Produto Cruzado de uma C*-álgebra por $\mathbb{Z}$, Generalização do Teorema de Fejér, e Exemplos

Everton Franco de Oliveira

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Severino Toscano do Rêgo Melo

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio
financeiro da CAPES

São Paulo, Janeiro 2016

Produto Cruzado de uma C*-álgebra por $\mathbb{Z}$, Generalização do Teorema de Fejér, e Exemplos

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 18/11/2015. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Severino Toscano do Rêgo Melo (orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro - IME-USP
- Prof. Dr. Ruy Exel Filho - UFSC

Agradecimentos

A Deus, Papai, Mamãe, e a toda minha família, cujos motivos para agradecer, se fossemos listar, com certeza esqueceríamos vários itens. Desde já pedimos perdão por nossa ingratidão.

Ao orientador Severino Toscano, que tem me suportado já por mais de cinco anos, que nos propôs os problemas que resultou nesta dissertação, os quais ele mesmo ajudou a resolver. Agradeço também por todas as vezes em que ele nos projetou em posições, em disciplinas, em que não julgávamos ter condições de estar. Sempre acreditou em nós mais do que nós mesmos.

Aos amigos André Quintal, André Porto, Balgeum, Elinilson, Everton Juliano, Fernando, Gilson, Marília, Salvador, Thales, Willian, toda a turma da patota, e muitos outros que muito nos ajudou, ora em listas de exercícios, ora em trabalhos, ora em estágios, e (por que não?) em provas. Além de, é claro, a sempre bem vinda companhia nos almoços, no lazer, nas rodas de conversa.

Aos professores que encaram com seriedade, alegria, afeto e responsabilidade, a missão de ensinar. Em especial aos professores Antônio Brolezzi, Bárbara Valério, Iole Druck, Lucia Ikemoto, Paulo Leite, Rosa Chaves, Salvador Zanata, Sérgio Alves, Silvia Colello, Zara Abud, entre tantos outros professores do IME-USP e FEUSP, cujas virtudes, mesmo inconscientemente, nos serão como exemplo. Vale aqui a menção aos professores que encontramos no decorrer do nosso ensino básico, que, diferentemente dos já citados, são conhecidos e lembrados (quando são) apenas pelo nome, Andrea, Célia, Cleide, Jorge, Oertes, Silmara, entre muitos outros já esquecidos, anônimos em meio a multidão de professores, que sempre se preocupam com o futuro dos nossos jovens, e fazem o seu trabalho. Com certeza, sem este trabalho, não teríamos chegado até aqui.

Aos funcionários do IME e terceirizados que, prestando o seu serviço, colaboram para o perfeito funcionamento das tarefas acadêmicas, sempre com harmonia e alegria.

À CAPES pela bolsa de mestrado, ao CNPq pelos três anos de bolsa de iniciação científica. Com certeza, tais auxílios foram fundamentais para a continuidade dos estudos.

Deixando claro que não foram poucas as vezes em que precisamos recorrer à internet, notas de aula, fóruns, para termos esclarecidos alguns conceitos, para concebermos algumas ideias, não poderíamos deixar de agradecer a toda a sociedade. Com certeza, sem a vida em sociedade, sem o espírito de equipe que faz com que as pessoas sejam sempre dispostas a ajudar, a ciência tal como a conhecemos não existiria. Obrigado a todos.

Resumo

OLIVEIRA, Everton F. **Produto Cruzado de uma C*-Álgebra por $\mathbb{Z}$, Generalização do Teorema de Fejér, e Exemplos**. 2015. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

Neste trabalho, apresentamos uma introdução às C*-álgebras e a construção do produto cruzado $\mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, onde $\mathcal{A}$ é uma C*-álgebra com unidade, e α é um automorfismo em $\mathcal{A}$. Apresentamos, também, uma generalização do Teorema de Fejér, no contexto de produto cruzado. A titulo de exemplo de produto cruzado, provamos que $\mathbb{C} \rtimes_{\mathrm{id}} \mathbb{Z}$ é isomorfo a $\mathcal{C}(S^1)$. Sendo X uma compactificação de $\mathbb{Z}$ pela adição dos símbolos $+\infty$ e $-\infty$, provamos que o produto cruzado $\mathcal{C}(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ é isomorfo $\mathcal{A}$, o fecho do conjunto dos operadores pseudodiferenciais clássicos de ordem 0 sobre S^1, onde α é definido pelo deslocamento. Com posse destes isomorfismos, vimos a implicação da generalização do Teorema de Fejér para $\mathcal{C}(S^1)$ e para $\mathcal{A}$.

Palavras-chave: C*-Álgebra, Produto Cruzado, Teorema de Fejér.

Abstract

OLIVEIRA, Everton F. **Crossed Product of an C*-Algebra by $\mathbb{Z}$, Fejér's Theorem Generalization, and Examples**. 2015. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

We present an introduction to C * -algebras and the construction of the crossed product $\mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, where $\mathcal{A}$ is a C *-algebra with unit, and α is an automorphism in $\mathcal{A}$. We also study a generalization of Fejér's theorem on crossed product context. As an example of crossed product, we prove that $\mathbb{C} \rtimes_{\mathrm{id}} \mathbb{Z}$ is isomorphic to $\mathcal{C}(S^1)$. Let X be a compactification of $\mathbb{Z}$ by addition of the symbols $+\infty$ and $-\infty$. We prove that $\mathcal{C}(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ is isomorphic $\mathcal{A}$, the closure of set of classics pseudo-differential operators of order 0 on S^1, where α is defined by a shift. Based on these isomorphisms, we see the implication of the generalization of Fejér's theorem for $\mathcal{C}(S^1)$ and $\mathcal{A}$.

Keywords: C*-algebra, Crossed Product, Fejér's Theorem.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, apresentaremos uma maneira de, dados uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ com unidade, e α um automorfismo em $\mathcal{A}$, construir uma nova C*-álgebra, chamada de produto cruzado e denotada por $\mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. Além disso, veremos algumas propriedades e teoremas que são válidos em um produto cruzado. Em especial, daremos ênfase a uma generalização do Teorema de Fejér, que pode ser encontrada em [4].

A noção usual de uma série convergir é a de que a sequência formada por suas somas parciais convergem. No entanto, sabe-se que se uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x, então a sequência formada pelas médias da sequência anterior, $g_n = \frac{x_0+\cdots+x_n}{n+1}$, também converge para x, dando-nos uma nova noção de convergência, a convergência em média. Esta noção é importante porque preserva os limites das sequências convergentes e transforma algumas sequências divergentes em convergentes. Logo, aplicando esta noção às somas parciais de uma série, dizemos que uma série é Cesàro somável se a sequência das suas somas parciais convergem em média.

Uma das versões do teorema de Fejér nos garante que, dado uma função f contínua sobre $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, a sequência das somas parciais de sua série de Fourier converge em média para f. Ou seja, a série de Fourier é Cesàro somável.

Neste trabalho, faremos o mesmo teorema, mas só que no contexto de produto cruzado. A construção do produto cruzado, suas propriedades e esta generalização, estarão presentes no Capítulo 2 do presente trabalho.

Durante o texto, imaginamos como possível leitor um estudante de pós graduação em Matemática. Sabemos que este leitor não necessariamente terá uma graduação em Matemática. Portanto, procuramos ser o mais claro possível, correndo o risco de ser enfadonho. No entanto, em algumas passagens, é exigido do leitor o habitual bom senso. Se fôssemos esmiuçar todos os detalhes, provavelmente o enfado chegaria antes de concluirmos o trabalho.

No Capítulo 1, apresentamos uma introdução às C*-álgebras. O leitor já com experiencia em C*-álgebras poderá principiar a leitura pelo Capítulo 2. Nos demais capítulos, procuramos utilizar o mínimo possível de definições presentes no Capitulo 1.

Nos Capítulos 3 e 4, apresentamos exemplos de C*-álgebras que podem ser vistos como produto cruzado.

No Capítulo 3, é o caso da C*-álgebra $\mathcal{C}(S^1)$. Nele, demonstraremos que $\mathcal{C}(S^1)$ é isomorfo a $\mathbb{C} \rtimes_{\mathrm{id}} \mathbb{Z}$. Ou seja, podemos dizer que $\mathcal{C}(S^1)$ é um exemplo de produto cruzado. Após demonstrado tal isomorfismo, aplicaremos generalização do Teorema de Fejér ao produto cruzado $\mathbb{C} \rtimes_{\mathrm{id}} \mathbb{Z}$. E então, de posse do isomorfismo, veremos que, para $\mathcal{C}(S^1)$, a generalização recupera o clássico teorema de Fejér, e isto justifica estarmos chamando tal teorema de generalização no decorrer desta introdução.

No capítulo 4, veremos o caso do fecho dos operadores pseudodiferenciais clássicos de ordem 0 sobre S^1. No entanto, não utilizaremos tais conceitos para apresentar tal C*-álgebra, que denotaremos, no capítulo 4, por $\mathcal{A}$.

Sendo X a compactificação de $\mathbb{Z}$ pela adição de dois símbolos, $+\infty$ e $-\infty$, $\mathcal{C}(X)$ é também um exemplo de C*-álgebra. Apresentaremos tal C*-álgebra $\mathcal{A}$ como um subconjunto de $\mathcal{B}(L^2(S^1))$ gerado pelos operadores de multiplicação $a(M), a \in \mathcal{C}(S^1)$, e pelos $\mathbf{b}(D)$, que são os conjugados, via transformada de Fourier, dos operadores de multiplicação $M_{\mathbf{b}}$ em ℓ_2, com $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(X)$. Uma descrição mais detalhada desta subálgebra de $\mathcal{B}(L^2(S^1))$ é dada na Seção 4.1, onde citamos resultados mais gerais que implicam que $\mathcal{A}$ coincide com o fecho, na topologia da norma, da álgebra dos operadores pseudodiferenciais clássicos de ordem 0 em S^1.

Mostraremos que tal C*-álgebra $\mathcal{A}$ é isomorfa ao produto cruzado $\mathcal{C}(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, onde α é o deslocamento, em uma unidade, das posições das "sequências" em $\mathcal{C}(X)$. Posteriormente, veremos, via tal isomorfismo, a implicação da generalização do teorema de Fejér para $\mathcal{A}$.

Desejamos a todos uma boa leitura.

Capítulo 1

Introdução às C*-álgebras

Neste primeiro capítulo, iremos discorrer sobre algumas definições e propriedades das C*-álgebras. Não temos aqui a pretensão de esgotarmos o tema. Trata-se apenas de uma introdução, visando o aluno de pós-graduação que venha começar a estudar C*-álgebras. Além disso, temos também o objetivo de desenvolvermos os principais resultados que serão utilizados nos demais capítulos, mais precisamente, os Teoremas 1.2.18,1.2.19 e 1.2.29, e o Lema 1.2.7.

Seguiremos, bem de perto, as notas de aula, elaboradas por Ruy Exel, para um mini-curso sobre o tema ministrado na Primeira Bienal de Matemática da Sociedade Brasileira de Matemática, que, por sua vez, foi realizado na Universidade Federal de Minas Gerais. [6]. Algumas complementações foram necessárias, as quais elaboramos baseados em [13].

O leitor já familiarizado com C*-álgebras poderá pular o capítulo, começando a leitura pelo Capítulo 2.

1.1 Álgebras de Banach e Teoria Espectral

Definição 1.1.1. Um espaço vetorial complexo A, munido de um produto $\times : A \times A \to A$, é chamado de álgebra se o produto for bilinear e associativo. Denotaremos $\times(a, b)$ por ab. Além disso, caso o espaço vetorial A seja normado, A será uma álgebra normada se:

$$\|ab\| \leq \|a\|\|b\| \quad \forall a, b \in A.$$

Assim sendo, podemos definir uma distância através da norma, de modo que A pode ser visto como um espaço métrico. Se este espaço métrico for completo, ou seja, se toda sequência de Cauchy convergir, A será denominada Álgebra de Banach.

Definição 1.1.2. Uma álgebra de Banach é uma álgebra normada completa.

Exemplo 1. O conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ pode ser visto como um $\mathbb{C}$-espaço vetorial. Além disso, com o produto usual, e norma sendo o módulo, é uma álgebra de Banach.

O conjunto $\mathcal{C}(K)$ das funções contínuas sobre um compacto K a valores complexos também é uma álgebra de Banach. A soma e o produto são definidos pontualmente ($[f+g](x) = f(x) + g(x)$, e $fg(x) = f(x)g(x)$). E ainda, a norma é dada pelo supremo ($\|f\| = \sup_{x\in K} |f(x)|$).

O conjunto $\mathcal{B}(H)$ dos operadores limitados (e portanto, contínuos) sobre um espaço de Hilbert H também é exemplo de álgebra de Banach. A soma é definida ponto a ponto ($[A+B](u) = Au + Bu$), o produto é a composição ($AB(u) = A(B(u))$) e a norma é a norma de operador.

A demonstração de que tais conjuntos são, de fato, álgebras de Banach é demasiado detalhada, e deixaremos a cargo do leitor.

A partir de agora, A será uma álgebra de Banach com unidade (mais para frente veremos que sempre podemos acrescentar uma unidade). Excluindo o caso trivial (em que $1 = 0$ e então $A = \{0\}$), teremos que $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \lambda_1 1 \neq \lambda_2 1$, o que implica que a aplicação $\lambda \in \mathbb{C} \to \lambda 1 \in A$ é injetora. Então podemos identificar $\mathbb{C}$ como uma subálgebra de A.

Definição 1.1.3. Dado $a \in A$, definimos o resolvente de a como sendo o conjunto

$$\rho(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda - a \text{ é inversível}\}.$$

Além disso, definimos o espectro $\sigma(a)$ de a como o complementar de $\rho(a)$, ou seja, $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \rho(a)$.

Proposição 1.1.4. *Seja $a, b \in A$. Então $\sigma(ab) \setminus 0 = \sigma(ba) \setminus 0$.*

Demonstração. Basta provarmos que, dado $\lambda \neq 0$, $\lambda - ab$ é inversível se, e somente se, $\lambda - ba$ o é. Portanto, supondo que $\lambda - ab$ é inversível, afirmamos que:

$$c = \lambda^{-1}(1 + b(\lambda - ab)^{-1}a)$$

é o inverso de $\lambda - ba$.

De fato, fazendo $c(\lambda - ba)$, e usando várias vezes a bilinearidade do produto da álgebra, temos:

$$c(\lambda - ba) = \lambda^{-1}(1 + b(\lambda - ab)^{-1}a)(\lambda - ba) = \lambda^{-1}(\lambda - ba + b(\lambda - ab)^{-1}a(\lambda - ba)) =$$

$$= \lambda^{-1}(\lambda - ba + b(\lambda - ab)^{-1}(a\lambda 1 - aba)) = \lambda^{-1}(\lambda - ba + b(\lambda - ab)^{-1}(\lambda a - aba)) =$$

$$= \lambda^{-1}(\lambda - ba + b(\lambda - ab)^{-1}(\lambda - ab)a) = \lambda^{-1}(\lambda - ba + ba) = 1$$

E, por outro lado, temos:

$$(\lambda - ba)c = (\lambda - ba)(\lambda^{-1}1)(1 + b(\lambda - ab)^{-1}a) = \lambda^{-1}(\lambda - ba)(1 + b(\lambda - ab)^{-1}a) =$$

$$= \lambda^{-1}(\lambda - ba + (\lambda - ba)b(\lambda - ab)^{-1}a) = \lambda^{-1}(\lambda - ba + (\lambda b - bab)(\lambda - ab)^{-1}a) =$$

$$= \lambda^{-1}(\lambda - ba + b(\lambda - ab)(\lambda - ab)^{-1}a) = \lambda^{-1}(\lambda - ba + ba) = 1$$

E, portanto, $(\lambda - ba)$ é inversível. A recíproca fica provada trocando os papéis de a e b. □

Lema 1.1.5. *O conjunto dos elementos inversíveis de A é aberto. Mais especificamente, provaremos que dados $a \in A$ inversível, e $b \in A$ tal que $\|a - b\| < \|a^{-1}\|^{-1}$, teremos que b também é inversível e*

$$b^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1}(a - b))^n a^{-1}.$$

Demonstração. Seja $x = a^{-1}(a - b)$. Observe que $b = a(1 - x)$. Então, como a já é inversível, para que b seja inversível basta que $1 - x$ seja inversível.

Mas, por hipótese, temos:

$$\|x\| \leq \|a^{-1}\|\|(a-b)\| < \|a^{-1}\|\|a^{-1}\|^{-1} = 1.$$

Portanto, a série $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ é absolutamente convergente, e também convergente em decorrência de A ser completa[1]. Então, sendo y a sua soma:

$$(1-x)y = (1-x)\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N} x^n = \lim_{N\to\infty} 1 - x^{N+1} = 1.$$

Analogamente, temos que $y(1-x) = 1$, resultando que y é o inverso de $(1-x)$. Portanto, b é inversível e :

$$b^{-1} = (1-x)^{-1}a^{-1} = ya^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(a^{-1}(a-b))^n a^{-1}.$$

□

Proposição 1.1.6. *A função inversão é contínua em seu domínio, ou seja, se $a \in A$ é inversível então $\lim_{b\to a} b^{-1} = a^{-1}$. Observe que é suficiente provar que se $a \in A$ é inversível e $b \in A$ é tal que $\|b-a\| < \|a^{-1}\|^{-1}$*

$$\|b^{-1} - a^{-1}\| \leq \|a^{-1}\|^2 \frac{\|a-b\|}{1 - \|a^{-1}\|\|a-b\|}.$$

Demonstração. Usando a expressão que encontramos no Lema 1.1.5 para b^{-1}, temos:

$$\|b^{-1} - a^{-1}\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty}(a^{-1}(a-b))^n a^{-1} - a^{-1}\right\| =$$

$$= \left\|\left(\sum_{n=0}^{\infty}(a^{-1}(a-b))^n - 1\right)a^{-1}\right\| = \left\|\left(\sum_{n=1}^{\infty}(a^{-1}(a-b))^n\right)a^{-1}\right\| \leq$$

[1] A prova de tal fato é a seguinte: Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ uma série que converge absolutamente, ou seja $\sum_{n=0}^{\infty}\|a_n\| < \infty$. Como A é completa, basta provar que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é de Cauchy. Mas observe que, se $N > M$, $\left\|\sum_{n=0}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{M} a_n\right\| = \left\|\sum_{n=M}^{N} a_n\right\| \leq \sum_{n=M}^{N}\|a_n\|$. Logo, como a série $\sum_{n=0}^{\infty}\|a_n\|$ é convergente, ela é de Cauchy, o que prova o desejado.

$$\leq \|a^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty} (\|a^{-1}\| \|a-b\|)^n = \|a^{-1}\|^2 \frac{\|a-b\|}{1 - \|a^{-1}\| \|a-b\|}.$$

$\square$

Proposição 1.1.7. *O espectro de um elemento $a \in A$ é um conjunto fechado.*

Demonstração. Recapitulando, vimos no Lema 1.1.5 que o conjunto formado pelos elementos inversíveis de A é aberto. E também, vê-se que, dado $a \in A$, a aplicação $\lambda \in \mathbb{C} \mapsto \lambda - a \in A$ é contínua. Logo, a imagem inversa do conjunto formado pelos elementos inversíveis de A por esta aplicação é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$. Mas este conjunto é o resolvente de a. O que prova o desejado. $\square$

Portanto, para provarmos que o espectro de um elemento $a \in A$ é um compacto, basta mostrarmos que ele é limitado. O que será evidenciado pela:

Proposição 1.1.8. *Seja $x \in A$. Se $\lambda \in \mathbb{C}$ é tal que $|\lambda| > \|x\|$, então $\lambda - x$ é inversível e*

$$(\lambda - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n.$$

Logo, o espectro de x está contido na bola (no plano complexo) centrada em zero e com raio $\|x\|$, portanto é compacto.

Demonstração. Fazendo $a = \lambda$, $b = \lambda - x$ temos que $a = \lambda$ é inversível e que:

$$\|a - b\| = \|\lambda - \lambda + x\| = \|x\| < |\lambda| = |\lambda^{-1}|^{-1} = \|a^{-1}\|^{-1}.$$

Logo, a e b satisfazem as condições do Lema 1.1.5. Portanto, $b = \lambda - x$ é inversível, e

$$(\lambda - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^{-1}(\lambda - \lambda + x))^n \lambda^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n.$$

$\square$

Definição 1.1.9. Dado $a \in A$, definimos a função resolvente $R_a : \rho(a) \to A$ por:

$$R_a(\lambda) = (\lambda - a)^{-1}.$$

Note que, pela Proposição 1.1.6, já temos que R_a é contínua. Além disso, temos:

Proposição 1.1.10. *Seja $a \in A$.*

1. *Dados $\lambda \neq \mu$ em $\rho(a)$, temos a seguinte equação para o resolvente:*

$$\frac{R_a(\mu) - R_a(\lambda)}{\mu - \lambda} = -(\mu - a)^{-1}(\lambda - a)^{-1}.$$

2. *Para qualquer funcional linear contínuo $\phi \in A^*$ (dual topológico do Espaço de Banach A) a composição $\phi \circ R_a$ é uma função analítica em $\rho(a)$.*

Demonstração. Dados $\lambda \neq \mu$ pertencentes ao $\rho(a)$, temos:

$$R_a(\mu) - R_a(\lambda) = (\mu - a)^{-1} - (\lambda - a)^{-1} =$$

$$= (\mu - a)^{-1}(\lambda - a)(\lambda - a)^{-1} - (\mu - a)^{-1}(\mu - a)(\lambda - a)^{-1} =$$

$$= (\mu - a)^{-1}((\lambda - a) - (\mu - a))(\lambda - a)^{-1} = (\mu - a)^{-1}(\lambda - \mu)(\lambda - a)^{-1}.$$

De onde segue o que está enunciado no primeiro item. Para provarmos o segundo item, dado $\phi \in A^*$ temos:

$$\lim_{\mu \to \lambda} \frac{\phi(R_a(\mu)) - \phi(R_a(\lambda))}{\mu - \lambda} = \lim_{\mu \to \lambda} \phi\left(\frac{(R_a(\mu) - R_a(\lambda)}{\mu - \lambda}\right) =$$

$$= \lim_{\mu \to \lambda} \phi\left(-(\mu - a)^{-1}(\lambda - a)^{-1}\right) = \phi\left(\lim_{\mu \to \lambda}\left(-(\mu - a)^{-1}(\lambda - a)^{-1}\right)\right) =$$

$$= -\phi((\lambda - a)^{-2}).$$

Então $\phi \circ R_a$ é holomorfa, portanto, analítica. □

Teorema 1.1.11. *Dado $a \in A$, o espectro $\sigma(a)$ é compacto e não vazio.*

Demonstração. Já provamos anteriormente que $\sigma(a)$ é compacto (Proposições 1.1.7 e 1.1.8). Falta apenas provar que é não vazio. Suponhamos, por absurdo, que ele seja vazio. Então temos que seu complementar $\rho(a)$ é $\mathbb{C}$ e, portanto, a função resolvente R_a está definida em todo o conjunto dos complexos. Logo, pelo que provamos anteriormente (1.1.10), se $\phi \in A^*$ então $\phi \circ R_a$ é holomorfa sobre $\mathbb{C}$. Ou seja, $\phi \circ R_a$ é uma função inteira.

Por outro lado, para $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| > \|a\|$, pelo que já provamos temos que:

$$\|(\lambda - a)^{-1}\| = \left\| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} a^n \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda^{-n-1}| \|a\|^n = \frac{1}{|\lambda|} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\|a\|}{|\lambda|} \right)^n =$$

$$= \frac{1}{|\lambda|} \frac{1}{1 - \frac{\|a\|}{|\lambda|}} = \frac{1}{|\lambda| - \|a\|}.$$

O que mostra que $\lim_{\lambda\to\infty} R_a(\lambda) = 0$. E, como ϕ é contínua, temos que $\lim_{\lambda\to\infty} \phi(R_a(\lambda)) = 0$. Portanto, temos que $\phi \circ R_a$ é limitada, uma vez que em qualquer compacto ela é limitada (porque é contínua), e tende a 0 quando $\lambda \to \infty$. Então, como ela é inteira e limitada, pelo teorema de Liouville[2], $\phi \circ R_a$ é constante. Mas como $\lim_{\lambda\to\infty} \phi(R_a(\lambda)) = 0$, $\phi \circ R_a$ é nula para todo ϕ e todo λ. Assim, como ϕ é qualquer, tem-se por uma consequência do teorema de Hahn-Banach, que $R_a(\lambda) = 0$ para todo λ. O que é um absurdo, pois $R_a(\lambda) = (\lambda - a)^{-1}$ é inversível e, portanto, diferente de zero. □

Proposição 1.1.12. *Sejam $a \in A$ e $f(z) = p(z)/q(z)$ função racional, ou seja, f é o quociente do polinômio p pelo polinômio q. Suponha que q não se anule em $\sigma(a)$. Então $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$.*

Demonstração. Como q não se anula em $\sigma(a)$, então q é um produto de fatores lineares do tipo $(z - \lambda)$, onde $\lambda \in \rho(a)$. Portanto, $q(a)$ é inversível, e o quociente está bem definido[3].

[2] Que pode ser encontrado em [1]

[3] Note que, para podermos escrever $\frac{p(a)}{q(a)}$, temos que verificar se $p(a)$ comuta com $q(a)^{-1}$. E isto é verdade. Como o escalar comuta com qualquer elemento (pela bilinearidade do produto), reduzindo o problema aos monômios, basta vermos que a comuta com $(a-\lambda)^{-1}$.

Dado $\lambda \in \sigma(a)$, provaremos que $f(\lambda) \in \sigma(f(a))$ e, portanto, que $\sigma(f(a)) \supset f(\sigma(a))$.

Para tanto, seja g, polinômio na variável z, dado por:

$$g(z) = p(\lambda)q(z) - p(z)q(\lambda).$$

Este polinômio se anula para $z = \lambda$. Então, sabemos que existe um polinômio h tal que:

$$g(z) = (z - \lambda)h(z).$$

E, assim, temos:

$$f(\lambda) - f(a) = \frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} - \frac{p(a)}{q(a)} = \frac{p(\lambda)q(a) - p(a)q(\lambda)}{q(a)q(\lambda)} = \frac{g(a)}{q(a)q(\lambda)} =$$

$$= (a - \lambda)\frac{h(a)}{q(a)q(\lambda)}.$$

Portanto, como $\lambda \in \sigma(a)$, temos que $(a - \lambda)$ não é inversível. E, pela identidade acima, $f(\lambda) - f(a)$ também não é inversível[4]. Ou seja, $f(\lambda) \in \sigma(f(a))$. Então, como queríamos, $\sigma(f(a)) \supset f(\sigma(a))$.

Para provarmos a outra inclusão, ou seja, que $\sigma(f(a)) \subset f(\sigma(a))$, sejam $\lambda \in \sigma(f(a))$ e g o polinômio dado por $g = \lambda q - p$, que pode ser fatorado como:

$$g(z) = \lambda_0(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)...(z - \lambda_n),$$

com $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n \in \mathbb{C}$. E, assim, temos.

$$\lambda - f(a) = \lambda - \frac{p(a)}{q(a)} = \frac{\lambda q(a) - p(a)}{q(a)} = \frac{\lambda_0(a - \lambda_1)(a - \lambda_2)...(a - \lambda_n)}{q(a)}$$

E isto se tem fazendo:

$$(a - \lambda)^{-1}a - a(a - \lambda)^{-1} = (a - \lambda)^{-1}[a - (a - \lambda)a(a - \lambda)^{-1}] =$$

$$= (a - \lambda)^{-1}[a(a - \lambda) - (a - \lambda)a](a - \lambda)^{-1} = 0.$$

[4] Isto segue do fato de que dados $a, b \in \mathcal{A}$ temos que, se ab é inversível e a e b comutam, então a e b também o são. De fato, temos $ab(ab)^{-1} = 1$ e $(ab)^{-1}ab = 1$, então $c = b(ab)^{-1}$ e $d = (ab)^{-1}b$ são os inversos à direita e à esquerda de a respectivamente. E estes inversos são iguais pois $c = 1c = dac = d1 = d$

E, como $\lambda \in \sigma(f(a))$, a expressão acima é um elemento não inversível. Ou seja, na última expressão à direita, pelo menos um entre os monômios é não inversível. Desta forma, temos que $\lambda_i \in \sigma(a)$ para algum $i = 1, ..., n$. E então:

$$g(\lambda_i) = 0 \Rightarrow \lambda q(\lambda_i) = p(\lambda_i) \Rightarrow f(\lambda_i) = \frac{p(\lambda_i)}{q(\lambda_i)} = \lambda.$$

De onde segue que $\lambda \in f(\sigma(a))$. Então, conforme queríamos, $\sigma(f(a)) \subset f(\sigma(a))$. E, portanto, $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$. □

Definição 1.1.13. O raio espectral de um elemento $a \in A$ é:

$$r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$

Pelo que já provamos anteriormente, Proposição 1.1.8, sabemos que $r(a) \leq \|a\|$. E, no mesmo teorema que provamos isso, provamos também que para $|\lambda| > \|a\|$:

$$(\lambda - a)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} a^n.$$

Após definido raio espectral, cabe a dúvida: E quando λ é tal que $r(a) < |\lambda| \leq \|a\|$? Será que $(\lambda - a)^{-1}$ também pode ser determinado da mesma maneira? Para responder a esta pergunta, temos o seguinte resultado.

Lema 1.1.14. *Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| > r(a)$, a série $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} a^n$ converge absolutamente para $(a - \lambda)^{-1}$.*

Demonstração. Seja $\varphi \in A^*$. Considere a função $f = \varphi \circ R_a$, que é analítica em $\rho(a)$, pelo que já provamos na Proposição 1.1.10. E, para λ tal que $|\lambda| > \|a\|$, já obtivemos que:

$$R_a(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} a^n.$$

Então:

$$\varphi \circ R_a(\lambda) = \lambda^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} \varphi(a^n),$$

para $|\lambda| > \|a\|$. Mas, como f é analítica em $\rho(a)$, e, portanto, analítica para $|\lambda| > r(a)$, segue que a série acima converge para $|\lambda| > r(a)$. E, então, temos:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |\lambda^{-n}\varphi(a^n)| < \infty.$$

O que implica que o conjunto$\{\lambda^{-n}a^n \text{ com } n \in \mathbb{N}\}$ é fracamente limitado, e portanto limitado, pelo resultado conhecido como um dos corolários do princípio da limitação uniforme[5]. Então, dado λ, temos que existe uma constante $K_\lambda > 0$ tal que

$$\|\lambda^{-n}a^n\| \leq K_\lambda$$

Então, dado $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ com $|\lambda_0| > r(a)$, tome $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ com $|\lambda_0| > |\lambda_1| > r(a)$, e teremos:

$$\|\lambda_0^{-n}a^n\| = \|\lambda_1^{-n}a^n\| \left(\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_0|}\right)^n \leq K_{\lambda_1} \left(\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_0|}\right)^n.$$

Provando a convergência absoluta, uma vez que $\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_0|} < 1$. □

Teorema 1.1.15. *Dado $a \in \mathcal{A}$, temos que*

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Demonstração. Seja $\lambda \in \sigma(a)$. Pela Proposição 1.1.12, temos que $\lambda^n \in \sigma(a^n)$. De onde, pelo que já fizemos, resulta que $|\lambda^n| \leq \|a^n\|$, ou seja:

$$|\lambda| \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Como λ e n são quaisquer, podemos tomar o supremo para $\lambda \in \sigma(a)$ e o ínfimo para $n \in \mathbb{N}$, resultando em:

$$r(a) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Por outro lado, dado $\lambda \in \rho(a)$ com $|\lambda| > r(a)$, pelo lema anterior, a série

[5] Que pode ser encontrado em [2]

$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} a^n$ converge, resultando que

$$\lim_{n\to\infty} \lambda^{-n} a^n = 0.$$

Portanto, tomando $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$, então:

$$\|\lambda^{-n} a^n\| < 1 \Rightarrow \|a^n\| < |\lambda^n| \Rightarrow \|a^n\|^{\frac{1}{n}} < |\lambda|.$$

Agora, tomando o limite superior em n e o ínfimo para λ ($|\lambda| > r(a)$), concluímos:

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(a),$$

Assim, juntando os resultados, temos:

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(a) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf_{n\in\mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

Mas, como em qualquer sequência o limite superior nunca é menor que o limite inferior, damos por demonstrado o que queríamos. □

Definição 1.1.16. Dadas álgebras de Banach A e B, diremos que uma função $\varphi : A \to B$ é um homomorfismo se φ for uma transformação linear e, além disso, satisfizer:

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b),$$

para todo a, b em A.

O espectro de A é o conjunto $\hat{A}$ formado por todos os homomorfismos não nulos de A em $\mathbb{C}$.

Lema 1.1.17 (Acrescentar uma unidade em uma álgebra)**.** *Dada uma álgebra normada A, seja $\tilde{A} = A \oplus \mathbb{C}$ equipada com o produto e norma dados por:*

$$(a, \lambda)(b, \mu) = (ab + \lambda b + \mu a, \lambda\mu)$$

$$\|(a, \lambda)\| = \|a\| + |\lambda|$$

onde $a, b \in A$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Então $\tilde{A}$ é uma é uma álgebra normada, e é completa se A o for.

Demonstração. Dada uma álgebra normada A, já sabemos que $\tilde{A}$ é um espaço vetorial. E será uma álgebra, com o produto acima definido, pois o produto é associativo e bilinear:

$$((a,\lambda)(b,\mu))(c,\delta) = (ab+\lambda b+\mu a, \lambda\mu)(c,\delta) =$$

$$(abc+\lambda bc+\mu ac+\lambda\mu c+\delta ab+\delta\lambda b+\delta\mu a, \lambda\mu\delta)$$

$$(a,\lambda)((b,\mu)(c,\delta)) = (a,\lambda)(bc+\mu c+\delta b, \mu\delta) =$$

$$(abc+\mu ac+\delta ab+\lambda bc+\lambda\mu c+\lambda\delta b+\mu\delta a, \lambda\mu\delta)$$

A bilinearidade faremos em apenas uma entrada, na outra o raciocínio é análogo:

$$((a,\lambda)+\xi(b,\mu))(c,\delta) = (a+\xi b, \lambda+\xi\mu)(c,\delta) =$$

$$((a+\xi b)c+(\lambda+\xi\mu)c+\delta(a+\xi b), (\lambda+\xi\mu)\delta) =$$

$$= (ac+\lambda c+\delta a, \lambda\delta)+\xi(bc+\mu c+\delta b, \mu\delta) = (a,\lambda)(c,\delta)+\xi(b,\mu)(c,\delta)$$

E, ainda, $\tilde{A}$ é espaço normado com a norma acima definida, pois:

$$\|(a,\lambda)\| = 0 \Leftrightarrow \|a\| = 0 \text{ e } |\lambda| = 0 \Leftrightarrow (a,\lambda) = (0,0);$$

$$\|(a,\lambda)+(b\mu)\| = \|a+b\|+|\lambda+\mu| \leq \|a\|+|\lambda|+\|b\|+|\mu| = \|(a,\lambda)\|+\|(b\mu)\|;$$

$$\|(a,\lambda)(b,\mu)\| = \|ab+\lambda b+\mu a\|+|\lambda\mu| \leq \|a\|\|b\|+|\lambda|\|b\|+|\mu|\|a\|+|\lambda||\mu| =$$

$$= (\|a\|+|\lambda|)(\|b\|+|\mu|) = \|(a,\lambda)\|\|(b,\mu)\|.$$

E, ainda, se A é Banach, $\tilde{A}$ é Banach. Pois, dados (x_k,λ_k) uma sequência de Cauchy, e $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que, para $m,n > n_0$, temos

$$\|(x_m,\lambda_m)-(x_n,\lambda_n)\| < \varepsilon.$$

Então, $\varepsilon > \|(x_m-x_n, \lambda_m-\lambda_n)\| = \|x_m-x_n\|+|\lambda_m-\lambda_n|$. Logo, x_k e λ_k são de Cauchy e, portanto, convergem, uma vez que A e $\mathbb{C}$ são de Banach.

Logo, $x_k \to x$ e $\lambda_k \to \lambda$, e existe n_1 tal que, para $k > n_1$, temos:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} > \|x_k - x\| + |\lambda_k - \lambda| = \|(x_k, \lambda_k) - (x, \lambda)\|.$$

Portanto, $(x_k, \lambda_k) \to (x, \lambda)$.

E é fácil ver que $(0, 1)$ é a unidade de $\tilde{A}$ e tem norma 1. $\square$

Veja, também, que esta unitização respeita os homomorfismos. Ou seja, no caso em que B tem unidade, dado $\varphi : A \to B$ homomorfismo entre álgebras de Banach, definindo $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \to B$ por

$$\tilde{\varphi}(a, \lambda) = \varphi(a) + \lambda,$$

teremos que $\tilde{\varphi}$ é um homomorfismo. Pois, dados $(a, \lambda), (b, \mu) \in \tilde{A}, t \in \mathbb{C}$, temos:

$$\tilde{\varphi}((a, \lambda) + t(b, \mu)) = \tilde{\varphi}(a + tb, \lambda + t\mu) = \varphi(a + tb) + \lambda + t\mu =$$

$$= \varphi(a) + \lambda + t(\varphi(b) + \mu) = \tilde{\varphi}(a, \lambda) + t\tilde{\varphi}(b, \mu).$$

$$\tilde{\varphi}((a, \lambda)(b, \mu)) = \tilde{\varphi}(ab + a\mu + b\lambda, \lambda\mu) = \varphi(ab) + \mu\varphi(a) + \lambda\varphi(b) + \lambda\mu =$$

$$= (\varphi(a) + \lambda)(\varphi(b) + \mu) = \tilde{\varphi}(a, \lambda)\tilde{\varphi}(b, \mu).$$

Além disso, a recíproca também é verdadeira, ou seja, dado um homomorfismo em $\tilde{A}$, fica definido um homomorfismo em A pela restrição, uma vez que podemos fazer a inclusão de A em $\tilde{A}$ através da identificação $a \mapsto (a, 0)$.

Relembre-se que definimos:

$$\hat{A} = \{\varphi : A \to \mathbb{C}; \varphi \text{ é homomorfismo não nulo}\}.$$

No caso em que A possui unidade, temos que, para todo $\varphi \in \hat{A}$, vale que $\varphi(1) = 1$. Pois $\varphi^2(1) = \varphi(1)$ e $\varphi(1) \neq 0$, uma vez que se $\varphi(1) = 0$, então $\varphi = 0$.

Proposição 1.1.18. *Seja A uma álgebra de Banach. Se $\varphi : A \to \mathbb{C}$ é um homomorfismo, então $|\varphi(a)| \leq \|a\|$ para todo $a \in A$. E, portanto, φ é* *contínuo.*

Demonstração. Se φ for nulo então é contínuo. Suponha que φ é não nulo e que A possua unidade. Dado $a \in A$, temos

$$\varphi(\varphi(a) - a) = \varphi(a)\varphi(1) - \varphi(a) = 0,$$

e, portanto, $\varphi(a) - a$ pertence ao núcleo de φ, que é um ideal de A. Logo, $\varphi(a) - a$ não é inversível, pois, se fosse inversível, o núcleo de φ seria todo o A. E isso significa que $\varphi(a) \in \sigma(a)$[6]. E então, pelo que já estudamos, $|\varphi(a)| \leq \|a\|$.

No caso de A não ter unidade, aplicamos a proposição anterior para A, e lhe acrescentamos uma unidade. Assim, $\tilde{\varphi} : \tilde{A} \to \mathbb{C}$ definida por $\tilde{\varphi}(a, \lambda) = \varphi(a) + \lambda$ é um homomorfismo. E, então, aplicando a ele o que provamos aqui no primeiro caso, temos que, pela inclusão de A em $\tilde{A}$:

$$|\varphi(a)| = |\tilde{\varphi}(a, 0)| \leq \|(a, 0)\| = \|a\|.$$

□

Com este último resultado, vemos que

$$\hat{A} = \{\varphi : A \to \mathbb{C}; \varphi \text{ é um homomorfismo não nulo}\}$$

é um subconjunto da bola unitária do dual topológico A^*. Sendo assim, podemos considerar $\hat{A}$ como um espaço topológico com a topologia da convergência pontual de A^* (topologia fraca-*).

Proposição 1.1.19. *Seja A uma álgebra de Banach. O espectro $\hat{A}$ é um espaço localmente compacto com a topologia da convergência pontual. Caso A tenha unidade, $\hat{A}$ é compacto.*

[6]Note que aqui já fica provado que em uma álgebra com unidade, para todo $a \in A$ temos:

$$\sigma(a) \supset \{\varphi(a) : \varphi \in \hat{A}\}$$

Demonstração. Considere o conjunto S formado por todos os homomorfismos de A em $\mathbb{C}$, não excluindo, desta vez, o homomorfismo nulo.

O conjunto S é fechado em A^*, com a topologia da convergência pontual. Pois, dado f em $\bar{S}$ existe uma rede $\varphi_\alpha \in S$ tal que $\varphi_\alpha(x) \to f(x)$ para todo $x \in A$. Temos que mostrar que f também é um homomorfismo. Mas f é linear, pois $f(a + \lambda b) = \lim \varphi_\alpha(a + \lambda b) = \lim \varphi_\alpha(a) + \lambda \lim \varphi_\alpha(b) = f(a) + \lambda f(b)$. E, além disso, $f(ab) = \lim \varphi_\alpha(ab) = \lim \varphi_\alpha(a) \lim \varphi_\alpha(b) = f(a)f(b)$. Logo f é homomorfismo e, portanto, S é fechado na topologia da convergência pontual. E, como S está contido na bola unitária, que é compacta pelo teorema de Alaoglu[7], então S também é compacto. Como $\hat{A}$ resulta da remoção de um ponto (o homomorfismo nulo) do espaço S, concluímos que $\hat{A}$ é localmente compacto.

Já vimos que, no caso em que A tem unidade, para todo homomorfismo $\varphi \in S$, temos:

$$\varphi \neq 0 \Leftrightarrow \varphi(1) = 1.$$

Então, o homomorfismo nulo é isolado de $\hat{A}$, pois não podemos ter uma rede φ_α em $\hat{A}$ tal que $\varphi_\alpha(1) \to 0$. Então $\hat{A}$ é fechado em S e, portanto, compacto. □

Teorema 1.1.20. *Seja A uma álgebra de Banach comutativa com unidade. Então, para todo $a \in A$, vale:*

$$\sigma(a) = \{\varphi(a) : \varphi \in \hat{A}\}$$

Demonstração. Já vimos na Proposição 1.1.18 a prova da inclusão "$\supset$" entre os conjuntos acima. Para provar a outra inclusão, seja $\lambda \in \sigma(a)$. Definimos:

$$J_0 = (\lambda - a)A = \{(\lambda - a)b; b \in A\}$$

Como estamos supondo que A é comutativa, temos que J_0 é um ideal de A. Como $(\lambda - a)$ é não inversível, não existe b tal que $(\lambda - a)b = 1$. Então $1 \notin J_0$ e portanto $J_0 \neq A$. Utilizando o Lema de Zorn[8], demonstra-se que existe um

[7] Que pode ser encontrado em [2]

[8] Para referências, veja [16, 9].

ideal maximal J, ideal próprio de A, que contém J_0.

Afirmamos que J é fechado, pois, caso não fosse, seu fecho (que também é um ideal) seria A, pela maximalidade de J. E, neste caso, J seria denso. Mas, o conjunto dos elementos inversíveis de A é um aberto. Então, temos que existiria algum elemento inversível em J e, portanto, $J = A$, pois é um ideal. Mas isto contradiz o fato de que J é um ideal próprio.

Agora, seja $B = A/J$ o quociente de A por J. Equipando B com a estrutura quociente de uma álgebra complexa, e a norma $\|a+J\| = \inf_{x\in J} \|a + x\|$, temos que B é uma álgebra de Banach comutativa[9].

Afirmamos que $B = \mathbb{C}1$. De fato, dado $b \in B$, como o espectro é sempre não vazio, existe $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $\mu - b$ é não inversível. Entretanto, como J é maximal, todo elemento não nulo de B é inversível. Portanto $b = \mu$. E claramente já tínhamos $\mathbb{C} \subset B$. Então $B = \mathbb{C}$.

Então podemos ver a aplicação quociente $\pi : A \to A/J = \mathbb{C}$ como um homomorfismo complexo, ou seja, um elemento de $\hat{A}$. Recordando que $(\lambda - a) \in J = Ker(\pi)$, temos que $\pi(a) = \lambda$, de onde segue a inclusão "$\subset$" entre os conjuntos do enunciado. $\square$

Este resultado já nos permite afirmar que o espectro de uma álgebra de Banach comutativa com unidade é sempre não vazio.

Definiremos agora a transformada de Gelfand e provaremos que ela é um homomorfismo contrativo.

Seja A uma álgebra de Banach comutativa. Dado $a \in A$, considere a função $\hat{a} : \hat{A} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$\hat{a}(\varphi) = \varphi(a),\ \forall \varphi \in \hat{A}.$$

Uma vez que consideramos a topologia da convergência pontual em $\hat{A}$, temos que $\hat{a}$ é uma função contínua para todo $a \in A$, pois, sendo $\varphi_\alpha \in \hat{A}$ uma rede convergindo para φ, temos

$$\lim_\alpha \hat{a}(\varphi_\alpha) = \lim_\alpha \varphi_\alpha(a) = \varphi(a) = \hat{a}(\varphi)$$

[9] Veja, por exemplo, [8]

Note também que, no caso que $\hat{A}$ não é compacto, $\hat{a} \in C_0(\hat{A})$, ou seja, $\hat{a}$ tem limite zero no infinito. Para tanto, dado $\varepsilon > 0$, veja que o conjunto $K = \{\varphi \in S : |\varphi(a)| \geq \varepsilon\}$ é fechado em S, uma vez que K é a pré imagem de um fechado pela função contínua $|\hat{a}|$. E S é o conjunto de todos os homomorfismos, incluindo o 0, que já provamos que é compacto. Logo K é compacto, e está contido em $\hat{A}$, pois a inclusão do homomorfismo nulo não faz diferença, uma vez que $\hat{a}(0) = 0$, ou seja, $\forall \varepsilon > 0, |\hat{a}(0)| = |0(a)| = 0 < \varepsilon$.

Definição 1.1.21. A transformada de Gelfand de A é a função

$$\kappa : A \to C_0(\hat{A}), \text{ dada por } \kappa(a) = \hat{a}, \ \forall a \in A.$$

Cabe agora vermos que a transformada de Gelfand é um homomorfismo.

De fato, temos que κ é linear: $\kappa(\lambda a) = \widehat{\lambda a}$, mas, $\forall \varphi \in \hat{A}$, temos: $\widehat{\lambda a}(\varphi) = \varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a) = \lambda\hat{a}(\varphi)$. Logo, $\kappa(\lambda a) = \widehat{\lambda a} = \lambda\hat{a} = \lambda\kappa(a)$. E ainda, temos: $\kappa(a + b) = \widehat{a + b}$. Mas, $\forall \varphi \in \hat{A}$, temos $\widehat{a + b}(\varphi) = \varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b) = \hat{a}(\varphi) + \hat{b}(\varphi)$. Logo $\kappa(a + b) = \widehat{a + b} = \hat{a} + \hat{b} = \kappa(a) + \kappa(b)$. E, portanto, κ é linear.

E ainda, temos que κ respeita o produto, pois: $\kappa(ab) = \widehat{ab}$. Mas, $\forall \varphi \in \hat{A}$, temos $\widehat{ab}(\varphi) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \hat{a}(\varphi)\hat{b}(\varphi)$. E, então, $\kappa(ab) = \widehat{ab} = \hat{a}\hat{b} =$
$= \kappa(a)\kappa(b)$

Proposição 1.1.22. *Dado $a \in A$, temos*

$$\|\kappa(a)\| = r(a) \leq \|a\|,$$

. Portanto, a transformada é um homomorfismo contrativo.

Demonstração. Pela definição da norma em $C_0(\hat{A})$, e pelo Teorema 1.1.20, temos:

$$\|\kappa(a)\| = \sup_{\varphi \in \hat{A}} |\hat{a}(\varphi)| = \sup\{|\varphi(a)| : \varphi \in \hat{A}\} = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} = r(a),$$

e a desigualdade já provamos anteriormente na Proposição 1.1.8. $\square$

1.2 C*-álgebras

Agora nos dedicaremos a estudar uma classe especial de álgebras de Banach: as C*-algebras. Uma C*-álgebra nada mais é do que uma álgebra de Banach dotada de uma nova operação, a involução, satisfazendo algumas propriedades, que veremos a seguir.

Definição 1.2.1. Seja A uma álgebra de Banach. Uma *involução* em A é uma função

$$\begin{aligned} * : A &\to A \\ a &\mapsto a^* \end{aligned}$$

satisfazendo, para todo $a, b \in A$ e $\lambda \in \mathbb{C}$:

i. $(a+b)^* = a^* + b^*$;

ii. $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$;

iii. $(ab)^* = b^* a^*$;

iv. $(a^*)^* = a$;

v. $\|a^*\| = \|a\|$.

Uma *álgebra de Banach com involução* é uma álgebra de Banach equipada com uma involução. Note que, do último item, já temos $\|a^* a\| \leq \|a\|^2$. Uma *C*-álgebra* é uma álgebra de Banach com involução para a qual ainda vale:

$$\|a^* a\| = \|a\|^2, \ \forall a \in A.$$

Aparentemente esta exigência a mais parece pouca, mas, na verdade, faz toda a diferença. Veja, por exemplo, o Lema 1.1.17. Se definíssemos lá uma involução coordenada a coordenada, conseguiríamos provar que $\tilde{A}$ é uma álgebra de Banach com involução. No entanto, o leitor poderá ver no Apêndice A que a norma definida no Lema não satisfaz a identidade acima, fazendo com que, se quisermos unitizar uma C*-álgebra, temos de definir uma outra norma. Os detalhes poderão ser conferidos no Apêndice A.

Exemplo 2. Já vimos, na seção anterior, que o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é uma álgebra de Banach. Agora observe que, fazendo da conjugação complexa uma involução($z^* = \overline{z}$), o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ é uma C*-álgebra.

E também, o conjunto das funções contínuas sobre um compacto $\mathcal{C}(K)$ é um exemplo de C*-álgebra. Onde a involução é dada pela conjugação complexa ponto a ponto, ou seja, $f^*(z) = \overline{f(z)}$.

O conjunto $\mathcal{B}(H)$ dos operadores lineares contínuos sobre um espaço de Hilbert H é um exemplo de C*-álgebra, onde a involução é dada pelo operador adjunto. Ou seja, dado $T \in \mathcal{B}(H)$, T^* é o operador que satisfaz $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$ para todo $x, y \in H$.

Novamente estamos deixando os detalhes a cargo do leitor.

Vamos estudar, agora, propriedades básicas das C*-álgebras

Proposição 1.2.2. *Se A é uma C*-álgebra com unidade, então $1 = 1^*$ e $\|1\| = 1$ (excluindo o caso trivial em que $A = \{0\}$)*

Demonstração. $1^* = 1^*1 = (1 \cdot 1^*)^* = (1^*)^* = 1$

$\|1\|^2 = \|1^*1\| = \|1\|$, de onde $\|1\|(1 - \|1\|) = 0$ e, portanto, $\|1\| = 1$ ou $\|1\| = 0$. Mas, no segundo caso, a álgebra seria a trivial. Logo $\|1\| = 1$. $\square$

Proposição 1.2.3. *Seja A uma álgebra de Banach com involução. Dado $a \in A$, existem elementos $x, y \in A$, tais que $x^* = x$, $y^* = y$, $a = x + iy$.*

Demonstração. Queremos que existam x, y , autoadjuntos, tais que

$$a = x + iy.$$

Portanto, pelo menos formalmente, temos:

$$a^* = x - iy.$$

O que implica que

$$a + a^* = 2x \quad \text{e} \quad a - a^* = 2iy.$$

Então, veja que

$$x = \frac{a + a^*}{2} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{a - a^*}{2i}$$

satisfazem o enunciado. □

Proposição 1.2.4. *Sejam A uma C*-álgebra com unidade, e $a \in A$ um elemento autoadjunto, isto é, $a^* = a$. Então $\sigma(a) \subset \mathbb{R}$.*

Demonstração. Seja $\lambda \in \sigma(a)$, e escreva $\lambda = x + iy$ com $x, y \in \mathbb{R}$. Provaremos que $y = 0$. Para tanto seja $b_n = a - x + iny$. Considerando o polinômio f dado por $f(z) = z - x + iny$ concluímos, pela Proposição 1.1.12, que $f(\lambda) \in \sigma(f(a))$ ou seja $f(\lambda) = \lambda - x + iny = x + iy - x + iny = i(n+1)y$ está em $\sigma(b_n)$. Portanto $|i(n+1)y| \leq \|b_n\|$, que, calculando, nos dá:

$$y^2(n^2+2n+1) = |i(n+1)y|^2 \leq \|b_n\|^2 = \|b_n^* b_n\| = \|(a-x-iny)(a-x+iny)\| =$$

$$= \|(a-x)^2 + n^2y^2\| \leq \|(a-x)^2\| + \|n^2y^2\|.$$

Portanto,

$$y^2(n^2 + 2n + 1) \leq \|(a-x)^2\| + n^2y^2 \Rightarrow y^2(2n+1) \leq \|(a-x)^2\|$$

E então, como n é arbitrário, concluímos que $y = 0$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Proposição 1.2.5. *Sejam A uma C*-álgebra com unidade, e $a \in A$ um elemento autoadjunto. Então*

$$r(a) = \|a\|.$$

Demonstração. Primeiramente, observe que se a é autoadjunto, por indução finita, qualquer potência de a é autoadjunto, pois $(a^2)^* = (a^*a^*) = a^2$, e, para o passo de indução, $(a^k)^* = ((a^{k-1})^*a^*) = a^k$. Além disso, novamente por indução finita, temos $\|a\|^{2^n} = \|a^{2^n}\|$, pois $\|a\|^2 = \|a^*a\| = \|a^2\|$, e $\|a\|^{2^k} = (\|a\|^{2^{k-1}})^2 = \|a^{2^{k-1}}\|^2 = \|(a^{2^{k-1}})^* a^{2^{k-1}}\| = \|a^{2^k}\|$. Logo, do Teorema 1.1.15, temos:

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^{2^n}\|^{\frac{1}{2^n}} = \|a\|,$$

uma vez que, se uma sequência converge, então qualquer subsequência tem o mesmo limite. □

Definição 1.2.6. Sejam A e B álgebras com involução. Um homomorfismo $\varphi : A \to B$ é chamado *-homomorfismo se $\varphi(a)^* = \varphi(a^*)$ para todo $a \in A$.

Lema 1.2.7. *Seja $\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ *-homomorfismo de $\mathcal{B}$, álgebra de Banach com involução, em $\mathcal{C}$, C*-álgebra. Então, φ é contínuo e $\|\varphi\| \leq 1$.*

Demonstração. Lembre-se que, como $\mathcal{C}$ é C*-álgebra, $\forall y \in \mathcal{C}$ autoadjunto, $\|y\| = r(y)$, onde $r(y)$ é o raio espectral de y, cuja definição pode ser encontrada na página 11. Suponha, inicialmente, que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ tenham unidade. Se φ é nulo o teorema é valido trivialmente. Agora, se φ não é nulo, temos que $\varphi(1) = 1$.

Veja que φ manda elementos inversíveis em elementos inversíveis, pois, se a é inversível, temos que

$$1 = \varphi(1) = \varphi(a^{-1}a) = \varphi(a^{-1})\varphi(a).$$

E, da mesma forma, temos $\varphi(a)\varphi(a^{-1}) = 1$. Ou seja, $\varphi(a)$ é inversível.

Temos, portanto, que se $\lambda - a$ é inversível, então $\varphi(\lambda - a) = \lambda - \varphi(a)$ é inversível. Portanto $\rho(a) \subset \rho(\varphi(a))$. Logo $\sigma(\varphi(a)) \subset \sigma(a)$, para todo $a \in A$. O que implica que $r(\varphi(a)) \leq r(a)$.

Logo, dado $a \in \mathcal{B}$ autoadjunto, $\varphi(a)$ é autoadjunto e

$$\|\varphi(a)\| = r(\varphi(a)) \leq r(a) \leq \|a\|.$$

Agora, para um $x \in \mathcal{B}$ não necessariamente autoadjunto,

$$\|\varphi(x)\|^2 = \|\varphi(x)^*\varphi(x)\| = \|\varphi(x^*x)\| \leq \|x^*x\| \leq \|x\|^2$$

Agora, em um caso geral, onde $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ não necessariamente tenham unidade, vimos no Lema 1.1.17 e no Apêndice A que existem unitizações $\tilde{\mathcal{B}}$ e $\check{\mathcal{C}}$. Aplicando o que provamos acima para o *-homomorfismo $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathcal{B}} \to \check{\mathcal{C}}$ definido por $\tilde{\varphi}(x,0) = (\varphi(x),0)$ e $\tilde{\varphi}(0,1) = (0,1)$, temos:

$$\|\varphi(x)\|_{\mathcal{C}} = \|(\varphi(x),0)\|_{\check{\mathcal{C}}} = \|\tilde{\varphi}(x,0)\|_{\check{\mathcal{C}}} \leq \|(x,0)\|_{\tilde{\mathcal{B}}} = \|x\|.$$

$\square$

Proposição 1.2.8. *Seja A C*-álgebra comutativa com unidade. Dado $\varphi \in \hat{A}$, temos:*

$$\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)}, \quad \forall a \in A.$$

Demonstração. Como $\sigma(a) = \{\varphi(a) : \varphi \in \hat{A}\}$, caso a seja auto-adjunto teremos, $\varphi(a) \in \sigma(a) \subset \mathbb{R}$. Então:

$$\varphi(a^*) = \varphi(a) = \overline{\varphi(a)}.$$

Agora, sendo a um elemento não necessariamente autoadjunto, temos que, escrevendo $a = x + iy$ com x e y auto-adjuntos, temos:

$$\varphi(a^*) = \varphi((x+iy)^*) = \varphi(x-iy) = \varphi(x) - i\varphi(y) = \overline{\varphi(x) + i\varphi(y)} = \overline{\varphi(a)}$$

$\square$

Ou seja, se A é uma C*-álgebra comutativa e com unidade, a transformada de Gelfand é um *-homomorfismo.

Teorema 1.2.9 (Gelfand)**.** *Seja A uma C*-álgebra comutativa com unidade. A transformada de Gelfand $\kappa : A \to C(\hat{A})$ é um *-isomorfismo isométrico de A sobre $C(\hat{A})$.*

Demonstração. Dado $a \in A$, a^*a é autoadjunto, e, então, $\|a^*a\| = r(a^*a)$. Mas, na prova de que a transformada de Gelfand é um homomorfismo contrativo, Proposição 1.1.22 , provamos que $\|\kappa(x)\| = r(x)$, e assim:

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = r(a^*a) = \|\kappa(a^*a)\| = |\overline{\kappa(a)}\kappa(a)\| = \|\kappa(a)\|^2$$

E então, a transformada de Gelfand é um homomorfismo isométrico. E, portanto, é injetor. Já havíamos provado que a transformada de Gelfand é contínua. Faltando apenas provar a sobrejetividade para concluir, pelo teorema da aplicação aberta, que se trata de um isomorfismo.

Para tanto, vamos utilizar o[10]:

Teorema 1.2.10 (Stone-Weierstrass)**.** *Seja K um compacto Hausdorff. Seja A uma sub-álgebra de $C(K)$ que separe pontos, que contenha as funções constantes e seja fechada para a conjugação complexa. Então A é denso em $C(K)$.*

Aqui estamos entendendo $A \subset C(K)$ separar pontos como, dados $x \neq y \in K$, existir $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$. E, ser fechado para a conjugação complexa, como $f \in A \Rightarrow \overline{f} \in A$.

Portanto, para utilizar o teorema de Stone-Weierstrass, precisamos que $\kappa(A)$ separe pontos de $\hat{A}$. Mas, se $\varphi, \psi \in \hat{A}$ com $\varphi \neq \psi$, então existe $a \in A$ tal que $\varphi(a) \neq \psi(a) \Rightarrow \kappa(a)(\varphi) \neq \kappa(a)(\psi)$. E então separa pontos. Vejamos também que $\kappa(A)$ contém as funções constantes. De fato, para toda $\varphi \in \hat{A}$ temos que $\kappa(1)(\varphi) = \varphi(1) = 1$[11]. Logo a função constante igual a 1 pertence a $\kappa(A)$, e consequentemente, as funções constantes pertencem a $\kappa(A)$. Além disso, $\kappa(A)$ é fechado para a conjugação complexa. De fato, se $\kappa(a) \in \kappa(A)$ então $\overline{\kappa(a)} = \kappa(a^*) \in \kappa(A)$.

Logo, podemos utilizar o teorema e concluir que $\kappa(A)$ é denso em $C(\hat{A})$. Para concluir a sobrejetividade, basta observarmos que $\kappa(A)$ é fechado em $\mathcal{C}(\hat{A})$.

Para tanto, dado $x \in \overline{\kappa(A)}$ existe $a_n \in A$ tal que $\lim_n \kappa(a_n) = x$. E, portanto, a sequência $\kappa(a_n)$ é de Cauchy. Note que, como já provamos no começo desta demonstração que κ é isometria, a afirmação anterior implica que a_n é de Cauchy, e, portanto, convergente, uma vez que A é de Banach. E, pela continuidade da transformada de Gelfand, temos que $x = \kappa(\lim_n a_n)$, e então $x \in \kappa(A)$.

Logo $\kappa(A)$ é fechado e denso em $C(\hat{A})$, ou seja, $\kappa(A) = C(\hat{A})$ □

Teorema 1.2.11. *Seja B uma C*-algebra com unidade, e seja $A \subset B$ uma sub-C*-álgebra contendo a unidade.*

[10] Uma referencia razoavelmente completa sobre este teorema é encontrada em [11]

[11] Veja observação feita na página 15

(*i*) *Dado* $a \in A$ *inversível em* B, *temos* $a^{-1} \in A$;

(*ii*) *O espectro de* a *relativo a* B, *denotado por* $\sigma_B(a)$, *coincide com* $\sigma_A(a)$, *o espectro de* a *relativo a* A.

Demonstração. Em relação ao primeiro item, suponhamos inicialmente que a seja autoadjunto. Suponhamos, sem perda de generalidade, que a A é a sub-C*-álgebra gerada por $\{1, a\}$ e, portanto, A é comutativa. Pelo teorema de Gelfand A é isometricamente isomorfa a $C(\hat{A})$.

Se a é não inversível em A, então $\kappa(a)$ é não inversível em $\kappa(A) = C(\hat{A})$, e, portanto, é uma função que admite zeros. Sabemos que existem funções contínuas que são 1 nos pontos onde $\kappa(a)$ é zero, e são zero fora de uma vizinhança de tais pontos. Ou seja, existe uma sequência a_n de elementos em A tal que $\lim_n \|\kappa(a)\kappa(a_n)\| = 0$ e $\|\kappa(a_n)\| = 1$ para todo n. Mas a transformada de Gelfand é um isomorfismo. Portanto, existe uma sequência a_n de elementos em A tal que $\lim_n \|aa_n\| = 0$ e $\|a_n\| = 1$ para todo n. E então teríamos:

$$1 = \|a_n\| = \|a^{-1}aa_n\| \leq \|a^{-1}\|\|aa_n\| \to 0$$

o que revela um absurdo. Logo, o inverso deve estar em A.

No caso geral, note que, se a é inversível, então a^* também é, pois sendo $b = (a^{-1})^*$ temos $a^*b = a^*(a^{-1})^* = (a^{-1}a)^* = 1^* = 1$, e do outro lado é análogo. Então a^*a e aa^* são inversíveis e autoadjuntos. Logo, pelo que já fizemos, os seus inversos estão em A. E:

$$1 = aa^*(aa^*)^{-1} \text{ e } 1 = (a^*a)^{-1}a^*a.$$

Logo, a possui inversos à esquerda e à direita. Observe ainda que eles estão em A. Mas sabemos que se um elemento possui inversos a esquerda e a direita eles tem que ser iguais. Logo a possui inverso em A.

Para a prova da segunda parte, observe que, dado $\lambda \in \mathbb{C}$, pela primeira parte do teorema, $\lambda - a$ é inversível em B se, e somente se, o é em A. □

Definição 1.2.12. Dado A uma C*-álgebra com unidade, diz-se que um elemento $a \in A$ é positivo se a é autoadjunto e $\sigma(a) \subset \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$.

Proposição 1.2.13. *Seja A uma C*-álgebra com unidade.*

(i) Dado elemento autoadjunto $a \in A$, existem elementos positivos a_+ e a_- tais que a pode ser escrito como a diferença $a_+ - a_- = 0$;

(ii) Se a e $-a$ são ambos positivos então $a = 0$;

(iii) Seja $a \in A$ um elemento autoadjunto, e seja μ uma constante real com $\mu \geq \|a\|$. Então a é positivo se, e somente se, $\|\mu - a\| \leq \mu$;

(iv) Se a e b são positivos então $a + b$ também é positivo;

(v) Se a é um elemento autoadjunto então $a \leq \|a\|$ no sentido que $\|a\| - a$ é positivo.

Demonstração. Dado $a \in A$ autoadjunto, a C*-subálgebra B gerada por $\{1, a\}$ é comutativa, então, pelo teorema de Gelfand, isomorfa a $C(\hat{B})$. Ou seja, identificando B e $C(\hat{B})$ via transformada de Gelfand κ, podemos pensar em $a \in B$ como uma função contínua em $\hat{B}$ a valores em $\{\varphi(a), \varphi \in (\hat{B})\} = \sigma(a)$ (Teoremas 1.1.20 e 1.2.11). Mas, já vimos que, no caso de a autoadjunto, seu espectro é real. Logo $\kappa(a)$ é uma função contínua a valores reais. E, portanto, seja a_+ e a_- elementos em A tais que $\kappa(a_+) = \max\{\kappa(a), 0\}$ e $\kappa(a_-) = \max\{\kappa(-a), 0\}$. Vê-se, claramente, que $a = a_+ - a_-$ e $a_+ a_- = 0$, pois κ é um isomorfismo. Veja também que a_+ e a_- são positivos, pois a imagem de $\kappa(a_+)$ e $\kappa(a_-)$ são positivas, e são justamente o espectro de a_+ e a_- respectivamente.

Agora, para a segunda parte, note que $\sigma(-a) = -\sigma(a)$, e então, se a e $-a$ são positivos, temos que $\sigma(a) \subset \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}_- = \{0\}$ e, portanto, o raio espectral só pode ser 0. Mas, como a é autoadjunto, temos que $r(a) = \|a\| = 0$. Logo $a = 0$.

Para a terceira parte, note que, se a é autoadjunto, então seu espectro é real. E então, pelo que já provamos:

$$\sigma(a) \subset [-\|a\|, \|a\|] \subset [-\mu, \mu].$$

Além disso, $\mu - a$ também é autoadjunto. Então:

$$\|\mu - a\| = r(\mu - a) = \sup_{\lambda\in\sigma(a)} |\mu - \lambda| = \sup_{\lambda\in\sigma(a)} \mu - \lambda = \mu - \sup_{\lambda\in\sigma(a)} \lambda.$$

Ficando claro que a é positivo se, e somente se, $\|\mu - a\| \leq \mu$.

Para a quarta parte, observe que, pelo que acabamos de fazer, se a e b são positivos, então:

$$\|\|a\| - a\| \leq \|a\| \text{ e } \|\|b\| - b\| \leq \|b\|.$$

Seja $\mu = \|a\| + \|b\|$. Então $\mu \geq \|a + b\|$ e:

$$\|\mu - (a+b)\| = \|\|a\| - a + \|b\| - b\| \leq \|\|a\| - a\| + \|\|b\| - b\| \leq \|a\| + \|b\| = \mu.$$

E então $a + b$ é positivo.

Finalmente, para a última parte, temos que se $a \in A$ é autoadjunto, então $\sigma(a) \subset [-\|a\|, \|a\|]$. O que implica:

$$\sigma(-a) \subset [-\|a\|, \|a\|] \Longrightarrow \sigma(\|a\| - a) \subset [0, 2\|a\|],$$

onde estamos usando múltiplas vezes que $\sigma(f(a)) = f(\sigma(a))$. Portanto, $\|a\| - a$ é positivo. $\square$

Lema 1.2.14. *Dado $a \in A$, se $-a^*a$ é positivo, então $a = 0$.*

Demonstração. Como já fizemos algumas vezes, seja $a = x + iy$ com x e y autoadjuntos. Observe que, como x é autoadjunto, $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$, e então, $\sigma(x^2) = (\sigma(x))^2 \subset \mathbb{R}_+$. Ou seja, x^2 e y^2 são positivos. Além disso:

$$a^*a = (x - iy)(x + iy) = x^2 + y^2$$

Logo a^*a é positivo. Então, pela Proposição anterior, segue que $a^*a = 0$, o que implica, por $\|a^*a\| = \|a\|^2$, que $a = 0$. $\square$

Teorema 1.2.15. *Dado $a \in A$, são equivalentes:*

(*i*) *a é positivo;*

(*ii*) *Existe um elemento autoadjunto $b \in A$ tal que $b^2 = a$;*

(*iii*) *Existe $b \in A$ tal que $b^*b = a$.*

Demonstração. Suponhamos que a é positivo. Seja B a sub-C*-álgebra gerada por $\{1, a\}$. Então, pelo Teorema de Gelfand, temos que B é isometricamente isomorfo a $C(\hat{B})$, via sua transformada. Mas já vimos que a imagem da função $\kappa(a)$ coincide com $\sigma_B(a)$, que, por sua vez, é igual a $\sigma_A(a) \subset \mathbb{R}_+$. Então $\kappa(a)$ é uma função positiva. Sendo $b = \kappa^{-1}(\sqrt{\kappa(a)})$, vê se que b é autoadjunto e que $b^2 = a$. Além disso, observe que pela forma que b foi definido, temos a unicidade, podendo escrever $b = \sqrt{a}$, uma vez que a transformada de Gelfand é um isomorfismo.

Agora, supondo (ii), temos que (iii) é automaticamente satisfeita.

Agora, supondo (iii), como $a = b^*b$, temos que a é autoadjunto. Basta vermos que seu espectro é não negativo. Podemos escrever $a = a_+ - a_-$ como na proposição anterior. Seja $c = ba_-$. Então:

$$-c^*c = -(ba_-)^*ba_- = -a_-b^*ba = -a_-(a)a_- = -a_-(a_+ - a_-)a_- = a_-^3$$

Agora, como a_- é positivo e $\sigma(a_-^3) = \sigma(a_-)^3$, segue que a_-^3 é positivo, e, portanto, $-c^*c$ é positivo. De onde $c = 0$. E então $a_-^3 = 0$ e, portanto, $a_- = 0$, ou seja, $a = a_+$ é positivo. □

Corolário 1.2.16. *Se a é um elemento positivo então b^*ab também o é para todo $b \in A$.*

Demonstração. Do teorema acima, temos que existe $c \in A$ tal que $a = c^*c$ e, portanto, $b^*ab = b^*c^*cb = (cb)^*cb$, o que implica a positividade. □

Lema 1.2.17. *Dado $a \in A$, C*-álgebra, a é positivo se, e somente se, $a = \sqrt{a^*a}$.*

Demonstração. Vejamos primeiro que se a é positivo então $a = \sqrt{a^*a}$. Para tanto, veja que se a é positivo, então a^2 é positivo, uma vez que se a é autoadjunto, então a^2 é autoadjunto, e $\sigma(a^2) = \sigma(a)^2$ (Proposição 1.1.12). Assim, temos que existe $b \in A$ tal que $b^2 = a$. Ou seja, $b = \sqrt{a^2} = \sqrt{a^*a}$, uma vez que a é autoadjunto. Além disso, temos que $\kappa(b)^2 = \kappa(b^2) = \kappa(a^2) = \kappa(a)^2$. E, como ambas as funções são positivas, temos que $\kappa(a) = \kappa(b)$, e, portanto, $a = b$, pois a transformada de Gelfand é um isomorfismo.

Agora, vejamos a recíproca. Antes, porém, veja que se a é positivo, então $\sigma(\sqrt{a}) = \sqrt{\sigma(a)}$. Pois, se a é positivo, existe b positivo tal que $b^2 = a$. Assim sendo, $\sigma(a) = \sigma(b^2) = \sigma(b)^2$. E, como ambos os espectros são reais e positivos, podemos escrever que $\sqrt{\sigma(a)} = \sigma(b) = \sigma(\sqrt{a})$.

Portanto, para a recíproca, suponha que $a = \sqrt{a^*a}$. Então, como a^*a é sempre positivo, temos $\sigma(a) = \sigma(\sqrt{a^*a}) = \sqrt{\sigma(a^*a)}$. Logo $\sigma(a) \subset \mathbb{R}_+$, ou seja, a é positivo. $\square$

Teorema 1.2.18. *Todo *-homomorfismo injetor entre C*-álgebras é isométrico.*

Demonstração. Seja φ um *-homomorfismo injetor entre C*-álgebras. Primeiramente, provaremos que a é positivo se, e somente se, $\varphi(a)$ é positivo.

Para tanto, vejamos primeiro que se a é positivo, então $\varphi(a)$ é positivo: Se a é positivo, existe b tal que $b^*b = a$. E então, $\varphi(a) = \varphi(b^*b) = \varphi(b)^*\varphi(b)$. Logo $\varphi(a)$ é positivo.

Façamos agora a recíproca. Se $\varphi(a)$ é positivo, então $\varphi(a) = \sqrt{\varphi(a)^*\varphi(a)} = \sqrt{\varphi(a^*a)}$. Mas, sabemos que a^*a é positivo, então existe $\sqrt{a^*a}$. Usando o parágrafo anterior, como $\sqrt{a^*a}$ é positivo, temos que $\varphi(\sqrt{a^*a})$ é positivo. Além disso temos que $\varphi(\sqrt{a^*a})^2 = \varphi(a^*a)$. Então $\varphi(\sqrt{a^*a}) = \sqrt{\varphi(a^*a)} = \varphi(a)$. E como φ é injetor, temos que $a = \sqrt{a^*a}$. E então a é positivo.

De posse deste resultado, o objetivo é provar que $\|a\| \leq \|\varphi(a)\| \leq \|a\|$. Mas pelo Lema 1.2.7 já temos a segunda desigualdade. Para a primeira, observe que, se a é positivo, temos que $\varphi(a)$ é positivo, e então $\|\varphi(a)\| - \varphi(a) \geq 0$. Logo $\varphi(\|\varphi(a)\| - a) \geq 0$. Então, pela primeira parte, temos que $\|\varphi(a)\| - a \geq 0$. Portanto, $\|\varphi(a)\| \geq a$.

Provamos então que, para todo a positivo, $\|\varphi(a)\| = \|a\|$. Agora, se a é qualquer, a^*a é positivo, e assim teremos:

$$\|a\|^2 = \|a^*a\| = \|\varphi(a^*a)\| = \|\varphi(a)^*\varphi(a)\| = \|\varphi(a)\|^2.$$

$\square$

Teorema 1.2.19. *Todo *-homomorfismo entre C*-álgebras tem imagem fechada.*

Demonstração. Observe que, dado $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *-homomorfismo entre C*-álgebras, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ é um ideal fechado de $\mathcal{A}$. Assim $\mathcal{A}/\mathrm{Ker}(\varphi)$ é uma C*-álgebra [13, Theorem 3.1.4], onde as operações são definidas tomando um representante da classe, por exemplo $[x]^* = [x^*]$. E podemos construir $\tilde{\varphi} : \mathcal{A}/\mathrm{Ker}(\varphi) \to \mathcal{B}$, definido pelo valor assumido em um dos representantes da classe. E tal construção nos é útil pois, desta forma, teremos que $\tilde{\varphi}$ é um *-homomorfismo injetor e que $\mathrm{Im}(\tilde{\varphi}) = \mathrm{Im}(\varphi)$.

Portanto, aplicando o teorema 1.2.18, concluímos que $\tilde{\varphi}$ é isométrico. E, portanto, tem imagem fechada. $\square$

Definição 1.2.20. Seja A uma álgebra de Banach com involução, e H um espaço de Hilbert. Uma representação de A em H é um *-homomorfismo $\pi : A \to \mathcal{B}(H)$, ou seja, é um homomorfismo que satisfaz $\pi(a^*) = \pi(a)^*$, para todo $a \in A$.

Pelo Lema 1.2.7, temos que toda representação π é contínua, e $\|\pi\| \leq 1$.

Definição 1.2.21. Um funcional linear $f : A \to \mathbb{C}$ é chamado positivo se, para todo $a \in A$, tivermos que $f(a^*a)$ é um número real maior ou igual a zero. Se, além disto, $f(1) = 1$, então f é chamado um estado de A.

Lema 1.2.22. *Seja A uma C*-álgebra com unidade e seja f um funcional positivo em A. Se $a \in A$ é autoadjunto, então $f(a) \in \mathbb{R}$. Além disso, $\forall b \in A, f(b^*) = \overline{f(b)}$.*

Demonstração. Como a é autoadjunto, podemos escrever $a = a_+ - a_-$, com ambos positivos. E sabemos que um funcional linear positivo leva elementos positivos em números reais positivos. Então $f(a_-), f(a_+) \in \mathbb{R}$. Logo $f(a) = f(a_+ - a_-) = f(a_+) - f(a_-) \in \mathbb{R}$.

Agora, para a segunda parte, note que podemos escrever $b = x + iy$ com x e y autoadjuntos. E assim, $f(x), f(y) \in \mathbb{R}$. E então: $f(b^*) = f(x - iy) = f(x) - if(y) = \overline{f(x) + if(y)} = \overline{f(b)}$. $\square$

Proposição 1.2.23. *Seja A uma C*-álgebra com unidade, e seja f um funcional positivo em A. Dados $a, b \in A$, defina*

$$\langle a, b\rangle = f(a^*b).$$

Então:

(*i*) *Para todo $a, b \in A$, temos $|\langle a, b\rangle|^2 \leq \langle a, a\rangle\langle b, b\rangle$;*

(*ii*) *f é contínuo e $\|f\| = f(1)$.*

Demonstração. A função $\langle ., .\rangle$, definida acima, satisfaz propriedades similares a de produto interno, exceto pelo fato de que pode se degenerar.

a. $\langle a, b\rangle = \overline{\langle b, a\rangle}$, pois: $\overline{\langle b, a\rangle} = \overline{f(b^*a)} = f((b^*a)^*) = f(a^*b) = \langle a, b\rangle$;

b. $\langle a + b, c\rangle = \langle a, c\rangle + \langle b, c\rangle$, pois: $\langle a + b, c\rangle = f((a + b)^*c) = f(a^*c + b^*c) =$
$= f(a^*c) + f(b^*c) = \langle a, c\rangle + \langle b, c\rangle$;

c. $\langle \lambda a, b\rangle = f((\lambda a)^*b) = f(\overline{\lambda}a^*b) = \overline{\lambda}f(a^*b) = \overline{\lambda}\langle a, b\rangle$;

d. $\langle a, a\rangle \geq 0$, pois: $\langle a, a\rangle = f(a^*a) \geq 0$, uma vez que f é positivo.

O que precisamos demonstrar no primeiro item é a desigualdade de Cauchy-Schwarz. E a demonstração usual não necessita do produto interno não se degenerar.

Prova da desigualdade de Cauchy-Schwarz $|\langle a, b\rangle|^2 \leq \langle a, a\rangle\langle b, b\rangle$. Vejamos, primeiramente, que se $\langle b, b\rangle = 0$, então, $\forall a \in A$, $\langle a, b\rangle = 0$, e a desigualdade fica trivialmente satisfeita. De fato, se $\langle b, b\rangle = 0$, dados $a \in A, t \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \langle a + tb, a + tb\rangle = \langle a, a\rangle + 2t\mathrm{Re}(\langle a, b\rangle).$$

Logo, se $\mathrm{Re}(\langle a, b\rangle)$ fosse não nula, teríamos que, tomando t suficientemente grande e com o sinal adequado, o lado direito da desigualdade fica negativo. Um absurdo. Logo $\mathrm{Re}(\langle a, b\rangle) = 0$. Como a é qualquer, provamos também que $\mathrm{Re}(\langle ia, b\rangle) = \mathrm{Im}(\langle a, b\rangle) = 0$, ou seja, $\langle a, b\rangle = 0$.

Portanto, podemos supor que $\langle b,b\rangle \neq 0$. E assim temos, dado $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$0 \leq \langle a-\lambda b, a-\lambda b\rangle = \langle a,a\rangle - \overline{\lambda}\langle b,a\rangle - \lambda\langle a,b\rangle + |\lambda|^2\langle b,b\rangle.$$

Portanto, fazendo $\lambda = \frac{\langle b,a\rangle}{\langle b,b\rangle}$, a desigualdade acima resultará em

$$0 \leq \langle a,a\rangle - \frac{|\langle a,b\rangle|^2}{\langle b,b\rangle}.$$

O que resulta na desigualdade desejada. $\square$

Agora, para a segunda parte, faça $a = 1$ e teremos: $\forall b \in A$

$$|f(b)|^2 = |\langle 1,b\rangle|^2 \leq \langle 1,1\rangle\langle b,b\rangle = f(1)f(b^*b) \leq f(1)\|b^*b\|f(1),$$

onde usamos o artifício de que, se c é um elemento autoadjunto, então $\|c\| - c$ é positivo. E assim $f(\|c\| - c) \geq 0$. Ou seja, $\|c\|f(1) \geq f(c)$.

E temos, daí, que f é contínuo e $\|f\| \leq f(1)$. Mas, pela definição de norma de um funcional, já tínhamos que $f(1) \leq \|f\|$. Então $\|f\| = f(1)$. $\square$

Proposição 1.2.24. *Seja f um funcional linear contínuo em A. Se $f(1) = \|f\|$ então f é positivo.*

Demonstração. Podemos supor que $\|f\| = 1$, pois, caso contrário, é só considerar $g = \frac{f}{\|f\|}$.

Seja a um elemento positivo de A. Escreva $f(a) = x + iy$. O objetivo é provar que $y = 0$ e $x \geq 0$. Seja μ um número real com $\mu \geq \|a\|$. Então, pelo que fizemos anteriormente, $\|\mu - a\| \leq \mu$, então temos:

$$\mu - x \leq |\mu - x - iy| = \|f(\mu - a)\| \leq \|\mu - a\| \leq \mu,$$

onde usamos que $|z| \geq Re(z)$ e $\|f\| = 1$. Seguindo que $x \geq 0$.

Agora, seja $b_n = a - x + iny$ para cada natural n. Note que $f(b_n) = i(n+1)y$. Então temos:

$$(n^2 + 2n + 1)y^2 = |f(b_n)|^2 \leq \|b_n\|^2 \leq \|b_n^* b_n\| = \|(a-x)^2 + n^2y^2\| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n^2 + 2n + 1)y^2 \leq \|(a - x)^2\| + n^2y^2.$$

$$\therefore (2n + 1)y^2 \leq \|(a - x)^2\|.$$

Como vale para todo n, temos que $y = 0$. □

Proposição 1.2.25. *Sejam A uma C*-álgebra com unidade, e $a \in A$ um elemento autoadjunto. Então existe um estado f em A tal que $|f(a)| = \|a\|$.*

Demonstração. Seja B a sub-C*-algebra gerada por $\{1, a\}$, que é comutativa. Como a é autoadjunto, temos que $r(a) = \|a\|$. Então, existe $\lambda \in \sigma(a)$ com $|\lambda| = \|a\|$, uma vez que o espectro de a $\sigma(a)$ é um compacto, portanto fechado.

E isto implica que existe $\varphi \in \hat{B}$ tal que $|\varphi(a)| = \|a\|$.

Note agora que, como $\varphi \in \hat{B}$, temos que φ é um funcional linear contínuo em B, com $\|\varphi\| = 1 = \varphi(1)$. Usando o teorema de Hahn-Banach, seja f a extensão contínua de φ a A, portanto, um funcional linear contínuo em A, que estende φ com $\|f\| = \|\varphi\|$. Logo, como f estende φ, $\|f\| = 1 = f(1)$ e, então, f é um estado. Além disso, $|f(a)| = \|a\|$. □

Definição 1.2.26. Seja π uma representação da C*-álgebra A em um espaço de Hilbert H. Dizemos que um subespaço $K \subset H$ é invariante por π se, para todo $a \in A$, tivermos que $\pi(a)K \subset K$.

Neste contexto, dado um subespaço fechado e invariante K, podemos considerar a restrição $\rho(a)$ de cada operador $\pi(a)$ para K, obtendo assim uma nova representação

$$\rho : A \to \mathcal{B}(K).$$

Por abuso de linguagem, diz-se que ρ é a restrição de π para K.

Dado um vetor $\xi \in H$ seja K o fecho do conjunto $\pi(A)\xi = \{\pi(a)\xi : a \in A\}$. É claro que K é um subespaço fechado e invariante, ao qual chamaremos de espaço cíclico gerado por ξ.

Definição 1.2.27. Uma representação π da C*-álgebra A em H é dita uma representação cíclica se existir um vetor $\xi \in H$ tal que $\pi(A)\xi$ é denso em H (e portanto H coincide com o espaço cíclico gerado por ξ). Um vetor como acima é chamado de vetor cíclico para π.

Teorema 1.2.28. *Sejam A uma C*-álgebra com unidade, e f um funcional positivo em A. Então existe uma representação cíclica π, de A em um espaço de Hilbert H, possuindo um vetor cíclico ξ tal que*

$$f(a) = \langle \xi, \pi(a)\xi \rangle, \quad \forall a \in A.$$

E, portanto, se f é um estado, então $\|\xi\| = 1$.

Demonstração. Seja $\langle ., . \rangle$ função em $A \times A$ definida por $\langle a, b \rangle = f(a^*b)$. Já provamos que se trata de uma forma sesquilinear eventualmente degenerada na Proposição 1.2.23, e que vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Portanto valerá também a desigualdade triangular:

$$\langle a+b, a+b \rangle^{\frac{1}{2}} \leq \langle a, a \rangle^{\frac{1}{2}} + \langle b, b \rangle^{\frac{1}{2}}, \quad \forall a, b \in A,$$

pois $\langle a+b, a+b \rangle = \langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle + \langle a, b \rangle + \langle b, a \rangle = \langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle + 2Re(\langle a, b \rangle) \leq \langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle + 2|\langle a, b \rangle| = \langle a, a \rangle + \langle b, b \rangle + 2\langle a, a \rangle^{\frac{1}{2}} \langle b, b \rangle^{\frac{1}{2}} = (\langle a, a \rangle^{\frac{1}{2}} + \langle b, b \rangle^{\frac{1}{2}})^2$.

Assim sendo, seja $N = \{a \in A : \langle a, a \rangle = 0\}$. Vejamos que N é um subespaço vetorial: Que $0 \in N$ e que N é fechado para o produto por escalar é bem evidente. Quanto a ser fechado para a soma vem da desigualdade triangular provada acima. Pela continuidade da f é fácil ver que N é fechado.

Veja que, pelo que fizemos na demonstração de desigualdade de Cauchy-Schwarz, $\langle a, b \rangle = 0, \forall a \in A, \forall b \in N$.

Portanto, podemos considerar o espaço quociente A/N. Então a expressão:

$$\langle a+N, b+N \rangle := \langle a, b \rangle$$

define uma forma sesquilinear em A/N. E, de fato, está bem definida, pois, se usarmos representantes diferentes para a mesma classe de equivalência ($a - a' \in N$, e $b - b' \in N$), teremos $\langle a, b \rangle - \langle a', b' \rangle = \langle a, b \rangle - \langle a', b' \rangle + \langle a', b \rangle - \langle a', b \rangle = \langle a - a', b \rangle + \langle a', b - b' \rangle = 0$.

Provemos que ela será positiva e não degenerada. De fato, dado $a + N \in A/N$ teremos: $\langle a+N, a+N \rangle = \langle a, a \rangle = f(a^*a) \geq 0$. E se $\langle a+N, a+N \rangle = 0$, então $\langle a, a \rangle = 0$ e, portanto, $a \in N$, ou seja $a + N = N$. Logo a forma é positiva e não degenerada, ou seja, é um produto interno. E então A/N é um espaço pré-hilbertiano.

Agora considere, para cada $a \in A$, a aplicação

$$\pi_0(a) : A/N \to A/N \text{ definida por } b + N \mapsto ab + N \tag{1.1}$$

Provemos que, de fato, π_0 está bem definida e que é contínua.

$$\forall b \in A, \|ab + N\|^2 = \langle ab, ab\rangle = f(b^*a^*ab)$$

Mas, como a^*a é autoadjunto, temos que $\|a^*a\| - a^*a \geq 0$. Logo $b^*(\|a^*a\| - a^*a)b$ é positivo, e então:

$$f(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\| f(b^*b) = \|a\|^2\langle b + N, b + N\rangle$$

Juntando, temos que

$$\|ab + N\| \leq \|a\|\|b + N\|.$$

O que prova que $\pi_0(a)$ é limitada e $\|\pi_0(a)\| \leq \|a\|$. Ou seja, π_0 é limitada. E ainda, $\pi_0(a)$ está bem definida, pois, se $b + N = c + N$ temos:

$$\|\pi_0(a)(b + N) - \pi_0(a)(c + N)\| = \|a(b - c) + N\| \leq \|a\|\|b - c + N\| = 0.$$

Agora, seja H o completamento de A/N. Para cada $a \in A$, seja $\pi(a)$ a extensão contínua de $\pi_0(a)$ para um operador limitado em H. Verifiquemos que $\pi : a \in A \mapsto \pi(a) \in \mathcal{B}(H)$ é uma representação cíclica de A em H com vetor cíclico $\xi = 1 + N$.

De fato, π é um homeomorfismo: $\forall a, b \in A, c + N \in A/N, \lambda \in \mathbb{C}$

$$\pi(\lambda a)(c + N) = \lambda ac + N = \lambda\pi(a)(c + N)$$

$$\pi(ab)(c + N) = abc + N = \pi(a)\pi(b)(c + N)$$

$$\pi(a+b)(c+N) = (a+b)(c+N) = a(c+N)+b(c+N) = (\pi(a)+\pi(b))(c+N).$$

E, por continuidade, estende-se os resultados acima para H.

Além disso, é um *-homomorfismo:

$$\langle \pi(a^*)(b+N), c+N\rangle = \langle a^*b+N, c+N\rangle = \langle a^*b, c\rangle = \langle b, ac\rangle = \langle b+N, ac+N\rangle =$$

$$= \langle b+N, \pi(a)(c+N)\rangle = \langle \pi(a)^*(b+N), c+N\rangle,$$

que também se estende por continuidade para H. E então π é uma representação de A em H.

Vejamos agora que o vetor $\xi = 1+N$ é vetor cíclico. Ou seja, temos que provar que $\pi(A)\xi$ é denso em H. É suficiente que contenha A/N. E de fato, dado $a+N \in A/N$, temos que

$$\pi(A)\xi \ni \pi(a)\xi = \pi(a)(1+N) = a(1+N) = a+N.$$

E temos, ainda, que vale a fórmula do enunciado, pois:

$$\langle \xi, \pi(a)\xi\rangle = \langle 1+N, \pi(a)(1+N)\rangle = \langle 1+N, a+N\rangle = \langle 1, a\rangle = f(a).$$

□

Teorema 1.2.29 (Gelfand–Naimark–Segal)**.** *Seja A uma C*-álgebra. Então existe uma representação isométrica de A em um espaço de Hilbert. Além disso, se A tem unidade, tal representação é unital.*

Demonstração. Como sempre podemos adicionar uma unidade a uma C*-álgebra, suponhamos, sem perda de generalidade, que A tem unidade. Para cada $a \in A$, como a^*a é autoadjunto, seja f_a um estado de A tal que $|f_a(a^*a)| = \|a^*a\| = \|a\|^2$, que existe graças à Proposição 1.2.25. Agora, utilizando o Teorema anterior, seja $\pi_a : A \to \mathcal{B}(H_a)$ a representação cíclica de A, com vetor cíclico ξ unitário. Então:

$$\|a\|^2 = |f_a(a^*a)| = \langle \xi, \pi_a(a^*a)\xi\rangle = \langle \pi_a(a)\xi, \pi_a(a)\xi\rangle = \|\pi_a(a)\xi\|^2 \leq$$

$$\leq \|\pi_a(a)\|^2\|\xi\|^2 = \|\pi_a(a)\|^2 \leq \|a\|^2$$

Temos, então, que

$$\|\pi_a(a)\| = \|a\|. \tag{1.2}$$

Considere agora a soma direta dos espaços de Hilbert:

$$H = \bigoplus_{a \in A} H_a.$$

Após a presente demonstração, apresentaremos a forma como estamos entendendo tal soma direta de espaços de Hilbert. É possível demonstrar que tal soma direta é um novo espaço de Hilbert[12]. Além disso, definimos uma representação π, de A em H, por:

$$\pi(b) = \bigoplus_{a \in A} \pi_a(b), \forall b \in A.$$

O fato é que, como π é uma representação, π é contínua pelo Lema 1.2.7. Ou seja, $\|\pi(b)\| \leq \|b\|$. E, pela equação (1.2), temos que tal representação é isométrica, uma vez que $b \in A$.

Agora, veja que pela forma que definimos π_a no Lema anterior, mais especificamente na equação 1.1, já temos que $\pi_a(1) = \mathrm{Id}_{H_a}, \forall a \in A$. Logo, teremos que π é um *-homomorfismo unital. $\square$

Findamos aqui a introdução às C*-álgebras. Apresentaremos, por ora, apenas a forma como entendemos a soma direta de espaços de Hilbert.

Considere uma família H_a de espaços de Hilbert, $a \in A$ um conjunto de índices. A soma direta $H = \bigoplus_{a \in A} H_a$ é um subconjunto do produto cartesiano $\prod_{a \in A} H_a = \{(x_a)_{a \in A}; x_a \in H_a\}$ formado pelos elementos $\mathbf{x} = (x_a)_{a \in A}$, para os quais vale que $\sum_{a \in A} \|x_a\|_a^2 \leq \infty$. Como A não necessariamente é enumerável, estamos entendendo tal soma como o supremo entre todas somas finitas.

Desta forma, o espaço H é um espaço de Hilbert. Com o produto interno dado por $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{a \in A} \langle x_a, y_a \rangle_{H_a}$.

E, dado uma família de operadores lineares contínuos $T_a \in B(H_a)$, podemos considerar o operador linear contínuo $T \in B(H)$, dado por:

$$T(\mathbf{x}) = (T_a x_a)_{a \in A} = \bigoplus_{a \in A} T_a x_a.$$

[12] Veja, por exemplo, em [2, p. 24]

Capítulo 2

Produto Cruzado por $\mathbb{Z}$

Veremos, neste capítulo, uma forma de, dadas uma C*-álgebra $\mathcal{A}$, e uma ação α de $\mathbb{Z}$ em $\mathcal{A}$, construir uma nova C*-álgebra, conhecida como produto cruzado de $\mathcal{A}$ por $\mathbb{Z}$. Esta teoria pode ser usada, também, para dar uma nova interpretação para as C*-álgebras já conhecidas. Veremos também, neste capítulo, teoremas sobre produtos cruzados, que nos serão úteis nos demais capítulos.

Em teorias mais gerais, o produto cruzado pode ser feito por um grupo topológico qualquer, ou seja, envolvendo uma ação contínua de G, um grupo topológico, em $\mathcal{A}$. No entanto, neste texto faremos apenas para $\mathbb{Z}$. A C*-álgebra de partida também poderia ser sem unidade, pois, como pode ser visto no Apêndice A, é sempre possível fazer a unitização de uma C*-álgebra. Mas, como aplicaremos esta teoria apenas em casos com unidade, não nos preocuparemos com estes detalhes.

Para dar um panorama da construção, dada uma C*-álgebra $\mathcal{A}$ com unidade, consideraremos o conjunto das sequências indexadas em $\mathbb{Z}$ que tomem valores em $\mathcal{A}$ e que, além disso, a série formada pela soma das normas das entradas da sequência seja convergente. A este conjunto chamaremos $\ell_1(\mathcal{A})$. Neste conjunto consideraremos uma soma, uma multiplicação, uma involução e uma norma, de forma que, fazendo o completamento deste conjunto, geraremos uma nova C*-álgebra que será o produto cruzado de $\mathcal{A}$ por $\mathbb{Z}$, denotado por $\mathcal{A} \rtimes \mathbb{Z}$.

O texto aqui apresentado foi baseado nas referências [4, 14]

Passemos, agora, para a construção formal e rigorosa.

2.1 A álgebra de Banach $\ell_1(\mathcal{A})$

Definição 2.1.1. Dada uma C*-álgebra $\mathcal{A}$, denotaremos por $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ o conjunto dos automorfismos de $\mathcal{A}$, ou seja, os *-homomorfismos de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{A}$ que são bijetores.

Uma ação de $\mathbb{Z}$ em $\mathcal{A}$ é um homomorfismo de grupos $\alpha : \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$. Denotaremos por α_n o automorfismo gerado pela ação α calculada em $n \in \mathbb{Z}$.

Como já dissemos, a construção do produto cruzado tem como ingrediente uma ação de $\mathbb{Z}$ em $\mathcal{A}$. Seja α esta ação, e será fixa durante todo este capítulo. Comecemos, portanto, com um resultado preliminar.

Teorema 2.1.2. *Qualquer ação α de $\mathbb{Z}$ em $\mathcal{A}$ fica inteiramente determinada se conhecermos α_1*

Demonstração. Seja α um homomorfismo $\mathbb{Z} \ni n \mapsto \alpha_n \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ (ou seja, uma ação qualquer). Note, primeiramente, que α_0 é a identidade, uma vez que $\alpha_0 \circ \alpha_0 = \alpha_{0+0} = \alpha_0$ e que se trata de um automorfismo.

Note agora que $\alpha_{-n} \circ \alpha_n = \alpha_{n-n} = \mathrm{Id}$, ou seja, $\alpha_{-n} = \alpha_n^{-1}$. Logo, basta conseguirmos determinar α_n, com $n > 0$ através de α_1. Mas isto se obtém ao observar que $\alpha_n = \alpha_{1+1+\cdots+1} = \alpha_1 \circ \alpha_1 \circ \cdots \circ \alpha_1 = \alpha_1^n$ $\square$

Em suma, o Teorema anterior foi basicamente para podermos mudar a notação da ação de α_n para α^n, onde fica subentendido $\alpha = \alpha_1$.

Definição 2.1.3. Dada uma C*-álgebra $\mathcal{A}$, seja $\ell_1(\mathcal{A})$ o conjunto de todas as sequências $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, tais que $a_i \in \mathcal{A}, \forall i \in \mathbb{Z}$ e

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\| < \infty.$$

Neste conjunto definiremos uma soma dada por: dados $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \text{ onde } c_n = a_n + b_n.$$

Com a soma acima definida e com o produto por escalar definido por $\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $\ell_1(\mathcal{A})$ é um espaço vetorial. A verificação é simples, mas demasiado detalhada, de forma que optamos por não colocar neste texto.

E, para cada $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, definimos

$$\|a\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\|.$$

A definição acima, de fato, determina uma norma em $\ell_1(\mathcal{A})$, e a verificação disto não é complicada. Que $\|(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_1 = 0 \Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} = 0$ é obvio. Também é fácil ver que $\|\lambda(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_1 = |\lambda|\|(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}\|_1$. E, para a desigualdade triangular, observe que

$$\sum_{-N}^{N} \|a_n + b_n\| \leq \sum_{-N}^{N} \|a_n\| + \sum_{-N}^{N} \|b_n\| \leq \|a\|_1 + \|b\|_1.$$

Então, a desigualdade triangular se obtém tomando o limite do lado esquerdo.

Agora demonstraremos que $\ell_1(\mathcal{A})$ é completo. A abordagem é padrão e pode ser encontrada em [9], no caso em que $\mathcal{A} = \mathbb{C}$.

Proposição 2.1.4. *O espaço vetorial normado $\ell_1(\mathcal{A})$, com a norma definida acima, é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(\mathbf{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\ell_1(\mathcal{A})$; uma sequência em que cada entrada é uma sequência em $\mathcal{A}$ indexada por $\mathbb{Z}$. Então, para evitar confusão, chamaremos cada termo da sequência $(\mathbf{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbf{y}_i = (y_k^i)_{k\in\mathbb{Z}}$, onde o i é um índice e não um expoente. E assim,

$$\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_m\|_1 < \varepsilon \Rightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|y_k^n - y_k^m\| < \varepsilon \Rightarrow \|y_i^n - y_i^m\| < \varepsilon \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, cada sequência $(y_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathcal{A}$, e, portanto, convergente, pois $\mathcal{A}$ é completo. Seja $\mathbf{y} = (L_k)_{k\in\mathbb{Z}}$, onde $L_k = \lim_{n\to\infty} y_k^n$.

Provemos que $\mathbf{y}_n$ converge para $\mathbf{y}$. Como $\mathbf{y}_n$ é de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n, m > N$, teremos:

$$\|\mathbf{y}_n - \mathbf{y}_m\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

E então, para todo $M \in \mathbb{N}$, teremos:

$$\sum_{|k|<M} \|y_k^n - y_k^m\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

E isso vale para todo $n, m > N$ e $M \in \mathbb{N}$. Então, fazendo $n \to \infty$ teremos:

$$\sum_{|k|<M} \|L_k - y_k^m\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall M \in \mathbb{N} \text{ e } \forall m > N.$$

Logo:

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \|L_k - y_k^m\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_m\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \quad \forall m > N.$$

Logo, $(\mathbf{y}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\mathbf{y}$.

Resta ainda provar que, de fato, $\mathbf{y} \in \ell_1(\mathcal{A})$. Mas, para isto, basta vermos que, qualquer que seja $F \subset \mathbb{Z}$ finito, teremos:

$$\sum_{k\in F} \|L_k\| \leq \sum_{k\in F} (\|L_k - y_k^n\| + \|y_k^n)\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{y}_n\|_1 + \|\mathbf{y}_n\|_1.$$

E então, como $\mathbf{y}_n \to \mathbf{y}$, conseguimos $\mathbf{y}_n$ tão próximo de $\mathbf{y}$ quanto quisermos. Logo, existe n para o qual

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{y}_n\|_1 \leq 1.$$

E então

$$\sum_{k\in F} \|L_k\| \leq 1 + \|\mathbf{y}_n\|_1$$

para todo $F \subset \mathbb{Z}$ finito. Agora, como $\mathbf{y}_n$ é de Cauchy, $\sup \|\mathbf{y}_n\|_1$ é finito. E assim concluímos que $\mathbf{y} \in \ell_1(\mathcal{A})$. □

Agora, seja $c_\infty(\mathcal{A})$ o subespaço de $\ell_1(\mathcal{A})$ formado pelas sequências que não se anulam apenas em um número finito de termos. Seja $\mathbf{a} \in c_\infty(\mathcal{A})$. Desconsiderando os termos n no qual a_n é nulo, escreveremos $\mathbf{a}$ como $(a_n)_{n\in F}$, onde F é um subconjunto finito de $\mathbb{Z}$. Rigorosamente, escrever desta forma estaria errado, pois não estar definido é diferente de ser nulo. Entretanto, note que, dado $(a_n)_{n\in F}$, podemos recuperar $\mathbf{a} \in \ell_1(\mathcal{A})$, definindo como sendo nulo nas entradas onde originalmente não está definido.

O objetivo agora é definirmos em $\ell_1(\mathcal{A})$ um produto e uma involução. Para isto, definiremos primeiramente em $c_\infty(\mathcal{A})$ (que é denso em $\ell_1(\mathcal{A})$) e provaremos que as operações são contínuas, e então poderemos estendê-las para $\ell_1(\mathcal{A})$.

Lema 2.1.5. *O espaço $c_\infty(\mathcal{A})$ é denso em $\ell_1(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Dada $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_1(\mathcal{A})$, temos que

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\| < \infty.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{|n|>N} \|a_n\| < \varepsilon.$$

E assim, seja $\mathbf{s} = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ definido como $s_i = a_i$ se $|i| \leq N$ e $s_i = 0$ caso contrário. Logo $\mathbf{s} \in c_\infty$ e

$$\|\mathbf{a} - \mathbf{s}\|_1 = \sum_{|n|>N} \|a_n\| < \varepsilon.$$

Então, provamos que $c_\infty(\mathcal{A})$ é denso em $\ell_1(\mathcal{A})$. □

Observe que $c_\infty(\mathcal{A})$ é um subespaço vetorial de $\ell_1(\mathcal{A})$. Agora, definiremos em $c_\infty(\mathcal{A})$ um produto por:

$$\mathbf{a} \star \mathbf{b} = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \text{ onde } c_n = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \alpha^j(b_{n-j}).$$

Note que, embora esteja escrito $j \in \mathbb{Z}$, para cada n a soma é finita, uma vez que a parcela do somatório só não se anula quando a_j e b_{n-j} não são nulos.

Note, ainda, que o resultado também é uma sequência de $c_\infty(\mathcal{A})$, ou seja, o produto é fechado. Para tanto, observe que se escrevermos $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in F}$ e $\mathbf{b} = (b_n)_{n\in F'}$ com $F, F' \subset \mathbb{Z}$ finitos, teremos que as parcelas do somatório da expressão de $(\mathbf{a} \star \mathbf{b})_n$ só não se anularão se $j \in F$ e $n - j \in F'$. Ou seja, se N_1 e N_2 são tais que $N_1 > |n|\ \forall n \in F$ e $N_2 > |n|\ \forall n \in F'$, então as parcelas não são todas nulas só quando $|n| \leq |n-j| + |j| \leq N_1 + N_2$. Então, para todo n tal que $|n| > N_1 + N_2$, temos $(\mathbf{a} \star \mathbf{b})_n = 0$. Ou seja, $\mathbf{a} \star \mathbf{b} \in c_\infty(\mathcal{A})$.

E definimos a involução por:

$$\mathbf{a}^* = (\alpha^n(a^*_{-n}))_{n\in\mathbb{Z}}$$

Veja que, neste caso, é bem evidente que $\mathbf{a}^* \in c_\infty(\mathcal{A})$.

Teorema 2.1.6. *O espaço normado $c_\infty(\mathcal{A})$, com as operações acima definidas, é uma álgebra com involução.*

Demonstração.

- O produto é bilinear: dados $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{c} = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ todos pertencentes a $c_\infty(\mathcal{A})$, e $\lambda \in \mathbb{C}$, temos:

$$\mathbf{a} \star (\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c}) = \mathbf{a} \star (b_n + \lambda c_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (f_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

$$\text{sendo } f_n = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j\alpha^j(b_{n-j} + \lambda c_{n-j}) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j\alpha^j(b_{n-j}) + \lambda \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j\alpha^j(c_{n-j}).$$

$$\text{Então } \mathbf{a} \star (\mathbf{b} + \lambda\mathbf{c}) = \mathbf{a} \star \mathbf{b} + \lambda\mathbf{a} \star \mathbf{c}$$

$$(\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \star \mathbf{c} = (a_n + \lambda b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \star \mathbf{c} = (g_n)_{n\in\mathbb{Z}},$$

$$\text{sendo } g_n = \sum_{j\in\mathbb{Z}} (a_j + \lambda b_j)\alpha^j(c_{n-j}) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j\alpha^j(c_{n-j}) + \lambda \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j\alpha^j(c_{n-j}).$$

$$\text{Então } (\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}) \star \mathbf{c} = \mathbf{a} \star \mathbf{c} + \lambda\mathbf{b} \star \mathbf{c}$$

- O produto é associativo: dados $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{c} = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$

todos pertencentes a $c_\infty(\mathcal{A})$, temos:

$$\mathbf{a}\star(\mathbf{b}\star\mathbf{c}) = \mathbf{a}\star\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j\alpha^j(c_{n-j})\right)_{n\in\mathbb{Z}} = \left(\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_i\alpha^i(b_j)\alpha^{i+j}(c_{n-(j+i)})\right)_{n\in\mathbb{Z}}$$

$$(\mathbf{a}\star\mathbf{b})\star\mathbf{c} = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j\alpha^j(b_{n-j})\right)_{n\in\mathbb{Z}}\star\mathbf{c} = \left(\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_j\alpha^j(b_{i-j})\alpha^i(c_{n-i})\right)_{n\in\mathbb{Z}}$$

E, com uma mudança na ordem do somatório (que podemos fazer pois se trata de somas finitas), e uma mudança de variáveis, vê-se que $\mathbf{a}\star(\mathbf{b}\star\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\star\mathbf{b})\star\mathbf{c}$.

Logo, temos provado que se trata, realmente, de uma álgebra. Falta ainda vermos que temos de fato uma involução: dados $\mathbf{a},\mathbf{b}\in c_\infty(\mathcal{A}), \lambda\in\mathbb{C}$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})^* = (a_n+b_n)^*_{n\in\mathbb{Z}} = (\alpha^n(a^*_{-n}+b^*_{-n}))_{n\in\mathbb{Z}} = (\alpha^n(a^*_{-n})+\alpha^n(b^*_{-n}))_{n\in\mathbb{Z}} = \mathbf{a}^*+\mathbf{b}^*$$

$$(\lambda\mathbf{a})^* = (\alpha^n((\lambda a_{-n})^*))_{n\in\mathbb{Z}} = \overline{\lambda}(\alpha^n(a^*_{-n}))_{n\in\mathbb{Z}} = \overline{\lambda}\mathbf{a}^*$$

$$(\mathbf{a}^*)^* = ((\alpha^n(a^*_{-n}))_{n\in\mathbb{Z}})^* = (\alpha^n(\alpha^{-n}(a_n))_{n\in\mathbb{Z}} = \mathbf{a}$$

$$(\mathbf{a}\star\mathbf{b})^* = \left(\alpha^n(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\alpha^j(b^*_{-n-j})a^*_j\right)_{n\in\mathbb{Z}} = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\alpha^{n+j}(b^*_{-n-j})\alpha^n(a^*_j)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$$

$$\mathbf{b}^*\star\mathbf{a}^* = (\alpha^n(b^*_n))_{n\in\mathbb{Z}}\star(\alpha^n(a^*_n))_{n\in\mathbb{Z}} = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\alpha^j(b^*_{-j})\alpha^n(a^*_{-n+j})\right)_{n\in\mathbb{Z}}$$

E a igualdade entre as duas últimas linhas se vê através de uma mudança de variáveis.

Temos, então, que $c_\infty(\mathcal{A})$ é uma álgebra com involução. □

Teorema 2.1.7. *As operações produto* $\star : c_\infty(\mathcal{A})\times c_\infty(\mathcal{A})\to c_\infty(\mathcal{A})$ *e involução* $^* : c_\infty(\mathcal{A})\to c_\infty(\mathcal{A})$ *são contínuas em* $c_\infty(\mathcal{A})$*, onde os espaços considerados estão munidos com a topologia induzida pela norma* $\|\cdot\|_1$ *e com a topologia produto.*

Demonstração. Lembre-se que todo homomorfismo sobre uma C*-álgebra é contrativo. Ou seja, $\|\alpha^i(a)\| \leq \|a\|, \forall i \in \mathbb{Z}, \forall a \in \mathcal{A}$. Agora observe que:

$$\|\mathbf{a} \star \mathbf{b}\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left\| \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \alpha^j(b_{n-j}) \right\| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|a_j\| \|b_{n-j}\| = \|\mathbf{a}\|_1 \|\mathbf{b}\|_1.$$

Logo, o produto é contínuo. Para a involução veja:

$$\|\mathbf{a}^*\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|\alpha^n(a^*_{-n})\| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a^*_{-n}\| = \|\mathbf{a}\|_1.$$

E então, a involução é contínua. □

Portanto, as operações produto e involução definidas em $c_\infty(\mathcal{A})$ podem ser estendidas para $\ell_1(\mathcal{A})$, uma vez que são contínuas e definidas em um denso. De forma que $\ell_1(\mathcal{A})$, que já sabíamos que se tratava de um espaço de Banach, sabemos agora que, com estas operações, é uma álgebra de Banach com involução.

A rigor, a partir de agora deveríamos usar a notação $\ell_1(\mathcal{A})_\alpha$, uma vez que, para cada ação α, teremos uma álgebra diferente. Mas, isto ficará subentendido. Continuaremos a utilizar a notação $\ell_1(\mathcal{A})$, mas, agora, se referindo a uma álgebra, onde o produto e a involução depende da ação α, fixa durante todo este capítulo, e necessária para a construção do produto cruzado.

Agora, como estamos supondo que $\mathcal{A}$ tem unidade, chamaremos de δ^n o elemento de $\ell_1(\mathcal{A})$ dado por:

$$(\delta^i)_j = \begin{cases} 1_{\mathcal{A}}, & \text{se } j = i, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Esta notação nos será útil em todo o decorrer deste texto. Veja que todo $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_1(\mathcal{A})$ pode ser escrito como $\mathbf{a} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \delta^n$. Observe ainda que, para todo $n, m \in \mathbb{Z}$, temos $\delta^n \star \delta^m = \delta^{n+m}$. E ainda, δ^0 é a unidade em $\ell_1(\mathcal{A})$. Ou seja, se $\mathcal{A}$ é uma C*-álgebra com unidade, então $\ell_1(\mathcal{A})$ é uma álgebra de Banach com unidade, que é dada por δ^0.

No entanto, $\ell_1(\mathcal{A})$ não é uma C*-álgebra. Pois não vale a condição de que $\|\mathbf{a}^* \star \mathbf{a}\|_1 = \|\mathbf{a}\|_1^2$ para todo $\mathbf{a} \in \ell_1(\mathcal{A})$. Para se convencer disto, façamos um exemplo: No caso em que $\mathcal{A} = \mathbb{C}$ e que o automorfismo α envolvido na definição do produto e da involução é a identidade, (chamaremos este caso de $\ell_1(\mathbb{C})$), considere $\mathbf{a} = (a_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ dado por:

$$a_j = \begin{cases} 1, & se \quad j = 0, \\ i, & se \quad j = 1, \\ 1, & se \quad j = 2, \end{cases}$$

e zero nos demais termos. Observe que para $\mathbf{a}^*$ os termos não nulos são:

$$a_j^* = \begin{cases} 1, & se \quad j = -2, \\ -i, & se \quad j = -1, \\ 1, & se \quad j = 0. \end{cases}$$

Fazendo o produto $\mathbf{a}^* \star \mathbf{a}$ e o chamando de $\mathbf{b}$, temos que os termos não nulos de $\mathbf{b} = \mathbf{a}^* \star \mathbf{a}$ são:

$$b_j = \begin{cases} 1, & se \quad j = -2, \\ 3, & se \quad j = 0, \\ 1, & se \quad j = -2. \end{cases}$$

E, então, temos um exemplo de que a igualdade não é válida, uma vez que $\|\mathbf{a}^* \star \mathbf{a}\| = 5 \neq 9 = \|\mathbf{a}\|^2$.

Para termos uma C*-álgebra, precisaremos de uma outra norma. A esta nova norma será dedicada a próxima seção.

2.2 Uma nova norma em $\ell_1(\mathcal{A})$ e o produto cruzado

Relembre-se que estamos denotando por α a ação necessária para a construção do produto cruzado. E esta ação está fixada por todo este capítulo.

Definição 2.2.1. Considere $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra com unidade. Seja R a classe de todos os *-homomorfismos $\sigma : \ell_1(\mathcal{A}) \to B(\mathcal{H})$, onde $\mathcal{H}$ é um espaço de

Hilbert, que são unitais, ou seja, $\sigma(\delta^0) =$Id. Definimos, $\forall \mathbf{a} \in \ell_1(\mathcal{A})$:

$$\|\mathbf{a}\|_{\rtimes} = \sup_{\sigma \in R} \|\sigma(\mathbf{a})\|.$$

Veja que, pelo Lema 1.2.7, temos que, para todo $\sigma \in R$, σ é contínuo.

O objetivo, agora, é provarmos que isto define uma norma em $\ell_1(\mathcal{A})$. Para tanto, precisaremos dos seguintes lemas:

Lema 2.2.2. *Seja $\pi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$ um *-homomorfismo unital, onde $\mathcal{A}$ uma C^*-álgebra com unidade e $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert. E seja $u \in B(\mathcal{H})$ um unitário tal que, $\forall a \in \mathcal{A}$:*

$$u\pi(a)u^* = \pi(\alpha(a)).$$

Seja $\delta^i \in \ell_1(\mathcal{A})$ conforme definimos na seção anterior, ou seja, dado por:

$$(\delta^i)_j = \begin{cases} 1_{\mathcal{A}}, & se\ j = i, \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

e, definindo $\sigma : \ell_1(\mathcal{A}) \to B(\mathcal{H})$ por:

$$\sigma\left((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right) = \sigma\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\delta^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi(a_n)u^n,$$

*temos que σ é *-homomorfismo unital.*

Demonstração. A linearidade de σ advém da linearidade de π. Observe que, por indução, temos que:

$$u^n\pi(a)u^{-n} = \pi(\alpha^n(a)).$$

E assim, sendo $\mathbf{a} = \sum_n a_n\delta^n$ e $\mathbf{b} = \sum_n b_n\delta^n$ em $c_\infty(\mathcal{A})$, teremos:

$$\sigma(\mathbf{a})\sigma(\mathbf{b}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi(a_n)u^n \sum_{j\in\mathbb{Z}} \pi(b_j)u^j = \sum_{n,j\in\mathbb{Z}} \pi(a_n)u^n\pi(b_j)u^{-n}u^{j+n} =$$

$$= \sum_{n,j\in\mathbb{Z}} \pi(a_n)\pi(\alpha^n(b_j))u^{j+n} = \sum_{n,j\in\mathbb{Z}} \pi(a_n)\pi(\alpha^n(b_{j-n}))u^j = \sigma(\mathbf{a}\star\mathbf{b}).$$

$$\sigma(\mathbf{a}^*) = \sigma\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \alpha^n(a_{-n}^*)\delta^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi(\alpha^n(a_{-n}^*))u^n =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} u^n\pi(a_{-n}^*)u^{-n}u^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\pi(a_{-n})u^{-n})^* = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi(a_n)u^n\right)^* = \sigma(\mathbf{a})^*.$$

Logo, σ é um *-homomorfismo em $c_\infty(\mathcal{A})$. E é contínuo, pois, dado $\mathbf{a}\in c_\infty(\mathcal{A})$:

$$\|\sigma(\mathbf{a})\|_1 = \|\sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi(a_n)u^n\|_1 \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|\pi(a_n)\|\|u^n\| \leq \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|a_n\| = \|\mathbf{a}\|_1.$$

Portanto, se estende continuamente para $\ell_1(\mathcal{A})$, e se trata, de fato, de um *-homomorfismo de $\ell_1(\mathcal{A})$ em $\mathcal{H}$.

Além disso, é fácil ver que, como $\pi(1) = \mathrm{Id}$, então $\sigma(\delta^{\mathbf{0}}) = \pi(1)u^0 = \mathrm{Id}$. Logo, σ é *-homomorfismo unital. □

Para o próximo Lema, dado $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert, seja $\ell_2(\mathcal{H})$ o espaço das sequências $\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ que são de quadrado somáveis, ou seja,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|^2 < \infty.$$

Este espaço, munido do produto interno:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle x_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}},$$

é um espaço de Hilbert[1].

Dada $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra com unidade, já vimos pelo Teorema (1.2.29) que existe $\pi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$ um *-homomorfismo unital injetor, onde $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert. Então teremos:

[1] A verificação deste fato é, de certo modo, simples. As propriedades do produto interno em $\ell_2(\mathcal{H})$ advém das propriedades do produto interno em $\mathcal{H}$. E, para provar a completude da norma advinda do produto interno, o leitor poderá fazer análogo ao que fizemos em 2.1.4

Lema 2.2.3. *Sejam $\mathcal{A}$ uma C*-álgebra com unidade, e $\pi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$ *-homomorfismo unital injetor, dado pelo Teorema (1.2.29), onde $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert. Sendo $\mathscr{H} = \ell_2(\mathcal{H})$, façamos:*

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\pi} : \mathcal{A} & \to & B(\mathscr{H}) \\ a & \mapsto & \tilde{\pi}(a) : \begin{array}{rcl} \mathscr{H} & \to & \mathscr{H} \\ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & (\pi(\alpha^{-n}(a))x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \end{array} \end{array}$$

*Assim, temos que $\tilde{\pi}$ é um *-homomorfismo unital de $\mathcal{A}$ em $B(\mathscr{H})$ e, além disso, $u \in B(\mathscr{H})$ dado por*

$$\begin{array}{rcl} u : \mathscr{H} & \to & \mathscr{H} \\ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \mapsto & (x_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}$$

é um unitário que satisfaz $u\tilde{\pi}(a)u^* = \tilde{\pi}(\alpha(a))$, para todo $a \in \mathcal{A}$.

Demonstração. Provemos, primeiramente, que $\tilde{\pi}$ é um *-homomorfismo unital. Dados $a, b \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C}, \mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{y} = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathscr{H}$:

$$\tilde{\pi}(a + \lambda b)\mathbf{x} = (\pi(\alpha^{-n}(a + \lambda b))x_n)_{n\in\mathbb{Z}} =$$

$$= (\pi(\alpha^{-n}(a))x_n)_{n\in\mathbb{Z}} + \lambda(\pi(\alpha^{-n}(b))x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \tilde{\pi}(a)\mathbf{x} + \lambda\tilde{\pi}(b)\mathbf{x};$$

$$\tilde{\pi}(ab)\mathbf{x} = (\pi(\alpha^{-n}(ab))x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\pi(\alpha^{-n}(a))\pi(\alpha^{-n}(b))x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \tilde{\pi}(a)\tilde{\pi}(b)\mathbf{x};$$

$$\tilde{\pi}(a^*)\mathbf{x} = (\pi(\alpha^{-n}(a^*))x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\pi(\alpha^{-n}(a))^*x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

$$\langle\tilde{\pi}(a^*)\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_{\mathscr{H}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle\pi(\alpha^{-n}(a))^*x_n, y_n\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle x_n, \pi(\alpha^{-n}(a))y_n\rangle_{\mathcal{H}} = \langle\mathbf{x}, \tilde{\pi}(a)\mathbf{y}\rangle_{\mathscr{H}}$$

Logo, $\tilde{\pi}$ é *-homomorfismo, e é unital pois:

$$\tilde{\pi}(1)\mathbf{x} = (\pi(\alpha^{-n}(1))x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\pi(1)x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \mathbf{x}.$$

Agora, para u observe que:

$$\langle u^*\mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle_{\mathscr{H}} = \langle \mathbf{x}, u\mathbf{y}\rangle_{\mathscr{H}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle x_n, y_{n-1}\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle x_{n+1}, y_n\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Logo, u^* é a função que leva $\mathbf{x}$ em $(x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$, e daí segue que u é unitário ($uu^* = \mathrm{Id} = u^*u$). Além disso:

$$u\tilde{\pi}(a)u^*\mathbf{x} = u\tilde{\pi}(a)((x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}) = u((\pi(\alpha^{-n}(a))x_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}) =$$

$$= (\pi(\alpha^{-(n-1)}(a))x_{(n-1)+1})_{n\in\mathbb{Z}} = (\pi(\alpha^{-n}(\alpha(a)))x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \tilde{\pi}(\alpha(a))\mathbf{x}.$$

Ou seja, u e $\tilde{\pi}$ satisfazem a propriedade exigida no Lema anterior. □

Lema 2.2.4. *Juntando os Lemas anteriores (2.2.2 e 2.2.3), temos que dada $\mathcal{A}$ uma C^*-álgebra com unidade, existe $\sigma : \ell_1(\mathcal{A}) \to B(\mathscr{H})$ *-homomorfismo unital, dado por:*

$$\sigma\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\delta^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{\pi}(a_n)u^n,$$

onde u e $\tilde{\pi}$ são os obtidos no Lema anterior. E, além da existência, podemos afirmar que σ é injetor.

Demonstração. Considerando os Lemas anteriores, falta apenas provar a injetividade de σ. Para tanto, seja $\mathbf{a} = \sum_n a_n\delta^n$ no núcleo de σ, então para todo $\mathbf{x} = (x_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \mathscr{H}$, temos:

$$\sigma(\mathbf{a})\mathbf{x} = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{\pi}(a_n)u^n\mathbf{x} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{\pi}(a_n)(x_{j-n})_{j\in\mathbb{Z}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi(\alpha^{-j}(a_n))x_{j-n}\right)_{j\in\mathbb{Z}} = 0 \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi(\alpha^{-j}(a_n))x_{j-n} = 0, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

Como o $\mathbf{x}$ é qualquer, tomando $\mathbf{x} = \delta^0$, ou seja, a sequência que só não é nula na posição 0, e nesta posição é 1, podemos concluir que:

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \pi(\alpha^{-n}(a_n)) = 0.$$

Mas, como π é injetor e α é isomorfismo, temos que $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$\pi(\alpha^{-n}(a_n)) = 0 \Rightarrow \alpha^{-n}(a_n) = 0 \Rightarrow a_n = 0.$$

E então, $\mathbf{a} = 0$ e σ é injetora. $\square$

Lema 2.2.5. *Seja $\sigma : \ell_1(\mathcal{A}) \to B(\mathcal{H})$ um *-homomorfismo unital, $\mathcal{H}$ espaço de Hilbert. Defina $u = \sigma(\delta^1)$ e $\pi : \mathcal{A} \to B(\mathcal{H})$ por $\pi(a) = \sigma(a\delta^0)$. Então u é unitário, π é *-homomorfismo unital, e σ se escreve como:*

$$\sigma\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\delta^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi(a_n)u^n.$$

Demonstração. Vamos, primeiramente, provar que u é unitário. Para tanto, observe que $(\delta^1)^* = \delta^{-1}$. Assim:

$$uu^* = \sigma(\delta^1)\sigma(\delta^1)^* = \sigma(\delta^1 \star \delta^{-1}) = \sigma(\delta^0) = \mathrm{Id}$$

E, de forma análoga, vê-se que $u^*u =$Id.

Observe, agora, que a linearidade de π nós já temos, pelo fato de σ ser um *-homomorfismo e pela naturalidade de como é definida a soma em $\ell_1(\mathcal{A})$. Agora, em respeito ao produto e involução, observe que $a\delta^0 \star b\delta^0 = ab\delta^0$. E com isso:

$$\pi(ab) = \sigma(ab\delta^0) = \sigma(a\delta^0 \star b\delta^0) = \sigma(a\delta^0)\sigma(b\delta^0) = \pi(a)\pi(b).$$

$$\pi(a^*) = \sigma(a^*\delta^0) = \sigma((a\delta^0)^*) = \sigma(a\delta^0)^* = \pi(a)^*.$$

Além disso, como σ é unital, temos que $\pi(1) = \sigma(\delta_{\mathbf{0}}) = \mathrm{Id}$. Logo, π é *-homomorfismo unital.

Note que, como $\delta^1 \star \delta^1 \star \cdots \star \delta^1 = \delta^n$, podemos escrever σ como:

$$\sigma\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\delta^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sigma(a_n\delta^0 \star \delta^n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \pi(a_n)u^n,$$

uma vez que esta igualdade é válida para $c_\infty(\mathcal{A})$, que é denso em $\ell_1(\mathcal{A})$. $\square$

Teorema 2.2.6. *A aplicação $\|\cdot\|_{\rtimes}$, conforme definido no início desta secção, define uma norma em $\ell_1(\mathcal{A})$.*

Demonstração. Recorde que, sendo R o conjunto dos *-homomorfismos unitais de $\ell_1(\mathcal{A})$ em $B(\mathcal{H})$, onde $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert,

$$\|\mathbf{a}\|_{\rtimes} = \sup_{\sigma \in R} \|\sigma(\mathbf{a})\|, \quad \forall \mathbf{a} \in \ell_1(\mathcal{A}).$$

Primeiramente, vamos observar que a imagem desta aplicação está contida nos reais não negativos. Para provarmos que $\|\mathbf{a}\|_{\rtimes} \geq 0$, basta provarmos que $R \neq \emptyset$. E isto está contido no Lema 2.2.4.

E para vermos que $\|\mathbf{a}\|_{\rtimes} < \infty$, observe que, pelo Lema 2.2.5, temos que, para todo $\sigma \in R$, existe π *-homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $B(\mathcal{H})$ e u um unitário tal que:

$$\sigma\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \delta^n\right) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \pi(a_n) u^n.$$

E assim, lembrando que todo *-homomorfismo definido em uma C*-álgebra é contrativo, temos que:

$$\left\|\sigma\left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \delta^n\right)\right\| = \left\|\sum_{n \in \mathbb{Z}} \pi(a_n) u^n\right\| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|\pi(a_n)\| \|u^n\| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|a_n\|.$$

E, tomando o supremo do lado esquerdo, temos provado que $\forall \mathbf{a} \in \ell_1(\mathcal{A})$, $\|\mathbf{a}\|_{\rtimes} < \infty$, e, além disso, provamos que $\|\cdot\|_{\rtimes} \leq \|\cdot\|_1$.

Agora, observe que o Lema 2.2.4 nos garante a existência de um elemento injetor em R. Com isso, para todo $\mathbf{a} \in \ell_1(\mathcal{A}), \mathbf{a} \neq 0$, temos que existe $\sigma \in R$ tal que $\|\sigma(\mathbf{a})\| > 0$. E então, $\|\mathbf{a}\|_{\rtimes} > 0$.

Além disso, como as desigualdades são de fácil verificação, deixamos a cargo de leitor. Com isso temos que $\|\cdot\|_{\rtimes}$ é uma norma em $\ell_1(\mathcal{A})$. □

E o que ganhamos com esta nova norma? O fato é que, ao contrário da $\|\cdot\|_1$, vale que:

Proposição 2.2.7. *Para todo $\mathbf{a} \in \ell_1(\mathcal{A})$, temos que $\|\mathbf{a}^* \star \mathbf{a}\|_{\rtimes} = \|\mathbf{a}\|_{\rtimes}^2$.*

Demonstração. Dado $\mathbf{a} \in \ell_1(\mathcal{A})$, temos:

$$\|\mathbf{a}^* \star \mathbf{a}\|_{\rtimes} = \sup_{\sigma \in R} \|\sigma(\mathbf{a}^* \star \mathbf{a})\| = \sup_{\sigma \in R} \|\sigma(\mathbf{a})^* \sigma(\mathbf{a})\| = \sup_{\sigma \in R} \|\sigma(\mathbf{a})\|^2 = \|\mathbf{a}\|_{\rtimes}^2$$

□

Em contrapartida, $\ell_1(\mathcal{A})$ com esta nova norma $\|\cdot\|_{\rtimes}$ não é completo.

Definição 2.2.8. Dados $\mathcal{A}$ C*-álgebra com unidade, $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$, ao completamento de $\ell_1(\mathcal{A})$ na norma $\|\cdot\|_{\rtimes}$ chamaremos de produto cruzado de $\mathcal{A}$ por $\mathbb{Z}$, denotado por $\mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$.

E este produto cruzado é uma C*-álgebra.

2.3 Propriedades do Produto Cruzado

Teorema 2.3.1 (Propriedade Universal)**.** *Dado $\sigma : \ell_1(\mathcal{A}) \to \mathcal{B}$ *-homomorfismo unital, onde $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ são C*-algebras com unidade, então σ se estende para um homomorfismo de $\mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ em $\mathcal{B}$.*

Demonstração. Pelo Teorema 1.2.29, existe *-homomorfismo $\rho : \mathcal{B} \to B(\mathcal{H})$ isométrico, onde $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert. Assim sendo, $\rho \circ \sigma$ é *-homomorfismo unital de $\ell_1(\mathcal{A})$ em $B(\mathcal{H})$. Então, para todo $\mathbf{a} \in \ell_1(\mathcal{A})$:

$$\|\mathbf{a}\|_{\rtimes} \geq \|\rho \circ \sigma(\mathbf{a})\| = \|\sigma(\mathbf{a})\|$$

Logo, σ se estende por continuidade para $\mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. □

Denotaremos, agora, $\mathcal{A}\delta^0$ como o conjunto dos elementos de $\mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ que são da forma $a\delta^0$ para algum $a \in \mathcal{A}$.

Lema 2.3.2. *Seja $\mathcal{A}$ C*-álgebra com unidade, $\alpha \in Aut(\mathcal{A})$. Então $\mathcal{A}\delta^0$ é fechado em $\mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Seja $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}\delta^0$ a função que faz $a \mapsto a\delta^0$. Obviamente φ é *-homomorfismo unital. Então, pelo Teorema 1.2.19, concluímos que $\mathrm{Im}(\varphi)$ é fechada. Mas isto é precisamente $\mathcal{A}\delta^0$. $\square$

Pode-se ver também que $\mathcal{A}\delta^0$ é isomorfo a $\mathcal{A}$, pois a aplicação $a \mapsto a\delta^0$ é um isomorfismo. Então, podemos dizer, de certa forma, que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$.

Lema 2.3.3. *Dados $\mathcal{A}$ C*-álgebra com unidade e $\lambda \in S^1$ (isto é $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| = 1$), considere $\pi_\lambda : \ell_1(\mathcal{A}) \to \mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ definido por:*

$$\pi_\lambda\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\delta^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda^n a_n\delta^n.$$

*Então π_λ é *-homomorfismo unital.*

Demonstração. Dados $\mathbf{a} = \sum_n a_n\delta^n, \mathbf{b} = \sum_n b_n\delta^n \in \ell_1(\mathcal{A})$ e $t \in \mathbb{C}$, temos:

$$\pi_\lambda(\mathbf{a}+t\mathbf{b}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda^n(a_n + tb_n)\delta^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda^n a_n\delta^n + t\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda^n b_n\delta^n = \pi_\lambda(\mathbf{a}) + t\pi_\lambda(\mathbf{b}).$$

$$\pi_\lambda(\mathbf{a})\star\pi_\lambda(\mathbf{b}) = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda^n a_n\delta^n\right)\star\left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda^m b_m\delta^m\right) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda^k a_k\alpha^k(\lambda^{j-k}b_{j-k})\delta^j =$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \lambda^j \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\alpha^k(b_{j-k})\delta^j = \pi_\lambda(\mathbf{a}\star\mathbf{b})$$

$$\pi_\lambda(\mathbf{a})^* = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda^n a_n\delta^n\right)^* = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\lambda^{-n}a_{-n})^*\delta^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lambda^n a_{-n}^*\delta^n = \pi_\lambda(\mathbf{a}^*)$$

Na verdade, para justificarmos tais contas, com somas infinitas, deveríamos ter feito primeiro em $c_\infty(\mathcal{A})$, e depois estendido, por continuidade, para $\ell_1(\mathcal{A})$. Veja que, como $|\lambda| = 1$, π_λ é contínua. Este raciocínio de provar algo para somas finitas e depois estender por continuidade aparecerá repetidas vezes neste texto.

E ainda:

$$\pi_\lambda(\delta^0) = \lambda^0\delta^0 = \delta^0$$

Logo, π_λ é *-homomorfismo unital. $\square$

Observe que, fazendo a identificação $a \mapsto a\delta^0$ de forma que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, podemos concluir que $\pi_\lambda(a) = a, \quad \forall a \in \mathcal{A}$.

Definição 2.3.4. Pelo Lema que acabamos de fazer, e pela propriedade universal, π_λ se estende para um *-homomorfismo de $\mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ em si mesmo, que também chamaremos de π_λ.

Este *-homomorfismo nos será útil para definirmos o que chamaremos de coeficiente de Fourier de um elemento $\mathbf{a} \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. Este coeficiente será definido pela integral de $\pi_\lambda(\mathbf{a})$ em relação a λ. Para tanto, para podermos afirmar que $\pi_\lambda(\mathbf{a})$ é integrável, provaremos que a aplicação $S^1 \ni \lambda \mapsto \pi_\lambda(\mathbf{a})$ é contínua. Antes, porém, façamos um Lema que nos ajudará não só nesta definição, mas também no decorrer dos próximos capítulos.

Lema 2.3.5. *Sejam X e Y espaços de Banach, $T_z : X \to Y$ transformações lineares contínuas ($z \in S^1$) tais que $\sup_{z\in S^1} \|T_z\| = M \leq \infty$. Suponha que existe $D \subset X$ denso tal que a aplicação $z \mapsto T_z(x)$ é contínua para todo $x \in D$. Então a aplicação $z \mapsto T_z(x)$ é contínua para todo $x \in X$.*

Demonstração. Dada sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergindo para z_0, dados $x \in X$, $\varepsilon > 0$, tome $x' \in D$ tal que:

$$\|x - x'\| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Como em D a aplicação $z \mapsto T_z(x')$ é contínua, tome N_0 tal que, para $n > N_0$, temos:

$$\|(T_{z_n} - T_{z_0})(x')\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

E então, para $n > N_0$, teremos:

$$\|T_{z_n}(x) - T_{z_0}(x)\| \leq \|T_{z_n}(x) - T_{z_n}(x')\| + \|T_{z_n}(x') - T_{z_0}(x')\| + \|T_{z_0}(x') - T_{z_0}(x)\| <$$

$$< \frac{M\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{M\varepsilon}{3M} = \varepsilon.$$

E então, a aplicação $z \mapsto T_z(x)$ é contínua para todo $x \in X$. $\square$

Observe que, como π_λ é *-homomorfismo, pelo Lema 1.2.7 temos que $\|\pi_\lambda\| \leq 1$, para todo $\lambda \in S^1$. Estamos, portanto, na condição de usarmos o lema anterior, e vamos concluir que aplicação $S^1 \ni \lambda \mapsto \pi_\lambda(\mathbf{a})$ é contínua para $\mathbf{a} \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. Sendo suficiente provar que a aplicação $\lambda \mapsto \pi_\lambda(\mathbf{a})$ é contínua para $\mathbf{a} \in c_\infty(\mathcal{A})$, uma vez que, pelo Lema 2.1.5, temos que tal conjunto é denso em $\ell_1(\mathcal{A})$, que, por sua vez, é denso em $\mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. Para tanto, seja $\mathbf{a} \in c_\infty(\mathcal{A})$, ou seja, $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência que só não se anula em um número finito de termos. Temos que, para F um subconjunto finito de $\mathbb{Z}$:

$$\|\pi_\lambda(\mathbf{a}) - \pi_{\lambda'}(\mathbf{a})\| = \|((\lambda^n - \lambda'^n)a_n)_{n\in F}\| \leq \sum_{n\in F} |\lambda^n - \lambda'^n| \|a_n\| \leq$$

$$\leq \|\mathbf{a}\|_1 \sup_{n\in F} |\lambda^n - \lambda'^n|.$$

E, como a aplicação $\lambda \mapsto \lambda^n$ é contínua para todo $n \in \mathbb{Z}$, pode-se ver que quando $\lambda' \to \lambda$ teremos $\pi_{\lambda'}(\mathbf{a}) \to \pi_\lambda(\mathbf{a})$, para todo $\mathbf{a} \in c_\infty(\mathcal{A})$. E assim concluímos que a aplicação $\lambda \mapsto \pi_\lambda(\mathbf{a})$ é contínua.

Definição 2.3.6. Assim, definamos, $\forall \mathbf{a} \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$:

$$\Phi(\mathbf{a}) = \int_{S^1} \pi_\lambda(\mathbf{a}) d\lambda \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}.$$

Para saber o significado de tal integral, convidamos o leitor a ler o Apêndice B. No integrando, $d\lambda$ é a medida tal que $\int_{S^1} d\lambda = 1$.

Lema 2.3.7. *Seguindo a definição acima, temos que Φ é linear e contínua.*

Demonstração. Dados $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}, t \in \mathbb{C}$, temos:

$$\Phi(\mathbf{a}+t\mathbf{b}) = \int_{S^1} \pi_\lambda(\mathbf{a} + t\mathbf{b}) d\lambda = \int_{S^1} \pi_\lambda(\mathbf{a}) d\lambda + t \int_{S^1} \pi_\lambda(\mathbf{b}) d\lambda = \Phi(\mathbf{a}) + t\Phi(\mathbf{b}).$$

Veja que, como π_λ é *-homomorfismo de C*-álgebras, temos que

$\|\pi_\lambda(\mathbf{a})\|_{\rtimes} \leq \|\mathbf{a}\|_{\rtimes}$. E assim:

$$\|\Phi(\mathbf{a})\|_{\rtimes} = \left\| \int_{S^1} \pi_\lambda(\mathbf{a}) d\lambda \right\|_{\rtimes} \leq \int_{S^1} \|\pi_\lambda(\mathbf{a})\|_{\rtimes} d\lambda \leq \int_{S^1} \|\mathbf{a}\|_{\rtimes} d\lambda = \|\mathbf{a}\|_{\rtimes}$$

□

Teorema 2.3.8. *Sendo $\mathcal{A}$ uma C*-algebra com unidade, $\alpha \in Aut(\mathcal{A})$, temos que $\Phi(\mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \subset \mathcal{A}\delta^0$, ou seja, $Im(\Phi) \subset \mathcal{A}\delta^0$.*

Demonstração. Observe que, $\forall a \in \mathcal{A}$ e $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, temos:

$$\Phi(a\delta^0 \star \mathbf{x}) = \int_{S^1} \pi_\lambda(a\delta^0 \star \mathbf{x}) d\lambda = \int_{S^1} a\delta^0 \star \pi_\lambda(\mathbf{x}) d\lambda = a\delta^0 \star \Phi(\mathbf{x})$$

Na passagem do $a\delta^0$ para fora da integral, estamos utilizando a propriedade que mencionamos no Apêndice B, de que uma transformação linear pode "sair para fora" da integral.

Observe também que:

$$\Phi(\delta^k) = \int_{S^1} \pi_\lambda(\delta^k) d\lambda = \int_{S^1} \lambda^k \delta^k d\lambda = \begin{cases} 1\delta^0, & \text{se } k = 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, dado $\sum_n a_n\delta^n \in \ell_1(\mathcal{A})$, temos:

$$\Phi(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\delta^n) = \Phi(\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\delta^0 \star \delta^n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\delta^0 \star \Phi(\delta^n) = a_0\delta^0, \tag{2.1}$$

uma vez que a igualdade acima vale para qualquer soma finita.

Então, $\forall \mathbf{a} \in \ell_1(\mathcal{A}), \Phi(\mathbf{a}) \in \mathcal{A}\delta^0$. Assim sendo, como $\ell_1(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, e $\mathcal{A}\delta^0$ é fechado em $\mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, podemos concluir que $\mathrm{Im}(\Phi) \subset \mathcal{A}\delta^0$. □

Além disso, já vimos que $\mathcal{A}\delta^0$ é isomorfo a $\mathcal{A}$. Então, podemos dizer, de certa forma, que $\Phi(\mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}) \subset \mathcal{A}$. E então definimos:

Definição 2.3.9. Seja $\mathcal{A}$ uma C*-algebra com unidade, $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$. Dado $\mathbf{a} \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, definimos os coeficientes de Fourier de $\mathbf{a}$ por:

$$\Phi_n(\mathbf{a}) = \Phi(\mathbf{a} \star \delta^{-n})$$

Este nome pode não fazer muito sentido, por ora, mas, no próximo capítulo, veremos o caso em que $\mathcal{A} = \mathbb{C}$. Neste caso, teremos um isomorfismo entre $\mathbb{C} \rtimes \mathbb{Z}$ e $\mathcal{C}(S^1)$. E, portanto, veremos a relação que há dos Φ_n agora definidos, com os coeficientes de Fourier em $\mathcal{C}(S^1)$.

Para $\mathbf{a} = \sum_n a_n \delta^n \in \ell_1(\mathcal{A})$, do cálculo que fizemos na equação (2.1), e da definição do coeficiente de Fourier, vê-se que $\Phi_n(\mathbf{a}) = a_n$. E então podemos escrever

$$\mathbf{a} = \sum_n \Phi_n(\mathbf{a})\delta^n. \tag{2.2}$$

Ou seja, para todo $\mathbf{a} \in \ell_1(\mathcal{A})$, a série formada com os coeficientes de Fourier $\Phi_n(\mathbf{a})\delta^n$ converge. Mas, para $\mathbf{a} \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ qualquer, nós teremos aqui um análogo ao Teorema de Fejér.

Para tanto, recorde-se que dizer que uma série converge é dizer que as suas somas parciais convergem. Agora, quando a média das somas parciais convergem, dizemos que a série é Cesàro somável. Denotaremos por s_n uma soma parcial e por Γ_n a média das somas parciais, que chamaremos de “somas de Cesàro”. No nosso caso, estamos interessado em um análogo às series de Fourier. Ou seja, dado $\mathbf{a} \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, sendo $s_n(\mathbf{a})$ a soma parcial de Fourier:

$$s_n(\mathbf{a}) = \sum_{k=-n}^{n} \Phi_k(\mathbf{a})\delta^k,$$

definimos a sequência das somas de Cesàro:

$$\Gamma_n(\mathbf{a}) = \frac{s_0(\mathbf{a}) + s_1(\mathbf{a}) + \cdots + s_n(\mathbf{a})}{n+1}.$$

Note que, na soma acima, o termo correspondente ao Φ_0 aparece $n+1$ vezes, os correspondentes a Φ_1 e Φ_{-1} aparecem n vezes, os termos correspondentes a Φ_2 e Φ_{-2} aparecem $n-1$ vezes, e assim por diante. De forma que:

$$\Gamma_n(\mathbf{a}) = \frac{1}{n+1}\left[(n+1)\Phi_0(\mathbf{a})\delta^0 + n\Phi_1(\mathbf{a})\delta^1 + n\Phi_{-1}(\mathbf{a})\delta^{-1} + (n-1)\Phi_2(\mathbf{a})\delta^2 + \right.$$

$$\left. +(n-1)\Phi_{-2}(\mathbf{a})\delta^{-2} + \cdots + \Phi_n(\mathbf{a})\delta^n + \Phi_{-n}(\mathbf{a})\delta^{-n}\right].$$

Portanto, a soma de Cesàro pode ser escrita como:

$$\Gamma_n(\mathbf{a}) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \Phi_j(\mathbf{a})\delta^j.$$

No decorrer deste capítulo usaremos que se uma série converge então ela é Cesàro somável. E isto decorre do Lema a seguir, que será feito em um contexto mais geral.

Lema 2.3.10. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente em um espaço vetorial normado X. Se $x_n \to x$, então a sequência $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por:*

$$g_n = \frac{x_0 + \cdots + x_n}{n+1}$$

também converge para x.

Demonstração. Observe que:

$$\|x - g_n\| = \left\| x - \frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{n+1} \right\| = \left\| \frac{x - x_0 + x - x_1 + \cdots x - x_n}{n+1} \right\| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n} \frac{\|x - x_i\|}{n+1}.$$

Agora, como $x_n \to x$, dado $\varepsilon > 0$, existe N tal que, para $n > N$, temos:

$$\|x - x_n\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

E, sendo

$$k = \sum_{i=0}^{N} \|x - x_i\|,$$

escolha N_0 tal que

$$\frac{k}{N_0 + 1} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

E assim teremos, para $n > \max\{N, N_0\}$,

$$\|x - g_n\| \leq \sum_{i=0}^{n} \frac{\|x - x_i\|}{n+1} = \sum_{i=0}^{N} \frac{\|x - x_i\|}{n+1} + \sum_{i=N+1}^{n} \frac{\|s - s_i\|}{n+1} \leq$$

$$\leq \frac{k}{N_0 + 1} + \frac{\varepsilon(n - N)}{2(n+1)} < \varepsilon.$$

E então g_n converge para s, quando $n \to \infty$. □

Teorema 2.3.11. (*Ver, por exemplo, [4, theorem VIII 2.2]*) *Para todo* $\mathbf{x} \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ *a sequência de suas somas de Cesàro* $\Gamma_n(\mathbf{x})$ *converge em norma para* $\mathbf{x}$.

Demonstração. Como sabemos que $\ell_1(\mathcal{A})$ é denso em $\mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, dado $\varepsilon > 0$ e $\mathbf{x} \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, existe $\mathbf{y} \in \ell_1(\mathcal{A})$ tal que:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\rtimes < \frac{\varepsilon}{3}$$

Agora, para $\mathbf{y} \in \ell_1(\mathcal{A})$, já vimos que podemos escrever $\mathbf{y} = \sum_n \Phi_n(\mathbf{y})\delta^n$, ou seja, a soma converge. Então, pelo Lema anterior, a sequência das somas de Cesàro também converge. Logo, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N$, então:

$$\|\mathbf{y} - \Gamma_n(\mathbf{y})\|_\rtimes < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Então, para concluir o desejado, como temos:

$$\|\mathbf{x} - \Gamma_n(\mathbf{x})\|_\rtimes \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\rtimes + \|\mathbf{y} - \Gamma_n(\mathbf{y})\|_\rtimes + \|\Gamma_n(\mathbf{x} - \mathbf{y})\|_\rtimes,$$

basta provarmos que Γ_n é uma contração. E para isto, observe que, dado $\mathbf{z} \in \mathcal{A} \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, temos:

$$\Gamma_n(\mathbf{z}) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \Phi(\mathbf{z} \star \delta^{-j})\delta^j =$$

$$= \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \int_{S^1} \pi_\lambda(\mathbf{z} \star \delta^{-j}) d\lambda \delta^j =$$

$$= \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \int_{S^1} \pi_\lambda(\mathbf{z}) \star \lambda^{-j} \delta^{-j} d\lambda \delta^j =$$

$$= \int_{S^1} \pi_\lambda(\mathbf{z}) \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \lambda^{-j} d\lambda.$$

Note que o somatório do integrando é o conhecido núcleo de Fejér usualmente denotado por σ_n (como $|\lambda| = 1$ você pode substituí-lo por e^{it} e então a fórmula do núcleo ficará mais evidente). E sabe-se que σ_n é uma função positiva e que $\int_{S^1} \sigma_n(\lambda) d\lambda = 1$[2]. E, então, teremos:

$$\|\Gamma_n(\mathbf{z})\|_\rtimes = \left\| \int_{S^1} \pi_\lambda(\mathbf{z}) \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \lambda^{-j} d\lambda \right\|_\rtimes \leq$$

$$\leq \int_{S^1} \|\pi_\lambda(\mathbf{z})\|_\rtimes \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \lambda^{-j} d\lambda \leq$$

$$\leq \|\mathbf{z}\|_\rtimes \int_{S^1} \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \lambda^{-j} d\lambda = \|\mathbf{z}\|_\rtimes,$$

onde usamos que, como π_λ é um *-homomorfismo entre C*-álgebras, $\|\pi_\lambda(\mathbf{z})\|_\rtimes \leq \|\mathbf{z}\|_\rtimes$.

E, então, Γ_n é uma contração, completando a demonstração. $\square$

[2]Para uma referencia completa e didática sobre o assunto veja [7]

Capítulo 3

O produto cruzado de $\mathbb{C}$ por $\mathbb{Z}$ é isomorfo a $\mathcal{C}(S^1)$

O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos é o exemplo, não trivial, mais simples de C*-álgebra. Nele, a involução é a própria conjugação. Neste capítulo, consideraremos o produto cruzado $\mathbb{C} \rtimes_{\text{id}} \mathbb{Z}$, onde $\text{id}(\lambda) = \lambda, \forall \lambda \in \mathbb{C}$, é o único automorfismo não nulo em $\mathbb{C}$.

Lembre-se que estamos denotando por $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$ a circunferência unitária no plano complexo. E então, $\mathcal{C}(S^1)$ são as funções contínuas de S^1 a valores complexos. Tal espaço, munido da soma e produto ponto a ponto, da involução como sendo a conjugação complexa ponto a ponto, e da norma dada pelo supremo $\|f\| = \sup_{z \in S^1} |f(z)|$, é uma C*-álgebra.

Neste capítulo, vamos demonstrar que $\mathcal{C}(S^1)$ é isomorfo ao produto cruzado $\mathbb{C} \rtimes_{\text{id}} \mathbb{Z}$. E, com isso, via isomorfismo, veremos qual a implicação do Teorema 2.3.11 para $\mathcal{C}(S^1)$. Ou seja, obteremos um resultado para as somas de Cesàro em $\mathcal{C}(S^1)$. Desta forma, dividiremos o capítulo em duas secções, uma destinada ao isomorfismo, e outra destinada a aplicação do Teorema 2.3.11 neste contexto.

3.1 O isomorfismo

O primeiro passo é construir um homomorfismo de $\mathbb{C} \rtimes_{\mathrm{id}} \mathbb{Z}$ em $\mathcal{C}(S^1)$, e depois, provaremos que tal homomorfismo é, na verdade, um isomorfismo.

Note que, como estamos considerando o produto cruzado $\mathbb{C} \rtimes_{\mathrm{id}} \mathbb{Z}$, o automorfismo envolvido na construção do produto cruzado é a identidade. Com isto, a expressão do produto e da involução ficarão mais simples.

Definição 3.1.1. Seja $\psi : \ell_1(\mathbb{C}) \to \mathcal{C}(S^1)$ a função que leva $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ em:

$$\begin{array}{rcl} \psi(\mathbf{a}) : S^1 & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n. \end{array}$$

Argumentos de análise elementar provam que $\psi(\mathbf{a})$ é contínua, e portanto, ψ está bem definida.

Note que, fazendo $z = e^{i\theta}$, podemos escrever:

$$\begin{array}{rcl} \psi(\mathbf{a}) : S^1 & \to & \mathbb{C} \\ e^{i\theta} & \mapsto & \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{in\theta}. \end{array}$$

Com esta notação, fica evidente que ψ foi definida com a mesma "fórmula" da inversa da transformada de Fourier. No entanto, na maior parte do tempo, utilizaremos a primeira notação. No que segue, $\psi(\mathbf{a})z$ denota a função $\psi(\mathbf{a})$ calculada em $z \in S^1$.

Lema 3.1.2. *A aplicação ψ, da Definição 3.1.1, é um *-homomorfismo unital.*

Demonstração. Dados $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_1(\mathbb{C})$, $\lambda \in \mathbb{C}$, temos, para todo $z \in \mathbb{C}$:

$$\psi(\lambda\mathbf{a} + \mathbf{b})z = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\lambda a_n + b_n)z^n = \lambda \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n + \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n = [\lambda\psi(\mathbf{a}) + \psi(\mathbf{b})]z;$$

$$\psi(\mathbf{a} \star \mathbf{b})z = \psi\left(\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k b_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{Z}}\right) z = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k b_{n-k} z^n =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k b_{n-k} z^{n-k} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_{n-k} z^{n-k} =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k z^k \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n z^n = [\psi(\mathbf{a})z][\psi(\mathbf{b})z] = \psi(\mathbf{a})\psi(\mathbf{b})z;$$

$$\psi(\mathbf{a}^*)z = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^*_{-n} z^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a^*_n z^{-n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \overline{a_n z^n} = \overline{\psi(\mathbf{a})z}.$$

$$\psi(\delta^0)z = 1z^0 = 1 \quad \forall z \in S^1 \therefore \psi(\delta^0) = 1$$

E temos provado que se trata, de fato, de um *-homomorfismo unital. $\square$

Pelo que já vimos no capítulo anterior, especificamente no Teorema 2.3.1, temos que ψ se estende para um homomorfismo de $\mathbb{C} \rtimes_{\mathrm{id}} \mathbb{Z}$ em $\mathcal{C}(S^1)$. Abusando da notação, chamaremos esta extensão também de ψ.

Nas próximas páginas, fugiremos um pouco do assunto, a fim de desenvolvermos um teorema que nos será útil para provarmos a injetividade de ψ. Tal teorema pode ser encontrado em [5, proposition 2.9].

Definição 3.1.3. Seja B C*-álgebra com unidade. Lembre-se que uma ação de S^1 em B é um *-homomorfismo que leva $z \in S^1$ em $\beta_z \in \mathrm{Aut}(B)$.

Uma ação β de S^1 em B será chamada fortemente contínua se, para todo $b \in B$, a função definida por $S^1 \ni z \mapsto \beta_z(b)$ é contínua. Seja β uma ação fortemente contínua de S^1 em B.

Sejam $B_n = \{b \in B : \beta_z(b) = z^n b \text{ para todo } z \in S^1\}$.

Observe que cada B_n é um subespaço vetorial de B. Mas, se $n \neq 0$, B_n não é, em geral, uma subálgebra de B. Entretanto, se tivermos $a \in B_n, b \in B_m$, então $\beta_z(ab) = \beta_z(a)\beta_z(b) = z^{n+m}ab$. De forma que teremos o seguinte lema:

Lema 3.1.4. *Para todo $n, m \in \mathbb{Z}$, $B_n B_m \subset B_{n+m}$, onde $B_n B_m$ representa o fecho do conjunto formado pelas combinações lineares de produtos xy onde $x \in B_n$ e $y \in B_m$.*

Demonstração. A prova deste fato advém da observação feita acima, junto com o fato de que cada B_n é fechado, pois trata-se de intersecção de imagem inversa de fechados por uma função contínua. $\square$

Exemplo 3. Para elucidar as definições, vejamos o exemplo em que $B = \mathcal{C}(S^1)$.

Dado $w \in S^1$, seja $\beta_w : \mathcal{C}(S^1) \to \mathcal{C}(S^1)$ o automorfismo definido por $\beta_w(f)(z) = f(zw)$. A verificação de que temos, de fato, definido um automorfismo será feito na demonstração do Teorema 3.1.10. Temos que β é uma ação fortemente contínua.

Veja que, neste caso, $B_n = \{f \in \mathcal{C}(S^1), f(zw) = w^n f(z)\}$. Podemos ainda dizer que B_n é o espaço vetorial gerado por e_n, onde $e_n(z) = z^n$. Pois $e_n \in B_n$, uma vez que $\beta_w(e_n)(z) = e_n(zw) = z^n w^n = w^n e_n(z)$. E ainda, se $f \in B_n$, temos que $f(zw) = z^n f(w)$. Tomando $w = 1$, temos que $f(z) = z^n f(1) = f(1)e_n(z), \forall z \in S^1$, ou seja, f pertence ao espaço vetorial gerado por e_n. E então B_n é o espaço vetorial gerado por e_n.

Da definição de B_n, também podemos observar que $B_n^* = B_{-n}$, e que $B_n \cap B_m = 0$ sempre que $m \neq n$. Além disso, B_0 é chamado de álgebra dos pontos fixos de B por β, uma vez que $B_0 = \{b \in B : \beta_z(b) = b \quad \forall z \in S^1\}$.

Definição 3.1.5. Continuando nas mesmas condições, definimos a enésima projeção espectral $P_n : B \to B$ por:

$$P_n(b) = \int_{S^1} z^{-n} \beta_z(b) dz,$$

onde dz é a medida tal que $\int_{S^1} dz = 1$.

Vamos, agora, exemplificar esta definição e mostrar suas propriedades, a fim de que o nome dado a P_n faça sentido.

Exemplo 4. Continuando no contexto do exemplo anterior, $B = \mathcal{C}(S^1)$, $\beta_w(f)(z) = f(zw)$, vejamos o que é P_n.

$$(P_n(f))z = \int_{S^1} w^{-n} \beta_w(f)(z) dw = \int_{S^1} w^{-n} f(zw) dw = \int_{S^1} y^{-n} z^n f(y) dy =$$

$$= \left(\int_{S^1} y^{-n} f(y) dy \right) z^n = \left(\int_{S^1} y^{-n} f(y) dy \right) e_n(z).$$

Ou seja, vendo $C(S^1)$ como subespaço de $\mathrm{L}^2(S^1)$, a enésima projeção espectral de f $(P_n(f))$ é a projeção ortogonal sobre e_n. Relembre-se de que no

Exemplo 3 vimos que B_n é o espaço vetorial gerado por e_n. Então, $P_n(f)$ é a projeção ortogonal de f sobre B_n.

Lema 3.1.6. *A imagem de P_n é igual a B_n.*

Demonstração. Dados $b \in B, z \in S^1$, teremos:

$$\beta_z(P_n(b)) = \beta_z\left(\int_{S^1} w^{-n}\beta_w(b)dw\right) = \int_{S^1} w^{-n}\beta_{zw}(b)dw =$$

$$= \int_{S^1} w^{-n}z^n\beta_w(b)dw = z^n P_n(b).$$

Logo, $P_n(b) \in B_n$.

Agora, para a outra inclusão, observe que se $b \in B_n$, então:

$$P_n(b) = \int_{S^1} w^{-n}\beta_w(b)dw = \int_{S^1} w^{-n}w^n b dw = b\int_{S^1} dw = b.$$

Onde dw é a medida de Lebesgue tal que $\int_{S^1} dw = 1$. E então, $b \in \mathrm{Im}(P_n)$. $\square$

Além disso, para o que segue, precisaremos também dos seguintes resultados:

Lema 3.1.7. *Dado um funcional linear contínuo ϕ em B, se $\phi(P_n(b)) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ então $\phi(b) = 0$.*

Demonstração. Note que $\phi(P_n(b))$ é o enésimo coeficiente de Fourier da aplicação $z \mapsto \phi(\beta_z(b))$, pois:

$$\phi(P_n(b)) = \phi\left(\int_{S^1} z^{-n}\beta_z(b)dz\right) = \int_{S^1} z^{-n}\phi(\beta_z(b))dz$$

E então, como todos os coeficientes de Fourier são nulos, a aplicação é nula, uma vez que a aplicação $z \mapsto \phi(\beta_z(b))$ é contínua (a ação β é fortemente contínua). Em particular, $\phi(b) = 0$. $\square$

Lema 3.1.8. *Se $P_n(b) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, então $b = 0$.*

Demonstração. Pelo Teorema de Hahn-Banach:

$$\|P_n(b)\| = \sup_{\phi \in B^* \setminus \{0\}} \frac{|\phi(P_n(b))|}{\|\phi\|}$$

Logo, se $P_n(b) = 0$, então $|\phi(P_n(b))| = 0 \ \forall \phi, n$. Logo, pelo lema anterior, $\phi(b) = 0 \ \forall \phi$. E então, novamente pelo Teorema de Hahn-Banach, temos que $b = 0$. □

Teorema 3.1.9. *Sejam B e B' duas C*-álgebras, e β e β' ações fortemente contínuas de S^1 em B e B' respectivamente. Seja $\psi : B \to B'$ um *-homomorfismo covariante, ou seja, que satisfaz $\psi(\beta_z(b)) = \beta'_z(\psi(b))$, $\forall b \in B$ e $\forall z \in S^1$. Então, se ψ restrita aos pontos fixos de B por β for injetor, ψ é injetor.*

Demonstração. Seja $b \in B$ tal que $\psi(b) = 0$. Sejam P_n e P'_n as enésimas projeções espectrais de B e B' respectivamente. Veja que :

$$\psi(P_n(b)) = \psi\left(\int_{S^1} z^{-n}\beta_z(b)dz\right) = \int_{S^1} z^{-n}\psi(\beta_z(b))dz =$$

$$\int_{S^1} z^{-n}\beta'_z(\psi(b))dz = P'_n(\psi(b))$$

E então:

$$\psi(P_n(b)P_n(b)^*) = \psi(P_n(b))\psi(P_n(b))^* = P'_n(\psi(b))P'_n(\psi(b))^* = 0$$

Veja que $P_n(b)P_n(b)^*$ pertence a álgebra dos pontos fixos de B por β, uma vez que $P_n(b) \in B_n$, $P_n(b)^* \in B_{-n}$ e $B_nB_{-n} \subset B_{n+(-n)} = B_0$. Logo, como, por hipótese, ψ é injetor em B_0, temos que $P_n(b)P_n(b)^* = 0$. E então $P_n(b) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Logo $b = 0$, pelo Lema 3.1.8. □

O Teorema acima nos será útil para provar a injetividade de alguns homomorfismos. Veja que, para utilizá-lo, teremos que definir ações fortemente contínuas. Para nos ajudar a provar a continuidade forte de tais ações, relembre-se do lema 2.3.5.

Voltando agora para o nosso contexto, temos:

Teorema 3.1.10. *O homomorfismo* $\psi : \mathbb{C} \rtimes_{id} \mathbb{Z} \to \mathcal{C}(S^1)$*, que restrito a* $\ell_1(\mathbb{C})$ *é dado pela Definição 3.1.1, é um isomorfismo.*

Demonstração. Note que, como os polinômios trigonométricos são densos em $\mathcal{C}(S^1)$, e pela fórmula que ψ apresenta quando restrita a $\ell_1(\mathbb{C})$, a imagem de ψ é densa. Juntando a isso o fato que todo *-homomorfismo entre C*-álgebras tem imagem fechada (Teorema 1.2.19), temos que ψ é sobrejetora. Portanto, agora só falta provar que ψ é injetora.

Para tanto, nos utilizaremos do Teorema 3.1.9. Comecemos por definir as ações exigidas no teorema.

Dado $w \in S^1$, seja $\beta_w = \pi_w$ definido no Lema 2.3.3 e na Definição 2.3.4, no caso em que $\mathcal{A} = \mathbb{C}$, ou seja, $\beta_w : \mathbb{C} \rtimes_{\text{id}} \mathbb{Z} \to \mathbb{C} \rtimes_{\text{id}} \mathbb{Z}$ é o *-homomorfismo unital tal que:

$$\beta_w((a_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (a_n w^n)_{n\in\mathbb{Z}}, \quad \forall (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_1(\mathbb{C}).$$

Observe que $\beta_{\overline{w}}$ é o inverso de β_w, e que $\beta_w \circ \beta_{w'}(\mathbf{a}) = (a_n w^n w'^n)_{n\in\mathbb{Z}} = \beta_{ww'}(\mathbf{a})$. E, portanto, β é uma ação de S^1 em $\mathbb{C} \rtimes_{\text{id}} \mathbb{Z}$. E, como é automorfismo, para todo $w \in S^1$, temos $\|\beta_w\| = 1$.

Relembre-se que, pelo que fizemos no parágrafo anterior à Definição 2.3.6, já provamos genericamente que a aplicação $\lambda \mapsto \pi_\lambda(\mathbf{a})$ é contínua. Ou seja, no nosso caso atual, já temos que a ação β é fortemente contínua, ou seja, para todo $\mathbf{a} \in \mathbb{C} \rtimes_{\text{id}} \mathbb{Z}$, a aplicação $w \mapsto \beta_w(\mathbf{a})$ é contínua.

Seja $\beta'_w : C(S^1) \to C(S^1)$ dado por $\beta'_w(f)(z) = f(zw)$, ou seja, igual ao que definimos no Exemplo 3. E temos que, dados $f, g \in \mathcal{C}(S^1)$, $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\beta'_w(f + \lambda g)(z) = (f + \lambda g)(zw) = f(zw) + \lambda g(zw) = \beta'_w(f)(z) + \lambda\beta'_w(g)(z);$$

$$\beta'_w(fg)(z) = (fg)(zw) = f(zw)g(zw) = \beta'_w(f)(z)\beta'_w(g)(z);$$

$$\beta'_w(\overline{f})(z) = (\overline{f})(zw) = \overline{f(zw)} = \overline{\beta'_w(f)(z)};$$

Veja, novamente, que $\beta'_{\overline{w}}$ é o inverso de β'_w e que $\beta'_w \circ \beta'_{w'}(f)(z) = f(zw'w) = \beta'_{w'w}(f)(z)$. E, portanto, β' é uma ação de S^1 em $\mathcal{C}(S^1)$. Além disso, a aplicação $w \mapsto \beta'_w(f)$ é contínua para toda $f \in \mathbb{C}(S^1)$, uma vez que:

$$\|\beta'_w(f) - \beta'_{w'}(f)\| = \sup_{z\in S^1} |\beta'_w(f)z - \beta'_{w'}(f)z| = \sup_{z\in S^1} |f(wz) - f(w'z)|,$$

e f é uniformemente contínua, pois $f \in \mathcal{C}(S^1)$, ou seja, f é contínua sobre um compacto.

E, portanto, para satisfazer as condições do teorema, falta apenas ver que ψ é covariante. Dado $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_1(\mathbb{C}), w \in S^1$:

$$\psi(\beta_w(\mathbf{a}))(z) = \psi((a_n w^n)_{n\in\mathbb{Z}})(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n w^n z^n =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (wz)^n = \psi(\mathbf{a})(wz) = \beta'_w(\psi(\mathbf{a}))(z).$$

Portanto, para concluir a injetividade de ψ, basta provar a injetividade dela restrita aos pontos fixos de $\mathbb{C} \rtimes_{\text{id}} \mathbb{Z}$ por β. Lembre-se que, da demonstração do Teorema 3.1.9, temos que tais pontos fixos, que são chamados de B_0, correspondem a imagem da projeção espectral P_0, dada por:

$$P_0(\mathbf{a}) = \int_{S^1} \beta_w(\mathbf{a}) dw.$$

Para $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_1(\mathbb{C})$, temos que:

$$P_0(\mathbf{a}) = \left(\int_{S^1} a_n w^n dw \right)_{n\in\mathbb{Z}} = a_0 \delta^0,$$

pois:

$$\int_{S^1} w^n dw = \begin{cases} 1, & se \quad n = 0; \\ 0, & se \quad n \neq 0. \end{cases}$$

Ou seja, de forma análoga ao que fizemos genericamente na equação 2.1.

E, como provamos genericamente no Lema 2.3.2, $\mathbb{C}\delta^0$ é fechado. Então, se tivermos $\mathbf{a}$ no fecho de $\ell_1(\mathbb{C})$, que é igual a $\mathbb{C} \rtimes_{\text{id}} \mathbb{Z}$, teremos também que $P_0(\mathbf{a}) \in \mathbb{C}\delta^0$. Logo $B_0 = \mathbb{C}\delta^0$

E, neste conjunto, é bem simples verificar que ψ é injetora. Pois, se $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in B_0$ é tal que $\psi(\mathbf{a}) = \psi(\mathbf{b})$, então $a_0 = b_0$ e $a_i = 0 = b_i$ para todo $i \neq 0$.

Logo, $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

E assim, concluímos que ψ é um isomorfismo. $\square$

3.2 As somas de Cesàro em $\mathcal{C}(S^1)$

Vimos, na seção anterior, que o homomorfismo $\psi : \mathbb{C} \rtimes_{\mathrm{id}} \mathbb{Z} \to \mathcal{C}(S^1)$, que, restrito a $\ell_1(\mathbb{C})$, é dado pela fórmula

$$\ell_1(\mathbb{C}) \ni \mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \longmapsto \psi(\mathbf{a}) : \begin{array}{ccc} S^1 & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n \end{array},$$

é um isomorfismo. Pela sua expressão em $\ell_1(\mathbb{C})$, vemos que ψ tem a mesma fórmula da inversa da transformada de Fourier $\mathcal{F} : L^2(S^1) \to \ell_2(\mathbb{C})$

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{\mathbf{f}} = (\widehat{f}_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \left(\int_{S^1} f(z) z^{-n} dz\right)_{n\in\mathbb{Z}}$$

onde dz é a medida tal que $\int_{S^1} dz = 1$.

E, como $\ell_1(\mathbb{C}) \subset \ell_2(\mathbb{C})$, teremos que ψ^{-1} deve ser a transformada de Fourier. E então, dado $f \in \mathcal{C}(S^1)$ chamaremos:

$$\psi^{-1}(f) = \widehat{\mathbf{f}} = (\widehat{f}_n)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

E assim temos que a soma de Cesàro para $\widehat{\mathbf{f}}$ será:

$$\Gamma_n(\widehat{\mathbf{f}}) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \Phi_j(\widehat{\mathbf{f}}) \delta^j.$$

Vejamos, agora, qual a implicação que o Teorema 2.3.11 trará sobre $\mathcal{C}(S^1)$, via o isomorfismo ψ. Pelo Teorema 2.3.11, temos que $\Gamma_n(\widehat{\mathbf{f}}) \to \widehat{\mathbf{f}}$. Lembre-se de que, pelo que fizemos na equação (2.2), temos que $\Phi_j(\widehat{\mathbf{f}}) = \widehat{f}_j$, para todo $\widehat{\mathbf{f}} \in \ell_1(\mathbb{C})$.

Além disso, como ψ é um isomorfismo entre C*-álgebras, pelo Teorema 1.2.18, temos que ψ é isométrico. Logo, como $\ell_1(\mathbb{C})$ é denso em $\mathbb{C} \rtimes_{\mathrm{Id}} \mathbb{Z}$, temos que $\psi(\ell_1(\mathbb{C}))$ é denso em $\mathcal{C}(S^1)$. Mas, neste denso, pelo parágrafo anterior, $\Phi_j(\widehat{\mathbf{f}}) = \widehat{f}_j$. Portanto, por densidade, temos que $\Phi_j(\widehat{\mathbf{f}}) = \widehat{f}_j$ para todo $f \in \mathcal{C}(S^1)$.

E então, o teorema implica que

$$\Gamma_n(\widehat{\mathbf{f}}) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \widehat{f}_j \delta^j$$

converge uniformemente para $\widehat{\mathbf{f}}$.

E então, nos utilizando novamente do isomorfismo ψ, concluímos, em $\mathbf{C}(S^1)$, o seguinte:

$$f = \lim_n \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \psi(\widehat{f}_j \delta^j)$$

e a convergência é uniforme. Calculando em $z \in S^1$ temos:

$$f(z) = \lim_n \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \widehat{f}_j z^j$$

Trata-se, portanto, da versão conhecida do Teorema de Fejér, de que a série de Fourier de f converge, na noção de Cesàro, uniformemente, qualquer que seja $f \in C(S^1)$.[1]

[1]que pode ser encontrado [7]

Capítulo 4

Caracterização de uma álgebra de operadores pseudodiferenciais como um produto cruzado

Neste capítulo, vamos ver outro exemplo de C*-álgebra que é isomorfa a um produto cruzado.

Recorde-se que estamos denotando $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Sabemos que $\mathrm{L}^2(S^1)$, o espaço das funções definidas em S^1 que são de quadrado integráveis, é um espaço de Hilbert. E então $\mathcal{B}(\mathrm{L}^2(S^1))$ é uma C*-álgebra.

Neste capítulo, iremos construir um isomorfismo entre uma C*-subálgebra $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathrm{L}^2(S^1))$ e um produto cruzado $\mathcal{C}(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$; em que X é uma compactificação de $\mathbb{Z}$. E a subálgebra $\mathcal{A}$ será a subálgebra de $\mathcal{B}(\mathrm{L}^2(S^1))$ que contém os operadores de multiplicação e os conjugados, via transformada de Fourier, dos operadores de multiplicação. Tais objetos cremos que fiquem mais claros após as definições.

Faremos, primeiramente, uma seção com as definições, posteriormente mostraremos o isomorfismo, e veremos o Teorema 2.3.11 neste contexto.

4.1 Definições

Seja $\mathrm{L}^2(S^1)$ o conjunto das funções, definidas sobre S^1, que são de quadrado integrável. Seja, também, ℓ_2 o conjunto das sequências, indexadas em $\mathbb{Z}$, a valores em $\mathbb{C}$, que são de quadrado somáveis. Dada $f \in \mathrm{L}^2(S^1)$, $\mathcal{F}(f) = (\widehat{f}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2$ denotará a transformada de Fourier discreta, dada por:

$$\widehat{f}_n = \int_{S^1} f(z) z^{-n} dz,$$

onde dz é a medida tal que $\int_{S^1} dz = 1$.

Sabe-se que $\mathcal{F}$ é um isomorfismo entre $\mathrm{L}^2(S^1)$ e ℓ_2. Além disso, sua inversa possui a fórmula:

$$\mathcal{F}^{-1}((a_n)_{n\in\mathbb{Z}})(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n z^n.$$

Dado $a \in \mathcal{C}(S^1)$, seja $a(M) \in \mathcal{B}(\mathrm{L}^2(S^1))$ o operador de multiplicação por a, definido por:

$$a(M)f(z) = a(z)f(z), \quad f \in \mathrm{L}^2(S^1).$$

Da linearidade da multiplicação, obtemos que $a(M)$ é uma aplicação linear. E sua continuidade vemos em:

$$\|a(M)f(z)\|_2^2 = \int_{S^1} |a(z)f(z)|^2 dz \leq \sup_{z\in S^1} |a(z)|^2 \int_{S^1} |f(z)|^2 dz = \sup_{z\in S^1} |a(z)|^2 \|f\|_2^2.$$

Então, $a(M) \in \mathcal{B}(\mathrm{L}^2(S^1))$ está bem definida e

$$\|a(M)\| \leq \|a\| = \sup_{z\in S^1} |a(z)|. \tag{4.1}$$

Além disso, observe que a aplicação:

$$\mathcal{C}(S^1) \ni a \mapsto a(M) \in \mathcal{B}(\mathrm{L}^2(S^1))$$

é um *-homomorfismo. Pois, dados $a, b \in \mathcal{C}(S^1), \lambda \in \mathbb{C}, f, g \in \mathrm{L}^2(S^1)$, temos:

$$(a + \lambda b)(M)f(z) = (a + \lambda b)(z)f(z) = a(z)f(z) + \lambda b(z)f(z) =$$

$$= a(M)f(z) + \lambda b(M)f(z)$$

$$(ab)(M)f(z) = (ab)(z)f(z) = a(z)b(z)f(z) = a(M)b(M)f(z)$$

$$\langle f, (a)(M)^*g\rangle = \langle (a)(M)f, g\rangle = \int_{S^1} a(M)f\overline{g}dz = \int_{S^1} a(z)f(z)\overline{g(z)}dz =$$

$$= \int_{S^1} f(z)\overline{\overline{a(z)}g(z)}dz = \langle f, (\overline{a})(M)g\rangle$$

$$\therefore a(M)^*g = a^*(M)g \quad \forall g \in \mathrm{L}^2(S^1)$$

Para o que segue na próxima seção, definiremos, também, as funções $e_n \in \mathcal{C}(S^1)$ por:

$$e_n(z) = z^n, \quad z \in S^1.$$

Note que, para estas funções, vale que $e_n(M)e_k(M) = e_{n+k}(M)$, uma vez que os índices vão parar no expoente, e para o expoente temos esta propriedade.

Seja agora $X = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ compactificação de $\mathbb{Z}$, onde a topologia é tal que os elementos $n \in \mathbb{Z}$ são pontos isolados, os abertos básicos que contêm $+\infty$ são da forma $\{n \in \mathbb{Z}, n > N_0\} \cup \{+\infty\}$, para algum $N_0 \in \mathbb{Z}$, e o análogo para $-\infty$. Seja $\mathcal{C}(X)$ o conjunto das funções complexas contínuas definidas em X. Podemos identificar $\mathcal{C}(X)$ com o conjunto das sequências, definidas sobre $\mathbb{Z}$, que têm limite (tanto tendendo para $+\infty$ quanto para $-\infty$), da seguinte forma: dado $\mathbf{b} = (b_n)_{n\in X} \in \mathcal{C}(X)$, associamos a $\mathbf{b}$ a sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$; e dada uma sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ que tem limite, enxergando-a como uma função em $\mathcal{C}(\mathbb{Z})$, associamos a ela a sua única extensão contínua em $\mathcal{C}(X)$.

Conforme já vimos nas páginas 4 e 20, temos também que $\mathcal{C}(X)$ é um exemplo de C*-álgebra, onde a norma é dada por

$$\|\mathbf{b}\| = \sup_{n\in X} |b_n|, \quad \mathbf{b} = (b_n)_{n\in X} \in \mathcal{C}(X).$$

Assim sendo, dado $\mathbf{b} = (b_n)_{n\in X} \in \mathcal{C}(X)$, definimos $M_{\mathbf{b}} : \ell_2 \to \ell_2$ o operador de multiplicação por:

$$M_{\mathbf{b}}\mathbf{a} = (b_n a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \quad \mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2.$$

Novamente, pelas propriedades da multiplicação, vê-se que $M_{\mathbf{b}}$ é um operador linear. E sua continuidade se vê em:

$$\|M_{\mathbf{b}}\mathbf{a}\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|b_n a_n\|^2 \leq \sup_{n\in\mathbb{Z}} |b_n|^2 \|\mathbf{a}\|_2^2.$$

E então, $M_{\mathbf{b}}$ está bem definido, como operador linear contínuo sobre ℓ_2. E, além disso, temos que:

$$\|M_{\mathbf{b}}\| \leq \|\mathbf{b}\|. \tag{4.2}$$

Além disso, observe que a aplicação

$$\mathcal{C}(X) \ni \mathbf{b} \mapsto M_{\mathbf{b}} \in \mathcal{B}(\ell_2)$$

é um *-homomorfismo. Pois, dados $\mathbf{b} = (b_n)_{n\in X}, \mathbf{b}' = (b'_n)_{n\in X} \in \mathcal{C}(X), \lambda \in \mathbb{C}, \mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{c} = (c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2$, temos:

$$M_{\mathbf{b}+\lambda\mathbf{b}'}\mathbf{a} = ((b_n + \lambda b'_n)(a_n))_{n\in\mathbb{Z}} = (b_n a_n)_{n\in\mathbb{Z}} + \lambda(b'_n a_n)_{n\in\mathbb{Z}} = M_{\mathbf{b}}\mathbf{a} + \lambda M_{\mathbf{b}'}\mathbf{a}$$

$$M_{\mathbf{b}\mathbf{b}'}\mathbf{a} = (b_n b'_n a_n)_{n\in\mathbb{Z}} = M_{\mathbf{b}} M_{\mathbf{b}'}\mathbf{a}$$

$$\langle M_{\mathbf{b}}^*\mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle = \langle \mathbf{a}, M_{\mathbf{b}}\mathbf{c}\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle a_n, b_n c_n\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle \overline{b}_n a_n, c_n\rangle = \langle M_{\mathbf{b}^*}\mathbf{a}, \mathbf{c}\rangle$$

Desta forma, via conjugação pela transformada de Fourier, podemos definir um operador em $\mathrm{L}^2(S^1)$, que chamaremos de $\mathbf{b}(D)$. Ou seja, definimos:

$$\mathbf{b}(D) = \mathcal{F}^{-1} \circ M_{\mathbf{b}} \circ \mathcal{F}.$$

Para ilustrar como é a ação do operador $\mathbf{b}(D)$ sobre $f \in \mathrm{L}^2(S^1)$, veja que:

$$\mathbf{b}(D)f = \mathcal{F}^{-1} \circ M_{\mathbf{b}} \circ \mathcal{F}(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n \widehat{f}_n e_n,$$

onde $\mathbf{b}$ está identificado como a sequência $\mathbf{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Além disso, observe que a aplicação

$$\mathcal{C}(X) \ni \mathbf{b} \mapsto \mathbf{b}(D) \in \mathcal{B}(\mathrm{L}^2(S^1))$$

é um *-homomorfismo. Pois $\mathcal{F}$ é um operador unitário, e a aplicação $\mathbf{b} \mapsto M_{\mathbf{b}}$ é um *-homomorfismo. Veja também que, devido ao que obtivemos na equação (4.2), teremos agora que:

$$\|\mathbf{b}(D)\| \leq \|\mathbf{b}\| \tag{4.3}$$

Agora, seja $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathrm{L}^2(S^1))$ a C*-álgebra gerada pelos conjuntos $\{a(M); a \in \mathcal{C}(S^1)\}$ e $\{\mathbf{b}(D); \mathbf{b} \in \mathcal{C}(X)\}$. Ou seja, a C*-álgebra gerada pelos operadores de multiplicação por $a \in \mathcal{C}(S^1)$ e pelos operadores da forma $\mathbf{b}(D)$ com $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(X)$. Por definição, a C*-álgebra gerada é a "menor"C*-álgebra que contém os conjuntos geradores (menor no sentido de que qualquer outra C*-álgebra que contiver os geradores conterá também a C*-álgebra gerada). Logo, um subconjunto denso da C*-álgebra gerada é a C*-álgebra finitamente gerada. Ou seja, $\mathcal{A}$ tem como subconjunto denso o conjunto $\mathcal{D}$ formado pelos somatórios finitos:

$$\sum_{j\in F} a_{1j}(M)\mathbf{b}_{1j}(D)a_{2j}(M)\mathbf{b}_{2j}(D)\cdots a_{kj}(M)\mathbf{b}_{kj}(D),$$

$\forall k \in \mathbb{Z}$, $a_{jk} \in \mathcal{C}(S^1), \mathbf{b}_{jk} \in \mathcal{C}(X)$. Onde, além do somatório ser finito, cada termo é um produto finito.

Seja $\Lambda = \lambda(D)$, $\lambda(j) = (1 + j^2)^{-\frac{1}{2}}$, e, dados $a, b \in \mathcal{C}^\infty(S^1)$, seja $L : \mathcal{C}^\infty(S^1) \to \mathcal{C}^\infty(S^1)$ o operador diferencial linear de primeira ordem $Lf = af' + b$. Usando que $\widehat{(\frac{1}{i}f')}_j = j\widehat{f}_j, \forall j \in \mathbb{Z}, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(S^1)$, é fácil provar que o operador $L\Lambda$, a princípio definido apenas no subespaço denso de $L^2(S^1)$

$$\{f \in L^2(S^1); \Lambda f \in \mathcal{C}^\infty(S^1)\}$$

se estende a um operador limitado em $L^2(S^1)$, e que

$$L\Lambda = ia(M)s(D) + b(M),$$

onde $s(j) = j(1+j^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Cada $L\Lambda$ desta forma pertence, portanto, a $\mathcal{A}$. Usando que a álgebra gerada por 1 e s é densa em $\mathcal{C}(X)$ (isto decorre do teorema de Stone-Weierstrass), vemos que $\mathcal{A}$ pode também ser descrita como sendo a menor C*-subálgebra de $\mathcal{B}(L^2(S^1))$ que contém todos os operadores $L\Lambda$ desta forma. Na terminologia de Cordes [3], isto significa que $\mathcal{A}$ é a única "álgebra de comparação" da variedade compacta S^1. Sabe-se que a única álgebra de comparação sobre uma variedade compacta Y coincide com o fecho da álgebra gerado por todos os operadores pseudodiferenciais clássicos (i.e. com símbolos " poli-homogêneos") de ordem 0 em Y (isto decorre, por exemplo, de [12, Theorem 4] e da observação feita ao final de [12, Section 4].

O objetivo deste capítulo é demonstrar que $\mathcal{A}$ é isomorfo a $\mathcal{C}(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, sendo $\alpha : \mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}(X)$ o automorfismo definido por:

$$\alpha(\mathbf{b}) = (b_{n-1})_{n\in X}, \quad \mathbf{b} = (b_n)_{n\in X} \in \mathcal{C}(X),$$

onde estamos tomando por convenção que $+\infty - 1 = +\infty$ e $-\infty - 1 = -\infty$.

Ou seja, diferentemente do capítulo anterior, as formulas do produto e involução no produto cruzado não se simplificarão, uma vez que o automorfismo envolvido é diferente da identidade. Relembre, portanto, que o produto e a involução em $\ell_1(\mathcal{C}(X))$ assumem as seguintes fórmulas:

$$(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \star (\mathbf{b}_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}_j \alpha^j(\mathbf{b}_{n-j})\right)_{n\in\mathbb{Z}}$$

$$(\mathbf{a})^*_{n\in\mathbb{Z}} = (\alpha^n(\mathbf{a}^*_{-n}))_{n\in\mathbb{Z}}$$

Note que os elementos presentes nas fórmulas acima são do tipo $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_1(\mathcal{C}(X)$. Ou seja, são sequências onde cada termo $\mathbf{a}_i \in \mathcal{C}(X)$ pode ser visto também como uma sequência, uma vez que X é uma compactificação de $\mathbb{Z}$.

O exemplo estudado nesta dissertação pode servir de protótipo para resultados análogos em outras variedades, ou para álgebras geradas por operadores pseudodiferenciais com símbolos não necessariamente clássicos.

Passemos agora a construção do desejado isomorfismo.

4.2 O isomorfismo

Definição 4.2.1. Seja $\psi : \ell_1(\mathcal{C}(X)) \to \mathcal{A}$ a função dada por:

$$\psi((\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}_j(D)e_j(M), \quad (\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_1(\mathcal{C}(X))$$

Observe que a série na definição acima converge absolutamente, devido ao que provamos nas equações (4.1) e (4.3), uma vez que:

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|\mathbf{a}_j(D)e_j(M)\| \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|\mathbf{a}_j(D)\|\|e_j(M)\| \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|\mathbf{a}_j\| = \|(\mathbf{a}_j)_{j\in\mathbb{Z}}\|_1.$$

Teorema 4.2.2. *Conforme definido acima, a função ψ é um *-homomorfismo unital.*

Antes de demonstrarmos tal teorema, fica claro que enfrentaremos algumas contas do tipo $\mathbf{a}_j(D)e_j(M)\mathbf{a}_k(D)e_k(M)$. Para tanto, nos serviremos do seguinte lema:

Lema 4.2.3. *Conforme definimos na seção anterior, dados $j \in \mathbb{Z}, \mathbf{b} \in \mathcal{C}(X)$, teremos:*

$$e_j(M)\mathbf{b}(D)e_{-j}(M) = (\alpha^j(\mathbf{b}))(D)$$

Demonstração. Primeiramente, observe que, dado $f \in \mathrm{L}^2(S^1)$, teremos $\forall j, k \in \mathbb{Z}$:

$$\widehat{(e_{-j}f)}_k = \widehat{f}_{k+j},$$

pois:

$$\widehat{(e_{-j}f)}_k = \int_{S^1} e_{-j}(z)f(z)z^{-k}dz = \int_{S^1} f(z)z^{-(k+j)}dz = \widehat{f}_{k+j}.$$

E, portanto, dado $\mathbf{b} = (b_k)_{k\in X} \in \mathcal{C}(X)$, temos:

$$e_j(M)\mathbf{b}(D)e_{-j}(M)(f) = e_j(M)\mathcal{F}^{-1}M_{\mathbf{b}}\mathcal{F}(e_{-j}f) =$$

$$= e_j(M)\mathcal{F}^{-1}M_{\mathbf{b}}((\widehat{f}_{k+j})_{k\in\mathbb{Z}}) = e_j(M)\mathcal{F}^{-1}((b_k\widehat{f}_{k+j})_{k\in\mathbb{Z}}) =$$

$$= e_j(M)\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k\widehat{f}_{k+j}e_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_k\widehat{f}_{k+j}e_{k+j}.$$

Por outro lado,

$$(\alpha^j(\mathbf{b}))(D)(f) = \mathcal{F}^{-1}M_{\alpha^j(\mathbf{b})}(\mathcal{F}(f)) = \mathcal{F}^{-1}((b_{k-j}\widehat{f}_k)_{k\in\mathbb{Z}}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} b_{k-j}\widehat{f}_k e_k.$$

E a igualdade entre as duas expressões obtidas se vê fazendo uma troca de variáveis. Logo, temos provado o desejado. □

Demonstração do Teorema 4.2.2. Nas contas que se seguem, utilizamos um raciocínio análogo ao que fizemos na Seção 2.1. Ou seja, uma vez que que $c_\infty(\mathcal{C}(X))$ é denso em $\ell_1(\mathcal{C}(X))$ (Lema 2.1.5), e as aplicações envolvidas são todas contínuas, podemos supor que os somatórios são todos finitos.

Primeiramente, vejamos que ψ é linear. Dados $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (\mathbf{b}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_1(\mathcal{C}(X))$, $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\psi((\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}} + \lambda(\mathbf{b}_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} [a_j + \lambda\mathbf{b}_j](D)e_j(M) =$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}_j(D)e_j(M) + \lambda\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{b}_j(D)e_j(M) = \psi((\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}}) + \lambda\psi((\mathbf{b}_n)_{n\in\mathbb{Z}}).$$

Para o produto, teremos:

$$\psi((\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}})\psi((\mathbf{b}_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}_j(D)e_j(M)\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{b}_k(D)e_k(M) =$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}_j(D)e_j(M)\mathbf{b}_k(D)e_{-j}(M)e_{k+j}(M) =$$

$$= \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}_j(D)(\alpha^j(\mathbf{b}_k))(D)e_{k+j}(M) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathbf{a}_j\alpha^j(\mathbf{b}_k))(D)e_{k+j}(M) =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sum_{j\in\mathbb{Z}} (\mathbf{a}_j \alpha^j(\mathbf{b}_{k-j}))(D)e_k(M) = \psi((\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \star (\mathbf{b}_n)_{n\in\mathbb{Z}}).$$

Agora, para a involução, teremos:

$$\psi((\mathbf{a}^*_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \psi((\alpha^n(\mathbf{a}^*{}_{-n}))_{n\in\mathbb{Z}}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\alpha^n(\mathbf{a}^*{}_{-n}))(D)e_n(M) =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} e_n(M)\mathbf{a}^*{}_{-n}(D)e_{-n}(M)e_n(M) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e_n(M)\mathbf{a}_{-n}(D)^* =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\mathbf{a}_{-n}(D)e_{-n}(M))^* = \psi((\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}})^*$$

E ainda, observe que a unidade em $\ell_1(\mathcal{C}(X))$ é a sequência δ^0, em que o único elemento não nulo é a unidade de $\mathcal{C}(X)$ na posição 0. Por sua vez, a unidade em $\mathcal{C}(X)$ é a sequência constante igual a 1, uma vez que o produto em $\mathcal{C}(X)$ é definido de forma pontual. Então, dado $f \in \mathrm{L}^2(S^1)$:

$$\psi(\delta^0)(f) = 1(D)e_0(M)(f) = \mathcal{F}^{-1} \circ M_1 \circ \mathcal{F}(f) = \mathcal{F}^{-1} \circ M_1((\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{Z}}) =$$

$$= \mathcal{F}^{-1}((\widehat{f_n})_{n\in\mathbb{Z}}) = f$$

Logo, $\psi(\delta^0) = \mathrm{Id}$. E, portanto, ψ é um *-homomorfismo unital. $\square$

Portanto, pela Propriedade Universal (Teorema 2.3.1), ψ se estende para um *-homomorfismo unital de $\mathcal{C}(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ em $\mathcal{A}$. Novamente abusando da notação, chamaremos tal *-homomorfismo de ψ.

Teorema 4.2.4. *O homomorfismo $\psi : \mathcal{C}(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \to \mathcal{A}$, dado pela extensão de ψ definida em 4.2.1, é um isomorfismo.*

Demonstração. Para a sobrejetividade, observe que da definição já temos que $\mathrm{Im}(\psi) \subset \mathcal{A}$, uma vez que intencionalmente colocamos na imagem somente elementos da forma $\mathbf{b}(D)$ com $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(X)$ e $e_i(M)$ com $e_i \in \mathcal{C}(S^1)$. E tais elementos pertencem aos conjuntos que geram $\mathcal{A}$.

Agora, para a outra inclusão, $\mathcal{A} \subset \mathrm{Im}(\psi)$, como pelo Teorema 1.2.19 já temos que $\mathrm{Im}(\psi)$ é fechada, basta provarmos que, para todo $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(X)$, $\mathbf{b}(D) \in \mathrm{Im}(\psi)$, e para toda $a \in C(S^1)$, $a(M) \in \mathrm{Im}(\psi)$.

Mas, dado $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(X)$, considere $\mathbf{b}\delta^0 \in \ell_1(\mathcal{C}(X))$ a sequência que o único termo não nulo é $\mathbf{b}$ na posição zero. E então $\psi(\mathbf{b}\delta^0) = \mathbf{b}(D)e_0(M) = \mathbf{b}(D)$. Logo, $\mathbf{b}(D) \in \mathrm{Im}(\psi)$.

E ainda, dado $a \in \mathcal{C}(S^1)$, temos que existem p_n, polinômios, que convergem uniformemente para $a = \lim_n p_n$. O que implica que $a(M) = \lim_n p_n(M)$, e a convergência é absoluta. Mas, sendo δ^1 a sequência em que o único elemento não nulo é a unidade $1 \in \mathcal{C}(X)$ na posição 1, temos que $\psi(\delta^1) = 1(D)e_1(M) = e_1(M)$. Relembre-se que e_1 é a função que $S^1 \ni z \mapsto z$, ou seja, é a função identidade em S^1. Portanto, $e_1(M)$ pertence a $\mathrm{Im}(\psi)$, que, por sua vez, é uma subálgebra fechada. Logo, os polinômios e seus limites estão em $\mathrm{Im}(\psi)$. Então $a(M) \in \mathrm{Im}(\psi)$. E temos demonstrado a sobrejetividade do homomorfismo ψ.

Para a demonstração da injetividade, utilizaremos novamente o Teorema 3.1.9. Portanto, temos que definir β e β', ações fortemente contínuas de S^1 em $\mathcal{C}(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ e $\mathcal{A}$ respectivamente.

Para tanto, dado $w \in S^1$, seja $\beta_w = \pi_w$, definido no Lema 2.3.3 e na Definição 2.3.4, no caso em que $\mathcal{A} = \mathcal{C}(X)$, ou seja, $\beta_w : \mathcal{C}(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \to \mathcal{C}(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ é o *-homomorfismo unital tal que:

$$\beta_w((\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (\mathbf{a}_n w^n)_{n\in\mathbb{Z}}, \quad \forall (\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_1(\mathcal{C}(X)).$$

Observe que $\beta_{\overline{w}}$ é o inverso de β_w e que $\beta_w \circ \beta_{w'}((\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (\mathbf{a}_n w^n w'^n)_{n\in\mathbb{Z}} = \beta_{ww'}((\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}})$. E, portanto, β é uma ação de S^1 em $\mathcal{C}(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. E, como é automorfismo, para todo $w \in S^1$, temos $\|\beta_w\| = 1$.

Relembre-se que, pelo que fizemos no parágrafo anterior à Definição 2.3.6, já provamos genericamente que a aplicação $\lambda \mapsto \pi_\lambda(\mathbf{a})$ é contínua. Ou seja, no nosso caso atual, já temos que a ação β é fortemente contínua.

O próximo passo é definir β', ação fortemente contínua de S^1 em $\mathcal{A}$. Lembre-se que $\mathcal{A} \subset B(\mathrm{L}^2(S^1))$. Para cada $w \in S^1$, β'_w será definida através da conjugação com um operador unitário em $\mathrm{L}^2(S^1)$. Por sua vez, para definirmos este operador unitário, definiremos um operador unitário em ℓ_2, e o transportaremos via transformada de Fourier. Utilizando que $\mathcal{F}$, a transformada de Fourier, é um isomorfismo entre $\mathrm{L}^2(S^1)$ e ℓ_2.

Assim sendo, dado $w \in S^1$, seja $U_w : \ell_2 \to \ell_2$ a função definida por:

$$U_w(\mathbf{a}) = (w^j a_j)_{j\in\mathbb{Z}}, \quad \mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2$$

Com cálculos análogos ao que já fizemos diversas vezes no texto, pode-se ver que U_w é linear, contínua, bijetora, ou seja, isomorfismo. Além disso, $U_{ww'} = U_w \circ U_{w'}$.

Veja também que U_w é um operador unitário, uma vez que dados $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \mathbf{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2$, teremos:

$$\langle U_w(\mathbf{a}), U_w(\mathbf{b})\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle w^n a_n, w^n b_n\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle a_n, b_n\rangle = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle.$$

Logo, podemos definir V_w, o operador unitário, em $\mathrm{L}^2(S^1)$, correspondente a U_w através da transformada de Fourier. Ou seja, definimos:

$$V_w = \mathcal{F}^{-1} \circ U_w \circ \mathcal{F}.$$

Observe que também temos $V_{ww'} = V_w V_{w'}$, pois $V_{ww'} = \mathcal{F}^{-1} \circ U_{ww'} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1} \circ U_w \circ U_{w'} \circ \mathcal{F} = \mathcal{F}^{-1} \circ U_w \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} \circ U_{w'} \circ \mathcal{F}$.

Como já dissemos, definiremos β' através da conjugação com operador unitário em $\mathrm{L}^2(S^1)$. É possível imaginar que os operadores unitários $V_w, w \in S^1$, que acabamos de definir, serão utilizados neste intuito. Portanto, vejamos como estes operadores se relacionam com os elementos do tipo $\mathbf{b}(D)$, com $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(X)$, ou da forma $a(M)$, com $a \in \mathcal{C}(S^1)$, que são os geradores de $\mathcal{A}$.

$$V_w \mathbf{b}(D) V_w^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \circ U_w \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} \circ M_{\mathbf{b}} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} \circ U_{\overline{w}} \circ \mathcal{F} =$$

$$= \mathcal{F}^{-1} \circ U_w \circ M_{\mathbf{b}} \circ U_{\overline{w}} \circ \mathcal{F}.$$

Mas, dado $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_2$, temos:

$$U_w \circ M_{\mathbf{b}} \circ U_{\overline{w}}(\mathbf{a}) = U_w \circ M_{\mathbf{b}}((\overline{w}^n a_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = U_w((b_n \overline{w}^n a_n)_{n\in\mathbb{Z}}) =$$

$$= (w^n b_n \overline{w}^n a_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (b_n a_n)_{n\in\mathbb{Z}} = M_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}).$$

Logo, juntando o que obtivemos nas duas últimas equações, temos:

$$V_w \mathbf{b}(D) V_w^{-1} = \mathbf{b}(D). \tag{4.4}$$

Agora, para $a(M)$, temos, dado $f \in \mathbb{C}(S^1)$ (que é denso em $\mathrm{L}^2(S^1)$) e $w, z \in S^1$:

$$V_w f = \mathcal{F} U_w \mathcal{F}^{-1}(f) = F^{-1}((w^n \widehat{f}_n)_{n\in\mathbb{Z}})$$

$$\therefore (V_w f)(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} w^n \widehat{f}_n z^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_n (wz)^n = f(wz).$$

Logo, $(V_w(f))(z) = f(wz)$. E então:

$$(V_w a(M) V_w^{-1} f)(z) = (a(M) V_{\overline{w}} f)(wz) = a(wz)(V_{\overline{w}} f)(wz) =$$

$$= a(wz) f(\overline{w} wz) = a(wz) f(z).$$

E, como $\mathcal{C}(S^1)$ é denso em $\mathrm{L}^2(S^1)$, concluímos que, para toda $f \in \mathrm{L}^2(S^1)$, temos $(V_w a(M) V_w^{-1} f)(z) = a(wz) f(z)$. Definamos τ_w, isomorfismo em $\mathcal{C}(S^1)$, por:

$$\tau_w(a)(z) = a(wz), \quad a \in \mathcal{C}(S^1).$$

A prova de que isso realmente define um isomorfismo fizemos no capítulo anterior (τ_w é o β'_w do Teorema 3.1.10). Então, é claro que $\tau_w(a) \in \mathcal{C}(S^1)$ e, para todo $a \in \mathcal{C}(S^1)$, temos:

$$V_w a(M) V_w^{-1} = \tau_w(a)(M). \tag{4.5}$$

Finalmente, definimos β'_w por:

$$\beta'_w(A) = V_w A V_w^{-1}, \quad A \in \mathcal{A}.$$

Observe, primeiramente, que, $\forall A \in \mathcal{A}$, $\beta'_w(A)$ é contínua, pois trata-se de composição de operadores lineares contínuos. Além disso, temos que β'_w é contínuo, uma vez que $\|\beta'_w(A)\| = \|V_w A V_w^{-1}\| \leq \|V\| \|A\| \|V_w^{-1}\|$.

Os resultados apresentados nas equações (4.4) e (4.5) garantem que β'_w leva os geradores de $\mathcal{A}$ nos geradores de $\mathcal{A}$. Logo, como β'_w é contínuo,

$\mathcal{A}$ é invariante por β'_w, para todo $w \in S^1$. Portanto, podemos dizer que $\beta'_w : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ está bem definido.

Temos que verificar que β'_w é um isomorfismo. Antes, porém, observe que já temos que $\beta'_{ww'}(A) = \beta_w(\beta'_{w'}(A))$, pois $V_{ww'}AV_{ww'} = V_w V_{w'} A V_{w'}^{-1} V_w^{-1}$.

Para a injetividade, observe que se $A, B \in \mathcal{A}$ são tais que $\beta'_w(A) = \beta'_w(B)$, então:

$$V_w A V_w^{-1} = V_w B V_w^{-1} \Rightarrow V_w^{-1} V_w A V_w^{-1} V_w = V_w^{-1} V_w B V_w^{-1} V_w \Rightarrow A = B$$

Falta apenas a sobrejetividade. Pelo que provamos na equação 4.4, temos:

$$\beta'_w(\mathbf{b}(D)) = V_w \mathbf{b}(D) V_w^{-1} = \mathbf{b}(D). \tag{4.6}$$

Ou seja, $\mathbf{b}(D) \in \mathrm{Im}(\beta'_w)$. E ainda, pelo que provamos na equação 4.5, temos que

$$\beta'_w(a(M)) = \tau_w(a)(M). \tag{4.7}$$

Em particular,

$$\beta'_w(e_j(M)) = \tau_w(e_j)(M) = w^j e_j(M) \tag{4.8}$$

Portanto $a(M) \in \mathrm{Im}(\beta'_w)$, pois $\beta'_w(\tau_w^{-1}(a)(M)) = a(M)$. E, como β'_w é um homomorfismo entre C*-álgebras, pelo Teorema 1.2.19, temos que $\mathrm{Im}(\beta'_w)$ é fechada. Logo, $\mathcal{A} \subset \mathrm{Im}(\beta'_w)$, ou seja, β'_w é sobrejetora. Temos, portanto, que β' é ação de S^1 em $\mathcal{A}$.

Vejamos que β' é, também, fortemente contínua.Veja que, pelo que calculamos na equação 4.6, no caso em que $A = \mathbf{b}(D)$, a aplicação $w \mapsto \beta'_w(A)$ é constante, e portanto contínua. Para o caso em que $A = a(M)$, para todo $w, w', z \in \mathbb{C}$ e $f \in \mathrm{L}^2(S^1)$, temos:

$$|\beta'_w(a(M))f(z) - \beta'_{w'}(a(M))f(z)| = |a(wz)f(z) - a(w'z)f(z)|.$$

$$\therefore \|\beta'_w(a(M))f - \beta'_{w'}(a(M))f\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \sup_{z \in S^1} |a(wz) - a(w'z)|.$$

Mas, como $a \in \mathcal{C}(S^1)$, contínua sobre um compacto, temos que a é uniformemente contínua. Assim, o lado direito da igualdade acima fica tão pequeno quanto quisermos. Portanto, a aplicação $w \mapsto \beta'_w(a(M))$ é contínua. E ainda, pela definição da álgebra $\mathcal{A}$, temos que as somas finitas, do tipo $\sum_j \mathbf{b}_{1j}(D)a_{1j}(M)\mathbf{b}_{2j}(D)a_{2j}(M)\cdots \mathbf{b}_{kj}(D)a_{kj}(M)$, formam um conjunto denso de $\mathcal{A}$. E, neste conjunto, pelo que já fizemos, a aplicação $w \mapsto \beta'_w(A)$ é contínua, uma vez que ela é contínua nos geradores, e soma e produto finito de contínuas são operações contínuas. Pelo Lema 2.3.5, concluímos que a ação β' é fortemente contínua.

Logo, para estarmos nas condições do Teorema 3.1.9, basta checarmos a covariância. É o que faremos agora. Utilizaremos os resultados que obtivemos nas equações (4.6) e (4.8). Dado $w \in S^1$ e $(\mathbf{b}_j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \ell_1(\mathcal{C}(X))$:

$$\psi(\beta_w((\mathbf{b}_j)_{j\in\mathbb{Z}}) = \psi((w^j\mathbf{b}_j)_{j\in\mathbb{Z}}) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} w^j\mathbf{b}_j(D)e_j(M),$$

$$\beta'_w(\psi((\mathbf{b}_j)_{j\in\mathbb{Z}})) = \beta'_w\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{b}_j(D)e_j(M)\right) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathbf{b}_j(D)w^je_j(M),$$

$$\therefore \psi(\beta_w((\mathbf{b}_j)_{j\in\mathbb{Z}}) = \beta'_w(\psi((\mathbf{b}_j)_{j\in\mathbb{Z}}).$$

Agora, como $\ell_1(\mathcal{C}(X))$ é denso em $\mathcal{C}(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, e as funções envolvidas são todas contínuas, temos que $\psi(\beta_w(\mathbf{b})) = \beta'_w(\psi(\mathbf{b})), \forall w \in S^1, \forall \mathbf{b} \in \mathcal{C}(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. Ou seja, temos a covariância, e estamos, por fim, nas condições do Teorema 3.1.9.

Portanto, para concluir a injetividade de ψ, basta provar a injetividade dela restrita aos pontos fixos de $\mathcal{C}(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$ por β. Lembre-se que, da demonstração do Teorema 3.1.9, temos que tais pontos fixos, que são chamados de B_0, correspondem à imagem da projeção espectral P_0, dada por:

$$P_0(\mathbf{a}) = \int_{S^1} \beta_w(\mathbf{a})dw.$$

Para $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_1(\mathcal{C}(X))$, temos que:

$$P_0((\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \left(\int_{S^1} \mathbf{a}_n w^n dw\right)_{n\in\mathbb{Z}} = \mathbf{a}_0\delta^0,$$

pois:

$$\int_{S^1} w^n dw = \begin{cases} 1, & se \quad n = 0; \\ 0, & se \quad n \neq 0. \end{cases}$$

Ou seja, de forma análoga ao que provamos genericamente na equação 2.1.

E, como provamos genericamente no Lema 2.3.2, $\mathcal{C}(X)\delta^0$ é fechado em $\mathcal{C}(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. Então, se tivermos $\mathbf{a}$ no fecho de $\ell_1(\mathcal{C}(X))$, que é igual a $\mathcal{C}(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$, teremos também que $P_0(\mathbf{a}) \in \mathcal{C}(X)\delta^0$. Logo $B_0 = \mathcal{C}(X)\delta^0$

E, neste conjunto, é bem simples verificar que ψ é injetora. Pois, se $(\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (\mathbf{b}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in B_0$ é tal que $\psi((\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \psi((\mathbf{b}_n)_{n\in\mathbb{Z}})$, então:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_0(D)e_0(M) = \mathbf{b}_0(D)e_0(M) \Rightarrow \mathbf{a}_0(D) = \mathbf{b}_0(D) \\ \text{e} \\ \mathbf{a}_i = 0 = \mathbf{b}_i \quad \text{para todo} \quad i \neq 0. \end{cases}$$

Mas observe que, da definição, como a transformada de Fourier é um isomorfismo, temos:

$$\mathbf{a}_0(D) = \mathbf{b}_0(D) \Rightarrow M_{\mathbf{a}_0} = M_{\mathbf{b}_0} \Rightarrow \mathbf{a}_0 = \mathbf{b}_0$$

Logo $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. E assim concluímos que ψ é um isomorfismo. □

Portanto, concluímos que $\mathcal{A}$ é isomorfo a $\mathcal{C}(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. O leitor atento possivelmente percebeu que o final desta demonstração é bem similar ao final da demonstração do Teorema 3.1.10. E lá, depois de demonstrado o isomorfismo, vimos a implicação do Teorema 2.3.11 naquele contexto, que resultava no conhecido Teorema de Fejér. E neste contexto? Qual será a implicação do Teorema 2.3.11 neste contexto?

4.3 Somas de Cesàro em $\mathcal{A}$

Vimos, na seção anterior, que o homomorfismo $\psi : \mathcal{C}(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z} \to \mathcal{A}$, que restrito a $\ell_1(\mathcal{C}(X))$ é dado pela fórmula

$$\ell_1(\mathcal{C}(X)) \ni (\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}} \longmapsto \psi((\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{a}_n(D)e_n(M),$$

é um isomorfismo.

De modo análogo ao capítulo anterior, veremos agora qual a implicação do Teorema 2.3.11 para a C*-álgebra $\mathcal{A}$, via o isomorfismo ψ. Diferentemente do capítulo anterior, agora não temos uma fórmula explícita para a inversa de ψ. Por isso, teremos que esmiuçar um pouco mais os detalhes.

Dado $A \in \mathcal{A}$, o Teorema 2.3.11 afirma que $\Gamma_n(\psi^{-1}(A))$ converge em norma para $\psi^{-1}(A)$. Onde

$$\Gamma_n(\psi^{-1}(A)) = \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \Phi_j(\psi^{-1}(A))\delta^j.$$

Lembre-se, ainda, de que $\Phi_j(\mathbf{b})$ é definido como sendo $\Phi_j(\mathbf{b}) = \Phi(\mathbf{b}\star\delta^{-j})$, para todo $\mathbf{b} \in \mathcal{C}(X) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}$. E ainda, Φ é dado por:

$$\Phi(\mathbf{b}) = \int_{S^1} \pi_\lambda(\mathbf{b})d\lambda.$$

E, por sua vez, π_λ é o homomorfismo que restrito à $\ell_1(\mathcal{C}(X))$ apresenta a fórmula:

$$\pi_\lambda((\mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (\lambda^n \mathbf{a}_n)_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Ou seja, π_λ é, nada mais nada menos, do que o isomorfismo β_λ que definimos na demonstração do último Teorema da seção anterior (Teorema 4.2.4).

Portanto, voltando à soma de Cesàro $\Gamma_n(\psi^{-1}(A))$, temos:

$$\psi^{-1}(A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \Phi_j(\psi^{-1}(A))\delta^j.$$

Como ψ é contínua, aplicando-a em ambos os lados, temos:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} \psi \left[\left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \Phi_j(\psi^{-1}(A))\delta^j \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \psi \left[\Phi_j(\psi^{-1}(A))\right] e_j(M).$$

Mas,

$$\psi \left[\Phi_j(\psi^{-1}(A))\right] = \psi \left[\int_{S^1} \beta_w(\psi^{-1}(A)\delta^{-j}) dw \right] = \int_{S^1} \psi(\beta_w(\psi^{-1}(A)\delta^{-j}))dw =$$

$$= \int_{S^1} \beta'_w(\psi(\psi^{-1}(A)\delta^j))dw = \int_{S^1} \beta'_w(A)\beta'_w(\delta^{-j}))dw = \int_{S^1} \beta'_w(A)w^{-j}e_{-j}(M)dw.$$

Portanto, temos:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \int_{S^1} \beta'_w(A)w^{-j}e_{-j}(M)dwe_j(M).$$

Logo, no nosso contexto, o Teorema 2.3.11 implica que, para todo $A \in \mathcal{A}$:

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=-n}^{n} \left(1 - \frac{|j|}{n+1}\right) \int_{S^1} \beta'_w(A)w^{-j}dw.$$

Apêndice A

Unitização de uma C*-álgebra

Vimos no Lema 1.1.17 que, dado uma álgebra de Banach A, construímos uma nova álgebra de Banach $\tilde{A}$, que possui unidade, e contém A. No caso em que A é uma C*-álgebra, a norma definida em $\tilde{A}$ não satisfaz a identidade de C*-álgebra ($\|x^*x\| = \|x\|^2$). Ou seja, não podemos garantir, pelo Lema, que $\tilde{A}$ é uma C*-álgebra. Neste apêndice veremos como sanar este problema. Seguimos o roteiro de um exercício proposto por [15].

De forma análoga ao que foi feito no Lema acima referido, dado A uma C*-álgebra, considere

$$\check{A} = \{(a, \lambda); a \in A, \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Considere, em $\check{A}$, a soma e o produto por escalar usuais em produtos cartesianos. Além disso, dados $x = (a, \lambda), y = (b, \delta) \in \check{A}$, definimos:

$$xy = (ab + \delta a + \lambda b, \lambda\delta);$$

$$x^* = (a^*, \overline{\lambda}).$$

Como as definições de soma e produto são iguais ao feito no Lema 1.1.17, já sabemos que $\check{A}$ com a soma e produto acima definidos é uma álgebra. Para termos uma álgebra com involução, observe que as igualdades $(x + y)^* = x^* + y^*$, $(x^*)^* = x$, $(\lambda x)^* = \overline{\lambda}x^*$, advém diretamente da definição. E, para o produto, temos:

$$(xy)^* = (ab + \delta a + \lambda b, \lambda\delta)^* = (b^*a^* + \overline{\delta}a^* + \overline{\lambda}b^*, \overline{\lambda\delta}) = y^*x^*.$$

Logo, temos que $\breve{A}$ é uma álgebra com involução.

No Lema 1.1.17 já tínhamos uma norma. No entanto, com aquela norma, não conseguimos garantir, para $\breve{A}$, a identidade $\|x^*x\| = \|x\|^2$, ou seja, não garantimos que $\breve{A}$ seja uma C*álgebra. Por exemplo, no caso em que $A = \mathbb{C}$, sendo $x = (1, i)$, temos $\|x^*x\| = 2$ e $\|x\|^2 = 4$.

Portanto, o próximo passo é definirmos uma norma para $\breve{A}$ de modo a garantir que $\breve{A}$ seja uma C*-álgebra. Antes, porém, observe que $(0, 1)$ é uma unidade em $\breve{A}$, e que A está incluído em $\breve{A}$ através da operação $\iota(a) = (a, 0)$, e que existem projeções $\pi' : \breve{A} \to A$ e $\pi : \breve{A} \to \mathbb{C}$ definidas por $\pi'(a, \lambda) = a$ e $\pi(a, \lambda) = \lambda$. Ao longo deste texto, nas ocasiões em que não causar confusão, omitiremos a inclusão e a projeção de $\breve{A}$ em A. Agora, dado $x \in \breve{A}$, sejam

$$|||x|||_{\breve{A}} = \sup\{\|ax\|_A; a \in A, \|a\|_A \leq 1\};$$

$$\|x\|_{\breve{A}} = \max\{|||x|||_{\breve{A}}, |\pi(x)|\}.$$

Provemos que $\|\cdot\|_{\breve{A}}$ é uma norma em $\breve{A}$. Antes, porém, veja que $\forall a \in A$

$$\|a\|_A = \sup\{\|ba\|_A; b \in A, \|b\|_A \leq 1\} = \sup\{\|ab\|_A; b \in A, \|b\|_A \leq 1\}. \tag{A.1}$$

Pois, dados $a, b \in A$, $\|b\|_A \leq 1$, temos:

$$\|ba\|_A \leq \|b\|_A\|a\|_A \leq \|a\|_A;$$

e, fazendo $b = \frac{a^*}{\|a\|_A}$, $\|b\|_A = 1$ e:

$$\|ba\|_A = \frac{\|a^*a\|_A}{\|a\|_A} = \|a\|_A.$$

E a segunda igualdade de (A.1) é provada de forma análoga. Assim sendo, fazendo a inclusão de A em $\breve{A}$, provamos que $|||a|||_{\breve{A}} = \|a\|_A, \forall a \in A$.

Da definição é óbvio que $\|x\|_{\check{A}} \geq 0, \forall x \in \check{A}$. Agora, se $\|x\|_{\check{A}} = 0$, então $|\pi(x)| = 0$ e $|||x|||_{\check{A}} = 0$. Mas $|\pi(x)| = 0$ implica que $x \in A$, e, portanto, $0 = |||x|||_{\check{A}} = \|x\|_A$. Logo $x = 0$.

Além disso, $\|x\|_{\check{A}} = \|x^*\|_{\check{A}}, \forall x \in \check{A}$. Pois $|\pi(x)| = |\pi(x^*)|$, e

$$|||x|||_{\check{A}} = \sup\{\|ax\|_A; a \in A, \|a\|_A \leq 1\} = \sup\{\|(ax)^*\|_A; a \in A, \|a\|_A \leq 1\} =$$

$$= \sup\{\|x^*a^*\|_A; a \in A, \|a\|_A \leq 1\} = \sup\{\|x^*a\|_A; a \in A, \|a\|_A \leq 1\} = |||x^*|||_{\check{A}}.$$

Da definição, facilmente se obtém que $\|\lambda x\|_{\check{A}} = |\lambda|\|x\|_{\check{A}}$, para quaisquer $\lambda \in \mathbb{C}, x \in \check{A}$. Vejamos, agora, as desigualdades. Dados $x, y \in \check{A}$, temos que $|\pi(x+y)| \leq |\pi(x)| + |\pi(y)|$ e

$$|||x+y|||_{\check{A}} = \sup\{\|a(x+y)\|_A; a \in A, \|a\|_A \leq 1\} =$$

$$= \sup\{\|ax\|_A; a \in A, \|a\|_A \leq 1\} + \sup\{\|ay\|_A; a \in A, \|a\|_A \leq 1\} = |||x|||_{\check{A}} + |||y|||_{\check{A}}.$$

$$\therefore \|x+y\|_{\check{A}} \leq \|x\|_{\check{A}} + \|y\|_{\check{A}}.$$

Além disso, $|\pi(xy)| = |\pi(x)||\pi(y)|$ e

$$|||xy|||_{\check{A}} = \sup\{\|axy\|_A; a \in A, \|a\|_A \leq 1\} =$$

$$= \sup\{\|axyb\|_A; a, b \in A, \|a\|_A \leq 1, \|b\|_A \leq 1\} \leq$$

$$\leq \sup\{\|ax\|_A\|yb\|_A; a, b \in A, \|a\|_A \leq 1, \|b\|_A \leq 1\} = |||x|||_{\check{A}}|||y|||_{\check{A}}.$$

E, portanto, $\check{A}$ com a norma acima definida é uma álgebra normada com involução.

Para a C*-identidade, veja que

$$|||x|||^2_{\check{A}} = \sup\{\|ax\|^2_A; a \in A, \|a\|_A \leq 1\} = \sup\{\|ax(ax)^*\|_A; a \in A, \|a\|_A \leq 1\} \leq$$

$$\leq \sup\{\|axx^*\|_A\|a\|_A; a \in A, \|a\|_A \leq 1\} \leq |||x^*x|||_{\check{A}}.$$

Logo, para termos uma C*-álgebra, falta apenas provar que $\check{A}$ é completo. Para tanto seja $x_n = (a_n, \lambda_n)$ uma sequência de Cauchy em $\check{A}$. Dado $\varepsilon > 0$, pela própria definição da norma em $\breve{A}$, temos que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para $m, n > N$:

$$|\lambda_m - \lambda_n| < \varepsilon \tag{A.2}$$

$$|||x_m - x_n|||_{\breve{A}} < \varepsilon \tag{A.3}$$

Da equação A.2, temos que a sequência formada pelos λ_n é de Cauchy, portanto convergente. Note, agora, que

$$|||x_n - x_m|||_{\breve{A}} = \sup\{\|(a,0)(a_m - a_n, \lambda_m - \lambda_n)\|_A; a \in A, \|a\|_A \leq 1\} =$$

$$= \sup\{\|a(a_m - a_n) + a(\lambda_m - \lambda_n)\|_A; a \in A, \|a\|_A \leq 1\}.$$

Portanto, das equações (A.3) e (A.1), e da equação acima, temos

$$\|a_m - a_n\|_A = \sup\{\|a(a_m - a_n)\|_A; a \in A, \|a\| \leq 1\} \leq$$

$$\leq \sup\{\|a(a_m - a_n) + a(\lambda_m - \lambda_n)\|_A; a \in A, \|a\|_A \leq 1\} +$$

$$+ \sup\{\|a(\lambda_m - \lambda_n)\|_A; a \in A, \|a\| \leq 1\} =$$

$$= |||x_m - x_n|||_{\breve{A}} + |\lambda_m - \lambda_n| < 2\varepsilon,$$

ou seja, temos que a sequência formada pelos a_n é de Cauchy, portanto convergente. Logo, a sequência formada pelos x_n é convergente, e assim temos que $\breve{A}$ é completo.

Assim demonstramos que, dada uma C*-álgebra A, existe uma unitização $\breve{A}$, que é uma C*-álgebra com unidade e que contém A.

Apêndice B

Integração

Durante o decorrer desta dissertação, encontramos, várias vezes, a integral da forma

$$\int_{S^1} f(w)dw,$$

onde f é uma função de $S^1 = \{w \in \mathbb{C}; |w| = 1\}$ em um espaço de Banach E. Nosso objetivo, neste apêndice, é apresentar a forma como estamos entendendo tais integrais, e também uma propriedade que utilizamos, implicitamente, várias vezes.

Nossa apresentação é fortemente inspirada na referência [10]. Inclusive, no próprio prefácio do livro, é dito que a teoria nele apresentada poderia ser desenvolvida em espaços normados ao invés de em $\mathbb{R}^n$. Mas optou-se por $\mathbb{R}^n$ por motivos psicológicos.

Embora nossas funções estejam definidas em S^1, veremos a definição de integral para funções definidas em um intervalo real. E isso porque podemos enxergar uma função f, definida em S^1, como uma função do argumento, ou seja, $f : [-\pi, \pi] \to E$.

Portanto, seja $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo real. Uma *partição* do intervalo $[a, b]$ é um conjunto

$$P = \{t_0, t_1, ..., t_k\}$$

tal que $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b$. Definimos

$$|P| = \max_{i=0,...,k-1} t_{i+1} - t_i.$$

O conjunto $\mathcal{P}$ de todas as partições do intervalo $[a, b]$ é parcialmente ordenado com a relação de inclusão.

Dados uma função $f : [a, b] \to E$, E espaço de Banach, e uma partição $P = \{t_0, t_1, ...t_k\}$ do intervalo $[a, b]$, definimos a *soma de Riemann*

$$\Sigma(f, P) = \sum_{i=0}^{k-1} (t_{i+1} - t_i) f(t_i).$$

E então, dizemos que $v \in E$ é a integral de $f : [a, b] \to E$ quando, dado $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que $|P| < \delta \Rightarrow \|v - \Sigma(f, P)\| < \varepsilon$. E escrevemos

$$v = \int_a^b f(t)dt.$$

Uma condição suficiente para a integral de $f : [a, b] \to E$ existir é f ser contínua em $[a, b]$. A prova desta afirmação pode ser encontrada no decorrer da primeira seção sobre integrais (6.1) do livro [10]. Novamente, lá é feita no contexto do $\mathbb{R}^n$. Entretanto, pode ser traduzida para o nosso contexto, assim como fizemos com as definições acima.

Durante o nosso texto utilizamos várias vezes que, dado $f : [a, b] \to E$, e T um operador linear em E,

$$T\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b T(f(t))dt.$$

E, para verificar tal propriedade, basta ver que o mesmo vale para toda soma de Riemann, ou seja, dado P uma partição de $[a, b]$, temos que $T(\Sigma(f, P)) = \Sigma(Tf, P)$.

No nosso caso, seja $f : S^1 \to E$. Como $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, existe $\tilde{f} : [-\pi, \pi] \to E$ tal que, fazendo $z = e^{i\theta}$, temos $f(z) = \tilde{f}(\theta)$. Assim, definimos:

$$\int_{S^1} f(z)dz = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(\theta)d\theta.$$

O coeficiente $1/2\pi$ foi colocado apenas para que tenhamos $\int_{S^1} dz = 1$. Para mais detalhes, consultar [10] ou [16].

Referências Bibliográficas

[1] AHLFORS, Lars V. *Complex Analysis.* 3 ed. McGraw-Hill Book Company, 1979.

[2] CONWAY, John B. *A Course in Functional Analysis.* Springer-Verlag, 1985.

[3] CORDES, Heinz Otto. *Spectral Theory of Linear Differential Operators and Comparison Algebras.* Cambridge University Press, 1987.

[4] DAVIDSON, Kenneth R. *C*-Algebra by Example.* Fields Institute Monograph 6. American Mathematical Society, 1996.

[5] EXEL, Ruy. *Circle actions on C*-algebras, partial automorphisms and a generalized Pimsner-Voiculescu exact sequence.* J. Funct. Analysis, **122** (1994), 361–401.

[6] EXEL, Ruy. *Uma introdução às C*-álgebras.* Minicurso ministrado na Primeira Bienal de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Universidade Federal de Minas Gerais, 2002.

[7] FIGUEREDO, Djairo Guedes de. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais.* 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[8] GERMANO, Geilson Ferreira. *Uma Introdução a Álgebras de Banach e C*-Álgebras* . 2014. (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, Paraíba. 2014.

[9] KREYSZIG, Erwin. *Introdutory Functional Analysis With Applications.* John Wiley & Sons. 1989.

[10] LIMA, Elon Lages. *Análise no Espaço* $\mathbb{R}^n$. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[11] LOPES, Wanda Aparecida. *O Teorema de Stone-Weierstrass e Aplicações.* 2009. (Mestrado em Matemática) – Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Minas Gerais. 2009.

[12] MELO, Severino Toscano do R. *Norm closure of classical pseudodifferential operators does not contain Hörmander's class.* In: Geometric analysis of PDE and several complex variables (S. Chanillo et al., eds), Contemporary Mathematics 368, pp. 329-336, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[13] MURPHY, Gerard J. *C*-Algebra and Operator Theory.* Academic Press, 1990.

[14] PONTE, Tadeu Aparecido P. *Produto Cruzado de C*-Álgebras por* $\mathbb{Z}$ *e K-Teoria: A Sequência Exata de Pimsner Voiculescu.* 2005. (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo. 2005.

[15] RØRDAM, M., LARSEN, F., LAUSTEN, N. J. *An Introduction to K-Theory for C*-Algebras* London Mathematical Society Student Texts 49. Cambridge University Press. 1ed. 2000.

[16] RUDIN, Walter. *Real and Complex Analysis.* 3 ed. McGRAW-HILL Series in Higher Mathematics, 1987.