Aplicações da teoria de Bases de Gröbner para o cálculo da cohomologia de Hochschild.

Ana Melisa Paiba Amaya

Dissertação apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para
obtenção do título
de
Mestre em Ciências

Programa: Matemática
Orientador: Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos

Durante o desenvolvimento deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro da FAPESP

São Paulo, dezembro de 2018

Aplicações da teoria de Bases de Gröbner para o cálculo da cohomologia de Hochschild.

Esta versão da dissertação contém as correções e alterações sugeridas pela Comissão Julgadora durante a defesa da versão original do trabalho, realizada em 24/10/2018. Uma cópia da versão original está disponível no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos (orientador) - IME-USP
- Prof. Dra. Regina Maria de Aquino - UFES
- Prof. Dr. Viktor Bekkert - UFMG

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao meu orientador, o professor Eduardo do Nascimento Marcos pela sua excelente orientação. O trabalho junto com ele é muito motivante . Ele é um ótimo matemático que com seus conhecimentos e compreensão facilitou o desenvolvimento desta dissertação e a minha estadia aqui em São Paulo. Eu me sinto muito grata para com ele e acho que eu não poderia ter um melhor orientador do que ele.

Agradeço aos meus pais Hector Paiba e Martha Amaya por seu amor e esforço colocado em mim e pelo qual eu consegui alcançar as minhas metas até agora. Aos meus irmãos, por ser a minha motivação diária para continuar trabalhando no meu crescimento pessoal e acadêmico. E agradeço a Raúl, meu companheiro e suporte quem esteve comigo em todo momento nos últimos anos.

Agradeço a Alex Sierra pela sua disponibilidade para esclarecer as minhas dúvidas relacionadas à dissertação.

Agradeço à Fundação de apoio à pesquisa do estado de São Paulo (FAPESP) pelo suporte financeiro (Processo FAPESP nº 2016/09809-5). As opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade da autora e não necessariamente refletem a visão da FAPESP.

Resumo

PAIBA, A. M. **Aplicações da teoria de Bases de Gröbner para o cálculo da cohomologia de Hochschild**. 2018. 46 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

A Cohomologia de Hochschild é um invariante associado a álgebras o qual pode nos fornecer propiedades homologicas das álgebras e suas categorias de módulos. Além disso tem aplicações em Geometria Algébrica e Teoria de Representações, entre outras áreas. Para álgebras A sobre um corpo, o $i-$ésimo grupo de cohomologia de Hochschild $HH^i(A,M)$ de A, com coeficientes no bimódulo M, coincide com $Ext^i_{A^e}(A,M)$. Logo, este pode ser calculado usando uma resolução projetiva da álgebra como A-bimódulo. Diferentes autores como Dieter Happel, Claude Cibils, Edward Green, David Anick, Michael Bardzell e Andrea Solotar desenvolveram ferramentas para a construção destas resoluções em casos específicos [Hap89, Cib90, Bar97, AG87]. Um resultado recente e muito importante é apresentado por Andrea Solotar e Sergio Chohuy [CS15], onde se mostra a construção de uma resolução projetiva de bimódulos para álgebras associativas generalizando o resultado para álgebras monomiais feito por Bardzell [Bar97]. Nesta dissertação pretendemos introduzir ao leitor no conceito de Cohomologia de Hochschild mostrando a importância da mesma mediante resultados conhecidos para álgebras de dimensão finita. Além disso, apresentamos os conceitos e resultados do trabalho de Chohuy e Solotar mencionado acima. No decorrer deste trabalho complementamos algumas demonstrações dos resultados enunciados com o fim de propiciar uma ferramenta para o melhor entendimento dos tópicos trabalhados aqui.

Palavras-chave: Cohomologia de Hochschild, álgebras associativas, resolução projetiva, sistemas de redução.

Abstract

PAIBA, A. M. **Aplicações da teoria de Bases de Gröbner para o cálculo da cohomologia de Hochschild**. 2018. 46 f. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2018.

The Hochschild Cohomology is an invariant attached to associative algebras which may provide us some homological aspects of the algebras and its category of modules. Moreover, it has applications to Algebraic Geometry and Representation Theory, among others areas. For algebras A over a field the Hochschild cohomology group $HH^i(A, M)$ of A with coeficients in a bimodule M coincides with $Ext^i_{A^e}(A, M)$. So it can be computed using a projective resolution of the algebra, as a bimodule over itself. Therefore different authors like Dieter Happel, Claude Cibils, Edward Green, David Anick, Michael Bardzell, Sergio Chohuy and Andrea Solotar developed tools for the construction of these resolutions in particular cases [Hap89, Cib90, Bar97, AG87]. A recent and very important result was introduced by Andrea Solotar and Sergio Chohuy [CS15], where they show a construction of a projective bimodule resolution for associative algebras generalizing the result for monomial algebras made by Bardzell [Bar97]. In this dissertation we intend to introduce the reader in the cohomology Hochschild concept, showing its importance through known results for finite dimensional algebras. Besides, we exhibit the concepts and results of Chohuy and Solotar mentioned before. During this text, we complement some demonstrations with the purpose of giving a tool for the a better understanding.

Keywords: Hochschild cohomology, associative algebras, projective resolution, reduction system.

Sumário

Introdução

A Cohomologia de Hochschild é um invariante por equivalências derivadas associados a álgebras associativas que além de fornecer informações importantes de tipos particulares de álgebras tem conexão com outras áreas da matemática como Geometria Algébrica e Teoria de Representações de Álgebras de dimensão finita[Ger64]. O conceito de Cohomologia de Hochschild foi introduzido no ano 1945 por Hochschild, quem ao mesmo tempo faz uso desta cohomologia para mostrar uma condição necessária e suficiente para uma álgebra A ser separável, e além disso proporciona uma interpretação dos primeiros grupos de cohomologia [Hoc45].

Uma outra abordagem dos grupos de cohomologia no caso em que A é uma álgebra sobre um corpo k, está baseada na aplicação do funtor $Hom(-, M)$, com M um A-bimódulo, à *resolução padrão* [CE16] . Isto faz com que as resoluções projetivas de A sobre a sua álgebra envolvente $A^e := A^{op} \otimes_k A$, ou equivalentemente, resoluções projetivas de A como A-bimódulo sejam uma ferramenta útil para o cálculo dos grupos de cohomologia de Hochschild. Para o caso de álgebras associativas de dimensão finita Happel fornece os módulos projetivos de uma resolução projetiva minimal, sem definir os homomorfismos [Hap89]. Em [Cib90] Cibils define uma resolução no caso em que $A/radA$ é uma álgebra separável. Bardzell exibe uma resolução de bimódulos para *álgebras monomiais*, isto é, álgebras da forma $A = kQ/I$ com k um corpo, Q um carcás finito e I um ideal bilateral gerado por relações monomiais [Bar97]. Resultados para casos mais gerais (álgebras não monomiais) foram obtidos por Anick e Green [Ani86][AG87]. Um trabalho recente que generaliza o feito por Bardzell e que faz uso das ideias da Teoria de Bases de Gröbner é o trabalho feito por Chohuy e Solotar, onde é calculada de maneira indutiva uma resolução projetiva para álgebras (não necessariamente de dimensão finita) da forma kQ/I, com Q um carcás com um número finito de vértices e I um ideal bilateral de kQ. Para isto, os projetivos e os homomorfismos da resolução são definidos mediantes *n-ambiguidades* construídas a partir de um sistema de redução $\mathcal{R}$ que satisfaz a condição do Diamante para I [CS15].

Nesta dissertação pretendemos introduzir ao leitor ao conceito de Cohomologia de Hochschild, assim como mostrar alguns resultados conhecidos da teoria comentados acima. Faremos enfase no resultado recente de Chohuy e Solotar [CS15], a qual é uma ferramenta que abre caminho a novos resultados importantes na área.

No Capítulo 1 apresentamos os conceitos e resultados básicos sobre álgebras e álgebras de caminhos a serem usados ao decorrer do trabalho. Para o caso de álgebras de dimensão finita sobre um corpo k algebricamente fechado enunciamos o *Teorema de Gabriel*, o qual joga um papel importante por causa da cohomologia de Hochschild ser invariante por categorias derivadas, em particular, por equivalência Morita.

No Capítulo 2 definimos a Cohomologia de Hochschild junto com a construção desta a partir da resolução estândar. Mostramos a interpretação dos primeiros grupos de cohomologia e apresentamos resoluções projetiva que permitem calcular os grupos de cohomologia de Hochschild para tipos particulares de álgebras como álgebras hereditárias e álgebras de radical quadrado zero.

No Capítulo 3 apresentamos os conceitos relacionados com sistemas de redução associados aos geradores de um ideal. Dado um ideal bilateral I de kQ mostramos que sempre existe um sistema de redução que satisfaz a condição do Diamante para I. Dada uma ordem admissível sobre o conjunto dos caminhos $Q_{\geq 0}$ mostramos um método para construir um sistema de redução que satisfaz a condição do Diamante para I, não tem ambiguidades de inclusão e toda ambiguidade é resolvível. Com um sistema de redução $\mathcal{R}$ como o construído definimos as n-ambiguidades, necessárias para a construção da resolução projetiva desejada. Finalmente construímos de maneira indutiva uma resolução projetiva de bimódulos para álgebras da forma $A = kQ/I$ onde o carcás Q tem um número finito de vértices e I é um ideal bilateral, e são dados explicitamente os primeiros homomorfismos da resolução. Essa resolução é obtida no trabalho de Chouhy e Solotar como uma generalização da resolução de Bardzell. Para o caso monomial as duas coincidem e nesse caso a resolução é minimal. No caso não monomial embora não seja minimal, ela é bem mais computável que a Resolução bar.

Capítulo 1

Álgebras

Uma das propriedades mais importantes da cohomologia de Hochschild é o fato de ela ser invariante por equivalências derivadas, em particular por equivalência de Morita, ou seja, dadas duas k-álgebras A e B tal que as categorias $modA$ e $modB$ são equivalentes, então $H^i(A) \cong H^i(B)$ [Wei95]. Em particular, dado um corpo k algebricamente fechado, e uma k-álgebra A sempre existe uma álgebra básica Morita equivalente a A [AF12], então podemos nos restringir ao cálculo de cohomologias de Hochschild de álgebras básicas. O objetivo deste capitulo é mostrar os conceitos básicos de álgebras e álgebras de caminhos a ser usados ao longo do texto, como também caracterizar as álgebras de dimensão finita básicas indecomponíveis como quocientes de álgebras de caminhos por um ideal admissível.

As demonstrações dos resultados enunciados neste capitulo podem ser encontradas em [ASS06] , [CLS82] ou em qualquer texto de Teoria de Representações de Álgebras.

1.1 Conceitos básicos

Definição 1. *Seja k um corpo. Uma* ***k-álgebra*** *é um anel A com elemento identidade, tal que A tem estrutura de k-espaço vetorial e além disso*

$$\lambda(ab) = (a\lambda)b = a(\lambda b) = (ab)\lambda$$

para todo $\lambda \in k$ e todo $a, b \in A$. Dizemos que A é uma ***álgebra de dimensão finita*** *se A é de dimensão finita como k- espaço vetorial.*

Dadas A e B duas k-álgebras, um homomorfismo de anéis $f : A \to B$ é um **homomorfismo de k-álgebras** se f é uma aplicação k-linear.

Ao longo deste texto k denotará um corpo, a menos de menção em contrário.

Exemplo 1. *(1) O anel de polinômios em n variáveis com coeficientes em k, $k[x_1, \ldots, x_n]$ é uma k-álgebra de dimensão infinita.*

(2) O anel de polinômios em n variáveis não comutativas, $k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ é uma k-álgebra de dimensão infinita tal que

$$k\langle x_1, \ldots, x_n\rangle / I \cong k[x_1, \ldots, x_n]$$

com I o ideal bilateral gerado por $\{x_i x_j - x_j x_i \mid i, j = 1, \ldots, n\}$.

(3) Dada uma k-álgebra A e $n \in \mathbb{N}$, o conjunto das matrizes $n \times n$ com coeficientes em A, notada por $\mathbb{M}_n(A)$ é uma k-álgebra (com a soma e produto usual de matrizes) de dimensão finita.

(4) *Como é feito para toda estrutura algébrica, podemos definir o conceito de subálgebra como um subconjunto de uma álgebra A que mantém a estrutura de álgebra. Por exemplo, o conjunto das matrizes triangulares inferiores,*

$$L_n(K) = \begin{bmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ k & k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k & k & \dots & k \end{bmatrix}$$

é uma k-subálgebra de $\mathbb{M}_n(K)$.

(5) *Seja $(I, \preceq)$ um* ***poset*** *(conjunto parcialmente ordenado), onde $I = \{a_1, \dots, a_n\}$ e $\preceq$ é uma relação binária de ordem parcial sobre I. Seja*

$$KI = \{[\lambda_{ij}] \in \mathbb{M}_n(k) \mid \lambda_{st} = 0 \quad se \quad a_s \not\preceq a_t\}$$

isto é, o conjunto formado pelas matrizes $[\lambda_{ij}]$ tal que $\lambda_{ij} = 0$ se a relação $a_i \preceq a_j$ não se satisfaz em I.

KI é uma k-subálgebra de $\mathbb{M}_n(k)$ chamada ***álgebra de incidência*** *do poset $(I, \preceq)$ com coeficientes em k. As matrizes $\{e_{ij}\}$ com $a_i \preceq a_j$ formam uma base do k-espaço vetorial KI.*

(6) *Para toda k-álgebra A definimos a sua* ***álgebra oposta*** *A^{op} como a k-álgebra cuja estrutura de espaço vetorial subjacente é a mesma de A, mas com o produto $*$ em A^{op} definido por $a * b = ba$.*

Notação: vamos notar por $Mod\,A$ a categoria dos A-módulos à direita, e vamos notar por $mod\,A$ a subcategoria plena de $Mod\,A$ formada pelos módulos finitamente gerados. Se A é uma álgebra de dimensão finita, $mod\,A$ coincide com a subcategoria plena de $Mod\,A$ formada pelos módulos de k-dimensão finita.

Definição 2. *Um A-módulo não nulo M é dito* ***indecomponível*** *se M não pode ser expresso como uma soma direta de submódulos não triviais.*

A fim de estudar os módulos em $modA$ os módulos indecomponíveis desempenham um papel importante já que basta conhecer os módulos indecomponíveis para construir qualquer módulo sobre A.

Teorema 1 (Krull-Schmidt)**.** *Seja A uma k-álgebra de dimensão finita. Todo módulo M em $modA$ tem uma única decomposição em soma direta de um número finito de módulos indecomponíveis em $modA$. Isto é,*

$$M \cong M_1 \oplus M_2 \oplus \cdots \oplus M_n$$

onde cada M_i é indecomponível, e se existe outra decomposição $M \cong N_1 \oplus N_2 \oplus \cdots \oplus N_m$ com cada N_i indecomponível, então $m = n$ e existe uma permutação $\sigma \in S_n$ tal que $M_i \cong N_{\sigma(i)}$ para todo i.

Podemos ver a álgebra A como um objeto de $modA$, então pelo anterior A tem uma decomposição única em indecomponíveis de $modA$

$$A \cong P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_n$$

Cada um dos P_i's que aparece na decomposição de A é um A-módulo projetivo indecomponível pois cada um deles é somando direto de um A-módulo livre (neste caso A). Usando o fato de todo projetivo ser somando direto de um A-módulo isomorfo a uma soma de copias do A-módulo A, e o Teorema de Krull-Schmidt podemos concluir que todo projetivo indecomponível é isomorfo a algum dos P_i's que aparecem na decomposição do A.

Definição 3. *Seja A uma k-álgebra e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um subconjunto de A. Dizemos que $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um* ***sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos*** *se*

(1) $\sum_{i=1}^{n} e_i = 1$ *(sistema completo),*

(2) $e_i^2 = e_i$ *para todo* $1 \leq i \leq n$ *(elementos idempotentes),*

(3) $e_i e_j = 0$ *se* $i \neq j$ *(elementos ortogonais),*

(4) Se $e_i = f + g$ *com* f *e* g *idempotentes ortogonais, então* $f = 0$ *ou* $g = 0$*.(elementos primitivos)*

Dada uma k-álgebra A e a sua decomposição em módulos indecomponíveis

$$A \cong P_1 \oplus P_2 \oplus \cdots \oplus P_n$$

podemos decompor o elemento identidade de A como $1 = e_1 + \cdots + e_n$. O conjunto $\{e_1, \dots, e_n\}$ resulta ser um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de A. Reciprocamente, um subconjunto de A satisfazendo as condições da Definição 3 fornece uma decomposição em indecomponíveis de A.

Proposição 1. *Seja A uma k-álgebra e $\{e_1, \dots, e_n\}$ um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de A, com $e_i \neq 0$ para todo i. Então*

$$A = e_1 A \oplus e_2 A \oplus \cdots \oplus e_n A \tag{1.1}$$

é uma decomposição de A em módulos indecomponíveis.

Portanto, uma lista completa de classes de isomorfia de projetivos indecomponíveis em $modA$ está dada por $e_1 A, e_2 A, \dots, e_n A$.

Em seguida vamos dar a definição de álgebra básica e álgebra indecomponível junto com os resultados que garantem que podemos nos restringir ao estudo deste tipo de álgebras sem perder generalidade.

Definição 4. *Uma k-álgebra A de dimensão finita é dita* ***básica*** *se, na decomposição dada em (1.1), $e_i A \cong e_j A$ se e somente se $i = j$.*

Teorema 2. *Dada A uma k-álgebra de dimensão finita, existe uma única (a menos de isomorfismo) k-álgebra A' de dimensão finita básica tal que $modA$ e $modA'$ são categorias equivalentes.*

No caso em que dados dois anéis A e B as categorias $modA$ e $modB$ são equivalentes, dizemos que A e B são **Morita equivalentes**. Logo, pelo teorema anterior, dada uma k-álgebra de dimensão finita, existe uma k-álgebra de dimensão finita básica Morita equivalente a ela.

Definição 5. *Uma k-álgebra e chamada* ***indecomponível*** *se não pode ser expressa como soma direta de duas k-álgebras, ou equivalentemente, se seus únicos idempotentes centrais são 0 e 1, ou seja, se existe $e \in A$ tal que $e^2 = e$ e $ex = xe$ para todo $x \in A$, então $e = 1$ ou $e = 0$.*

Proposição 2. *Toda k-álgebra de dimensão finita é isomorfa a uma soma direta de um número finito de k-álgebras indecomponíveis de dimensão finita.*

Proposição 3. *Se $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$, então $modA \cong \prod_{i=1}^{n} modA_i$.*

Definição 6. *O* ***radical*** *ou* ***radical de Jacobson*** *de uma k-álgebra A é a interseção de todos os ideais à direita maximais de A. Este ideal é um ideal bilateral e denotamos este ideal por $radA$.*

Nota: Equivalentemente, podemos definir $radA$ como a interseção de todos os ideais à esquerda maximais de A.

Proposição 4. *Seja A uma k-álgebra. Então $A/radA$ é uma k-álgebra de radical zero.*

Proposição 5. *Seja A uma k-álgebra. Se I é um ideal bilateral nilpotente de A, ou seja, $I^m = 0$ para algum $m \geq 1$, então $I \subseteq radA$. Se além disso, A/I é isomorfo a um produto de copias de k, então $I = radA$.*

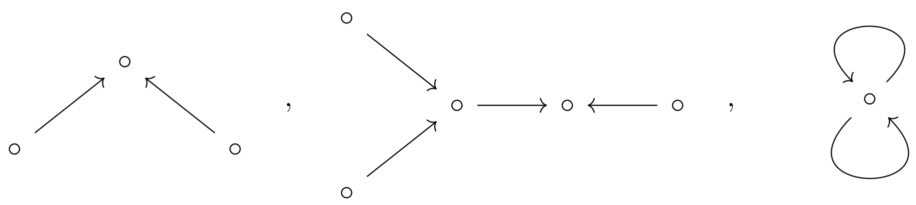
1.2 Álgebras de caminhos

Definição 7. *Um **carcás** $Q = (Q_0, Q_1, o, t)$ é uma quádrupla formada por um conjunto de **vértices** Q_0, um conjunto de **flechas** Q_1, e duas aplicações $o, t : Q_1 \to Q_0$ que associam a cada flecha $\alpha \in Q_1$ seu **origem** $o(\alpha) \in Q_0$ e seu **término** $t(\alpha) \in Q_0$ respectivamente.*

*Um carcás Q é **finito** se Q_0 e Q_1 são conjuntos finitos e é **conexo** se o grafo subjacente é conexo.*

Notamos por $\alpha : v \to v'$ a flecha $\alpha \in Q_1$ com origem $v = o(\alpha)$ e término $v' = t(\alpha)$. O carcás $Q = (Q_0, Q_1, o, t)$ é usualmente notado por $Q = (Q_0, Q_1)$ ou simplesmente Q.

Exemplo 2. *Os seguintes são exemplos de carcases*



Definição 8. *Seja Q um carcás e $v, v' \in Q_0$. Um **caminho** sobre Q de comprimento $l \geq 1$ com origem v e término v' é uma sequência*

$$\gamma = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_l$$

tal que $\alpha_i \in Q_1$ para todo $1 \leq i \leq l$ e $o(\alpha_1) = v, o(\alpha_2) = t(\alpha_1), \ldots, o(\alpha_l) = t(\alpha_{l-1}), t(\alpha_l) = v'$.

Notamos por Q_l o conjunto dos caminhos em Q de comprimento l. Adicionalmente, associamos a cada vértice $v_i \in Q_0$ um caminho de comprimento $l = 0$, denominado o **caminho trivial** em v_i, e notado por τ_i.

Definição 9. *Um caminho de comprimento $l \geq 1$ é chamado um **ciclo** se seu origem e término coincidem. Se o comprimento de um ciclo é 1, então dizemos que ele é um **laço**.*

Definição 10. *Se existe em Q um caminho de v a v', então v é dito um **antecessor** de v', e v' é dito um **sucessor** de v.*

Dado um carcás Q e um corpo k é possível construir uma k-álgebra definindo o produto de caminhos como segue.

Definição 11. *Seja Q um carcás. A **álgebra de caminhos** kQ é a k-álgebra cujo k-espaço vetorial subjacente tem como base o conjunto de todos os caminhos de comprimento $l \geq 0$ em Q . O produto de dois caminhos da base $\gamma_1 = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s$ e $\gamma_2 = \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_t$ está dado por:*

$$\gamma_1 \gamma_2 = \begin{cases} \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_s \beta_1 \beta_2 \cdots \beta_t & \text{se } t(\alpha_s) = o(\beta_1) \\ 0 & \text{se } t(\alpha_s) \neq o(\beta_1) \end{cases}$$

Já definido o produto sobre os elementos da base podemos estender o produto a todos os elementos de kQ por linearidade.

Definição 12. *Seja Q um carcás e γ_1, γ_2 caminhos sobre Q. Dizemos que γ_2 **divide** a γ_1 se existem caminhos a e b de comprimento maior ou igual a zero tais que $\gamma_1 = a\gamma_2 b$.*

Definição 13. *Dado um carcás Q e γ_1, γ_2 caminhos sobre Q dizemos que γ_1 e γ_2 são **caminhos paralelos** se $o(\gamma_1) = o(\gamma_2)$ e $t(\gamma_1) = t(\gamma_2)$.*

Agora vamos apresentar alguns resultados importantes sobre as álgebras de caminhos

Lema 1. *Seja Q um carcás e kQ sua álgebra de caminhos. Então*

(1) kQ é uma álgebra associativa,

(2) kQ tem um elemento identidade se e somente se Q_0 é finito,

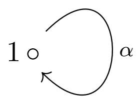
(3) kQ tem dimensão finita se e somente se Q é finito e não tem ciclos.

Se Q é um carcás finito e conexo, a álgebra de caminhos kQ é uma k-álgebra associativa indecomponível com identidade, e com $\{\tau_i \mid v_i \in Q_0\}$ sendo um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos.

Daqui em diante, dado um carcás finito e conexo denotaremos por F o ideal bilateral de kQ gerado pelas flechas de Q. Note que F coincide com o k-espaço vetorial de kQ que tem por base os caminhos de comprimento $l \geq 1$.

Proposição 6. *Seja Q um carcás finito e conexo e seja kQ a sua álgebra de caminhos. Se Q não tem ciclos, o radical de kQ coincide com F.*

Se Q tem algum ciclo o anterior pode não valer. Por exemplo, seja Q o seguinte carcás :



Uma base de kQ está dada por $\{\tau_1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^t, \ldots\}$ e o produto de dois elementos da base vai estar definido por $\tau_1\alpha^t = \alpha^t\tau_1 = \alpha^t$ para todo $t \geq 1$, e $\alpha^t\alpha^s = \alpha^{t+s}$ para quaisquer $t, s \geq 1$. Portanto, kQ é isomorfa a álgebra de polinômios $K[x]$ e $rad(kQ) = 0$.

Definição 14. *Seja Q um carcás finito e F o ideal bilateral de kQ gerado pelas flechas. Um ideal bilateral I de kQ é dito* ***admissível*** *se $F^m \subseteq I \subseteq F^2$ para algum $m \geq 2$.*

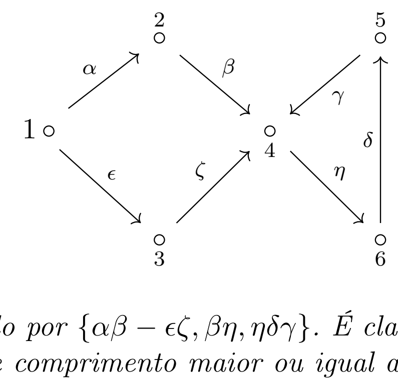
Se I é um ideal admissível de kQ, o par (Q, I) é chamado um carcás ***limitado****.*

Exemplo 3. *(1) Se Q não tem ciclos, então todo ideal contido em F^2 é um ideal admissível.*

(2) Dado um carcás Q e $m \geq 2$, F^m é admissível.

(3) O ideal zero é admissível em kQ se e somente se Q não tem ciclos.

(4) Seja Q o seguinte carcás



e seja I o ideal bilateral gerado por $\{\alpha\beta - \epsilon\zeta, \beta\eta, \eta\delta\gamma\}$. É claro que $I \subset F^2$. Por outro lado, $\eta\delta\gamma$ divide todo caminho Υ de comprimento maior ou igual a 5 com origem $1, 3, 4, 5$ ou 6, e em consequência $\Upsilon \in I$, e $\beta\eta$ divide todo caminho de comprimento maior o igual a 2 com origem em 2, então estes caminhos também pertencem a I. Pelo anterior, $F^5 \subset I$ e I resulta ser um ideal admissível.

Proposição 7. *Seja Q um carcás finito e I um ideal admissível de kQ. Então*

(1) O conjunto $\{\overline{\tau_i} = \tau_i + I \mid v_i \in Q_0\}$ é um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos da álgebra kQ/I.

(2) kQ/I é indecomponível se e somente se Q é conexo.

(3) kQ/I é uma álgebra de dimensão finita.

(4) $rad(kQ/I) = F/I$.

(5) kQ/I é uma álgebra básica.

É conveniente expressar um ideal admissível em termo dos seus geradores.

Definição 15. *Seja Q um carcás. Uma **relação** em Q com coeficientes em k é uma combinação k-linear de caminhos de comprimento maior ou igual a 2, tais que seus origens coincidem e seus términos coincidem. Ou seja, uma relação ρ é um elemento de kQ tal que*

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma_i,$$

onde $0 \neq \lambda_i \in k$ para todo $1 \leq i \leq n$, os γ_i são caminhos distintos em Q de comprimento maior ou igual a 2, e $o(\gamma_i) = o(\gamma_j)$, $t(\gamma_i) = t(\gamma_j)$ para todo $1 \leq i, j \leq n$.

Se $n = 1$, a relação é dita uma **relação zero** ou **relação monomial**. Se ρ é uma diferença de caminhos, então ρ é dita uma **relação de comutatividade**.

Se $\{\rho_j\}_{j \in J}$ é um conjunto de relações de um carcás Q tal que o ideal bilateral gerado por eles $\langle \rho_j \mid j \in J \rangle$ é admissível, dizemos que o carcás Q é **limitado pelas relações** $\rho_j = 0$ para todo $j \in J$.

Exemplo 4. *No Exemplo 3 (4), as relações $\beta\eta$ e $\eta\delta\gamma$ são relações zero, e $\alpha\beta - \epsilon\zeta$ é uma relação de comutatividade. Dizemos que Q está limitado pelas relações $\beta\eta = 0, \eta\delta\gamma = 0$ e $\alpha\beta = \epsilon\zeta$.*

Lema 2. *Seja Q um carcás finito. Todo ideal admissível I é finitamente gerado. Aliás, existe um conjunto finito de relações $\{\rho_1, \ldots, \rho_m\}$ tal que $I = \langle \rho_1, \ldots, \rho_m \rangle$.*

1.3 Teorema de Gabriel

Daqui em diante vamos assumir o corpo k algebricamente fechado. Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k. Pelo enunciado anteriormente podemos assumir A básica e indecomponível. Vamos ver que neste caso A é isomorfa a um quociente de uma álgebra de caminhos kQ/I, com Q um carcás conexo finito e I um ideal admissível de kQ, o que é conhecido como o *Teorema de Gabriel.*

Definição 16. *Seja A uma k-álgebra básica e indecomponível de dimensão finita e seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonais de A. O **carcás** Q_A associado a A é definido por:*

- *Os vértices de Q_A são $1, 2, \ldots, n$ em correspondência bijetiva com os idempotentes $e_1, e_2, \ldots, e_n$.*
- *Dados dois vértices i, j em Q_A, o número de flechas de i até j está dado pela dimensão do k-espaço vetorial*

$$e_i(rad\, A/rad^2\, A)e_j$$

Nota 1. • *Como A é de dimensão finita o carcás obtido Q_A é finito.*

- *Q_A não depende da escolha do conjunto de idempotentes primitivos ortogonais em A.*
- *Q_A é conexo.*

Exemplo 5. *(1) Seja $A = k[x]/\langle x^n \rangle$, com $n \geq 1$, então Q_A tem um único vértice pois o único idempotente não nulo de A é 1. Como $\langle \overline{x} \rangle^n = 0$ e $A/\langle \overline{x} \rangle \cong k$ temos que $rad(A) = \langle \overline{x} \rangle$, onde $\overline{x} = x + \langle x^n \rangle$ (Proposição 5). Logo, $rad^2(A) = \langle \overline{x}^2 \rangle$ e $dim_k(rad(A)/rad^2(A)) = 1$: uma base de $rad(A)/rad^2(A)$ está dada pela classe de $\overline{x}$ no quociente. Pelo anterior o carcás associado a A é :*

$$\begin{tikzcd} \underset{1}{\circ} \arrow[loop above] \end{tikzcd}$$

(2) Seja

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ k & k & 0 \\ k & 0 & k \end{bmatrix}$$

a álgebra de matrizes triangulares inferiores $[\lambda_{ij}] \in M_3(k)$, com $\lambda_{32} = 0$ e $\lambda_{ij} = 0$ para $i < j$. Um sistema completo de idempotentes primitivos ortogonais está dado por

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

É possível ver que

$$radA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

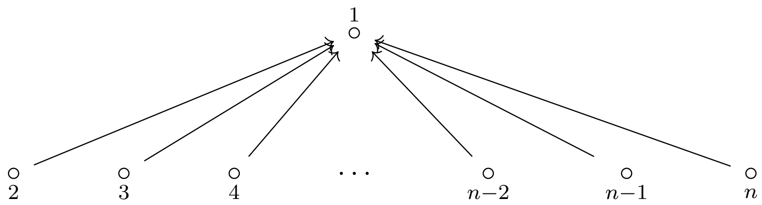
$rad^2 A = 0$, e $e_2(rad\,A)e_1$ e $e_3(rad\,A)e_1$ têm dimensão 1. As dimensões dos outros espaços tem que ser 0 pois $dim_k(rad\,A) = 2$. Portanto Q_A é o carcás

$$\begin{tikzcd} & \overset{1}{\circ} & \\ \underset{2}{\circ} \arrow[ur] & & \underset{3}{\circ} \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Podemos generalizar este exemplo tomando A como a álgebra de matrizes triangulares $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ k & k & 0 & \dots & 0 \\ k & 0 & k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ k & 0 & 0 & \dots & k \end{bmatrix},$$

com carcás associado



(3) Se $A = kQ/I$ é o quociente de uma álgebra de caminhos por um ideal admissível, então Q_A coincide com Q. Sabemos que o conjunto dos vértices $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ formam um conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonais de A. E não é difícil verificar que $v_i(rad\, A/rad^2 A)v_j$ tem dimensão o número de flechas em Q de v_i até v_j.

Agora vamos construir um homomorfismo sobrejetor $\phi : kQ_A \to A$ tal que $Ker\phi$ é um ideal admissível e $A \cong kQ_A/Ker\phi$.

Para toda flecha $\alpha : i \to j \in (Q_A)_1$, escolha $x_\alpha \in rad(A)$ tal que $\{x_\alpha + rad^2(A) \mid \alpha : i \to j\}$ é uma base de $e_i(rad\, A/rad^2\, A)e_j$.

Definimos ϕ sobre a base de kQ_A como segue:

- $\phi(\tau_i) := e_i$ para todo caminho trivial τ_i,
- $\phi(\alpha) := x_\alpha$ para toda $\alpha \in (Q_A)_1$,
- $\phi(\alpha_1 \cdots \alpha_n) := x_{\alpha_1} \cdots x_{\alpha_n}$ para todo caminho de comprimento $n > 1$.

Pela propriedade universal de álgebras de caminhos, que não demonstraremos aqui, existe um único homomorfismo de k-álgebras estendendo ϕ. É possível mostrar que ϕ é um homomorfismo de k-álgebras sobrejetor cujo núcleo é um ideal admissível de kQ_A. Note que o ideal admissível $I = ker\phi$ depende da escolha dos x_α, assim podemos ter representações diferentes de A tal que $kQ_A/I \cong kQ_A/I'$.

Usando o Teorema Fundamental do Homomorfismo obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3. *Seja k um corpo algebricamente fechado e A uma k-álgebra de dimensão finita básica e indecomponível. Existe um ideal admissível I de kQ_A tal que $A \cong kQ_A/I$.*

O Teorema anterior implica que é equivalente estudar álgebras indecomponíveis básicas de dimensão finita ao estudar quocientes de álgebras de caminhos por ideais admissíveis. O Teorema 3 aparece generalizado no livro [ARS97].

Exemplo 6. *(1) Seja $A = k[x]/\langle x^n \rangle$ com $n \geq 1$, como no Exemplo 5. Definimos o homomorfismo $\phi : kQ_A \to A$ por $\phi(\tau_1) = 1$ e $\phi(\alpha) = \overline{x}$. Definido ϕ deste jeito, é sobrejetor e com núcleo $\langle \alpha^n \rangle$.*

(2) Seja A a subálgebra de matrizes 3×3 do Exemplo 5 (2) e $\phi : kQ_A \to A$ definida por:

$$\phi(\tau_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \phi(\tau_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \phi(\tau_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\phi(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \phi(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ϕ é um isomorfismo, logo $A \cong kQ_A$.

Capítulo 2

Cohomologia de Hochschild

Seja k um anel comutativo com unidade e A uma k-álgebra associativa com identidade. Neste capítulo apresentamos a definição do i-ésimo grupo de cohomologia de Hochschild $HH^i(A,M)$ de A com coeficientes no A-bimódulo M. Apresentamos também uma resolução de A sobre a sua álgebra envolvente $A^e := A^{op} \otimes A$, o que é equivalente a uma resolução de A como A-bimódulo. Aplicando o funtor $Hom_{A^e}(.,M)$ a esta resolução obtemos um complexo cujas entradas e homomorfismos coincidem com os inicias para definir o i-ésimo grupo de cohomologia de Hochschild. No caso em que k é um corpo esta resolução de bimódulos resulta ser uma resolução projetiva, permitindo assim definir $HH^i(A,M) := Ext^i_{A^e}(A,M)$. Na segunda seção do capítulo apresentamos a interpretação dos primeiros grupos de cohomologia e algumas consequências desses primeiros grupos se anularem em casos particulares de álgebras. Na terceira seção definimos duas resoluções de bimódulos que servem para calcular os grupos de cohomologia de álgebras hereditárias e álgebras de radical quadrado zero no caso de dimensão finita.

2.1 Definição de cohomologia de Hochschild

No Capítulo 1 definimos o conceito de álgebra sobre um corpo k, esse conceito continua válido se consideramos k um anel comutativo e A um anel que tem estrutura de k-módulo que satisfaz a condição adicional descrita na Definição 1. Vamos definir o i-ésimo grupo de cohomologia de Hochschild considerando álgebras sobre anéis comutativos e posteriormente vamos comprovar a necessidade de k ser um corpo para calcular os grupos de cohomologia mediante resoluções projetivas.

No que resta desta dissertação notaremos o produto tensorial de A n vezes sobre k por $A^{\otimes n} := A \otimes_k \cdots \otimes_k A$.

Definição 17. *Seja k um anel comutativo com unidade e seja A uma k-álgebra associativa com identidade. Dado um A-bimódulo M definimos o **Complexo de Hochschild** como segue:*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{d^0} Hom_k(A,M) \xrightarrow{d^1} Hom_k(A^{\otimes 2},M) \longrightarrow \cdots$$
$$\cdots \longrightarrow Hom_k(A^{\otimes n},M) \xrightarrow{d^n} Hom_k(A^{\otimes (n+1)},M) \longrightarrow \ldots$$

onde $(d^0m)(a) = am - ma$ para todo $m \in M, a \in A$ e d^n, com $n \geq 1$, está definido por

$$\begin{aligned}(d^n f)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_0 f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \\ + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} f(a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) \\ + (-1)^{n+1} f(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) a_n,\end{aligned}$$

para $f \in Hom_k(A^{\otimes n},M)$ e $a_0, \ldots, a_n \in A$.

Por exemplo, dado $f \in Hom_k(A, M)$, $g \in Hom_k(A^{\otimes 2}, M)$ e $a, b, c \in A$ temos que

$$\begin{aligned}(d^1 f)(a \otimes b) &= af(b) - f(ab) + f(a)b \\ (d^2 g)(a \otimes b \otimes c) &= ag(b \otimes c) - g(ab \otimes c) + g(a \otimes bc) - g(a \otimes b)c\end{aligned}$$

A demonstração direta de que a sequência dada na definição anterior é de fato um complexo é apresentada em [Hoc45]. Logo, podemos definir o **i-ésimo grupo de cohomologia** de A com coeficientes no bimódulo M, dado por $HH^i(A, M) = ker(d^i)/Im(d^{i-1})$ para $i \geq 1$. No caso $i = 0$ temos $HH^0(A, M) = Ker(d^0)$.

Um caso particular de interesse é quando tomamos $M = A$. Neste caso notamos $HH^i(A, A)$ simplesmente por $HH^i(A)$.

A cohomologia de Hochschild fornece informações de uma álgebra dada, como por exemplo se ela é separável. Mais adiante definiremos o que significa que uma álgebra seja separável. Logo mostraremos uma condição suficiente de separabilidade envolvendo o primeiro grupo de cohomologia e para isto faremos uso do seguinte Teorema.

Teorema 4. *[Hoc45] Se $n \geq 2$, $HH^n(A, M) \cong HH^{n-1}(A, Hom_k(A, M))$.*

A seguir apresentamos a definição de álgebra envolvente, a qual nos fornece outra maneira de calcular os grupos de cohomologia de Hochschild no caso em que a álgebra A é um módulo projetivo sobre k. O que acontece sempre quando k é um corpo, que é o que assumimos em toda esta dissertação.

Definição 18. *Sejam k um anel comutativo com unidade, A uma k-álgebra associativa com identidade e considere o k-módulo $A^e := A^{op} \otimes_k A$ junto com o produto*

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_2 a_1 \otimes b_1 b_2),$$

*para todo $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$. Chamamos A^e de **álgebra envolvente** de A.*

Dado um A-bimódulo M, podemos definir uma estrutura sobre M de A^e-módulo à esquerda (resp. à direita) mediante o produto $(a \otimes b) \cdot m = amb$ (resp. $m \cdot (a \otimes b) = bma$). Esta estrutura define um isomorfismo entre a categoria de A-bimódulos e a categoria de A^e-módulos à esquerda (resp. A^e-módulos à direita).

O produto tensorial $A^{\otimes n}$ é um A^e-módulo à esquerda (equiv. A-bimódulo) com o produto dado por

$$(a \otimes b) \cdot (a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_n) = aa_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n b,$$

para todo $a, b, a_1, \ldots, a_n \in A$. Em particular, A é um A^e-módulo a esquerda (equiv. A-bimódulo) com o produto dado por $(a \otimes b) \cdot c = acb$ para todo $a, b, c \in A$.

Lema 3. *Considere a seguinte sequência de A-bimódulos*

$$\cdots \xrightarrow{f_3} A^{\otimes 4} \xrightarrow{f_2} A^{\otimes 3} \xrightarrow{f_1} A \otimes A \xrightarrow{f_0} A \longrightarrow 0, \tag{2.1}$$

com $f_n : A^{\otimes(n+2)} \to A^{\otimes(n+1)}$ dada por

$$f_n(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+1},$$

para todo $n \geq 0$ e $a_0, \ldots, a_{n+1} \in A$.

A sequência anterior é uma resolução de A sobre A^e e a chamamos de ***resolução de Hochschild****.*

Demonstração. Seja $s_n : A^{\otimes n} \to A^{\otimes(n+1)}$ dada por $s_n(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) = 1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}$, para todo $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$. A aplicação s_1 satisfaz $f_0 s_1 = id_A$, o que implica que f_0 é um epimorfismo. Além disso, pode-se mostrar por indução que $f_n s_{n+1} + s_n f_{n-1} = id_{A^{\otimes(n+1)}}$ para todo $n \geq 1$, portanto $ker(f_{n-1}) \subseteq Im(f_n)$ para todo $n \geq 1$.

Vamos mostrar por indução que $f_n f_{n+1} = 0$ para todo $n \geq 0$. Para o caso $n = 0$ usamos o fato da álgebra ser associativa. Sejam $a, b, c \in A$, então

$$f_0 f_1(a \otimes b \otimes c) = f_0(ab \otimes c - a \otimes bc) = (ab)c - a(bc) = 0.$$

Agora, vamos supor que $f_{n-1} f_n = 0$, logo

$$f_n f_{n+1} s_{n+2} = f_n(id_{A^{\otimes(n+2)}} - s_{n+1} f_n) = (id_{A^{\otimes(n+2)}} - f_n s_{n+1}) f_n = s_n f_{n-1} f_n = 0$$

Como $Im(s_{n+2})$ gera $A^{\otimes(n+3)}$ como A-módulo e f_n é um homomorfismo de A-módulos para todo $n \geq 0$, então $f_n f_{n+1} = 0$.

$\square$

Definimos o **complexo bar** como sendo o complexo truncado obtido de (2.1)

$$\cdots \xrightarrow{f_3} A^{\otimes 4} \xrightarrow{f_2} A^{\otimes 3} \xrightarrow{f_1} A \otimes A \longrightarrow 0. \tag{2.2}$$

Seja M um A-bimódulo. Aplicando o funtor $Hom(.,M)$ a (2.2) e usando o isomorfismo de k-módulos

$$Hom_{A^e}(A^{\otimes(n+2)}, M) \cong Hom_k(A^{\otimes n}, M),$$

dado por $\psi(f) = \tilde{f}$, com $\tilde{f}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) = f(1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes 1)$, para todo $f \in Hom_{A^e}(A^{\otimes(n+2)}, M)$ e todo $a_0, \ldots, a_{n-1} \in A$, (o isomorfismo inverso está dado por $\varphi(f) = f'$, com $f'(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) = a_0 f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) a_{n+1}$) obtemos o seguinte isomorfismo de complexos

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & Hom_{A^e}(A^{\otimes(n+2)}, M) \arrow[r, "f^*_{n+1}"] \arrow[d, "\cong"'] & Hom_{A^e}(A^{\otimes(n+3)}, M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Hom_k(A^{\otimes n}, M) \arrow[r, "\delta^n"] & Hom_k(A^{\otimes(n+1)}, M) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

onde $f^*_{n+1}(g) = g f_{n+1}$ para todo $g \in Hom_{A^e}(A^{\otimes(n+2)}, M)$. Os homomorfismos δ^n se definem de modo que os quadrados comutem, logo

$$\begin{aligned}
(\delta^n f)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) &= (\psi f^*_{n+1} \varphi)(f)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) \\
&= \psi(\varphi(f) f_{n+1})(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) \\
&= \varphi(f) f_{n+1}(1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1)
\end{aligned}$$

Usando a definição de f_{n+1} obtemos

$$
\begin{aligned}
(\delta^n f)(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) &= \varphi(f)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1+ \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} 1 \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1+ \\
&\qquad + (-1)^{n+1} 1 \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n) \\
&= a_0 f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \\
&\qquad + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} f(a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) \\
&\qquad + (-1)^{n+1} f(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) a_n
\end{aligned}
$$

Note que o homomorfismo δ^n coincide com o homomorfismo d^n dado na definição de complexo de Hochschild.

No caso em que A é projetivo sobre k (em particular, se k é um corpo) o complexo (2.2) é uma resolução de A^e-módulos livres à esquerda, chamada de **resolução bar** [Red01]. Então concluímos que a cohomologia de Hochschild de A com coeficientes no bimódulo M é

$$HH^n(A, M) = Ext^n_{A^e}(A, M).$$

Pelo anterior, o i-ésimo grupo de cohomologia de Hochschild não depende da resolução projetiva de A sobre A^e. Para algumas álgebras especificas existem resoluções projetivas diferentes da resolução bar que facilitam os cálculos.

Nota 2. *Aplicando o funtor $M \otimes_{A^e} \cdot$ à resolução (2.1) obtemos o conceito dual de homologia de Hochschild definido por*

$$HH_i(A, M) = Tor_i^{A^e}(M, A).$$

Temos dois isomorfismos importantes que relacionam a cohomologia e a homologia de Hochschild [CE16] :

$$
\begin{aligned}
HH^n(A, Hom_k(M, k)) &\simeq Hom_k(HH_n(A, M), k) \\
HH_n(A, Hom_k(M, k)) &\simeq Hom_k(HH^n(A, M), k)
\end{aligned}
$$

Definição 19. *Sejam $f \in Hom_k(A^{\otimes m}, A)$ e $g \in Hom_k(A^{\otimes n}, A)$, definimos o **produto cup** $f \smile g \in Hom_k(A^{\otimes (m+n)}, A)$ por*

$$(f \smile g)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{m+n}) = f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_m) g(a_{m+1} \otimes \cdots \otimes a_{m+n})$$

para todo $a_1, \ldots, a_{m+n} \in A$.

Esse produto definido no complexo satisfaz a regra de Leibnitz e por isso induz um produto associativo na soma direta das cohomologias

$$HH^*(A) = \bigoplus_{i \geq 0} HH^i(A).$$

Chamamos esta álgebra associativa de **álgebra de cohomologia** de A [Ger63].

Nota 3. *A cohomologia de Hochschild é invariante por equivalências derivadas, em particular por equivalência de Morita. Isto é, dadas duas k-álgebras A e B tais que $D^b(A)$ é triangularmente equivalente a $D^b(B)$, então $HH^i(A) \cong HH^i(B)$, para todo $i \geq 0$. [Wei95]*

A seguir, apresentamos um exemplo que mostra que existem resoluções mais simples que a resolução bar com o fim de calcular a cohomologia de Hochschild. Este exemplo é um caso particular do feito em [Gro91].

Exemplo 7. *Seja $A = k[x]/\langle x^n \rangle$, onde k é um anel comutativo com unidade e $n \geq 2$. Vamos calcular a cohomologia de Hochschild de A com coeficientes no bimódulo A. Como A é livre sobre k, então A é k-projetivo e podemos considerar qualquer resolução projetiva de A sobre A^e. Consideremos o complexo*

$$\cdots \longrightarrow A^e \xrightarrow{d_n} A^e \longrightarrow \cdots \longrightarrow A^e \xrightarrow{d_1} A^e \xrightarrow{\mu} A \longrightarrow 0, \tag{2.3}$$

onde

$$\begin{aligned} d_{2i}(a \otimes b) &= (a \otimes b) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} x^j \otimes x^{n-1-j}, \\ d_{2i-1}(a \otimes b) &= (a \otimes b) \cdot (1 \otimes x - x \otimes 1), \\ \mu(a \otimes b) &= a \cdot b, \end{aligned}$$

para todo $a, b \in A$ e todo $i \geq 1$.

Um cálculo direto mostra que $Im(d_1) \subseteq Ker(\mu)$, e $Im(d_{2i}) \subseteq Ker(d_{2i-1})$ para todo $i \geq 1$. De fato,

$$\mu d_1(a \otimes b) = \mu((a \otimes b) \cdot (1 \otimes x - x \otimes 1)) = \mu(a \otimes bx - ax \otimes b) = 0$$

$$\begin{aligned} d_{2i-1} d_{2i}(a \otimes b) &= d_{2i-1}\left((a \otimes b) \cdot \sum_{j=0}^{n-1} x^j \otimes x^{n-1-j}\right) \\ &= d_{2i-1}\left(\sum_{j=0}^{n-1} ax^j \otimes bx^{n-1-j}\right) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n-1} ax^j \otimes bx^{n-1-j}\right) \cdot (1 \otimes x - x \otimes 1) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n-1} ax^j \otimes bx^{n-j}\right) - \left(\sum_{j=0}^{n-1} ax^{j+1} \otimes bx^{n-1-j}\right) \\ &= a \otimes bx^n - ax^n \otimes b \\ &= 0 \end{aligned}$$

Analogamente $Im(d_{2i+1}) \subseteq Ker(d_{2i})$.

Sejam $s_0 : A \to A^2, s_1 : A^2 \to A^2, s_2 : A^2 \to A^2$ as seguintes aplicações A-lineares

$$s_0(x^j) = 1 \otimes x^j \ , \ s_1(x^j \otimes 1) = -\sum_{l=1}^{j} x^{l-1} \otimes x^{j-l} \ , \ s_2(x^j \otimes 1) = \delta_{j,n-1} \otimes 1,$$

onde $\delta_{j,n-1}$ e o delta de Kronecker. Estas aplicações satisfazem as seguintes igualdades

$$\mu s_0 = id, \qquad s_0 \mu + d_1 s_1 = id, \qquad s_2 d_{2i} + d_{2i+1} s_1 = id,$$

o que implica que (2.3) é uma resolução livre de A sobre A^e.

Agora, aplicando o funtor $Hom_{A^e}(\cdot, A)$ a (2.3) e usando o isomorfismo $Hom_{A^e}(A \otimes A, A) \cong A$, calcular os grupos de cohomologia de Hochschild se reduz a calcular os grupos de cohomologia do seguinte complexo

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{b_1} A \xrightarrow{b_2} \cdots \longrightarrow A \xrightarrow{b_n} A \xrightarrow{b_{n+1}} \cdots,$$

onde $b_{2i-1} = 0$ e $b_{2i}(a) = nx^{n-1}a$ para todo $i \geq 1$ e todo $a \in A$.

Se $n = 0$ em k então $HH^i(A) = A$ para todo $i \geq 0$. Se $n \neq 0$ em k, então $HH^0(A) = A, HH^{2i}(A) = A/nx^{n-1}A$ e $HH^{2i-1}(A) = Ann(nx^{n-1}) = (x)$ para todo $i \geq 1$.

2.2 Interpretação dos primeiros grupos de cohomologia

Dada um álgebra A os grupos de cohomologia $HH^i(A)$ com $i = 0, 1, 2$ têm interpretações concretas as quais apresentamos nesta seção usando os morfismo e módulos da Definição 17. Também enunciamos e mostramos alguns resultados no caso em que estes grupos são nulos.

2.2.1 0-ésimo grupo de cohomologia

Seja A uma k-álgebra e M um A-bimódulo. Tendo em conta a Definição 17, a 0-ésima cohomologia de A com coeficientes em M está dada por

$$HH^0(A, M) = Ker(d^0) = \{m \in M \mid am = ma, \forall a \in A\}.$$

No caso particular em que $M = A$, temos $HH^0(A) = Z(A)$, o centro da álgebra A.

2.2.2 Primeiro grupo de cohomologia

Definição 20. *Seja A uma álgebra e M um A-bimódulo. O* ***espaço de k-derivações*** *de A em M está dado por*

$$Der(A, M) = \{f \in Hom_k(A, M) \mid f(ab) = af(b) + f(a)b, \forall a, b \in A\}.$$

O subespaço de $Der(A, M)$ de ***derivações internas*** *de A em M está dado por*

$$Der^0(A, M) = \{f_m \in Hom_k(A, M), m \in M \mid f_m(a) = am - ma, \forall a \in A\}.$$

Note que $Ker(d^1) = Der(A, M)$ e $Im(d^0) = Der^0(A, M)$. Portanto, podemos expressar o primeiro grupo de cohomologia de Hochschild em termos dos espaços de derivações:

$$HH^1(A, M) = Der(A, M)/Der^0(A, M).$$

No caso particular em que $M = A$ notamos $Der(A, A)$ e $Der^0(A, A)$ por $Der(A)$ e $Der^0(A)$ respectivamente. $Der(A)$ é chamado **espaço de derivações** de A e $Der^0(A)$ o **espaço de derivações internas** de A.

Na demonstração do seguinte Teorema completamos os detalhes da demonstração encontrada em [Hap89] do Lema 3.1.

Teorema 5. *Seja A uma k-álgebra de dimensão finita, onde k é um corpo de característica zero e seja $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de A. Se $\delta \in Der(A)$, existe $\delta' \in Der^0(A)$ tal que $\delta(e_i) = \delta'(e_i)$ para $1 \leq i \leq n$.*

Demonstração. Como $\delta(e_i) = \delta(e_i^2) = e_i\delta(e_i) + \delta(e_i)e_i$, então $e_i\delta(e_i)e_i = 0$. Logo, $e_i\delta(e_i) \in e_iA(1 - e_i)$ e $\delta(e_i)e_i \in (1 - e_i)Ae_i$. Além disso, para $i \neq j$, $0 = \delta(e_ie_j) = e_i\delta(e_j) + \delta(e_i)e_j$.

Como $e_i\delta(e_i) \in e_iA(1-e_i)$, existe $a \in A$ tal que $e_i\delta(e_i) = e_ia(1-e_i)$. Usando a decomposição de Peirce ([DK12] *pág 26.*), podemos expressar a da forma

$$a = \sum_{k,j} e_k a_{kj} e_j,$$

então

$$e_i\delta(e_i) = \sum_{j\neq i} e_i a_{ij} e_j.$$

Vamos notar por γ_{ij} o termo $e_ia_{ij}e_j$ na decomposição de $e_i\delta(e_i)$ e fixamos $\gamma_{ii} = 0$.
Afirmamos $\delta(e_i)e_i = -\sum_{j=1}^{n}\gamma_{ji}$. Seja i fixo tal que $1 \leq i \leq n$, e considere a soma

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n} e_j\delta(e_j)e_i.$$

Por um lado temos que

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n} e_j\delta(e_j)e_i = \sum_{j=1,j\neq i}^{n}\sum_{k\neq j} e_ja_{jk}e_ke_i = \sum_{j=1}^{n} e_ja_{ji}e_i = \sum_{j=1}^{n}\gamma_{ji},$$

e por outro lado

$$\sum_{j=1,j\neq i}^{n} e_j\delta(e_j)e_i = -\sum_{j=1,j\neq i}^{n} e_j\left(e_j\delta(e_i)\right) = (e_i-1)\delta(e_i) = -\delta(e_i)e_i.$$

Portanto $\delta(e_i) = \sum_{i=1}^{n}\gamma_{ij} - \gamma_{ji}$. Seja $\gamma = \sum_{i,j}\gamma_{ij}$ e $\delta' = \delta_\gamma$ a derivação interna associada a γ, logo $\delta_\gamma(e_i) = e_i\gamma - \gamma e_i = \sum_{i=1}^{n}\gamma_{ij} - \gamma_{ji} = \delta(e_i)$.

□

Definição 21. *Dada uma álgebra A, definimos o* ***subespaço de derivações normalizadas*** *de A como o conjunto $\{\delta \in Der(A) \mid \delta(e_i) = 0,\ 1 \leq i \leq n\}$, o qual denotamos por $Der^n(A)$.*

Note que se $\delta \in Der^n(A)$ e $a \in e_iAe_j$, então $\delta(a) = e_i\delta(a)e_j \in e_iAe_j$.

Lema 4. *$HH^1(A) \cong Der^n(A)/Der^{n,0}(A)$, onde $Der^{n,0} := Der^n(A) \cap Der^0(A)$.*

Demonstração. Sabemos que $HH^1(A) = Der(A)/Der^0(A)$. Defina o homomorfismo $\phi : Der^n(A) \to Der(A)/Der^0(A)$ dado por $\phi(\delta) = \overline{\delta}$. Seja $\overline{\delta} \in Der(A)/Der^0(A)$, pelo Teorema 5 existe $\delta' \in Der(A)$ tal que $\delta'(e_i) = \delta(e_i)$ para todo $1 \leq i \leq n$. Defina $\delta'' := \delta - \delta'$, então $\delta \in Der^n(A)$ e $\phi(\delta'') = \overline{\delta}$. Claramente $Ker(\phi) = Der^{n,0}$. □

Se A é comutativo a única derivação interna de A é a aplicação nula, logo $HH^1(A)$ é simplesmente o espaço de derivações de A, que nesse caso é isomorfo ao espaço de derivações normalizadas de A.

Exemplo 8. *Seja Q um carcás finito e kQ a sua álgebra de caminhos associada, com k um corpo de característica zero. Seja I um ideal admissível de kQ homogêneo com relação ao grau, isto é, I é gerado por combinações lineares de caminhos que tem o mesmo comprimento e seja $A = kQ/I$. Vamos mostrar que se $HH^1(A) = 0$, então Q não tem ciclos. De fato:*

Considere $\delta : kQ/I \to kQ/I$ dada por $\delta(\overline{w}) = l(w)\overline{w}$ para todo caminho w sobre Q, onde $l(w)$ é o comprimento de w. Note que δ está bem definida pelo fato de I ser homogêneo. Além disso, se w_1 e w_2 são dois caminhos tais que $\overline{w_1w_2} \neq 0$ então

$$\delta(\overline{w_1w_2}) = l(w_1w_2)\overline{w_1w_2} = (l(w_1)+l(w_2))\overline{w_1w_2} = l(w_1)\overline{w_1w_2} + l(w_2)\overline{w_1w_2} = \delta(\overline{w_1})\overline{w_2} + \overline{w_1}\delta(\overline{w_2})$$

Portanto

$$\delta(\overline{w_1 w_2}) = \delta(\overline{w_1})\overline{w_2} + \overline{w_1}\delta(\overline{w_2}). \tag{2.4}$$

Para o caso em que $\overline{w_1 w_2} = 0$ *a igualdade* (2.4) *se satisfaz trivialmente. Logo* δ *é uma derivação sobre* A*. Como* $\delta(\overline{\tau_i}) = l(\tau_i)\overline{\tau_i} = 0$ *para todo* i *então* δ *é uma derivação normalizada.*

A hipótese $HH^1(A) = 0$ *implica que* δ *é uma derivação interna e portanto existe* $\overline{a} \neq 0$ *em* A *tal que* $\delta = \delta_{\overline{a}}$*. Como* $\delta \in Der^n(A)$*, então* $0 = \delta(\overline{\tau_i}) = \delta_a(\tau_i) = e_i a - a e_i$*. Logo* a *é da forma*

$$a = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i + y,$$

onde $\mu_i \in k$ *para* $1 \leq i \leq n$ *e* $y \in \oplus_i e_i(radA)e_i$*.*
Seja α *uma flecha em* Q *e* $\overline{\alpha}$ *a sua classe em* A*. Temos que* $\overline{\alpha} = \delta(\overline{\alpha}) = \delta_a(\overline{\alpha}) = \overline{\alpha}a - a\overline{\alpha} = \mu_{t(\alpha)}\overline{\alpha} - \mu_{o(\alpha)}\overline{\alpha} + z$*, com* $z \in rad^2(A)$*. Logo,* $\mu_{t(\alpha)} - \mu_{o(\alpha)} = 1$ *para toda* $\alpha \in Q_1$*. Suponha que existe um ciclo em* Q

$$1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 3 \rightarrow \cdots \rightarrow n \xrightarrow{\alpha_n} 1.$$

Pelo anterior devemos ter $\mu_{i+1} - \mu_i = 1$ *para* $1 \leq i \leq n-1$ *e* $\mu_1 - \mu_n = 1$*. Este sistema de equações não tem solução, pois* $char(k) = 0$*, e obtemos uma contradição.*

Definição 22. *Sejam* k *um corpo e* A *uma* k*-álgebra. Dizemos que* A *é* ***separável*** *se para toda extensão* L *de* k*,* $A_L = A \otimes L$ *é semi-simples.*

Teorema 6. *[Hoc45] Uma álgebra* A *é separável se e somente se* $HH^1(A, M) = 0$ *para todo* A*-bimódulo* M*.*

Lema 5. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) A *é separável.*

(b) $HH^i(A, M) = 0$ *para todo* A*-bimódulo* M*, e todo* $i > 0$*.*

(c) A *é* A^e*-projetivo.*

(d) Existe $a \otimes b \in A^e$ *tal que* $ab = 1$ *e* $c(a \otimes b) = (a \otimes b)c$ *para todo* $c \in A$*.*

Demonstração. O Teorema (4) e o Teorema (6) mostram a equivalência $(a) \Leftrightarrow (b)$.
$(c) \Rightarrow (d)$ Suponha que A é A^e-projetivo. Então o A^e-epimorfismo $\mu : A^e \rightarrow A$, onde $\mu(a \otimes b) = ab$, cinde. Logo, existe um A^e-homomorfismo $\sigma : A \rightarrow A^e$ tal que $\mu\sigma = id_A$. Seja $e = \sigma(1)$, então $\mu(e) = \mu(\sigma(1)) = 1$ e $ae = a\sigma(1) = \sigma(a) = \sigma(1)a = ea$.
$(d) \Rightarrow (c)$ Defina $\sigma : A \rightarrow A^e$ por $\sigma(a) = ae$. Então $\mu\sigma = id_A$, μ é um epimorfismo que cinde e A é A^e-projetivo.
A equivalência $(a) \Leftrightarrow (c)$ é mostrada em [DK12] para álgebras de dimensão finita. □

Exemplo 9. *Seja* $A = M_n(k)$*, o elemento*

$$e = \sum_{i=1}^{n} e_{i1} \otimes e_{1i}$$

satisfaz as condições de (d) *no Lema anterior, logo,* $HH^i(A, M) = 0$ *para todo* $i > 0$ *e todo* $M_n(k)$*-bimódulo* M*. Observe que poderíamos obter este resultado pelo fato da álgebra* $M_n(k)$ *ser Morita equivalente a* k *[ASS06][pág. 38].*

2.2.3 Segundo grupo de cohomologia

Dada uma álgebra A e um A-bimódulo M, existe uma correspondência entre as extensões de A por M e o segundo grupo de cohomologia $HH^2(A, M)$. A seguir, apresentamos uma demonstração desta correspondência a qual pode ser encontrada em [Red01].

Definição 23. *Seja A uma k-álgebra .Uma* ***extensão*** *de A é um epimorfismo de k-álgebras $\phi : B \to A$ que cinde. Dado um A-bimódulo M, uma extensão de A por M é uma sequência exata curta*

$$0 \to M \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\phi} A \to 0$$

com i um monomorfismo de k-módulos tal que

$$i(\phi(b) \cdot m) = b \cdot i(m)$$

$$i(m \cdot \phi(b)) = i(m) \cdot b$$

para todo $b \in B$, e todo $m \in M$.

Dizemos que duas extensões de A por M são **equivalentes** se existe um isomorfismo $\phi : B \to B'$ que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & B \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & B' \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Dada uma extensão de A por M

$$0 \to M \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\phi} A \to 0$$

existe $\psi : A \to B$ k-linear tal que $\phi\psi = id_A$, logo temos o isomorfismo de k-módulos $B \cong A \oplus M$. Este isomorfismo é um isomorfismo de álgebras no caso em que ψ é um morfismo de álgebras. Em geral ψ não é um morfismo de álgebras, mas podemos medir "quão longe"está ψ de ser um homomorfismo de álgebras por meio da aplicação $f : A \otimes A \to B$ definida por

$$f(a \otimes b) = \psi(ab) - \psi(a)\psi(b)$$

Note que $Im(f) \subseteq Ker(\phi)$ e como ψ é k-linear temos $f : A \otimes A \to M$. Portanto, podemos definir o produto em $B \cong A \oplus M$ por

$$(a, m) \cdot (b, n) = (ab, an + mb + f(a \otimes b)).$$

Como B fica determinado por A, M e f vamos usar a notação $B \cong A \ltimes_f M$. Usando a associatividade do produto podemos concluir que f deve satisfazer a seguinte igualdade:

$$f(a \otimes b)c + f(ab \otimes c) = af(b \otimes c) + f(a \otimes bc).$$

Considere duas extensões equivalentes $A \ltimes_{f_1} M$ e $A \ltimes_{f_2} M$. A comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & A \ltimes_{f_1} M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & A \ltimes_{f_2} M \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

implica $\varphi(a, m) = a, m + g(a)$ para algum $g \in Hom_k(A, M)$. Para ψ ser um homomorfismo de álgebras devemos ter

$$f_1(a \otimes b) - f_2(a \otimes b) = ag(b) - g(ab) + g(a)b,$$

para todo $a, b \in A$.

Como consequência dos argumentos anteriores temos o seguinte Teorema.

Teorema 7. *Seja A uma k-álgebra e M um A-bimódulo. Existe uma correspondência bijetiva entre $HH^2(A, M)$ e o conjunto das classes de equivalência de extensões $Ext(A, M)$ de A por M.*

Demonstração. Por definição $HH^2(A, M) = ker(d^2)/Im(d^1)$, onde

$$Ker(d^2) = \{f : A \otimes A \to M : af(b \otimes c) - f(ab \otimes c) + f(a \otimes bc) - f(a \otimes b)c = 0\}$$

e

$$Im(d^1) = \{f : A \otimes A \to M : f(a \otimes b) = ag(b) - g(ab) + g(ab), g \in Hom_k(A, M)\}$$

□

Portanto, podemos definir uma aplicação sobrejetora

$$Ker(d^2) \to Ext(A, M)$$

tal que a imagem de $f \in Ker(d^2)$ está dada por $A \ltimes_f M$. Além disso, $f_1 - f_2 \in Im(d^1)$ se e somente se as extensões $A \ltimes_{f_1} M$ e $A \ltimes_{f_2} M$ são equivalentes.

Nota 4. *Se consideramos álgebras de radical quadrado zero com carcás associado Q conexo, o fato do segundo grupo de cohomologia ser zero fornece condições sobre a forma do carcás Q. Enunciaremos isto na Seção 2.5 onde são calculados todos os grupos de cohomologia para álgebras de radical quadrado zero.*

2.3 Álgebras hereditárias

Seja k um corpo algebricamente fechado e A uma k-álgebra de dimensão finita, a qual podemos assumir básica e indecomponível. Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos então $\{e_i \otimes e_j\}_{1 \leq i,j \leq n}$ é um sistema completo de idempotentes ortogonais primitivos de A^e. Portanto, $\{P(i, j) = (e_i \otimes e_j)A^e \cong Ae_i \otimes e_jA\}$ é um conjunto completo de representantes das classes de isomorfismo de A^e-módulos projetivos indecomponíveis. Em [Hap89] se apresentam os módulos de uma resolução projetiva minimal que é de utilidade para calcular os grupos de cohomologia de Hochschild de álgebras hereditárias e álgebras da forma kQ/I com Q um carcás estreito e I um ideal admissível.

Lema 6. *[Hap89] Seja*

$$\cdots R_n \to R_{n-1} \to \cdots \to R_1 \to R_0 \to A \to 0$$

uma resolução projetiva minimal de A sobre A^e. Então

$$R_n = \bigoplus_{i,j} P(i, j)^{dim_k Ext^n_A(S_i, S_j)}, \tag{2.5}$$

onde $P_i = e_iA$ e $S_i = topP_i = P_i/radP_i$.

Definição 24. *Dizemos que A é uma álgebra **hereditária** se os submódulos dos A-módulos projetivos são projetivos.*

Lema 7. *Seja A uma álgebra. As seguintes afirmações são equivalentes*

(a) A é hereditária.

(b) $gl.dim(A) \leq 1$.

(c) O radical de todo projetivo indecomponível é projetivo.

Lema 8. *Se A é uma k-álgebra hereditária de dimensão finita existe um carcás Q finito e conexo (sem ciclos) tal que $A \cong kQ$.*

Proposição 8. *[Hap89] Seja $A = kQ$ uma álgebra básica indecomponível hereditária de dimensão finita. Então*

$$dim_k HH^i(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 0, \\ 0 & \text{se } i > 1, \\ 1 - n + \sum_{\alpha \in Q_1} \nu(\alpha) & \text{se } i = 1. \end{cases}$$

onde $\nu(\alpha) = dim_k o(\alpha)kQt(\alpha)$, $n = |Q_0|$ e $o(\alpha)kQt(\alpha)$ é o subespaço de A gerado pelos caminhos de $o(\alpha)$ a $t(\alpha)$.

Demonstração. Como Q é conexo e não tem ciclos orientados então $HH^0(A) = Z(A) = k$.
Pelo Lema (7) $gl.dim(A) \leq 1$ e R_n definido como em (2.5) é nulo para $n \geq 2$. Logo, $HH^i(A) = 0$ para $i \geq 2$ e $0 \to R_1 \to R_0 \to A \to 0$ é uma resolução projetiva minimal de A sobre A^e, com

$$R_0 = \bigoplus_{i \in Q_0} P(i,i) \quad e \quad R_1 = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} P(o(\alpha), s(\alpha)),$$

pois $dim_k Ext^1_A(S_i, S_j)$ coincide com o número de flechas de i até j.
Aplicando $Hom_{A^e}(\cdot, A)$ à sequência anterior obtemos

$$0 \to Hom_{A^e}(A,A) \to Hom_{A^e}(R_0, A) \to Hom_{A^e}(R_1, A) \to 0.$$

Usando os isomorfismos

$$Hom_{A^e}(A,A) \simeq k,$$

$$Hom_{A^e}(R_0, A) \simeq \bigoplus_{i \in Q_0} e_i A e_i \simeq k^n,$$

$$Hom_{A^e}(R_1, A) \simeq \bigoplus_{\alpha \in Q_1} o(\alpha) A t(\alpha),$$

podemos concluir que $dim_k HH^1(A) = 1 - n + \sum_{\alpha \in Q_1} dim_k o(\alpha)kQt(\alpha)$.

□

Corolário 1. *Seja $A = kQ$, com Q sem ciclos. Então, $HH^1(A) = 0$ se e somente se Q é uma árvore.*

Exemplo 10. *Seja $A = T_n(k)$ a álgebra de matrizes triangulares superiores $n \times n$ sobre k. Então, A é uma álgebra hereditária com carcás associado*

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n.$$

Logo, $HH^0(A) = k$ e $HH^i(A) = 0$ para todo $i > 0$.

Nota 5. *Existe uma generalização do resultado obtido na Proposição 8 no caso das álgebras truncadas, isto é, álgebras da forma $A = kQ/J^n$, com J o ideal gerado pelas flechas e $n \geq 2$ [BLM00].*

2.4 Carcases estreitos

Definição 25. *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k*

- *Dizemos que A é **schuriana** se $dim_k(Hom_A(P, P')) \leq 1$ para quaisquer P, P' A-módulos projetivos indecomponíveis.*

- *Dizemos que A é* ***semicomutativa*** *se dados dois caminhos paralelos w e w' em Q tal que $w \in I$ então $w' \in I$.*

Note que se assumimos A schuriana e semicomutativa então $\nu(\alpha) = 1$ para todo $\alpha \in Q$.(ν foi definida na Proposição 8.)

Teorema 8. *Sejam Q um carcás conexo e finito sem ciclos, I um ideal bilateral de kQ tal que $I \subseteq F^2$, e $A = kQ/I$ schuriana e semicomutativa. Então $HH^0(A) = k$, $HH^1(A) = 1 - |Q_0| + |Q_1|$ e $HH^i(A) = 0$ para todo $i > 1$.*

Demonstração. Como Q não contém ciclos orientados $HH^0(A) = Z(A) = k$.
Note que $dim_k(Ext^1_A(S_i, S_j)) \leq 1$ para quaisquer S_i e S_j A-módulos simples. Como $Ext^1_A(S_i, S_j)$ fornece o número de flechas de i até j então $Ext^1_A(S_i, S_j) \neq 0$ se e somente se existe uma flecha $\alpha : i \to j$.

Se $Ext^t_A(S_i, S_j) \neq 0$ para $t \geq 2$, então P_j aparece numa resolução projetiva minimal de S_i, logo existe um caminho w de i até j. Portanto $e_jAe_i = 0$ e o cálculo dos grupos de cohomologia de A se reduz ao cálculo da cohomologia do seguinte complexo

$$0 \to Hom_{A^e}(A, A) \to Hom_{A^e}(R_0, A) \to Hom_{A^e}(R_1, A) \to 0.$$

Os isomorfismos dados na demonstração do Lema(6) continuam valendo, mas pelas hipóteses $\nu(\alpha) = 1$ para toda $\alpha \in Q_1$ e portanto $dim_k(HH^1(A)) = 1 - |Q_0| + \sum_{\alpha \in Q_1} \nu(\alpha) = 1 - |Q_0| + |Q_1|$.
□

Dado um carcás Q o valor $\chi(Q) = 1 - |Q_0| + |Q_1|$ é conhecido como **característica de Euler** de Q.

Definição 26. *Seja Q um carcás conexo e finito. Dizemos que Q é* ***estreito*** *se existe no máximo um caminho entre quaisquer dois vértices.*

Corolário 2. *Seja Q um carcás estreito e I um ideal admissível de kQ. Então $HH^0(kQ/I) = k$, $dim_k(HH^1(kQ/I)) = \chi(Q)$ e $HH^i(kQ/I) = 0$ para $i > 1$.*

2.5 Álgebras de radical quadrado zero

Teorema 9. *(Wedderburn-Malcev)[DK12] Seja A uma k-álgebra associativa de dimensão finita, com k um corpo. Se $A/rad(A)$ é separável então existe uma subálgebra E semi-simples tal que $A = E \oplus rad(A)$.*

Por simplicidade, ao longo desta seção vamos notar por r o radical de Jacobson de A.

Lema 9. *[Cib90] Seja A uma k-álgebra de dimensão finita tal que A/r é separável. Seja $A = E \oplus r$ como na decomposição dada no Teorema anterior. A seguinte sequência é uma resolução projetiva de A como A-bimódulo.*

$$\cdots \to A \otimes_E r^{\oplus_E i} \otimes_E A \xrightarrow{b'_i} \cdots \to A \otimes_E r \otimes_E A \xrightarrow{b'_1} A \otimes_E A \xrightarrow{\mu} A \to 0,$$

onde $\mu(a \otimes b) = ab$ e

$$\begin{aligned} b'_i(a \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes b) &= aa_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes b \\ &\quad + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j a \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_i \otimes b \\ &\quad + (-1)^i a \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i b, \end{aligned}$$

para todo $a, b \in A$ e todo $a_1, \dots, a_i \in r$.

Seja M um A-bimódulo . Aplicando o funtor $Hom_{A-A}(\cdot, M)$ à resolução dada no Lema anterior, e usando o isomorfismo

$$Hom_{A-A}(A \otimes_E X \otimes_E A, M) \simeq Hom_{E-E}(X, M),$$

para todo E-bimódulo X, podemos calcular a cohomologia de Hochschild como a cohomologia do complexo

$$0 \to M^E \xrightarrow{b_1} Hom_{E-E}(r, M) \xrightarrow{b_2} Hom_{E-E}(r \otimes_E r, M) \to \cdots$$
$$\cdots \to Hom_{E-E}(r^{\otimes_E i}, M) \xrightarrow{b_{i+1}} \cdots,$$

onde $M^E = \{m \in M \mid sm = ms, \forall s \in E\}$, $(dm)(x) = mx - xm$ para todo $m \in M^E$ e todo $x \in r$, e

$$\begin{aligned}(b_{i+1}f)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i+1}) = {} & x_1 f(x_2 \otimes \cdots \otimes x_{i+1}) \\ & + \sum (-1)^j f(x_1 \otimes \cdots \otimes x_j x_{j+1} \otimes \cdots \otimes x_{i+1}) \\ & + (-1)^{i+1} f(x_1 \otimes \cdots \otimes x_i) x_{i+1},\end{aligned}$$

para todo $f \in Hom_{E-E}(r^{\otimes_E i, M})$ e todo $x_1, \dots, x_{i+1} \in r$.

Dado um corpo k e uma k-álgebra básica A de dimensão finita tal que $(radA)^2 = 0$, existe um carcás Q finito e conexo tal que $A \cong kQ/F^2$, onde F é o ideal gerado pelas flechas em Q. Neste caso, dizemos que A é de **radical quadrado zero**. Para álgebras de radical quadrado zero os homomorfismos do complexo anterior ficam definidos simplesmente por

$$(b_{i+1}f)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i+1}) = x_1 f(x_2 \otimes \cdots x_{i+1}) + (-1)^{i+1} f(x_1 \otimes \cdots \otimes x_i) x_{i+1}.$$

Toda álgebra A de dimensão finita com radical quadrado zero é Morita equivalente a uma álgebra da forma $(kQ)_2 = kQ_0 \oplus kQ_1$ com produto dado por $(e, x) \cdot (e', x') = (ee', ex' + xe')$. Além disso, $rad(kQ)_2 = kQ_1$ e $E = kQ_0$ é uma subálgebra maximal semi-simples separável.

A seguir apresentamos uma serie de resultados que permitem calcular os grupos de cohomologia de Hochschild de toda álgebra de dimensão finita de radical quadrado zero. Estes resultados podem ser encontrados em [Cib98]. Além disso, usaremos a mesma notação do artigo referenciado.

Lema 10. *Seja $r = kQ_1$ o radical de (kQ_2) e $E = kQ_0$. Então, $r^{\otimes_E n}$ tem uma base dada por Q_n, o conjunto de caminhos de comprimento n.*

Dados dois conjuntos de caminhos X e Y vamos notar por $X//Y$ o conjunto de duplas $(\gamma, \gamma') \in X \times Y$ tais que $o(\gamma) = o(\gamma')$ e $t(\gamma) = t(\gamma')$.

Lema 11. *Seja $A = (kQ)_2$. O espaço vetorial $Hom_{E-E}(r^{\otimes_E n}, A)$ é isomorfo a $k(Q_n//Q_0) \oplus k(Q_n//Q_1)$.*

Proposição 9. *O seguinte diagrama comuta para todo n*

$$\begin{tikzcd} Hom_{E-E}(r^{\otimes_E n}, A) \arrow[r, "b_{n+1}"] \arrow[d, "\cong"'] & Hom_{E-E}(r^{\otimes_E n+1}, A) \arrow[d, "\cong"] \\ k(Q_n//Q_0) \oplus k(Q_n//Q_1) \arrow[r, "\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ D & 0 \end{smallmatrix}\right)"] & k(Q_{n+1}//Q_0) \oplus k(Q_{n+1}//Q_1), \end{tikzcd}$$

com $D : k(Q_n//Q_0) \to k(Q_{n+1}//Q_1)$ *dado por*

$$D(\gamma, e) = \sum_{a \in eQ_1} (\gamma a, a) + (-1)^{n+1} \sum_{a \in Q_1 e} (a\gamma, a).$$

Teorema 10. *Seja Q um carcás conexo tal que Q não é um ciclo. Então*

$$dim_k HH^n((kQ)_2) = \begin{cases} 1 + |Q_1||Q_0| & \text{se } n = 0, \\ |Q_1||Q_1| - |Q_0||Q_0| + 1 & \text{se } n = 1, \\ |Q_n||Q_1| - |Q_{n-1}||Q_0| & \text{se } n > 1. \end{cases}$$

Demonstração. Vamos mostrar que no caso em que Q não é um ciclo o homomorfismo $D : k(Q_n// Q_0) \to k(Q_{n+1}//Q_1)$ é injetivo para $n > 0$. Seja $x \in Ker(D)$. Podemos expressar x da forma

$$x = \sum_{(\gamma,e) \in k(Q_n//Q_0)} x_{(\gamma,e)}(\gamma, e). \tag{2.6}$$

Seja (γ, e) um ciclo fixo na expressão (2.6). Então,

$$D(x_{(\gamma,e)}(\gamma, e)) = x_{(\gamma,e)} \left[\sum_{a \in eQ_1} (\gamma a, a) + (-1)^{n+1} \sum_{a \in Q_1 e} (a\gamma, a) \right].$$

Vamos notar por $f(\gamma)$ a primeira flecha de γ e por $l(\gamma)$ a ultima flecha de γ.

• *Afirmação 1.* Se existe uma flecha a tal que $a \neq f(\gamma), a \neq l(\gamma)$ e $o(a) = e$ ou $t(a) = e$, então $x_{(\gamma,e)} = 0$.
Seja $a \in Q_1$ tal que $o(a) = e$ e $a \neq f(\gamma)$, então $(\gamma a, a)$ não está no suporte de $D(\gamma', e')$ para todo $(\gamma', e') \neq (\gamma, e)$. De fato, suponha que $(\gamma a, a) = (\gamma' a', a')$, então $a = a'$ e $\gamma = \gamma'$. Se $(\gamma a, a) = (a'\gamma', a')$, então $a = a'$ e $\gamma a = a\gamma'$, logo $a = f(\gamma)$, contrário do que foi suposto.
Analogamente, se $a \in Q_1$ é tal que $t(a) = e$ e $a \neq l(\gamma)$, então $(\gamma a, a)$ não está no suporte de $D(\gamma', e')$ para todo $(\gamma', e') \neq (\gamma, e)$.

Agora, vamos supor que não existe $a \in Q_1$ satisfazendo as condições da afirmação anterior, isto é, $eQ_1 = \{f(\gamma)\}$ e $Q_1 e = \{l(\gamma)\}$.
Se $\gamma = f(\gamma)a_2 \cdots a_j l(\gamma)$, notamos por $(\overline{\gamma}, \overline{e})$ o elemento em $Q_n//Q_0$ tal que $\overline{\gamma} = a_2 \cdots a_j l(\gamma) f(\gamma)$ e $\overline{e} = o(a_2) = t(f(\gamma))$.

•*Afirmação 2.* $x_{(\gamma,e)} = (-1)^n x_{(\overline{\gamma},\overline{e})}$.

$(\gamma f(\gamma), f(\gamma)) \in supp(D(\gamma, e))$ e como $(f(\gamma)\overline{\gamma}, f(\gamma)) = (\gamma f(\gamma), f(\gamma))$ então $(\gamma f(\gamma), f(\gamma)) \in supp(D(\overline{\gamma}, \overline{e}))$. Vamos ver que $(\gamma f(\gamma), f(\gamma))$ não está em outro suporte. Seja (γ', e') ciclo tal que existe $a \in e'Q_1$ e $(\gamma' a, a) = (\gamma f(\gamma), f(\gamma))$, então $a = f(\gamma)$, $\gamma' f(\gamma) = \gamma f(\gamma)$, logo $\gamma' = \gamma$. Analogamente, se (γ', e') é um ciclo tal que $a \in Q_1 e'$ e $(a\gamma', a) = (\gamma f(\gamma), f(\gamma))$ então $a = f(\gamma)$ e $\gamma' = \overline{\gamma}$. Portanto, o coeficiente de $(\gamma f(\gamma), f(\gamma))$ em $D(x)$ é $x_{(\gamma,e)} + (-1)^{n+1} x_{(\overline{\gamma},\overline{e})}$. Como $D(x) = 0$ então $x_{(\gamma,e)} + (-1)^{n+1} x_{(\overline{\gamma},\overline{e})} = 0$.

Sabemos que $\gamma = a_1 a_2 \dots a_j a_{j+1}$, com $a_1 = f(\gamma)$ e $a_{j+1} = l(\gamma)$. Como Q é conexo e não é um ciclo existe $1 \leq k \leq j$ minimal tal que existe $a \in Q_1$ que satisfaz $a \neq a_{k+1}, a \neq a_k$ e $o(a) = o(a_{k+1}) = t(a_k)$ ou $t(a) = o(a_{k+1}) = t(a_k)$. Pela Afirmação 1 temos que $x_{(a_{k+1}a_{k+2} \dots a_k, o(a_{k+1}))} = 0$. Pela minimalidade de k, então $x_{(\gamma,e)} = (-1)^n x_{(\overline{\gamma},\overline{e})} = \cdots = (-1)^{kn} x_{(a_{k+1}a_{k+2} \dots a_k, o(a_{k+1}))} = 0$.

Acabamos de mostrar que $x_{(\gamma,e)} = 0$ para todo (γ, e) na expressão (2.6), logo $x = 0$ e está mostrada a injetividade de D.

Para o caso $n = 0$ o homomorfismo $D : k(Q_0/\!/Q_0) \to k(Q_1/\!/Q_1)$ fica definido por

$$D(e, e) = \sum_{a \in eQ_1} (a, a) - \sum_{a \in Q_1 e} (a, a),$$

para todo $e \in Q_0$. Logo, se $x = \sum_i \mu_i(e_i, e_i) \in Ker(D)$ então,

$$0 = \sum_i \mu_i \left[\sum_{a \in e_i Q_1} (a, a) - \sum_{a \in Q_1 e_i} (a, a) \right] = \sum_{a \in Q_1} \left(\mu_{o(a)} - \mu_{t(a)} \right) (a, a).$$

Logo, $\mu_{o(a)} = \mu_{t(a)}$ para toda $a \in Q_1$. Então, pela conexidade de Q, $\mu_i = \mu_j$ para todo i, j e portanto $Ker(D) = \langle \sum_{e \in Q_0} (e, e) \rangle$.

O anterior e a injetividade de D para $n > 0$ mostra o resultado.

□

Corolário 3. *Seja Q um carcás conexo tal que Q não é um ciclo. Então $\bigoplus_{n \geq 0} HH^n((kQ)_2)$ é um espaço vetorial de dimensão finita se e somente se Q não tem ciclos. Mais precisamente, se Q tem um ciclo orientado de comprimento c, então $HH^{cn+1}((kQ)_2) \neq 0$ para todo $n > 0$.*

Proposição 10. *Seja Q um ciclo de comprimento $m \geq 2$. Então $HH^0((kQ)_2) = Z((kQ)_2) = k$ e*

(i) Se $char(k) \neq 2$, $HH^n((kQ)_2) = HH^{n+1}((kQ)_2) = k$ para n par múltiplo de m. Nos outros casos a cohomologia é zero.

(ii) Se $char(k) = 2$, $HH^n((kQ)_2) = HH^{n+1}((kQ)_2) = k$ para todo n múltiplo de m. Nos outros casos a cohomologia é zero.

Proposição 11. *Seja Q um laço. Então $A = (kQ)_2 = k[x]/\langle x^2 \rangle$ e*

(i) Se $char(k) \neq 2$, $HH^0(A) = A$ e $HH^n(A) = k$ para $n > 0$.

(ii) Se $char(k) = 2$, $HH^n(A) = A$ para todo $n \geq 0$.

Corolário 4. *Seja $A = (kQ)_2$ uma k-álgebra de dimensão finita de radical quadrado zero. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $HH^i(A) = 0$ para $i > 0$.

(ii) $HH^1(A) = 0$.

(iii) Q é uma árvore.

Demonstração. $(ii) \Rightarrow (iii)$ Se $HH^1(A) = 0$, então Q não é um ciclo e $|Q_1/\!/Q_1| = |Q_0/\!/Q_0| - 1$, logo $|Q_1| \leq |Q_0| - 1$, mas $|Q_1|$ não pode ser menor estrito a $|Q_0| - 1$, logo Q é uma árvore.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Se Q é uma árvore, então $|Q_1| = |Q_0| - 1$ e o grafo subjacente não tem ciclos. Pelo Teorema (10) $HH^i(A) = 0$ para todo $i > 0$.

□

Nota 6. *Em [Hap89] Happel faz uma demonstração do Corolário(4) usando derivações.*

Proposição 12. *Seja Q um carcás conexo. Então $HH^2((kQ)_2) = 0$ se e somente se Q não tem laços, não é um ciclo de comprimento 2 e não contém triângulos não orientados, isto é,*

$$\begin{tikzcd} & \circ \arrow[dr] & \\ \circ \arrow[ur] \arrow[rr] & & \circ \end{tikzcd}$$

Capítulo 3

Resolução projetiva para Álgebras associativas

Este capítulo expõe os conceitos e resultados apresentados em [CS15]. Dada uma álgebra da forma kQ/I com Q um carcás com um número finito de vértices e I um ideal bilateral definimos um sistema de redução que junto com uma ordem sobre os conjuntos dos caminhos satisfazendo a condição da cadeia descendente e compatível com a concatenação, serão úteis para construir uma k-base da álgebra sob condições especiais. Tendo um sistema de redução $\mathcal{R}$ que satisfaz a condição do Diamante para I definimos as n-ambiguidades, necessárias para construir a resolução projetiva de A como bimódulo. As ideias usadas para a construção desta resolução estão baseadas na Teoria das Bases de Gröbner e é uma generalização da resolução projetiva para álgebras monomiais exibida por Bardzell [Bar97].

3.1 Sistemas de Redução

Seja k um corpo e Q carcás com um número finito de vértices. Vamos notar por $Q_{\geq n}$ o conjunto de caminhos de comprimento maior ou igual a n. Note que $Q_{\geq 0}$ é simplesmente o conjunto de todos os caminhos em Q, incluindo os vértices os quais consideramos como caminhos de comprimento zero.

Seja $E := kQ_0$ a subálgebra da álgebra de caminhos gerada pelos vértices em Q.

Definição 27. *Sejam a, b, p, q caminhos em Q. Se $q = apb$ dizemos que p é um* ***divisor*** *de q. No caso em que $a \in Q_0$ (resp. $b \in Q_0$) dizemos que p é um* ***divisor à esquerda*** *(resp.* ***divisor à direita****) de q.*

A seguir apresentamos uma série de definições que vamos precisar ao longo deste capítulo.

- Um conjunto $\mathcal{R} \subseteq Q_{\geq 0} \times kQ$ é chamado **sistema de redução** se para todo $(s, f) \in \mathcal{R}$, f é paralelo a s e $s \neq f$.
- Uma **redução básica** é uma tripla (a, ρ, c) tal que $\rho = (s, f) \in \mathcal{R}$, e a e c são caminhos tais que $asc \neq 0$. Toda redução básica determina um endomorfismo de $E-$bimódulos $r_{a,\rho,c} : kQ \to kQ$ tal que $r_{a,\rho,c}(asc) = afc$ e $r_{a,\rho,c}(q) = q$ para todo $q \neq asc$.
- Um caminho p é de **redução finita** com respeito a um sistema de redução $\mathcal{R}$ se para toda sequência infinita de reduções básicas $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $r_n \circ \cdots \circ r_1(p) = r_m \circ \cdots \circ r_1(p)$ para todo $n \geq m$.

Sejam p e q caminhos em Q. Escrevemos $q \rightsquigarrow p$ se $p = q$ ou se existem reduções básicas $r_1, \ldots, r_n$, com $n \geq 1$, e caminhos $p_1, \ldots, p_{n+1}$ tais que $p_1 = q, p_{n+1} = p$, e $p_{i+1} \in supp(r_i(p_i))$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Note que $\rightsquigarrow$ define uma relação reflexiva e transitiva sobre $Q_{\geq 0}$

Lema 12. *Seja $\mathcal{R}$ um sistema de redução tal que todo caminho é de redução finita. Então*

(1) Se p é um caminho e r é uma redução básica tal que $p \in supp(r(p))$, então $r(p) = p$.

(2) A relação $\rightsquigarrow$ é uma ordem sobre o conjunto dos caminhos $Q_{\geq 0}$ compatível com a concatenação.

(3) A relação $\rightsquigarrow$ satisfaz a condição da cadeia descendente. No caso em que uma relação satisfaz a condição da cadeia descendente dizemos que ela é Noetheriana.

Demonstração. (1) Como $p \in supp(r(p))$ então $r(p) = \lambda p + x$, com $\lambda \in K^*$ e $p \notin supp(x)$. Vamos supor que $x \neq 0$ ou $\lambda \neq 1$, então $r(p) \neq p$ e como r é uma redução básica então ela fixa qualquer caminho diferente de p, logo $r(x) = x$, pois $p \notin supp(x)$.

Seja $(r, r, \ldots)$ uma sequência infinita de reduções. Pela hipótese, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $r^k(p) = r^{k+1}(p)$, isto é,

$$\lambda^k p + \left(\sum_{i=0}^{k-1} \lambda^i\right) x = \lambda^{k+1} p + \left(\sum_{i=0}^{k} \lambda^i\right) x.$$

O anterior implica $\lambda = 1$ e $x = 0$, contradizendo o assumido.

(2) Para mostrar que a relação $\rightsquigarrow$ é uma ordem sobre $Q_{\geq 0}$ basta mostrar que ela é antissimétrica. Vamos supor que não é este o caso, então existem $p_1, \ldots, p_{n+1}$ caminhos e $r_1, \ldots, r_n$ reduções básicas tais que $p_1 = p_{n+1}$ e $p_{i+1} \in supp(r_i(p_i))$ para todo $1 \leq i \leq n$. Suponha n minimal. Existem $x_1, \ldots, x_n \in kQ$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K^*$ tais que $r_i(p_i) = \lambda_i p_{i+1} + x_i$, com $p_{i+1} \notin supp(x_i)$. Pela minimalidade de n, $r_i(p_i) \neq p_i$, então r_i fixa qualquer caminho distinto de p_i, para todo i.

Vamos mostrar que $p_i \notin supp(x_j)$ para todo $j < i$. Suponha que existem i, j tais que $p_i \in supp(x_j)$, com $j < i$. Defina $u_k := p_k$, $t_k := r_k$ para $1 \leq k \leq j$ e $u_{j+l} := p_{i+l-1}$, $t_{j+l} := r_{i+l-1}$ para $1 \leq l \leq n-i+2$. É fácil ver que $u_{s+1} \in t_s(u_s)$ para $1 \leq s \leq j+n-i+2$, contradizendo a minimalidade de n. Pelo anterior, $p_1 = p_{n+1} \notin supp(x_j)$ para todo $1 \leq j \leq n$ e a partir dos caminhos $p_1, \ldots, p_{n+1}$ e as reduções $r_1, \ldots, r_n$ é possível construir sequências cíclicas onde o primeiro e último termo é igual a p_i, para cada i. Usando o argumento anterior podemos concluir $p_i \notin supp(x_j)$ para todo i, j. Isto implica $r_n \circ \cdots \circ r_1(p_1) = \lambda p_1 + x$, para algum $\lambda \in K^*$ e $x \in kQ$ com $p_i \notin supp(x)$, para todo i. Defina a sequência infinita de reduções básicas $(r_i)_i \in \mathbb{N}$ por $r_m := r_{[m]_n}$. Seja $r := r_n \circ \cdots \circ r_1$, note que $r^l(p_1) = \lambda^l p_1 + \sum_{i=0}^{l-1} \lambda^i x$, logo, a sequência infinita definida anteriormente não se estabiliza em p_1, contradizendo que todo caminho é de redução finita.

Agora vamos mostrar que $\rightsquigarrow$ é compatível com a concatenação. Se p e q são tais que $p = q$, o resultado é imediato. Sejam p e q caminhos distintos, e r redução básica tal que $p \in supp(r(q))$ e $r = r_{a',\rho,c'}$, com $\rho = (s, f) \in \mathcal{R}$. Como $r(q) \neq q$ então $q = a'sc'$ e $r(q) = a'fc'$. Sejam a e c caminhos tais que $apc \neq 0$ e $aqc \neq 0$. Sabemos que $p \in supp(r(q))$, logo $p \in supp(a'fc')$, o que implica $apc \in supp(aa'fc'c)$. Note que $r_{aa',\rho,c'c}(aqc) = aa'fc'c$, portanto $aqc \rightsquigarrow apc$. O resultado segue pela transitividade de $\rightsquigarrow$.

(3) Suponhamos que existe uma sequência de caminhos $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e uma sequência de reduções básicas $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $p_{i+1} \in supp(t_i(p_i))$ para todo $i \in \mathbb{N}$ Como $\rightsquigarrow$ é antissimétrica

podemos assumir $p_i \neq p_j$ para $i \neq j$ e $p_j \notin supp(x_i)$ se $i < j$. Vamos mostrar por indução sobre k que existem $i_1, \ldots, i_k$, com $1 = i_1 < \cdots < i_k$ e

$$p_{i_k} \in supp(t_{i_{k-1}} \circ \cdots \circ t_1(p_1)) \tag{3.1}$$

$$p_j \notin supp(t_{i_{k-1}} \circ \cdots \circ t_1(p_1)),\ j > i_k. \tag{3.2}$$

Para o caso $k = 2$, seja $i_2 = 2$. Então $p_2 \in supp(t_1(p_1))$ e $t_1(p_1) = \lambda_1 p_2 + x_1$, com $\lambda_1 \in K^*$ e $p_2 \notin supp(x_1)$. Para todo $j > 2$, $p_j \notin supp(x_1)$, logo $p_j \notin supp(t_1(p_1))$ para todo $j > 2$.
Suponhamos que existem $1 < i_2 < \cdots < i_k$ e p_{i_k} tais que são satisfeitas as condições (3.1) e (3.2). Seja

$$X_k = \{i > i_k \mid p_i \in supp(t_{i_k} \circ \cdots \circ t_{i_1}(p_1))\}.$$

Pela hipótese de indução, $t_{i_{k-1}} \circ \cdots \circ t_{i_1}(p_1) = \lambda p_{i_k} + x$, com $\lambda \in K^*, x \in kQ$ e $p_{i_k} \notin supp(x)$. Pela construção da sequência $p_{i_{k+1}} \in supp(t_{i_k}(p_{i_k}))$ e $p_{i_{k+1}} \notin supp(t_{i_{k-1}} \circ \cdots \circ t_{i_1}(p_1))$, logo $p_{i_{k+1}} \notin supp(x)$, então $p_{i_{k+1}} \in supp(t_{i_k}(p_{i_k}) + x)$. Como $t_{i_k} \circ \cdots \circ t_{i_1}(p_1) = \lambda t_{i_k}(p_{i_k}) + t_{i_k}(x) = \lambda t_{i_k}(p_{i_k}) + x$, então $p_{i_{k+1}} \in supp(t_{i_k} \circ \cdots \circ t_{i_1}(p_1)$. Portanto, $X_k \neq \emptyset$ e podemos definir $i_{k+1} = max X_k$.

□

Definição 28. *Uma **redução** é uma n-upla $(r_n, \ldots, r_1)$ com $n \in \mathbb{N}$ e r_i uma redução básica para $1 \leq i \leq n$. Toda redução $r = (r_n, \ldots, r_1)$ determina um endomorfismo $r : kQ \to kQ$ de E-bimódulos, com $r = r_n \circ \cdots \circ r_1$.*

Lema 13. *Se p e q são caminhos, então $q \rightsquigarrow p$ se e somente se $p = q$ ou existe uma redução r tal que $p \in supp(r(q))$.*

Definição 29. *Seja I um ideal bilateral de kQ. Dizemos que um sistema de redução $\mathcal{R}$ satisfaz a **condição do Diamante** para I se:*

(1) I é o ideal bilateral gerado pelo conjunto $\{(s - f)\}_{(s,f) \in \mathcal{R}}$,

(2) Todo caminho é de redução única, e

(3) Para todo $(s, f) \in \mathcal{R}$, f é irredutível.

Seja $\leq$ uma boa ordem sobre $Q_0 \cup Q_1$, e seja $\omega : Q_1 \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Podemos estender ω a kQ fazendo $\omega(v) = 0$ para todo $v \in Q_0$ e se $p \in Q_{\geq 0}$, com $p = a_1 \cdots a_m$, com $a_i \in Q_1$ para todo $1 \leq i \leq m$, então $\omega(a_1 \cdots a_m) = \sum_{i=1}^{m} \omega(a_i)$. Sejam $p, q \in Q_{\geq 0}$. Escrevemos $p \leq_\omega q$ se :

- $\omega(p) < \omega(q)$ ou
- $p, q \in Q_0$ e $p \leq q$ ou
- $\omega(p) = \omega(q)$, $p = a_1 \cdots a_n, q = b_1 \cdots b_m \in Q_{\geq 1}$ e existe $j \leq min(|p|, |q|)$ tal que $a_i = b_i$ para $i < j$ e $a_j < b_j$.

A ordem $\leq_\omega$ é chamada ordem *peso-lexicográfica* e com ela vamos conseguir mostrar que dado um ideal bilateral I sempre existe um sistema de redução que satisfaz a condição do Diamante para I. Esta ordem é compatível com a concatenação e dado um caminho p o conjunto de caminhos menores a p com relação a esta ordem é finito.

Notação: Seja $p \in kQ$. Se $p = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i p_i$, com $\lambda_i \in k^*, p_i \in Q_{\geq 0}$ para todo $1 \leq i \leq n$, notamos por *tip(p)* o maior elemento do conjunto $\{p_i\}_{i=1}^{n}$ com relação a ordem $\leq_\omega$. Dado $X \subseteq kQ$, notamos por $tip(X)$ o conjunto $\{tip(x) \mid x \in X\}$.

Dado um conjunto X notamos por $k\langle X\rangle$, a k-álgebra associativa livre sobre X e por $\langle X\rangle$, o semigrupo livre com unidade sobre X.

Mais diante definiremos o conceito de ambiguidade o qual sera útil para construir a resolução projetiva desejada. A seguir apresentamos um Teorema que envolve este conceito e permite demonstrar a existência de um sistema de redução que satisfaz a condição do Diamante dado um ideal bilateral de kQ.

Teorema 11. *Seja X um conjunto, $\mathcal{R}$ um sistema de redução para $k\langle X\rangle$ e $\leq$ uma ordem parcial sobre $\langle X\rangle$ que satisfaz a condição da cadeia descendente para todo $(s,f)\in\mathcal{R}$ e se $c\in supp(f)$ então $s>c$. Além disso, se $b<b'$ então $abc<ab'c$ para quaisquer $b,b',a,c\in\langle X\rangle$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Todas as ambiguidades de $\mathcal{R}$ são resolvíveis.*
2. *Todos os elementos em $k\langle X\rangle$ são de redução única.*
3. *O conjunto das classes dos caminhos irredutíveis é uma k-base de kQ/I, onde I é o ideal bilateral gerado pelo conjunto $\{s-f \mid (s,f)\in\mathcal{R}\}$.*

Proposição 13. *Se I é um ideal bilateral de kQ, existe um sistema de redução $\mathcal{R}$ que satisfaz a condição do Diamante para I (Definição 29).*

Demonstração. Seja $\leq$ uma boa ordem sobre $Q_0\cup Q_1$, e $\omega : Q_1\to\mathbb{N}\setminus\{0\}$ uma função peso. Considere a ordem total $\leq_\omega$ peso-lexicográfica sobre $Q_{\geq 0}$. Seja

$$S := Mintip(I) = \{p\in tip(I) \mid p'\notin tip(I) \text{ se } p' \text{ é divisor próprio de } p\}.$$

Para cada $s\in S$, $s=tip(x)$ para algum $x\in I$, então podemos escolher $f_s\in kQ$ paralelo a s, tal que $f_s<_\omega s$ e $s-f_s\in I$.

Vamos mostrar primeiro que o sistema de redução $\mathcal{R}=\{(s,f_s)\}_{s\in S}$ é tal que $I=\langle s-f_s\rangle_{s\in S}$ e todo caminho é de redução única.
A inclusão $\langle s-f_s\rangle_{s\in S}\subseteq I$ é clara pela escolha dos f_s. Seja $x\in I$, então podemos escrever x da forma $\sum_{i=1}^n\lambda_i c_i$, com $tip(x)=c_1$. Existe $s\in S$ tal que s divide c_1, isto é, existem $a,c\in Q_{\geq 0}$ tais que $asc=c_1$.
Seja $x'=\lambda_1 af_sc+\sum_{i=2}^n\lambda_i c_i$, logo $x=\lambda_1 a(s-f_s)c+x'$, o que implica $x'\in I$. Note que $c_1>_\omega tip(x')$. Se $x'=0$ claramente $x\in\langle s-f_s\rangle_{s\in S}$, caso contrário, podemos repetir o processo anterior obtendo $x''\in kQ$ com $tip(x')>_\omega tip(x'')$ e $x=\lambda_1 a(s-f_s)c+\lambda_1'a'(s'-f_s')c'+x''$. Como o conjunto $\{p\in Q_{\geq 0} \mid p<_\omega c_1\}$ é finito este processo só pode ser reiterado um número finito de vezes e portanto $x\in\langle s-f_s\rangle_{s\in S}$.

Como $s>_\omega f_s$ então todo caminho é de redução finita pelo fato de $\leq_\omega$ ser compatível com concatenação. Dado p um caminho para toda redução r temos que $p-r(p)\in\langle s-f_s\rangle_{s\in S}=I$. Sejam r e t duas reduções tais que $r(p)$ e $t(p)$ são irredutíveis. Logo $r(p)-t(p)=(p-t(p))-(p-r(p))\in I$. Se $r(p)-t(p)\neq 0$ então $d=tip(r(p)-t(p))$ é divisível por algum $s\in S$, existem $a,c\in Q_{\geq 0}$ tais que $asc=d$, e a redução $r_{a,s,c}$ atua de maneira não trivial sobre $r(p)$ ou sobre $t(p)$, obtendo uma contradição.

Pelo anterior, dado $s\in S$, existe uma redução r tal que $r(f_s)=f_s'$ é irredutível. Considere o sistema de redução $\mathcal{R}'=\{(s,f_s')\}_{s\in S}$. Note que o conjunto $\mathcal{B}$ dos caminhos irredutíveis com relação a $\mathcal{R}$ é o mesmo conjunto $\mathcal{B}'$ dos caminhos irredutíveis com relação a $\mathcal{R}'$. Pelo Teorema 11. $kQ/I=kQ/I'$ com $I'=\langle s-f_s'\rangle_{s\in S}$, mas $I'\subseteq I$ pois $s-f_s\in I$ e $f_s-f_s'\in I$ para todo $s\in S$. Portanto $I=\langle s-f_s'\rangle_{s\in S}$. Toda redução com relação a $\mathcal{R}'$ é uma composição de reduções relativas a $\mathcal{R}$, logo todo caminho é de redução única com relação a $\mathcal{R}'$. Como f_s' é irredutível com relação a $\mathcal{R}$ e $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ então f_s' é irredutível com relação a $\mathcal{R}'$.

□

3.1.1 Construção de um sistema de redução que satisfaz a condição do Diamante

Lema 14. *Seja $r = (r_n, \ldots, r_1)$ uma redução com $r_k = r_{a_k, \rho_k, c_k}$, $\rho_k = (s_k, f_k)$ para todo $1 \leq k \leq n$. Então $x - r(x) \in \langle\{s_k - f_k \mid 1 \leq k \leq n\}\rangle$.*

Teorema 12. *Seja I um ideal bilateral de kQ gerado por um conjunto enumerável X. Existe um sistema de redução $\mathcal{R}'$ tal que*

(1) I é o ideal bilateral gerado pelo conjunto $\{s - f\}_{(s,f)\in\mathcal{R}'}$,

(2') Todo caminho é de redução finita, e

(3) Para todo $(s, f) \in \mathcal{R}'$, f é irredutível.

Demonstração. Fixemos uma boa ordem sobre $Q_0 \cup Q_1$, e uma função $\omega : Q_1 \to \mathbb{N}\setminus\{0\}$. Considere a ordem total $\leq_\omega$ *peso-lexicográfica* sobre $Q_{\geq 0}$. Dado $x \in X$, podemos expressar x da forma $x = s_x - f_x$ de tal maneira que s_x seja mônico e $s_x >_\omega f_x$. Defina $\mathcal{R}_X := \{(s_x, f_x)\}_{x\in X}$. O sistema $\mathcal{R}_X$ satisfaz as condições (1) e (2'). Se $\mathcal{R}_X$ satisfaz (3) o resultado está mostrado. Caso contrário, defina

$$\mathcal{R}' := \{(s_x, r_x(f_x)) \mid r_x \text{ é uma redução tal que } r_x(f_x) \text{ é irredutível, } x \in X\}$$

$\mathcal{R}'$ está bem definido pois todo caminho é de redução finita com relação a $\mathcal{R}_X$. $\mathcal{R}'$ satisfaz as condições (2') e (3), vamos mostrar que satisfaz (1). Note que $\pi(r_x(f_x)) = \pi(f_x) = \pi(s_x)$, logo $\pi(s_x - r_x(f_x)) = 0$ e

$$\langle s_x - r_x(f_x)\rangle_{x\in X} \subseteq \langle s_x - f_x\rangle_{x\in X} = I$$

Por conveniência vamos reescrever $\mathcal{R}_X$ da forma $\{(s_i, f_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ de tal maneira que $s_i \leq_\omega s_{i+1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar por indução que $s_i - f_i \in \langle s_x - r_x(f_x)\rangle_{x\in X}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Como $s_1 \leq_\omega s_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e todo termo que aparece em f_1 é estritamente menor que s_1, então f_1 é irredutível. Logo, $r_1(f_1) = f_1$. Seja $i > 1$ e suponha $s_j - f_j \in \langle s_x - r_x(f_x)\rangle_{x\in X}$ para todo $j \leq i$. O elemento f_{i+1} só pode ter termos divisíveis por s_j com $j \leq i$. Pelo Lema (14) $r_{i+1}(f_{i+1}) - f_{i+1} \in \langle s_j - f_j\rangle_{j=1}^{i}$, e $\langle s_j - f_j\rangle_{j=1}^{i} \subseteq \langle s_x - r_x(f_x)\rangle_{x\in X}$ pela hipótese de indução. Logo, $r_{i+1}(f_{i+1}) - f_{i+1} \in \langle s_x - r_x(f_x)\rangle_{x\in X}$, o que implica $s_{i+1} - f_{i+1} \in \langle s_x - r_x(f_x)\rangle_{x\in X}$.

□

Exemplo 11. *Vamos ver que nem todo sistema de redução que satisfaz as condições do Lema 12. pode ser obtido pelo método usado na demonstração do mesmo Lema. Seja*

$$A = k\langle x, y, z\rangle/(x^3 + y^3 + z^3 - xyz),$$

e $\mathcal{R} = \{(xyz, x^3 + y^3 + z^3)\}$. Claramente $\mathcal{R}$ satisfaz as condições (1) e (3). Podemos expressar de maneira única todo caminho (monômio) em A por $p = x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_n^{a_n}$, com $x_i \in \{x, y, z\}$, $x_i \neq x_{i+1}$ para todo $1 \leq i \leq n-1$, e $a_i \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ para todo i. Vamos mostrar por indução sobre n que todo caminho é de redução finita. Se $n = 1$, p é irredutível. Vamos supor que todo caminho que é produto de potencias de n variáveis ou menos é de redução finita, e seja $p = x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_{n+1}^{a_{n+1}}$. Se existe uma redução básica tal que $r(p) \neq p$ é porque $p = x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_k^{a_k}xyzx_{k+4}^{a_{k+4}}\cdots x_{n+1}^{a_{n+1}}$, e $r = r_{a,\rho,c}$ com $a = x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_k^{a_k}, c = x_{k+4}^{a_{k+4}}\cdots x_{n+1}^{a_{n+1}}$ e $\rho = (xyz, x^3 + y^3 + z^3)$. Nesse caso

$$r(p) = x_1^{a_1}x_2^{a_2}\cdots x_k^{a_k}(x^3 + y^3 + z^3)x_{k+4}^{a_{k+4}}\cdots x_{n+1}^{a_{n+1}}.$$

Note que cada um dos termos em $r(p)$ satisfaz a hipótese de indução. Pela hipótese de indução cada um dos termos é de redução finita, portanto $r(p)$ é de redução finita. Isto implica que p é de redução *finita.*

O sistema $\mathcal{R}$ *não pode ser obtido pelo método anterior, pois dada qualquer ordem* $\leq$ *sobre* $\{x, y, z\}$ *e qualquer função peso* ω *temos* $\omega(xyz) = \omega(x) + \omega(y) + \omega(z) \leq \omega(u^3)$*, com* $u = max_{\leq_\omega}\{x, y, z\}$.

Ou seja não é possível via uma ordem admissível obter o sistema acima. No entanto, por exemplo para construir resoluções projetivas, este sistema é muito bom. Esse exemplo mostra uma vantagem de usar os métodos de Chouhy e Solotar sobre os métodos de Green de ordens admissíveis. Em alguns casos é muito interessante considerar sistemas que satisfazem as condições do lema do diamante, mesmo que eles não sejam obtidos por ordens admissíveis. No entanto existe toda uma teoria desenvolvida usando ordens admissíveis, isso justifica o seu estudo.

Definição 30. *Seja* $\mathcal{R}$ *um sistema de redução:*

- *Uma* ***ambiguidade de inclusão*** *é uma* $5-$*upla* $(\rho_1, \rho_2, a, b, c)$ *com* $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{R}$*,* $a, b, c \in Q_{\geq 0}$*, tal que* $\rho_1 = (abc, f_1)$ *e* $\rho_2 = (b, f_2)$ *para* $f_1, f_2 \in kQ$*.*
  Se existem reduções $r = (r_n, \ldots, r_1), t = (t_m, \ldots, t_1)$ *tais que* $r_1 = r_{1,\rho_1,1}, t_1 = r_{a,\rho_2,c}$ *e* $r(abc) = t(abc)$*, dizemos que* $(\rho_1, \rho_2, a, b, c)$ *é* ***resolvível****.*

- *Uma* ***ambiguidade de sobreposição*** *é uma* $5-$*upla* $(\rho_1, \rho_2, a, b, c)$ *com* $\rho_1, \rho_2 \in \mathcal{R}$*,* $a, b, c \in Q_{\geq 0}$*, tal que* $\rho_1 = (ab, f_1)$ *e* $\rho_2 = (bc, f_2)$ *para* $f_1, f_2 \in kQ$*. Dizemos que uma ambiguidade de sobreposição* $(\rho_1, \rho_2, a, b, c)$ *é* ***minimal*** *se não existem ambiguidades de sobreposição* $(\rho_1', \rho_2', x, y, z)$ *com* xyz *divisor próprio de* abc*.*
  Se existem reduções $r = (r_n, \ldots, r_1), t = (t_m, \ldots, t_1)$ *tais que* $r_1 = r_{1,\rho_1,c}, t_1 = r_{a,\rho_2,1}$ *e* $r(abc) = t(abc)$*, dizemos que* $(\rho_1, \rho_2, a, b, c)$ *é* ***resolvível****.*

- *Uma* ***ambiguidade*** *é uma ambiguidade de inclusão ou uma ambiguidade de sobreposição.*

Proposição 14. *Seja* $\mathcal{R}$ *um sistema de redução que satisfaz as condições* $(1), (2')$ *e* (3)*.* $\mathcal{R}$ *satisfaz a condição do Diamante se e somente se todas as ambiguidades são resolvíveis.*

Exemplo 12. *Seja* $A = k\langle x, y\rangle/I$*, com* $I = \langle x^2, y^2, yx - \xi xy\rangle$*. Fixamos a ordem sobre as flechas* $x < y$ *e a função peso dada por* $\omega(x) = \omega(y) = 1$*. Seguindo o processo dado no Teorema(12) e o conjunto de geradores* $X = \{x^2, y^2, yx - \xi xy\}$ *obtemos o sistema de redução* $\mathcal{R}_X = \{(x^2, 0), (y^2, 0), (yx, \xi xy)\}$*. Este sistema satisfaz as condições* $(1), (2')$ *e* (3)*. Para verificar se as ambiguidades são resolvíveis vamos notar os elementos do sistema por* $\rho_1 = (x^2, 0), \rho_2 = (yx, \xi xy)$ *e* $\rho_3 = (y^2, 0)$*.*

Note que não existem ambiguidades de inclusão e que o conjunto de ambiguidades minimais de sobreposição é

$$\{(\rho_1, \rho_1, x, x, x), (\rho_2, \rho_1, y, x, x), (\rho_3, \rho_2, y, y, x), (\rho_3, \rho_3, y, y, y)\}$$

A ambiguidade $(\rho_1, \rho_1, x, x, x)$ *é resolvível pois* $r = r_{1,\rho_1,x}$ *e* $t = r_{x,\rho_1,1}$ *satisfazem* $r(x^3) = t(x^3) = 0$*. Do mesmo modo podemos mostrar que* $(\rho_3, \rho_3, y, y, y)$ *é resolvível. Para mostrar que a ambiguidade* $(\rho_3, \rho_2, y, y, x)$ *é resolvível consideramos as reduções* $r = r_{1,\rho_3,x}$ *e* $t = (r_{x,\rho_3,1}, r_{1,\rho_2,y}, r_{y,\rho_2,1})$*. Nesse caso* $r(y^2x) = t(y^2x) = 0$*. As reduções* $r = (r_{1,\rho_1,y}, r_{x,\rho_2,1}, r_{1,\rho_2,x})$ *e* $t = r_{y,\rho_1,1}$ *fazem a ambiguidade* $(\rho_2, \rho_1, y, x, x)$ *resolvível. Portanto, o sistema de redução* $\mathcal{R}_X$ *satisfaz a condição do Diamante para* I*.*

Exemplo 13. *No Exemplo (11) o sistema* $\mathcal{R} = \{(xyz, x^3 + y^3 + z^3)\}$ *não tem ambiguidades, logo* $\mathcal{R}$ *satisfaz a condição do diamante para* I*. Vamos construir outro sistema de redução usando o processo do Teorema (12). Considere a ordem* $x < y < z$ *e a função peso dada por* $\omega(x) = \omega(y) = \omega(z) = 1$*. Seja* $X = x^3 + y^3 + z^3 - xyz$*. Com isto o sistema de redução é* $\mathcal{R}_X = \{(z^3, xyz - x^3 - y^3)\}$ *e satisfaz as condições* $(1), (2')$ *e* (3)*. A única ambiguidade minimal neste caso é* (ρ, ρ, z, z^2, z) *onde* $\rho = (z^3, xyz - x^3 - y^3)$*. Esta ambiguidade não resolvível pois* $r_{z,\rho,1}(z^4) = zxyz - zx^3 - zy^3$ *e* $r_{1,\rho,z}(z^4) = xyz^2 - x^3z - y^3z$ *são irredutíveis e distintos . Portanto* $\mathcal{R}_X$ *não satisfaz a condição do Diamante para* I*.*

Se temos um sistema de redução $\mathcal{R}$ que satisfaz as condições $(1), (2')$ e (3) mas tem ambiguidades não resolvíveis podemos adicionar elementos ao sistema de tal forma que o novo sistema tenha ditas ambiguidades resolvíveis. De fato, se $\rho = (\rho_1, \rho_2, a, b, c)$ é uma ambiguidade não resolvível, escolha duas reduções $r = (r_n, \dots, r_1)$ e $t = (t_m, \dots, t_1)$ tais que $r(abc)$ e $t(abc)$ são irredutíveis distintos com r_1 e t_1 como na Definição(30). Podemos escrever $r(abc) - t(abc)$ da forma $s - f$ com $f <_\omega s$ e seja f' irredutivel tal que $r(f) = f'$ para alguma redução r. O sistema $\mathcal{R}' := \mathcal{R} \cup \{(s, f')\}$ satisfaz as condições $(1), (2')$ e (3) e ρ é resolvível com relação a este novo sistema. Ao adicionar o novo elemento ao sistema poderiam aparecer novas ambiguidades não resolvíveis e nesse caso repetimos o passo anterior tantas vezes quanto forem necessárias (este processo poderia ser infinito) até não ter ambiguidades não resolvíveis, obtendo assim um sistema de redução que satisfaz a condição do Diamante para I.

Exemplo 14. *Sejam*

$$A = k\langle x, y, z\rangle/(x^3 + y^3 + z^3 - xyz),$$

e $\mathcal{R} = \{(z^3, xyz - x^3 - y^3)\}$*. No Exemplo(13) vimos que* (ρ, ρ, z, z^2, z) *com* $\rho = (z^3, xyz - x^3 - y^3)$ *é uma ambiguidade não resolvível pois* $r_{z,\rho,1}(z^4) = zxyz - zx^3 - zy^3$ *e* $r_{1,\rho,z}(z^4) = xyz^2 - x^3z - y^3z$ *são irredutíveis distintos. A diferença destes dois irredutíveis é* $xyz^2 - x^3z - y^3z - zxyz + zx^3 + zy^3$*. Defina* $\mathcal{R}_1 = \{\rho, \rho_1\}$*, onde*

$$\rho_1 = (xyz^2, x^3z + y^3z + zxyz - zx^3 - zy^3).$$

A ambiguidade (ρ, ρ, z, z^2, z) *agora é resolvível. De fato, se* $r = (r_{1,\rho_1,1}, r_{1,\rho,z})$ *e* $t = r_{z,\rho.1}$*, então* $r(z^4) = t(z^4) = zxyz - zx^3 - zy^3$*. O novo conjunto de ambiguidades é* $\{(\rho, \rho, z, z^2, z), (\rho_1, \rho, xy, z^2, z)\}$*. Esta nova ambiguidade não é resolvível. Temos que* $r_{z,\rho_1,1} \circ r_{1,\rho_1,z}(xyz^3) = x^3z^2 + y^3z^2 + z^2xyz - z^2x^3 - z^2y^3$ *e* $r_{xy,\rho,1}(xyz^3) = xyxyz - xyx^3 - xy^4$ *são dois irredutíveis distintos. Logo, o novo sistema é* $\mathcal{R}_2 := \{\rho, \rho_1, \rho_2\}$*, onde*

$$\rho_2 = (y^3z^2, -x^3z^2 - z^2xyz + z^2x^3 + z^2y^3 + xyxyz - xyx^3 - xy^4).$$

A ambiguidade $(\rho_1, \rho, xy, z^2, z)$ *é resolvível com relação a* $\mathcal{R}_2$*. Ao adicionar* ρ_2 *ao sistema aparece a ambiguidade* $(\rho_2, \rho, y^3, z^2, z)$ *a qual resulta ser resolvível. Portanto, o sistema* $\mathcal{R}_2$ *satisfaz a condição do Diamante para* I*.*

Corolário 5. *Seja* $\leq$ *uma ordem sobre* $Q_0 \cup Q_1$*,* ω *uma função peso e* I *um ideal bilateral de* kQ*. Se* X *é um conjunto de relações que geram* I *e* $\mathcal{R}_X$ *satisfaz as condições* $(1), (2')$ *e* (3)*e toda ambiguidade é resolvível, então* $\{(s, f) \in \mathcal{R}_X \mid s \notin Inc(\mathcal{R}_X)\}$ *é um sistema de redução que satisfaz a condição do Diamante para* I*, não tem ambiguidades de inclusão e*

$$\mathcal{R}_{\leq,\omega} = \{(s, f) \in \mathcal{R}_X \mid s \notin Inc(\mathcal{R}_X)\}$$

Além disso, $p \in tip(I)$ *se e somente se existe* $q \in tip(X)$ *tal que* q *divide* p*.*

Nota 7. *Dado* I *um ideal bilateral de* kQ *e* $\mathcal{R}$ *um sistema de redução que satisfaz a condição do Diamante para* I*, podemos assumir* $S \subseteq Q_{\geq 2}$*. Este fato e o Corolário anterior são demonstrados em [CS15] e são de muita utilidade para o nosso objetivo.*

3.2 Ambiguidades

Seja I um ideal bilateral de kQ e $\mathcal{R}$ um sistema de redução que satisfaz a condição do Diamante para I. Podemos assumir que $\mathcal{R}$ não tem ambiguidades de inclusão e $S \subseteq Q_{\geq 2}$.

Definição 31. *Seja* $n \geq 2$ *e* $p \in Q_{\geq 0}$*,*

1. *O caminho* p *é uma* ***n-ambiguidade a esquerda*** *se existem* $u_0 \in Q_1$ *e* $u_1, \dots, u_{n-1}$ *caminhos irredutíveis tais que*

   (a) $p = u_0 u_1 \cdots u_{n-1}$,

   (b) Para todo i, o caminho $u_i u_{i+1}$ é redutível mas $u_i d$ é irredutível para todo divisor próprio a esquerda de u_{i+1}.

2. *O caminho p é uma **n-ambiguidade a direita** se existem $v_0 \in Q_1$ e $v_1, \ldots, v_{n-1}$ caminhos irredutíveis tais que*

   (a) $p = v_{n-1} \cdots v_1 v_0$,

   (b) Para todo i, o caminho $v_{i+1} v_i$ é redutível mas $d v_i$ é irredutível para todo divisor próprio a direita de v_{i+1}.

Definimos $\mathcal{A}_0 := Q_0$, $\mathcal{A}_1 := Q_1$, $\mathcal{A}_2 := S$ e para $n \geq 2$ $\mathcal{A}_n$ e $\mathcal{A}'_n$ são o conjunto de n-ambiguidades a esquerda e a direita respectivamente.

As ambiguidades para caminhos foram introduzidas por Green e Zacharia, para o estudo da álgebra de extensões de uma álgebra monomial e o conjunto das n-ambiguidades foram chamados por eles de $AP(n)$ [GHZ+85].

A seguir apresentamos alguns resultados importantes envolvendo os conjuntos das n-ambiguidades e que não demonstraremos aqui. As demonstrações podem ser encontradas em [Bar97] e [CS15].

Proposição 15. *Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ e $p \in Q_{\geq 1}$. Se $u_0, \widehat{u}_0 \in Q_1$, $u_1, \ldots, u_{n-1}, \widehat{u}_1, \ldots, \widehat{u}_{n-1}$ são caminhos em Q tais que $u_0, \ldots, u_{n-1}$ e $\widehat{u}_0, \ldots, \widehat{u}_{n-1}$ satisfazem as condições* (1*a*) *e* (1*b*) *da Definição(31) para p, então $n = m$ e $u_i = \widehat{u}_i$ para $0 \leq i \leq n-1$.*

Corolário 6. *Dado $n, m \geq 0$, $\mathcal{A}_n \cap \mathcal{A}_m = \emptyset$ se $n \neq m$.*

Proposição 16. *Suponha $S \subseteq Q_2$. Para todo $n \geq 1$, podemos definir o conjunto das n-ambiguidades por*

$$\mathcal{A}_n = \{\alpha_0 \cdots \alpha_{n-1} \in Q_n \mid \alpha_i \in Q_1 \textit{ para todo } i \textit{ e } \alpha_{i-1}\alpha_i \in S\}.$$

Esta proposição fornece uma ferramenta que facilita o calculo das n-ambiguidades em casos específicos como podemos ver nos seguintes exemplos.

Exemplo 15. *Seja $A = k\langle x, y\rangle / I$, com $I = \langle x^2, y^2, yx - \xi xy\rangle$ como no Exemplo 12. Já mostramos que o sistema $\mathcal{R} = \{(x^2, 0), (y^2, 0), (yx, \xi xy)\}$é um sistema de redução que satisfaz a condição do Diamante para I. Este sistema não tem ambiguidades de inclusão e $S = \{x^2, y^2, yx\} \subseteq Q_2$. Pela Proposição 16 o conjunto $\mathcal{A}_n$ coincide com o conjunto de caminhos de comprimento n que não são divisíveis por xy, ou seja*

$$\mathcal{A}_n = \{y^s x^t \mid s + t = n\}.$$

3.2.1 Álgebras monomiais

Seja $A = kQ/I$ com I um ideal admissível gerado por um número finito de caminhos em Q. Neste caso dizemos que A é uma **álgebra monomial**. Vamos fixar uma ordem $<$ sobre $Q_0 \cup Q_1$ e a partir desta ordem $<$ a ordem comprimento-lexicográfica sobre o conjunto de todos os caminhos lendo da origem ao término de cada caminho. Esta ordem admissível permite construir um conjunto finito de geradores do I notado por $Minsharp_<(I)$ e tal que se $p \in Minsharp_<(I)$ então nenhum subdivisor próprio de p pertence a $Minsharp_<(I)$ [FFG93]. Defina $\mathcal{R} := \{(s, 0) \mid s \in Minsharp_<(I)\}$ e note que $\mathcal{R}$ é um sistema de redução que satisfaz a condição do Diamante para I. Além disso, $S \subseteq Q_{\geq 2}$ pelo fato de I ser um ideal admissível.

Em [Bar97] Bardzell constroi resoluções projetivas a partir dos elementos dos conjuntos notados $AP(n)$, os quais vamos definir usando os elementos do $Minsharp_<(I)$ e mostrar que no caso monomial coincidem com os conjuntos das n-ambiguidades.

Seja $p_i \in Minsharp_<(I) = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$, Υ um caminho dirigido tal que p_i divide a Υ e seja $Minsharp^{\Upsilon}_<(I)$ o conjunto dos elementos em $Minsharp_<(I)$ que dividem Υ. Escolha $r_2 \in Minsharp^{\Upsilon}_<(I)$ tal que $o(p_i) \lnsim o(r_2) \lnsim t(p_i)$ sobre Υ, com $o(r_2)$ minimal com relação a $\lesssim$ (caso ele exista). Suponha que já escolhemos $r_1 = p_i, r_2, \ldots, r_j$ e seja

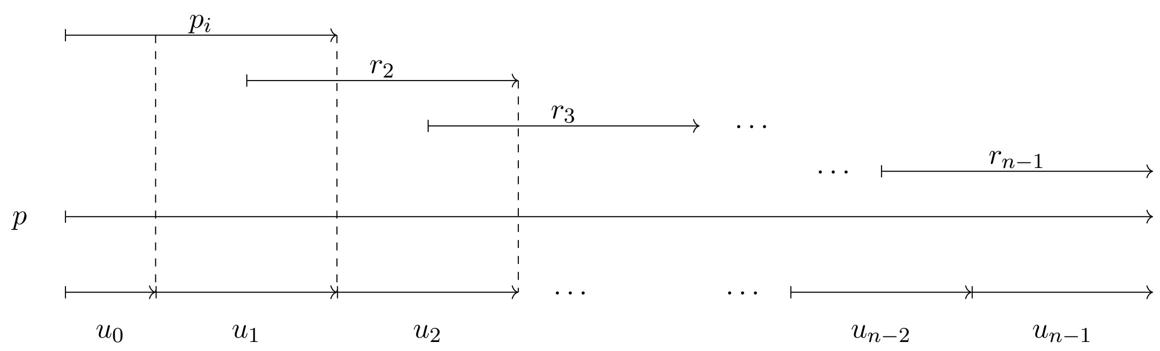
$$L_{j+1} = \{r \in Minsharp^{\Upsilon}_<(I) \mid t(r_{j-1}) \lesssim o(r) \lnsim t(r_j)\}.$$

Se $L_{j+1} \neq \emptyset$ escolha $r_{j+1} \in L_{j+1}$ com $o(r_{j+1})$ minimal com relação a $\lesssim$.

Para todo $n \geq 2$, a sequência $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ construída define o caminho p_i^n com origem $o(r_1)$ e término $t(r_n)$. Tomando todos os caminhos Υ que p_i divide e os p_i^n correspondentes formamos o conjunto $AP_i(n)$. Finalmente, fazemos o processo anterior para cada $p_i \in Minsharp_<(I)$, obtendo o conjunto

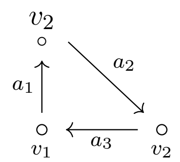
$$AP(n) := \bigcup_{i=1}^{m} AP_i(n)$$

O seguinte gráfico permite ver uma correspondência natural entre $AP(n)$ e $\mathcal{A}_n$ para todo $n \geq 2$.



Definimos por $AP(0)$ o conjunto dos vertices e por $AP(1)$ o conjunto das flechas. Note que $AP(2)$ coincide com o conjunto de geradores $Minsharp_<(I)$.

Exemplo 16. *Seja $A = kQ/I$ com Q o seguinte carcás*



e $I = \langle a_1a_2, a_2a_3, a_3a_1 \rangle$. Neste caso $AP(0) = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $AP(1) = \{a_1, a_2, a_3\}$. Os elementos geradores de I já fornecem os elementos de $AP(2)$ pois não se dividem entre eles, logo $AP(2) = \{a_1a_2, a_2a_3, a_3a_1\}$. Pela Proposição 16 $AP(n)$ é o conjunto de todos os caminhos (os três caminhos que começam em cada um dos vértices) de comprimento n, para todo $n \geq 2$.

3.3 Resolução projetiva

Dada uma álgebra $A = kQ/I$ e um sistema de redução $\mathcal{R}$ que satisfaz a condição do Diamante para I existe uma álgebra monomial associada a A dada por $A_S := kQ/\langle S \rangle$, a qual tem como k-base

$\pi'(\mathcal{B})$, onde π' é a projeção canônica $\pi' : kQ \to A_S$.

Podemos definir aplicações k-lineares $i : A \to kQ$ e $i' : A_S \to kQ$ tais que $i(\pi(b)) = i'(\pi'(b)) = b$ para todo $b \in \mathcal{B}$.

Note que o $kQ-$bimódulo $kQ \otimes_E k\mathcal{A}_n \otimes_E kQ$ é um k-espaço vetorial com base $\{a \otimes p \otimes c \mid a, c \in Q_{\geq 0}, p \in \mathcal{A}_n, apc \neq 0 \text{ em } kQ\}$. Considere a seguinte sequência de kQ bimódulos e aplicações

$$\cdots \xrightarrow{f_3} kQ \otimes_E k\mathcal{A}_2 \otimes_E kQ \xrightarrow{f_2} kQ \otimes_E k\mathcal{A}_1 \otimes_E kQ \xrightarrow{f_1} kQ \otimes_E kQ \xrightarrow{f_0} kQ \to 0,$$

onde

(1) $f_0(a \otimes b) = ab$,

(2) Se n é impar, f_n é o homomorfismo de kQ-bimódulos dado por

$$f_n(1 \otimes q \otimes 1) = v_{n-1} \otimes v_{n-2} \cdots v_0 \otimes 1 - 1 \otimes u_0 \cdots u_{n-2} \otimes u_{n-1},$$

para todo $q \in \mathcal{A}_n$, onde $q = u_0 \cdots u_{n-1} = v_{n-1} \cdots v_0$ são as fatorações a esquerda e direita de q como n-ambiguidade respectivamente.

(3) Se n é par, f_n é o homomorfismo de kQ-bimódulos dado por

$$f_n(1 \otimes q \otimes 1) = \sum_{\substack{apc=q \\ p \in \mathcal{A}_{n-1}}} a \otimes p \otimes c,$$

para todo $q \in \mathcal{A}_n$.

Notação: Para $n \geq 0$ fixamos a seguinte notação

$$\begin{aligned} \pi_n &:= \pi \otimes id_{k\mathcal{A}_n} \otimes \pi, & \pi'_n &:= \pi' \otimes id_{k\mathcal{A}_n} \otimes \pi' \\ i_n &:= i \otimes id_{k\mathcal{A}_n} \otimes i, & i'_n &:= i' \otimes id_{k\mathcal{A}_n} \otimes i', \\ \beta_n &:= i_n \circ \pi_n, & \beta'_n &:= i'_n \circ \pi'_n. \end{aligned}$$

Estes homomorfismos f_n induzem homomorfismos de A-bimódulos e A_S-bimódulos dados por $\delta_n := \pi_{n-1} \circ f_n \circ i_n$ e $\delta'_n := \pi'_{n-1} \circ f_n \circ i'_n$ respectivamente. Temos o seguinte diagrama comutativo onde a primeira linha é a resolução projetiva mencionada e a segunda linha é a sequência de A bimódulos junto com as aplicações induzidas δ_n.

$$\begin{tikzcd} kQ \otimes_E k\mathcal{A}_2 \otimes_E kQ \arrow[r, "f_2"] & kQ \otimes_E k\mathcal{A}_1 \otimes_E kQ \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, shift left, "\pi_1"] & kQ \otimes_E kQ \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, shift left, "\pi_0"] & kQ \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \\ A \otimes_E k\mathcal{A}_2 \otimes_E A \arrow[r, "\delta_2"] \arrow[u, "i_2"] & A \otimes_E k\mathcal{A}_1 \otimes_E A \arrow[r, "\delta_1"] \arrow[u, shift left, "i_1"] & A \otimes_E A \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[u, shift left, "i_0"] & A \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Analogamente, obtemos o complexo de A_S-bimódulos

$$\cdots \xrightarrow{\delta'_3} A_S \otimes_E k\mathcal{A}_2 \otimes_E A_S \xrightarrow{\delta'_2} A_S \otimes_E k\mathcal{A}_1 \otimes_E A_S \xrightarrow{\delta'_1} A_S \otimes_E A_S \xrightarrow{\delta'_0} A_S \longrightarrow 0,$$

Este complexo é uma resolução, pois de fato coincide com a resolução projetiva dada por Bardzell em [Bar97]. Para obter uma resolução projetiva de A são necessárias mais ferramentas além do complexo de A-bimódulos induzido pelos f_n.

Exemplo 17. *Em [Bar97] Bardzell calcula uma resolução projetiva para a álgebra do Exemplo 16 e a partir desta resolução apresenta os grupos de cohomologia. Vamos mostrar o calculo dos grupos de cohomologia usando a notação de Bardzell, mas lembrando que coincide com a resolução projetiva anterior, pois neste caso $A_S = A$.*

Usando os conjuntos das n-ambiguidades de A temos a resolução projetiva para A:

$$\cdots \to P_4 \xrightarrow{\phi_4} P_3 \xrightarrow{\phi_3} P_2 \xrightarrow{\phi_2} P_1 \xrightarrow{\phi_1} P_0 \to A \to 0$$

onde

$$\begin{aligned} P_0 &= (Av_1 \otimes v_1A) \oplus (Av_2 \otimes v_2A) \oplus (Av_3 \otimes v_3A) = P_3 = \cdots \\ P_1 &= (Av_1 \otimes v_2A) \oplus (Av_2 \otimes v_3A) \oplus (Av_3 \otimes v_1A) = P_4 = \cdots \\ P_2 &= (Av_1 \otimes v_3A) \oplus (Av_2 \otimes v_1A) \oplus (Av_3 \otimes v_2A) = P_5 = \cdots \end{aligned}$$

Aplicando o functor $Hom_{A^e}(\cdot, A)$ e usando o isomorfismo

$$Hom_{A^e}\left(\coprod_{AP(n)} Ao(p^n) \otimes t(p^n)A, A\right) \cong \coprod_{AP(n)} o(p^n)At(p^n)$$

calcular os grupos de cohomologia de A se reduz a calcular a cohomologia do seguinte complexo

$$0 \to P_0^* \xrightarrow{\phi_1^*} P_1^* \xrightarrow{0} P_2^* \xrightarrow{0} P_3^* \xrightarrow{\phi_4^*} P_4^* \to \cdots$$

onde

$$\begin{aligned} P_0^* &= v_1Av_1 \oplus v_2Av_2 \oplus v_3Av_3 &&= P_3^* = \cdots \\ P_1^* &= v_1Av_2 \oplus v_2Av_3 \oplus v_3Av_1 &&= P_4^* = \cdots \\ P_2^* &= v_1Av_3 \oplus v_2Av_1 \oplus v_3Av_2 &&= 0 = P_5^* = \cdots \end{aligned}$$

Pela periodicidade de (17) basta calcular $HH^i(A)$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Trivialmente $HH^2(A) = HH^5(A) = 0$.

Como $\phi_1(o(a) \otimes t(a)) = a \otimes t(a) - o(a) \otimes a$ para toda flecha a então

$$\begin{aligned} \phi_1^*(v_1, 0, 0) &= (a_1v_1t(a_1) - o(a_1)v_1a_1, a_2v_1t(a_2) - o(a_2)v_1a_2, a_3v_1t(a_3) - o(a_3)v_1a_3) \\ &= (-a_1, 0, a_3). \end{aligned}$$

Analogamente $\phi_1^*(0, v_2, 0) = (a_1, -a_2, 0)$ e $\phi_1^*(0, 0, v_3) = (0, a_2, -a_3)$.

Se $\alpha = (k_1v_1, k_2v_2, k_3v_3)$ então $\phi_1^*(\alpha) = (k_2-k_1)(a_1, 0, 0)+(k_3-k_2)(0, a_2, 0)+(k_1-k_3)(0, 0, a_3)$. Logo, se $\alpha \in Ker(\phi_1^*)$ então $k_1 = k_2 = k_3$ e portanto $HH^0(A) = \{k(v_1, v_2, v_3) \mid k \in K\} \cong K$.

Para calcular $HH^3(A)$ basta calcular $Ker(\phi_4^*)$. Temos que $\phi_4(o(a) \otimes t(a)) = a \otimes t(a) + o(a) \otimes a$ para toda flecha a, então $\phi_4^*(v_1, 0, 0) = (a_1, 0, a_3), \phi_4^*(0, v_2, 0) = (a_1, a_2, 0)$ e $\phi_4^*(0, 0, v_3) = (0, a_2, a_3)$, portanto $HH^3(A) = 0$.

Como $dimP_0^* = 3$ e $dim(ker(\phi_1^*)) = 2$ então $dim(HH^1(A)) = 1$ e $HH^1(A) \cong K$.

Finalmente $HH^4(A) = P_1^*/Im(\phi_4^*)$. Seja $(l_1a_1, l_2a_2, l_3a_3) \in P_1^*$, então

$$\phi_4^*\left(\frac{1}{2}(l_1-l_2+l_3)\,v_1,\frac{1}{2}(l_2+l_1-l_3)\,v_2,\frac{1}{2}(l_2-l_1+l_3)\,v_3\right)=(l_1a_1,l_2a_2,l_3a_3)$$

Logo, $HH^4(A)=0$.

Em [Skö08] Sköldberg fornece uma contração de homotopia para a resolução projetiva de Bardzell. Neste caso mais geral vamos usar esta mesma ideia de contraçaõ de homotopia. Definimos o homomorfismo de $kQ-E-$bimódulos $S_0: kQ \to kQ\otimes_E kQ$ por $S_0(x)=x\otimes 1$ e para $n\geq 1$ definimos os homomorfismos de $kQ-E$-bimódulos $S_n: kQ\otimes_E k\mathcal{A}_{n-1}\otimes_E kQ \to kQ\otimes_E k\mathcal{A}_n\otimes_E kQ$ por:

$$S_n(1\otimes q\otimes b)=(-1)^n\sum_{\substack{apc=qb\\ p\in\mathcal{A}_n}} a\otimes p\otimes c$$

Os homomorfismos S_n induzem homomorfismos de $A-$ bimódulos $s_n: A\otimes_E k\mathcal{A}_{n-1}\otimes_E A\to A\otimes_E k\mathcal{A}_n\otimes_E A$ definidos por $s_n:=\pi_n\circ S_n\circ i_{n-1}$. Da mesma maneira temos homomorfismos de A_S-bimódulos $s'_n: A_S\otimes_E k\mathcal{A}_{n-1}\otimes_E A_S\to A_S\otimes_E k\mathcal{A}_n\otimes_E A_S$ definidos por $s'_n:=\pi'_n\circ S_n\circ i'_{n-1}$. A família de homomorfismos $\{s'_i\}_{i\geq 0}$ coincide com a contração de homotopia dada por Sköldberg em [Skö08], logo as seguintes igualdades são satisfeitas

$$s'_0\circ\delta'_0=id_{A_S\otimes_E A_S}\qquad,\qquad s'_n\circ\delta'_n+\delta'_{n-1}\circ s'_{n-1}=id_{A_S\otimes_E k\mathcal{A}_n\otimes_E A_S}$$

para todo $n\geq 1$.

Definimos sobre o conjunto $k^*Q_{\geq 0}:=\{\lambda p:\lambda\in k^*, p\in Q_{\geq 0}\}\cup\{0\}$ a relação $\preceq$ como a menor relação reflexiva e transitiva tal que $\lambda p\preceq\mu q$ se existe uma redução r tal que $r(\mu q)=\lambda p+x$, com $p\notin supp(x)$. Estabelecemos $0\preceq\lambda p$ para todo $\lambda p\in k^*Q_{\geq 0}$. Esta relação é compatível com a concatenação e satisfaz a condição da cadeia descendente (Lema 2.11 [CS15]).

Com ajuda da relação $\preceq$, dado $n\geq 1$ definimos os subconjuntos de $kQ\otimes_E k\mathcal{A}_n\otimes_E kQ$

$$\mathcal{L}_n^{\preceq}(\mu q):=\{\lambda a\otimes p\otimes c: a,c\in Q_{\geq 0}, p\in\mathcal{A}_n, \lambda apc\preceq\mu q\},$$

$$\mathcal{L}_n^{\prec}(\mu q):=\{\lambda a\otimes p\otimes c: a,c\in Q_{\geq 0}, p\in\mathcal{A}_n, \lambda apc\prec\mu q\},$$

e os subconjuntos de $A\otimes_E k\mathcal{A}_n\otimes_E A$

$$\overline{\mathcal{L}}_n^{\preceq}(\mu q):=\{\lambda\pi(b)\otimes p\otimes\pi(b'): b,b'\in\mathcal{B}, p\in\mathcal{A}_n, \lambda bpb'\preceq\mu q\}$$

$$\overline{\mathcal{L}}_n^{\prec}(\mu q):=\{\lambda\pi(b)\otimes p\otimes\pi(b'): b,b'\in\mathcal{B}, p\in\mathcal{A}_n, \lambda bpb'\prec\mu q\}$$

a fim de enunciar e mostrar alguns resultados que são base para a construção da resolução projetiva desejada.

Nota 8. *Usando as definições acima é fácil ver que os homomorfismos f_n e S_n "preservam"combinações $\mathbb{Z}$-lineares de elementos dos subconjuntos definidos anteriormente. Mais formalmente,*

$$f_{n+1}(x)\in\langle\mathcal{L}_n^{\preceq}(\mu q)\rangle_{\mathbb{Z}},\quad \text{para todo } x\in\mathcal{L}_{n+1}^{\preceq}(\mu q), \text{ e}$$
$$S_n(x)\in\langle\mathcal{L}_n^{\preceq}(\mu q)\rangle_{\mathbb{Z}},\quad \text{para todo } x\in\mathcal{L}_{n-1}^{\preceq}(\mu q).$$

Lema 15. *Se $n\geq 1$ e $\mu q\in k^*Q_{\geq 0}$, então temos as seguintes inclusões*

$$\pi_n\left(\mathcal{L}_n^{\preceq}(\mu q)\right)\subseteq\langle\overline{\mathcal{L}}_n^{\preceq}(\mu q)\rangle_{\mathbb{Z}} \text{ e}$$

$$\pi_n\left(\mathcal{L}_n^{\prec}(\mu q)\right)\subseteq\langle\overline{\mathcal{L}}_n^{\prec}(\mu q)\rangle_{\mathbb{Z}}$$

Lema 16. *Dado $n\geq 1$ e $\mu q\in k^*Q_{\geq 0}$, temos as seguintes inclusões*

1. $\delta_n\left(\overline{\mathcal{L}}_n^{\preceq}(\mu q)\right) \subseteq \langle \overline{\mathcal{L}}_{n-1}^{\preceq}(\mu q)\rangle_{\mathbb{Z}}$,

2. $\delta_n\left(\overline{\mathcal{L}}_n^{\prec}(\mu q)\right) \subseteq \langle \overline{\mathcal{L}}_{n-1}^{\prec}(\mu q)\rangle_{\mathbb{Z}}$,

3. $s_n\left(\overline{\mathcal{L}}_{n-1}^{\preceq}(\mu q)\right) \subseteq \langle \overline{\mathcal{L}}_{n}^{\preceq}(\mu q)\rangle_{\mathbb{Z}}$,

4. $s_n\left(\overline{\mathcal{L}}_{n-1}^{\prec}(\mu q)\right) \subseteq \langle \overline{\mathcal{L}}_{n}^{\prec}(\mu q)\rangle_{\mathbb{Z}}$.

Demonstração. Vamos demonstrar somente a primeira afirmação. As outras afirmações têm uma demonstração similar. Seja $x = \lambda\pi(b) \otimes p \otimes \pi(b') \in \overline{\mathcal{L}}_n^{\preceq}(\mu q)$, então

$$\delta_n(x) = \pi_{n-1}(f_n(i_n(x))) = \pi_{n-1}(f_n(\lambda b \otimes p \otimes b'))$$

Note que $\lambda b \otimes p \otimes b' \in \mathcal{L}_n^{\preceq}(\mu q)$, logo $f_n(\lambda b \otimes p \otimes b') \in \langle \mathcal{L}_{n-1}^{\preceq}(\mu q)\rangle_{\mathbb{Z}}$ pela Nota(8). Pelo Lema(15) podemos concluir que $\delta_n(x) \in \langle \overline{\mathcal{L}}_{n-1}^{\preceq}(\mu q)\rangle_{\mathbb{Z}}$.

□

Lema 17. *Seja $n \geq 0$ e $\mu q \in k^*Q_{\geq 0}$. Se $x = \lambda a \otimes p \otimes c \in \mathcal{L}_n^{\preceq}(\mu q)$ é tal que $\pi_n'(x) = 0$, então $\pi_n(x) \in \langle \overline{\mathcal{L}}_n^{\prec}(\mu q)\rangle_{\mathbb{Z}}$.*

Demonstração. Temos que $0 = \pi_n'(x) = \pi'(a) \otimes p \otimes \pi'(c)$, então $\pi'(a) = 0$ ou $\pi'(c) = 0$, isto é, $a \notin \mathcal{B}$ ou $c \notin \mathcal{B}$, o que implica $\beta(a) \prec a$ ou $\beta(c) \prec c$. Podemos supor sem perda de generalidade $\beta(a) \prec a$.

Sejam $\beta(a) = \sum_i \lambda_i b_i$ e $\beta(c) = \sum_j \lambda_j' b_j'$. Como $\lambda_i b_i \prec a$ e $\lambda_j b_j' \preceq c$ para quaisquer i, j, então $\lambda\lambda_i\lambda_j' b_i p b_j' \prec \lambda apc \preceq \mu q$ para todo i, j e portanto

$$\sum_{i,j} \lambda\lambda_i\lambda_j'\pi(b_i) \otimes p \otimes \pi(b_j') \in \langle \overline{\mathcal{L}}_n^{\prec}(\mu q)\rangle_{\mathbb{Z}}.$$

Computando $\pi_n(x)$ obtemos

$$\pi_n(x) = \pi_n(\beta(x)) = \pi_n\left(\sum_{i,j} \lambda\lambda_i\lambda_j' b_i \otimes p \otimes b_j'\right) = \sum_{i,j} \lambda\lambda_i\lambda_j'\pi(b_i) \otimes p \otimes \pi(b_j')$$

□

Corolário 7. *Seja $n \geq 2$, $\mu q \in k^*Q_{\geq 0}$ e $x \in \overline{\mathcal{L}}_n^{\preceq}(\mu q)$, então*

1. $\delta_{n-1} \circ \delta_n(x) \in \langle \overline{\mathcal{L}}_{n-2}^{\prec}(\mu q)\rangle_{\mathbb{Z}}$,

2. $x - \delta_{n+1} \circ s_{n+1}(x) - s_n \circ \delta_n \in \langle \overline{\mathcal{L}}_n^{\prec}(\mu q)\rangle_{\mathbb{Z}}$.

Lema 18. *Seja $n \in \mathbb{N}_0$, e seja $R = k$ ou $R = \mathbb{Z}$,*

1. *Se $d : A \otimes_E k\mathcal{A}_n \otimes_E A \to A \otimes_E k\mathcal{A}_{n-1} \otimes_E A$ é um homomorfismo de A-bimódulos tal que $(d - \delta_n)(1 \otimes p \otimes 1) \in \langle \overline{\mathcal{L}}_{n-1}^{\prec}(p)\rangle_R$ para todo $p \in \mathcal{A}_n$, então dado $x \in \langle \overline{\mathcal{L}}_n^{\preceq}(\mu q)\rangle_R$, $(d - \delta_n)(x) \in \langle \overline{\mathcal{L}}_{n-1}^{\prec}(\mu q)\rangle_R$ para todo $\mu q \in k^*Q_{\geq 0}$.*

2. *Se $\rho : A \otimes_E k\mathcal{A}_{n-1} \otimes_E A \to A \otimes_E k\mathcal{A}_n \otimes_E A$ é um homomorfismo de $A - E$-bimódulos tal que $(\rho - s_n)(1 \otimes p \otimes \pi(b)) \in \langle \overline{\mathcal{L}}_n^{\prec}(pb)\rangle_R$ para todo $p \in \mathcal{A}_n$ e $b \in \mathcal{B}$, então para todo $x \in \langle \overline{\mathcal{L}}_n^{\preceq}(\mu q)\rangle_R$, $(\rho - s_n)(x) \in \langle \overline{\mathcal{L}}_n^{\prec}(\mu q)\rangle_R$ para todo $\mu q \in k^*Q_{\geq 0}$.*

Demonstração. Seja $\mu q \in k^*Q_{\geq 0}$ e $x \in \langle \overline{\mathcal{L}}^{\preceq}_n(\mu q)\rangle_R$. Queremos mostrar que $(d-\delta_n)(x) \in \langle \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_{n-1}(\mu q)\rangle_R$. É suficiente mostrar a afirmação para $x = \lambda\pi(b) \otimes p \otimes \pi(b') \in \overline{\mathcal{L}}^{\preceq}_n(\mu q)$.

Pela hipótese, $(d-\delta_n)(1 \otimes p \otimes 1) \in \langle \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_{n-1}(p)\rangle_R$, logo $(d-\delta_n)\,(x) = \lambda\pi(b)(d-\delta_n)(1\otimes p \otimes 1)\pi(b')$ pertence a $\langle \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_{n-1}(\lambda bpb')\rangle_R$ como consequência do Lema(15). Como $\langle \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_{n-1}(\lambda bpb')\rangle_R \subseteq \langle \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_{n-1}(\mu q)\rangle_R$, então $(d-\delta_n)(x) \in \langle \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_{n-1}(\mu q)\rangle_R$.

$\square$

Proposição 17. *Seja $n \in \mathbb{N}_0$. Suponha que para todo $i \in \{1,\dots,n\}$ existem homomorfismos de $A-$bimódulos $d_i : A \otimes_E k\mathcal{A}_i \otimes_E A \to A \otimes_E k\mathcal{A}_{i-1} \otimes_E A$, e homomorfismos de $A-E$-bimódulos $\rho_i : A \otimes_E k\mathcal{A}_{i-1} \otimes_E A \to A \otimes_E k\mathcal{A}_i \otimes_E A$. Denote $d_0 = \mu$ e defina $\rho_0 : A \to A \otimes_E A$ como $\rho(a) = a \otimes 1$. Se*

(i) $d_{i-1} \circ d_i = 0$ *para todo* $i \in \{1,\dots,n\}$,

(ii) $(d_i - \delta_i)(1 \otimes q \otimes 1) \in \langle \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_{i-1}(q)\rangle_R$ *para todo* $i \in \{1,\dots,n\}$*e todo* $q \in \mathcal{A}_i$,

(iii) *para todo* $i \in \{0,\dots,n-1\}$ *e todo* $x \in \otimes_E k\mathcal{A}_i \otimes_E A$, $x = d_{i+1} \circ \rho_{i+1}(x) + \rho_i \circ d_i(x)$,

(iv) $(\rho_i - s_i)(1 \otimes q \otimes \pi(b)) \in \langle \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_i(qb)\rangle_R$ *para todo* $i \in \{1,\dots,n\}$ *para todo* $q \in \mathcal{A}_i$ *e todo* $b \in \mathcal{B}$,

então

1. *Existe um homomorfismo de A-bimódulos $d_{n+1} : A \otimes_E k\mathcal{A}_{n+1} \otimes_E A \to A \otimes_E k\mathcal{A}_n \otimes_E A$ tal que*
   - *(a)* $d_n \circ d_{n+1} = 0$
   - *(b)* $(d_{n+1} - \delta_{n+1})(1 \otimes q \otimes 1) \in \langle \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_n(q)\rangle_R$.
2. *Existe um homomorfismo $\rho_{n+1} : A \otimes_E k\mathcal{A}_n \otimes_E A \to A \otimes_E k\mathcal{A}_{n+1} \otimes_E A$ de $A-E$-bimódulos tal que*
   - *(c) para todo* $x \in A \otimes_E k\mathcal{A}_n \otimes_E A$, $x = d_{n+1} \circ \rho_{n+1}(x) + \rho_n \circ d_n(x)$ *e*
   - *(d) para todo* $q \in \mathcal{A}_n$ *e todo* $b \in \mathcal{B}$, $(\rho_{n+1} - s_{n+1})(1 \otimes q \otimes \pi(b)) \in \langle \mathcal{L}^{\prec}_{n+1}(qb)\rangle_R$.

Demonstração. (1) Seja $q \in \mathcal{A}_{n+1}$. Note que $\delta_{n+1}(1 \otimes q \otimes 1) \in \langle \overline{\mathcal{L}}^{\preceq}_n(q)\rangle_{\mathbb{Z}}$ pois $1 \otimes q \otimes 1 \in \overline{\mathcal{L}}^{\preceq}_{n+1}(q)$.

Queremos mostrar que $d_n(\delta_{n+1}(1 \otimes q \otimes 1)) \in \langle \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_{n-1}(q)\rangle_R$. Como

$$d_n(\delta_{n+1}(1 \otimes q \otimes 1)) = \delta_n \circ \delta_{n+1}(1 \otimes q \otimes 1) + (d_n - \delta_n)(\delta_{n+1}(1 \otimes q \otimes 1))$$

é suficiente mostrar que $(d_n - \delta_n)(\delta_{n+1}(1 \otimes q \otimes 1)) \in \langle \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_{n-1}(q)\rangle_R$ e $\delta_n \circ \delta_{n+1}(1 \otimes\ q \otimes 1) \in \langle \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_{n-1}(q)\rangle_R$. Isto é consequência do Lema(18), o Corolário(7) e o fato de $1 \otimes q \otimes 1$ pertencer a $\overline{\mathcal{L}}^{\preceq}_{n+1}(q)$.

Definamos $\tilde{\mathrm{d}}_{n+1} : A \times k\mathcal{A}_{n+1} \times A \to A \otimes_E k\mathcal{A}_n \otimes_E A$ por

$$\tilde{\mathrm{d}}_{n+1}(a,q,c) = a\delta_{n+1}(1 \otimes q \otimes 1)c - a\rho_n(d_n(\delta_{n+1}(1 \otimes q \otimes 1)))c,$$

para todo $a, c \in A$ e $q \in \mathcal{A}_{n+1}$. A aplicação $\tilde{\mathrm{d}}_{n+1}$ é $E-$multilinear e balanceada, então induz uma única aplicação

$$d_{n+1} : A \otimes_E k\mathcal{A}_{n+1} \otimes_E A \to A \otimes_E k\mathcal{A}_n \otimes_E A,$$

a qual é um homomorfismo de A-bimódulos.

Escrevendo $\rho_n = s_n + (\rho_n - s_n)$ e fazendo $x = d_n(\delta_{n+1}(1 \otimes q \otimes 1))$ temos

$$(d_{n+1} - \delta_{n+1})(1 \otimes q \otimes 1) = -\rho_n \circ d_n \circ \delta_{n+1}(1 \otimes q \otimes 1) = -s_n(x) - (\rho_n - s_n)(x).$$

Já mostramos que $d_n(\delta_{n+1}(1 \otimes q \otimes 1)) \in \langle \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_{n-1}(q)\rangle_R$, logo $s_n(x) \in \langle \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_n(q)\rangle_R$ pelo Lema(16) e usando a hipótese (iv) e o Lema(18) obtemos que $(\rho_n - s_n)(x) \in \langle \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_n(q)\rangle_R$. Portanto $(d_{n+1} - \delta_{n+1})(1 \otimes q \otimes 1) \in \langle \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_n(q)\rangle_R$.

Como $x = d_n(\delta_{n+1}(1 \otimes q \otimes 1)) \in A \otimes_E k\mathcal{A}_{n-1} \otimes_E A$, por (iii) com $i = n-1$, $x = d_n \circ \rho_n(x) + \rho_{n-1} \circ d_{n-1}(x)$. Logo

$$d_n \circ \delta_{n+1}(1 \otimes q \otimes 1) = d_n \circ \rho_n \circ d_n \circ \delta_{n+1}(1 \otimes q \otimes 1),$$

e temos provado que $d_n \circ d_{n+1} = 0$.

(1) Seja $q \in \mathcal{A}_{n+1}$ e $b \in \mathcal{B}$. Temos que

$$\begin{aligned} 1 \otimes q \otimes \pi(b) - \rho_n \circ d_n(1 \otimes q \otimes \pi(b)) = \; & 1 \otimes q \otimes \pi(b) - \rho_n \delta_n(1 \otimes q \otimes \pi(b)) \\ & -\rho_n \circ (d_n - \delta_n)(1 \otimes q \otimes \pi(b)) \end{aligned}$$

Note que $1 \otimes q \otimes \pi(b) \in \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_n(qb)$, logo $(d_n - \delta_n)(x) \in \langle \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_{n-1}(qb)\rangle_R$ pelo Lema(18). Expressando ρ_n da forma $s_n + (\rho_n - s_n)$ e usando os Lemas(16,18) podemos concluir que $\rho_n \circ (d_n - \delta_n)(1 \otimes q \otimes \pi(b)) \in \langle \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_n(qb)\rangle_R$. Neste caso escrevemos

$$(id - \rho_n \circ \delta_n + \rho_n \circ (d_n - \delta_n))(1 \otimes q \otimes \pi(b)) \equiv id - \rho_n \circ \delta_n(1 \otimes q \otimes \pi(b)) \mathrm{mod} \langle \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_n(qb)\rangle_R.$$

Também temos as seguintes congruências módulo $\langle \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_n(qb)\rangle_r$

$$\begin{aligned} (id - \rho_n \circ \delta_n)(1 \otimes q \otimes \pi(b)) \; & \equiv (id - s_n \circ \delta_n)(1 \otimes q \otimes \pi(b)) \mathrm{mod} \langle \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_n(qb)\rangle_R \\ & \equiv \delta_{n+1} \circ s_{n+1}(1 \otimes q \otimes \pi(b)) \mathrm{mod} \langle \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_n(qb)\rangle_R \\ & \equiv d_{n+1} \circ s_{n+1}(1 \otimes q \otimes \pi(b)) \mathrm{mod} \langle \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_n(qb)\rangle_R. \end{aligned}$$

Pelo anterior, existe $\xi \in \langle \overline{\mathcal{L}}^{\prec}_n(qb)\rangle_R$ tal que

$$(id - \rho_n \circ d_n)(1 \otimes q \otimes \pi(b)) = d_{n+1} \circ s_{n+1}(1 \otimes q \otimes \pi(b)) + \xi.$$

Vamos ver que $\xi \in ker(d_n)$. Para isto, basta mostrar que $d_n((id - \rho_n \circ d_n)(1 \otimes q \otimes \pi(b))) = 0$ e $d_n(d_{n+1} \circ s_{n+1}(1 \otimes q \otimes \pi(b))) = 0$. Se denotamos $1 \otimes q \otimes \pi(b)$ por x então, usando (iii) e (i) obtemos

$$\begin{aligned} d_n(x - \rho_n \circ d_n(x)) &= d_n(x) - (d_n \rho_n)(d_n(x)) \\ &= d_n(x) - (d_n(x) - \rho_{n-1} d_{n-1}(d_n(x))) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por outro lado $d_n(d_{n+1} \circ s_{n+1}(1 \otimes q \otimes \pi(b))) = 0$ pois estamos supondo $d_n \circ d_{n=1} = 0$.

Como $\preceq$ satisfaz a condição da cadeia descendente podemos usar indução sobre $(k^*Q_{\geq 0}, \preceq)$. Se não existe $\lambda p \in k^*Q_{\geq 0}$ tal que $\lambda p \prec qb$, então $\xi = 0$ e definimos $\rho_{n+1}(1 \otimes q \otimes \pi(b)) := s_{n+1}(1 \otimes q \otimes \pi(b))$. Agora, suponha que $\rho_{n+1}(\xi)$ está definido. A igualdade $d_n(\xi) = 0$ implica $\xi = d_{n+1} \circ \rho_{n+1}(\xi)$

$$(id - \rho_n \circ d_n)(1 \otimes q \otimes \pi(b)) = d_{n+1}(s_{n+1}(1 \otimes q \otimes \pi(b)) + \rho_{n+1}(\xi)).$$

Definimos $\rho_{n+1}(1 \otimes q \otimes \pi(b)) := s_{n+1}(1 \otimes q \otimes \pi(b)) + \rho_{n+1}(\xi)$.

□

Teorema 13. *Sejam $d_0 := \delta_0$ e $d_1 := \delta_1$. Dado $N \in \mathbb{N}_0$ e homomorfismos de A-bimódulos $d_i : A \otimes_E k\mathcal{A}_i \otimes_E A \to A \otimes_E k\mathcal{A}_{i-1} \otimes_E A$ para $2 \leq i \leq N$. Se*

(1) $d_{i-1} \circ d_i = 0$ para todo i, com $2 \leq i \leq N$,

(2) $(d_i - \delta_i)(1 \otimes q \otimes 1) \in \langle \overleftarrow{\mathcal{L}}^{\prec}_{i-1}(q)\rangle_k$ para todo $2 \leq i \leq N$ e todo $q \in \mathcal{A}_i$,

então o complexo

$$A \otimes_E k\mathcal{A}_N \otimes_E A \xrightarrow{d_N} \cdots \xrightarrow{d_2} A \otimes_E k\mathcal{A}_1 \otimes_E A \xrightarrow{d_1} A \otimes_E A \xrightarrow{d_0} A \to 0 \tag{3.3}$$

é exato.

Demonstração. Vamos mostrar que existe uma aplicação de $A-E$-bimódulos $\rho_1 : A \otimes_E k\mathcal{A}_0 \otimes_E A \to A \otimes_E k\mathcal{A}_1 \otimes_E A$ que satisfaz $d_1 \circ \rho_1 + \rho_0 \circ d_0 = id$, com $d_0 = \mu$ e $\rho_0(a) = s_0(a) = a \otimes 1$ para todo $a \in A$.

Dado $b = b_k \cdots b_1 \in \mathcal{B}$, com $b_i \in Q_1$ para todo $1 \leq i \leq k$, temos que

$$s_1(1 \otimes \pi(b)) = -\sum_i \pi(b_k \cdots b_{k-i+1}) \otimes b_{k-i} \otimes \pi(b_{k-i-1} \cdots b_1).$$

Por um lado $1 \otimes \pi(b) - \pi(b) \otimes 1 = 1 \otimes \pi(b) - s_0(d_0(1 \otimes \pi(b)))$, e por outro lado temos que $1 \otimes \pi(b) - \pi(b) \otimes 1 = \delta_1(s_1(1 \otimes \pi(b)))$, logo $1 \otimes \pi(b) - s_0(1 \otimes \pi(b)) = \delta_1(s_1(1 \otimes \pi(b)))$. Pela hipótese, $(d_1 - \delta_1)(1 \otimes \pi(b)) \in \langle \overleftarrow{\mathcal{L}}^{\prec}_0(b)\rangle_k$, portanto existe $\xi \in \langle \overleftarrow{\mathcal{L}}^{\prec}_0(q)\rangle_k$ tal que

$$1 \otimes \pi(b) - s_0(d_0(1 \otimes \pi(b))) = d_1(s_1(1 \otimes \pi(b))) + \xi.$$

Logo $d_0(\xi) = 0$. Suponha que não existe $\lambda p \in k^*Q_{\geq 0}$ tal que $\lambda p \prec b$. Neste caso, definimos $\rho_1(1 \otimes \pi(b)) = s_1(1 \otimes \pi(b))$. Agora, suponha que $\rho_0(\xi)$ está definido para todo ξ tal que $d_0(\xi) = 0$. Como $\xi = d_1(\rho_1(\xi))$, podemos definir $\rho_1(1 \otimes \pi(b)) := s_1(1 \otimes \pi(b)) + \rho_1(\xi)$.

Por indução e a Proposição 17. obtemos uma retração de homotopia do complexo (3.3) provando que este é exato.

□

Teorema 14. *Existem homomorfismos de A-bimódulos $d_i : A \otimes_E k\mathcal{A}_i \otimes_E A \to A \otimes_E k\mathcal{A}_{i-1} \otimes_E A$ para $i \geq 1$ e $d_0 : A \otimes_E A \to A$ tal que*

(1) $d_{i-1} \circ d_i = 0$ para todo $i \geq 1$,

(2) $(d_i - \delta_i)(1 \otimes q \otimes 1) \in \langle \overleftarrow{\mathcal{L}}^{\prec}_{i-1}(q)\rangle_{\mathbb{Z}}$ para todo $i \geq 0$ e todo $q \in \mathcal{A}_i$,

Demonstração. Mostramos anteriormente que $1 \otimes \pi(b) = (s_0 \circ d_0 + \delta_1 \circ s_1)(1 \otimes \pi(b))$, logo $s_0 \circ d_0 + \delta_1 \circ s_1 = id_{A \otimes_E A}$. O resultado segue da Proposição 17 fixando $d_1 = \delta_1$. □

Observe que conseguimos uma resolução projetiva de A como A-bimódulo onde os bimódulos projetivos tem uma correspondência bijetiva com os bimódulos projetivos aparecendo na resolução minimal de A_S. Isto implica o seguinte resultado.

Corolário 8. *Se A_S tem dimensão global finita então A tem dimensão global finita.*

Demonstração. A_S tem dimensão global n se e somente se $\mathcal{A}_{n+1} = 0$ e nesse caso a resolução de A que descrevemos é finita e portanto A tem dimensão global finita.

□

Essa observação foi usada por Green e posteriormente por Green e Sybille para descrever uma variedade algébrica das álgebras sobre um carcás fixo que tem a mesma álgebra monomial associada. Este é um assunto que pretendemos investigar no nosso trabalho a seguir.

3.4 Primeiros homomorfismos da resolução

Seja $A = kQ/I$ e $\mathcal{R}$ um sistema de redução satisfazendo a condição do Diamante para I. Usando a definição de $\delta_0 : A \otimes_E A \to A$ e $\delta_1 : A \otimes_E k\mathcal{A}_1 \otimes_E A \to A \otimes_E A$, temos que para todo $a, c \in kQ$ e $\alpha \in Q_1$,

$$\delta_0(\pi(a) \otimes \pi(c)) = \pi(ac)$$

e

$$\delta_1(\pi(a) \otimes \alpha \otimes \pi(c)) = \pi(a\alpha) \otimes \pi(c) - \pi(a) \otimes \pi(\alpha c).$$

Seja $\phi_1 : kQ \to A \otimes_E k\mathcal{A}_1 \otimes_E A$ a única aplicação k-linear tal que

$$\phi_1(c) = \sum_{n}^{i=1} \pi(c_n \cdots c_{i+1}) \otimes c_i \otimes \pi(c_{i-1} \cdots c_1)$$

para $c \in Q_{\geq 0}$, $c = c_n \cdots c_1$, com $c_i \in Q_1$ para todo i, $1 \leq i \leq n$.

Dada uma redução básica $r = r_{a,s,c}$, definimos $\phi_2(r, -) : kQ \to A \otimes_E k\mathcal{A}_2 \otimes_E A$ como a única aplicação k-linear tal que, dado $p \in Q_{\geq 0}$,

$$\phi_2(r,p) = \begin{cases} \pi(a) \otimes s \otimes \pi(c) & \text{se } p = asc, \\ 0 & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Com o anterior, podemos definir de maneira recursiva $\phi_2(r, -)$ para qualquer redução r. Seja $r = (r_n, \dots, r_1)$ uma redução com r_i uma redução básica para $1 \leq i \leq n$ e denotemos $r' = (r_n, \dots, r_2)$. Definimos $\phi_2(r, -) : kQ \to A \otimes_E k\mathcal{A}_2 \otimes_E A$ como a única aplicação k-linear tal que, dado $p \in Q_{\geq 0}$,

$$\phi_2(r,p) = \phi_2(r_1, p) + \phi_2(r', r_1(p)).$$

Definimos um homomorfismo de $A-$bimódulos $d_2 : A \otimes_E k\mathcal{A}_2 \otimes_E A \to A \otimes_E k\mathcal{A}_1 \otimes_E A$ por

$$d_2(1 \otimes s \otimes 1) = \phi_1(s) - \phi_1(\beta(s)),$$

para todo $s \in \mathcal{A}_2$.

Lema 19. *Seja $p \in Q_{\geq 0}$ e $x \in kQ$ tal que $x \prec p$. Para toda redução r, $\phi_2(r, x) \in \langle \overline{\mathcal{L}_2^{\prec}}(p) \rangle_{\mathbb{Z}}$.*

Lema 20. *Para todo $x \in A \otimes_E k\mathcal{A}_2 \otimes_E A$, x pertence a $ker(\delta_1 \circ d_2)$.*

Demonstração. Seja $x \in A \otimes_E k\mathcal{A}_2 \otimes_E A$. Como δ_1 e d_2 são homomorfismos de bimódulos, podemos assumir x da forma $1 \otimes s \otimes 1$, com $s \in \mathcal{A}_2$, logo

$$\delta_1(d_2(1 \otimes s \otimes 1)) = \delta_1(\phi_1(s) - \phi_1(\beta(s))) = \pi(s) \otimes 1 - 1 \otimes \pi(s) - \pi(\beta(s)) \otimes 1 + 1 \otimes \pi(\beta(s)) = 0.$$

□

Usando a definição de ϕ_1 e a $k-$linearidade de ϕ_1 e π temos o seguinte resultado.

Lema 21. *Dados $a, c \in Q_{\geq 0}$ e $p = \sum_{i=1}^{n} \in kQ$, com $p_i \in Q_{\geq 0}$ para $1 \leq i \leq n$, temos que*

$$\phi_1(apc) = \phi_1(a)\pi(pc) + \pi(a)\phi_1(p)\pi(c) + \pi(ap)\phi_1(c).$$

Lema 22. *Dado $p \in Q_{\geq 0}$ e uma redução $r = (r_n, \dots, r_1)$, com r_i uma redução básica para $1 \leq i \leq n$, temos que*
$$d_2(\phi_2(r(p))) = \phi_1(p) - \phi_1(r(p)). \tag{3.4}$$

Demonstração. Vamos fazer a demonstração por indução sobre n.

Seja $r = r_1 = r_{a_1,s_1,c_1}$ uma redução básica. Se $p \neq a_1s_1c_1$ então $r_1(p) = p$ e $\phi_2(r,p) = 0$, logo a equação (3.4) é satisfeita. Se $p = a_1s_1c_1$ então $\phi_2(r_1,p) = \pi(a_1) \otimes s_1 \otimes \pi(c_1)$ e $r_1(p) = a_1\beta(s_1)c_1$. Logo,

$$\begin{aligned} d_2(\phi_2(r_1,p)) + \phi_1(r_1(p)) &= d_2(\pi(a_1) \otimes s_1 \otimes \pi(c_1)) + \phi_1(a_1\beta(s_1)c_1) \\ &= \pi(a_1)\phi_1(s_1)\pi(c_1) - \pi(a_1)\phi_1(\beta(s_1))\pi(c_1) + \phi_1(a_1\beta(s_1)c_1) \end{aligned} \tag{3.5}$$

Pelo Lema 21.

$$\phi_1(a_1\beta(s_1)c_1) = \phi_1(a_1)\pi(\beta(s_1)c_1) + \pi(a_1)\phi_1(\beta(s_1))\pi(c_1) + \pi(a_1\beta(s_1))\phi_1(c_1). \tag{3.6}$$

Então por (3.5) e (3.6) temos que

$$\begin{aligned} d_2(\phi_2(r_1,p)) + \phi_1(r_1(p)) &= \pi(a_1)\phi_1(s_1)\pi(c_1) + \phi_1(a_1)\pi(\beta(s_1)c_1) + \pi(a_1\beta(s_1))\phi_1(c_1) \\ &= \pi(a_1)\phi_1(s_1)\pi(c_1) + \phi_1(a_1)\pi(s_1c_1) + \pi(a_1s_1)\phi_1(c_1). \end{aligned}$$

Esta última expressão é igual a $\phi_1(a_1s_1c_1) = \phi_1(p)$ pelo Lema 21. Portanto

$$d_2(\phi_2(r_1,p)) + \phi_1(r_1(p)) = \phi_1(p).$$

Agora vamos supor que o resultado vale para $n-1$. Vamos notar $r' = (r_n, \dots, r_2)$. Sabemos pela definição de ϕ_2 que $d_2(\phi_2(r,p)) = d_2(\phi_2(r_1,p)) + d_2(\phi_2(r', r_1(p)))$, logo

$$\begin{aligned} d_2(\phi_2(r,p)) + \phi_1(r(p)) &= d_2(\phi_2(r_1,p)) + d_2(\phi_2(r', r_1(p))) + \phi_1(r'(r_1(p))) \\ &= d_2(\phi_2(r_1,p)) + \phi_1(r_1(p)) \\ &= \phi_1(p). \end{aligned}$$

□

Seja $p \in \mathcal{A}_3$. Podemos expressar p como uma ambiguidade a esquerda e a direita por $p = u_0u_1u_2 = v_2v_1v_0$, onde u_0u_1 e v_1v_0 pertencem a $\mathcal{A}_2$ e são as únicas 2-ambiguidades que dividem p. Seja $r = r_{a,s,c}$ uma redução básica tal que $r(p) \neq p$, logo $s = u_0u_1$ ou $s = v_1v_0$. Dada uma redução $r = (r_n, \dots, r_1)$, dizemos que r **começa à esquerda** de p se $r_1 = r_{a,s,c}$, $s = u_0u_1$ e $asc = p$,e dizemos que r **começa à direita** de p se $r_1 = r_{a,s,c}$, $s = v_1v_0$ e $asc = p$.

Considere a aplicação $\tilde{\mathrm{d}}_3 : A \otimes_E k\mathcal{A}_3 \otimes_E A \to A \otimes_E k\mathcal{A}_2 \otimes_E A$ definida por

$$\tilde{\mathrm{d}}_3(x,p,y) = x\phi_2(t^p,p)y - x\phi_2(r^p,p)y$$

para todo $x, y \in A$. Usando a definição de ϕ_2 podemos concluir que

$$\tilde{\mathrm{d}}_3(xe,p,y) = \tilde{\mathrm{d}}_3(x,pe,y) = \tilde{\mathrm{d}}_3(x,p,ey),$$

para todo $e \in E$. Logo, $\tilde{\mathrm{d}}_3$ é multilinear e induz uma aplicação $d_3 : A \otimes_E k\mathcal{A}_3 \otimes_E A \to A \otimes_E k\mathcal{A}_2 \otimes_E A$. Esta aplicação é um morfismo de A-bimódulos dado por $d_3(1 \otimes p \otimes 1) = \phi_2(t^p,p) - \phi_2(r^p,p)$ para todo $p \in \mathcal{A}_3$.

Proposição 18. *Sejam $\{r^p\}_{p\in\mathcal{A}_3}$ e $\{t^p\}_{p\in\mathcal{A}_3}$ dois conjuntos de reduções tais que $r^p(p)$ e $t^p(p)$ pertencem a $k\mathcal{B}$, r^p começa à esquerda de p e t^p começa à direita de p. Seja $d_3 : A \otimes_E k\mathcal{A}_3 \otimes_E A \to$*

$A \otimes_E k\mathcal{A}_2 \otimes_E A$ a aplicação de $A-$bimódulos definida como acima. A sequência

$$A \otimes_E k\mathcal{A}_3 \otimes_E A \xrightarrow{d_3} A \otimes_E k\mathcal{A}_2 \otimes_E A \xrightarrow{d_2} A \otimes_E k\mathcal{A}_1 \otimes_E A \xrightarrow{\delta_1} A \otimes_E A \xrightarrow{\delta_0} A \to 0, \tag{3.7}$$

é exata.

Demonstração. Vamos mostrar primeiro que a sequência dada em (3.7) é um complexo.

$$\delta_0(\delta_1(\pi(a) \otimes \alpha \otimes \pi(c))) = \delta_0(\pi(a\alpha) \otimes \pi(c) - \pi(a) \otimes \pi(\alpha c)) = \pi(a\alpha c) - \pi(a\alpha c) = 0.$$

E já mostramos no Lema 20. que $\delta_1 \circ d_2 = 0$.

Seja $p \in \mathcal{A}_3$. Usando o Lema 22. temos que

$$\begin{aligned} d_2(d_3(1 \otimes p \otimes 1)) &= d_2(\phi_2(t^p, p) - \phi_2(r^p, p)) \\ &= \phi_1(p) - \phi_1(t^p(p)) - \phi_1(p) + \phi_1(r^p(p)) \\ &= \phi_1(r^p(p)) - \phi_1(t^p(p)). \end{aligned}$$

Mas $\phi_1(r^p(p)) - \phi_1(t^p(p)) = \phi_1(\beta(p)) - \phi_1(\beta(p))$, logo $d_2 \circ d_3 = 0$.

Pelo Teorema 13. basta mostrar que $d_2(1 \otimes s \otimes 1) - \delta_2(1 \otimes s \otimes 1) \in \langle \overline{\mathcal{L}_1^{\prec}}(s) \rangle_k$ para todo $s \in \mathcal{A}_2$ e $(d_3 - \delta_3)(1 \otimes p \otimes 1) \in \langle \overline{\mathcal{L}_2^{\prec}}(p) \rangle_k$ para todo $p \in \mathcal{A}_3$ para mostrar a exatidão do complexo (3.7) .

$\delta_2(1 \otimes s \otimes 1) = \phi_1(\beta(s))$, e como $\beta(s) \prec s$ então $\phi_1(\beta(s)) \in \langle \overline{\mathcal{L}_1^{\prec}}(s) \rangle_k$. Portanto

$$d_2(1 \otimes s \otimes 1) - \delta_2(1 \otimes s \otimes 1) = -\phi_1(\beta(s)) \in \langle \overline{\mathcal{L}_1^{\prec}}(s) \rangle_k$$

Vamos mostrar que $(d_3 - \delta_3)(1 \otimes p \otimes 1) \in \langle \overline{\mathcal{L}_2^{\prec}}(p) \rangle_k$. Podemos escrever $p = u_0 u_1 u_2 = v_2 v_1 v_0$ como 3-ambiguidade à esquerda e direita respectivamente. Logo,

$$\delta_3(1 \otimes p \otimes 1) = \pi_2 f_3 i_3(1 \otimes p \otimes 1) = \pi(v_2) \otimes v_1 v_0 \otimes 1 - 1 \otimes u_0 u_1 \pi(u_2).$$

Agora considere $r^p = (r_n, \dots, r_1)$ e $t^p = (t_m, \dots, t_1)$ tais que r^p começa à esquerda de p e t^p começa a direita de p, então

$$(d_3 - \delta_3)(1 \otimes p \otimes 1) = \phi_2(t'^p, t_1(p)) - \phi_2(r'^p, r_1(p)),$$

onde $t'^p = (t_m, \dots, t_1)$ e $r'^p = (r_n, \dots, r_1)$. Pelo Lema 19. $\phi_2(t'^p, t_1(p))$ e $\phi_2(r'^p, r_1(p))$ pertencem a $\langle \overline{\mathcal{L}_2^{\prec}}(p) \rangle_k$ e fica demonstrado o resultado.

□

3.5 Contra exemplo da questão de Happel

Seja uma álgebra A sobre um corpo k. Se A tem dimensão global finita então $HH^*(A) = \bigoplus_{i \geq 0} HH^i(A)$ é uma $k-$álgebra de dimensão finita. Em 1989 Happel questiona a validade da implicação contrária para álgebras de dimensão finita, isto é, o fato de $HH^*(A)$ ser de dimensão finita implica a álgebra A ser de dimensão global finita? [Hap89]. A resposta para esta questão é negativa e o primeiro contra exemplo foi dado por Buchweitz, Green, Madsen e Solberg em [BGMS05] em 2005, onde mostram que dado um corpo k, e $\xi \in k$ a álgebra $A = k\langle x, y \rangle / (x^2, y^2, yx - \xi xy)$ não tem dimensão global finita mas $HH^*(A)$ tem dimensão finita se ξ é não nulo e não é uma raiz da unidade. Nesta seção usamos a resolução projetiva desenvolvida no presente capítulo para mostrar que $HH^*(A)$ tem dimensão finita.

Seja k um corpo, ξ um elemento do corpo k e seja A a k-álgebra com geradores x e y, os quais satisfazem as relações $x^2 = 0 = y^2, yx = \xi xy$. Escolha a ordem $x < y$ e a função peso w tal que $w(x) = w(y) = 1$ e fixe o sistema de redução $\mathcal{R} = \{(x^2, 0), (y^2, 0), (yx, \xi xy)\}$, o qual mostramos no Exemplo 13. que satisfaz a condição do Diamante para $I = \langle x^2, y^2, yx - \xi xy\rangle$. No Exemplo 15 vimos que para todo n, o conjunto $\mathcal{A}_n$ está dado por

$$\mathcal{A}_n = \{y^s x^t \mid s + t = n\}.$$

A Proposição 18. fornece o começo duma resolução projetiva de A

$$A \otimes_E k\mathcal{A}_3 \otimes_E A \xrightarrow{d_3} A \otimes_E k\mathcal{A}_2 \otimes_E A \xrightarrow{d_2} A \otimes_E k\mathcal{A}_1 \otimes_E A \xrightarrow{d_1} A \otimes_E A \xrightarrow{d_0} A \to 0$$

onde d_2 é a aplicação de A-bimódulos tal que

$$\begin{aligned}
d_2(1 \otimes x^2 \otimes 1) &= x \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes x \otimes x \\
d_2(1 \otimes y^2 \otimes 1) &= y \otimes y \otimes 1 + 1 \otimes y \otimes y \\
d_2(1 \otimes yx \otimes 1) &= y \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes y \otimes x - \xi x \otimes y \otimes 1 - \xi \otimes x \otimes y
\end{aligned}$$

e d_3 é a aplicação de A-bimódulos tal que

$$\begin{aligned}
d_3(1 \otimes y^3 \otimes 1) &= y \otimes y^2 \otimes 1 - 1 \otimes y^2 \otimes y \\
d_3(1 \otimes y^2x \otimes 1) &= y \otimes yx \otimes 1 + \xi \otimes yx \otimes y + \xi^2 x \otimes y^2 \otimes 1 - 1 \otimes y^2 \otimes x \\
d_3(1 \otimes yx^2 \otimes 1) &= y \otimes x^2 \otimes 1 - 1 \otimes yx \otimes x - \xi x \otimes yx \otimes 1 - \xi^2 \otimes x^2 \otimes y \\
d_3(1 \otimes x^3 \otimes 1) &= x \otimes x^2 \otimes 1 - 1 \otimes x^2 \otimes x
\end{aligned}$$

Dado $q \in \mathcal{A}_n$, existem $s, t \in \mathbb{N}$ tais que $s + t = n$ e $q = y^s x^t$. Os únicos divisores de q em $\mathcal{A}_{n-1}$ são $y^{s-1}x^t$ e $y^s x^{t-1}$ e portanto $\delta_n : A \otimes_E k\mathcal{A}_n \otimes_E A \to A \otimes_E k\mathcal{A}_{n-1} \otimes_E A$ está definido por

$$\delta_n(1 \otimes y^s x^t \otimes 1) = \begin{cases} y \otimes y^{s-1}x^t \otimes 1 + (-1)^n \otimes y^s x^{t-1} \otimes x, & \text{se } s \neq 0 \text{ e } t \neq 0, \\ y \otimes y^{n-1} \otimes 1 + (-1)^n \otimes y^{n-1} \otimes y & \text{se } t = 0, \\ x \otimes x^{n-1} \otimes 1 + (-1)^n \otimes x^{n-1} \otimes x & \text{se } s = 0, \end{cases}$$

Por definição

$$\overline{\mathcal{L}}^{\prec}_{n-1}(y^s x^t) = \{\lambda\pi(b) \otimes p \otimes \pi(b') \mid b, b' \in \mathcal{B}, p \in \mathcal{A}_{n-1}, \lambda bpb' \prec y^s x^t\},$$

$\lambda bpb' \prec y^s x^t$ se existe uma redução r tal que $r(y^s x^t) = \lambda bpb' + x$, com $bpb' \notin supp(x)$. Como $S = \{x^2, y^2, yx\}$, toda redução básica r tal que $r(y^s x^t) \neq y^s x^t$ satisfaz $r(y^s x^t) = 0$ ou $r(y^s x^t) = \xi y^{s-1} xyx^{t-1}$.

Se $s > 0, t > 0$ então

$$\overline{\mathcal{L}}^{\prec}_{n-1}(y^s x^t) = \{\xi^s x \otimes y^s x^{t-1} \otimes 1, \xi^t \otimes y^{s-1}x^t \otimes y\},$$

Se $s = 0$ ou $t = 0$ o conjunto $\overline{\mathcal{L}}^{\prec}_{n-1}(y^s x^t)$ é vazio.

Consideremos o complexo

$$\cdots \xrightarrow{d_{n+1}} A \otimes_E k\mathcal{A}_n \otimes_E A \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_2} A \otimes_E k\mathcal{A}_1 \otimes_E A \xrightarrow{d_1} A \otimes_E A \xrightarrow{d_0} A \to 0 \tag{3.8}$$

onde

$$\begin{aligned}
d_n(1 \otimes y^s x^t \otimes 1) &= y \otimes y^{s-1}x^t \otimes 1 + (-1)^n \otimes y^s x^{t-1} \otimes x \\
&+ (-1)^s \xi^s x \otimes y^s x^{t-1} \otimes 1 + (-1)^s \xi^t \otimes y^{s-1}x^t \otimes y,
\end{aligned}$$

para $s > 0$ e $t > 0$ e

$$d_n(1 \otimes y^n \otimes 1) = y \otimes y^{n-1} \otimes 1 + (-1)^n 1 \otimes y^{n-1} \otimes y,$$
$$d_n(1 \otimes x^n \otimes 1) = x \otimes x^{n-1} \otimes 1 + (-1)^n 1 \otimes x^{n-1} \otimes x.$$

Este complexo satisfaz as condições do Teorema(13), portanto é uma resolução projetiva de bimódulos de A. Aplicando o funtor $Hom_{A^e}(-, A)$ a (3.8) e usando o isomorfismo

$$Hom_{A^e}(A \otimes_E k\mathcal{A}_n \otimes_E A, A) \cong Hom_{E-E}(k\mathcal{A}_n, A),$$

obtemos o complexo

$$0 \to Hom_{E-E}(k\mathcal{A}_0, A) \xrightarrow{\phi_1} Hom_{E-E}(k\mathcal{A}_1, A) \xrightarrow{\phi_2} Hom_{E-E}(k\mathcal{A}_2, A) \xrightarrow{\phi_3} \cdots$$
$$\cdots \to Hom_{E-E}(k\mathcal{A}_{n-1}, A) \xrightarrow{\phi_n} Hom_{E-E}(k\mathcal{A}_n, A) \xrightarrow{\phi_{n+1}} Hom_{E-E}(k\mathcal{A}_{n+1}, A) \to \cdots$$

onde

$$\phi_n(f)(y^s x^t) = yf(y^{s-1}x^t) + (-1)^n f(y^s x^{t-1})x + (-1)^s \xi^s x f(y^s x^{t-1}) + (-1)^s \xi^t f(y^{s-1}x^t)y,$$

para todo $f \in Hom_{E-E}(k\mathcal{A}_{n-1}, A)$ e $s > 0$, $t > 0$ tais que $s + t = n$, e

$$\phi_n(f)(y^n) = yf(y^{n-1}) + (-1)^n f(y^{n-1})y,$$
$$\phi_n(f)(x^n) = xf(x^{n-1}) + (-1)^n f(x^{n-1})x,$$

O i-ésimo grupo de cohomologia de Hochschild de A fica determinado por

$$HH^i(A) = ker(\phi_{n+1})/Im(\phi_n).$$

Vamos calcular os primeiros grupos de cohomologia e mostrar que para o caso em que ξ é não nulo e não é uma raiz da unidade $HH^n(A) = 0$ para $n \geq 3$. Estes resultados coincidem com o feito em [BGMS05].

Seja $g \in Hom_{E-E}(k\mathcal{A}_0, A)$ e $\alpha \in \{x, y\}$, então $\phi_1(g)(\alpha) = \alpha g(v) - g(v)\alpha$. Logo, se $g \in ker(\phi_1)$ devemos ter

$$g(v) = g(v)x$$
$$yg(v) = g(v)x$$

Como $g(v) \in A$ podemos expressar ele da forma $g(v) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 y + \lambda_4 xy$. As igualdades anteriores implicam $\lambda_3 xy = \lambda_3 \xi xy$ e $\lambda_2 \xi xy = \lambda_2 xy$. Logo, $\lambda_3(1 - \xi) = 0$ e $\lambda_2(\xi - 1) = 0$. Portanto

$$HH^0(A) = \begin{cases} A & \text{se } \xi = 1, \\ span_k\{1, xy\} & \text{se } \xi \neq 1. \end{cases}$$

Seja $g \in Hom_{E-E}(k\mathcal{A}_1, A)$, tal que $g \in ker(\phi_2)$. Então

$$\begin{aligned} \phi_2(g)(y^2) &= yg(y) + g(y)y = 0, \\ \phi_2(g)(yx) &= yg(x) + g(y)x - \xi xg(y) - \xi g(x)y = 0, \\ \phi_2(g)(x^2) &= xg(x) + g(x)x = 0. \end{aligned}$$

Escrevendo $g(x)$ e $g(y)$ da forma $g(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 y + \lambda_4 xy$ e $g(y) = \mu_1 + \mu_2 x + \mu_3 y + \mu_4 xy$, obtemos o sistema de equações

$$
\begin{aligned}
2\lambda_1 x + \lambda_3(1+\xi)xy &= 0,\\
2\mu_1 y + \mu_2(\xi+1)xy &= 0,\\
\lambda_1(1-\xi)y + \mu(1-\xi)x &= 0.
\end{aligned}
$$

Para calcular $HH^1(A)$ vamos considerar 4 casos:

CASO 1: Se $\xi \neq -1, 1$, então $\lambda_1 = \mu_1 = \lambda_3 = \mu_2 = 0$, logo $dim_k(ker(\phi_2)) = 4$. Neste caso $HH^0(A) = ker(\phi_1) = span_k\{1, xy\}$, portanto $dim_k(Im(\phi_1)) = 2$ e $dim_k HH^1(A) = 2$.

CASO 2: Se $\xi = 1, \xi \neq -1$,($char(k) \neq 2$) então $\lambda_1 = \mu_1 = \lambda_3 = \mu_2 = 0$, logo $dim_k(ker(\phi_2)) = 4$. Neste caso $dim_k(Im(\phi_1)) = 0$ e portanto $dim_k HH^1(A) = 4$.

CASO 3: Se $\xi \neq 1, \xi = -1$,($char(k) \neq 2$) então $\lambda_1 = \mu_1 = 0$, logo $dim_k(ker(\phi_2)) = 6$. Neste caso $dim_k(Im(\phi_1)) = 2$ e portanto $dim_k HH^1(A) = 4$.

CASO 4: Se $\xi = 1$ e $char(k) = 2$ então $dim_k HH^1(A) = 8$ e $dim_k Im(\phi_1) = 0$, portanto $dim_k HH^1(A) = 8$.

Sumarizando os resultados anteriores temos

$$
dim_k HH^1(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } \xi \neq 1, -1, \\ 4 & \text{se } (\xi = 1 \text{ e } \xi \neq -1) \text{ ou } (\xi \neq 1 \text{ e } \xi = -1), \\ 8 & \text{se } \xi = -1 \text{ e } char(k) = 2. \end{cases}
$$

Fazendo um processo análogo ao feito para calcular a 0-ésima cohomologia e a dimensão da primeira cohomologia é possível obter a dimensão da segunda cohomologia. De fato

$$
dim_k HH^2(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi \neq 1, -1, \\ 5 & \text{se } \xi = 1 \text{ e } \xi \neq -1, \\ 6 & \text{se } \xi \neq 1 \text{ e } \xi = -1, \\ 10 & \text{se } \xi = -1 \text{ e } char(k) = 2. \end{cases}
$$

Podemos supor sem perda de generalidade $n > 3$ par e $f \in Hom_{E-E}(k\mathcal{A}_n, A)$. O valor de f nas n-ambiguidades pode ser expresso por

$$
f(y^{n-i}x^i) = \lambda_1^{(n-i)(i)} + \lambda_2^{(n-i)(i)}x + \lambda_3^{(n-i)(i)}y + \lambda_4^{(n-i)(i)}xy,
$$

para todo $i = 0, 1, \ldots, n$. Se $f \in ker(\phi_{n+1})$ as seguintes igualdades devem ser satisfeitas para todos os pares s e t tais que $s + t = n + 1$ e $s = 1, 2, \ldots, n$

$$
\begin{aligned}
\lambda_2^{(n)(0)}(\xi - 1) &= 0,\\
\lambda_1^{(s-1)(t)}(1 + (-1)^s\xi^t) &= 0,\\
\lambda_1^{(s)(t-1)}((-1)^s\xi^s - 1) &= 0,\\
\lambda_3^{(0)(n)}(1 - \xi) &= 0,
\end{aligned}
$$

e

$$
\xi\lambda_2^{(s-1)(t)} - \xi\lambda_3^{(s)(t-1)} + (-1)^s\xi^s\lambda_3^{(s)(t-1)} + (-1)^s\xi^t\lambda_2^{(s-1)(t)} = 0.
$$

Vamos supor que ξ é não nulo e não é uma raiz da unidade. Note que isto implica $char(k) \neq 2$. Com estas hipóteses e as igualdades anteriores obtemos que $\lambda_2^{(n)(0)} = \lambda_3^{(0)(n)} = 0$, $\lambda_1^{(n-i)(i)} = 0$ para todo $i = 0, 1, \ldots, n$ e $\lambda_2^{(i)(n-i)}$ sempre pode ser expresso em termos de $\lambda_3^{(i+1)(n-i-1)}$ para todo

$i = 0, 1, \ldots, n-1$. Portanto

$$dim_k ker(\phi_{n+1}) = dim_k Hom_{E-E}(k\mathcal{A}_n, A) - (2n+3) = 4(n+1) - (2n+3) = 2n+1.$$

Para calcular a dimensão de $Im(\phi_n)$ fixamos $f \in Hom_{E-E}(k\mathcal{A}_{n-1}, A)$ e expressamos a imagem das $(n-1)$-ambiguidades por

$$f(y^{n-i}x^{i-1}) = \lambda_1^{(n-i)(i-1)} + \lambda_2^{(n-i)(i-1)}x + \lambda_3^{(n-i)(i-1)}y + \lambda_4^{(n-i)(i-1)}xy \tag{3.9}$$

para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Neste caso as igualdades a serem satisfeitas pelos coeficientes na expressão de $f(y^{n-i}x^{i-1})$ e por ξ são

$$\begin{aligned} 2\lambda_1^{(n-1)(0)} &= 0, & \lambda_2^{(n-1)(0)}(\xi+1) &= 0, \\ \lambda_1^{(s-1)(t)}(1+(-1)^s\xi^t) &= 0, & \lambda_1^{(s)(t-1)}(1+(-1)^s\xi^s) &= 0, \\ 2\lambda_1^{(0)(n-1)} &= 0, & \lambda_3^{(0)(n-1)}(1+\xi) &= 0, \end{aligned}$$

e

$$\xi\lambda_2^{(s-1)(t)} + \xi\lambda_3^{(s)(t-1)} + (-1)^s\xi^s\lambda_3^{(s)(t-1)} + (-1)^s\xi^t\lambda_2^{(s-1)(t)} = 0. \tag{3.10}$$

Note que em (3.10) se $s = 1$ então $\lambda_2^{(s-1)(t)} = \lambda_2^{(0)(n-1)} = 0$ e se $t = 1$ então $\lambda_3^{(s)(t-1)} = \lambda_3^{(n-1)(0)}$. Para $s > 0, t > 0$ $\lambda_2^{(s-1)(t)}$ pode ser expresso em termos de $\lambda_3^{(s)(t-1)}$. Como ξ é não nulo e não é uma raiz da unidade temos que $\lambda_1^{(n-1)(0)} = \lambda_2^{(n-1)(0)} = \lambda_1^{(0)(n-1)} = \lambda_3^{(0)(n-1)} = 0$ e $\lambda_1^{(n-i)(i-1)} = 0$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Isto implica $dim_k Im(\phi_n) = 2n+1 = dim_k ker(\phi_{n+1})$.

Usando os resultados obtidos para os primeiros grupos de cohomologia de A e assumindo ξ não nulo e $\xi^l \neq 1$ para todo $l \geq 1$, temos que $dim_k HH^0(A) = 2$, $dim_k HH^1(A) = 2$, $dim_k HH^2(A) = 1$ e $dim_k HH^n(A) = 0$ para todo $n \geq 3$. Portanto,

$$dim_k HH^*(A) = 5.$$

Projetos para o futuro

Usando os resultados que consegui no meu trabalho de graduação [LP18], junto com os resultados de Chohuy e Bardzell pretendemos distinguir classes de álgebras importantes e suas categorias derivadas. No meu doutorado pretendo fazer um curso de categorias derivadas para esse fim e me parece que as álgebras Calabi-Yau e as de d-Koszul, [GMMVZ04] podem ser as primeiras a serem atacadas. Isso parece interessante também porque recentemente meu orientador e o Prof. Yury Volkov, classificaram as álgebras d-homogêneas cujo ideal definidor pode ser gerado por no máximo dois elementos[MV17, MV]. Uma outra direção possível seria estudar a geometria por trás das bases de Gröbner. Pretendo estudar esse tópico baseado nos trabalhos de Green, Schroll [GHS17] bem como o pre print do meu orientador com Green e Schroll [GMS17].

Referências Bibliográficas

[AF12] F. W. Anderson e K. R. Fuller. *Rings and categories of modules*, volume 13. Springer Science & Business Media, 2012. 3

[AG87] D. Anick e E. L. Green. On the homology of quotients of path algebras. *Communications in Algebra*, 15(1-2):309–341, 1987. iii, v, 1

[Ani86] D. Anick. On the homology of associative algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 296(2):641–659, 1986. 1

[ARS97] M. Auslander, I. Reiten e S. Smalo. *Representation theory of Artin algebras*, volume 36. Cambridge university press, 1997. 10

[ASS06] I. Assem, A. Skowronski e D. Simson. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Volume 1: Techniques of Representation Theory*, volume 65. Cambridge University Press, 2006. 3, 18

[Bar97] M. J. Bardzell. The alternating syzygy behavior of monomial algebras. *Journal of Algebra*, 188(1):69–89, 1997. iii, v, 1, 27, 34, 36, 37

[BGMS05] R.-O. Buchweitz, E. L. Green, D. Madsen e Ø. Solberg. Finite Hochschild cohomology without finite global dimension. *Math. Res. Lett.*, 12(5-6):805–816, 2005. 45, 47

[BLM00] M. J. Bardzell, A. C. Locateli e E. N. Marcos. On the Hochschild cohomology of truncated cycle algebras. *Comm. Algebra*, 28(3):1615–1639, 2000. 21

[CE16] H. Cartan e S. Eilenberg. *Homological Algebra (PMS-19)*, volume 19. Princeton University Press, 2016. 1, 14

[Cib90] C. Cibils. Rigidity of truncated quiver algebras. *Advances in Mathematics*, 79(1):18–42, 1990. iii, v, 1, 22

[Cib98] C. Cibils. Hochschild cohomology algebra of radical square zero algebras. Em *Algebras and modules, II*, volume 24, páginas 93–101. Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1998. 23

[CLS82] C. Cibils, F. Larrión e L. Salmerón. *Métodos diagramáticos en teoría de representaciones*. Monografías del Instituto de Matemáticas. Universidad Nacional Autónoma de México, 1982. 3

[CS15] S. Chouhy e A. Solotar. Projective resolutions of associative algebras and ambiguities. *Journal of Algebra*, 432:22–61, 2015. iii, v, 1, 27, 33, 34, 38

[DK12] Ju. A. Drozd e V. Kirichenko. *Finite dimensional algebras*. Springer Science & Business Media, 2012. 17, 18, 22

[FFG93] D. R. Farkas, C.D. Feustel e E. L. Green. Synergy in the theories of gröbner bases and path algebras. *Canadian Journal of Mathematics*, 45(4):727–739, 1993. 34

[Ger63] M. Gerstenhaber. The cohomology structure of an associative ring. *Annals of Mathematics*, páginas 267–288, 1963. 14

[Ger64] M. Gerstenhaber. On the deformation of rings and algebras. *Annals of Mathematics*, páginas 59–103, 1964. 1

[GHS17] E. L. Green, L. Hille e S. Schroll. Algebras and varieties. *ArXiv e-prints*, Julho 2017. 51

[GHZ+85] E. L. Green, D. Happel, D. Zacharia et al. Projective resolutions over artin algebras with zero relations. *Illinois Journal of Mathematics*, 29(1):180–190, 1985. 34

[GMMVZ04] E. L. Green, E. N. Marcos, R. Martınez-Villa e P. Zhang. D-koszul algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 193(1-3):141–162, 2004. 51

[GMS17] E. L. Green, E. N. Marcos e S. Schroll. Module and varieties. *arXiv:1707.07877*, Julho 2017. 51

[Gro91] Buenos Aires Cyclic Homology Group. Cyclic homology of algebras with one generator. *K-theory*, 5:51–69, 1991. 15

[Hap89] D. Happel. Hochschild cohomology of finite—dimensional algebras. Em Marie-Paule Malliavin, editor, *Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin*, páginas 108–126, Berlin, Heidelberg, 1989. Springer Berlin Heidelberg. iii, v, 1, 16, 20, 21, 25, 45

[Hoc45] G. Hochschild. On the cohomology groups of an associative algebra. *Annals of Mathematics*, páginas 58–67, 1945. 1, 12, 18

[LP18] O. Lezama e M. Paiba. Computing finite presentations of Tor and Ext skew PBW extensions and some applications. *Acta Math. Acad.Paedagog. Nyházi*, 34(1), 2018. 51

[MV] E. N. Marcos e Y. Volkov. s-homogeneous algebras with two relations. Manuscript in preparation. 51

[MV17] E. N. Marcos e Y. Volkov. s-homogeneous algebras via s-homogeneous triples. *arXiv preprint arXiv:1711.10664*, 2017. 51

[Red01] M. J. Redondo. Hochschild cohomology: some methods for computations. *Resenhas do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo*, 5(2):113–137, 2001. 14, 18

[Skö08] E. Sköldberg. A contracting homotopy for bardzell's resolution. Em *Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy*, páginas 111–117. JSTOR, 2008. 38

[Wei95] C. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Number 38. Cambridge university press, 1995. 3, 14