) \oplus p(T)(q(T)x \oplus q(T)y) \in V_1 \times V_2$$

Portanto, considerando o vetor $q(T)x \oplus q(T)y$ temos que as duas equações em destaque provam a tese.

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Basta tomar $U_1 \times U_2 = U \times W$ e $V_1 \times V_2 = W \times V$ e usar a hipótese.

(iv) $\Rightarrow$ (v). Sejam U e V dois abertos não-vazios. Por hipótese, existe um polinômio p tal que $p(T)(U) \cap W$ e $p(T)(W) \cap V$ são não-vazios. Sendo T contínuo, então $p(T)^{-1}(W)$ é aberto e $U \cap p(T)^{-1}(W)$ também o é. Por hipótese, temos que $U \cap p(T)^{-1}(W)$ é não-vazio e assim existe um vetor hipercíclico $x \in U$ tal que $p(T)x \in W$.

Pelo mesmo motivo, temos que $W \cap p(T)^{-1}(V)$ é aberto. Logo, como x é um vetor hipercíclico, existe um n tal que $T^n(x) \in W \cap p(T)^{-1}(V)$. Portanto, como $x \in U$, então $T^n(U) \cap W \neq \emptyset$. Ainda, $p(T)T^n(x) \in V$, o que significa que $T^n p(T)(x) \in V$. Como $p(T)x \in W$, então $T^n(W) \cap V \neq \emptyset$, como desejado.

(v) $\Rightarrow$ (i). Pelo Teorema 3.10, T satisfaz o Critério de Hiperciclicidade, o que pelo Teorema 3.5 é suficiente para mostrarmos que $T \oplus T$ é hipercíclico.

■

Como consequência imediata deste teorema obtemos que a condição suficiente do Teorema 3.10 também é necessária:

Corolário 3.12 (León-Saavedra, [30]). *Seja T um operador hipercíclico limitado em X. Então T satisfaz o Critério de Hiperciciclicidade se, e somente se, para todo par (U, V) de abertos não-vazios de X e para toda vizinhança W do zero, existe um inteiro n tal que $T^n(U) \cap W$ e $T^n(W) \cap V$ são não-vazios.*

DEMONSTRAÇÃO: Temos que T satisfaz o Critério se, e somente se, $T \oplus T$ é hipercíclico (Teorema 3.5), o que acontece se, e somente se, para todo par (U, V) de abertos não-vazios de X e para toda vizinhança W do zero, existe um inteiro n tal que $T^n(U) \cap W$ e $T^n(W) \cap V$ são não-vazios (condição (v) do teorema anterior).

■

Capítulo 4

Um Operador Hipercíclico que não satisfaz o Critério de Hiperciclicidade

O teorema principal do capítulo anterior (Teorema 3.5) nos diz que um operador T satisfaz o Critério de Hiperciclicidade se, e somente se, o operador $T \oplus T$ for hipercíclico. Logo, é claro que se acharmos um operador hipercíclico T tal que $T \oplus T$ não seja hipercíclico, teremos, por tal equivalência, que T não satisfaz o Critério. Portanto, teremos em nossas mãos um operador hipercíclico que não satisfaz o Critério, dando assim uma resposta negativa ao Problema 1. Neste capítulo nos dedicaremos à construção de um operador T que satisfaça esta propriedade e, portanto, seja um contra-exemplo para tal problema.

O primeiro contraexemplo feito foi devido a De La Rosa e Read. Tal construção foi feita em um espaço de Banach conveniente, vide [16]. Usando suas ideias, Bayart e Matheron construíram em [3] um contraexemplo nos espaços clássicos, a saber, c_0 e $\ell_p, 1 \leq p < \infty$.

Faremos neste capítulo a construção de Bayart e Matheron. Faremos uma construção mais simples do que a construção feita em [3]. Essa simplificação foi possível graças a novas ideias dos dois autores, vide [4].

4.1 Estratégia

Vamos descrever agora a estratégia que usaremos para construir tal contraexemplo. Em primeiro lugar, precisamos de uma definição:

Definição 4.1. *Seja V um espaço vetorial e seja $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ uma sequência linearmente independente em V. Definimos então o* **forward shift associado a** $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ *como sendo o operador linear $S : E \to E$ dado por $S(e_i) = e_{i+1}$, onde $E = \operatorname{span}\{e_i \,:\, i = 0, 1, 2, \ldots\}$.*

Nosso objetivo neste capítulo é demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 4.2. *Seja X um espaço de Banach. Suponha que X admita uma base incondicional normalizada $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ tal que o seu forward shift associado seja contínuo. Então existe um operador hipercíclico $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $T \oplus T$ não é hipercíclico.*

Lembrando do que vimos no primeiro capítulo, os espaços c_0 e $\ell_p, 1 \leq p < \infty$ admitem uma base de Schauder incondicional normalizada que satisfaz as hipóteses do teorema (Corolário 1.18). Assim, lembrando do Teorema 3.5, o corolário a seguir é imediato.

Corolário 4.3. *Existem operadores hipercíclicos em c_0 e $\ell_p, 1 \leq p < \infty$ que não satisfazem o Critério de Hiperciclicidade.*

Tal corolário é, portanto, o resultado que desejamos efetivamente mostrar. Para isso, como já dissemos, precisamos demonstrar o Teorema 4.2.

Dessa maneira, precisamos construir um operador hipercíclico T e mostrar que $T \oplus T$ não é hipercíclico. Uma pergunta a ser feita agora é: como mostraremos que tal operador *não* é hipercíclico? Existem algumas maneiras de se mostrar que um operador é hipercíclico - uma delas seria usar o Critério de Hiperciclicidade - mas não vimos, até agora, nenhum resultado que garanta que um operador *não* seja hipercíclico. [1]

Precisamos, então, de um "critério para não-hiperciclicidade de $T \oplus T$". O lema e o corolário a seguir nos ajudarão a construir o resultado que queremos:

Lema 4.4. *Seja A uma álgebra comutativa munida de uma topologia τ e seja $\mathfrak{n}$ uma seminorma em A tal que a função $(p,q) \mapsto pq$ é contínua de $(A,\tau) \times (A,\tau)$ para $(A,\mathfrak{n})$. Tomemos $a, a', b, b' \in A$ e suponha que existam sequências $(p_n), (q_n)$ e (r_n) em A tais que $p_n \to a, q_n \to b, r_n p_n \to a'$ e $r_n q_n \to b'$. Então $\mathfrak{n}(ab' - a'b) = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO: Note que, sendo A uma álgebra comutativa, vale que $p_n(r_n q_n) = (r_n p_n) q_n$, para todo n. Como $p_n \to a$, $r_n q_n \to b'$ e $(p,q) \mapsto pq$ é contínuo, segue que $p_n(r_n q_n) \to ab'$. Analogamente, temos que $(r_n p_n) q_n \to a'b$.

Assim, temos que $p_n(r_n q_n) - (r_n p_n) q_n \to ab' - a'b$. Como $p_n(r_n q_n) = (r_n p_n) q_n$, para todo n, temos então que $ab' = a'b$. Logo, segue que $ab' - a'b = 0$ e, portanto, temos que $\mathfrak{n}(ab' - a'b) = \mathfrak{n}(0) = 0$, como desejado.

■

Corolário 4.5. *Nas mesmas hipóteses do lema anterior, suponha agora que a álgebra A tenha uma unidade. Então $\mathfrak{n} = 0$.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $a \in A$ qualquer. Note que, usando a notação do lema anterior, podemos tomar $p_n = a$, para todo n. Como A tem uma unidade, tomemos $b' = 1$ e $a' = b = 0$. Logo, pelo lema anterior, temos que $\mathfrak{n}(ab' - a'b) = 0 \implies \mathfrak{n}(a \cdot 1 - 0) = 0 \implies \mathfrak{n}(a) = 0$. Sendo $a \in A$ qualquer, segue o resultado.

■

[1] Lembre que vimos, no capítulo anterior, uma condição equivalente ao Critério de Hiperciclicidade (Teorema 3.12). Mas é claro que mostrar que um operador não satisfaz o Critério não implica, necessariamente, que tal operador não seja hipercíclico, justamente porque o Critério é apenas uma condição suficiente.

Para obtermos o nosso "critério para não-hiperciclicidade de $T \oplus T$", vamos usar o corolário anterior para a seguinte álgebra comutativa

$$\mathbb{K}[T](e_0) := \{P(T)e_0 \, : \, P \in \mathbb{K}[x]\} = \text{span}\{T^i(e_0) \, : \, i = 0, 1, 2, \dots\}$$

onde $T : V \to V$ é um operador linear em um certo espaço vetorial V e $e_0 \in V$ é tal que os vetores $\{T^i(e_0) \, : \, i = 0, 1, 2, \dots\}$ são linearmente independentes. O produto em $\mathbb{K}[T](e_0)$ é definido por

$$P(T)e_0 \cdot Q(T)e_0 := (P \cdot Q)(T)e_0 \tag{4.1}$$

onde P e Q são polinômios em $\mathbb{K}[x]$. Como o produto em $\mathbb{K}[x]$ está bem definido e é comutativo, então o produto que acabamos de definir também está bem definido e é comutativo. Assim, $\mathbb{K}[T](e_0)$ é, de fato, uma álgebra comutativa. Note agora que, com este produto, a álgebra possui uma unidade: e_0.

Um caso particular desta álgebra é quando T é um operador cíclico em um espaço de Fréchet X de dimensão infinita e e_0 é seu vetor cíclico. [2] Neste caso, a álgebra $\mathbb{K}[T](e_0)$ herda a topologia do espaço de Fréchet X. Neste contexto, temos o seguinte corolário:

Corolário 4.6. *Seja X um espaço de Fréchet de dimensão infinita e seja $T \in \mathcal{B}(X)$ um operador cíclico. Tome e_0 um vetor cíclico para T. Suponha que exista um funcional linear não-nulo $\phi : \mathbb{K}[T](e_0) \to \mathbb{K}$ tal que a função $(x, y) \to \phi(x \cdot y)$ seja contínua em $\mathbb{K}[T](e_0) \times \mathbb{K}[T](e_0)$. Então o operador $T \oplus T$ não é hipercíclico em $X \times X$.*

DEMONSTRAÇÃO: Suponhamos por absurdo que $T \oplus T$ seja hipercíclico. Então, pelo Teorema 2.13, o conjunto dos vetores hipercíclicos de $T \oplus T$ é denso em $X \times X$. Sejam $a, a', b, b' \in \mathbb{K}[T](e_0)$ quaisquer. Assim, podemos achar uma sequência $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X \times X$ de vetores hipercíclicos para $T \oplus T$ tais que $(x_n, y_n) \to (a, b)$.

Daí, como cada (x_n, y_n) é um vetor hipercíclico para $T \oplus T$, podemos achar uma sequência de inteiros (k_n) tais que $(T^{k_n} x_n, T^{k_n} y_n) \to (a', b')$. Como e_0 é um vetor cíclico para T, também podemos achar sequências de polinômios (P_n) e (Q_n) tais que

$$(T^{k_n} P_n(T)e_0, T^{k_n} Q_n(T)e_0) - (T^{k_n} x_n, T^{k_n} y_n) \to 0$$

Definimos agora $p_n := P_n(T)e_0, q_n := q_n(T)e_0$ e $r_n := T^{k_n} e_0$. Assim, temos que $p_n \to a, q_n \to b, r_n p_n \to a'$ e $r_n q_n \to b'$. Tomemos agora a seminorma $\mathfrak{n}$ definida por $\mathfrak{n}(z) := |\phi(z)|$. Como comentamos antes, $\mathbb{K}[T](e_0)$ possui uma unidade; dessa maneira, estamos nas hipóteses do corolário anterior. Portanto, devemos ter $\mathfrak{n} = 0$, o que implica que $\phi = 0$, uma contradição.

■

[2]Observe que, como X tem dimensão infinita e e_0 é um vetor cíclico para T, então os vetores $\{T^i(e_0) \, : \, i = 0, 1, 2, \dots\}$ são linearmente independentes, como pede a definição da álgebra $\mathbb{K}[T](e_0)$.

Obtemos, assim, o critério para não-hiperciclicidade que desejávamos. De agora em diante, em vista de tentarmos demonstrar o Teorema 4.2, vamos adotar a seguinte notação:

Notação. Denotaremos por X um espaço de Banach com uma base incondicional normalizada $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ tal que o seu forward shift associado seja contínuo. Vamos denotar por $(e_i^*)_{i=0}^{\infty}$ a sequência dos funcionais coordenados associados a $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ (vide Definição 1.9).

Tomemos agora

$$c_{00} := \operatorname{span}\{e_i \,:\, i = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Tendo em vista o Corolário 4.6, o Teorema 4.2 estará provado se construirmos um operador linear $T \,:\, c_{00} \to c_{00}$ e um funcional linear não-nulo $\phi \,:\, c_{00} \to \mathbb{K}$ que satisfaça estas quatro propriedades:

(P1) $\operatorname{span}\{T^i(e_0) \,:\, i = 0, 1, 2, \ldots\} = \operatorname{span}\{e_i \,:\, i = 0, 1, 2, \ldots\}$, isto é, $\mathbb{K}[T](e_0) = c_{00}$;

(P2) o conjunto $\{T^i(e_0) \,:\, i = 0, 1, 2, \ldots\}$ é denso em c_{00};

(P3) T é contínuo;

(P4) a função $(x, y) \to \phi(x \cdot y)$ é contínua em $c_{00} \times c_{00}$.

De fato, sendo c_{00} denso em X (pois $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ é uma base), então por (P3) temos que T se estende a um operador linear contínuo em X. Usando de novo a densidade de c_{00} temos, agora por (P2), que T é um operador hipercíclico com vetor hipercíclico e_0. Como $\mathbb{K}[T](e_0) = c_{00}$ (vide (P1)), então $T \oplus T$ não pode ser hipercíclico, vide (P4) e o Corolário 4.6.

Exibiremos, nas próximas seções, o operador T e o funcional ϕ construídos por Bayart e Matheron que satisfazem essas quatro propriedades. Para construí-los, precisaremos de mais uma definição:

Definição 4.7. *Seja* $\mathbf{Q} \subseteq \mathbb{K}$ *um conjunto denso e enumerável. Dizemos que uma sequência* $\mathbf{P} = (P_n)_{n=0}^{\infty}$ *é* **admissível** *se* $P_0 = 0$ *e* $\mathbf{P}$ *é uma lista de todos os polinômios com coeficientes em* $\mathbf{Q}$*, sendo permitida a repetição.*

Fixemos então um conjunto $\mathbf{Q} \subseteq \mathbb{K}$ denso e enumerável. Se P é um polinômio, denotaremos por $\deg(P)$ o grau de P e por $|P|_1$ a sua ℓ_1-norma. Isto é, se $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, então

$$|P|_1 = |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_k|\,.$$

Começaremos, na seção a seguir, a construção do operador T de maneira a satisfazer as três propriedades (P1), (P2) e (P3) descritas acima.

4.2 O Operador T

Na construção de De La Rosa e Read, o operador T é um operador bastante simples: ele nada mais é do que um *shift* que satisfaz algumas propriedades. Sendo tal operador simples, a complexidade da construção de De La Rosa e Read está na norma adotada para o espaço de Banach X. Por isso, não se sabe se tal espaço de Banach pode ser identificado com um espaço clássico, a saber, c_0 ou $\ell_p, 1 \leq p < \infty$. Aqui, como queremos que a construção seja feita nestes espaços, devemos tirar a complexidade da norma e colocá-la sobre o operador.

A maior dificuldade que encontraremos é, uma vez construído o operador, mostrar que ele satisfaz as propriedades desejadas. Pensemos, então, qual seria um candidato natural a ser o operador T. Queremos que ele seja contínuo e que satisfaça (P1). Observe que, por hipótese, o *forward shift* associado a $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ é contínuo e, evidentemente, satisfaz (P1). Porém, pensando nos espaços clássicos, tal operador possui norma 1. Como o Teorema 2.16 nos mostra, este operador não pode ser hipercíclico, como gostaríamos.

Podemos, no entanto, tomar um *weighted forward shift*, isto é, um *forward shift* dotado de uma sequência de pesos $(w(i))_{i=1}^{\infty}$. Se o $\sup |w(i)| \geq 1$, então existe a chance de termos um operador hipercíclico. Dessa maneira, tomaremos T tal que

$$T(e_i) = w(i+1)e_{i+1} \tag{4.2}$$

onde $(w(i))_{i=1}^{\infty}$ será uma sequência de números reais positivos a ser especificada mais adiante.

Se tal sequência de pesos for limitada, então é possível demonstrar que T é contínuo. [3] Dessa forma, temos que T satisfaz (P1), como desejado. O problema é que esta nova definição não é suficiente para satisfazermos (P2). Assim como na construção de De La Rosa e Read, se adotássemos tal *shift* como sendo o nosso operador T, teríamos que colocar algumas propriedades a mais sobre a norma do espaço, algo que não desejamos. Devemos, então, colocar novas restrições sobre T de maneira a satisfazer essa propriedade.

Tomemos uma sequência admissível de polinômios $(P_n)_{n=0}^{\infty}$. Vamos também tomar uma sequência de números estritamente positivos $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $a_n \to \infty$ e uma sequência crescente de números positivos $(b_n)_{n=1}^{\infty}$. Se exigirmos que T seja um *weighted forward shift* (como na equação 4.2) e satisfaça a seguinte relação

$$T^{b_n}(e_0) = P_n(T)(e_0) + \frac{1}{a_n}e_{b_n} \tag{4.3}$$

teremos então satisfeito (P1) e (P2), como veremos mais adiante.

Em primeiro lugar, observe que se definirmos T como sendo o *weighted forward shift* que

[3] A demonstração da continuidade de T seria bastante parecida com a demonstração da continuidade do operador R, vide Proposição 4.10, enunciada mais adiante.

definirmos anteriormente, teremos que

$$T^{b_n}(e_0) = a \cdot T(e_{b_n - 1}) = a \cdot w(b_n) e_{b_n}$$

onde $a = w(1) \cdot w(2) \cdot \ldots \cdot w(e_{b_n - 1})$. Dessa forma, existe uma inconsistência entre esta última igualdade e a equação (4.3).

De modo a solucionar isto, vamos definir T da seguinte maneira:

$$T(e_i) := w(i+1) e_{i+1} \quad \text{para } i \in [b_{n-1}, b_n - 1[, \text{ onde } n \geq 1. \tag{4.4}$$

onde adotamos, por conveniência, $b_0 := 0$. Resta, assim, definirmos T apenas em $e_{b_n - 1}$ e de maneira a termos a equação (4.3) válida. Notemos que se tal equação é verdadeira, podemos escrever

$$\begin{aligned}
T^{b_n}(e_0) &= T^{b_n - b_{n-1}} T^{b_{n-1}}(e_0) \\
&= T^{b_n - b_{n-1}} \left(P_{n-1}(T)(e_0) + \frac{1}{a_{n-1}} e_{b_{n-1}} \right) \\
&= T^{b_n - b_{n-1}} P_{n-1}(T)(e_0) + T^{b_n - b_{n-1}} \left(\frac{1}{a_{n-1}} e_{b_{n-1}} \right) \\
&= T^{b_n - b_{n-1}} P_{n-1}(T)(e_0) + \frac{1}{a_{n-1}} T^{b_n - b_{n-1}}(e_{b_{n-1}}) \\
&= T^{b_n - b_{n-1}} P_{n-1}(T)(e_0) + \frac{1}{a_{n-1}} T(T^{b_n - b_{n-1} - 1}(e_{b_{n-1}})) \\
&= T^{b_n - b_{n-1}} P_{n-1}(T)(e_0) + \frac{w(b_{n-1}+1) \ldots w(b_n - 1)}{a_{n-1}} T(e_{b_n - 1})
\end{aligned}$$

Dessa forma, tomando a última igualdade e comparando-a com a equação (4.3), podemos isolar $T(e_{b_n - 1})$. Assim, obtemos que:

$$T(e_{b_n - 1}) := \varepsilon_n e_{b_n} + f_n \tag{4.5}$$

para $n \geq 1$, onde

$$\varepsilon_n = \frac{a_{n-1}}{a_n w(b_{n-1}+1) \ldots w(b_n - 1)} \tag{4.6}$$

(estamos tomando, por convenção, $a_0 := 1$) e

$$f_n = \frac{a_{n-1}}{w(b_{n-1}+1) \ldots w(b_n - 1)} \left(P_n(T) e_0 - T^{b_n - b_{n-1}} P_{n-1}(T)(e_0) \right) \tag{4.7}$$

Reciprocamente, se definirmos $T(e_{b_n - 1})$ dessa maneira, então a equação (4.3) estará satisfeita. Note, no entanto, que tal definição é consistente apenas se tivermos

$$\deg(P_n) < b_n - 1 \tag{4.8}$$

para todo $n = 1, 2, \ldots$. Vamos, então, assumir esta hipótese a partir de agora.

Note que com esta definição, T agora satisfaz tanto (P1) quanto (P2). De fato, por (4.4) e (4.5), temos que $\{P(T)e_0 \,:\, \deg(P) \le N\} = \operatorname{span}\{e_0, \ldots, e_N\}$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Logo, segue que T satisfaz (P1).

Para vermos que T satisfaz (P2), tome $x \in c_{00}$ e um $\varepsilon > 0$. Como $c_{00} = K[T]e_0$ (por (P1)), podemos escrever, então, $x = Q(T)e_0$, para algum $Q(x) \in \mathbb{K}[x]$. Seja $j \in \mathbb{N}$ tal que $a_j \ge \varepsilon/2$. Como $a_n \to \infty$, então a existência de tal j é assegurada. Como $(P_n)_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência admissível de polinômios com coeficientes em **Q** e **Q** é denso em $\mathbb{K}$, podemos encontrar um $n_0 \ge j$ tal que $\|Q(T)e_0 - P_{n_0}(T)e_0\| < \varepsilon/2$. Assim, temos que:

$$
\begin{aligned}
\left\|x - T^{b_{n_0}}(e_0)\right\| &= \left\|x - T^{b_{n_0}}(e_0) + \frac{1}{a_{n_0}} e_{b_{n_0}} - \frac{1}{a_{n_0}} e_{b_{n_0}}\right\| \\
&\le \left\|x - T^{b_{n_0}}(e_0) + \frac{1}{a_{n_0}} e_{b_{n_0}}\right\| + \left|\frac{1}{a_{n_0}}\right| \left\|e_{b_{n_0}}\right\| \\
&\le \|x - P_{n_0}(T)e_0\| + \frac{1}{a_{n_0}} \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon
\end{aligned}
$$

tendo em vista a equação (4.3), o fato de $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ ser uma base normalizada e que $a_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\varepsilon > 0$ é qualquer, segue que o conjunto $\{T^i(e_0) \,:\, i = 0, 1, 2, \ldots\}$ é denso em c_{00}, satisfazendo (P2).

O principal problema agora é que, a priori, "perdemos" a continuidade de T ao adicionarmos a exigência (4.3). Assim, precisamos demonstrar que T é contínuo, de maneira a satisfazermos (P3). Para isso, observe que as sequências $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(w(n))_{n=1}^{\infty}$ são parâmetros quaisquer na definição de T. Podemos, então, fixá-los de maneira a tornar nossa construção mais fácil. Como dito anteriormente, tomaremos $a_0 := 1$, $b_0 := 0$ e, para todo $n \ge 1$,

$$
\begin{aligned}
w(n) &:= 4\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}\right) \\
a_n &:= n + 1 \\
b_n &:= 3^n
\end{aligned}
$$

Uma observação importante e que será usada frequentemente é que a sequência $(w(n))_{n=1}^{\infty}$ é crescente e que $2 \le w(n) \le 4$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Falta, então, tomarmos (P_n). Como já vimos, T satisfaz (P1) e (P2) para qualquer sequência admissível **P** tal que $\deg(P_n) < b_n - 1$. Precisamos, então, achar uma sequência admissível que torne T contínuo. Este será nosso objetivo na próxima seção.

4.3 A Continuidade de T

Antes de prosseguirmos para mostrarmos que T é contínuo, vamos precisar de mais uma definição:

Definição 4.8. *Seja* **P** *uma sequência admissível. Dizemos que* **P** *é* **controlada** *por uma sequência de números positivos* $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ *se* $\deg(P_n) < c_n$ *e se* $|P_n|_1 \leq c_n$*, para todo* $n = 0, 1, 2, \ldots$*. Toda sequência* (c_n) *como esta é dita uma* **sequência controladora**.

É claro que para qualquer sequência de números positivos $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ tal que $\limsup_{n\to\infty} c_n = \infty$ podemos encontrar uma sequência admissível **P** que seja controlada por $(c_n)_{n=0}^{\infty}$. A partir de agora, faremos uso da seguinte notação:

$$d_n := \deg(P_n)$$

onde P_n é um polinômio na sequência admissível **P**.

No lema a seguir, denotaremos por $\|\cdot\|_1$ a ℓ_1-norma em c_{00}. Isto é, se $x = \sum_{i=0}^{n} x_i e_i \in c_{00}$, então $\|x\|_1 = \sum_{i=0}^{n} |x_i|$. Observe que

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=0}^{n} x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=0}^{n} \|x_i e_i\| = \sum_{i=0}^{n} |x_i| \, \|e_i\| = \sum_{i=0}^{n} |x_i| = \|x\|_1$$

visto que $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ é uma base normalizada de X.

Lema 4.9. *Usando a mesma notação da seção anterior, temos que as seguintes propriedades são verdadeiras:*

(1) $\varepsilon_n \leq 1$*, para todo* $n \geq 1$.

(2) se $n \geq 1$ *e se* $\|f_k\|_1 \leq 1$ *para todo* $k \leq n$*, então*

$$\|f_n\|_1 \leq n 4^{\max(d_n, d_{n-1})+1} \left(\frac{|P_n|_1}{2^{b_{n-1}}} + |P_{n-1}|_1 \exp\left(-c\sqrt{b_{n-1}}\right) \right)$$

onde $c > 0$ *é uma constante.*

DEMONSTRAÇÃO: Vamos começar por (1). Lembrando que $a_n = n + 1$ e que $w(n) \geq 2$, para todo $n \geq 1$, então da definição de ε_n temos:

$$\varepsilon_n = \frac{a_{n-1}}{a_n w(b_{n-1}+1) \ldots w(b_n - 1)} \leq \frac{n}{(n+1) \cdot 2^{b_n - 1 - (b_{n-1}+1)+1}} = \frac{n}{(n+1) \cdot 2^{b_n - b_{n-1} - 1}} \leq 1$$

como desejado.

Vamos provar (2). Observe que o caso $n = 1$ é imediato: basta observar que $P_0 = 0$ e usar a definição de f_1 para verificar o item (2). Fixemos agora um $n > 1$ e suponha que $\|f_k\|_1 \leq 1$ para todo $k \leq n$. Para cada $j = 0, 1, 2, \ldots$, definimos $E_j = \mathrm{span}\{e_0, e_1, \ldots, e_j\}$. Seja $x = \sum_{i=0}^{j} x_i e_i \in c_{00}$. Neste caso, temos que $x \in E_j$. Logo:

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|_1 &= \left\| \sum_{i=0}^{j} x_i T(e_i) \right\|_1 \\
&\leq \sum_{i=0}^{j} |x_i| \, \|T(e_i)\| \\
&\leq \max\{\|T(e_i)\|_1 \, : \, i \leq j\} \cdot \sum_{i=0}^{j} |x_i| \\
&\leq \max\{\|T(e_i)\|_1 \, : \, i \leq j\} \cdot \|x\|_1
\end{aligned}$$

visto que $\sum_{i=0}^{j} |x_i| = \|x\|_1$.

Se $k < n$, então o item (1) e a hipótese nos mostram que

$$\|T(e_{b_k - 1})\|_1 \leq |\varepsilon_k| \, \|e_{b_k-1}\|_1 + \|f_k\|_1 \leq 1 + 1 = 2$$

visto que $\|e_{b_k-1}\|_1 = 1$ por definição de $\|\cdot\|_1$.

Além disso, se $i \neq b_k - 1$ para todo $k < n$ e se $e_i \in E_j$ (ou seja, $i \leq j$), então temos que $\|T(e_i)\|_1 = w(i+1) \leq w(j+1)$, para todo $i \leq j$, visto que a sequência $(w(n))$ é crescente. Ainda, como $w(n) \geq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então se $j < b_n - 1$, temos que $\max\{\|T(e_i)\|_1 \, : \, i \leq j\} = w(j+1)$. Portanto, obtemos que

$$\|T(x)\|_1 \leq w(j+1) \, \|x\|_1$$

para todo $x \in E_j$. Daí, temos que $\|T(e_0)\|_1 \leq w(1) \, \|e_0\|_1 = w(1)$, $\|T(e_1)\|_1 \leq w(2) \, \|e_1\|_1 = w(2)$ e assim por diante. Logo, é imediato que

$$\|T^p(e_0)\|_1 \leq \prod_{i=1}^{p} w(i) \tag{4.9}$$

para todo número natural $p \in [1, b_n[$. Se assumirmos que o "produto vazio" vale 1, então a desigualdade acima também vale para $p = 0$.

Olhemos agora para a definição de f_n, vide equação (4.7). Temos então que:

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_1 &= \left\| \frac{a_{n-1}}{w(b_{n-1}+1)\ldots w(b_n-1)} \left(P_n(T)e_0 - T^{b_n-b_{n-1}}P_{n-1}(T)(e_0)\right) \right\|_1 \\
&= \left| \frac{a_{n-1}}{w(b_{n-1}+1)\ldots w(b_n-1)} \right| \left\| P_n(T)e_0 - T^{b_n-b_{n-1}}P_{n-1}(T)(e_0) \right\|_1 \\
&= \frac{n}{w(b_{n-1}+1)\ldots w(b_n-1)} \left\| P_n(T)e_0 - T^{b_n-b_{n-1}}P_{n-1}(T)(e_0) \right\|_1 \\
&\leq \frac{n}{w(b_{n-1}+1)\ldots w(b_n-1)} \left(\|P_n(T)e_0\|_1 + \left\| T^{b_n-b_{n-1}}P_{n-1}(T)(e_0) \right\|_1 \right) \\
&\leq \frac{n(\|P_n(T)e_0\|_1 + \left\| T^{b_n-b_{n-1}}P_{n-1}(T)(e_0) \right\|_1)}{w(b_{n-1}+1)\ldots w(b_n-1)}
\end{aligned}$$

Vamos agora analisar cada uma das parcelas da expressão $\|P_n(T)e_0\|_1 + \left\| T^{b_n-b_{n-1}}P_{n-1}(T)(e_0) \right\|_1$. Comecemos por $\|P_n(T)e_0\|_1$. Lembrando que definimos $d_n := \deg(P_n)$, temos que $P_n(T) = a_0 + a_1T + \ldots + a_{d_n}T^{d_n}$. Portanto:

$$\|P_n(T)e_0\|_1 = \left\|(a_0 + a_1T + \ldots + a_{d_n}T^{d_n})e_0\right\|_1 \leq |a_0| + |a_1| \, \|T(e_0)\|_1 + \ldots + |a_{d_n}| \left\|T^{d_n}(e_0)\right\|_1.$$

Pela equação (4.9), temos que $\|T^p(e_0)\|_1 \leq \prod_{i=1}^{p} w(i)$, para todo $1 \leq p \leq d_n$. Como a sequência $(w(i))_{i=1}^{\infty}$ é crescente e $w(i) \geq 2$, para todo $i \in \mathbb{N}$, então $\prod_{i=1}^{p} w(i) \leq \prod_{i=1}^{d_n} w(i)$. Portanto, para todo $1 \leq p \leq d_n$, segue que $\|T^p(e_0)\|_1 \leq \prod_{i=1}^{d_n} w(i)$. Assim, podemos escrever que

$$\|P_n(T)e_0\|_1 \leq (|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{d_n}|) \cdot \prod_{i=1}^{d_n} w(i) = |P_n|_1 \prod_{i=1}^{d_n} w(i)$$

onde $|P_n|_1$ representa a soma dos módulos dos coeficientes de P_n, como definimos anteriormente.

A expressão $\left\|T^{b_n-b_{n-1}}P_{n-1}(T)(e_0)\right\|_1$ admite uma desigualdade análoga. Para isso, basta notar que o grau de $T^{b_n-b_{n-1}}P_{n-1}$ é $b_n - b_{n-1} + d_{n-1}$. Portanto, obtemos que

$$\left\|T^{b_n-b_{n-1}}P_{n-1}(T)(e_0)\right\|_1 \leq |P_{n-1}|_1 \prod_{i=1}^{b_n-b_{n-1}+d_{n-1}} w(i).$$

Feita a análise de cada parcela, podemos voltar à desigualdade envolvendo $\|f_n\|_1$. Temos, assim:

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_1 &\leq \frac{n\left(|P_n|_1 \cdot \prod_{i=1}^{d_n} w(i) + |P_{n-1}|_1 \prod_{i=1}^{b_n-b_{n-1}+d_{n-1}} w(i)\right)}{w(b_{n-1}+1)\dots w(b_n-1)} \\
&\leq n\left(\frac{|P_n|_1}{w(b_{n-1}+1)\dots w(b_n-1)} \cdot \prod_{i=1}^{d_n} w(i) + |P_{n-1}|_1 \cdot \frac{\prod_{i=1}^{b_n-b_{n-1}+d_{n-1}} w(i)}{w(b_{n-1}+1)\dots w(b_n-1)}\right) \\
&\leq n\left(\frac{|P_n|_1}{w(b_{n-1}+1)\dots w(b_n-1)} \cdot \prod_{i=1}^{d_n} w(i) + |P_{n-1}|_1 \cdot \prod_{i=1}^{b_n-b_{n-1}-1} \frac{w(i)}{w(i+b_{n-1})} \cdot \prod_{i=b_n-b_{n-1}}^{b_n-b_{n-1}+d_{n-1}} w(i)\right)
\end{aligned}$$

Como $2 \leq w(i) \leq 4$, para todo $i \in \mathbb{N}$, temos:

- $w(b_{n-1}+1)\dots w(b_n-1) \geq 2^{b_n-1-(b_{n-1}+1)+1} = 2^{b_n-b_{n-1}-1}$. Agora, como $b_n = 3^n$, é fácil verificar que $b_n - b_{n-1} - 1 \geq b_{n-1}$. Dessa forma, $w(b_{n-1}+1)\dots w(b_n-1) \geq 2^{b_{n-1}}$.

- $\displaystyle\prod_{i=1}^{d_n} w(i) \leq 4^{d_n}$.

- $\displaystyle\prod_{i=b_n-b_{n-1}}^{b_n-b_{n-1}+d_{n-1}} w(i) \leq 4^{b_n-b_{n-1}+d_{n-1}-(b_n-b_{n-1})+1} = 4^{d_{n-1}+1}$.

Portanto, tanto $\displaystyle\prod_{i=1}^{d_n} w(i)$ quanto $\displaystyle\prod_{i=b_n-b_{n-1}}^{b_n-b_{n-1}+d_{n-1}} w(i)$ são menores que $4^{\max(d_n,d_{n-1})+1}$. Logo, fazendo estas desigualdades e colocando em evidência o fator $4^{\max(d_n,d_{n-1})+1}$, chegamos a

$$\|f_n\|_1 \leq n4^{\max(d_n,d_{n-1})+1}\left(\frac{|P_n|_1}{2^{b_{n-1}}} + |P_{n-1}|_1 \cdot \prod_{i=1}^{b_n-b_{n-1}-1} \frac{w(i)}{w(i+b_{n-1})}\right)$$

que já está bem próximo do que desejamos. Só resta, então, estimar o produtório restante para terminarmos a demonstração.

De definição de $w(i)$, temos que $\dfrac{w(i)}{w(i+b_{n-1})} = \dfrac{1-\frac{1}{2\sqrt{i}}}{1-\frac{1}{2\sqrt{i+b_{n-1}}}}$. É fácil verificar que $\ln((1-v)/(1-u)) \leq u - v$, sempre que $0 \leq u < v < 1$. Tomando então $u = \dfrac{1}{2\sqrt{i+b_{n-1}}}$ e $v = \dfrac{1}{2\sqrt{i}}$, temos que

$$\prod_{i=1}^{b_n-b_{n-1}-1} \frac{w(i)}{w(i+b_{n-1})} \leq \exp\left[\sum_{i=1}^{b_n-b_{n-1}-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{i+b_{n-1}}} - \frac{1}{2\sqrt{i}}\right)\right].$$

Como $n > 1$, então $b_n - b_{n-1} - 1 \geq b_{n-1}$, pois $b_n = 3^n$. Assim, como

$$\frac{1}{2\sqrt{i + b_{n-1}}} - \frac{1}{2\sqrt{i}} \leq 0,$$

segue que

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{b_n - b_{n-1} - 1} \frac{w(i)}{w(i + b_{n-1})} &\leq \exp\left[\sum_{i=1}^{b_n - b_{n-1} - 1}\left(\frac{1}{2\sqrt{i + b_{n-1}}} - \frac{1}{2\sqrt{i}}\right)\right]\\ &\leq \exp\left[\sum_{i=1}^{b_{n-1}}\left(\frac{1}{2\sqrt{i + b_{n-1}}} - \frac{1}{2\sqrt{i}}\right)\right]\end{aligned}$$

Consideremos agora $g(x) = 1/(2\sqrt{x})$. Pelo Teorema do Valor Médio, temos que

$$-\frac{1}{4\sqrt{c^3}} = \frac{g(i + b_{n-1}) - g(i)}{i + b_{n-1} - i}$$

onde $c \in]i, i + b_{n-1}[$. Dessa igualdade, segue que

$$-\frac{b_{n-1}}{4\sqrt{(i + b_{n-1})^3}} \geq \frac{1}{2\sqrt{i + b_{n-1}}} - \frac{1}{2\sqrt{i}}$$

e, portanto, temos que

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{b_n - b_{n-1} - 1} \frac{w(i)}{w(i + b_{n-1})} &\leq \exp\left[\sum_{i=1}^{b_{n-1}}\left(\frac{1}{2\sqrt{i + b_{n-1}}} - \frac{1}{2\sqrt{i}}\right)\right]\\ &\leq \exp\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{b_{n-1}} -\frac{b_{n-1}}{\sqrt{(i + b_{n-1})^3}}\right)\end{aligned}$$

Seja, agora, $j = i + b_{n-1}$. Logo, temos que $b_{n-1} + 1 \leq j \leq 2b_{n-1}$. Assim,

$$-\frac{b_{n-1}}{\sqrt{(i + b_{n-1})^3}} = -\frac{b_{n-1}}{\sqrt{j^3}} = -\frac{b_{n-1}}{j\sqrt{j}} = -\frac{1}{\sqrt{j}}\frac{b_{n-1}}{j} \leq -\frac{1}{\sqrt{j}}\frac{b_{n-1}}{2b_{n-1}} = -\frac{1}{2\sqrt{j}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{b_n-b_{n-1}-1}\frac{w(i)}{w(i+b_{n-1})} &\leq \exp\left(\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{b_{n-1}}-\frac{b_{n-1}}{\sqrt{(i+b_{n-1})^3}}\right)\\ &\leq \exp\left(\frac{1}{8}\sum_{j=b_{n-1}+1}^{2b_{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{j}}\right)\end{aligned}$$

Agora, como $n > 1$, segue que

$$\frac{1}{8}\sum_{j=b_{n-1}+1}^{2b_{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{j}} \leq \sum_{j=b_{n-1}+1}^{2b_{n-1}}-\frac{1}{8\sqrt{2b_{n-1}}} = -\frac{b_{n-1}+2}{\sqrt{128}\sqrt{b_{n-1}}} \leq -c\sqrt{b_{n-1}}$$

onde $c > 0$ é uma constante escolhida de maneira a tomar a última desigualdade válida. [4]

Portanto, temos que

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{b_n-b_{n-1}-1}\frac{w(i)}{w(i+b_{n-1})} &\leq \exp\left(\frac{1}{8}\sum_{j=b_{n-1}+1}^{2b_{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{j}}\right)\\ &\leq \exp\left(-c\sqrt{b_{n-1}}\right)\end{aligned}$$

como desejado.

■

Com ajuda deste lema, vamos provar a proposição a seguir.

Proposição 4.10. *Existe uma sequência controladora $(u_n)_{n=0}^{\infty}$, com $u_n \to \infty$, tal que se uma sequência admissível* **P** *é controlada por $(u_n)_{n=0}^{\infty}$, então T é contínuo em c_{00} com respeito a topologia de X.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de números positivos que tende ao infinito tais que $u_0 = 1$ e

$$n4^{u_n+1}\left(\frac{u_n}{2^{b_{n-1}}}+u_n\exp\left(-c\sqrt{b_{n-1}}\right)\right) \leq \frac{1}{2^n}$$

para todo $n \geq 1$. Como $b_0 = 0$ e $b_n = 3^n$ para todo $n \geq 1$, então é possível tomarmos tal sequência. Suponha que uma sequência admissível **P** seja controlada por $(u_n)_{n=0}^{\infty}$. Neste caso, por definição temos que $\deg(P_n) < u_n$ e $|P_n|_1 \leq u_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, por construção da sequência $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ e pelo lema anterior, temos que

$$\|f_n\|_1 \leq \frac{1}{2^n} \tag{4.10}$$

[4]Note que tal $c > 0$ existe pois basta tomar c suficientemente pequeno de maneira a termos $\dfrac{b_{n-1}+2}{\sqrt{128}} \geq c \cdot b_{n-1}$.

para todo $n \geq 1$.

Podemos agora decompor T como $T = R + K$ da seguinte maneira: temos que $R(e_i) = \alpha_{i+1}S(e_i) = \alpha_{i+1}e_{i+1}$, onde

$$\alpha_{i+1} = \begin{cases} w(i+1), \text{ se } i \neq b_n - 1 \\ \varepsilon_n, \text{ se } i = b_n - 1 \end{cases}$$

e S é o *forward shift* associado a base $(e_i)_{i=0}^{\infty}$.

Já o operador K é definido por

$$K(e_i) = \begin{cases} 0, \text{ se } i \neq b_n - 1 \\ f_n, \text{ se } i = b_n - 1 \end{cases}$$

para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$ e $i = 0, 1, 2, \ldots$. Vamos provar agora que tanto R quanto K são contínuos. Dessa forma, como $T = R + K$, teremos que T será contínuo.

- R é contínuo.

Seja $x = \displaystyle\sum_{i \in I} x_i e_i \in c_{00}$, onde $I \subseteq \mathbb{N}$ é um conjunto finito. Temos então:

$$\|R(x)\| = \left\| R\left(\sum_{i\in I} x_i e_i\right)\right\| = \left\|\sum_{i\in I} x_i R(e_i)\right\| = \left\|\sum_{i\in I} x_i \alpha_{i+1} e_{i+1}\right\|$$

pela definição de R. Agora, pelo Teorema 1.20, temos que

$$\|R(x)\| = \left\|\sum_{i\in I} x_i \alpha_{i+1} e_{i+1}\right\| \leq \left\|\sum_{i\in I} x_i \alpha_{i+1} e_{i+1}\right\|_{\text{bmu}-(x_n)}.$$

Daí, pela Proposição 1.21, temos que:

$$\|R(x)\| \leq \left\|\sum_{i\in I} x_i \alpha_{i+1} e_{i+1}\right\|_{\text{bmu}-(x_n)} \leq \|(\alpha_i)\|_{\infty} \left\|\sum_{i\in I} x_i e_{i+1}\right\|_{\text{bmu}-(x_n)}.$$

Como as normas $\|\cdot\|_{\text{bmu}-(x_n)}$ e $\|\cdot\|$ são equivalentes (vide Teorema 1.20), então existe um $M > 0$ tal que $\left\|\displaystyle\sum_{i\in I} x_i e_{i+1}\right\|_{\text{bmu}-(x_n)} \leq M \left\|\displaystyle\sum_{i\in I} x_i e_{i+1}\right\|$. Além disso, pela definição de $(w(i))_{i=1}^{\infty}$ e pelo lema anterior, temos que $\alpha_i \leq 4$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim, $\|(\alpha_i)\|_\infty \leq 4$. Portanto:

$$\begin{aligned}
\|R(x)\| &\leq \|(\alpha_i)\|_\infty \left\| \sum_{i \in I} x_i e_{i+1} \right\|_{\text{bmu}-(x_n)} \leq 4M \left\| \sum_{i \in I} x_i e_{i+1} \right\| \\
&\leq 4M \left\| \sum_{i \in I} x_i S(e_i) \right\| = 4M \left\| S\left(\sum_{i \in I} x_i e_i \right) \right\| = 4M \|S(x)\| \\
&\leq 4M \|S\| \|x\|
\end{aligned}$$

Temos então que $\|R(x)\| \leq 4M \|S\| \|x\|$. Como S é contínuo (por hipótese do Teorema 4.2), então segue que R é contínuo, como desejado.

- K é contínuo.

Para provarmos que K é contínuo, lembremos primeiro que $\|x\| \leq \|x\|_1$, para todo $x \in c_{00}$. Dessa forma, $\|K(e_{b_n - 1})\| = \|f_n\| \leq \|f_n\|_1$. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| \leq 1$ (vide equação (4.10)), então segue que, pela definição de K, $\sum_{i=0}^{\infty} \|K(e_i)\| \leq 1$.

Agora note que, se e_i^* denota o funcional coordenada associado a e_i, então $|x_i| = |e_i^*(x)| \leq \|e_i^*\| \|x\|$. Como a sequência $(e_i^*)_{i=0}^{\infty}$ é uniformemente limitada (Corolário 1.13), então temos que $|x_i| \leq M \|x\|$, para todo $i = 0, 1, 2, \ldots$. Portanto, se $x \in c_{00}$, temos:

$$\begin{aligned}
\|K(x)\| &= \left\| \sum_{i=0}^{\infty} x_i K(e_i) \right\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |x_i| \|K(e_i)\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} M \|x\| \|K(e_i)\| \\
&\leq M \|x\| \sum_{i=0}^{\infty} \|K(e_i)\| \leq M \|x\|
\end{aligned}$$

Logo, temos que K é contínuo. Como R e K são contínuos, então T é contínuo, como desejado.

■

Como comentamos anteriormente, sempre conseguimos achar uma sequência admissível **P** controlada por uma sequência dada $(u_n)_{n=0}^{\infty}$. Assim, se esta sequência controladora foi obtida como na proposição anterior, então temos que T é contínuo.

Acabamos, assim, de construir um operador contínuo T que satisfaz as propriedades (P1), (P2) e (P3) que descrevemos anteriormente. Logo, para a conclusão da demonstração do Teorema 4.2, resta construirmos um funcional linear não-nulo ϕ que satisfaça (P4). Este é o objetivo da nossa próxima seção.

4.4 O Funcional ϕ

Queremos, então, construir um funcional linear não-nulo $\phi : c_{00} \to \mathbb{K}$ tal que a função $(x, y) \to \phi(x \cdot y)$ é contínua em $c_{00} \times c_{00}$. Da mesma maneira que um corolário nos ajudou a criar um "critério para não-hiperciclicidade de $T \oplus T$" (Corolário 4.6), o lema a seguir nos fornecerá um "critério" para que um funcional ϕ satisfaça a propriedade que desejamos.

Lema 4.11. *Seja $\phi : c_{00} \to \mathbb{K}$ um funcional linear. Suponhamos que $\sum_{p,q} |\phi(e_p \cdot e_q)| < \infty$. Então a função $(x, y) \to \phi(x \cdot y)$ é contínua em $c_{00} \times c_{00}$.*

DEMONSTRAÇÃO: Observe, primeiro, que o produto definido em $\mathbb{K}[T](e_0)$ tornou tal espaço em uma álgebra comutativa (vide equação (4.1)). Assim, como $\mathbb{K}[T](e_0) = c_{00}$ (por (P1)) e ϕ é um funcional linear, então não é difícil verificar que $(x, y) \to \phi(x \cdot y)$ é bilinear. Logo, como c_{00} é um espaço normado, para mostrar que $(x, y) \to \phi(x \cdot y)$ é contínua, basta mostrar que existe um $C > 0$ tal que

$$|\phi(x \cdot y)| \leq C \|x\| \|y\| .$$

Sejam $x, y \in c_{00}$. Podemos escrever, então, $x = \sum_p x_p e_p$ e $y = \sum_q y_q e_q$. Logo, temos que

$$x \cdot y = \sum_{p,q} x_p y_q (e_p \cdot e_q).$$

Como $(x, y) \to \phi(x \cdot y)$ é bilinear e x_p, y_q são escalares, temos que:

$$|\phi(x \cdot y)| \leq \sum_{p,q} |x_p| |y_q| |\phi(e_p \cdot e_q)| .$$

Lembrando que $|x_p| \leq \|e_p^*\| \|x\|$, onde e_p^* é o funcional coordenada (vide Definição 1.9), temos então que

$$|\phi(x \cdot y)| \leq \sum_{p,q} \|e_p^*\| \|x\| \|e_q^*\| \|y\| |\phi(e_p \cdot e_q)| .$$

Agora, como $(e_i)_{i=0}^{\infty}$ é uma base normalizada, então a sequência $(e_i^*)_{i=0}^{\infty}$ é uniformemente limitada (Corolário 1.13). Logo, segue que $|x_i| \leq M \|x\|$, para todo $i = 0, 1, 2, \ldots$. Portanto:

$$|\phi(x \cdot y)| \leq M^2 \sum_{p,q} |\phi(e_p \cdot e_q)| \|x\| \|y\|$$

de onde segue que, usando a hipótese do lema, que a função $(x, y) \to \phi(x \cdot y)$ é contínua, como desejado.

■

Para construirmos um funcional ϕ que satisfaça a (P4) precisamos, então, construí-lo de maneira a termos que $\sum |\phi(e_p \cdot e_q)| < \infty$. O problema é que os produtos $e_p \cdot e_q$ não são fáceis de se lidar.

De fato, seria fácil construir tal ϕ se tivéssemos, por exemplo, que $e_p \cdot e_q = e_{p+q}$. No entanto, a multiplicação adotada em $c_{00} = \mathbb{K}[T]e_0$ não foi definida dessa maneira, vide a equação (4.1). Tal multiplicação faz com que c_{00} possua uma base natural, a saber, o conjunto $\{T^i(e_0) \,:\, i = 0, 1, 2, \ldots\}$. Por isso, precisamos escrever tanto e_p quanto e_q em função de tal base para, só assim, expressarmos este produto nesta base.

Dessa maneira, vamos tentar escrever tanto e_p quanto e_q em função de $\{T^i(e_0) \,:\, i = 0, 1, 2, \ldots\}$. Fixemos $p \leq q$. Tome k, l tais que $p = b_k + u, q = b_l + v$, onde $u \in [0, b_{k+1} - b_k[$ e $v \in [0, b_{l+1} - b_l[$. Temos, pela definição de T (vide equação (4.3)):

$$T^p(e_0) = T^u(T^{b_k}(e_0)) = T^u(P_k(T)e_0 + \frac{1}{a_k}e_{b_k}) = P_k(T)T^u(e_0) + \frac{1}{a_k}T^u(e_{b_k}). \tag{4.11}$$

Agora, como $b_k + u < b_{k+1}$, temos, pela equação (4.4), que

$$\begin{aligned} T^u(e_{b_k}) &= T^{u-1}(Te_{b_k}) = T^{u-1}(w(b_k+1)e_{b_k+1}) = w(b_k+1)T^{u-1}(e_{b_k+1}) \\ &= w(b_k+1)T^{u-2}(w(b_k+2)e_{b_k+2}) = w(b_k+1)w(b_k+2)T^{u-2}(e_{b_k+2}) \\ &= \ldots = w(b_k+1)\cdots w(b_k+u)e_{b_k+u} \\ &= w(b_k+1)\cdots w(b_k+u)e_p \end{aligned} \tag{4.12}$$

já que se $s \in [0, u[$, então $b_k + s \in [b_k, b_{k+1} - 1[$ (vide definição de u).

Dessa forma, como $a_k = k + 1$ (por definição), juntando as equações (4.11) e (4.12) obtemos

$$T^p(e_0) = P_k(T)T^u(e_0) + \frac{1}{k+1}T^u(e_{b_k}) = P_k(T)T^u(e_0) + \frac{1}{k+1}w(b_k+1)\ldots w(b_k+u)e_p.$$

Assim, como $T^p(e_0) = T^{b_k}(T^u(e_0))$, temos que

$$T^{b_k}(T^u(e_0)) - P_k(T)T^u(e_0) = \frac{1}{k+1}w(b_k+1)\ldots w(b_k+u)e_p.$$

Isolando e_p em um dos lados da equação, obtemos

$$e_p = \frac{k+1}{w(b_k+1)\ldots w(b_k+u)}(T^{b_k} - P_k(T))T^u(e_0) \tag{4.13}$$

E, de maneira análoga, obtemos

$$e_q = \frac{k+1}{w(b_l+1)\ldots w(b_l+v)}(T^{b_l} - P_l(T))T^v(e_0) \tag{4.14}$$

Lembrando agora que $\frac{1}{w(i)} \leq \frac{1}{2}$, para todo $i \in \mathbb{N}$, temos, para todo funcional linear $\phi : c_{00} \to \mathbb{K}$, que

$$|\phi(e_p \cdot e_q)| \leq \frac{(k+1)(l+1)}{2^{u+v}} \left|\phi(y_{(k,u)(l,v)})\right| \tag{4.15}$$

onde $y_{(k,u)(l,v)} = (T^{b_k} - P_k(T))(T^{b_l} - P_l(T))T^{u+v}(e_0)$.

Logo, precisamos construir um funcional ϕ de maneira a termos

$$\sum \frac{(k+1)(l+1)}{2^{u+v}} \left|\phi(y_{(k,u)(l,v)})\right| < \infty.$$

Para definirmos ϕ, vamos fazer uso da seguinte definição:

Definição 4.12. *Sejam $x \in c_{00}$ e $I \subseteq \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dizemos que x é* **suportado em** *I se $x \in \operatorname{span}\{T^i(e_0) \,:\, i \in I\}$.*

Vamos definir ϕ da seguinte maneira: tomamos $\phi(e_0) = 1$ e $\phi(T^i(e_0)) = 0$ se $i \in]0, b_1[$. Se $i \in [b_n, b_{n+1}[$ para algum $n \geq 1$, colocamos

$$\phi(T^i(e_0)) = \begin{cases} \phi(P_n(T)T^{i-b_n}e_0), & \text{se } i \in [b_n, 3b_n/2[\cup [2b_n, 5b_n/2[, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Neste caso, observe que $\phi(T^i(e_0))$ está bem definido. De fato, suponhamos que $\phi(T^j(e_0))$ é conhecido, para todo $j < i$. Logo, como estamos supondo $\deg(P_n) < b_n - 1$ (vide equação (4.8)), temos que $\deg(P_n) + i - b_n < b_n - 1 + i - b_n = i - 1 < i$. Logo, $P_n(T)T^{i-b_n}e_0$ é suportado em $[0, i[$, o que mostra que $\phi(T^i(e_0))$ está bem definido.

Observe ainda que não necessariamente temos que ϕ é contínuo. Neste caso, a continuidade do funcional em si não nos interessa: é relevante apenas a continuidade da função $(x, y) \to \phi(x \cdot y)$.

Antes de provarmos o próximo lema, observe que se R é um polinômio, então a desigualdade triangular nos mostra que

$$|\phi(R(T)e_0)| \leq |R|_1 \max_{j \leq \deg(R)} \left|\phi(T^j e_0)\right|. \tag{4.16}$$

Tal desigualdade será bastante útil nos dois próximos lemas.

Lema 4.13. *Suponha que $\deg P_n < b_n/3$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que*

$$\max_{i \in [0, b_n[} \left|\phi(T^i e_0)\right| \leq \prod_{0<j<n} \max(1, |P_j|_1)^2.$$

DEMONSTRAÇÃO: Vamos demonstrar o lema usando o Princípio da Indução Finita. Seja $K_n := \prod_{0<j<n} \max(1, |P_j|_1)^2$. A afirmação é verdadeira para $n = 0$ e $n = 1$ se assumirmos que o "produto vazio" vale 1 (isto é, se tomarmos $K_0 = 1$ e $K_1 = 1$). De fato, para $n = 0$ não há nada a demonstrar. Se $n = 1$, então $\max_{i \in [0, b_1[} \left|\phi(T^i e_0)\right| = 0$, vide a definição de ϕ.

Suponhamos então que a desigualdade seja verdadeira para um $n \geq 1$. Vamos mostrar que ela é verdadeira para $n+1$. Vamos denotar $\phi_i := \left|\phi(T^i e_0)\right|$. Assim:

$$\max_{i \in [b_n, 2b_n[} \phi_i = \max_{i \in [b_n, 3b_n/2[} \left|\phi(P_n(T) T^{i-b_n} e_0)\right|$$

pela definição de ϕ. Daí, usando a equação (4.16), temos que

$$\max_{i \in [b_n, 2b_n[} \phi_i = \max_{i \in [b_n, 3b_n/2[} \left|\phi(P_n(T) T^{i-b_n} e_0)\right| \leq |P_n|_1 \max_{j < b_n/2 + \deg(P_n)} \phi_j \leq |P_n|_1 K_n \tag{4.17}$$

pela hipótese de indução, visto que $b_n/2 + \deg(P_n) < b_n/2 + b_n/3 < b_n$. Daí, como $|P_n|_1 \leq \max(1, |P_n|_1)^2$, segue então que

$$\max_{i \in [b_n, 2b_n[} \phi_i \leq |P_n|_1 K_n \leq \max(1, |P_n|_1)^2 K_n = K_{n+1}. \tag{4.18}$$

Analogamente, pela definição de ϕ temos que

$$\max_{i \in [2b_n, b_{n+1}[} \phi_i = \max_{i \in [2b_n, 5b_n/2[} \left|\phi(P_n(T) T^{i-b_n} e_0)\right|$$

e daí, de novo pela equação (4.16) segue que

$$\max_{i \in [2b_n, b_{n+1}[} \phi_i = \max_{i \in [2b_n, 5b_n/2[} \left|\phi(P_n(T) T^{i-b_n} e_0)\right| \leq |P_n|_1 \max_{j < 3b_n/2 + \deg(P_n)} \phi_j.$$

Agora, como $3b_n/2 + \deg(P_n) < 3b_n/2 + b_n/3 < 2b_n$, temos que

$$\max_{i \in [2b_n, b_{n+1}[} \phi_i \leq |P_n|_1 \max_{j < 3b_n/2 + \deg(P_n)} \phi_j \leq |P_n|_1 \max_{j < 2b_n} \phi_j.$$

Como

$$\max_{j < 2b_n} \phi_j = \max\{ \underbrace{\max_{j \in [0, b_n[} \phi_j}_{\leq K_n \text{ por hipótese.}} , \underbrace{\max_{j \in [b_n, 2b_n[} \phi_j}_{\leq |P_n|_1 K_n \text{ vide (4.17).}} \} \leq \max(1, |P_n|_1) K_n$$

segue então que

$$\max_{i \in [2b_n, b_{n+1}[} \phi_i \leq |P_n|_1 \max(1, |P_n|_1) K_n \leq \max(1, |P_n|_1)^2 K_n = K_{n+1}.$$

Assim,

$$\max_{i \in [b_n, b_{n+1}[} \phi_i = \max\{ \underbrace{\max_{i \in [b_n, 2b_n[} \phi_i}_{\leq K_{n+1}, \text{ vide (4.18).}} , \underbrace{\max_{i \in [2b_n, b_{n+1}[} \phi_i}_{\leq K_{n+1}, \text{ vide eq. acima.}} \} \leq K_{n+1}.$$

E, portanto, o lema é demonstrado usando a desigualdade acima e a hipótese de indução.

■

O lema anterior nos ajudará a provar o próximo lema, que será crucial para demonstrarmos que a continuidade da função desejada.

Lema 4.14. *Suponha que* $\deg P_n < b_n/3$*, para todo* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*. Então as afirmações a seguir são verdadeiras sempre que* $0 \leq k \leq l$*:*

(i) $\phi(y_{(k,u)(l,v)}) = 0$ *se* $u + v < b_l/6$.

(ii) $\left|\phi(y_{(k,u)(l,v)})\right| \leq M_l(\mathbf{P}) := \max\limits_{0 \leq j \leq l} (1 + |P_j|_1)^2 \prod\limits_{0 < j \leq l+1} \max (1 + |P_j|_1)^2$.

DEMONSTRAÇÃO: Para provarmos (i), primeiro note que

$$\phi((T^{b_k} - P_k(T))z) = 0 \tag{4.19}$$

sempre que $z \in c_{00}$ é suportado em $[0, b_k/2[\cup [b_k, 3b_k/2[$. De fato, se z é suportado nesta união de intervalos, então podemos escrever $z = z_1 T^{k_1}(e_0) + \ldots + z_n T^{k_n}(e_0)$, onde $k_j \in [0, b_k/2[\cup [b_k, 3b_k/2[$.

Dessa forma, temos que $T^{b_k}(z) = z_1 T^{b_k + k_1}(e_0) + \ldots + z_n T^{b_k + k_n}(e_0)$. Logo, $b_k + k_j \in [b_k, 3b_k/2[\cup [2b_k, 5b_k/2[\subseteq [b_k, b_{k+1}[$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Daí, por definição, temos que

$$\begin{aligned} \phi(T^{b_k + k_j} e_0) &= \phi(P_k(T) T^{b_k + k_j - b_k} e_0) \\ &= \phi(P_k(T) T^{k_j} e_0) \end{aligned}$$

para todo $j = 1, \ldots, n$.

Assim, segue que $\phi(T^{b_k} z) = \phi(P_k(T) z)$, como afirmamos. Suponha agora que $u + v < b_l/6$. Note que se $l = 0$, então $b_0 = 0$ o que torna o caso trivial. Dessa forma, suponhamos $l \geq 1$.

Quando $k = l \geq 1$, escrevemos:

$$\begin{aligned} y_{(k,u)(k,v)} &= (T^{b_k} - P_k(T))(T^{b_l} - P_l(T))T^{u+v}(e_0) \\ &= (T^{b_k} - P_k(T))(T^{b_k} - P_k(T))T^{u+v}(e_0) \\ &= (T^{b_k} - P_k(T))T^{b_k + u + v}(e_0) - (T^{b_k} - P_k(T))P_k(T)T^{u+v}(e_0) \\ &= (T^{b_k} - P_k(T))(z_1) - (T^{b_k} - P_k(T))(z_2). \end{aligned}$$

Logo, z_1 é suportado em $[b_k, b_k + u + v] \subseteq [b_k, 7b_k/6[\subseteq [b_k, 3b_k/2[$, visto que $u + v < b_l/6 = b_k/6$. Já z_2 é suportado em $[0, \deg(P_k) + u + v] \subseteq [0, b_k/2[$, visto que $\deg(P_k) < b_k/3$ (por hipótese) e $u + v < b_k/6$.

Assim, como z_1, z_2 são suportados em $[0, b_k/2[\cup [b_k, 3b_k/2[$, temos, pela equação (4.19), que $\phi(y_{(k,u)(k,v)}) = 0$, como desejado.

Suponhamos agora $l > k$. Podemos escrever

$$y_{(k,u)(k,v)} = (T^{b_l} - P_l(T))(z)$$

onde $z = (T^{b_k} - P_k(T))T^{u+v}(e_0)$. Dessa forma, observe que z é suportado em $[0, b_k + u + v] \subseteq [0, b_l/2[$, visto que $\deg P_k < b_k/3, u + v < b_l/6$ e $b_k < b_l/3$ (vide definição de b_n). Sendo z suportado em tal intervalo, então, de novo pela equação (4.19), segue que $\phi(y_{(k,u)(k,v)}) = 0$. Terminamos, portanto, de provar (i).

Vamos agora provar (ii). Note que o vetor $y_{(k,u)(k,v)}$ pode ser visto na forma $R(T)e_0$, onde $R = (T^{b_k} - P_k(T))(T^{b_l} - P_l(T))T^{u+v}$ e $|R|_1 \leq (1+|P_l|_1)(1+|P_k|_1) \leq \max_{0 \leq j \leq l}(1+|P_j|_1)^2$. Assim, da equação (4.16), temos:

$$\left|\phi(y_{(k,u)(l,v)})\right| = |\phi(R(T)e_0)| \leq \max_{0 \leq j \leq l}(1 + |P_j|_1)^2 \max_{j \leq \deg(R)} \left|\phi(T^j e_0)\right|.$$

Precisamos agora estimar $\deg(R)$ de maneira a utilizarmos o lema anterior. A primeira vista, note que $\deg(R) \leq b_k + b_l + u + v$. Ainda, como $u \in [0, b_{k+1} - b_k[$ e $v \in [0, b_{l+1} - b_l[$, então $u < b_{k+1}$ e $v < b_{l+1}$. Assim:

$$\deg(R) \leq b_k + b_l + u + v \leq b_k + b_l + b_{k+1} + b_{l+1} < b_l + b_l + b_{l+1} + b_{l+1}$$

visto que estamos assumindo $l > k$. Como $b_n = 3^n$, então segue que $2b_l < b_{l+1}$ e $3b_{l+1} = b_{l+2}$. Logo, temos que:

$$\deg(R) \leq 2b_l + 2b_{l+1} < b_{l+1} + 2b_{l+1} = 3b_{l+1} = b_{l+2}.$$

Logo, $\deg(R) < b_{l+2}$. Portanto, temos que

$$\left|\phi(y_{(k,u)(l,v)})\right| \leq \max_{0 \leq j \leq l}(1 + |P_j|_1)^2 \max_{j \leq b_{l+2}} \left|\phi(T^j e_0)\right|.$$

Pelo lema anterior, temos que

$$\max_{j \leq b_{l+2}} \left|\phi(T^j e_0)\right| = \max_{i \in [0, b_{l+2}[} \left|\phi(T^i e_0)\right| \leq \prod_{0 < j < l+2} \max(1, |P_j|_1)^2.$$

Jutando as duas últimas equações, temos então que

$$\left|\phi(y_{(k,u)(l,v)})\right| \leq \max_{0 \leq j \leq l}(1 + |P_j|_1)^2 \prod_{0 < j < l+2} \max(1, |P_j|_1)^2.$$

Trocando $j < l + 2$ por $j \leq l + 1$, fica provado o item (ii), terminando a demonstração do lema.

$\blacksquare$

Com a ajuda deste último lema, podemos enfim provar que a função $(x, y) \to \phi(x \cdot y)$ é contínua.

Proposição 4.15. *Existe uma sequência controladora $(v_n)_{n=0}^{\infty}$, com $v_n \to \infty$, tal que se uma sequência admissível* **P** *é controlada por $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ então a função $(x, y) \to \phi(x \cdot y)$ é contínua.*

DEMONSTRAÇÃO: Seja $\Lambda := \{(m, w) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : w < b_{m+1} - b_m\}$. Então

$$\sum_{p,q} |\phi(e_p \cdot e_q)| \leq \sum_{((k,u),(l,v)) \in \Lambda \times \Lambda} \frac{(k+1)(l+1)}{2^{u+v}} \left|\phi(y_{(k,u)(l,v)})\right|$$

vide a equação (4.15).

Pelo lema anterior, temos que:

$$\sum_{p,q} |\phi(e_p \cdot e_q)| \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l \geq k} (l+1)^2 M_l(\mathbf{P}) \sum_{u+v \leq b_l/6} \frac{1}{2^{u+v}}.$$

Tomemos agora $i := u + v$. Para i fixo, observe que temos $i + 1$ maneiras distintas de escrever 2^{u+v}, quando u e v variam em $\{0, 1, \ldots, i\}$. Dessa maneira, temos:

$$\sum_{p,q} |\phi(e_p \cdot e_q)| \leq 2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l \geq k} (l+1)^2 M_l(\mathbf{P}) \sum_{i \leq b_l/6} \frac{i+1}{2^i}.$$

Seja agora $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de números positivos com $A_n \geq 2$, para todo n, e $\lim\limits_{n \to \infty} A_n = \infty$ tal que

$$2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l \geq k} (l+1)^2 A_n \sum_{i \leq b_l/6} \frac{i+1}{2^i} < \infty.$$

Pela definição de $M_n(\mathbf{P})$, note que podemos tomar uma sequência controladora $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ tal que $M_n(\mathbf{P}) \leq A_n$, para todo n, desde que **P** seja devidamente controlada por $(v_n)_{n=0}^{\infty}$.

Assim, a última desigualdade em destaque nos mostra que $\sum\limits_{p,q} |\phi(e_p \cdot e_q)| < \infty$ o que, pelo Lema 4.11, mostra que $(x, y) \to \phi(x \cdot y)$ é contínua, como desejado.

■

Se a sequência admissível **P** for tomada de maneira a ser controlada pela sequência $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ como na proposição acima, fica provado que o funcional ϕ é tal que a função $(x, y) \to \phi(x \cdot y)$ é contínua. Tendo em vista o que já fizemos nas seções anteriores, terminamos, assim, de demonstrar o Teorema 4.2, nosso objetivo neste capítulo.

No entanto, antes de terminá-lo, vamos lembrar de todas as exigências que fizemos sobre a sequência admíssivel **P** e eventuais sequências controladoras nos resultados que demonstramos.

Dessa maneira, iremos nos assegurar de que é possível tomar uma sequência admissível e uma sequência controladora que satisfaça tais resultados e, portanto, torne a construção que apresentamos válida.

4.5 Condições sobre a Sequência Admissível

Como dissemos após a definição de sequência controladora, para qualquer sequência de números positivos $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ tal que $\limsup_{n\to\infty} c_n = \infty$ podemos encontrar uma sequência admissível **P** que seja controlada por $(c_n)_{n=0}^{\infty}$.

Vejamos todas as exigências feitas:

(1) **Equação** (4.8). Exigimos que $\deg(P_n) < b_n - 1$.

(2) **Proposição 4.10**. Tomamos uma sequência $(u_n)_{n=0}^{\infty}$, com $u_n \to \infty$ e $u_0 = 1$ tal que

$$n4^{u_n+1}\left(\frac{u_n}{2^{b_{n-1}}} + u_n \exp\left(-c\sqrt{b_{n-1}}\right)\right) \leq \frac{1}{2^n}$$

para todo $n \geq 1$.

(3) **Lema 4.13 e Lema 4.14**. Exigimos que $\deg(P_n) < b_n/3$.

(4) **Proposição 4.15**. Dada uma sequência $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ tal que $A_n \to \infty$, tomamos a sequência admissível **P** de maneira a termos

$$\max_{0\leq j\leq n}(1 + |P_j|_1)^2 \prod_{0<j\leq n+1} \max(1 + |P_j|_1)^2 \leq A_n$$

para todo n.

Vamos agora construir uma sequência controladora $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ e uma sequência admissível **P** que satisfaçam as quatro condições acima.

Em primeiro lugar, lembrando que $b_n = 3^n$, então é claro que $b_n/3 < b_n - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, se tomarmos a sequência **P** de modo a termos $\deg(P_n) < b_n/3$, estaremos então satisfazendo tanto (1) quanto (3).

Agora, observe que podemos encontrar uma sequência de números positivos $(c_n)_{n=0}^{\infty}$, com $\limsup_{n\to\infty} c_n = \infty$, tal que

$$\max_{0\leq j\leq n}(1 + c_j)^2 \prod_{0<j\leq n+1} \max(1 + c_j)^2 \leq A_n$$

visto que $A_n \to \infty$.

Para satisfazermos as quatro condições simultaneamente, tomamos $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ tal que $v_n = \min\{u_n, c_n, b_n/3\}$, onde $(c_n)_{n=0}^{\infty}$ é a sequência acima e $(u_n)_{n=0}^{\infty}$ é a sequência do item (2). Daí, tomamos uma sequência admissível **P** de polinômios tal que **P** é controlada por $(v_n)_{n=0}^{\infty}$.

Como $v_n \leq u_n$, estamos satisfazendo (2); como $v_n \leq c_n$ e **P** é controlada por $(v_n)_{n=0}^{\infty}$, então $|P_n|_1 < v_n \leq c_n$ e, assim, estamos satisfazendo (4). Por fim, como $\deg P_n < v_n \leq b_n/3 < b_n - 1$, então estamos satisfazendo (1) e (3).

Logo, tal sequência controladora $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ e tal sequência admissível **P** satisfazem todas as exigências anteriores e, assim, a construção feita é válida.

Agora que terminamos, efetivamente, de apresentar a construção realizada por Bayart e Matheron, veremos na próxima seção alguns problemas relacionados ao Principal Problema em Hiperciclicidade (Problema 1). Tais problemas são uma "extensão" natural do estudo que fizemos até aqui e, portanto, merecem ser investigados em trabalhos futuros.

4.6 Problemas Relacionados

Acabamos de ver que nos espaços de Banach c_0 e $\ell_p, 1 \leq p < \infty$ existem operadores hipercíclicos que não satisfazem o Critério de Hiperciclicidade. Uma pergunta natural a ser feita e que ainda encontra-se sem solução é a seguinte:

Problema 3. Existe um espaço de Banach X tal que todo operador hipercíclico T satisfaz o Critério de Hiperciclicidade?

A pergunta é feita no contexto dos espaços de Banach por um bom motivo: em [3], Proposição 6.1, Bayart e Matheron mostram que o espaço de Fréchet $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ (munido da topologia produto) é um espaço tal que todo operador hipercíclico satisfaz o Critério de Hiperciclicidade. Porém, como Bayart e Matheron dizem em seu próprio artigo, o problema de caracterizar os espaços de Fréchet tais que todo operador satisfaz o Critério também é um problema que encontra-se sem solução.

Já em [21], Grivaux prova que todo operador limitado T em ℓ_2 pode ser ser escrito como a soma de dois operadores hipercíclicos que satisfazem o Critério de Hiperciclicidade (vide Observação 3, p. 498). No entanto, como sabemos, isto não é suficiente para que todo operador hipercíclico em ℓ_2 satisfaça o Critério, vide o Teorema 4.2.

Apesar do resultado de Grivaux sugerir que uma resposta para o Problema 3 não surja de construções envolvendo somas de operadores, isto não necessariamente pode ser verdade. É bastante conhecido que Argyros e Haydon construíram em [1] um espaço de Banach em que todo operador linear contínuo pode ser escrito na forma $\lambda I + K$, onde λ é um escalar e K é um operador compacto. Tal construção nos remete a outro problema:

Problema 4. Seja X um espaço de Banach e T um operador hipercíclico tal que T pode ser escrito como $T = I + K$, onde K é um operador compacto. Então T necessariamente satisfaz o Critério de Hiperciclicidade?

Esse problema é pertinente por vários motivos. Como pode-se encontrar em [25, p. 142], Teorema 5.11, nenhum operador compacto é hipercíclico. No entanto, é conhecido que todo operador compacto admite um subespaço fechado invariante não-trivial (vide [31]). Ainda, se tal problema admitir uma resposta positiva, então o Problema 3 também admite uma resposta positiva, tendo em mente a construção de Argyros e Haydon já mencionada.

Como dissemos, ambos os problemas encontram-se em aberto, segundo [22], que é o artigo no qual esta seção foi baseada. Existem ainda vários outros problemas em aberto que envolvem outros conceitos de dinâmica linear e operadores hipercíclicos, como pode-se ver no próprio artigo [22].

Bibliografia

[1] AGYROS, S. e HAYDON, R., *"A Hereditarily Indecomposable $\mathcal{L}_\infty$-space that Solves the Scalar-Plus-Compact Problem"*, Acta Math. **206** (2011), 1–54.

[2] ANSARI, S.I., *"Hypercyclic and Cyclic Vectors"*, J. Funct. Anal. **128** (1995), 374–383.

[3] BAYART, F. e MATHERON É., *"Hypercyclic Operators Failing the Hypercyclic Criterion on Classical Banach Spaces"*, J. Funct. Anal. **250** (2007), 426–441.

[4] BAYART, F. e MATHERON É., *"(Non)-Weakly Mixing Operators and Hypercyclicity Sets"*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **59** (2009), 1–35.

[5] BAYART, F. e MATHERON É., *Dynamics of Linear Operators*, 1^a edição. Coleção *Cambridge Tracts in Mathmatics*. Cambridge: New York, 2009.

[6] BERNAL-GONZÁLEZ L., *"Universal Images of Universal Elements"*, Studia Math. **138** (2000), no. 3, 241–250.

[7] BERNAL-GONZÁLEZ, L., PELLEGRINO D. e SEOANE-SEPÚLVEDA, J. B., *"Linear Subsets of Nonlinear Sets in Topological Vector Spaces"*, Bull. Amer. Math. Soc. **51** (2014), 71–130.

[8] BÈS, J., *"Invariant Manifolds of Hypercyclic Vectors for the Real Scalar Case"*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1801–1804.

[9] BÈS, J., *"Three Problems on Hypercyclic Operators"*, Tese de Doutorado, Kent State University, 1998.

[10] BÈS, J. e PERIS, A., *"Hereditarily Hypercyclic Operators"*, J. Funct. Anal., **167** (1999), 94–112.

[11] BIRKHOFF, G.D., *"Surface Transformations and their Dynamical Applications"*, Acta Math. **43** (1920), 1–119.

[12] BONET J. e PERIS, A., *"Hypercyclic Operators on Non-normable Fréchet Spaces"*, J. Funct. Anal., **159** (1998), 587–595.

[13] CONWAY, J.B., *A Course in Functional Analysis*. Coleção *Graduate Texts in Mathematics*, **96**. Springer-Verlag: New York, 1985.

[14] CONWAY, J.B., *Functions of One Complex Variable*. Coleção *Graduate Texts in Mathematics*, **11**. Springer-Verlag: New York, 1978.

[15] COSTA, D., *"Operadores Hipercíclicos em Espaços Vetoriais Topológicos"*, Dissertação de Mestrado, IME-USP, 2007.

[16] DE LA ROSA, M., e READ, C.J., *"A Hypercyclic Operator whose Direct Sum $T \oplus T$ is not Hypercyclic"*. J. Operator Theory **61** (2009), no. 2, 369–380.

[17] FABIAN, M., HABALA, P., HÁJEK, P., MONTESINOS, V. M., PELANT, J. e ZIZLER, V., *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*. Coleção *CMS Books in Mathmatics*, **8**. Springer-Verlag: New York, 2001.

[18] GETHNER, R.M. e SHAPIRO J.H., *"Universal Vectors for Operators on Spaces of Holomorphic Functions"*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 281–288.

[19] GODEFROY, G. e SHAPIRO, J.H., *"Operators with Dense, Invariant, Cyclic Vector Manifolds"*, J. Funct. Anal. **98** (1991), 229–269.

[20] GRIVAUX, S., *"Hypercyclic Operators, Mixing Operators, and the Bounded Steps Problem"*, J. Funct. Anal. **202** (2003), 486–503.

[21] GRIVAUX, S., *"Sums of Hypercyclic Operators"*, J. Operator Theory **54** (2005), 147–168.

[22] GRIVAUX, S., *"Ten Questions in Linear Dynamics"*, preprint. Disponível em http://math.univ-lille1.fr/~grivaux/.

[23] GROSSE-ERDMANN, K., *"Recent Developments in Hypercyclicity"*, Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. **97** (2003), 273–286.

[24] GROSSE-ERDMANN, K., *"Universal Families and Hypercyclic Operators"*, Bull. Amer. Math. Soc. **36** (1999), 345–381.

[25] GROSSE-ERDMANN K., e PERIS, A., *Linear Chaos*, 1^a edição. Coleção *Universitext*. Springer: Londres, 2011.

[26] HEIL, C., *A Basis Theory Primer*. Coleção *Applied and Numerical Harmonic Analysis*. Birkhauser: New York, 2010.

[27] HERRERO, D.A., *"Hypercyclic Operators and Chaos"*, J. Operator Theory **28** (1992), 93–103.

[28] HERRERO, D.A., *"Limits of Hypercyclic and Supercyclic Operators"*. J. Funct. Anal. **99** (1991), 179–190.

[29] KITAI, C., *"Invariant Closed Sets for Linear Operators"*, Tese de Doutorado, University of Toronto, 1982.

[30] LEÓN-SAAVEDRA, F., *"Notes About the Hypercyclicity Criterion"*, Mathematical Slovaca, **53** (2003), 313–139.

[31] LOMONOSOV, V., *"Invariant Subspaces of the Family of Operators that Commute with a Completely Continuous Operator"*, Funct. Anal. Appl. **7** (1974), 213–214.

[32] MACLANE, G.R., *"Sequences of Derivatives and Normal Families"*, Journal d'Analyse Mathématique **2** (1952), 72–87.

[33] MEGGINSON. R.E., *An Introduction to Banach Space Theory*. Coleção *Graduate Texts in Mathematics*, **183**. Springer-Verlag: New York, 1998.

[34] MUNKRES, J.R., *Topology*, 2^a edição. Prentice-Hall: New Jersey, 2000.

[35] ROLEWICZ, S., *"On Orbits of Elements"*, Studia Math. **32** (1969), 17–22.

[36] SHAPIRO, J., *"Notes on the Dynamics of Linear Operators"*. Disponível em http://www.mth.msu.edu/~shapiro.