Uma prova funcional analítica da limitação uniforme de atratores para uma família de problemas parabólicos em $\mathbb{R}^2$

Bianca Paolini Lorenzi

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Programa: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Antônio Luiz Pereira

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro do CNPq

São Paulo, Outubro de 2017

Uma prova funcional analítica da limitação uniforme de atratores para uma família de problemas parabólicos em $\mathbb{R}^2$

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 22/09/2017. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Antônio Luiz Pereira (orientador) - IME-USP
- Prof. Dra. Gleiciane da Silva Aragão - UNIFESP
- Prof. Dra. Pricila da Silva Barbosa - Externo

Agradecimentos

Ao meu orientador Prof. Dr. Antônio Luiz Pereira, que vem me acompanhando desde a Iniciação Científica, com incansável atenção e dedicação, sempre me incentivando a ir além e a me aperfeiçoar.

Aos colegas e professores que assistiram minhas exposições nos Seminários de Equações de Evolução pelas valiosas contribuições.

À Ana Kelly de Oliveira e à Pricila da Silva Barbosa pelo desprendimento em me ajudar.

Aos meus pais pelo suporte, paciência e exemplo de força e luta.

Ao Marcelo Veronez Tola pelo grande companheirismo e amor.

À minha família pelo incentivo, em especial, ao meu tio José Geraldo Lúcio e à minha tia Maria Terêsa Rocha Triñanes.

Resumo

Lorenzi, B. P. (2017). *Uma prova funcional analítica da limitação uniforme de atratores para uma família de problemas parabólicos em* $\mathbb{R}^2$ (Dissertação de Mestrado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Este trabalho tem como principal objetivo estudar as constantes que aparecem em desigualdades relacionadas a operadores setoriais e suas potências fracionárias. Demonstramos que tais constantes dependem essencialmente do setor e da constante na desigualdade do resolvente associados ao operador. Como uma aplicação desses resultados, fornecemos uma prova alternativa para a limitação uniforme dos atratores de uma classe de problemas parabólicos semilineares obtidos por perturbação suave de um domínio.

Palavras-chave: Operadores setoriais. Equações parabólicas. Perturbação do domínio. Atrator global. Limitação dos atratores.

Abstract

Lorenzi, B. P. (2017). *An analytic functional proof of the uniform limitation of attractors for a family of parabolic problems in* $\mathbb{R}^2$ (Dissertação de Mestrado). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo.

This work has as main purpose to study the constants that appear in inequalities related to sectorial operators and their fractional powers. We show that these constants depend essentially on the sector and the constant in the resolvent inequality associated with the operator. As an application of these results, we provide an alternative proof for the uniform bound of the attractors of a class of semilinear parabolic problems obtained by smooth perturbation of a domain.

Keywords: Sectorial operators. Parabolic equations. Perturbation of the domain. Global attractor. Limitation of the attractors.

Sumário

Introdução

A motivação inicial desta monografia foi determinar exatamente do que dependem as constantes nas desigualdades envolvendo operadores setoriais e suas potências fracionárias. Um dos objetivos dessa análise seria obter resultados sobre a limitação uniforme de atratores de famílias de problemas parabólicos, fato essencial no estudo da continuidade dos atratores relativamente a perturbações no semigrupo. Sendo essa uma questão vital para a adequação da modelagem matemática de fenômenos utilizando semigrupos.

Para tanto, fizemos uma reescrita cuidadosa do primeiro capítulo de Henry (1981). Observamos que essas constantes dependem basicamente do setor e da constante na desigualdade do resolvente associados ao operador.

Resultou assim o primeiro capítulo desta dissertação no qual, definições, exemplos e as principais propriedades dos operadores setoriais e de suas potências fracionárias são abordados. Chamamos especial atenção do leitor para a importância do Teorema 1.3.4 em Henry (1981) nesse estudo. Este afirma que se A é um operador setorial em um espaço de Banach X, então $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{e^{-At}\}_{t\geq 0}$. As constantes que aparecem na sua demonstração são fundamentais para os nossos propósitos.

Finalizamos o primeiro capítulo com uma aplicação teórica dessa análise ao contexto dos problemas de Cauchy não lineares envolvendo operadores setoriais. Com base agora no terceiro capítulo de Henry (1981), mostramos, sob determinadas hipóteses, a limitação uniforme de um conjunto de atratores globais $\{\mathcal{A}_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ referentes aos problemas:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + A_\gamma x = f_\gamma(x),\ t > t_0 \\ x(t_0) = x_0 \in X_\gamma^\alpha \end{cases}$$

onde $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ é uma família de operadores setoriais em X_γ^α, $0 \leq \alpha < 1$, com resolvente compacto,

$D(A_\gamma) \supset D(A)$, $\forall \gamma \in \Lambda$, sendo Λ um espaço topológico e $A = A_{\gamma_0}$, $f_\gamma : U \to X$, U um subconjunto aberto de X^α_γ, é localmente Lipschitziana em x e f_γ aplica todos os subconjuntos fechados e limitados de U em subconjuntos limitados de X.

Em um segundo momento, nos dedicamos a leitura de Barbosa, Pereira e Pereira (2016), o qual trata de uma família de problemas parabólicos semilineares obtidos por perturbações de classe C^1 do quadrado. A nossa principal meta era, usando a primeira parte do trabalho, obter uma limitação uniforme dos atratores em L_∞.Dessa forma, torna-se possível, sem perda de generalidade, supor que as não linearidades são globalmente Lipschitzianas, em vez de adotar esta propriedade como hipótese adicional, como foi feito naquele artigo. Por razões técnicas, principalmente ligadas à comparação de normas em espaços fracionários, não conseguimos obter tal resultado na generalidade pretendida.

Partimos para o estudo do mesmo problema no caso mais simples de domínios suaves discutido em Pereira e Pereira (2007). O objetivo do segundo capítulo então é o de provar a limitação uniforme dos atratores para uma família de perturbações suficientemente regulares de Ω, um aberto limitado do $\mathbb{R}^2$ com fronteira suave, segundo um viés funcional analítico. Arrieta, Carvalho e Rodríguez-Bernal (2000) demonstram a limitação uniforme dos atratores através de técnicas de comparação.

Destacamos um resultado que foi essencial para essa conclusão, o de podermos supor que toda perturbação h, com h um difeomorfismo de ordem 3, é tal que a "normal perturbada"coincide com a normal usual desde que exijamos um pouco mais de regularidade do domínio e $\| h - i_\Omega \|_{C^3(\Omega,\mathbb{R}^2)}$ seja pequena, onde i_Ω denota a identidade em Ω.

Futuramente, gostaríamos de tentar aplicar essa abordagem para o mesmo problema em uma dimensão maior. As desigualdades de Nirenberg - Gagliardo, que garantem a inclusão dos espaços de potências fracionárias em subespaços de L_∞ sob determinadas condições, parecem indicar que é necessário estudar o problema nos espaços L_p.

Capítulo 1

Operadores setoriais

Neste capítulo, nas seções um, dois e três, realizamos um estudo minucioso sobre os operadores setoriais e suas potências fracionárias com base em Henry (1981) a fim de analisarmos a dependência das constantes que aparecem em desigualdades envolvendo tais operadores. Na quarta e última seção, aplicamos esse estudo para obter resultados importantes no contexto de problemas de Cauchy não lineares.

Utilizaremos as seguintes notações, sendo $\lambda \in \mathbb{C}$, X um espaço normado, A um operador linear e $\nu \geq 0$,

$\Re(\lambda)$ = parte real de λ;

$\Im(\lambda)$ = parte imaginária de λ;

$L(X)$ = espaço dos operadores lineares contínuos com domínio X e imagem em X;

$D(A)$ = domínio de A;

$R(A)$ = imagem de A;

$\rho(A)$ = conjunto resolvente de A;

$\sigma(A)$ = espectro de A;

$C^\nu(S, X)$ = espaço das funções $[\nu]$ vezes continuamente diferenciáveis de S, um subconjunto aberto de um espaço de Banach, em outro espaço de Banach X, onde a derivada de ordem $[\nu]$ satisfaz a condição de Holder com expoente $\nu - [\nu]$, se ν não é inteiro. A norma é dada por

$$\| f \|_{C^\nu(S,X)} = \sum_{k=0}^{[\nu]} \sup_S \| D^k f \| + \sup_{x \neq y} \frac{\| D^{[\nu]} f(x) - D^{[\nu]} f(y) \|}{\| x - y \|^\alpha},$$

com $\alpha = \nu - [\nu]$ e o último termo é omitido quando ν é inteiro.

$C_c^k(S, X)$ = subespaço linear das funções em $C^k(S, X)$ que possuem suporte compacto em S (isto é, $f(x) = 0, \forall x \in S \setminus K$, com K um compacto).

$L_p(\Omega, X)$ = espaços das funções f, de um espaço de medida Ω em um espaço de Banach X, mensuráveis com $|f|^p$ integrável,

$$\| f \|_{L_p(\Omega,X)} = \left\{ \int_\Omega \| f(t) \|_X^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}}$$

para $1 \leq p < \infty$.

$L_\infty(\Omega, X)$ = espaço das funções essencialmente limitadas de Ω em X,

$$\| f \|_{L_\infty(\Omega,X)} = \sup ess \{ \| f(t) \|_X \mid t \in \Omega \}.$$

$W^{k,p}(\Omega, X)$ = espaço de Sobolev das funções $f \in L_p(\Omega, X)$ que possuem derivadas distribucionais de ordem $\leq k$ todas em L_p (aqui Ω é um aberto do $\mathbb{R}^n$).

$$\| f \|_{W^{k,p}(\Omega,X)} = \left\{ \int_\Omega \sum_{j=0}^{k} \| f^j(t) \|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

$H^k(\Omega, X) = W^{k,2}(\Omega, X)$, que é um espaço de Hilbert quando X é um espaço de Hilbert.

1.1 Operadores setoriais e semigrupos analíticos

Nesta seção, apresentamos o conceito de setorialidade, exibimos alguns exemplos de operadores com tal propriedade e, por fim, estudamos o semigrupo analítico relacionado a este tipo de operador através de um resultado que será central em nosso trabalho.

Definição 1.1.1 *Um operador linear A em um espaço de Banach X é dito um operador setorial se é um operador densamente definido, fechado e tal que para algum $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $M \geq 1$ e algum número real a, o setor:*

$$S_{a,\phi} = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \phi \leq |arg(\lambda - a)| \leq \pi, \ \lambda \neq a \}$$

está contido no resolvente de A e vale a desigualdade

$$\| (\lambda I - A)^{-1} \| \leq \frac{M}{| \lambda - a |}, \forall \lambda \in S_{a,\phi}.$$

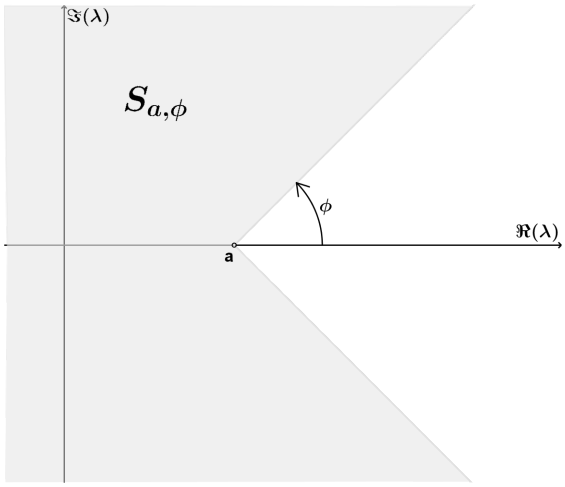

Figura 1.1: Setor $S_{a,\phi}$.

Vejamos a seguir alguns exemplos de operadores setoriais.

Exemplo 1.1.2 *Seja A um operador linear limitado em um espaço de Banach X. Então, A é setorial.*

De fato, como A é limitado ($D(A) = X$), temos que A é densamente definido e fechado. Quanto ao setor para o operador A e a correspondente desigualdade, precisaremos fazer alguns cálculos a fim de determiná-los:

i) Observamos que se $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $|\lambda| > \| A \|$, então $\forall x \in X$,

$$\begin{aligned} \| (\lambda I - A)x \| &\geq \big| |\lambda| \| x \| - \| Ax \| \big| \\ &\geq \big| |\lambda| \| x \| - \| A \| \| x \| \big| \\ &\geq (|\lambda| - \| A \|) \| x \|, \end{aligned}$$

o que signifca que o conjunto $\{ \lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\lambda| > \| A \| \} \subset \rho(A)$. Dessa forma, basta considerarmos, por exemplo, o vértice $a = -2 \| A \|$ e o ângulo $\phi = \frac{\pi}{4}$ para obter um setor contido no $\rho(A)$, conforme Figura 1.2.

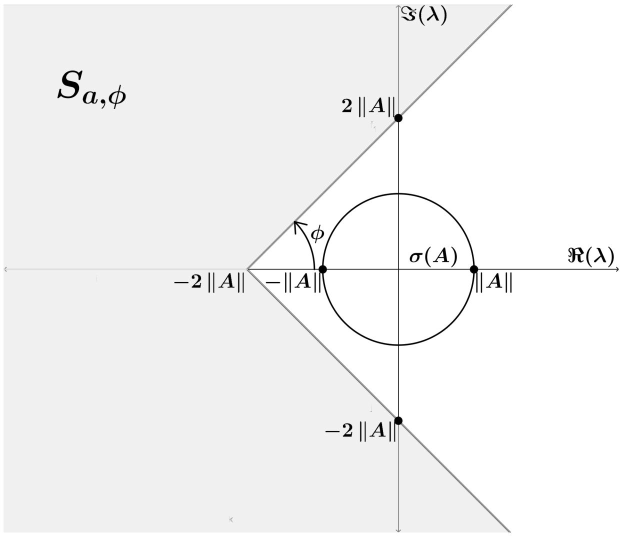

Figura 1.2: Possível setor para A.

ii) Para λ tal como em i), podemos escrever o operador resolvente $(\lambda I - A)^{-1}$ como a série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}$. Isso porque, denotando S_n a sua soma parcial $\sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}$, se $n > m$:

$$\begin{aligned} \| S_n - S_m \| &= \left\| \frac{A^{m+1}}{\lambda^{m+2}} + \cdots + \frac{A^n}{\lambda^{n+1}} \right\| \\ &\leq \frac{\| A \|}{| \lambda |} \left(\frac{\| A \|^m}{| \lambda |^{m+1}} + \cdots + \frac{\| A \|^{n-1}}{| \lambda |^n} \right), \end{aligned}$$

o que nos mostra que S_n é uma sequência de Cauchy em $L(X)$ afinal, $\frac{\|A\|}{|\lambda|} < 1$. Como X é um espaço de Banach, $L(X)$ é completo, donde S_n converge para algum operador $S \in L(X)$.

Agora, $(\lambda I - A)S_n = S_n(\lambda I - A) = I - \frac{A^n}{\lambda^n}$ e, essa expressão converge para $(\lambda I - A)S = S(\lambda I - A) = I$. Logo, $(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}$.

iii) Notemos que para qualquer $\lambda \in S_{a,\phi}$, vale que $| \lambda | \geq \sqrt{2} \| A \|$ (trata-se da altura h do triângulo isóceles com os lados iguais medindo $2 \| A \|$ conforme Figura 1.3), daí juntando essas considerações, encontramos:

$$\begin{aligned} \| \lambda(\lambda I - A)^{-1} \| &\leq | \lambda | \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\| A \|^n}{| \lambda |^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\| A \|}{| \lambda |} \right)^n \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\| A \|}{| \sqrt{2} \| A \| |} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \\ &= 2 + \sqrt{2}, \end{aligned}$$

ou seja, $\| (\lambda I - A)^{-1} \| \leq \frac{2+\sqrt{2}}{|\lambda|}$, para $\forall \lambda \in S_{a,\phi}$.

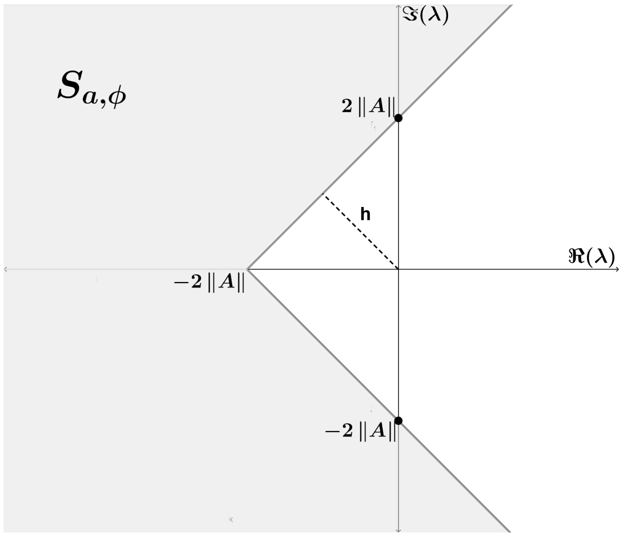

Figura 1.3: Setor $S_{a,\phi}$.

iv) Neste ponto, devemos adequar esta última desigualdade nos moldes daquela presente na Definição 1.1.1. Como para todo $\lambda \in S_{a,\phi}$, temos $| \lambda | \geq \sqrt{2} \| A \|$, segue que:

$$
\begin{aligned}
\frac{| \lambda - (-2 \| A \|) |}{| \lambda |} &\leq \left| 1 + \frac{2 \| A \|}{\lambda} \right| \\
&\leq 1 + \frac{2 \| A \|}{| \lambda |} \\
&\leq 1 + \frac{2}{\sqrt{2}} \\
&= 1 + \sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\| (\lambda I - A)^{-1} \| \leq \frac{(2 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})}{| \lambda - (-2 \| A \|) |}, \ \forall \lambda \in S_{a,\phi}.$$

E, terminamos a demonstração de que o operador A é setorial.

■

Exemplo 1.1.3 *Seja A um operador densamente definido em um espaço de Hilbert $(H, <,>)$, limitado inferiormente e autoadjunto. Então, A é setorial.*

Com efeito, sendo A um operador densamente definido e autoadjunto, A é fechado e seu espectro $\sigma(A)$ é um subconjunto do eixo real. Além disso, como A é limitado inferiormente, isto é, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $< Ax, x > \geq a \| x \|^2, \forall x \in D(A)$, $\sigma(A)$ deve estar contido no intervalo $[a, \infty)$.

Assim, o setor $S_{a,\frac{\pi}{4}} = \{ \lambda \in \mathbb{C} \,|\, \frac{\pi}{4} \leq | arg(\lambda - a) | \leq \pi, \ \lambda \neq a \}$ está contido no resolvente de A, vide

Figura 1.4. Resta então obtermos uma desigualdade como na Definição 1.1.1.

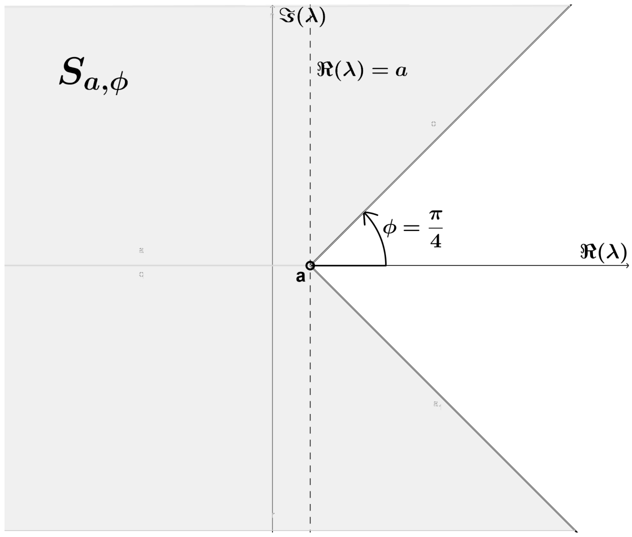

Figura 1.4: Possível setor para A.

Sejam $\lambda \in S_{a,\frac{\pi}{4}}$ e $\tilde{\lambda} = \lambda - a$. Notemos que $\Re(\lambda) < a$ implica $\Re(\tilde{\lambda}) < 0$ enquanto que $\Re(\lambda) \geq a$, $\mid \Im(\tilde{\lambda}) \mid \geq \mid \Re(\tilde{\lambda}) \mid$. Estudemos a seguir cada uma dessas possibilidades:

Caso 1 : $\lambda = \tilde{\lambda} + a$ com $\Re(\tilde{\lambda}) < 0$.

$$\begin{aligned} \| (\lambda I - A)x \|^2 &= \| (\tilde{\lambda} I - (A - a))x \|^2 \\ &= \mid \tilde{\lambda} \mid^2 \| x \|^2 + \| (A-a)x \|^2 - 2\Re(< (A-a)x, \tilde{\lambda} x >) \\ &= \mid \tilde{\lambda} \mid^2 \| x \|^2 + \| (A-a)x \|^2 - 2\Re(\tilde{\lambda}) < (A-a)x, x > \\ &\geq \mid \tilde{\lambda} \mid^2 \| x \|^2, \end{aligned}$$

donde $\| (\lambda I - A) \| \geq \mid \tilde{\lambda} \mid$ e, consequentemente, $\| (\lambda I - A)^{-1} \| \leq \frac{1}{\mid \lambda - a \mid}$.

Caso 2 : $\lambda = \tilde{\lambda} + a$ com $\mid \Im(\tilde{\lambda}) \mid \geq \mid \Re(\tilde{\lambda}) \mid$.

$$\begin{aligned} \| (\lambda I - A)x \|^2 &= \| (\tilde{\lambda} I - (A - a))x \|^2 \\ &= \mid \Im(\tilde{\lambda}) \mid^2 \| x \|^2 + \| (\Re(\tilde{\lambda}) - (A-a))x \|^2 \\ &\geq \mid \Im(\tilde{\lambda}) \mid^2 \| x \|^2 \\ &\geq \frac{\mid \tilde{\lambda} \mid^2}{2} \| x \|^2, \end{aligned}$$

onde usamos que $\mid \Im(\tilde{\lambda}) \mid \geq \mid \Re(\tilde{\lambda}) \mid$ implica $\mid \tilde{\lambda} \mid^2 = \Re(\tilde{\lambda})^2 + \Im(\tilde{\lambda})^2 \leq 2\Im(\tilde{\lambda})^2$. Segue que $\| (\lambda I - A) \| \geq \frac{|\tilde{\lambda}|}{\sqrt{2}}$, ou ainda, $\| (\lambda I - A)^{-1} \| \leq \frac{\sqrt{2}}{|\lambda - a|}$.

Finalmente, reunindo essas considerações, obtemos $\| (\lambda I - A)^{-1} \| \leq \frac{\sqrt{2}}{|\lambda - a|}; \forall \lambda \in S_{a,\frac{\pi}{4}}$, o que conclui a prova de que o operador A é setorial.

■

Exemplo 1.1.4 *Suponha que A é um operador setorial em um espaço de Banach X e $\| A(\lambda I - A)^{-1} \| \leq C$ para $| arg(\lambda) | \geq \phi_0$, $| \lambda | \geq R_0$ com C, R_0 constantes positivas e $\phi_0 < \frac{\pi}{2}$. Se B é um operador linear fechado tal que $D(B) \supset D(A)$ e, $\| Bx \| \leq \varepsilon \| Ax \| + K \| x \|$; $\forall x \in D(A)$, onde K, ε são constantes positivas com $\varepsilon C < 1$, então, $A + B$ é setorial.*

Como $\overline{D(A)} = X$ e $D(B) \supset D(A)$, temos que $\overline{D(A+B)} = \overline{D(A)} = X$ e, $A+B$ é densamente definido. Além disso, $A + B$ é fechado.

De $\| A(\lambda I - A)^{-1} \| \leq C$ em $S = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid | arg(\lambda) | \geq \phi_0, | \lambda | \geq R_0\}$, seguem os cálculos:

$$\begin{aligned} C &\geq \| (-(\lambda I - A) + \lambda I)(\lambda I - A)^{-1} \| \\ &\geq | \| \lambda(\lambda I - A)^{-1} \| - \| I \| | \\ &\geq | \lambda | \| (\lambda I - A)^{-1} \| - 1, \end{aligned}$$

ou seja, $\| (\lambda I - A)^{-1} \| \leq \frac{C+1}{|\lambda|}$ para qualquer λ nessa região.

Ainda, aplicando esta última desigualdade com $\lambda \in S$, $x \in X$:

$$\begin{aligned} \| B(\lambda I - A)^{-1}x \| &\leq \varepsilon \| A(\lambda I - A)^{-1}x \| + K \| (\lambda I - A)^{-1}x \| \\ &\leq \varepsilon C \| x \| + K\frac{C+1}{|\lambda|} \| x \| . \end{aligned}$$

Portanto, $\| B(\lambda I - A)^{-1} \| \leq \varepsilon C + K\frac{C+1}{|\lambda|}$, $\lambda \in S$.

A partir dessas considerações, podemos estimar $\| (\lambda I - (A + B))^{-1} \|$:

$$\begin{aligned} \| (\lambda I - (A + B))^{-1} \| &= \| ((\lambda I - A)(I - B(\lambda I - A)^{-1}))^{-1} \| \\ &\leq \| (\lambda I - A)^{-1} \| \| (I - B(\lambda I - A)^{-1})^{-1} \| \\ &\leq \frac{C+1}{|\lambda|} \| (I - B(\lambda I - A)^{-1})^{-1} \| \\ &\leq \frac{C+1}{|\lambda|}\left(1 - \varepsilon C - K\frac{C+1}{|\lambda|}\right)^{-1} \\ &\leq \frac{Constante}{|\lambda|}, \end{aligned}$$

onde usamos que se $T = I - B(\lambda I - A)^{-1}$, então para $| \lambda |$ suficientemente grande de forma que $\varepsilon C + K\frac{C+1}{|\lambda|} < 1$, resulta $\| T - I \| < 1$ e, consequentemente, podemos escrever $T^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I - T)^n$ donde, $\| T^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \|I - T\|}$. Note que nessa passagem foi essencial que $\varepsilon C < 1$.

Obtivemos assim $\| (\lambda I - (A + B))^{-1} \| \leq \frac{Constante}{|\lambda|}$, para $\lambda \in \mathbb{C}$ com $| arg(\lambda) | \geq \phi_0$ e $| \lambda |$ grande o suficiente para que $\varepsilon C + K\frac{C+1}{|\lambda|} < 1$. Mas, ainda não temos exatamente um setor como na Definição 1.1.1.

Agora, $\varepsilon C + K\frac{C+1}{|\lambda|} < 1 \Leftrightarrow |\, \lambda \,| > \frac{K(C+1)}{1-\varepsilon C}$. Daí, supondo que $R_0 < \frac{K(C+1)}{1-\varepsilon C}$, um possível setor poderia ser com vértice $a = -\frac{K(C+1)}{1-\varepsilon C} - \delta$, $\delta > 0$ e ângulo $\phi \geq \phi_0$ tal que os semi-eixos não interceptem a circunferência $|\, \lambda \,| = \frac{K(C+1)}{1-\varepsilon C}$, conforme Figura 1.5. E, vale que:

$$\| \, (\lambda I - (A+B))^{-1} \, \| \leq \frac{Constante}{|\lambda|} \leq \frac{Constante}{|\lambda - a|}, \; \forall \lambda \in S_{a,\phi}.$$

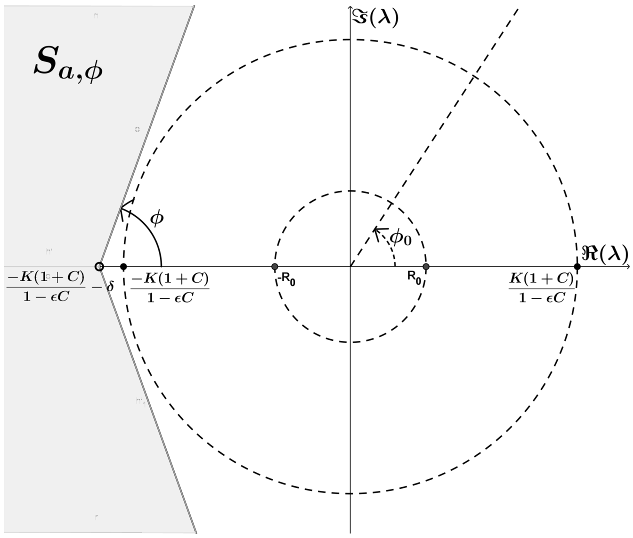

Figura 1.5: Possível setor para A.

Vale observar que uma outra possibilidade seria transladarmos o vértice a do setor para a esquerda, obtendo a' com $a' < a$, o que permitiria tomar um ângulo ϕ' tal que $\phi' < \phi$ ainda de forma a garantir a não interseção dos semi-eixos com a circunferência $|\, \lambda \,| = \frac{K(C+1)}{1-\varepsilon C}$.

Finalizamos dessa maneira a prova de que $A + B$ é setorial nas condições descritas acima.

■

Exemplo 1.1.5 *Sejam A um operador setorial em X e B um operador setorial em Y, com X e Y espaços de Banach. Então, $A \times B$ é setorial em $X \times Y$, onde $(A \times B)(x, y) = (Ax, By)$, para $x \in D(A)$ e $y \in D(B)$.*

Consideremos o espaço produto $X \times Y$ equipado com a norma $\| \, (x, y) \, \| = máx \{ \| \, x \, \|_X, \| \, y \, \|_Y \}$, sendo $\| \cdot \|_X$ e $\| \cdot \|_Y$ as normas em X e Y respectivamente.

Denotemos o setor correspondente ao operador A por

$$S_{a,\phi} = \{ \lambda \in \mathbb{C} \, | \, \phi \leq |\, arg(\lambda - a) \,| \leq \pi, \; \lambda \neq a \} \subset \rho(A), \; a \in \mathbb{R}, \; \phi \in (0, \tfrac{\pi}{2})$$

e,

$$\| \, (\lambda I_X - A)^{-1} \, \| \leq \frac{M_A}{|\lambda - a|}, \forall \lambda \in S_{a,\phi}, \; M_A \geq 1,$$

onde I_X é a identidade em X. E, para o operador B,

$$S_{b,\psi} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \psi \leq \mid arg(\lambda - b) \mid \leq \pi,\ \lambda \neq b\} \subset \rho(B),\ b \in \mathbb{R},\ \psi \in (0, \tfrac{\pi}{2})$$

e,

$$\| (\lambda I_Y - B)^{-1} \| \leq \frac{M_B}{|\lambda - b|}, \forall \lambda \in S_{b,\psi},\ M_B \geq 1,$$

sendo I_Y a identidade em Y.

É imediato que o operador $A \times B$ é densamente definido e fechado.

Observamos que para podermos calcular, por exemplo, $\| (\lambda(I_X \times I_Y) - (A \times B))^{-1} \| = \| ((\lambda I_X - A) \times (\lambda I_Y - B))^{-1} \|$, λ deve ser tal que ambos os operadores $(\lambda I_X - A)^{-1}$ e $(\lambda I_Y - B)^{-1}$ existem e são limitados. Dessa forma, precisamos determinar um setor comum para A e B.

Analisando as relações possíveis entre os vértices dos setores, a e b, e entre seus ângulos, ϕ e ψ, como ilustram as Figuras 1.6 e 1.7, vemos que um setor comum é $S_{c,\theta}$, onde $c = min\{a, b\}$ e, $\theta = máx\{\phi, \psi\}$.

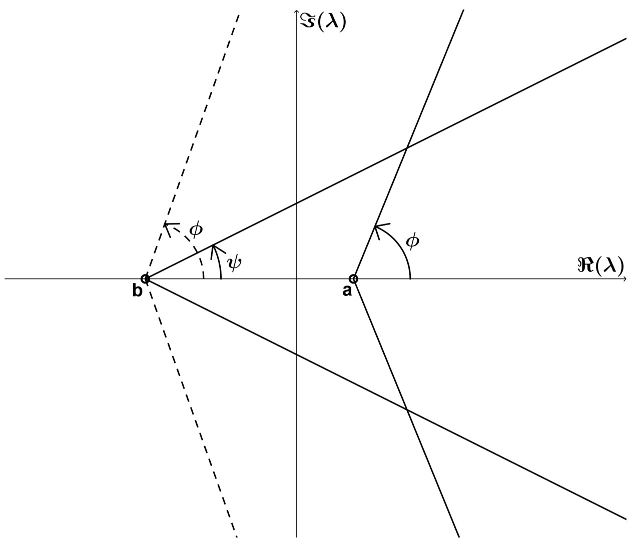

Figura 1.6: Possível situação em que $b < a$ e $\psi < \phi$.

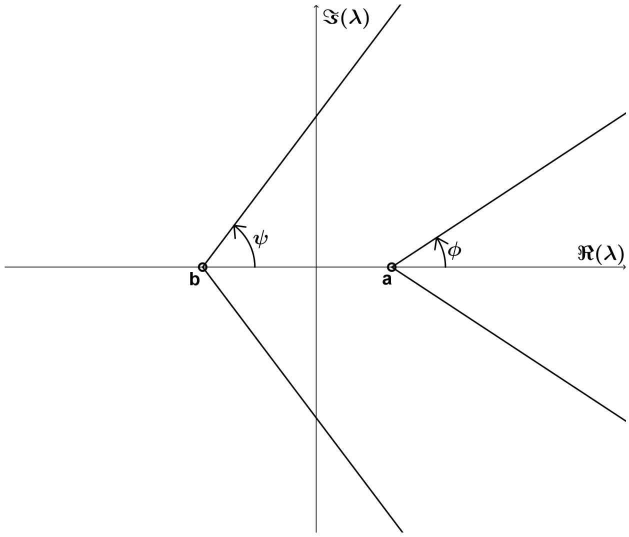

Figura 1.7: Possível situação em que $b < a$ e $\phi < \psi$.

Por fim, resta obtermos uma desigualdade como na Definição 1.1.1. Para $\lambda \in S_{c,\theta}$ e $\| (x, y) \| = 1$, temos:

$$\begin{aligned} \| (\lambda(I_X \times I_Y) - (A \times B))^{-1}(x, y) \| &= \| ((\lambda I_X - A)^{-1} \times (\lambda I_Y - B)^{-1})(x, y) \| \\ &= máx \left\{ \| (\lambda I_X - A)^{-1} x \|_X, \| (\lambda I_Y - B)^{-1} y \|_Y \right\} \\ &\leq máx \left\{ \frac{M_A \| x \|_X}{| \lambda - a |}, \frac{M_B \| y \|_Y}{| \lambda - b |} \right\} \\ &\leq máx \left\{ \frac{M_A}{| \lambda - a |}, \frac{M_B}{| \lambda - b |} \right\}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

E então, supondo $a < b$, segue que $| \lambda - b | \geq K | \lambda - a |$, $\forall \lambda \in S_{c,\theta}$, sendo K uma constante. Aplicando isso na desigualdade (1.1), encontramos:

$$\begin{aligned} \| (\lambda(I_X \times I_Y) - (A \times B))^{-1}(x, y) \| &\leq máx \left\{ \frac{M_A}{| \lambda - a |}, \frac{M_B}{K | \lambda - a |} \right\} \\ &= máx \left\{ M_A, \frac{M_B}{K} \right\} \frac{1}{| \lambda - a |} \\ &= \frac{Constante}{| \lambda - c |}. \end{aligned}$$

O caso $b < a$ é análogo.

Logo, provamos que o produto de dois operadores setoriais é setorial.

■

Definição 1.1.6 *Um semigrupo analítico em um espaço de Banach X é uma família de operadores lineares contínuos em X, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, satisfazendo:*

(i) $T(0) = I$, $T(t) \circ T(s) = T(t+s)$, *para* $t \geq 0$ *e* $s \geq 0$,

(ii) $T(t)x \to x$ *quando* $t \to 0^+$, *para cada* $x \in X$,

(iii) A aplicação $t \to T(t)x$ *é real analítica em* $0 < t < \infty$, *para cada* $x \in X$.

Definição 1.1.7 *O gerador infinitesimal L deste semigrupo é definido por*

$$Lx = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}(T(t)x - x),$$

sendo $D(L)$ *o conjunto dos* $x \in X$ *para os quais tal limite existe em* X.

Observação 1.1.8 *É usual denotar* $T(t) = e^{Lt}$.

Teorema 1.1.9 *Se A é um operador setorial, então -A é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico* $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$, *onde*

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda I + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda,$$

sendo Γ *um contorno em* $\rho(-A)$ *com* $arg(\lambda) \to \pm\theta$ *quando* $\mid \lambda \mid \to \infty$ *para algum* $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

Além disso, e^{-At} *pode ser estendido analiticamente a um setor* $\{ t \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \mid \arg(t) \mid < \epsilon \}$ *contendo o eixo real positivo e se* $\Re(\sigma(A)) > a$, *isto é,* $\Re(\lambda) > a$ *sempre que* $\lambda \in \sigma(A)$, *então para* $t > 0$:

$$\| e^{-At} \| \leq C_1 e^{-at} \text{ e } \| Ae^{-At} \| \leq \frac{C_2}{t} e^{-at},$$

sendo $C_1 > 0$ *e* $C_2 > 0$ *dadas por*

$$C_1 = \frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma} \mid e^{\mu} \mid \frac{\mid d\mu \mid}{\mid \mu \mid} \text{ e},$$

$$C_2 = \frac{1+M}{2\pi} \int_{\Gamma} \mid e^{\mu} \mid\mid d\mu \mid,$$

onde M é a constante que aparece na Definição 1.1.1.

Finalmente, $\frac{d}{dt} e^{-At} = -Ae^{-At}$ *para* $t > 0$.

A demonstração desse Teorema depende do seguinte resultado auxiliar:

Lema 1.1.10 *Sejam* Γ *como no Teorema 1.1.9,* Γ' *um pequeno deslocamento de* Γ *para a direita e a reta* $R : x_0 + is$, $s \in [-y, y]$, *onde* $x_0 < 0$ *e* $\mid y \mid = -\tan(\theta) \mid x_0 \mid$, *de modo a fechar o contorno* Γ *(vide Figura 1.8). Se* $\mu \in \Gamma'$, *então,*

$$\int_R \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \mu} d\lambda \ \to \ 0$$

à medida que $x_0 \to -\infty$, *ou mais informalmente, a reta R é transladada para a esquerda.*

Analogamente, para R fechando Γ', $R : x_0 + is$, $s \in [-y, y]$, *onde* $x_0 < 0$ *e* $|y| = -\tan(\theta - \delta)|x_0|$, *se* $\lambda \in \Gamma$, *então,*

$$\int_R \frac{e^{\mu s}}{\mu - \lambda} d\mu \to 0$$

quando $x_0 \to -\infty$.

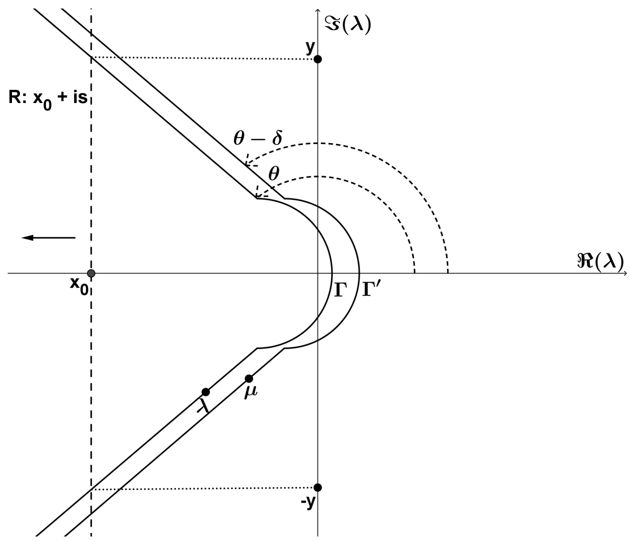

Figura 1.8: Reta R e representação simplificada dos contornos Γ e Γ'.

Demonstração:

Basta demonstrarmos um dos casos, o outro segue de forma análoga. Vejamos,

$$\begin{aligned}
\left|\int_R \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \mu} d\lambda\right| &\leq \int_R \frac{e^{\Re(\lambda t)}}{|\lambda - \mu|} |d\lambda| \\
&\leq \int_R \frac{e^{|\lambda t| \cos(arg\lambda)}}{|\lambda - \mu|} |d\lambda| \\
&\leq \int_R \frac{e^{|\lambda t| \cos\theta}}{|\lambda - \mu|} |d\lambda| \\
&\leq \int_R \frac{e^{|\lambda t| \cos\theta}}{|\lambda| - |\mu|} |d\lambda|
\end{aligned}$$

que converge à zero quando R se desloca para a esquerda afinal, $|\lambda| \to \infty$ e $\cos\theta < 0$ (usamos que $\cos(arg\lambda)$ varia entre $\cos\theta$ e $\cos\pi$).

■

Demonstração do Teorema 1.1.9:

Como A é um operador setorial, existem $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$, $C \geq 1$ e $a \in \mathbb{R}$ tais que $S_{a,\phi} = \{\lambda \in \mathbb{C} | \phi \leq | arg(\lambda - a)| \leq \pi, \lambda \neq a\} \subset \rho(A)$ e vale que $\| (\lambda I - A)^{-1} \| \leq \frac{C}{|\lambda - a|}$, $\forall \lambda \in S_{a,\phi}$ (vide Figura 1.9):

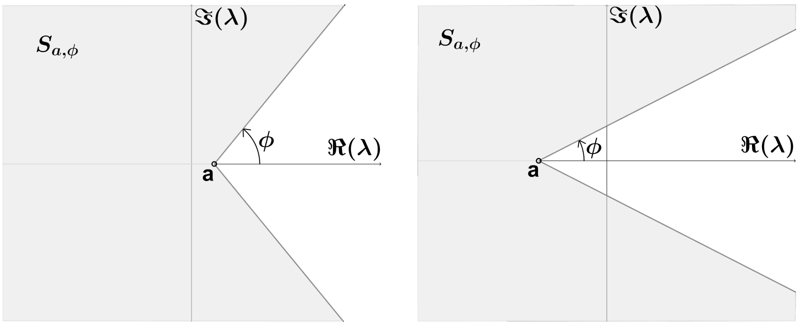

Figura 1.9: Possíveis setores para A.

Sendo as respectivas situações para $-A$ conforme Figura 1.10:

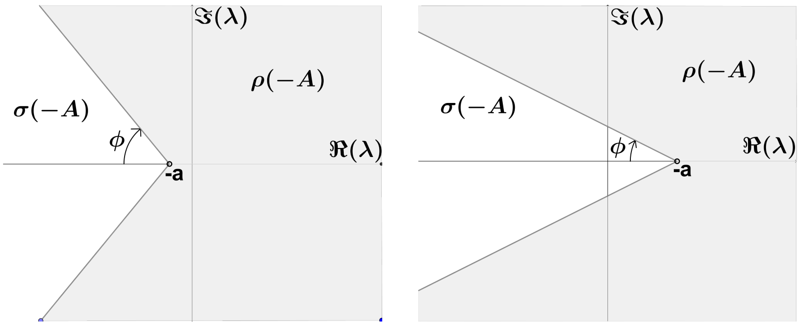

Figura 1.10: Possíveis situações para -A.

Observemos que de acordo com a Definição 1.1.1, o vértice a não necessariamente pertence ao setor $S_{a,\phi}$. Mas, sempre podemos supor isso, transladando o setor um pouco para a esquerda e obtendo um novo setor $S_{a',\phi}$ com $a' < a$. Adicionalmente, podemos admitir sem perda de generalidade que $a = 0$ e $\| (-\lambda I - A)^{-1} \| = \| (\lambda I + A)^{-1} \| \leq \frac{M}{|\lambda|+\delta}$ para $| \pi - arg(\lambda) | \geq \phi$ e constantes $M > 0$ e $\delta > 0$. Caso contrário, se $a \neq 0$, basta considerarmos o operador $A - aI$ e, para $\mu = \lambda - a$, $\lambda \in S_{a,\phi}$, temos,

$$\| (\mu I - (A - aI))^{-1} \| = \| ((\lambda - a)I - (A - aI))^{-1} \| = \| (\lambda I - A)^{-1} \| \leq \frac{M}{|\lambda - a|+\delta} = \frac{M}{|\mu|+\delta},$$

onde M e δ são tomadas convenientemente.

Mais detalhadamente, se $| \mu | > C$, basta tomar $\delta < C$ e $M = 2C$, pois

$$\begin{aligned} \frac{C}{|\mu|} &\leq \frac{M}{|\mu| + \delta} \\ &\Longleftrightarrow M \geq C\frac{|\mu| + \delta}{|\mu|} \\ &\Longleftrightarrow M \geq C\left(1 + \frac{\delta}{|\mu|}\right). \end{aligned}$$

E no caso $|\ \mu\ | \leq C$, a aplicação $\lambda \in \rho(A) \longmapsto \|\ (\lambda I - A)^{-1}\ \|$ é contínua e, portanto, quando restrita ao compacto $B_C(0) \cap S_{a,\phi}$ - $B_C(0)$ a bola de raio C e centro na origem -, possui um máximo N, ou seja, $\|\ (\lambda I - A)^{-1}\ \| \leq N$, $\forall \lambda \in B_C(0) \cap S_{a,\phi}$. Daí, escolhendo M tal que $\frac{M}{|\mu|+\delta} \geq N$, ou ainda, $M \geq N(C+\delta)$, temos o desejado.

Fazendo $M = \max\{2C, N(C+\delta)\}$, vale que $\|\ (\lambda I - A)^{-1}\ \| \leq \frac{M}{|\lambda - a|+\delta} = \frac{M}{|\mu|+\delta}$.

Neste ponto, escolha $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi - \phi)$ e, estabeleça:

$$e^{-At} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda I + A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda,$$

sendo Γ um contorno em $\rho(-A)$ com $arg(\lambda) \to \pm\theta$ quando $|\ \lambda\ | \to \infty$, como ilustra a Figura 1.11.

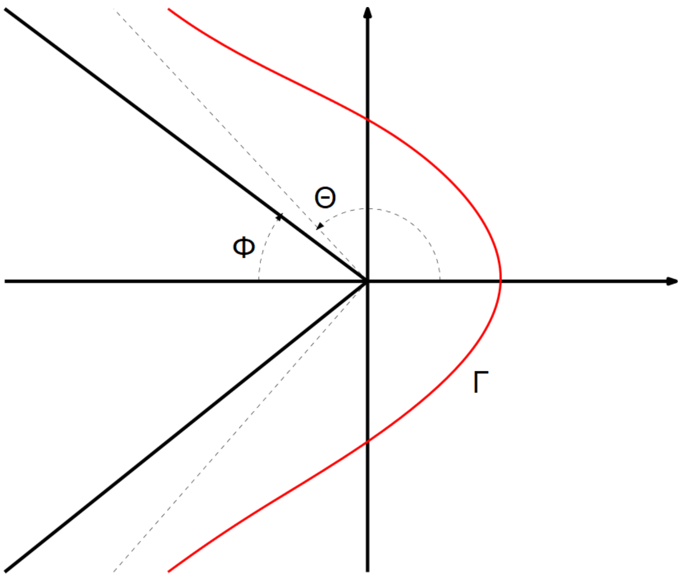

Figura 1.11: Contorno Γ.

A priori, precisamos verificar que tal definição faz sentido, isto é, que essa integral realmente converge. Vejamos:

Parametrizando a curva Γ pelo comprimento de arco, $\gamma :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda I + A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda\right\| &= \left\|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}(\gamma(s) + A)^{-1}e^{\gamma(s)t}\gamma'(s)ds\right\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\|\ (\gamma(s)+A)^{-1}\ \|\ e^{\Re(\gamma(s))t}\ |\ \gamma'(s)\ ||\ ds\ | \\
&\leq D\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\Re(\gamma(s))t}ds \\
&= D\lim_{R\to\infty}\left(\int_{-R}^{0}e^{\Re(\gamma(s))t}ds + \int_{0}^{R}e^{\Re(\gamma(s))t}ds\right) \\
&= 2D\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R}e^{\Re(\gamma(s))t}ds, \qquad (1.2)
\end{aligned}$$

onde D representa uma constante. Notemos que podemos escrever $\gamma(s) = \gamma(s_0) + \int_{s_0}^{s} \gamma'(t)\,dt$, sendo s_0 fixado. Então, $\Re(\gamma(s)) = \Re(\gamma(s_0)) + \int_{s_0}^{s} \Re(\gamma'(t))\,dt$. Agora, considerando um ângulo θ' tal que $\frac{\pi}{2} < \theta' < \theta$, temos que $\Re(\gamma'(s)) \leq -\cos(\pi - \theta')$ e, consequentemente, $\Re(\gamma(s)) \leq \Re(\gamma(s_0)) - \cos(\pi-\theta')(s - s_0)$. Aplicando isso na desigualdade (1.2), vemos claramente a convergência da integral no infinito.

Além disso, a integral independe do caminho Γ, se deslocarmos Γ um pouco para a direita, por exemplo, como na Figura 1.12, ela não se altera.

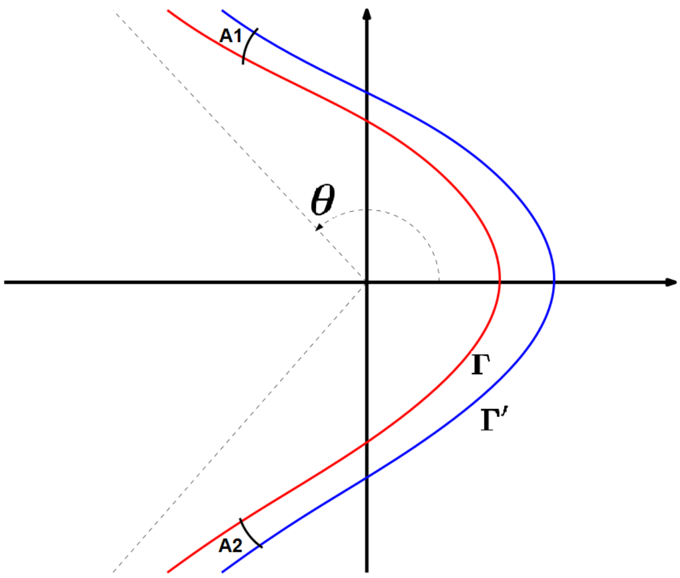

Figura 1.12: Deslocamento de Γ para a direita.

De fato, sabe-se que $e^{\lambda t}$ é analítica para todo λ e que $(\lambda I + A)^{-1}$ é também uma função analítica em $\rho(-A)$, donde se tomarmos a curva fechada indicada na Figura 1.12, obtida a partir de Γ, Γ' e os arcos A_1, A_2, a integral nessa curva é nula. E, fazendo $\mid \lambda \mid \to \infty$, vemos que a integral nesses arcos vai a zero.

Mostraremos a seguir que $e^{-At}e^{-As} = e^{-A(t+s)}$, $\forall t, s > 0$. Consideremos para tanto um pequeno deslocamento Γ' de Γ para a direita, conforme Figura 1.12.
Então, para $t, s > 0$,

$$\begin{aligned}
e^{-At}e^{-As} &= \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda I + A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda\right)\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}(\mu I + A)^{-1}e^{\mu s}d\mu\right) \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma}\int_{\Gamma'} e^{\lambda t + \mu s}(\mu - \lambda)^{-1}((\lambda I + A)^{-1} - (\mu I + A)^{-1})d\mu d\lambda \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma}(\lambda I + A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda \int_{\Gamma'} \frac{e^{\mu s}}{\mu - \lambda}d\mu \qquad (1.3) \\
&+ \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \mu}d\lambda \int_{\Gamma'}(\mu I + A)^{-1}e^{\mu s}d\mu, \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

onde usamos uma das identidades do resolvente. Analisando cada uma das parcelas (1.3) e (1.4) separadamente,

$$\int_\Gamma (\lambda I + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \int_{\Gamma'} \frac{e^{\mu s}}{\mu - \lambda} d\mu = 2\pi i \int_\Gamma (\lambda I + A)^{-1} e^{\lambda(t+s)} d\lambda.$$

Isso porque, se fecharmos Γ' a partir da reta $R : x_0 + is$, $s \in [-y, y]$, $x_0 < 0$, $y \in \mathbb{R}$ conveniente, descrita no Lema 1.1.10, vide Figura 1.13, pela Fórmula Integral de Cauchy,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma' \cup R} \frac{e^{\mu s}}{\mu - \lambda} d\mu = e^{\lambda s}$$

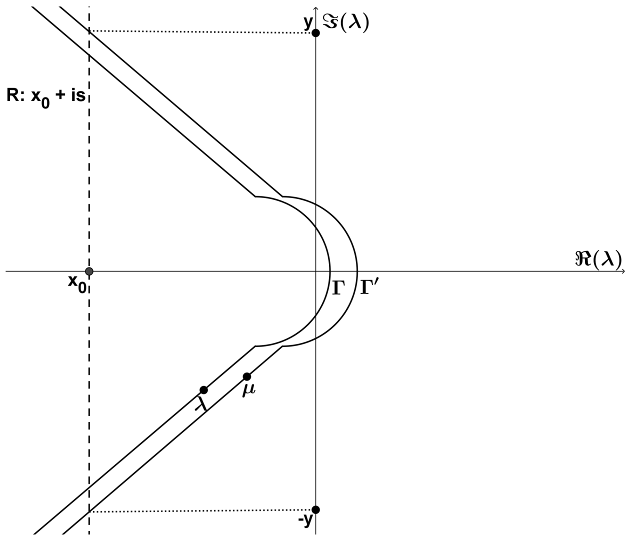

Figura 1.13: Reta R e contornos Γ, Γ'.

e, provamos no Lema 1.1.10 que a integral em R tende a zero à medida que essa reta é deslocada para a esquerda. E,

$$\int_\Gamma \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \mu} d\lambda \int_{\Gamma'} (\mu I + A)^{-1} e^{\mu s} d\mu = 0,$$

uma vez que se fecharmos agora Γ com o auxílio de R, aplicando a Fórmula Integral de Cauchy,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma \cup R} \frac{e^{\lambda t}}{\lambda - \mu} d\lambda = 0$$

afinal, "μ está fora de $\Gamma \cup R$"e, novamente, a integral em R converge a zero quando R é transladada para a esquerda.

Logo, $e^{-At} e^{-As} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda I + A)^{-1} e^{\lambda(t+s)} d\lambda = e^{-A(t+s)}$.

Para mostrar que a aplicação $t \longmapsto e^{-At}x$ é real analítica em $0 < t < \infty$ para cada $x \in X$, verificaremos que aquela integral converge uniformemente em qualquer compacto de $\{t \in \mathbb{C} \mid |arg(t)| < \epsilon\}$, $0 < \epsilon < \theta - \frac{\pi}{2}$ e então, por um resultado conhecido, o semigrupo é analítico neste conjunto que inclui o eixo real.

Consideremos a seguinte caracterização equivalente do contorno em $\rho(-A)$:

$$\gamma_{\theta,r} = \begin{cases} \gamma_{\theta,r,1}(s) = se^{i(\frac{\pi}{2}+\eta)},\ s \in [r,+\infty), \\ \gamma_{\theta,r,2}(s) = re^{is},\ |\, s \,| \leq \theta, \\ \gamma_{\theta,r,3}(s) = se^{-i(\frac{\pi}{2}+\eta)},\ s \in]-\infty,-r]. \end{cases}$$

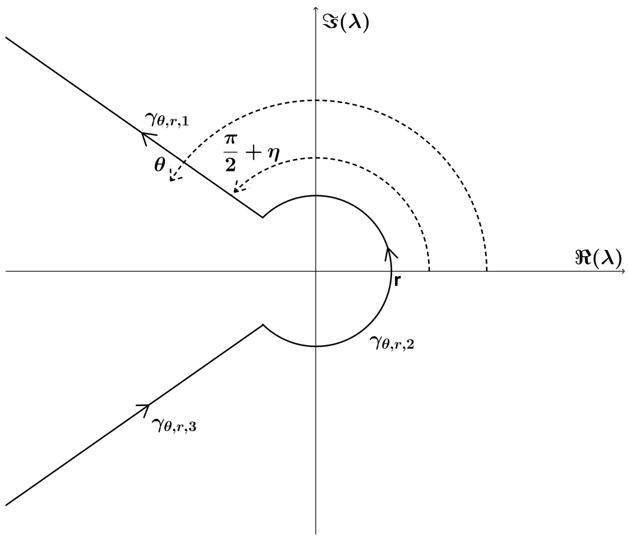

Figura 1.14: Contorno $\gamma_{\theta,r}$.

Sejam $t \in \mathbb{C}$ com $|\, arg(t) \,| < \epsilon < \frac{\pi}{2}$ e, $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\, arg(\lambda) \,| = \frac{\pi}{2} + \eta$, $\eta \in \left(\frac{|\,arg(t)\,|+\epsilon}{2}, \epsilon\right)$. Então,

$$|\, arg(t) + arg(\lambda) \,| > \frac{\pi}{2} + \frac{|\, arg(t) \,| + \epsilon}{2} - |\, arg(t) \,| = \frac{\pi}{2} + \frac{\epsilon - |\, arg(t) \,|}{2} > \frac{\pi}{2} + (\epsilon - \eta),$$

visto que $\frac{-\epsilon - |\,arg(t)\,|}{2} > -\eta$. E,

$$|\, arg(t) + arg(\lambda) \,| \leq \frac{\pi}{2} + \eta + \epsilon \ \leq\ \pi - (\epsilon - \eta) + \epsilon \ \leq\ \frac{3\pi}{2} - (\epsilon - \eta).$$

Consequentemente,

$$|\, e^{\lambda t} \,| = e^{\Re(\lambda t)} = e^{|\,\lambda t\,| \cos(arg(t)+arg(\lambda))} \ \leq\ e^{|\,\lambda t\,| \cos(\frac{\pi}{2}+(\epsilon-\eta))} = e^{|\,\lambda t\,| - \sin(\epsilon-\eta)}.$$

Daí, para justificar a convergência da integral, por exemplo, basta trabalharmos apenas com $\gamma_{\eta,r,1}$ e $\gamma_{\eta,r,3}$, permitindo estimar:

$$\|\, (\lambda I + A)^{-1} e^{\lambda t} \,\| \leq e^{-\sin(\epsilon-\eta)|\,\lambda t\,|} \frac{M}{|\, \lambda \,| + \delta}$$

que converge a zero exponencialmente quando $|\, \lambda \,|$ tende a ∞.

Agora, tomando $r \in (0, \frac{1}{|t|}]$, t tal que $|\, arg(t) \,| < \epsilon' < \epsilon$, $\eta \in (\frac{\epsilon'+\epsilon}{2}, \epsilon)$, temos para $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\, arg(\lambda) \,| = \frac{\pi}{2} + \eta$ e $|\, \lambda \,| \geq r$,

$$\|\, (\lambda I + A)^{-1} e^{\lambda t} \,\| \leq e^{-|\,\lambda t\,| \sin(\epsilon-\eta)} \frac{M}{|\, \lambda \,| + \delta}.$$

E, para $|\lambda| = r$ e, $|arg(\lambda)| \leq \frac{\pi}{2} + \eta$,

$$\| (\lambda I + A)^{-1} e^{\lambda t} \| \leq e^{|\lambda t|} \frac{M}{|\lambda| + \delta} \leq e^{r \cdot \frac{1}{r}} \frac{M}{r + \delta} = \frac{eM}{r+\delta}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\| e^{-At} \| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{\eta,r}} (\lambda I + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \right\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \left(2 \int_{\gamma_{\eta,r,1}} \| (\lambda I + A)^{-1} e^{\lambda t} \| \, d\lambda + \int_{\gamma_{\eta,r,2}} \| (\lambda I + A)^{-1} e^{\lambda t} \| \, d\lambda \right) \\
&= \frac{M}{\pi} \int_r^{\infty} \frac{1}{s+\delta} e^{-s|t| \sin(\epsilon - \eta)} ds + \frac{reM}{r+\delta} \\
&\leq \frac{M}{\pi} \int_{|t|r}^{\infty} \frac{1}{u} e^{-u \sin(\epsilon - \eta)} du + eM \\
&= \frac{M}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{1}{u} e^{-u \sin(\epsilon - \eta)} du + eM, \ \ \forall t \in \{ t \in \mathbb{C} \mid |arg(t)| < \epsilon' \}.
\end{aligned}$$

Suponha $K \subseteq \{ t \in \mathbb{C} \mid |arg(t)| < \epsilon \}$ um conjunto compacto, $\epsilon' \in (0, \epsilon)$ tal que $K \subset \{ t \in \mathbb{C} \mid |arg(t)| < \epsilon' \}$ e $0 < r \leq \inf_{t \in K} \frac{1}{|t|}$. A estimativa anterior mostra que a integral definindo e^{-At} converge uniformemente em K e, como $t \to (\lambda I + A)^{-1} e^{\lambda t}$ é analítica, segue que $t \to e^{-At} x$ é analítica nesse conjunto, em particular, é real analítica em $0 < t < \infty$.

Quanto as desigualdades para as normas dos operadores e^{-At} e Ae^{-At},

$$\begin{aligned}
\| e^{-At} \| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda I + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{\mu}{t} I + A \right)^{-1} e^{\mu} \frac{d\mu}{t} \right\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} |e^{\mu}| \left\| \left(\frac{\mu}{t} I + A \right)^{-1} \right\| \left| \frac{d\mu}{t} \right| \\
&\leq \frac{M}{2\pi} \int_{\Gamma} |e^{\mu}| \frac{|d\mu|}{|\mu|} \\
&= C_1.
\end{aligned}$$

Observemos que apesar da mudança de variável nos cálculos acima, mantivemos a notação para a curva de integração, uma vez que o integrando é analítico e a curva obtida com a mudança $\mu = \lambda t$

é admissível. E,

$$\begin{aligned}
\| Ae^{-At} \| &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma A(\lambda I + A)^{-1} e^{\lambda t} \right\| \\
&\leq \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma A\left(\frac{\mu}{t} I + A\right)^{-1} e^{\mu} \frac{d\mu}{t} \right\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma \left\| A\left(\frac{\mu}{t} I + A\right)^{-1} \right\| \mid e^{\mu} \mid \frac{\mid d\mu \mid}{\mid t \mid} \\
&\leq \frac{1+M}{2\pi} \int_\Gamma \mid e^{\mu} \mid \frac{\mid d\mu \mid}{\mid t \mid} \\
&= \frac{C_2}{\mid t \mid} \\
&= \frac{C_2}{t},
\end{aligned}$$

onde usamos que,

$$\begin{aligned}
\| A(\lambda I + A)^{-1} \| &= \| (\lambda I + A)(\lambda I + A)^{-1} - \lambda(\lambda I + A)^{-1} \| \\
&= \| I - \lambda(\lambda I + A)^{-1} \| \\
&\leq \| I \| + \mid \lambda \mid \| (\lambda I + A)^{-1} \| \\
&\leq 1 + \mid \lambda \mid \frac{M}{\mid \lambda \mid + \delta} \\
&< 1 + M. \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

É muito importante para o nosso trabalho notarmos que as constantes C_1 e C_2 dependem exclusivamente de M e do setor para A, os quais variam "continuamente"com o operador.

Caso $\Re(\sigma(A)) > a > 0$, ($\Re(\sigma(-A)) < -a$), por exemplo, conforme discutimos no início, consideramos a translação $A - a$ e, dessa forma, $\lambda = \mu - a$,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda I + A)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} (\mu I - (-A + a))^{-1} e^{-at} e^{\mu t} d\mu = e^{-at} e^{(-A+a)t}$$

e obtemos as desigualdades $\| e^{-At} \| \leq e^{-at} C_1$ e $\| Ae^{-At} \| \leq e^{-at} \frac{C_2}{t}$, sendo C_1 e C_2 as constantes especificadas anteriormente.

Esses cálculos nos mostram que ambos os operadores e^{-At} e Ae^{-At} são limitados para $t > 0$, estando definidos em todo espaço X.

No que segue, provaremos que $e^{-At} x \to x$ quando $t \to 0^+$ para cada $x \in X$. Como e^{-At} é um operador contínuo (uniformemente em t) e $D(A)$ é denso em X, é suficiente constatar que isto vale para cada $x \in D(A)$,

$$\begin{aligned}
e^{-At} x - x &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda I + A)^{-1} e^{\lambda t} x d\lambda - x \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma ((\lambda I + A)^{-1} - \lambda^{-1}) e^{\lambda t} x \, d\lambda \\
&= -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda^{-1} A(\lambda I + A)^{-1}) e^{\lambda t} x \, d\lambda,
\end{aligned}$$

onde aplicamos a Fórmula Integral de Cauchy para $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma\cup R}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda-0}d\lambda = e^{0t}$ conforme argumento anterior e, também, que $-\lambda^{-1}A(\lambda I+A)^{-1} = -\lambda^{-1}((\lambda I+A)(\lambda I+A)^{-1}-\lambda(\lambda I+A)^{-1}) = -\lambda^{-1}+(\lambda I+A)^{-1}$. Tomando então a norma, obtemos:

$$\begin{aligned}
\| e^{-At}x - x \| &\leq \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \| \lambda^{-1}(\lambda I + A)^{-1}Ax\, e^{\lambda t}d\lambda \| \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \left\| \frac{t}{\mu}\left(\frac{\mu}{t}I + A\right)^{-1} Ax\, e^{\mu}\frac{d\mu}{t} \right\| \\
&\leq \frac{M}{2\pi} \| Ax \| \int_\Gamma | e^{\mu} | \frac{| t |}{| \mu |^2} | d\mu | \\
&= Constante \| Ax \| \cdot t \to 0, \text{ quando } t \to 0^+.
\end{aligned}$$

Logo, $\{e^{-At}\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo fortemente contínuo que pode ser estendido a um semigrupo analítico em $\{ t \in \mathbb{C} \mid \ | arg(t) | < \epsilon \}$, $0 < \epsilon < \theta - \frac{\pi}{2}$.

Finalmente, com relação às últimas considerações, sejam $x \in D(A)$, $t > 0$. Devido à analiticidade e à convergência uniforme, temos:

$$\frac{d}{dt}e^{-At}x + Ae^{-At}x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}\,(\lambda(\lambda I + A)^{-1} + A(\lambda I + A)^{-1})\,d\lambda\, x = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{\lambda t}d\lambda\, x$$

e,

$$\int_\Gamma e^{\lambda t}d\lambda = 0.$$

Isso porque se fecharmos Γ com o auxílio da reta R mencionada, como $e^{\lambda t}$ não tem singularidades, pelo Teorema de Cauchy,

$$\int_{\Gamma\cup R} e^{\lambda t}d\lambda = 0$$

e, basta constatarmos que a integral em R tende a zero a medida que essa reta é deslocada para a esquerda. Com efeito,

$$\left|\int_R e^{\lambda t}d\lambda\right| \leq \int_R | e^{\lambda t} | \, | d\lambda | = \int_R e^{|\lambda t|\cos(arg\lambda)} \, | d\lambda | \leq \int_R e^{|\lambda t|\cos(\theta-\delta)} \, | d\lambda |,$$

onde δ é uma constante positiva pequena. Observamos que $\cos(\theta - \delta)$ é negativo de modo que conforme $| \lambda |$ aumenta (a reta R é transladada para a esquerda), o integrando converge a zero exponencialmente.

Portanto, $\frac{d}{dt}e^{-At}x = -Ae^{-At}x$, $\forall x \in D(A)$.

Por conseguinte, para $x \in D(A)$,

$$\frac{1}{t}(e^{-At}x - x) = -\frac{1}{t}\int_0^t e^{-As}Axds = -\frac{1}{t}\int_0^t (e^{-As} - I)\,Ax + Ax\,ds \to -Ax, \ quando\, t \to 0^+.$$

Isso mostra que $-A$ está contido no gerador G do semigrupo pela Definição 1.1.7. Resta então a inclusão contrária; $G \subseteq -A$.

Para tanto, defina para cada $\lambda \geq 0$ e $x \in X$,

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-At} x\, dt.$$

Vejamos que essa integral de fato existe, supondo $\Re(\sigma(A)) > \delta > 0$,

$$\left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-At} x\, dt \right\| \leq \int_0^\infty | e^{-\lambda t} | \| e^{-At} x \| | \, dt | \leq C_1 \| x \| \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-\delta t} dt$$

e,

$$C_1 \| x \| \int_0^\infty e^{(-\delta-\lambda)t} dt = C_1 \| x \| \frac{-1}{\delta + \lambda} e^{(-\delta-\lambda)t} |_0^\infty = C_1 \| x \| \frac{1}{\delta + \lambda}.$$

Para todo x, $e^{-At}x \in D(A)$ com $t > 0$, uma vez que Ae^{-At} é um operador limitado se $t > 0$ como vimos. Assim, se $R_\delta(\lambda)x = \int_\delta^\infty e^{-\lambda t} e^{-At} x\, dt$, $\delta > 0$,

$$A \int_\delta^\infty e^{-\lambda t} e^{-At} x\, dt = \int_\delta^\infty e^{-\lambda t} A e^{-At} x\, dt = -e^{-\lambda t} e^{-At} x |_\delta^\infty - \lambda \int_\delta^\infty e^{-\lambda t} e^{-At} x\, dt.$$

Ou seja,

$$A(R_\delta(\lambda)x) = e^{-\lambda \delta} e^{-A\delta} x - \lambda \int_\delta^\infty e^{-\lambda t} e^{-At} x\, dt$$

e, quando $\delta \to 0^+$, $R_\delta(\lambda)x$ converge a $R(\lambda)x$ enquanto $A(R_\delta(\lambda)x)$ tende a $x - \lambda R(\lambda)x$, o que significa, sendo A um operador fechado, que $R(\lambda)x \in D(A) \subset D(G)$, $\forall \lambda \geq 0$, $x \in X$ e $A(R(\lambda)x) = x - \lambda R(\lambda)x$.

E, se $x \in D(G)$, $e^{-At}x \in D(A) \subset D(G)$, $\forall t \geq 0$, valendo, por um lado, que

$$G(e^{-At}x) = -Ae^{-At}x = \frac{d}{dt} e^{-At} x. \tag{1.6}$$

E, por outro,

$$G(e^{-At}x) = \lim_{\tau \to 0} \frac{e^{-A\tau}(e^{-At}x) - e^{-At}x}{\tau} = \lim_{\tau \to 0} \frac{e^{-At}(e^{-A\tau}x - x)}{\tau} = e^{-At} \lim_{\tau \to 0} \frac{e^{-A\tau}x - x}{\tau} = e^{-At} Gx. \tag{1.7}$$

Aplicando isso, se $x \in D(G)$,

$$\begin{aligned} R(\lambda)(\lambda - G)x &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-At} \lambda x\, dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-At} G x\, dt \\ &= -e^{-\lambda t} e^{-At} x |_0^\infty - \int_0^\infty e^{-\lambda t} A e^{-At} x\, dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-At} G x\, dt \\ &= x, \end{aligned}$$

pois $Ae^{-At}x = -e^{-At}G(x)$, combinando as igualdades (1.6) e (1.7). Logo, $R(\lambda)(\lambda - G)x = x$, $\forall x \in D(G)$ e, segue que, $D(G) \subseteq R(R(\lambda)) \subseteq D(A)$ donde concluimos o desejado; - A é o gerador infinitesimal de $\{e^{-At}\}_{t \geq 0}$.

∎

1.2 Potências fracionárias de operadores

Nesta seção, primeiramente, definimos as potências fracionárias, A^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, de um operador setorial A e estudamos algumas de suas propriedades para então introduzirmos os espaços fracionários, $X^\alpha = D(A_1^\alpha)$, onde $\alpha \geq 0$, $A_1 = A + a$, com a tal que $\Re(\sigma(A_1)) > 0$, nos quais iremos trabalhar.

Definição 1.2.1 *Seja A um operador setorial com $\Re(\sigma(A)) > 0$, então para qualquer $\alpha > 0$, definimos:*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-At} dt,$$

onde Γ denota a função Gama dada por $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$.

Vale observar que de fato essa definição faz sentido, isto é, a expressão que aparece na Definição 1.2.1 é finita.

Como $\Re(\sigma(A)) > 0$, podemos dizer que $\Re(\sigma(A)) > \varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$ e pelo Teorema 1.1.9 :

$$\| t^{\alpha-1} e^{-At} \| \leq t^{\alpha-1} C_1 e^{-\varepsilon t}, \ \forall t > 0.$$

Aplicando isso,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-At} dt \right\| &\leq \int_0^{+\infty} \| t^{\alpha-1} e^{-At} \| \, dt \\ &\leq C_1 \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-\varepsilon t} dt \\ &= C_1 \int_0^{+\infty} \left(\frac{s}{\varepsilon}\right)^{\alpha-1} e^{-s} \frac{ds}{\varepsilon} \\ &= C_1 \varepsilon^{-\alpha} \int_0^{+\infty} s^{\alpha-1} e^{-s} ds. \end{aligned} \tag{1.8}$$

A integral em (1.8) é finita, pois

$$\int_0^1 s^{\alpha-1} e^{-s} ds \leq \int_0^1 s^{\alpha-1} ds = \frac{1}{\alpha}$$

e,

$$\begin{aligned} \int_1^r s^{\alpha-1} e^{-s} ds &\leq \int_1^r n! s^{-n} s^{\alpha-1} ds \\ &= n! \int_1^r s^{\alpha-n-1} ds \\ &= \frac{n!}{\alpha - n} (r^{\alpha-n} - 1), \end{aligned}$$

onde n é um inteiro positivo com $n > \alpha$ e pela expansão em série de Taylor de e^s, temos $e^s > \frac{s^n}{n!}$. Fazendo $r \to \infty$, vemos que existe a integral,

$$\int_1^{+\infty} s^{\alpha-1} e^{-s} ds.$$

Logo,

$$\int_0^{+\infty} s^{\alpha-1}e^{-s}ds = \int_0^1 s^{\alpha-1}e^{-s}ds + \int_1^{+\infty} s^{\alpha-1}e^{-s}ds.$$

■

Exemplo 1.2.2 *Se $X = \mathbb{R}$ e A é um escalar positivo, $A = a$, então $A^{-\alpha}$ como definido coincide com a $(-\alpha)$ potência usual de A.*

Com efeito,

$$\begin{aligned} A^{-\alpha} &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}e^{-at}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{s}{a}\right)^{\alpha-1} e^{-s}\frac{ds}{a} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}a^{-\alpha}\int_0^{+\infty} s^{\alpha-1}e^{-s}ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}a^{-\alpha}\Gamma(\alpha) \\ &= a^{-\alpha}. \end{aligned}$$

■

Exemplo 1.2.3 *A^{-1} (isto é, o caso $\alpha = 1$) é a inversa de A.*

Vejamos:

$$\begin{aligned} A^{-1} &:= \frac{1}{\Gamma(1)}\int_0^{+\infty} t^{1-1}e^{-At}dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-At}dt \end{aligned}$$

e, usando os resultados do Teorema 1.1.9 e o fato de $0 \in \rho(A)$, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-At}x\,dt &= \int_0^{+\infty} A^{-1}Ae^{-At}x\,dt \\ &= A^{-1}\int_0^{+\infty}\frac{d}{dt}(-e^{-At}x)\,dt \\ &= A^{-1}x,\ \forall x \in X, \end{aligned}$$

donde se verifica que o caso $\alpha = 1$ realmente descreve a inversa de A.

■

Exemplo 1.2.4 *Se $A = I + B$, onde $\| B \| < 1$, então $A^{-\alpha}$ como definido acima concorda com a representação usual em série de potências: $(I + B)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{n}B^n$, sendo $\binom{-\alpha}{n} = (-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+n)}{n!\,\Gamma(\alpha)}$.*

Conforme vimos no Exemplo 1.1.2, A é setorial por ser um operador limitado. E, aplicando a Definição 1.2.1 e, fazendo alguns cálculos, encontramos:

$$\begin{aligned}
(I+B)^{-\alpha} &:= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-(I+B)t}dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n B^n t^n}{n!}\right)dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n B^n}{n!}\int_0^{\infty} t^{n+\alpha-1}e^{-t}dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma(\alpha+n)B^n}{n!\Gamma(\alpha)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{n}B^n.
\end{aligned}$$

■

Teorema 1.2.5 *Se A é um operador setorial em X com $\Re(\sigma(A)) > 0$, então para qualquer $\alpha > 0$, $A^{-\alpha}$ é um operador linear limitado em X, injetor, que satisfaz $A^{-\alpha}A^{-\beta} = A^{-(\alpha+\beta)}$ sempre que $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Além disso, se $0 < \alpha < 1$,*

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^{+\infty}\lambda^{-\alpha}(\lambda I + A)^{-1}d\lambda.$$

Demonstração:

Como $\Re(\sigma(A)) > 0$, podemos dizer que $\Re(\sigma(A)) > \delta$ para algum $\delta > 0$ e do Teorema 1.1.9, temos $\| e^{-At} \| \leq C_1 e^{-\delta t}$, $t > 0$. Segue que,

$$\begin{aligned}
\| A^{-\alpha}x \| &= \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-At}x\,dt \right\| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1} \| e^{-At} \| \| x \| \,dt \\
&\leq \frac{C_1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-\delta t}dt \ \| x \| \\
&= C_1\delta^{-\alpha} \| x \| .
\end{aligned}$$

E, constatamos assim que $A^{-\alpha}$ é um operador limitado, lembrando que C_1 depende do setor e da constante M na desigualdade do resolvente associados ao operador A.

Agora, se $\alpha > 0$, $\beta > 0$,

$$
\begin{aligned}
A^{-\alpha}A^{-\beta} &:= \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-At}dt\right)\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty s^{\beta-1}e^{-As}ds\right)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty\int_0^\infty t^{\alpha-1}s^{\beta-1}e^{-A(t+s)}ds\,dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty du\int_0^u t^{\alpha-1}(u-t)^{\beta-1}e^{-Au}dt\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty u^{\alpha+\beta-1}e^{-Au}du\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}dz\\
&:= A^{-(\alpha+\beta)},
\end{aligned}
$$

onde usamos que

$$\int_0^1 z^{\alpha-1}(1-z)^{\beta-1}dz = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Além disso, se $A^{-\alpha}x = 0$ para algum $\alpha > 0$, então tomando $n \in \mathbb{N}$, $n > \alpha$, $A^{-n}x = A^{-(n-\alpha)}A^{-\alpha}x = 0$. Ocorre que $\Re(\sigma(A)) > 0$ significa que $0 \in \rho(A)$, e, portanto, A é inversível ; existe A^{-1} e é injetor de modo que A^{-n}, a n-ésima potência de A^{-1}, também o é. Logo, $x = 0$, o que nos mostra que $A^{-\alpha}$ é injetor qualquer $\alpha > 0$.

Por fim, resta ver que, para $0 < \alpha < 1$,

$$A^{-\alpha} = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^{+\infty}\lambda^{-\alpha}(\lambda I + A)^{-1}d\lambda.$$

Para $\lambda \geq 0$, $A + \lambda I$ é setorial com $\Re(\sigma(A + \lambda I)) > 0$ e, aplicando a Definição 1.2.1,

$$(A + \lambda I)^{-1} = \int_0^\infty e^{-At}e^{-\lambda t}dt$$

donde,

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}(\lambda I + A)^{-1}d\lambda &= \int_0^\infty \lambda^{-\alpha}\left(\int_0^\infty e^{-At}e^{-\lambda t}dt\right)d\lambda\\
&= \int_0^\infty e^{-At}\left(\int_0^\infty \lambda^{-\alpha}e^{-\lambda t}d\lambda\right)dt\\
&= \int_0^\infty e^{-At}t^{\alpha-1}\Gamma(1-\alpha)\,dt\\
&= A^{-\alpha}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha).
\end{aligned}
$$

E, usando que para $0 < \alpha < 1$, $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$, resulta o desejado.

■

Observação 1.2.6 *Vale observar que já sabíamos pela demonstração do Teorema 1.1.9 que a definição da potência fracionária $\alpha = -1$ de $\lambda I + A$ coincide com a sua inversa como operador.*

Esse resultado nos permite definir:

Definição 1.2.7 *Seja A como no Teorema 1.2.5. Definimos A^{α}, a inversa de $A^{-\alpha}$, para $\alpha > 0$, com $D(A^{\alpha}) = R(A^{-\alpha})$ e $A^0 = I$, onde I é a identidade em X.*

Exemplo 1.2.8 *$A = A^1$ é a inversa de A^{-1}.*

Teorema 1.2.9 *Suponha A um operador setorial com $\Re(\sigma(A)) > \delta > 0$. Então, para $\alpha \geq 0$, existe uma constante $0 < C_\alpha < \infty$ tal que*

$$\| A^{\alpha} e^{-At} \| \leq C_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t},\ t > 0,$$

onde, se C_2 é a constante do Teorema 1.1.9,

$$C_\alpha = \begin{cases} C_2\Gamma(\alpha),\ se\ 0 < \alpha < 1; \\ (C_2 m)^m,\ se\ \alpha = m = 1, 2, 3...; \\ C_m C_\beta 2^{m+\beta},\ se\ \alpha = m + \beta > 1,\ m \in \mathbb{N}^*,\ 0 < \beta < 1; \end{cases}$$

e, se $0 < \alpha \leq 1$ e $x \in D(A^{\alpha})$,

$$\| (e^{-At} - I)x \| \leq \frac{1}{\alpha} C_{1-\alpha} t^{\alpha} \| A^{\alpha} x \| .$$

Além disso, C_α é limitada para α em qualquer intervalo compacto de $(0, +\infty)$ e C_α depende do setor e da constante M na desigualdade do resolvente para A. (Veremos que C_α é também limitada quando $\alpha \to 0^+$).

A demonstração desse teorema exige o conhecimento de algumas propriedades sobre as potências fracionárias, as quais enunciaremos e verificaremos a seguir:

Lema 1.2.10 *Seja A um operador setorial. Então,*

(i) $D(A^{\alpha}) \subseteq D(A^{\beta})$ para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $\alpha \geq \beta$.

(ii) A^{α} é fechado e densamente definido para $\alpha > 0$.

(iii) $A^{\alpha} e^{-At} = e^{-At} A^{\alpha}$ em $D(A^{\alpha})$ para $t > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iv) $A^{\alpha} A^{\beta} = A^{\beta} A^{\alpha} = A^{\alpha+\beta}$ em $D(A^{\gamma})$, onde $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ e $\gamma = máx\{\alpha,\ \beta,\ \alpha + \beta\}$.

Demonstração:

(i) De fato, notemos que mostrar que $D(A^{\alpha}) \subseteq D(A^{\beta})$, para $\alpha,\ \beta > 0$ com $\alpha \geq \beta$, é equivalente a verificar, nessas condições, que $R(A^{-\alpha}) \subseteq R(A^{-\beta})$. Como $\alpha \geq \beta$ e são ambos positivos, aplicando o último Teorema 1.2.5, $A^{-\alpha} = A^{-\beta} A^{-(\alpha-\beta)}$, ou seja, $R(A^{-\alpha}) \subseteq R(A^{-\beta})$. Para $\alpha,\ \beta \leq 0$, o domínio de ambos os operadores é todo X. E se $\alpha > 0$, $\beta < 0$, então $D(A^{\alpha}) \subset X = D(A^{\beta})$.

(ii) Sabemos que $A^{\alpha} = (A^{-\alpha})^{-1}$, sendo $A^{-\alpha}$ um operador limitado, $D(A^{-\alpha}) = X$ e, portanto, fechado.

Seja $x_n \in D(A^{\alpha}) = R(A^{-\alpha})$ com $x_n \to x$ e $y_n = A^{\alpha}x_n \to y$. Então, $(x_n,\ y_n) \in \text{Graf}(A^{\alpha})$ se, e somente se, $(y_n, x_n) \in \text{Graf}(A^{-\alpha})$. Dado que o gráfico de $A^{-\alpha}$ é fechado, $(y,\ x) \in \text{Graf}(A^{-\alpha})$ e, consequentemente, $(x,\ y) \in \text{Graf}(A^{\alpha})$.

Agora, para a segunda parte, afirmo que é suficiente constatarmos que se A é um operador setorial e $m \in \mathbb{N}$, então $D(A^m)$ é denso em X. Isso porque, se $\alpha \geq 1$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq \alpha$ e, $D(A^m) \subseteq D(A^{\alpha})$ usando (i). E, caso, $0 < \alpha < 1$, $D(A) \subseteq D(A^{\alpha})$ por (i) novamente.

Seja $x \in D(A)$. Uma vez que $\overline{D(A)} = X$, dado qualquer $\epsilon > 0$, podemos encontrar $y \in D(A)$ tal que, $\| y - Ax \| \leq \frac{\epsilon}{\|A^{-1}\|}$. Assim, se $z = Ay$, então $\| A^{-2}z - x \| = \| A^{-1}y - A^{-1}(Ax) \| \leq \| A^{-1} \| \| y - Ax \| \leq \epsilon$. Logo, $\overline{D(A^2)} \supseteq D(A)$ e, portanto, $\overline{D(A^2)} \supset \overline{D(A)} = X$; $D(A^2)$ é denso em X. Por indução, mostra-se que $D(A^m)$ é denso em X, $\forall m \geq 1$.

(iii) Para $\alpha > 0$, como

$$\begin{aligned}
A^{-\alpha}e^{-As}x &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-At}e^{-As}x\,dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-As}e^{-At}x\,dt \\
&= e^{-As}\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-At}x\,dt \\
&= e^{-As}A^{-\alpha}x,\ \forall x \in X,\ s > 0
\end{aligned}$$

afinal, e^{-As} é contínuo pelo Teorema 1.1.9, $A^{-\alpha}$ e e^{-At} comutam, $\forall t > 0$. E, é também verdade que dados dois operadores C e D que comutam e C é inversível, então D comuta com C^{-1}. Concluimos assim que $A^{\alpha}e^{-At} = e^{-At}A^{\alpha}$ em $D(A^{\alpha})$ para $\alpha > 0$ e $\forall t > 0$. Observemos que da primeira linha desse raciocínio segue diretamente o caso em que o expoente é negativo.

(iv) Analisemos os possíveis casos abaixo:

Caso 1: $\alpha, \beta > 0$.

Se $x \in D(A^{\alpha}A^{\beta})$, então, $x \in D(A^{\beta})$ e $A^{\beta}x \in D(A^{\alpha})$. E, do Teorema 1.2.5, $A^{\alpha}A^{\beta}x = y$ implica que $x = A^{-\beta}A^{-\alpha}y = A^{-(\alpha+\beta)}y$, o que, por sua vez, significa que $x \in R(A^{-(\alpha+\beta)}) = D(A^{\alpha+\beta})$ e $A^{\alpha+\beta}x = A^{\alpha}A^{\beta}x$.

E, se $x \in D(A^{\alpha+\beta})$ e $A^{\alpha+\beta}x = y$, segue que $x = A^{-(\alpha+\beta)}y = A^{-\alpha}A^{-\beta}y = A^{-\beta}A^{-\alpha}y$, ou seja,

$x \in R(A^{-\beta}) = D(A^{\beta})$ e $A^{\beta}x \in R(A^{-\alpha}) = D(A^{\alpha})$, donde $x \in D(A^{\alpha}A^{\beta})$.

Por fim, $A^{\alpha}A^{\beta} = A^{\alpha+\beta} = A^{\beta+\alpha} = A^{\beta}A^{\alpha}$ em $D(A^{\gamma})$, onde $\gamma = \text{máx}\{\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\}$.

Caso 2: $\alpha, \beta < 0$.

Segue do último Teorema 1.2.5.

Caso 3: $\alpha > 0$, $\beta = -\gamma$, $\gamma > 0$, com $\alpha > \gamma$.

Para provar que $A^{\alpha}A^{\beta} = A^{\alpha+\beta}$, observemos que isso é equivalente a verificar que $(A^{\alpha}A^{-\gamma})(A^{-(\alpha-\gamma)}) = I$. Agora, usando o Teorema 1.2.5, temos que $(A^{\alpha}A^{-\gamma})(A^{-(\alpha-\gamma)}) = A^{\alpha}(A^{-\gamma}A^{\gamma-\alpha}) = A^{\alpha}A^{-\alpha} = I$. Analogamente, mostramos que $A^{\beta}A^{\alpha} = A^{\alpha+\beta}$.

Caso 4: $\alpha > 0$, $\beta = -\gamma$, $\gamma > 0$, com $\alpha < \gamma$.

Novamente, como no caso anterior, basta demonstrarmos que $A^{\alpha}A^{-\gamma} = A^{\alpha-\gamma}$ e que $A^{-\gamma}A^{\alpha} = A^{\alpha-\gamma}$. Aplicando o Caso 1, $A^{-(\alpha-\gamma)}A^{\alpha}A^{-\gamma} = A^{\gamma}A^{-\gamma} = I$ e $A^{-\gamma}A^{\alpha}A^{-(\alpha-\gamma)} = A^{-\gamma}A^{\gamma} = I$.

∎

Agora, estamos prontos para iniciar a prova do Teorema 1.2.9 em questão:

Demonstração do Teorema 1.2.9:

A partir das estimativas obtidas no Teorema 1.1.9 e das propriedades no Lema 1.2.10, temos para $\alpha = m = 1, 2, 3...,$

$$\begin{aligned} \| A^m e^{-At} \| &= \| (Ae^{-A\frac{t}{m}})^m \| \\ &\leq \| Ae^{-A\frac{t}{m}} \|^m \\ &\leq (C_2 m)^m t^{-m} e^{-\delta t}. \end{aligned}$$

Se $0 < \alpha < 1$ e $t > 0$,

$$\begin{aligned}
\| A^{\alpha}e^{-At} \| &= \| AA^{-(1-\alpha)}e^{-At} \| \\
&= \| Ae^{-At}A^{-(1-\alpha)} \| \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty} s^{-\alpha} \| Ae^{-A(t+s)} \| \, ds \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty} s^{-\alpha}(t+s)^{-1}C_2e^{-\delta(t+s)}ds \\
&\leq \frac{C_2e^{-\delta t}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty} s^{-\alpha}(s+t)^{-1}\, ds \\
&\leq \frac{C_2e^{-\delta t}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}t^{-\alpha} \\
&= \frac{C_2e^{-\delta t}}{\Gamma(1-\alpha)}\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)t^{-\alpha} \\
&= C_2\Gamma(\alpha)t^{-\alpha}e^{-\delta t},
\end{aligned}$$

onde aplicamos os Teoremas 1.1.9 e 1.2.5 e o Lema 1.2.10.

E, para $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ou $\in (0,1)$ e $\beta \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ou $\in (0,1)$, reunindo os casos anteriores,

$$\begin{aligned}
\| A^{\alpha+\beta}e^{-At} \| &= \| A^{\alpha}A^{\beta}e^{-A\frac{t}{2}}e^{-A\frac{t}{2}} \| \\
&= \| A^{\alpha}e^{-A\frac{t}{2}}A^{\beta}e^{-A\frac{t}{2}} \| \\
&\leq \| A^{\alpha}e^{-A\frac{t}{2}} \| \| A^{\beta}e^{-A\frac{t}{2}} \| \\
&\leq C_{\alpha}(\frac{t}{2})^{-\alpha}e^{-\delta\frac{t}{2}}C_{\beta}(\frac{t}{2})^{-\beta}e^{-\delta\frac{t}{2}} \\
&= C_{\alpha}C_{\beta}2^{\alpha+\beta}t^{-(\alpha+\beta)}e^{-\delta t}.
\end{aligned}$$

Notemos que o caso geral é uma combinação destes afinal, podemos escrever um número qualquer α como a soma de um natural e um número entre 0 e 1.

Para a outra estimativa, usando o Lema 1.2.10 e a primeira parte, se $0 < \alpha \leq 1$ e $x \in D(A^\alpha)$,

$$\begin{aligned}
\| e^{-At}x - x \| &= \left\| -\int_0^t Ae^{-As}x\,ds \right\| \\
&= \left\| -\int_0^t A^{(1-\alpha)+\alpha}e^{-As}x\,ds \right\| \\
&= \left\| -\int_0^t A^{1-\alpha}A^{\alpha}e^{-As}x\,ds \right\| \\
&= \left\| -\int_0^t A^{1-\alpha}e^{-As}A^{\alpha}x\,ds \right\| \\
&\leq \int_0^t \| A^{1-\alpha}e^{-As} \| \| A^\alpha x \|\,ds \\
&\leq \int_0^t C_{1-\alpha}s^{-(1-\alpha)}e^{-\delta s} \| A^\alpha x \|\,ds \\
&\leq C_{1-\alpha} \| A^\alpha x \| \int_0^t s^{-(1-\alpha)}ds \\
&= \frac{1}{\alpha}C_{1-\alpha}t^\alpha \| A^\alpha x \| .
\end{aligned}$$

Finalmente, com relação a afirmação sobre C_α, pelo que fizemos, $C_\alpha = C_2\Gamma(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, $C_\alpha = (C_2m)^m$, $\alpha = m = 1, 2, ...$, ou $C_\alpha = C_mC_\beta 2^{m+\beta}$, se $\alpha = m + \beta > 1$, onde $m \in \mathbb{N}^*$, $0 < \beta < 1$, de modo que se α está em um compacto de $(0, \infty)$, ou seja, um intervalo fechado e limitado, C_α fica também limitada. E é importante observarmos que como tal constante C_α é basicamente uma potência daquela constante C_2 do Teorema 1.1.9 multiplicada por um número derivado de α, C_α depende de M e do setor para A.

■

Teorema 1.2.11 *Se $0 \leq \alpha \leq 1$ e $x \in D(A)$, então $\| A^\alpha x \| \leq C \| Ax \|^\alpha \| x \|^{1-\alpha}$, o que implica que $\| A^\alpha x \| \leq \alpha\epsilon \| Ax \| + (1-\alpha)C^{\frac{1}{1-\alpha}}\epsilon^{\frac{-\alpha}{(1-\alpha)}} \| x \|$, $\forall \epsilon > 0$, onde $C > 0$ é uma constante independente de α dada por:*

$$C = \frac{4C_1}{\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}},$$

sendo C_1 a constante do Teorema 1.1.9.

Demonstração:

Sejam $0 < \beta < 1$ e $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
\| \Gamma(\beta)A^{-\beta}x \| &= \left\| \int_0^\epsilon t^{\beta-1}e^{-At}x\,dt + \int_\epsilon^\infty t^{\beta-1}e^{-At}x\,dt \right\| \\
&\leq \int_0^\epsilon t^{\beta-1} \| e^{-At}x \|\, dt + \left\| \int_\epsilon^\infty t^{\beta-1}e^{-At}x\,dt \right\| \\
&\leq C_1 \| x \| \int_0^\epsilon t^{\beta-1}dt + \| \epsilon^{\beta-1}e^{-A\epsilon}A^{-1}x \| + \left\| (\beta-1) \int_\epsilon^\infty t^{\beta-2}e^{-At}A^{-1}x\,dt \right\| \\
&\leq C_1\frac{\epsilon^\beta}{\beta} \| x \| + C_1\epsilon^{\beta-1} \| A^{-1}x \| + (1-\beta) \int_\epsilon^\infty t^{\beta-2}C_1 \| A^{-1}x \|\, dt \\
&= C_1\frac{\epsilon^\beta}{\beta} \| x \| + C_1\epsilon^{\beta-1} \| A^{-1}x \| + C_1\epsilon^{\beta-1} \| A^{-1}x \| \\
&= C_1\frac{\epsilon^\beta}{\beta} \| x \| + 2C_1\epsilon^{\beta-1} \| A^{-1}x \|, \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

onde C_1 é a constante do Teorema 1.1.9. Denotemos por $f(\epsilon)$ o lado direito desta desigualdade, $f(\epsilon) = C_1\frac{\epsilon^\beta}{\beta} \| x \| + 2C_1\epsilon^{\beta-1} \| A^{-1}x \|$, $\epsilon > 0$. Observemos que $\lim_{\epsilon\to 0} f(\epsilon) = +\infty$ e $\lim_{\epsilon\to+\infty} f(\epsilon) = +\infty$, de modo que podemos a seguir determinar seu mínimo:

$$\begin{aligned}
f'(\epsilon) &= 0 \\
&\Leftrightarrow C_1\epsilon^{\beta-1} \| x \| + 2C_1(\beta-1)\epsilon^{\beta-2} \| A^{-1}x \| = 0 \\
&\Leftrightarrow C_1\epsilon^{\beta-2}(\epsilon \| x \| + 2(\beta-1) \| A^{-1}x \|) = 0 \\
&\Leftrightarrow \epsilon = \frac{2(1-\beta) \| A^{-1}x \|}{\| x \|},\ x \neq 0.
\end{aligned}$$

E, o mínimo de f ocorre no ponto $\epsilon = \frac{2(1-\beta)\| A^{-1}x \|}{\| x \|} > 0$. Substituindo na expressão (1.9):

$$\begin{aligned}
\| \Gamma(\beta)A^{-\beta}x \| &\leq \frac{C_1 \| x \|}{\beta}\left(\frac{2(1-\beta) \| A^{-1}x \|}{\| x \|}\right)^\beta + 2C_1\left(\frac{2(1-\beta) \| A^{-1}x \|}{\| x \|}\right)^{\beta-1} \| A^{-1}x \| \\
&= C_1 \| x \|^{1-\beta} \| A^{-1}x \|^\beta \left(\frac{2^\beta(1-\beta)^\beta}{\beta} + 2^\beta(1-\beta)^{\beta-1}\right)
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
\| A^{-\beta}x \| &\leq C_1 \| x \|^{1-\beta} \| A^{-1}x \|^\beta \left(\frac{(2(1-\beta))^{\beta-1}(2(1-\beta)+2\beta)}{\beta\Gamma(\beta)}\right) \\
&= C_1 \| x \|^{1-\beta} \| A^{-1}x \|^\beta \left(\frac{2(2(1-\beta))^{\beta-1}}{\Gamma(1+\beta)}\right).
\end{aligned}$$

Ponhamos então $x = Ax$ e $\alpha = 1-\beta$, obtendo:

$$\| A^\alpha x \| \leq C_1 \| Ax \|^\alpha \| x \|^{1-\alpha} \left(\frac{2(2\alpha)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\right).$$

Agora, se $0 < \beta < 1$, podemos limitar o coeficiente uniformemente nesse intervalo. Com efeito,

(i) $\Gamma(1+\beta) \geq \frac{1}{2}$.

(ii) $2^{1-\beta} \geq 1$.

(iii) Resta estudar $(1-\beta)^{1-\beta}$:

Seja $g(x) = (1-x)^{1-x}$, $0 < x < 1$ (vide Figura 1.15).

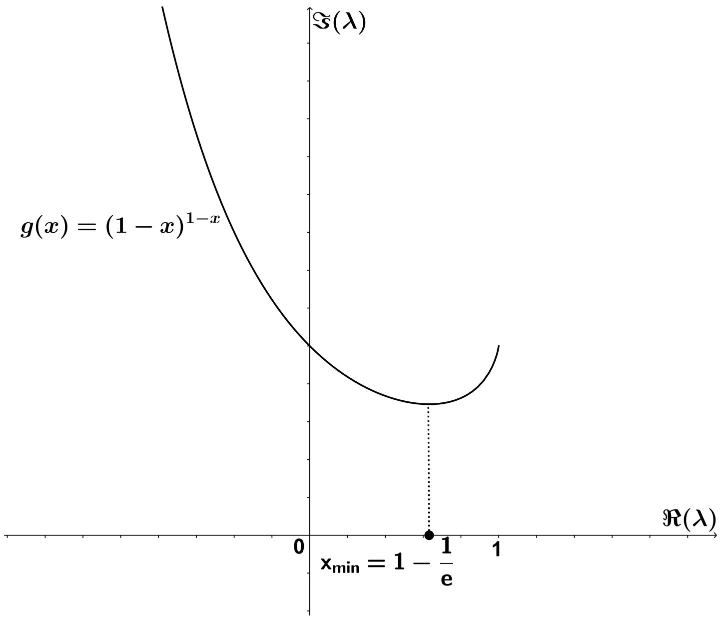

Figura 1.15: Gráfico da função g.

Então, $g'(x) = (e^{(1-x)\log(1-x)})' = (1-x)^{-x}(x-1)(\log(1-x)+1)$ e,

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ &\Leftrightarrow (1-x)^{-x}(x-1)\log(1-x) + (1-x)^{-x}(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \log(1-x) = -1 \\ &\Leftrightarrow e^{\log(1-x)} = \frac{1}{e} \\ &\Leftrightarrow 1-x = \frac{1}{e} \\ &\Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

E, $g''(x) = (1-x)^{-x}(-x-(x-1)\log^2(1-x) - 2(x-1)\log(1-x) + 2)$, o que nos permite concluir que $g(x) \geq g\left(1-\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ afinal, $g''\left(1-\frac{1}{e}\right) = 2e^{\left(1-\frac{1}{e}\right)} > 0$.

Reunindo essas considerações, temos

$$\left(\frac{2(2(1-\beta))^{\beta-1}}{\Gamma(1+\beta)}\right) \leq \frac{4}{\left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{1}{\epsilon}}}.$$

Logo, para $0 < \alpha < 1$, $\| A^\alpha x \| \leq C \| Ax \|^\alpha \| x \|^{1-\alpha}$, onde C depende exclusivamente de M e do setor para A afinal, C é C_1 do Teorema 1.1.9 multiplicado por um número independente de α. Os casos $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$ seguem trivialmente.

Para obter a outra expressão, precisaremos da seguinte desigualdade auxiliar:

Desigualdade de Young: Se p e q são números reais positivos tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então para todo par a, b de números reais não negativos:

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Notemos que $\| A^\alpha x \| \leq C \| Ax \|^\alpha \| x \|^{1-\alpha}$ pode ser reescrito como $\| A^\alpha x \| \leq \epsilon^\alpha \| Ax \|^\alpha C\epsilon^{-\alpha} \| x \|^{1-\alpha}$, $\forall \epsilon > 0$. Assim, tomando $a = \epsilon^\alpha \| Ax \|^\alpha$, $b = C\epsilon^{-\alpha} \| x \|^{1-\alpha}$, $p = \frac{1}{\alpha}$, $q = \frac{1}{1-\alpha}$ e aplicando tal desigualdade, encontramos o desejado:

$$\| A^\alpha x \| \leq \alpha\epsilon \| Ax \| + (1-\alpha) C^{\frac{1}{1-\alpha}} \epsilon^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}} \| x \| .$$

■

Observação 1.2.12 *Se $\| e^{-At} \| \leq C_1 e^{-\delta t}$ e $\| Ae^{-At} \| \leq C_2 t^{-1} e^{-\delta t}$, $t > 0$, então, usando os Teoremas 1.1.9 e 1.2.11,*

$$\begin{aligned} \| A^\alpha e^{-At} x \| &\leq C \| Ae^{-At} x \|^\alpha \| e^{-At} x \|^{1-\alpha} \\ &\leq C(C_2 t^{-1} e^{-\delta t})^\alpha (C_1 e^{-\delta t})^{1-\alpha} \| x \| \\ &= C(C_2)^\alpha (C_1)^{1-\alpha} t^{-\alpha} e^{-\delta t} \| x \| . \end{aligned}$$

E, essa última expressão converge para $CC_1 e^{-\delta t} \| x \|$, quando α tende a 0^+, lembrando que C é uma constante independente de α. Isso prova que a constante C_α no Teorema 1.2.9 é limitada quando α converge a 0^+.

Corolário 1.2.13 *Se A é um operador setorial com $\Re(\sigma(A)) > 0$ e B é um operador linear fechado tal que $BA^{-\alpha}$ é limitado em X para algum $0 \leq \alpha < 1$, então $A + B$ é setorial.*

Demonstração:

Nosso objetivo a seguir é verificar as hipóteses do Exemplo 1.1.4:

(i) Como A é um operador setorial com $\Re(\sigma(A)) > 0$, podemos considerar um setor S_{0,ϕ_0}, para algum $\phi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ apropriado, empregando a notação da Definição 1.1.1.E, ainda,

$$\begin{aligned} \| A(\lambda I - A)^{-1} \| &= \| \lambda(\lambda I - A)^{-1} - (\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1} \| \\ &\leq | \lambda | \| (\lambda I - A)^{-1} \| + 1 \\ &\leq | \lambda | \frac{M}{| \lambda |} + 1 \\ &= M + 1 = C, \quad \forall \lambda \in S_{0,\phi_0}. \end{aligned}$$

Em particular, essa desigualdade é válida para $\lambda \in S_{0,\phi_0}$ com $| \lambda | \geq R_0$, qualquer $R_0 > 0$.

(ii) O operador B é linear, fechado e $D(B) \supset D(A)$, pois o fato de $BA^{-\alpha}$ ser limitado significa que o domínio deste operador é todo X, $D(B) \supset R(A^{-\alpha}) = D(A^{\alpha})$ e, por sua vez, $D(A^{\alpha}) \supset D(A)$ para $0 \leq \alpha < 1$ pelo Lema 1.2.10. Além disso, usando o Teorema 1.2.11, $\forall x \in D(A)$ e $\forall \epsilon > 0$, temos:

$$\begin{aligned} \| Bx \| &= \| BA^{-\alpha}A^{\alpha}x \| \\ &\leq \| BA^{-\alpha} \| \| A^{\alpha}x \| \\ &\leq \| BA^{-\alpha} \| (\alpha\epsilon \| Ax \| + (1-\alpha)C^{\frac{1}{1-\alpha}}\epsilon^{\frac{-\alpha}{(1-\alpha)}} \| x \|) \\ &= \| BA^{-\alpha} \| \alpha\epsilon \| Ax \| + \| BA^{-\alpha} \| (1-\alpha)C^{\frac{1}{1-\alpha}}\epsilon^{\frac{-\alpha}{(1-\alpha)}} \| x \| . \end{aligned}$$

Então, se tomarmos ϵ tal que $C \| BA^{-\alpha} \| \alpha\epsilon < 1$, isto é, $\epsilon < \frac{1}{C\alpha \| BA^{-\alpha} \|}$, o resultado segue do Exemplo 1.1.4.

■

Teorema 1.2.14 *Sejam A e B operadores setoriais em X com $D(A) = D(B)$, $\Re(\sigma(A)) > 0$, $\Re(\sigma(B)) > 0$ e, para algum $\alpha \in [0, 1)$, $(A - B)A^{-\alpha}$ é limitado em X. Então, dado qualquer $\beta \in [0, 1]$, $A^{\beta}B^{-\beta}$ e $B^{\beta}A^{-\beta}$ são limitados em X.*

Demonstração:

Conforme discutimos na demonstração do Teorema 1.1.9, podemos supor que o setor para A tem vértice $a = 0$ e abertura $\phi \in (0, \frac{\pi}{2})$ de maneira a termos a seguinte situação para $-A$ (vide Figura 1.16):

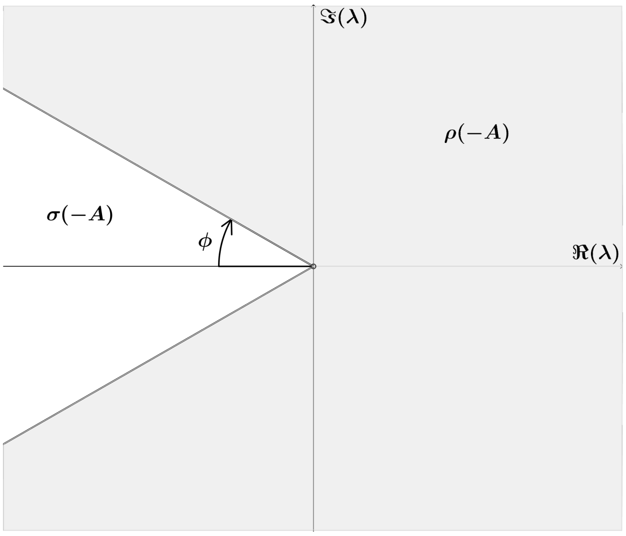

Figura 1.16: Situação para -A.

(i) Para $0 \le \beta \le 1$, $|\pi - arg(\lambda)| \ge \phi$ e $\phi < \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned}
\| A^{\beta}(-\lambda I - A)^{-1} \| &= \sup_{\|x\|=1} \| A^{\beta}(\lambda I + A)^{-1}x \| \\
&\le \sup_{\|x\|=1} (C \| A(\lambda I + A)^{-1}x \|^{\beta} \| (\lambda I + A)^{-1}x \|^{1-\beta}) \\
&\le \sup_{\|x\|=1} \left(C (1+M)^{\beta} \| x \|^{\beta} \left(\frac{M}{|\lambda|}\right)^{1-\beta} \| x \|^{1-\beta} \right) \\
&= C(1+M)^{\beta} M^{1-\beta} |\lambda|^{\beta-1},
\end{aligned}$$

onde C é a constante do Teorema 1.2.11 e aplicamos a desigualdade (1.5). Logo, $\| A^{\beta}(\lambda I + A)^{-1} \| \le C_{A,\beta} |\lambda|^{\beta-1}$, sendo $C_{A,\beta} = C(1+M)^{\beta}M^{1-\beta}$, constante dependente de A e de β.

(ii) Também podemos majorar tal norma do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\| A^{\beta}(\lambda I + A)^{-1} \| &= \| A^{\beta-1}A(\lambda I + A)^{-1} \| \\
&\le \| A^{\beta-1} \| \| A(\lambda I + A)^{-1} \|, \qquad (1.10)
\end{aligned}$$

ou seja, $\| A^{\beta}(\lambda I + A)^{-1} \| \le K_{A,\beta}$ afinal, ambas as normas na expressão (1.10) são limitadas por constantes de acordo com o Teorema 1.2.5 e a desigualdade (1.5).

(iii) Observemos que cálculos análogos a esses podem ser feitos com o operador $B^{\beta}(\lambda I + B)^{-1}$.

Além disso, se $0 < \beta < 1$, aplicando uma das identidades do resolvente,

$$\begin{aligned}
B^{-\beta} - A^{-\beta} &= \frac{\sin(\pi\beta)}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda^{-\beta}(\lambda I + B)^{-1} d\lambda - \frac{\sin(\pi\beta)}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda^{-\beta}(\lambda I + A)^{-1} d\lambda \\
&= \frac{\sin(\pi\beta)}{\pi} \left(\int_0^{\infty} \lambda^{-\beta}((\lambda I + B)^{-1} - (\lambda I + A)^{-1}) d\lambda \right) \\
&= \frac{\sin(\pi\beta)}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda^{-\beta}(\lambda I + B)^{-1}(A - B)(\lambda I + A)^{-1} d\lambda.
\end{aligned}$$

Agora, $-B^{\beta}A^{-\beta} = B^{\beta}(B^{-\beta} - A^{-\beta}) - I$ de modo que para mostrar que o operador $B^{\beta}A^{-\beta}$ é limitado, basta limitar $B^{\beta}(B^{-\beta} - A^{-\beta})$. Para $\alpha \in [0, 1)$ tal que $(A - B)A^{-\alpha}$ é limitado, usando as considerações em (i) à (iii),

$$\begin{aligned}
\| B^{\beta}(B^{-\beta} - A^{-\beta}) \| &= \left\| B^{\beta}\frac{\sin(\pi\beta)}{\pi}\int_0^{\infty} \lambda^{-\beta}(\lambda I + B)^{-1}(A - B)(\lambda I + A)^{-1}d\lambda \right\| \\
&= \left\| \frac{\sin(\pi\beta)}{\pi}\int_0^{\infty} \lambda^{-\beta}B^{\beta}(\lambda I + B)^{-1}(A - B)(\lambda I + A)^{-1}d\lambda \right\| \\
&= \left\| \frac{\sin(\pi\beta)}{\pi}\int_0^{\infty} \lambda^{-\beta}B^{\beta}(\lambda I + B)^{-1}(A - B)A^{-\alpha}A^{\alpha}(\lambda I + A)^{-1}d\lambda \right\| \\
&\leq \left\| \frac{\sin(\pi\beta)}{\pi}\int_0^{1} \lambda^{-\beta}B^{\beta}(\lambda I + B)^{-1}(A - B)A^{-\alpha}A^{\alpha}(\lambda I + A)^{-1}d\lambda \right\| \\
&+ \left\| \frac{\sin(\pi\beta)}{\pi}\int_1^{\infty} \lambda^{-\beta}B^{\beta}(\lambda I + B)^{-1}(A - B)A^{-\alpha}A^{\alpha}(\lambda I + A)^{-1}d\lambda \right\| \\
&\leq \frac{|\sin(\pi\beta)|}{\pi}\int_0^{1} |\lambda|^{-\beta} \| B^{\beta}(\lambda I + B)^{-1} \| \| (A - B)A^{-\alpha} \| \| A^{\alpha}(\lambda I + A)^{-1} \| \, d\lambda \\
&+ \frac{|\sin(\pi\beta)|}{\pi}\int_1^{\infty} |\lambda|^{-\beta} \| B^{\beta}(\lambda I + B)^{-1} \| \| (A - B)A^{-\alpha} \| \| A^{\alpha}(\lambda I + A)^{-1} \| \, d\lambda \\
&\leq \frac{|\sin(\pi\beta)|}{\pi}\int_0^{1} |\lambda|^{-\beta} K_{B,\beta} \| (A - B)A^{-\alpha} \| \, K_{A,\alpha}\, d\lambda \\
&+ \frac{|\sin(\pi\beta)|}{\pi}\int_1^{\infty} |\lambda|^{-\beta} C_{B,\beta} |\lambda|^{\beta-1} \| (A - B)A^{-\alpha} \| C_{A,\alpha} |\lambda|^{\alpha-1} \, d\lambda \\
&= \frac{|\sin(\pi\beta)|}{\pi} K_{B,\beta} \| (A - B)A^{-\alpha} \| \, K_{A,\alpha} \int_0^{1} |\lambda|^{-\beta} \, d\lambda \qquad (1.11) \\
&+ \frac{|\sin(\pi\beta)|}{\pi} C_{B,\beta}C_{A,\alpha} \| (A - B)A^{-\alpha} \| \int_1^{\infty} |\lambda|^{\alpha-2} \, d\lambda. \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

Assim, constatamos que $\| B^{\beta}(B^{-\beta} - A^{-\beta}) \|$ é finita dado que $0 < \beta < 1$ e $0 \leq \alpha < 1$ garantem a convergência das integrais em (1.11) e (1.12) respectivamente.

Para o outro caso, temos semelhantemente:

$$A^{-\beta} - B^{-\beta} = \frac{\sin(\pi\beta)}{\pi}\int_0^{\infty} \lambda^{-\beta}(\lambda I + A)^{-1}(B - A)A^{-\alpha}A^{\alpha}(\lambda I + B)^{-1}d\lambda.$$

E, notamos que:

(i) $(A - B)A^{-\alpha}$ limitado implica que $(B - A)A^{-\alpha}$ também o é.

(ii) $-A^{\beta}B^{-\beta} = A^{\beta}(A^{-\beta} - B^{-\beta}) - I$, sendo suficiente limitar $A^{\beta}(A^{-\beta} - B^{-\beta})$. Para tanto, as majorações seriam essencialmente as mesmas que fizemos acima, exceto pelo último termo como podemos observar. Vejamos:

$$\begin{aligned}(I + A^{\alpha}(\lambda I + A)^{-1}(B - A)A^{-\alpha})A^{\alpha}(\lambda I + B)^{-1} &= A^{\alpha}(\lambda I + B)^{-1} + A^{\alpha}(\lambda I + A)^{-1}(B - A)(\lambda I + B)^{-1} \\ &= A^{\alpha}(\lambda I + B)^{-1} + A^{\alpha}((\lambda I + A)^{-1} - (\lambda I + B)^{-1}) \\ &= A^{\alpha}(\lambda I + A)^{-1},\end{aligned}$$

o que signifca que,

$$\| (I + A^{\alpha}(\lambda I + A)^{-1}(B - A)A^{-\alpha})A^{\alpha}(\lambda I + B)^{-1} \| = \| A^{\alpha}(\lambda I + A)^{-1} \|,$$

isto é, $\| A^{\alpha}(\lambda I + B)^{-1} \| = O(\| A^{\alpha}(\lambda I + A)^{-1} \|)$ afinal, $A^{\alpha}(\lambda I + A)^{-1}$ e $(B - A)A^{-\alpha}$ são operadores limitados.

Daí, bastaria aplicar considerações análogas para concluir que $A^{\beta}B^{-\beta}$ também é limitado.

Por fim, falta analisar os casos $\beta = 0$ e $\beta = 1$.

Se $\beta = 0$, $A^{\beta}B^{-\beta} = I = B^{\beta}A^{-\beta}$.

E, se $\beta = 1$, então AB^{-1} e BA^{-1} são limitados, pois podemos escrever, por exemplo, $I - BA^{-1} = (A - B)A^{-1} = (A - B)A^{-\alpha}A^{\alpha-1}$, com $(A - B)A^{-\alpha}$ limitado para algum $\alpha \in [0, 1)$ por hipótese e, como justamente, $\alpha - 1 < 0$, $A^{\alpha-1}$ também é limitado.

■

Teorema 1.2.15 *Sejam A um operador setorial em um espaço de Banach X com $\Re(\sigma(A)) > \delta > 0$ e B um operador linear de $D(B) \subset X$ em um espaço de Banach Y. Suponha que $D(B) \supset D(A)$ e, para algum $0 \leq \alpha < 1$ e alguma constante $C > 0$,*

$$\| Bx \|_Y \leq C \| Ax \|^{\alpha} \| x \|^{1-\alpha}, \ \forall x \in D(A),$$

ou equivalentemente,

$$\| Bx \|_Y \leq \varepsilon \| Ax \| + K\varepsilon^{\frac{-\alpha}{(1-\alpha)}} \| x \|, \ \forall \varepsilon > 0 \text{ e } \forall x \in D(A),$$

para alguma constante $K > 0$.
Então, para qualquer β com $\alpha < \beta \leq 1$, B tem uma única extensão linear contínua de X^{β} a Y (ver Definição 1.2.17 abaixo), isto é, $BA^{-\beta}$ é um operador contínuo.

Para demonstrar esse Teorema, precisaremos da seguinte propriedade:

Lema 1.2.16 *Seja A um operador setorial em um espaço de Banach X. Se $\alpha \geq \beta \geq 0$, então X^{α} é denso em X^{β}(com a norma β).*

Demonstração:

De fato, sabemos pelo Lema 1.2.10 que $X^\gamma = D(A_1^\gamma)$ é denso em X, $\forall \gamma \geq 0$. Considere $x \in X^\beta$, então $A_1^\beta x \in X$. Seja $y_n \in X^{\alpha-\beta}$ tal que $y_n \to A_1^\beta x$ em X.

Segue que $A_1^{-\beta} y_n \in X^\alpha$ e,

$$\| A_1^{-\beta} y_n - x \|_\beta = \| A_1^\beta (A_1^{-\beta} y_n - x) \| = \| y_n - A_1^\beta x \| \to 0,$$

ou seja, $A_1^{-\beta} y_n \to x$ em X^β.

■

Demonstração do Teorema 1.2.15:

Seja $x \in X$, então $A^{-1}x \in D(A) \subset D(B)$ e, por hipótese,

$$\begin{aligned} \| BA^{-1}x \|_Y &\leq C \| AA^{-1}x \|^\alpha \| A^{-1}x \|^{1-\alpha} \\ &\leq C \| x \|^\alpha \| A^{-1} \|^{1-\alpha} \| x \|^{1-\alpha} \\ &= C \| A^{-1} \|^{1-\alpha} \| x \|, \end{aligned}$$

donde BA^{-1} é um operador limitado em X.

Agora, para $x \in D(A^{\beta+1})$, podemos escrever:

$$\begin{aligned} Bx &= BA^{-1}AA^\beta A^{-\beta} x \\ &= BA^{-1}AA^\beta \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty t^{\beta-1} e^{-At} x \, dt \\ &= BA^{-1}A \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty t^{\beta-1} e^{-At} A^\beta x \, dt \\ &= BA^{-1} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty t^{\beta-1} e^{-At} A^{\beta+1} x \, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty t^{\beta-1} B e^{-At} A^\beta x \, dt. \end{aligned}$$

Vejamos que a função do lado direito, $x \in X^\beta \mapsto \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty t^{\beta-1} B e^{-At} A^\beta x \, dt \in Y$, é contínua,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty t^{\beta-1} B e^{-At} A^\beta x \, dt \right\| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty t^{\beta-1} \| B e^{-At} A^\beta x \| \, dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty t^{\beta-1} C \| A e^{-At} A^\beta x \|^\alpha \| e^{-At} A^\beta x \|^{1-\alpha} \, dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty t^{\beta-1} C (\| A e^{-At} \| \| A^\beta x \|)^\alpha (\| e^{-At} \| \| A^\beta x \|)^{1-\alpha} dt \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^\infty t^{\beta-1} C (C_2 t^{-1} e^{-\delta t})^\alpha \| A^\beta x \|^\alpha \, (C_1 e^{-\delta t})^{1-\alpha} \| A^\beta x \|^{1-\alpha} \, dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} C (C_2)^\alpha (C_1)^{1-\alpha} \int_0^\infty t^{(\beta-\alpha)-1} e^{-\delta t} dt \, \| A^\beta x \|, \end{aligned}$$

sendo C_1 e C_2 as constantes do Teorema 1.1.9. Notemos que, na última expressão, a exponencial garante a convergência no infinito, enquanto que o fato de $1 > \beta > \alpha$ garante a convergência da integral no zero. Logo, B admite uma extensão linear contínua de X^β em Y. E, ela é única devido a $X^{\beta+1}$ ser denso em X^β, conforme Lema 1.2.16.

■

Definição 1.2.17 *Se A é um operador setorial em um espaço de Banach X, defina para cada $\alpha \geq 0$,*

$$X^\alpha = D(A_1^\alpha), \text{ com a norma do gráfico,}$$
$$\| x \|_\alpha = \| A_1^\alpha x \|, \; x \in X^\alpha,$$

onde $A_1 = A + aI$, com a escolhido tal que $\Re(\sigma(A_1)) > 0$.

É importante notarmos que diferentes escolhas de a dão origem a normas equivalentes:

Com efeito, sejam $A_1 = A + a_1$ e $A_2 = A + a_2$, sendo a_1 e a_2 tais que $\Re(\sigma(A_1)) > 0$ e $\Re(\sigma(A_2)) > 0$. Podemos supor que $a_1 < a_2$. Temos assim A_1 e A_2 operadores setoriais em X com $D(A_1) = D(A_2) = D(A)$ e $(A_2 - A_1)A_2^{-\alpha} = (a_2 - a_1)A_2^{-\alpha}$ limitado em X para todo $\alpha \in [0, 1)$, em particular, $\alpha = 0$. Pelo Teorema 1.2.14, $A_1^\beta A_2^{-\beta}$ e $A_2^\beta A_1^{-\beta}$ são limitados em X para todo $\beta \in [0, 1]$. Ou seja, para $\alpha \in [0, 1]$ as normas dos espaços $X_1^\alpha = D(A_1^\alpha)$ e $X_2^\alpha = D(A_2^\alpha)$ são equivalentes. E, se $\alpha > 1$ e $\alpha = m$, m inteiro:

$$\begin{aligned}
\| A_2^m x \| &= \| A_2 A_2^{m-1} x \| \\
&\leq C \| A_1 A_2^{m-1} x \| \\
&= C \| A_2^{m-1} A_1 x \| \\
&\leq C^2 \| A_1 A_2^{m-2} A_1 x \| \\
&. \\
&. \\
&. \\
&\leq C^m \| A_1^m x \|,
\end{aligned}$$

onde C é uma constante relativa a equivalência de normas para $\alpha = 1$ e aplicamos indução para obter a última expressão. Devemos, porém, justificar uma passagem essencial nestes cálculos:

Sabemos que A_1 e A_2 comutam e, a partir disso, precisamos mostrar que A_1 e A_2^β comutam, com $\beta > 0$.

Dados dois operadores C e D que comutam e são inversíveis, então C comuta com D^{-1} e vice-versa, pois:

$$CD = DC \Leftrightarrow C = D^{-1}CD \Leftrightarrow CD^{-1} = D^{-1}C,$$

de modo que basta verificar que A_1 comuta com $A_2^{-\beta}$.

Pela Definição 1.2.1,

$$A_2^{-\beta} = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^{\infty} t^{\beta-1} e^{-A_2 t} dt$$

lembrando que,

$$e^{-A_2 t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\lambda I + A_2)^{-1} e^{\lambda t} d\lambda,$$

sendo Γ como no Teorema 1.1.9.

Como A_1 comuta com o operador $\lambda I + A_2$, $\forall \lambda \in \Gamma$, A_1 comuta com o inverso desse e resulta assim que A_1 comuta com $A_2^{-\beta}$, $\beta > 0$.

Por fim, para $\alpha > 1$ qualquer, podemos escrever $\alpha = m + \beta$, com $m \in \mathbb{N}^*$, $\beta \in (0, 1)$ e, reunindo os casos anteriores, temos

$$\begin{aligned} \| A_2^{m+\beta} x \| &= \| A_2^m A_2^{\beta} x \| \\ &\leq C^m \| A_1^m A_2^{\beta} x \| \\ &= C^m \| A_2^{\beta} A_1^m x \| \\ &\leq C^m \tilde{C} \| A_1^{\beta} A_1^m x \|, \end{aligned}$$

onde $\tilde{C}$ é a constante referente a equivalência de normas para o índice β.

Teorema 1.2.18 *Se A é um operador setorial em um espaço de Banach X, então X^{α} é um espaço de Banach com a norma $\| \cdot \|_{\alpha}$, para $\alpha \geq 0$, $X^0 = X$, e para $\alpha \geq \beta \geq 0$, X^{α} é um subespaço denso de X^{β} com inclusão contínua. Se A tem resolvente compacto, a inclusão $X^{\alpha} \subset X^{\beta}$ é compacta quando $\alpha > \beta \geq 0$.*

Além disso, se A_1 e A_2 são dois operadores setoriais com mesmo domínio, $\Re(\sigma(A_j)) > 0$, $j = 1, 2$ e, $(A_1 - A_2)A_1^{-\alpha}$ é limitado para algum $\alpha < 1$, então se $X_j^{\beta} = D(A_j^{\beta})$, $(j = 1, 2)$, $X_1^{\beta} = X_2^{\beta}$ com normas equivalentes para $0 \leq \beta \leq 1$ e esta equivalência depende apenas dos setores e das constantes M_1 e M_2 na Definição 1.1.1 associados à A_1 e A_2.

Demonstração:

Em etapas:

(i) $(X^{\alpha}, \| \|_{\alpha})$ é um espaço de Banach, $\alpha \geq 0$.

Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em X^{α}, isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\| x_n - x_m \|_{\alpha} \leq \varepsilon$, $\forall n, m \geq n_0$.

Como $\| x_n - x_m \|_{\alpha} := \| A_1^{\alpha}(x_n - x_m) \|_X = \| A_1^{\alpha} x_n - A_1^{\alpha} x_m \|_X$, segue que a sequência $(A_1^{\alpha} x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em X. Sendo este um espaço completo, temos que $(A_1^{\alpha} x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para algum $y \in X$

quando $n \to \infty$.

Agora, $A_1^{-\alpha}$ é um operador limitado conforme vimos no Teorema 1.2.5, donde $x_n = A_1^{-\alpha}(A_1^{\alpha}x_n) \to A_1^{-\alpha}y$ em X quando $n \to \infty$. Notemos que $x = A_1^{-\alpha}y \in X^{\alpha}$ e, $\| x_n - x \|_{\alpha} = \| A_1^{\alpha}(x_n - x) \|_X = \| A_1^{\alpha}x_n - y \|_X$ que converge a zero quando $n \to \infty$. Logo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente e, pela sua arbitrariedade, podemos concluir que X^{α} é um espaço de Banach com a norma α, $\alpha \geq 0$.

(ii) Para $\alpha \geq \beta \geq 0$, X^{α} é um subespaço denso de X^{β} com inclusão contínua.

Já sabemos pelo Lema 1.2.10 que para $\alpha \geq \beta \geq 0$, $X^{\alpha} \subset X^{\beta}$. E a questão da densidade, provamos no Lema 1.2.16. Resta mostrar que a inclusão $X^{\alpha} \subset X^{\beta}$ é contínua. Usando o referido Lema 1.2.10, se $x \in X^{\alpha}$,

$$\begin{aligned}
\| x \|_{\beta} &= \| A_1^{\beta}x \| \\
&= \| A_1^{\alpha}A_1^{-\alpha}A_1^{\beta}x \| \\
&= \| A_1^{\alpha}A_1^{-(\alpha-\beta)}x \| \\
&= \| A_1^{-(\alpha-\beta)}A_1^{\alpha}x \| \\
&\leq \| A_1^{-(\alpha-\beta)} \| \| A_1^{\alpha}x \| \\
&= \| A_1^{-(\alpha-\beta)} \| \| x \|_{\alpha} .
\end{aligned}$$

(iii) Se A tem resolvente compacto, a inclusão $X^{\alpha} \subset X^{\beta}$ é compacta quando $\alpha > \beta \geq 0$.

Inicialmente, vale recordar que um operador A tem resolvente compacto se existir $\lambda \in \rho(A)$ tal que $(\lambda I - A)^{-1}$ é um operador compacto e, se existir, o mesmo é válido para todo $\lambda \in \rho(A)$.

Consideremos a inclusão $i = A^{-\beta} \circ \bar{i} \circ A^{\beta}|_{X^{\alpha}} : X^{\alpha} \to X^{\beta}$, onde $A^{-\beta} : X \to X^{\beta}$, $\bar{i} : X^{\alpha-\beta} \hookrightarrow X$ e $A^{\beta}|_{X^{\alpha}} : X^{\alpha} \to X^{\alpha-\beta}$. Vimos no Teorema 1.2.5 que $A^{-\beta}$ é um operador contínuo e, como para todo $x \in X^{\alpha}$, vale:

$$\| A^{\beta}x \|_{\alpha-\beta} := \| A^{\alpha-\beta}A^{\beta}x \| = \| A^{\alpha}x \| = \| x \|_{\alpha},$$

segue que $A^{\beta}|_{X^{\alpha}}$ também é contínuo.

É suficiente, dessa forma, provar que $\bar{i}$ é compacta, ou seja, se $B_{\alpha-\beta}$ é a bola de centro na origem e raio um de $X^{\alpha-\beta}$, então $\bar{i}(B_{\alpha-\beta})$ está contida em um conjunto compacto de X. Como

$$B_{\alpha-\beta} = \{x \in X^{\alpha-\beta} \mid \| x \|_{\alpha-\beta} \leq 1\} = \{y \in X \mid \| y \| \leq 1,\ y \in R(A^{\alpha-\beta})\} = A^{-(\alpha-\beta)}(B_0),$$

significa que reduzimos o nosso problema a mostrar que $A^{-\gamma}$ é um operador compacto, $\forall \gamma \geq 0$, sabendo que A tem resolvente compacto.

Para $0 < \gamma < 1$,

$$A^{-\gamma} = \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\gamma}(\lambda I + A)^{-1} d\lambda$$

e temos o limite de somas finitas de operadores compactos que é um operador compacto, lembrando que $(\lambda I + A)^{-1}$ é compacto por hipótese, $\forall \lambda \in (0, +\infty) \subset \rho(-A)$. Para as demais potências, basta usar composição afinal, a composição de operadores compactos é compacta.

(iv) Se A_1 e A_2 são dois operadores setoriais com mesmo domínio, $\Re(\sigma(A_j)) > 0$, $j = 1, 2$ e, $(A_1 - A_2)A_1^{-\alpha}$ é limitado para algum $\alpha < 1$, então se $X_j^\beta = D(A_j^\beta)$, $(j = 1, 2)$, $X_1^\beta = X_2^\beta$ com normas equivalentes para $0 \leq \beta \leq 1$ e esta equivalência depende apenas dos setores e das constantes M_1 e M_2 na Definição 1.1.1 associados à A_1 e A_2.

Finalmente, para esta última parte, a equivalência das normas em X_1^β e X_2^β e o fato desta equivalência depender dos setores e das constantes M_1 e M_2 para A_1 e A_2 vem do Teorema 1.2.14. Precisamos apenas demonstrar que tais espaços são de fato iguais.

Observemos que podemos escrever A_1^β como $A_1^\beta A_2^{-\beta} A_2^\beta$ e, sendo $A_1^\beta A_2^{-\beta}$ um operador limitado, temos que $X_1^\beta = D(A_1^\beta) = D(A_1^\beta A_2^{-\beta} A_2^\beta) = D(A_2^\beta) = X_2^\beta$.

■

1.3 Um teorema de imersão

Iniciamos exibindo o conceito da propriedade de extensão C^m e as *Desigualdades de Nirenberg - Gagliardo*. O objetivo é demonstrar um importante resultado sobre os espaços X^α, com o qual finalizamos a seção.

Definição 1.3.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que Ω tem a propriedade da extensão C^m se existe uma extensão $E : C_c^m(\overline{\Omega}) \to C_c^m(\mathbb{R}^n)$ de modo que $E(\phi)$ restrita a $\overline{\Omega}$ é ϕ e para as normas de quaisquer dos espaços C^ν ou $W^{k,q}$ $(0 \leq \nu, k \leq m,\ 1 \leq q < \infty)$, existe uma constante $B > 0$ com,*

$$B^{-1} \parallel \phi \parallel_\Omega \leq \parallel E(\phi) \parallel_{R^n} \leq B \parallel \phi \parallel_\Omega,$$

onde $\| \cdot \|_\Omega$ denota a norma em $C^\nu(\Omega)$ ou $W^{k,q}(\Omega)$ e $\| \cdot \|_{\mathbb{R}^n}$, a norma em $C^\nu(\mathbb{R}^n)$ ou $W^{k,q}(\mathbb{R}^n)$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com a propriedade da extensão C^m,

Proposição 1.3.2 *Uma versão das Desigualdades de Nirenberg - Gagliardo:*

(a) $\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq C \| u \|^{\theta}_{W^{m,q}(\Omega)} \| u \|^{1-\theta}_{L_r(\Omega)}$, *se* $p \geq q$, $p \geq r$, $0 \leq \theta \leq 1$ *e* $k - \frac{n}{p} \leq \theta\left(m - \frac{n}{q}\right) - \frac{n}{r}(1-\theta)$,

sendo a desigualdade estrita se q *ou* $r = 1$.

(b) $\| u \|_{C^{\nu}(\Omega)} \leq C \| u \|^{\theta}_{W^{m,q}(\Omega)} \| u \|^{1-\theta}_{L_r(\Omega)}$, *se* $0 \leq \theta \leq 1$ *e* $\nu \leq \theta\left(m - \frac{n}{q}\right) - \frac{n}{r}(1-\theta)$,

sendo a desigualdade estrita se q *ou* $r = 1$, *ou se* ν *é inteiro.*

Teorema 1.3.3 *Suponha que* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *é um aberto com a propriedade da extensão* C^m *e* A *é um operador setorial em* $X = L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, *com* $D(A) = X^1 \subset W^{m,p}(\Omega)$ *para algum* $m \geq 1$. *Então, para* $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$X^{\alpha} \subset W^{k,q}(\Omega), \text{ quando } k - \frac{n}{q} < m\alpha - \frac{n}{p},\ q \geq p,$$

$$X^{\alpha} \subset C^{\nu}(\Omega), \text{ quando } 0 \leq \nu < m\alpha - \frac{n}{p}.$$

Demonstração:

Pela Desigualdade de Nirenberg - Gagliardo (a),

$$\| u \|_{W^{k,q}(\Omega)} \leq C \| u \|^{\theta}_{W^{m,p}(\Omega)} \| u \|^{1-\theta}_{L_p(\Omega)},$$

desde que $q \geq p$, $k - \frac{n}{q} \leq \theta\left(m - \frac{n}{p}\right) - \frac{n}{p}(1-\theta) = m\theta - \frac{n}{p}$. Para $u \in D(A)$,

$$\| u \|_{W^{k,q}(\Omega)} \leq \tilde{C} \| Au \|^{\theta}_{L_p(\Omega)} \| u \|^{1-\theta}_{L_p(\Omega)} .$$

Note que acima consideramos $\Re(\sigma(A)) > 0$, o que é possível pois, a rigor, estamos trabalhando com os espaços X^{α}, os quais são definidos a partir do operador $A_1 = A + a$, com a tal que $\Re(\sigma(A_1)) > 0$.

Seja i a inclusão $i : D(A) \subset W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{k,q}(\Omega)$. Aplicando o Teorema1.2.15, para todo α, $\theta < \alpha \leq 1$, i possui uma única extensão linear contínua de X^{α} para $W^{k,q}(\Omega)$, ou seja,

$$X^{\alpha} \subset W^{k,q}(\Omega), \text{ onde } k - \frac{n}{q} < m\alpha - \frac{n}{p},\ q \geq p.$$

Para a segunda afirmação, usando a outra desigualdade de Nirenberg - Gagliardo (b),

$$\| u \|_{C^{\nu}(\Omega)} \leq C \| u \|^{\theta}_{W^{m,p}(\Omega)} \| u \|^{1-\theta}_{L_p(\Omega)}, \text{ se } 0 \leq \theta \leq 1 \text{ e } \nu \leq \theta\left(m - \frac{n}{p}\right) - \frac{n}{p}(1-\theta) = m\theta - \frac{n}{p}.$$

Analogamente ao que fizemos na primeira parte, temos para $u \in D(A)$:

$$\| u \|_{C^{\nu}(\Omega)} \leq \tilde{C} \| Au \|^{\theta}_{L_p(\Omega)} \| u \|^{1-\theta}_{L_p(\Omega)} .$$

Novamente, de acordo com o Teorema 1.2.15, a inclusão $i : D(A) \subset W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{\nu}(\Omega)$ possui uma única extensão linear contínua de X^{α} para $C^{\nu}(\Omega)$, sempre que $\theta < \alpha \leq 1$:

$$X^{\alpha} \subset C^{\nu}(\Omega), \text{ onde } 0 \leq \nu < m\alpha - \frac{n}{p}.$$

∎

1.4 Uma importante aplicação

Nesta seção, utilizamos a bagagem obtida conjuntamente com resultados demonstrados em Henry (1981) para garantir uma limitação de certo modo uniforme em X^{β} das soluções de problemas de Cauchy para uma família de equações não lineares envolvendo um operador setorial.

Consideremos a equação não linear:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + Ax = f(t,x),\ t > t_0 \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.13}$$

onde A é um operador setorial tal que as potências fracionárias de $A_1 \equiv A + a$; a de forma que $\Re(\sigma(A_1)) > 0$; estão bem definidas e, os espaços $X^{\alpha} = D(A_1^{\alpha})$ com a norma do gráfico $\| x \|_{\alpha} = \| A_1^{\alpha} x \|$ são definidos para $\alpha \geq 0$. Suponha que $f : U \subset \mathbb{R} \times X^{\alpha} \to X$, U um conjunto aberto, $0 \leq \alpha < 1$ e f é localmente Holder contínua em t e localmente Lipschitz em x pertencentes a U. Mais precisamente, se $(t_1, x_1) \in U$, existe uma vizinhança $V \subset U$ de (t_1, x_1), tal que para (t, x), $(s, y) \in V$,

$$\| f(t,x) - f(s,y) \| \leq L(| t - s |^{\theta} + \| x - y \|_{\alpha}),$$

para constantes $L > 0$ e $\theta > 0$.

Definição 1.4.1 *Uma solução do problema de Cauchy (1.13) (ou problema de valor inicial) em (t_0, t_1) é uma função contínua $x : [t_0, t_1) \to X$ tal que $x(t_0) = x_0$ e, em (t_0, t_1), temos $(t, x(t)) \in U$, $x(t) \in D(A)$, existe $\frac{dx}{dt}$, a aplicação $t \to f(t, x(t))$ é localmente Holder contínua, $\int_{t_0}^{t_0+\rho} \| f(t, x(t)) \| \, dt < \infty$ para algum $\rho > 0$, $\int_{t_0}^{t} (t-s)^{-\alpha} \| f(s, x(s)) \| \, ds \to 0$ quando $t \to t_0^+$ e, a equação diferencial é satisfeita em (t_0, t_1).*

Teorema 1.4.2 *Sejam A um operador setorial e $f : U \to X$, U um subconjunto aberto de $\mathbb{R} \times X^{\alpha}$, $0 \leq \alpha < 1$, f é localmente Holder contínua em t e localmente Lipschitziana em x. Então, para qualquer $(t_0, x_0) \in U$, existe $T = T(t_0, x_0) > 0$ tal que a equação diferencial (1.13) tem uma única solução x em $(t_0, t_0 + T)$ com valor inicial $x(t_0) = x_0$.*

Demonstração: Veja o Teorema 3.3.3 em Henry (1981).

Teorema 1.4.3 *Sejam A e f como no enunciado do Teorema 1.4.2 e suponhamos também que A tem resolvente compacto e f aplica todos os conjuntos da forma $\mathbb{R}^{+} \times B \subset U \subset \mathbb{R} \times X^{\alpha}$, com B fechado e limitado, em conjuntos limitados de X. Se $x(t; t_0, x_0)$ é a solução da equação diferencial (1.13) em (t_0, ∞) com $\| x(t; t_0, x_0) \|_{\alpha}$ permanecendo limitada à medida que $t \to +\infty$, então $\{ x(t; t_0, x_0) \}_{t > t_0}$ está em um conjunto compacto em X^{α}.*

Demonstração: Veja o Teorema 3.3.6 em Henry (1981).

Essencialmente, o que se faz para demonstrar este resultado é provar que $\| x(t; t_0, x_0) \|_\beta$ é limitado para $t \geq t_0 + 1$, $\alpha < \beta < 1$ afinal, de acordo com o Teorema 1.2.18, a inclusão $X^\beta \subset X^\alpha$ é compacta. E, obtém-se a seguinte limitação,

$$\| x(t; t_0, x_0) \|_\beta \leq C_{\beta-\alpha}(t - t_0)^{-(\beta-\alpha)} e^{-\delta(t-t_0)} \| x_0 \|_\alpha + \int_{t_0}^{t} C_\beta (t-s)^{-\beta} e^{-\delta(t-s)} C\, ds, \tag{1.14}$$

onde C é tal que $\| f(t, x(t; t_0, x_0)) \| \leq C$, $\forall t \geq t_0$ e, $C_{\beta-\alpha}$ e C_β são as constantes determinadas no Teorema 1.2.9 que, como vimos, dependem da constante M e do setor relativos ao operador A. Essa observação será de grande relevância para o nosso estudo.

Uma aplicação interessante desse resultado pode ser feita no contexto do seguinte problema abstrato:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + A_\gamma x = f_\gamma(x),\ t > t_0 \\ x(t_0) = x_0 \in X_\gamma^\alpha, \end{cases} \tag{1.15}$$

onde $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda}$ é uma família de operadores setoriais em X_γ^α, $0 \leq \alpha < 1$, com resolvente compacto, $D(A_\gamma) \supset D(A)$, $\forall \gamma \in \Lambda$, sendo Λ um espaço topológico e $A = A_{\gamma_0}$, $f_\gamma : U \to X$, U um subconjunto aberto de X_γ^α, localmente Lipschitziana em x e f_γ aplica todos os subconjuntos fechados e limitados de U em subconjuntos limitados de X. Nesse contexto, o Teorema 1.4.2 nos garante a existência e a unicidade de solução localmente.

Suponhamos que as soluções desses problemas estejam globalmente definidas e denotemos por $T_\gamma(t, x_0)$ o respectivo semigrupo gerado.

Proposição 1.4.4 *Se $T_\gamma(t, x_0)$ admite um atrator global $\mathcal{A}_\gamma$ e este é limitado em X_γ^α para determinado $0 \leq \alpha < 1$, então tal conjunto é também limitado em X_γ^β com $\alpha < \beta < 1$.*

Demonstração:

De fato, recordemos que $\mathcal{A}_\gamma = \{ x_0 \in X_\gamma^\alpha \,|\, \text{existe uma solução global limitada por } x_0 \}$.

As soluções de (1.15) estando globalmente definidas, podemos aplicar o Teorema 1.4.3 e temos que $\{x(t; t_0, x_0)\}_{t > t_0}$ é limitado em X_γ^β, onde $\alpha < \beta < 1$, conforme a expressão (1.14).

Como $\| x \|_{X_\gamma^\alpha} \leq R_\gamma$, $\forall x \in \mathcal{A}_\gamma$, para alguma constante $R_\gamma > 0$, tal limitação é uniforme em x_0. Em outras palavras, $\{T_\gamma(t) x_0\}_{t > t_0}$ é limitada em X_γ^β uniformemente em x_0.

Agora, o conjunto $\mathcal{A}_\gamma$ é invariante sob a ação de $T_\gamma(t, x_0)$, isto é, $T_\gamma(t, x_0)\, \mathcal{A}_\gamma = \mathcal{A}_\gamma$, $\forall t \geq t_0$, em particular, $T_\gamma(t_0 + 1, x_0)\, \mathcal{A}_\gamma = \mathcal{A}_\gamma$.

Logo, concluimos que $\| x \|_{X_\gamma^\beta} \leq S_\gamma$, $\forall x \in \mathcal{A}_\gamma$, para alguma constante $S_\gamma > 0$.

■

Nosso objetivo a seguir é estudar tal constante S_γ obtida da limitação do atrator $\mathcal{A}_\gamma$ em X_γ^β, mais precisamente, em quais condições S_γ independe do parâmetro γ; $S_\gamma = S$. Vejamos:

De acordo com a expressão (1.14):

$$\begin{aligned}
\| x(t_0+1; t_0, x_0) \|_{X_\gamma^\beta} &\leq C_{\gamma,\beta-\alpha}(1)^{-(\beta-\alpha)}e^{-\delta}R_\gamma + \int_{t_0}^{t_0+1} C_{\gamma,\beta}(t_0+1-s)^{-\beta}e^{-\delta(t_0+1-s)}C_\gamma\, ds \\
&\leq C_{\gamma,\beta-\alpha}R_\gamma + C_{\gamma,\beta}C_\gamma \int_{t_0}^{t_0+1} (t_0+1-s)^{-\beta} ds \\
&\leq C_{\gamma,\beta-\alpha}R_\gamma + C_{\gamma,\beta}C_\gamma,
\end{aligned}$$

onde $C_{\gamma,\beta-\alpha} = (C_2)_\gamma \Gamma(\beta-\alpha)$, $C_{\gamma,\beta} = (C_2)_\gamma\Gamma(\beta)$ e R_γ e C_γ vem respectivamente de $\| x \|_{X_\gamma^\alpha} \leq R_\gamma$, $\forall x \in \mathcal{A}_\gamma$ e $\| f_\gamma(x(t; t_0, x_0)) \| \leq C_\gamma$, $\forall t \geq t_0$, sendo $(C_2)_\gamma$ a constante do Teorema 1.1.9 referente ao operador A_γ.

Assim, se a família $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ for tal que é possível estabelecer um setor e uma constante M comuns a todos os seus elementos e aquelas constantes R_γ e C_γ também não dependerem de γ, a limitação obtida para o atrator em X_γ^β é uniforme em γ, ou seja, S_γ independe de γ, $S_\gamma = S$.

Nessa situação, parece conveniente podermos comparar as normas em X_γ^β e $X^\beta = X_{\gamma_0}^\beta$. Para isso, faremos novas suposições sobre os operadores A_γ:

Teorema 1.4.5 *Seja $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ uma família de operadores positivos definidos e autoadjuntos em um espaço de Hilbert X com Λ um espaço topológico e $A = A_{\gamma_0}$, satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $D(A_\gamma) \subset X$ densa e continuamente $\forall\gamma \in \Lambda$, isto é, $\| x \| \leq L \| A_\gamma x \|$, $\forall x \in D(A_\gamma)$, onde L é uma constante;

(ii) $D(A) \subset D(A_\gamma)$, $\forall\gamma \in \Lambda$;

(iii) $\| (A - A_\gamma)x \| \leq \epsilon(\gamma) \| Ax \| + K(\gamma) \| x \|$, $\forall x \in D(A)$, onde $\epsilon(\gamma)$, $K(\gamma) \to 0$ quando $\gamma \to \gamma_0$.

Então, $\| x \|_{X_\gamma^\beta} \leq K_1(\gamma) \| x \|_{X^\beta}$ e, analogamente, $\| x \|_{X^\beta} \leq K_2(\gamma) \| x \|_{X_\gamma^\beta}$, com $K_1(\gamma), K_2(\gamma) \to 1$ quando $\gamma \to \gamma_0$, uniformemente em β.

Demonstração:

Sabendo que $X_\gamma = X$ é um espaço de Hilbert e que os operadores A_γ são positivos definidos e autoadjuntos para todo $\gamma \in \Lambda$, segue de resultados conhecidos que os domínios de suas potências fracionárias de ordem β coincidem isometricamente com os espaços de interpolação, ou seja, $[X, X_\gamma^1]_\beta = D(A_\gamma^\beta)$ e $[X, X^1]_\beta = D(A^\beta)$ com isometrias, para qualquer $0 < \beta < 1$ (Veja o Teorema 16.1 em Yagi (2010), por exemplo).

E se $X_\gamma^1 \subset X$ densa e continuamente, $\forall\gamma \in \Lambda$, isto é, $\| x \| \leq L \| A_\gamma x \|$, $\forall x \in X_\gamma^1$ sendo

L uma constante, então, para qualquer $0 < \beta < 1$, (Teorema 1.15 em Yagi (2010)),

$$\begin{aligned} \| I \|_{L([X, X^1_\gamma]_\beta, [X, X^1]_\beta)} &\leq \| I \|^{1-\beta}_{L(X, X)} \| I \|^{\beta}_{L(X^1_\gamma, X^1)} \\ &\leq \| I \|^{\beta}_{L(X^1_\gamma, X^1)}, \end{aligned} \tag{1.16}$$

onde $I : Y \to Z$ denota o operador inclusão de $Y \subset Z$ em Z.

Além disso, a partir da desigualdade,

$$\| (A - A_\gamma)x \| \leq \epsilon(\gamma) \| Ax \| + K(\gamma) \| x \|, \ \forall x \in X^1,$$

onde $\epsilon(\gamma)$ e $K(\gamma)$ tendem a 0 à medida que $\gamma \to \gamma_0$, vale que,

$$\| Ax \| \leq \tau(\gamma) \| A_\gamma x \|,$$

sendo $\tau(\gamma) = \frac{1+K(\gamma)l}{1-\epsilon(\gamma)}$ que converge a 1 quando $\gamma \to \gamma_0$. Daí,

$$\| Ix \|_{X^1} = \| x \|_{D(A)} = \| Ax \| \leq \tau(\gamma) \| A_\gamma x \| = \tau(\gamma) \| x \|_{D(A_\gamma)} = \tau(\gamma) \| x \|_{X^1_\gamma} .$$

Consequentemente, $\| I \|_{L(X^1_\gamma, X^1)} \leq \tau(\gamma)$ e aplicando isso na desigualdade (1.16), encontramos,

$$\| x \|_{[X, X^1]_\beta} \leq \tau(\gamma)^\beta \| x \|_{[X, X^1_\gamma]_\beta} .$$

Ou ainda,

$$\| x \|_{X^\beta} \leq K_2(\gamma) \| x \|_{X^\beta_\gamma}, \tag{1.17}$$

com $K_2(\gamma) \to 1$ quando $\gamma \to \gamma_0$, uniformemente em β.

Analogamente obtemos a desigualdade reversa, $\| x \|_{X^\beta_\gamma} \leq K_1(\gamma) \| x \|_{X^\beta}$, $K_1(\gamma) \to 1$ quando $\gamma \to \gamma_0$, uniformemente em β.

■

Uma vez obtida uma limitação do atrator $\mathcal{A}_\gamma$ em X^β_γ uniforme em γ - S independe de γ, a partir da desigualdade (1.17), temos que $\| x \|_{X^\beta} \leq K_2(\gamma)S$, $\forall x \in \mathcal{A}_\gamma$, com $K_2(\gamma) \to 1$ quando $\gamma \to \gamma_0$, uniformemente em β. Isso significa que se as normas desses espaços são equivalentes uniformemente em γ, então a união dos atratores $\cup_{\gamma \in \Lambda'} \mathcal{A}_\gamma$ está contida em uma bola de X^β, onde $\Lambda' \subset \Lambda$.

Agora, se o problema (1.15) referente ao operador A estiver posto em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ com a propriedade da extensão C^m, $X = L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, e $D(A) \subset W^{m,p}(\Omega)$ para algum $m \geq 1$, o Teorema 1.3.3 se aplica e,

$$X^\beta \subset C^\nu(\Omega), \text{ quando } 0 \leq \nu < m\beta - \frac{n}{p}.$$

Nesse contexto, então, conseguimos uma limitação da família de atratores em $L_\infty(\Omega)$. Mais formalmente,

Teorema 1.4.6 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto com a propriedade da extensão C^m, $X = L_p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ e $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda}$ uma família de operadores positivos definidos, autoadjuntos e com resolvente compacto em X, com Λ um espaço topológico e $A = A_{\gamma_0}$, $D(A) \subset W^{m,p}(\Omega)$ para alguma $m \geq 1$.*

Suponha que a família $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Lambda}$ é tal que é possível estabelecer um setor e uma constate M comuns a todos os seus elementos e as condições (i)-(iii) do Teorema 1.4.5 estão satisfeitas.

Considere o problema (1.15). Se as suas soluções estiverem globalmente definidas, gerando um semigrupo $T_\gamma(t, x_0)$, e este admitir um atrator global $\mathcal{A}_\gamma$ que é limitado em X_γ^α, para algum $0 \leq \alpha < 1$, uniformemente em γ e se ainda $f(\cup_{\gamma \in \Lambda} \mathcal{A}_\gamma)$ for também limitada, então a família de atratores é limitada em $L_\infty(\Omega)$, uniformemente em γ, desde que as normas dos espaços X^β e X_γ^β, $\alpha < \beta < 1$ e $0 < m\beta - \frac{n}{p}$, sejam equivalentes uniformemente em γ.

Capítulo 2

Limitação uniforme dos atratores para uma família de perturbações suaves de um domínio

Neste capítulo, com base em alguns resultados obtidos em Barbosa, Pereira e Pereira (2016) e em Pereira e Pereira (2007), estudamos uma família de problemas parabólicos semilineares,

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u(x,t) - au(x,t) + f(u(x,t)), & x \in \Omega_h, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial N}(x,t) = g(u(x,t)), & x \in \partial\Omega_h, t > 0, \end{cases}$$

onde Ω é um aberto limitado do $\mathbb{R}^2$ com fronteira regular de classe C^m, $m \geq 2$, $\Omega_h = h(\Omega)$ e h pertence a um conjunto de difeomorfismos suficientemente próximos da identidade na norma C^m. Mostramos que o problema está bem posto em um espaço conveniente, que o semigrupo associado possui atrator global $\mathcal{A}_h$ e, a partir do que foi desenvolvido no primeiro capítulo, que $\{\mathcal{A}_h \mid \| h - i_\Omega \|_{C^3(\Omega,\mathbb{R}^2)} < \epsilon_0 \}$ é uniformemente limitada em $L_\infty(\Omega)$, para ϵ_0 suficientemente pequeno.

2.1 Introdução: o problema e a redução a um domínio fixo

Nesta seção, descrevemos o problema de interesse e o método que utilizamos para estudá-lo.

Sejam Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^2$ com fronteira regular de classe C^m e a um número positivo. Consideremos o problema parabólico semilinear com condições de fronteira de Neumann não lineares:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u(x,t) - au(x,t) + f(u(x,t)), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial N}(x,t) = g(u(x,t)), & x \in \partial\Omega, t > 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Estamos interessados em obter uma limitação uniforme dos atratores em relação às perturbações suaves do domínio Ω. Ocorre que os espaços de funções variam conforme as regiões se alteram. Um modo de superar tal dificuldade é realizar uma "mudança de variável"de forma a trazer o problema de volta para a região fixa. Trata-se da abordagem desenvolvida em Henry (2005) e a qual seguiremos.

Tomemos $h \in Diff^m(\Omega) = \{h \in C^m(\Omega, \mathbb{R}^2) \,|\, \text{h é injetora e } \frac{1}{|\det h'(x)|} \text{ é limitado em } \Omega\}$. Para h tal que $\| h - i_\Omega \|_{C^m(\Omega,\mathbb{R}^2)}$ é pequena, podemos definir o "pull-back"de h, $h^* : C^m(h(\Omega)) \to C^m(\Omega)$ por $h^*(\phi) = \phi \circ h$ que é um isomorfismo com inversa $(h^{-1})^*$.

Agora, não é difícil ver que $v(\cdot, t)$ satisfaz (2.1) em $\Omega_h = h(\Omega)$ se, e somente se, $u(\cdot, t) = h^*(v(\cdot, t))$ (isto é, $u(x,t) = v(h(x), t)$) verifica:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = h^*\Delta_{\Omega_h} h^{*-1}u(x,t) - au(x,t) + f(u(x,t)), & x \in \Omega, t > 0, \\ h^*\frac{\partial}{\partial N_{\Omega_h}} h^{*-1}u(x,t) = g(u(x,t)), & x \in \partial\Omega, t > 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $h^*\Delta_{\Omega_h} h^{*-1}u(x,t) = \Delta_{\Omega_h}(u \circ h^{-1})(h(x))$ e $h^*\frac{\partial}{\partial N_{\Omega_h}} h^{*-1}u(x) = \frac{\partial}{\partial N_{\Omega_h}}(u \circ h^{-1})(h(x))$.

2.2 Setorialidade dos operadores perturbados em vários espaços

Nesta seção, demonstramos que a família de operadores diferenciais -$h^*\Delta_{\Omega_h} h^{*-1} + aI$, $h \in Diff^2(\Omega)$, com h suficientemente próximo de i_Ω, é setorial em $L^2(\Omega)$ e em $H^{-1}(\Omega)$.

2.2.1 Setorialidade em L^2

Seja $A_h = h^*(B_h - a)h^{*-1}$ definido na região fixa Ω, onde B_h denota o operador Laplaciano com condições de fronteira de Neumann homogêneas em $h(\Omega)$,

$$B_h : D(B_h) \subset L^2(h(\Omega)) \to L^2(h(\Omega))$$

sendo

$$D(B_h) = H^2(h(\Omega))_N = \left\{ v \in H^2(h(\Omega)) \,|\, \frac{\partial v}{\partial N_{h(\Omega)}} = 0 \right\}, \; B_h(v) = \Delta_{h(\Omega)} v.$$

É conhecido que $-A_h$ é um operador positivo e autoadjunto em $L^2(\Omega)$, considerando-se o produto interno com o peso $\mid J_h \mid$, o módulo do determinante Jacobiano de h. Denotaremos a norma em $L^2(\Omega)$ originada por tal produto interno como $\| \cdot \|_J$. Esse espaço é essencialmente o mesmo que $L^2(\Omega)$ com a norma usual $\| \cdot \|$, isto é, $K_2(h) \| \cdot \| \leq \| \cdot \|_J \leq K_1(h) \| \cdot \|$ com $K_1(h)$, $K_2(h) \to 1$ quando $h \to i_\Omega$. E,

$$D(-A_h) = H^2(\Omega)_{N^*} = \left\{ u \in H^2(\Omega) \,|\, h^* \frac{\partial}{\partial N_{h(\Omega)}} h^{*-1} u(x) = \nabla u(x) \cdot [Dh^{-1}]_{h(x)} N_{h(\Omega)}(h(x)) = 0,\ \forall x \in \partial\Omega \right\}.$$

Em geral, não é verdadeira a inclusão $D(-A_{i_\Omega}) \subset D(-A_h)$. O próximo lema, porém, nos mostra que sempre podemos admitir tal hipótese, e mais $D(-A_{i_\Omega}) = D(-A_h)$, desde que tenhamos um pouco mais de regularidade do domínio Ω e de h. Destacamos a importância que esse resultado pode ter em outros contextos, pois permite *fixar* o domínio de $-A_h$ quando h varia.

Lema 2.2.1 *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^2$ com fronteira regular de classe C^3 e $h \in Diff^3(\Omega)$ com $\| h - i_\Omega \|_{C^3(\Omega,\mathbb{R}^2)}$ pequeno. Então, para uma tal h, existe uma outra transformação $\tilde{h}$ tal que $\tilde{h}(\Omega) = h(\Omega)$ e $\tilde{h}^* \frac{\partial}{\partial N_{\tilde{h}(\Omega)}} \tilde{h}^{*-1} u = \frac{\partial u}{\partial N_\Omega}$ em $\partial\Omega$, $\forall u \in H^2(\Omega)$.*

Demonstração:

A seguir, construiremos a partir de h uma aplicação $\tilde{h}$ com a propriedade desejada. Para tanto, vamos supor que h está definida em todo o $\mathbb{R}^2$ conforme demonstra ser possível o Corolário 1.10 em Henry (2005).

Sejam $N_\Omega(p)$ a normal à p em $\partial\Omega$ e $\tilde{N}_\Omega(p) = [Dh^{-1}]_{h(p)} N_{\Omega_h}(h(p))$, ambas tomadas unitárias. Consideremos $V(\partial\Omega)$ e $\tilde{V}(\partial\Omega)$ vizinhanças de $\partial\Omega$ e,

$$\begin{aligned} \varphi : \partial\Omega \times (-\epsilon, \epsilon) &\to V(\partial\Omega) \\ (p,t) &\mapsto p + tN_\Omega(p) \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : \partial\Omega \times (-\epsilon, \epsilon) &\to \tilde{V}(\partial\Omega) \\ (p,t) &\mapsto p + t\tilde{N}_\Omega(p). \end{aligned}$$

De acordo com o Teorema 1.5 em Henry (2005), φ é um difeomorfismo C^2 com

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : V(\partial\Omega) &\to \partial\Omega \times (-\epsilon, \epsilon) \\ x &\mapsto (\pi(x), t(x)), \end{aligned}$$

onde $\pi(x)$ = o ponto mais próximo a x em $\partial\Omega$ e $t(x) = \pm\, \text{dist}\,(x, \pi(x))$, $\pi \in C^2$, $t \in C^3$. Para h próximo de i_Ω, como φ e $\tilde{\varphi}$ ficam C^2 próximas, $\tilde{\varphi}$ também é um difeomorfismo C^2. Vale complementar que no caso de $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, existe uma transformação conforme ρ que leva Ω no disco, neste φ^{-1} pode ser descrita explicitamente.

Se $\psi_h = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$, segue que,

$$\begin{aligned} \psi_h : V(\partial\Omega) &\to \tilde{V}(\partial\Omega) \\ x &\mapsto \pi(x) + t(x)\tilde{N}_\Omega(\pi(x)). \end{aligned}$$

Observemos que ψ_h é um difeomorfismo C^2, $(\psi_h)_{|\partial\Omega} = i_{\partial\Omega}$ e, se $p \in \partial\Omega$,

$$D\psi_h(p) \cdot N_\Omega(p) = \lim_{t\to 0} \frac{\psi_h(p + tN_\Omega(p)) - \psi_h(p)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{p + t\tilde{N}_\Omega(p) - p}{t} = \tilde{N}_\Omega(p). \tag{2.3}$$

Agora, tomemos uma extensão suave de ψ_h, $\tilde{\psi}_h$, para o interior de Ω. Por exemplo, $\tilde{\psi}_h$ pode ser igual à identidade fora de uma vizinhança conveniente da fronteira que continuaremos a denotar por $V(\partial\Omega)$. Do Cálculo, para $\epsilon > 0$, existe uma função suave $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\theta(x) = 1$, $x \in [-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}]$ e $\theta(x) = 0$, $x \leq \epsilon$ ou $x \geq \epsilon$. Assim, basta fazermos

$$\tilde{\psi}(p) = \pi(p) + t(p)[\theta(t(p))\tilde{N}_\Omega(\pi(p)) + (1 - \theta(t(p)))N_\Omega(\pi(p))].$$

Definamos então $\tilde{h} = h \circ \tilde{\psi}_h : V(\partial\Omega) \cup (\Omega \setminus V(\partial\Omega)) \to \tilde{V}(\partial\Omega_h) \cup (\Omega_h \setminus \tilde{V}(\partial\Omega_h))$. Temos que $\tilde{h}^{-1} = \tilde{\psi}_h^{-1} \circ h^{-1}$ e, se $x \in \partial\Omega$, $\tilde{h}(x) = h(x)$. Para $x \in \partial\Omega$,

$$D\tilde{h}^{-1}_{\tilde{h}(x)} = D(\tilde{\psi}_h^{-1} \circ h^{-1})_{h(x)} = D\psi_h^{-1}(h^{-1}h(x))Dh^{-1}(h(x)) = D\psi_h^{-1}(x)Dh^{-1}(h(x))$$

e

$$D\tilde{h}^{-1}_{\tilde{h}(x)} \cdot N_{\Omega_{\tilde{h}}}(\tilde{h}(x)) = D\tilde{h}^{-1}_{h(x)} \cdot N_{\Omega_h}(h(x)) = D\psi_h^{-1}(x)Dh^{-1}(h(x))N_{\Omega_h}(h(x)) = N_\Omega(x),$$

onde usamos a expressão (2.3), o fato de $\tilde{\psi}_h$ ser a identidade na fronteira de Ω e que $\tilde{h}(\Omega) = h(\Omega)$. Isso significa que se $u \in H^2(\Omega)$ satisfaz $\nabla u(x) \cdot N_\Omega(x) = 0$, $x \in \partial\Omega$, também vale que $\nabla u(x) \cdot D\tilde{h}^{-1}_{\tilde{h}(x)} \cdot N_{\Omega_{\tilde{h}}}(\tilde{h}(x)) = 0$ e, portanto, $D(-A_{i_\Omega}) \subset D(-A_{\tilde{h}})$. Analogamente, $D(-A_{\tilde{h}}) \subset D(-A_{i_\Omega})$.

Por fim, como $\psi_h(x) = \pi(x) + t(x)(Dh^{-1}(h(x))N_{\Omega_h}(h(x)))$, para $\| h - i_\Omega \|_{C^3(\Omega,\mathbb{R}^2)}$ pequeno, ψ_h se aproxima da identidade na norma C^2 e, resulta que $\tilde{h}$ converge para i_Ω em $C^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

■

Com base nesse importante resultado, no que segue, admitiremos que Ω tem fronteira regular de classe C^3 e $h \in \mathit{Diff}^3(\Omega)$.

Lema 2.2.2 *A família de operadores* $\{-A_h\}$ *satisfaz* $\| (A_h - A_{i_\Omega})u \|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon(h) \| A_{i_\Omega}u \|_{L^2(\Omega)} + K(h) \| u \|_{L^2(\Omega)}$; $\forall u \in D(-A_{i_\Omega})$, *com* $\lim_{h\to i_\Omega} \varepsilon(h) = 0$ *e* $\lim_{h\to i_\Omega} K(h) = 0$.

Demonstração:

Escrevamos $h(x) = h(x_1, x_2) = (h_1(x), h_2(x)) = (y_1, y_2) = y$, $x \in \Omega$. Para $i = 1, 2$, temos que:

$$\begin{aligned}
(h^* \frac{\partial}{\partial y_i} h^{*-1}(u))(x) &= \frac{\partial}{\partial y_i}(u \circ h^{-1})(h(x)) \\
&= \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u}{\partial x_j}(h^{-1}(y)) \frac{\partial h_j^{-1}}{\partial y_i}(y) \\
&= \sum_{j=1}^{2} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^{-1} \right]_{j,i} (x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \\
&= \sum_{j=1}^{2} b_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x),
\end{aligned}$$

onde $b_{ij}(x)$ é i, j entrada da inversa transposta da matriz Jacobiana $\left[\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j} \right]_{i,j=1}^{2}$. Daí,

$$\begin{aligned}
(h^* \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} h^{*-1}(u))(x) &= \sum_{k=1}^{2} b_{ik}(x) \left(\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + b_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}(x) \right) \\
&= \sum_{j,k=1}^{2} b_{ik}(x) b_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}(x) + \sum_{j,k=1}^{2} b_{ik}(x) \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) + L_i(u)(x),
\end{aligned}$$

sendo $L_i(u)(x) = (b_{ii}^2(x) - 1)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{j,k=1}^{2}(1 - \delta_{i,j,k}) b_{ik}(x) b_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}(x) + \sum_{j,k=1}^{2} b_{ik}(x) \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$, onde $\delta_{i,j,k} = 1$ se $i = j = k$ e 0 caso contrário.

Logo,

$$h^* \Delta_{h(\Omega)} h^{*-1}(u) = \Delta_\Omega(u) + Lu$$

com

$$Lu = \sum_{i=1}^{2} L_i u.$$

Como $b_{jk} \to \delta_{jk}$ em $C^1(\bar{\Omega})$ quando $h \to i_\Omega$ em $C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, os coeficientes de L vão à zero quando $h \to i_\Omega$ em $C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$. Por Agmon, Douglis e Nirenberg (1955),

$$\| Lu \|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon(h) \| \Delta_\Omega u \|_{L^2(\Omega)} + K(h) \| u \|_{L^2(\Omega)},$$

com $\varepsilon(h)$ e $K(h)$ convergindo a 0 à medida que $h \to i_\Omega$ em $C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^2)$, donde segue o desejado.

■

Aplicando então o Lema 3.1 em Pereira e Pereira (2007), obtemos que, para h suficientemente próximo de i_Ω, $-A_h$ é setorial e podemos estabelecer um setor e uma constante M comuns a tais operadores.

2.2.2 Setorialidade em H^{-1}

Neste ponto, vamos estender o operador A_h para um operador $A_{h,-1} : L^2(\Omega) \to H^{-2}(\Omega)$ usando dualidade e, através de interpolação, definimos o operador $A_{h,-1/2} : H^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$.

Se $u \in D(-A_h)$, $\psi \in H^1(\Omega)$, $v = u \circ h^{-1}$ e J_h denota o determinante da matriz Jacobiana $\left[\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j}\right]_{i,j=1}^2$, encontramos, integrando por partes,

$$\begin{aligned}
< -A_h u, \psi >_{-1,1} &= -\int_\Omega (h^* B_h h^{*-1} u)(x)\psi(x)\,dx + \int_\Omega a u(x)\psi(x)\,dx \\
&= -\int_\Omega B_h(u \circ h^{-1})(h(x))\psi(x)\,dx + a\int_\Omega u(x)\psi(x)\,dx \\
&= -\int_{\Omega_h} B_h v(y)\psi(h^{-1}(y))\frac{1}{|J_h(h^{-1}(y))|}\,dy + a\int_{\Omega_h} u(h^{-1}(y))\psi(h^{-1}(y))\frac{1}{|J_h(h^{-1}(y))|}\,dy \\
&= \int_{\Omega_h} \nabla_{\Omega_h} v(y)\cdot\nabla_{\Omega_h}\psi(h^{-1}(y))\frac{1}{|J_h(h^{-1}(y))|}\,dy \\
&- \int_{\partial\Omega_h} \frac{\partial v}{\partial N_{\Omega_h}}(y)\psi(h^{-1}(y))\frac{1}{|J_h(h^{-1}(y))|}\,d\sigma(y) + a\int_{\Omega_h} u(h^{-1}(y))\psi(h^{-1}(y))\frac{1}{|J_h(h^{-1}(y))|}\,dy \\
&= \int_{\Omega_h} \nabla_{\Omega_h} v(y)\cdot\nabla_{\Omega_h}\psi(h^{-1}(y))\frac{1}{|J_h(h^{-1}(y))|}\,dy \\
&+ a\int_{\Omega_h} u(h^{-1}(y))\psi(h^{-1}(y))\frac{1}{|J_h(h^{-1}(y))|}\,dy \\
&= \int_\Omega h^*\,\nabla_{\Omega_h}\,h^{*-1}u(x)\cdot h^*\,\nabla_{\Omega_h}\,h^{*-1}\frac{\psi}{|J_h|}(x)\,|J_h(x)|\,dx + a\int_\Omega u(x)\psi(x)\,dx. \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

Como (2.4) está bem definida para $u \in H^1(\Omega)$, ela nos fornece a expressão de $-A_{h,-1/2}$ para qualquer u em seu domínio. A seguir mostraremos que $-A_{h,-1/2}$ é setorial.

Lema 2.2.3 *A família de operadores $\{-A_{h,-1/2}\}_{h\in Diff^2(\Omega)}$ verifica $\| (A_{h,-1/2} - A_{i_\Omega,-1/2})u \|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \varepsilon(h) \| A_{i_\Omega,-1/2}u \|_{H^{-1}(\Omega)} + K(h) \| u \|_{H^{-1}(\Omega)}$, $\forall u \in D(-A_{i_\Omega,-1/2})$, com $\varepsilon(h)$ e $K(h)$ funções positivas tais que $lim_{h\to i_\Omega}\varepsilon(h) = 0$ e $\lim_{h\to i_\Omega} K(h) = 0$.*

Demonstração:

De fato, provaremos que,

$$| < (A_{h,-1/2} - A_{i_\Omega,-1/2})u, \psi >_{-1,1} | \leq \varepsilon(h) \| u \|_{H^1(\Omega)} \| \psi \|_{H^1(\Omega)},$$

para todo $u \in H^1(\Omega)$ e todo $\psi \in H^1(\Omega)$ com $lim_{h \to i_\Omega} \varepsilon(h) = 0$. Vejamos,

$$\begin{aligned}
|< (A_{h,-1/2} - A_{i_\Omega,-1/2})u, \psi >_{-1,1}| &= \left| \int_\Omega (h^* \nabla_{\Omega_h} h^{*-1} - \nabla_\Omega) u \cdot h^* \nabla_{\Omega_h} h^{*-1} \left(\frac{\psi}{|J_h|} \right) |J_h| \, dx \right. \\
&+ \int_\Omega \nabla_\Omega u \cdot (h^* \nabla_{\Omega_h} h^{*-1} - \nabla_\Omega) \left(\frac{\psi}{|J_h|} \right) |J_h| \, dx \\
&+ \left. \int_\Omega \nabla_\Omega u \cdot \nabla_\Omega \left(\frac{\psi}{|J_h|} \right) |J_h| \, dx - \int_\Omega \nabla_\Omega u \cdot \nabla_\Omega \psi \, dx \right| \\
&= \left| \int_\Omega (h^* \nabla_{\Omega_h} h^{*-1} - \nabla_\Omega) u \cdot h^* \nabla_{\Omega_h} h^{*-1} \left(\frac{\psi}{|J_h|} \right) |J_h| \, dx \right. \\
&+ \int_\Omega \nabla_\Omega u \cdot (h^* \nabla_{\Omega_h} h^{*-1} - \nabla_\Omega) \left(\frac{\psi}{|J_h|} \right) |J_h| \, dx \\
&+ \left. \int_\Omega \psi \nabla_\Omega u \cdot \nabla_\Omega \left(\frac{1}{|J_h|} \right) |J_h| \, dx + \int_\Omega \nabla_\Omega u \cdot \nabla_\Omega \psi \, dx - \int_\Omega \nabla_\Omega u \cdot \nabla_\Omega \psi \, dx \right| \\
&\leq \int_\Omega \left| (h^* \nabla_{\Omega_h} h^{*-1} - \nabla_\Omega) u \cdot h^* \nabla_{\Omega_h} h^{*-1} \left(\frac{\psi}{|J_h|} \right) \right| |J_h| \, dx \\
&+ \int_\Omega \left| \nabla_\Omega u \cdot (h^* \nabla_{\Omega_h} h^{*-1} - \nabla_\Omega) \left(\frac{\psi}{|J_h|} \right) \right| |J_h| \, dx \\
&+ \int_\Omega \left| \psi \nabla_\Omega u \cdot \nabla_\Omega \left(\frac{1}{|J_h|} \right) \right| |J_h| \, dx.
\end{aligned}$$

Conforme os cálculos feitos no Lema 2.2.2, $(h^* \frac{\partial}{\partial y_i} h^{*-1}(u))(x) = \sum_{j=1}^2 b_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$, sendo $b_{ij}(x)$ a i, j entrada da inversa transposta da matriz Jacobiana $\left[\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j} \right]_{i,j=1}^2$. Assim, se $\delta_{i,j} = 1$ se $i = j$ e 0 caso contrário,

$$(h^* \nabla_{\Omega_h} h^{*-1} - \nabla_\Omega) u(x) = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^2 (b_{1j}(x) - \delta_{1j}) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \\ \sum_{j=1}^2 (b_{2j}(x) - \delta_{2j}) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \end{bmatrix},$$

o que nos permite estimar a primeira integral da desigualdade,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega & \left| (h^* \nabla_{\Omega_h} h^{*-1} - \nabla_\Omega) u \cdot h^* \nabla_{\Omega_h} h^{*-1} \left(\frac{\psi}{|J_h|} \right) \right| |J_h| \, dx \\
&\leq \max_{x \in \bar{\Omega}} \{|J_h|\} \int_\Omega \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\sum_{j=1}^2 b_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\psi}{|J_h|} \right) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{i=1}^2 \left[\sum_{j=1}^2 (b_{ij} - \delta_{ij}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dx \\
&\leq \max_{x \in \bar{\Omega}} \{|J_h|\} \left\{ \int_\Omega \sum_{i=1}^2 \left[\sum_{j=1}^2 b_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\psi}{|J_h|} \right) \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_\Omega \sum_{i=1}^2 \left[\sum_{j=1}^2 (b_{ij} - \delta_{ij}) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_0(h) \left(\int_\Omega \nabla_\Omega \psi \cdot \nabla_\Omega \psi \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \nabla_\Omega u \cdot \nabla_\Omega u \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&+ C_0'(h) \left(\int_\Omega \psi^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \nabla_\Omega u \cdot \nabla_\Omega u \, dx \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

onde $C_0(h)$ e $C_0'(h)$ são funções dependendo de b_{ij}, $\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{|J_h|} \right)$ e que tendem a zero quando $h \to i_\Omega$ em $C^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$.

Analogamente, estimamos as outras integrais:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega & \left| \nabla_\Omega u \cdot (h^* \nabla_{\Omega_h} h^{*-1} - \nabla_\Omega)\left(\frac{\psi}{|J_h|}\right)\right| |J_h|\, dx \\
&\leq \max_{x\in\bar\Omega}\{|J_h|\} \left\{\int_\Omega \sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x_j}\right]^2 dx\right\}^{\frac12} \left\{\int_\Omega \sum_{i=1}^{2}\left[\sum_{j=1}^{2}(b_{ij}-\delta_{ij})\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\psi}{|J_h|}\right)\right]^2 dx\right\}^{\frac12} \\
&\leq C_1(h)\left(\int_\Omega \nabla_\Omega\psi\cdot\nabla_\Omega\psi\, dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega \nabla_\Omega u\cdot\nabla_\Omega u\, dx\right)^{\frac12} \\
&+ C_1'(h)\left(\int_\Omega \psi^2\, dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega \nabla_\Omega u\cdot\nabla_\Omega u\, dx\right)^{\frac12}
\end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega & \left| \psi\, \nabla_\Omega\, u \cdot \nabla_\Omega\left(\frac{1}{|J_h|}\right)\right| |J_h|\, dx \\
&\leq \max_{x\in\bar\Omega}\{|J_h|\}\int_\Omega \psi \left[\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2\right]^{\frac12}\left[\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{|J_h|}\right)\right)^2\right]^{\frac12} dx \\
&\leq C_2(h)\left(\int_\Omega \psi^2\, dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega |\nabla_\Omega\, u|^2\, dx\right)^{\frac12},
\end{aligned}$$

com $C_1(h)$, $C_1'(h)$, e $C_2(h) \to 0$ quando $h \to i_\Omega$ em $C^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$. E o resultado segue.

∎

A setorialidade então de $-A_{h,-1/2}$, bem como a determinação de um setor e uma constante M comuns a tais operadores, segue novamente do Lema 3.1 em Pereira e Pereira (2007), desde que h esteja suficientemente próximo de i_Ω em C^2.

2.3 O problema abstrato em uma escala de espaços de Banach

Nesta seção, nosso objetivo é colocar o problema (2.2) em um espaço abstrato conveniente. Sabemos pela primeira parte do trabalho que os domínios X_h^α (respectivamente $X_{h,-1/2}^\alpha$), $\alpha \geq 0$, das potências fracionárias de $-A_h$ (respectivamente $-A_{h,-1/2}$) são espaços de Banach; $X_h^0 = L^2(\Omega)$ ($X_{h,-1/2}^0 = H^{-1}(\Omega)$), $X_h^1 = D(-A_h)$ ($X_{h,-1/2}^1 = D(-A_{h,-1/2})$), $X_h^\alpha = H^{2\alpha}(\Omega)$ quando 2α é um número inteiro, $X_h^{-\alpha} = (X_h^\alpha)'$ para $\alpha \geq 0$, onde $'$ denota o espaço dual. Observemos também que $X_h^{\alpha-\frac12} = X_{h,-1/2}^\alpha$ para $\frac12 \leq \alpha \leq 1$. Por abuso de notação, escreveremos ainda $X_h^{\alpha-\frac12}$ em vez de $X_{h,-1/2}^\alpha$ se $0 \leq \alpha \leq \frac12$.

Teorema 2.3.1 *Para* $\frac{-1}{2} \leq \beta \leq 0$, *definimos o operador* $(-A_{h,-1/2})_\beta : X_h^{\beta+1} \subset X_h^\beta \to X_h^\beta$, $(-A_{h,-1/2})_\beta := -A_{h,-1/2}|_{X_h^{\beta+1}}$. *Então,* $(-A_{h,-1/2})_\beta$ *é setorial.*

Demonstração:

Seja $\beta = -1/2 + \delta$ com $0 \leq \delta \leq \frac{1}{2}$. Temos que $(-A_{h,-1/2})_\beta = (-A_{h,-1/2})^{-\delta}(-A_{h,-1/2})(-A_{h,-1/2})^{\delta}$.

Agora, $(-A_{h,-1/2})^{\delta}$ é uma isometria de $X_h^\beta (= X_{h,-1/2}^{\beta+\frac{1}{2}})$ em $X_h^{\frac{-1}{2}}$ $(= X_{h,-1/2}^0)$. Com efeito, se $x \in X_{h,-1/2}^{\beta+\frac{1}{2}}$,

$$\| (-A_{h,-1/2})^{\delta} x \|_{X_{h,-1/2}^0} = \| (-A_{h,-1/2})^{\beta+\frac{1}{2}} x \| = \| x \|_{X_{h,-1/2}^{\beta+\frac{1}{2}}},$$

donde segue o desejado.

■

A partir disso, podemos estabelecer (2.2) como um problema abstrato numa escala de espaços de Banach $\{ X_h^\beta \,|\, \frac{-1}{2} \leq \beta \leq 0 \}$,

$$\begin{cases} u_t + (-A_{h,-1/2})_\beta = (H_{h,-1/2})_\beta u, \;\; t > t_0, \\ u(t_0) = u_0 \in X_h^\eta, \end{cases} \tag{2.5}$$

onde $(H_{h,-1/2})_\beta = H(\cdot,h) = (F_{h,-1/2})_\beta + (G_{h,-1/2})_\beta : X_h^\eta \to X_h^\beta$, com $0 \leq \eta \leq \beta + 1$.

•$(F_{h,-1/2})_\beta = F(\cdot,h) : X_h^\eta \to X_h^\beta$ é dada por:

$$< F(u,h), \phi >_{\beta,-\beta} = \int_\Omega f(u)\,\phi\,dx, \;\forall \phi \in X_h^{-\beta}.$$

•$(G_{h,-1/2})_\beta = G(\cdot,h) : X_h^\eta \to X_h^\beta$ é definida por:

$$< G(u,h), \phi >_{\beta,-\beta} = \int_{\partial\Omega} g(\gamma(u))\,\gamma(\phi) \left| \frac{J_{\partial\Omega} h}{Jh} \right| d\sigma(x), \;\forall \phi \in X_h^{-\beta},$$

sendo γ a função traço e $J_{\partial\Omega}h$ o determinante da matriz Jacobiana do difeomorfismo $h : \partial\Omega \to \partial h(\Omega)$.

2.4 Existência de soluções locais

Mostramos a seguir, com algumas hipóteses adicionais sobre as funções f e g, que o problema abstrato (2.5) possui solução local.

Para provar que o problema está bem posto localmente, admitiremos as seguintes condições de regularidade e crescimento para f e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

(i) $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e existem números reais $\lambda_1 > 0$ e $L_1 > 0$ tais que:

$$| f(u_1) - f(u_2) | \leq L_1 \,(1 + | u_1 |^{\lambda_1} + | u_2 |^{\lambda_1}) \, | u_1 - u_2 |, \; \forall u_1, \, u_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.6}$$

(ii) $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e existem números reais $\lambda_2 > 0$ e $L_2 > 0$ tais que:

$$| g(u_1) - g(u_2) | \leq L_2 \,(1 + | u_1 |^{\lambda_2} + | u_2 |^{\lambda_2}) \, | u_1 - u_2 |, \; \forall u_1, \, u_2 \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Lema 2.4.1 *Se $\frac{1}{2} - \frac{1}{2(\lambda_1+1)} < \eta < \beta + 1$, então $X_h^\eta \subset L^{2(\lambda_1+1)}(\Omega)$.*

Demonstração:

De fato, pelo Teorema 1.3.3, $X_h^\eta \subset W^{k,2}(\Omega)$ quando $k < 2\eta$.

E, por uma das Desigualdades de Nirenberg - Gagliardo, item (a) da Proposição 1.3.1, $\| u \|_{L^{2(\lambda_1+1)}(\Omega)} \leq C \| u \|_{W^{k,2}(\Omega)}$ se $k \geq 1 - \frac{1}{(\lambda_1+1)}$.

Logo, reunindo tais considerações, temos que $X_h^\eta \subset L^{2(\lambda_1+1)}(\Omega)$ desde que $\eta > \frac{1}{2} - \frac{1}{2(\lambda_1+1)}$.

É importante observar que uma das hipóteses do Teorema 1.3.3 é a de que Ω tem a propriedade da extensão C^m e isso é verdadeiro em nosso contexto conforme o Teorema 1.9 em Henry (2005) e até mesmo para regiões cuja fronteira é apenas Lipschitziana como demonstra Stein (1970).

$\blacksquare$

Lema 2.4.2 *Suponha que f satisfaz (2.6) e $\eta > \frac{1}{2} - \frac{1}{2(\lambda_1+1)}$. Então, a aplicação $(F_{h,-1/2})_\beta = F : X_h^\eta \to X_h^\beta$ está bem definida e é limitada em conjuntos limitados de X_h^η.*

Demonstração:

Sejam $u \in X_h^\eta$ e $\phi \in X_h^{-\beta}$,

$$\begin{aligned}
| < F(u,h), \phi >_{\beta,-\beta} | &\leq \int_\Omega | f(u) - f(0) | \, | \phi | \, dx + \int_\Omega | f(0) | \, | \phi | \, dx \\
&\leq L_1 \int_\Omega | u | \, | \phi | \, dx + L_1 \int_\Omega | u |^{\lambda_1+1} | \phi | \, dx + \int_\Omega | f(0) | \, | \phi | \, dx \\
&\leq L_1 \| u \|_{L^2(\Omega)} \| \phi \|_{L^2(\Omega)} + L_1 \| u^{\lambda_1+1} \|_{L^2(\Omega)} \| \phi \|_{L^2(\Omega)} + \| f(0) \|_{L^2(\Omega)} \| \phi \|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq L_1 \| u \|_{L^2(\Omega)} \| \phi \|_{L^2(\Omega)} + L_1 \| u \|^{\lambda_1+1}_{L^{2(\lambda_1+1)}(\Omega)} \| \phi \|_{L^2(\Omega)} + \| f(0) \|_{L^2(\Omega)} \| \phi \|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq L_1 K_1 K_2 \| u \|_{X_h^\eta} \| \phi \|_{X_h^{-\beta}} + L_1 K_1 K_3^{\lambda_1+1} \| u \|^{\lambda_1+1}_{X_h^\eta} \| \phi \|_{X_h^{-\beta}} + K_1 \| f(0) \|_{L^2(\Omega)} \| \phi \|_{X_h^{-\beta}},
\end{aligned}$$

onde K_1, K_2 e K_3 são as constantes de imersão de, respectivamente, $X_h^{-\beta} \subset L^2(\Omega)$, $X_h^\eta \subset L^2(\Omega)$ e $X_h^\eta \subset L^{2(\lambda_1+1)}(\Omega)$. As duas primeiras são imediatas uma vez que $0 \leq -\beta \leq \frac{1}{2}$ e $0 \leq \eta \leq \beta+1$ e a terceira, demonstramos no Lema 2.4.1.

Portanto, se $u \in X_h^\eta$ e $\phi \in X_h^{-\beta}$,

$$\| F(u,h) \|_{X_h^\beta} \leq L_1 K_1 K_2 \| u \|_{X_h^\eta} + L_1 K_1 K_3^{\lambda_1+1} \| u \|_{X_h^\eta}^{\lambda_1+1} + K_1 \| f(0) \|_{L^2(\Omega)},$$

o que nos mostra que F é limitada em conjuntos limitados de X_h^η.

■

Lema 2.4.3 *Suponha que estejam satisfeitas as condições do Lema 2.4.2 e sejam p e q conjugados com $\frac{1}{\lambda_1} < p < \infty$. Então, se $\eta > \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p\lambda_1}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2q}\right\}$, a aplicação F é localmente Lipschitz contínua em u.*

Demonstração:

Sejam $u_1,\ u_2 \in X_h^\eta$ e $\phi \in X_h^{-\beta}$,

$$\begin{aligned}
| < F(u_1,h) - F(u_2,h), \phi >_{\beta,-\beta} | &\leq \int_\Omega L_1 \,(\, 1 + | u_1 |^{\lambda_1} + | u_2 |^{\lambda_1} \,)\, | u_1 - u_2 | \, | \phi | \, dx \\
&\leq L_1 \left(\int_\Omega (\, 1 + | u_1 |^{\lambda_1} + | u_2 |^{\lambda_1} \,)^2 \, | u_1 - u_2 |^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \| \phi \|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq L_1 \left(\int_\Omega (\, 1 + | u_1 |^{\lambda_1} + | u_2 |^{\lambda_1} \,)^{2p} \, dx \right)^{\frac{1}{2p}} \left(\int_\Omega | u_1 - u_2 |^{2q} \, dx \right)^{\frac{1}{2q}} \| \phi \|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq L_1 \,(\, | \Omega |^{\frac{1}{2p}} + \| u_1^{\lambda_1} \|_{L^{2p}(\Omega)} + \| u_2^{\lambda_1} \|_{L^{2p}(\Omega)}) \, \| u_1 - u_2 \|_{L^{2q}(\Omega)} \| \phi \|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq L_1 \,(\, | \Omega |^{\frac{1}{2p}} + \| u_1 \|_{L^{2p\lambda_1}(\Omega)}^{\lambda_1} + \| u_2 \|_{L^{2p\lambda_1}(\Omega)}^{\lambda_1}) \, \| u_1 - u_2 \|_{L^{2q}(\Omega)} \| \phi \|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq L_1 \,(\, | \Omega |^{\frac{1}{2p}} + K_4^{\lambda_1} \| u_1 \|_{X_h^\eta}^{\lambda_1} + K_4^{\lambda_1} \| u_2 \|_{X_h^\eta}^{\lambda_1}) \, K_5 \| u_1 - u_2 \|_{X_h^\eta} K_1 \| \phi \|_{X_h^{-\beta}},
\end{aligned}$$

onde K_1 é a constante de imersão referente a $X_h^{-\beta} \subset L^2(\Omega)$ e K_4 e K_5 são obtidas pela inclusão de $X_h^\eta \subset L^{2p\lambda_1}(\Omega)$ e $X_h^\eta \subset L^{2q}(\Omega)$ respectivamente, usando o mesmo raciocínio que no Lema 2.4.1 dado que $\eta > \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p\lambda_1}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2q}\right\}$ e $p > \frac{1}{\lambda_1}$.

Logo, se u_1 e u_2 pertencem a um subconjunto limitado U de X_h^η, $\| u \|_{X_h^\eta} \leq L$, $\forall u \in U$,

$$\| F(u_1,h) - F(u_2,h) \|_{X_h^\beta} \leq L_1 \,(\, | \Omega |^{\frac{1}{2p}} + 2 K_4^{\lambda_1} L^{\lambda_1} \,)\, K_5 K_1 \| u_1 - u_2 \|_{X_h^\eta},$$

donde F é localmente Lipschitziana em u.

■

Para as propriedades de regularidade de $(G_{h,-1/2})_\beta = G$, precisaremos da seguinte função:

$$\theta(x,h) = \left| \frac{J_{\partial\Omega} h}{J_h}(x) \right|, \ x \in \mathbb{R}^2.$$

Provaremos que $\| \theta \|_\infty = \sup\{ | \theta(x,h) | \, | \, x \in \partial\Omega, \, \| h - i_\Omega \|_{C^2(\Omega,\mathbb{R}^2)} < \epsilon_0 \}$ é finita, para algum $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno fixado.

Notemos que para cada $h = h_0$ fixo, $\sup_{x\in\partial\Omega} \theta(x, h_0)$ é finito afinal, trata-se de uma função contínua em um compacto. E, devido à convergência de h para i_Ω na norma $C^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$, o denominador na expressão de θ, J_h, converge para 1 uniformemente. Devemos então estudar $J_{\partial\Omega}h$.

Seguindo primeiramente uma abordagem intrínseca, chamemos $M = \partial\Omega$ e $N = h(\partial\Omega)$, ambos de dimensão $n - 1$ (em nosso caso, de dimensão 1). Se f é uma função em N a $\mathbb{R}$,

$$\int_N f(y)\, d\omega_N = \int_M f(h(x))\, J_{\partial\Omega}h \, d\omega_M,$$

sendo $d\omega_{\{\cdot\}}$ o elemento de volume em M ou em N e $J_{\partial\Omega}h$ representa a correção do fator de volume. Por outro lado,

$$\int_N f(y)\, d\omega_N = \int_M f(h(x)) h^* d\omega_N.$$

Assim, se $p \in M$,

$$(h^* d\omega_N)(p) = J_{\partial\Omega}h(p) d\omega_M(p). \tag{2.8}$$

Seja $\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ uma base ortonormal de TpM, o espaço tangente a p em M. Usando (2.8),

$$(h^* d\omega_N)(p)(e_1, \cdots, e_{n-1}) = J_{\partial\Omega}h(p) d\omega_M(p)(e_1, \cdots, e_{n-1}) = J_{\partial\Omega}h(p).$$

Agora,

$$(h^* d\omega_N)(p)(e_1, \cdots, e_{n-1}) = d\omega_N(h(p))(h_* e_1, \cdots, h_* e_{n-1}) = \det \begin{bmatrix} Dh_p e_1 \\ \vdots \\ Dh_p e_{n-1} \\ N_q \end{bmatrix},$$

sendo $q = h(p)$ e N_q o vetor normal a q em N. Observemos que $N_q = \frac{(h_*^{-1})^t N_p}{\| (h_*^{-1})^t N_p \|}$, pois se $\{f_1, \cdots, f_{n-1}\}$ é uma base ortonormal de TqN, o espaço tangente a q em N,

$$< (h_*^{-1})^t N_p, f_i > = < N_p, h_*^{-1} f_i > = 0, \quad \forall i = 1, \cdots, n-1,$$

uma vez que h leva um espaço tangente no outro. Daí,

$$J_{\partial\Omega}h(p) = \det \begin{bmatrix} Dh_p e_1 \\ \vdots \\ Dh_p e_{n-1} \\ \frac{(h_*^{-1})^t N_p}{\| (h_*^{-1})^t N_p \|} \end{bmatrix},$$

o que evidencia que $J_{\partial\Omega}h$ é limitado uniformemente em h se $h \to i_\Omega$ em $C^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Trabalhando em coordenadas, sejam $M, N, p,$ e q como acima, ϕ e ψ um sistema de vizinhanças locais em p e q respectivamente com $\phi(x) = p$ e $\psi(y) = q$. Se $\eta = \psi^{-1} \circ h \circ \phi$,

$$(\psi^{-1} \circ h \circ \phi)^{*}(y)dy = (J_{\eta})(x)dx.$$

E, vale também que,

$$(\psi^{-1} \circ h \circ \phi)^{*}(y)dy = (\phi^{*} \circ h^{*} \circ \psi^{-1*})(y)dy = J_{\phi} J_{\partial\Omega} h J_{\psi^{-1}} dx.$$

Como $\| h - i_{\Omega} \|_{C^2(\Omega,\mathbb{R}^2)} \to 0$, a grosso modo, ϕ e ψ ficam arbitrariamente próximas e, J_{ϕ} e J_{ψ}, também, donde $J_{\partial\Omega} h \simeq J_{\eta}$ em C^2 uniformemente. Lembremos que a fronteira é compacta, sendo necessário finitas vizinhanças coordenadas para recobrí-la.

Lema 2.4.4 *Suponha que g satisfaz (2.7), $\eta > \frac{1}{2} - \frac{1}{4(\lambda_2+1)}$ e $\beta < -\frac{1}{4}$. Então a aplicação $(G_{h,-1/2})_{\beta} = G : X_h^{\eta} \to X_h^{\beta}$ está bem definida e é limitada em conjuntos limitados de X_h^{η} para $\| h - i_{\Omega} \|_{C^2(\Omega,\mathbb{R}^2)} < \epsilon_0$.*

Demonstração:

Sejam $u \in X_h^{\eta}$ e $\phi \in X_h^{-\beta}$,

$$\begin{aligned}
| < G(u,h), \phi >_{\beta,-\beta} | &\leq \int_{\partial\Omega} | g(\gamma(u)) | | \gamma(\phi) | \left| \frac{J_{\partial\Omega} h}{Jh} \right| d\sigma(x) \\
&\leq \| \theta \|_{\infty} \left(\int_{\partial\Omega} | g(\gamma(u)) - g(\gamma(0)) | | \gamma(\phi) | d\sigma(x) + \int_{\partial\Omega} | g(\gamma(0)) | | \gamma(\phi) | d\sigma(x) \right) \\
&\leq \| \theta \|_{\infty} L_2 \int_{\partial\Omega} | \gamma(u) | | \gamma(\phi) | d\sigma(x) + \| \theta \|_{\infty} L_2 \int_{\partial\Omega} | \gamma(u) |^{\lambda_2+1} | \gamma(\phi) | d\sigma(x) \\
&+ \| \theta \|_{\infty} \int_{\partial\Omega} | g(\gamma(0)) | | \gamma(\phi) | d\sigma(x) \\
&\leq \| \theta \|_{\infty} L_2 \| \gamma(u) \|_{L^2(\partial\Omega)} \| \gamma(\phi) \|_{L^2(\partial\Omega)} + \| \theta \|_{\infty} L_2 \| \gamma(u)^{\lambda_2+1} \|_{L^2(\partial\Omega)} \| \gamma(\phi) \|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&+ \| \theta \|_{\infty} \| g(\gamma(0)) \|_{L^2(\partial\Omega)} \| \gamma(\phi) \|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\leq \| \theta \|_{\infty} L_2 (\| \gamma(u) \|_{L^2(\partial\Omega)} + \| \gamma(u) \|_{L^{2(\lambda_2+1)}(\partial\Omega)}^{\lambda_2+1}) \| \gamma(\phi) \|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&+ \| \theta \|_{\infty} \| g(\gamma(0)) \|_{L^2(\partial\Omega)} \| \gamma(\phi) \|_{L^2(\partial\Omega)} \\
&\leq L_2 \| \theta \|_{\infty} \overline{K_3}\, \overline{K_1} \| u \|_{X_h^{\eta}} \| \phi \|_{X_h^{-\beta}} + L_2 \| \theta \|_{\infty} \overline{K_2}^{\lambda_2+1} \overline{K_1} \| u \|_{X_h^{\eta}} \| \phi \|_{X_h^{-\beta}} \\
&+ \| \theta \|_{\infty} \overline{K_1} \| g(\gamma(0)) \|_{L^2(\partial\Omega)} \| \phi \|_{X_h^{-\beta}},
\end{aligned}$$

onde as constantes $\overline{K_1}$, $\overline{K_2}$, $\overline{K_3}$ referem-se ao seguinte: se $s = 2\eta$, então $X_h^{\eta} \subset H^s(\Omega)$ e $\gamma : H^s(\Omega) \to L^{\frac{1}{1-s}}(\partial\Omega)$ [Veja Necas (2012)], obtendo $\| \gamma(\phi) \|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \overline{K_1} \| \phi \|_{X_h^{-\beta}}$ desde que $-\beta > \frac{1}{4}$, $\| \gamma(u) \|_{L^{2(\lambda_2+1)}(\partial\Omega)} \leq \overline{K_2} \| u \|_{X_h^{\eta}}$ para $\eta > \frac{1}{2} - \frac{1}{4(\lambda_2+1)}$ e $\| \gamma(u) \|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \overline{K_3} \| u \|_{X_h^{\eta}}$ com $\eta > \frac{1}{4}$. E o resultado segue.

■

Lema 2.4.5 *Suponha que estejam satisfeitas as condições do Lema 2.4.4 e sejam p e q expoentes conjugados com* $\frac{1}{2\lambda_2} < p < \infty$. *Então, se* $\eta > \max\left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{4p\lambda_2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4q}\right\}$ *e* $\beta < -\frac{1}{4}$, *a aplicação* $G : X_h^\eta \to X_h^\beta$ *é uniformemente contínua em h para u em conjuntos limitados de* X_h^η *e localmente Lipschitz contínua em u para* $\| h - i_\Omega \|_{C^2(\Omega,\mathbb{R}^2)} < \epsilon_0$.

Demonstração:

Sejam u_1, $u_2 \in X_h^\eta$ e $\phi \in X_h^{-\beta}$,

$$\begin{aligned}
| & < G(u_1,h) - G(u_2,h), \phi >_{\beta,-\beta} | \\
\leq & \int_{\partial\Omega} | g(\gamma(u_1)) - g(\gamma(u_2)) | | \gamma(\phi) | \left| \frac{J_{\partial\Omega} h}{Jh} \right| d\sigma(x) \\
\leq & \| \theta \|_\infty L_2 \int_{\partial\Omega} (1 + | \gamma(u_1) |^{\lambda_2} + | \gamma(u_2) |^{\lambda_2}) | \gamma(u_1) - \gamma(u_2) | | \gamma(\phi) | d\sigma(x) \\
\leq & \| \theta \|_\infty L_2 \left(\int_{\partial\Omega} (1 + | \gamma(u_1) |^{\lambda_2} + | \gamma(u_2) |^{\lambda_2})^2 | \gamma(u_1) - \gamma(u_2) |^2 d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2}} \| \gamma(\phi) \|_{L^2(\partial\Omega)} \\
\leq & \| \theta \|_\infty L_2 \| \gamma(\phi) \|_{L^2(\partial\Omega)} \left(\int_{\partial\Omega} (1 + | \gamma(u_1) |^{\lambda_2} + | \gamma(u_2) |^{\lambda_2})^{2p} d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2p}} \left(\int_{\partial\Omega} | \gamma(u_1) - \gamma(u_2) |^{2q} d\sigma(x) \right)^{\frac{1}{2q}} \\
\leq & \| \theta \|_\infty L_2 \| \gamma(\phi) \|_{L^2(\partial\Omega)} \| \gamma(u_1) - \gamma(u_2) \|_{L^{2q}(\partial\Omega)} (| \partial\Omega |^{\frac{1}{2p}} + \| \gamma(u_1) \|^{\lambda_2}_{L^{2p\lambda_2}(\partial\Omega)} + \| \gamma(u_2) \|^{\lambda_2}_{L^{2p\lambda_2}(\partial\Omega)}) \\
\leq & \| \theta \|_\infty L_2 \overline{K_1} \| \phi \|_{X_h^{-\beta}} \overline{K_5} \| u_1 - u_2 \|_{X_h^\eta} (| \partial\Omega |^{\frac{1}{2p}} + \overline{K_4}^{\lambda_2} \| u_1 \|^{\lambda_2}_{X_h^\eta} + \overline{K_4}^{\lambda_2} \| u_2 \|^{\lambda_2}_{X_h^\eta}),
\end{aligned}$$

onde usamos um raciocínio semelhante ao do Lema 2.4.4 anterior para estabelecer as desigualdades: $\| \gamma(\phi) \|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \overline{K_1} \| \phi \|_{X_h^{-\beta}}$ se $-\beta > \frac{1}{4}$, $\| \gamma(u) \|_{L^{2p\lambda_2}(\partial\Omega)} \leq \overline{K_4} \| u \|_{X_h^\eta}$ se $\eta > \frac{1}{2} - \frac{1}{4p\lambda_2}$ e $\| \gamma(u) \|_{L^{2q}(\partial\Omega)} \leq \overline{K_5} \| u \|_{X_h^\eta}$ desde que $\eta > \frac{1}{2} - \frac{1}{4q}$.

Dessa forma, se u_1, u_2 estão em um conjunto limitado U de X_h^η, $\| u \|_{X_h^\eta} \leq L$, $\forall u \in U$, temos

$$\| G(u_1,h) - G(u_2,h) \|_{X_h^\beta} \leq \| \theta \|_\infty L_2 \overline{K_1} (| \partial\Omega |^{\frac{1}{2p}} + 2\overline{K_4}^{\lambda_2} L^{\lambda_2}) \overline{K_5} \| u_1 - u_2 \|_{X_h^\eta},$$

com $\| \theta \|_\infty$ finito independente de h para $\| h - i_\Omega \|_{C^2(\Omega,\mathbb{R}^2)} < \epsilon_0$. E segue que G é localmente Lipschitz em u.

Agora, se $u \in X_h^\eta$, $\phi \in X_h^{-\beta}$ e h_1, h_2 estão δ próximas de i_Ω, $\delta < \epsilon_0$,

$$| < G(u,h_1) - G(u,h_2), \phi >_{\beta,-\beta} | \leq \| \theta_1 - \theta_2 \|_\infty \int_{\partial\Omega} | g(\gamma(u)) | | \gamma(\phi) | d\sigma(x),$$

com $\| \theta_1 - \theta_2 \|_\infty = \sup_x | \theta(x,h_1) - \theta(x,h_2) | \to 0$ quando $\| h_1 - h_2 \|_{C^2(\Omega,\mathbb{R}^2)} \to 0$. Então, desde que u esteja em um conjunto limitado de X_h^η, com um raciocínio análogo ao que fizemos no Lema 2.4.4, temos $\| G(u,h_1) - G(u,h_2) \|_{X_h^\beta} < \| \theta_1 - \theta_2 \|_\infty C$, onde $C > 0$ é uma constante. Daí, basta tomar δ adequado tal que $\| \theta_1 - \theta_2 \|_\infty < \frac{\epsilon}{C}$ e, vemos que G é uniformemente contínua em h para u em conjuntos limitados de X_h^η e h suficientemente próximo de i_Ω em C^2.

■

Teorema 2.4.6 *Suponha que f e g satisfazem (2.6) e (2.7) respectivamente, sejam β e η como nos Lemas 2.4.2, 2.4.3, 2.4.4, 2.4.5, $\eta < \beta + 1$ e $\| h - i_\Omega \|_{C^2(\Omega,\mathbb{R}^2)} < \epsilon_0$. Então, para qualquer $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times X_h^\eta$, o problema (2.5) possui uma única solução $u(t, t_0, u_0, h)$ com valor inicial $u(t_0) = u_0$.*

Demonstração:

Já sabemos que $(-A_{h,-1/2})_\beta$ é um operador setorial em X_h^β com domínio $X_h^{\beta+1}$. De acordo com os lemas citados, $(H_{h,-1/2})_\beta$ está bem definida, é localmente Lipschitz contínua e limitada em limitados. Portanto, a afirmação segue do Teorema 1.4.2.

■

2.5 Funcional de Lyapunov e existência de solução global

Nesta seção, demonstramos que as soluções dadas pelo Teorema 2.4.6 estão definidas globalmente sob determinadas hipóteses em f e em g.

Suponhamos que existem constantes $c_0, d_0, d_0^{'}$, com $d_0 > d_0^{'}$, tais que,

$$\lim_{|u|\to\infty} \sup \frac{f(u)}{u} \leq c_0 \tag{2.9}$$

e,

$$\lim_{|u|\to\infty} \sup \frac{g(u)}{u} \leq d_0^{'}. \tag{2.10}$$

E o primeiro autovalor μ_1 do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + (a - c_0)u = \mu u \text{ em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial N_\Omega} = d_0 u \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{2.11}$$

é positivo.

Observemos que tais hipóteses ainda são válidas para o operador perturbado $h^* \triangle_{\Omega_h} h^{*-1}$ com condição de fronteira perturbada $h^* \frac{\partial u}{\partial N_{\Omega_h}} h^{*-1}$ afinal, vimos no Lema 2.2.3 que,

$$\| (A_{h,-1/2} - A_{i_\Omega,-1/2})u \|_{H^{-1}(\Omega)} \leq \varepsilon(h) \| A_{i_\Omega,-1/2} u \|_{H^{-1}(\Omega)} + K(h) \| u \|_{H^{-1}(\Omega)}, \forall u \in D(-A_{i_\Omega,-1/2}),$$

com $\varepsilon(h)$ e $K(h)$ funções positivas tais que $lim_{h\to i_\Omega} \varepsilon(h) = 0$ e $\lim_{h\to i_\Omega} K(h) = 0$ e os autovalores variam continuamente com h.

Para provarmos existência global, trabalharemos no "espaço de energia"natural $H^1(\Omega)$ ($\eta = \frac{1}{2}$ e $\beta < \frac{-1}{4}$). Inicialmente, porém, é conveniente trabalharmos em $H^1(\Omega_h)$ e considerarmos o problema no domínio perturbado Ω_h em Y_h^β, sendo Y_h^α, com $-\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$, o espaço de potência fracionária para o operador $-\Delta_{\Omega_h} + aI$,

$$\begin{cases} v_t + A_\beta v = H_\beta v, & t > t_0, \\ v(t_0) = v_0 \in H^1(\Omega_h), \end{cases} \tag{2.12}$$

onde $H_\beta = F_\beta + G_\beta : H^1(\Omega_h) \to Y_h^\beta$,

•$F_\beta : H^1(\Omega_h) \to Y_h^\beta$ é dada por:

$$< F(v), \psi >_{\beta,-\beta} = \int_{\Omega_h} f(v)\psi \, dy, \ \forall \psi \in Y_h^{-\beta}.$$

•$G_\beta : H^1(\Omega_h) \to Y_h^\beta$ é definida por:

$$< G(v), \psi >_{\beta,-\beta} = \int_{\partial\Omega_h} g(\gamma(v))\gamma(\psi) \left|\frac{J_{\partial\Omega}h}{Jh}\right| d\sigma(y), \ \forall \psi \in Y_h^{-\beta}.$$

Sabe-se que v é uma solução deste problema (2.12) se, e somente se, $u = v \circ h$ satisfaz (2.5) com $\eta = \frac{1}{2}$ de modo que a existência de solução local para (2.12) segue do Teorema 2.4.6.

Lema 2.5.1 *Suponha que valem as hipóteses do Teorema 2.4.6 e f e g satisfazem as condições dissipativas (2.9) e (2.10) respectivamente. Seja $W_h : H^1(\Omega_h) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$W_h(v) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_h} |\nabla v|^2 dx + \frac{a}{2}\int_{\Omega_h} |v|^2 dx - \int_{\Omega_h} F(v)\, dx - \int_{\partial\Omega_h} G(\gamma(v))\, dS, \tag{2.13}$$

onde a é um número positivo , F e $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são as primitivas de f e g respectivamente. Então, para h suficientemente próxima de i_Ω, W_h é um funcional de Lyapunov para (2.12) e existem constantes K_1 e K_2 tais que

$$W_h(v) \leq K_1 \| v \|^2_{H^1(\Omega_h)} + K_2, \ \ \forall v \in H^1(\Omega_h). \tag{2.14}$$

Demonstração:

Pela expressão de W_h, vemos que trata-se de uma função contínua e, se v é uma solução de (2.12) em $H^1(\Omega_h)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}W_h(v(t)) &= \int_{\Omega_h} \nabla v \cdot \nabla v_t \, dx + a\int_{\Omega_h} v_t v \, dx - \int_{\Omega_h} v_t f(v)\, dx - \int_{\partial\Omega_h} g(\gamma(v)) v_t \, dS \\ &= -\int_{\Omega_h} v_t v_t \, dx \\ &= -\| v_t \|^2_{L^2(\Omega_h)}, \end{aligned}$$

onde usamos a formulação fraca do problema. Logo, W_h é decrescente ao longo das soluções de (2.12).

Além disso, se $v(t)$ é uma solução de (2.12) e $W_h(v(t)) = W_h(v_0)$, $\forall t \geq 0$, com $v_0 \in H^1(\Omega_h)$, então

$$\frac{d}{dt}W_h(v(t)) = \frac{d}{dt}W_h(v_0) = 0,$$

o que significa que $\| v_t \|^2_{L^2(\Omega_h)} = 0$ e v é um equilíbrio de (2.12).

Provamos assim que W_h é uma função de Lyapunov para o fluxo gerado por (2.12). Resta as estimativas para W_h.

Por (2.9), existem $\varepsilon_f > 0$ e $M(\varepsilon_f) > 0$ tais que $\frac{f(s)}{s} - c_0 \leq \varepsilon_f$ para $|s| > M(\varepsilon_f)$. E, como f é contínua e $|s| \leq M(\varepsilon_f)$ é compacto, vale que $f(s) \leq k_f$ para $|s| \leq M(\varepsilon_f)$, sendo k_f uma constante. Consequentemente, se $s > 0$, $f(s) \leq (\varepsilon_f + c_0)s + k_f$ e,

$$\int_{\Omega_h} F(v)\,dx = \int_{\Omega_h}\left(\int_0^v f(s)\,ds\right)dx \leq \int_{\Omega_h}\left(\int_0^v \varepsilon_f s + c_0 s + k_f\,ds\right)dx \leq \frac{c_0}{2}\int_{\Omega_h}|v|^2\,dx + k_0.$$

Podemos repetir o mesmo raciocínio para $s < 0$. E, por (2.10), existem $\varepsilon_g > 0$ e $N(\varepsilon_g) > 0$ tais que $\frac{g(s)}{s} - d_0' \leq \varepsilon_g$ para $|s| > N(\varepsilon_g)$. Analogamente,

$$\int_{\partial\Omega_h} G(\gamma(v))\,dS \leq \frac{d_0'}{2}\int_{\partial\Omega_h}|\gamma(v)|^2 dS + k_0'.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
W_h(v) &\leq \frac{1}{2}\int_{\Omega_h}|\nabla v|^2 dx + \frac{a}{2}\int_{\Omega_h}|v|^2 dx + \frac{|c_0|}{2}\int_{\Omega_h}|v|^2 dx + |k_0| + \frac{|d_0'|}{2}\int_{\partial\Omega_h}|\gamma(v)|^2 dS + |k_0'| \\
&\leq \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega_h)} + \frac{a}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega_h)} + \frac{|c_0|}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega_h)} + |k_0| + \frac{|d_0'|}{2}\|\gamma(v)\|^2_{L^2(\partial\Omega_h)} + |k_0'| \\
&\leq \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega_h)} + \frac{a + |c_0|}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega_h)} + |k_0| + \frac{|d_0'|}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega_h)} + |k_0'| \\
&\leq K_1\|v\|^2_{H^1(\Omega_h)} + K_2,
\end{aligned}$$

com K_1 e K_2 constantes dependendo essencialmente das não linearidades, o que prova (2.14).

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
W_h(v) &\geq \frac{1}{2}\int_{\Omega_h}|\nabla v|^2 dx + \frac{a}{2}\int_{\Omega_h}|v|^2 dx - \frac{c_0}{2}\int_{\Omega_h}|v|^2 dx - k_0 - \frac{d_0'}{2}\int_{\partial\Omega_h}|\gamma(v)|^2 dS - k_0' \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\Omega_h}|\nabla v|^2 dx + \frac{a - c_0}{2}\int_{\Omega_h}|v|^2 dx - \frac{d_0'}{2}\int_{\partial\Omega_h}|\gamma(v)|^2 dS - (k_0 + k_0').
\end{aligned}$$

Como $d_0 > d_0'$, podemos escolher $d_0'' \neq 0$ tal que

$$d_0 > d_0'' > d_0' \text{ e } \left(\frac{d_0}{d_0''} - 1\right)\frac{a - c_0}{2} + \frac{\lambda_0}{2} > 0,$$

onde λ_0 é o primeiro autovalor de (2.11) e,

$$\begin{aligned}
W_h(v) &\geq \frac{1}{2}\int_{\Omega_h} |\nabla v|^2 dx + \frac{a-c_0}{2}\int_{\Omega_h} |v|^2 dx - \frac{d_0''}{2}\int_{\partial\Omega_h} |\gamma(v)|^2 dS - (k_0 + k_0') \\
&= \frac{d_0''}{d_0}\left[\frac{d_0}{d_0''}\frac{1}{2}\int_{\Omega_h} |\nabla v|^2 dx + \frac{d_0}{d_0''}\frac{(a-c_0)}{2}\int_{\Omega_h} |v|^2 dx - \frac{d_0}{2}\int_{\partial\Omega_h} |\gamma(v)|^2 dS - \frac{d_0}{d_0''}(k_0 + k_0')\right] \\
&= \frac{d_0''}{d_0}\left[(\frac{d_0}{d_0''} - 1)\frac{1}{2}\int_{\Omega_h} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega_h} |\nabla v|^2 dx + \left(\frac{d_0}{d_0''} - 1\right)\frac{(a-c_0)}{2}\int_{\Omega_h} |v|^2 dx\right] \\
&+ \frac{d_0''}{d_0}\left[\frac{(a-c_0)}{2}\int_{\Omega_h} |v|^2 dx - \frac{d_0}{2}\int_{\partial\Omega_h} |\gamma(v)|^2 dS - \frac{d_0}{d_0''}(k_0 + k_0')\right] \\
&\geq \frac{d_0''}{d_0}\left[(\frac{d_0}{d_0''} - 1)\frac{1}{2}\int_{\Omega_h} |\nabla v|^2 dx + \left(\left(\frac{d_0}{d_0''} - 1\right)\frac{(a-c_0)}{2} + \frac{\lambda_0}{2}\right)\int_{\Omega_h} |v|^2 dx - \frac{d_0}{d_0''}(k_0 + k_0')\right].
\end{aligned}$$

Vale observar que, para obter a última desigualdade usamos que $\lambda_0 = \inf_{u \in H^1(\Omega_h)} \frac{<-\Delta u + (a-c_0)u, u>}{\|u\|^2_{L^2(\Omega_h)}}$. Assim, $W_h(v)$ é limitado inferiormente por uma constante positiva dependendo das não linearidades e do primeiro autovalor de (2.11) vezes $\| v \|^2_{H^1(\Omega_h)}$ mais uma constante que depende das não linearidades. Portanto, $|W_h(v)| \to \infty$ quando $\| v \|_{H^1(\Omega_h)} \to \infty$.

■

Lema 2.5.2 *Para $W_h : H^1(\Omega_h) \to \mathbb{R}$ definido como em (2.13), existem constantes $K_1(h)$ e $K_2(h)$ tais que,*

$$K_1(h)|\, W(u)\,| \leq |\, W_h\,(u \circ h^{-1})\,| \leq K_2(h)|\, W(u)\,|, \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

com $K_1(h)$, $K_2(h) \to 1$ quando $h \to i_\Omega$, ou seja, os funcionais de Lyapunov W_h nas regiões perturbadas aproximam o funcional $W = W_{i_\Omega}$ quando $h \to i_\Omega$.

Demonstração:

Um caso particular foi provado no Lema 4.3 em Oliveira, Pereira e Pereira (2005), quando o funcional de Lyapunov consiste apenas da primeira e da terceira parcelas de W_h. Para os demais termos na expressão (2.13), por exemplo,

$$\frac{a}{2}\int_{\Omega_h} |v|^2 dy = \frac{a}{2}\int_{\Omega_h} |u \circ h^{-1}|^2\, dy = \frac{a}{2}\int_{\Omega} |u|^2 |J_h|\, dx \leq \max_{x \in \overline{\Omega}}\{|\,J_h\,|\}\,\frac{a}{2}\int_{\Omega} |u|^2 dx,$$

com $|\,J_h\,| \to 1$ à medida que $h \to i_\Omega$ em $C^2(\Omega, \mathbb{R}^2)$. E, para obter a limitação inferior, poderíamos usar analogamente $\min_{x \in \overline{\Omega}}\{|\,J_h\,|\}$.

■

Neste ponto, definamos $V_h : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ por

$$V_h(u) = W_h(u \circ h^{-1}). \tag{2.15}$$

Lema 2.5.3 *O funcional definido em (2.15) é um funcional de Lyapunov para (2.5) com* $\eta = \frac{1}{2}$ *e* $-\frac{1}{2} < \beta < -\frac{1}{4}$ *e valem as seguintes estimativas:*

(a) $K_1 \parallel u \parallel^2_{H^1(\Omega)} -K_2 \leq V_h(u) \leq K_1 \parallel u \parallel^2_{H^1(\Omega)} +K_2$, *para constantes* K_1, K_2;

(b) $K_1(h)| V(u) | \leq | V_h(u) | \leq K_2(h)| V(u) |$, $\forall u \in H^1(\Omega)$ *com* $K_1(h)$, $K_2(h) \to 1$ *quando* $h \to i_\Omega$.

Demonstração:

Tais propriedades seguem daquelas para W_h e do fato de $h^{*-1} : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega_h)$ ser um isomorfismo que leva soluções de (2.5) em soluções de (2.12).

■

Teorema 2.5.4 *Sejam* β, η, f, g, h *tais como no Teorema 2.4.6 e suponha que* f *e* g *satisfazem as hipóteses dissipativas (2.9) e (2.10) respectivamente. Então, as soluções de (2.5) estão globalmente definidas.*

Demonstração:

Consideremos primeiramente o caso $\eta = \frac{1}{2}$. Pelo Teorema 2.4.6, para cada $(t_0, u_0) \in \mathbb{R} \times H^1(\Omega)$, existe $T = T(t_0, u_0)$ tal que o problema (2.5) tem uma única solução u em $(t_0, t_0 + T)$ com $u(t_0) = u_0$. Sabemos também que $(H_{h,-1/2})_\beta$ leva limitados de $X_h^\eta = H^1(\Omega)$ em conjuntos limitados de X_h^β.

Se $T < \infty$, pelo Teorema 3.3.4 em Henry (1981), existe uma sequência $t_n \to T^-$ tal que $\parallel u(t_n) \parallel_{H^1(\Omega)} \to \infty$ e, consequentemente, $|V_h(u(t_n))| \to \infty$, usando (a) do Lema 2.5.3, o que é uma contradição com o fato de V_h ser decrescente ao longo das órbitas.

Para os demais casos, se $\eta < \frac{1}{2}$, temos $X_h^{\frac{1}{2}} \subset X_h^\eta$ e dado $u_0 \in X_h^\eta$, existe uma solução local $u(t)$, $t_0 < t < T$. Por regularidade, para $t_0 < t' < T$, $T_h(t')u_0 \in X_h^{\frac{1}{2}}$ e tomando este como ponto inicial u_0', provamos que existe uma solução global passando por u_0'. Segue da unicidade o desejado. Finalmente, se $\eta > \frac{1}{2}$, $X_h^\eta \subset X_h^{\frac{1}{2}}$ de modo que tomando $u_0 \in X_h^\eta$, u_0 também pertence à $X_h^{\frac{1}{2}}$ e então, existe uma solução global passando por tal ponto, a qual coincide com a solução local em X_h^η por unicidade.

■

2.6 Existência de um atrator global

Demonstramos nesta seção que $T_{h,\eta,\beta}(t, t_0, u)$, o fluxo gerado por (2.5), admite um atrator global começando pelo caso $\eta = \frac{1}{2}$.

Lembramos que um semigrupo fortemente contínuo $T(t) : X \to X$, $t \geq 0$, de classe C^r, com $r \geq 1$, é um sistema gradiente se,

(i) Cada órbita positiva limitada é pré-compacta.

(ii) Existe uma função de Lyapunov para $T(t)$, isto é, existe uma função contínua $V : X \to \mathbb{R}$ com as seguintes propriedades:

(1) $V(x)$ é limitada inferiormente;

(2) $V(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$;

(3) $V(T(t)x)$ é decrescente em t para cada $x \in X$;

(4) Se x é tal que $T(t)x$ está definida para $t \in \mathbb{R}$ e $V(T(t)x) = V(x)$ para $t \in \mathbb{R}$, então x é um ponto de equilíbrio.

Lema 2.6.1 *O semigrupo não linear $T_{h,\eta,\beta}(t)$ gerado por (2.5) com $\eta = \frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2} < \beta < -\frac{1}{4}$ em $X_h^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$ é um sistema gradiente.*

Demonstração:

Sabemos que V_h definido em (2.15) é um funcional de Lyapunov para o semigrupo.

Além disso, $(H_{h,-1/2})_\beta$ leva subconjuntos limitados de $H^1(\Omega)$ em limitados de X_h^β e como podemos escrever $(-A_{h,-1/2})_\beta = (-A_{h,-1/2})^{-\delta}(-A_{h,-1/2})(-A_{h,-1/2})^\delta$, $\beta = -\frac{1}{2} + \delta$, $0 < \delta < \frac{1}{4}$, sendo $(-A_{h,-1/2})^\delta$ uma isometria, segue que $(-A_{h,-1/2})_\beta$ tem resolvente compacto. Assim, de acordo com o Teorema 1.4.3, as órbitas positivas limitadas são pré-compactas.

Logo, temos que $T_{h,\eta,\beta}(t)$ é um sistema gradiente.

■

Lema 2.6.2 *Suponha que f e g satisfazem as condições do Teorema 2.4.6 e as hipóteses dissipativas (2.9) e (2.10) respectivamente. Então, o conjunto dos pontos de equilíbrio do sistema gerado por (2.12) é uniformemente limitado em h na norma $H^1(\Omega_h)$.*

Demonstração:

Os equilíbrios de (2.12) são as soluções do problema

$$\begin{cases} \Delta u(x) - au(x) + f(u(x)) = 0, \ x \in \Omega_h \\ \frac{\partial u}{\partial N}(x) = g(u(x)), \ x \in \partial\Omega_h. \end{cases}$$

Multiplicando por u e integrando, obtemos,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega_h} u\Delta u\, dx - a\int_{\Omega_h} |u|^2 dx + \int_{\Omega_h} uf(u)\, dx \\ &= -\int_{\Omega_h} |\nabla u|^2 dx + \int_{\partial\Omega_h} ug(u)\, dS - a\int_{\Omega_h} |u|^2 dx + \int_{\Omega_h} uf(u)\, dx. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Por (2.9) e (2.10), para qualquer $\delta > 0$, existem constantes M_f e M_g tais que $f(s)s \leq (\delta + c_0)s^2$ se $|s| > M_f$ e $g(s)s \leq (\delta + d_0')s^2$ se $|s| > M_g$. Escolhendo $|s| > M = \max\{M_f, M_g\}$, ambas as desigualdades valem simultaneamente. Além disso, existem constantes C_f, C_g com $f(s)s \leq C_f$ e $g(s)s \leq C_g$ para $|s| \leq M$. Se fizermos $K_\delta = \max\{C_f, C_g\}$, então para todo $u \in \mathbb{R}$,

$$f(u)u \leq (c_0 + \delta)u^2 + K_\delta \ \text{ e } \ g(u)u \leq (d_0' + \delta)u^2 + K_\delta.$$

Aplicando isso em (2.16),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} |\nabla u|^2 dx &\leq -a\int_{\Omega_h} |u|^2 dx + (c_0 + \delta)\int_{\Omega_h} u^2 dx + K_\delta |\Omega_h| + (d_0' + \delta)\int_{\partial\Omega_h} u^2 dS + K_\delta |\partial\Omega_h| \\ &\leq -a\int_{\Omega_h} |u|^2 dx + (c_0 + \delta)\int_{\Omega_h} u^2 dx + (d_0' + \delta)\int_{\partial\Omega_h} u^2 dS + K_\delta(|\Omega| + |\partial\Omega|). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Como o primeiro autovalor $\lambda_0(h)$ de (2.11) é positivo, temos que

$$\lambda_0(h) = \inf_{u \in H^1(\Omega_h)} \frac{< -\Delta u + (a - c_0)u, u >}{\| u \|^2_{L^2(\Omega_h)}}.$$

Ao desenvolver essa expressão, encontramos

$$\lambda_0(h)\int_{\Omega_h} |u|^2 dx \leq \int_{\Omega_h} |\nabla u|^2 dx - d_0\int_{\partial\Omega_h} |u|^2 dS + (a - c_0)\int_{\Omega_h} |u|^2 dx. \tag{2.18}$$

Reunindo as desigualdades (2.17) e (2.18), obtemos

$$\lambda_0(h)\int_{\Omega_h} |u|^2 dx \leq \delta\int_{\Omega_h} u^2 dx + (d_0' - d_0 + \delta)\int_{\partial\Omega_h} u^2 dS + K_\delta(|\Omega| + |\partial\Omega|). \tag{2.19}$$

Agora, tomando $\delta < \min\{\lambda_0(h), d_0 - d_0'\}$ e estabelecendo $l_\delta = \min\{\lambda_0(h) - \delta, (d_0 - d_0') - \delta\}$, segue de (2.19) que,

$$\int_{\Omega_h} u^2 dx + \int_{\partial\Omega_h} u^2 dS \leq \frac{K_\delta(|\Omega| + |\partial\Omega|)}{l_\delta}. \tag{2.20}$$

Por fim, empregamos isso em (2.17),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h} |\nabla u|^2 dx &\leq (c_0 + \delta)\int_{\Omega_h} u^2 dx + (d_0' + \delta)\int_{\partial\Omega_h} u^2 dS + K_\delta(|\Omega| + |\partial\Omega|) \\ &\leq (c_0 + d_0' + 2\delta)\frac{K_\delta(|\Omega| + |\partial\Omega|)}{l_\delta} + K_\delta(|\Omega| + |\partial\Omega|), \end{aligned} \tag{2.21}$$

onde usamos que $a > 0$ e supomos que $c_0 + \delta$ e $d_0' + \delta$ são ambos positivos. Caso sejam negativos, em (2.21), ficaria apenas a última parcela e se os sinais fossem contrários, manteríamos somente o positivo. O resultado vem de (2.20) e (2.21), observando-se que as constantes presentes nessas estimativas dependem basicamente de $\lambda_0(h)$, que é uma função contínua de h, sendo limitada para h próxima de i_Ω.

■

Corolário 2.6.3 *Suponha que f e g satisfazem as condições do Lema 2.6.2. O conjunto de equilíbrios E_h do sistema gerado por (2.5) é uniformemente limitado em h na norma $H^1(\Omega)$, para $\| h - i_\Omega \|_{C^2(\Omega,\mathbb{R}^2)} < \epsilon_0$.*

Demonstração:

Como u é um equilíbrio de (2.5) se, e somente se, $v = h^{*-1}u$ é um equilíbrio de (2.12), com h^* um isomorfismo, o resultado segue do Lema 2.6.2.

■

Teorema 2.6.4 *Suponha que f e g satisfazem as condições do Teorema 2.4.6 com $\eta = \frac{1}{2}$ e as hipóteses dissipativas (2.9) e (2.10) respectivamente. Então, para h suficientemente próxima de i_Ω, o fluxo $T_{h,\frac{1}{2},\beta}(t,u) = T_h(t,u)$ gerado por (2.5) tem um atrator global em $X_h^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$.*

Demonstração:

De acordo com o Teorema 3.8.5 em Hale (2000), basta provar que o semigrupo é assintoticamente compacto. Seja B um conjunto não-vazio, fechado, limitado de $X_h^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$ com $T_h(t,u)B \subset B$, $\forall t \geq 0$.

Considere $J = \overline{T_h(1)B}$. Então, $J \subset B$. Pela propriedade de semigrupo, para $t > 1$, $T_h(t)B = T_h(1)T_h(t-1)B$ e $T_h(1)T_h(t-1)B \subset T_h(1)B \subset J$ donde J atrai B (de fato, absorve). Falta verificarmos que J é compacto.

A idéia é usar o Teorema 1.2.18, pois se soubermos que J é limitado em $X_h^{\frac{1}{2}+\epsilon}$, com $\epsilon > 0$, então, como a imersão $X_h^{\frac{1}{2}+\epsilon} \subset X_h^{\frac{1}{2}} = H^1(\Omega)$ é compacta, resulta que J é um pré-compacto de $H^1(\Omega)$. Somando-se a isso o fato de J ser fechado, temos o desejado.

Sem perda de generalidade, suponhamos $\Re(\sigma((-A_{h,-1/2})_\beta)) > \omega > 0$. Se $j = T_h(1)b$, $b \in B$ e

$$\| b \|_{X_h^{\frac{1}{2}}} \leq N,$$

$$\begin{aligned}
\| j \|_{X_h^{\frac{1}{2}+\epsilon}} &\leq \| e^{-(-A_{h,-1/2})_\beta} b \|_{X_h^{\frac{1}{2}+\epsilon}} + \| \int_0^1 e^{-(-A_{h,-1/2})_\beta (1-s)} (H_{h,-1/2})_\beta (T_h(s))\, ds \|_{X_h^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \\
&\leq \| ((-A_{h,-1/2})_\beta)^\epsilon e^{-(-A_{h,-1/2})_\beta} b \|_{X_h^{\frac{1}{2}}} + \int_0^1 \| ((-A_{h,-1/2})_\beta)^{1-\epsilon} e^{-(-A_{h,-1/2})_\beta (1-s)} (H_{h,-1/2})_\beta (T_h(s)) \|_{X_h^{-\frac{1}{2}+2\epsilon}} ds \\
&\leq C_\epsilon e^{-\omega} \| b \|_{X_h^{\frac{1}{2}}} + \int_0^1 C_{1-\epsilon} (1-s)^{-(1-\epsilon)} e^{-\omega(1-s)} \| (H_{h,-1/2})_\beta (T_h(s)) \|_{X_h^{-\frac{1}{2}+2\epsilon}} \; ds \\
&\leq C_\epsilon e^{-\omega} N + C_{1-\epsilon} L \int_0^1 (1-s)^{-(1-\epsilon)} e^{-\omega(1-s)} ds,
\end{aligned}$$

onde L vem de $(H_{h,-1/2})_\beta$ ser localmente Lipschitz e aplicamos o Teorema 1.2.9. A última expressão nos mostra que $T_h(1)B$ é limitado em $X_h^{\frac{1}{2}+\epsilon}$ e, portanto, seu fecho, J, também o é.

■

Teorema 2.6.5 *Suponha que estejam satisfeitas as condições do Teorema 2.4.6 e as hipóteses dissipativas (2.9) e (2.10). Então, para h suficientemente próxima de i_Ω, o semigrupo $T_{h,\eta,\beta}(t,u)$ gerado por (2.5) tem um atrator global $\mathcal{A}_h$ em X_h^η. Além disso, $\mathcal{A}_h$ não depende de η ou β.*

Demonstração:

Suponhamos primeiro que $\eta = \eta_0 < \frac{1}{2}$ e seja B um limitado de X_h^η. Podemos admitir que $B = B_R$, a bola aberta de raio R e centro na origem de X_h^η. Conforme vimos, existe N tal que $\| (H_{\beta,-1/2})_\beta(u) \|_{X_h^\beta} < N$ para $\| u \|_{X_h^\eta} < 2R$. Seja $T(t)u_0 = u(t,t_0,u_0)$ a solução de (2.5) com $\eta = \eta_0$, $u_0 \in B_R$ e seja ω tal que $\Re(\sigma((-A_{h,-1/2})_\beta)) > \omega > 0$. Enquanto $\| u(t,t_0,u_0) \|_{X_h^\eta} < 2R$, temos pela Fórmula de Variação das Constantes,

$$\begin{aligned}
\| u(t,t_0,u_0) \|_{X_h^\eta} &\leq \| ((-A_{h,-1/2})_\beta)^{\eta-\beta} e^{-(-A_{h,-1/2})_\beta (t-t_0)} u_0 \|_{X_h^\beta} \\
&+ \int_{t_0}^t \| ((-A_{h,-1/2})_\beta)^{\eta-\beta} e^{-(-A_{h,-1/2})_\beta (t-s)} (H_{h,-1/2})_\beta u(s) \|_{X_h^\beta} ds \\
&\leq C_{\eta-\beta} (t-t_0)^{\beta-\eta} e^{-\omega(t-t_0)} \| u_0 \|_{X_h^\beta} + N C_{\eta-\beta} \int_{t_0}^t (t-s)^{(\beta-\eta)} e^{-\omega(t-s)} ds, \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

onde usamos o Teorema 1.2.9. Consideremos $T = \sup\{ t \geq t_0 \,|\, u(s,t_0,u_0) \in B_{2R},\ \forall s \leq t \}$ e $\delta > t_0$ tal que o lado direito desta última expressão (2.22) seja menor $2R$, $\forall t \in (t_0,\delta)$. Segue que $T \geq \delta$ e as soluções com condições iniciais na bola de raio R em X_h^η permanecem na bola de raio $2R$ para

$t_0 \leq t \leq T$. Agora,

$$\begin{aligned}
\| u(t,t_0,u_0) \|_{X_h^{\frac{1}{2}}} &\leq \| e^{-(-A_{h,-1/2})_\beta (t-t_0)} u_0 \|_{X_h^{\frac{1}{2}}} + \int_{t_0}^{t} \| e^{-(-A_{h,-1/2})_\beta (t-s)} (H_{h,-1/2})_\beta u(s) \|_{X_h^{\frac{1}{2}}} \, ds \\
&\leq \| ((-A_{h,-1/2})_\beta)^{\frac{1}{2}-\eta} e^{-(-A_{h,-1/2})_\beta (t-t_0)} u_0 \|_{X_h^\eta} \\
&+ \int_{t_0}^{t} \| ((-A_{h,-1/2})_\beta)^{\frac{1}{2}-\beta} e^{-(-A_{h,-1/2})_\beta (t-s)} (H_{h,-\frac{1}{2}})_\beta u(s) \|_{X_h^\beta} \, ds \\
&\leq C_{\frac{1}{2}-\eta} (t-t_0)^{-(\frac{1}{2}-\eta)} e^{-\omega(t-t_0)} \| u_0 \|_{X_h^\eta} + N C_{\frac{1}{2}-\beta} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{-(\frac{1}{2}-\beta)} e^{-\omega(t-s)} ds,
\end{aligned}$$

o que significa que $T(t)B_R$ está em um limitado de $X_h^{\frac{1}{2}}$ para $t_0 < t \leq T$. Pelo Teorema 2.6.4, o atrator global de (2.5) com $\eta = \frac{1}{2}$ atrai $T(t)B_R$ na norma $X_h^{\frac{1}{2}}$, $t_0 < t < T$. Como $X_h^{\frac{1}{2}} \subset X_h^\eta$, $\mathcal{A}_h$ atrai B_R na norma de X_h^η. Uma vez que $\mathcal{A}_h$ é invariante, este deve ser o atrator de (2.5) com $\eta = \eta_0$.

Suponhamos agora, $\frac{1}{2} < \eta = \eta_0 < \beta + 1$. Temos $X_h^\eta \subset X_h^{\frac{1}{2}}$ continuamente de acordo com o Teorema 1.2.18. Assim, um conjunto limitado B de X_h^η é também limitado em $X_h^{\frac{1}{2}}$, sendo atraído por $\mathcal{A}_h$ de (2.5) com $\eta = \frac{1}{2}$ em $X_h^{\frac{1}{2}}$ sob a ação de $T_{h,\frac{1}{2},\beta}(t) = T_{\frac{1}{2}}(t)$, o qual coincide com o fluxo em X_h^η. Mostraremos a seguir que $T_{\frac{1}{2}}(t)$ é contínuo de $X_h^{\frac{1}{2}}$ em X_h^η para $t > 0$.

Sejam u_1, $u_2 \in X_h^{\frac{1}{2}}$ e $u_i(t,t_0,u_i) = T_{\frac{1}{2}}(t)u_i$, $i = 1,2$.

$$\begin{aligned}
\| u(t,t_0,u_1) - u(t,t_0,u_2) \|_{X_h^\eta} &\leq \| e^{-(-A_{h,-1/2})_\beta (t-t_0)} (u_1 - u_2) \|_{X_h^\eta} \\
&+ \int_{t_0}^{t} \| e^{-(-A_{h,-1/2})_\beta (t-s)} ((H_{h,-1/2})_\beta (u_1(s)) - (H_{h,-1/2})_\beta (u_2(s))) \|_{X_h^\eta} \, ds \\
&\leq \| ((-A_{h,-1/2})_\beta)^{\eta-\frac{1}{2}} e^{-(-A_{h,-1/2})_\beta (t-t_0)} (u_1 - u_2) \|_{X_h^{\frac{1}{2}}} \\
&+ \int_{t_0}^{t} \| ((-A_{h,-1/2})_\beta)^{\eta-\beta} e^{-(-A_{h,-1/2})_\beta (t-s)} ((H_{h,-1/2})_\beta (u_1(s)) - (H_{h,-1/2})_\beta (u_2(s))) \|_{X_h^\beta} \, ds \\
&\leq C_{\eta-\frac{1}{2}} (t-t_0)^{\frac{1}{2}-\eta} e^{-\omega(t-t_0)} \| u_1 - u_2 \|_{X_h^{\frac{1}{2}}} \\
&+ L_{\beta,\frac{1}{2}} C_{\eta-\beta} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{\beta-\eta} e^{-\omega(t-s)} \| u_1(s) - u_2(s) \|_{X_h^{\frac{1}{2}}} \, ds,
\end{aligned}$$

sendo $L_{\beta,\frac{1}{2}}$ a constante de Lipschitz local de $(H_{h,-1/2})_\beta$ e as demais constantes vem do Teorema 1.2.9.

Aplicando a Desigualdade de Gronwall, Teorema 7.1.1 em Henry (1981), obtemos

$$\begin{aligned}
\| u(t,t_0,u_1) - u(t,t_0,u_2) \|_{X_h^\eta} &\leq C_{\eta-\frac{1}{2}} (t-t_0)^{-\eta+\frac{1}{2}} e^{-\omega(t-t_0)} \| u_1 - u_2 \|_{X_h^{\frac{1}{2}}} \\
&+ \gamma \int_{t_0}^{t} E'_{\frac{3}{2}-\eta}(\gamma(t-s)) C_{\eta-\frac{1}{2}} (s-t_0)^{-\eta+\frac{1}{2}} e^{-\omega(s-t_0)} \| u_1 - u_2 \|_{X_h^{\frac{1}{2}}} \, ds,
\end{aligned}$$

onde $\gamma = (L_{\beta,\frac{1}{2}} C_{\eta-\frac{1}{2}} \max_{t \leq s \leq t_0} \{e^{-\omega(t-s)}\} \Gamma(\frac{3}{2}-\eta))^{\frac{1}{\frac{3}{2}-\eta}}$ e $E_{\frac{3}{2}-\eta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n(\frac{3}{2}-\eta)}}{\Gamma(n(\frac{3}{2}-\eta)+1)}$ e, segue a continuidade.

Isso nos permite concluir que se V_δ é uma vizinhança de $\mathcal{A}_h$ em $X_h^{\frac{1}{2}}$ que contém $T_{\frac{1}{2}}(t)(B) = T_\eta(B)$, então $T_{\frac{1}{2}}(1)V_\delta$ é uma pequena vizinhança de $\mathcal{A}_h$ em X_h^η que contém $T_{\frac{1}{2}}(t+1)B = T_\eta(t+1)B$. Como $\mathcal{A}_h = T_{\frac{1}{2}}(1)\mathcal{A}_h \in X_h^\eta$, este deve ser o atrator de $T_\eta(t)$.

■

2.7 Limitação uniforme dos atratores

Com base no que foi desenvolvido na Seção 4 do Capítulo 1, obtemos, nesta seção, uma limitação uniforme da família de atratores $\{\mathcal{A}_h \mid \| h - i_\Omega \|_{C^3(\Omega,\mathbb{R}^2)} < \epsilon_0 \}$.

Teorema 2.7.1 *Suponha que as hipóteses do Teorema 2.6.5 sejam válidas. Então a família de atratores* $\{\mathcal{A}_h \mid \| h - i_\Omega \|_{C^2(\Omega,\mathbb{R}^2)} < \epsilon_0 \}$ *é limitada uniformemente em* $H^1(\Omega)$.

Demonstração:

Pelo Corolário 2.6.3, para h suficientemente próxima de i_Ω, o conjunto de pontos de equilíbrio E_h de (2.5) está em uma bola aberta B_R de raio R em $H^1(\Omega)$, R independente de h.

Se $u \in \mathcal{A}_h$, pelo Teorema 3.8.5 em Hale (2000), existe t_u tal que $u = T(t_u)u_0$ para algum $u_0 \in B_R$.

Seja V_h o funcional de Lyapunov de (2.5) dado por (2.15). Pelo Lema 2.5.3, temos

$$V_h(u_0) \leq K_1 \| u_0 \|^2_{H^1(\Omega)} + K_2 \leq K_1 R^2 + K_2.$$

Segue que

$$V_h(u) \leq V_h(T(t_u)u_0) \leq V_h(u_0) \leq K_1 R^2 + K_2.$$

E,

$$\| u \|^2_{H^1(\Omega)} \leq \frac{1}{K_1}(V_h(u) + K_2) \leq \frac{1}{K_1}(K_1 R^2 + 2K_2), \quad \forall u \in \mathcal{A}_h. \tag{2.23}$$

Assim, se $\| h - i_\Omega \|_{C^2(\Omega,\mathbb{R}^2)} < \epsilon_0$, tal limitação é válida $\forall u \in \cup_{\|h-i_\Omega\|_{C^2(\Omega,\mathbb{R}^2)}<\epsilon_0} \mathcal{A}_h$.

■

A seguir, obteremos uma limitação da família de atratores $\{\mathcal{A}_h \mid \| h - i_\Omega \|_{C^3(\Omega,\mathbb{R}^2)} < \epsilon_0 \}$ em $L_\infty(\Omega)$. Para tanto, moldaremos a abordagem descrita na Seção 4 do Capítulo 1 ao contexto com o qual estamos trabalhando.

O primeiro passo é, a partir de uma limitação de $\mathcal{A}_h$ em X_h^α para algum $0 \leq \alpha < 1$, limitar $\mathcal{A}_h$

em um espaço mais regular $X_h^{\alpha'}$, $\alpha < \alpha' < 1$, onde tais constantes devem ser independentes de h, com o auxílio da Proposição 1.4.4. Precisaremos do seguinte Lema:

Lema 2.7.2 *Para qualquer $0 \leq \alpha \leq 1$, seja $\| \cdot \|_{h,\alpha}$ a norma em $X^{\alpha}_{h,-1/2} = X_h^{\alpha-\frac{1}{2}}$ e $\| \cdot \|_{\alpha}$ a norma em $X^{\alpha}_{i_\Omega,-1/2} = X_{i_\Omega}^{\alpha-\frac{1}{2}}$. Então, $\| u \|_{h,\alpha} \leq K_1(h) \| u \|_{\alpha} \leq K_2(h) \| u \|_{h,\alpha}$, com $K_1(h)$, $K_2(h) \to 1$ quando $h \to i_\Omega$ uniformemente em α.*

Demonstração:

É conhecido que $-A_{h,-1/2}$ é positivo e autoadjunto. O resultado vem do Lema 2.2.3 e do Teorema 1.4.5.

■

Teorema 2.7.3 *Para $\mathcal{A}_h$ tal que $\| h - i_\Omega \|_{C^2(\Omega,\mathbb{R}^2)} < \epsilon_0$, temos que $\mathcal{A}_h$ é limitado em $X_h^{\alpha'}$ com $\frac{1}{2} < \alpha' < 1$. Além disso, tal limitação é independente de h.*

Demonstração:

Para a primeira afirmação, basta combinarmos o Teorema 2.7.1 com a Proposição 1.4.4.

Como queremos uma limitação de $\mathcal{A}_h$ em $X_h^{\alpha'}$ independente de h, precisamos examinar detalhadamente a seguinte desigualdade análoga a (1.14),

$$\begin{aligned}
\| u(t_0+1; t_0, u_0) \|_{X_h^{\alpha'}} &\leq \| ((-A_{h,-1/2})_\beta)^{\alpha'} e^{-(-A_{h,-1/2})_\beta (t_0+1-t_0)} u_0 \| \\
&+ \int_{t_0}^{t_0+1} \| ((-A_{h,-1/2})_\beta)^{\alpha'} e^{-(-A_{h,-1/2})_\beta (t_0+1-s)} (H_{h,-1/2})_\beta (u(s;t_0,u_0)) \| \, ds \\
&\leq \| ((-A_{h,-1/2})_\beta)^{\alpha'-\frac{1}{2}} e^{-(-A_{h,-1/2})_\beta (t_0+1-t_0)} \| \| u_0 \|_{X_h^{\frac{1}{2}}} \\
&+ \int_{t_0}^{t_0+1} \| ((-A_{h,-1/2})_\beta)^{\alpha'-\beta} e^{-(-A_{h,-1/2})_\beta (t_0+1-s)} \| \| (H_{h,-1/2})_\beta (u(s;t_0,u_0)) \|_{X_h^\beta} \, ds \\
&\leq C_{h,\alpha'-\frac{1}{2}} (1)^{-(\alpha'-\frac{1}{2})} e^{-\omega} \| u_0 \|_{X_h^{\frac{1}{2}}} \\
&+ \int_{t_0}^{t_0+1} C_{h,\alpha'-\beta} (t_0+1-s)^{-(\alpha'-\beta)} e^{-\omega(t_0+1-s)} \| (H_{h,-1/2})_\beta (u(s;t_0,u_0)) \|_{X_h^\beta} \, ds \\
&\leq C_{h,\alpha'-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{K_1}(K_1 R^2 + 2K_2)\right)^{\frac{1}{2}} + C_{h,\alpha'-\beta} \| (H_{h,-1/2})_\beta (u(s;t_0,u_0)) \|_{X_h^\beta},
\end{aligned}$$

onde supusemos que $\Re(\sigma((-A_{h,-1/2})_\beta)) > \omega > 0$, $-\frac{1}{2} < \beta < -\frac{1}{4}$, $C_{h,\alpha'-\frac{1}{2}}$ e $C_{h,\alpha'-\beta}$ são as constantes do Teorema 1.2.9 e aplicamos o Teorema 2.7.1.

Pela primeira parte do trabalho, ambas $C_{h,\alpha'-\frac{1}{2}}$, $C_{h,\alpha'-\beta}$ dependem essencialmente da $(C_2)_h$ para o operador $(-A_{h,-1/2})_\beta$, ou seja, se a família $\{ (-A_{h,-1/2})_\beta \mid \| h - i_\Omega \|_{C^2(\Omega,\mathbb{R}^2)} < \epsilon_0 \}$ admitir um setor e uma constante M comuns a todos os seus elementos, temos que tais constantes não dependerão de h e isso segue do Lema 2.2.3.

Com relação a limitação para $\| u_0 \|_{X_h^{\frac{1}{2}}}$ obtida do Teorema 2.7.1, observamos que as constantes na expressão (2.23) podem ser tomadas independentes de h, pois K_1, K_2 e R envolvem basicamente as não linearidades, $\max_{x\in\overline{\Omega}}\{ | J_h | \}$ e $\lambda_0(h)$.

E embora os Lemas 2.4.2 e 2.4.4 nos garantam que $(H_{h,-1/2})_\beta$ leva o limitado $\cup_{\|h-i_\Omega\|_{C^2(\Omega,\mathbb{R}^2)}<\epsilon_0}\mathcal{A}_h$ de $X_h^{\frac{1}{2}}$ em um limitado de X_h^β, notamos que as constantes relativas a tal limitação dependem de h. Agora, se soubermos que as normas nos espaços $X^\alpha_{h,-1/2}$ e $X^\alpha_{i_\Omega,-1/2}$ são equivalentes para $0 \leq \alpha \leq 1$, essa questão estará resolvida. É o que nos diz o Lema 2.7.2.

■

Neste ponto, temos que para $\| h - i_\Omega \|_{C^2(\Omega,\mathbb{R}^2)} < \epsilon_0$, $\| x \|_{X_h^{\alpha'}} < S, \forall x \in \mathcal{A}_h$, onde S independe de h, $\frac{1}{2} < \alpha' < 1$. A próxima etapa então é comparar as normas em $X_h^{\alpha'}$ e $X^{\alpha'}$.

Lema 2.7.4 *Para $0 \leq \alpha \leq 1$, denotemos por $\| \cdot \|_{h,\alpha}$ a norma em X_h^α e $\| \cdot \|_\alpha$, a norma em X^α. Então, $\| u \|_{h,\alpha} \leq K_1(h) \| u \|_\alpha \leq K_2(h) \| u \|_{h,\alpha}$, com $K_1(h), K_2(h) \to 1$ quando $h \to i_\Omega$ em $C^3(\Omega,\mathbb{R}^2)$ uniformemente em α.*

Demonstração:

Segue do Lema 2.2.2 e do Teorema 1.4.5.

■

Teorema 2.7.5 *$A \cup_{\|h-i_\Omega\|_{C^3(\Omega,\mathbb{R}^2)}<\epsilon_0}\mathcal{A}_h$ está contida em uma bola de $X^{\alpha'}$.*

Demonstração:

Se $\| h - i_\Omega \|_{C^3(\Omega,\mathbb{R}^2)} < \epsilon_0$, usando o Teorema 2.7.3 e o Lema 2.7.4, para todo $x \in \mathcal{A}_h$,

$$\| x \|_{X^{\alpha'}} \leq K(h)S,$$

com $K(h) \to 1$ quando $h \to i_\Omega$ e S é uma constante independente de h que advém da limitação da família em $X_h^{\alpha'}$.

■

Notemos que no último teorema, precisamos da convergência de h para i_Ω na norma C^3, pois essa hipótese é necessária no Lema 2.7.4. Finalmente,

Teorema 2.7.6 *A família de atratores* $\{ \mathcal{A}_h \mid \| h - i_\Omega \|_{C^3(\Omega,\mathbb{R}^2)} < \epsilon_0 \}$ *para o problema (2.5) está limitada em* $L_\infty(\Omega)$.

Demonstração:

De acordo com o Teorema 1.3.3, $X^{\alpha'} \subset C^\nu$ visto que $\alpha' > \frac{1}{2}$, ou seja, $X^{\alpha'} \subset L_\infty(\Omega)$. E a conclusão segue do Teorema 2.7.5.

■

Referências Bibliográficas

[1] Agmon, S., Douglis, A., & Nirenberg, L. (1955) Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. *Communications on Pure and Applied Mathemathics, Vol. XII*, 623-727.

[2] Arrieta, J. M., Carvalho, A. N. de, & Rodríguez-Bernal, A. (2000). Attractors of parabolic problems with nonlinear boundary conditions. Uniform bounds. *Communications in Partial Differential Equations, 25: 1-2*, 1-37.

[3] Barbosa, P.S., Pereira, A. L., & Pereira, M. C. (2016). Continuity of attractors for a family of C^1 perturbations of the square. *Annali di Matematica*. doi: 10.1007/s10231-016-0620-5

[4] Brezis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations* (Universitext). Springer.

[5] Carvalho, A. N. de. (2001). Equações parabólicas semilineares. Recuperado de http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andcarva/sg.pdf.

[6] Carvalho, A. N de. (2012). Sistemas dinâmicos não lineares. Recuperado de http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/andcarva/SDNL2012.pdf.

[7] Faustino, S. D., & Nosaki, G. L. D. V. (2016). Operadores setoriais e potências fracionárias. (Trabalho apresentado na aula de Análise Funcional e Operadores Lineares Aplicados - IME-USP).

[8] Hale, J. K. (2000). *Asymptotic behavior of dissipative systems* (Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 25). Providence, RI: American Mathematical Society.

[9] Henry, D. B. (1981). *Geometric theory of semilinear parabolic equations* (Lecture Notes in Mathematics, Vol. 840). Springer-Verlag.

[10] Henry, D. B.(2005). *Perturbation of the boundary in boundary-value problems of partial differential equations* (London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 318). New York, NY: Cambridge University Press.

[11] Necas, J. (2012). *Direct methods in the theory of elliptic equations* (Springer Monographs in Mathematics). Springer.

[12] Oliveira, L. A. F. de, Pereira, A. L., & Pereira, M. C. (2005). Continuity of attractors for a reaction-diffusion problem with respect to variations of the domain. *Electronic Journal of Differential Equations, 100*, 1-18.

[13] Pazy, A. (1983). *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations* (Applied Mathematical Sciences, Vol. 44). New York, NY: Springer-Verlag.

[14] Pereira, A. L., & Pereira, M. C. (2007). Continuity of attractors for a reaction-diffusion problem with nonlinear boundary conditions with respect to variations of the domain. *Journal of Differential Equations, 239*, 343-370.

[15] Schmudgen, K. (2012). *Unbounded self-adjoint operators on Hilbert spaces* (Graduate Texts in Mathematics). Springer.

[16] Stein, E. M. (1970). *Singular integrals and differentiability properties of functions*(Princeton Mathematical Series). Princeton, NJ: Princeton University Press.

[17] Yagi, A. (2010). *Abstract parabolic evolution equations and their applications* (Springer Monographs in Mathematics). Springer.