O TEOREMA DE TOPONOGOV

MARIA ELISA GALVÃO GOMES DE OLIVEIRA

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM

MATEMÁTICA

ORIENTADOR: PROF. DR. CARLOS EDGARD HARLE

DURANTE A ELABORAÇÃO DESTE TRABALHO A AUTORA FOI BOLSISTA DO CONSELHO NACIONAL DE PESQUISAS E RECEBEU APOIO FINANCEIRO DO BNDE, CONTRATOS FUNTEC Nº 100 E 154 E FINEP CONVÊNIO 184/CT.

- NOVEMBRO DE 1974 -

Este trabalho surgiu nos Seminários de Geometria organizados pelo Professor Carlos Edgard Harle, a quem devo especiais agradecimentos pela orientação e sugestões que me foram muito valiosas.

Agradeço ainda à Professora Elza Furtado Gomide pela orientação no programa de Mestrado e às Professoras Iracema Martin Bund e Alciléa Augusto Homem de Mello pelo apoio e amizade com que me acompanharam desde o início da vida universitária.

Maria Elisa Galvão Gomes de Oliveira

São Paulo, novembro de 1974

INTRODUÇÃO

O teorema de Toponogov nos permite comparar triângulos geodésicos de uma variedade riemanniana M^n, completa, com triângulos geodésicos convenientemente construídos em uma variedade riemanniana bi-dimensional, simplesmente conexa, com curvatura constante e igual a δ (que chamaremos $S(\delta)$), onde δ é o limite inferior para as curvaturas seccionais de M^n.

Em sua forma original foi publicado, em russo, por volta de 1957 (Dokl. Akad. Nauk, SSSR, 115, pág. 674-676) e outras publicações do próprio Toponogov datando de 1958 e 1959 referem-se à ele. Sua demonstração baseia-se em um teorema de Alexandrov (Die innerie geometric der konvexen Flächen, Akad. Verlag, Berlin, 1955) para superfícies.

Pelas dificuldades inerentes ao idioma original e à própria demonstração, surgiram várias versões do teorema de Toponogov. A versão que será apresentada neste trabalho é basicamente a devida a Berger [1], publicada em 1961. Uma outra versão pode ser encontrada em [5].

O desenvolvimento do trabalho foi feito no sentido de que os conhecimentos básicos de Geometria Riemanniana fos-

sem suficientes para sua leitura. Procuramos usar notações semelhantes às de [4], [6], [7].

Nos capítulos iniciais procuramos resumir os elementos básicos sobre campos de Jacobi, pontos conjugados, pontos focais e suas propriedades que serão utilizadas no decorrer das demonstrações posteriores.

Os teoremas de comparação de Rauch e algumas de suas conseqüências são um instrumento básico na demonstração do teorema de Toponogov: eles comparam comprimentos de curvas convenientemente construídas sobre duas variedades riemannianas cujas curvaturas seccionais obedecem a uma certa relação de ordem, com a hipótese de não-existência de pontos conjugados ou pontos focais sobre uma família de geodésicas em uma das variedades. Esses teoremas serão desenvolvidos no capítulo III.

Para demonstrar o teorema de Toponogov, em primeiro lugar verificamos que ele vale para triângulos que satisfazem à uma condição semelhante às hipóteses do teorema de Rauch, com a condição de não-existência de pontos conjugados.

A seguir, são demonstrados alguns lemas que estabelecem propriedades em $S(\delta)$. Usando esses lemas, verificamos que o teorema de Toponogov é verdadeiro se os triângulos envolvidos são "finos". A demonstração mais geral é feita construindo, dado um triângulo qualquer, uma seqüência de triângulos "finos" para os quais já mostramos que o teorema é verdadeiro.

I - CAMPOS DE JACOBI: PONTOS CONJUGADOS

PONTOS MÍNIMOS: CUT-LOCUS

Os campos de Jacobi ao longo de curvas e suas propriedades fundamentais são estudadas nesse capítulo, no parágrafo 3, sendo que nos paragráfos iniciais fixamos algumas notações e definições.

Um dos objetivos é dar uma definição de ponto conjugado ao longo de uma geodésica, mostrar que além de um ponto conjugado uma geodésica deixa de ser minimal, e principalmente verificar como se comparam, ao longo de um segmento de geodésica sem pontos conjugados, as formas do índice de um campo arbitrário e um campo de Jacobi com as mesmas condições iniciais.

Utilizando os conceitos e propriedades dos primeiros parágrafos, dedicamos o parágrafo final deste capítulo ao estudo dos pontos mínimos e das propriedades do cut-locus de um ponto que serão usadas na demonstração do teorema de Toponogov.

Como referência podemos citar [3],[4],[6],[7],[9],e [10].

1 - A CURVATURA SECCIONAL

Para uma variedade riemanniana bi-densional pode-se definir a noção de curvatura, em virtude do teorema egrégio de Gauss.

Dada uma variedade riemanniana (M^n,g), para cada $p \in M^n$ e cada subespaço bi-dimensional Π_p de T_pM, consideramos a subvariedade bi-dimensional formada por segmentos de geodésicas com origem $p \in M$ e vetor tangente $v_p \in \Pi_p$ nesse ponto. Tem-se então:

DEFINIÇÃO 1.1.1 - A curvatura da variedade bi-dimensional acima considerada, no ponto p, é denotada por $S(\Pi_p)$ e denominada curvatura seccional de M_p em p segundo Π_p.

Pode-se definir uma forma 4-linear, que depende apenas da métrica g:

$$K_p : T_pM \times T_pM \times T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R},$$

satisfazendo a propriedade:

para cada plano $\Pi_p \subset T_pM$ e para cada base ortonormal $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ de Π_p, vale:

$$S(\Pi_p) = K_p(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$$

K_p denomina-se tensor de Riemann-Christoffel.

2 - A CURVATURA DE UMA VARIEDADE RIEMANNIANA

Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana, ∇ sua conexão riemanniana.

Para cada tripla X, Y, Z de campos de vetores de M^n definimos um novo campo:

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

Usando propriedades da conexão riemanniana ∇, verifica-se que $R(X,Y)Z$ é tri-linear em relação à soma de campos e produtos de campos por funções diferenciáveis.

DEFINIÇÃO 1.2.1 - A função R acima definida chama-se curvatura de M.

Se $(u.\ x^1.\ \ldots, x^n)$ é uma carta local, então:

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k} = \sum_{\ell} R^{\ell}_{ijk}\ \frac{\partial}{\partial x^{\ell}}$$

DEFINIÇÃO 1.2.2 - As funções R^{ℓ}_{ijk} denominam-se componentes do tensor de curvatura relativamente à carta local dada.

Um cálculo simples mostra que:

$(R(X,Y)Z)_p$ depende apenas dos vetores X_p, Y_p, Z_p.

Podemos definir:

DEFINIÇÃO 1.2.3 - O tensor de Riemann-Christoffel:

$$K(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)W,Z)$$

Temos assim uma forma 4-linear definida em T_pM, que satisfará ainda:

(1) $$K(X_1, X_2, X_3, X_4) = - K(X_2, X_1, X_3, X_4)$$

(2) $$K(X_1, X_2, X_3, X_4) = - K(X_1, X_2, X_4, X_3)$$

(3) $$K(X_1,X_2,X_3,X_4)+K(X_1,X_3,X_4,X_2)+K(X_1,X_4,X_2,X_3) = 0,$$

(4) $$K(X_1, X_2, X_3, X_4) = K(X_3, X_4, X_1, X_2)$$

sendo (1), (2), (3) e (4) decorrentes da definição de K em termos de R e das propriedades de conexão riemanniana ∇.

3 - CAMPOS DE JACOBI

Consideremos uma variedade riemanniana (M^n,g), e seja $\gamma: [0,1] \longrightarrow M^n$ geodésica de M^n.

DEFINIÇÃO 1.3.1 - Um campo de vetores J ao longo de γ é um campo de Jacobi se satisfaz à equação de Jacobi:

$$\frac{D^2J}{dt^2} - R(\gamma'(t),J(t))\gamma'(t) = 0.$$

Observamos que, tomando um referencial ortonormal ao longo de γ, $\{e_1(t), \ldots, e_n(t)\}$ e escrevendo

$$J(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t)e_i(t)$$

a equação de Jacobi acima se escreve como um sistema linear de segunda ordem:

$$f_j''(t) - \sum_{i=1}^{n} f_i(t)a_{ij}(t) = 0, \quad 1 \leq j \leq n,$$

onde

$$a_{ij}(t) = g(R(\gamma'(t),e_i(t))\gamma'(t),e_j(t)), \quad 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n.$$

Concluímos daí que, dadas as condições iniciais $J(0)$, $\frac{DJ}{dt}(0)$, existe uma e uma única solução C^∞ do sistema, definida em $[0,1]$.

Para interpretarmos geometricamente os campos de Jacobi precisamos da idéia de variação de uma curva.

DEFINIÇÃO 1.3.2 - Se $c: [0,1] \longrightarrow M^n$ é uma curva diferenciável por partes, uma variação de c é uma função contínua

$$\lambda: (-\varepsilon,\varepsilon) \times [0,1] \longrightarrow M^n$$

tal que

a) $\lambda(0,s) = c(s)$ para todo $s \in [0,1]$.

b) existe uma partição P do intervalo $[0,1]$, $P = \{0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_{n-1} < s_n = b\}$ tal que a restrição de λ a cada $(-\varepsilon,\varepsilon) \times [s_{i-1}, s_i]$ é diferenciável, para cada i, $1 \leq i \leq n$.

Se $\bar{t} \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, a curva $\lambda_{\bar{t}}:[0,1] \longrightarrow M^n$ dada por $\lambda_{\bar{t}}(s) = \lambda(\bar{t},s)$ é chamada uma curva da variação.

Se $\bar{s} \in [0,1]$, a curva $\lambda_{\bar{s}}:(-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow M$ dada por $\lambda_{\bar{s}}(t) = \lambda(t,\bar{s})$ é chamada uma curva transversal da variação.

DEFINIÇÃO 1.3.3 - O vetor velocidade de cada curva transversal em $s = 0$ é chamado campo variacional de λ.

A caracterização geométrica dos campos de Jacobi nos é fornecida pela proposição:

PROPOSIÇÃO 1.3.1 - Consideremos

$\gamma: [0,1] \longrightarrow M^n$ geodésica de M^n,

$\lambda: (-\varepsilon,\varepsilon) \times [0,1] \longrightarrow M^n$ variação de γ tal que as curvas de variação:

$$\lambda_{\bar{t}}(s) = \lambda(\bar{t},s),\ s \in [0,1],\ \bar{t} \in (-\varepsilon,\varepsilon)$$

são geodésicas de M^n.

Nessas condições, o campo variacional de λ é um campo de Jacobi ao longo de γ.

Reciprocamente, dado $\bar{J}$ um campo de Jacobi ao longo de γ, existe uma variação de γ por geodésicas tendo $\bar{J}$ como campo variacional.

PROVA: Dada uma variação λ nas condições da hipótese, seu cam

po variacional será:

$$J(s) = \frac{\partial \lambda}{\partial t}(0,s)$$

Para cada $\bar{t} \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, $\lambda_{\bar{t}}(s) = \lambda(\bar{t},s)$ é geodésica; logo:

$$\frac{D}{\partial s}\frac{\partial \lambda}{\partial s}(t,s) = 0, \quad \forall t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$$

Daí:

$$0 = \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial s}(t,s)\right) = \frac{D}{ds}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial \lambda}{\partial s}(t,s) - R\left(\frac{\partial \lambda}{\partial s},\frac{\partial \lambda}{\partial t}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial s}, \text{ e}$$

$$\frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial \lambda}{\partial t}(t,s) - R\left(\frac{\partial \lambda}{\partial s},\frac{\partial \lambda}{\partial t}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial s} = 0.$$

Fazendo-se $t = 0$, segue:

$$\frac{D^2}{dt^2}J(s) - R(\gamma'(s), J(s))\gamma'(s) = 0,$$

portanto, $J(s)$ é campo de Jacobi ao longo de γ.

Para mostrar a recíproca, dado $\bar{J}$ campo ao longo de γ, seja $\eta:(-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow M^n$ uma curva tal que $\eta(0)=\gamma(0), \eta'(0)=\bar{J}(0)$.

Consideremos $W(t)$ compo de vetores ao longo de $\eta(t)$ de forma que $W(0) = \gamma'(0)$, $\frac{DW}{dt}(0) = \frac{DJ}{ds}(0)$.

A variação

$$\lambda(t,s) = \exp_{\eta(t)} sW(t)$$

da geodésica γ é tal que seu campo varacional é um campo de Jacobi ao longo de γ, conforme a primeira parte da prova.

Mostramos que esse campo variacional e $\bar{J}(s)$ coincidem verificando que são soluções da mesma equação diferencial, com as mesmas condições iniciais.

Seja $V(s) = \frac{\partial \lambda}{\partial t}(0,s)$; então

$$i)\ V(0) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\exp_{\eta(t)}(0)\right)\Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\eta(t)\right)\Big|_{t=0} = \eta'(0) = \bar{J}(0), \text{e}$$

$$\frac{DV}{ds}(0) = \frac{D}{ds}\frac{\partial \lambda}{\partial t}(0,0) = \frac{D}{dt}\frac{\partial \lambda}{\partial s}(0,0)$$

Da definição $\lambda(t,s)$:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s}(t,s) = \left(d\ \exp_{\eta(t)}\right)_{sW(t)}\left(W(t)\right);\ \text{tomando } s = 0$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s}(t,0) = W(t);\ \text{logo:}$$

$$ii)\ \frac{DV}{ds}(0) = \frac{D}{dt}W(t)\Big|_{t=0} = \frac{DW}{dt}(0) = \frac{D\bar{J}}{dt}(0).$$

De (i) e (ii) segue:

$$\bar{J}(s) = V(s),\ \text{para todo } s \in [0,1]. \qquad \square$$

DEFINIÇÃO 1.3.4 - Seja $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow M^n$ geodésica de M^n; diz-se que o ponto $q = \gamma(t_0)$ é conjugado a $p = \gamma(0)$ ao longo de γ se existe um campo de Jacobi J não nulo ao lon-

go de γ tal que $J(0) = 0$ e $J(t_0) = 0$.

O número de tais campos de Jacobi ao longo de γ linearmente independentes é a multiplicidade do ponto conjugado.

As proposições seguintes fornecem resultados sobre campos de Jacobi que serão úteis posteriormente.

PROPOSIÇÃO 1.3.2 - Seja $\gamma: [0,1] \longrightarrow M^n$ uma geodésica, $p=\gamma(0)$. Então $\gamma(s_0)$ é conjugado a p ao longo de γ se e somente se $v_0 = s_0\gamma'(0)$ é um ponto crítico da

$$\exp_p : T_pM \longrightarrow M.$$

Além disso, a multiplicidade de q como ponto conjugado a p é igual à dimensão do núcleo de $(d \exp_p)_{v_0}$.

PROVA: Chamemos $v = \gamma'(0)$; $v \in T_pM$.

Seja $w \in T_v(T_pM)$, e consideremos o campo

$$W(s) = (d \exp_p)_{sv}(sw), \quad s \in [0,1].$$

Mostremos que W é campo de Jacobi ao longo de γ; para isso, consideremos a variação:

$$\lambda(t,s) = \exp_p(sc(t)),$$

com

$$c(t) = v+tw$$

Então:

$\gamma(0,s)=\exp_p(sv)=\gamma(s)$ para todo $s \in [0,1]$; para $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$,

$\lambda(t,s)$ está bem definida.

O campo variacional de λ será:

$$V(s) = \frac{\partial\lambda}{\partial t}(0,s) = (d\exp_p)_{sc(0)}(sc'(0)) = (d\exp_p)_{sv}(sw),$$

ou $V(s) = W(s)$; portanto W é campo de Jacobi.

Por outro lado, $W(s)$ é identicamente nulo se e somente se $w = 0$, pois:

$$W(s) \equiv 0 \iff \frac{\partial f}{\partial t}(0,s) \equiv 0 \iff c'(0) = 0 \iff w = 0.$$

Se $q = \gamma(s_0)$ é ponto conjugado a $p = \gamma(0)$, então existe um campo de Jacobi não nulo $J(s)$ tal que $J(0) = 0$, $J(s_0) = 0$. Seja agora $w = \frac{DJ}{ds}(0)$, então

$$J(s_0) = (d\exp_p)_{s_0v}(s_0w) = 0 \quad e \quad w \neq 0.$$

Portanto, s_0v é ponto crítico da $\exp_p$.

Supondo s_0v ponto crítico da $\exp_p$ e considerando $J(s) = (d\exp_p)_{sv}(sw)$, para $w \neq 0$, J é um campo de Jacobi ao longo de γ, não nulo, que satisfaz

$$J(0) = 0, \quad J(s_0) = 0.$$

Daí, $q = \gamma(s_0)$ é conjugado a $p = \gamma(0)$ ao longo de γ.

Se k é a multiplicidade de q como ponto conjugado a p ao longo de γ, então existem k campos $J_1, \ldots, J_k$ tais que $J(0) = 0$, $J_i(s_0) = 0$, $1 \leq i \leq k$.

Podemos escrever:

$$J_i(s) = (d\exp_p)_{sv}(sw_i),\ 1 \leq i \leq k,$$

e verificamos que $J_1(s), \ldots, J_k(s)$ são linearmente independentes se e somente se $w_1, \ldots, w_k$ o são.

Logo, a multiplicidade de q como ponto conjugado a p é a dimensão do núcleo de $(d\exp_p)_{s_0v}$. □

Seguem outros resultados sobre campos de Jacobi que usaremos posteriormente.

PROPOSIÇÃO 1.3.3 - Seja $\gamma: [0,a] \longrightarrow M^n$ uma geodésica, J um campo de Jacobi ao longo de γ com $J(0) = 0$.

Então:

i) Uma condição necessária e suficiente para que J(s) seja perpendicular a $\gamma'(s)$ é que $\frac{DJ}{dt}(0)$ seja perpendicular a $\gamma'(0)$.

ii) O espaço vetorial dos campos de Jacobi ao longo de γ tais que $J(0) = 0$, J perpendicular a γ, tem dimensão n-1.

PROVA: i) Suponhamos $\frac{DJ}{dt}(0)$ perpendicular a $\gamma'(0)$, e seja

$$h(s) = \langle J(s), \gamma'(s)\rangle$$

Então:

$$h'(s) = \langle \frac{DJ}{ds}, \gamma'(s)\rangle + \langle J(s), \frac{D}{ds}\gamma'(s)\rangle$$

Como γ é geodésica, $\frac{D}{ds}\gamma'(s) = 0$, e

$$h'(s) = \langle \frac{DJ}{ds}, \gamma'(s) \rangle$$

Analogamente,

$$h''(s) = \langle \frac{D^2J}{ds^2}, \gamma(s) \rangle$$

J é campo de Jacobi ao longo de γ, logo,

$$h''(s) = \langle R(\gamma'(s), J(s))\gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 0,$$

para todo $s \in [0,1]$.

Daí, $h'(s)$ é constante; como $h'(0) = 0$ $(J(0)=0)$, então

$h'(s) = 0$, para todo $s \in [0,1]$, donde

$h(s) = h(0) = 0$ para todo $s \in [0,1]$, ou seja, $J(s)$ é perpendicular a γ.

Reciprocamente, se $J(s)$ é perpendicular a $\gamma'(s)$ para todo $s \in [0,1]$, então:

$h(s) = \langle J(s), \gamma'(s) \rangle = 0$, $\forall s \in [0,1]$; logo,

$h'(s) = \langle \frac{DJ}{ds}, \gamma'(s) \rangle = 0$, $\forall s \in [0,1]$, em particular para $s=0$, ou seja, $\frac{DJ}{ds}(0)$ é perpendicular e $\gamma'(0)$.

ii) Como consequência de i), tem-se que o espaço vetorial dos campos de Jacobi tais que $J(0) = 0$ e J perpendicular a γ é isomorfo a $(\gamma'(0))^{\perp}$, logo, tem dimensão n-1. □

PROPOSIÇÃO 1.3.4 - Seja $\gamma: [0,\ell] \longrightarrow M^n$ uma geodésica sem pontos conjugados a $\gamma(0)$ no intervalo $[0,\ell]$.

Se $\{J_1,\ldots, J_{n-1}\}$ é uma base do espaço dos campos de Jacobi ao longo de γ, perpendiculares a γ, com $J(0) = 0$, então, para cada $s\in(0,\ell]$, $\{J_1(s), \ldots, J_{n-1}(s)\}$ é uma base do complemento ortogonal de $\gamma'(s)$.

PROVA: Como γ não possui pontos conjugados a $\gamma(0)$ no intervalo $[0,\ell]$, segue que para cada $s\in(0,\ell]$, $\{J_1(s), \ldots\ldots J_{n-1}(s)\}$ são vetores linearmente independentes.

Por outro lado, para todo $s\in[0,\ell]$,

$$\langle J_i(s),\gamma'(s)\rangle = 0, \quad 1 \le i \le n-1,$$

ou seja, $J_i(s)$ é perpendicular a $\gamma'(s)$, para todo s.

Como $\dim[\gamma'(s)]^{\perp} = n-1$, temos que $\{J_i(s),\ldots,J_{n-1}(s)\}$ é uma base de $[\gamma'(s)]^{\perp}$, $\forall s\in(0,\ell]$. □

PROPOSIÇÃO 1.3.5 - Seja $\gamma: [0,\ell] \longrightarrow M^n$ uma geodésica de M^n, J um campo de Jacobi ao longo de γ tal que $\frac{DJ}{dt}(0) = 0$.

i) Uma condição necessária e suficiente para que $J(s)$ seja perpendicular a $\gamma'(s)$ é que $J(0)$ seja perpendicular a $\gamma'(0)$.

ii) O espaço vetorial dos campos de Jacobi J ao longo de γ perpendiculares a γ tais que $\frac{DJ}{dt}(0)=0$ tem dimensão $n-1$.

PROVA: Análoga a da proposição 1.3.3. □

4. FÓRMULAS DE VARIAÇÃO DO COMPRIMENTO DE ARCO; APLICAÇÕES

O próximo objetivo é mostrar que além de um ponto conjugado uma geodésica deixa de ser minimal.

Para isso, dada uma curva diferenciável $c:[0,1] \to M^n$, consideremos uma variação de c, $\lambda:(-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,1] \longrightarrow M^n$; para cada $t \in (-\varepsilon,\varepsilon)$, seja $\lambda_t: [0,1] \longrightarrow M^n$ uma curva da variação, e $L: (-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ a função

$$t \longrightarrow L(t) = \int_0^1 \left\langle \frac{\partial\lambda}{\partial s}(t,s), \frac{\partial\lambda}{\partial s}(t,s) \right\rangle^{1/2} ds,$$

que associa a cada $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ o comprimento de λ_t.

DEFINIÇÃO 1.4.1 - Chamamos primeira e segunda variações de L em relação a λ aos números $L'(0)$ e $L''(0)$ respectivamente.

Com as notações acima, temos os resultados:

LEMA 1.4.1 -

$$L'(0) = \langle V(s), c'(s)\rangle\Big|_0^1 - \int_0^1 \langle V(s), \frac{D}{ds}(c'(s))\rangle ds$$

PROVA: Seja $L(t) = \int_0^1 \left\langle \frac{\partial\lambda}{\partial s}(t,s), \frac{\partial\lambda}{\partial s}(t,s) \right\rangle^{1/2} ds$; então:

$$L'(t) = \int_0^1 \left\langle \frac{\partial\lambda}{\partial s}(t,s), \frac{\partial\lambda}{\partial s}(t,s) \right\rangle^{-1/2} \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\lambda}{\partial s}(t,s), \frac{\partial\lambda}{\partial s}(t,s)\right\rangle ds$$

$$L'(t) = \int_0^1 \langle \frac{\partial\lambda}{\partial s}(t,s), \frac{\partial\lambda}{\partial s}(t,s)\rangle^{-1/2} \langle \frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial t}(t,s)\right), \frac{\partial\lambda}{\partial s}(t,s)\rangle ds$$

Usando:

$$\frac{d}{ds}\langle \frac{\partial\lambda}{\partial t}, \frac{\partial\lambda}{\partial s}\rangle = \langle \frac{D}{ds}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial t}\right), \frac{\partial\lambda}{\partial s}\rangle + \langle \frac{\partial\lambda}{\partial t}, \frac{D}{ds}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial s}\right)\rangle$$

e fazendo t=0, obtem-se:

$$L'(0) = \langle V(s), c'(s)\rangle\Big|_0^1 - \int_0^1 \langle V(s), \frac{D}{ds} c'(s)\rangle ds. \quad \square$$

DEFINIÇÃO 1.4.2 - Uma curva $c: [0,1] \to M^n$, $c(0) = p$, $c(1) = q$ é um extremo para o problema dos pontos fixos se para toda variação própria λ de c tem se $L'(0) = 0$.

DEFINIÇÃO 1.4.3 - Uma variação $\lambda: (-\varepsilon,\varepsilon)\times[0,1] \to M^n$ de uma curva $c: [0,1] \to M^n$ é própria se $\lambda(t,s) = c(0)$, $\lambda(t,1) = c(1)$ para todo $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, ou seja, se λ mantém fixos p e q.

Verifica-se trivialmente que o campo variacional de λ satisfaz $V(0) = 0$, $V(1) = 0$, se λ é própria.

LEMA 1.4.2 - Uma curva $c: [0,1] \to M^n$ é um extremo para o problema dos pontos fixos se e somente se é uma geodésica.

PROVA: Suponhamos que c é uma geodésica; então:

$$\frac{D}{ds}(c'(s)) = 0$$

Para toda variação própria λ de c, teremos $V(0) = 0$, $V(1) = 0$, logo,

$$L'(0) = \langle V(s), c'(s)\rangle\Big|_0^1 + \int_0^1 \langle V(s), \frac{D}{ds}(c'(s)\rangle ds = 0$$

Reciprocamente, seja c um extremo para o problema dos pontos fixos.

Então:

$$0 = L'(0) = \int_0^1 \langle V(s), \frac{D}{ds}(c'(s))\rangle ds$$

Supondo que existe $s_0 \in [0,1]$ tal que $\frac{Dc'}{ds}(s_0) \neq 0$; tomando $h: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $h(s_0) = 1$, $h(s) \geq 0$, para todo $s \in [0,1]$ e h nula fora de uma vizinhança de s_0 em que $\frac{Dc'}{ds} \neq 0$, e

$$V(s) = h(s)\frac{D}{ds}(c'(s))$$

V(s) é o campo variacional da variação:

$$u(t,s) = \exp_{c(s)}(tV(s))$$

Para essa variação,

$$L'(0) = \int_0^1 h(s)\left|\frac{D}{ds}(c'(s))\right|^2 ds,$$

pois $\langle \frac{D}{ds}c'(s), c'(s)\rangle = 0$ desde que c é parametrizada por comprimento de arco.

Temos então, $L'(0) > 0$, o que é um absurdo.

Logo, $\frac{D}{ds}c'(s) = 0$; e c é uma geodésica. □

Do lema 1.4.1, concluímos que curvas de comprimento mínimo entre dois pontos devem ser geodésicas.

LEMA 1.4.3 - Seja $\lambda(t,s)$ uma variação da geodésica $\gamma:[0,1]\to M^n$, Então:

$$L''(0) = \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial \lambda}{\partial t}(0,s), \gamma'(s)\right\rangle\Big|_0^1 + \int_0^1 \Big[\langle R(V,\gamma')V,\gamma'\rangle +$$

$$+ \left\langle \frac{DV}{ds}, \frac{DV}{ds}\right\rangle - \left\{\frac{d}{ds}\langle V,\gamma'\rangle\right\}^2\Big]ds$$

PROVA: Olhando para a prova do lema 1.4.1, temos:

$$L'(t) = \int_0^1 \left\{\left\langle \frac{\partial\lambda}{\partial s}\frac{\partial\lambda}{\partial s}\right\rangle^{-1/2}\left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\lambda}{\partial s}\frac{\partial\lambda}{\partial s}\right\rangle\right\}ds$$

Calculando:

$$(*)\ L''(t) = \int_0^1 \Bigg\{ \left\langle \frac{\partial\lambda}{\partial s}\frac{\partial\lambda}{\partial s}\right\rangle^{-\frac{3}{2}}\left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\lambda}{\partial s},\frac{\partial\lambda}{\partial s}\right\rangle^2 + \left\langle \frac{\partial\lambda}{\partial s},\frac{\partial\lambda}{\partial s}\right\rangle^{-\frac{1}{2}}\left\langle \frac{D^2}{\partial t^2}\frac{\partial\lambda}{\partial s},\frac{\partial\lambda}{\partial s}\right\rangle +$$

$$+ \left\langle \frac{\partial\lambda}{\partial s}\frac{\partial\lambda}{\partial s}\right\rangle^{-\frac{1}{2}}\left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial\lambda}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\lambda}{\partial s}\right\rangle\Bigg\}ds$$

Observando que $\left\langle \frac{\partial\lambda}{\partial s}(0,s),\frac{\partial\lambda}{\partial s}(0,s)\right\rangle = 1$, e deixando de lado esse fator, usamos:

$$\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\lambda}{\partial s} = \frac{D}{\partial s}\frac{\partial\lambda}{\partial t}\ ;$$

logo

$$\frac{D^2}{\partial t^2}\frac{\partial\lambda}{\partial s} = \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\frac{\partial\lambda}{\partial t} = R\left(\frac{\partial\lambda}{\partial t},\frac{\partial\lambda}{\partial s}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial t} + \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial\lambda}{\partial t}$$

pela definição de R.

Substituindo em (*),

$$L''(t) = \int_0^1 \left\{ -\left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial \lambda}{\partial t}, \frac{\partial \lambda}{\partial s}\right\rangle^2 + \left\langle R\left(\frac{\partial \lambda}{\partial t}, \frac{\partial \lambda}{\partial s}\right)\frac{\partial \lambda}{\partial t}, \frac{\partial \lambda}{\partial s}\right\rangle + \right.$$

$$\left. + \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial \lambda}{\partial t}\frac{\partial \lambda}{\partial s}\right\rangle + \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{\partial \lambda}{\partial t}, \frac{D}{\partial s}\frac{\partial \lambda}{\partial t}\right\rangle \right\} ds$$

Fazendo $t=0$, obtemos:

$$L''(0) = \int_0^1 \left\{ -\left\langle \frac{DV}{\partial s}, \gamma'(s)\right\rangle^2 + \langle R(V(s),\gamma'(s))V(s),\gamma'(s)\rangle + \right.$$

$$\left. + \left\langle \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial \lambda}{\partial t}(0,s),\gamma'(s)\right\rangle + \left\langle \frac{DV}{ds}, \frac{DV}{ds}\right\rangle \right\} ds,$$

onde $V(s)$ é o campo variacional de λ.

Como

$$\frac{d}{ds}\langle V(s),\gamma'(s)\rangle = \left\langle \frac{DV}{ds},\gamma'(s)\right\rangle$$

e

$$\frac{d}{ds}\left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial \lambda}{\partial t}(0,s),\gamma'(s)\right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial \lambda}{\partial s}(0,s),\gamma'(s)\right\rangle,$$

pois, γ é geodésica, substituindo:

$$L''(0) = \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial \lambda}{\partial t}(0,s),\gamma'(s)\right\rangle \Big|_0^1 + \int_0^1 \left\{ \langle R(V,\gamma')V,\gamma'\rangle + \right.$$

$$\left. + \left\langle \frac{DV}{ds}, \frac{DV}{ds}\right\rangle - \left(\frac{d}{ds}\langle V,\gamma'\rangle\right)^2 \right\} ds. \qquad \square$$

Como conseqüências do lema 1.4.2, temos:

1) Se o campo variacional for ortogonal a γ, então $\langle V(s),\gamma'(s)\rangle = 0$, para todo $s\in[0,1]$, logo,

$$L''(0) = \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial \lambda}{\partial t}(0,s), \gamma'(s)\right\rangle \Big|_0^1 + \int_0^1 \left\{ \langle R(V,\gamma')V,\gamma'\rangle + \left\langle \frac{DV}{ds}, \frac{DV}{ds}\right\rangle \right\} ds$$

2) Se o campo variacional for um campo de Jacobi ortogonal a γ, então, usando:

$$\langle R(V,\gamma')V,\gamma'\rangle = \langle R(\gamma',V),\gamma'V\rangle$$

e

$$\frac{D^2V}{ds^2} = R(\gamma',V)\gamma',$$

então:

$$L''(0) = \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial \lambda}{\partial t}(0,s), \gamma'(s)\right\rangle \Big|_0^1 + \int_0^1 \left\{ \left\langle \frac{D^2V}{ds^2}, V\right\rangle + \left\langle \frac{DV}{ds}, \frac{DV}{ds}\right\rangle \right\} ds$$

como

$$\frac{d}{ds}\left\langle \frac{DV}{ds}, V\right\rangle = \left\langle \frac{D^2V}{ds^2}, V\right\rangle + \left\langle \frac{DV}{ds}, \frac{DV}{ds}\right\rangle,$$

$$L''(0) = \left[\left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial \lambda}{\partial t}(0,s), \gamma'(s)\right\rangle + \left\langle \frac{DV}{ds}, V\right\rangle \right]_0^1$$

mas:

$$\frac{DV}{ds} = \frac{D}{ds}\frac{\partial \lambda}{\partial t}(0,s) = \frac{D}{\partial t}\frac{\partial \lambda}{\partial s}(0,s) = \frac{D}{\partial t}\gamma'(s)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \frac{\partial \lambda}{\partial s}\right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial t}\frac{\partial \lambda}{\partial t}, \frac{\partial \lambda}{\partial s}\right\rangle + \left\langle \frac{\partial \lambda}{\partial t}, \frac{D}{\partial t}\frac{\partial \lambda}{\partial s}\right\rangle$$

Logo,

$$L''(0) = \left[\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \frac{\partial \lambda}{\partial t}\frac{\partial \lambda}{\partial s}\right\rangle \Big|_{t=0} \right]_{s=0}^{s=1}$$

LEMA 1.4.4 : (Identidade de Lagrange)

Seja γ: $[0,1] \longrightarrow M^n$ geodésica; se X e Y são campos de Jacobi ao longo de γ, então:

$$\langle \frac{DX}{ds}, Y \rangle - \langle X, \frac{DY}{ds} \rangle$$

é constante ao longo de γ.

PROVA: Seja $h(s) = \langle \frac{DX}{ds}, Y \rangle - \langle X, \frac{DY}{ds} \rangle$; então:

$$h'(s) = \langle \frac{D^2X}{ds^2}, Y \rangle + \langle \frac{DX}{ds}, \frac{DY}{ds} \rangle - \langle \frac{DX}{ds}, \frac{DY}{ds} \rangle - \langle X, \frac{D^2Y}{ds^2} \rangle$$

Como X e Y são campos de Jacobi:

$$h'(s) = \langle R(\gamma', X)\gamma', Y \rangle - \langle R(\gamma', Y)\gamma', X \rangle = 0$$

Logo,

h(s) é constante.

LEMA 1.4.5 - Seja γ: $[0,1] \longrightarrow M^n$ uma geodésica de M^n sem pontos conjugados a $\gamma(0)$ no intervalo $[0,1]$.

Consideremos W um campo diferenciável ao longo de γ tal que $W(0) = 0$. Então:

$$\int_0^1 \left\{ \langle R(W,\gamma')W, \gamma' \rangle + \langle \frac{DW}{ds}, \frac{DW}{ds} \rangle \right\} \geq \int_0^1 \left\{ \langle R(J,\gamma')J, \gamma' \rangle + \langle \frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds} \rangle \right\} ds,$$

sendo que a igualdade se verifica somente se W=J, onde J é o único campo de Jacobi ao longo de γ que satisfaz $J(0) = 0$, $J(1) = W(1)$.

PROVA: Em primeiro lugar, observamos que um campo de Jacobi está bem definido com as condições $J(0)=0$, $J(1)=W(1)$,

se não existem pontos conjugados a $\gamma(0)$ no intervalo $[0,1]$, pois:

existem $X \in T_{\gamma(0)}M$, $B \in T_{\gamma(0)}M$ tais que:

$$\gamma(s) = \exp_{\gamma(0)} sX \ , \ 0 \leq s \leq 1,$$

e

$$W(1) = (d \exp_p)_X(B);$$

tomando $\lambda(s,t) = \exp_{\gamma(0)}(sX+stB)$ uma variação de γ por geodésicas, então seu campo variacional é um campo de Jacobi ao longo de γ satisfazendo $J(0) = 0$, $J(1) = W(1)$; se $\bar{J}$ é um outro campo de Jacobi nas mesmas condições ($\bar{J}(0)=0, \bar{J}(1)=W(1)$), então $J-\bar{J}$ será um campo de Jacobi com $(J-\bar{J})(0)=0, (J-\bar{J})(1)=0$; logo, $J(s) = \bar{J}(s)$, e J está bem definido.

Consideremos $\{J_1, \ldots, J_n\}$ uma base do espaço dos campos de Jacobi ao longo de γ que se anulam para $s=0$. Como não existem pontos conjugados ao longo de γ, para cada $s \in [0,1]$, $\{J_1(s), \ldots, J_n(s)\}$ é uma base de $T_{\gamma(s)}M$.

Tem-se então:

$$J(s) = \sum_{i=1}^{n} a_i J_i(s)$$

$$W(s) = \sum_{i=1}^{n} f_i(s) J_i(s),$$

para todo $s \in [0,1]$, sendo $a_i = f_i(1)$, pois $J(1) = W(1)$.

Calculando: $\frac{DJ}{ds} = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{DJ_i}{ds}$,

$$\frac{DW}{ds} = \sum_{i=1}^{n} f_i'(s)J_i(s) + \sum_{i=1}^{n} f_i(s)\,\frac{DJ_i}{ds} = A(s) + B(s)$$

Daí,

$$\left\langle \frac{DW}{ds}, \frac{DW}{ds} \right\rangle = \langle A,A\rangle + 2\langle A,B\rangle + \langle B,B\rangle$$

$$\langle R(W,\gamma')W,\gamma'\rangle = \langle R(\gamma',W)\gamma',W\rangle = \sum_i f_i \langle R(\gamma',J_i)\gamma';W\rangle$$

$$= \sum_i f_i \left\langle \frac{D^2J_i}{ds^2}, W \right\rangle$$

$$= \sum_i f_i \left[\frac{d}{ds}\left\langle \frac{DJ_i}{ds}, W\right\rangle - \left\langle \frac{DJ_i}{ds}, \frac{DW}{ds}\right\rangle \right]$$

$$= \frac{d}{ds}\langle B,W\rangle - \sum_i f_i' \left\langle \frac{DJ_i}{ds}, W\right\rangle - \left\langle B, \frac{DW}{ds}\right\rangle$$

$$= \frac{d}{ds}\langle B,W\rangle - \langle B,A\rangle - \langle B,B\rangle - \sum_i f_i' \left\langle \frac{DJ_i}{ds}, W\right\rangle$$

Somando, obtemos:

$$\left\langle \frac{DW}{ds}, \frac{DW}{ds}\right\rangle + \langle R(W,\gamma')W,\gamma'\rangle = \frac{d}{ds}\langle B,W\rangle + \langle A,A\rangle + \langle A,B\rangle - \sum_i f_i' \left\langle \frac{DJ_i}{ds}, W\right\rangle$$

mas:

$$\langle A,B\rangle - \sum_i f_i' \left\langle \frac{DJ_i}{ds}, W\right\rangle = \sum_{i,j} f_i' f_j \left[\left\langle J_i, \frac{DJ_j}{ds}\right\rangle - \left\langle \frac{DJ_i}{ds}, J_j\right\rangle \right]$$

e, pelo lema 1.4.3 (identidade de Lagrange)

$$\langle A,B\rangle - \sum_i f_i \left\langle \frac{DJ_i}{ds}, W\right\rangle = 0$$

Logo,

$$\int_0^1 \left\{ \left\langle \frac{DW}{ds}, \frac{DW}{ds}\right\rangle + \langle R(W,\gamma')W,\gamma'\rangle \right\} ds = \langle B,W\rangle \Big|_0^1 + \int_0^1 \langle A,A\rangle ds$$

ou

$$\int_0^1 \left\{ \left\langle \frac{DW}{ds}, \frac{DW}{ds} \right\rangle + \langle R(W,\gamma')W,\gamma' \rangle \right\} ds = \langle B(1),W(1) \rangle + \int_0^1 \langle A,A \rangle ds$$

Os mesmos cálculos valem para calcular:

$$\int_0^1 \left\{ \left\langle \frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds} \right\rangle + \langle R(J,\gamma')J,\gamma' \rangle \right\} ds = \left\langle \sum_i a_i \frac{DJ_i}{ds}(1), J(1) \right\rangle = \langle B(1),W(1) \rangle$$

Comparando os dois últimos resultados:

$$\int_0^1 \left\{ \left\langle \frac{DW}{ds}, \frac{DW}{ds} \right\rangle + \langle R(W,\gamma')W,\gamma' \rangle \right\} \geq \int_0^1 \left\{ \left\langle \frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds} \right\rangle + \langle R(J,\gamma')J,\gamma' \rangle \right\} ds,$$

sendo que a igualdade vale somente se $\langle A,A \rangle = 0$, o que resulta $f_i'(s) = 0$, para todo $s \in [0,1]$ e todo i, $1 \leq i \leq n$; ou seja, $f_i(s) = f_i(1) = a_i$; para todo $s \in [0,1]$, e $J_i(s) = W_i(s)$. □

Observamos que as funções $f_i(s)$ tais que

$$W(s) = \sum_{i=1}^{n} f_i(s) J_i(s)$$

na demonstração anterior estão, na realidade, definidas para $s \in (0,1]$. Podemos entretanto, mostrar que essas funções têm limite finito quando s tende a zero.

Podemos escrever

$$\langle W(s), J_j(s) \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(s) \langle J_i(s), J_j(s) \rangle \quad , \quad 1 \leq i \leq n,$$

e para determinar as funções f_i, precisamos resolver um sistema de n equações a n incógnitas, com matriz principal

$$A = (a_{i_j}) = (\langle J_i(s), J_j(s) \rangle)$$

com determinante não nulo para todo $s \in (0,1]$.

Daí

$$f_k(s) = \frac{\det(b_{ij}(s))}{\det(a_{ij}(s))}, \text{ sendo}$$

$$b_{ij}(s) = \begin{cases} a_{ij} & \text{se } j \neq k,\ 1 \leq i \leq n \\ \langle W, J_i \rangle & \text{se } j = k,\ 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Para calcular $\lim_{s \to 0} f_k(s)$ precisamos utilizar a regra de L'Hôpital n vezes; teremos

$$\lim_{s \to 0} f_k(s) = \frac{\lim_{s \to 0} B(s)}{\lim_{s \to} A'(s)},$$

sendo que $A'(s)$ é o determinante da matriz que tem por componentes $\langle \frac{DJ_i}{ds}, \frac{DJ_j}{ds} \rangle$, que é não nulo, bastando para isso escolhermos $\{J_1(s), \ldots, J_n(s)\}$ tais que $\frac{DJ_1}{ds}(0), \ldots, \frac{DJ_n}{ds}(0)$ sejam linearmente independentes; $B(s)$ será uma função contínua, logo,

$$f_k(0) = \frac{B(0)}{\lim_{s \to 0} A'(s)}$$

Um dos resultados centrais desse parágrafo é dado pela proposição:

PROPOSIÇÃO 1.4.1 - O comprimento de arco de uma geodésica não é igual à distância em M além do primeiro

ponto conjugado, isto é, se $\gamma: [0,\ell] \to M^n$ é uma geodésica de M e $\gamma(b)$ é conjugado a $\gamma(0)$ para algum $b\in(0,\ell)$, então,

$$d(\gamma(0),\gamma(a)) < a \text{ para todo } a > b, a\in(0,\ell).$$

PROVA: Seja J um campo de Jacobi não nulo que se anula em zero e b.

Temos então $\langle J(s),\gamma'(s)\rangle = 0$, $\forall\ s\in[0,b]$, pois se $h(s) = \langle J(s),\gamma'(s)\rangle$ e J é campo de Jacobi, $h''(s) = 0$, para todo $s\in[0,b]$, ou seja, $h'(s)$ é constante.

Daí,

$$h(s) = k_1\cdot s + k_2\ ,\ s\in[0,b]\ ,\ k_1,k_2\in\mathbb{R}$$

Como $h(b) = 0$ e $h(0) = 0$, temos $k_1 = 0$, $k_2 = 0$, logo,

$$h(s) = \langle J(s),\gamma'(s)\rangle = 0, \text{ para todo } s\in[0,b].$$

Além disso, calculando a segunda variação de L em relação a variação da restrição da geodésica γ ao intervalo $[0,b]$ cujo campo variacional é J (para isso usamos a conseqüência (2) do lema 1.4.2):

$$L_J''(0) = \left[\frac{d}{dt}\left\langle\frac{\partial\lambda}{\partial t},\frac{\partial\lambda}{\partial s}\right\rangle\Big|_{t=0}\right]_{s=0}^{s=1} = 0,$$

pois $\langle J,\gamma'\rangle = 0$.

Seja $r > 0$ tal que a bola $B'(\gamma(b),r)\subset M$ seja difeomorfa à $B(\gamma(b),r)\subset TM$, ou seja $r > 0$ tal que $\exp_{\gamma(b)}$ seja um difeomorfismo local.

Escolhemos a e c no intervalo $[0,\ell]$ tais que $0<c<b<a$ e $\gamma(s)\in B'(\gamma(b),r)\subset M$ para todo $s\in[c,a]$; logo, no intervalo $[c,a]$ não há pares pontos conjugados ao longo de γ restrita a $[c,a]$.

Consideremos os campos de vetores ao longo de γ restrita a $[0,a]$:

$Y(s)$: o único campo de Jacobi ao longo de γ tal que $Y(c) = J(c)$ e $Y(a) = 0$.

$X(s)$: campo em $[0,a]$ tal que $X(s) = J(s)$ para todo $s\in[0,c]$ e $X(s) = Y(s)$ para $s\in[c,a]$.

$W(s)$: campo em $[0,a]$ tal que $W(s) = J(s)$ para $s\in[0,b]$ e $W(s) = 0$ para $t\in[b,a]$.

Então:

$$L''_W(0)\Big|_0^a = L''_J(0)\Big|_0^b + L''_W(0)\Big|_b^a = 0,$$

enquanto que

$$L''_X(0)\Big|_0^a = L''_W(0)\Big|_0^c + L''_Y(0)\Big|_c^a.$$

Pelo Lema 1.4.5,

$$L''_W(0)\Big|_c^a > L''_Y(0)\Big|_c^a \text{, pois Y é campo de Jacobi, o}$$

que resulta

$$L''_X(0)\Big|_0^a < L''_W(0)\Big|_0^a = 0.$$

Logo, existem curvas diferenciáveis por partes, da-

dos pela variação de γ cujo campo variacional é X, cujo comprimento de $\gamma(0)$ a $\gamma(a)$ é menor que a. □

5 - PONTOS MÍNIMOS: CUT-LOCUS

Seja M uma variedade riemanniana completa, $p \in M$ e $\gamma: [0,\infty) \longrightarrow M^n$ uma geodésica parametrizada por comprimento de arco tal que $\gamma(0) = p$.

Consideremos:

$A = \{s \in]0,\infty[$ tal que γ é geodésica minimal de p a $\gamma(s)\}$.

Então, A satisfaz às propriedades:

1) Se $s \in A$ e $t<s$, então $t \in A$

2) Se $r>0$ tal que para todo $s>0$, $0<s<r$, $s \in A$ então $r \in A$.

1) é imediata pois se $t<s$, $t \notin A$, teríamos que γ não seria geodésica minimal de p a $\gamma(t)$, logo, γ não seria geodésica minimal de p a $\gamma(s)$, e consequentemente, $s \notin A$, o que é absurdo.

2) segue de $d(p,\gamma(r)) = \lim_{s\to 0} d(p,\gamma(s))$; como $d(p,\gamma(s)) = s$,

$$d(p,\gamma(r)) = \lim_{s\to r} s = r, \text{ logo, } r \in A.$$

Das propriedades (1) e (2), tem-se: ou A é um intervalo da forma $]0,\infty[$ ou existe um $r>0$ tal que $A =]0,r]$.

DEFINIÇÃO 1.5.1 - Se $A =]0,r]$, então o ponto $\gamma(r)$ é chamado ponto mínimo (ou cut point) de p ao longo de

γ.

Se $A =]0,\infty[$ dizemos que não há pontos mínimos de p ao longo de γ.

PROPOSIÇÃO 1.5.1 - Seja q o ponto mínimo de p ao longo da geodésica $\gamma: [0,\infty[\longrightarrow M$. Então, ao menos uma (ou ambas) das seguintes afirmações é verdadeira:

i) q é o primeiro ponto conjugado a p ao longo de γ

ii) existem ao menos duas geodésicas minimais de p a q.

PROVA: Supondo $q = \gamma(r)$ seja $a_1,\ldots,a_k,\ldots$ uma sequência decrescente de números reais convergindo para r.

Para cada k, existe um vetor unitário $X_k \in T_pM$ tal que

$$\exp_p tX_k,\ 0\leq t\leq b_k = d(p,\gamma(a_k))$$

é geodésica minimal de p a $\gamma(a_k)$.

Seja $X \in T_pM$ vetor unitário tal que

$$\gamma(t) = \exp_p tX, \text{ para } t\in[0,\infty[$$

Como $q = \gamma(r)$ é ponto mínimo de p ao longo de γ e $a_k > r$ por hipótese, temos:

$$X \neq X_k \quad e \quad a_k > b_k$$

Sendo b_k a distância entre p e $\gamma(a_k)$ e como $a_k \to r$, segue que:

$$\lim_{k\to\infty} b_k = r;$$

consequentemente, o conjunto de vetores $\{b_k X_k\}$ está contido em algum subconjunto compacto de T_pM, pois $|b_k X_k| = |b_k| < \infty$.

Passando a uma subsequência se necessário, temos uma sequência $b_1X_1,\ldots,b_kX_k,\ldots$ convergente para um vetor de comprimento r, que chamaremos rY, Y vetor unitário.

Então, $\exp_p tY$, $0\leq t\leq r$ é uma geodésica minimal de p a q, pois:

$$\exp_p rY = \lim_{k\to\infty} \exp_p b_k X_k = \lim_{k\to\infty} \gamma(a_k) = \gamma(r) = q.$$

Se $X \neq Y$, então $\exp_p tX$ e $\exp_p tY$ são geodésicas minimais distintas de p e q, e verifica-se (ii).

Suponhamos X=Y. Assumindo que q não seja conjugado a p ao longo de γ, temos que a diferencial da $\exp_p: T_pM \longrightarrow M$ é não singular em rX; logo, $\exp_p$ é um difeomorfismo entre uma vizinhança U de rX em T_pM sobre uma vizinhança aberta de q em M.

Tomemos k suficientemente grande de forma que a_kX e b_kX_k estejam em U.

Como

$$\exp_p a_k X_k = \gamma(a_k) = \exp_p b_k X_k,$$

temos que

$a_kX_k = b_kX_k$, o que contradiz o fato de $X \neq X_k$ verificado aci-

ma.

Logo, se X=Y, q é conjugado a p ao longo de γ. Por outro lado, não há pontos conjugados a p antes de q, pois se houvesse, γ deixaria de ser minimal (proposição 1.4.1).

Se X=Y, verifica-se então (i): q é o primeiro ponto conjugado a p ao longo de γ. □

COROLÁRIO 1.5.1 - Se q é ponto mínimo de p ao longo de γ, então p é ponto mínimo de q ao longo de γ(percorrida na direção de q a p).

PROVA: Estendendo a geodésica γ na direção negativa, podemos assumir γ definida para $-\infty<t<\infty$.

Seja $-a\in\mathbb{R}$, $-a<0$; e $q = \gamma(r)$; então a restrição de γ ao intervalo $[-a,r]$, $\gamma|_{[-a,r]}$ não é geodésica minimal, pois como q é ponto mínimo de p, temos ou p e q conjugados ou existe uma geodésica minimal distinta de γ, de p a q; a união de $\gamma|_{[-a,r]}$ com essa outra geodésica será uma curva de comprimento $a+r$ ligando $\gamma(-a)$ e q, não geodésica; logo, $\gamma|_{[-a,r]}$ não é minimal.

Existe, portanto, um número $b<r$ não negativo tal que $\gamma(b)$ é ponto mínimo de q ao longo de γ, percorrida no sentido inverso. Se $b>0$, temos um absurdo, pois $\gamma|_{[0,r]}$ será não minimal.

Logo, $b=0$ e p é ponto mínimo de q. □

Dado $p\in M$, seja

$$S_p = \{X\in T_pM / |X| = 1\}$$

a esfera unitária em T_pM.

Definimos uma função

$u: S_p \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \infty$, considerando para cada $X \in S_p$ a geodésica $\gamma(t) = \exp_p tX$, $0 \leq t < \infty$.

Observamos: a topologia considerada sobre $\mathbb{R}^+ \cup \infty$ será constituída pelos abertos habituais e os $(a,\infty] = (a,\infty) \cup \infty$.

Verificamos então:

PROPOSIÇÃO 1.5.2 - A função $u: S_p \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \infty$ é contínua.

PROVA: Suponhamos que u não seja contínua em $X \in S$ e seja $X_1, \ldots, X_k, \ldots$ uma sequência de pontos de S_p convergindo para X, tal que

$$u(X) \neq \lim_{k \to \infty} u(X_k)$$

Pode ser que $\lim_{k\to\infty} u(X_k)$ deixe de existir, mas passando a uma subsequência se necessário, podemos supor $\lim_{k\to\infty} u(X_k)$ exista em $\mathbb{R}^+ \cup \infty$.

Consideremos primeiro o caso

$$u(X) > \lim_{k \to \infty} u(X_k) = \lim_{k \to \infty} a_k = a$$

Como $u(X) > a$, $\exp_p aX$ não pode ser conjugado a p ao longo da geodésica $\exp_p tX$; logo, $\exp_p : T_pM \longrightarrow M$ transforma difeomorficamente uma vizinhança U de aX, contida em T_pM em uma vizinhança de $\exp_p aX$.

Temos $a_k \to a, X_k \to X$, logo, para $k \geq k_0$, $a_k X_k \in U$, e $\exp_p$ sendo um difeomorfismo sobre U, segue que $\exp_p a_k X_k$, $k \geq k_0$ não são conjugados a p ao longo de $\exp_p tX_k$; pela proposição 1.5.1, existe, para cada k, uma outra geodésica minimal de p a $\exp_p a_k X_k (k \geq k_0)$, que chamamos

$$\exp_p tY_k,\ Y_k \neq X_k,$$

tal que

$$\exp_p a_k Y_k = \exp_p a_k X_k \quad (k \geq k_0).$$

Como $\exp_p$ é um difeomorfismo local sobre U, então cada $a_k Y_k$ não está em U. Do fato de $Y_k \in S_p$, e S_p ser compacto, tomando uma subsequência se necessário, podemos assumir que Y_k converge para um vetor $Y \in S_p$. Então, o vetor limite de

$$a_k Y_k,\ aY \notin U.$$

Por outro lado,

$$\exp_p aY = \exp_p (\lim_{k\to\infty} a_k Y_k) = \lim_{k\to\infty} \exp_p a_k Y_k$$

$$= \lim_{k\to\infty} \exp_p a_k X_k = \exp_p (\lim_{k\to\infty} a_k X_k) = \exp_p (aX)$$

Daí,

$\exp_p tX$ e $\exp_p tY$, $0 \leq t \leq a$ são geodésicas minimais de p a $\exp_p aX = \exp_p aY$. Isso resulta que, se $b>a$, então a geodésica $\exp_p tX$, $0 \leq t \leq b$ não é mais minimal, pois a reunião da geodésica $\exp_p tY$, $0 \leq t \leq a$ e o segmento $\exp_p tX$, $a \leq t \leq b$, dão u-

ma curva de comprimento b, não geodésica, de p a $\exp_p bX$.

Não podemos ter, portanto, $u(X) > a$.

Consideremos agora o caso:

$u(X) < \lim_{k\to\infty} u(X_k)$, tomemos b um número positivo tal que

$$u(X) + b < \lim_{k\to\infty} u(X_k)$$

Devemos ter, portanto, para $k \geq k_0$,

$$u(X) + b < u(X_k)$$

Pela definição de $u(X)$, existe $X' \in S_p$ tal que $\exp_p tX'$, $0 \leq t \leq u(X)+b'$ é geodésica mínimal de p a $\exp_p(u(X)+b)X$, onde $b'<b$, e

$$\exp_p(u(X)+b)X = \exp_p(u(X)+b')X'$$

Seja $c = \frac{b-b'}{2}$; como a sequência de pontos $\exp_p(u(X)+b)X_k$ converge para $\exp_p(u(X)+b)X$, podemos assumir, desprezando um número finito de índices, se necessário, que as distâncias entre $\exp_p(u(X)+b)X$ e $\exp_p(u(X)+b)X_k$ são menores do que c.

Para cada k, consideramos agora as geodésicas $\exp_p tX'$, $0 \leq t \leq u(X)+b'$ de p a $\exp_p(u(X)+b')X'$, e uma geodésica minimal de $\exp_p(u(X)+b)X = \exp_p(u(X)+b')X'$ a $\exp_p(u(X)+b)X_k$.

O comprimento da curva constituída pela união dessas geodésicas é menor ou igual a:

$$u(X) + b' + c = u(X) + b + c$$

Isto significa que as geodésicas $\exp_p tX_k$, $0 \le t \le u(X)+b$ não são minimais, o que vem contradizer a desigualdade:

$$u(X_k) > u(X) + b.$$

Logo, não existe uma seqüência de vetores $X_k \in S_p$, $X_k \longrightarrow X$ com $\lim_{k\to\infty} u(X_k) \neq u(X)$, e portanto, u é contínua.

DEFINIÇÃO 1.5.2 - Seja $\tilde{C}(p) = \{u(X)X,\ X \in T_pM, |X|=1, u(X)<\infty\}$ e

$$C(p) = \exp_p(\tilde{C}(p)).$$

Então: C(p) é o conjunto dos pontos mínimos de p ao longo das geodésicas que partem de p. Chamamos C(p) o cut-locus de p, e $\tilde{C}(p)$ o cut-locus de p em T_pM.

Tem-se os resultados:

PROPOSIÇÃO 1.5.3 - Seja $E = \{tX,\ 0 \le t < u(X),\ X \in T_pM, |X|=1\}$

Então:

i) E é um aberto em T_pM

ii) $\exp_p : E \longrightarrow \exp_p(E)$ é difeomorfismo

iii) M é a união disjunta de $\exp_p E$ e o cut-locus C(p).

PROVA: i) segue do fato de $u: S_p \longrightarrow M$ ser contínua (Teorema anterior).

A aplicação $\exp_p$ é injetora sobre E: seja $q \in \exp_p E$ tal que:

$$q = \exp_p t_1 X_1 = \exp_p t_2 X_2,\ t_1 < u(X_1),\ t_2 < u(X_2)$$

De $t_1 < u(X_1)$, $t_2 < u(X_2)$, segue que $\exp_p tX_1$, $0 \le t \le t_1$, $\exp_p tX_2$, $0 \le t \le t_2$ são geodésicas minimais de p a q; logo $t_1 = t_2 = t_0$.

Se $X_1 \neq X_2$, seja τ uma geodésica minimal de $\exp_p(t_0-\varepsilon)X_1$ a $\exp_p(t_0+\varepsilon)X_2$, ε suficientemente pequeno tal que $t_0+\varepsilon < u(X_1)$, $t_0+\varepsilon < u(X_2)$.

A curva formada pela reunião de $\exp_p tX_1$, $0 \le t \le t_0-\varepsilon$ e τ tem comprimento menor que $t_0+\varepsilon$, o que é um absurdo, pois $t_0+\varepsilon < u(X_2)$ e $\exp_p tX_2$, $0 \le t \le t_0-\varepsilon$ é geodésica minimal de p a $\exp_p(t_0+\varepsilon)X_2$.

Por outro lado, não existem pontos conjugados a p em $\exp_p(E)$, pois se existissem, existiriam pontos mínimos. Daí, $\exp_p : E \longrightarrow M$ é não singular em todo ponto de E, e ii) está verificada.

Como E e $\bar{C}(p)$ são disjuntos, então $\exp_p E$ e C(p) são disjuntos.

Seja $y \in M$ qualquer, e $\exp_p tX$, $0 \le t \le a$ uma geodésica minimal de p a y. Pela definição de u(X), $a \le u(X)$. Daí, ou $aX \in E$ (se $a < u(X)$) ou $aX \in \bar{C}(p)$ (se $a = u(X)$), e ou

$y \in \exp_p E$ ou $y \in C(p)$, sendo as alternativas exclusivas. □

Do teorema acima podemos conlcuir: o subconjunto aberto $\exp_p E$ de M é o maior aberto de M em que se pode definir um sistema de coordenadas normais em torno de p.

Como para todo $p \in M$ existe uma vizinhança totalmente normal, temos que para todo $p \in M$ existe um $\alpha_p > 0$ tal que

$$d(p,q) \geq \alpha_p, \ \forall \ q \in C(p)$$

A proposição seguinte caracteriza as variedades riemannianas completas, compactas:

PROPOSIÇÃO 1.5.4: Seja M uma variedade riemanniana completa, $p \in M$. Então, M é compacta se e somente se para todo vetor unitário tangente $X \in T_pM$ tem se $u(X) < \infty$.

PROVA: Suponhamos M compacta, e seja do diâmetro de M. Se $a > d$, então $\exp_p tX$, $0 \leq t \leq a$ não pode ser geodésica minimal de p a $\exp_p aX$, $\forall X \in T_pM, |X| = 1$.

Daí, $u(X) \leq d$.

Reciprocamente, suponhamos que para todo vetor unitário tangente $X \in T_pM$, $u(X)$ seja finito.

Então, a função $u(X)$ é contínua e limitada na esfera unitária em T_pM, logo, existe $b > 0$ tal que

$$u(X) \leq b, \text{ para todo } X.$$

Seja $B = \{Y \in T_pM, |Y| \leq b\}$

B é compacto, B contém E e $\bar{C}(p)$ (da proposição 1.5.3), consequentemente,

$$\exp_p B \supset \exp_p E \text{ e } \exp_p B \supset \exp_p \bar{C}(p).$$

Como $M = \exp_p E \cup \exp_p \bar{C}(p)$, $\exp_p B = M$, e M é compacta. □

II - A SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL -

PONTOS FOCAIS:

Introduzimos, neste capítulo, a noção de campo de vetores ao longo de uma aplicação e suas propriedades básicas, para posteriormente dar uma definição da segunda forma fundamental.

O objetivo é definir pontos focais, e verificar alguns resultados que serão bastante utilizados nas demonstrações dos teoremas de Rauch e Toponogov.

Como referências, citamos [4], [5] e [6].

1. DERIVAÇÃO COVARIANTE DE CAMPOS AO LONGO DE APLICAÇÕES

Consideremos

(M^m, g) variedade riemanniana com conexão riemanniana ∇.

N^n variedade diferenciável.

$f: N^n \longrightarrow M^m$ uma aplicação diferenciável.

DEFINIÇÃO 2.1.1: Chama-se campo de vetores ao longo de f definido em um aberto $U \subset N^n$ a uma aplicação diferenciável:

$\mathbb{X}: U \longrightarrow TM^m$ tal que

$\mathbb{X}(p) \in T_{f(p)}M^m$, para todo $p \in U$.

Se X é um campo diferenciável de N^n, temos o campo ao longo de f.

$(f_*X)_p = f_*(X_p)$, para todo $p \in U \subset N^n$.

DEFINIÇÃO 2.1.2: Se Y é um campo de vetores de M^m, definimos a restrição de Y a f por

$$\mathbb{Y}(p) = Y_{f(p)}$$

Sendo $(V, x^1, \ldots, x^m)$ carta local de M^m, então

$$Y = \sum_{i=1}^{m} Y_i \frac{\partial}{\partial x^i}, \text{ e}$$

$$\mathbb{Y} = \sum_{i=1}^{m} \tilde{Y}^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \text{ sendo } \tilde{Y}^i = Y^i \circ f.$$

Como conseqüência das definições acima, temos:

LEMA 2.1.1: Sejam

X: campo de vetores de N^n

$\mathbb{Y}$: campo de vetores ao longo de f, $p \in N^n$

c: curva diferenciável de N^n com $c(0) = p$,

$c'(0) = X_p$.

$\hat{Y}$: campo de vetores ao longo de $f \circ c$ definido por

$$\hat{Y}(t) = \mathbb{Y}(c(t))$$

Nessas condições, o vetor $\left.\frac{\nabla \hat{Y}}{dt}\right|_{t=0}$ não depende da curva c.

PROVA: Consideremos as cartas $(U,u^1,\ldots,u^n),(V,x^1,\ldots,x^m)$ de N^n e M^m respectivamente, tais que $f(U)\subset V$.

Sejam

$$x^i = f^i(u^1,\ldots,u^n),\ i=1,\ldots,m$$
$$u^j = u^j(t),\ j=1,\ldots,n$$

expressões locais de f e c respectivamente.

Se Y é dado, localmente, por

$$Y = \sum_{i=1}^{m} Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \text{ então } \hat{Y} \text{ será dado por}$$

$$\hat{Y} = \sum_{i=1}^{m} \hat{Y}^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \text{ com } \hat{Y}^i = Y^i(c(t)),\ i=1,\ldots,m.$$

As equações paramétricas de $f\circ c$ são

$$x^i(t) = f^i(u^1(t),\ldots,u^n(t)),\ i=1,\ldots,m.$$

Logo, da definição de derivada covariante de campos de curvas, tem-se:

$$\frac{\nabla\hat{Y}}{dt} = \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{d\hat{Y}^i}{dt} + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk}\,\hat{Y}^j\,\frac{dx^k}{dt}\right]\frac{\partial}{\partial x^i}, \text{ ou}$$

$$\frac{\nabla\hat{Y}}{dt} = \sum_{i=1}^{m}\left[\sum_k \frac{\partial Y^i}{\partial u^k}\frac{du^k}{dt} + \sum_{j,\ell} \Gamma^i_{j\ell}\,Y^j\frac{\partial f^k}{\partial u^\ell}\frac{du^\ell}{dt}\right]\frac{\partial}{\partial x^i}, \text{ que}$$

pode ser escrita:

$$\frac{\nabla\hat{Y}}{dt} = \sum_{i,k}\left(\frac{\partial Y^i}{\partial u^k} + \sum \Gamma^i_{j\ell}\,Y^j\frac{\partial f^\ell}{\partial u^k}\right)\frac{du^k}{dt}\,\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Fazendo $t=0$ na última expressão observa-se que:

$\left.\frac{\nabla\tilde{Y}}{dt}\right|_{t=0}$ independe da curva c, ou seja, depende somente de Y, X e f. □

DEFINIÇÃO 2.1.3: Indicamos $\left.\frac{\nabla\tilde{Y}}{dt}\right|_{t=0}$ por $(\nabla^f_X Y)_p$, que chamamos derivada covariante do campo ao longo de f no ponto p.

Do lema 2.1.1, segue que $\nabla^f_X Y$ está bem definida,

$$\nabla^f_X Y: p\in U \longrightarrow (\nabla^f_X Y)_p \in T_{f(p)}M^m, \text{ e}$$

sua expressão local será:

$$\nabla^f_X Y = \sum_{i,k}\left(\frac{\partial Y^i}{\partial u^k} + \sum_{j,\ell}\Gamma^i_{j\ell}\, Y^j \frac{\partial f^\ell}{\partial u^k}\right) X^k \frac{\partial}{\partial x^i},$$

sendo X^k as componentes de X relativamente aos campos coordenados $\frac{\partial}{\partial u^k}$.

2. PROPRIEDADES FORMAIS DE ∇^f:

Sendo X, Y campos de vetores de N^n.

X, Y campos ao longo de f

h função diferenciável em $U\subset N^n$ aberto a valores reais.

Então:

1. $\nabla^f_{X+Y}X = \nabla^f_X X + \nabla^f_Y X$
2. $\nabla^f_X(X+Y) = \nabla^f_X X + \nabla^f_X Y$
3. $\nabla^f_{hX}Y = h\nabla^f_X Y$

4. $\nabla^f_X hW = X(h)W + h\nabla^f_X W$

5. $\nabla^f_X(f_*Y) - \nabla^f_Y(f_*X) = f_*[X,Y]$

6. $Xg(\mathbb{X},\mathbb{Y}) = g(\nabla^f_X \mathbb{X},\mathbb{Y}) + g(\mathbb{X},\nabla^f_X \mathbb{Y})$

7. $R(f_*X,f_*Y)\mathbb{X} = \nabla^f_X\nabla^f_Y\mathbb{X} - \nabla^f_Y\nabla^f_X\mathbb{X} - \nabla^f_{[X,Y]}\mathbb{X}$.

As propriedades (1) a (4) decorrem imediatamente da definição 2.1.3.

Para provar (5), basta verificar que ela vale para campos coordenados; tomando

$$\phi(X,Y) = \nabla^f_X(f_*Y) - \nabla^f_Y(f_*X) - f_*[X,Y],$$

se $X = \frac{\partial}{\partial u^j}$, $Y = \frac{\partial}{\partial u^j}$,

$$\phi(X,Y) = \nabla^f_{\frac{\partial}{\partial u^i}}(f_*(\frac{\partial}{\partial u^j})) - \nabla^f_{\frac{\partial}{\partial u^j}}(f_*(\frac{\partial}{\partial u^i}))$$

Usando a definição de ∇^f, verifica-se que $\phi(\frac{\partial}{\partial u^i},\frac{\partial}{\partial u^j}) = 0$, $\forall$ i,j, logo, usando as propriedades (1) a (4), tem-se $\phi(X,Y) = 0$, para todo X,Y.

Para mostrar (6) e (7), procede-se analogamente.

3. IMERSÕES ISOMÉTRICAS

Com as mesmas hipóteses iniciais sobre M^m e N^n, estudaremos em particular o caso em que $f, N^n \longrightarrow M^m$ é uma imersão.

Temos então:

$n \leq m$, para cada $p \in N^n$, $(f_*)_p$ é injetora, e

1) $T_{f(p)}M^m = f_*(T_pN^n) \oplus (f_*(T_pN^n))^\perp$, sendo que $(f_*(T_pN^n))^\perp$ denomina-se <u>espaço normal</u> de f no ponto $f(p)$.

Da decomposição (1) segue imediatamente o fato:

<u>PROPOSIÇÃO 2.3.1</u>: Se $\mathbb{Y}$ é um campo de vetores ao longo de f, então ficam univocamente determinados dois campos ao longo de f, indicados por $\mathbb{Y}^\top$ e $\mathbb{Y}^\perp$, tais que:

i) $\mathbb{Y} = \mathbb{Y}^\top + \mathbb{Y}^\perp$

ii) $\mathbb{Y}^\top_p \in f_*(T_pN^n)$, $\mathbb{Y}^\perp_p \in (f_*(T_pN^n))^\perp$, $\forall\, p$.

Sendo g a métrica riemanniana sobre M^m, a imersão f induz sobre N^n uma métrica riemanniana $\bar{g}$, dada por:
$\bar{g}_p(X,Y) = g_{f(p)}(f_*X, f_*Y)$, para todo X e Y, $X, Y \in T_pN^n$.

Diz-se que $\bar{g}$ é a <u>métrica induzida de g por f</u>.

Nessas condições, $f:(N^n,\bar{g}) \longrightarrow (M^m,g)$ é uma imersão isométrica de $(N^n,\bar{g})$ em (M^m,g).

No estudo das imersões isométricas, tem-se o resultado:

<u>PROPOSIÇÃO 2.3.2</u>: Se $\overline{\nabla}$ é a conexão riemanniana da variedade $(N^n,\bar{g})$, $\bar{g}$: métrica riemanniana induzida pela imersão f, X e Y campos de vetores em N^n, então:

$$(\overline{\nabla}^f_X(f_*Y))^\top = f_*(\overline{\nabla}_XY)$$

PROVA: Seja $\alpha(X,Y) = (\nabla^f_X(f_*Y))^\perp - f_*(\overline{\nabla}_X Y)$; então:

$$\alpha(Y,X) = (\nabla^f_Y(f_*X))^\perp - f_*(\overline{\nabla}_Y X)$$

Daí,

$$\alpha(X,Y) - \alpha(Y,X) = \left[\nabla^f_X(f_*Y) - \nabla^f_Y(f_*X)\right]^\perp - \left[f_*(\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X)\right]$$

$$\alpha(X,Y) - \alpha(Y,X) = (f_*[X,Y])^\perp - f_*[X,Y] = 0,$$

usando a propriedade (5) de ∇^f, e que $f_*[X,Y] = (f_*[X,Y])^\perp$.

Logo $\alpha(X,Y) = \alpha(Y,X)$; além disso,

$$g(\alpha(X,Y), f_*Z) = g((\nabla^f_X f_*Y)^\perp, f_*Z) - g(f_*\overline{\nabla}_X Y, f_*Z)$$

Usando a definição de $\bar{g}$ e o fato de $f_*Z \in f_*(T_pN)$, obtem-se

1) $$g(\alpha(X,Y), f_*Z) = g(\nabla^f_X f_*Y, f_*Z) - \bar{g}(\overline{\nabla}_X Y, Z)$$

e

2) $$g(\alpha(X,Z), f_*Y) = g(\nabla^f_X f_*Z, f_*Y) - \bar{g}(\overline{\nabla}_X Z, Y).$$

Como

$$Xg(f_*Y, f_*Z) = X\bar{g}(Y,Z) \text{ e}$$

$$Xg(f_*Y, f_*Z) = g(\nabla^f_X f_*Y, f_*Z) + g(\nabla^f_X f_*Z, f_*Y),$$

$$X\bar{g}(Y,Z) = \bar{g}(\overline{\nabla}_X Y, Z) + \bar{g}(\overline{\nabla}_X Z, Y), \text{ tem-se}$$

3) $$g(\alpha(X,Y), f_*Z) + g(\alpha(X,Z), f_*Y) = 0,$$

somando (1) e (2).

Permutando ciclicamente X, Y e Z em 3: $X \to Y \to Z$

4) $$g(\alpha(X,Y), f_*Z) + g(\alpha(X,Z), f_*Y) = 0$$

5) $g(\alpha(Z,X),f_*Y) + g(\alpha(Z,Y),f_*X) = 0$

6) $g(\alpha(Y,Z),f_*X) + g(\alpha(Y,X),f_*Z) = 0$

Somando (4) e (6) e subtraindo (5):

$$2g(\alpha(X,Y),f_*Z) + g(\alpha(X,Z),f_*Y) + g(\alpha(Y,Z),f_*X) -$$

$$- g(\alpha(Z,X),f_*Y) - g(\alpha(Z,Y),f_*X) = 0,$$

ou $g(\alpha(X,Y),f_*Z) = 0$, para todo campo Z.

Logo, $\alpha(X,Y) \in (f_*(T_pN^n))^{\perp}$; como, por definição, $\alpha(X,Y) \in f_*(T_pN^n)$, tem-se:

$$\alpha(X,Y) = 0, \text{ para todo } X,Y. \qquad \square$$

4. A SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

Dado $U \subset N^n$ aberto, consideramos agora o campo ao longo de f.

$\mathbb{N}: p \in U \longrightarrow \mathbb{N}(p) \in (f_*(T_pN))^{\perp}$, e a aplicação

$S_{\mathbb{N}}: T_pN^n \longrightarrow f_*(T_pN)$ dada por

$S_{\mathbb{N}}(X) = -(\nabla^f_X \mathbb{N})^T$ para $p \in U$; verificamos então:

Se $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}^1$ são dois campos normais tais que $\mathbb{N}_p = \mathbb{N}^1_p$, para todo $p \in U$, então

$S_{\mathbb{N}} = S_{\mathbb{N}^1}$; verifica se este fato calculando

$$g(S_{\mathbb{N}}(X)-S_{\mathbb{N}^1}(X),f_*Y) = g(-\nabla^f_X(\mathbb{N}-\mathbb{N}^1),f_*Y)$$

$$= g(\mathbb{N}-\mathbb{N}^1,\nabla^f_X f_*Y) - Xg(\mathbb{N}-\mathbb{N}^1,f_*Y)$$

Como, para todo $p \in U$, $\mathbb{N}_p \in (f_*(T_pN))^{\perp}$, $\mathbb{N}^1_p = \mathbb{N}_p$, tem-se:

$$g((S_{\mathbb{N}}-S_{\mathbb{N}1})(X),f_*Y) = 0, \text{ para todo } Y.$$

Do fato de $(S_{\mathbb{N}}-S_{\mathbb{N}1})(X)\in f_*(T_pN)$, tem-se então:

$S_{\mathbb{N}} = S_{\mathbb{N}1}$, ou seja, a aplicação $S_{\mathbb{N}}$ independe de $\mathbb{N}$.

PROPOSIÇÃO 2.4.1: $S_{\mathbb{N}}$ é linear, simétrica, isto é:

i) $S_{\mathbb{N}}(X+Y) = S_{\mathbb{N}}(X) + S_{\mathbb{N}}(Y)$

ii) $g(S_{\mathbb{N}}(X),f_*Y) = g(f_*X,S_{\mathbb{N}}(Y))$.

PROVA: i) é trivial a partir da definição de $S_{\mathbb{N}}$.

ii) Olhemos para a diferença:

$$g(S_{\mathbb{N}}X,f_*Y)-g(f_*X,S_{\mathbb{N}}Y) = g(-(\nabla^f_X\mathbb{N})^T,f_*Y)-g(f_*X,-(\nabla^f_Y\mathbb{N})^T).$$

Como $(f_*Y)_p\in f_*(T_pN)$, para todo $p\in U$,

$$g(S_{\mathbb{N}}X,f_*Y)-g(f_*X,S_{\mathbb{N}}Y) = -g(\nabla^f_X\mathbb{N},f_*Y)+g(f_*X,\nabla^f_Y\mathbb{N})$$

Usando as propriedades de ∇^f do parágrafo 2:

$$g(S_{\mathbb{N}}X,f_*Y)-g(f_*X,S_{\mathbb{N}}Y) = -\left[Xg(\mathbb{N},f_*Y)-g(\mathbb{N},\nabla^f_Xf_*Y)\right] + \left[Yg(f_*X,\mathbb{N})-g(\mathbb{N},\nabla^f_Yf_*X)\right].$$

Para cada $p\in U$, $\mathbb{N}_p\in(f_*(T_pN))^{\perp}$, logo,

$$g(S_{\mathbb{N}}X,f_*Y)-g(f_*X,S_{\mathbb{N}}Y) = g(\mathbb{N},\nabla^f_Xf_*Y)-g(\mathbb{N},\nabla^f_Yf_*X)$$

Como $\nabla^f_Xf_*Y - \nabla^f_Yf_*X = f_*[X,Y]$, então:

$$g(S_{\mathbb{N}}X,f_*Y) - g(f_*X,S_{\mathbb{N}}Y) = g(\mathbb{N},f_*[X,Y]) = 0,$$

pela mesma razão anterior.

DEFINIÇÃO 2.4.1: A aplicação

$S_{\mathbb{N}}: T_pN^n \longrightarrow f_*(T_pN)$ dada por:

$S_{\mathbb{N}}(X) = -(\nabla^{f}_{X}\mathbb{N})^{\top}$ para cada $p \in U \subset N^{n}$ aberto é chamada segunda forma fundamental da imersão f ao longo de N, em $p \in N^{n}$.

DEFINIÇÃO 2.4.2: Seja $H_{\mathbb{N}}$ a forma bilinear simétrica associada a $S_{\mathbb{N}}$, isto é,

$H_{\mathbb{N}}(X,Y) = g(S_{\mathbb{N}}X, f_{*}Y)$, para cada $p \in U \subset N$, X, Y campos de vetores tangentes a N em p.

Então, a forma quadrática $Q_{\mathbb{N}}$ em $T_{p}N$ dada por

$Q_{\mathbb{N}}(X) = H_{\mathbb{N}}(X,X)$, para cada $p \in U \subset N$ é denominada segunda forma quadrática da imersão f ao longo de N.

5. IMERSÕES GEODÉSICAS E TOTALMENTE GEODÉSICAS

DEFINIÇÃO 2.5.1: Uma imersão $f: N^{n} \longrightarrow M^{m}$ é geodésica em $p \in N^{n}$ se as geodésicas de N partindo de p são tais que suas imagens por f são geodésicas de M partindo de f(p).

DEFINIÇÃO 2.5.2: Uma imersão $f: N^{n} \longrightarrow M^{m}$ é totalmente geodésica quando for geodésica em todos os pontos de N.

As imersões geodésicas e totalmente geodésicas admitem caracterizações naturais dadas por:

PREPOSIÇÃO 2.5.1 - Uma imersão $f: N^{n} \longrightarrow M^{m}$ é geodésica em $p \in N$ se e somente se para todo campo $\mathbb{N}$, normal ao longo de f (como parágrafo 4), a segunda forma quadrática ao longo de $\mathbb{N}$ em p é identicamente nula.

PROVA: Seja f uma imersão geodésica

Consideremos:

$\mathbb{N}$: campo de vetores ao longo de f tal que

$$\mathbb{N}(p) \in (f_*(T_pN))^{\perp}, \ \forall\ p\in U,\ U\subset N^n \text{ aberto.}$$

Tomemos γ: $(-\varepsilon,\varepsilon) \longrightarrow N^n$ geodésica em N^n com $\gamma(0)=p$, $\gamma'(0) = X_p$, onde X é um campo de vetores em N^n.

Calculando:

$$\begin{aligned} H_{\mathbb{N}_p}(X_p,X_p) &= g_{f(p)}(S_{\mathbb{N}}(\gamma'(0)),f_*(\gamma'(0)) \\ &= g_{f(p)}(-(\nabla_{\gamma'(0)}\mathbb{N})^{\top},f_*(\gamma'(0))) \\ &= -(Xg(\mathbb{N},f_*X))_p + (g(\mathbb{N},\nabla^f_X f_*X))_p \\ &= (g(\mathbb{N},\nabla^f_X f_*X))_p = 0, \end{aligned}$$

pois, pelo lema 2.1.1 do fato de $f\circ\gamma$ ser geodésica segue que $(\nabla^f_X f_*X)_p = 0$.

Para verificar a recíproca, suponhamos que

$$(H_{\mathbb{N}})_p \equiv 0 \ , \ \forall\ \mathbb{N}\in(f_*(T_pN))^{\perp}.$$

Usando a expressão obtida para $H_{\mathbb{N}}$ na primeira parte da demonstração, temos então:

$$g(\mathbb{N},\nabla^f_X f_*X) = 0, \text{ ou seja, } (\nabla^f_X f_*X)^{\perp}_p = 0.$$

Como $(\nabla^f_X f_*X)^{\top} = f_*(\overline{\nabla}_X X)$ (proposição 2.3.2), e como γ é geodésica, $(\overline{\nabla}_X X)_p = 0$, logo,

$$((\nabla^f_X f_*X)^{\top})_p = 0.$$

Daí, $(\nabla^f_X f_* X)_p = 0$, ou seja, $f\circ\gamma$ é geodésica por $f(p)\in M$.

PROPOSIÇÃO 2.5.2 - Uma imersão $f: N^n \longrightarrow M^m$ é totalmente geodésica se para todo $p\in N$ e todo vetor normal $\mathbb{N}$ ao longo de f, a segunda forma quadrática $H_{\mathbb{N}}$ é identicamente nula.

PROVA: A demonstração é imediata a partir da proposição anterior.

6. PONTOS FOCAIS

Sejam (M^m,g) variedade riemanniana, $N^n\subset M^m$ uma subvariedade (neste caso a imersão f a ser considerada é a inclusão $i: N^n \longrightarrow M^m$ e identificaremos os campos ao longo de f, X, com i_*X.

Consideremos:

$\gamma: [0,1] \longrightarrow M^m$ geodésica de M^m com $\gamma(0) = p\in N^n$, $\gamma(0)\in(T_pN)^\perp$.

Pode-se definir ponto focal à subvariedade $N^n\subset M^m$ considerando uma variação:

$\lambda: (-\varepsilon,\varepsilon)\ X\ [0,1] \longrightarrow M$ da geodésica γ satisfazendo

i) Para cada $\bar{t}\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ a curva $s \to \lambda(\bar{t},s)$ é geodésica de M.

ii) Para todo t, $\lambda(t,0) = \alpha(t)\in N$ e

$$A(t) = \frac{\partial\lambda}{\partial s}(t,0)\in(T_{\alpha(t)}N)^\perp.$$

Além disso, observa-se que vale:

LEMA 2.6.1: $J(s) = \frac{\partial\lambda}{\partial t}(0,s)$ é um campo de Jacobi ao longo de γ, que satisfaz:

1) $J(0) \in T_p(N)$

2) $\frac{DJ}{ds}(0) + S_{\gamma'(0)}(J(0)) \in (T_pN)^{\perp}$,

sendo $S_{\gamma'(0)}$ a segunda forma fundamental definida no parágrafo 5. Reciprocamente, se J é um campo de Jacobi ao longo de γ com $\gamma(0) = p \in N$, $\gamma'(0) \in (T_pN)^{\perp}$; então existe uma variação λ de γ satisfazendo (i) e (ii) acima, com campo variacional $\frac{\partial\lambda}{\partial t}(0,s)$ igual a J.

PROVA: Sendo

$$\alpha(t) = \lambda(t,0),\ J(s) = \frac{\partial\lambda}{\partial t}(0,s), \text{ segue:}$$

$J(0) = \frac{\partial\lambda}{\partial t}(0,0) = \frac{d}{dt}(\alpha(t))\Big|_{t=0} \in T_pN$, pois para cada $t, \alpha(t) \in N$. Se $Y_0 \in T_pN$, se $\frac{DJ}{ds}(0) + S_{\gamma'(0)}(J(0)) \in (T_pN)^{\perp}$ então deve-se verificar

$$g(\frac{DJ}{ds}(0) + S_{\gamma'(0)}J(0), Y_0) = 0$$

$$g(\frac{DJ}{ds}(0), Y_0) = g(\frac{D}{ds}\frac{\partial\lambda}{\partial t}(0,0), Y_0) = g(\frac{D}{dt}\frac{\partial\lambda}{\partial s}(0,0), Y_0)$$

Daí:

$$g(\frac{DJ}{ds}(0), Y_0) = g(\frac{DA}{dt}(0), Y_0)$$

A(t) é um campo de vetores ao longo de $\alpha(t)$ com $\alpha'(0) = J(0)$; logo,

$\frac{DA}{dt}(0) = \nabla_{J(0)}A(t)\Big|_{t=0} = \nabla^{i}_{J(0)}A(0)$, $i: N \longrightarrow M$ é a inclusão.

Pela proposição 2.3.2, aqui: $\left[\nabla^i_{J(0)}A(0)\right]^T = \nabla_{J(0)}A(0)$, logo,

$$g(\frac{DJ}{dt}(0),Y_0) = g(\nabla^i_{J(0)}A(0),Y_0) = g(-S_{A(0)}J(0),Y_0), \quad \text{e}$$

$$g(\frac{DJ}{ds}(0)+S_{\gamma'(0)}J(0),Y_0)=g(-S_{\gamma'(0)}J(0),Y_0)+g(S_{\gamma'(0)}J(0),Y_0)=0,$$

pois $A(0) = \gamma'(0)$.

Verifica-se a recíproca tomando $\alpha(t)$ uma curva em N com $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = J(0)$.

Seja W campo de vetores ao longo de α tal que

$$W(0) = \gamma'(0), \frac{DW}{dt}(0) = \frac{DJ}{ds}(0)$$

Para cada t, consideramos $W(t) = V(t)+U(t)$, com

$$V(t)\in(T_{\alpha(t)}N)^{\perp} \text{ e } U(t)\in T_{\alpha(t)}N, \text{ e}$$

$$\lambda(t,s) = \exp_{\alpha(t)}(sV(t))$$

λ é uma variação de γ que satisfaz:

i) para cada $\bar{t}$, $s \longrightarrow \lambda(\bar{t},s)$ é geodésica

ii) $A(t) = \frac{\partial\lambda}{\partial s}(t,0) = V(t)\in(T_{\alpha(t)}N)^{\perp}$

Além disso:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial t}(0,0) = \frac{\partial}{\partial t}\exp_{\alpha(t)}(0,V(t))\Big|_{t=0} = \alpha'(0) = J(0)$$

Para verificar que $J(s) = \frac{\partial\lambda}{\partial t}(0,s)$ é suficiente mostrar que $\frac{\partial\lambda}{\partial t}(0,0) = J(0)$ e $\frac{D}{ds}\frac{\partial\lambda}{\partial t}(0,0) = \frac{DJ}{ds}(0)$.

$$\frac{D}{ds}\frac{\partial\lambda}{\partial t}(0,0) = \frac{D}{dt}\frac{\partial\lambda}{\partial s}(0,0) = \frac{DV}{dt}(0) = \frac{DW}{dt}(0) - \frac{DU}{dt}(0)$$

(*) $\frac{D}{ds}\frac{\partial\lambda}{\partial t}(0,0) = \frac{DJ}{ds}(0) - \frac{DU}{dt}(0)$, usando $\frac{DW}{dt}(0) = \frac{DJ}{ds}(0)$.

Se mostrarmos: $\frac{DU}{dt}(0) = 0$, temos o resultado.

J(s) satisfaz, na hipótese:

$$\frac{DJ}{ds}(0) + S_{\gamma'(0)}(J(0)) \in (T_pN)^{\perp}; \qquad \text{daí}$$

$$\frac{D}{ds}\frac{\partial\lambda}{\partial t}(0,0) + S_{\gamma'(0)}(\frac{\partial\lambda}{\partial t}(0,0)) \in (T_pN)^{\perp}$$

De (*), tem-se:

$$\frac{DU}{dt}(0) = \frac{DJ}{ds}(0) - \frac{D}{ds}\frac{\partial\lambda}{\partial t}(0,0) \in (T_pN)^{\perp}$$

Além disso, $U(0) = 0$ e $U(t) \in T_{\alpha(t)}N$, $\forall$ t.

Tomando C(t) campo ao longo de $\alpha(t)$ tal que

$C(0) \in (T_pN)^{\perp}$ e $C(t) \in (T_{\alpha(t)}N)^{\perp}$, temos:

$$0 = \frac{d}{ds}g(U(t),C(t))\Big|_{t=0} = g(\frac{DU}{dt}(0),C(0)) + g(U(0),\frac{DC}{dt}(0))$$

logo, $g(\frac{DU}{dt}(0),C(0)) = 0$, $\forall$ $C(0) \in (T_pN)^{\perp}$. Donde $\frac{DU}{dt}(0) = 0$ e segue o resultado. □

DEFINIÇÃO 2.6.1: Se $N^n \subset M^m$ é subvariedade, (M^m,g) variedade riemanniana, diz-se que $q \in M$ é ponto focal de N se existem uam geodésica $\gamma: [0,1] \longrightarrow M$ com $\gamma(0) = p \in N$, $\gamma'(0) \in (T_pN)^{\perp}$, $\gamma(1) = q$ e um campo de Jacobi J ao longo de γ, satisfazendo as propriedades (1) e (2) do lema 2.6.1, e mais $J(1) = 0$.

Seja γ: [0,a] $\longrightarrow$ M geodésica com $\gamma(0) = p$

$B_\varepsilon(0)$: bola com centro na origem do plano tangente e raio ε.

Tomamos $B_\varepsilon(0) \subset (\gamma'(0))^\perp$.

DEFINIÇÃO 2.6.2 - Diz-se que γ é livre de pontos focais se existe $\varepsilon>0$ tal que γ não possui pontos focais relativamente à subvariedade

$$\exp_p(B_\varepsilon(0)) = \Sigma_\varepsilon$$

Como Σ_ε é subvariedade totalmente geodésica em p, então se J é campo de Jacobi ao longo de γ com $J(0) \neq 0$ e $\frac{DJ}{dt}(0) = 0$, tem se

$S_{\gamma'(0)}J(0) = 0$; portanto, J satisfará imediatamente a condição (2) do lema 2.6.1.

A proposição seguinte é análoga a proposição 1.3.3 do capítulo 1:

PROPOSIÇÃO 2.6.1 - Seja γ: [0,ℓ] $\longrightarrow M^m$ geodésica livre de pontos focais, $\{J_1,\ldots,J_{n-1}\}$ uma base do espaço vetorial dos campos de Jacobi, perpendiculares a γ, com $\frac{DJ}{dt}(0) = 0$.

Então, para cada $t\in[0,\ell]$, $\{J_1(t),\ldots,J_{m-s}(t)\}$ é uma base de $(\gamma'(t))^\perp$.

PROVA: Demonstra-se analogamente à proposição 1.3.3. □

III - TEOREMAS DE COMPARAÇÃO DE RAUCH; APLICAÇÕES

Dadas duas variedades riemannianas M e $\bar{M}$, cujas características seccionais em cada ponto, e para cada subespaço bi-dimensional do espaço tangente obedecem à mesma relação de ordem, o objetivo dos teoremas de Rauch é comparar comprimentos de curvas dessas variedades.

Existem várias versões para os teoremas de Rauch. A versão mais elaborada, que se utiliza de uma extensão do teorema de Sturm para comparar soluções de equações diferenciais é devida ao próprio Rauch [12].

Warner extendeu os resultados para subvariedades, com hipóteses adicionais sobre a segunda forma fundamental, em [15]. Em [14] aparecem outras extensões e conseqüências.

No que segue, em primeiro lugar mostramos como se comparam campos de Jacobi ao longo de geodésicas de M e $\bar{M}$ respectivamente, desde que se verifique alguma condição de não existência de pontos conjugados ou pontos focais sobre a geodésica de $\bar{M}$. Usamos o resultado obtido para chegar à comparação dos comprimentos de curvas de M e $\bar{M}$, convenientemente construí e investigaremos algumas consequências.

1. TEOREMAS DE COMPARAÇÃO DE RAUCH

Seja M^m uma variedade riemanniana, $\gamma: [0,a] \longrightarrow M^m$ uma geodésica de M^m, X um campo de vetores ao longo de γ.

DEFINIÇÃO 3.1.1 - Chamemos

$$I(X,s_0) = \int_0^{s_0} \left\{ \left\langle \frac{DX}{ds}, \frac{DX}{ds} \right\rangle + \langle R(X,\gamma')X,\gamma' \rangle \right\} ds,$$

para $s_0 \in [0,a]$, a forma do índice de γ.

O lema 1.4.5 nos garante que se γ não tem pontos conjugados a $\gamma(0)$ no intervalo $[0,s_0]$, se X é um campo de vetores ao longo de γ, ortogonal a γ, tal que $X(0) = 0$, então:

$I(J,s_0) \leq I(X,s_0)$, para todo campo de Jacobi J ao longo de γ, tal que $J(0) = 0$, $J(s_0) = X(s_0)$, sendo que $I(J,s_0) = I(X,s_0)$ se e somente se $J = X$.

O lema seguinte, devido à Rauch, será fundamental para nossos objetivos:

LEMA 3.1.1 - Sejam M^m e $\tilde{M}^{\tilde{m}}$ variedades riemannianas ($m \leq \tilde{m}$), $\gamma: [0,a] \longrightarrow M$ e $\tilde{\gamma}: [0,a] \longrightarrow \tilde{M}$ geodésicas de M e $\tilde{M}$, respectivamente, J e $\tilde{J}$ campos de Jacobi ao longo de M e $\tilde{M}$, respectivamente, satisfazendo:

$$\|J(0)\| = \|J(0)\| = 0, \quad \left\|\frac{DJ}{ds}(0)\right\| = \left\|\frac{D\tilde{J}}{ds}(0)\right\|,$$

$$\langle J(s),\gamma'(s)\rangle = \langle \tilde{J}(s),\tilde{\gamma}'(s)\rangle = 0, \text{ para todo } s \in [0,a].$$

Se $\tilde{\gamma}$ não possui pontos conjugados a $\gamma(0)$ no intervalo $[0,a]$ e se para quaisquer subespaços bi-dimensionais Π e $\tilde{\Pi}$

respectivamente tangentes a γ e $\tilde{\gamma}$ nos pontos $\gamma(s)$ e $\tilde{\gamma}(s)$ tivermos

$$K(\Pi) \leq \tilde{K}(\tilde{\Pi}), \text{ então:}$$

$$\|J(s)\| \geq \|\tilde{J}(s)\| \text{ para todo } s \in [0,a].$$

PROVA: Se $\|\frac{DJ}{ds}(0)\| = \|\frac{D\tilde{J}}{ds}(0)\| = 0$, então $\|J(s)\| = |\tilde{J}(s)\| = 0$, pois J e $\tilde{J}$ são soluções, respectivamente, das equações diferenciais:

$$\frac{D^2J}{ds^2} - R(\gamma',J)\gamma' = 0,$$

$$\frac{D^2\tilde{J}}{ds^2} - R(\tilde{\gamma}',\tilde{J})\tilde{\gamma}' = 0$$

Se $\|\frac{DJ}{ds}(0)\| = \|\frac{D\tilde{J}}{ds}(0)\| > 0$ seja $v(s) = \|J(s)\|^2$ e $\tilde{v}(s) = \|\tilde{J}(s)\|$; temos então, para todo $s \in (0,a]$,

$$h(s) = \frac{v(s)}{\tilde{v}(s)} = \frac{\|J(s)\|^2}{\|\tilde{J}(s)\|^2}$$

bem definida, pois $\tilde{\gamma}$ não possui pontos conjugados a $\tilde{\gamma}(0)$ no intervalo $[0,a]$.

Usando a regra de L'Hôpital, tem-se:

$$\lim_{s\to 0} h(s) = \lim_{s\to 0} \frac{v''(s)}{\tilde{v}''(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{2\left[\langle \frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds}\rangle + \langle J, \frac{D^2J}{ds^2}\right]}{2\left[\langle \frac{D\tilde{J}}{ds}, \frac{D\tilde{J}}{ds}\rangle + \langle J, \frac{D^2J}{ds^2}\right]} \quad \text{e}$$

$$\lim_{h\to 0} h(s) = \frac{\|\frac{DJ}{ds}(0)\|}{\|\frac{DJ}{ds}(0)\|} = 1.$$

Se mostrarmos que $\frac{dh}{ds} \geq 0$, então, h(s) será crescente em (0,a], logo, $h(s) \geq 1$, e $|J(s)| \geq |\tilde{J}(s)|$.

Como $\frac{dh}{ds} = \frac{v'(s)\tilde{v}(s) - v(s)\tilde{v}'(s)}{[v(s)]^2}$, basta verificar se $v'(s)\tilde{v}(s) \geq v(s)\tilde{v}'(s)$. (1)

Seja $\ell \in (0,a]$; se $v(\ell) = 0$, como

$$v'(\ell) = 2\langle J(\ell), \frac{DJ}{ds}(\ell)\rangle,$$

tem-se $v'(\ell) = 0$, e

$$v'(\ell)\tilde{v}(\ell) = v(\ell)\tilde{v}'(\ell).$$

Se $v(\ell) \neq 0$, como $\tilde{v}(\ell) \neq 0$, sejam

$$U(s) = \frac{1}{\sqrt{v(\ell)}} J(s) \quad , \quad \tilde{U}(s) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{v}(\ell)}} \tilde{J}(s)$$

Então:

$$\frac{v'(\ell)}{v(\ell)} = \frac{d}{ds}\langle U(s), U(s)\rangle_{s=\ell} = \int_0^{\ell} \frac{d^2}{ds^2}\langle U(s), U(s)\rangle ds \qquad \text{ou}$$

$$\frac{v'(\ell)}{v(\ell)} = 2\int_0^{\ell} \left\{ \langle \frac{DU}{ds}, \frac{DU}{ds}\rangle + \langle R(\dot{\gamma}, U)\dot{\gamma}, U\rangle \right\} ds$$

$$\frac{v'(\ell)}{v(\ell)} = 2 \cdot I(U, \ell).$$

Comparemos $I(U,\ell)$ e $I(\tilde{U},\ell)$; para isso, consideremos $\{Z_1, \ldots, Z_m\}, \{\tilde{Z}_1, \ldots, \tilde{Z}_{\tilde{m}}\}$ bases paralelas e ortogonais ao longo de γ e $\tilde{\gamma}$, com $Z_1 = \gamma'$, $Z_2(\ell) = U(\ell)$, $\tilde{Z}_1 = \tilde{\gamma}'$, $\tilde{Z}_2(\ell) = \tilde{U}(\ell)$.

Seja ϕ a aplicação que faz corresponder a cada campo

$$X(s) = \sum_{i=1}^{m} f_i(s) Z_i(s), \qquad \text{o campo}$$

$$(\phi X)(s) = \sum_{i=1}^{m} f_i(s)\tilde{Z}_i(s)$$

ϕ satisfaz trivialmente:

$$<\phi(X_1),\phi(X_2)> = <X_1,X_2> \text{ e } \frac{D}{ds}(\phi(X)) = \phi(\frac{DX}{ds})$$

Calculando

$$I(\phi(U),\ell) = \int_0^{\ell}\left\{<\frac{D}{ds}(\phi(U)),\frac{D}{ds}(\phi(U))> + <R(\tilde{\gamma}',\phi(U))\tilde{\gamma}',\phi(U)>\right\}ds$$

Usando as propriedades de ϕ:

$$I(\phi(U),\ell) = \int_0^{\ell}\left\{<\frac{DU}{ds},\frac{DU}{ds}> + <R(\tilde{\gamma}',\phi(U))\tilde{\gamma}',\phi(U)>\right\}ds \tag{2}$$

Sabemos que $<R(\tilde{\gamma}',\phi(U))\tilde{\gamma}',\phi(U)>=<R(\phi(U),\tilde{\gamma}')\phi(U),\tilde{\gamma}'>$ e $<R(\phi(U),\tilde{\gamma}')\phi(U),\tilde{\gamma}'> = -<R(\phi(U),\tilde{\gamma}')\tilde{\gamma}'\phi(U)>$, $<R(\phi(U),\tilde{\gamma}')\phi(U),\tilde{\gamma}'> = -\tilde{K}(\tilde{\Pi})$, sendo $\tilde{\Pi}$ o plano gerado por $\phi(U)$ e $\tilde{\gamma}'$.

Por outro lado, como $K(\Pi) \leq \tilde{K}(\tilde{\Pi})$, tem-se

$$<R(U,\tilde{\gamma})U,\tilde{\gamma}> = -<R(U,\tilde{\gamma})\tilde{\gamma},U> = -K(\Pi), \text{ ou}$$

$$<R(U,\tilde{\gamma})U,\tilde{\gamma}> \geq <R(\phi(U),\tilde{\gamma}')\phi(U),\tilde{\gamma}'>.$$

Voltando a (2) e usando a última desigualdade, temos

$$I(\phi(U),\ell) \leq I(U,\ell) \tag{3}$$

Por outro lado, $\tilde{U}$ e $\phi(U)$ são campos ao longo de $\tilde{\gamma}$ que satisfazem as hipóteses do lema 1.4.5, ou seja, $I(\tilde{U},\ell)$ e $I(\phi(U),\ell)$ se comparam conforme as observações iniciais, e

$$I(\tilde{U},\ell) \leq I(\phi(U),\ell), \tag{4}$$

De (3) e (4), temos:

$$I(\tilde{U},\ell) \leq I(U,\ell), \text{ ou}$$

$$\frac{v'(\ell)}{v(\ell)} \leq \frac{\tilde{v}'(\ell)}{\tilde{v}(\ell)}$$

o que resulta $v'(\ell)\tilde{v}(\ell) \leq v(\ell)\tilde{v}'(\ell)$; então (1) se verifica para todo $\ell\in(0,a]$, e $\|\tilde{J}(s)\| \leq \|J(s)\|$ para todo $s\in[0,a]$. □

COROLÁRIO 3.1.1 - Nas mesmas hipóteses do lema 3.1.1, se $m=\tilde{m}$, (M^m,g) tem curvatura constante e igual a δ e para algum $\bar{s}$ do intervalo $(0,a]$,

$\|J(\bar{s})\| = \|\tilde{J}(\bar{s})\|$, então valem

i) $\|J(s)\| = \|\tilde{J}(s)\|$ para todo $s\in[0,\bar{s}]$

ii) As curvaturas seccionais ao longo dos planos gerados por $\tilde{J}(s)$ e $\tilde{\gamma}'(s)$ são iguais a δ para todo $s\in[0,\bar{s}]$.

PROVA: Considerando a função

$h(s) = \dfrac{\|J(s)\|}{\|\tilde{J}(s)\|}$ da prova do lema 1.1, temos $h(s) \geq 1$; como $h(\bar{s}) = 1$, $s = \bar{s}$ será um ponto de mínimo local interior para $h(s)$. Logo,

$$\left.\frac{dh}{ds}\right|_{s=\bar{s}} = 0, \text{ ou}$$

$$\langle\tilde{J}(s),\tilde{J}(s)\rangle_{s=\bar{s}}\langle J(s),\frac{DJ}{ds}\rangle_{s=\bar{s}} = \langle J(s),J(s)\rangle_{s=\bar{s}}\langle\tilde{J}(s),\frac{D\tilde{J}}{ds}\rangle_{s=\bar{s}}$$

Daí, $\langle J(s),\frac{DJ}{ds}\rangle_{s=\bar{s}} = \langle J(s),\frac{D\tilde{J}}{ds}\rangle_{s=\bar{s}}$

Usando a última igualdade, obtemos:

$I(J,\bar{s}) = I(\tilde{J},\bar{s})$, sendo $I(J,s)$ dado pela definição 3.1.1.

De (3) e (4) da demonstração do lema 3.1.1, segue:

$I(\tilde{J},\bar{s}) \leq I(\phi(J),\bar{s}) \leq I(J,\bar{s})$; portanto,

$I(\phi(J),\bar{s}) = I(J,\bar{s})$, que se escreve:

$$\int_0^{\bar{s}} \left\{ \langle \frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds} \rangle + \langle R(\phi(J),\tilde{\gamma}')\phi(J),\tilde{\gamma}' \rangle \right\} ds = \int_0^{\bar{s}} \left\{ \langle \frac{DJ}{ds}, \frac{DJ}{ds} \rangle + \langle R(J,\gamma')J\gamma' \rangle \right\} ds$$

ou:
$$\int_0^{\bar{s}} \left\{ -\langle R(J,\gamma')J,\gamma' \rangle + \langle R(\phi(J),\tilde{\gamma}')\phi(J),\tilde{\gamma}' \rangle \right\} ds = 0.$$

Por outro lado, da demonstração do lema 3.1.1, temos que

$h(s) \geq 1$ e $h'(s) \geq 0$, logo, h é não decrescente; como $h(\bar{s}) = 1$, tem-se $h(s)$ constante e igual a 1 no intervalo $[0,s]$, ou seja, tem-se (i).

Como $I(\tilde{J},\bar{s}) = I(\phi(J),\bar{s})$, pelo lema 1.4.5, segue:

$\tilde{J}(s) = \phi(J)(s)$, para todo $s \in [0,\bar{s}]$, e

$$\int_0^{\bar{s}} \left\{ -\langle R(J,\gamma')J,\gamma' \rangle + \langle R(\tilde{J},\tilde{\gamma}')\tilde{J},\tilde{\gamma}' \rangle \right\} ds = 0.$$

Como $\|J(s)\| = \|\tilde{J}(s)\| \geq 0$ em $[0,\bar{s}]$, e

$$\langle R(J,\gamma')J,\gamma' \rangle = -K_{\gamma(s)}(J,\gamma',J\gamma') \cdot \|J\|,$$

$\langle R(\tilde{J},\tilde{\gamma}')\tilde{J},\tilde{\gamma}' \rangle = -\tilde{K}_{\tilde{\gamma}(s)}(\tilde{J},\tilde{\gamma}',\tilde{J},\tilde{\gamma}')\|\tilde{J}\|$, substituindo na última integral, concluímos:

$$\tilde{K}_{\tilde{\gamma}(s)}(\tilde{J},\tilde{\gamma}'\tilde{J},\tilde{\gamma}') = \delta. \qquad \square$$

COROLÁRIO 3.1.2 - Seja M^n uma variedade riemanniana com curvatura seccional $K_p(\Pi_p) < 0$ para todo ponto $p \in M$ e todo subespaço bi-dimensional $\Pi_p \subset T_pM$.

Então, M não possui pontos conjugados.

PROVA: Seja $\gamma: [0,a] \longrightarrow M^n$ geodésica de M^n, $\tilde{M}$ o plano euclidiano (logo, $\tilde{K}_{\tilde{p}}(\tilde{\Pi}_p) \equiv 0$), $\tilde{\gamma}:[0,a] \longrightarrow \tilde{M}$ geodésica.

Tomemos J e $\tilde{J}$ campos de Jacobi ao longo de γ e $\tilde{\gamma}$ respectivamente, com $J(0) = 0$, $\tilde{J}(0) = 0$, $\|\frac{DJ}{ds}(0)\| = \|\frac{D\tilde{J}}{ds}(0)\|$. Como $\tilde{\gamma}$ não tem pontos conjugados a $\tilde{\gamma}(0)$,

$$\|J(s)\| \geq \|\tilde{J}(s)\| > 0, \quad \forall\, s \in (0,a],$$

logo, γ não tem pontos conjugados a $\gamma(0)$. □

COROLÁRIO 3.1.3 - Se a curvatura seccional de uma variedade riemanniana M satisfaz

$0 < L \leq K(\Pi) \leq H$, L, H números reais, então, a distância d entre dois pontos conjugados consecutivos satisfaz:

$$\frac{\pi}{\sqrt{H}} \leq d \leq \frac{\pi}{\sqrt{L}}.$$

PROVA: Sejam $S(L)$ e $S(H)$ esferas com a mesma dimensão de M com curvaturas L e H respectivamente, $\gamma_1:[0,\ell] \to S(L)$ $\gamma: [0,\ell] \longrightarrow M$, $\gamma_2: [0,\ell] \longrightarrow S(H)$ geodésicas, J_1, J e J_2 campos de Jacobi ao longo de γ_1, γ e γ_2, respectivamente, com $\|J_1(0)\| = \|J(0)\| = \|J_2(0)\| = 0$, $\|\frac{DJ_1}{ds}(0)\| = \|\frac{DJ_2}{ds}(0)\| = \|\frac{DJ}{ds}(0)\|$.

Sendo d a distância entre $\gamma(0)$ e o primeiro ponto conjugado a $\gamma(0)$ ao longo de γ, para $\ell < d$, temos:

$\|J_1(\ell)\| \geq \|J(\ell)\|$, pela proposição 3.1.1; como

$J_1(\Pi/\sqrt{L}) = 0$, $J(\Pi/\sqrt{\ell}) = 0$; logo, $\frac{\Pi}{\sqrt{L}} \geq d$.

Quando $\ell < \frac{\Pi}{\sqrt{H}}$, tem-se a não existência de pontos conjugados sobre γ_2; logo, $\|J_2(\ell)\| \leq \|J(\ell)\|$ para todo $\ell \in (0, \Pi/\sqrt{H})$ daí, $d \geq \Pi/\sqrt{H}$. □

Em tudo que segue, consideremos sempre as variedades riemannianas completas. O primeiro teorema, devido a Rauch, que utilizaremos posteriormente se enuncia:

TEOREMA 3.1.1 - Sejam M^m, $\tilde{M}^{\tilde{m}}$, variedades riemannianas completas de dimensões m e $\tilde{m}$ respectivamente ($m \leq \tilde{m}$).

Consideremos $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$, $i: T_pM \longrightarrow T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ uma isometria linear, $S^1_{(p)} = \{X \in T_pM / |X| = 1\}$,

$E: [0,a] \longrightarrow S^1_p$ uma curva parametrizada por comprimento de arço, $f: [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ função diferenciável.

Sendo $\tilde{E}(t) = i(E(t))$,

$c(t) = \exp_p(f(t)E(t))$, $\tilde{c}(t) = \exp_{\tilde{p}}(f(t)\tilde{E}(t))$ curvas em M e $\tilde{M}$, e se para cada t fixo, as geodésicas

$u(s) = \exp_p(sf(t)E(t))$, $\tilde{u}(s) = \exp_{\tilde{p}}(sf(t)\tilde{E}(t))$, $0 \leq s \leq 1$,

são tais que as curvaturas K e $\tilde{K}$ satisfazem $K \leq \tilde{K}$ ao longo de u e $\tilde{u}$, e $\tilde{u}$ não possui pontos conjugados a $\tilde{p} = \tilde{u}(0)$, então:

$$L(\tilde{c}) \leq L(c).$$

PROVA: De

$c(t) = \exp_p(f(t)E(t))$ e $\tilde{c}(t) = \exp_{\tilde{p}}(f(t)\tilde{E}(t))$ segue:

$$c'(t) = (d\ exp_p)_{f(t)E(t)}(f'(t)E(t)+f(t)E'(t)),\ ou$$

$$c'(t) = f'(t)(d\ exp_p)_{f(t)E(t)}(E(t))+f(t)(d\ exp_p)_{f(t)E(t)}(E'(t))$$

Da mesma forma:

$$\tilde{c}'(t)=f'(t)(d\ exp_{\tilde{p}})_{f(t)\tilde{E}(t)}(\tilde{E}(t))+f(t)(d\ exp_{\tilde{p}})_{f(t)\tilde{E}(t)}(\tilde{E}'(t)).$$

Como $\langle E(t),E'(t)\rangle = 0$, pelo lema de Gauss, conclue-se que as parcelas de $c'(t)$ e $\tilde{c}'(t)$ são perpendiculares. Por outro lado, como $\|E(t)\| = \|\tilde{E}(t)\|$, tem-se

$$\|(d\ exp_p)_{f(t)E(t)}(E(t))\| = \|(d\ exp_p)_{f(t)\tilde{E}(t)}(\tilde{E}(t))\| \quad (1)$$

Para cada $t_0\in[0,a]$, seja

$$\lambda(\theta,s) = exp_p(sf(t_0)+\theta sE'(t_0)),\ \theta\in(-\varepsilon,\varepsilon),\ s\in[0,1],$$

uma variação por geodésicas de

$$u(s) = exp_p(sf(t_0)E(t_0))$$

Então:

$$J_{t_0}(s) = \frac{\partial\lambda}{\partial\theta}(0,s) = (d\ exp_p)_{sf(t_0)E(t_0)}(sE'(t_0))$$

é campo de Jacobi ao longo de u.

Se consideramos uma variação análoga para $\tilde{u}$, então

$$\tilde{J}_{t_0}(s) = \frac{\partial\tilde{\lambda}}{\partial\theta}(0,s) = (d\ exp_{\tilde{p}})_{sf(t_0)\tilde{E}(t_0)}(s\tilde{E}'(t_0))$$

é tal que podemos compará-los pelo lema 3.1.1; logo,

$$\|J_{t_0}(1)\| \geq \|\tilde{J}_{t_0}(1)\|,\ ou$$

$$\|(d\ exp_p)_{f(t_0)E(t_0)}(E'(t_0))\|\geq\|(d\ exp_{\tilde{p}})_{f(t_0)\tilde{E}(t_0)}(\tilde{E}'(t_0))\| \quad (2)$$

De (1) e (2), segue:

$\|c'(t)\| \geq \|\tilde{c}'(t)\|$, para todo $t\in[0,a]$, e, portanto,

$$L(c) \geq L(\tilde{c}) \qquad \square$$

Se em lugar da hipótese de não existência de pontos conjugados ao longo das geodésicas tivermos a hipótese das geodésicas serem livres de pontos focais (conforme a definição 2.6.2), valem resultados análogos aos já demonstrados:

LEMA 3.1.2: Seja $\gamma: [0,a] \to M$ geodésica livre de pontos focais em $[0,\ell]$, $\ell \leq a$.

Consideremos J um campo de Jacobi ao longo de γ ortogonal a γ; então, se X é um campo de vetores ao longo de γ, ortogonal a γ tal que

$$\left\|\frac{DJ}{ds}(0)\right\| = \left\|\frac{DX}{ds}(0)\right\| = 0,\ J(\ell) = X(\ell),\ \text{tem-se}$$

$I(J,\ell) \leq I(X,\ell)$, e $I(J,\ell) = I(X,\ell) \Longleftrightarrow J(s) = X(s),\ \forall\ s\in[0,\ell]$.

PROVA: Usando a proposição 1.3.4, tomamos $\{J_1(s),\ldots,J_{n-1}\}$ uma base do espaço dos campos de Jacobi J ao longo de γ tais que $\left\|\frac{DJ}{ds}(0)\right\| = 0$. Os campos X e J se escrevem:

$$X(s) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(s)J_i(s),\quad J(s) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i(\ell)J_i(s),$$

pois $X(\ell) = J(\ell)$.

Como no lema 1.4.5, mostramos que

$$I(X,\ell) = I(J,\ell) + \int_0^{\ell} \langle A(s),A(s)\rangle ds, \text{ e tem-se a tese.} \qquad \square$$

LEMA 3.1.3 - Sejam M^m e $\tilde{M}^{\tilde{m}}$ variedades riemannianas de dimensões m e $\tilde{m}$ ($m \leq \tilde{m}$) cujas curvaturas ao longo das geodésicas $\gamma: [0,a] \to M$ e $\tilde{\gamma}: [0,a] \to \tilde{M}$ satisfazem $K \leq \tilde{K}$ (como no lema 3.1.1).

Consideremos J e $\tilde{J}$ campos de Jacobi ao longo de γ e $\tilde{\gamma}$ respectivamente, satisfazendo:

$$\|J(0)\| = \|\tilde{J}(0)\|, \quad \left\|\frac{DJ}{ds}(0)\right\| = \left\|\frac{D\tilde{J}}{ds}(0)\right\| = 0 \quad \text{e}$$

$\langle J(s), \gamma'(s)\rangle = \langle \tilde{J}(s), \tilde{\gamma}'(s)\rangle = 0$, para todo $s \in [0,a]$.

Então, se $\tilde{\gamma}$ é livre de pontos focais,

$\|J(s)\| \geq \|\tilde{J}(s)\|$, para todo $s \in [0,a]$.

PROVA: A prova é análoga à do lema 3.1.1, pois com a hipótese de $\tilde{\gamma}$ ser livre de pontos focais, a função $\frac{\|J(s)\|}{\|\tilde{J}(s)\|}$ está bem definida, e usando o lema 3.1.2, podemos comparar $I(\phi(U),\ell)$ com $I(U,\ell)$.

COROLÁRIO 3.1.4: Nas mesmas hipóteses do lema 3.1.3, se $m=\tilde{m}$ e (M^m,g) tem curvatura seccional constante e igual a δ, e se existe $\bar{s} \in (0,a]$ tal que

$\|J(\bar{s})\| = \|\tilde{J}(\bar{s})\|$, então valem:

i) $\|J(s)\| = \|J(s)\|$ para todo $s \in [0,\bar{s}]$ e

ii) As curvaturas seccionais ao longo dos planos gerados por $\tilde{J}(s)$ e $\tilde{\gamma}(s)$ são iguais a δ para todo $s \in [0,\bar{s}]$.

PROVA: Análoga a do corolário 3.1.1, usando os lemas 3.1.2 e 3.1.3. □

COROLÁRIO 3.1.5 - Consideremos M^m variedade riemanniana completa, com curvatura seccional $K_p(\Pi_p) \leq L$ para todo ponto p e todo subespaço bi-dimensional $\Pi_p \subset T_pM$.

Seja $\gamma: [0,a] \longrightarrow M^m$ geodésica de M^m; então, se $a < \pi/2\sqrt{L}$ $(L>0)$, γ é livre de pontos focais.

PROVA: Chamemos $S_m(L)$ a esfera m-dimensional com curvatura constante e igual a L. Então, dada $\tilde{\gamma}: [0,a] \longrightarrow S_m(L)$, $\tilde{\gamma}$ é livre de pontos focais se $a < \pi/2\sqrt{L}$, para $L>0$; e $L \leq 0$, $\tilde{\gamma}$ é sempre livre de pontos focais.

Sejam J e $\tilde{J}$ campos de Jacobi ao longo de γ e $\tilde{\gamma}$ respectivamente, ortogonais a γ e $\tilde{\gamma}$, com $\frac{DJ}{ds}(0)=0$, $\frac{D\tilde{J}}{ds}(0)=0$.

Como $\tilde{\gamma}$ é livre de pontos focais, usando o lema 3.1.2,

$$\|J(s)\| \geq \|\tilde{J}(s)\| > 0 \text{ se } s \in [0,\pi/2\sqrt{L}) \text{ se } L>0,$$
$$\|J(s)\| \geq \|\tilde{J}(s)\| > 0, \ \forall\, s \in [0,a] \text{ se } L \leq 0. \qquad \square$$

Esses lemas possibilitam a demonstração do teorema seguinte, também devido a Rauch:

TEOREMA 3.1.2 - Sejam M^m, $\tilde{M}^{\tilde{m}}$ variedades riemannianas, $\gamma: [0,a] \longrightarrow M^m$, $\tilde{\gamma}: [0,a] \longrightarrow \tilde{M}$ geodésicas tais que as curvaturas seccionais de M e $\tilde{M}$ ao longo de γ e $\tilde{\gamma}$ respectivamente satisfazem $K \leq \tilde{K}$ (conforme o lema 3.1.1).

Consideremos $A(t,s)$ uma família de geodésicas de M tal que:

a) $0 \leq s \leq a$

b) dada uma função diferenciável $m: [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ para cada

$s \in [0,a]$, $0 \leq t \leq m(s)$.

c) Para cada $\bar{s} \in [0,a]$, $\Lambda(t,\bar{s})$ é geodésica parametrizada por comprimento de arco, e $\Lambda(0,\bar{s}) = \gamma(\bar{s})$.

d) $\langle \frac{\partial \Lambda}{\partial t}(0,s), \gamma'(s) \rangle = 0$, para todo $s \in [0,a]$.

e) $\frac{D}{\partial s} \frac{\partial \Lambda}{\partial t}(0,s) = 0$, para todo $s \in [0,a]$,

ou seja, temos uma família de geodésicas de M ortogonal a γ.

Chamemos $\tilde{\Lambda}(t,s)$ à família de geodésicas em $\tilde{M}$, ortogonal a $\tilde{\gamma}$, satisfazendo a), b), c), d), e), com $\tilde{\gamma}$ no lugar de γ.

Se $c(s) = \Lambda(m(s),s)$, $\tilde{c}(s) = \tilde{\Lambda}(m(s),s)$, e para cada $\bar{s} \in [0,a]$, $\Lambda(t,\bar{s})$ é livre de pontos focais em $[0,m(\bar{s})]$, então:

$$L(\tilde{c}) \leq L(c).$$

PROVA: Podemos escrever:

$$c'(s_0) = m'(s_0)\frac{\partial \Lambda}{\partial t}(m(s_0),s_0) + \frac{\partial \Lambda}{\partial s}(m(s_0),s_0) \text{ e}$$

$$\tilde{c}'(s_0) = m'(s_0)\frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial t}(M(s_0),s_0) + \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial s}(m(s_0),s_0), \text{ para todo } s_0 \in [0,a].$$

Como $\Lambda(t,s_0)$ é geodésica parametrizada por comprimento de arco,

$$\left\| \frac{\partial \Lambda}{\partial t}(m(s_0),s_0) \right\| = \left\| \frac{\partial \tilde{\Lambda}}{\partial t}(m(s_0),s_0) \right\| = 1$$

Seja $F(u,\tau)$ a variação por geodésicas de $\lambda(t,s_0)$, dada por

$$F(u,\tau) = \exp_{\gamma(\tau)}(u\, m(s_0)E(\tau)), u \in [0,1], \tau \in (s_0-\varepsilon, s_0+\varepsilon),$$

sendo $E(\tau) = \frac{\partial \Lambda}{\partial t}(0,\tau)$.

Então,

$J_{s_0}(u) = \frac{\partial F}{\partial \tau}(u,s_0)$ é campo de Jacobi ao longo de $\Lambda(t,s_0)$.

Além disso, $\frac{\partial F}{\partial \tau}(u,s_0)$ é ortogonal a $\frac{\partial F}{\partial u}(u,s_0)$, pois se

$h(u) = \langle \frac{\partial F}{\partial \tau}(u,s_0), \frac{\partial F}{\partial u}(u,s_0) \rangle$, tem-se:

$$h'(u) = \langle \frac{D}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial \tau}(u,s_0), \frac{\partial F}{\partial u}(u,s_0) \rangle + \langle \frac{\partial F}{\partial u}(u,s_0), \frac{D}{du} \frac{\partial F}{\partial u}(u,s_0) \rangle$$

Como $\frac{D}{du} \frac{\partial F}{\partial u}(u,s_0) = 0$, para todo $u \in [0,1]$, e

$\frac{D}{\partial u} \frac{\partial F}{\partial \tau}(u,s_0) = \frac{D}{\partial \tau} \frac{\partial F}{\partial u}(u,s_0)$, tem-se

$$h'(u) = \langle \frac{D}{\partial \tau} \frac{\partial F}{\partial u}(u,s_0), \frac{\partial F}{\partial u}(u,s_0) \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \| \frac{\partial F}{\partial u}(u,s_0) \|^2 = 0$$

Logo,

$h(u) = h(0)$ para todo $u \in [0,1]$; como

$$\frac{\partial F}{\partial \tau}(0,s_0) = \gamma'(s_0), \frac{\partial F}{\partial u}(0,s_0) = m(s_0)E(s_0) = m(s_0)\frac{\partial \Lambda}{\partial t}(0,s_0),$$

e pela hipótese d),

$$h(0(= 0 = \langle \frac{\partial F}{\partial \tau}(u,s_0), \frac{\partial F}{\partial u}(u,s_0) \rangle$$

Em particular, $J_{s_0}(1) = \frac{\partial F}{\partial \tau}(1,s_0)$ é ortogonal a

[1] $\frac{\partial F}{\partial u}(1,s_0) = \frac{\partial \Lambda}{\partial t}(m(s_0),s_0)$.

Se $E(s) = \frac{\partial \Lambda}{\partial t}(0,s)$, podemos escrever:

$$\Lambda(t,s) = \exp_{\gamma(s)}(tE(s)).$$

Como $F(u,\tau) = \exp_{\gamma(\tau)}(u\, m(s_0)E(\tau))$, verifica-se facilmente: $\frac{\partial F}{\partial \tau}(1,s_0) = \frac{\partial \Lambda}{\partial s}(m(s_0),s_0)$. [2]

De [1] e [2], segue que

$\|c'(s_0)\| = [m'(s_0)]^2 + \|J_{s_0}(1)\|^2$, para todo $t_0 \in (0,a)$.

Da mesma forma, mostramos que:

$\|\tilde{c}'(s_0)\| = [m'(s_0)]^2 + \|\tilde{J}_{s_0}(1)\|^2$, para todo $s_0 \in (0,a)$.

J e $\tilde{J}$ podem ser comparados pelo lema 3.1.3, e

$$\|\tilde{J}_{s_0}(1)\| \leq \|J_{s_0}(1)\|$$

Temos então:

$\|\tilde{c}'(s_0)\| \leq \|c'(s_0)\|$, para todo $s \in (0,a)$, e por continuidade,

$\|\tilde{c}'(s_0)\| \leq \|c'(s_0)\|$, para todo $s_0 \in [0,a]$, donde $L(\tilde{c}) \leq L(c)$. □

COROLÁRIO 3.1.6: Seja M^m variedade riemanniana completa, $S(\delta)$ uma variedade bi-dimensional, simplesmente conexa, com curvatura seccional constante e igual a $\delta \in \mathbb{R}$, $\delta \leq 1$.

Consideremos ainda $\gamma: [0,a] \to M$, $\tilde{\gamma}: [0,a] \to S(\delta)$ geodésicas, Λ e $\tilde{\Lambda}$ famílias de geodésicas respectivamente ortogonais a γ em M e $\tilde{\gamma}$ em $S(\delta)$, nas condições do teorema 3.1.2.

Sendo $m: [0,a] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $m(s) \leq \Pi/2$,

$c(s) = \Lambda(s,m(s))$, $\tilde{c}(s) = \tilde{\Lambda}(s,m(s))$ e se a curvatura seccional de M, para todo ponto p e todo subespaço bi-dimenscional $\Pi_p \subset T_pM$ satisfaz

$$\delta \leq K(\Pi_p) \leq 1, \text{ então}$$

$L(c) = L(\tilde{c})$ se e somente se a subvariedade bidimensional for-

mada pela união das curvas da família $\Lambda(t,s)$ é totalmente geodésica e de curvatura constante e igual a δ.

PROVA: A condição $m(s) \leq \Pi/2$, para todo $s\in[0,a]$ garante a não existência de pontos focais sobre as geodésicas da família $\tilde{\Lambda}(t,s)$; para isso, usamos o teorema 3.1.2, considerando as variedades M e $S_m(1)$: esfera m-dimensional de raio 1.

Observamos que a condição $m(s) < \Pi/2$ é que garante a não existência de pontos focais sobre as geodésicas da família $\bar{\Lambda}(s,t)$ construída em $S_m(1)$ de forma análoga à do teorema 3.1.2. Mas, usando as mesmas notações do teorema 3.1.2, para os $s_0\in[0,a]$ tais que $m(s_0) = \Pi/2$.

$\|\tilde{J}_{s_0}(u)\| \geq \|\bar{J}_{s_0}(u)\| > 0$, $0 \leq u < 1$; pela continuidade dos campos de Jacobi,

$\|\tilde{J}_{s_0}(1)\| \geq \|\bar{J}_{s_0}(1)\| \geq 0$, ou seja, a geodésica $\lambda(s_0,t)$, $0 \leq t \leq m(s)$ é livre de pontos focais para $0\leq t<m(s_0)$, e nada se pode afirmar sobre $\lambda(s_0,m(s_0))$.

Mas, para todo $s_0\in[0,a]$, temos:

$\|J_{s_0}(u)\| \geq \|\tilde{J}_{s_0}(u)\| > 0$, $0 \leq u < 1$, usando agora o teorema 3.1.2 para campos de Jacobi ao longo de $\lambda(s_0,t)$, $\bar{\lambda}(s_0,t)$; novamente pela continuidade,

$\|J_{s_0}(1)\| \geq \|\tilde{J}_{s_0}(1)\| \geq 0$, ou seja, quando u=1, ainda comparamos esses campos de Jacobi e podemos proceder como na demonstração do teorema 3.1.2 para mostrar que

$$L(c) \geq L(\tilde{c})$$

Sejam N, $\tilde{N}$ as subvariedades bi-dimensionais de $S(\delta)$ e M respectivamente, formadas pela união das geodésicas das famílias $\lambda(t,s)$ e $\tilde{\lambda}(t,s)$.

As aplicações:

$$(t,s) \longrightarrow \lambda(t,s) \quad \text{e}$$

$$(t,s) \longrightarrow \tilde{\lambda}(t,s)$$

fornecem parametrizações geodésicas de N e $\tilde{N}$ respectivamente.

Se $L(c) = L(\tilde{c})$, então:

$$\|\tilde{J}_{s_0}(1)\| = \|J_{s_0}(1)\|.$$

Observando que, como J_{s_0} foi definido,

$J_{s_0}(u) \in T_{\lambda(u\ m(s_0),s_0)}N$ e $\tilde{J}_{s_0}(u) \in T_{\tilde{\lambda}(u\ m(s_0),s_0)}\tilde{N}$, e usando o corolário 3.1.4, temos que a curvatura seccional ao longo de cada geodésica $\lambda(t,s_0)$ é constante e igual a δ, para cada s_0, logo, a curvatura de N é igual a δ.

N é totalmente geodésica pois suas geodésicas são geodésicas de M em todo ponto.

Se N e $\tilde{N}$ têm as mesmas curvaturas seccionais, então serão isométricas, e verifica-se

$$L(c) = L(\tilde{c}). \qquad \square$$

2. APLICAÇÕES DO TEOREMA DE RAUCH: VARIEDADES DE DIÂMETRO MAXIMO.

Neste parágrafo daremos alguns resultados que serão

úteis para a prova do teorema de Toponogov.

TEOREMA 3.2.1: (Bonnet) - Seja M uma variedade riemanniana completa tal que $0<\delta\leq K_p(\Pi_p)$ para todo $p\in M$ e todo subespaço bi-dimensional $\Pi_p\subset T_pM$, então, M é compacta, e o diâmetro de M, d(M) é tal que

$$d(M) \leq \frac{\Pi}{\sqrt{\delta}}.$$

PROVA: Dado $p\in M$, seja $q\in M$ qualquer e γ um segmento de geodésica minimal de p a q.

Pelo corolário 3.1.2, tem-se imediatamente:

$$d(p,q) \leq \Pi/\sqrt{\delta}, \text{ logo,}$$

$$d(M) \leq \Pi/\sqrt{\delta}$$

Como (M,d) é um espaço métrico, mostrar que M é compacta equivale a mostrar que todo subconjunto infinito de M tem um ponto de acumulação.

Se $\{p_i\}_{i\in I}$ é um subconjunto infinito de pontos de M, $\{d(p,p_i)\}_{i\in I}$ é um subconjunto não vazio de números mais limitado superiormente e inferiormente, logo, tem um sup e um inf, o que equivale a $\{p_i\}_{i\in I}$ ter um ponto de acumulação. □

DEFINIÇÃO 3.2.1: Sejam M, N variedades riemannianas, $f: M \to N$ aplicação C^∞; diz-se que f é uma isometria se para quaisquer campos de vetores X, Y em M tem-se:

$$\langle X,Y\rangle = \langle f_*X, f_*Y\rangle$$

Se $f: M \to N$ é uma isometria e difiomorfismo, então, dizemos que M e N são isométricas.

O teorema que segue é devido a Toponogov.

TEOREMA 3.2.2: Seja M uma variedade riemanniana completa tal que $0<\delta\leq K_p(\Pi_p)\leq 1$; se $d(M) = \Pi/\sqrt{\delta}$, então M é isométrica a $S_n(\delta)$.

PROVA: Sejam p e q pontos de M tais que $d(p,q) = \Pi/\sqrt{\delta}$; consideremos $\gamma: \left[-\Pi/2\sqrt{\delta}, \Pi/2\sqrt{\delta}\right] \to M$ uma geodésica tal que $\gamma(-\Pi/2\sqrt{\delta}) = p$, $\gamma(\Pi/2\sqrt{\delta}) = q$, $\gamma(0) = r \in M$.

Tomemos $X_0 \in T_r(M)$ tal que $\|X_0\|=1$, $\langle X_0, \gamma'(0)\rangle = 0$, e chamemos X o campo de vetores ao longo de γ obtido pelo transporte paralelo de X_0 sobre γ.

Definamos uma família a um parâmetro de geodésicas de M, $\lambda(t,s)$ tal que:

a) $-\Pi/2\sqrt{\delta} \leq s \leq \Pi/2\sqrt{\delta}$

b) $\lambda(0,s) = \lambda(s)$, para todo $s \in \left[-\Pi/2\sqrt{\delta}, \Pi/2\sqrt{\delta}\right]$

c) para cada $\bar{s}$, $\lambda(t,\bar{s})$ é geodésica de M

d) $\frac{\partial\lambda}{\partial t}(0,s) = X(s)$, para todo $s \in \left[-\Pi/2\sqrt{\delta}, \Pi/2\sqrt{\delta}\right]$

e) $0\leq t\leq f_k(s)$, sendo $f_k(s) = \frac{k\Pi}{2}$ sen $\sqrt{\delta}(s+\frac{\Pi}{2\sqrt{\delta}})$, $0\leq k\leq 1$.

Dados dois pontos $\hat{p}$, $\hat{q}$ em $S(\delta)$ tais que $\hat{d}(\hat{p},\hat{q}) = \Pi/\sqrt{\delta}$, seja $\hat{\gamma}: \left[-\Pi/2\sqrt{\delta}, \Pi/2\sqrt{\delta}\right] \to S(\delta)$ com $\hat{\gamma}:(-\Pi/2\sqrt{\delta}) = \hat{p}$, $\hat{\gamma}:(\Pi/2\sqrt{\delta}) = \hat{q}$, $\hat{r} = \hat{\gamma}(0)$, $\hat{X}_0 \in T_{\hat{r}}S(\delta)$, satisfazendo às mesmas hipóteses que X_0 (acima), $\hat{X}$: transporte paralelo de $\hat{X}_0$ sobre $\hat{\gamma}$.

Definimos uma família de geodésicas em $S(\delta)$, $\hat{\lambda}(t,s)$ satisfazendo condições análogas a a), b), c), d) e e) acima.

Se $c_{k,X}(s) = \lambda(f_k(s),s)$, $\hat{c}_{k,\hat{X}}(s) = \hat{\lambda}(f_k(s),s)$, então, pelo corolário 3.1.6, tem-se:

$$L(c_{k,X}) \leq L(\hat{c}_{k,\hat{X}}).$$

Conforme escolhidos as funções $f_k(s)$, observamos que as curvas $\hat{c}_{k,\hat{X}}(s)$ são geodésicas minimais em $S(\delta)$ de $\hat{p}$ a $\hat{q}$, portanto,

$$L(\hat{c}_{k,\hat{X}}) = \Pi/\sqrt{\delta}.$$

Além disso, $c_{k,X}(-\Pi/2\sqrt{\delta}) = p$, $c_{k,X}(\Pi/2\sqrt{\delta}) = q$, logo, $\Pi/\sqrt{\delta} = L(\hat{c}_{k,\hat{X}}) \geq L(c_{k,X}) \geq d(p,q) = \Pi/\sqrt{\delta}$, ou seja,

$$L(c_{k,X}) = \Pi/\sqrt{\delta} = L(\hat{c}_{k,\hat{X}}).$$

Utilizando novamente o corolário 3.1.6, obtemos que a variedade bi-dimensional N_X formada pela união das geodésicas da família $\lambda(t,s)$ é totalmente geodésica e com curvatura constante e igual a δ.

O próximo passo é mostrar que os campos de Jacobi ao longo de qualquer geodésica minimal de p e q são os mesmos que em $S_n(\delta)$. Daqui em diante, consideramos $\gamma: [0,\Pi/\sqrt{\delta}]$ geodésica minimal de p a q parametrizada por comprimento de arco. Seja X um campo ortogonal a γ, paralelo ao longo de γ, N_X a superfície acima.

Se $Z(s) = a(s)X(s)$, Z é campo de Jacobi ao longo de γ se e somente se:

$$a''(s) = -\delta a(s) \quad (1), \text{ pois:}$$

$$\frac{DZ}{ds} = a'(s)X(s), \frac{D^2Z}{ds^2} = a''(s)X(s), \text{ e}$$

$$K(\dot\gamma, Z, \dot\gamma, Z) = \langle R(\dot\gamma, Z)Z, \dot\gamma\rangle = -\langle R(\dot\gamma, Z)\dot\gamma, Z\rangle = \delta$$

Considerando $\{X_i(s)\}_{1\le i\le n-1}$ referencial ortonormal ao longo de γ, com $\langle X_i(s), \gamma'(s)\rangle = 0$, para todo $s\in[0, \Pi/\sqrt{\delta}]$, $1\le i\le n$, e sendo

$$Z_i(s) = (\operatorname{sen}\sqrt{\delta}s)X_i(s),$$

usando (1) verificamos que $\{Z_i(s)\}_{1\le i\le n-1}$ são campos de Jacobi ao longo de γ.

Por outro lado, $Z_i(0) = Z_i(\Pi/\sqrt{\delta})$, donde $q = (\Pi/\sqrt{\delta})$ é conjugado a $p = \gamma(0)$ ao longo de γ; além disso, é o primeiro ponto conjugado a p ao longo de γ, pois γ é geodésica minimal de p a q.

$\{X_1(s), \ldots, X_{n-1}(s)\}$ são linearmente idependentes, logo $\{Z_1(s), \ldots, Z_{n-1}(s)\}$ são independentes, ou seja $\{Z_1(s), \ldots, Z_{n-1}(s)\}$ é uma base dos campos de Jacobi ao longo de γ, ortogonais a γ, que se anulam a p.

Como todos esses campos se anulam em $\Pi/\sqrt{\delta}$, então a multiplicidade de q como ponto conjugado a p é n-1, ou seja, a dimensão do kernel da $(\exp_p)_*$ é n-1.

Além disso, o mesmo raciocínio é verdadeiro para cada da curva $c_{k,X}$ considerada anteriormente, pois cada $c_{k,X}$ é uma geodésica minimal de p a q; dessa forma, mostramos que toda geodésica que parte de p tem um ponto conjugado a distância

$\Pi/\sqrt{\delta}$, e se considerarmos

$C = \{X \in T_pM / |X| = \Pi/\sqrt{\delta}\}$, então $(d \exp_p)\big|_C$ é singular.

Como C é conexo,

$(\exp_p)\big|_C$ é constante

Daí, toda geodésica que parte de p atinge q no instante $\Pi/\sqrt{\delta}$, logo, toda geodésica que parte de p é minimal. Se $B = \{X \in T_pM / |X| < \Pi/\sqrt{\delta}\}$ então $\exp_p\big|_B : B \to \exp_p B = M - \{q\}$ é um difeomorfismo, pois dado $r \in \exp_p B$ existe uma única geodésica minimal de p a r.

Seja $\hat{p} \in S_n(\delta)$, $\hat{B} = \{X \in T_{\hat{p}}S_n(\delta) / |X| < \Pi/\sqrt{\delta}\}$; a aplicação $\exp_{\hat{p}}$ é um difeomorfismo de $\hat{B}$ sobre $\exp_p \hat{B} = S_n(\delta) - \{-\hat{p}\}$, onde $-\hat{p}$ é o antípoda de $\hat{p}$.

Consideremos $F: T_{\hat{p}}S_n(\delta) \to T_pM$ tal que $F(\hat{X}_i) = X_i$, onde $\{\hat{X}_i\}_{1 \le i \le n}$, $\{X_i\}_{1 \le i \le n}$ são bases ortonormais de $T_{\hat{p}}S_n(\delta)$ e T_pM respectivamente.

Se

$E = (\exp_{\hat{p}})^{-1}: S_n(\delta) - \{-\hat{p}\} \to \hat{B}$, seja

$f: S_n(\delta) \to M$ dada por

$f(\hat{r}) = (\exp_p \circ F \circ E)(\hat{r})$ se $\hat{r} \neq -\hat{p}$ $\quad f(-\hat{p}) = q$.

Então, para $\hat{r} \neq -\hat{p}$, f é diferenciável e uma isometria. Podemos definir $f_*(-\hat{p})$ por meio dos vetores tangentes às geodésicas que chegam a $-\hat{p}$.

Como as aplicações envolvidas são inversíveis, com inversa diferenciável, e isometrias, teremos as variedades isométricas. □

IV - O TEOREMA DE TOPONOGOV

O objetivo é mostrar, usando os resultados anteriores, o teorema devido à Toponogov:

TEOREMA: Seja M^m uma variedade riemanniana completa cuja curvatura seccional satisfaz $\delta \leq K_p(\Pi_p) \leq 1$, para todo ponto $p \in M$ e todo subespaço bi-dimensional $\Pi_p \subset T_pM$.

Sejam p, q e r pontos de M; γ: $[0,d(p,q)] \longrightarrow M$ e γ: $[0,d(p,r)] \longrightarrow M$ geodésicas minimais de p a q e p a r respectivamente.

Em $S(\delta)$, consideremos $\hat{p}$, $\hat{q}$, $\hat{r}$ tais que $\hat{d}(\hat{p},\hat{q}) = d(p,q)$, $\hat{d}(\hat{p},\hat{r}) = d(p,r)$ e geodésicas minimais $\hat{\gamma}$: $[0,\hat{d}(\hat{p},\hat{q})] \to S(\delta)$, $\hat{\gamma}$: $[0,\hat{d}(\hat{p},\hat{r})] \to S(\delta)$ de $\hat{p}$ a $\hat{q}$ e $\hat{p}$ a $\hat{r}$ respectivamente, com

$$\langle \hat{\gamma}'(0), \hat{\lambda}'(0) \rangle = \langle \gamma'(0), \lambda'(0) \rangle$$

Nessas condições,

$$d(q,r) \leq \hat{d}(\hat{p},\hat{r}).$$

Observa-se que a hipótese $\delta \leq K_p(\Pi p) \leq 1$ não é restritiva; ela foi assumida apenas porque sempre estaremos trabalhando em subconjuntos compactos de M. Usamos em todo o parágrafo a notação $\hat{d}$ para a distância em $S(\delta)$.

Para provar o teorema de Toponogov, utilizando basi

camente os teoremas de comparação de Rauch, em primeiro lugar assumimos $d(M) = \Pi/\sqrt{\delta}$; então, M será isométrica a $S_n(\delta)$, pelo teorema 3.2.2 e verifica-se $d(q,r) = \hat{d}(\hat{q},\hat{r})$.

Se $d(M) < \Pi/\sqrt{\delta}$, mostramos inicialmente que o teorema de Toponogov é verdadeiro para triângulos em que $d(p,q) < \Pi/2$, $d(p,r) < \Pi/2$; a prova será consequência imediata do teorema 3.1.1.

A seguir verificamos que o teorema vale para triângulos obtusângulos tais que $d(p,r)$ é pequena em comparação a $d(p,q)$, sendo que esse resultado será consequência do teorema 3.1.2 e da última afirmação.

Usando os últimos resultados já obtidos, será possível, então mostrar o teorema para triângulos em que $d(p,r)$ seja pequena em comparação a $d(p,q)$; finalmente, temos condições de provar a forma mais geral, para triângulos quaisquer, considerado, para cada triângulo dado uma sequência de triângulos aos quais se apliquem os resultados anteriores.

As diversas etapas da demonstração serão desenvolvidas pelos lemas a seguir, onde sempre usaremos as notações do enunciado do teorema de Toponogov.

LEMA 1: No círculo unitário contido no plano tangente a $S(\delta)$ em $\hat{p}$ existe um único segmento de arco minimal ligando $\hat{\gamma}'(0)$ a $\hat{\lambda}'(0)$ se $\hat{\gamma}'(0) \neq -\hat{\lambda}'(0)$ e dois se $\hat{\gamma}'(0) = -\hat{\lambda}'(0)$; chamemos $\hat{w}(t)$ esse arco (ou um deles).

Então, o teorema de Toponogov é verdadeiro com a se

guinte condição adicional:

Existe um segmento de geodésica minimal de $S(\delta)$, $\hat{\phi}: [0,\hat{d}(\hat{q},\hat{p})] \to S(\delta)$ tal que toda geodésica de $S(\delta)$ com origem $\hat{p}$ e vetor unitário pertencente a $\hat{w}$ encontra $\hat{\phi}$ à distância $\leq \Pi$ (em particular, essa condição é sempre satisfeita se $d(p,q) \leq \Pi/2$, $d(p,r) \leq \Pi/2$.

PROVA: Em primeiro lugar, observamos que, nas condições da hipótese, o segmento de geodésica $\hat{\phi}$ de $\hat{q}$ e $\hat{r}$ pode ser escrito como:

$$\hat{\phi}(s) = \exp_{\hat{p}}(f(s)\hat{w}(s)),\ 0 \leq s \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{r})$$

Sabemos que $\langle \gamma'(0), \lambda'(0) \rangle = \langle \hat{\gamma}'(0), \hat{\lambda}'(0) \rangle$; seja $i: T_{\hat{p}}S(\delta) \to T_pM$ uma isometria tal que:

$$i(\hat{\gamma}'(0)) = \gamma'(0)$$

$$i(\hat{\lambda}'(0)) = \lambda'(0), \text{ e seja}$$

$$w(s) = i(\hat{w}(s)).$$

Chamemos $\phi(s) = \exp_p(f(s)w(s))$, $0 \leq s \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{r})$; temos: $\phi(0) = q$, $\phi(\hat{d}(\hat{q},\hat{r})) = r$.

Para cada $\bar{s}$, ao longo da geodésica

$u(t) = \exp_p(tf(\bar{s})w(\bar{s}))$, $0 \leq t \leq 1$, não existem pontos conjugados a p, pois $f(\bar{s}) \leq \Pi$, e a distância entre dois pontos conjugados, em M satisfaz

$$\Pi \leq d \leq \Pi/\sqrt{\delta} \qquad (\delta \leq K_p(\Pi_p) \leq 1)$$

Podemos então utilizar o teorema 3.1.1, e obtemos:

$L(\phi) \leq L(\tilde{\phi})$; daí,

$$d(q,r) \leq L(\phi) \leq L(\tilde{\phi}) = \hat{d}(\hat{q},\hat{r}). \qquad \square$$

Dados $\hat{p}$, $\hat{q}$ pontos em $S(\delta)$, $\hat{\gamma}$ o segmento de geodésica minimal de $\hat{p}$ e $\hat{q}$, denotaremos $S(\delta)/2$ o conjunto dos pontos de $S(\delta)$ que estão à direita da geodésica maximal que cobre $\hat{\gamma}$, incluindo os pontos dessa geodésica. Com essa notação, temos:

LEMA 2: Sejam $\hat{p}$, $\hat{q}$ pontos em $S(\delta)$, $\hat{\gamma}$ o segmento de geodésica minimal de $\hat{p}$ a $\hat{q}$ (se $\delta>0$, supondo $\hat{d}(\hat{p},\hat{q})<\pi/\sqrt{\delta}$).

Chamemos

$\hat{\Sigma} = \{\hat{s}\in S(\delta)/2$ tais que $\hat{d}(\hat{p},\hat{s}) = \alpha\}$ sendo $\delta < \pi/\sqrt{\delta}$ se $\delta>0$ (ou seja, $\hat{\Sigma}$ é o semi-círculo de $S(\delta)/2$ de centro $\hat{p}$ e raio α); dada $\hat{\sigma}: [0,\pi] \to \hat{\Sigma}$ a parametrização de $\hat{\Sigma}$ pelo ângulo, em $\hat{p}$, entre $\hat{\gamma}$ e a única geodésica minimal de $\hat{p}$ a $\hat{\sigma}(t)$, então a função

$f(t) = \hat{d}(\hat{q}, \hat{\sigma}(t))$ é estritamente crescente.

PROVA: Sejam $\hat{s}_1$ e $\hat{s}_2$ os pontos de intersecção de $\hat{\Sigma}$ com $\hat{\Gamma}$, geodésica maximal de $S(\delta)$ que cobre $\hat{\gamma}$, ou seja, $\hat{s}_1 = \hat{\sigma}(0)$, $\hat{s}_2 = \hat{\sigma}(\pi)$.

Temos então:

(*) $\hat{d}(\hat{q},\hat{s}_1) \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{s}_2)$, o que se verifica facilmente olhando para $\alpha<\hat{d}(\hat{p},\hat{q})$, $\alpha=\hat{d}(\hat{p},\hat{q})$, $\alpha>\hat{d}(\hat{p},\hat{q})$.

Admitamos que para cada $t\in[0,\pi]$ existe uma única geodésica minimal $\hat{\phi}_t(s)$ de $\hat{q}$ a $\hat{\sigma}(t)$; podemos então escrever:
$\hat{\phi}_t(s) = \exp_{\hat{q}}(s\hat{\theta}(t))$, $0\leq s\leq 1$ e $\hat{\theta}(t)\in T_{\hat{q}}S(\delta)$ para cada $t\in[0,\pi]$.

Além disso,

$$\hat{d}(\hat{q},\hat{\sigma}(t)) = L(\hat{\phi}_t(s)) = \langle\hat{\theta}(t),\hat{\theta}(t)\rangle^{1/2}$$

Sendo $f(t) = \hat{d}(\hat{q},\hat{\sigma}(t)) = \langle\hat{\theta}(t),\hat{\theta}(t)\rangle^{1/2}$, então f diferenciável em $]0,\Pi[$ e $f(0) < f(\Pi)$, por (*). Se f não fosse estritamente crescente, então existiria $t_0 \in]0,\Pi[$ tal que $f'(t_0) = 0$, ou seja,

$$f'(t_0) = \langle\theta(t_0),\theta(t_0)\rangle^{-1/2}\langle\theta'(t_0)\theta'(t_0)\rangle^{1/2} = 0,$$

e portanto,

$$\langle\theta(t_0),\theta'(t_0)\rangle = 0, \text{ o que resulta}$$

$\hat{\phi}_{t_0}$ ortogonal a $\hat{\Sigma}$. Daí, a união de $\hat{\phi}_{t_0}$ com o segmento de geodésica minimal de $\hat{p}$ a $\hat{\sigma}(t_0)$ seria uma geodésica de $\hat{p}$ a $\hat{q}$ distinta de $\hat{\gamma}$, o que acarretaria $\hat{p}$ e $\hat{q}$ antípodas, o que é um absurdo.

A hipótese de existência de uma única geodésica minimal de $\hat{q}$ a $\hat{\sigma}(t)$ só deixa de ser verdadeira se $\hat{q}$ e $\hat{s}_2$ são antípodas; nesse caso, $\hat{s}_1 = \hat{q}$, ou seja, $\hat{\Sigma}$ é o círculo máximo de $\hat{q}$ a $\hat{s}_2$, e tem-se o resultado. □

LEMA 3: Seja K um subconjunto compacto de M. Então, existe um número real η_k com a seguinte propriedade:

Se p, q e r são pontos distintos em K tais que $d(p,q) = d(p,r) < \eta_k$, então, se

$\phi: [0,d(p,q)] \to K$ e

$\psi: [0,d(p,r)] \to K$ são geodésicas minimais de q a p e q a r respectivamente, tem-se:

$$\langle\phi'(0),\psi'(0)\rangle > 0.$$

PROVA: Como foi observado após a proposição 1.5.3, existe, para cada $p \in M$ um número real $\alpha_p > 0$ tal que $d(p,s) \geq \alpha_p$ para todo s pertencente ao cut-locus de p.

Seja $\alpha = \inf_{p \in K} \{\alpha_p\}$, como K é compacto, temos $\alpha > 0$, tomamos:

$$\eta_k = \inf\{\alpha/2, \Pi/2\}; \text{ então, } \eta_k > 0.$$

Mostremos que η_k satisfaz às condições do lema.

Dados p, q, r, ϕ, ψ em M, tomemos $\tilde{q} \in S_n(1)$ e $i: T_pM \to T_{\tilde{q}}S_n(1)$ uma isometria; sejam $\tilde{\phi}$, $\tilde{\psi}$ geodésicas em $S_n(1)$ tais que

$$\tilde{\phi}(0) = \tilde{\psi}(0) = \tilde{q}$$

$$\tilde{\phi}'(0) = i(\phi(0), \tilde{\psi}'(0) = i(\psi'(0)), \text{ e}$$

$$\tilde{p} = \tilde{\phi}(d(p,q)), \ \tilde{r} = \tilde{\psi}(d(q,r)).$$

Seja

$\sigma:[0,d(p,r)] \to M$ geodésica minimal de $p = \sigma(0)$ a $r = \sigma(d(p,r))$.

Como $d(p,q) = d(p,r) < \eta_k$, tem-se $d(q,\sigma(t)) \leq d(q,p)+d(p,\sigma(t))$; do fato de σ ser minimal, decorre:

$$d(q,\sigma(t)) \leq d(q,p)+d(p,r) < 2\eta_k \leq \alpha_q.$$

Tem-se então: para cada t, $0 \leq t \leq d(p,r)$, existe uma única geodésica minimal $\phi_t(s)$ de q a $\sigma(t)$, pois α_q pode ser considerado o raio de uma bola em $\exp_p$ é um difeomorfismo.

As geodésicas $\Phi_t(s)$ são tais que:

$$\Phi_0(s) = \phi(s), \quad 0 \leq s \leq d(p,q),$$

$$\Phi_{d(p,r)}(s) = \psi(s), \quad 0 \leq s \leq d(q,r).$$

Como $d(q,\sigma(t)) < 2\eta_k < \Pi$, considerando

$$\sigma(t) = \Phi_t(d(q,\sigma(t))), \text{ e } \tilde{\sigma}(t) = \tilde{\Phi}_t(d(q,\sigma(t))),$$

com $\tilde{\Phi}_t$ a família de geodésicas em $S_n(1)$ tal que

$$\tilde{\Phi}_t'(0) = i(\Phi_t'(0)),$$

estamos em condições de aplicar o teorema 3.1.1, e:

$$d(p,q) = d(p,r) = L(\sigma) \geq L(\tilde{\sigma}) \geq \tilde{d}(\tilde{p},\tilde{r})$$

Logo, em $S_n(1)$,

$$\tilde{d}(\tilde{p},\tilde{r}) \leq \tilde{d}(\tilde{p},\tilde{q}) < \Pi/2, \text{ pois } \tilde{d}(\tilde{p},\tilde{q}) = d(p,q) < \Pi/2.$$

Olhando para $S_n(1)$, verificamos que

$$\langle \tilde{\phi}'(0), \tilde{\psi}'(0) \rangle > 0, \text{ e portanto,}$$

$$\langle \phi'(0), \psi'(0) \rangle > 0. \qquad \square$$

Dados $\hat{p}$, $\hat{q}$ em $S(\delta)$, sendo $m = \hat{d}(\hat{p},\hat{q})$, suponhamos $m < \Pi/\sqrt{\delta}$ se $\delta > 0$.

Sendo $\hat{\gamma}: [0, \hat{d}(\hat{p},\hat{q})] \to S(\delta)$ geodésica minimal de $\hat{p}$ e $\hat{q}$, chamemos $\hat{\Gamma}$ o círculo máximo de $S(\delta)$ que sobre $\hat{\gamma}$; temos então:

LEMA 4: Existe um número real estritamente positivo $r(m)$ com a seguinte propriedade:

para todo $\hat{r}$ tal que $\hat{d}(\hat{p},\hat{r}) \leq r(m)$, existe uma única

geodésica minimal $\hat{\lambda}$ de $\hat{q}$ a $\hat{r}$ que encontra $\hat{\gamma}$ em $\hat{q}$ com ângulo menor que $\Pi/2$ e tem a propriedade que todo ponto $\hat{z}$,

$$\hat{z}\in\{\hat{\lambda}(s),\ 0\le s\le \hat{d}(\hat{q},\hat{r})\} \text{ satisfaz } \hat{d}(\hat{z},\hat{\Gamma}) \le \Pi/2$$

(observamos que $\hat{d}(\hat{z},\hat{\Gamma})$ é o ínfimo das distâncias de $\hat{z}$ aos pontos de $\hat{\Gamma}$).

PROVA: Inicialmente supomos $\delta>0$; podemos encontrar r(m) da seguinte forma:

Tomamos $\hat{\theta}$ uma geodésica de $S(\delta)/2$ com $\hat{\theta}(0) = \hat{q}$, de forma que seus pontos distem de $\hat{\Gamma}$ no máximo $\Pi/2$; para isso, basta tomar as geodésicas em $S(\delta)/2$ com origem $\hat{q}$, e escolher para $\hat{\theta}$ aquela cujo ponto médio entre $\hat{q}$ e $-\hat{q}$ diste exatamente $\Pi/2$ do ponto médio $\hat{s}$ do segmento de geodésica $\hat{\Gamma}\big|_{[\hat{q},-\hat{q}]}$.

Consideremos então o semi-círculo $\hat{\Sigma}$ em $S(\delta)/2$ com centro $\hat{p}$ e tangente a $\hat{\theta}$; seja r(m) o raio desse círculo; r(m) satisfaz trivialmente às condições requeridas.

Se $\delta\le 0$, seja $\hat{w}$ um ponto em $\hat{\Gamma}$ tal que $\hat{p}$ está entre $\hat{q}$ e $\hat{w}$, e $\hat{d}(\hat{p},\hat{w}) = k$, $k>0$ constante.

Seja $\hat{v}$ um ponto em $S(\delta)/2$ tal que $\hat{v}$ está sobre a perpendicular a $\hat{\Gamma}$ em $\hat{w}$, e $\hat{d}(\hat{v},\hat{w}) = \Pi/2$. Consideremos $\hat{\theta}$ a geodésica minimal de $\hat{q}$ a $\hat{v}$, e novamente chamamos r(m) o raio do círculo em $S(\delta)/2$ com centro $\hat{p}$ e tangente a $\hat{\theta}$; r(m) satisfaz à propriedade enunciada. □

Da demonstração do lema 4 pode-se concluir:

(A) Em $S(\delta)$ ($\delta\le 1$) se $\hat{d}(\hat{z},\hat{\Gamma}) < \Pi/2$, então existe uma única geo

désica minimal partindo de $\hat{z}$ e ortogonal a $\hat{\Gamma}$:

existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\hat{d}(\hat{z},\hat{\Gamma}(t_0))$; para t próximo de t_0, a função

$f(t) = \hat{d}(\hat{z},\hat{\Gamma}(t))$ é diferenciável ($d(\hat{z},\hat{\Gamma}) < \Pi/2$); como t_0 é um ponto de mínimo, $f'(t_0) = 0$ e um raciocínio análogo ao do lema 2 mostra a existência da geodésica nas condições acima.

(B) A função r(m) é contínua.

Basta olhar como foi definida r(m), por processos que variam continuamente com $\hat{d}(\hat{p},\hat{q}) = m$.

(C) Da observação (B) segue que para cada m, $0<m<\Pi/\sqrt{\delta}$ existe um número real s(m), estritamente positivo, que varia continuamente com m, tal que

$$x < s(m) \Rightarrow 2x < r(m-x)$$

Consideremos a função $F(m,x) = r(m-x)-2x$; F é contínua em $C = \{(m,x)/0\leq x\leq m\}$ e $A = \{(m,x)/F(m,x)>0\}$ é um aberto em C que contém $\{(m,x)/x=0\}$ e uma vizinhança aberta V desse conjunto.

Podemos definir $x=s(m)$ uma função contínua e positiva tal que

$$(m,s(m)) \in V \text{ e } s(m)\leq r(m), \text{ para todo } m.$$

(D) Da observação (C) tem-se que se k, d são tais que $0<k\leq d<\Pi\sqrt{\delta}$ (se $\delta>0$), então, existe $\varepsilon(k,d)$ tal que para todo m satisfazendo $k\leq m\leq d$,

$$s(m) \geq \varepsilon(k,d)$$

Basta tomar $\varepsilon(k,d) = \inf_{k\leq m\leq d}\{s(m)\}$, pois $s(m)$ é contínua e $[k,d]$ é compacto.

LEMA 5: O teorema de Toponogov é verdadeiro com as seguintes hipóteses adicionais:

a) $d(p,q) < \Pi/\sqrt{\delta}$

b) $\langle\gamma'(0),\lambda'(0)\rangle < 0$

c) $d(p,r) < r(d(p,q))$, sendo $r(d(p,q))$ a função do lema 4.

PROVA: Seja $\hat{w}: [0,\hat{d}(\hat{r},\hat{q})] \to S(\delta)$ a única geodésica minimal de $\hat{r}$ a $\hat{q}$.

Como $d(p,r) = \hat{d}(\hat{p},\hat{r}) < r(d(p,q)) = r(\hat{d}(\hat{p},\hat{q}))$. então $d(\hat{w}(t),\hat{\Gamma}) < \Pi/2$, $\forall\ t\in[0,\hat{d}(\hat{r},\hat{g})]$ pelo lema 4; usando a observação (A), temos que de cada ponto $\hat{w}(t)$, existe uma única geodésica partindo de $\hat{w}(t)$ e ortogonal a $\hat{\Gamma}$, com comprimento menor que $\Pi/2$. Seja $\hat{\phi}(t,s)$ essa geodésica, e $\hat{\psi}(t)$ sua intersecção com $\hat{\Gamma}$. Tem-se então uma família de geodésicas $\hat{\phi}(t,s)$, $t\in[t_0,\hat{d}(\hat{r},\hat{q})]$, $0\leq s\leq\hat{d}(\hat{w}(t),\hat{\psi}(t))$.

Sendo o ângulo oposto a $\hat{w}$ obtuso (por hipótese), temos $\hat{d}(\hat{q},\hat{r}) > \hat{d}(\hat{p},\hat{q})$; como o ângulo entre $\hat{w}$ e $\hat{\gamma}$ em $\hat{q}$ é agudo, existirá $t_0\in[0,\hat{d}(\hat{r},\hat{q})]$ tal que $\hat{\psi}(t_0) = \hat{p}$, e para todo $t \geq t_0$, $\hat{\psi}(t)$ será um ponto do segmento de geodésica $\hat{\gamma}$.

Chamemos $\hat{w}_1$ (respec. $\hat{w}_2$) a restrição de $\hat{w}$ ao intervalo $[0,t_0]$(respec. $[t_0,\hat{d}(\hat{r},\hat{q})]$), e $\hat{s} = \hat{w}(t_0)$.

Podemos construir em M uma família a um parâmetro de geodésicas $\phi(t,s)$, $t_0 \le t \le \hat{d}(\hat{r},\hat{q})$ satisfazendo às condições do teorema 3.1.2 (Rauch), da seguinte forma: consideremos $Y(t_0) \in T_pM$ um vetor do subespaço bi-dimensional de T_pM gerado por $\lambda'(0)$ e $\gamma'(0)$, e tal que

$$\langle \hat{\lambda}'(0), \frac{\partial \phi}{\partial s}(t_0,0) \rangle = \langle \lambda'(0), Y(t_0) \rangle \text{ e}$$

$$\langle \gamma'(0), Y(t_0) \rangle = 0$$

Seja $Y(t)$, $t \in [t_0, \hat{d}(\hat{r},\hat{q})]$ o campo de vetores ao longo de $\psi(t)$ obtido pelo transporte paralelo de $Y(t_0)$ ao longo de $\psi(t)$. Definimos então $\phi(\bar{t},s)$ para cada $\bar{t}$ como a geodésica que parte de $\psi(\bar{t})$ com vetor tangente $Y(\bar{t})$, e com o mesmo comprimento de $\hat{\phi}(\bar{t},s)$, ou seja $\hat{d}(\hat{\psi}(\bar{t}),\hat{w}(\bar{t}))$.
Seja $s = \phi(t_0, \hat{d}(\hat{w}(t_0),\hat{p}))$, $w_2(t) = \phi(t, \hat{d}(\hat{\psi}(t),\hat{w}(t))$.

Pelo teorema de Rauch, temos:

$$d(q,s) \le \ell(w_2) \le \ell(\hat{w}_2) = \hat{d}(\hat{s},\hat{q}).$$

Aos triângulos geodésicos: p, r, s, λ, $\phi(t_0,s)$; $\hat{p},\hat{r}$, $\hat{s}$, $\hat{\lambda}$, $\hat{\phi}(t_0,s)$ aplica-se o lema 1, e:

$$d(r,s) \le \hat{d}(\hat{r},\hat{s})$$

Daí,

$$d(r,q) \le d(r,s)+d(s,q) \le \hat{d}(\hat{r},\hat{s})+\hat{d}(\hat{s},\hat{q}) = \hat{d}(\hat{r},\hat{q}). \quad \square$$

LEMA 6 - Sejam p,q pontos de M tais que se

$\delta > 0$, $d(p,q) < \Pi/\sqrt{\delta}$.

Seja $K = \{x \in V / d(x,p) \le r(d(p,q))\}$ e η_k o número associado a K dado pelo lema 3.

Então, o teorema de Toponogov é verdadeiro sob as seguintes condições: r é tal que

$$d(p,r) < \inf\{\eta_k,\ s(d(p,q))\}(s(d(p,q))$$

a função da observação (C) acima.

PROVA: Definimos um ponto $s \in M$ por:

i) $s \in \{\gamma(t),\ 0 \leq t \leq d(p,q)\}$

ii) $d(p,s) = d(p,r)$.

Então, p, r e s pertencem a K pois:

$$d(p,r) = d(p,s) < s(d(p,q)) \leq r(d(p,q))$$

e podemos aplicar o lema 3 se consideramos:
p, s, r, ϕ: $[0,d(p,s)] \to M$ dada por $\phi(t) = \gamma(d(p,s)-t)$ e
ψ: $[0,d(s,r)] \to M$ geodésica minimal de s a r.

Temos então:

(1) $\quad <\phi'(0),\psi'(0)> = -<\gamma'(d(p,s)),\psi'(0)> > 0.$

Da definição de s(m), na observação (C) acima, tem-se:

(2) $d(s,r) \leq d(s,p)+d(p,r) = 2d(p,s) < r(d(p,q)-d(p,s)) = r(d(s,q))$.

(1) e (2) mostram que s, q, r, γ_1, ψ(γ_1: restrição de γ de s a q) satisfazem às condições do lema 5, sendo necessário para utilizá-lo, definir em $S(\delta)$ o triângulo geodésico correspondente: basta tomar $\hat{s} \in \hat{\gamma}$ tal que $\hat{d}(\hat{p},\hat{r}) = \hat{d}(\hat{p},\hat{s})$; $\hat{\gamma}_1$ a restrição de γ de $\hat{s}$ a $\hat{q}$; $\hat{\psi} \in S(\delta)/2$ geodésica com origem $\hat{s}$ tal que

$$<\hat{\psi}'(0),\hat{\gamma}((d(p,s))> = <\psi'(0),\gamma'(d(p,s))>,$$

e $\hat{r}_1$ tal que $\hat{r}_1 = \tilde{\psi}(d(s,r))$.

Então, pela lema 5,

(3) $$d(q,r) \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{r}_1)$$

Precisamos agora comparar $\hat{d}(\hat{q},\hat{r})$ e $\hat{d}(\hat{q},\hat{r}_1)$. Para isso definimos $\hat{r}_2$ e $S(\delta)/2$ por:

$$\hat{d}(\hat{p},\hat{r}_2) = d(p,r) = \hat{d}(\hat{p},\hat{r}), \text{ e}$$
$$\hat{d}(\hat{r}_2,\hat{s}) = d(r,s) = \hat{d}(\hat{r}_1,\hat{s}).$$

Os triângulos p, s, r, λ, γ_2 (sendo γ_2 restrição de γ de p a s), pode-se se aplicar o lema 1, pois, $d(p,s)<\eta_k<\Pi/2$ e $d(p,r)<\eta_k<\Pi/2$. Tem-se então:

(4) $d(r,s) \leq d(\hat{r},\hat{s})$, logo $\hat{d}(\hat{r}_2,\hat{s}) \leq \hat{d}(\hat{r},\hat{s})$

Chamemos α(respc. β) o ângulo em $\hat{p}$ entre $\hat{\gamma}_2$ e $\hat{\lambda}$ (respec. entre $\hat{\gamma}$ e a geodésica minimal de $\hat{p}$ a $\hat{r}_2$); aplicando o lema 2 ao semi-círculo de centro $\hat{p}$ e raio $\hat{d}(\hat{p},\hat{r})$ e o ponto $\hat{s}$; usando (4), conclui-se pelo lema 2, $\alpha \geq \beta$. Novamente aplicamos o lema 2 ao semi-círculo de centro $\hat{p}$ e raio $d(p,r)$ e o ponto $\hat{q}$; e segue: $\hat{d}(\hat{q},\hat{r}_2) \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{r})$ (5).

Seja γ(respec.δ) o ângulo em $\hat{s}$ entre $\hat{\phi}$ e a geodésica minimal de $\hat{s}$ a $\hat{r}_2$)respec. entre $\hat{\phi}$ e $\tilde{\psi}$). Aplicando o lema 1 aos triângulos s, p, r, ϕ, ψ e $\hat{s}$, $\hat{p}$, $\hat{r}_1$, $\hat{\phi}$, e $\tilde{\psi}$, temos:

$$d(p,r) \leq \hat{d}(\hat{p},\hat{r}_1), \text{ e da definição de } \hat{r}_2,$$
$$\hat{d}(\hat{\varphi},\hat{r}_2) \leq \hat{d}(\hat{p},\hat{r}_1).$$

Para o semi-círculo com centro $\hat{s}$ e raio $d(r,s)$ e o ponto $\hat{p}$, usando a última desigualdade e o lema 2, temos: $\gamma \leq \delta$. Ainda pe-

ma 2, aplicado agora para o semi-círculo de centro $\hat{s}$ e raio $d(r,s)$ e o ponto $\hat{q}$, tem-se $\hat{d}(\hat{q},\hat{r}_1) \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{r}_2)$ (6).

(3), (5) e (6) resultam:

$$d(q,r) \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{r}). \qquad \square$$

Prova do Teorema de Toponogov:

Sejam p, q e r três pontos de M.

Se diam (M) = $\Pi/\sqrt{\delta}$, então pelo teorema 3.2.2, M é isométrica a $S_n(\delta)$, e a igualdade é trivialmente verificada (ou seja $d(q,r) = \hat{d}(\hat{q},\hat{r})$).

Assumimos então, d = diam (M) < $\Pi/\sqrt{\delta}$. Seja

$$k = \inf_{z\in\Lambda}\{d(z,q)\} \ , \ \Lambda = \{\lambda(t),\ 0\leq t\leq d(p,r)\}$$

Se k=0, então $q\in\Lambda$, e o teorema é trivial; admitamos $0<k\leq d<\Pi/\sqrt{\delta}$. Tomemos $\varepsilon = \varepsilon(k,d) = \min_{k\leq m\leq d}\{s(m)\}$, ou seja $\varepsilon=\varepsilon(k,d)$ dado pela observação (C) anterior.

Para $z\in\Lambda$, consideremos

$$B_z = \{x\in V / d(x,a)\leq\varepsilon\} \text{ e } K = \bigcup_{z\in\Lambda} B_z$$

Como Λ é compacto, K é compacto; seja $\eta>0$ associado a K pelo lema 3.

Definimos $\xi = \min\{\varepsilon,\eta\}$.

Sobre Λ, escolhamos $p_0 = p, p_1, \ldots, p_m = r$ um número finito de pontos tais que

$d(p_i,p_{i+1}) < \xi$ para i=0,...,m-1, echamemos $\gamma_i : [0,d(q,p_i)]$ a geodésica minimal de p_i a q, $\lambda_i = \lambda\big|_{[p_i,p_{i+1}]}$, i = 0,...,m-1.

Observamos então que a escolha dos pontos p_i foi feita de forma que, para cada i, os i, os pontos p_i, q, p_{i+1} satisfazem às hipóteses do lema 6, pois:

$$d(p_i,p_{i+1}) < \xi = \min(\varepsilon,\eta) \leq \min(\eta,s(d(p_i,q))) \leq r(d(p_i,q)),$$

por $K \supset B_{p_i}$, $1 \leq i \leq m-1$.

Para provar o teorema, precisamos de triângulos, em $S(\delta)$ tais que o lema 6 se aplique; construiremos em $S(\delta)/2$, por indução, pontos $\hat{s}_i, \hat{r}_i$, $i=0,\ldots,m-1$ tais que

$$\hat{d}(\hat{q},\hat{s}_{i+1}) \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{s}_{i+1}) \text{ e}$$

$$\hat{d}(\hat{q},\hat{r}_{i+1}) \leq \hat{d}(\hat{q},s_i)$$

Mostraremos que $d(q,r) \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{s}_m)$ e fazendo $\hat{s}_0 = \hat{r}$, teremos

$$d(q,r) \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{s}_m) \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{s}_0) = \hat{d}(\hat{q},\hat{r}).$$

Sejam $\hat{p}$, $\hat{q}$, $\hat{r}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\lambda}$, como nas hipóteses do teorema; fazendo $\hat{p}_0 = \hat{t}_0 = \hat{p}$, $\hat{r}_0 = \hat{s}_0 = \hat{r}$, constituamos $\hat{r}_1$, $\hat{s}_1$. Seja $\hat{p}_1$ em $\hat{\Lambda}$ tal que $\hat{d}(\hat{p},\hat{p}_1) = d(p,p_1)$; consideramos então $\hat{t}_1$ em $S(\delta)/2$ tal que

$$\hat{d}(\hat{p},\hat{t}_1) = \hat{d}(\hat{p},\hat{p}_1) = d(p,p_1) \text{ e}$$

$$\hat{d}(\hat{q},\hat{t}_1) = d(q,p_1),$$

de forma que o triângulo $\hat{p}$, $\hat{q}$, $\hat{t}_1$ em $S(\delta)/2$ tem os mesmos comprimentos dos lados do triângulo p, q, p_1 em M.

Seja $\hat{\gamma}_1 : [0,\hat{d}(\hat{q},\hat{t}_1)] \to S(\delta)/2$ a única geodésica minimal de $\hat{q}$ a $\hat{t}_1$: a unicidade segue da escolha de $r(m)$, $d<\Pi/\sqrt{\delta}$.

Chamemos $\hat{\Phi}_1$: $[0,\hat{d}(\hat{p},\hat{t}_1)] \to S(\delta)$ a única geodésica minimal de $\hat{p}$ a $\hat{t}_1$, e seja $\hat{r}_1 \in S(\delta)$ tal que $\hat{r}_1$ está sobre o prolongamento de $\hat{\Phi}_1$, e $d(\hat{p},\hat{r}_1) = \hat{d}(\hat{p},\hat{r}) = d(p,r)$.

Denotando $S(\delta)/2_1$ ao semi-espaço em $S(\delta)$ em relação aos pontos $\hat{t}_1$, $\hat{q}$ e a geodésica minimal $\hat{\gamma}_1$ entre esses pontos, definimos $\hat{\psi}_1$ como a geodésica em $S(\delta)/2_1$ que, em $\hat{t}_1$, faz com $\hat{\gamma}_1$ um ângulo igual ao ângulo em p_1, entre as geodésicas γ_1 e λ_1.

Sobre $\hat{\psi}_1$, seja $\hat{s}_1$ tal que $\hat{d}(\hat{t}_1,\hat{s}_1) = \hat{d}(\hat{t}_1,\hat{r}_1) = \hat{d}(\hat{p}_1,\hat{r}) = d(p_1,r)$.

Continuamos o processo indutivamente: supondo definidos $\hat{t}_i$, $\hat{q}$, $\hat{\gamma}_i$, $\hat{\psi}_i$, e também $\hat{p}_i$, $\hat{r}_i$, $\hat{s}_i$ $\hat{\Phi}_i$, para $i=1,\ldots,m-1$, escolhemos $\hat{p}_{i+1}$ sobre $\hat{\psi}_i$ com a condição: $\hat{d}(\hat{t}_i,\hat{p}_{i+1}) = d(p_i,p_{i+1})$.

Daí, $\hat{t}_{i+1}$ será um ponto em $S(\delta)/2_i$ (semi-espaço em $S(\delta)$ relativo a $\hat{t}_i$, $\hat{q}$ e $\hat{\gamma}_i$), que satisfaz:

$$\hat{d}(\hat{t}_i,\hat{t}_{i+1}) = d(p_i,p_{i+1}) \text{ e}$$

$$\hat{d}(\hat{t}_{i+1},\hat{q}) = d(p_{i+1},p_i),$$ ou seja o triângulo $\hat{t}_i$, $\hat{t}_{i+1}$, $\hat{q}$ tem os lados com o mesmo comprimento dos lados do triângulo p_i, p_{i+1}, q em M.

A seguir, chamamos $\hat{\gamma}_{i+1}$ à única geodésica minimal de $\hat{q}$ a $\hat{t}_{i+1}$, definimos $\hat{\Phi}_{i+1}$ como a geodésica minimal que, com início em $\hat{t}_i$, passa por $\hat{t}_{i+1}$ e chamamos $\hat{r}_{i+1}$ o ponto $\hat{\Phi}_{i+1}$ tal que $d(\hat{t}_i,\hat{r}_{i+1}) = d(p_i,r)$. Denotamos $\hat{\psi}_{i+1}$ como a geodésica em $S(\delta)/2_i$ tal que, em $\hat{t}_{i+1}$ encontra $\hat{\gamma}_{i+1}$ com um ângulo igual ao ângulo, em p_{i+1}, entre γ_{i+1} e λ_{i+1}; seja $\hat{s}_{i+1}$ um ponto de

$\hat{\psi}_{i+1}$ tal que $\hat{d}(\hat{t}_{i+1},\hat{s}_{i+1}) = d(p_{i+1},r)$.

O próximo objetivo é mostrar que:

i) $\hat{d}(\hat{q},\hat{r}_{i+1}) \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{s}_i)$ e

ii) $\hat{d}(\hat{q},\hat{s}_{i+1}) \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{r}_{i+1})$

Para isso, em primeiro lugar, aplicamos o lema 6 ao triângulo p_i, q, p_{i+1}, γ_i, λ_{i+1} e o correspondente $\hat{t}_i$, $\hat{q}$, $\hat{p}_{i+1}$, $\hat{\gamma}_i$ e a restrição de $\hat{\psi}_i$ de $\hat{t}_i$ a $\hat{p}_{i+1}$. Temos:

$$d(q,p_{i+1}) \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{p}_{i+1}).$$

Como, por construção de $\hat{t}_{i+1}$, $d(q,p_{i+1}) = \hat{d}(\hat{q},\hat{t}_{i+1})$, então:

(1) $$\hat{d}(\hat{q},\hat{t}_{i+1}) \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{p}_{i+1})$$

Seja α_i (respec. β_i) o ângulo em t_i entre $\hat{\gamma}_i$ e $\hat{\psi}_i$ (respec. entre $\hat{\gamma}_i$ e $\hat{\phi}_{i+1}$); usando o lema 2 para o semi-círculo em $S(\delta)/2$ com centro $\hat{t}_i$ e raio $d(p_i,p_{i+1})$ e o ponto $\hat{q}$, tem-se, de (1),

$$\alpha_i \geq \beta_i$$

Novamente, pelo lema 2, mas aplicando ao semi-círculo com centro $\hat{t}_i$ e raio $d(p_i,r)$ e o ponto $\hat{q}$, tem-se

(i) $$\hat{d}(\hat{q},\hat{r}_{i+1}) \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{s}_i).$$

Para provar (ii), chamemos θ_i (respec. δ_i) o ângulo, em p_{i+1} (respec. $\hat{t}_{i+1}$) entre γ_{i+1} e $-\lambda_i$ (respec. $\hat{\gamma}_{i+1}$ e a restrição de $-\hat{\phi}_{i+1}$ de $\hat{t}_{i+1}$ a $\hat{t}_i$). Observamos que θ_i é igual, por construção, ao ângulo em $\hat{t}_{i+1}$ entre $\hat{\gamma}_{i+1}$ e $-\hat{\psi}_{i+1}$, sendo $-\hat{\psi}_{i+1}$ a geodésica que parte de $\hat{t}_{i+1}$, com direção oposta à de $\hat{\psi}_{i+1}$, e de compri-

mento $d(p_i,p_{i+1})$. Chamemos $\tilde{u}_i$ o ponto extremo de $-\hat{\psi}_{i+1}$.

Aplicamos agora o lema 6 a p_{i+1}, q, p_i, γ_{i+1}, $-\lambda_i$ em M e o correspondente em $S(\delta)$: $\hat{t}_{i+1},\hat{q}$, $\hat{u}_i$, $\hat{\gamma}_{i+1}$, $-\hat{\psi}_{i+1}$; temos:

$$d(q,p_i) \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{u}_i) \tag{2}$$

Mas, $d(q,p_i) = \hat{d}(\hat{q},\hat{t}_i)$; aplicando o lema 2 para o círculo de centro $\hat{t}_{i+1}$, raio $d(p_i,p_{i+1})$ e o ponto $\hat{q}$, temos, pela desigualdade (2)

$$\theta_i \geq \delta_i, \text{ ou } \Pi-\theta_i \leq \Pi-\delta_i$$

Observando que $\Pi-\theta_i$ (respec. $\Pi-\delta_i$) é o ângulo em $\hat{t}_{i+1}$ entre $\tilde{\gamma}_{i+1}$ e $\hat{\psi}_{i+1}$ (respec. $\hat{\gamma}_{i+1}$ e $\hat{\Phi}_{i+1}$), e usando novamente o lema 2 para o semi-círculo com centro $\hat{t}_{i+1}$, raio $d(p_{i+1},r)$ e o ponto $\hat{q}$, temos

$$\text{(ii)} \qquad \hat{d}(\hat{q},\hat{s}_{i+1}) \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{r}_{i+1})$$

Quando $i=0$, temos, por (i)

$$\hat{d}(\hat{q},\hat{r}_1) \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{s}_0) = \hat{d}(\hat{q},\hat{r})$$

e de (ii)

$$\hat{d}(\hat{q},\hat{s}_1) \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{r}_1),$$

logo,

$$\hat{d}(\hat{q},\hat{s}_1) \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{r}).$$

Suponhamos $\hat{d}(\hat{q},\hat{s}_{i-1}) \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{r})$ e olhemos

$$\hat{d}(\hat{q},\hat{s}_i) \overset{(ii)}{\leq} \hat{d}(\hat{q},\hat{r}_i) \overset{(i)}{\leq} \hat{d}(\hat{q},\hat{s}_{i-1}) \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{r}).$$

Portanto,

(3) $$\hat{d}(\hat{q},\hat{s}_m) \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{r})$$

Aplicando o lema 6 a p_{m-1}, q, $p_m = r$, γ_{m-1}, λ_{m-1} em M e $\hat{t}_{k-1}$, $\hat{q}$, $\hat{t}_k = \hat{r}_k = \hat{s}_k$, $\hat{\gamma}_{k-1}$, $\hat{\phi}_{k-1}$ em $S(\delta)$, temos:

(4) $$d(q,r) \leq \hat{d}(\hat{q},\hat{s}_m)$$

Comparando (3) e (4),

$$d(q,r) \overset{(4)}{\leq} \hat{d}(\hat{q},\hat{s}_m) \overset{(3)}{\leq} \hat{d}(\hat{q},\hat{r}) \qquad \square$$

Observamos finalmente que, comumente, o teorema de Toponogov aparece enunciado como em [5]:

Seja M^m uma variedade riemanniana completa, cuja curvatura seccional satisfaz $\delta \leq K_p(\Pi_p) \leq 1$ para todo ponto $p \in M$ e todo subespaço bi-dimensional Π_p, $\Pi_p \subset T_pM$.

Consideremos p, q e r pontos de M e chamemos α, β e γ os ângulos em p, q e r respectivamente, entre as geodésicas minimais de M que unem esses pontos.

Se $\hat{p}$, $\hat{q}$ e $\hat{r}$ são pontos em $S(\delta)$ tais que $\hat{d}(\hat{p},\hat{q}) = d(p,q)$, $\hat{d}(\hat{p},\hat{r}) = d(p,r)$ e $\hat{d}(\hat{q},\hat{r})$ q $d(q.r)$, e $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ e $\hat{\gamma}$ as análogas a α, β e γ, então:

$$\hat{\alpha} \leq \alpha$$

$$\hat{\beta} \leq \beta$$

$$\hat{\gamma} \leq \gamma$$

A equivalência entre essas duas formas do teorema de Toponogov é facilmente verificada se considerarmos as "leis dos cossenos" em $S(\delta)$ para $\delta > 0$, $\delta = 0$ e $\delta < 0$:

$\delta>0$: $\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos \alpha$,

a, b e c na forma $\sqrt{\delta}.d(p,q)$, $\sqrt{\delta}.d(p,r)$, $\sqrt{\delta}.d(q,r)$.

$\delta=0$: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

$\delta<0$: $\cosh a = \cosh b \cosh c - \operatorname{senh} b \operatorname{senh} c \cos \alpha$.

* * *

BIBLIOGRAFIA

[1] Berger, M. - An extention of Rauch's metric comparison theorem and some applications, Illinois, Journal of Mathematics, vol. 6, nº 4 (1961), pp. 200-211

[2] Carmo, M.P. - Elementos de Geometria Diferencial, IMPA, 1971.

[3] Carmo, M.P. - Introdução à Geometria Diferencial Global, IMPA.

[4] Carmo, M.P. - Notas de Geometria Riemanniana, IMPA, 1971.

[5] Gromoll, Klingenberg, Meyer - Riemannsche Geometric im Großen, Springer-Verlag, Berlin, 1968, nº 55.

[6] Harle, C.E. - Notas de Geometria Riemanniana, Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, 1974.

[7] Hicks, N.J - Notes on Differential Geometry, D.Van Nostrand 1965.

[8] Klingenberg, W. - Contributions to Riemannian Geometry in the large, Annals of Mathematics, vol.69, nº3, maio 1959, pp. 654-666.

[9] Kobayashi, S; Nomizu,K - Foundations of Differential Geometric (vol.I e II), Interscience tracts in pure and applied mathematics, nº 15, 1963.

[10] Milnor,J - Morse Theory, Annals of Mathematics Sdudies, nº 51. 1963.

[11] Rauch, H.E. - A contribution to Differential Geometry in the large, Annals of Mathematics, vol 54, nº 1, julho, 1951, pp. 38-55

[12] Rauch, H.E. - Geodesics and curvature in differential Geometry in the large, Yeshiva University, 1959.

[13] Stoker, J.J. - Differential Geometry; Pure and Applied Mathematics, a series of texts and monographs, vol. XX, 1969.

[14] Tanenblat, K. - Uma estimativa para o comprimento de geodésicas fechadas em variedades riemannianas; Tese de Doutoramenteo, IMPA, 1972.

[15] Warner, F.W. - Extension of the Rauch comparison Theorem to submanifolds.

* * *