

# Representações de álgebras de Kac-Moody

Fernando Júnior Soares dos Santos

TESE APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO  
DE  
DOUTOR EM CIÊNCIAS

Programa: Matemática

Orientadora: Prof. Dra. Iryna Kashuba

Coorientador: Prof. Dr. Vyacheslav Futorny

O autor recebeu auxílio financeiro da FAPESP durante o desenvolvimento deste trabalho e todo apoio da UFAM.

São Paulo, Abril de 2024

# Representações de álgebras de Kac-Moody

Esta versão da tese contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 07/05/2024. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Iryna Kashuba (orientadora) - IME-USP
- Prof. Dr. Germán Alonso Benitez Monsalve - IME-USP
- Prof. Dr. Luis Enrique Ramírez - UFABC
- Prof. Dr. Oscar Armando Hernandez Morales - U. Porto
- Prof. Dr. Luan Pereira Bezerra - SUSTech

# Agradecimentos

Com profundo sentimento de gratidão, desejo expressar meus mais sinceros agradecimentos:

À Deus, fonte da vida e do universo, cuja presença transcendental permeia todas as coisas e nos concede a oportunidade de existir e prosperar.

À minha querida mãe, Raimunda dos Santos (D. Ray), e ao meu dedicado e grande amigo/pai, Amaro Rodrigues, cujo apoio incondicional e incentivo foram fundamentais em todos os momentos desta jornada acadêmica. Aos meus amados irmãos, cujo amor e encorajamento foram pilares essenciais para superar desafios.

À minha companheira de vida e confidente, Jamilly Stefany, cujo amor, apoio e compreensão foram a luz que iluminou os caminhos desta jornada acadêmica. Com toda certeza, sem o seu apoio, nada disso seria possível.

Às minhas preciosas jóias, Stephanny, Jonnata e Maria Júlia, cuja presença iluminou cada passo desta jornada, e cujo sorriso foi minha inspiração diária, agradeço de todo coração. Seu amor e apoio foram minha força motriz, impulsionando-me a alcançar novos patamares. Que este trabalho seja dedicado a vocês, pois são vocês a minha maior riqueza e motivação para seguir em frente.

À minha estimada orientadora, Prof. Dr<sup>a</sup>. Iryna Kashuba, e ao meu querido coorientador, Prof. Dr. Vyacheslav Futorny, desejo expressar minha gratidão profunda e sincera. Sem a orientação precisa, os conselhos sábios e o incentivo constante que me forneceram, esta jornada acadêmica não teria sido possível.

Aos amigos, cujo apoio inabalável, contribuições valiosas e momentos de descontração foram um verdadeiro bálsamo ao longo desta jornada. Em especial, aos amigos de seminários de pesquisa, André Silva, Oscar Morales e Marcela Alves, cuja amizade e colaboração enriqueceram não apenas minha vida acadêmica, mas também minha jornada pessoal. Suas trocas de ideias, apoio mútuo e camaradagem foram fundamentais para o meu crescimento e aprendizado.

À Universidade Federal do Amazonas (UFAM), onde trabalho, agradeço pelo suporte constante e dedicação em impulsionar o avanço acadêmico de seus docentes.

Por fim, agradeço à FAPEAM pelo apoio financeiro que viabilizou a realização deste trabalho e contribuiu para o avanço da ciência e do conhecimento.

Muito obrigado!!!



# Resumo

SANTOS, F. J. S. **Representações de álgebras de Kac-Moody**. 2024. 123 f. Tese de Doutorado - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2024.

Neste trabalho, apresentamos uma técnica geral para a construção de novos módulos de peso irredutíveis para álgebras de Kac-Moody afins, utilizando a técnica da indução parabólica. Nosso objetivo principal foi superar as restrições, vistas em [FK18], que limitavam os módulos induzidos, oferecendo uma visão unificada e generalizada dessas estruturas para certas categorias. Exploramos a aplicação da indução parabólica em situações onde o fator Levi de uma subálgebra parabólica é infinito-dimensional e a carga central não é nula. Os resultados principais deste trabalho incluem um critério de irredutibilidade para o  $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulo  $M_a(V)$ , em que  $V$  é um  $(G+H)$ -módulo de peso irredutível com carga central não nula, Teorema 3.2.15. Além disso, estabelecemos que a indução parabólica define um funtor  $\mathbb{I}^\lambda$  que preserva a irredutibilidade para a categoria dos  $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulos de peso. Outro resultado significativo é a demonstração da irredutibilidade dos  $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulos de Verma imaginário generalizado  $M_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}(V)$  com carga central não nula, em que  $V$  é um  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -módulo de peso, tensor e irredutível com carga central não nula, Teorema 3.3.2, fornecendo uma ferramenta valiosa para a construção de novos módulos irredutíveis em álgebras de Kac-Moody afins. Esses resultados representam avanços importantes na teoria dos módulos de álgebras de Kac-Moody. A abordagem desenvolvida neste trabalho tem o potencial de abrir novas perspectivas de pesquisa e promover o entendimento mais profundo de outras estruturas.

**Palavras-chave:** Álgebras de Kac-Moody afins, Indução Parabólica, Módulo de Verma Imaginário Generalizado.



# Abstract

SANTOS, F. J. S. **Representation of Kac-Moody algebras**. 2024. 123 f. Tese de Doutorado - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2024.

In this work, we develop a general technique for constructing new irreducible weight modules for affine Kac-Moody algebras using the parabolic induction. Our main goal was to overcome the restrictions, as seen in [FK18], that limited induced modules, offering a unified and generalized view of these structures for certain categories. We explore the application of parabolic induction in situations where the Levi factor of a parabolic subalgebra is infinite-dimensional and the central charge is nonzero. The main results of this work include a criterion of irreducibility for the  $\widehat{\mathfrak{g}}$ -module  $M_a(V)$ , where  $V$  is an irreducible weight module with nonzero central charge, Theorem 3.2.15. Furthermore, we establish that parabolic induction defines a functor  $\mathbb{I}^\lambda$  that preserves irreducibility for the category of weight  $\widehat{\mathfrak{g}}$ -modules. Another significant result is the demonstration of the irreducibility of generalized imaginary Verma modules  $M_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}(V)$  with nonzero central charge, where  $V$  is a weight, tensor, and irreducible  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -module with nonzero central charge, Theorem 3.3.2, providing a valuable tool for constructing new irreducible modules in affine Kac-Moody algebras. These results represent important advances in the theory of modules of affine Kac-Moody algebras. The approach developed in this work has the potential to open new research perspectives and promote a deeper understanding of other structures.

**Keywords:** Affine Kac-Moody Algebras, Parabolic Induction, Generalized Imaginary Verma Module.



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Álgebras de Kac-Moody afim</b>	<b>9</b>
1.1 Introdução às álgebras de Kac-Moody . . . . .	9
1.2 Álgebras de loop e suas extensão central . . . . .	26
1.3 Álgebra de Kac-Moody afim como extensão central de álgebra de loop . . . . .	28
1.4 Sistema de raízes afim e suas propriedades . . . . .	31
1.5 Álgebras de Heisenberg e sua relação com álgebras de Kac-Moody afim . . . . .	43
<b>2 Quase partições e subálgebras parabólicas</b>	<b>47</b>
2.1 Notações iniciais . . . . .	47
2.2 Quase partição . . . . .	48
2.3 Subálgebras parabólicas . . . . .	59
2.4 Módulos do tipo Verma generalizado . . . . .	60
<b>3 Módulos de Verma imaginário</b>	<b>65</b>
3.1 Funtor (indução) imaginário . . . . .	65
3.2 Irredutibilidade de módulos de loop generalizado . . . . .	67
3.3 Irredutibilidade de módulos de Verma imaginário generalizado . . . . .	82
<b>A Álgebras de Lie semissimples</b>	<b>85</b>
A.1 Definições e exemplos de álgebras de Lie . . . . .	85
A.2 Álgebras de Lie solúveis e semissimples . . . . .	89
A.3 Soma direta e representações de álgebras de Lie . . . . .	94
A.4 Subálgebras de Cartan . . . . .	97
A.5 Sistemas Simples de Raízes, Subálgebras de Borel/Parabólicas e Matriz de Cartan . . . . .	104
A.6 Álgebras envolventes em Álgebra de Lie . . . . .	112
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>117</b>



# Introdução

A matemática é um vasto, e por muitas das vezes intrincado, universo de teorias, estruturas e conceitos que podem se entrelaçar de maneiras surpreendentes. Uma das áreas mais fascinantes e profundas da matemática é a teoria de Lie, que por sua vez, desempenha um papel fundamental em diversos campos, desde a física teórica até a matemática pura. Dentro dessa teoria, existem objetos muito importantes chamados álgebras de Kac-Moody. Essas álgebras surgem como um tópico particularmente intrigante e abstrato, proporcionando um terreno muito fértil para a exploração e compreensão das simetrias e estruturas profundas a fenômenos naturais e abstratos.

Para embarcar nessa jornada sobre essas álgebras, é necessário primeiro entendermos sobre a base da teoria de Lie, o que chamamos atualmente de álgebras de Lie. Essa teoria foi desenvolvida pelo matemático norueguês S. Lie no final do século XIX, em que é um ramo da matemática que estuda as propriedades de simetria contínua e a interação entre transformações suaves/contínuas que formam uma estrutura de grupos a qual conhecemos atualmente como grupos de Lie. As álgebras de Lie, por outro lado, são espaços vetoriais munidos de uma operação chamada de comutador, o qual é responsável por extrair informações sobre a estrutura do grupo de Lie associado.

Dentro do vasto cenário de pesquisa sobre álgebras de Lie, as álgebras de Kac-Moody ocupam um lugar muito especial. Elas foram introduzidas, independentemente, pelo matemático russo V. Kac e pelo matemático canadense R. Moody [Kac87] na década de 1960 como uma generalização dos conceitos de álgebras de Lie semissimples de dimensão finita. Uma característica distintiva das álgebras de Kac-Moody é a sua natureza infinitesimal, pois enquanto as álgebras de Lie clássicas têm dimensões finitas, as álgebras de Kac-Moody podem ser de dimensão infinita, o que as tornam objeto matemático bastante desafiadores para os pesquisadores.

Um módulo chave das álgebras de Kac-Moody é o chamado módulo de Verma. Na década de 1960, o matemático indiano D. Verma, juntamente com outros matemáticos, como o matemático indiano H. Chandra, formalizaram o conceito de módulo de Verma, e foi a partir desse momento que a teoria de módulos de Verma ganhou grande destaque como uma ferramenta fundamental para estudar as álgebras de Lie complexas e suas representações. Uma década depois, em 1970, os matemáticos israelenses J. Bernstein e D. Kazhdan introduziram a categoria  $\mathcal{O}$  para as álgebras de Lie semissimples complexas,

a qual possui propriedades especiais e contém muitos módulos interessantes, em particular os módulos de Verma clássicos. O estudo de módulos de Verma e a categoria  $\mathcal{O}$  continuou a se desenvolver, com matemáticos explorando suas propriedades em diferentes contextos, como teoria de geometria algébrica e física teórica. Destacamos o trabalho de grande importância dos matemáticos J. Bernstein, I. Gelfand e S. Gelfand, o qual destacamos o teorema de BGG, nomeado em homenagem aos seus nomes, que descreve a estrutura de módulos de Verma. Esse teorema teve um impacto profundo no campo da álgebra de Lie, marcando o início de uma série de avanços significativos na teoria de representações. Além disso, destacamos a contribuição seminal de V. Kac em [Kac87], onde ele investigou os módulos de Verma clássicos  $M(\lambda) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{b}}_{\text{st}})} \mathbb{C}$  para álgebras de Kac-Moody afim, que são módulos induzidos considerando a subálgebra de Borel standard  $\widehat{\mathfrak{b}}_{\text{st}}$ . Esses módulos são exemplos de módulos de peso máximo sobre  $\widehat{\mathfrak{g}}$ , com  $\lambda$  como seu peso máximo. A análise desses módulos conduziu a uma série de proposições fundamentais:

**Proposição 0.0.1** ([Kac87, Proposição 9.2, p. 146]). *Sejam  $\widehat{\mathfrak{g}}$  uma álgebra de Kac-Moody e  $H$  uma subálgebra de Cartan. Então:*

- a) *Para qualquer  $\lambda \in H^*$  existe um único, a menos de isomorfismo, módulo de Verma  $M(\lambda)$ .*
- b) *Considerado como um  $U(\widehat{\mathfrak{n}}_-)$ -módulo,  $M(\lambda)$  é um submódulo livre de posto 1 gerado pelo vetor de peso máximo.*
- c)  *$M(\lambda)$  possui um único submódulo maximal próprio  $M'(\lambda)$ .*

Através dessa proposição, pelo item c), dentre os módulos com peso máximo  $\lambda$ , existe um único irredutível  $L(\lambda) = M(\lambda)/M'(\lambda)$ , seguindo a classificação dos módulos irredutíveis da categoria  $\mathcal{O}$ .

**Proposição 0.0.2** ([Kac87, Proposição 9.3, p. 148]). *Seja  $V$  um módulo não nulo da categoria  $\mathcal{O}$ . Então:*

- a)  *$V$  contém um vetor de peso  $v$ , tal que  $\widehat{\mathfrak{n}}_+ v = 0$ .*
- b) *As seguintes condições são equivalentes:*
  - i)  *$V$  é irredutível;*
  - ii)  *$V$  é um módulo de peso máximo e qualquer vetor primitivo de  $V$  é um vetor de peso máximo;*
  - iii)  *$V \simeq L(\lambda)$  para algum  $\lambda \in H^*$ .*

O que nos leva a concluir que

Obviamente,  $M(\lambda)$  é irredutível se, e somente se,  $M(\lambda) \simeq L(\lambda)$ .

Na década de 1990, os matemáticos V. Futorny e H. Saifi deram contribuições significativas ao estudo das representações de álgebras de Kac-Moody, com foco especial nos módulos do tipo Verma [FS93]. Os módulos do tipo Verma são blocos fundamentais no estudo das representações de álgebras de Kac-Moody. Eles são construídos a partir de um vetor também chamado de vetor de peso máximo, como no caso de módulos de Verma clássico. Esses módulos são essenciais para compreender as estruturas internas das representações dessas álgebras. Esse trabalho contribuiu para o desenvolvimento desse campo e ampliou o entendimento das propriedades dessas representações fundamentais.

No ano de 1994, V. Futorny contribuiu significativamente para o campo das representações de álgebras de Kac-Moody, particularmente com o estudo dos módulos de Verma imaginários  $\bar{M}(\lambda) = U(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\hat{\mathfrak{b}}_{\text{nat}})} \mathbb{C}$ , que também são módulos induzidos, mas agora considerando a subálgebra de Borel imaginária (natural) [Fut94]. O conceito de módulos de Verma imaginários representa uma extensão e uma generalização das ideias clássicas relacionadas aos módulos de Verma clássicos. Enquanto os módulos de Verma clássicos estão associados a álgebras de Lie complexas, os módulos de Verma imaginários levam em consideração uma perspectiva mais abrangente. O foco principal nesse trabalho de V. Futorny, estava na análise das propriedades e estruturas dos módulos de Verma imaginários, bem como na descoberta de novas representações irredutíveis para álgebras de Kac-Moody afins, estabelecendo assim um critério de irredutibilidade para esses módulos de Verma imaginários, o que segue abaixo do trabalho visto em [Fut94]:

**Teorema 0.0.3** ([Fut94, Teorema 1, p. 216]). *Sejam  $\hat{\mathfrak{g}}$  uma álgebra de Kac-Moody afim,  $H$  uma subálgebra de Cartan de  $\hat{\mathfrak{g}}$ ,  $\lambda \in H^*$  e  $c$  um elemento central de  $\hat{\mathfrak{g}}$ . O módulo de Verma imaginário  $\bar{M}(\lambda)$  é irredutível se, e somente se,  $\lambda(c) \neq 0$ .*

Nesse mesmo ano, o matemático B. Cox fez independentemente um trabalho sobre módulos de Verma induzidos da subálgebra de Borel não-standard [Cox94]. O foco principal desse trabalho era a investigação de módulos de Verma induzidos a partir de subálgebras de Borel não-standard em álgebras de Kac-Moody. Isso envolveu uma análise detalhada das propriedades desses módulos e como eles diferem dos módulos de Verma induzidos por subálgebras de Borel standard. A escolha de subálgebras de Borel não-convencionais acrescenta complexidade ao estudo das representações e, portanto, requer técnicas e abordagens específicas para entender suas propriedades. Isso ressalta a natureza rica e diversificada das representações das álgebras de Kac-Moody, bem como a importância de considerar subálgebras de Borel não-standard para uma compreensão abrangente das estruturas envolvidas. Nesta investigação, analisou-se os módulos  $M_{\hat{\mathfrak{m}}}(F) = U(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\hat{\mathfrak{m}})} F$ , em que  $F$  é um submódulo quociente de  $M_{\hat{\mathfrak{m}}}(\lambda)$ , onde  $\hat{\mathfrak{m}} = (\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{m}) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ , e  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}_+$  é a subálgebra reductiva com  $\mathfrak{m}_{\pm} = \bigoplus_{\alpha \in \hat{\Delta}_{\pm}^X} \mathfrak{g}_{\alpha}$  da álgebra de Lie adjacente  $\hat{\mathfrak{g}}$ , em que  $X$  é um subconjunto das raízes simples  $\Pi$  de  $\hat{\mathfrak{g}}$ . Este estudo nos proporcionou o seguinte critério de irredutibilidade conforme apresentado em [Cox94]:

**Teorema 0.0.4** ([Cox94, Teorema 4.6, p. 290]). *Sejam  $\widehat{\mathfrak{g}}$  uma álgebra de Kac-Moody afim,  $H$  uma subálgebra de Cartan de  $\widehat{\mathfrak{g}}$ ,  $\lambda \in H^*$  e  $c$  um elemento central de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  com  $\lambda(c) \neq 0$ . O módulo de Verma induzido  $M_{\widehat{\mathfrak{m}}}(F)$  é irreduzível se, e somente se,  $F$  é irreduzível.*

No ano de 1997, V. Futorny dedicou-se à investigação dos módulos do tipo Verma, que são módulos induzidos  $M_{\widehat{\mathfrak{b}}}(\lambda) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{b}})} \mathbb{C}$ , para uma subálgebra de Borel de subálgebras parabólicas de conjuntos parabólicos. Seu trabalho foi uma contribuição significativa ao estudo das subálgebras parabólicas de maneira geral, conforme detalhado em [Fut97], onde ele explorou as representações das álgebras de Kac-Moody afins. Esse trabalho inovador abriu diversas portas para pesquisas futuras.

Nos anos 2000, especificamente em 2013, os matemáticos V. Bekkert e V. Futorny, junto com as matemáticas G. Benkart e I. Kashuba, realizaram uma contribuição significativa no campo das representações [BBFK13]. Seu foco de pesquisa concentrou-se nos módulos de Verma  $\varphi$ -imaginários  $M_{\varphi}(\lambda) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{b}}_{\text{nat}}^{\varphi})} \mathbb{C}$ , que são módulos induzidos da subálgebra de Borel  $\varphi$ -imaginária. Aqui,  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \{\pm\}$  é uma função arbitrária que desempenha um papel crucial na identificação das condições nas quais esses módulos são irreduzíveis. Esse trabalho resultou em um critério de irreduzibilidade detalhado em [BBFK13].

**Corolário 0.0.5** ([BBFK13, Corolário 5.7, p. 297]). *Sejam  $\widehat{\mathfrak{g}}$  uma álgebra de Kac-Moody afim,  $H$  uma subálgebra de Cartan de  $\widehat{\mathfrak{g}}$ ,  $\lambda \in H^*$  e  $c$  um elemento central de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  com  $\lambda(c) \neq 0$ , então o módulo de Verma  $\varphi$ -imaginário  $M_{\varphi}(\lambda)$  é irreduzível.*

Nesses estudos destacados anteriormente, podemos perceber que a classe de álgebras de Kac-Moody com maior número de aplicações é a classe de álgebras de Kac-Moody afim, e que o problema principal nesse estudo é a classificação dos módulos de peso irreduzíveis estas álgebras. Os casos que comentamos anteriormente, envolvem módulos de peso máximo, módulos de Verma, módulos de Verma imaginários, módulos de  $\varphi$ -Verma, módulos de Verma induzidos e entre outros. O que podemos destacar nesses estudos é que todos esses módulos citados anteriormente podem ser obtidos usando a indução parabólica de uma subálgebra de Borel ou uma subálgebra parabólica [Fut97], falaremos adiante um pouco mais sobre isso.

Em relação as subálgebras de Borel, sua descrição foi obtida em trabalhos [JK85] e também em [Fut92], enquanto as subálgebras parabólicas foram descritas em [Fut92]. Em síntese, no caso afim, ao contrario do caso finito, existem dois tipos de subálgebras parabólicas: aquelas cujas componentes de Levi tem dimensão finita e aquelas com a componente de Levi de dimensão infinita, o que chamamos atualmente de parabólicas do tipo I e tipo II ([Fut97]). O primeiro caso é bem estudado e nos permite a descrição de quociente irreduzível. Por exemplo, a teoria de módulos de tipo Verma (induzidos de uma subálgebra de Borel) foi desenvolvida por V. Futorny no trabalho [Fut92]. Por outro lado o caso quando a componente de Levi tem a dimensão infinita (tipo II) é

bem mais complicado pois os módulos são os induzidos de somas de subálgebras afim e subálgebra de Heisenberg. Tais módulos tem subespaços de peso de dimensão infinita (todos ou parte). Podemos destacar alguns exemplos de módulos com todos os subespaços de peso de dimensão infinita que foram obtidos por G. Benkar, V. Bekkert, I. Kashuba e V. Futorny [BBFK13] e no trabalho [FK18].

Os resultados principais dos artigos mencionados no parágrafo anterior, estabelecem a equivalência de certas categorias de módulos para a álgebra de Kac-Moody afim dada e de sua subálgebra parabólica quando o elemento central da álgebra age sem autovalor zero. Algumas generalizações deste resultado foram obtidos nos trabalhos recentes [FK14], [FK18]. Estes resultados incluem todos os casos conhecidos mas não cobrem todos os módulos induzidos. Ao mesmo tempo, existe a conjectura de V. Futorny e I. Kashuba de que de fato tem a equivalência de categorias quando a componente de Levi da subálgebra parabólica tem dimensão infinita e quando o elemento central da álgebra age sem autovalor zero. A demonstração desta conjectura, proposta no artigo [FK18], foi nosso maior desafio para certos módulos. Um dos resultados principais do nosso trabalho, que pode ser encontrada em [GKMOS22], mostram que os funtores de indução preservam irreduzibilidade no caso em que a subálgebra parabólica é do tipo II.

O cerne desses artigos citados anteriormente reside no estabelecimento da equivalência entre certas categorias de módulos para a álgebra de Kac-Moody afim e sua subálgebra parabólica, no caso em que o elemento central da álgebra não atua com autovalor zero. A seguinte exposição engloba uma análise substancial da trajetória percorrida até a consecução do resultado primordial deste trabalho.

Para uma álgebra de Lie afim  $\widehat{\mathfrak{g}}$  com uma subálgebra de Cartan fixada  $H$  consideremos uma subálgebra parabólica  $\widehat{\mathfrak{p}}$ . Então  $\widehat{\mathfrak{p}}$  pode ser decomposta da seguinte forma:

$$\widehat{\mathfrak{p}} = \widehat{\mathfrak{l}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}},$$

onde  $\widehat{\mathfrak{l}}$  é o fator de Levi e  $\widehat{\mathfrak{u}}$  é o nilradical. Vamos assumir que  $\widehat{\mathfrak{l}} = G + H$ , onde  $G$  é a subálgebra de Heisenberg de  $\widehat{\mathfrak{g}}$ , isto é, a subálgebra gerada por todos os subespaços de raízes imaginárias. A subálgebra de Heisenberg  $G$  tem uma  $\mathbb{Z}$ -gradação natural determinada por raízes imaginárias, equivalentemente pela ação adjunta de um certo elemento  $d \in H$  (derivação grau). Seja  $c \in H$  o elemento central de  $\widehat{\mathfrak{g}}$ . Se  $V$  é um  $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulo (respectivamente  $G$ -módulo) com uma ação escalar de  $c$  então o escalar correspondente é chamado de carga central de  $V$ .

Para qualquer  $\lambda \in H^*$  e um  $G$ -módulo  $\mathbb{Z}$ -graduado  $V$  com carga central  $\lambda(c)$ , obtemos uma estrutura de  $(G + H)$ -módulo de peso em  $V$  com ação escalar de  $d$  respeitando a graduação. Definindo  $\widehat{\mathfrak{u}} \cdot V = 0$  obtemos uma estrutura de  $\widehat{\mathfrak{p}}$ -módulo em  $V$ . Então a indução parabólica define para cada  $\lambda \in H^*$  o funtor  $\mathbb{I}^\lambda$  da categoria dos  $G$ -módulos  $\mathbb{Z}$ -graduados com carga central  $\lambda(c) = a$  para a categoria dos  $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulos de peso. Nesta

direção, o primeiro resultado desta tese (Teorema 3.2.15) generaliza o [FK18, Corolário 3] o qual afirma:

**Teorema:** Seja  $V$  um  $(G + H)$ -módulo de peso irredutível e  $a = \lambda(c) \neq 0$ . Então o  $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulo  $M_a(V)$  é irredutível onde  $a$  é o valor de carga central. Em particular, o funtor  $\mathbb{I}^\lambda$  preserva a irredutibilidade.

E como consequência, temos mais um resultado (Corolário 3.2.17), onde afirma:

**Corolário:** Seja  $\widehat{\mathfrak{p}} = \widehat{\mathfrak{l}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}$  uma subálgebra parabólica de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  do tipo II e  $\widehat{\mathfrak{l}} = G' + H$ , onde  $G'$  é uma subálgebra de  $G$ . Seja  $V$  um  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -módulo de peso irredutível de carga central  $a = \lambda(c) \neq 0$ . Então  $M_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}(V)$  é irredutível e consequentemente a restrição do funtor  $\mathbb{I}_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}$  para a categoria dos  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -módulos de peso com carga central  $a$  preserva irredutibilidade.

O Teorema 3.2.15 serve como passo chave para mostrar os resultados que darão a irredutibilidade de módulos de Verma imaginários generalizados com carga central não nula. Seja  $\widehat{\mathfrak{p}} = \widehat{\mathfrak{l}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}$  uma subálgebra parabólica de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  com uma subálgebra de Levi de dimensão infinita  $\widehat{\mathfrak{l}}$ . Então  $\widehat{\mathfrak{l}} = \widehat{\mathfrak{l}}^0 + G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp$ , onde  $\widehat{\mathfrak{l}}^0$  é a subálgebra de Lie gerada por  $H$  e por todos os subespaços de raízes reais de  $\widehat{\mathfrak{l}}$  e  $G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp$  é o complemento ortogonal da parte imaginária de  $\widehat{\mathfrak{l}}^0$  com respeito a forma de Killing.

Se  $M$  é um  $\widehat{\mathfrak{l}}^0$ -módulo de peso (com respeito a  $H$ ) com carga central  $a$  e  $S$  é um  $G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp \oplus \mathbb{C}d$ -módulo com a mesma carga central e ação diagonalizável de  $d$ , então  $M \otimes S$  é um  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -módulo. Esses  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -módulos são chamados de *módulos de tensor*. Com essas definições, temos mais um resultado em nosso trabalho (Teorema 3.3.2) que generaliza ainda mais o Teorema 1 e Corolário 3 de [FK18], que afirma:

**Teorema:** Seja  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e seja  $V = M \otimes S$  um  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -módulo de peso, tensor e irredutível, onde  $M$  é um  $\widehat{\mathfrak{l}}^0$ -módulo de peso e  $S$  é um  $G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp \oplus \mathbb{C}d$ -módulo com ação diagonalizável de  $d$ . Consideremos  $V$  como um  $\widehat{\mathfrak{p}}$ -módulo com ação trivial do radical  $\widehat{\mathfrak{u}}$ . Então o  $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulo de Verma imaginário generalizado  $M_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}(V)$  é irredutível.

Seja agora  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_a(\widehat{\mathfrak{l}})$  a categoria dos  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -módulos de tensor com carga central  $a$ . Qualquer  $V \in \mathcal{T}_a(\widehat{\mathfrak{l}})$  tem uma estrutura de  $\widehat{\mathfrak{p}}$ -módulo com ação trivial do radical  $\widehat{\mathfrak{u}}$ . E mais ainda, a indução de um  $\widehat{\mathfrak{p}}$ -módulo para um  $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulo define o funtor  $\mathbb{I}_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}^{\mathcal{T}}$  da categoria  $\mathcal{T}_a(\widehat{\mathfrak{l}})$  para a categoria dos  $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulos de peso. Gerando assim mais um resultado (Corolário 3.3.3), o seguinte corolário que fornece uma ferramenta geral, no caso de módulos de tensor, para a construção de novos módulos irredutíveis para qualquer álgebra de Kac-Moody afim, que afirma:

**Corolário:** Seja  $\widehat{\mathfrak{p}} = \widehat{\mathfrak{l}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}$  uma subálgebra parabólica de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  do tipo II,  $V \in \mathcal{T}_a(\widehat{\mathfrak{l}})$  um  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -módulo irredutível e  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Então o funtor  $\mathbb{I}_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}^{\mathcal{T}}$  preserva irredutibilidade.

Para alcançarmos esses resultados, organizamos a tese em três capítulos e um apêndice. Agora, vamos dar uma visão geral do que será abordado em cada um desses capítulos:

No Capítulo 1, começamos explorando as álgebras de Kac-Moody, focalizando nossa atenção na compreensão e classificação abrangente dessas estruturas algébricas complexas. Em seguida, mergulhamos no estudo das álgebras de loop e sua extensão central, oferecendo uma perspectiva alternativa sobre a construção das álgebras de Kac-Moody afim através da extensão central das álgebras de loop. Essa abordagem nos permite explorar uma outra faceta da teoria, ampliando a compreensão das estruturas subjacentes.

Posteriormente, mergulhamos no estudo dos sistemas de raízes afim e suas propriedades, reconhecendo a importância fundamental dessa análise para a compreensão dos próximos capítulos. Nosso objetivo foi entender como os sistemas de raízes afim podem ser decompostos para as álgebras de Kac-Moody afim, preparando assim o terreno para as investigações subsequentes.

Concluimos o capítulo 1 explorando as álgebras de Heisenberg e sua relação com as álgebras de Kac-Moody afim. Nessa seção, buscamos elucidar os conceitos fundamentais das álgebras de Heisenberg para estabelecer conexões estruturais com as álgebras de Kac-Moody afim, reconhecendo a importância dessas relações para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes. A abordagem nesse capítulo inclui uma variedade de exemplos para tornar as definições, teoremas e proposições mais acessíveis e tangíveis. Utilizamos como referência principal o trabalho de [Kac87].

No Capítulo 2, estudamos as quase-partições. Iniciamos estabelecendo as notações necessárias e em seguida, abordamos as partições parabólicas, conjuntos parabólicos, subálgebras de Borel e a classificação dos conjuntos parabólicos. A partir disso, introduzimos as quase-partições, uma generalização das partições parabólicas, e as utilizamos para definir as subálgebras de Borel com esse enfoque mais flexível. Nossa principal referência para essa parte é o trabalho seminal de [Fut97].

Em seguida, definimos as subálgebras parabólicas, onde observamos que, associado aos conjuntos parabólicos, essas subálgebras podem ser divididas em dois tipos distintos: tipo I e tipo II. Por fim, estabelecemos de forma geral os módulos de tipo Verma generalizados. Também enriquecemos esta parte com uma variedade de exemplos que auxiliam na compreensão de cada conceito introduzido, proporcionando uma conexão clara com as generalizações já desenvolvidas em trabalhos anteriores.

No Capítulo 3, apresentamos os resultados centrais desta tese, publicados em [GKMOS22], conforme mencionado anteriormente. Nossa abordagem neste capítulo se concentra nos módulos de Verma imaginários, que é o foco principal sobre irreduzibilidade. Começamos introduzindo o funtor (indução) imaginário, uma ferramenta poderosa para a construção de novos módulos irreduzíveis. Definimos a carga central e os módulos de Verma imaginários generalizados, relacionando-os com exemplos específicos que ilustram sua generalização.

Prosseguimos definindo os módulos admissíveis, revisitando o critério de irreduzibilidade apresentado no Teorema 1 e no Corolário 3 do trabalho de [FK18]. Em seguida,

abordamos a irredutibilidade dos módulos de loop generalizados, introduzindo conceitos cruciais como a  $\omega$ -altura. Apresentamos nossos resultados sobre os módulos de loop generalizados e a irredutibilidade dos módulos de Verma imaginário generalizado. Ao longo deste capítulo, fornecemos uma variedade de exemplos para facilitar a compreensão dos conceitos abordados.

No Apendice A, fornecemos uma base sólida para iniciar nossos capítulos. Reconhecemos que é impossível abordar todos os aspectos em uma tese, mas buscamos estruturá-la de forma a oferecer um material suficiente para a leitura desta tese. Neste apêndice, estudamos álgebras de Lie de dimensão finita, proporcionando assim uma base sólida para o entendimento dos conceitos abordados ao longo desta tese.

# Capítulo 1

## Álgebras de Kac-Moody afim

Quando estudamos a teoria de álgebras de Lie semissimples de dimensão finita, a pergunta mais natural possível que surge é: Será possível generalizar essa teoria para álgebras de Lie de dimensão infinita? Bom, a pergunta tem resposta afirmativa que é exatamente o que trataremos nesse capítulo, que é o que chamamos de álgebras de Kac-Moody afim. Veremos sua construção de forma natural (geométrica, como alguns autores destacam) através de extensão central de uma álgebra de Lie semissimples de dimensão finita e mais adiante veremos que podemos obtê-las através dos geradores de Chevalley, estudadas no Apêndice A. Com isso, iniciaremos o capítulo falando um pouco sobre álgebras de Kac-Moody, em seguida sobre álgebras de loop e extensão central, que nos fornecerá exatamente uma primeira ideia de álgebras de Lie de dimensão infinita, em seguida falaremos sobre a álgebra de Kac-Moody afim como extensão central de álgebra de Lie e também sobre sistema de raízes afim e suas propriedades, finalizaremos o capítulo falando sobre álgebras de Heisenberg e sua relação com álgebras de Kac-Moody afim. Tomamos como referência principal para este capítulo, o livro [\[Kac87\]](#).

### 1.1 Introdução às álgebras de Kac-Moody

As álgebras de Kac-Moody são estruturas matemáticas poderosas que unificam conceitos de álgebra linear, teoria de grupos e geometria algébrica. Desenvolvidas por Victor Kac e Robert Moody, essas álgebras têm aplicações profundas em diversos campos da matemática e física teórica, como teoria das cordas, geometria algébrica, teoria de representações e física de partículas. Iniciaremos primeiramente falando de realização de uma matriz complexa  $A$  de ordem  $n \times n$ , com o objetivo de definirmos duas álgebras de Lie  $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$  e  $\mathfrak{g}(A)$  e estudar suas propriedades.

**Definição 1.1.1.** Seja  $A$  uma matriz complexa de ordem  $n \times n$ . Uma **realização** da matriz  $A$  é uma tripla  $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$  onde  $\mathfrak{h}$  é um espaço vetorial complexo de dimensão finita,  $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  e  $\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\}$  são subconjuntos de  $\mathfrak{h}^*$  e  $\mathfrak{h}$  respectivamente,

satisfazendo as seguintes condições:

(1)  $\Pi, \Pi^\vee$  são conjuntos linearmente independentes em  $\mathfrak{h}^*$  e  $\mathfrak{h}$  respectivamente;

(2)  $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = a_{ij}$ , com  $i, j = 1, \dots, n$ .

Aqui  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota o pareamento natural entre os espaços vetoriais  $\mathfrak{h}$  e  $\mathfrak{h}^*$ , ou seja  $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle$  é a notação para  $\alpha_j(\alpha_i^\vee)$ . Vejamos o seguinte exemplo

**Exemplo 1.1.2.** Consideremos  $E_{ij}$  com  $i, j = 1, \dots, l+1$ , a base padrão do espaço de matrizes  $(l+1) \times (l+1)$ . Seja  $\mathfrak{h}$  o espaço vetorial de todas as matrizes diagonais de traço nulo. Assim, o conjunto  $\Pi^\vee = \{\alpha_i^\vee = E_{ii} - E_{i+1, i+1} \mid i = 1, \dots, l\}$  forma uma base para  $\mathfrak{h}$ . Definimos para cada  $i = 1, \dots, l+1$ , o funcional linear  $\epsilon_i : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\epsilon_i(\text{diag}(a_1, \dots, a_{l+1})) = a_i$ . Assim, o conjunto  $\Pi = \{\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \mid i = 1, \dots, l\}$  forma uma base para  $\mathfrak{h}^*$ . Portanto, a tripla  $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$  é uma realização da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Agora, seja  $A$  uma matriz complexa de ordem  $n \times n$ , e vamos denotar por  $\text{rank}(A)$ , o posto da matriz  $A$  e  $\dim(\mathfrak{h})$  a dimensão de  $\mathfrak{h}$  como espaço vetorial, então temos a seguinte proposição:

**Proposição 1.1.3.** Sejam  $A$  uma matriz complexa de ordem  $n \times n$  e  $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$  uma realização  $A$ , então  $\dim(\mathfrak{h}) \geq 2n - \text{rank}(A)$ .

*Demonstração.* Seja  $l = \text{rank}(A)$  e  $m = \dim(\mathfrak{h})$ . Como  $\Pi$  e  $\Pi^\vee$  são conjuntos linearmente independentes em  $\mathfrak{h}^*$  e  $\mathfrak{h}$ , respectivamente, então podemos completar para uma base  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$  e  $\{\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee, \dots, \alpha_m^\vee\}$  de seus respectivos espaços vetoriais, obtendo assim uma matriz invertível

$$\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

onde cada submatriz também é invertível. Assim, a submatriz  $(A \mid B)$  tem posto  $n$ , desde que  $A$  já possui  $l$  colunas linearmente independentes. Assim,  $\text{rank}(A) \geq n - l$  e como  $B$  têm  $m - n$  colunas, então  $m - n \geq n - l$ , o que mostra que  $\dim(\mathfrak{h}) \geq 2n - \text{rank}(A)$ .  $\square$

Com base na proposição mencionada anteriormente, temos a possibilidade de estabelecer uma realização minimal, a qual desempenhará um papel fundamental nas etapas construtivas subsequentes. Essa realização minimal refere-se a uma representação simplificada que servirá para o desenvolvimento deste trabalho.

**Definição 1.1.4.** Seja  $A$  uma matriz complexa de ordem  $n$ . Uma **realização minimal** de  $A$  é uma realização  $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ , tal que  $\dim(\mathfrak{h}) = 2n - \text{rank}(A)$ .

Antes de adentrarmos na análise detalhada da existência e unicidade da realização minimal no contexto da álgebra de Kac-Moody, vamos estabelecer com clareza o conceito fundamental de isomorfismo entre duas realizações.

**Definição 1.1.5.** Duas realizações  $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$  e  $(\mathfrak{h}_1, \Pi_1, \Pi_1^\vee)$  são chamadas de **isomorfas**, se existe um isomorfismo de espaços vetoriais  $\varphi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}_1$  tal que  $\varphi(\Pi^\vee) = \Pi_1^\vee$  e  $\varphi^*(\Pi_1) = \Pi$ , onde  $\varphi^*$  é a transformação linear transposta de  $\varphi$ .

Após considerarmos as definições previamente apresentadas, estamos agora em uma posição favorável para enunciar a seguinte proposição:

**Proposição 1.1.6.** Qualquer matriz  $A$  complexa de ordem  $n$  tem uma realização minimal e quaisquer duas realizações minimais são isomorfas.

*Demonstração.* Consideremos  $r = \text{rank}(A)$ , de modo que, após uma reordenação, possamos escrever:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

onde  $A_{11}$  é uma matriz não singular. Vamos estender isso para uma matriz  $(2n-r) \times (2n-r)$  da seguinte forma:

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & I_{n-r} \\ 0 & I_{n-r} & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz é não singular, como evidenciado pelo determinante  $\det(C) = \pm \det(A_{11})$ . Agora, consideremos  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  como as primeiras  $n$  funções coordenadas e  $h_1, \dots, h_n$  como as primeiras  $n$  linhas de  $C$ . Podemos ver que  $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ , onde  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ ,  $\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\}$  e  $\mathfrak{h}$  o espaço gerado pelas  $2n - r$  linhas da matriz  $C$ , é uma realização minimal da matriz  $A$ .

Consideremos agora duas realizações minimais  $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$  e  $(\mathfrak{h}_1, \Pi_1, \Pi_1^\vee)$  da matriz  $A$ . É trivial notar que podemos estender os conjuntos linearmente independentes  $\Pi$  e  $\Pi_1$  a uma base de  $\mathfrak{h}$  e  $\mathfrak{h}_1$ , respectivamente. De acordo com a definição de realização minimal, os espaços  $\mathfrak{h}$  e  $\mathfrak{h}_1$  possuem a mesma dimensão. Consequentemente, existe um isomorfismo de espaços vetoriais  $\varphi : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}_1$ , de modo que  $\varphi(\Pi^\vee) = \Pi_1^\vee$  e  $\varphi^*(\Pi_1) = \Pi$ , onde  $\varphi^*$  representa a transformação linear transposta de  $\varphi$ .  $\square$

Em relação a uma realização minimal, vamos direcionar nossa atenção a algumas ponderações de relevância, as quais influenciam na definição de uma matriz e sua realização

serem decomponíveis. Com esta nova perspectiva, nos voltamos para a prática de nos referirmos às realizações minimais utilizando o termo simplificado *realizações*.

1. Se  $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$  é uma realização de uma matriz  $A$ , então  $(\mathfrak{h}^*, \Pi^\vee, \Pi)$  é uma realização de  $A^\top$ .
2. Se  $(\mathfrak{h}_1, \Pi_1, \Pi_1^\vee)$  e  $(\mathfrak{h}_2, \Pi_2, \Pi_2^\vee)$  são respectivamente realizações das matrizes  $A_1$  e  $A_2$ , então  $(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2, \Pi_1 \times \{0\} \cup \{0\} \times \Pi_2, \Pi_1^\vee \times \{0\} \cup \{0\} \times \Pi_2^\vee)$  é uma realização da matriz

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

chamada de **matriz de soma direta**.

Para enriquecer e expandir as considerações previamente discutidas, procederemos à apresentação de definições adicionais importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Nesse sentido, estabeleceremos conceitos essenciais relacionados à realização minimal.

**Definição 1.1.7.** Referente a uma matriz complexa  $A$  e sua realização:

- (1) Uma matriz  $A$  e sua realização são chamadas de **decomponíveis** se, após reorganizar os índices,  $A$  se decompõe em uma soma direta não trivial.
- (2) Definimos o **reticulado de raízes**  $Q \subseteq \mathfrak{h}^*$  como o  $\mathbb{Z}$ -módulo gerado por  $\Pi$  (esse conjunto é chamado de **base de raízes** e seus elementos são as **raízes simples**), e o **reticulado de co-raízes**  $Q^\vee \subseteq \mathfrak{h}$  como o  $\mathbb{Z}$ -módulo gerado por  $\Pi^\vee$  (esse conjunto é chamado de **base de co-raízes** e seus elementos são as **co-raízes simples**). Denotamos por  $Q^+$  o monoide gerado em  $Q$  pelas raízes simples (ou seja,  $Q^+ = \sum_i \mathbb{Z}_+ \alpha_i$ ).
- (3) Para um elemento  $\alpha \in Q$  com  $\alpha = \sum_i k_i \alpha_i$ , denotamos por  $\text{ht}(\alpha) = \sum_i k_i$  a **altura** de  $\alpha$ . O que nos permite introduzir uma ordenação parcial em  $Q$  definindo  $\alpha \geq \beta$  se  $\alpha - \beta \in Q^+$ .

A relação entre realização minimal, vista na proposição anterior, álgebra de Lie formam a base para a seguinte definição.

**Definição 1.1.8.** Seja  $A = (a_{ij})$ , com  $i, j = 1, \dots, n$  uma matriz complexa e  $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$  uma realização de  $A$ . A álgebra de Lie  $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ , associada a matriz  $A$ , é a álgebra de Lie que possui  $\{e_1, e_2, \dots, e_n, f_1, f_2, \dots, f_n\}$  e  $\mathfrak{h}$  como geradores, satisfazendo as seguintes relações:

- (1)  $[e_i, f_j] = \delta_{ij} \alpha_i^\vee$ , onde  $\delta_{ij}$  é o **delta de Kronecker**;
- (2)  $[h, h'] = 0$ , onde  $h, h' \in \mathfrak{h}$ ;

$$(3) [h, e_i] = \langle \alpha_i, h \rangle e_i, \text{ onde } h \in \mathfrak{h};$$

$$(4) [h, f_i] = -\langle \alpha_i, h \rangle f_i, \text{ onde } h \in \mathfrak{h}.$$

Denotamos por  $\tilde{\mathfrak{n}}_+$  e  $\tilde{\mathfrak{n}}_-$  as subálgebras de Lie de  $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$  geradas por  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  e  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  respectivamente.

**Teorema 1.1.9** ([Kac87, Teorema 1.2, p. 3]). A álgebra de Lie  $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$  satisfaz as seguintes propriedades:

$$(1) \tilde{\mathfrak{g}}(A) = \tilde{\mathfrak{n}}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \tilde{\mathfrak{n}}_+;$$

(2)  $\tilde{\mathfrak{n}}_-$  (respectivamente  $\tilde{\mathfrak{n}}_+$ ) é livremente gerada pelo conjunto  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  (respectivamente  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ );

(3) As aplicações  $e_i \mapsto -f_i$ ,  $f_i \mapsto -e_i$  e  $h \mapsto -h$  podem ser estendida unicamente para uma involução  $\omega$  da álgebra de Lie  $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$ ;

(4) Existe uma decomposição em espaço de raízes em relação a  $\mathfrak{h}$ :

$$\tilde{\mathfrak{g}}(A) = \left( \bigoplus_{\alpha \in Q_+, \alpha \neq 0} \tilde{\mathfrak{g}}(A)_{-\alpha} \right) \oplus \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in Q_+, \alpha \neq 0} \tilde{\mathfrak{g}}(A)_{\alpha} \right),$$

onde  $\tilde{\mathfrak{g}}(A)_{\alpha} = \{x \in \tilde{\mathfrak{g}}(A) \mid [x, h] = \langle \alpha, h \rangle x, \forall h \in \mathfrak{h}\}$ . E mais ainda,  $\dim(\tilde{\mathfrak{g}}(A)_{\alpha}) < \infty$  e  $\tilde{\mathfrak{g}}(A)_{\alpha} \subset \tilde{\mathfrak{n}}_{\pm}$  para  $\pm\alpha \in Q_+$ , com  $\alpha \neq 0$ ;

(5) Existe um único ideal maximal  $\tau$  em  $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$  entre os ideais que se intersectam trivialmente com  $\mathfrak{h}$ . Além disso, temos a seguinte soma de ideais:

$$\tau = (\tau \cap \tilde{\mathfrak{n}}_-) \oplus (\tau \cap \tilde{\mathfrak{n}}_+).$$

Com base nas explicações prévias acerca da notável teoria da realização minimal e das profundas ramificações da álgebra de Lie, estamos agora capacitados a estabelecer de maneira precisa a definição da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}(A)$ , intrinsecamente ligada às matrizes de ordem  $n$ .

**Definição 1.1.10.** Sejam  $A$  uma matriz complexa de ordem  $n$ ,  $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^{\vee})$  uma realização de  $A$  e  $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$  a álgebra de Lie associada a matriz  $A$ . Definimos a seguinte álgebra de Lie

$$\mathfrak{g}(A) := \tilde{\mathfrak{g}}(A)/\tau,$$

onde  $\tau$  é o ideal maximal que se intersecta trivialmente com  $\mathfrak{h}$ .

Associado a álgebra de Lie  $\mathfrak{g}(A)$ , chamaremos a matriz  $A$  de **matriz de Cartan** da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}(A)$  e  $n$  de posto de  $\mathfrak{g}(A)$ . Em relação aos geradores de  $\mathfrak{g}(A)$ , manteremos a mesma notação, isto é,  $\bar{e}_i = e_i$ ,  $\bar{f}_i = f_i$  e  $\bar{h} = h$ . Vejamos o seguinte exemplo.

**Exemplo 1.1.11.** Seguindo novamente o caso visto no Exemplo 1.1.2, e seguindo que  $[A, B] = AB - BA$ , com  $A$  e  $B$  matrizes, consideremos a tripla  $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$  como a realização da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Definindo para cada  $i = 1, \dots, l$  os elementos  $e_i = E_{i,i+1}$  e  $f_i = E_{i+1,i}$ , podemos verificar que, seguindo a Definição 1.1.8, temos

- 1)  $[e_i, f_j] = [E_{i,i+1}, E_{j+1,j}] = E_{i,i+1}E_{j+1,j} - E_{j+1,j}E_{i,i+1} = \delta_{ij}E_{ii} - \delta_{ij}E_{i+1,i+1} = \delta_{ij}\alpha_i^\vee$ ;
- 2)  $[h, h'] = 0$ , pois tratam-se de matrizes diagonais (as quais comutam);
- 3)  $[h, e_i] = [\text{diag}(a_1, \dots, a_{l+1}), E_{i,i+1}] = a_i E_{i,i+1} - a_{i+1} E_{i,i+1} = \langle \alpha_i, h \rangle e_i$ ;
- 4)  $[h, f_i] = [\text{diag}(a_1, \dots, a_{l+1}), E_{i+1,i}] = a_{i+1} E_{i+1,i} - a_i E_{i+1,i} = -\langle \alpha_i, h \rangle f_i$ .

Em outras palavras,  $\mathfrak{g}(A)$  é a álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C})$ .

Nesse contexto, é crucial compreender que as observações que se seguem desempenham um papel fundamental na compreensão e aplicação dessa estrutura algébrica.

1. O quádruplo  $(\mathfrak{g}(A), \mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$  é chamado o  **$(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ -associado à matriz  $A$** ;
2. a decomposição de  $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$  induz uma decomposição em  $\mathfrak{g}(A)$ , chamada de **decomposição em espaços de raízes**

$$\mathfrak{g}(A) = \left( \bigoplus_{\alpha \in Q_+, \alpha \neq 0} \mathfrak{g}(A)_{-\alpha} \right) \oplus \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in Q_+, \alpha \neq 0} \mathfrak{g}(A)_\alpha \right),$$

onde  $\mathfrak{g}(A)_\alpha = \{x \in \mathfrak{g}(A) \mid [x, h] = \langle \alpha, h \rangle x, \forall h \in \mathfrak{h}\}$ . E mais ainda,  $\dim(\mathfrak{g}(A)_\alpha) < \infty$  e  $\mathfrak{g}(A)_0 = \mathfrak{h}$ ;

3. chamamos  $\dim(\mathfrak{g}(A)_\alpha)$  de **multiplicidade** de  $\alpha$  e indicaremos por  $\text{mult}(\alpha)$ .
4. vamos denotar por  $\mathfrak{n}_\pm$  a imagem de  $\tilde{\mathfrak{n}}_\pm$  em  $\mathfrak{g}(A)$ . Dessa forma, com embasamento nas definições previamente expostas e nas observações feitas anteriormente, chegamos à conclusão de que

$$\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+.$$

**Definição 1.1.12.** Um elemento  $\alpha \in Q$  é chamado de **raiz** se e somente se satisfaz as condições  $\alpha \neq 0$  e  $\text{mult}(\alpha) \neq 0$ . Uma raiz  $\alpha > 0$  (respectivamente  $\alpha < 0$ ) é designada como **positiva** (respectivamente **negativa**) conforme explicitado na Definição 1.1.7. A dedução fornecida pelo Teorema 1.1.9 estabelece que cada raiz pode ser classificada como positiva ou negativa. Portanto, ao denotarmos os conjuntos de todas as raízes, raízes positivas e raízes negativas como  $\Delta$ ,  $\Delta_+$  e  $\Delta_-$  respectivamente, podemos afirmar de maneira conclusiva que:

$$\Delta = \Delta_+ \sqcup \Delta_- \text{ (união disjunta).}$$

Importante observarmos que é viável expressar essa relação como:

$$\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{\alpha \in \Delta \cup \{0\}} \mathfrak{g}_\alpha(A), \text{ em que } \mathfrak{g}_0(A) = \mathfrak{h}. \quad (1.1)$$

O conceito de centro em uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}(A)$  possui um papel de destaque na sua estrutura, revelando-se uma faceta fundamental que desempenha um papel de suma importância nessa teoria, principalmente quando  $A$  é uma matriz específica, que iremos ver mais adiante. Esse elemento central revela-se de significativa relevância, especialmente quando adentrarmos no âmbito das representações das álgebras de Kac-Moody. Abaixo, apresenta-se a seguinte proposição que esclarece a identidade e as propriedades intrínsecas do centro da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}(A)$ .

**Proposição 1.1.13.** O centro da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}(A)$  é igual a

$$\mathfrak{c} := \{H \in \mathfrak{h} \mid \langle \alpha_i, H \rangle = 0, \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Ainda mais,  $\dim(\mathfrak{c}) = n - \text{rank}(A)$ .

*Demonstração.* Seja  $x \in \mathfrak{c}$ . Nesse contexto, podemos afirmar que  $[h, x] = 0$  para todo  $h \in \mathfrak{h}$ , em que  $\mathfrak{g}(A)$  é constituída a partir de  $\mathfrak{h}$  resultando na inclusão de  $x$  em  $\mathfrak{g}_0(A) = \mathfrak{h}$ . Adicionalmente, é importante ressaltar que:

$$[x, y] = 0,$$

para qualquer  $y \in \mathfrak{g}_\alpha(A)$ , indicando que o produto de Lie entre  $x$  e  $y$  é nulo. Esse fato implica que  $\langle \alpha, x \rangle = 0$  para todo  $\alpha \in \Delta$ , sendo necessário que  $y$  seja não-nulo. Isso é equivalente a  $\langle \alpha, x \rangle = 0$  para todo  $\alpha \in \Pi$ .

De maneira recíproca, se  $x \in \mathfrak{h}$  satisfaz a condição anterior, então ele pertence ao centro da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}(A)$ .

Para a última condição, observamos que  $\dim \mathfrak{c} = n - l = n - \text{rank}(A)$ . Porém, vale destacar que  $\dim(\mathfrak{c} \cap \mathfrak{h}') = n - \text{rank}(A)$ , e dessa forma, a conclusão decorre naturalmente.  $\square$

**Definição 1.1.14.** Seja  $A$  uma matriz complexa de ordem  $n$ .  $A$  é uma **Matriz de Cartan** (MC) se, para todo  $i, j = 1, \dots, n$ , satisfaz as seguintes condições:

- (1)  $a_{ii} = 2$ ;
- (2)  $a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ , para  $i \neq j$ ;
- (3) se  $a_{ij} = 0$ , então  $a_{ji} = 0$ .
- (4)  $\det(A) > 0$

A matriz  $A$  do Exemplo 1.1.11 é uma matriz de Cartan. O tipo de matriz de Cartan generalizada se destaca por sua definição que incorpora uma flexibilização da restrição imposta ao posto da matriz  $A$ . Esse refinamento conceitual nos leva a considerar a seguinte definição:

**Definição 1.1.15.** Considere uma matriz complexa  $A$  de ordem  $n$ . Denominamos  $A$  como uma **Matriz de Cartan generalizada** (MCG) quando, para todos os índices  $i, j = 1, \dots, n$ , ela satisfaz as seguintes condições:

- (1)  $a_{ii} = 2$ ;
- (2)  $a_{ij} \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ , para  $i \neq j$ ;
- (3) se  $a_{ij} = 0$ , então  $a_{ji} = 0$ .

**Exemplo 1.1.16.** Vejamos um exemplo de (MCG) clássico, que se diferencia das matrizes (MC):

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Percebemos que ela cumpre os requisitos da Definição 1.1.15 para ser uma MCG. Um fato interessante é que o seu determinante é igual a zero, o que a diferencia de não ser uma MC.

Por meio da definição da matriz de Cartan generalizada, abrimos caminho para a formulação da tão aguardada álgebra de Kac-Moody. Abaixo, apresentamos a definição para um entendimento mais completo:

**Definição 1.1.17.** Seja  $A$  uma matriz de Cartan generalizada. A álgebra de Lie  $\mathfrak{g}(A)$  associada à matriz  $A$  é chamada de **álgebra de Kac-Moody**.

Dentro desse contexto, nossa intenção primordial consiste em apresentar os desfechos primordiais que conduzirão à classificação das matrizes de Cartan generalizadas. Esta

abordagem será realizada com uma análise abrangente, englobando não somente as instâncias finitas, mas também as afins e as indefinidas. Ao direcionar nosso foco para as situações finitas, é possível identificar uma conexão direta com as álgebras de Lie semisimples, estabelecendo uma ponte entre esses dois conceitos.

A segunda situação, por sua vez, é altamente complexa, e nosso objetivo é explicitar as estruturas dessas álgebras de Kac-Moody, que são detalhadas e desafiadoras por natureza. Esta empreitada permitirá não somente a compreensão das álgebras em si, mas também a capacidade de efetuar construções tangíveis que ilustrem suas propriedades fundamentais.

Entretanto, a última categoria de cenários, que tangem as matrizes de Cartan generalizadas indefinidas, projeta-se em um domínio mais obscuro e enigmático. Nesse âmbito, embora seja possível explorar álgebras de Lie especiais, a clareza desejada ainda se esconde sob véus de complexidade. Ao enredarmos os fios que conectam a matriz de Cartan generalizada à estrutura da álgebra de Kac-Moody, traçamos um percurso que desvenda tanto a beleza intrínseca quanto as aplicações de tais construções em um panorama matemático mais amplo. Com isso, iremos analisar minuciosamente a configuração dessas matrizes, a fim de identificar e compreender plenamente sua natureza indecomponível. É imprescindível, portanto, que examinemos a definição que se segue, a fim de estabelecer uma base sólida para nossas investigações.

**Definição 1.1.18.** Sejam  $A = (a_{ij})$  e  $A' = (a'_{ij})$  duas MCGs. Dizemos que  $A$  e  $A'$  são **equivalentes**, se elas possuem o mesmo grau  $n$  e existe uma permutação  $\sigma$  de  $S_n$  tal que

$$a'_{ij} = a_{\sigma(i)\sigma(j)}, \quad \text{para todo } i, j = 1, \dots, n.$$

Seguindo a definição, podemos dizer que uma MCG  $A$  é **indecomponível**, se **não** é equivalente a uma soma direta de MCGs menores  $A_1$  e  $A_2$ , ou seja,  $A$  não é equivalente a uma matriz da forma

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

Torna-se evidente que, se a matriz  $A$  é uma Matriz de Cartan Generalizada, então a sua matriz transposta  $A^t$  também partilha essa característica de MCG. Adicionalmente, é válido afirmar que a matriz  $A$  atinge o status de indecomponibilidade em caso de, e somente se, sua matriz transposta  $A^t$  também ostentar tal atributo de indecomponibilidade.

Abordaremos neste estudo, matrizes reais  $A = (a_{ij})$  de ordem  $n$ , com as seguintes propriedades:

(M1)  $A$  é indecomponível;

(M2)  $a_{ij} \leq 0$ , para  $i \neq j$ ;

(M3) Se  $a_{ij} = 0$  então  $a_{ji} = 0$ .

Através da Definição 1.1.7, temos o embasamento de que é possível realizar a decomposição de qualquer matriz em uma soma direta de matrizes indecomponíveis. Com base nesse entendimento, torna-se apropriado direcionar nosso foco para as Matrizes de Cartan Generalizadas (MCGs) que se enquadram nessa categoria de indecomponibilidade. É importante ressaltar que as MCGs selecionadas para análise subsequente são aquelas que não podem ser desmembradas em submatrizes menores. Além disso, podemos estabelecer que as propriedades (M2) e (M3) impostas às MCGs também estão satisfeitas pelas escolhas feitas, o que confere um alicerce sólido para nossa abordagem.

Dentro desse contexto, a observação sobre a conformidade com as propriedades (M2) e (M3) assume papel central. A garantia de que as MCGs escolhidas aderem a essas propriedades não apenas valida nossa escolha, mas também permite delinear diretrizes claras para a análise que se desdobrará.

Antes de prosseguirmos com a próxima definição em nosso trabalho, é importante estabelecer uma observação fundamental, com ênfase na representação de vetores coluna. No contexto dos espaços vetoriais, consideremos um vetor coluna representado por  $x = (x_i)$ . A fim de desenvolver uma notação esclarecedora, introduzimos o seguinte conceito: Utilizaremos a expressão  $x > 0$  para indicar que cada componente  $x_i$  do vetor  $x$  é estritamente positiva. Similarmente, empregaremos a notação  $x \geq 0$  para denotar que cada componente  $x_i$  do vetor  $x$  é maior ou igual a zero. Com isso, estamos preparados para a seguinte definição.

**Definição 1.1.19.** Seja  $A$  uma matriz real de ordem  $n$  satisfazendo (M1), (M2) e (M3). Dizemos que:

(1)  $A$  é do tipo **finito** se

$$(1.1) \det(A) \neq 0;$$

$$(1.2) \text{ existe } x \geq 0 \text{ tal que } Ax > 0, \text{ e}$$

$$(1.3) \text{ se } Ax \geq 0 \text{ então } x > 0 \text{ ou } x = 0.$$

(2)  $A$  é do tipo **afim** se

$$(2.1) n - \text{rank}(A) = 1;$$

$$(2.2) \text{ existe } x > 0 \text{ tal que } Ax = 0, \text{ e}$$

$$(2.3) \text{ se } Ax \geq 0 \text{ então } Ax = 0.$$

(3)  $A$  é do tipo **indefinido** se

$$(3.1) \text{ existe } x > 0 \text{ tal que } Ax < 0, \text{ e}$$

$$(3.2) \text{ se } Ax \geq 0 \text{ e } x \geq 0 \text{ então } x = 0.$$

Após ter delineado de maneira concisa as definições fundamentais abordando a matriz de Cartan generalizada e as álgebras de Kac-Moody, encontramos-nos agora em uma posição propícia para formalizar e apresentar o teorema subsequente.

**Teorema 1.1.20.** Seja  $A$  uma matriz real de ordem  $n$  satisfazendo (M1), (M2) e (M3). Então uma, e apenas uma, das três possibilidades descritas na Definição 1.1.19 vale para ambas as matrizes  $A$  e  $A^t$ .

*Demonstração.* Podemos ver que o terceiro caso é disjunto dos dois primeiros, porque nos dois primeiros casos não existe nenhum  $u > 0$  tal que  $Au < 0$  (defina  $v = -u$  e aplique o resultado em  $Av \geq 0$ ). Além disso, devido à condição de posto na matriz, os dois primeiros casos são disjuntos.

Consideramos o seguinte cone convexo:

$$\mathcal{K}_A = \{u \mid Au \geq 0\}.$$

Podemos ver que esse cone intersecta o cone  $\{u \geq 0\}$  apenas em  $\{0\}$  ou em seu interior  $\{u > 0\}$ . Portanto, temos que  $\mathcal{K}_A \cap \{u \geq 0\} \subset \{u > 0\}$  ou  $\mathcal{K}_A \cap \{u \geq 0\} \subset \{0\}$ . Suponha que essa interseção não seja reduzida ao ponto 0. Então, temos:

1.  $\mathcal{K}_A$  está contido em  $\{u > 0\}$  (e, portanto, não contém nenhum subespaço linear).
2.  $\mathcal{K}_A = \{u \mid Au = 0\}$  é uma linha unidimensional.

De fato, supomos que  $\mathcal{K}_A$  encontra o cone  $\{u > 0\}$  em algum ponto, digamos  $u$ . Mas se houver um elemento  $v$  de  $\mathcal{K}_A$  fora desse cone, devido à convexidade de  $\mathcal{K}_A$ , sabemos que o intervalo  $[u, v]$  está contido em  $\mathcal{K}_A$  e esse intervalo deve encontrar a fronteira de  $\{u \geq 0\}$ . Isso é apenas possível no elemento  $\{0\}$ , portanto,  $v$  deve estar na meia linha gerada por  $-u$  e toda a linha passando por  $u$  está contida em  $\mathcal{K}_A$ . Estamos no segundo caso. Suponha que haja um elemento  $w \in \mathcal{K}_A$  que não esteja nessa linha. Então, porque  $\mathcal{K}_A$  é um cone convexo, obtemos que todo o semiplano gerado por  $w$  e a linha através de  $u$  está contido em  $\mathcal{K}_A$ , mas esse semiplano encontrará a fronteira do cone  $\{u \geq 0\}$  fora de  $\{0\}$ , o que é impossível. Como  $u$  e  $-u$  estão em  $\mathcal{K}_A$ , isso implica que  $Au = 0$ .

O primeiro caso é equivalente ao caso de tipo finito. Se  $Av \geq 0$ , então  $v \in \mathcal{K}_A$  e  $v > 0$  ou  $v = 0$  devido à inclusão de  $\mathcal{K}_A$  em  $\{u > 0\} \cup \{0\}$ . Como  $\mathcal{K}_A$  não contém nenhum subespaço linear,  $A$  deve ser não degenerado. Em particular,  $A$  é sobrejetivo, portanto, existe um vetor  $u$  com  $Au > 0$ . Este  $u$  satisfaz  $u > 0$  ou  $u = 0$ . O último caso não é possível, pois, caso contrário, teríamos  $Au = 0$ .

O segundo caso é equivalente ao caso afim: sabemos que existe um elemento  $u > 0$  tal que  $Au = 0$  e o núcleo de  $A$  é  $\mathcal{K}_A$  e de dimensão 1, e obtemos a condição em  $Av \geq 0$ .

Além disso, nos casos finitos (respectivamente, afim), vemos que não existe  $v > 0$  tal que  $Av < 0$ . Isso implica que existe um elemento  $u$  no cone  $\{u \geq 0\}$  diferente de 0 e em  $\mathcal{K}_{A^t}$ . Em particular,  $A^t$  é novamente de tipo finito (respectivamente, afim), e distinguimos os dois casos graças ao posto da matriz.

No último caso, sabemos que não existe  $u \geq 0$  com  $u \neq 0$  tal que  $A^t u \geq 0$ . Assim, existe um elemento  $v > 0$  tal que  $Av < 0$ . Se  $Aw \geq 0$  e  $w \geq 0$ , sabemos que  $w = 0$ . □

Em uma abordagem mais abrangente, o Teorema 1.1.20 revela que é possível classificar uma Matriz de Cartan Generalizada (MCG) em um dos três tipos distintos: finito, afim ou indeterminado. Essa classificação assume um papel crucial no entendimento das propriedades das álgebras de Kac-Moody e das estruturas algébricas subjacentes.

A próxima proposição e o próximo teorema apresentam um resumo dos resultados relacionados às MCGs indecomponíveis. No entanto, antes de prosseguirmos, é importante revisar o seguinte:

Considere uma matriz  $A = (a_{ij})$  com índices  $i, j$  pertencentes a um conjunto  $S$ , onde  $S$  é um subconjunto de  $\{1, \dots, n\}$ . Essa matriz é denominada uma **submatriz principal** de  $A$ . Denotaremos esta submatriz como  $A_S$ , que é obtida excluindo-se determinadas linhas e colunas da matriz original. Vale a pena ressaltarmos que o determinante de uma submatriz principal é chamado de **menor principal**. Em outras palavras, um menor principal é o determinante de uma submatriz de  $A$ , onde sua diagonal principal faz parte da diagonal principal de  $A$ . Veremos agora alguns lemas que nos ajudarão na classificação das MCG indecomponíveis.

**Lema 1.1.21.** Seja  $A$  indecomponível de tipo finito ou afim. Então, qualquer submatriz principal própria de  $A$  se decompõe em uma soma direta de matrizes de tipo finito

*Demonstração.* Consideremos um conjunto  $S$  que é um subconjunto de  $\{1, \dots, n\}$  e a matriz  $A_S$  associada à submatriz principal de  $A$  correspondente a esse conjunto. Seja  $u = (u_i)$ , onde  $i$  varia de 1 a  $n$ . Denotamos por  $u_S$  o vetor  $(u_i)$ , onde  $i$  pertence a  $S$ . Assumimos, de acordo com a hipótese, que existe um vetor  $u$  com todos os elementos estritamente maiores que zero, tal que  $Au \geq 0$ .

Agora, concentremos nossa atenção no produto matricial  $A_S u_S$ . Dado que todos os elementos  $a_{ij}$ , para  $i \neq j$ , são não positivos, podemos concluir que  $(Au)_S \leq A_S u_S$ . Esta desigualdade é verdadeira com igualdade se e somente se, para todo  $i$  em  $S$  e todo  $j$  fora de  $S$ , temos  $a_{ij} = 0$ .

Isso nos permite inferir que  $u_S$  é estritamente maior que zero e  $A_S u_S \geq 0$ . Consequentemente, podemos afirmar que  $A_S$  é de tipo afim ou finito. Se  $A_S$  for do tipo afim, então  $A_S u_S = 0$  implica que  $A_S u_S \geq 0$ , o que implica que  $A_S u_S = (Au)_S$ . Isso nos leva à conclusão de que ou  $S$  é igual ao conjunto completo  $1, \dots, n$  ou que a matriz  $A$  é decomponível. □

**Lema 1.1.22.** Uma matriz simétrica  $A$  é de tipo finito (respectivamente afim) se e somente se  $A$  for definida positiva (respectivamente semidefinida positiva com  $\text{rank}(A) = n - 1$ ).

*Demonstração.* Vamos assumir que  $A$  é semidefinida positiva, então, se existe  $u > 0$  tal que  $Au < 0$ , então  $u^t Au < 0$ , o que é impossível. Em particular,  $A$  é de tipo finito afim. A condição de posto distingue os dois casos.

Reciprocamente, se  $A$  é de tipo finito ou afim, então existe um  $u > 0$  tal que  $Au \geq 0$ . Para  $\lambda > 0$ , temos  $(A + \lambda I)u > 0$ , assim  $A$  é de tipo finito e, portanto, não degenerado. Portanto, os autovalores de  $A$  são não negativos, e o resultado segue com a condição de posto. □

**Lema 1.1.23** ([Kac87, Lema 4.6, p. 40]). Seja  $A = (a_{i,j})$  uma matriz de tipo finito ou afim tal que  $a_{i,i} = 2$  e  $a_{i,j}a_{j,i} \geq 1$ , onde  $1 \leq i, j \leq n$ . Então  $A$  é simetrizável. Além disso, se existir uma sequência  $i_1, i_2, i_3, \dots, i_k$  de índices com  $k \geq 3$  tal que  $a_{i_1, i_2} a_{i_2, i_3} \cdots a_{i_{k-1}, i_k} a_{i_k, i_1} \neq 0$ , então  $A$  é da forma

$$\begin{bmatrix} 2 & -u_1 & \dots & 0 & -u_n^{-1} \\ -u_1^{-1} & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2 & -u_{n-1} \\ -u_n & 0 & \dots & -u_{n-1}^{-1} & 2 \end{bmatrix}$$

onde os  $u_i$  são números positivos.

Com o propósito de categorizar de maneira abrangente todas as Matrizes de Cartan Generalizadas (MCGs) tanto de natureza finita quanto afim, iremos proceder à incorporação de uma abordagem análoga àquela empregada no contexto das Álgebras de Lie. Especificamente, como foi realizado no contexto das Álgebras de Lie semissimples de dimensão finita (Apêndice A), iremos agora apresentar os chamados *diagramas de Dynkin* associados a MCGs.

Essa estratégia se configura como um método eficaz para discernir as distintas classes de MCGs, permitindo uma análise estrutural detalhada que considera os arranjos particulares de seus elementos constituintes. Através da representação gráfica dos diagramas de Dynkin, que capturam a relação entre os componentes da MCG, é possível revelar propriedades cruciais sobre sua composição, simetria e comportamento subjacente. Com isso, definimos o seguinte.

**Definição 1.1.24.** Seja  $A = (a_{ij})$  uma MCG, com  $i, j = 1, \dots, n$ . O **diagrama de Dynkin**  $D(A)$  é o grafo cujo os vértices são indexados pelas linhas da matriz (ou seja, por  $\{1, \dots, n\}$ ) e suas arestas são descritas como segue:

- (1) Se  $a_{ij}a_{ji} \leq 4$ , então os vértices  $i$  e  $j$  são conectados por  $\max\{|a_{ij}|, |a_{ji}|\}$  arestas e, tais arestas, são equipadas com uma flecha apontando para  $i$  sempre que  $|a_{ij}| > 1$ , e apontando para  $j$  sempre que  $|a_{ji}| > 1$ .

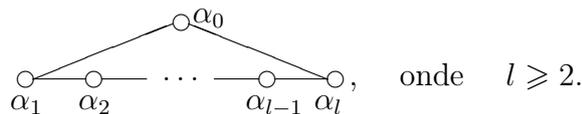
- (2) Se  $a_{ij}a_{ji} > 4$ , os vértices  $i$  e  $j$  são conectados por uma aresta com o par  $(|a_{ij}|, |a_{ji}|)$  sobre ela.

É interessante notar que a Matriz de Cartan Generalizada  $A$  é considerada indecomponível se, e somente se, o diagrama de Dynkin associado  $D(A)$  constituir um grafo conexo, ou seja, não possuir componentes isoladas.

Além disso, é importante ressaltar que para cada Matriz de Cartan Generalizada  $A$ , é possível associar um diagrama de Dynkin  $D(A)$ . Esse diagrama, assim como a própria matriz, é parte integrante da classificação que distingue entre tipos finitos, tipos afins e tipos indeterminados. Vale destacar ainda que a matriz  $A$  pode ser determinada exclusivamente pelo diagrama de Dynkin  $D(A)$ , juntamente com uma enumeração de seus vértices.

**Proposição 1.1.25.** Seja  $A$  uma MCG indecomponível.

- (1)  $A$  é do tipo finito se, e somente se, todos os seus menores principais são positivos.
- (2)  $A$  é do tipo afim se, e somente se, todos os seus menores principais próprios são positivos e  $\det(A) = 0$ .
- (3) Se  $A$  é do tipo finito ou afim, então qualquer subdiagrama próprio de  $D(A)$  é uma união de diagramas de Dynkin do tipo finito.
- (4) Se  $A$  é do tipo finito, então  $D(A)$  **não** contém ciclos. Se  $A$  é do tipo afim e  $D(A)$  contém ciclos, então  $D(A)$  é o ciclo



- (5)  $A$  é do tipo afim se, e somente se, existe  $\delta > 0$ , tal que  $A\delta = 0$ ; tal  $\delta$  é único a menos de multiplicação por uma constante.

*Demonstração.* Vamos demonstrar as afirmações (1) e (2). Começamos considerando uma submatriz principal de  $A$ , que chamaremos de  $A_I$ . Esta submatriz é de um tipo específico, que pode ser finito ou afim, e é uma matriz de Cartan generalizada. Sabemos, com base no Lema 1.1.23, que qualquer matriz de Cartan generalizada de tipo finito ou afim pode ser simetrizável. Para fazer isso, introduzimos uma matriz diagonal  $D_I$  com coeficientes diagonais positivos de forma que  $B_I = D_I A_I$  seja simétrica. A matriz  $B_I$  tem o mesmo tipo que  $A_I$ , e pelo Lema 1.1.22, isso implica que  $B_I$  é positiva e até mesmo definida se  $A_I$  for uma matriz própria ou se a matriz  $A$  for de tipo finito. Em particular, em todos esses casos, o determinante de  $B_I$  é maior que zero, o que implica que o determinante de  $A_I$  também é maior que zero.

Por outro lado, se todos os menores principais de  $A$  forem positivos, então podemos assumir que existe um vetor  $u > 0$ , tal que  $Au < 0$ . Isso implica em desigualdades da forma  $\sum_j a_{i,j}u_j < 0$  para alguns índices  $i$ . Agora, podemos eliminar as variáveis  $u_i$  para  $i > 1$  na equação  $\sum_i a_{1,i}u_i < 0$ . Para fazer isso, removemos  $a_{1,i}$  duas vezes da desigualdade  $\sum_j a_{i,j}u_j < 0$ . Como  $a_{1,i} \leq 0$  para  $i > 1$ , acabamos com uma desigualdade da forma  $\lambda u_1 < 0$ . Além disso, sabemos que  $\det(A) = \lambda \det(A')$ , onde  $A'$  é a submatriz de  $A$  definida pelos índices  $[2, n]$ . Como todos os menores principais de  $A$  são positivos, concluímos que  $\lambda > 0$  no primeiro caso e  $\lambda = 0$  no segundo caso. Em ambos os casos, as desigualdades  $u_1 > 0$  e  $\lambda u_1 < 0$  são contraditórias. Portanto, a matriz  $A$  é de tipo finito ou afim, e os casos são descritos pelo posto.

A afirmação (3) é uma consequência direta do Lema 1.1.21.

Se a matriz  $D(A)$  contém um ciclo de comprimento pelo menos 3, isso implica que a condição do Lema 1.1.23 é satisfeita. Nesse caso, a matriz  $A$  é dada pelo Lema 1.1.23. Além disso, no caso de matrizes de Cartan generalizadas, se os números  $u_i$  e  $u_i^{-1}$  forem inteiros positivos, isso implica que  $u_i = 1$ . O diagrama de Dynkin associado é o ciclo desejado.

A afirmação (5) é uma consequência direta do Teorema 1.1.20. □

Através da utilização dos diagramas de Dynkin, somos capazes de realizar a caracterização abrangente das matrizes de Cartan generalizadas. Esta abordagem possibilita a catalogação de todas as Álgebras de Kac-Moody que englobam tanto os tipos finitos quanto os tipos afins. O seguinte teorema formaliza esse processo:

**Teorema 1.1.26** ([Kac87, Teorema 4.8, p. 41]). (1) Os diagramas de Dynkin de todas as MCGs do tipo finito são da seguinte tabela:

### FINITA

$$A_l(l \geq 1) \quad \begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{---} \circ \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \qquad \qquad \alpha_{l-1} \quad \alpha_l \end{array} \quad (l+1)$$

$$B_l(l \geq 2) \quad \begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{---} \circ \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \qquad \qquad \alpha_{l-1} \quad \alpha_l \end{array} \quad (2)$$

$$C_l(l \geq 3) \quad \begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{---} \circ \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \qquad \qquad \alpha_{l-1} \quad \alpha_l \end{array} \quad (2)$$

$$D_l(l \geq 4) \quad \begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \dots \text{---} \circ \text{---} \circ \begin{array}{l} \nearrow \alpha_{l-1} \\ \searrow \alpha_l \end{array} \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \qquad \qquad \alpha_{l-3} \quad \alpha_{l-2} \end{array} \quad (4)$$

$$G_2 \quad \begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \end{array} \quad (1)$$

$$F_4 \quad \begin{array}{c} \circ \\ \backslash \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 \\ / \end{array} \quad (1)$$

$$E_6 \quad \begin{array}{c} \circ \alpha_6 \\ | \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 \end{array} \quad (3)$$

$$E_7 \quad \begin{array}{c} \circ \alpha_7 \\ | \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_6 \end{array} \quad (2)$$

$$E_8 \quad \begin{array}{c} \circ \alpha_8 \\ | \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 - \alpha_5 - \alpha_6 - \alpha_7 \end{array} \quad (1)$$

(2) Os diagramas de Dynkin de todas as MCGs do tipo afim são da seguinte tabela:

### AFIM 1

$$A_1^{(1)} \quad \begin{array}{c} \circ \\ \backslash \\ \alpha_0 - \alpha_1 \\ / \end{array}$$

$$A_l^{(1)} (l \geq 2) \quad \begin{array}{c} \circ \alpha_0 \\ / \quad \backslash \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{l-1} - \alpha_l \end{array}$$

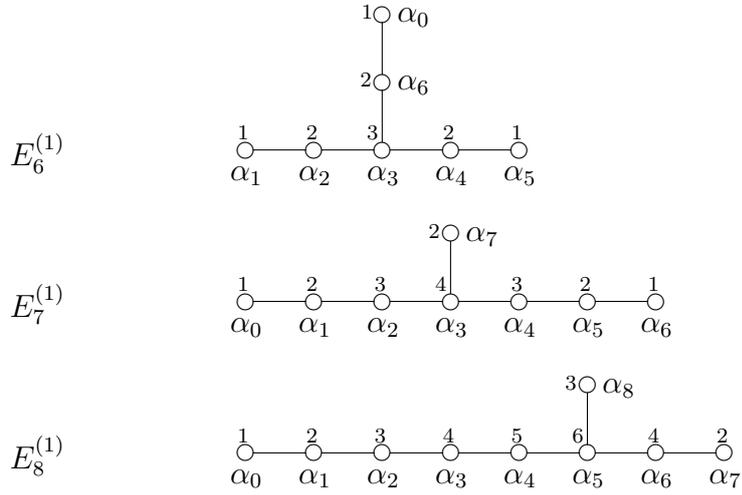
$$B_l^{(1)} (l \geq 3) \quad \begin{array}{c} \circ \alpha_0 \\ | \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \dots - \alpha_{l-1} - \alpha_l \\ \backslash \quad / \end{array}$$

$$C_l^{(1)} (l \geq 2) \quad \begin{array}{c} \alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{l-1} - \alpha_l \\ \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \end{array}$$

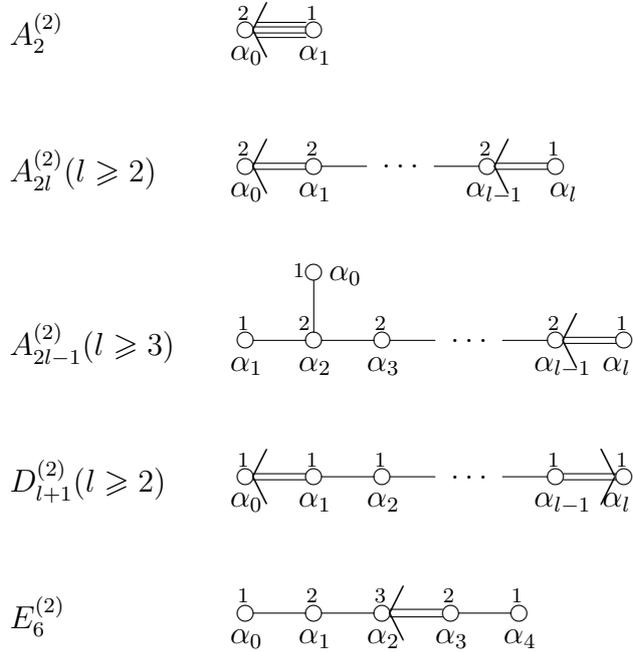
$$D_l^{(1)} (l \geq 4) \quad \begin{array}{c} \circ \alpha_0 \quad \quad \quad \circ \alpha_{l-1} \\ | \quad \quad \quad | \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \dots - \alpha_{l-2} - \alpha_l \end{array}$$

$$G_2^{(1)} \quad \begin{array}{c} \alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 \\ \backslash \quad / \quad \backslash \quad / \end{array}$$

$$F_4^{(1)} \quad \alpha_0 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 \\ \backslash \quad / \quad \backslash \quad /$$



### AFIM 2



### AFIM 3



(3) A numeração que aparece nos diagramas do item b) são as coordenadas do único vetor  $\delta = (a_1, \dots, a_l)^t$ , tal que  $A\delta = 0$  e os  $a_i$ 's são inteiros positivos relativamente primos.

**Observação 1.** Apresentamos algumas observações pertinentes em relação aos resultados discutidos até o momento. Estas observações lançam luz sobre a classificação das álgebras de Kac-Moody por meio dos diagramas de Dynkin, estabelecendo conexões significativas com as álgebras de Lie simples de dimensão finita em um corpo algebricamente fechado:

I) A classificação dos diagramas em álgebras de Kac-Moody do tipo finito coincide exatamente com a classificação dos diagramas em álgebras de Lie simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado.

II) Na tabela **FINITA**, os vértices dos diagramas são numerados com os símbolos  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ , e cada diagrama  $X_l^{(1)}$  na tabela **AFIM 1** é obtido a partir do diagrama  $X_l$  da tabela **FINITA** adicionando um vértice, que é numerado como  $\alpha_0$ , enquanto mantém a numeração original nos vértices existentes. Na linguagem da teoria de grupos, isso é equivalente a adicionar uma linha e uma coluna com o rótulo "0". Os vértices dos diagramas nas tabelas **AFIM 2** e **AFIM 3** são numerados com os símbolos  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l$ .

III) Os números entre parênteses na tabela **FINITA** representam os determinantes  $\det(A)$ . Nas tabelas **AFIM**'s, os rótulos numéricos representam os coeficientes de uma dependência linear entre as colunas da matriz  $A$ .

IV) No caso afim, existem duas classes distintas: as não torcidas, listadas na tabela **AFIM 1**, e as torcidas, listadas na tabela **AFIM 2** e **AFIM 3**.

Esta análise estabelece uma sólida base para a compreensão das álgebras de Kac-Moody e suas relações com as álgebras de Lie simples, preparando o terreno para a discussão subsequente sobre álgebra de Kac-Moody afim como extensão central de álgebra de loop.

## 1.2 Álgebras de loop e suas extensão central

As álgebras de loop são uma classe especial de álgebras relacionadas às álgebras de Lie e às álgebras de Kac-Moody. Elas surgiram a partir da necessidade de entender as simetrias em teorias físicas com dimensionalidade pequena. Uma álgebra de loop é uma extensão de uma álgebra de Lie, e sua extensão central desempenha um papel fundamental na estrutura das álgebras de Kac-Moody afim. Esta seção se dedica a investigar as propriedades das álgebras de loop, com um foco particular em sua extensão central. Essa extensão central desempenha um papel vital na teoria de representação das álgebras de Kac-Moody afim, influenciando diretamente a construção e classificação de módulos e representações.

Como falaremos sobre extensão central, iniciaremos com uma definição muito simples do que é ser um elemento central em uma álgebra de Lie.

**Definição 1.2.1.** Dizemos que um elemento  $c$  de uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é um **elemento central** de  $\mathfrak{g}$ , se  $[c, \mathfrak{g}] = 0$ .

**Definição 1.2.2.** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie. Um **2-cociclo com valores em  $\mathbb{C}$**  é uma forma bilinear  $\psi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$  satisfazendo as seguintes condições:

- (1)  $\psi(x, y) = -\psi(y, x)$  para quaisquer  $x, y \in \mathfrak{g}$ ;

(2)  $\psi([x, y], z) + \psi([y, z], x) + \psi([z, x], y) = 0$  para quaisquer  $x, y, z \in \mathfrak{g}$ .

Iniciando com uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , abrimos caminho para a concepção da extensão central 1-dimensional. Essa extensão envolve o processo de ampliar o espaço vetorial subjacente à álgebra  $\mathfrak{g}$  por uma dimensão adicional. Isso significa que, além das operações e relações já presentes em  $\mathfrak{g}$ , introduzimos um novo componente que desempenha um papel crucial nesse contexto. Vejamos abaixo de modo concreto essa construção, olhando para o seguinte espaço vetorial:

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}c.$$

Vamos definir a seguinte operação em  $\widehat{\mathfrak{g}}$  dada por,

$$[x, c]_0 := 0, \text{ para todo } x \in \mathfrak{g};$$

e para qualquer  $x, y \in \mathfrak{g}$  e  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ,

$$[x + \lambda c, y + \mu c]_0 := [x, y] + \psi(x, y)c$$

onde  $[, ]$  denota o colchete em  $\mathfrak{g}$  e  $\psi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$  é um 2-cociclo com valores em  $\mathbb{C}$ . Podemos perceber que  $\widehat{\mathfrak{g}}$ , com a operação definida anteriormente, torna-se uma álgebra de Lie com elemento central  $c$ .

A exploração da definição de álgebra de loop revela-se um processo notavelmente construtivo e enriquecedor. A relevância subjacente à investigação dessas álgebras é inegável, uma vez que nos possibilita perceber uma álgebra de Kac-Moody afim como uma extensão central unidimensional de álgebras de loop. Iniciando nosso percurso, direcionamos nossa atenção à álgebra dos polinômios de Laurent, denotada como

$$\mathcal{L} = \mathbb{C}[t, t^{-1}].$$

**Definição 1.2.3.** A **álgebra de loop** de  $\mathfrak{g}$  é a álgebra  $\mathcal{L}(\mathfrak{g}) := \mathcal{L} \otimes \mathfrak{g}$  com estrutura definida pelo seguinte colchete. Para quaisquer  $P, Q \in \mathcal{L}$  e  $x, y \in \mathfrak{g}$ :

$$[P \otimes x, Q \otimes y] := PQ \otimes [x, y].$$

Para simplificar a discussão, adotamos a convenção de utilizar a notação de colchete  $[, ]$  para denotar a operação subjacente na estrutura algébrica  $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ . É evidente que essa construção estabelece dentro do espaço  $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$  uma estrutura de álgebra de Lie. É notável perceber que essa álgebra exibe uma característica particular ao ser de dimensão infinita, denotando um cenário de riqueza estrutural e analítica que transcende os limites das álgebras de Lie de dimensão finita mais tradicionais. Vejamos agora um exemplo para ilustrar a definição.

**Exemplo 1.2.4.** Vamos considerar a álgebra de Lie de dimensão finita  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .

Sabemos ainda (Apêndice A) que podemos reescrever essa álgebra de Lie da seguinte forma:

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) = \mathbb{C}f \oplus \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}e,$$

onde  $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  e  $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . A álgebra de loop é dada pela seguinte forma:

$$\mathcal{L}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) = \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}),$$

com comutador  $[t^n \otimes x, t^m \otimes y] = t^{m+n} \otimes [x, y]$ . Como um espaço vetorial, podemos ver que  $\mathcal{L}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$  é o espaço das matrizes  $2 \times 2$  com traço nulo sobre álgebra dos polinômios de Laurent. Para este caso, também podemos verificar uma decomposição em autoespaços de  $\text{ad}(h)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) &= \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \\ &= \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes (\mathbb{C}f \oplus \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}e) \\ &= (\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathbb{C}f) \oplus (\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathbb{C}h) \oplus (\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathbb{C}e). \end{aligned}$$

### 1.3 Álgebra de Kac-Moody afim como extensão central de álgebra de loop

Nesta seção, exploramos a profunda conexão entre as álgebras de Kac-Moody afim e as álgebras de loop, destacando a importância da extensão central nesse contexto. Uma das contribuições mais notáveis desta seção é a discussão da extensão central nas álgebras de Kac-Moody afim. Analisamos como a introdução de um elemento central em uma álgebra de loop está associada a uma extensão da álgebra de Kac-Moody afim correspondente. Exploramos os efeitos dessa extensão na estrutura e propriedades das álgebras. Veremos também que uma álgebra de Kac-Moody afim é uma extensão central de uma álgebra de loop. Ela é definida por meio de geradores e relações, onde os geradores correspondem aos elementos da álgebra de loop, e as relações capturam a estrutura da extensão central. A ideia central é unirmos as duas informações vistas anteriormente, extensão central 1-dimensional e álgebras de loop, para definirmos a nossa tão esperada álgebra de Kac-Moody afim. Para atingirmos esse propósito, podemos utilizar um 2-cociclo de valores complexos  $\mathbb{C}$  na estrutura da álgebra de loop  $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ . Esse 2-cociclo é uma função  $\psi : \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \times \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}$ , cuja construção se baseia na combinação de outras funções relacionadas, resultando em uma espécie de composição dessas funções. Vamos iniciar considerando a aplicação a seguir:

$$\mathbf{K} : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C},$$

onde definimos  $\mathbf{K}(x, y) = \text{tr}(\text{ad}_x \text{ad}_y)$ , para quaisquer elementos  $x$  e  $y$  pertencentes a  $\mathfrak{g}$ . Podemos observar prontamente que a igualdade  $\mathbf{K}([x, y], z) = \mathbf{K}(x, [y, z])$  se mantém. Para simplificar os cálculos, introduzimos a notação  $(x, y) := \frac{\mathbf{K}(x, y)}{h^\vee}$ , onde  $h^\vee$  faz referência ao dual do número de Coxeter associado à álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  (Apêndice A). Utilizando essa definição, estamos aptos a introduzir outras três aplicações a partir da aplicação  $\mathbf{K}$ :

- (1)  $(\mid)_t : \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \times \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{L}$ , onde  $(P(t) \otimes x \mid Q(t) \otimes y)_t = P(t)Q(t)(x, y)$ ;
- (2)  $D : \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ , onde  $D(P(t) \otimes x) = \frac{dP(t)}{dt} \otimes x$ ;
- (3)  $\text{Res} : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $\text{Res}(\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n t^n) = c_{-1}$  para qualquer  $n \in \mathbb{Z}$ , em que os  $c_n$  são nulos, exceto para um número finito de elementos.

Vale a pena lembrar que, para qualquer que seja o polinômio de Laurent  $P$ , temos que  $\text{Res}(\frac{dP}{dt}) = 0$ . Vamos agora estabelecer a definição do nosso potencial 2-cociclo candidato, representado por  $\psi$ . Para tal propósito, consideremos a seguinte aplicação:

$$\psi : \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \times \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C},$$

onde  $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$  denota o espaço das álgebras de Lie associado à álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Nesse contexto, a aplicação  $\psi$  opera sobre pares de elementos  $(P(t) \otimes x, Q(t) \otimes y)$ , onde  $P(t)$  e  $Q(t)$  são elementos de um álgebra de loop e  $x, y$  pertencem à álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . A expressão da aplicação  $\psi$  é dada por:

$$\psi(P(t) \otimes x, Q(t) \otimes y) := \text{Res}((D(P(t) \otimes x) \mid Q(t) \otimes y)_t),$$

onde  $D(P(t) \otimes x)$  representa a derivada de  $P(t) \otimes x$  em relação a  $t$ , e o operador  $\text{Res}$  denota o resíduo de  $((D(P(t) \otimes x) \mid Q(t) \otimes y)_t)$  na variável  $t$ . Esse resíduo é avaliado no ponto onde as expressões estão definidas. Vejamos um exemplo

**Exemplo 1.3.1.** Sejam  $\mathcal{L}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$  álgebra de loop e  $t^n \otimes x$  e  $t^m \otimes y$  dois elementos de  $\mathcal{L}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$ . Então

- 1)  $D(t^n \otimes x) = nt^{n-1} \otimes x$ ;
- 2)  $(D(t^n \otimes x) \mid t^m \otimes y)_t = nt^{m+n-1}(x, y)$ ;
- 3)  $\psi(t^n \otimes x, t^m \otimes y) = \text{Res}(D(t^n \otimes x) \mid t^m \otimes y)_t = n(x, y)\delta_{m, -n}$ .

Dessa forma, estamos introduzindo um conceito relevante da teoria de álgebras de Lie, onde a interação entre elementos de álgebras de loop e a álgebra de Lie subjacente é mediada pelo operador  $\psi$ . Através dessa abordagem, buscamos explorar as propriedades de cociclos e sua aplicação na compreensão de estruturas algébricas mais complexas, como as álgebras de Kac-Moody.

**Proposição 1.3.2.** A aplicação  $\psi$  definida anteriormente é um 2-cociclo com valores em  $\mathbb{C}$  da álgebra de loop  $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ , ou seja, satisfazem as seguintes propriedades

- $\psi(P(t) \otimes x, Q(t) \otimes y) = -\psi(Q(t) \otimes y, P(t) \otimes x)$  ;
- $\psi([P(t) \otimes x, Q(t) \otimes y], S(t) \otimes z) + \psi([Q(t) \otimes y, S(t) \otimes z], P(t) \otimes x) + \psi([S(t) \otimes z, P(t) \otimes x], Q(t) \otimes y) = 0$ .

*Demonstração.* Sejam  $P, Q \in \mathcal{L}$  e  $x, y \in \mathfrak{g}$ , então:

$$\begin{aligned} \psi(P \otimes x, Q \otimes y) + \psi(Q \otimes y, P \otimes x) &= (x, y) \text{Res} \left( \frac{dP}{dt} Q + P \frac{dQ}{dt} \right) \\ &= (x, y) \text{Res} \left( \frac{d(PQ)}{dt} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora vamos considerar  $P, Q \in R \in \mathcal{L}$  e  $x, y$  e  $z \in \mathfrak{g}$ . Assim,

$$\begin{aligned} &\psi([P \otimes x, Q \otimes y], R \otimes z) + \psi([Q \otimes y, R \otimes z], P \otimes x) + \psi([R \otimes z, P \otimes x], Q \otimes y) \\ &= ([x, y], z) \text{Res} \left( \frac{d(PQ)}{dt} R \right) + ([y, z], x) \text{Res} \left( \frac{d(QR)}{dt} P \right) + ([z, x], y) \text{Res} \left( \frac{d(RP)}{dt} Q \right) \\ &= ([x, y], z) \text{Res} \left( \frac{d(PQ)}{dt} R + \frac{d(QR)}{dt} P + \frac{d(RP)}{dt} Q \right) \\ &= ([x, y], z) \text{Res} \left( \frac{d(PQR)}{dt} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Tendo estabelecido a natureza e as propriedades da aplicação  $\psi$  como um 2-cociclo fundamental, estamos agora em posição de introduzir a álgebra de Kac-Moody afim.

**Definição 1.3.3.** A **álgebra de Kac-Moody afim** é a soma direta  $\widehat{\mathfrak{g}} := \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}c$ , na qual é incorporado um elemento central formal adicional, representado por  $c$ . Nesse contexto, a estrutura de álgebra de Lie dessa entidade é estabelecida por meio da seguinte relação:

$$[f + \lambda c, g + \mu c]_0 = [f, g] + \psi(f, g)c,$$

onde  $f$  e  $g$  são elementos pertencentes a  $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ , enquanto  $\lambda$  e  $\mu$  são parâmetros pertencentes ao conjunto dos números complexos  $\mathbb{C}$ .

**Exemplo 1.3.4.** Como já sabemos que para a álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , a álgebra de loop é dada pela seguinte forma:

$$\mathcal{L}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) = \mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}),$$

com comutador  $[t^n \otimes x, t^m \otimes y] = t^{m+n} \otimes [x, y]$ . Assim, a álgebra Kac-Moody afim é:

$$\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C}) = (\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]) \oplus \mathbb{C}c,$$

com comutador dado por  $[t^n \otimes x + \lambda c, t^m \otimes y + \mu c]_0 = t^{m+n} \otimes [x, y] + n(x, y)\delta_{m, -n}c$ . E mais ainda, podemos ver como a seguinte decomposição:

$$\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C}) = (\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathbb{C}f) \oplus (\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathbb{C}e) \oplus (\mathbb{C}[t, t^{-1}] \otimes \mathbb{C}h) \oplus \mathbb{C}c.$$

Olhando um pouco mais adiante em relação a essa decomposição, podemos ver uma decomposição triângular dessa álgebra de Kac-Moody afim:

$$\widehat{\mathfrak{sl}}(2, \mathbb{C}) = \widehat{\mathfrak{n}}^+ \oplus H \oplus \widehat{\mathfrak{n}}^-.$$

onde  $\widehat{\mathfrak{n}}^+ = t\mathbb{C}[t] \otimes (\mathbb{C}f \oplus \mathbb{C}h) \oplus \mathbb{C}[t] \otimes \mathbb{C}e$ ,  $\widehat{\mathfrak{n}}^- = t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}] \otimes (\mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}h) \oplus \mathbb{C}[t^{-1}] \otimes \mathbb{C}f$  e  $H = (1 \otimes h) \oplus \mathbb{C}c$ .

Por último, particularmente  $1 \otimes \mathfrak{g}$  é uma subálgebra de  $\widehat{\mathfrak{g}}$ , em que podemos identificar  $\mathfrak{g}$  com essa subálgebra da seguinte maneira:  $x \mapsto 1 \otimes x$ . Isso será de grande utilidade na próxima sessão quando falarmos sobre a decomposição em espaços de raízes associados a subálgebra de Cartan para uma álgebra de Kac-Moody afim.

## 1.4 Sistema de raízes afim e suas propriedades

Um dos aspectos fundamentais das álgebras de Kac-Moody afim é o sistema de raízes. Esse sistema descreve as simetrias da álgebra e tem uma estrutura rica que envolve raízes simples, co-raízes, multiplicidades e a forma de Dynkin. A classificação das álgebras de Kac-Moody afim é fortemente baseada nas propriedades do sistema de raízes. Assim, buscamos fornecer uma introdução sólida ao sistema de raízes e explorar suas propriedades fundamentais. Inicialmente, iremos estabelecer as bases, comentando sobre duas ferramentas importantes, a forma bilinear invariante e o grupo de Weyl, que estendem os conceitos vistos para o caso de álgebras de Lie de dimensão finita. Posteriormente, exploraremos as álgebras de Kac-Moody Afim, onde os sistemas de raízes surgem como uma ferramenta crucial para compreender a estrutura dessas álgebras.

**Definição 1.4.1.** Dizemos que uma matriz  $A = (a_{ij})$ , de ordem  $n$ , é **simetrizável** se existir uma matriz diagonal inversível  $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ , com  $d_i \neq 0$ , e uma matriz simétrica  $B = (b_{ij})$  tal que  $A = DB$ .

Na definição acima, a matriz  $B$  é chamada de **simetrização** da matriz  $A$  e  $\mathfrak{g}(A)$  de álgebra de Lie **simetrizável**. Utilizaremos agora os conceitos vistos anteriormente para assim encontrarmos o que chamamos de **forma bilinear simétrica**.

**Definição 1.4.2.** Sejam a matriz  $A$  como na Definição 1.4.1 e uma realização  $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$  de  $A$ . Sejam também o subespaço  $\mathfrak{h}_1 = \sum_{i=1}^n \mathbb{C}\alpha_i^\vee$  em  $\mathfrak{h}$  e o seu subespaço complementar  $\mathfrak{h}_1^\perp$ . Definimos uma **forma bilinear simétrica**

$$(\cdot | \cdot) : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \longrightarrow \mathbb{C},$$

pelas seguintes equações:

- (1)  $(\alpha_i^\vee | h) = \langle \alpha_i, h \rangle d_i$  para todo  $h \in \mathfrak{h}$ , com  $i = 1, \dots, n$ ;
- (2)  $(h | h') = 0$ , para todo  $h, h' \in \mathfrak{h}_1^\perp$ .

Podemos perceber que  $(\cdot | \cdot)$  está bem definida, pois  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_1^\perp$  e  $\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee$  são linearmente independentes. E ainda mais, pelo fato de  $A = DB$ , que por igualdade temos

$$a_{ij} = d_i b_{ij} = d_i b_{ji},$$

da qual obtemos a seguinte equação:

- (3)  $(\alpha_i^\vee | \alpha_j^\vee) = \langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle d_i = a_{ji} d_i = b_{ij} d_j d_i$  para  $i, j = 1, \dots, n$ .

Com as definições, comentários e observações feitas acima, podemos extrair o seguinte lema.

**Lema 1.4.3.** Sejam a matriz  $A$  como na Definição 1.4.1 e uma realização  $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$  de  $A$ . Sejam também o subespaço  $\mathfrak{h}_1 = \sum_{i=1}^n \mathbb{C}\alpha_i^\vee$  em  $\mathfrak{h}$  e o seu subespaço complementar  $\mathfrak{h}_1^\perp$ . A forma bilinear  $(\cdot | \cdot)$ , satisfaz o seguinte:

- (1) O núcleo da restrição da forma bilinear  $(\cdot | \cdot)$  ao subespaço  $\mathfrak{h}_1$  coincide com  $\mathfrak{c}$  (centro de  $\mathfrak{g}(A)$ );
- (2) A forma bilinear  $(\cdot | \cdot)$  é não degenerada em  $\mathfrak{h}$ .

*Demonstração.*

- (1) O núcleo da forma bilinear  $(\cdot | \cdot)$  é dado pelo conjunto  $\{h \in \mathfrak{h}_1 \mid (\alpha_i^\vee | h) = \langle \alpha_i, h \rangle = 0, \text{ para todo } i = 1, \dots, n\}$ , pois  $\{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\}$  é uma base de  $\mathfrak{h}_1$ . Pela Proposição 1.1.13, concluímos que o núcleo coincide com  $\mathfrak{c}$ .
- (2) Seja  $h \in \mathfrak{h}$  qualquer, então temos

$$\left( \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i^\vee \mid h \right) = \sum_{i=1}^n c_i (\alpha_i^\vee \mid h) = \sum_{i=1}^n c_i d_i \langle \alpha_i, h \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n c_i d_i \alpha_i, h \right\rangle,$$

que mostra que  $(\cdot | \cdot)$  é não degenerada em  $\mathfrak{h}$ .

□

Dado que a forma bilinear  $(\cdot | \cdot)$  é não degenerada em  $\mathfrak{h}$ , ela induz um isomorfismo

$$\begin{aligned}\nu : \mathfrak{h} &\rightarrow \mathfrak{h}^* \\ h &\mapsto \nu(h) = (h | \cdot)\end{aligned}$$

Ainda denotando por  $(\cdot | \cdot)$  a forma bilinear induzida em  $\mathfrak{h}^*$ . Temos o seguinte: para quaisquer  $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*$ ,

$$(\alpha | \beta) := (\nu^{-1}(\alpha) | \nu^{-1}(\beta)) = (h_\alpha | h_\beta).$$

Seguindo (1) e (3) da Definição 1.4.2 temos a seguinte equação

$$(\alpha_i | \alpha_j) = \langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle d_j^{-1} = a_{ji} d_j^{-1} = b_{ij} = a_{ij} d_i^{-1}, \quad (1.2)$$

o que nos motiva a enunciar o seguinte teorema [Kac87].

**Teorema 1.4.4** ([Kac87, Teorema 2.2, p. 15]). Consideremos  $\mathfrak{g}(A)$  como uma álgebra de Lie simetrizável, onde  $A$  é a matriz conforme a Definição 1.4.1. Nesse contexto, existe uma forma bilinear simétrica não degenerada em  $\mathfrak{g}(A)$ , cujos valores pertencem a  $\mathbb{C}$ , e é representada por  $(\cdot | \cdot)$ , satisfazendo as seguintes condições:

- (1) A forma bilinear  $(\cdot | \cdot)$  é invariante, isto é,  $([X, Y] | Z) = (X | [Y, Z])$  para todos  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}(A)$ ;
- (2) Restringindo  $(\cdot | \cdot)$  ao subconjunto  $\mathfrak{h}$ , ela é definida pelas condições 1) e 2) da Definição 1.4.1 e é não degenerada;
- (3) Para quaisquer  $\mathfrak{g}_\alpha$  e  $\mathfrak{g}_\beta$ , a forma bilinear resulta em zero se  $\alpha + \beta \neq 0$ ;
- (4) Restringindo  $(\cdot | \cdot)$  a  $\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}$ , ela é não degenerada para  $\alpha \neq 0$ , implicando que  $\mathfrak{g}_\alpha$  e  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  são emparelhados de forma não degenerada por  $(\cdot | \cdot)$ ;
- (5) Para  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ ,  $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ , e  $\alpha \in \Delta$ , a relação  $[X, Y] = (X | Y)\nu^{-1}(\alpha)$  é válida.

No contexto da teoria de álgebras de Kac-Moody, abordaremos agora as propriedades das Matrizes Cartan Generalizadas (MCG) simetrizáveis. Considerando uma matriz  $A = (a_{ij})$  de ordem  $n$  como uma MCG simetrizável, é possível realizarmos uma decomposição de  $A$  da forma  $\text{diag}(d_1, \dots, d_n)(b_{ij})$ . Nessa expressão,  $d_i$  representa números racionais positivos e  $(b_{ij})$  é uma matriz simétrica com elementos racionais. Esta decomposição é sempre viável, sendo que, no caso de  $A$  ser indecomponível, a matriz  $\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  é única, até um fator constante.

Um aspecto crucial dessa análise é a associação de uma forma bilinear simétrica não degenerada  $(\cdot | \cdot)$  à decomposição da MCG. Essa forma bilinear, quando fixada, proporciona uma expressão padrão para a MCG, estabelecendo uma relação com os elementos  $\alpha_i$  da álgebra de Kac-Moody. A extensão dessa forma bilinear de  $\mathfrak{h}$  para uma forma bilinear invariante simétrica  $(\cdot | \cdot)$  em toda a álgebra de Kac-Moody  $\mathfrak{g}(A)$  é essencial, sendo garantida pelo Teorema 1.4.4. Esta forma estendida, única e satisfazendo propriedades fundamentais, é denominada a *forma bilinear invariante padrão*.

**Definição 1.4.5.** Seja  $\mathfrak{g}(A)$  a álgebra de Kac-Moody, onde  $A = (a_{ij})$  é uma matriz de ordem  $n$ . A **reflexão fundamental**  $r_i$  do espaço dual  $\mathfrak{h}^*$  para cada  $i = 1, \dots, n$  é dada por

$$r_i(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i, \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

A reflexão fundamental  $r_i$  age sobre um elemento  $\lambda$  em  $\mathfrak{h}^*$ , ajustando-o pela subtração de um múltiplo do vetor  $\alpha_i$  dual a co-raiz correspondente. Em termos específicos,  $r_i(\alpha_j) = \alpha_j - \langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i = \alpha_j - a_{ij} \alpha_i \in Q$  para  $j \neq i$  e  $r_i(\alpha_i) = -\alpha_i$ . Isso resulta em  $r_i Q \subset Q$ , destacando a relação fundamental da reflexão  $r_i$  com o conjunto de raízes  $Q$ . Essa definição é crucial para a compreensão da estrutura algébrica e das propriedades fundamentais das álgebras de Kac-Moody.

Preparando o terreno para a definição iminente do grupo de Weyl, consideremos o conjunto  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \mathfrak{h}^*$ , que é linearmente independente. Podemos estender esse conjunto para obter uma base completa para  $\mathfrak{h}^*$ . Fixando um índice  $i$ , escrevemos a matriz  $R_i$  da reflexão fundamental  $r_i$  nessa base estendida. Notavelmente, observamos que  $\det(R_i) = -1$  e que  $R_i$  é sua própria inversa, implicando  $r_i^2 = \text{Id}$ . Os pontos fixos de  $r_i$ , representados por  $H_i = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* : \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle = 0\}$ , formam um hiperplano em  $\mathfrak{h}^*$ . Além disso, considerando  $r_i(\alpha_i) = -\alpha_i$ , concluímos que  $r_i$  age como uma reflexão para todo  $i = 1, \dots, n$ . Essas observações e propriedades nos fornecem a base para a subsequente definição do grupo de Weyl.

**Definição 1.4.6.** Seja  $\mathfrak{g}(A)$  uma álgebra de Kac-Moody. Definimos o **Grupo de Weyl**  $W$  de  $\mathfrak{g}(A)$  como o subgrupo dos automorfismos de  $\mathfrak{h}^*$  gerados por todas as reflexões fundamentais associadas às raízes simples  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

Quando é necessário destacar a dependência da matriz  $A$ , representamos o Grupo de Weyl como  $W(A)$ .

**Definição 1.4.7.** Uma raiz  $\alpha \in \Delta$  é chamada **raiz real** se existe  $w \in W$  tal que  $w(\alpha)$  é uma raiz simples. Denotamos por  $\Delta^{\text{re}}$ ,  $\Delta_+^{\text{re}}$  e  $\Delta_-^{\text{re}}$  o conjunto das raízes reais, raízes reais positivas e raízes reais negativas, respectivamente.

Podemos perceber facilmente que, se  $\alpha \in \Delta^{re}$ , então  $\alpha = w(\alpha_i)$  para algum  $\alpha_i \in \Pi$  e  $w \in W$ , pois os elementos de  $W$  são automorfismos. Podemos definir a reflexão  $r_\alpha$  com respeito a  $\alpha \in \Delta^{re}$  por

$$r_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha, \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

A proposição seguinte demonstra que as raízes reais possuem todas as características clássicas associadas a elas em uma álgebra de Kac-Moody. Esta abordagem generaliza conceitos conhecidos das álgebras de Lie finitas para o contexto mais amplo de álgebras de Kac-Moody. A Proposição 1.4.8 estabelece uma série de propriedades fundamentais dessas raízes. Vejamos abaixo.

**Proposição 1.4.8.** Seja  $\alpha$  uma raiz real de uma álgebra de Kac-Moody  $\mathfrak{g}(A)$ . Então,

- a)  $\text{mult}(\alpha) = 1$ .
- b)  $k\alpha$  é uma raiz se, e somente se,  $k = \pm 1$ .
- c) Se  $\beta \in \Delta$ , então existem inteiros não negativos  $p$  e  $q$  relacionados pela equação

$$p - q = \langle \beta, \alpha^\vee \rangle,$$

tal que  $\beta + k\alpha \in \Delta \cup \{0\}$  se, e somente se,  $-p \leq k \leq q$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

- d) Suponha que  $A$  é simetrizável e seja  $(\cdot | \cdot)$  a forma bilinear invariante padrão em  $\mathfrak{g}(A)$ . Então,
  - (i)  $(\alpha | \alpha) > 0$ ;
  - (ii)  $\alpha^\vee = 2\nu^{-1}(\alpha)/(\alpha | \alpha)$ ;
  - (iii) se  $\alpha = \sum_i k_i \alpha_i$ , então  $k_i(\alpha_i | \alpha_i) \in (\alpha | \alpha)\mathbb{Z}$ .
- e) Devido  $\pm\alpha \notin \Pi$ , existe  $i$  tal que

$$|\text{ht}(r_i(\alpha))| < |\text{ht}(\alpha)|.$$

*Demonstração.* Já estabelecemos os pontos (i), (ii) e (iii) para raízes simples, demonstrando que essas propriedades são preservadas quando aplicamos as transformações do grupo de Weyl. A conclusão resulta diretamente dessa invariância.

A última afirmação envolve uma análise mais detalhada. Tomamos  $\alpha$  como uma raiz positiva real, e buscamos aquelas  $\alpha_i$  tais que, para cada  $i$ , a altura da reflexão  $r_i(\alpha)$  é maior ou igual à altura de  $\alpha$ . Isto é,  $|\text{ht}(r_i(\alpha))| \geq |\text{ht}(\alpha)|$ .

Essa condição implica que, para cada  $i$ , o produto interno  $\langle \alpha_i^\vee, \alpha \rangle$  é não negativo, indicando que  $-\alpha$  está na câmara dominante para o sistema de raízes dual. Nesse contexto,

$v(\alpha) - \alpha$ , para qualquer  $v$  no grupo de Weyl, é uma combinação linear não negativa de raízes positivas.

Aplicamos esse resultado a  $v = w^{-1}$  com  $\alpha = w(\alpha_i)$ , obtendo  $\alpha_i - \alpha$  como uma combinação linear não negativa de raízes positivas. Isso implica, em termos de alturas, que  $\text{ht}(\alpha_i) \geq \text{ht}(\alpha)$ . Como resultado, concluímos que  $\alpha$  é uma raiz simples.  $\square$

Após a demonstração da proposição anterior, podemos agora discutir a interpretação subsequente. Considere uma MCG simetrizável, denotada por  $A$ , e  $(\cdot | \cdot)$  seja a forma bilinear invariante padrão associada. Ao contemplar uma raiz real específica, digamos  $\alpha$ , observamos que a norma ao quadrado ( $|\alpha|^2$ ) dessa raiz é igual ao produto interno  $((\alpha | \alpha))$ .

Com base na Proposição 1.4.8, sabemos que  $(\alpha | \alpha) = (\alpha_i | \alpha_i)$  para alguma raiz simples  $\alpha_i$ . Portanto, conseguimos expressar  $|\alpha|^2$  da seguinte forma:

$$|\alpha|^2 = (\alpha | \alpha) = (w(\alpha_i) | w(\alpha_i)) = (\alpha_i | \alpha_i) = |\alpha_i|^2$$

Essa relação enfatiza que a norma ao quadrado de uma raiz real  $\alpha$  é sempre igual à norma ao quadrado de uma raiz simples  $\alpha_i$ , onde  $w$  denota um elemento do grupo de Weyl associado a  $A$ . Essa descoberta ilustra uma propriedade notável e útil das MCG's simetrizáveis, estabelecendo uma conexão entre as normas de raízes reais e raízes simples por meio da ação do grupo de Weyl.

**Definição 1.4.9.** Dizemos que  $\alpha$  é uma raiz real **curta** (ou **longa**) se

$$(\alpha | \alpha) = \min_i (\alpha_i | \alpha_i) \text{ (para raiz curta)}$$

ou

$$(\alpha | \alpha) = \max_i (\alpha_i | \alpha_i) \text{ (para raiz longa)}.$$

Essas categorias não dependem da escolha da forma padrão.

Seguindo o mesmo raciocínio apresentado anteriormente, começamos observando que nem toda raiz em álgebras de Kac-Moody é real. Com base nisso, introduzimos a definição de raiz imaginária.

**Definição 1.4.10.** Uma raiz  $\alpha$  que não é real é denominada **raiz imaginária**. Denotamos por  $\Delta^{\text{im}}$ ,  $\Delta_+^{\text{im}}$  e  $\Delta_-^{\text{im}}$  o conjunto de todas as raízes imaginárias, raízes imaginárias positivas e raízes imaginárias negativas, respectivamente.

Essa definição amplia nossa compreensão das raízes em álgebras de Kac-Moody, incluindo aquelas que são puramente imaginárias. A categorização das raízes imaginárias em conjuntos específicos oferece uma estrutura organizada para análise e estudo mais aprofundado.

Pela definição, expressamos as raízes como a união disjunta de raízes reais e raízes imaginárias da seguinte forma:

$$\Delta = \Delta^{\text{re}} \sqcup \Delta^{\text{im}}.$$

Adicionalmente, decompondo as raízes reais, temos  $\Delta^{\text{re}} = \Delta_+^{\text{re}} \sqcup (-\Delta_+^{\text{re}})$  e para as raízes imaginárias, temos  $\Delta^{\text{im}} = \Delta_+^{\text{im}} \sqcup (-\Delta_+^{\text{im}})$ . Referente as raízes imaginárias, elas possuem as seguintes propriedades elencadas na proposição abaixo [Kac87].

**Proposição 1.4.11** ([Kac87, Proposição 5.2, p. 51]). (1) O conjunto  $\Delta_+^{\text{im}}$  é  $W$ -invariante.

(2) Para todo  $\alpha \in \Delta_+^{\text{im}}$ , existe um único  $\beta \in \Delta_+^{\text{im}}$ , com  $\langle \beta, \alpha_i^V \rangle \leq 0$ , que é único na órbita  $W \cdot \alpha$ .

(3) Se  $A$  é simetrizável e  $(\cdot | \cdot)$  é a forma bilinear invariante padrão, então uma raiz  $\alpha$  é imaginária se, e somente se,  $(\alpha | \alpha) \leq 0$ .

Um fato interessante da proposição anterior destaca uma característica interessante relacionada às raízes imaginárias em álgebras de Kac-Moody. Especificamente, quando a matriz  $A$  é de tipo finito, a álgebra de Kac-Moody associada não apresentará raízes imaginárias. Essa observação é fundamentada na simetrizabilidade da matriz nesse contexto específico.

Para esclarecer, em álgebras de Lie de tipo finito, a matriz associada à forma bilinear invariante padrão é sempre simetrizável. Assim, considerando uma raiz imaginária  $\alpha$ , ela deve satisfazer a condição  $(\alpha | \alpha) \leq 0$ . No entanto, devido à natureza finita dessa álgebra, a forma bilinear é sempre positiva, criando uma contradição em relação à condição mencionada anteriormente.

Essa ausência de raízes imaginárias em álgebras de Kac-Moody de tipo finito representa uma particularidade significativa que diferencia esse cenário de álgebras mais gerais. Essa observação adiciona uma camada de compreensão à estrutura das álgebras de Kac-Moody, ressaltando as implicações das propriedades finitas em relação à presença ou ausência de raízes imaginárias. Com isso, temos o seguinte teorema.

**Teorema 1.4.12** ([Kac87, Teorema 5.6, p. 53]). Considere uma MCG indecomponível  $A$ . Algumas propriedades distintas relacionadas às raízes imaginárias:

(1) Se a álgebra  $A$  é do tipo finito, então o conjunto de raízes imaginárias  $\Delta^{\text{im}}$  é vazio. Em outras palavras, a álgebra de Kac-Moody  $\mathfrak{g}(A)$  não possui raízes imaginárias neste cenário.

(2) Se  $A$  é do tipo afim, então o conjunto de raízes imaginárias positivas é especificado como

$$\Delta_+^{\text{im}} = \{n\delta \mid n \in \mathbb{N}\},$$

onde  $\delta$  é uma raiz especial definida como  $\delta = \sum_{i=0}^l a_i \alpha_i$ . Aqui, os  $a_i$ 's são as etiquetas associadas aos vértices do diagrama de Dynkin conforme registrado nas tabelas **AFIM**'s, e  $\alpha_i$  são os vértices correspondentes do diagrama.

- (3) Quando  $A$  é do tipo indeterminado, existe uma raiz imaginária positiva  $\alpha = \sum_i k_i \alpha_i$ , com os coeficientes  $k_i$  todos positivos, e para cada vértice  $i = 1, \dots, n$ , a condição  $\langle \alpha, \alpha_i^V \rangle < 0$  é satisfeita.

A álgebra de Kac-Moody  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ , considerando uma matriz  $A$  do tipo afim, fornece elementos fundamentais para nossa análise. Destacamos a subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$ , o conjunto  $\Pi = \{\alpha_0, \dots, \alpha_l\} \subset \mathfrak{h}^*$  das raízes simples,  $\Pi^V = \{\alpha_0^V, \dots, \alpha_l^V\} \subset \mathfrak{h}$  das coraízes simples,  $\Delta$  como o sistema de raízes, e  $Q$  e  $Q^V$  como os reticulados de raízes e coraízes, respectivamente.

Introduzimos a subálgebra  $\dot{\mathfrak{g}}$  de  $\mathfrak{g}$  gerada por  $e_i$  e  $f_i$  (vistos como álgebras de Lie). Notamos que  $\dot{\mathfrak{g}}$  é uma álgebra de Kac-Moody associada à matriz  $\dot{A}$ , obtida removendo a linha 0 e a coluna 0 de  $A$ . Em relação a  $\dot{\mathfrak{g}}$ , os elementos  $e_i$  e  $f_i$  ( $i = 1, \dots, l$ ) atuam como geradores de Chevalley, e  $\dot{\mathfrak{h}} = \dot{\mathfrak{g}} \cap \mathfrak{h}$  representa a subálgebra de Cartan. Adicionalmente,  $\dot{\Pi} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \dot{\mathfrak{h}}^*$  constitui a base de raízes, e  $\dot{\Pi}^V = \{\alpha_1^V, \dots, \alpha_l^V\} \subset \dot{\mathfrak{h}}$  é a base de coraízes. Observamos que  $\dot{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}(\dot{A})$  é uma álgebra de Lie simples de dimensão finita, cujo diagrama de Dynkin  $S(\dot{A})$  é derivado pela remoção do vértice 0 de  $S(A)$ .

O conjunto  $\dot{\Delta} = \Delta \cap \dot{\mathfrak{h}}^*$  representa o sistema de raízes de  $\dot{\mathfrak{g}}$ , sendo finito e composto exclusivamente por raízes reais. Definimos  $\dot{\Delta}_+ = \dot{\Delta} \cap \Delta_+$  como o conjunto de raízes positivas, e caracterizamos  $\dot{\Delta}_s$  e  $\dot{\Delta}_l$  como as raízes curtas e longas de  $\dot{\Delta}$ , respectivamente. Ademais, estabelecemos  $\dot{Q} = \mathbb{Z}\dot{\Delta}$ .

Do Teorema 1.4.12, item ii), concluímos que o conjunto de raízes imaginárias e raízes imaginárias positivas da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  assume a forma:

$$\Delta^{\text{im}} = \{\pm\delta, \pm 2\delta, \dots\} \text{ e } \Delta_+^{\text{im}} = \{\delta, 2\delta, \dots\}.$$

A próxima proposição descreve o conjunto das raízes reais  $\Delta^{\text{re}}$  e raízes reais positivas  $\Delta_+^{\text{re}}$  da álgebra de Lie associada a uma MCG do tipo afim em termos de  $\dot{\Delta}$  e  $\delta$ , no qual usaremos bastante.

**Proposição 1.4.13** ([Kac87, Proposição 6.3, p. 66]). Considere a álgebra de Kac-Moody  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ , em que  $A$  pertence a tabela AFIM  $r$ . Então,

$$(1) \quad \Delta^{\text{re}} = \begin{cases} \dot{\Delta} + \delta\mathbb{Z} & \text{se } r = 1, \\ (\dot{\Delta}_s + \delta\mathbb{Z}) \cup (\dot{\Delta}_l + r\delta\mathbb{Z}) & \text{se } r = 2 \text{ ou } 3, \text{ mas} \\ & A \text{ não é do tipo } A_{2l}^{(2)}, \\ \left(\frac{1}{2}\dot{\Delta}_l + \frac{\delta}{2}(-1 + 2\mathbb{Z})\right) \cup (\dot{\Delta}_s + \delta\mathbb{Z}) \cup (\dot{\Delta}_l + 2\delta\mathbb{Z}) & \text{se } A \text{ é do tipo } A_{2l}^{(2)}. \end{cases}$$

$$(2) \Delta^{\text{re}} + r\delta = \Delta^{\text{re}}.$$

$$(3) \Delta_+^{\text{re}} = \{\alpha \in \Delta^{\text{re}} \mid n > 0\} \cup \dot{\Delta}_+.$$

Agora, utilizando o mesmo contexto da álgebra de Kac-Moody e a mesma raiz imaginária  $\delta$ , já vista anteriormente, introduzimos um elemento crucial,  $\theta$ . Este elemento é expresso como

$$\theta = \delta - a_0\alpha_0 = \sum_{i=1}^l a_i\alpha_i \in \dot{Q}, \quad (1.3)$$

onde  $\dot{Q}$  é o conjunto de raízes de  $\dot{\mathfrak{g}}$ . Através do isomorfismo de  $\nu$ , já visto anteriormente, podemos enfatizar que  $\theta = a_0\nu(\theta^\vee)$ , onde  $|\theta^\vee|^2 = 2a_0^{-1}$ . Além disso, temos a relação  $\alpha_0^\vee = \nu^{-1}(\delta - \theta)$ . Vale ressaltar que, no caso específico em que  $A$  pertence à tabela **AFIM 1**, temos  $a_0 = 1$ , resultando em  $\theta = \nu(\theta^\vee)$  e  $|\theta^\vee|^2 = 2$ .

Essa introdução do elemento  $\theta$  e suas relações associadas desempenha um papel crucial na compreensão mais ampla da estrutura e das propriedades específicas da álgebra de Kac-Moody. Assim, temos a seguinte proposição.

**Proposição 1.4.14** ([Kac87, Proposição 6.4, p. 67]). Considere a seguinte caracterização para  $\theta$ :

- (1) Para  $A$  pertencente à tabela **AFIM 1** ou do tipo  $A_{2l}^{(2)}$ , a raiz  $\theta$  pertence ao conjunto de raízes longas positivas  $(\dot{\Delta}_+)_l$ . Além disso,  $\theta$  é a única raiz em  $\dot{\Delta}$  com a máxima altura possível ( $= h - a_0$ ).
- (2) Se  $A$  está na tabela **AFIM 2** ou **AFIM 3** e não é do tipo  $A_{2l}^{(2)}$ , então a raiz  $\theta$  pertence ao conjunto de raízes curtas positivas  $(\dot{\Delta}_+)_s$ . Nesse contexto,  $\theta$  é a única raiz em  $\dot{\Delta}$  com a altura máxima ( $h - 1$ ).

A menos que explicitamente mencionado de outra forma, ao considerarmos uma matriz de tipo finito  $A$ , procederemos à normalização da forma invariante padrão  $(\cdot \mid \cdot)$  em  $\mathfrak{g}(A)$  seguindo a condição:

$$(\alpha \mid \alpha) = 2, \text{ se } \alpha \in \Delta_l,$$

Denominaremos tal forma normalizada como a "forma invariante normalizada".

As afirmações subsequentes são fundamentais para a compreensão de que a estrutura da álgebra de Kac-Moody guarda semelhanças notáveis com as construções previamente exploradas no Apêndice A, notadamente aquelas relacionadas aos geradores de Chevalley em álgebras de Lie de dimensão finita.

**Proposição 1.4.15.** Considere a decomposição em espaços de raízes de uma álgebra de Kac-Moody  $\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{\alpha \in Q} \mathfrak{g}_\alpha$ . Nesse contexto, as seguintes propriedades se aplicam:

- (1) Para cada  $\alpha, \beta \in Q$ , temos  $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ .
- (2) Seja  $\omega$  a involução de Chevalley e  $\alpha \in Q$ . Então,  $\omega(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$ .
- (3) Para todo  $\alpha \in \Delta$ ,  $\alpha \neq 0$ , temos  $(\mathfrak{g}_\alpha | \mathfrak{g}_{-\alpha}) \neq 0$ . Como resultado, no caso em que  $\alpha \in \Delta^{\text{re}}$ , para  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$  e  $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ , ambos distintos de zero, tem-se  $(X | Y) \neq 0$ .

*Demonstração.* (1) Tomemos  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$  e  $Y \in \mathfrak{g}_\beta$  arbitrários. Para qualquer  $H \in \mathfrak{h}$ , as operações de comutação  $[H, X] = \langle \alpha, H \rangle X$  e  $[H, Y] = \langle \beta, H \rangle Y$  são expressas. Ao utilizar a identidade de Jacobi, obtemos:

$$\begin{aligned}
[H, [X, Y]] &= [[Y, H], X] + [[H, X], Y] = -[\langle \beta, H \rangle Y, X] + [\langle \alpha, H \rangle X, Y] \\
&= \langle \beta, H \rangle [X, Y] + \langle \alpha, H \rangle [X, Y] \\
&= \langle \alpha + \beta, H \rangle [X, Y].
\end{aligned}$$

Isso implica que  $[X, Y] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$  para quaisquer  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$  e  $Y \in \mathfrak{g}_\beta$ .

- (2) Para  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ , temos  $[H, X] = \langle \alpha, H \rangle X$  para todo  $H \in \mathfrak{h}$ . Logo,

$$\begin{aligned}
[H, X] = \langle \alpha, H \rangle X &\Rightarrow \omega([H, X]) = \omega(\langle \alpha, H \rangle X) \Rightarrow [\omega(H), \omega(X)] = \langle \alpha, H \rangle \omega(X) \\
&\Rightarrow [-H, \omega(X)] = \langle \alpha, H \rangle \omega(X) \\
&\Rightarrow [H, \omega(X)] = \langle -\alpha, H \rangle \omega(X).
\end{aligned}$$

Assim,  $\omega(X) \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  para todo  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ .

- (3) Do Teorema 1.4.4, deduzimos que a forma  $(\cdot | \cdot)$  restrita à  $\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}$  é não degenerada. Consequentemente,  $\mathfrak{g}_\alpha$  e  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$  são pareados de forma não degenerada por  $(\cdot | \cdot)$ . Suponha que  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$  seja tal que  $(X | W) = 0$  para todo  $W \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ . Para qualquer  $Y + Z \in \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}$ , temos que  $(X | Y + Z) = (X | Y) + (X | Z) = 0$ , pois  $(X | Z) = 0$  por hipótese, e  $(X | Y) = 0$  devido a  $\alpha + \alpha \neq 0$  (Teorema 1.4.4). Portanto,  $X \in \mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}$ , implicando  $X = 0$  e, portanto,  $(\mathfrak{g}_\alpha | \mathfrak{g}_{-\alpha}) \neq 0$ . Quando  $\alpha$  é uma raiz real, a Proposição 1.4.8, item, assegura que  $\dim(\mathfrak{g}_\alpha) = \dim(\mathfrak{g}_{-\alpha}) = 1$ . Consideremos  $\{X\}$  e  $\{Y\}$  como bases de  $\mathfrak{g}_\alpha$  e  $\mathfrak{g}_{-\alpha}$ , respectivamente. Necessariamente,  $(X | Y) \neq 0$ , caso contrário  $\mathfrak{g}_\alpha = 0$ . Logo,  $X \in \mathfrak{g}_\alpha$  e  $Y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ , com  $X, Y \neq 0$ , implica  $(X | Y) \neq 0$ . □

**Teorema 1.4.16.** A álgebra de Kac-Moody afim  $\widehat{\mathfrak{g}}$  pode ser representada por geradores  $(E_i)_{0 \leq i \leq n}$ ,  $(F_i)_{0 \leq i \leq n}$  e  $(H_i)_{0 \leq i \leq n}$ , com as seguintes propriedades

- (1)  $[H_i, H_j] = 0$ , para todo  $i$  e  $j$ ;
- (2)  $[E_i, F_j] = \delta_{i,j} H_i$  para todo  $i$  e  $j$ ;

$$(3) [H_i, E_j] = a_{ij}E_j \text{ e } [H_i, F_j] = -a_{ij}F_j;$$

$$(4) \text{ ad}(E_i)^{1-a_{ij}}(E_j) = 0 \text{ e } \text{ ad}(F_i)^{1-a_{ij}}(F_j) = 0 \text{ para } i \neq j.$$

onde  $A = (a_{ij})_{0 \leq i, j \leq n}$  é uma matriz de Cartan generalizada associada a álgebra de Kac-Moody afim  $\widehat{\mathfrak{g}}$ .

*Demonstração.* Consideremos uma álgebra de Lie simples  $\mathfrak{g}$  munida de geradores de Chevalley  $e_i, f_i, h_i$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ . O ponto principal consiste em generalizar esses geradores para a álgebra de Kac-Moody afim  $\widehat{\mathfrak{g}}$ .

Iniciamos a extensão dos geradores definindo os seguintes elementos

$$E_i = 1 \otimes e_i, \quad F_i = 1 \otimes f_i, \quad H_i = 1 \otimes h_i \quad \text{para } i \in \{1, \dots, n\}.$$

Consideremos agora a seguinte decomposição  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus_{\alpha \in \dot{\Delta}} \mathfrak{g}_\alpha$ , onde  $\dot{\Delta}$  denota o conjunto de raízes da álgebra de Lie simples  $\mathfrak{g}$ .

Cada espaço de raiz  $\mathfrak{g}_\alpha$  se relaciona a uma raiz  $\alpha$  pertencente a  $\mathfrak{h}^*$ . Além disso, como  $\dim(\mathfrak{g}_\alpha) = 1$  para  $\alpha \in \dot{\Delta}$ , existe uma única raiz longa  $\theta \in \dot{\Delta}$ , satisfazendo  $\theta + \alpha_i \notin \dot{\Delta} \cup \{0\}$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Consideremos agora a involução linear  $\omega$  em  $\mathfrak{g}$ , com base nos respectivos geradores de Chevalley de  $\mathfrak{g}$ , dada por  $\omega(e_i) = -f_i$ ,  $\omega(f_i) = -e_i$  e  $\omega(h_i) = -h_i$ . Vamos agora definir a seguinte forma bilinear  $(, ) : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathbb{C}$  com  $(\alpha_i, \alpha_j) = \frac{a_{i,j}}{d_i}$ , onde  $d_i$  são inteiros positivos (primos entre si), e  $B = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)A$  é simétrica.

Podemos escolher, meticulosamente,  $f_0$  em  $\mathfrak{g}_\theta$  de tal modo que  $(f_0, \omega(f_0)) = -\frac{2h^\vee}{(\theta, \theta)}$ , onde  $h^\vee$  é o número dual de Coxeter. Definimos  $e_0 = -\omega(f_0) \in \mathfrak{g}_{-\theta}$ .

Com estas considerações, basta definirmos  $E_0 = t \otimes e_0$ ,  $F_0 = t^{-1} \otimes f_0$ , e  $H_0 = [E_0, F_0]$ . com isso, podemos perceber que os geradores expandidos  $E_i, F_i, H_i$  para  $i \in \{0, 1, \dots, n\}$  satisfazem as relações de Chevalley-Serre inerentes à álgebra de Kac-Moody afim  $\widehat{\mathfrak{g}}$ .  $\square$

Ao analisarmos o teorema acima, podemos perceber que ele revela que as álgebras de Kac-Moody afins se apresentam como generalizações naturais das álgebras de Lie semi-simples de dimensão finita. Por sua vez, a Proposição 1.4.15 estabelece propriedades fundamentais da álgebra de Kac-Moody  $\mathfrak{g}(A)$ , relacionadas à decomposição em espaços de raízes. Ela demonstra que a álgebra satisfaz propriedades de fechamento sob o comutador, apresenta simetria em relação à involução de Chevalley e exibe um emparelhamento não degenerado entre espaços de raízes opostas.

**Exemplo 1.4.17.** Novamente abordando o caso da álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , já sabemos que sua matriz de Cartan é  $A = (2)$ , o dual de Coxeter  $h^\vee = 2$  e  $\dot{\Delta} = \{\alpha, -\alpha\}$ , onde  $\alpha(h) = 2$ . A raiz longa é  $\theta = \alpha$  e então  $(\mathfrak{sl}(2))_\theta = \mathbb{C}e$ , o que implica que  $f_0 = \lambda e$ , com

$\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Assim,

$$(f_0, \omega(f_0)) = -\lambda^2(e, f) = -\lambda^2 \frac{4}{2} = -2\lambda^2.$$

Por outro lado, como  $(\theta, \theta) = (\alpha, \alpha) = 2$ , temos  $(f_0, \omega(f_0)) = \frac{-2h^\vee}{(\theta, \theta)} = -2$ , o que implica  $\lambda^2 = 1$ . Fixando  $\lambda = 1$ , temos os seguintes geradores:  $E_1 = 1 \otimes e$ ;  $F_1 = 1 \otimes f$ ;  $H_1 = 1 \otimes h$ ;  $E_0 = t \otimes f$ ,  $F_0 = t^{-1} \otimes e$  e

$$H_0 = [E_0, F_0] = 1 \otimes [f, e] + (f, e)c = 2c - H_1.$$

Esses geradores cumprem todas as relações de Chevalley, dadas no Teorema anterior.

Agora, como já sabemos como são os geradores da álgebra de Kac-Moody afim, podemos descrever de forma clara o sistema de raízes e a sua decomposição em espaço de raízes. E mais ainda, podemos descrever quem são os espaços de raízes, juntamente com a sua subálgebra de Cartan.

Inicialmente, vamos explorar a estrutura da álgebra de Lie simples de dimensão finita  $\mathfrak{g}$ , juntamente com sua decomposição em espaços associados às raízes. Essa decomposição, explicada no Apêndice A, é expressa como  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \left( \bigoplus_{\gamma \in \Delta} \mathfrak{g}_\gamma \right)$ , onde  $\mathfrak{h}$  é a subálgebra de Cartan de dimensão  $l$  com uma base de raízes  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\}$  e uma base de co-raízes  $\{h_1, h_2, \dots, h_l\}$ .

A decomposição em espaços de raízes da álgebra de Kac-Moody afim  $\widehat{\mathfrak{g}}$ , com respeito à subálgebra de Cartan  $H$ , é expressa como:

$$\widehat{\mathfrak{g}} = H \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha \right),$$

onde  $H = (1 \otimes \mathfrak{h}) \oplus \mathbb{C}c$ . Estendemos a função linear  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$  para uma função linear em  $H$  pela condição  $\langle \lambda, c \rangle = 0$ . Assim,  $\mathfrak{h}^*$  é identificado com um subespaço em  $H^*$ .

Agora, vamos descrever o sistema de raízes de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  e os espaços de raízes:

$$\begin{aligned} \Delta &= \left( \dot{\Delta} + \delta\mathbb{Z} \right) \cap \delta\mathbb{Z}^*, \\ \widehat{\mathfrak{g}}_{\gamma+k\delta} &= t^k \otimes \mathfrak{g}_\gamma, \\ \widehat{\mathfrak{g}}_{k\delta} &= t^k \otimes \mathfrak{h}, \end{aligned}$$

onde  $\theta$  é o mesmo vetor introduzido anteriormente para o caso  $r = 1$ .

Além disso, definimos:

1.  $\Pi_0 = \{\alpha_0 := \delta - \theta, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\}$ ;
2.  $\Pi_0^\vee = \left\{ \alpha_0^\vee := \frac{2}{(\theta|\theta)}c - 1 \otimes \theta^\vee; \alpha_1^\vee = 1 \otimes h_1, \alpha_2^\vee = 1 \otimes h_2, \dots, \alpha_l^\vee = 1 \otimes h_l \right\}$ .

Em seguida, pela Proposição 1.4.14, item a), temos que:

$$A = (\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle)_{i,j=0}^l.$$

Dessa forma, podemos afirmar que a tripla  $(H, \Pi, \Pi^\vee)$  é uma realização da matriz afim  $A$ . Unindo assim os conceitos feitos inicialmente neste capítulo.

## 1.5 Álgebras de Heisenberg e sua relação com álgebras de Kac-Moody afim

As álgebras de Heisenberg desempenham um papel central na teoria de representações das álgebras de Kac-Moody. Pretendemos neste momento explorar a interconexão entre essas duas classes de álgebras, concentrando-se em casos especiais em que as álgebras de Heisenberg podem ser vistas como subálgebras das álgebras de Kac-Moody afins. A compreensão dessas relações é importante para avançar na teoria e nas aplicações práticas. Começemos com a definição clássica de uma álgebra de Heisenberg.

**Definição 1.5.1.** Chamamos  $\mathcal{H}$  de uma **álgebra de Heisenberg** se ela for gerada pelo conjunto  $\{a_n \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{c\}$ , onde  $c$  é um elemento central, e as relações de comutação são dadas por:

$$[a_m, a_n] = m\delta_{m,-n}c.$$

Essa definição estabelece a estrutura algébrica da álgebra de Heisenberg, onde  $a_n$  são operadores e  $c$  é um elemento central. A condição de comutação destaca a dependência linear do comutador em relação aos índices  $m$  e  $n$ , fornecendo a base para explorar as propriedades fundamentais dessa álgebra. Vamos agora examinar um exemplo específico para ilustrar as relações de comutação na prática.

**Exemplo 1.5.2.** Consideremos  $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})}$  e o conjunto  $\{a_n = t^n \otimes h \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{c\}$ . No contexto de  $\widehat{\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})}$ , o comutador é dado por:

$$[t^m \otimes x + \lambda c, t^n \otimes y + \mu c] = t^{m+n} \otimes [x, y] + m(x, y)\delta_{m,-n}c.$$

Assim,  $[a_m, a_n] = [t^m \otimes h, t^n \otimes h] = m\delta_{m,-n}c$ , implicando que a álgebra gerada por esse conjunto é uma álgebra de Heisenberg. Nesse caso, a álgebra de Heisenberg é dada por  $\mathcal{H} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \mathbb{C}(t^k \otimes h) \oplus \mathbb{C}c$ .

Consideremos agora uma álgebra de Kac-Moody afim  $\widehat{\mathfrak{g}}$  com uma subálgebra de Cartan  $H$  e centro 1-dimensional  $Z = \mathbb{C}c$ . Seguindo as notações expressas da Definição 1.1.12, temos a seguinte decomposição em espaços de raízes:

$$\widehat{\mathfrak{g}} = H \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha} \right).$$

Além disso, em  $\Delta$ , existem raízes imaginárias  $\delta$ , pois estamos considerando álgebras do tipo Afim. Podemos expressar o conjunto de todas as raízes imaginárias por  $\Delta^{\text{im}} = \{k\delta \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ , onde cada elemento está associado a um espaço de raiz imaginária  $\widehat{\mathfrak{g}}_{k\delta}$ . Consideremos a álgebra  $G$  gerada por todos os subespaços de raízes imaginárias de  $\widehat{\mathfrak{g}}$ . É fácil verificar que o elemento central  $c$  pertence a  $G$ , pois, para cada elemento  $x_{k\delta}$  no espaço de raiz  $\widehat{\mathfrak{g}}_{k\delta}$ , existe um elemento  $x_{-k\delta}$  no espaço de raiz  $\widehat{\mathfrak{g}}_{-k\delta}$  tal que  $[x_{k\delta}, x_{-k\delta}] = c \in G$ . Além disso, a álgebra  $G$  pode ser vista como:

$$G = \mathbb{C}c \oplus \left( \bigoplus_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \widehat{\mathfrak{g}}_{k\delta} \right).$$

**Exemplo 1.5.3.** Consideremos agora a álgebra de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$  com álgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$ . Esta última admite uma base notável  $\{\alpha_1^{\vee} = E_{11} - E_{22}, \alpha_2^{\vee} = E_{22} - E_{33}\}$ .

Utilizando o produto  $(h, h') = 2\text{tr}(hh')$ , e observando que a aplicação traço  $\text{tr}$  é não degenerada em  $\mathfrak{h}$ , podemos escolher uma base  $\{h_1, h_2\}$  para  $\mathfrak{h}$  tal que  $(h_i, h_j) = \delta_{i,j}$ . Dessa maneira, para todo  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , temos que

$$\widehat{\mathfrak{g}}_{k\delta} = t^k \otimes \mathfrak{h} = (t^k \otimes \mathbb{C}h_1) \oplus (t^k \otimes \mathbb{C}h_2).$$

Assim, definimos as álgebras  $G_1$  e  $G_2$ , geradas respectivamente pelos conjuntos  $\{a_k = t^k \otimes h_1 \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \{c\}$  e  $\{b_k = t^k \otimes h_2 \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \{c\}$ , as quais são álgebras de Heisenberg e que são subálgebras de  $G$ . Além disso, em cada espaço  $\widehat{\mathfrak{g}}_{k\delta}$ , encontramos uma base  $\{x_1^k = t^k \otimes h_1, x_2^k = t^k \otimes h_2\}$ , na qual  $[x_i^k, x_j^{-k}] = k\delta_{i,j}c$ .

Neste exemplo, em que  $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})}$  está equipada com a álgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$ , para cada inteiro não nulo, encontramos uma base específica que simplifica notavelmente os seus colchetes.

A partir dessa configuração, definimos subálgebras  $G_1$  e  $G_2$ , que fazem parte da álgebra de Heisenberg  $G$ , geradas por conjuntos cuidadosamente escolhidos. Em particular, cada espaço  $\widehat{\mathfrak{g}}_{k\delta}$  dessas álgebras admite uma base comutativa  $\{x_1^k, x_2^k\}$ , onde 2 é a dimensão de  $\mathfrak{h}$ , e satisfaz  $[x_i^k, x_j^{-k}] = k\delta_{i,j}c$ . Essa estrutura se generaliza na seguinte proposição:

**Proposição 1.5.4.** Sejam  $\widehat{\mathfrak{g}}$  uma álgebra de Kac-Moody afim e  $G = \mathbb{C}c \oplus \left( \bigoplus_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \widehat{\mathfrak{g}}_{k\delta} \right)$  a álgebra de Heisenberg associada. Para cada inteiro não-nulo  $k$ , o subespaço  $\widehat{\mathfrak{g}}_{k\delta}$  admite uma base comutativa  $\{x_1^k, x_2^k, \dots, x_r^k\}$ , tal que  $[x_i^k, x_j^{-k}] = k\delta_{i,j}c$ , para  $i, j = 1, \dots, r$ .

*Demonstração.* Para cada inteiro não-nulo  $k$ , consideremos o subespaço  $\widehat{\mathfrak{g}}_{k\delta}$ . Sabemos que  $\widehat{\mathfrak{g}}_{k\delta} = t^k \otimes \mathfrak{h}$ . Além disso, como  $(\ , \ )$  é não-degenerada na subálgebra de Cartan

$\mathfrak{h}$ , então podemos escolher uma base  $\{h_1, h_2, \dots, h_r\}$  para  $\mathfrak{h}$  de forma que  $[h_i, h_j] = 0$  e  $(h_i, h_j) = \delta_{i,j}$  para  $i, j = 1, 2, \dots, r$ .

Agora, definimos os elementos  $x_i^k = t^k \otimes h_i$  para  $i = 1, 2, \dots, r$ . Claramente,  $x_i^k$  pertence a  $\widehat{\mathfrak{g}}_{k\delta}$ . Além disso, temos  $[x_i^k, x_j^{-k}] = [t^k \otimes h_i, t^{-k} \otimes h_j] = k\delta_{i,j}c$ . Portanto, a base  $\{x_1^k, x_2^k, \dots, x_r^k\}$  para  $\widehat{\mathfrak{g}}_{k\delta}$  é comutativa, e os colchetes entre os elementos desta base são dados por  $[x_i^k, x_j^{-k}] = k\delta_{i,j}c$ .  $\square$

Essa proposição consolida a ligação entre as estruturas de Heisenberg e Kac-Moody afim, revelando propriedades fundamentais dessas álgebras que transcendem o exemplo inicial.



# Capítulo 2

## Quase partições e subálgebras parabólicas

Neste capítulo, exploraremos uma classe especial conhecida como *quase partição* e *subálgebras parabólicas* e seu papel crucial na teoria de representações de álgebra de Kac-Moody afim. Esses conceitos oferecem uma visão profunda da estrutura algébrica subjacente a essas álgebras e permitem uma análise mais detalhada de suas representações.

Este capítulo oferece uma visão geral introdutória deste campo de estudo. À medida que avançamos, mergulharemos mais profundamente nas estruturas matemáticas subjacentes e nas implicações teóricas e aplicadas que elas têm para oferecer.

### 2.1 Notações iniciais

Para início de conversa, vamos fixar algumas notações e relembrar algumas definições sobre a teoria de álgebras de Kac-Moody. Seja  $\widehat{\mathfrak{g}}$  uma álgebra de Kac-Moody afim com uma subálgebra de Cartan  $H$  e centro 1-dimensional  $Z = \mathbb{C}c$ . Assim, vimos anteriormente que temos a seguinte decomposição em espaços de raízes

$$\widehat{\mathfrak{g}} = H \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha} \right),$$

onde  $\Delta$  é o sistema de raízes de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  e  $\widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha} = \{x \in \widehat{\mathfrak{g}} \mid [h, x] = \alpha(h)x \text{ para todo } h \in H\}$ . Seja  $\Pi$  uma base fixada do sistema de raízes  $\Delta$ . Então sabemos pelo capítulo anterior que o sistema de raízes  $\Delta$  tem uma partição standard em raízes positivas e negativas com respeito a  $\Pi$ ,  $\Delta_+$  e  $\Delta_-$  respectivamente. Seja  $\delta \in \Delta_+$  (com respeito a base  $\Pi$ ) a raiz imaginária indivisível. Então o conjunto de todas as raízes imaginárias é dado por

$$\Delta^{\text{im}} = \delta\mathbb{Z}^*.$$

Vamos denotar por  $G$  a subálgebra de Heisenberg de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  gerado por todos os subespaços de raízes imaginárias de  $\widehat{\mathfrak{g}}$ . Consequentemente  $G = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \widehat{\mathfrak{g}}_{k\delta} \oplus \mathbb{C}c$  e  $G = G_- \oplus \mathbb{C}c \oplus G_+$ , onde  $G_{\pm} = \bigoplus_{k > 0} \widehat{\mathfrak{g}}_{\pm k\delta}$ . Vamos denotar  $\mathfrak{g}$  a álgebra de Lie simples de dimensão finita adjacente e  $d$  o elemento de  $H$  tal que  $\delta(d) = 1$  e  $\alpha(d) = 0$  para qualquer raiz  $\alpha$  de  $\mathfrak{g}$ .

## 2.2 Quase partição

Antes de adentrarmos no conceito de *quase partição*, é prudente relembrarmos o que caracteriza uma partição. Inicialmente, vamos revisar a definição de *conjuntos parabólicos* e *partição parabólica*.

Vamos começar considerando uma álgebra de Kac-Moody afim  $\widehat{\mathfrak{g}}$  e  $\Delta$  como um sistema de raízes afim com base  $\Pi$ . Para qualquer conjunto  $P \subset \Delta$ , vamos designar por  $add(P)$  o fecho aditivo de  $P$ . Em outras palavras, se  $\alpha, \beta \in add(P)$  e  $\alpha + \beta \in \Delta$ , então  $\alpha + \beta \in add(P)$ . Conjuntos nos quais  $P = add(P)$  são chamados de aditivamente fechados, ou simplesmente de conjuntos fechados sob a adição de raízes.

**Definição 2.2.1.** Consideremos  $\widehat{\mathfrak{g}}$  como uma álgebra de Kac-Moody afim e  $\Delta$  como seu sistema de raízes afim. Um subconjunto  $P \subset \Delta$  é denominado **conjunto parabólico** se satisfizer as seguintes condições:

- (1)  $P$  é fechado sob a adição de raízes;
- (2)  $P \cup (-P) = \Delta$ .

Se adicionalmente o subconjunto parabólico  $P$  satisfizer a condição:

- (3)  $P \cap (-P) = \emptyset$ ,

então o chamaremos de **partição parabólica**, ou simplesmente de **partição**.

**Exemplo 2.2.2.** Suponhamos que  $\widehat{\mathfrak{g}}$  seja uma álgebra de Kac-Moody afim e  $\Delta$  denote o respectivo sistema de raízes afim. Tomemos  $\Pi$  como uma base fixa para  $\Delta$ .

- 1) Primeiramente, consideremos o subconjunto  $P = \Delta_+$  formado pelas raízes positivas com relação à base  $\Pi$ . Notavelmente, este conjunto se configura como uma partição, de acordo com a Definição 2.2.1. Essa partição é conhecida como **partição standard**.

- 2) Em segundo lugar, analisamos o conjunto

$$\Delta_{+, \text{nat}} = \left( \dot{\Delta}_+ + \delta\mathbb{Z} \right) \dot{\cup} \delta\mathbb{N},$$

o qual denominamos como a **partição natural**, que também podemos verificar facilmente que as condições da Definição 2.2.1 são satisfeitas. Essa partição, que surge da extensão natural das raízes positivas, desempenha um papel crucial em nossa investigação.

Na Definição 1.4.6, examinamos o conceito do grupo de Weyl  $\mathbf{W}$ , que é um subgrupo dos automorfismos de  $H^*$ . Esse grupo é gerado pelas reflexões fundamentais associadas às raízes simples. Isso implica que  $\mathbf{W}$ , ou mais geralmente o grupo  $\mathbf{W} \times \{\pm 1\}$ , atua no conjunto dos conjuntos parabólicos e partições parabólicas. Isso nos leva a definir o que significa conjuntos (ou partições) parabólicos equivalentes.

**Definição 2.2.3.** Consideremos  $\hat{\mathfrak{g}}$  como uma álgebra de Kac-Moody afim e  $\Delta$  como seu sistema de raízes afim. Dois conjuntos parabólicos (ou partições) são chamados de **equivalentes** se eles pertencem à mesma órbita do grupo  $\mathbf{W} \times \{\pm 1\}$ .

A definição de equivalência entre conjuntos parabólicos é crucial para o desenvolvimento da teoria, pois nos permite identificar conjuntos com propriedades semelhantes sob a ação de transformações do grupo de Weyl. Vejamos o seguinte exemplo.

**Exemplo 2.2.4.** Consideremos a álgebra de Kac-Moody do tipo finito  $A_2$ , e sejam  $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$  uma base de  $A_2$  e  $P = \{-\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2\} \subset \Delta$ . É fácil vermos que  $P \cup (-P) = \Delta$ ,  $P \cap (-P) = \emptyset$  e que  $P = \text{add}(P)$ , isto é,  $P$  é uma partição parabólica. Mais ainda, se considerarmos  $w = r_1$  a reflexão fundamental no grupo de Weyl, podemos ver que:

$$w(-\alpha_1) = \alpha_1, w(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_2 \text{ e } w(\alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Isso implica que  $w(P) = \Delta_+$ , mostrando que  $P$  e  $\Delta_+$  pertencem à mesma órbita do grupo de Weyl  $\mathbf{W} \times \{\pm 1\}$ . Concluimos, portanto, que  $P$  e  $\Delta_+$  são partições equivalentes.

Esta ilustração no caso específico de  $A_2$  nos fornece uma intuição valiosa sobre as propriedades das partições parabólicas. Agora, vamos estender essa ideia para um contexto mais geral sobre partições para qualquer álgebra de Kac-Moody do tipo finito

**Proposição 2.2.5.** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Kac-Moody do tipo finito e  $\Delta$  o seu sistema de raízes. Toda partição  $P$  é equivalente a  $\Delta_+$ .

*Demonstração.* Começamos assumindo uma base  $\Pi$  de  $\Delta$ .

- Se  $\Pi \subset P$ , então, de acordo com a definição de  $P = \text{add}(P)$ , temos  $\Delta_+ \subset P$ . Portanto,  $P = \Delta_+$ , e não há nada a ser demonstrado.
- Se  $\Pi \not\subset P$ , então existe um  $\alpha_i \in \Pi$  tal que  $\alpha_i \notin P$  para algum  $i$ . No entanto, como  $P \cup (-P) = \Delta$ , isso implica que  $-\alpha_i \in P$ . Considerando que

$$r_i(-\alpha_i) = \alpha_i \text{ e } r_i(\Delta_+ \setminus \alpha_i) \subset \Delta_+,$$

temos que  $|r_i(P) \cap \Delta_+| > |P \cap \Delta_+|$ . Com isso, concluímos que  $w(P) \cap \Delta_+ = \Delta_+$  ou  $w(P) = \Delta_+$  para algum  $w \in \mathbf{W}$ , o que mostra que  $P$  e  $\Delta_+$  são equivalentes.

□

Por outro lado, essa afirmação não se aplica aos casos das álgebras de Kac-Moody afim. Vejamos o seguinte exemplo.

**Exemplo 2.2.6.** Consideremos a álgebra de Kac-Moody afim  $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})}$  com uma base de raízes  $\Pi = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2\}$ . De acordo com as propriedades dos sistemas de raízes afins, temos que o conjunto de raízes  $\Delta$  é composto por combinações lineares inteiras das raízes simples, além dos múltiplos inteiros da raiz de nível  $\delta$ . Em outras palavras,

$$\begin{aligned} \Delta &= \left\{ \alpha = \sum_{i=0}^2 m_i \alpha_i \mid m_i \in \mathbb{Z}, \text{ e } \alpha \text{ é uma raiz real} \right\} \cup \delta \mathbb{Z}^* \\ &= (\dot{\Delta} + \delta \mathbb{Z}) \cup \delta \mathbb{Z}^*, \end{aligned}$$

onde  $\delta = \sum_{i=0}^2 \alpha_i$ . Dessa forma, além das raízes simples  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2$  pertencerem a  $\Delta_+$ , para  $m > 0$ , as raízes da forma  $\pm \alpha_1 + m\delta, \pm \alpha_2 + m\delta, \pm(\alpha_1 + \alpha_2) + m\delta, m\delta \in \Delta_+$ . Assim, temos que

$$\Delta_+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \pm \alpha_1 + m\delta, \pm \alpha_2 + m\delta, \pm(\alpha_1 + \alpha_2) + m\delta \mid m > 0\} \cup \{k\delta \mid k > 0\},$$

onde  $m$  e  $k$  são inteiros positivos. Agora, consideremos o subconjunto  $P$  de  $\Delta$  definido por

$$P = (\dot{\Delta}_+ + \delta \mathbb{Z}) \cup \delta \mathbb{Z}_{>0}.$$

Observamos que  $P \cup (-P) = \Delta$  e que  $P = \text{add}(P)$ . Além disso,  $P \cap (-P) = \emptyset$ , ou seja,  $P$  é uma partição. Agora, se  $\alpha + m\delta \in P$  e  $w \in \mathbf{W}$ , temos que  $w(\delta) = \delta$  e  $w(\Delta^{\text{re}}) \subset \Delta^{\text{re}}$ . Portanto,  $w(\alpha) = \beta + m'\delta$ , onde  $\beta \in \dot{\Delta}$ . Podemos então escolher um  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $\alpha + m\delta \in P$  e  $m + m' < 0$ . Portanto,

$$w(\alpha + m\delta) = w(\alpha) + m\delta = \beta + m'\delta + m\delta = \beta + (m + m')\delta \notin \Delta_+$$

o que demonstra que  $P$  e  $\Delta_+$  não são equivalentes.

Para avançar na classificação desses conjuntos, adotamos a seguinte abordagem. Seja  $\Pi_0 = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  uma base de raízes do sistema de raízes afim  $\Delta$ , conforme definido no final da Seção 1.4. Consideramos também a única (vide Teorema 1.1.26 item c)) raiz imaginária indivisível  $\delta = \sum_{i=0}^n k_i \alpha_i$ , onde os  $k_i$ 's são as etiquetas fornecidas no Teorema 1.1.26. Dizemos que uma raiz  $\alpha \in \Pi_0$  é **marcada** se satisfizer as seguintes condições:

1.  $k_\alpha = 1$ ;
2. ou  $-\alpha + \delta \in \Delta$  ou  $\frac{1}{2}(-\alpha + \delta) \in \Delta$ .

A identificação de raízes marcadas é fundamental para compreendermos as propriedades essenciais dos conjuntos parabólicos e nos permite realizar análises mais detalhadas sobre sua estrutura.

**Exemplo 2.2.7.** Analisando os diagramas de Dynkin de todas as MCGs do tipo afim no Teorema 1.1.26 item b), podemos verificar que:

- 1) Para as álgebras de Kac-Moody afim do tipo  $A_{(1)}^{(1)}$ , temos que  $\delta = \alpha_0 + \alpha_1$  e tanto  $\alpha_0$  quanto  $\alpha_1$  são raízes marcadas, pois  $k_{\alpha_0} = 1$  (resp.  $k_{\alpha_1} = 1$ ) e  $-\alpha_0 + \delta = \alpha_1 \in \Delta$  (resp.  $-\alpha_1 + \delta = \alpha_0 \in \Delta$ ).
- 2) Para as álgebras de Kac-Moody afim do tipo  $A_{(2)}^{(2)}$ , temos que  $\delta = 2\alpha_0 + \alpha_1$ . Assim,  $\alpha_0$  não é uma raiz marcada, pois  $k_{\alpha_0} = 2$ , mas por outro lado,  $\alpha_1$  é uma raiz marcada, pois  $k_{\alpha_1} = 1$  e  $\frac{1}{2}(-\alpha_1 + \delta) = \alpha_0 \in \Delta$ .

Observemos que, de acordo com a Proposição 1.4.13, a condição  $\frac{1}{2}(-\alpha + \delta) \in \Delta$  é possível apenas para álgebras de Kac-Moody afim do tipo  $A_{(2l)}^{(2)}$ . Além disso, ao revisar a tabela dos tipos de Álgebras de Kac-Moody afim no Teorema 1.1.26, podemos facilmente constatar que sempre existe uma raiz marcada para qualquer álgebra de Kac-Moody afim. Adicionalmente, vale destacar que essa raiz marcada é única para álgebras dos tipos  $G_2^{(1)}$ ,  $F_4^{(1)}$ ,  $E_8^{(1)}$ ,  $A_{2l}^{(2)}$ ,  $E_6^{(2)}$  e  $D_4^{(3)}$ .

Neste ponto, vamos fixar uma raiz marcada  $\alpha_0 \in \Pi_0$  e considerar  $\Pi = \Pi_0 \setminus \{\alpha_0\}$ ,  $\dot{Q} = Q_\Pi$ ,  $\dot{\Delta} = \Delta(\Pi)$  e  $\dot{\Delta}_\pm = \Delta_\pm(\Pi)$ . Além disso, denotaremos por  $W(\Pi)$  um subgrupo do grupo de Weyl gerado pelas reflexões  $s_\alpha$ ,  $\alpha \in \Pi$ . Agora, vamos detalhar a descrição dos subconjuntos parabólicos no caso afim, iniciando pela seguinte definição.

**Definição 2.2.8.** Consideremos  $\hat{\mathfrak{g}}$  uma álgebra de Kac-Moody afim,  $\Delta$  o seu sistema de raízes afim,  $\Pi_0 = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  uma base em que  $\alpha_0$  é uma raiz marcada. Sejam também  $\delta = \sum_{i=0}^n k_i \alpha_i$ ,  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  e  $X \subset I$ . Definimos as seguintes aplicações:

- (1)  $\phi_X = \sum_{i \in I \setminus X} \alpha_i^* - \left( \sum_{i \in I \setminus X} k_i \right) \alpha_0^*$ , se  $X \neq I$ ;
- (2)  $\phi_I = \sum_{i=0}^n \alpha_i^*$ , onde  $\alpha_i^*(\alpha_j) = \delta_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Também definimos o conjunto

$$P(X) = \{\alpha \in \Delta \mid \phi_X(\alpha) > 0\} \cup \{\alpha \in \Delta \mid \phi_X(\alpha) = 0, \phi_I(\alpha) > 0\}, \quad (2.1)$$

e dizemos que  $P(X)$  é um **conjunto associado com  $\Pi_0$ ,  $\alpha_0$  e  $X$** .

**Exemplo 2.2.9.** Consideremos  $\widehat{\mathfrak{g}}, \Delta, \Pi_0, \alpha_0, \delta$  como na definição anterior, e  $\alpha = \sum_{j=0}^n a_j \alpha_j$  uma raiz.

- Se  $X = I$ , então

$$\phi_I(\alpha) = \sum_{i=0}^n \alpha_i^*(\alpha) = \sum_{i=0}^n \alpha_i^* \left( \sum_{j=0}^n a_j \alpha_j \right) = \sum_{i,j=0}^n a_j \alpha_i^*(\alpha_j) = \sum_{j=0}^n a_j.$$

Assim,

$$\begin{aligned} P(X) &= \{\alpha \in \Delta \mid \phi_X(\alpha) > 0\} \cup \{\alpha \in \Delta \mid \phi_X(\alpha) = 0, \phi_I(\alpha) > 0\} \\ &= \{\alpha \in \Delta \mid \phi_X(\alpha) > 0\} \\ &= \{\alpha \in \Delta \mid \sum_{j=0}^n a_j > 0\} = \Delta_+. \end{aligned}$$

- Tomando  $X$  como outro extremo, ou seja,  $X = \emptyset$ , e supondo que  $\widehat{\mathfrak{g}}$  é não-torcida, então  $P(\emptyset) = \{\alpha + n\delta \mid \alpha \in \dot{\Delta}_+, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{k\delta \mid k > 0\}$ .

No exemplo anterior, podemos reescrever o conjunto da seguinte maneira:

- Quando  $X = I$ , temos que

$$P(I) = \left( (\dot{\Delta}_+ \setminus Q_I) + \delta\mathbb{Z} \right) \cup \left( \dot{\Delta} \cap Q_I + \delta\mathbb{Z}_{>0} \right) \cup \delta\mathbb{Z}_{>0} \cup \dot{\Delta}_+$$

- Para  $X = \emptyset$ , e supondo que  $\widehat{\mathfrak{g}}$  é não-toroidal, então

$$P(\emptyset) = \left( (\dot{\Delta}_+ \setminus Q_\emptyset) + \delta\mathbb{Z} \right) \cup \left( \dot{\Delta} \cap Q_\emptyset + \delta\mathbb{Z}_{>0} \right) \cup \delta\mathbb{Z}_{>0} \cup \dot{\Delta}_+$$

Isso nos leva a reformular o conjunto  $P(X)$  de outra maneira, seguindo a seguinte proposição.

**Proposição 2.2.10.** Consideremos  $\widehat{\mathfrak{g}}$  uma álgebra de Kac-Moody afim,  $\Delta$  o seu sistema de raízes afim,  $\Pi_0 = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  uma base em que  $\alpha_0$  é uma raiz marcada. Sejam também  $\delta = \sum_{i=0}^n k_i \alpha_i$ ,  $I = \{1, 2, \dots, n\}$  e  $X \subset I$ . Então,

$$P(X) = \left( (\dot{\Delta}_+ \setminus Q_X) + \delta\mathbb{Z} \right) \cup \left( \dot{\Delta} \cap Q_X + \delta\mathbb{Z}_{>0} \right) \cup \delta\mathbb{Z}_{>0} \cup \dot{\Delta}_+$$

*Demonstração.* Se  $X = I$  ou  $X = \emptyset$ , não há necessidade de demonstração, como vimos no exemplo anterior. Suponhamos então que  $X \neq I$ , e consideremos uma raiz  $\alpha + k\delta$ , onde

$\alpha \in \dot{\Delta}_+ \setminus Q_X$ . Podemos reescrever  $\alpha$  como uma combinação linear  $\alpha = \sum_{j \in I \setminus X} a_j \alpha_j$ , onde cada  $a_j \neq 0$  para algum  $j$ . Assim, a função  $\phi_X$  aplicada a  $\alpha + k\delta$  é dada por:

$$\phi_X(\alpha + k\delta) = \sum_{i \in I \setminus X} \alpha_i^*(\alpha + k\delta) - \left( \sum_{i \in I \setminus X} k_i \right) \alpha_0^*(\alpha + k\delta) = \sum_{j \in I \setminus X} a_j > 0.$$

No caso em que  $\alpha \in \dot{\Delta} \cap Q_X$  e  $k > 0$ , temos que  $a_j = 0$  para  $j \in I \setminus X$ , e há pelo menos um  $a_j \neq 0$  para  $j \in X$ . Portanto,

$$\phi_X(\alpha + k\delta) = \phi_X(k\delta) = k \sum_{i \in I \setminus X} a_i - k \left( \sum_{i \in I \setminus X} a_i \right) a_0 = 0.$$

As demais conclusões seguem diretamente.  $\square$

A utilidade dessa Proposição 2.2.10 reside na sua capacidade de decompor  $P(X)$  em conjuntos distintos, permitindo-nos uma visão clara da estrutura de partição. Isso não apenas simplifica a compreensão, mas também facilita a construção de exemplos elucidativos. Prossigamos agora com a seguinte proposição, que complementa nossa compreensão sobre conjuntos parabólicos.

**Proposição 2.2.11.** Consideremos  $\Pi_0 = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\} = \{\alpha'_0, \alpha'_1, \dots, \alpha'_n\}$  onde  $\alpha_0$  e  $\alpha'_0$  são raízes marcadas, e  $X, X' \subset I$ .  $P(X)$  (respectivamente  $P'(X')$ ) é um conjunto associado a  $\Pi_0, \alpha_0, X$  (respectivamente  $\Pi_0, \alpha'_0, X'$ ). Então

1.  $P(X)$  é uma partição parabólica do sistema de raízes  $\Delta$ .
2. Se  $X \neq I$ , então  $P(X)$  não é um conjunto de raízes positivas para qualquer escolha de uma base de  $\Delta$ .
3. Se  $\alpha_0 = \alpha'_0$ , então  $P(X) = P'(X')$  se e somente se  $X = X'$ .
4. Se  $\alpha_0 \neq \alpha'_0$ , então  $P(X) = P'(X')$  se e somente se  $X = X' = I$ . Além disso, existem  $w \in W$  e  $X'' \subset I$  tal que  $P(X')$  é um conjunto associado a  $w\Pi_0, w\alpha_0, X''$ .
5.  $P(X) = -P'(X')$  se e somente se  $\hat{\mathfrak{g}}$  é do tipo  $A_1^{(1)}$ ,  $X = X' = \emptyset$ ,  $\alpha_0 \neq \alpha'_0$ .

*Demonstração.* Podemos ver facilmente que os itens 1, 2, 3 e 5 são consequências diretas das definições estabelecidas anteriormente, restando somente o item 4 a ser provado, com isso, sejam  $\alpha_0 \neq \alpha'_0$ . Se  $X = X' = I$ , então é claro que  $P(X) = \Delta_+ = P'(X')$ . Suponhamos então que  $P(X) = P'(X')$ . Se  $|X| < |X'|$ , então existe uma raiz  $\phi - m\delta \in P(X)$ , com  $m > 0$ , tal que  $-(\phi - m\delta) + k\delta \in P'(X')$ . No entanto,  $-\phi + l\delta \notin P(X)$  para todo  $l \in \mathbb{Z}$ , o que implica que  $|X| = |X'|$ . Agora, suponhamos que  $|X| < n$ , então existe uma raiz  $\gamma \in \Pi$  tal que  $\alpha = \gamma - k\delta \in P(X)$ , com  $k > 0$ , implicando que  $-\alpha \in P(X) = P'(X')$ .

Por outro lado,  $\alpha \in P'(X')$ , o que nos leva a uma contradição, provando assim a primeira parte.

Agora escrevemos todos os elementos de  $P'(X')$  em termos de  $\dot{\Delta}$  e  $\delta$ , e denotamos por  $\tilde{P} = P'(X') \cap \pm \text{add}(\Pi)$ . Assim,  $\tilde{P}$  é uma partição parabólica do sistema de raízes finito  $\dot{\Delta}$ , e conseqüentemente,  $\dot{\Delta}_+ = \Delta_+(\Pi'')$ , para alguma base  $\Pi'' = w_0\Pi$ . Portanto,  $(\phi + k\delta \mid k \geq 0, \phi \in \Delta^+(\Pi'') \cap \Delta) \subset P'(X')$ . Suponha que exista um  $k_0$  positivo tal que  $\phi - k_0\delta \in P'(X')$  (respectivamente,  $-\phi + k_0\delta \in P'(X')$ ). Então  $\phi - k\delta \in P'(X')$  (respectivamente,  $-\phi + k\delta \in P'(X')$ ) para todo  $k \geq k_0$ . Concluimos então que  $P'(X')$  é um conjunto associado a  $w_1(\Pi'' \cup w_0\alpha_0) = w_1w_0\Pi, w_1w_0\alpha_0, X''$ , para algum  $w_1 \in W$  e  $X'' \in I$ , o que prova a proposição.  $\square$

Considerando a análise até aqui, podemos agora fornecer uma descrição completa das classes de equivalência das partições parabólicas do sistema de raízes  $\Delta$ . Para começar, escolhemos uma raiz marcada  $\alpha_0 \in \Pi_0$ .

**Teorema 2.2.12.** Qualquer partição parabólica de  $\Delta$  é equivalente a  $P(X)$ , onde  $X$  é um subconjunto de índices do conjunto  $I$ , associado com a base  $\Pi_0$  e a raiz marcada  $\alpha_0$ .

*Demonstração.* Para uma partição parabólica  $P$ , agindo pelo grupo  $W \times \{\pm 1\}$ , se necessário, podemos assegurar que a raiz imaginária  $\delta$  esteja contida em  $P$ . Seguindo a Proposição 2.2.11, observamos que  $P$  é equivalente a um conjunto  $P'(X')$ , associado a uma base  $\Pi'_0$ , uma raiz marcada  $\alpha'_0$  e um subconjunto  $X' \subset I$ . Além disso,  $P'(X')$  é equivalente a um conjunto  $P''(X')$ , associado a  $\Pi_0, \alpha''_0 \in \Pi_0$  e  $X'$ . Utilizando novamente a Proposição 2.2.11, concluimos que  $P''(X')$  é equivalente ao conjunto  $P(X)$  associado com  $\Pi_0, \alpha_0$  e  $X \subset I$ .  $\square$

As classes de equivalência de partições parabólicas, sob a influência combinada de  $W \times \{\pm 1\}$ , são exclusivamente descritas pelos conjuntos  $P(X)$ , onde  $X \subset I$ , tendo como base invariável  $\Pi_0$  e uma raiz marcada  $\alpha_0$ . É notável, no entanto, que, ao contrário do cenário finito, onde uma única classe de equivalência é estabelecida na Proposição 2.2.5, no domínio afim, invariavelmente, encontramos diversas classes, como no Exemplo 2.2.6.

Com efeito, podemos contemplar as classes de equivalência dos conjuntos  $P(X)$  em relação à influência do estabilizador de  $\alpha_0$  no grupo de automorfismos do respectivo diagrama de Coxeter-Dynkin, visto no capítulo anterior. A partir da aplicação do Teorema 2.2.12, é possível completar a descrição dos subconjuntos parabólicos.

Consideramos neste momento o conjunto  $P(X, S) = P(X) \cup \text{add}\{-\alpha_i, i \in S\}$ , onde  $X \subset I, S \subset X, S \neq \emptyset$ . Além disso, introduzimos  $P_S(I) = \text{add}(\Delta_+ \cup \{-\alpha_i, i \in S\} \cup \{-\alpha_0\})$  para todo  $S \subset I, |S| < n$ . Vejamos abaixo um exemplo para ilustrar esses conjuntos.

**Exemplo 2.2.13.** Consideremos agora a mesma álgebra de Kac-Moody explorada no Exemplo 2.2.6.

- Se supusermos que  $S = X = I$ , então temos

$$\begin{aligned} P(X, S) &= P(X) \cup \text{add}\{-\alpha_i, i \in S\} \\ &= \Delta_+ \cup \dot{\Delta}_- \\ &= \left\{ \alpha + m\delta \mid \alpha \in \dot{\Delta}, m \geq 0 \right\} \cup \{k\delta \mid k > 0\}. \end{aligned}$$

É fácil observarmos que  $P(X, S) = \text{add}(P(X, S))$ , ou seja, é aditivo. Além disso,  $P(X, S) \cup (-P(X, S)) = \Delta$  e  $P(X, S) \cup (-P(X, S)) \neq \emptyset$ , o que implica que  $P(X, S)$  é um subconjunto parabólico.

- Suponhamos agora que  $X = I$  e  $S = \{1\}$ , então

$$\begin{aligned} P(X, S) &= P(X) \cup \text{add}\{-\alpha_i, i \in S\} \\ &= \Delta_+ \cup \{-\alpha_1\} \\ &= \left\{ \alpha + m\delta \mid \alpha \in \dot{\Delta} \setminus \{-\alpha_2, -(\alpha_1 + \alpha_2)\}, m \geq 0 \right\} \cup \{k\delta \mid k > 0\}. \end{aligned}$$

Percebamos que essas definições nos levam a compreender que qualquer conjunto parabólico pode ser reescrito como a união de uma partição adicionando alguns elementos. Com isso em mente, podemos enunciar o seguinte teorema.

**Teorema 2.2.14** ([Fut97, Teorema 2.5, p. 23]). Qualquer subconjunto parabólico que não seja uma partição e não contenha  $-\delta$  é equivalente a  $P(X, S)$ , onde  $X \subset I$ ,  $S \subset X$ ,  $S \neq \emptyset$ , ou a  $P_S(I)$ , onde  $S \subset I$ ,  $|S| < n$ .

Para reformular essas ideias e prosseguir mais adiante, podemos considerar  $S \subset I$ . Denotemos o conjunto

$$P_S = \text{add}(P(\emptyset) \cup \{-\delta\} \cup \{-\alpha_i, i \in S\}).$$

Com isso, chegamos ao seguinte teorema.

**Teorema 2.2.15.** Qualquer subconjunto parabólico  $P$  que contenha  $\pm\delta$  é equivalente a  $P_S$  para algum  $S \subset I$ .

*Demonstração.* Segue do Teorema 2.2.12 que  $P$  é equivalente a um conjunto  $P'$  que contém um subconjunto  $P(X)$  associado com  $\Pi_0, \alpha_0, X \subset I$ . Suponha que exista uma raiz  $\phi \in P'$  tal que  $-\phi + k\delta \in P'$  para algum  $k > 0$ . Então  $\pm\phi + m\delta \in P'$  para todo  $m \in \mathbb{Z}$ . Se  $\psi \in \dot{\Delta}_+$  e  $\psi \in P' \setminus (-P')$ , então  $\psi + k\delta \in P' \setminus (-P')$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ , e portanto,  $X = \emptyset$ .  $\square$

No Apêndice A, na Definição A.5.4, abordamos o conceito de subálgebra de Borel para álgebras de Lie de dimensão finita. Inspirados por essa discussão juntamente com a Definição 2.2.1, podemos estabelecer a definição de uma subálgebra de Borel para uma partição no contexto das álgebras de Kac-Moody afim.

**Definição 2.2.16.** Considerando  $\widehat{\mathfrak{g}}$  como uma álgebra de Kac-Moody afim e  $P \subset \Delta$  uma partição (conjunto parabólico) do sistema de raízes  $\Delta$ . A subálgebra de Lie  $\widehat{\mathfrak{b}}_P$  gerada por  $H$  e pelos espaços de raízes  $\widehat{\mathfrak{g}}_\alpha$  com  $\alpha \in P$  é denominada **subálgebra de Borel**.

Agora, vamos explorar alguns exemplos clássicos.

**Exemplo 2.2.17.** Suponhamos que  $\widehat{\mathfrak{g}}$  seja uma álgebra de Kac-Moody afim e  $\Delta$  denote o respectivo sistema de raízes afim. Tomemos  $\Pi$  como uma base fixa para  $\Delta$ . Agora, procedemos ao cálculo das subálgebras de Borel associadas as partições vistas no Exemplo 2.2.13:

- Para o caso de  $P = \Delta_+$ , a subálgebra de Borel correspondente, denotada por  $\widehat{\mathfrak{b}}_{st}$ , é gerada por  $H$  e pelos espaços de raízes positivas. Isso implica que  $\widehat{\mathfrak{b}}_{st} = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_+} \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha$ . Essa subálgebra de Lie é conhecida por **subálgebra de Borel standard**.
- Para a partição natural  $P = \{\alpha \in \Delta \mid \phi_I(\alpha) > 0\} \cup \delta\mathbb{Z}_+ = \Delta_{+,nat}$ , a subálgebra de Borel associada, que denotamos por  $\widehat{\mathfrak{b}}_{nat}$ , é gerada pelos espaços de raízes positivas reais e pelos espaços de raízes imaginárias, por uma raiz especial, neste caso,  $k\delta$ , com  $k$  um inteiro positivo. Assim,  $\widehat{\mathfrak{b}}_{nat} = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta_{+,nat}} \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha$ . Essa subálgebra de Lie é conhecida por **subálgebra de Borel natural** (também conhecida como **subálgebra de Borel imaginária** [Fut94])

O exemplo fornecido apresenta duas partições distintas em uma álgebra de Kac-Moody afim, juntamente com seus cálculos correspondentes das subálgebras de Borel associadas a cada uma dessas partições. É importante observarmos que essas subálgebras de Borel representam os extremos do espectro de subálgebras de Borel.

**Definição 2.2.18.** Duas subálgebras de Borel são consideradas **equivalentes** se suas partições (conjuntos parabólicos) forem equivalentes.

Com esta definição em mente, podemos enunciar o seguinte teorema.

**Teorema 2.2.19.** Para qualquer álgebra de Kac-Moody finita, todas as subálgebras de Borel associadas a uma partição  $P \subset \Delta$  são equivalentes à subálgebra de Borel standard.

*Demonstração.* Seja  $P \subset \Delta$  uma partição e  $\widehat{\mathfrak{b}} = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in P} \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha$  a subálgebra de Borel associada a  $P$ . Tome  $w \in \mathbf{W}$ , como na Proposição 2.2.5, tal que  $w(P) = \Delta_+$ . É evidente que  $w$  induz um automorfismo  $\tilde{w}$  de  $\widehat{\mathfrak{g}}$ , definido por:

$$\tilde{w}(H) = H \quad \text{e} \quad \tilde{w}(\widehat{\mathfrak{g}}_\alpha) = \widehat{\mathfrak{g}}_{w(\alpha)}.$$

Assim, temos:

$$\tilde{w}(\widehat{\mathfrak{b}}) = \tilde{w}(H) \oplus \bigoplus_{\alpha \in P} \tilde{w}(\widehat{\mathfrak{g}}_\alpha) = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in P} \widehat{\mathfrak{g}}_{w(\alpha)} = H \oplus \bigoplus_{\beta \in \Delta_+} \widehat{\mathfrak{g}}_\beta = \widehat{\mathfrak{b}}_{st}.$$

□

Voltando ao Exemplo 2.2.6, podemos constatar que as subálgebras de Borel standard e natural não são equivalentes. A Definição 2.2.18, juntamente com os Teoremas 2.2.12, 2.2.14, 2.2.15 e a Proposição 2.2.10, nos fornecem uma descrição das classes de equivalências das subálgebras de Borel.

À medida que exploramos diferentes partições em uma álgebra de Kac-Moody afim, nos deparamos com subálgebras de Borel intermediárias que englobam uma gama mais ampla de elementos na álgebra de Lie. Podemos agora introduzir a definição de *quase partição*.

**Definição 2.2.20.** Consideremos  $\widehat{\mathfrak{g}}$  uma álgebra de Kac-Moody afim e  $\Delta$  seu sistema de raízes. Uma **quase partição** de  $\Delta$  é um subconjunto  $P \subset \Delta$  que satisfaz as seguintes condições:

- (1)  $P \cap (-P) = \emptyset$  e  $P \cup (-P) = \Delta$ ;
- (2) Seja  $\widehat{\mathfrak{b}}_P$  a subálgebra de Lie de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  gerado por  $H$  e pelos espaços de raízes  $\widehat{\mathfrak{g}}_\alpha$  com  $\alpha \in P$ . Então para qualquer  $\widehat{\mathfrak{g}}_\alpha \subset \widehat{\mathfrak{b}}_P$  temos que  $\alpha \in P$ .

Ao considerarmos a decomposição em espaços de raízes da álgebra de Kac-Moody afim  $\widehat{\mathfrak{g}}$ , juntamente com uma quase partição  $P$ , podemos observar a seguinte decomposição:

$$\widehat{\mathfrak{g}} = \left( \bigoplus_{\alpha \in P} \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha \right) \oplus H \oplus \left( \bigoplus_{\alpha \in -P} \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha \right).$$

Além disso, ao definirmos  $\widehat{\mathfrak{g}}_{\pm P} = \bigoplus_{\alpha \in \pm P} \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha$  para a quase partição  $P$ , e ao considerarmos a álgebra envolvente universal de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  seguindo a decomposição acima, temos:

$$U(\widehat{\mathfrak{g}}) = U(\widehat{\mathfrak{g}}_{-P}) \otimes U(H) \otimes U(\widehat{\mathfrak{g}}_P).$$

No caso específico de uma partição  $P$ , é importante notar que o conjunto das raízes reais de  $P$  é fechado sob a adição de raízes. Isso implica que  $P \cap \Delta^{\text{re}}$ , a interseção de  $P$  com o conjunto de raízes reais, constitui uma partição das raízes reais. De fato, temos que  $(P \cap \Delta^{\text{re}}) \cap (-P \cap \Delta^{\text{re}}) = \emptyset$  e  $(P \cap \Delta^{\text{re}}) \cup (-P \cap \Delta^{\text{re}}) = \Delta^{\text{re}}$ . Além disso, é observável que a segunda condição de quase partição implica que  $P \cap \Delta^{\text{re}}$  também é fechado sob a adição de raízes.

Por outro lado, ao contrário do caso das partições, o conjunto das raízes imaginárias de  $P$  não necessariamente forma uma partição de  $\Delta^{\text{im}}$ . No entanto, seguindo uma analogia com as partições, podemos chamar a subálgebra  $\widehat{\mathfrak{b}}_P$  de **subálgebra de Borel** de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  correspondente à quase partição  $P$ .

Analisando os resultados apresentados em [JK85] e [Fut94], podemos constatar que existem várias classes de conjugação para  $P \cap \Delta^{\text{re}}$ , todas finitas, determinadas pelo grupo

de Weyl. Por outro lado, o número de classes de conjugação para uma quase partição é infinito [BBFK13].

Agora, vamos explorar alguns exemplos ilustrativos desses cenários.

**Exemplo 2.2.21.** Consideremos  $\widehat{\mathfrak{g}}$  como uma álgebra de Kac-Moody afim e  $\Delta$  como o seu sistema de raízes, além de  $\Pi_0$  ser uma base fixa para  $\Delta$ . Nesse contexto, para cada função  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \{\pm\}$ , podemos definir uma subálgebra de Borel  $\widehat{\mathfrak{b}}_{\text{nat}}^\phi$  correspondente a uma quase partição:

$$P_{\text{nat}}^\phi = \left( \dot{\Delta}_+ + \delta\mathbb{Z} \right) \cup \delta\phi^{-1}(+) \cup \delta\phi^{-1}(-).$$

Agora, vamos considerar um exemplo mais detalhado para entender por que o exemplo anterior descreve exatamente uma quase partição e não uma partição.

**Exemplo 2.2.22.** Consideremos a álgebra de Lie simples  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ . Sabemos que  $\Pi = \{\alpha\} = \dot{\Delta}_+$ , resultando em:

$$\Delta = \left( \dot{\Delta} + \delta\mathbb{Z} \right) \cup \delta\mathbb{Z}^* \text{ e } \Delta_{+, \text{nat}} = \left( \dot{\Delta}_+ + \delta\mathbb{Z} \right) \cup \delta\mathbb{N}.$$

Agora, consideremos a aplicação  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \{\pm\}$  com  $\phi(n_0) = -$  e  $\phi(m) = +$  para todo  $m \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\}$ , onde  $n_0$  é um elemento fixado. Podemos verificar facilmente que:

$$P_{\text{nat}}^\phi = \left( \dot{\Delta} + \delta\mathbb{Z} \right) \cup \delta(\mathbb{N} \setminus \{n_0\}) \cup \{-n_0\delta\}$$

e que  $P_{\text{nat}}^\phi \cap (-P_{\text{nat}}^\phi) = \emptyset$  e  $P_{\text{nat}}^\phi \cup (-P_{\text{nat}}^\phi) = \Delta$ . Além disso, a subálgebra de Borel  $\widehat{\mathfrak{b}}_{\text{nat}}^\phi$  correspondente a  $P_{\text{nat}}^\phi$  é dada por:

$$\widehat{\mathfrak{b}}_{\text{nat}}^\phi = \left( \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha+n\delta} \right) \oplus \left( \bigoplus_{n \in \mathbb{N} \setminus \{n_0\}} \widehat{\mathfrak{g}}_{n\delta} \right) \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_{-n_0\delta},$$

onde  $\widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha+n\delta} = \mathbb{C}(e \otimes t^n)$  e  $\widehat{\mathfrak{g}}_{n\delta} = \mathbb{C}(h \otimes t^n)$ . Notemos que  $2n_0\delta$  e  $-n_0\delta$  estão em  $P_{\text{nat}}^\phi$ , mas  $2n_0\delta - n_0\delta = n_0\delta \notin P_{\text{nat}}^\phi$ . Assim, concluímos que  $P_{\text{nat}}^\phi$  é uma quase partição.

Podemos ainda perceber que a subálgebra  $\widehat{\mathfrak{b}}_P$  não esgota todas as subálgebras de Borel não-conjugadas (não equivalentes) de  $\widehat{\mathfrak{g}}$ . Para obtermos uma classificação completa, precisamos considerar todas as decomposições triangulares possíveis da subálgebra de Heisenberg  $G$ .

Usando a forma de Killing, em cada subespaço  $\widehat{\mathfrak{g}}_{k\delta}$ , vimos na Proposição 1.5.4 que podemos escolher uma base (comutativa)  $x_1^k, x_2^k, \dots, x_r^k$  tal que  $[x_i^k, x_j^{-k}] = k\delta_{ij}c$  para todos os possíveis  $i, j = 1, \dots, r$ . Uma decomposição triangular  $G = G_- \oplus \mathbb{C}c \oplus G_+$ , onde  $G_\pm = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_{>0}} \widehat{\mathfrak{g}}_{\pm k\delta}$ , corresponde a uma partição de raízes imaginárias.

Por outro lado, cada função  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \{\pm\}$  define uma quase partição de raízes imaginárias e a decomposição triangular  $G = G_-^\phi \oplus \mathbb{C}c \oplus G_+^\phi$ , onde

$$G_{\pm}^{\phi} = \bigoplus_{\phi(k) \in \mathbb{Z}_{>0}} \widehat{\mathfrak{g}}_{\pm k\delta} \oplus \bigoplus_{\phi(k) \in \mathbb{Z}_{<0}} \widehat{\mathfrak{g}}_{\mp k\delta}.$$

Podemos obter decomposições triangulares diferentes de  $G$  dividindo  $x_i^k$  arbitrariamente entre  $G_+$  e  $G_-$  para cada inteiro  $k > 0$  e cada  $i = 1, \dots, r$  (se  $x_i^k \in G_{\pm}$  então  $x_i^{-k} \in G_{\mp}$ ). Tais decomposições triangulares de  $G$  são mais gerais do que aquelas que correspondem a uma quase partição. Elas indicam uma nova família de subálgebras de Borel de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  (cf. [FK18]).

Por simplicidade, a partir de agora, vamos considerar as subálgebras de Borel  $\widehat{\mathfrak{b}}_P$  correspondendo a quase partição  $P$  do sistema de raízes. No entanto, é importante observar que tudo pode ser facilmente estendido para uma subálgebra de Borel arbitrária de  $\widehat{\mathfrak{g}}$ .

Isso nos permite focar especificamente nas propriedades das quase partições e suas correspondentes subálgebras de Borel. No entanto, é importante entender que o arcabouço que estamos desenvolvendo pode ser aplicado de forma mais geral, abrangendo uma ampla variedade de subálgebras de Borel em  $\widehat{\mathfrak{g}}$ .

## 2.3 Subálgebras parabólicas

Para dar continuidade ao trabalho e definirmos os módulos do tipo Verma generalizado, que constituem um dos principais objetos de estudo desta pesquisa, é necessário introduzir algumas definições e relembrar conceitos importantes. Vamos iniciar definindo as subálgebras parabólicas, que são generalizações das subálgebras de Borel, conforme discutido nas definições A.5.4 e A.5.5 do Apêndice A.

**Definição 2.3.1.** Seja  $\widehat{\mathfrak{g}}$  uma álgebra de Kac-Moody afim. Uma subálgebra de Lie  $\widehat{\mathfrak{p}}$  de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  é denominada uma **subálgebra parabólica** se contiver uma subálgebra de Borel.

É de suma importância notarmos que toda subálgebra de Borel também é uma subálgebra parabólica. No entanto, nosso interesse reside nos casos em que a subálgebra parabólica se diferencia de uma subálgebra de Borel. Portanto, doravante, a menos que seja explicitamente indicado, ao mencionarmos subálgebras parabólicas, estaremos nos referindo especificamente aos casos em que estas incluem uma subálgebra de Borel de forma própria.

Existem diversos exemplos de subálgebras parabólicas, bem como diferentes maneiras de construí-las. A seguir, apresentaremos um exemplo simples para ilustrar essa definição.

**Exemplo 2.3.2.** Consideremos  $\widehat{\mathfrak{g}}$  como uma álgebra de Kac-Moody afim e  $\Delta$  como o seu sistema de raízes, além de  $\Pi_0$  ser uma base fixa para  $\Delta$ .

- Seja  $P$  uma quase partição e consideremos  $\widehat{\mathfrak{g}}_P = \bigoplus_{\alpha \in P} \widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha}$ , então  $\widehat{\mathfrak{p}} = \widehat{\mathfrak{g}}_P + H$  é uma subálgebra parabólica.

- Vamos considerar agora a partição natural

$$\Delta_{+, \text{nat}} = \left( \dot{\Delta}_+ + \delta\mathbb{Z} \right) \cup \delta\mathbb{N}$$

e sua subálgebra de Borel correspondente (Borel natural)  $\widehat{\mathfrak{b}}_{\text{nat}}$ .

Lembrando que  $G$  representa a subálgebra de Heisenberg de  $\widehat{\mathfrak{g}}$ , podemos notar que o conjunto  $\widehat{\mathfrak{p}} = \widehat{\mathfrak{b}}_{\text{nat}} + G$  é uma subálgebra parabólica.

Os itens anteriores decorrem diretamente da definição de subálgebra parabólica, que é uma subálgebra de Lie que contém uma subálgebra de Borel.

No segundo item a subálgebra parabólica  $\widehat{\mathfrak{p}}$  engloba a estrutura de Borel junto com a subálgebra de Heisenberg, formando uma estrutura parabólica.

Do mesmo jeito que vimos maneiras de construir tais subálgebras de Borel, o mesmo acontece para as subálgebras parabólicas, olhando para subconjuntos do conjunto de índices relacionados ao posto da álgebra de Lie (adjacente) simples de dimensão finita.

Com a descrição de todas as partições e subconjuntos parabólicos, vistos nos Teoremas 2.2.12, 2.2.14, 2.2.15 e a Proposição 2.2.10, podemos verificar que existem dois tipos de subálgebras parabólicas: aquelas contendo a subálgebra de Borel standard e aquelas contendo a parte real da subálgebra de Borel natural. Essas subálgebras parabólicas são chamadas de **tipo I** e **tipo II**, respectivamente (cf. [Fut97]).

Como mencionado anteriormente, exemplos dessas subálgebras parabólicas de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  podem ser construídos através de subconjuntos parabólicos  $P \subset \Delta$ , vistos na seção anterior. Dado tal subconjunto parabólico  $P$ , a subálgebra parabólica correspondente de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  é gerada por  $H$  e por todos os subespaços de raízes  $\widehat{\mathfrak{g}}_\alpha$  com  $\alpha \in P$ . Vimos na seção anterior a classificação dos subconjuntos parabólicos de  $\Delta$ , o que nos ajudam muito nesse cenário de pesquisa.

Percebamos que toda subálgebra parabólica  $\widehat{\mathfrak{p}}$  de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  contendo uma subálgebra de Borel  $\widehat{\mathfrak{b}}$  tem uma decomposição, conhecida como decomposição de Levi,  $\widehat{\mathfrak{p}} = \widehat{\mathfrak{l}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}$ , onde  $\widehat{\mathfrak{l}}$  é chamado de fator de Levi e  $\widehat{\mathfrak{u}} \subset \widehat{\mathfrak{b}}$ , isso se assemelha (na verdade generaliza) o caso em que vimos no Apêndice A, na Definição A.5.5. Se  $\widehat{\mathfrak{p}}$  é do *tipo II*, então  $\widehat{\mathfrak{l}}$  é de dimensão infinita. Neste caso, a subálgebra  $\widehat{\mathfrak{l}}$  contém uma soma de certas subálgebras de Lie afim e uma subálgebra da álgebra de Heisenberg  $G$ . Definiremos agora, de forma geral, um dos objetos principais de estudo de nossa pesquisa.

## 2.4 Módulos do tipo Verma generalizado

Vamos agora adentrar no cerne principal da pesquisa. Para começarmos, vamos fornecer uma visão geral dos módulos de tipo Verma generalizados, preparando o terreno para o estudo mais aprofundado de uma classe específica desses módulos. Ao fazermos isso,

estaremos construindo sobre os fundamentos estabelecidos nas Seções anteriores, notavelmente explorando as álgebras envolventes universais discutidas na Seção A.5 do Apêndice A, e estendendo essa estrutura para a análise em questão.

Nesse contexto, vamos introduzir uma ferramenta para a construção de novos módulos, especialmente relevantes para o estudo das álgebras de Kac-Moody. Paralelamente à teoria dos módulos sobre álgebras de Lie, que foi abordada na Definição A.3.6 do Apêndice A, apresentaremos uma nova classe de módulos denominados módulos do tipo Verma generalizados. Iniciamos definindo módulo de peso.

Seja  $V$  um módulo sobre  $\widehat{\mathfrak{g}}$  e  $\lambda \in H^*$ . Definimos o conjunto

$$V_\lambda = \{v \in V \mid h \cdot v = \lambda(h)v \text{ para todo } h \in H\}.$$

É evidente que  $V_\lambda$  é um subespaço de  $V$ . Se  $V_\lambda \neq 0$ , dizemos que  $\lambda$  é um **peso** de  $V$  e  $\dim(V_\lambda)$  é a sua multiplicidade. Qualquer vetor  $v \in V_\lambda \neq 0$  é chamado de **vetor de peso**.

**Definição 2.4.1.** Dizemos que um módulo  $V$  sobre  $\widehat{\mathfrak{g}}$  é um **módulo de peso** se  $V = \bigoplus_{\lambda \in H^*} V_\lambda$ . Além disso, consideremos  $\widehat{\mathfrak{p}}$  uma subálgebra parabólica e  $\lambda : \widehat{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathbb{C}$  uma representação 1-dimensional. Definimos  $V$  como um **módulo de peso máximo**  $\lambda$  (em relação a  $\widehat{\mathfrak{p}}$ ) se houver um vetor  $v \in V$  tal que  $U(\widehat{\mathfrak{g}})v = V$  e  $x \cdot v = \lambda(x)v$  para todo  $x \in \widehat{\mathfrak{p}}$ .

Na definição anterior, é evidente que o peso máximo  $\lambda$  é único, uma vez que qualquer representação 1-dimensional  $\lambda : \widehat{\mathfrak{p}} \rightarrow \mathbb{C}$  é totalmente determinada por seu valor em cada elemento de  $\widehat{\mathfrak{p}}$ . Não há ambiguidade na atribuição de valores a  $\lambda$  para diferentes elementos de  $\widehat{\mathfrak{p}}$ , garantindo, assim, a unicidade de  $\lambda$ . Além disso, ao considerarmos a decomposição  $U(\widehat{\mathfrak{g}}) = U(\widehat{\mathfrak{g}}_{-P}) \otimes U(H) \otimes U(\widehat{\mathfrak{g}}_P)$ , podemos inferir que  $V = U(\widehat{\mathfrak{g}})v = U(\widehat{\mathfrak{g}}_{-P})v$ . Com isso, apresentamos agora um dos elementos centrais de estudo deste trabalho.

**Definição 2.4.2.** Seja  $\widehat{\mathfrak{p}} = \widehat{\mathfrak{l}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}$  uma subálgebra parabólica arbitrária de  $\widehat{\mathfrak{g}}$ , e consideremos um  $\widehat{\mathfrak{p}}$ -módulo  $V$  tal que  $\widehat{\mathfrak{u}} \cdot V = 0$ . O  $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulo

$$M_{\widehat{\mathfrak{p}}}(V) = \text{Ind}_{\widehat{\mathfrak{p}}}^{\widehat{\mathfrak{g}}}(V) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{p}})} V$$

é denominado **módulo do tipo Verma generalizado**.

É importante notarmos que, se  $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{p}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}$ , onde  $\widehat{\mathfrak{u}}$  é o radical oposto de  $\widehat{\mathfrak{p}}$ , então  $M_{\widehat{\mathfrak{p}}}(V) \simeq U(\widehat{\mathfrak{u}}) \otimes_{\mathbb{C}} V$  como um espaço vetorial. A seguir, apresentamos um exemplo/observação ilustrando esses tipos de módulos.

**Exemplo 2.4.3.** Consideremos  $\widehat{\mathfrak{g}}$  uma álgebra de Kac-Moody afim.

- Se  $\widehat{\mathfrak{p}} = \widehat{\mathfrak{b}}$  é uma subálgebra de Borel e  $V \simeq \mathbb{C}$  é um  $\widehat{\mathfrak{b}}$ -módulo 1-dimensional tal que  $hv = \lambda(h)v$  para todo  $v \in V$  e  $h \in H$ , então obtemos um *módulo do tipo Verma*  $M_{\widehat{\mathfrak{p}}}(V) = M_{\widehat{\mathfrak{b}}}(\lambda) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{b}})} \mathbb{C}$  que foram estudados em ([Fut97]).

- Se caso  $\widehat{\mathfrak{p}} = \widehat{\mathfrak{b}}_{st}$ , ou seja a subálgebra de Borel standard, então obtemos o *módulo de Verma clássico*  $M_{\widehat{\mathfrak{p}}}(V) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{b}}_{st})} \mathbb{C}$ , visto em ([Kac87]).
- Se caso  $\widehat{\mathfrak{p}} = \widehat{\mathfrak{b}}_{nat}$ , ou seja a subálgebra de Borel imaginária (natural), então obtemos o *módulo de Verma imaginário*  $M_{\widehat{\mathfrak{p}}}(V) = \bar{M}(\lambda) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{b}}_{nat})} \mathbb{C}$ , estudadas em ([Fut94]).
- Para o caso  $\widehat{\mathfrak{p}} = \widehat{\mathfrak{b}}_{nat}^{\phi}$ , isto é, a subálgebra de Borel  $\phi$ -imaginária, então obtemos o *módulo de Verma  $\phi$ -imaginário*  $M_{\widehat{\mathfrak{p}}}(V) = M_{\phi}(\lambda) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{b}}_{nat}^{\phi})} \mathbb{C}$ , estudadas em ([BBFK13]).

Neste trabalho, vamos considerar as subálgebras parabólicas do tipo II. Suponhamos que  $\widehat{\mathfrak{p}}$  é uma subálgebra parabólica de  $\widehat{\mathfrak{g}}$ . Vamos assumir por simplicidade que uma subálgebra parabólica  $\widehat{\mathfrak{p}}$  de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  contém inteiramente a subálgebra de Borel natural. Então tal subálgebra parabólica  $\widehat{\mathfrak{p}}$  tem a decomposição de Levi  $\widehat{\mathfrak{p}} = \widehat{\mathfrak{l}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}$ , onde  $\widehat{\mathfrak{l}}$  é o fator de Levi de dimensão infinita.

Vamos agora destacar algumas subálgebras que aparecem naturalmente e que trabalharemos com uma certa frequência mais adiante quando falarmos em critério de irreduzibilidade de certos tipos de módulos de Verma generalizados. Então, denotemos por  $\widehat{\mathfrak{l}}^0$  a subálgebra de Lie de  $\widehat{\mathfrak{l}}$  gerado por todos os subespaços de raízes reais e por  $H$ . Denotemos também por  $G(\widehat{\mathfrak{l}})$  a subálgebra de  $\widehat{\mathfrak{l}}^0$  gerada pelos seus subespaços raízes imaginárias. Seja agora  $G(\widehat{\mathfrak{l}})^{\perp} \subset G$  o complemento ortogonal de  $G(\widehat{\mathfrak{l}})$  em  $G$  com respeito a forma de Killing, isto é  $G = G(\widehat{\mathfrak{l}}) + G(\widehat{\mathfrak{l}})^{\perp}$ ,  $[G(\widehat{\mathfrak{l}})^{\perp}, \widehat{\mathfrak{l}}^0] = 0$  e  $\widehat{\mathfrak{l}}^0 \cap G(\widehat{\mathfrak{l}})^{\perp} = \mathbb{C}c$ . Percebamos que a subálgebra de Levi  $\widehat{\mathfrak{l}}$  pode conter inteiramente  $G(\widehat{\mathfrak{l}})^{\perp}$  ou uma parte dela. No caso anterior  $\widehat{\mathfrak{l}}$  contém  $G$  e  $\widehat{\mathfrak{l}} = \widehat{\mathfrak{l}}^0 + G(\widehat{\mathfrak{l}})^{\perp}$ .

Seja  $n$  o posto da subálgebra de Lie simples de dimensão finita adjacente  $\mathfrak{g}$  e  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset \Pi_0$  o conjunto das raízes simples de  $\mathfrak{g}$ . Vamos denotar por  $I = \{1, \dots, n\}$  e vamos considerar um subconjunto  $\omega \subset I$ . Denotemos também por  $\dot{\Delta}^{\omega}$  o sistema de raízes gerado pelas raízes  $\alpha_i, i \in \omega$  (se  $\omega = \emptyset$  então  $\dot{\Delta}^{\omega} = \emptyset$ ) e consideremos a sua afinização

$$\Delta^{\omega} = \left( \dot{\Delta}^{\omega} + \delta\mathbb{Z} \right) \cup \delta\mathbb{Z}^*,$$

**Observação 2.** Destacamos algumas observações importantes sobre a afinização do sistema de raízes.

- 1) É fácil percebermos que  $\Delta^{\omega, re} = \Delta^{\omega} \cap \Delta^{re}$ , então as raízes reais de  $\widehat{\mathfrak{l}}$  são conjugadas por  $\Delta^{\omega, re}$  para alguma escolha de  $\omega$  (cf. [Fut94]).
- 2) Seja  $\widehat{\mathfrak{p}}_{\omega} = \widehat{\mathfrak{l}}_{\omega} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}_{\omega}$  uma subálgebra parabólica que contém a subálgebra de Borel  $\widehat{\mathfrak{b}}_{\omega}$ , associado a algum subconjunto  $\omega \subset I$ , então as raízes que compõem os elementos de  $\widehat{\mathfrak{u}}_{\omega}$ , são raízes que pertencem ao conjunto  $-P_{nat} \setminus \Delta^{\omega}$ .

Antes de partimos para os exemplos, vamos descrever a seguinte subálgebra parabólica trabalhada em [FK18], que é a subálgebra parabólica do tipo II associado a  $\omega$ ,  $\widehat{\mathfrak{p}}_\omega = \widehat{\mathfrak{b}}_{nat} + \sum_{\alpha \in \Delta^\omega} \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha$ , para uma escolha de  $\omega$  (subconjunto próprio de  $I$ ). Essa subálgebra parabólica tem decomposição de Levi  $\widehat{\mathfrak{p}}_\omega = \widehat{\mathfrak{l}}_\omega \oplus \widehat{\mathfrak{u}}_\omega$  e  $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{u}}_\omega \oplus \widehat{\mathfrak{p}}_\omega = \widehat{\mathfrak{u}}_\omega \oplus \widehat{\mathfrak{l}}_\omega \oplus \widehat{\mathfrak{u}}_\omega$  (cf. [FK18]). Vejamos agora alguns exemplos que nos ajudam a fixar essas notações.

**Exemplo 2.4.4.** Sejam  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  e  $\Pi = \{\alpha\} = \dot{\Delta}^+$  o conjunto de raízes simples de  $\mathfrak{g}$ , então  $I = \{1\}$ . Como  $\omega \subset I$  é um subconjunto próprio, a única possibilidade é  $\omega = \emptyset$ . Assim, podemos ver que

$$\Delta^\omega = \delta\mathbb{N} \text{ e } \widehat{\mathfrak{b}}_{nat} = \left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha+n\delta} \right) \oplus \left( \sum_{n \in \mathbb{N}} \widehat{\mathfrak{g}}_{n\delta} \right),$$

onde  $\widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha+n\delta} = \mathbb{C}(e \otimes t^n)$  e  $\widehat{\mathfrak{g}}_{n\delta} = \mathbb{C}(h \otimes t^n)$ . Logo, a subálgebra parabólica associado a  $\omega$  é dada por

$$\widehat{\mathfrak{p}}_\omega = \widehat{\mathfrak{b}}_{nat} + \sum_{\alpha \in \Delta^\omega} \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha = (G + H) \oplus \left( \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha+n\delta} \right),$$

dessa decomposição de Levi, podemos ver que  $\widehat{\mathfrak{l}}_\omega = G + H$ ,  $\widehat{\mathfrak{l}}^0 = H$ ,  $G(\widehat{\mathfrak{l}}) = \mathbb{C}c$ ,  $G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp = G$ ,  $\widehat{\mathfrak{u}}_\omega = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha+n\delta}$ .

Na verdade, o exemplo anterior pode ser visto para uma  $\mathfrak{g}$  qualquer. No caso extremo em que  $\omega = \emptyset$ , temos  $\widehat{\mathfrak{l}}_\emptyset^0 = H$  e  $G(\widehat{\mathfrak{l}}_\emptyset)^\perp = G$ . Mas lembrando que isso nem sempre acontece, por exemplo, nos casos em que  $\omega \neq \emptyset$  essas subálgebras diferem dessas igualdades. Vejamos o seguinte exemplo.

**Exemplo 2.4.5.** Sejam  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$  e  $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$  o conjunto de raízes simples de  $\mathfrak{g}$ , então  $I = \{1, 2\}$ . Vamos considerar  $\omega = \{1\}$ , assim  $\dot{\Delta}^\omega = \{\alpha_1, -\alpha_1\}$  e

$$\Delta^\omega = \left( \dot{\Delta}^\omega + \delta\mathbb{Z} \right) \cup \delta\mathbb{Z}^*.$$

- $\widehat{\mathfrak{l}}_\omega$  é a subálgebra de Lie gerada por  $\widehat{\mathfrak{g}}_\alpha$  com  $\alpha \in \Delta^\omega$ . Então,

$$\widehat{\mathfrak{l}}_\omega = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha_1+n\delta} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathfrak{g}}_{-\alpha_1+n\delta} + \sum_{n \neq 0} \widehat{\mathfrak{g}}_{n\delta} + H,$$

onde  $\widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha_1+n\delta} = \mathbb{C}(e_{\alpha_1} \otimes t^n)$ ,  $\widehat{\mathfrak{g}}_{-\alpha_1+n\delta} = \mathbb{C}(f_{\alpha_1} \otimes t^n)$  e  $\widehat{\mathfrak{g}}_{n\delta} = \mathbb{C}(h_1 \otimes t^n) \oplus \mathbb{C}((h_1 + 2h_2) \otimes t^n)$  ( $\{h_1, h_2\}$  é a base clássica de  $H$ ).

- $\widehat{\mathfrak{l}}_\omega^0$  é a subálgebra de Lie de  $\widehat{\mathfrak{l}}_\omega$  gerado por todos os seus subespaços de raízes reais e  $H$ . Então,

$$\widehat{\mathfrak{l}}_\omega^0 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha_1+n\delta} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathfrak{g}}_{-\alpha_1+n\delta} + H.$$

- A subálgebra de Heisenberg é dada por  $G = \bigoplus \mathbb{C}(h_1 \otimes t^n) \oplus \mathbb{C}((h_1 + 2h_2) \otimes t^n) \oplus \mathbb{C}c$ .

- Consideremos  $G = G_1 + G_2$ , onde  $G_1 = \mathbb{C}c \oplus \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \mathbb{C}(h_1 \otimes t^n)$  e  $G_2 = \mathbb{C}c \oplus \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \mathbb{C}(h_1 + 2h_2) \otimes t^n$ . Notemos o seguinte:

- 1)  $[t^m \otimes (h_1 + 2h_2), t^n \otimes e_{\alpha_1}] = t^{m+n} \otimes [(h_1 + 2h_2), e_{\alpha_1}] + m\delta_{m,-n} \text{tr}((h_1 + 2h_2)e_{\alpha_1})c = 0$ ,
- 2)  $[t^m \otimes (h_1 + 2h_2), t^n \otimes f_{\alpha_1}] = t^{m+n} \otimes [(h_1 + 2h_2), f_{\alpha_1}] + m\delta_{m,-n} \text{tr}((h_1 + 2h_2)f_{\alpha_1})c = 0$ ,
- 3)  $[t^m \otimes (h_1 + 2h_2), 1 \otimes h_{\alpha_1}] = 0$  e  $[t^m \otimes (h_1 + 2h_2), 1 \otimes h_{\alpha_2}] = 0$ , para qualquer  $m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

Assim,  $[G_2, \widehat{\mathfrak{I}}_{\omega}^0] = 0$ , e portanto  $G_1 = G(\widehat{\mathfrak{I}}_{\omega})$ ,  $G_2 = G(\widehat{\mathfrak{I}}_{\omega})^{\perp}$ ,  $\widehat{\mathfrak{I}}_{\omega}^0 \cap G(\widehat{\mathfrak{I}}_{\omega})^{\perp} = \mathbb{C}c$  e  $\widehat{\mathfrak{I}}_{\{1\}} = \widehat{\mathfrak{I}}_{\{1\}}^0 + G(\widehat{\mathfrak{I}}_{\{1\}})^{\perp}$ . Percebemos que essas subálgebras são diferentes do que visto anteriormente no caso em que  $\omega = \emptyset$ .

# Capítulo 3

## Módulos de Verma imaginário

Neste capítulo, adentramos no fascinante mundo da teoria dos módulos de Verma generalizados, com um enfoque especial no caso em que  $\hat{\mathfrak{p}}$  é uma subálgebra parabólica do tipo II. Esta é uma área de estudo na teoria de álgebras de Lie que tem se mostrado extremamente profunda e relevante. Em particular, exploraremos o caso em que a componente de Levi dessa subálgebra parabólica possui dimensão infinita, resultando nos intrigantes "módulos de Verma imaginário generalizado" [FK18].

Os módulos de Verma têm uma longa história e têm sido um instrumento poderoso para investigar a estrutura e representações das álgebras de Lie. No entanto, a classe dos módulos de Verma imaginário generalizado é particularmente notável, pois desafia a intuição convencional e oferece uma visão única das estruturas subjacentes.

Além disso, neste capítulo, apresentaremos o estudo do funtor de indução imaginário, que se revela uma ferramenta poderosa na construção desses módulos. Exploraremos as nuances e propriedades desse funtor, mostrando como ele está intrinsecamente ligado à teoria dos módulos de Verma imaginário.

Um dos objetivos principais deste capítulo é estabelecer critérios de irredutibilidade para essa notável família de módulos, o qual é o nosso principal resultado. Ao fazer isso, não apenas expandimos nosso entendimento da teoria dos módulos de Verma imaginário, mas também contribuímos para a compreensão mais profunda das álgebras de Lie complexas e de suas representações.

### 3.1 Funtor (indução) imaginário

Sejam  $\hat{\mathfrak{p}} = \hat{\mathfrak{l}} \oplus \hat{\mathfrak{u}}$  uma subálgebra parabólica de  $\hat{\mathfrak{g}}$  do tipo II e  $\lambda \in H^*$ . Chamaremos  $\lambda(c) = a$  de **carga central**.

**Definição 3.1.1.** Sejam  $a \in \mathbb{C}$  e  $V$  um  $\hat{\mathfrak{p}}$ -módulo com carga central  $a$ , tal que  $\hat{\mathfrak{u}} \cdot V = 0$ . O **módulo de Verma imaginário generalizado** com carga central  $a$  é o  $\hat{\mathfrak{g}}$ -módulo

induzido

$$M_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}(V) = U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\widehat{\mathfrak{p}})} V.$$

Veamos abaixo alguns casos bem conhecidos da construção acima.

1. No caso particular quando  $\widehat{\mathfrak{l}} = G + H$  e  $V$  é um  $(G + H)$ -módulo, o módulo  $M_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}(V)$  é um *módulo de loop generalizado* com carga central  $a$ . Essa família de módulos foi estudada no trabalho de [FK14].
2. Tomando agora  $V$  um módulo de Verma para  $G + H$  com peso máximo  $\lambda \in H^*$  com respeito a decomposição triangular  $G = G_- \oplus \mathbb{C}c \oplus G_+$ , o módulo correspondente  $M_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}(V)$  é um *módulo de Verma imaginário* [Fut94].
3. Finalmente, tomando agora  $V$  um módulo de Verma para  $G + H$  com peso máximo  $\lambda \in H^*$  com respeito a decomposição triangular  $G = G_-^\phi \oplus \mathbb{C}c \oplus G_+^\phi$ , o módulo correspondente  $M_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}(V)$  é um *módulo de Verma  $\phi$ -Imaginário* [BBFK13].

Com isso, vamos denotar por  $\mathcal{M}(a, \widehat{\mathfrak{l}})$  a categoria de todos os  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -módulos de peso (i.e.  $H$ -diagonalizável) com carga central  $a$ , e por  $\mathcal{M}(a, \widehat{\mathfrak{g}})$  a categoria de todos os  $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulos de peso com a mesma carga central. Então temos o seguinte **functor (indução) imaginário**

$$\mathbb{I}_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}: \mathcal{M}(a, \widehat{\mathfrak{l}}) \rightarrow \mathcal{M}(a, \widehat{\mathfrak{g}}),$$

que envia um  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -módulo  $V$  para o  $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulo  $M_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}(V)$ . Definiremos agora alguns objetos que serão estudados posteriormente, mas primeiro, para qualquer inteiro positivo  $k$ , vamos denotar  $G_k = \widehat{\mathfrak{g}}_{k\delta} \oplus \mathbb{C}c \oplus \widehat{\mathfrak{g}}_{-k\delta}$ .

**Definição 3.1.2.** Seja  $k$  um inteiro positivo qualquer e  $G_k$  como acima. Dizemos que um  $G_k$ -módulo  $M$  é  $U(\widehat{\mathfrak{g}}_{k\delta})$ -**sobrejetivo** (respectivamente  $U(\widehat{\mathfrak{g}}_{-k\delta})$ -**sobrejetivo**) se para qualquer dois elementos  $v_1, v_2 \in M$  existe um  $v \in M$  e  $u_1, u_2 \in U(\widehat{\mathfrak{g}}_{k\delta})$  (respectivamente,  $u_1, u_2 \in U(\widehat{\mathfrak{g}}_{-k\delta})$ ) tal que  $v_i = u_i v$ ,  $i = 1, 2$ .

Definiremos agora os módulos admissíveis. Esses módulos foram estudados no artigo de [FK18].

**Definição 3.1.3.** Um  $G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp$ -módulo  $M$  é **admissível** se para qualquer inteiro positivo  $k$ , qualquer um de seus  $G_k \cap G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp$ -submódulos cíclicos  $M' \subset M$  é  $U(\widehat{\mathfrak{g}}_{k\delta} \cap G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp)$ -sobrejetivo ou  $U(\widehat{\mathfrak{g}}_{-k\delta} \cap G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp)$ -sobrejetivo.

Recordemos o seguinte critério de irredutibilidade para módulos de tensor admissíveis.

**Teorema 3.1.4** ([FK18, Teorema 1, p. 373]). Seja  $a \in \mathbb{C}$ ,  $\widehat{\mathfrak{l}} = \widehat{\mathfrak{l}}^0 + G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp$  e  $V \simeq M \otimes S$ , onde  $M$  é um  $\widehat{\mathfrak{l}}^0$ -módulo de peso irredutível e  $S$  é um  $G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp$ -módulo admissível irredutível  $\mathbb{Z}$ -graduado. Então  $\mathbb{I}_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}(V) = \mathbb{I}_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}^T(V)$  é um  $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulo irredutível se  $a \neq 0$ .

**Exemplo 3.1.5.** Seja  $a \in \mathbb{C}$ ,  $\widehat{\mathfrak{p}}$  é uma subálgebra parabólica de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  com fator de Levi  $\widehat{\mathfrak{l}} = G + H$ . Seja  $L(a)$  o  $G$ -módulo de peso máximo com respeito a decomposição  $G = G_- \oplus \mathbb{C}c \oplus G_+$  e com carga central  $a$  (irredutível se  $a \neq 0$ ). Definimos uma estrutura de  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -módulo em  $L(a)$ , fixando a ação escalar de  $H \cap \mathfrak{g}$  e definindo a estrutura de peso em  $L(a)$  com respeito a derivação  $d$ . Então  $\mathbb{I}_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}(L(a))$  é  $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulo irredutível se  $a \neq 0$ . Podemos verificar que ele é isomorfo a um módulo de Verma imaginário [Fut97].

Seja  $L(a)^-$  o  $G$ -módulo de peso mínimo com respeito a mesma decomposição triangular e carga central  $a$  (irredutível se  $a \neq 0$ ), e  $V = L(a) \otimes L(a)^-$ . Então  $V$  não é diagonal (no sentido de [BBFK13]) e nem admissível.

Mostraremos que a condição de admissibilidade pode ser estendida no Teorema 3.1.4. Na seguinte subseção provaremos isso para módulos de loop generalizados arbitrários.

## 3.2 Irredutibilidade de módulos de loop generalizado

Sejam  $I = \{1, \dots, n\}$  e  $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  raízes simples de  $\mathfrak{g}$ . Para qualquer subconjunto  $\omega \subset I$ , vamos denotar por  $Q_{\pm}^{\omega}$  o semigrupo de  $H^*$  gerado por  $\pm\alpha_i$ ,  $i \in \omega$ . Denote também por  $Q^{\omega} = \bigoplus_{j \in \omega} \mathbb{Z}\alpha_j \oplus \mathbb{Z}\delta$  e se  $\omega = I$ , denote  $Q^I$  somente por  $Q$ . Podemos ver que  $U(\widehat{\mathfrak{g}})$  é uma álgebra  $Q$ -graduada, então

$$U(\widehat{\mathfrak{g}}) = \bigoplus_{\phi \in Q} U(\widehat{\mathfrak{g}})_{\phi},$$

e os elementos de  $U(\widehat{\mathfrak{g}})_{\phi}$  são chamados elementos homogêneos de  $U(\widehat{\mathfrak{g}})$  de grau homogêneo  $\phi \in Q$ . Definimos agora a  $\omega$ -altura de uma raiz.

**Definição 3.2.1.** Sejam  $\alpha \in Q_{-}^{\omega}$ , com  $\alpha = -\sum_{j \in \omega} k_j \alpha_j$ , onde cada  $k_j$  é um  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Definimos a  $\omega$ -altura de  $\alpha$  como  $\text{ht}_{\omega}(\alpha) = \sum_{j=1}^n k_j$ .

Vimos anteriormente que para uma subálgebra parabólica  $\widehat{\mathfrak{p}} = \widehat{\mathfrak{l}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}$ , a subálgebra  $\widehat{\mathfrak{u}}$  satisfazendo  $\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{p}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}$  é chamada de o **radical oposto** de  $\widehat{\mathfrak{p}}$ . Observemos que para qualquer  $\widehat{\mathfrak{p}}$ -módulo  $V$  o módulo induzido  $M_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}(V) \simeq U(\widehat{\mathfrak{u}}) \otimes_{\mathbb{C}} V$  isomorfo como espaço vetorial. Vejamos alguns exemplos.

**Exemplo 3.2.2.** Consideremos  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ ,  $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ ,  $I = \{1, 2\}$  o conjunto das raízes simples de  $\mathfrak{g}$  e vamos considerar novamente  $\omega = \{1\} \subset I$ . Então

$$Q^{\{1\}} = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\delta \text{ e } Q_{\pm}^{\{1\}} = \{\pm k\alpha_1 \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

Para avaliarmos um exemplo de altura, basta considerarmos  $\alpha = -(\alpha_1)$ . Então  $\text{ht}_{\omega}(\alpha) = 1$ .

Agora vamos considerar uma subálgebra parabólica  $\widehat{\mathfrak{p}} = \widehat{\mathfrak{l}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}$ . Seja  $\omega = \omega_{\widehat{\mathfrak{u}}}$  consistindo de todos os índices  $i$  para o qual  $\alpha_i$  é uma raiz simples de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  em que  $\widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha} \in \widehat{\mathfrak{u}}$ , ou seja, se  $\widehat{\mathfrak{p}}$  é uma subálgebra parabólica que contém uma subálgebra de Borel  $\widehat{\mathfrak{b}}$  associada a um conjunto  $J \subset I$ , então  $\omega = I \setminus J$ , o que implica que  $\alpha \in -P_{\text{nat}} \setminus \Delta^\omega$ , segundo a Observação 2).

Seja  $v \in M_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}(V)$  um vetor de peso não nulo ( $v \in M_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}(V)_\mu$ , para  $\mu \in H^*$ ). Então

$$v = \sum_i u_i v_i,$$

para algum conjunto finito de índices, onde para todo  $i$ ,  $u_i \in U(\widehat{\mathfrak{u}})$  são elementos linearmente independentes e  $v_i \in V$ . Desde que  $v$  é um vetor de peso então cada  $u_i$  é um elemento homogêneo de  $U(\widehat{\mathfrak{u}})$  de grau homogêneo  $\phi_i \in Q$ . Por definição, cada  $\phi_i$  pode ser escrito como  $\phi_i = \psi_i + \tau_i$ , onde  $\psi_i \in Q_-^{\omega_{\widehat{\mathfrak{u}}}}$  e  $\tau_i \in Q^{I \setminus \omega_{\widehat{\mathfrak{u}}}}$ . E mais ainda, pela homogeneidade, temos que  $\psi_i = \psi_j$  para todo  $i, j$ . Denotemos por  $\psi$  está restrição comum para  $Q_-^{\omega_{\widehat{\mathfrak{u}}}}$ . Com isso, temos a seguinte definição que é o ponto chave para as demonstrações.

**Definição 3.2.3.** Definiremos a  $\widehat{\mathfrak{u}}$ -altura de  $v$  como a  $\omega$ -altura de  $\psi$  e denotaremos simplesmente por  $\text{ht}_{\widehat{\mathfrak{u}}}(v)$ .

Percebamos que, seguindo a Observação 2) e a definição anterior, podemos induzir uma ordem em  $-P_{\text{nat}} \setminus \Delta^J$ , pois os seus elementos são da forma  $(\beta, n) := -\beta + n\delta$ , tal que  $\text{ht}_{\omega(-\beta)}$  é bem definida. Vejamos um exemplo para fixação das definições e notações.

**Exemplo 3.2.4.** Como no exemplo anterior, vamos considerar  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ ,  $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ ,  $I = \{1, 2\}$  e consideremos também o seguinte subconjunto  $J = \{1\}$  de  $I$ . Assim, podemos ver que

$$\widehat{\mathfrak{u}} = \widehat{\mathfrak{u}}_J = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathfrak{g}}_{-\alpha_2 + n\delta} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathfrak{g}}_{-(\alpha_1 + \alpha_2) + n\delta}.$$

Podemos perceber neste exemplo que  $\omega = \omega_{\widehat{\mathfrak{u}}} = \{2\}$ . Assim

$$Q^{I \setminus \omega_{\widehat{\mathfrak{u}}}} = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\delta \text{ e } Q_-^{\omega_{\widehat{\mathfrak{u}}}} = \{-k\alpha_2 \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}.$$

Assim,  $\text{ht}_{\{2\}}(-\alpha_2) = 1$  e  $\text{ht}_{\{2\}}(-(\alpha_1 + \alpha_2)) = 1$ . Com isso, os elementos da forma  $X_{\beta_1}^{p_1} \cdots X_{\beta_n}^{p_n}$ , em que  $\beta_1, \dots, \beta_n \in -P_{\text{nat}} \setminus \Delta^J = \{-\alpha_2 + n\delta, -(\alpha_1 + \alpha_2) + m\delta \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$  geram  $U(\widehat{\mathfrak{u}})$ , com grau homogêneo da forma  $-k\alpha_2 + (l\alpha_1 + m\delta)$  onde  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $l \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$  e  $m \in \mathbb{Z}$  (Aqui, se  $k = 0$ , então  $l = 0$  e  $m = 0$ ).

Seja  $v \in M_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}(V)$  um vetor de peso não nulo. Por simplicidade, vamos considerar soma de duas parcelas para fins práticos e depois estendemos:

$$v = X_{\beta_1}^{p_1} X_{\beta_2}^{p_2} v_1 + X_{\gamma_1}^{q_1} X_{\gamma_2}^{q_2} v_2,$$

onde  $p_1 + p_2 = q_1 + q_2$  e  $\beta_1, \beta_2, \gamma_1$  e  $\gamma_2 \in -P_{\text{nat}} \setminus \Delta^J$ . É fácil vermos que

$$\phi_1 = \psi_1 + \tau_1 \text{ e } \phi_2 = \psi_2 + \tau_2,$$

em que  $\psi_1 = -(p_1 + p_2)\alpha_2 = -(q_1 + q_2)\alpha_2 = \psi_2 \in Q_-^{\omega_{\hat{u}}}$  e  $\tau_1 = r_1\alpha_1 + s_1\delta$ ,  $\tau_2 = r_2\alpha_1 + s_2\delta \in Q^{\omega_{\hat{u}}}$ . Portanto,  $\text{ht}_{\hat{u}}(v) = \text{ht}_{\omega_{\hat{u}}}(\psi_1) = \text{ht}_{\omega_{\hat{u}}}(\psi_2) = p_1 + p_2$ .

O exemplo acima pode ser estendido para qualquer elemento de peso não nulo da forma  $v = \sum_{i \in R} u_i v_i$  para algum conjunto finito  $R$ , onde  $u_i \in U(\hat{\mathfrak{u}})$  são elementos homogêneos linearmente independente e  $v_i \in V$ ,  $i \in R$ . Definimos agora a seguinte relação de ordem em  $-P_{\text{nat}} \setminus \Delta^\omega$ :

**Definição 3.2.5.** Se  $(\beta, n)$  e  $(\alpha, m)$  pertencem ao conjunto  $-P_{\text{nat}} \setminus \Delta^J$  definimos a relação de ordem  $<$  por:

- (1)  $(\beta, n) < (\alpha, m)$  se, e somente se,  $\text{ht}_\omega(-\beta) < \text{ht}_\omega(-\alpha)$
- (2) Se  $\text{ht}_\omega(-\beta) = \text{ht}_\omega(-\alpha)$  então  $n < m$ .

**Exemplo 3.2.6.** Seja  $\mathfrak{g}$  a álgebra de Lie adjacente do tipo  $G_2$ , e consideremos a base de raízes simples  $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ . Podemos perceber que  $I = \{1, 2\}$ , assim podemos considerar, por exemplo,  $J = \{1\} \subset I$ , o que implica que  $\omega = \{2\}$ . Com isso, temos:

- $\dot{\Delta}^{\{1\}} = \{\alpha_1, -\alpha_1\}$ ,
- $-P_{\text{nat}} = \{-\alpha_1 + n\delta, -\alpha_2 + n\delta, -(\alpha_1 + \alpha_2) + n\delta, -(2\alpha_2 + \alpha_1) + n\delta, -(3\alpha_2 + \alpha_1) + n\delta, -(3\alpha_2 + 2\alpha_1) + n\delta \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{-m\delta \mid m > 0\}$ ,
- $\Delta^{\{1\}} = \{\alpha_1 + n\delta, -\alpha_1 + n\delta \mid n \in \mathbb{Z}\} \cup \{m\delta \mid m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$ ,
- $-P_{\text{nat}} \setminus \Delta^{\{1\}} = \{-\alpha_2 + n\delta, -(\alpha_1 + \alpha_2) + n\delta, -(2\alpha_2 + \alpha_1) + n\delta, -(3\alpha_2 + \alpha_1) + n\delta, -(3\alpha_2 + 2\alpha_1) + n\delta \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ,
- $\text{ht}_{\{2\}}(-\alpha_2) = 1 < \text{ht}_{\{2\}}(-(2\alpha_2 + \alpha_1)) = 2$ .

Um aspecto relevante destacado pelo exemplo anterior é que, se  $v \in M_{a, \hat{\mathfrak{p}}}(V)$ , onde

$$v = X_{-\alpha_2 + 2\delta}v_1 + X_{-(3\alpha_2 + 2\alpha_1) + 3\delta}v_2,$$

então temos  $\phi_1 = -\alpha_2 + 2\delta$  e  $\phi_2 = -3\alpha_2 - 2\alpha_1 + 3\delta$ . Portanto,  $\text{ht}_2(\phi_1) = 1 \neq 3 = \text{ht}_2(\phi_2)$ . Surge a pergunta: Por que isso ocorre? Na realidade, isso se deve ao fato de que  $v$  possui dois termos com pesos diferentes, o que implica que  $v$  não é um vetor de peso. Isso reforça ainda mais a importância de considerarmos exatamente esse vetor.

Sabemos que  $\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{u}} \oplus \hat{\mathfrak{p}}$  e  $M_{a, \hat{\mathfrak{p}}}(V) = U(\hat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\hat{\mathfrak{p}})} V$ , então temos:

$$M_{a, \hat{\mathfrak{p}}}(V) \simeq U(\hat{\mathfrak{u}}) \otimes V.$$

Pela relação de ordem definida em  $-P_{\text{nat}} \setminus \Delta^J$ , temos que os elementos:

$$X_{(\beta_{i,1}, n_{i,1})}^{p_{i,1}} X_{(\beta_{i,2}, n_{i,2})}^{p_{i,2}} \cdots X_{(\beta_{i,t(i)}, n_{i,t(i)})}^{p_{i,t(i)}},$$

onde  $(\beta_{i,1}, n_{i,1}) < (\beta_{i,2}, n_{i,2}) < \cdots < (\beta_{i,t(i)}, n_{i,t(i)})$  e  $p_{i,j} \geq 0$  para  $1 \leq j \leq t(i)$  formam uma base para  $U(\widehat{\mathfrak{u}})$ . Sabemos ainda que  $V$  é um módulo de peso (com respeito a  $H$ ) sobre  $\widehat{\mathfrak{p}}$  com uma ação trivial de  $\widehat{\mathfrak{u}}$ , isto é,

$$V = \bigoplus_{\lambda \in H^*} V_\lambda,$$

onde  $V_\lambda = \{v \in V \mid h \cdot v = \lambda(h)v, \forall h \in H\}$ . Temos assim uma base de  $V$  formada por  $\{v_k \mid k \in \Lambda\}$  onde  $v_k \in V_\lambda$  para algum  $\lambda \in H^*$  e  $\Lambda$  é um conjunto de índices. Concluimos assim que o conjunto de elementos:

$$\{X_{(\beta_{i,1}, n_{i,1})}^{p_{i,1}} X_{(\beta_{i,2}, n_{i,2})}^{p_{i,2}} \cdots X_{(\beta_{i,t(i)}, n_{i,t(i)})}^{p_{i,t(i)}} \otimes v_k\}$$

forma uma base para  $M_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}(V)$ . Agora, vamos considerar a seguinte definição, que será útil para nossa pesquisa.

**Definição 3.2.7.** Consideremos  $\widehat{\mathfrak{p}} = \widehat{\mathfrak{l}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}$  como uma subálgebra parabólica de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  e  $V$  como um  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -módulo de peso. Definimos os seguintes submódulos:

- (1)  $M_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}^t(V) = 1 \otimes V$ , denominado **topo**, que gera  $M_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}(V)$ ;
- (2)  $T_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}(V)$  é o submódulo de  $M_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}(V)$  que é  $\widehat{\mathfrak{u}}$ -invariante, ou seja,  $v \in T_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}(V)$  se, e somente se,  $\widehat{\mathfrak{u}}v = 0$ .

A definição acima nos fornece uma abordagem sobre uma possível irreduzibilidade de  $M_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}(V)$  para certos módulos. Além disso, é evidente que o topo  $M_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}^t(V)$  não contém vetores  $v$  com  $\text{ht}_\omega(v) > 1$ . Dessa forma, avançamos em nossa pesquisa buscando identificar módulos específicos nos quais  $M_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}^t(V) = T_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}(V)$ , iniciando nossa análise pela investigação das alturas de seus vetores de peso. Vejamos alguns exemplos como ponto de partida.

**Exemplo 3.2.8.** Consideremos  $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$  como a álgebra de adjacente do tipo  $A_2$ , com base de raízes  $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ . Definimos os conjuntos  $I = \{1, 2\}$  e  $J = \{1\} \subset I$ , o que implica  $\omega = \{2\}$ .

Seja  $v \in M_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}(V)$  um vetor de peso não nulo, tal que:

$$v = X_{-\alpha_2 + \delta}^2 \otimes v_1,$$

onde  $\text{ht}_\omega(v) = 2 > 1$ . Além disso, temos  $\widehat{\mathfrak{u}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha_2 + n\delta} + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathfrak{g}}_{(\alpha_1 + \alpha_2) + n\delta}$ .

Consideremos um elemento não nulo  $u \in \widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha_2 + m\delta}$  para algum  $m \in \mathbb{Z}$ . Por simplicidade, denotemos  $u = X_{\alpha_2 + m\delta}$ . Agora, analisemos as condições para  $uv \neq 0$ :

- $uv_1 = 0$  ( $\widehat{\mathfrak{u}}.V = 0$ ).

- $uv = ([u, X_{-\alpha_2+\delta}^2] + X_{-\alpha_2+\delta}^2 u) \otimes v_1 = [u, X_{-\alpha_2+\delta}^2] \otimes v_1 = X_{-\alpha_2+\delta}[u, X_{-\alpha_2+\delta}] + [u, X_{-\alpha_2+\delta}]X_{-\alpha_2+\delta}$ .
- Dado que  $u \in \widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha_2+m\delta}$  e  $X_{-\alpha_2+\delta} \in \widehat{\mathfrak{g}}_{-\alpha_2+\delta}$ , então  $[u, X_{-\alpha_2+\delta}] \in \widehat{\mathfrak{g}}_{(m+1)\delta}$  e podemos reescrever esse elemento como  $[u, X_{-\alpha_2+\delta}] = X_{(m+1)\delta}$ .

Percebamos que no item anterior, se  $m = -1$ , então  $X_{(m+1)\delta} \in H$  e se  $m \neq -1$ , então  $X_{(m+1)\delta} \in G$ , a subálgebra de Heisenberg de  $\widehat{\mathfrak{g}}$ . Continuando, temos:

$$\begin{aligned} uv &= (X_{-\alpha_2+\delta}X_{(m+1)\delta} + X_{(m+1)\delta}X_{-\alpha_2+\delta}) \otimes v_1 \\ &= (X_{-\alpha_2+\delta}X_{(m+1)\delta} + X_{-\alpha_2+\delta}X_{(m+1)\delta} + [X_{(m+1)\delta}, X_{-\alpha_2+\delta}]) \otimes v_1 \\ &= 2X_{-\alpha_2+\delta}X_{(m+1)\delta} \otimes v_1 + X_{-\alpha_2+(m+2)\delta} \otimes v_1. \end{aligned}$$

Denotaremos  $v_2 = X_{(m+1)\delta} \otimes v_1$  e percebamos que se  $V$  for um  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -módulo de peso, então  $v_2 = 1 \otimes X_{(m+1)\delta}v_1$  que pertence ao topo  $M_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}^t(V)$ . Assim, consideremos  $V$  como mencionado anteriormente. Podemos ver que neste caso há duas possibilidades para  $v_2$ : ou  $v_2 = 0$  ou  $v_2 \neq 0$ .

- Se  $v_2 = 0$ , então  $uv = X_{-\alpha_2+(m+2)\delta} \otimes v_1 \neq 0$ , pois  $X_{-\alpha_2+(m+2)\delta}$  é homogêneo em  $U(\widehat{\mathfrak{u}})$  e  $v_1 \in V$ . Assim,  $X_{-\alpha_2+(m+2)\delta} \otimes v_1$  é linearmente independente.
- Se  $v_2 \neq 0$ , então  $uv = 2X_{-\alpha_2+\delta} \otimes v_2 + X_{-\alpha_2+(m+2)\delta} \otimes v_1$ . Novamente, como  $X_{-\alpha_2+(m+2)\delta}$  e  $X_{-\alpha_2+\delta}$  são elementos homogêneos em  $U(\widehat{\mathfrak{u}})$  e  $v_1, v_2 \in V$ , então  $X_{-\alpha_2+(m+2)\delta} \otimes v_1$  e  $X_{-\alpha_2+\delta} \otimes v_2$  são linearmente independentes, ou seja,  $uv \neq 0$ .

Para finalizar esta análise, percebamos que em todos os casos temos  $\text{ht}_\omega(uv) = 1 = \text{ht}_\omega(v) - 1$ .

Podemos indagar sobre o que ocorre quando  $v$  possui altura 2, porém com  $X_\alpha$ 's distintos. Para esclarecer, consideremos o exemplo a seguir como ilustração, sobre as mesmas hipóteses e objetos do exemplo anterior.

**Exemplo 3.2.9.** Seja  $v \in M_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}(V)$  um vetor de peso não nulo, tal que:

$$v = X_{-\alpha_2+\delta}X_{-\alpha_2+2\delta} \otimes v_1,$$

onde  $\text{ht}_\omega(v) = 2 > 1$ . Consideremos um elemento não nulo  $u = X_{\alpha_2+m\delta}$ . Agora, analisemos as condições para  $uv \neq 0$ :

- $uv_1 = 0$  ( $\widehat{\mathfrak{u}}.V = 0$ ).
- $uv = ([u, X_{-\alpha_2+\delta}X_{-\alpha_2+2\delta}] + X_{-\alpha_2+\delta}X_{-\alpha_2+2\delta}u) \otimes v_1 = [u, X_{-\alpha_2+\delta}X_{-\alpha_2+2\delta}] \otimes v_1 = (X_{-\alpha_2+\delta}[u, X_{-\alpha_2+2\delta}] + [u, X_{-\alpha_2+\delta}]X_{-\alpha_2+2\delta}) \otimes v_1$ .

- Dado que  $u \in \widehat{\mathfrak{g}}_{\alpha_2+m\delta}$ , então  $[u, X_{-\alpha_2+\delta}] \in \widehat{\mathfrak{g}}_{(m+1)\delta}$  e  $[u, X_{-\alpha_2+m\delta}] \in \widehat{\mathfrak{g}}_{(m+2)\delta}$  e reescrevendo esses elementos como  $[u, X_{-\alpha_2+\delta}] = X_{(m+1)\delta}$  e  $[u, X_{-\alpha_2+m\delta}] = X_{(m+2)\delta}$ .

E podemos verificar também que  $X_{(m+1)\delta}, X_{(m+2)\delta} \in \widehat{\mathfrak{l}}$ . Assim

$$\begin{aligned} uv &= (X_{-\alpha_2+\delta}X_{(m+2)\delta} + X_{(m+1)\delta}X_{-\alpha_2+2\delta}) \otimes v_1 \\ &= (X_{-\alpha_2+\delta}X_{(m+2)\delta} + X_{-\alpha_2+2\delta}X_{(m+1)\delta} + [X_{(m+1)\delta}, X_{-\alpha_2+2\delta}]) \otimes v_1 \\ &= X_{-\alpha_2+\delta}X_{(m+2)\delta} \otimes v_1 + X_{-\alpha_2+2\delta}X_{(m+1)\delta} \otimes v_1 + X_{-\alpha_2+(m+3)\delta} \otimes v_1. \end{aligned}$$

Denotaremos  $v_2 = X_{(m+1)\delta} \otimes v_1$  e  $v_3 = X_{(m+2)\delta} \otimes v_1$  e como no caso anterior, para  $V$  um  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -módulo de peso, então  $v_2 = 1 \otimes X_{(m+1)\delta}v_1$ ,  $v_3 = 1 \otimes X_{(m+2)\delta}v_1$  ao qual pertencem ao topo  $M_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}^t(V)$ . Usando os mesmos argumentos no caso anterior, podemos verificar que  $uv \neq 0$  e  $\text{ht}_\omega(uv) = 1 = \text{ht}_\omega(v) - 1$ .

Agora vamos abordar os caso que envolvem somas, mas antes disso vamos organizar as nossas somas da seguinte forma abaixo descrito. Primeiramente consideremos  $v \in M_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}(V)$  um elemento de peso não nulo. Vamos organizar os monômios que compõe  $v$  da seguinte forma:

Escolhemos o monômio mínimo entre todos eles identificando o primeiro fator (da esquerda para a direita)  $X_{(\beta,n)}$  que tem uma raiz menor do que todas as outras, de acordo com a relação de ordem dada em  $-P_{nat} \setminus \Delta^J$ .

**Exemplo 3.2.10.** No caso da álgebra de Lie adjacente  $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$  e com os mesmos objetos considerados anteriormente, temos:

- Se  $v = X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}X_{-\alpha_2+3\delta} \otimes v_1 + X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}X_{-\alpha_2+5\delta} \otimes v_2$ , então o monômio mínimo é  $X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}X_{-\alpha_2+3\delta}$ .
- Se  $v = X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}X_{-\alpha_2+3\delta}^2 \otimes v_1 + X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}^2X_{-\alpha_2+5\delta} \otimes v_2$ , então o monômio mínimo é  $X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}^2X_{-\alpha_2+5\delta}$ .
- Nos exemplos anteriores, sempre consideramos o elemento mínimo.

Vejamos agora um exemplo que envolve a soma de duas parcelas primeiramente.

**Exemplo 3.2.11.** Seja  $v \in M_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}(V)$  um elemento de peso não nulo, tal que:

$$v = X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+2\delta}X_{-\alpha_2+3\delta} \otimes v_1 + X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}X_{-\alpha_2+4\delta} \otimes v_2,$$

então  $\text{ht}_\omega(v) = 2 > 1$ . Podemos observar que  $(\alpha_1+\alpha_2, 1) < (\alpha_1+\alpha_2, 2)$ , ou seja, o monômio mínimo é  $X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}X_{-\alpha_2+4\delta}$ . Vamos reorganizar os termos de tal forma que o monômio mínimo seja o primeiro. Por simplicidade, consideremos a reorganização da seguinte forma:

$$v = X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}X_{-\alpha_2+4\delta} \otimes v_1 + X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+2\delta}X_{-\alpha_2+3\delta} \otimes v_2.$$

Consideremos um elemento não nulo  $u \in \mathfrak{g}_{\alpha_2+m\delta}$  para algum  $m \in \mathbb{Z}$ . Por simplicidade, vamos representar por  $u = X_{\alpha_2+m\delta}$ . Vamos encontrar condições para que  $uv \neq 0$ .

- $uv_i = 0$  para  $i = 1, 2$  ( $\widehat{\mathbf{u}} \cdot V = 0$ ),
- $uv = [u, X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}X_{-\alpha_2+4\delta}] \otimes v_1 + [u, X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+2\delta}X_{-\alpha_2+3\delta}] \otimes v_2$ .

Sabemos que para  $v_1$ :

- $[u, X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}X_{-\alpha_2+4\delta}] = [u, X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}]X_{-\alpha_2+4\delta} + X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}[u, X_{-\alpha_2+4\delta}]$ ,
- $[u, X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}] = X_{-\alpha_1+(m+1)\delta}$  e  $[u, X_{-\alpha_2+4\delta}] = X_{(m+4)\delta}$ .

Então, temos que

$$[u, X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}]X_{-\alpha_2+4\delta} = X_{-\alpha_1+(m+1)\delta}X_{-\alpha_2+4\delta}$$

e

$$X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}[u, X_{-\alpha_2+4\delta}] = X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}X_{(m+4)\delta}.$$

Logo:

- $[u, X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}]X_{-\alpha_2+4\delta} \otimes v_1 = X_{-\alpha_2+4\delta}X_{-\alpha_1+(m+1)\delta} \otimes v_1 + X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+(m+5)\delta} \otimes v_1$ ,
- $X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}[u, X_{-\alpha_2+4\delta}] \otimes v_1 = X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}X_{(m+4)\delta} \otimes v_1$ ,
- $[u, X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}X_{-\alpha_2+4\delta}] \otimes v_1 = X_{-\alpha_2+4\delta}X_{-\alpha_1+(m+1)\delta} \otimes v_1 + X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+(m+5)\delta} \otimes v_1 + X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}X_{(m+4)\delta} \otimes v_1$ .

Para  $v_2$ , temos:

- $[u, X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+2\delta}X_{-\alpha_2+3\delta}] \otimes v_2 = X_{-\alpha_1+(m+2)\delta}X_{-\alpha_2+3\delta} \otimes v_2 + X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+2\delta}X_{(m+3)\delta} \otimes v_2$ ,
- $[u, X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+2\delta}X_{-\alpha_2+3\delta}] \otimes v_2 = X_{-\alpha_2+3\delta}X_{-\alpha_1+(m+2)\delta} \otimes v_2 + X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+(m+5)\delta} \otimes v_2 + X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+2\delta}X_{(m+3)\delta} \otimes v_2$ .

Relembrando que, como estamos considerando  $J = \{1\}$ , então o fator de Levi  $\widehat{\mathfrak{l}}$  é gerado por  $H$  e pelos subespaços de raízes  $\widehat{\mathfrak{g}}_\alpha$  em que  $\alpha \in \Delta^J$ , isto é,  $X_{-\alpha_1+(m+1)\delta}$  e  $X_{-\alpha_1+(m+2)\delta}$  estão em  $\widehat{\mathfrak{l}}$ . Vamos denotar:

$$v_3 = X_{-\alpha_1+(m+1)\delta} \otimes v_1,$$

$$v_4 = X_{(m+4)\delta} \otimes v_1,$$

$$v_5 = X_{-\alpha_1+(m+2)\delta} \otimes v_2,$$

$$v_6 = X_{(m+3)\delta} \otimes v_2.$$

Se considerarmos agora  $V$  como um  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -módulo de peso, então  $v_3, v_4, v_5, v_6 \in M_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}^t(V)$ , e assim temos:

$$\begin{aligned} uv &= X_{-\alpha_2+4\delta} \otimes v_3 + X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+(m+5)\delta} \otimes v_1 + X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta} \otimes v_4 \\ &\quad + X_{-\alpha_2+3\delta} \otimes v_5 + X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+(m+5)\delta} \otimes v_2 + X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+2\delta} \otimes v_6. \end{aligned}$$

Vamos comparar os termos com  $v_4$  e  $v_6$ :

- Percebamos que se  $v_4 \neq 0$  e  $|m| \gg 0$ , então  $X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta} \otimes v_4 \neq 0$  sobrevive e, como é o monômio mínimo, não há risco de cancelamento com outro termo. Logo, basta mostrarmos que com certas condições,  $v_4 \neq 0$ .
- $V$  é um  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -módulo de peso e suponhamos que  $V$  tenha uma carga central não nula, então para cada inteiro positivo  $k$ , ou  $X_{k\delta} \otimes w = 0$  ou  $X_{-k\delta} \otimes w = 0$  para todo  $w \in V$ , pois  $[X_{k\delta}, X_{-k\delta}] \otimes w = kc \otimes w$  (Proposição 1.5.4).
- Conseguimos assim um  $m$  com  $|m| \gg 0$  tal que  $v_4 \neq 0$ .
- Portanto  $uv \neq 0$  e  $\text{ht}_\omega(uv) = \text{ht}_\omega(X_{-(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}) = 1 = \text{ht}_\omega(v) - 1$ .

Os exemplos anteriores podem ser generalizados a somas finitas em  $v = \sum_{i \in R} u_i v_i$  e nos conduzem ao seguinte lema, apresentado como Lema 1 em [FK18].

**Lema 3.2.12.** Sejam  $V$  um  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -módulo de peso com carga central não nula e  $v$  um vetor de peso não nulo com  $\text{ht}_\omega(v) > 1$ . Então existe um  $u \in \widehat{\mathfrak{u}}$  tal que  $uv \neq 0$  e  $\text{ht}_\omega(uv) = \text{ht}_\omega(v) - 1$ .

*Demonstração.* Consideremos  $\widehat{\mathfrak{u}} = \bigoplus_{\alpha \in -P_{\text{nat}} \setminus \Delta^J} \widehat{\mathfrak{g}}_\alpha$ . A base para  $U(\widehat{\mathfrak{u}})$  consiste em elementos da forma  $X_{(\beta_1, n_1)}^{p_1} \cdots X_{(\beta_t, n_t)}^{p_t}$ , onde  $0 \neq X_{(\beta_j, n_j)} \in \widehat{\mathfrak{g}}_{-\beta_j + n_j \delta}$  e  $(\beta_1, n_1) < \cdots < (\beta_t, n_t)$ .

Seja  $v = \sum_{i \in R} u_i v_i = \sum_{i \in R} X_{(\beta_{i,1}, n_{i,1})}^{p_{i,1}} \cdots X_{(\beta_{i,t(i)}, n_{i,t(i)})}^{p_{i,t(i)}} \otimes v_i$ . Cada fator  $X_{(\beta_{i,j}, n_{i,j})}$  é um elemento de base para  $\widehat{\mathfrak{g}}_{-\beta_{i,j} + n_{i,j} \delta}$ . Podemos organizar os índices de forma que  $(\beta_{1,1}, n_{1,1}) \leq (\beta_{2,1}, n_{2,1}) \leq \cdots$  e, entre  $\beta_{i,j}$  com altura igual a  $\text{ht}_\omega(X_{(\beta_{1,1}, n_{1,1})})$  e  $n_{i,j} = n_{1,1}$ ,  $p_{1,1}$  seja máximo.

Suponhamos que  $u \in \widehat{\mathfrak{g}}_{\beta_{1,t(1)} + m\delta}$  seja não nulo para algum  $m \in \mathbb{Z}$ . Então,  $uv_i = 0$  para todos  $i$  e  $uv = \sum_{i \in R} [u, u_i] v_i$ . O comutador  $[u, X_{(\beta_{1,t(1)}, n_{1,t(1)})}]$  é uma combinação linear dos  $x_{m+n_{1,t(1)}, j}$  para alguns  $j$ 's. Como  $V$  é um  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -módulo de peso com carga central não nula, então existe  $m \in \mathbb{Z}$  tal que  $|m| \gg 0$ , e  $X_{\beta_{1,1}, n_{1,1}}^{p_{1,1}} \cdots X_{\beta_{1,t(1)}, n_{1,t(1)}}^{p_{1,t(1)}-1} [u, X_{\beta_{1,t(1)}, n_{1,t(1)}}] \otimes v_1 \neq 0$ , pois é um monômio minimal. Portanto, teremos  $uv \neq 0$  e  $\text{ht}_\omega(uv) = \text{ht}_\omega(v) - 1$ .  $\square$

Através do Lema 3.2.12, segue imediatamente que  $T_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}(V)$  não pode conter elementos não nulos com altura  $\text{ht}_\omega(v) > 1$ . De fato, qualquer elemento desse tipo geraria um submódulo próprio cujos elementos teriam alturas  $\geq \text{ht}_\omega(v)$ , o que contradiz o Lema 3.2.12. Observamos, no entanto, que a prova do Lema 3.2.12 não aborda o caso quando  $\text{ht}_\omega(v) = 1$ .

Vejam alguns exemplos que servem como ponto de partida para essa investigação, mas considerando  $J = \emptyset$ , isto é,  $\widehat{\mathfrak{I}} = G + H$ .

**Exemplo 3.2.13.** Consideremos  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ ,  $\Pi = \{\alpha = \alpha_1\}$ ,  $I = \{1\}$  e  $J = \emptyset$  ( $\omega = I$ ). Seja  $v \in M_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}(V)$  um vetor de peso não nulo, tal que:

$$v = X_{-\alpha+k\delta} \otimes v_1, \quad (\mathfrak{ht}_\omega(v) = 1),$$

onde  $X_{-\alpha+k\delta} \in U(\widehat{\mathfrak{u}})$  e  $v_1 \in V$ . Escolhamos  $d = X_{\alpha+n\delta} \in U(\widehat{\mathfrak{u}})$ , para algum  $n \in \mathbb{Z}$ . Assim, temos

- $dv = dX_{-\alpha+k\delta} \otimes v_1 = (X_{-\alpha+k\delta}d + [d, X_{-\alpha+k\delta}]) \otimes v_1 = [d, X_{-\alpha+5\delta}] \otimes v_1,$
- $[d, X_{-\alpha+k\delta}] = [X_{\alpha+n\delta}, X_{-\alpha+k\delta}] = X_{(n+k)\delta} \in \widehat{\mathfrak{I}},$
- $dv = X_{(n+k)\delta} \otimes v_1.$

Como  $V$  é um  $\widehat{\mathfrak{I}}$ -módulo de peso com carga central não nula, então para todo  $w \in V$  e para todo  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $X_{m\delta}$  e  $X_{-m\delta}$  não podem agir simultaneamente como zero em  $w$ , pois caso contrário, teríamos  $0 = [X_{m\delta}, X_{-m\delta}]w = mcw$ . Portanto, existe  $N \in \mathbb{Z}$ , tal que,  $dv = X_{N\delta} \otimes v_1 \neq 0$  e  $\mathfrak{ht}_\omega(dv) = 0$ .

Notamos também que no exemplo anterior, junto com o Lema 3.2.12, se tomarmos  $V$  como irredutível, então  $v$  gerará  $M_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}(V)$ , o que seria irredutível. Vejamos mais um exemplo, com as mesmas condições e objetos considerados no exemplo anterior, para investigarmos o que acontece com soma de duas parcelas.

**Exemplo 3.2.14.** Consideremos  $v \in M_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}(V)$  como um vetor de peso não nulo, tal que:

$$v = X_{-\alpha+7\delta} \otimes v_1 + X_{-\alpha+5\delta} \otimes v_2, \quad (\mathfrak{ht}_\omega(v) = 1),$$

onde  $X_{-\alpha+5\delta}, X_{-\alpha+7\delta} \in U(\widehat{\mathfrak{u}})$  e  $v_1, v_2 \in V$ . Escolhamos  $d = X_{\alpha+n\delta} \in U(\widehat{\mathfrak{u}})$ , para algum  $n \in \mathbb{Z}$ . Assim, temos

$$dv = X_{(n+7)\delta} \otimes v_1 + X_{(n+5)\delta} \otimes v_2.$$

Como antes, podemos encontrar um inteiro  $n$ , com  $|n| \gg 0$ , tal que  $X_{(n+5)\delta} \otimes v_2 \neq 0$  e  $X_{(n+7)\delta} \otimes v_1 \neq 0$ , mas não podemos afirmar ainda que  $dv \neq 0$ . Por simplicidade, vamos denotar por  $N = n + 7$  e também omitiremos o  $\delta$  nas relações abaixo. Suponhamos então que para um  $N$  suficientemente grande, temos

$$X_N \otimes v_1 + X_{N-2} \otimes v_2 = X_{-N} \otimes v_1 + X_{-N-2} \otimes v_2 = 0. \quad (3.1)$$

Agindo respectivamente por  $X_{-N}$  e por  $X_{-N}$  em 3.1, temos o seguinte sistema de equação:

$$\begin{cases} X_{-N}X_N \otimes v_1 + X_{-N}X_{N-2} \otimes v_2 = 0, \\ X_NX_{-N} \otimes v_1 + X_NX_{-N-2} \otimes v_2 = 0. \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda equação, temos

$$\begin{aligned}(X_{-N}X_N - X_NX_{-N}) \otimes v_1 + (X_{-N}X_{N-2} - X_NX_{-N-2}) \otimes v_2 &= 0 \\ [X_{-N}, X_N] \otimes v_1 + (X_{-N}X_{N-2} - X_NX_{-N-2}) \otimes v_2 &= 0 \\ -Na \otimes v_1 + (X_{-N}X_{N-2} - X_NX_{-N-2}) \otimes v_2 &= 0.\end{aligned}$$

A parcela  $-Na \otimes v_1$  foi deduzida usando a Proposição 1.5.4, além disso, dado que  $V$  possui carga central não nula, temos que  $-Na \otimes v_1 \neq 0$ . Observemos também que, dado que  $v_1 \in V_{\mu_1}$  e  $v_2 \in V_{\mu_2}$ , estamos considerando que  $\mu_1 - \mu_2 = 2\delta$ . Além disso, como  $N-2 \neq N$ , podemos reorganizar os índices do peso  $\delta$ , ou seja,  $-N + (N-2) = (N-2) + (-N)$ , o que resulta em algumas igualdades de operadores, como por exemplo:

$$X_{-N}X_{N-2} - X_NX_{-N-2} = X_{N-2}X_{-N} - X_{-N-2}X_N.$$

Ao combinar essa relação com a Equação 3.1, obtemos:

$$\begin{aligned}(X_{-N}X_{N-2} - X_NX_{-N-2}) \otimes v_1 &= (X_{N-2}X_{-N} - X_{-N-2}X_N) \otimes v_1 \\ &= X_{N-2}(X_{-N} \otimes v_1) - X_{-N-2}(X_N \otimes v_1) \\ &= -X_{N-2}(X_{-N-2} \otimes v_2) + X_{-N-2}(X_{N-2} \otimes v_2) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Ao escolhermos  $N_1 \gg N_2 \gg 0$ , e por uma questão de simplicidade de notação, reescrevamos  $\Omega_{N-2, N} = X_{N-2}X_{-N} - X_{-N-2}X_N$ , obtemos:

$$\begin{aligned}0 &= \Omega_{N_1-2, N_1}(x_{N_2}v_1 + x_{N_2-2}v_2) \\ &= x_{N_2}\Omega_{N_1-2, N_1}(v_1) + x_{N_2-2}\Omega_{N_1-2, N_1}(v_2) \\ &= x_{N_2-2}(N_1av_1)\end{aligned}$$

e então  $x_{N_2-2}v_1 = 0$  para qualquer  $N_2$  suficientemente grande. Similarmente,

$$\begin{aligned}0 &= \Omega_{N_1-2, N_1}(x_{-N_2}v_1 + x_{-N_2-2}v_2) \\ &= x_{-N_2}\Omega_{N_1-2, N_1}(v_1) + x_{-N_2-2}\Omega_{N_1-2, N_1}(v_2) \\ &= x_{-N_2-2}(N_1av_1)\end{aligned}$$

e temos  $x_{-N_2-2}v_1 = 0$  para qualquer  $N_2$  suficientemente grande. Voltando a Equação 3.1, concluímos, então, que  $x_Nv_1 = x_{-N}v_1 = 0$  para todo  $N$  suficientemente grande, o que contradiz o fato de  $a \neq 0$ . Portanto, sempre existe um  $N \gg 0$ , tal que  $dv = X_N \otimes v_1 + X_{N-2} \otimes v_2 \neq 0$ .

Igualmente ao exemplo anterior, se também considerarmos  $V$  irredutível, então o vetor

de peso  $v$  gerará  $M_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}(V)$ , o que nos leva a deduzir o nosso primeiro resultado. Assumimos primeiramente que  $J = \emptyset$ , isto é,  $\widehat{\mathfrak{t}} = G + H$ . Diremos que  $V$  é um  $(G + H)$ -módulo de peso se  $V$  é um  $G$ -módulo  $\mathbb{Z}$ -graduado com ação diagonalizável de  $H$ , onde a ação de  $d$  é compatível com a  $\mathbb{Z}$ -gradação. Um  $(G + H)$ -módulo de peso irredutível é determinado por um  $G$ -módulo  $\mathbb{Z}$ -graduado irredutível  $V$  e um peso  $\lambda \in H^*$  com a ação de  $h \in \mathfrak{h} = H \cap \mathfrak{g}$  e  $c$  em  $V$  dada por  $\lambda(h)$  e  $\lambda(c)$  respectivamente, enquanto a ação de  $d$  é dada por  $\lambda(d)$  em uma escolha na componente graduada de  $V$ .

Se  $\lambda(c) = a$ , denotaremos o módulo de Verma imaginário generalizado correspondente  $M_{a,\widehat{\mathfrak{p}}}(V)$  por  $M_a(V)$ . Para cada  $\lambda \in H^*$  temos um funtor  $\mathbb{I}^\lambda$  da categoria dos  $G$ -módulos  $\mathbb{Z}$ -graduados com carga central  $\lambda(c)$  para a categoria dos  $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulos, que envia um  $G$ -módulo  $V$  para  $M_{\lambda(c)}(V)$  com uma estrutura de peso natural com respeito a  $H$  como foi descrito anteriormente. Nosso objetivo é mostrar que o Teorema 3.1.4 vale para módulos  $M_a(V)$  em plena generalidade sem assumirmos a admissibilidade. Assim, temos o nosso primeiro resultado sobre irredutibilidade de um  $(G + H)$ -módulo de peso  $V$ .

**Teorema 3.2.15** ([GKMOS22, Teorema 3.3, p. 8]). Seja  $V$  um  $(G + H)$ -módulo de peso irredutível e  $a = \lambda(c) \neq 0$ . Então o  $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulo  $M_a(V)$  é irredutível onde  $a$  é um valor de carga central. Em particular, o funtor  $\mathbb{I}^\lambda$  preserva a irredutibilidade.

Para esse teorema, demonstraremos o lema a seguir, que é a chave para está generalização.

**Lema 3.2.16** ([GKMOS22, Lema 3.4, p. 8]). Seja  $V$  um  $(G + H)$ -módulo de peso com ação escalar não nula de  $c$ :  $cv = av$  para algum  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e qualquer  $v \in V$ . Também, sejam  $w_1, \dots, w_m \in V$  elementos não nulos tal que  $w_i \in V_{\mu_i}$  para  $\mu_i \in H^*$  e  $\mu_i - \mu_{i+1} \in \mathbb{Z}_{>0}\delta$  para todo  $i$ . Seja  $k_i$  tal que  $\mu_1 - \mu_i = k_i\delta$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Então para um  $N$  suficientemente grande e para qualquer escolha de elementos não nulos  $x_k \in \widehat{\mathfrak{g}}_{k\delta}$  tal que  $[x_k, x_{-k}] = kc \neq 0$ , pelo menos uma das somas

$$\sum_{i=1}^m x_{N-k_i} w_i, \quad \sum_{i=1}^m x_{-N-k_i} w_i$$

é não nula.

*Demonstração.* Suponha que

$$\sum_{i=1}^m x_{N-k_i} w_i = \sum_{i=1}^m x_{-N-k_i} w_i = 0,$$

para todo  $N$  suficientemente grande. Procederemos por indução em  $m$ . Primeiramente assumiremos que  $m = 1$ . Então, imediatamente obtemos uma contradição, pois para qualquer  $N$  temos

$$0 = [x_N, x_{-N}]w = Ncw = Naw \neq 0.$$

Para explicar a ideia do passo de indução, vamos considerar o caso em que  $m = 2$  e assumiremos que

$$x_N w_1 + x_{N-k_2} w_2 = x_{-N} w_1 + x_{-N-k_2} w_2 = 0,$$

para todo  $N$  suficientemente grande. Para melhor desenvolvimento, vamos introduzir os seguintes operadores para todos os pares  $(r, s) \in \mathbb{Z}^2$ :

$$\Omega_{N-r, N-s} := x_{N-r} x_{-N-s} - x_{N-s} x_{-N-r}.$$

Notemos que se  $N - r \neq N + s$ , então  $\Omega_{N-r, N-s} = x_{-N-s} x_{N-r} - x_{N-s} x_{-N-r}$ . Aplicando  $x_{-N}$  e  $x_N$  respectivamente na igualdade acima, obtemos

$$x_{-N} x_N w_1 + x_{-N} x_{N-k_2} w_2 = x_N x_{-N} w_1 + x_N x_{-N-k_2} w_2 = 0.$$

Subtraindo essa igualdades obtemos

$$(x_{-N} x_N - x_N x_{-N}) w_1 + (x_{-N} x_{N-k_2} - x_N x_{-N-k_2}) w_2 = -N a w_1 + \Omega_{N-k_2, N}(w_2) = 0,$$

implicando que  $\Omega_{N-k_2, N}(w_2) = N a w_1$ . Vamos mostrar agora que  $\Omega_{N-k_2, N}(w_1) = 0$ . De fato,

$$\begin{aligned} \Omega_{N-k_2, N}(w_1) &= (x_{-N} x_{N-k_2} - x_N x_{-N-k_2}) w_1 = x_{N-k_2} (x_{-N} w_1) - x_{-N-k_2} (x_N w_1) = \\ &= x_{N-k_2} (-x_{-N-k_2} w_2) - x_{-N-k_2} (-x_{N-k_2} w_2) = 0, \end{aligned}$$

desde que  $k_2 > 0$ . Escolhendo  $N_1 \gg N_2 \gg 0$ . Temos assim

$$\begin{aligned} 0 &= \Omega_{N_1-k_2, N_1}(x_{N_2} w_1 + x_{N_2-k_2} w_2) \\ &= x_{N_2} \Omega_{N_1-k_2, N_1}(w_1) + x_{N_2-k_2} \Omega_{N_1-k_2, N_1}(w_2) \\ &= x_{N_2-k_2} (N_1 a w_1) \end{aligned}$$

e  $x_{N_2-k_2} w_1 = 0$  para qualquer  $N_2$  suficientemente grande. Similarmente,

$$\begin{aligned} 0 &= \Omega_{N_1-k_2, N_1}(x_{-N_2} w_1 + x_{-N_2-k_2} w_2) \\ &= x_{-N_2} \Omega_{N_1-k_2, N_1}(w_1) + x_{-N_2-k_2} \Omega_{N_1-k_2, N_1}(w_2) \\ &= x_{-N_2-k_2} (N_1 a w_1) \end{aligned}$$

e  $x_{-N_2-k_2} w_1 = 0$  para qualquer  $N_2$  suficientemente grande. Concluimos assim que  $x_N w_1 = x_{-N} w_1 = 0$  para todo  $N$  suficientemente grande, o que contradiz o fato de  $a \neq 0$ .

Vamos supor agora que a afirmação é válida para qualquer conjunto de  $< m$  elementos.

Aplicando  $x_{-N}$  e  $x_N$  respectivamente na igualdade acima obtemos

$$x_{-N} \sum_{i=1}^m x_{N-k_i} w_i = x_N \sum_{i=1}^m x_{-N-k_i} w_i = 0.$$

Subtraindo essas igualdades obtemos

$$(x_{-N}x_N - x_Nx_{-N})w_1 + \sum_{i=2}^m \Omega_{N-k_i, N} w_i = -Naw_1 + \sum_{i=2}^m \Omega_{N-k_i, N}(w_i) = 0$$

e

$$\sum_{i=2}^m \Omega_{N-k_i, N}(w_i) = Naw_1.$$

Temos também que para cada  $i = 2, \dots, m$

$$\begin{aligned} \Omega_{N-k_i, N}(w_1) &= (x_{-N}x_{N-k_i} - x_Nx_{-N-k_i})w_1 \\ &= x_{N-k_i}(x_{-N}w_1) - x_{-N-k_i}(x_Nw_1) \\ &= x_{N-k_i}\left(-\sum_{j=2}^m x_{-N-k_j}w_j\right) - x_{-N-k_i}\left(-\sum_{j=2}^m x_{N-k_j}w_j\right) \\ &= \sum_{j=2, j \neq i}^m (-x_{N-k_i}x_{-N-k_j} + x_{-N-k_i}x_{N-k_j})w_j \end{aligned}$$

e

$$\Omega_{N-k_i, N}(w_1) = \sum_{j=2, j \neq i}^m \Omega_{N-k_j, N-k_i}(w_j), \quad i = 2, \dots, m. \quad (3.2)$$

Notemos que

$$\Omega_{N-k_j, N-k_i} + \Omega_{N-k_i, N-k_j} = 0,$$

para todo  $i, j$  e  $[\Omega_{N-k_j, N-k_i}, \Omega_{N-k_s, N-k_r}] = 0$  para todo  $i, j, r, s = 2, \dots, m$ . Podemos ver a igualdade (3.2) como um sistema linear de  $m-1$  equações com coeficientes de operadores comutantes  $\Omega_{N-k_j, N-k_i}$ . Notemos que a  $m-2$  equação contém  $w_m$ .

Escolhendo arbitrariamente  $t_1 \gg t_2 \gg \dots \gg t_{m-2} \gg N$  suficientemente grandes e multiplicando a  $j$ -ésima equação por  $x_{t_j-k_m}$  para cada  $j = 1, \dots, m-2$ . Lembrando que para  $j = 1, \dots, m-2$ , temos

$$\sum_{i=1}^m x_{t_j-k_i} w_i = \sum_{i=1}^m x_{-t_j-k_i} w_i = 0$$

por nossa suposição. Então, podemos substituir  $x_{t_j-k_m} w_m$  na  $j$ -ésima equação por  $-\sum_{i=1}^{m-1} x_{t_j-k_i} w_i$ . Assim, obtemos  $m-1$  equações com parâmetros  $t_j$ ,  $j = 1, \dots, m-2$ . Usando multiplicação e adição, eliminaremos  $w_2, \dots, w_{m-1}$  e assim obtemos a igualdade  $\Omega(w_1) = 0$ , onde  $\Omega$  é um certo operador polinomial gerado por produtos de  $x_{t_j-l_j}$  para algum  $l_j \geq 0$ ,

$j = 1, \dots, m - 2$ , e  $\Omega_{N-k_r, N-k_s}$ ,  $r, s = 1, \dots, m$ . Seja  $K \gg t_1$ . Então

$$0 = \Omega \sum_{i=1}^m x_{\pm K-k_i} w_i = \sum_{i=1}^m x_{\pm K-k_i} \Omega(w_i) = \sum_{i=2}^m x_{\pm K-k_i} \Omega(w_i).$$

Se  $\Omega(w_i) \neq 0$  para pelo menos um índice  $i = 2, \dots, m$ , então podemos aplicar a hipótese de indução e obtemos uma contradição. Resta considerarmos o caso em que  $\Omega(w_i) = 0$  para todo  $i$ .

Vamos escolher o maior índice  $n$  tal que  $x_n$  aparece em  $\Omega$  e considere a igualdade

$$\sum_{i=1}^m x_{-t_1-k_i} w_i = 0.$$

Aplicando  $\Omega$  obtemos

$$0 = \left[ \Omega, \sum_{i=1}^m x_{-t_1-k_i} \right] w_i = [\Omega, x_{-t_1}] w_1,$$

implicando que  $\Omega^1 w_1 = 0$  onde  $\Omega^1$  é um operador polinomial com grau de  $x_{t_1}$  reduzido por 1 (como  $[x_{t_1}, x_{-t_1}] = at_1$ ). Novamente podemos assumir que  $\Omega^1 w_i = 0$  para todo  $i$  (Para os outros casos, basta aplicarmos a hipótese de indução). Continuando desta maneira, eliminaremos todos os  $x_{t_j}$ ,  $j = 1, \dots, m - 2$  e obtemos um operador polinomial  $\Omega^2$  que é gerado por produtos de  $\Omega_{N-k_r, N-k_s}$ ,  $r, s = 1, \dots, m$ , e  $\Omega^2 w_1 = 0$ . Novamente podemos assumir que  $\Omega^2 w_i = 0$  para todo  $i$ . Notemos que cada monômio em  $\Omega^2$  contém exatamente um fator do tipo  $\Omega_{N-k_i, N}$ ,  $i > 2$  e esses fatores não comutam. Todos os outros fatores que aparecem em  $\Omega^2$  comutam. Conseqüentemente, cada monômio em  $\Omega^2$  contém no máximo um fator  $x_N$  e  $\Omega^2 = f x_N + g$ , onde  $f$  e  $g$  não contém  $x_N$  e contém somente fatores  $x_k$  com  $k < N$ . Vamos considerar a igualdade

$$\sum_{i=1}^m x_{-N-k_i} w_i = 0$$

e aplique  $\Omega$ . Então, obtemos

$$0 = \left[ \Omega^2, \sum_{i=1}^m x_{-N-k_i} \right] w_i = [\Omega^2, x_{-N}] w_1 = f[x_N, x_{-N}] w_1 = N a f w_1.$$

Concluimos que  $f w_1 = 0$  e conseqüentemente  $f w_i = 0$  para todo  $i$ . Vamos escolher o fator em  $f$  com o maior índice e repetiremos o mesmo argumento. Continuando, obteremos  $w_1 = 0$  que é uma contradição. Isto completa a demonstração.  $\square$

Agora estamos prontos para demonstrarmos o Teorema 3.2.15.

*Demonstração.* Seja  $V$  um  $(G+H)$ -módulo de peso irredutível. Consideremos o  $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulo  $M_a(V)$  e vamos assumir que  $a \neq 0$ . Seja  $v \in M_a(V)$  um elemento não nulo. Mostraremos que  $v$  gera  $M_a(V)$ . Podemos assumir que  $v$  é um elemento de peso e

$$v = \sum_i u_i w_i,$$

onde  $u_i \in U(\widehat{\mathfrak{u}})$  são elementos homogêneos linearmente independentes e  $w_i \in V_{\mu_i}$  para todo  $i$ . Seja também  $R = \text{ht}_{\widehat{\mathfrak{u}}}(v)$ . Procederemos por indução em  $R$ . Suponhamos primeiro que  $R = 1$ , então  $u_i = x_{-\beta+r_i\delta} \in \widehat{\mathfrak{g}}_{-\beta+r_i\delta}$  para alguma raiz simples  $\beta$  de  $\widehat{\mathfrak{g}}$ . Para um inteiro  $N$  consideremos um elemento não nulo  $x_{\beta+N\delta} \in \widehat{\mathfrak{g}}_{\beta+N\delta}$ . Então

$$x_{\beta+N\delta}v = x_{\beta+N\delta} \sum_i u_i w_i = \sum_i [x_{\beta+N\delta}, u_i] w_i = \sum_i x_{(N+r_i)\delta} w_i \in V.$$

Pelo Lema 3.2.16,  $x_{\beta+N\delta}v \neq 0$  se  $|N|$  é suficientemente grande. Desde que  $V$  é irredutível então  $v$  gera  $M_a(V)$ .

Vamos assumir agora que  $R > 1$  e vamos assumir também que qualquer elemento de peso não nulo de altura  $< R$  gera  $M_a(V)$ . Seguiremos a prova de [BBFK13, Lemma 5.3]. Suponhamos que  $u_i = x_{-\beta_{i1}+r_{i1}\delta} \cdots x_{-\beta_{is_i}+r_{is_i}\delta}$  para algumas raízes simples  $\beta_{i1}, \dots, \beta_{is_i}$  e alguns inteiros  $r_{i1}, \dots, r_{is_i}$ . Podemos assumir, sem perda de generalidade, que os somandos estão indexados de tal maneira que  $r_{1s_1} \leq r_{2s_2} \leq \dots$  e se  $r_{ij} = r_{1s_1}$  então  $p_{1s_1}$  é minimal. Aplicando  $x_{\beta_{11}+N\delta}$  com  $|N|$  suficientemente grande, obtemos  $x_{\beta_{11}+N\delta}v \neq 0$  novamente pelo Lema 3.2.16. Desde que  $\text{ht}_{\widehat{\mathfrak{u}}}(x_{\beta_{11}+N\delta}v) = R - 1$ , o elemento  $x_{\beta_{11}+N\delta}v$  gera  $M_a(V)$  por indução. Se  $u_i$  contém um fator  $x_{-\beta+r\delta}$  com uma raiz positiva não-simples  $\beta$  para algum  $i$ , então escolhemos uma raiz simples  $\alpha$  tal que  $\alpha - \beta$  é uma raiz e aplicamos  $x_{\alpha+N\delta}$  com  $|N|$  suficientemente grande. Então  $x_{\alpha+N\delta}v \neq 0$  e  $\text{ht}_{\widehat{\mathfrak{u}}}(x_{\alpha+N\delta}v) = R - 1$ . Novamente a indução completa a prova. □

Com isso, temos como consequência o seguinte resultado [GKMOS22].

**Corolário 3.2.17.** Seja  $\widehat{\mathfrak{p}} = \widehat{\mathfrak{l}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}$  uma subálgebra parabólica de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  do tipo II e  $\widehat{\mathfrak{l}} = G' + H$ , onde  $G'$  é uma subálgebra de  $G$ . Seja  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e seja  $V$  um  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -módulo de peso irredutível de carga central  $a$ . Então  $M_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}(V)$  é irredutível e consequentemente a restrição do functor  $\mathbb{I}_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}$  para a categoria dos  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -módulos de peso com carga central  $a$  preserva irredutibilidade.

*Demonstração.* Segue do Teorema 3.2.15 e do fato que módulo de peso máximo de uma subálgebra de Heisenberg de dimensão infinita é irredutível se a carga central é não nula. □

O Teorema 3.2.15 é um passo fundamental para abordar a irredutibilidade de módulos de Verma imaginário generalizado, que iremos fazer na seguinte subseção.

### 3.3 Irredutibilidade de módulos de Verma imaginário generalizado

Seguindo o trabalho de [FK18], vamos lembrar que  $\widehat{\mathfrak{p}} = \widehat{\mathfrak{l}} \oplus \widehat{\mathfrak{u}}$  é uma subálgebra parabólica de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  do tipo II, e  $\widehat{\mathfrak{l}} = \widehat{\mathfrak{l}}^0 + G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp$ , onde  $\widehat{\mathfrak{l}}^0$  é a subálgebra de Lie gerada por  $H$  e por todas os subespaços de raízes real de  $\widehat{\mathfrak{l}}$  e  $G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp$  é o complemento ortogonal da parte imaginária de  $\widehat{\mathfrak{l}}^0$  com respeito a forma de Killing.

Um  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -módulo de tensor tem a seguinte forma  $M \otimes S$ , onde  $M$  é um  $\widehat{\mathfrak{l}}^0$ -módulo de peso (com respeito a  $H$ ) com carga central  $a$  e  $S$  é um  $G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp \oplus \mathbb{C}d$ -módulo com a mesma carga central e ação diagonalizável de  $d$ . Módulos sobre  $G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp \oplus \mathbb{C}d$  correspondem para módulos  $\mathbb{Z}$ -graduados (com graduação compatível com a  $\mathbb{Z}$ -graduação de  $G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp$ ) com uma ação escalar fixada de  $d$  em uma componente não nula escolhida. Diremos que um  $G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp \oplus \mathbb{C}d$ -módulo  $S$  é fortemente irredutível se ele é irredutível como (não graduado)  $G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp$ -módulo. Módulos de Verma com carga central não nula e módulos diagonais irredutíveis, dados em [BBFK13], são exemplos de tais módulos.

Embora não temos uma classificação de todos os  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -módulos de tensor irredutíveis, a seguinte afirmação mostra como construir famílias de tais módulos.

**Proposição 3.3.1.** Seja  $M$  um  $\widehat{\mathfrak{l}}^0$ -módulo de peso irredutível com carga central  $a$ ,  $S$  um  $G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp \oplus \mathbb{C}d$ -módulo fortemente irredutível  $\mathbb{Z}$ -graduado com a mesma carga central. Então  $M \otimes S$  é um  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -módulo de peso irredutível com ação do produto tensorial diagonalizável de  $d$ .

Com isso, temos mais um resultado, o qual generaliza o Teorema 3.1.4.

**Teorema 3.3.2** ([GKMOS22, Teorema 3.7, p. 12]). Seja  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  e seja  $V = M \otimes S$  um  $\widehat{\mathfrak{l}}$ -módulo de peso, tensor e irredutível, onde  $M$  é um  $\widehat{\mathfrak{l}}^0$ -módulo de peso e  $S$  é um  $G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp \oplus \mathbb{C}d$ -módulo com ação diagonalizável de  $d$ . Consideremos  $V$  como um  $\widehat{\mathfrak{p}}$ -módulo com ação trivial do radical  $\widehat{\mathfrak{u}}$ . Então o  $\widehat{\mathfrak{g}}$ -módulo de Verma imaginário generalizado  $\mathbb{I}_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}(V) = M_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}(V)$  é irredutível.

*Demonstração.* Consideremos um elemento não nulo arbitrário  $v \in M_{a, \widehat{\mathfrak{p}}}(V)$ . Podemos assumir que  $v$  é um elemento de peso. Vamos escrever  $v$  como a seguinte soma finita

$$v = \sum_i d_i(v_i \otimes w_i),$$

onde  $d_i \in U(\widehat{\mathfrak{u}})$ ,  $v_i \in M$ ,  $w_i \in S$ , e assumimos que  $v_i \otimes w_i$  são linearmente independentes. Desde que  $v$  é um vetor de peso, então cada  $d_i$  é um elemento homogêneo de  $U(\widehat{\mathfrak{u}})$ . Seja  $R = \text{ht}_{\widehat{\mathfrak{u}}}(v)$ . Faremos a prova por indução em  $R$ . Suponha que  $R = 1$ . Como na prova do Teorema 3.2.15 este é o caso mais importante. Então para todo  $i$  temos  $d_i = x_{-\beta + \alpha_i + r_i \delta} \in \widehat{\mathfrak{g}}_{-\beta + \alpha_i + r_i \delta}$  para alguma raiz simples  $\beta$  de  $\widehat{\mathfrak{g}}$  e algum  $\alpha_i \in Q(\mathfrak{l})$ , onde  $Q(\mathfrak{l})$  é o reticulado

de raízes da subálgebra de dimensão finita adjacente  $\mathfrak{l}$  de  $\widehat{\mathfrak{l}}$ . Vamos escrever  $\alpha_i$  como uma combinação linear de raízes simples de  $\mathfrak{l}$  com coeficientes inteiros. Como no caso anterior de  $\omega$  - altura, a  $\mathfrak{l}$ -altura  $ht_{\mathfrak{l}}(d_i)$  de  $d_i$  é definido como a soma de todos os coeficientes de tal combinação linear (notemos that  $ht_{\mathfrak{l}}(d_i) \leq 0$  para todo  $i$ ). Escolhemos  $i$  tal que  $d_i$  tem a menor  $\mathfrak{l}$ -altura. Por simplicidade vamos escrever essa  $\mathfrak{l}$ -altura por  $t$ . Podemos perceber que podem existir muitos  $d_j$ 's com a mesma  $\mathfrak{l}$ -altura  $t$ . Dentre todos esses com a mesma  $\mathfrak{l}$ -altura  $t$ , escolhemos aquele com o menor  $r_i$ . Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $i = 1$  satisfaz essas condições (não necessariamente único). Afirmamos que existe um inteiro  $N$  com  $|N|$  suficientemente grande e um  $x_{\beta - \alpha_1 + (N - r_1)\delta} \in \widehat{\mathfrak{g}}_{\beta - \alpha_1 + (N - r_1)\delta}$  não nulo (assumimos que  $\beta - \alpha_1 + (N - r_1)\delta$  é uma raiz e que  $|N| \gg |r_1|$ ) tal que  $x_{\beta - \alpha_1 + (N - r_1)\delta}v \neq 0$ . Por simplicidade, vamos escrever  $x_{\beta - \alpha_1 + (N - r_1)\delta}$  somente por  $x_N$ . Suponha que a afirmação acima não é verdadeira, então temos

$$x_N v = x_N \sum_i d_i (v_i \otimes w_i) = \sum_i [x_N, d_i] (v_i \otimes w_i) = 0, \text{ para todo } N.$$

Seja  $y_N^i = [x_N, d_i]$ . Notemos que  $y_N^1 = [x_N, d_1] \in \widehat{\mathfrak{g}}_{N\delta}$  é não nulo e lembrando que  $\widehat{\mathfrak{l}} = \widehat{\mathfrak{l}}^0 + G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp$  e  $[z, G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp] = 0$  para qualquer elemento raiz  $z \in \widehat{\mathfrak{l}}^0$ . Vamos escrever cada  $y_N^i$  da seguinte forma:  $y_N^i = D_N^i + Z_N^i$ , onde  $D_N^i \in \widehat{\mathfrak{l}}^0$  e  $Z_N^i \in G(\widehat{\mathfrak{l}})^\perp$ . Claramente,  $[D_N^i, Z_N^i] = 0$  para todo  $i$  e  $Z_N^1 \neq 0$  (isso é óbvio para qualquer  $N$  se  $\widehat{\mathfrak{g}}$  é uma álgebra de Lie afim não torcida como  $d_1 \in U(\widehat{\mathfrak{u}})$ . No caso em que a álgebra de Lie afim é torcida  $N$  pode ser escolhido para garantir esta condição).

Então,

$$x_N v = v_1 \otimes Z_N^1 w_1 + D_N^1 v_1 \otimes w_1 + \sum_{i>1} (v_i \otimes Z_N^i w_i + D_N^i v_i \otimes w_i) = 0.$$

Por causa da  $\mathbb{Z}$ -gradação em  $S$ , a igualdade acima implica que

$$v_1 \otimes Z_N^1 w_1 + \sum_{i>1} v_i \otimes Z_N^i w_i = 0.$$

Se  $v_i$ 's são linearmente independente então obtemos uma contradição como ou  $Z_N^1 w_1 \neq 0$  ou  $Z_{-N}^1 w_1 \neq 0$ . Se eles são linearmente dependente então escolhemos um subconjunto linearmente independente maximal indexados por simplicidade da seguinte forma  $v_1, v_2, \dots, v_k$ , e reescremos a soma acima como

$$v_1 \otimes \left( \sum_{j \in Y_1} a_j^1 Z_N^j w_j \right) + \sum_{i=2}^k v_i \otimes \left( \sum_{j \in Y_i} a_j^i Z_N^j w_j \right) = 0,$$

onde  $Y_1, \dots, Y_k$  são certos subconjuntos do conjunto dos índices e  $a_j^i$  são escalares não

nulos. Usando agora a independência linear de  $v_1, \dots, v_k$  obtemos que

$$\sum_{j \in Y_i} a_j^i Z_N^j w_j = 0$$

para todo  $i = 1, \dots, k$ . Consideremos por exemplo  $i = 1$ . Rescrevendo a soma acima para o caso em que  $i = 1$  na seguinte forma:

$$\sum_{j \in \tilde{Y}_1} a_j^1 Z_N^j \tilde{w}_j = 0,$$

onde todos  $\tilde{w}_j$  são elementos de peso de  $S$  com pesos diferentes e  $\tilde{Y}_1$  é um subconjunto de  $Y_1$ . Então, obtemos uma contradição com o Lema 3.2.16. Consequentemente podemos assumir que para todo  $j \in Y_1$ , os elementos  $w_j$  têm o mesmo peso em  $S$  e  $Z_N^j \in \hat{\mathfrak{g}}_{N\delta}$ . Mais ainda, como  $\alpha_r = \alpha_s$  para todo  $r, s \in Y_1$ , então  $Z_N^r$  e  $Z_N^s$  são o mesmo até um escalar. Suponhamos que  $w_j, j \in Y_1$  são linearmente independentes. Então obtemos

$$0 = Z_N \sum_{j \in Y_1} \hat{w}_j = Z_{-N} \sum_{j \in Y_1} \hat{w}_j,$$

para algum elemento não nulo  $Z_{\pm N} \in \hat{\mathfrak{g}}_{\pm N\delta}$  e alguns elementos linearmente independentes  $\hat{w}_j, j \in Y_1$ . Como a carga central é não nula, então temos  $\sum_{j \in Y_1} \hat{w}_j = 0$ , que é uma contradição. Finalmente, se  $w_j, j \in Y_1$  são linearmente dependentes então  $v_1 \otimes w_j$  são linearmente independentes, que também é uma contradição com a nossa suposição original. Isto completa a prova para o caso  $R = 1$ .

Suponhamos agora que  $R > 1$ . Uma vez que a prova do passo de indução em [BBFK13, Lemma 5.3] não depende do módulo  $V$ , o mesmo argumento se aplica no nosso caso. Consequentemente existe um  $x \in \hat{\mathfrak{u}}$  tal que  $xv \neq 0$ . Desde que  $\text{ht}_{\hat{\mathfrak{u}}}(xv) = R - 1$ , a prova está completa por indução. □

Podemos também ver alguns resultados em linguagem de categorias, com isso, vamos denotar por  $\mathcal{T}_a(\hat{\mathfrak{l}})$  a categoria dos  $\hat{\mathfrak{l}}$ -módulos de tensor com carga central  $a$ . A restrição do functor indução imaginário  $\mathbb{I}_{a, \hat{\mathfrak{p}}}$  na categoria  $\mathcal{T}_a(\hat{\mathfrak{l}})$  define o functor  $\mathbb{I}_{a, \hat{\mathfrak{p}}}^{\mathcal{T}}$  da categoria dos  $\hat{\mathfrak{l}}$ -módulos de tensor com carga central  $a$  para a categoria dos  $\hat{\mathfrak{g}}$ -módulos de peso.

Como uma consequência do Teorema 3.3.2 obtemos imediatamente o seguinte corolário que finaliza os resultados desta tese.

**Corolário 3.3.3** ([GKMOS22, Corolário 3.8, p. 14]). Seja  $\hat{\mathfrak{p}} = \hat{\mathfrak{l}} \oplus \hat{\mathfrak{u}}$  uma subálgebra parabólica de  $\hat{\mathfrak{g}}$  do tipo II,  $V \in \mathcal{T}_a(\hat{\mathfrak{l}})$  um  $\hat{\mathfrak{l}}$ -módulo irredutível e  $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Então o functor  $\mathbb{I}_{a, \hat{\mathfrak{p}}}^{\mathcal{T}}$  preserva irredutibilidade.

# Apêndice A

## Álgebras de Lie semissimples

O objetivo deste apêndice é apresentar alguns conceitos básicos sobre álgebras de Lie semissimples de dimensão finita. O motivo principal para essa revisão, é que as álgebras de Kac-Moody afim (vistas no primeiro capítulo) são vistas como uma extensão central de álgebras de Lie semissimples sobre  $\mathbb{C}$  de dimensão finita, utilizando uma álgebra de loop. Portanto começamos por expor neste apêndice os conceitos básicos da teoria das álgebras de Lie semissimples sobre um corpo de característica zero  $\mathbb{K}$  e podemos considerar também o corpo sendo algebricamente fechado, como o corpo dos números complexos, por exemplo.

### A.1 Definições e exemplos de álgebras de Lie

**Definição A.1.1.** Seja  $\mathbb{K}$  um corpo. Uma *Álgebra de Lie* consiste de um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial  $\mathfrak{g}$ , munido de uma aplicação bilinear

$$[ \ , \ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

(L1)  $[x, x] = 0$  para todo  $x \in \mathfrak{g}$ ,

(L2)  $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$  para todo  $x, y, z \in \mathfrak{g}$ .

Na literatura, geralmente essa aplicação linear é chamada de colchete ou comutador, e a condição (L2) é conhecida como identidade de Jacobi. Ao longo deste trabalho, iremos por a condição de que o corpo  $\mathbb{K}$ , sempre que mencionado, seja algebricamente fechado de característica zero. Veremos agora algumas consequências sobre esse colchete.

- A condição (L1) implica que  $[x, y] = -[y, x]$  para todo  $x, y \in \mathfrak{g}$  e é equivalente se o corpo de escalares  $\mathbb{K}$  não é de característica dois.

- Em uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , tem-se que  $[x, 0] = 0 = [0, x]$  para todo  $x \in \mathfrak{g}$ , pois,  $[x, 0] = [x, 0 + 0] = [x, 0] + [x, 0]$  o que implica que  $[x, 0] = 0 = [0, x]$ .
- Em geral uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , não é uma álgebra associativa, pois podemos ter  $[x, [x, y]] \neq [[x, x], y]$  quando  $[x, [x, y]] \neq 0$ .

**Exemplo A.1.2 (Álgebras de Lie proveniente de álgebras associativas).** Seja  $\mathcal{A}$  uma álgebra associativa. Podemos definir sobre o espaço vetorial  $\mathcal{A}$  um colchete a partir do produto associativo da seguinte forma:

$$[x, y] := xy - yx \text{ para todo } x, y \in \mathcal{A}$$

onde  $xy$  indica a multiplicação  $\mathbb{K}$ -bilinear associativa em  $\mathcal{A}$ . O colchete definido assim dá uma estrutura de álgebra de Lie em  $\mathcal{A}$  a qual denotamos por  $\mathcal{A}^{(-)}$ , para indicar que é uma álgebra de Lie proveniente de uma álgebra associativa.

**Exemplo A.1.3.** Para o caso do exemplo anterior, alguns casos são bem conhecidos e especiais na teoria envolvida, por exemplo:

- Quando  $\mathcal{A} = \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ , o  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial das matrizes de ordem  $n \times n$  com entradas em  $\mathbb{K}$ , denotaremos a álgebra de Lie  $\mathcal{A}^{(-)}$  por  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ , ou simplesmente por  $\mathfrak{gl}(n)$  se não houver dúvidas em relação ao corpo.
- Se considerarmos  $V$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e  $\mathcal{A} = \text{End}(V)$ , isto é, o conjunto de todas as transformações lineares do  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial  $V$ , então denotaremos a álgebra de Lie  $\mathcal{A}^{(-)}$  por  $\mathfrak{gl}(V)$ .

**Definição A.1.4.** Uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é chamada de *abeliana*, se  $[x, y] = 0$ , para todo  $x, y \in \mathfrak{g}$ .

**Exemplo A.1.5.**

- Seja  $\mathfrak{g}$  um espaço vetorial qualquer, em  $\mathfrak{g}$  definimos  $[x, y] = 0$ , para todo  $x, y \in \mathfrak{g}$ . Portanto  $\mathfrak{g}$  munido desse colchete é uma álgebra de Lie abeliana.
- Se dimensão de  $\mathfrak{g}$  é 1, então  $\mathfrak{g}$  é abeliana.
- Todo subespaço de dimensão 1 de uma álgebra de Lie é uma álgebra de Lie abeliana.

Alguns conceitos da teoria da álgebra e da álgebra linear podem ser introduzidas, como por exemplo, subálgebras, ideais, quocientes e entre outros. Antes disso, para dar um pouco mais de leveza nas nossas notações e definições citadas anteriormente, vamos denotar o seguinte subespaço gerado:

**Observação 3.** Sejam  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie e  $\mathfrak{J}, \mathfrak{J}'$  subespaços vetoriais de  $\mathfrak{g}$ . Denotamos por  $[\mathfrak{J}, \mathfrak{J}']$  o subespaço vetorial de  $\mathfrak{g}$  gerado por  $\{[j, j'] \in \mathfrak{g} \mid j \in \mathfrak{J}, j' \in \mathfrak{J}'\}$ .

Com isso, podemos definir os objetos que comentamos anteriormente sob a luz dessa observação.

**Definição A.1.6.** Sejam  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie e  $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ . Dizemos que  $\mathfrak{h}$  é uma *subálgebra de Lie*, se  $\mathfrak{h}$  é um subespaço vetorial de  $\mathfrak{g}$  fechado para o colchete, ou seja,  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$ .

Uma subálgebra de Lie  $\mathfrak{h}$  nada mais é do que um subespaço vetorial que herda as estruturas de álgebra de Lie de  $\mathfrak{g}$ . Vejamos agora alguns exemplos que nos ajudam na compreensão dessa definição e que serão usadas com frequência no nosso texto.

**Exemplo A.1.7.** O espaço  $\mathfrak{b}(n, \mathbb{K})$  das matrizes triangulares superiores ( $a_{ij} = 0 \forall i > j$ ) é uma subálgebra de Lie de  $\mathfrak{gl}(n)$ , pois a soma e a multiplicação de matrizes triangulares superiores ainda é uma matriz triangular superior, assim  $[A, B] \in \mathfrak{b}(n, \mathbb{K})$  para todo  $A, B \in \mathfrak{b}(n, \mathbb{K})$ .

**Exemplo A.1.8.** O conjunto  $\mathfrak{h} = \{A \in \mathfrak{gl}(n) \mid \text{tr}(A) = 0\}$  é uma subálgebra de Lie de  $\mathfrak{gl}(n)$ , onde  $\text{tr}$  indica o traço da matriz. Com efeito,  $\mathfrak{h}$  é subespaço vetorial de  $\mathfrak{gl}(n)$ , pois é não vazio ( $0 \in \mathfrak{h}$ ) e para todo  $A, B \in \mathfrak{h}$  e  $\alpha \in k$ , temos:

$$\text{tr}(A + \alpha B) = \text{tr}(A) + \alpha \text{tr}(B) = 0$$

isto é,  $A + \alpha B \in \mathfrak{h}$ , provando assim que  $\mathfrak{h}$  é subespaço vetorial de  $\mathfrak{g}$ . Sejam agora  $A, B \in \mathfrak{h}$ , então

$$\text{tr}([A, B]) = \text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0.$$

Portanto,  $\mathfrak{h}$  é subálgebra de  $\mathfrak{gl}(n)$ .

Essa subálgebra de Lie é muito importante durante o estudo, e aparecerão com bastante frequência no decorrer do trabalho, pois nos dá muitos exemplos para entendermos alguns conceitos e teoremas que aparecem durante a pesquisa. Representaremos essa subálgebra de Lie por  $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K})$  ou apenas  $\mathfrak{sl}(n)$  quando não houver confusão em relação ao corpo adotado.

**Definição A.1.9.** Sejam  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie e  $\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{g}$ . Dizemos que  $\mathcal{I}$  é um *ideal* de  $\mathfrak{g}$ , se  $\mathcal{I}$  é um subespaço vetorial, tal que:

$$[x, y] \in \mathcal{I}, \forall x \in \mathfrak{g}, y \in \mathcal{I}.$$

Em outras palavras,  $[\mathfrak{g}, \mathcal{I}] \subseteq \mathcal{I}$ .

Exemplos básicos de ideais são dados pelos conjuntos  $\{0\}$  e  $\mathfrak{g}$ . Esses conjuntos são claramente ideais de  $\mathfrak{g}$  chamados de ideais triviais. Vejamos um exemplo um pouco mais interessante dentro dessa teoria.

**Exemplo A.1.10.**  $\mathfrak{sl}(n)$  é um ideal de  $\mathfrak{gl}(n)$ , pois, para todo  $A \in \mathfrak{sl}(n)$  e  $B \in \mathfrak{gl}(n)$ ,  $[A, B] = AB - BA \in \mathfrak{sl}(n)$ , pois tem traço nulo, igualmente feito no exemplo anterior.

Aproveitamos o momento para definirmos uma classe de álgebra de Lie, que são de extrema importância no estudo e classificação de álgebras de Lie semissimples.

**Definição A.1.11.** Dizemos que uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é *simples* se

1. Os únicos ideais de  $\mathfrak{g}$  são  $0$  e  $\mathfrak{g}$ .
2.  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}) \neq 1$ .

**Observação 4.** O fato de  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}) \neq 1$  é imposto para que simplesmente exista uma compatibilidade entre os conceitos de álgebra simple e semissimples que veremos mais adiante.

**Exemplo A.1.12.** A álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  é simples.

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{K} \right\}.$$

Todo elemento  $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  pode ser escrito como  $X = \alpha e + \beta f + \delta h$ , onde

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

é a base canônica para  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$  e o colchete entre eles cumprem a seguinte propriedade:

$$[e, f] = h \quad [h, e] = 2e \quad [h, f] = -2f.$$

Vamos provar que, se  $\mathcal{I}$  um ideal não-nulo de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ , então  $\mathcal{I} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ . De fato, tomemos  $Y = \alpha e + \beta f + \gamma h \in \mathcal{I}$  não-nulo, notemos que,

$$\begin{aligned} [Y, e] &= -\beta h + 2\gamma e \in \mathcal{I}, & [[Y, e], e] &= -2\beta e \in \mathcal{I} \\ [Y, f] &= \alpha h - 2\gamma f \in \mathcal{I}, & [[Y, f], f] &= -2\alpha f \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

Portanto, se  $\alpha$  ou  $\beta$  são não nulos, então  $\mathcal{I}$  contém  $e$  ou  $f$ , assim  $\mathcal{I} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ . Por outro lado, se  $\alpha = \beta = 0$ , então  $\gamma \neq 0$  e portanto  $h \in \mathcal{I}$ , logo  $\mathcal{I} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{K})$ .

Podemos perceber que para  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie e  $\mathcal{I} \subseteq \mathfrak{g}$  um ideal, então  $\mathcal{I}$  e o espaço quociente  $\mathfrak{g}/\mathcal{I}$ , onde é construído da mesma forma como em outras estruturas, herdam uma estrutura de álgebra de Lie induzida pela estrutura de  $\mathfrak{g}$ . Algumas proposições e entre outras coisas envolvendo soma de ideais podem ser encontradas facilmente na literatura, por exemplo [San99].

## A.2 Álgebras de Lie solúveis e semissimples

Como álgebra de Kac-Moody afim é uma extensão central de álgebras de Lie semissimples sobre  $\mathbb{C}$  de dimensão finita, o objetivo neste momento é expor um pouco sobre essas tais álgebras, mas para isso falaremos inicialmente sobre álgebras de Lie solúveis, abordando alguns fatos de séries derivadas, para assim podermos definir as álgebras de Lie semissimples.

### A.2.1 Série derivada

Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie. Define-se por indução os seguintes subespaços de  $\mathfrak{g}$ :

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}^{(0)} &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^{(1)} &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^{(j)} &= [\mathfrak{g}^{(j-1)}, \mathfrak{g}^{(j-1)}].\end{aligned}$$

Esses subespaços são na verdade ideais de  $\mathfrak{g}$  (Definição A.1.9). Notemos que elas cumprem uma sequência de ideais, ou seja,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} \supseteq \mathfrak{g}^{(1)} \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{g}^{(j)} \supset \dots$$

Essa sequência de ideais é conhecida por *série derivada* de  $\mathfrak{g}$  onde suas componentes são chamadas de *álgebras derivadas* de  $\mathfrak{g}$ .

**Definição A.2.1.** Uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é dita *solúvel*, se alguma de suas álgebras derivadas se anula, isto é,

$$\mathfrak{g}^{(n)} = 0$$

para algum  $n \geq 1$  (e portanto,  $\mathfrak{g}^{(j)} = 0$ , para todo  $j \geq n$ ).

**Exemplo A.2.2.** As álgebras abelianas são solúveis, pois  $\mathfrak{g}^{(1)} = 0$ .

**Exemplo A.2.3.** Toda álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de dimensão 2 é solúvel. De fato,  $\mathfrak{g}$  é abeliana ou existe uma base  $\{X, Y\}$ , tal que,  $[X, Y] = Y$ . Segue do Exemplo A.2.2 que, se  $\mathfrak{g}$  é abeliana então  $\mathfrak{g}$  é solúvel. Se  $\mathfrak{g}$  não é abeliana, então, têm álgebra derivada de dimensão 1 e, portanto, a segunda derivada se anula.

**Proposição A.2.4.** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie.

- (1) Se  $\mathfrak{g}$  é solúvel, então também são, todas subálgebra e imagens homomórficas de  $\mathfrak{g}$ .
- (2) Se  $\mathfrak{h}$  é um ideal solúvel de  $\mathfrak{g}$ , tal que,  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  é solúvel, então  $\mathfrak{g}$  é solúvel.
- (3) Se  $\mathfrak{h}_1$  e  $\mathfrak{h}_2$  são ideais solúveis de  $\mathfrak{g}$ , então  $\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$  é um ideal solúvel.

*Demonstração.*

(1) Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie solúvel. Isso significa que existe uma sequência finita de ideais  $\mathfrak{g}^{(0)}, \mathfrak{g}^{(1)}, \dots, \mathfrak{g}^{(n)}$  tal que  $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}^{(n)} = 0$ , e  $\mathfrak{g}^{(i+1)} \subseteq \mathfrak{g}^{(i)}$  para  $0 \leq i \leq n-1$ . Agora, consideremos uma subálgebra  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$ . Assim, podemos ver, por definição, que  $\mathfrak{h}^{(i)} \subset \mathfrak{g}^{(i)}$ , ou seja, a cadeia de ideais se anula para algum  $i$ .

Da mesma forma, se  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$  é um homomorfismo sobrejetor de álgebras de Lie, então, para cada  $\mathfrak{g}^{(i)}$ , por indução,  $\phi(\mathfrak{g}^{(i)}) = \mathfrak{g}'^{(i)}$ . Portanto,  $\mathfrak{g}'$  é solúvel.

(2) Se  $\mathfrak{h}$  é um ideal solúvel de  $\mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  é solúvel, podemos considerar a projeção canônica  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ . Sabemos que  $\pi(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$  é solúvel, isto é,  $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})^{(m)} = 0$ . Assim,  $\pi(\mathfrak{g}^{(n)}) = 0$  ou  $\mathfrak{g}^{(n)} \subset \mathfrak{h}$ , que é solúvel. Portanto, existe um  $k$ , tal que  $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ .

(3) É fácil ver que se  $\mathfrak{h}_1$  e  $\mathfrak{h}_2$  são ideais, então existe um "isomorfismo" entre  $(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_2$  e  $\mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$  (veja ítem (2) do Teorema A.2.13). Como  $\mathfrak{h}_1$  é solúvel e  $\mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$  é imagem homomorfa de  $\mathfrak{h}_1$ , pelo ítem (1)  $\mathfrak{h}_1/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$  é solúvel, o que implica que  $(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_2$  é solúvel. Assim  $\mathfrak{h}_2$  é solúvel e  $(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_2$  também solúvel, o que pelo ítem (2) torna  $(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)$  solúvel.  $\square$

**Proposição A.2.5.** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então, existe em  $\mathfrak{g}$  um único ideal solúvel  $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{g}$  que contém todos os ideais solúveis de  $\mathfrak{g}$ .

*Demonstração.* Seja  $n$  o máximo das dimensões dos ideais solúveis de  $\mathfrak{g}$  e seja  $\mathfrak{r}$  um ideal solúvel com  $\dim \mathfrak{r} = n$ . Então, todo ideal solúvel de  $\mathfrak{g}$  está contido em  $\mathfrak{r}$ . De fato, seja  $\mathfrak{h}$  um ideal solúvel de  $\mathfrak{g}$ , então,  $\mathfrak{r} + \mathfrak{h}$  também é solúvel. Pela maximalidade da dimensão,  $\dim(\mathfrak{r} + \mathfrak{h}) = \dim \mathfrak{r}$ , assim  $\mathfrak{r} + \mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}$ , segue que,  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}$ . Portanto,  $\mathfrak{r}$  contém todos os ideais solúveis de  $\mathfrak{g}$  e ele é evidente o único.  $\square$

O ideal  $\mathfrak{r}$  da Proposição A.2.5 é chamado de **radical solúvel** de  $\mathfrak{g}$ , no qual denotaremos por  $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$ . Assim uma álgebra de Lie é solúvel se  $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$ .

## A.2.2 Série central descendente

A motivação para discutirmos a série central descendente reside no fato de que, mais adiante, estaremos abordando a subálgebra de Cartan. Esta última está inteiramente ligada ao conceito de subálgebra nilpotente. Portanto, é relevante estabelecer uma definição clara para esse tipo específico de subálgebra. Considere  $\mathfrak{g}$  como uma álgebra de Lie. Assim como no caso anterior, podemos introduzir, por meio de indução, os seguintes subespaços de  $\mathfrak{g}$ :

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}^1 &= \mathfrak{g} \\
\mathfrak{g}^2 &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\
&\vdots \\
\mathfrak{g}^k &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}].
\end{aligned}$$

Verifica-se também, que esses subespaços são ideais, pois o produto de ideais é um ideal. Note ainda, que elas cumprem uma sequência de ideais, isto é,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^1 \supseteq \mathfrak{g}^2 \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{g}^k \supset \dots$$

Essa sequência de ideais, é conhecida por *série central descendente*.

**Definição A.2.6.** Uma álgebra de Lie é dita nilpotente se sua série central descendente se anula em algum momento, isto é,

$$\mathfrak{g}^n = 0$$

para algum  $n \geq 1$  (e, portanto,  $\mathfrak{g}^k = 0 \forall k \geq n$ ).

As álgebras abelianas demonstram ser tanto solúveis quanto nilpotentes. Além disso, observamos que  $\mathfrak{g}^{(k)} \subset \mathfrak{g}^k$  para todo  $k$ . Portanto, podemos concluir que toda álgebra nilpotente é, por definição, solúvel. Com base nessas definições, estamos agora habilitados a discutir álgebras de Lie semissimples.

### A.2.3 Álgebra de Lie semissimples

**Definição A.2.7.** Uma álgebra de Lie é dita ser *semissimples* se

$$\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = 0$$

ou seja,  $\mathfrak{g}$  não contém ideais solúveis além do 0.

**Exemplo A.2.8.** Álgebras simples são, por definição, também álgebras semissimples. Isso decorre do fato de que para uma álgebra simples  $\mathfrak{g}$ , não existem ideais além de  $\mathfrak{g}$  e 0. Considerando  $\mathfrak{r}(\mathfrak{g})$  como um ideal, ele deve ser igual a 0 ou  $\mathfrak{g}$ .

No primeiro caso,  $\mathfrak{g}$  é semissimples, conforme desejado. No segundo caso, a situação é impossível, pois  $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$  implicaria que  $\mathfrak{g}$  é solúvel, o que por sua vez implicaria que  $\mathfrak{g}' \neq \mathfrak{g}$ . No entanto,  $\mathfrak{g}'$  também é um ideal, e  $\mathfrak{g}' = 0$ , ou seja,  $\mathfrak{g}$  seria abeliana. Isso contradiz a natureza da álgebra simples, uma vez que todo subespaço de uma álgebra abeliana é um ideal, o que é impossível neste contexto, dado que  $\dim_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g}) \geq 2$ .

**Exemplo A.2.9.** A álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  é semissimples, pois não possui ideais próprios.

Vamos neste momento definir alguns conceitos básicos sobre homomorfismo de álgebras de Lie e aproveitaremos o momento para falar sobre representações, para isso, iniciaremos a expor as definições de homomorfismo de álgebras de Lie e apresentaremos alguns exemplos e teoremas clássicos.

**Definição A.2.10.** Sejam  $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$  álgebras de Lie sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Dizemos que a aplicação

$$\phi : \mathfrak{g}_1 \longrightarrow \mathfrak{g}_2$$

é um *homomorfismo* de álgebras de Lie, se cumpre as seguintes condições:

- (i)  $\phi$  é uma transformação linear.
- (ii)  $\phi$  preserva colchete de Lie, isto é,  $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$  para todo  $x, y \in \mathfrak{g}_1$ .

**Observação 5.**

- Notemos que no item (ii) o primeiro colchete é dado pela álgebra de Lie  $\mathfrak{g}_1$  e o segundo colchete é dado pela álgebra de Lie  $\mathfrak{g}_2$ .
- $\phi$  é chamado *monomorfismo*, se é injetora, *epimorfismo* se é sobrejetora e *isomorfismo* se é bijetora.
- $\text{Ker}(\phi) = \{x \in \mathfrak{g}_1 \mid \phi(x) = 0\}$  é um ideal de  $\mathfrak{g}_1$ .
- $\text{Im}(\phi) = \{y \in \mathfrak{g}_2 \mid y = \phi(x) \text{ para algum } x \in \mathfrak{g}_1\}$  é uma subálgebra de Lie de  $\mathfrak{g}_2$ .

Vejamos agora alguns exemplos clássicos.

**Exemplo A.2.11.** A aplicação traço

$$\text{tr} : \mathfrak{gl}(n) \longrightarrow \mathbb{K}$$

é um homomorfismo de álgebras de Lie. De fato, "tr" é uma transformação linear, tal que,

$$\begin{aligned} \text{tr}([A, B]) &= \text{tr}(AB - BA) \\ &= \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) \\ &= 0 \\ &= [\text{tr}(A), \text{tr}(B)] \end{aligned}$$

pois  $\mathbb{K}$  é álgebra de Lie abeliana.

**Exemplo A.2.12.** Consideremos as álgebras de Lie  $L$  e  $\mathfrak{gl}(L)$ , definimos o *homomorfismo adjunto*

$$\text{ad} : L \longrightarrow \mathfrak{gl}(L)$$

por  $\text{ad}_x(y) := [x, y]$  para todo  $x, y \in L$ . Esta aplicação é um homomorfismo entre álgebras de Lie, pois,

$$\begin{aligned}\text{ad}_{\alpha x + \beta y}(z) &= [\alpha x + \beta y, z] \\ &= \alpha[x, z] + \beta[y, z] \\ &= \alpha \cdot \text{ad}_x(z) + \beta \cdot \text{ad}_y(z)\end{aligned}$$

para todo  $x, y, z \in L$  e  $\alpha, \beta \in k$  e da identidade de Jacobi, temos

$$\begin{aligned}\text{ad}_{[x, y]}(z) &= [[x, y], z] \\ &= [[x, z], y] + [x, [y, z]] \\ &= [x, [y, z]] - [y, [x, z]] \\ &= \text{ad}_x \circ \text{ad}_y(z) - \text{ad}_y \circ \text{ad}_x(z).\end{aligned}$$

**Teorema A.2.13 (Teorema do Isomorfismo).**

(1) Se  $\phi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  é um homomorfismo de álgebras de Lie, então

$$\mathfrak{g}_1/\text{Ker}(\phi) \simeq \text{Im}(\phi).$$

(2) Se  $\mathfrak{h}_1$  e  $\mathfrak{h}_2$  são ideais de  $\mathfrak{g}$ , então

$$(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1 \simeq \mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2.$$

(3) Suponhamos que  $\mathfrak{h}_1$  e  $\mathfrak{h}_2$  são ideais de  $\mathfrak{g}$ , tal que  $\mathfrak{h}_1 \subseteq \mathfrak{h}_2$ . Então

$$\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \text{ é um ideal de } \mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1 \text{ e } (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1)/(\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1) \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{h}_2.$$

*Demonstração.*

(1) Consideremos o homomorfismo de álgebras de Lie  $\phi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ . Definimos  $\psi : \mathfrak{g}_1/\text{Ker}(\phi) \rightarrow \text{Im}(\phi)$  por  $\psi(\bar{x}) = \phi(x)$ , onde  $\bar{x}$  é a classe de equivalência de  $x$  em  $\mathfrak{g}_1/\text{Ker}(\phi)$ . Por definição, a função  $\psi$  é um epimorfismo e também um monomorfismo, Portanto  $\psi$  é um isomorfismo.

(2) Se  $\mathfrak{h}_1$  e  $\mathfrak{h}_2$  são ideais de  $\mathfrak{g}$ , consideremos o homomorfismo canônico  $\pi : \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 \rightarrow \mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$  dado por  $\pi(x_1 + x_2) = \bar{x}_2$ , onde  $\bar{x}_2$  é a classe de equivalência de  $x_2$  em  $\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2$ . A função  $\pi$  é claramente um epimorfismo e com núcleo  $\mathfrak{h}_1$ . Portanto, pelo item (1), temos o isomorfismo desejado.

(3) Suponhamos que  $\mathfrak{h}_1$  e  $\mathfrak{h}_2$  são ideais de  $\mathfrak{g}$  com  $\mathfrak{h}_1 \subseteq \mathfrak{h}_2$ . Consideremos o homomorfismo canônico  $\pi : \mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1 \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}_2$  dado por  $\pi(x + \mathfrak{h}_1) = x + \mathfrak{h}_2$ . Claramente  $\pi$  é um homomorfismo em que:

(a)  $\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 = \text{Ker}(\pi)$  e  $\pi$  é um epimorfismo,

(b) Pelo item (1),  $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1)/(\mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1) \simeq \mathfrak{g}/\mathfrak{h}_2$ .

□

**Exemplo A.2.14.** Consideremos a aplicação traço  $\text{tr} : \mathfrak{gl}(n) \rightarrow \mathbb{K}$  em que  $\text{Ker}(\text{tr}) = \mathfrak{sl}(n)$ . Assim, pelo Teorema do Isomorfismo  $\mathfrak{gl}(n)/\mathfrak{sl}(n) \simeq \mathbb{K}$ .

Como caso particular de homomorfismo de álgebra de Lie temos as derivações:

**Definição A.2.15.** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie sobre  $\mathbb{K}$ . Uma *derivação* de  $\mathfrak{g}$  é uma aplicação  $\mathbb{K}$ -linear

$$D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

tal que

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)] \text{ para todo } x, y \in \mathfrak{g}.$$

Podemos definir de forma mais geral, para uma álgebra  $\mathcal{A}$ , com um endomorfismo  $D$  de  $\mathcal{A}$ , onde cumpre a regra de Leibniz de derivada de produto  $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ .

**Exemplo A.2.16.** A adjunta dos elementos de uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , é uma derivação. De fato, pela identidade de Jacobi,

$$\text{ad}_x([y, z]) = [x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]].$$

Portanto,  $\text{ad}_x([y, z]) = [\text{ad}_x(y), z] + [y, \text{ad}_x(z)]$  para todo  $x, y, z \in \mathfrak{g}$ .

### A.3 Soma direta e representações de álgebras de Lie

**Definição A.3.1.** Consideremos  $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_n$  como álgebras de Lie e

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_n$$

sendo a sua soma direta como espaços vetoriais. Para  $X = (X_1, \dots, X_n)$  e  $Y = (Y_1, \dots, Y_n) \in \mathfrak{g}$ , definimos o colchete

$$[X, Y] = ([X_1, Y_1], \dots, [X_n, Y_n]),$$

conferindo a  $\mathfrak{g}$  uma estrutura de álgebra de Lie, onde a  $i$ -ésima componente é um ideal isomorfo a  $\mathfrak{g}_i$ . Vale ressaltar que não abordamos a dimensão da álgebra de Lie nesta definição, a qual pode se estender naturalmente a álgebras de Lie de dimensão infinita, assim como a definição de representações e módulos de uma álgebra de Lie. De maneira análoga, podemos definir o produto e a soma direta para uma família arbitrária de álgebras de Lie.

**Definição A.3.2.** Uma *representação* de uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  sobre  $\mathbb{K}$  é um par  $(V, \rho)$ , em que  $V$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e  $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$  é um homomorfismo de álgebras de Lie.

Dizemos que  $V$  é o *espaço da representação*, e sua dimensão é a **dimensão da representação**. A representação é considerada fiel se  $\text{Ker}(\rho) = 0$ . Vejamos alguns exemplos que nos ajudam a entender esta definição.

**Exemplo A.3.3.** Toda álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  tem uma representação trivial,  $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$ , dada por  $\rho(x) = 0$ , para todo  $x \in \mathfrak{g}$ . Para toda álgebra de Lie  $\mathfrak{g} \neq 0$ , essa representação nunca é fiel.

**Exemplo A.3.4.** Se  $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$  é uma subálgebra de Lie, então a inclusão define uma representação de  $\mathfrak{g}$  em  $V$ , a qual chamamos de *representação canônica*.

**Exemplo A.3.5.** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie. O homomorfismo adjunto

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

é uma representação de  $\mathfrak{g}$ , chamada *representação adjunta*.

Podemos observar que existe uma relação entre as representações de álgebras de Lie e os módulos, pois estes últimos podem proporcionar informações cruciais sobre a álgebra de Lie.

**Definição A.3.6.** Consideremos  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie sobre um corpo  $\mathbb{K}$ . Um  $\mathfrak{g}$ -*módulo* é um par  $(M, \cdot)$  no qual:

(M1)  $M$  é um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial,

(M2) A aplicação  $\cdot : \mathfrak{g} \times M \longrightarrow M$  é  $\mathbb{K}$ -bilinear, associando  $(x, m) \mapsto x \cdot m$ , denominada **ação** de  $\mathfrak{g}$  sobre  $M$ .

(M3)  $[x, y] \cdot m = x \cdot (y \cdot m) - y \cdot (x \cdot m) \forall x, y \in \mathfrak{g} \text{ e } m \in M$ , garantindo compatibilidade com o colchete.

É importante notarmos que a condição (M2) implica que, para cada  $x \in \mathfrak{g}$ , a aplicação

$$T_x : M \longrightarrow M$$

onde  $T_x(m) = x \cdot m$ , é um endomorfismo linear de  $M$ . Em outras palavras, os elementos de  $\mathfrak{g}$  agem sobre  $M$  por meio de aplicações lineares dadas por

$$T : \mathfrak{g} \longrightarrow \text{End}(M)$$

$$x \mapsto T_x : M \longrightarrow M$$

$$m \mapsto T_x(m) = x \cdot m.$$

**Observação 6.** Consideremos  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie e  $(M, \rho)$  uma representação de  $\mathfrak{g}$ . Nesse caso,  $M$  é um  $\mathfrak{g}$ -módulo, bastando definir

$$\begin{aligned} \cdot : \mathfrak{g} \times M &\longrightarrow M \\ (x, m) &\mapsto x \cdot m = \rho_x(m). \end{aligned}$$

Reciprocamente, dado um  $\mathfrak{g}$ -módulo  $M$ , então  $(M, \rho)$  é uma representação de  $\mathfrak{g}$ , onde

$$\begin{aligned} \rho : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(M) \\ x &\mapsto \rho_x : M \longrightarrow M \\ m &\mapsto \rho_x(m) = x \cdot m. \end{aligned}$$

Assim, estabelecemos uma correspondência biunívoca entre as **Representações de  $\mathfrak{g}$**  e os  **$\mathfrak{g}$ -módulos**, como indicado pelo diagrama abaixo:

$$\begin{aligned} \{\text{Representações de } \mathfrak{g}\} &\leftrightarrow \{\mathfrak{g}\text{-módulos}\} \\ (M, \rho) &\leftrightarrow (M, \cdot) \end{aligned}$$

**Exemplo A.3.7.** Sejam  $M$  um  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial e  $\mathfrak{g}$  uma subálgebra de Lie de  $\mathfrak{gl}(M)$ , podemos verificar facilmente que  $M$  é um  $\mathfrak{g}$ -módulo, onde  $x \cdot m$  é dado pela imagem de  $m$  pela aplicação linear  $x$ , isto é,

$$\begin{aligned} \cdot : \mathfrak{g} \times M &\longrightarrow M \\ (x, m) &\mapsto x \cdot m = x(m). \end{aligned}$$

Sejam  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie e  $V$  um  $\mathfrak{g}$ -módulo, dizemos que um subespaço  $W$  de  $V$  é um **submódulo** de  $V$ , se  $W$  é invariante pela ação de  $\mathfrak{g}$ , isto é, para cada  $x \in \mathfrak{g}$  e  $w \in W$ , temos  $x \cdot w \in W$ .

**Definição A.3.8.** Seja  $W$  um submódulo do  $\mathfrak{g}$ -módulo  $V$ . Como em outras estruturas, podemos também dar uma estrutura de  $\mathfrak{g}$ -módulo ao espaço quociente  $V/W$ . Essa estrutura é dada por:

$$x \cdot (v + W) := (x \cdot v) + W \text{ para todo } x \in \mathfrak{g} \text{ e } v \in V.$$

A este módulo chamamos de *quociente* ou *módulo de fator*. É fácil ver que essa ação de  $\mathfrak{g}$  em  $V/W$  independe dos representantes, ou seja, está bem definida.

Entendemos por um **homomorfismo de  $\mathfrak{g}$ -módulos** a uma aplicação linear  $\phi : M \longrightarrow W$ , tal que,  $\phi(x \cdot m) = x \cdot \phi(m)$ , para todo  $x \in \mathfrak{g}$  e  $m \in M$ . É fácil verificar que o *Teorema do Isomorfismo* é ainda válido para  $\mathfrak{g}$ -módulos.

**Observação 7.** As categorias de representações de  $\mathfrak{g}$  e de  $\mathfrak{g}$ -módulos são equivalentes.

**Definição A.3.9.** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie. Dizemos que um  $\mathfrak{g}$ -módulo  $M$  é *irredutível* ou *simples*, se tem precisamente dois  $\mathfrak{g}$ -submódulos:  $M$  e  $\{0\}$ .

**Observação 8.** Usando a Observação 7, podemos dizer que no contexto de representações, uma representação  $\rho$  de  $\mathfrak{g}$  em  $M$  é irredutível se os únicos subespaços invariantes por  $\rho_x$  para todo  $x \in \mathfrak{g}$ , são os triviais, isto é,  $\{0\}$  e  $M$ .

**Exemplo A.3.10.** Sejam  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie simples e seja  $(\mathfrak{g}, \text{ad})$  a representação adjunta, então  $\mathfrak{g}$  é um  $\mathfrak{g}$ -módulo irredutível.

**Definição A.3.11.** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie. Dizemos que um  $\mathfrak{g}$ -módulo  $M$  é *indecomponível* se não houver submódulos não-nulos  $U$  e  $W$  tal que  $M = U \oplus W$ .

Podemos verificar que um  $\mathfrak{g}$ -módulo  $M$  irredutível é indecomponível, mas a recíproca não é válida.

**Definição A.3.12.** Seja  $M$  um  $\mathfrak{g}$ -módulo. Dizemos que  $M$  é *completamente redutível*, se pode ser escrito como soma direta finita de  $\mathfrak{g}$ -módulos irredutíveis, isto é,  $M = \bigoplus M_i$  com  $M_i$  um  $\mathfrak{g}$ -módulo irredutível.

**Exemplo A.3.13.** Seja  $\mathfrak{g} = d(n)$  a subálgebra de  $\mathfrak{gl}(n)$ , consistindo de todas as matrizes diagonais. Seja o  $\mathbb{K}$ -espaço vetorial  $M = \mathbb{K}^n$ , defina  $D \cdot m = D \cdot m \forall D \in \mathfrak{g} e m \in M$ , em que  $D \cdot m$  indica o produto usual de matrizes. Assim,  $M$  torna-se um  $\mathfrak{g}$ -módulo completamente redutível. De fato, se  $M_i = \text{Span}\{E_{i,i}\}$ , então  $M_i$  é um  $\mathfrak{g}$ -submódulo de dimensão 1 e logo irredutível, no qual  $M = \bigoplus M_i$ .

## A.4 Subálgebras de Cartan

Entraremos agora na discussão sobre subálgebras de Cartan, que desempenham um papel fundamental na compreensão da estrutura das álgebras de Kac-Moody. Uma subálgebra de Cartan, denotada por  $\mathfrak{h}$ , é essencialmente uma subálgebra nilpotente de uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  que é autonormalizante. Inicaremos então, discutindo o que é o normalizador de  $\mathfrak{h}$ . O normalizador de  $\mathfrak{h}$  em  $\mathfrak{g}$ , denotado por  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ , consiste em todos os elementos  $x \in \mathfrak{g}$  tais que  $\text{ad}_x(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$ . Vale ressaltar que, para simplificar a exposição sem perder generalidade, consideraremos daqui em diante (a menos que explicitamente indicado o contrário) que  $\mathfrak{g}$  é uma álgebra de Lie simples de dimensão finita. A subálgebra de Cartan é uma ferramenta fundamental para o estudo mais aprofundado das álgebras de Kac-Moody.

**Definição A.4.1.** Uma subálgebra  $\mathfrak{h}$  de uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é chamada subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , se ela satisfaz as seguintes condições:

- (a)  $\mathfrak{h}$  é nilpotente.

(b) O normalizador de  $\mathfrak{h}$  em  $\mathfrak{g}$  coincide com  $\mathfrak{h}$ .

**Exemplo A.4.2.** Seja  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  e  $\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}$ . Então,  $\mathfrak{h}$  é uma subálgebra de Cartan gerada por  $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . De fato,  $\mathfrak{h}$  é abeliana e portanto nilpotente. Seja agora  $z \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$ . Então,

$$[h, z] = [h, a.e + b.h + c.f] = 2a.e - 2c.f.$$

Este colchete está em  $\mathfrak{h}$  se e só se  $a = c = 0$ . Portanto,  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$ .

**Exemplo A.4.3.** De forma mais geral, consideremos a álgebra de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C})$  e a subálgebra  $\mathfrak{h} = \{\text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_{l+1}) \mid a_i \in \mathbb{C} \text{ e } \sum_{i=1}^{l+1} a_i = 0\}$ . Então,  $\mathfrak{h}$  é uma subálgebra de Cartan gerada pelo conjunto  $\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee, \dots, \alpha_l^\vee\}$ , tal que,  $\alpha_i^\vee = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, l$ .

Através da definição, juntamente com a verificação dos exemplos acima, podemos já perceber que a subálgebra de Cartan é motivada por duas razões essenciais. Primeiramente, ela surge naturalmente como  $\mathfrak{g}_0$  na decomposição primária de  $\text{ad}_x$  para um elemento genérico (regular)  $X$  em  $\mathfrak{g}$ . Além disso, ao considerarmos a nilpotência de  $\mathfrak{h}$ , a representação adjunta de  $\mathfrak{h}$  em  $\mathfrak{g}$  se decompõe em uma soma direta de espaços  $\mathfrak{g}_{\lambda_i}$ , onde  $\lambda_i$  são os "pesos", uma espécie de funcional linear que se comporta como autovalor, da representação. A subálgebra  $\mathfrak{g}_0$  é, portanto, uma subálgebra importante contendo  $\mathfrak{h}$ . A definição de subálgebra de Cartan é então formulada para garantir que  $\mathfrak{h}$  seja, de fato, igual a  $\mathfrak{g}_0$ . Esta identificação é crucial para o entendimento subsequente, especialmente na caracterização de elementos regulares, que será abordada na próxima seção.

### A.4.1 Elemento Regular

Considerando uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , associamos a cada elemento  $x \in \mathfrak{g}$  o polinômio característico  $P_x(T)$  do endomorfismo  $\text{ad}_x$ , definido como a determinante de  $T - \text{ad}_x$ . Explicitamente, se a dimensão de  $\mathfrak{g}$  é  $n$ , podemos expressar  $P_x(T)$  como uma soma de termos polinomiais:

$$P_x(T) = \sum_{i=0}^n a_i(x) T^i,$$

onde cada  $a_i(x)$  é um polinômio de grau  $n - i$  em relação a  $x$ . Isso decorre da linearidade da operação  $\text{ad}$  em  $x$  e da natureza polinomial dos coeficientes do polinômio característico no espaço de transformações lineares.

Introduzimos o conceito de **posto** de uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  como o menor inteiro  $i$  tal que o coeficiente  $a_i$  não é identicamente nulo. Um elemento  $x \in \mathfrak{g}$  é classificado como regular se  $a_i(x) \neq 0$ , onde  $i$  é o posto de  $\mathfrak{g}$ .

Para ilustrar, consideramos o exemplo da álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  com base canônica  $\{e, h, f\}$ . Se  $z = a.e + b.h + c.f \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , a matriz da adjunta nessa base é dada por

$$\text{ad}_z = \begin{pmatrix} 2b & -2a & 0 \\ -c & 0 & a \\ 0 & 2c & -2b \end{pmatrix},$$

e, conseqüentemente, o polinômio característico é  $P_z(T) = T^3 - 4(b^2 + ac)T$ . Assim, o posto de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  é 1, e  $z$  é considerado regular se e somente se  $b^2 + ac \neq 0$ . Em particular, o elemento  $h$  é classificado como regular, enquanto  $e$  e  $f$  não são elementos regulares. Este exemplo evidencia a importância do conceito de posto na análise da estrutura da álgebra de Lie.

Iremos agora definir uma aplicação, que será muito importante para prosseguirmos, e que utilizaremos o termo com muita frequência no texto. Veremos mais adiante que essa aplicação nos permite avaliar a semi-simplicidade de uma álgebra de Lie.

Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie, para cada  $x, y \in \mathfrak{g}$ , definamos a aplicação

$$\begin{aligned} \kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) &\mapsto \kappa(x, y) = \text{tr}(\text{ad}_x \circ \text{ad}_y). \end{aligned}$$

Podemos ver facilmente que  $\kappa(x, y)$  cumpre as seguintes propriedades:

- (1)  $\kappa(x, y) = \kappa(y, x)$
- (2)  $\kappa(\alpha x + \beta y, z) = \alpha \kappa(x, z) + \beta \kappa(y, z)$

Assim essa aplicação é bilinear, no qual chamamos de **Forma de Killing** de  $\mathfrak{g}$ . Perceba ainda, que  $\kappa$  é associativa para o colchete de Lie, isto é, para todo  $x, y, z \in \mathfrak{g}$ , vale:

$$\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z]). \tag{A.1}$$

Dessa propriedade [A.1](#), obtemos o seguinte resultado.

**Lema A.4.4.** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie e  $\mathfrak{h}$  um ideal de  $\mathfrak{g}$ , então o conjunto

$$\mathcal{I} = \{x \in \mathfrak{g}; \kappa(x, y) = 0, \forall y \in \mathfrak{h}\}$$

é um ideal de  $\mathfrak{g}$ .

*Demonstração.* Podemos ver facilmente que  $\mathcal{I}$  é um subespaço vetorial. Seja agora  $x \in \mathcal{I}$  e  $y \in \mathfrak{g}$ . Se  $z \in \mathfrak{h}$ , então:

$$\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z]) = 0$$

pois  $[y, z] \in \mathfrak{h}$ , portanto,  $[x, y] \in \mathcal{I}$ , isso mostra que  $\mathcal{I}$  é um ideal.  $\square$

Seja  $\kappa$  a forma de Killing de  $\mathfrak{g}$  e suponha que  $\mathfrak{h}$  é um ideal de  $\mathfrak{g}$ , denotemos a forma de Killing restrita a  $\mathfrak{h}$  por  $\kappa_{\mathfrak{h}}$ , o resultado a seguir, nos diz que a forma de Killing é compatível com as restrições a ideais.

**Lema A.4.5.** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie e  $\mathfrak{h}$  um ideal de  $\mathfrak{g}$ . Se  $x, y \in \mathfrak{h}$ , então  $\kappa_{\mathfrak{h}}(x, y) = \kappa(x, y)$ .

*Demonstração.* Consideremos uma base de  $\mathfrak{h}$  e estendendo a uma base de  $\mathfrak{g}$ , temos que, se  $x \in \mathfrak{h}$  então  $\text{ad}_x$  aplica  $\mathfrak{g}$  em  $\mathfrak{h}$ , assim a matriz de  $\text{ad}_x$  nessa base tem a forma

$$\begin{pmatrix} A_x & B_x \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde  $A_x$  é a matriz de  $\text{ad}_x$  restrita a  $\mathfrak{h}$ , assim, se  $y \in \mathfrak{h}$ , então a matriz de  $\text{ad}_x \circ \text{ad}_y$  tem a forma

$$\begin{pmatrix} A_x A_y & A_x B_y \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

em que  $A_x A_y$  é a matriz de  $\text{ad}_x \circ \text{ad}_y$  restrita a  $\mathfrak{h}$ , como somente o bloco  $A_x A_y$  contribuem no cálculo do traço, segue que

$$\kappa(x, y) = \text{tr}(\text{ad}_x \circ \text{ad}_y) = \text{tr}(A_x A_y) = \kappa_{\mathfrak{h}}(x, y).$$

$\square$

Concluiremos esta subseção apresentando um dos teoremas que será amplamente empregado quando discutirmos a forma de Killing. Esta será uma ferramenta de importância recorrente para assegurar a existência de uma forma bilinear não degenerada. Este teorema é reconhecido como o critério de Cartan (segundo, para maior precisão) para a semissimplicidade de álgebras de Lie de dimensão finita.

**Teorema A.4.6** (Segundo Critério de Cartan). Uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é semissimples se, e somente se, sua forma de Killing é não degenerada.

*Demonstração.* Seja  $\mathfrak{g}^{\perp} = \{z \in \mathfrak{g} \mid \kappa(x, z) = 0 \text{ para todo } x \in \mathfrak{g}\}$  o subespaço ortogonal a  $\mathfrak{g}$ . Como a forma de Killing é invariante, podemos ver facilmente que  $\mathfrak{g}^{\perp}$  é um ideal de  $\mathfrak{g}$ . Denote por  $\kappa_{\mathfrak{g}^{\perp}}$  a forma de Killing deste ideal. Assim, temos

$$\kappa_{\mathfrak{g}^{\perp}}(x, y) = \kappa(x, y)$$

para quaisquer  $x, y \in \mathfrak{g}^{\perp}$ . Mas  $\kappa(x, y) = 0$  para quaisquer  $x, y \in \mathfrak{g}^{\perp}$  (pela definição de  $\mathfrak{g}^{\perp}$ ) o que mostra que  $\mathfrak{g}^{\perp}$  é solúvel. Assim, se  $\mathfrak{g}$  é semissimples, então  $\mathfrak{g}^{\perp} = 0$  e  $\kappa$  é não degenerada.

Reciprocamente, suponha que  $\kappa$  é não degenerada. Dado um ideal abeliano  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}$ , tome  $x \in \mathfrak{a}$ ,  $y \in \mathfrak{g}$  e considere a aplicação  $\text{ad}_x \circ \text{ad}_y : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ . Para qualquer  $z \in \mathfrak{g}$ , tem-se

$$(\text{ad}_x \circ \text{ad}_y)^2 z = [x, [y, [x, [y, z]]]] \in [\mathfrak{a}, [\mathfrak{g}, [\mathfrak{a}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}}]]] \subseteq [\mathfrak{a}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]] \subseteq [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = 0,$$

de modo que  $\text{ad}_x \circ \text{ad}_y$  é nilpotente. Em particular,  $\text{ad}_x \circ \text{ad}_y$  tem traço nulo e portanto  $\kappa(x, y) = 0$ . Como  $x \in \mathfrak{a}$  e  $y \in \mathfrak{g}$  foram arbitrários, segue disso que  $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{g}^\perp$ . Mas  $\mathfrak{g}^\perp = 0$ , pois  $\kappa$  é não degenerada. Logo, o único ideal abeliano de  $\mathfrak{g}$  é  $\mathfrak{a} = 0$ , e portanto  $\mathfrak{g}$  é semissimples.  $\square$

### A.4.2 Subálgebra de Cartan associada com elemento regular

Inicialmente consideramos um elemento  $x$  pertencente à álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Introduzimos o conceito de auto-espaço generalizado  $\mathfrak{g}_x^\lambda$  associado ao autovalor  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Este auto-espaço generalizado é definido como o conjunto de elementos  $y \in \mathfrak{g}$  para os quais a aplicação linear  $(\text{ad}_x - \lambda)^p$  se anula para algum inteiro positivo  $p$ . De forma mais formal:

$$\mathfrak{g}_x^\lambda = \{y \in \mathfrak{g} \mid (\text{ad}_x - \lambda)^p = 0 \text{ para algum } p\}.$$

Um ponto de destaque é que a dimensão de qualquer subálgebra de Cartan coincide precisamente com o posto da álgebra, já que a multiplicidade algébrica do autovalor nulo de  $\text{ad}_x$  é igual à dimensão de  $\mathfrak{g}_x^0$ . Este resultado estabelece uma relação crucial entre as subálgebras de Cartan e a estrutura algébrica dos auto-espaços associados a elementos da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ .

**Proposição A.4.7.** Seja  $x \in \mathfrak{g}$ . Então:

- (a) A álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é uma soma direta de auto-espaços generalizados  $\mathfrak{g}_x^\lambda$ .
- (b) Para  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ , temos que  $[\mathfrak{g}_x^\lambda, \mathfrak{g}_x^\mu] \subset \mathfrak{g}_x^{\lambda+\mu}$ .
- (c) O auto-espaço  $\mathfrak{g}_x^0$  é uma subálgebra de Lie de  $\mathfrak{g}$ .

*Demonstração.* O item (a) é estabelecido por meio da decomposição primária associada ao endomorfismo  $\text{ad}_x$ . Para o item (b), suponha que  $y \in \mathfrak{g}_x^\lambda$  e  $z \in \mathfrak{g}_x^\mu$ . Vamos demonstrar que  $[y, z] \in \mathfrak{g}_x^{\lambda+\mu}$ . De fato, através de uma indução, podemos mostrar a seguinte fórmula:

$$(\text{ad}_x - (\lambda + \mu))^n [y, z] = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} [(\text{ad}_x - \lambda)^i y, (\text{ad}_x - \mu)^{n-i} z].$$

Tomando  $n$  suficientemente grande, todos os termos do lado direito se anulam, o que implica que  $[y, z] \in \mathfrak{g}_x^{\lambda+\mu}$ . O item (c) segue imediatamente do item (b) para o caso em que  $\lambda = \mu = 0$ .  $\square$

**Teorema A.4.8.** Se  $x$  é regular,  $\mathfrak{g}_x^0$  é uma subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , onde sua dimensão coincide com o posto de  $\mathfrak{g}$ .

*Demonstração.* Mostraremos somente que  $\mathfrak{g}_x^0$  é igual ao seu normalizador  $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_x^0)$ . Seja  $z \in N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_x^0)$ . Temos  $\text{ad}_z(\mathfrak{g}_x^0) \subset \mathfrak{g}_x^0$ , e em particular,  $[z, x] \in \mathfrak{g}_x^0$ . Pela definição de  $\mathfrak{g}_x^0$ , existe um inteiro  $p$  tal que  $(\text{ad}_x)^p[z, x] = 0$ , resultando em  $(\text{ad}_x)^{p+1}z = 0$ . Portanto,  $z \in \mathfrak{g}_x^0$ , concluindo que  $\mathfrak{g}_x^0 = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}_x^0)$ . O caso nilpotente pode ser consultado em [San99], pág. 105.  $\square$

Através da aplicação do Teorema A.4.8, podemos inferir de maneira imediata o subsequente corolário.

**Corolário A.4.1.** Sempre existem subálgebras de Cartan em álgebras de Lie de dimensão finita.

**Corolário A.4.2.** Se  $\mathfrak{h}$  é uma subálgebra de Cartan e  $x \in \mathfrak{h}$  é um elemento regular, então  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_x^0$ .

*Demonstração.* Demonstraremos que  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_x^0$  para  $x$  regular em  $\mathfrak{h}$ .

Dado que  $\mathfrak{h}$  é uma subálgebra de Cartan, ela é nilpotente. Portanto,  $\text{ad}_x$  restrito a  $\mathfrak{h}$  é nilpotente. Consequentemente, temos  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}_x^0$ .

Por outro lado, sabemos que  $\mathfrak{g}_x^0$  é nilpotente. Isso implica que  $\mathfrak{h}$  é igual a  $\mathfrak{g}_x^0$ , uma vez que  $\mathfrak{h}$  é sua própria subálgebra normalizadora.

Assim, concluimos que  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_x^0$  para  $x$  regular em  $\mathfrak{h}$ .  $\square$

Uma vez que exploramos o teorema anterior, nos surge a pergunta natural sobre a veracidade de sua recíproca, ou seja, ao considerarmos  $\mathfrak{h}$  como uma subálgebra de Cartan, desejamos verificar se é possível concluir que  $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_x^0$  para algum elemento regular  $x$ . A resposta afirmativa é confirmada pela seguinte observação: Se  $\mathfrak{h}$  é uma subálgebra de Cartan da álgebra de Lie finita  $\mathfrak{g}$ , então sempre existe pelo menos um elemento regular  $x \in \mathfrak{h}$ . A demonstração dessa afirmação envolve argumentos baseados na Teoria de Jordan, garantindo a existência de um elemento regular em uma subálgebra de Cartan ([San99]).

Consideremos agora um automorfismo  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  e  $\mathfrak{h}$  uma subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ . Como  $\phi$  é um automorfismo, temos que  $\phi(\mathfrak{h})$  também é uma subálgebra de Cartan, o que nos motiva a definir o seguinte.

**Definição A.4.9.** Duas subálgebras de Cartan são ditas conjugadas se uma é imagem da outra por um automorfismo de  $\mathfrak{g}$ .

A relação de conjugação é uma relação de equivalência, uma vez que a inversa e a composição de automorfismos ainda resultam em automorfismos. Denotemos por  $\bar{\mathfrak{g}}$  o conjunto de todos os elementos regulares de  $\mathfrak{g}$ . Conforme estabelecido pelo Teorema A.4.8, para cada  $x \in \bar{\mathfrak{g}}$ , a subálgebra  $\mathfrak{g}_x^0$  é uma subálgebra de Cartan. Com base nisso, podemos definir uma relação de equivalência em  $\bar{\mathfrak{g}}$  da seguinte forma:

$$x \sim y \Leftrightarrow \mathfrak{g}_x^0 \text{ é conjugada de } \mathfrak{g}_y^0.$$

É imediatamente verificável que  $\sim$  é uma relação de equivalência, e as classes de equivalência são invariantes sob automorfismo. Unindo essas definições, juntamente com os teoremas, proposições e corolários demonstrados anteriormente, extraímos o seguinte teorema, que pode ser consultado com mais detalhes em [San99].

**Teorema A.4.10.** Numa álgebra de Lie sobre um corpo algebricamente fechado, as subálgebra de Cartan são duas a duas conjugadas por automorfismo.

Consideremos agora  $\mathfrak{h}$  como uma subálgebra de Cartan da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . É evidente que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \dot{\Delta}} \mathfrak{g}_{\alpha} \quad (\text{A.2})$$

onde  $\mathfrak{g}_{\alpha} = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x, \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}\}$  e  $\dot{\Delta}$  é o conjunto dos  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$  tal que  $\alpha \neq 0$  e  $\mathfrak{g}_{\alpha} \neq 0$ . Os  $\alpha \in \dot{\Delta}$  são denominados **raízes** e  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  é o **espaço de raiz associado** a  $\alpha$ . Essa decomposição é conhecida como **Decomposição em Espaço de Raízes**. Destacam-se dois fatos relevantes nesta abordagem. Primeiramente, devido à finitude da dimensão de  $\mathfrak{g}$ ,  $\dot{\Delta}$  é um conjunto finito. Além disso, as raízes e os espaços de raízes dependem da escolha da subálgebra de Cartan.

Numerosos resultados importantes estão associados a essas raízes e espaços de raízes mencionados acima. Um desses resultados significativos é a existência de subálgebras em  $\mathfrak{g}$  que são isomorfas à álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ , conforme discutido na seguinte proposição.

**Proposição A.4.11.** Sejam  $\alpha \in \dot{\Delta}$  e  $x \in \mathfrak{g}_{\alpha}$  um elemento não nulo. Então  $-\alpha$  também é uma raiz, e existe  $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  tal que  $\mathfrak{sl}(\alpha) = \text{Span}\{x, y, [x, y]\}$  é uma subálgebra de Lie de  $\mathfrak{g}$  isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .

*Demonstração.* Primeiro, afirmamos que existe algum  $y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  tal que  $\kappa(x, y) \neq 0$  e  $[x, y] \neq 0$ , onde  $\kappa(x, y) = \text{tr}(\text{ad}_x \circ \text{ad}_y)$  é um forma bilinear simétrica não-degenerada. Como  $\kappa$  é não degenerada, existe algum  $w \in \mathfrak{g}$  tal que  $\kappa(x, w) \neq 0$ . Escrevemos  $w = y_0 + \sum_{\beta \in \dot{\Delta}} y_{\beta}$ , onde  $y_0 \in \mathfrak{h}$  e  $y_{\beta} \in \mathfrak{g}_{\beta}$ . Expandindo  $\kappa(x, y)$ , concluímos que a única forma de termos um termo não-nulo é se  $-\alpha$  for uma raiz e  $y_{-\alpha} \neq 0$ . Portanto, podemos escolher  $y = y_{-\alpha}$ . Agora, como  $\alpha$  é não-nulo, existe algum  $t \in \mathfrak{h}$  tal que  $\alpha(t) \neq 0$ . Para esse  $t$ , temos  $\kappa(t, [x, y]) = \kappa([t, x], y) = \alpha(t)\kappa(x, y) \neq 0$ , o que implica que  $[x, y] \neq 0$ .

Seja  $S := \text{Span}\{x, y, [x, y]\}$ . Temos assim que  $[x, y] \in \mathfrak{h}$ . Como  $x$  e  $y$  são autovetores simultâneos para todos os elementos de  $\text{ad}(\mathfrak{h})$ , em particular para  $\text{ad}[x, y]$ , isso mostra que  $S$  é uma subálgebra de Lie de  $\mathfrak{g}$ . Resta mostrar que  $S$  é isomorfo a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .

Seja  $h := [x, y] \in S$ . Afirmamos que  $\alpha(h) \neq 0$ . Se não, então  $[h, x] = \alpha(h)x = 0$ ; similarmente,  $[h, y] = -\alpha(h)x = 0$ . Isso implica que  $\text{ad}_h : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  comuta com  $\text{ad}_x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  e  $\text{ad}_y : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ . Assim  $\text{ad}_h : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  é nilpotente. No entanto, como  $\mathfrak{h}$  é uma subálgebra de

Cartan,  $\text{ad}_h$  diagonalizável. O único elemento em  $\mathfrak{g}$  que é simultaneamente diagonalizável e nilpotente é 0, o que é uma contradição.

Assim,  $S$  é uma álgebra de Lie complexa tridimensional com  $S' = S$ , que é isomorfo a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ .  $\square$

Vamos concluir esta seção com a seguinte observação. Através da proposição anterior, é evidente que para cada  $\alpha \in \dot{\Delta}$ , a subálgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(\alpha)$  possui uma base  $\{e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha\}$ , onde  $e_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ ,  $f_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ ,  $h_\alpha \in \mathfrak{h}$ , e  $\alpha(h_\alpha) = 2$ .

## A.5 Sistemas Simples de Raízes, Subálgebras de Borel/Parabólicas e Matriz de Cartan

Consideremos um espaço euclidiano  $E$  com um produto interno  $(,)$ . Para  $0 \neq \alpha \in E$ , consideremos a reflexão  $\sigma_\alpha$  em relação a um hiperplano perpendicular a  $\alpha$ . Em álgebra linear, verifica-se que  $\sigma_\alpha(\beta) = \beta - 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha$ .

**Definição A.5.1.** Um subconjunto  $\dot{\Delta}$  do espaço euclidiano  $E$  é chamado de sistema de raízes se satisfizer as seguintes propriedades:

- (R1)  $\dot{\Delta}$  é finito, gera  $E$  e não contém 0,
- (R2) Se  $\alpha \in \dot{\Delta}$ , os únicos múltiplos de  $\alpha$  em  $\dot{\Delta}$  são  $\pm\alpha$ ,
- (R3) Se  $\alpha \in \dot{\Delta}$ , então  $\sigma_\alpha(\dot{\Delta}) \subseteq \dot{\Delta}$ ,
- (R4) Se  $\alpha$  e  $\beta \in \dot{\Delta}$ , então  $\langle \beta, \alpha \rangle := 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$ .

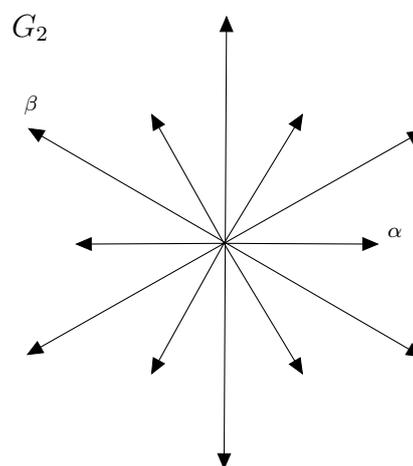
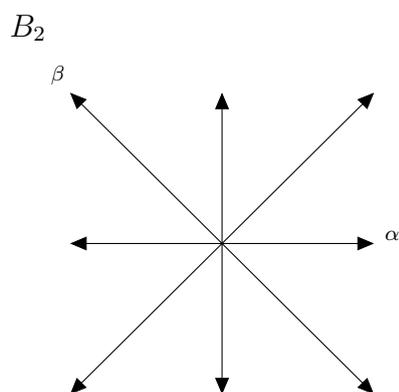
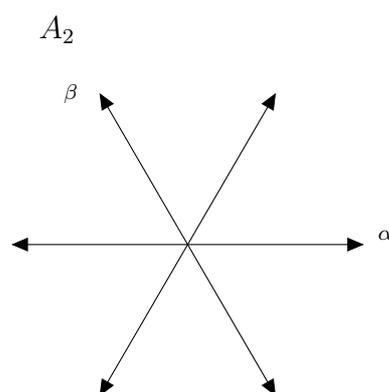
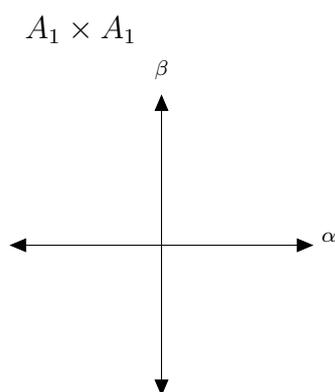
Chamamos um sistema de raízes  $\dot{\Delta}$  de irreduzível se não puder ser particionado como união de dois subconjuntos próprios, cada um ortogonal ao outro. O número  $k = \dim(E)$  é chamado de **posto** do sistema de raízes  $\dot{\Delta}$ . Para  $k \leq 2$ , podemos descrever  $\dot{\Delta}$ . Vejamos alguns exemplos.

### Exemplo A.5.2.

- Para o caso em que  $k = 1$ , por (R2) existe somente uma possibilidade, o qual é denotado por  $(A_1)$ :



- Para o caso em que  $k = 2$ , temos mais possibilidades:



Sejam  $\alpha, \beta \in \dot{\Delta}$ , e  $\theta$  o ângulo entre elas. Temos  $(\alpha, \beta) = \|\alpha\| \|\beta\| \cos \theta$ . Portanto, vale a seguinte propriedade:

**Proposição A.5.3.** Se  $\dot{\Delta} \subseteq E$  é um sistema de raízes, então  $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle \in \{0, 1, 2, 3\}$  para todo  $\alpha, \beta \in \dot{\Delta}$  com  $\alpha \neq \pm\beta$ .

*Demonstração.* Podemos ver que  $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4 \cos^2 \theta$ . Mostrando assim, ser um número inteiro não negativo menor ou igual a 4, pois,  $0 \leq \cos^2 \theta \leq 1$ . Mas  $\beta \neq \pm\alpha$ , então  $\cos^2 \theta \neq 1$ , o que demonstra o resultado.  $\square$

Um subconjunto  $\Pi$  de  $\dot{\Delta}$  é chamado sistema simples de raízes ou base de  $\dot{\Delta}$ , se satisfizer as seguintes condições:

(B1)  $\Pi$  é base de  $E$

(B2) cada raiz  $\beta \in \dot{\Delta}$  pode ser escrita como,  $\beta = \sum_{\alpha \in \dot{\Delta}} k_\alpha \alpha$ , onde os  $k_\alpha$  são todos não-negativos ou todos não-positivos. Se todos os  $k_\alpha \geq 0$  (respectivamente  $k_\alpha \leq 0$ )  $\beta$  é chamada positiva (respectivamente negativa).

Através da definição acima, podemos particionar o conjunto  $\dot{\Delta}$  em dois subconjuntos disjuntos: o conjunto das raízes positivas  $\dot{\Delta}_+$  e o conjunto das raízes negativas  $\dot{\Delta}_-$ , isto é,

$$\dot{\Delta} = \dot{\Delta}_+ \cup \dot{\Delta}_-$$

As raízes positivas são aquelas que podem ser expressas como combinações lineares não-negativas dos elementos da base  $\Pi$ , enquanto as raízes negativas são aquelas que podem ser expressas como combinações lineares não-positivas dos elementos da base  $\Pi$ . É fácil vermos ainda que, como igualdade de conjuntos,  $\dot{\Delta}_- = -\dot{\Delta}_+$ . Essa distinção entre raízes positivas e negativas é fundamental para a teoria de álgebras de Lie e tem importantes implicações na estrutura e representação dessas álgebras, estendem-se para o sistema de raízes afim. Com isso, a decomposição vista em A.2 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ \tag{A.3}$$

onde  $\mathfrak{n}_\pm = \bigoplus_{\alpha \in \dot{\Delta}_\pm} \mathfrak{g}_\alpha$ . Aproveitamos o momento para definir as seguintes subálgebras, que são de extrema importância para entendermos no contexto do caso de álgebras ed Kac-Moody.

**Definição A.5.4.** Consideremos  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie com a decomposição  $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ . Denotamos a **subálgebra de Borel standard** como a subálgebra  $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ , onde  $\bar{\mathfrak{b}} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$  é sua **subálgebra de Borel oposta**.

Podemos ver que essas subálgebras,  $\mathfrak{b}$  e  $\bar{\mathfrak{b}}$ , são solúveis maximais de  $\mathfrak{g}$ , e ainda mais, por definição, são subálgebras geradas por  $\mathfrak{h}$  e  $\mathfrak{g}_\alpha$ , com  $\alpha \in \dot{\Delta}_\pm$ , fornecendo uma base fundamental para a estrutura algébrica de  $\mathfrak{g}$ . Mais genericamente, qualquer subálgebra com essas características, geradas por  $\mathfrak{h}$  e  $\mathfrak{g}_\alpha$ 's, é denominada subálgebra de Borel.

Este conceito é central na teoria de álgebras de Lie semisimples, e será de grande importância para álgebras de Kac-Moody. Aproveitamos o momento para definir o que seriam subálgebras parabólicas neste contexto.

**Definição A.5.5.** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie. Qualquer subálgebra  $\mathfrak{p}$  que contenha uma subálgebra de Borel é chamada de **subálgebra parabólica**.

Aquelas que contêm a subálgebra de Borel standard  $\mathfrak{b}$  são chamadas de *subálgebras parabólicas standard*. Podemos verificar, por indução sobre o número de elementos da base

$\Pi$ , que existem  $2^{\dim(\mathfrak{h})}$  destas subálgebras parabólicas, a qual estão em bijeção natural com os subconjuntos  $\Sigma \subset \Pi$ . Seja  $\dot{\Delta}_\Sigma \subset \dot{\Delta}$  o subsistema de raízes gerado pelas raízes  $\alpha_i \in \Sigma$ , isto é,  $\dot{\Delta}_\Sigma = \dot{\Delta} \cap \mathbb{Z}\Sigma$  assim a subálgebra parabólica se decompõe como  $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ , onde  $\mathfrak{l}$  é conhecido como o fator Levi reductivo, enquanto  $\mathfrak{u}$  é o maior ideal nilpotente de  $\mathfrak{p}$ . De modo mais geral, quando  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_\Sigma \supset \mathfrak{b}$ , o fator de Levi  $\mathfrak{l}_\Sigma = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \dot{\Delta}_\Sigma} \mathfrak{g}_\alpha$  e o seu centro está em  $\mathfrak{h}$  e  $\mathfrak{u}_\Sigma \subset \mathfrak{n}_+$ ; enquanto  $\mathfrak{u}_\Sigma = \bigoplus \mathfrak{g}_\alpha$  com  $\alpha$  percorrendo aqueles  $\alpha \in \dot{\Delta}_+$  que não estão em  $\dot{\Delta}_\Sigma$ . Vejamos um exemplo.

**Exemplo A.5.6.** Consideremos a álgebra de Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$ . Já vimos no Exemplo A.4.3 que  $\mathfrak{h} = \{ h = \text{diag}(a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in \mathbb{C} \text{ e } \sum_{i=1}^3 a_i = 0 \}$  é uma subálgebra de Cartan gerada pelo conjunto  $\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee\}$ , tal que,  $\alpha_i^\vee = E_{i,i} - E_{i+1,i+1}$ , para todo  $i = 1, 2$ . Definimos agora para cada  $i = 1, 2, 3$  o seguinte funcional linear:

$$\begin{aligned} \epsilon_i : \mathfrak{h} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \epsilon_i(h) &= a_i. \end{aligned}$$

Assim, podemos ver que, para o espaço vetorial  $\mathfrak{h}^*$ :

- 1)  $\dot{\Delta} = \{\alpha = \epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \leq i \neq j \leq 3\}$  é um sistema de raízes e  $\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C}E_{i,j}$ ;
- 2)  $\Pi = \{\alpha_i \mid \alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \ 1 \leq i \leq 2\}$  é uma base de  $\dot{\Delta}$  e podemos reescrever como união disjunta

$$\dot{\Delta} = (\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}) \sqcup (\{-\alpha_1, -\alpha_2, -(\alpha_1 + \alpha_2)\})$$

- 3)  $\dot{\Delta}_+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}$  é o sistema de raízes positivas e  $\mathfrak{n}_+$  é gerada pelas matrizes  $E_{i,j}$ , com  $i < j$ , ou seja,  $\mathfrak{n}_+$  é composto por matrizes da forma  $\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- 4)  $\dot{\Delta}_- = \{-\alpha_1, -\alpha_2, -(\alpha_1 + \alpha_2)\}$  é o sistema de raízes negativas e  $\mathfrak{n}_-$  é gerada pelas matrizes  $E_{i,j}$ , com  $i > j$ , ou seja,  $\mathfrak{n}_-$  é composto por matrizes da forma  $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix}$

- 5)  $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+ = \text{Span}\{\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee\} \oplus \text{Span}\{E_{12}, E_{13}, E_{23}\}$ , ou seja,  $\mathfrak{b}$  é composta por matrizes da forma  $\begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & -(a+b) \end{pmatrix}$

- 6)  $\bar{\mathfrak{b}} = \text{Span}\{\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee\} \oplus \text{Span}\{E_{21}, E_{31}, E_{32}\}$ , ou seja,  $\bar{\mathfrak{b}}$  é dado por composta por matrizes da forma  $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ * & b & 0 \\ * & * & -(a+b) \end{pmatrix}$

Vamos considerar agora que  $\Sigma = \{\alpha_2\}$ , então o sistema de raízes gerado por  $\Sigma$  é

$$\dot{\Delta}_\Sigma = \{\alpha_2, -\alpha_2\} \text{ e } \dot{\Delta}_+ \setminus \dot{\Delta}_\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2\}.$$

Assim, temos

7)  $\mathfrak{u}_\Sigma = \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1+\alpha_2} = \text{Span}\{E_{12}, E_{13}\}$ , ou seja,  $\mathfrak{u}_\Sigma$  é composta por matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8)  $\bar{\mathfrak{u}}_\Sigma = \mathfrak{g}_{-\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{-(\alpha_1+\alpha_2)} = \text{Span}\{E_{21}, E_{31}\}$ , ou seja,  $\bar{\mathfrak{u}}_\Sigma$  é composta por matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

9) O fator de Levi  $\mathfrak{l}_\Sigma = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_2} \oplus \mathfrak{g}_{-\alpha_2} = \text{Span}\{\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee\} \oplus \text{Span}\{E_{23}, E_{32}\}$ , ou seja,  $\mathfrak{l}_\Sigma$  é

composta por matrizes da forma  $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & * \\ 0 & * & -(a+b) \end{pmatrix}$

10) A subálgebra parabólica  $\mathfrak{p}_\Sigma = \mathfrak{l}_\Sigma \oplus \mathfrak{u}_\Sigma = \text{Span}\{\alpha_1^\vee, \alpha_2^\vee\} \oplus \text{Span}\{E_{12}, E_{13}, E_{23}, E_{32}\}$ , ou

seja,  $\mathfrak{p}_\Sigma$  é composta por matrizes da forma  $\begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & * & -(a+b) \end{pmatrix}$

Pensando de forma mais geral, para o caso de  $\mathfrak{sl}(l, \mathbb{C})$ , em que a base do espaço de raízes é dada do  $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\}$ , e se escolhermos  $\Sigma = \{\alpha_2, \dots, \alpha_l\}$ , temos que:

- $\mathfrak{u}_\Sigma$  é gerado pelo conjunto  $\{e_1, \dots, e_l\}$ , em que

$$e_i = \begin{pmatrix} 0 & E_{1i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ com } E_{1i} \in M_{l \times l}(\mathbb{C})$$

- $\bar{\mathfrak{u}}_\Sigma$  é gerado pelo conjunto  $\{f_1, \dots, f_l\}$ , em que

$$f_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{i1} & 0 \end{pmatrix}, \text{ com } E_{i1} \in M_{l \times l}(\mathbb{C})$$

- O fator de Levi de  $\mathfrak{p}$  é gerado pelo conjunto

$$h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{l}I_l \end{pmatrix}, \text{ e } h_A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \text{ em que } A \in M_{l \times l}(\mathbb{C}) \text{ com } \text{tr}(A) = 0.$$

Sejam agora  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie simples,  $\dot{\Delta}$  um sistema de raízes e  $\Pi$  uma base de  $\dot{\Delta}$ . Fixando uma ordem  $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$  no sistema simples de raízes, definimos a **Matriz de Cartan** de  $\dot{\Delta}$  em relação a  $\Pi$ , como a matriz

$$\mathcal{C} = (a_{ij}) \tag{A.4}$$

onde  $a_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$  com  $1 \leq i, j \leq k$ . As entradas  $a_{ij}$  são chamadas **inteiros de Cartan**.

É fácil verificarmos que os elementos da diagonal principal da matriz de Cartan são todos iguais a 2. Além disso, pela Proposição A.5.3,  $a_{ij}a_{ji} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle \in \{0, 1, 2, 3\}$ .

**Exemplo A.5.7.** Para sistemas de raízes de posto 2, as matrizes de Cartan são dadas por:

$$A_1 \times A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; G_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Se  $\alpha$  e  $\beta$  são raízes positivas distintas, sabemos que  $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 0, 1, 2$  ou 3. Definimos o **Grafo de Coxeter** de  $\dot{\Delta}$ , ao grafo tendo  $k$  vértices, e entre dois vértices distintos  $\alpha_i, \alpha_j$ , tendo  $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$  arestas. Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo A.5.8.** Para os sistema de raízes  $\dot{\Delta}$  de posto 2, visto no Exemplo A.5.2, temos os seguintes Grafos de Coxeter.

$$A_1 \times A_1 \quad \begin{array}{cc} \circ & \circ \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{array}$$

$$A_2 \quad \begin{array}{cc} \circ & \text{---} & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 \end{array}$$

$$B_2 \quad \begin{array}{cc} \circ & \text{====} & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 \end{array}$$

$$G_2 \quad \begin{array}{cc} \circ & \text{====} & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 \end{array}$$

**Definição A.5.9.** Um **diagrama de Dynkin** de  $\dot{\Delta}$ , é um grafo de Coxeter, no qual, se  $\alpha_i$  e  $\alpha_j$  tem comprimentos diferentes, põe-se uma seta apontando para o vértice correspondente a de menor comprimento.

Antes de apresentarmos o teorema principal, que classifica todas as álgebra de Lie simples, vamos introduzir um exemplo ilustrativo que nos ajudará a entender melhor os conceitos envolvidos.

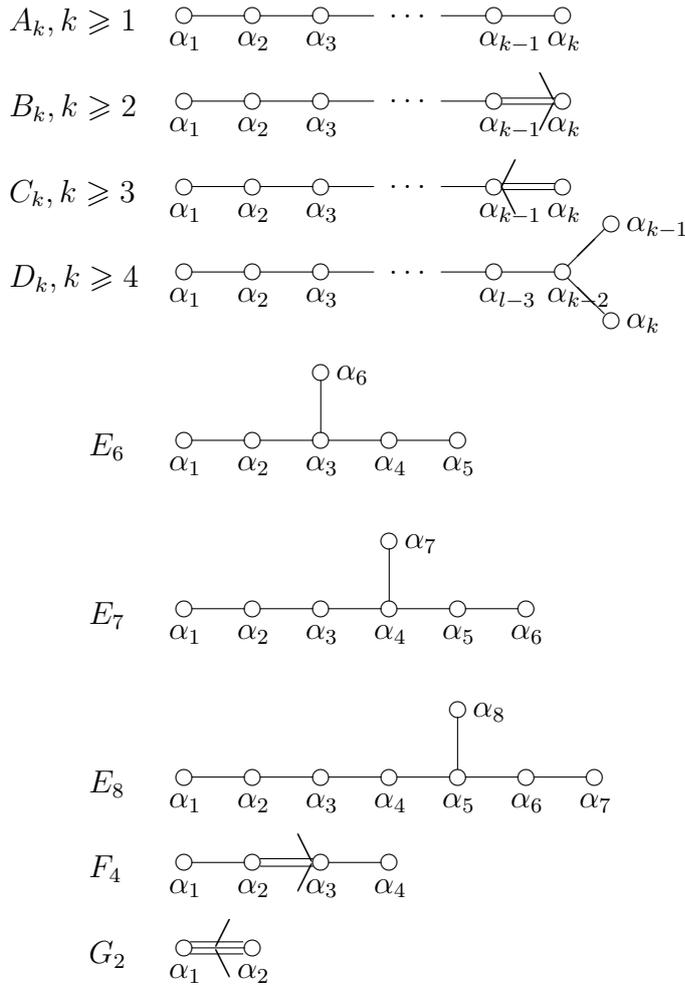
**Exemplo A.5.10.**

- $B_2 \quad \begin{array}{cc} \circ & \text{====} & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 \end{array}$

- $G_2 \quad \begin{array}{cc} \circ & \text{====} & \circ \\ \alpha_1 & & \alpha_2 \end{array}$

Esses são exemplos de diagramas de Dynkin que são importantes na teoria de sistemas de raízes. Com esses exemplos, podemos formalizar o teorema a respeito de sistema de raízes irredutível o qual destaca todos os possíveis caso.

**Teorema A.5.11.** Seja  $\hat{\Delta}$  um sistema de raízes irredutível de posto  $k$ . Então os únicos diagramas de Dynkin conexos são:



Podemos estabelecer uma relação entre a matriz de Cartan e o Diagrama de Dynkin. Em outras palavras, dado um diagrama de Dynkin, é possível encontrar a matriz de Cartan associada a esse diagrama.

**Exemplo A.5.12.** Consideremos o diagrama de Dynkin:

$$\overset{\circ}{\alpha}_1 - \overset{\circ}{\alpha}_2 - \overset{\circ}{\alpha}_3 - \overset{\circ}{\alpha}_4$$

A matriz de Cartan que representa esse diagrama é dada por:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

É evidenciado também que a recíproca se manifesta como verdadeira, o qual se torna uma constatação significativa.

Essa constatação nos conduz a indagar: qual é a natureza da relação entre os sistemas de raízes e as matrizes de Cartan? Poderíamos, então, descrever as álgebras de Lie por meio de geradores e relações que se baseiam essencialmente nas propriedades das matrizes de Cartan? É nesse contexto que exploramos os geradores conhecidos como geradores de Chevalley e suas relações, denominadas relações de Serre. Tais elementos são cruciais para a formulação de uma álgebra de Kac-Moody afim, representando uma generalização natural das álgebras de Lie semissimples de dimensão finita. Este exame é essencial para compreender a estrutura e as propriedades dessas álgebras e para avançar em nossa compreensão do vasto domínio das estruturas algébricas de dimensão infinita.

**Proposição A.5.13.** Sejam  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie semissimples de dimensão finita e  $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\}$  uma base do sistema de raízes  $\dot{\Delta}$ . Para cada  $i$ , suponha que  $e_i, f_i, h_i$  é uma base padrão para  $\mathfrak{sl}(\alpha_i)$ . Então,  $\mathfrak{g}$  pode ser gerada, como álgebra de Lie, pelo conjunto  $e_1, e_2, \dots, e_l, f_1, f_2, \dots, f_l$ .

*Demonstração.* Primeiramente, vamos mostrar que todo elemento de  $\mathfrak{h}$  pode ser obtido. Como  $h_i = [e_i, f_i]$ , é suficiente provarmos que  $\mathfrak{h}$  é gerado por  $h_1, \dots, h_l$ . Lembremos de que podemos identificar  $\mathfrak{h}$  com  $\mathfrak{h}^*$ , via forma de Killing  $\kappa(x, y) = \text{tr}(\text{ad}_x \circ \text{ad}_y)$ , de modo que  $\alpha_i \in \mathfrak{h}^*$  corresponde ao elemento  $\alpha_i^\vee \in \mathfrak{h}$ . Como  $\mathfrak{h}^*$  é gerado pelas raízes  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ ,  $\mathfrak{h}$  tem como base  $\{\alpha_i^\vee : 1 \leq i \leq l\}$ . Assim,  $h_i$  é um múltiplo escalar não nulo de  $\alpha_i^\vee$ . Portanto,  $\{h_1, \dots, h_l\}$  é uma base para  $\mathfrak{h}$ .

Agora, seja  $\beta \in \dot{\Delta}$ . Queremos mostrar que  $\mathfrak{g}_\beta$  está contido na subálgebra de Lie gerada pelos  $e_i$  e  $f_i$ . Chamemos essa subálgebra de  $\tilde{\mathfrak{g}}$ . Sabemos ainda que,  $\beta = w(\alpha_j)$ , onde  $w$  é um produto de reflexões  $s_{\alpha_i}$  para alguns elementos da base  $\alpha_i$ . Portanto, por indução no número de reflexões, é suficiente provar o seguinte: Se  $\beta = s_{\alpha_i}(\gamma)$  para algum  $\gamma \in \dot{\Delta}$  com  $\mathfrak{g}_\gamma \subseteq \tilde{\mathfrak{g}}$ , então  $\mathfrak{g}_\beta \subseteq \tilde{\mathfrak{g}}$ .

Por hipótese,  $\beta = \gamma - \langle \gamma, \alpha_i \rangle \alpha_i$ . Assim, o submódulo  $\mathfrak{sl}(\alpha_i)$  de  $\mathfrak{g}$  definido por

$$\bigoplus_k \mathfrak{g}_{\gamma + k\alpha_i}$$

onde a soma é sobre todos os  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $\gamma + k\alpha_i \in \dot{\Delta}$ , e a estrutura do módulo é dada pela ação adjunta de  $\mathfrak{sl}(\alpha_i)$ . Podemos ver que é um módulo irredutível de  $\mathfrak{sl}(\alpha_i)$ . Se  $e_\gamma \neq 0$  para algum  $\gamma$  em  $\mathfrak{g}_\gamma$ , então aplicando potências de  $\text{ad}_e$  ou  $\text{ad}_f$  podemos obter  $e_{\gamma + k\alpha_i}$  sempre que  $\gamma + k\alpha_i \in \dot{\Delta}$ . Portanto, se tomarmos  $k = \langle \gamma, \alpha_i \rangle$ , então obteremos  $e_\beta$ . Portanto,  $\mathfrak{g}_\beta$  está contido em  $\tilde{\mathfrak{g}}$ . □

Agora, veremos as relações que temos desses elementos, os geradores de Chevalley, com os elementos da matriz de Cartan  $a_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ . Podemos perceber inicialmente, antes de

enunciarmos essas relações, que  $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ ,  $a_{ii} = 2$ ,  $a_{ij} \leq 0$  ( $i \neq j$ ) e  $a_{ij} = 0$  se e somente se  $a_{ji} = 0$ . E ainda mais, todos os menores principais de  $\mathcal{C}$  são estritamente positivos, ou seja,  $\det(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq t} > 0$  onde  $1 \leq t \leq l$ . Através disso, temos a seguinte proposição:

**Proposição A.5.14** (Relações de Serre). Com as mesmas hipóteses da proposição anterior, temos as seguintes relações:

- (S1)  $[h_i, h_j] = 0$  para todo  $i$  e  $j$ ;
- (S2)  $[h_i, e_j] = c_{ji}e_j$  e  $[h_i, f_j] = -c_{ji}f_j$  para todo  $i$  e  $j$ ;
- (S3)  $[e_i, f_i] = h_i$  e  $[e_i, f_j] = 0$  se  $i \neq j$ ;
- (S4)  $(\text{ad}e_i)^{1-c_{ji}}(e_j) = 0$  e  $(\text{ad}f_i)^{1-c_{ji}}(f_j) = 0$  se  $i \neq j$ .

*Demonstração.* A (S1) é decorrente do fato de  $\mathfrak{h}$  ser uma subálgebra de Lie abeliana. A (S2) segue de  $[h_i, e_j] = \alpha_j(h_i)e_j = \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle e_j = c_{ji}e_j$ . (S3) segue do fato de  $\mathfrak{sl}(\alpha_i)$  ser isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2)$ . A (S4) é aplicação direta da proposição anterior.  $\square$

Um exemplo muito simples para verificar essas relações é dada pela álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(2)$ , considerando a base padrão  $\{e, f, h\}$ . Aqui temos  $\mathfrak{sl}(2) = \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}f$ , onde  $[h, e] = 2e$ ,  $[h, f] = -2f$ ,  $[e, f] = h$ . Com isso, como aplicação direta das proposições acima, enunciaremos o famoso **Teorema de Serre**.

**Teorema A.5.15** (Teorema de Serre). Seja  $\mathcal{C}$  uma matriz de Cartan de um sistema de raízes. Seja  $\mathfrak{g}$  a álgebra de Lie que é gerada pelos elementos  $e_i, f_i, h_i$  para  $1 \leq i \leq l$  sujeito as relações de Serre. Então  $\mathfrak{g}$  é de dimensão finita e semissimples com subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  gerada por  $\{h_1, h_2, \dots, h_l\}$  e seu sistema de raízes tem matriz de Cartan  $\mathcal{C}$ .

## A.6 Álgebras envolventes em Álgebra de Lie

Nesta seção, exploraremos o conceito de álgebras envolventes em Álgebra de Lie, uma área fundamental na teoria dos grupos e álgebras. Vamos definir álgebras envolventes e álgebras envolventes universais e explorar a questão da existência e unicidade dessas álgebras. Esta seção é crucial para o entendimento e desenvolvimento da teoria de Álgebra de Lie feita nos capítulos anteriores, e suas aplicações em diversos contextos sobre módulos de Verma generalizados. Aqui,  $\mathfrak{g}$  é uma álgebra de Lie qualquer. Começamos inicialmente pela definição de álgebra envolvente.

**Definição A.6.1.** Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie. Uma álgebra envolvente de  $\mathfrak{g}$  é um par  $(\phi, U)$ , onde  $U$  é uma álgebra associativa unitária e  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow U^{(-)}$  é um homomorfismo de álgebras de Lie, onde  $U^{(-)}$  denota  $U$  com o colchete  $[a, b] = ab - ba$ .

**Exemplo A.6.2.** Seja  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$  uma representação de  $\mathfrak{g}$  em um espaço vetorial  $V$ . Então o par  $(\text{End}(V), \phi)$  é uma álgebra envolvente de  $\mathfrak{g}$ .

**Definição A.6.3.** A álgebra envolvente universal de  $\mathfrak{g}$  é uma álgebra envolvente  $(\Phi, U(\mathfrak{g}))$  que possui a seguinte propriedade universal: Para qualquer álgebra envolvente  $(\phi, U)$  de  $\mathfrak{g}$ , existe um único homomorfismo de álgebras associativas  $f : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U$  tal que  $\phi = f \circ \Phi$ .

Suponhamos que a álgebra envolvente universal existe, então podemos provar que ela é única. De fato, assumamos que  $(\Phi_1, U_1(\mathfrak{g}))$  e  $(\Phi_2, U_2(\mathfrak{g}))$  são ambas álgebras envolventes universais de  $\mathfrak{g}$ . Então, pela propriedade universal da álgebra envolvente universal, temos aplicações únicas  $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$  de forma que para  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $\Phi_i = f_{ij} \circ \Phi_j$ . Agora  $\Phi_i = \text{id} \circ \Phi_i$ , então pela unicidade,  $f_{ii} = \text{id}$ .  $\Phi_i = f_{ij} \circ f_{ji} \circ \Phi_i$ , então pela unicidade  $f_{ij} \circ f_{ji} = f_{ii} = \text{id}$ .  $f_{12} = f_{21}^{-1}$ , então  $(\Phi_1, U_1(\mathfrak{g}))$  e  $(\Phi_2, U_2(\mathfrak{g}))$  são isomórficas.

No caso anterior, utilizamos o fato da existência de álgebras envolventes universais para mostrar sua unicidade, a pergunta que surge naturalmente é se de fato existe essa álgebra envolvente universal. Com isso, seja  $T(\mathfrak{g})$  a álgebra associativa unitária livre em uma base  $a_1, a_2, \dots$  de  $\mathfrak{g}$  e seja  $J(\mathfrak{g})$  o ideal bilateral de  $T(\mathfrak{g})$  gerado pelos elementos  $a_i a_j - a_j a_i - [a_i, a_j]$ . Então  $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/J(\mathfrak{g})$ .

De fato, definamos  $\Phi : \mathfrak{g} \rightarrow U(\mathfrak{g})^{(-)}$  deixando  $\Phi(a_i)$  como a imagem de  $a_i$  em  $U(\mathfrak{g})$  e estendendo linearmente.

Uma observação que podemos mencionar nesse momento é que:

- $T(\mathfrak{g})$  é chamada de álgebra tensorial sobre o espaço vetorial  $\mathfrak{g}$  e

$$T(\mathfrak{g}) = \mathbb{K} \oplus \mathfrak{g} \oplus (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \oplus (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \oplus \dots$$

com o produto de concatenação.

Podemos afirmar que  $(\Phi, U(\mathfrak{g}))$  é a álgebra envolvente universal, ou seja, a propriedade universal é mantida. De fato, primeiramente, mostraremos que  $(\Phi, U(\mathfrak{g}))$  é uma álgebra envolvente.  $T(\mathfrak{g})$  é uma álgebra associativa unitária, então  $U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/J(\mathfrak{g})$  é uma álgebra associativa unitária. Para verificar que  $\Phi$  é um homomorfismo de álgebras de Lie, por linearidade, basta verificar que para todos  $i, j$ ,  $\Phi([a_i, a_j]) = [\Phi(a_i), \Phi(a_j)]$ . Mas isso é claro, já que  $\Phi([a_i, a_j]) - [\Phi(a_i), \Phi(a_j)] = [a_i, a_j] - a_i a_j - a_j a_i$  está em  $J(\mathfrak{g})$ , então é zero em  $U(\mathfrak{g})$ .

Agora, seja  $(U, \phi)$  outra álgebra envolvente. Definamos a aplicação  $f : T(\mathfrak{g}) \rightarrow U$  tomando

$$f \left( \sum_{k=1}^l a_{ik} \right) = \sum_{k=1}^l \phi(a_{ik})$$

e estendendo linearmente. Isso é claramente um homomorfismo de álgebras associativas unitárias bem definido.

Agora para todos  $i, j$ ,  $f([a_i, a_j] - a_i a_j - a_j a_i) = \phi([a_i, a_j]) - \phi(a_i)\phi(a_j) - \phi(a_j)\phi(a_i) = 0$  porque  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow U^{(-)}$  é um homomorfismo de álgebras de Lie. Assim,  $J(\mathfrak{g}) \subseteq \ker(f)$ , então  $f : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U$  é um homomorfismo de álgebras associativas unitárias bem definido.

Para todos  $i$ ,  $(f \circ \Phi)(a_i) = f(a_i) = \phi(a_i)$ , então por linearidade  $\phi = f \circ \Phi$ .

Assuma que  $f_0 : U(\mathfrak{g}) \rightarrow U$  é outro homomorfismo de álgebras associativas unitárias com  $\phi = f_0 \circ \Phi$ . Então  $f_0(1) = f(1) = 1$  e para todos  $i$ ,  $f(a_i) = \phi(a_i) = (f_0 \circ \Phi)(a_i) = f_0(a_i)$ .  $1, a_1, a_2, \dots$  geram  $U(\mathfrak{g})$  como uma álgebra associativa unitária, então  $f = f_0$ . Assim,  $f$  é único, conforme necessário.

Assim, pudemos ver facilmente que qualquer representação  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V)$  se estende de forma única a um homomorfismo de álgebras associativas  $U(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End}(V)$  (para que  $a_i$  vá para  $\pi(a_i)$ ).

Finalizaremos esta seção com um Teorema de grande importância em nossos estudos:

**Teorema A.6.4** (Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW)). Seja  $a_1, a_2, \dots$  uma base de  $\mathfrak{g}$ . Então os monômios  $(*)$   $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_s}$  com  $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_s$  formam uma base de  $U(\mathfrak{g})$ .

*Demonstração.* Vamos começar mostrando que esses monômios geram  $U(\mathfrak{g})$ . Isso será feito por indução em um par de valores,  $(s, N)$ , onde  $s$  representa o grau do monômio e  $N$  é o número de inversões, ou seja, o número de pares  $(i_m, i_n)$  onde  $m < n$ , mas  $i_m > i_n$ , ordenados lexicograficamente. Se  $N = 0$ , não há nada a provar.

Para  $N \geq 1$ , considere o monômio  $a_{i_t} a_{i_{t+1}}$  onde  $i_t > i_{t+1}$ . Se não fosse assim, o monômio já estaria na lista dos monômios dados  $(*)$ . No entanto, pela relação  $a_{i_t} a_{i_{t+1}} = a_{i_{t+1}} a_{i_t} + [a_{i_t}, a_{i_{t+1}}]$ , em  $U(\mathfrak{g})$ , temos:

$$a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_s} = a_{i_1} \dots a_{i_{t+1}} a_{i_t} \dots a_{i_s} + a_{i_1} \dots a_{i_{t-1}} [a_{i_t}, a_{i_{t+1}}] a_{i_{t+2}} \dots a_{i_s}$$

O primeiro termo é um monômio de grau  $s$  e  $N - 1$  inversões, e o segundo termo é a soma de monômios com grau  $s - 1$ . Assim, pela hipótese de indução, cada um desses monômios é gerado pelos monômios dados  $(*)$ , então  $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_s}$  também é gerado por eles.

Agora, provaremos que esses monômios são linearmente independentes. Consideremos  $B_s$  como o espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$  com base  $b_{i_1} \dots b_{i_s}$  com  $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_s$ . Se tomarmos  $B_0 = F$  e  $B = \bigoplus_{s \geq 0} B_s$ , podemos construir uma aplicação linear  $f : T(\mathfrak{g}) \rightarrow B$  tal que  $J(\mathfrak{g}) \subseteq \ker(f)$  e  $f(a_{i_1} \dots a_{i_s}) = (b_{i_1} \dots b_{i_s})$  se  $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_s$ . Isso induz uma aplicação linear  $f : U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/J(\mathfrak{g}) \rightarrow B$ . Portanto, os monômios  $(*)$  são linearmente independentes porque  $b_{i_1} \dots b_{i_s}$ , com  $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_s$ , são linearmente independentes.

A aplicação  $f$  é definida como:

$$(1) \quad f(1) = 1,$$

$$(2) \quad f(a_{i_1} \dots a_{i_t} a_{i_{t+1}} \dots a_{i_s}) = f(a_{i_1} \dots a_{i_{t+1}} a_{i_t} \dots a_{i_s}) + f(a_{i_1} \dots a_{i_{t-1}} [a_{i_t}, a_{i_{t+1}}] a_{i_{t+2}} \dots a_{i_s})$$

se  $i_t > i_{t+1}$ .

Por indução em  $(s, N)$ , podemos usar a inversão para reduzir  $f(a_{i_1} \dots a_{i_s})$  a uma soma de termos da forma  $f(a_{j_1} \dots a_{j_{s'}})$ , onde  $j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_{s'}$ . Precisamos apenas verificar que a expressão final é independente da sequência de inversões que escolhemos. Isso é feito por indução em  $(s, N)$ .

Agora, vamos avaliar o caso em que as inversões não se sobrepõem. Nesse caso, temos:

$$a_{i_1} \dots a_{i_s} = a_{i_1} \dots a_{i_t} a_{i_{t+1}} \dots a_{i_r} a_{i_{r+1}} \dots a_{i_s}$$

onde  $i_t > i_{t+1}$  e  $i_r > i_{r+1}$ . Ao usar a inversão à esquerda primeiro, obtemos uma expressão que consiste em quatro termos. Aplicando a hipótese de indução, obtemos uma expressão semelhante com quatro termos após a aplicação da inversão à direita em cada termo. Da mesma forma, começando com a inversão à direita, chegamos a uma expressão equivalente. Isso demonstra que o resultado final é independente da ordem das inversões.

Finalmente, consideremos o caso em que as inversões se sobrepõem:

$$a_{i_1} \dots a_{i_s} = a_{i_1} \dots a_{i_t} a_{i_{t+1}} a_{i_{t+2}} \dots a_{i_s}$$

com  $i_t > i_{t+1} > i_{t+2}$ .

□



# Referências Bibliográficas

- [BBFK13] Bekkert, Viktor; Benkart, Georgia; Futorny, Vyacheslav; Kashuba, Iryna. *New irreducible modules for Heisenberg and affine Lie algebras*. J. Algebra. **373** (2013), 284–298.
- [Cox94] Cox, Ben. *Verma modules induced from nonstandard Borel subalgebras*. Pacific J. Math. **165** (1994), 269–294.
- [FK14] Futorny, Vyacheslav; Kashuba, Iryna. *Generalized loop modules for affine Kac-Moody algebras*. Developments and retrospectives in Lie theory. **38** (2014), 175 - 183.
- [FK18] Futorny, Vyacheslav; Kashuba, Iryna. *Structure of parabolically induced modules for affine Kac-Moody algebras*. J. Algebra. **500** (2018), 362-374.
- [Fut92] Futorny, Vyacheslav. *The parabolic subsets of root systems and corresponding representations of affine Lie algebras*. Contemporary Math. **131** (1992), 45-52.
- [Fut94] Futorny, Vyacheslav. *Imaginary Verma modules for affine Lie algebras*. Canad. Math. Bull. **37** (1994), 213-218.
- [Fut97] Futorny, Vyacheslav. *Representations of affine Lie algebras*, Queen's Papers in Pure and Applied Math. **106** (1997), ISBN:0-88911-756-X.
- [FS93] Futorny, Vyacheslav; Saifi, Halip. *Modules of Verma type and new irreducible representations for affine Lie Algebras*. CMS Conference Proceedings. **14** (1993), 185-191.
- [GKMOS22] Guerrini, Marcela; Kashuba, Iryna; Morales, Oscar; de Oliveira, André; Santos, Fernando Junior. *Generalized imaginary Verma and Wakimoto modules*. J. Pure Appl. Algebra. **227** (2023), Paper 107332.
- [JK85] Jakobsen, Hans; Kac, Victor. *A new class of unitarizable highest weight representations of infinite dimensional Lie algebras*. Lecture Notes in Physics. **226** (1985), 1-20.

- [Kac87] Kac, Victor. *Infinite dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press. **3** (1990), ISBN:5-03-002574-X.
- [San99] San Martin, Luiz. *Álgebras de Lie*, Editora da Unicamp. **2** (2010), ISBN: 8526808761.