

AS NORMAIS ÀS SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM  $\mathbb{R}^3$

CÉLIA CONTIN GÓES

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM  
MATEMÁTICA

ORIENTADOR: *Prof. Dr. CHI-CHENG CHEN*

MARÇO DE 1975

SÃO PAULO

## INTRODUÇÃO

O estudo das superfícies mínimas teve início com as experiências de Plateau em 1849. Ele mostrou, usando as leis de tensão superficial dos fluidos, que a película de sabão formada em um contorno de arame era estável em relação à área. Isto é, qualquer deformação da película, desde que pequena, determina aumento de sua área.

Surge então o chamado problema de Plateau que pode ser assim formulado: "Dada uma curva fechada de Jordan,  $\Gamma$ , em  $\mathbb{R}^3$ , encontrar uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ , de área mínima, tendo  $\Gamma$  como fronteira."

O primeiro resultado sobre a existência de solução do problema de Plateau foi dado em 1930 por J. Douglas e T. Radó. Porém, só em 1960 foi resolvida a questão de regularidade da solução no interior e na fronteira da superfície.

A teoria se desenvolveu realmente nos últimos 20 anos. Aplicando o método do cálculo das variações ao problema de Plateau, provou-se que uma condição necessária para que uma superfície minimize a área é que sua curvatura média seja identicamente nula.

O problema de Plateau trata de superfícies com fronteira. Do ponto de vista geométrico, era natural a tentativa de levar o problema para superfícies sem fronteira.

Consideram-se aquelas superfícies cuja curvatura média é identicamente nula, denominando-as superfícies mínimas em virtude de seu nascimento em conexão com a minimização das áreas.

Para estudar superfície mínima em  $\mathbb{R}^n$  mostramos que se podem associar a ela, localmente,  $n$  funções analíticas,  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ , de tal modo que propriedades geométricas da superfície podem ser interpretadas como propriedades dessas funções.

Em particular em  $\mathbb{R}^3$ , mostra-se que, a partir de  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ , pode-se associar à superfície uma tripla  $(\tilde{M}, g, w)$  onde  $\tilde{M}$  é uma variedade compacta tal que a superfície é definida por  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sendo  $M$  a variedade  $\tilde{M}$  menos um número finito de pontos;  $g$  é uma função meromorfa definida em  $\tilde{M}$  e  $w$  é uma forma diferencial analítica definida sobre  $\tilde{M}$  (Ossermann 1964)

Considerando superfícies orientáveis em  $\mathbb{R}^3$ , definimos a aplicação normal de Gauss. A expressão em coordenadas locais, dessa aplicação, é a função analítica  $g : M \rightarrow S^2$ .

As propriedades geométricas das normais à superfície são estudadas através das propriedades da função analítica  $g$ . Essas propriedades são objeto do presente trabalho.

O primeiro resultado importante é a generalização do teorema de Bernstein, conseguida por Ossermann.

Bernstein provou, em 1915, que: "Se  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função cujo gráfico  $G_f \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície mini-

ma, então  $f$  é linear."

Muitos trabalhos foram feitos no sentido de generalizar tal resultado: Uma forma de generalização seria: "Qualquer superfície mínima completa em  $\mathbb{R}^3$  cujas normais estão todas contidas em um mesmo hemisfério aberto de  $S^2$ , é um plano."

Niremberg conjecturou algo mais forte: "As normais a uma superfície mínima completa, simplesmente conexa, em  $\mathbb{R}^3$ , que não é o plano, formam um conjunto denso em  $S^2$ ."

Esta conjectura foi provada por Ossermann em 1959. O próprio Ossermann generalizou-a em 1961 eliminando a hipótese de ser simplesmente conexa, formulando-a: "Se as normais a uma superfície mínima completa em  $\mathbb{R}^3$  omitem uma vizinhança de alguma direção, então a superfície é um plano."

O teorema de Bernstein aparece então como corolário do teorema de Ossermann.

Por outro lado, este resultado leva à questão: "Dada uma superfície mínima completa, não plana, como pode ser o conjunto das direções omitidas pela aplicação de Gauss?"

Ossermann provou, ainda em 1961, que este conjunto,  $S^2 - g(M)$ , tem capacidade logarítmica zero.

Lawson diz, em seu trabalho publicado pelo IMPA em 1970, ser plausível esperar que este conjunto seja finito. Isto, porém, não foi demonstrado.

Em 1969, Ossermann provou que qualquer conjunto de  $k$  pontos em  $S^2$ ,  $1 \leq k \leq 4$ , existe uma superfície mínima

completa em  $\mathbb{R}^3$  cuja aplicação de Gauss omite exatamente este conjunto. Apresentamos um exemplo em que a aplicação é sobrejetora, isto é, o teorema de Gauss vale também para  $k = 0$ .

É problema aberto a existência de superfícies mínimas completas em  $\mathbb{R}^3$  cujas normais omitem mais que 4 pontos.

Além disso, para que a superfície tenha curvatura total finita, isto é, para que cada direção seja assumida pelas normais um número finito de vezes, devemos ter  $k \leq 3$  (Ossermann 1964). Assim, as superfícies que omitem 4 direções ou mais (se existirem) têm que ter curvatura total infinita.

Muitos exemplos de superfícies mínimas completas podem ser construídos a partir de soluções do problema de Plateau, completando as superfícies por reflexão e tendo em vista a regularidade na fronteira. Porém, todas as superfícies assim obtidas têm curvatura total infinita.

Para superfícies mínimas completas com curvatura total finita apresentamos exemplos para  $k=1$  (superfície de Enneper),  $k=2$  (catenóide) e para  $k=0$ .

Para  $k=3$  o problema ainda está aberto. Embora o teorema de Ossermann torne plausível a existência de superfícies mínimas completas cujas normais omitem 3 direções, com curvatura total finita, não se encontrou nenhum exemplo para este caso.

Se a curvatura total de uma superfície mínima completa é  $-4\pi$ , isto é, se cada direção é assumida pelas normais uma única vez, provamos que a superfície é a superfície

de Enneper se for simplesmente conexa, ou é o catenóide, se for duplamente conexa, e não existe outra possibilidade.

Quero expressar, nesta oportunidade, meus sinceros agradecimentos ao Dr. Chi-Cheng Chen, pela paciência e dedicação com que me orientou durante a elaboração desse trabalho ; e ao Dr. Carlos Edgard Harle, por suas frequentes palavras de estímulo e compreensão desde o momento em que comecei a me interessar pelo estudo da Geometria.

São Paulo, março de 1975

*CÉLIA CONTIN GÓES*

I N D I C E

CAP. I - TEORIA LOCAL DAS SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM  $\mathbb{R}^n$

1 - Superfície Local .....	2
2 - Superfícies Regulares .....	3
3 - Mudança de Parâmetros .....	4
4 - Área .....	5
5 - Reparametrização na forma não paramétrica ...	6
6 - O espaço tangente a uma superfície em um pon- to regular .....	8
7 - A primeira forma fundamental .....	11
8 - Curvas de uma superfície .....	11
9 - A segunda forma fundamental .....	14
10 - A curvatura média .....	16
11 - Superfícies mínimas locais .....	18
12 - Parâmetros isotérmicos .....	18
13 - Aplicação conforme .....	22
14 - Existência de parâmetros isotérmicos para su- perfícies mínimas .....	26
15 - Propriedades das superfícies mínimas em rela- ção aos parâmetros isotérmicos .....	39

CAP. II - TEORIA GLOBAL DAS SUPERFÍCIES MÍNIMAS

§1º - Variedades

1 - Definição .....	45
2 - Estruturas sobre uma variedade .....	46
3 - Espaço de Recobrimento de uma variedade	52
4 - Variedades Completas .....	54

§2º - Superfícies	
1 - Superfícies .....	59
2 - Superfícies mínimas .....	63
3 - Superfícies mínimas generalizadas ...	64
CAP. III - ESTUDO ANALÍTICO DAS SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM $\mathbb{R}^3$	
1 - Representação de Weierstrass para superfícies mínimas em $\mathbb{R}^3$ .....	70
2 - A aplicação normal de Gauss .....	82
3 - Curvatura Gaussiana e Curvatura Total .....	88
CAP. IV - AS NORMAIS A UMA SUPERFÍCIE MÍNIMA COMPLETA	
1 - As normais a uma superfície mínima completa	94
2 - As normais a uma superfície mínima completa com curvatura total finita .....	107

## CAPÍTULO I

### TEORIA LOCAL DAS SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM $\mathbb{R}^n$

Apresentamos, no início deste capítulo, um resumo da teoria local das superfícies em  $\mathbb{R}^n$ , com a finalidade de explicitar nossa linguagem e notação.

A partir do item 11, passamos ao estudo local das superfícies mínimas.

Os principais resultados deste capítulo são os teoremas 1 e 2.

No *teorema 1* demonstramos a existência de parâmetros isotérmicos para superfícies mínimas. Apresentamos a demonstração para o caso especial das superfícies mínimas devido à dificuldade da demonstração para o caso geral de superfícies de classe  $C^2$ . Porém, o que demonstramos é suficiente para nossos objetivos.

O *teorema 2* relaciona as superfícies mínimas locais à equação  $\sum_{k=1}^n \phi_k(z)^2 = 0$ , onde  $\phi_k(z)$  são funções analíticas em um domínio simplesmente conexo  $D$ .

Na verdade, o teorema mostra que existe uma correspondência biunívoca entre as superfícies mínimas locais e as

soluções  $x(z) = (x_1, \dots, x_n)$  da equação

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi_1(z)^2 + \dots + \phi_n(z)^2 = 0 \\ \text{onde } \phi_k(z) = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2}, \quad k = 1, \dots, n \\ z = u_1 + iu_2 \end{array} \right.$$

Este resultado motiva a definição de estrutura conforme sobre a variedade  $M$ , para o estudo global das superfícies mínimas, de que trataremos nos capítulos seguintes.

1 - DEFINIÇÃO 1 - Uma superfície local,  $\underline{S}$ , em  $\mathbb{R}^n$  é uma aplicação

$$x : D \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (r \geq 1)$$

onde  $D$  é um domínio em  $\mathbb{R}^2$

Denotando  $x = (x_1, \dots, x_n)$  um ponto de  $\mathbb{R}^n$  e  $u = (u_1, u_2)$  um ponto de  $D$ , associamos a  $\underline{S}$ , em cada ponto, a matriz de ordem  $(n \times 2)$

$$M = (m_{ij}) \quad \text{onde} \quad m_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2 \end{array}$$

sendo  $\frac{\partial x}{\partial u_j} = \left( \frac{\partial x_1}{\partial u_j}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial u_j} \right)$  a matriz coluna de  $M$ .

Considerando o produto interno usual de  $\mathbb{R}^n$ , denotado  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , definimos a matriz  $G = (g_{ij})$  onde  $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle$

Isto é, associamos a cada ponto de  $S$ , uma nova matriz

$$G = M^t M$$

Calculando o determinante da matriz  $G$ , temos

$$\begin{aligned} \det G &= g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \\ &= \sum_{i,j} \left( \frac{\partial x_i}{\partial u_1}, \frac{\partial x_i}{\partial u_2} \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u_2} \right)^2 = \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u_2} - \frac{\partial x_j}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial u_2} \right)^2 = \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial (x_i, x_j)}{\partial (u_1, u_2)} \right)^2 = \left| \frac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial x}{\partial u_2} \right|^2 \end{aligned}$$

onde " $\wedge$ " denota o produto vetorial definido como o vetor cujas  $\binom{n}{2}$  componentes são dadas por  $\frac{\partial (x_i, x_j)}{\partial (u_1, u_2)}$ , tomadas em alguma ordem prefixada.

## 2 - SUPERFÍCIES REGULARES

A partir das definições de  $M$  e  $G$  e do cálculo de  $\det G$ , é imediata a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 1 - Seja  $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C^r$  ( $r \geq 1$ ), uma superfície  $S$ . As seguintes condições são equivalentes, em cada ponto de  $\underline{S}$ :

- $\frac{\partial x}{\partial u_1}$  e  $\frac{\partial x}{\partial u_2}$  são linearmente independentes
- a matriz  $M$  tem posto 2
- $\exists i, j, 1 \leq i < j \leq n$ , tais que  $\frac{\partial (x_i, x_j)}{\partial (u_1, u_2)} \neq 0$
- $\frac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial x}{\partial u_2} \neq 0$

e)  $\det G > 0$

DEFINIÇÃO 2 - Uma superfície  $\underline{S}$  é regular em um ponto se as condições da proposição 1 se verificam naquele ponto. A superfície  $\underline{S}$  é regular se ela é regular em todo ponto.

### 3 - MUDANÇA DE PARÂMETROS

Seja  $\underline{S}$  uma superfície definida por  $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C^r$  ( $r \geq 1$ ), e seja  $u : \tilde{D} \rightarrow D$ , um difeomorfismo definido num domínio  $\tilde{D}$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $C^r$

A aplicação  $\tilde{x} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C^r$  ( $r \geq 1$ ), dada por  $\tilde{x} = x \circ u$ , define uma nova superfície,  $\tilde{\underline{S}}$ . Diz-se que  $\tilde{\underline{S}}$  é obtida de  $\underline{S}$  por mudança de parâmetros.

Interessa-nos estudar propriedades da superfície  $\underline{S}$  que permanecem, para pontos correspondentes na superfície  $\tilde{\underline{S}}$ , por mudança de parâmetros. Diz-se, neste caso, que a propriedade é independente dos parâmetros.

PROPOSIÇÃO 2 - A regularidade é independente dos parâmetros.

*prova:* Seja  $u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial \tilde{u}_j}$  e  $U = (u_{ij})$  a matriz Jacobiana da mudança de parâmetros  $u = u(\tilde{u})$

Temos

$$\tilde{x}_i = x_i(u(\tilde{u})) \implies \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \tilde{u}_k} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \cdot \frac{\partial u_j}{\partial \tilde{u}_k} \implies \tilde{M} = MU$$

Então,

$$\tilde{G} = \tilde{M}^t \tilde{M} = U^t M^t M U$$

e, como  $G = M^t M$ , temos  $\tilde{G} = U^t G U \implies$

$$\implies \det \tilde{G} = \det G (\det U)^2$$

Como  $u(\tilde{u})$  é um difeomorfismo, temos  $\det U \neq 0$ . Logo,

$\underline{S}$  regular  $\iff \det G > 0 \iff \det \tilde{G} > 0 \iff \underline{\tilde{S}}$  regular □

#### 4 - ÁREA

Consideremos  $x : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , uma superfície  $\underline{S}$ .

DEFINIÇÃO 3 - Seja  $\Delta$  um domínio em  $\mathbb{R}^2$  cujo fecho,  $\bar{\Delta}$ , está contido em  $D$  e seja  $\Sigma$ , a superfície

$$x|_{\Delta} : \Delta \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Então, a área de  $\Sigma$  é definida por

$$A(\Sigma) = \iint_{\Delta} \sqrt{\det G} \, du_1 du_2$$

PROPOSIÇÃO 3 - A área de uma superfície é independente dos parâmetros.

*prova:* Suponhamos a mudança de parâmetros  $u(\tilde{u})$  tal que

$u(\tilde{\Delta}) = \Delta$  e seja  $\tilde{\Sigma}$  a superfície definida por

$$\tilde{x}|_{\tilde{\Delta}} : \tilde{\Delta} \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{onde} \quad \tilde{x} = x \circ u$$

Temos,

$$\begin{aligned}
 A(\tilde{\Sigma}) &= \iint_{\tilde{\Delta}} \sqrt{\det \tilde{G}} \, d\tilde{u}_1 d\tilde{u}_2 = \\
 &= \iint_{\tilde{\Delta}} \sqrt{\det C \cdot (\det U)^2} \, d\tilde{u}_1 d\tilde{u}_2 = \\
 &= \iint_{\tilde{\Delta}} \sqrt{\det C} \, |\det U| \, d\tilde{u}_1 d\tilde{u}_2 = \\
 &= \iint_{\Delta} \sqrt{\det G} \, du_1 du_2 = A(\Sigma) \quad \square
 \end{aligned}$$

##### 5 - REPARAMETRIZAÇÃO NA FORMA NÃO PARAMÉTRICA

Seja  $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C^r$ , uma superfície  $\underline{S}$ , e seja  $a = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$  com  $x(a) = p$ , um ponto em que  $\underline{S}$  é regular. Mostraremos que, pelo menos numa vizinhança  $\Delta$  de  $\underline{a}$ , a superfície  $\underline{S}$  pode ser considerada como o gráfico de uma função  $C^r$ ,

$$f : \Delta \rightarrow \mathbb{P}^{n-2}, \quad \Delta \subset \mathbb{P}^2 \quad \text{e} \quad a \in \Delta$$

Isto é, existe uma mudança de parâmetros  $u = u(\tilde{u})$ , tal que

$$\tilde{x}_1 = \tilde{u}_1$$

$$\tilde{x}_2 = \tilde{u}_2$$

$$\tilde{x}_k = f_k(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = f_k(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \quad k = 3, 4, \dots, n$$

Este resultado significa que, para estudar propriedades locais de uma superfície regular  $\underline{S}$ , podemos sempre considerar que  $\underline{S}$  está parametrizada na forma

$$x_k = f_k(x_1, x_2) \quad ; \quad k = 3, 4, \dots, n$$

que chamaremos forma não-paramétrica da superfície  $\underline{S}$ .

PROPOSIÇÃO 4 - Seja  $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C^r$ , uma superfície  $\underline{S}$  e seja  $a \in D$  um ponto em que  $\underline{S}$  é regular. Então, existe uma vizinhança  $\Delta$  de  $a$  tal que a superfície  $\{ \}$  definida por  $x|_{\Delta} : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$ , admite uma reparametrização  $\tilde{\{ \}}$  na forma não-paramétrica.

*prova* : Se  $\underline{S}$  é regular em  $\underline{a}$ ,  $\exists_{i,j}$  tais que  $\frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u_1, u_2)} \neq 0$  em  $\underline{a}$ . Pelo menos depois de uma mudança de coordenadas, podemos considerar que  $\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)} \neq 0$  em  $\underline{a}$ .

Considerando a aplicação  $(u_1, u_2) \mapsto (x_1, x_2)$ , podemos aplicar o teorema da função inversa. Então, existe uma vizinhança  $\Delta$  de  $\underline{a}$  na qual a aplicação é um difeomorfismo  $C^r$  sobre a imagem  $\tilde{\Delta}$  de  $\Delta$ .

Assim, a inversa dessa aplicação,  $(x_1, x_2) \mapsto (u_1, u_2)$ , é um difeomorfismo  $C^r$ , definido em  $\tilde{\Delta}$ .

Considerando a composição

$$(x_1, x_2) \mapsto (u_1, u_2) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

temos  $\tilde{x} : \tilde{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C^r$ , definindo uma superfí

cie  $\tilde{\Sigma}$  onde

$$\tilde{x}_k = x_k = f_k(x_1, x_2), \quad k = 3, \dots, n$$

$$\tilde{x}_1 = x_1 \quad \text{e} \quad \tilde{x}_2 = x_2$$

Isto é,  $\tilde{\Sigma}$  está parametrizada na forma não-paramétrica :  $x_k = f_k(x_1, x_2)$  .  $\square$

#### 6 - O ESPAÇO TANGENTE A UMA SUPERFÍCIE EM UM PONTO REGULAR

Seja  $a = (u_1, u_2)$  e  $D$  um ponto regular da superfície  $\underline{S}$  definida por  $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Então, no ponto  $a$ , os vetores  $\frac{\partial x}{\partial u_1}$  e  $\frac{\partial x}{\partial u_2}$  são linearmente independentes.

DEFINIÇÃO 4 - O subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^n$ , gerado pelos vetores  $\frac{\partial x}{\partial u_1}$ ,  $\frac{\partial x}{\partial u_2}$  é o espaço tangente à superfície  $\underline{S}$ , no ponto  $p = x(a)$ , que denotamos

$$T_a S = \left\{ v \in \mathbb{R}^n / v = b_1 \left( \frac{\partial x}{\partial u_1} \right)_a + b_2 \left( \frac{\partial x}{\partial u_2} \right)_a ; b_1, b_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

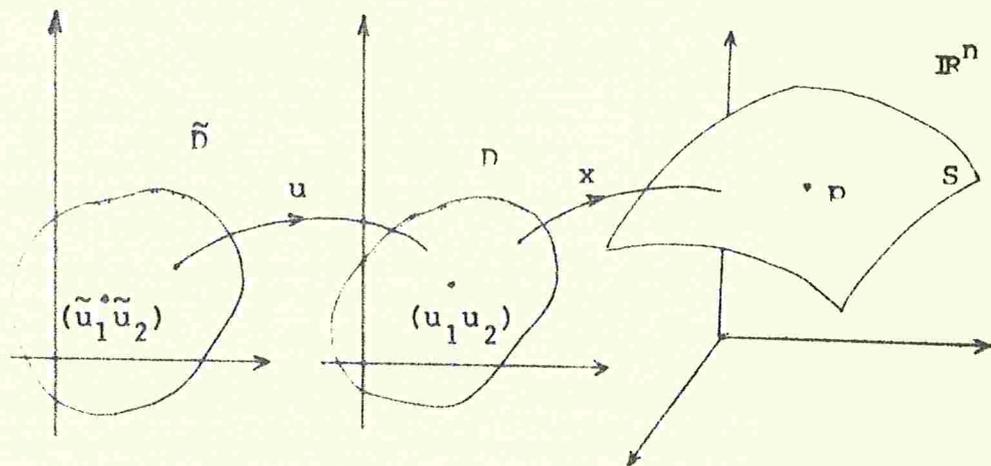
PROPOSIÇÃO 5 - O espaço tangente a  $\underline{S}$  em um ponto é independente dos parâmetros.

*prova:* Seja  $\underline{S}$  a superfície definida por  $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  e

a mudança de parâmetros  $u : \tilde{D} \rightarrow D$

Seja  $\tilde{\underline{S}}$  a superfície  $\tilde{x} = x \circ u$  e

$$p = x(u_1, u_2) = \tilde{x}(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$$



Seja  $u = (u_1, u_2)$  e  $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$

$T_{\tilde{u}}\tilde{S}$  é definido pelos vetores linearmente independentes (a regularidade é independente de parâmetros)

$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{u}_1}$ ,  $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{u}_2}$ . Então,

$$\tilde{v} \in T_{\tilde{u}}\tilde{S} \implies \tilde{v} = a \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{u}_1} + b \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{u}_2}$$

cujas componentes  $\tilde{v}_i$  são da forma

$$\begin{aligned} \tilde{v}_i &= a \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \tilde{u}_1} + b \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \tilde{u}_2} = \\ &= a \left( \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{u}_1} + \frac{\partial x_i}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{u}_2} \right) + b \left( \frac{\partial x_i}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{u}_2} + \frac{\partial x_i}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{u}_2} \right) = \\ &= \left( a \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{u}_1} + b \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{u}_2} \right) \frac{\partial x_i}{\partial u_1} + \left( a \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{u}_2} + b \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{u}_2} \right) \frac{\partial x_i}{\partial u_2} = \end{aligned}$$

$$= a' \frac{\partial x_i}{\partial u_1} + b' \frac{\partial x_i}{\partial u_2} \implies \tilde{v} = a' \frac{\partial x}{\partial u_1} + b' \frac{\partial x}{\partial u_2} \implies \tilde{v} \in T_{uS}$$

Do mesmo modo, se  $v \in T_{uS}$ , temos

$$v = c \frac{\partial x}{\partial u_1} + d \frac{\partial x}{\partial u_2} ; c, d \in \mathbb{R}$$

cujas componentes  $v_i$  são da forma

$$v_i = c \frac{\partial x_i}{\partial u_1} + d \frac{\partial x_i}{\partial u_2}$$

$$\text{Temos } \tilde{M} = MU \implies M = \tilde{M} U^{-1} \implies$$

$$\implies \begin{cases} \frac{\partial x_i}{\partial u_1} = \frac{1}{\det U} \left( \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \tilde{u}_1} \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{u}_2} - \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \tilde{u}_2} \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{u}_1} \right) \\ \frac{\partial x_i}{\partial u_2} = \frac{1}{\det U} \left( - \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \tilde{u}_1} \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{u}_2} + \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \tilde{u}_2} \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{u}_1} \right) \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{c}{\det U} \left( \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \tilde{u}_1} \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{u}_2} - \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \tilde{u}_2} \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{u}_1} \right) + \frac{d}{\det U} \left( - \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \tilde{u}_1} \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{u}_2} + \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \tilde{u}_2} \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{u}_1} \right) = \\ &= \frac{1}{\det U} \left( c \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{u}_2} - d \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{u}_2} \right) \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \tilde{u}_1} + \frac{1}{\det U} \left( -c \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{u}_1} + d \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{u}_1} \right) \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \tilde{u}_2} = \\ &= c' \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \tilde{u}_1} + d' \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial \tilde{u}_2} \implies v = c' \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{u}_1} + d' \frac{\partial \tilde{x}}{\partial \tilde{u}_2} \implies \\ &\implies v \in T_{\tilde{u}\tilde{S}} \end{aligned}$$

Temos, portanto,  $T_u S = T_u \tilde{S}$

### 7 - A PRIMEIRA FORMA FUNDAMENTAL

Dado um vetor  $v \in T_u S$ , temos

$$v = a \frac{\partial x}{\partial u_1} + b \frac{\partial x}{\partial u_2}$$

e, considerando em  $T_u S$ , a métrica induzida da métrica usual de  $\mathbb{R}^n$ , temos

$$\begin{aligned} |v|^2 &= \langle v, v \rangle = \\ &= a^2 \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\rangle + 2ab \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_2}, \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\rangle + b^2 \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_2}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle \end{aligned}$$

ou seja,

$$|v|^2 = a^2 g_{11} + 2ab g_{12} + b^2 g_{22}$$

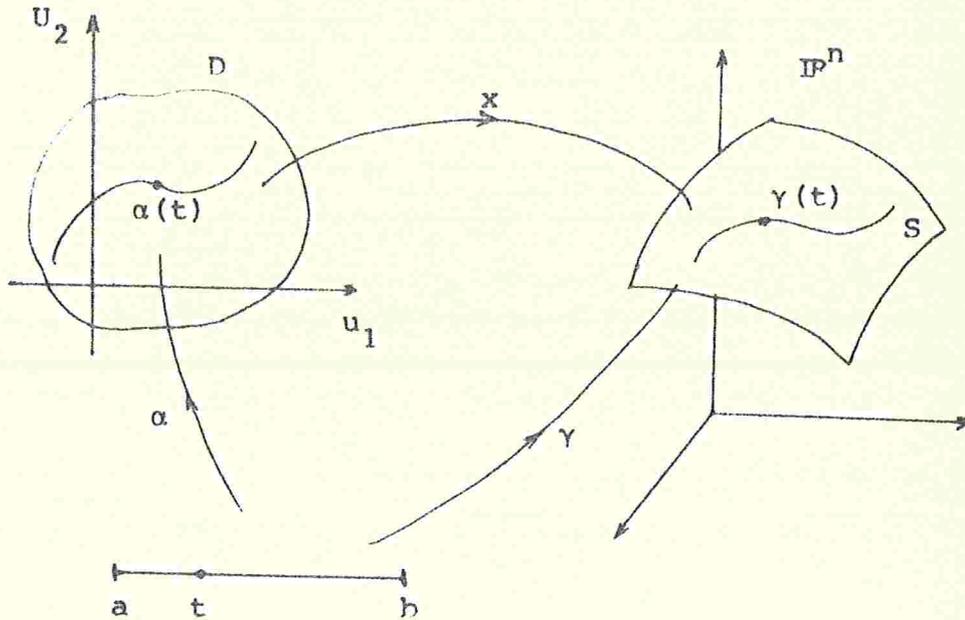
Temos, então, uma forma quadrática  $a^2 g_{11} + 2ab g_{12} + b^2 g_{22}$ , cuja matriz é  $G$ , que chamaremos, primeira forma fundamental da superfície  $S$ .

### 8 - CURVAS DE UMA SUPERFÍCIE

Dizemos que uma curva  $\gamma : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma curva da superfície  $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n \iff \exists \alpha : [a,b] \rightarrow D$ , tal que  $\gamma = x \circ \alpha$ .

Se  $\alpha(t) = (u_1(t), u_2(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ ,

temos  $\gamma(t) = x(u_1(t), u_2(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ .



O vetor velocidade da curva  $\underline{\gamma}$  é dado por

$$\gamma'(t) = \frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{du_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt} \implies$$

$$\implies \gamma'(t) \in T_{\alpha(t)}S$$

Definimos o comprimento da curva  $\underline{\gamma}$  por

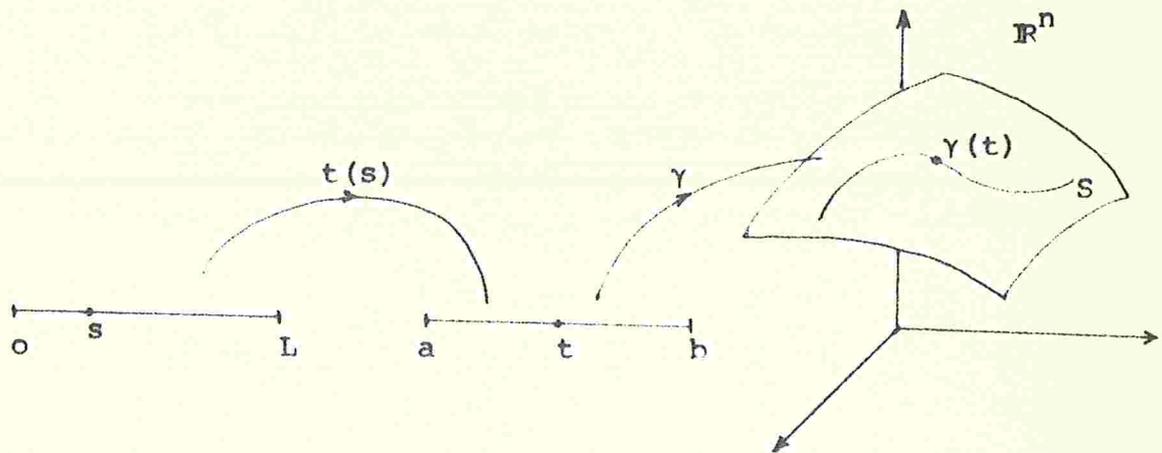
$$L = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

e, para qualquer curva  $\gamma$  em  $\underline{S}$ , podemos definir a função comprimento de arco

$$s(t) = \int_a^t |\gamma'(\tau)| d\tau$$

Temos  $s'(t) = |\gamma'(t)| \geq 0$  para  $a \leq t \leq b$

Se  $\gamma(t)$  é uma curva regular,  $s'(t) > 0, \forall t \implies s(t)$  é injetora. Logo,  $s(t)$  admite uma inversa  $t(s)$  para  $0 \leq s \leq L$



Temos, então, a curva em  $S$ ,

$$\tilde{\gamma} : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

que chamaremos a parametrização de  $\gamma$  por comprimento de arco.

Para  $\tilde{\gamma}$ , o vetor tangente em cada ponto é dado por

$$\begin{aligned} T &= \tilde{\gamma}'(s) = \frac{d\gamma}{dt} \frac{dt}{ds} = \\ &= \frac{\gamma'(t)}{s'(t)} = \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|} \implies |T| = 1 \end{aligned}$$

Considerando que a curva  $\underline{\gamma}$  é regular e de classe  $C^2$ , em uma superfície  $\underline{S}$  de classe  $C^2$ , podemos definir o

vetor

$$\frac{dT}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}$$

chamado vetor curvatura da curva  $\gamma$ , em cada ponto.

### 9 - A SEGUNDA FORMA FUNDAMENTAL

Denotando  $\pi = T_u S$  onde  $p = x(u)$ , consideremos o espaço ortogonal complementar  $\pi^\perp$ , subespaço de dimensão  $(n - 2)$  de  $\mathbb{R}^n$ .

Um vetor  $N \in \pi^\perp$  é chamado uma normal a S no ponto  $p$ . Temos

$$N \perp \frac{\partial x}{\partial u_1} \quad \text{e} \quad N \perp \frac{\partial x}{\partial u_2}, \quad \forall N \in \pi^\perp$$

Calculamos a projeção do vetor curvatura de uma curva  $\underline{\gamma}$  de  $\underline{S}$  que passa por  $p$ , sobre uma normal  $N$ , à superfície  $S$ , no ponto  $p$ .

Temos  $\gamma(s) = x(u_1(s), u_2(s))$  e

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\partial x}{\partial u_1} \frac{du_1}{ds} + \frac{\partial x}{\partial u_2} \frac{du_2}{ds}$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} \left( \frac{du_1}{ds} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_2} \frac{du_1}{ds} \frac{du_2}{ds} + \frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2} \left( \frac{du_2}{ds} \right)^2$$

Portanto,

$$\left\langle \frac{d^2 \mathbf{x}}{ds^2}, N \right\rangle = b_{11}(N) \left( \frac{du_1}{ds} \right)^2 + 2b_{12}(N) \frac{du_1}{ds} \frac{du_2}{ds} + b_{22}(N) \left( \frac{du_2}{ds} \right)^2$$

onde  $b_{ij}(N) = \left\langle \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_i \partial u_j}, N \right\rangle$

Temos, então, uma nova forma quadrática,

$$b_{11}(N) \left( \frac{du_1}{ds} \right)^2 + 2b_{12}(N) \frac{du_1}{ds} \frac{du_2}{ds} + b_{22}(N) \left( \frac{du_2}{ds} \right)^2$$

cujas matriz é  $B = (b_{ij}(N))$ , que depende do ponto da superfície e da normal  $N \in \pi^1$ . Chamaremos esta forma de 2.<sup>a</sup> forma fundamental da superfície S.

A expressão de  $\left\langle \frac{d^2 \mathbf{x}}{ds^2}, N \right\rangle$  mostra que este valor

não depende da curva  $\gamma$ , mas apenas do vetor  $T$ , unitário tangente a  $S$ , e do vetor normal  $N$ , em cada ponto.

Podemos, então, definir em cada ponto de  $S$ , a função

$$k(N, T) = \left\langle \frac{d^2 \mathbf{x}}{ds^2}, N \right\rangle$$

que chamaremos curvatura normal de  $S$  na direção  $T$ , em relação ao vetor normal  $N$ , em cada ponto.

10 - A CURVATURA MÉDIA

Fixado um vetor  $N \in \pi^1$ , num ponto de  $S$ , consideremos a função de  $T$ ,  $k(N, \cdot)$ , definida no compacto  $\{(a, b) / a^2 + b^2 = 1\}$  porque  $|T| = 1, \forall T$ , e continua porque  $\underline{S}$  é de classe  $C^2$ .

Logo,

$$\exists k_1(N) = \max_T k(N, T)$$

$$\exists k_2(N) = \min_T k(N, T)$$

$k_1(N)$  e  $k_2(N)$  são chamados curvaturas principais de  $S$  no ponto, em relação à normal  $N$ .

$$\text{A função } H(N) = \frac{k_1(N) + k_2(N)}{2} \text{ está bem definida}$$

em cada ponto e  $H(N)$  é a curvatura média de  $S$ , no ponto, em relação ao vetor normal  $N$ .

Observamos que

$$k(N, T) = \sum_{i,j} b_{ij}(N) \frac{du_i}{ds} \frac{du_j}{ds},$$

$$\text{sendo } \frac{du_i}{ds} = \frac{\frac{du_i}{dt}}{|\gamma'(t)|} = \frac{\frac{du_i}{dt}}{\sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} \frac{du_i}{dt} \frac{du_j}{dt}}}$$

Portanto, temos

$$k(N, T) = \frac{\sum_{i,j} b_{ij}(N) u'_i(t) u'_j(t)}{\sum_{i,j} g_{ij} u'_i(t) u'_j(t)}$$

que é o quociente entre duas formas quadráticas. Então, seu máximo e seu mínimo são as raízes da equação

$$\det (b_{ij}(N) - \lambda g_{ij}) = 0$$

Calculando o determinante, temos

$$(b_{11} - \lambda g_{11})(b_{22} - \lambda g_{22}) - (b_{12} - \lambda g_{12})(b_{21} - \lambda g_{21}) = 0 \implies$$

$$\implies \det (g_{ij}) \lambda^2 - (g_{22}b_{11} + g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12})\lambda + \det(b_{ij}) = 0$$

Portanto,

$$H(N) = \frac{g_{22}b_{11}(N) + g_{11}b_{22}(N) - 2g_{12}b_{12}(N)}{2 \det (g_{ij})}$$

Sabemos que  $b_{ij}(N) = \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j}, N \right\rangle$  é função linear de  $N$ . Então, a expressão encontrada para  $H(N)$  diz que  $H(N)$  é função linear de  $N$ . Portanto, pelo teorema de Riesz,  $\exists! H \in \pi^1$  tal que

$$H(N) = \langle H, N \rangle, \forall N \in \pi^1$$

O vetor  $H$  é chamado vetor curvatura média de  $S$ , em cada ponto.

### 11 - SUPERFÍCIES MÍNIMAS LOCAIS

DEFINIÇÃO 5 - Uma superfície regular  $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma superfície mínima se seu vetor curvatura média,  $H$ , é nulo em todos os pontos da superfície.

Como  $H(N) = \langle H, N \rangle$ ,  $\forall N \in \pi^\perp$ , segue que a superfície é mínima se, e somente se,  $H(N) = 0$ ,  $\forall N \in \pi^\perp$  e em qualquer ponto.

Então, tendo em vista a expressão de  $H(N)$  do parágrafo anterior, temos uma equação que caracteriza as superfícies mínimas em função da 1.<sup>a</sup> e 2.<sup>a</sup> formas fundamentais

$$g_{22}b_{11}(N) + g_{11}b_{22}(N) - 2g_{12}b_{12}(N) = 0, \forall N \in \pi^\perp$$

Observe-se que a propriedade da superfície ser mínima é independente dos parâmetros. De fato, provamos que o espaço tangente  $\pi$  em cada ponto e, conseqüentemente,  $\pi^\perp$ , são independentes dos parâmetros. Assim,  $k(N, T)$  é independente dos parâmetros e, portanto, também  $H(N)$ .

### 12 - PARÂMETROS ISOTÉRMICOS

DEFINIÇÃO 6 - Diz-se que  $(u_1, u_2)$  são parâmetros isotérmicos

para uma superfície  $S$ , definida por  
 $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n \iff g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$   
onde  $\lambda = \lambda(u_1, u_2) > 0$  em  $D$ .

Nosso objetivo será procurar uma reparametrização para as superfícies de modo que os parâmetros sejam isotérmicos, já que, como veremos, algumas propriedades ficam bastante simplificadas. Por exemplo,

*LEMA 1* - Se  $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  define uma superfície regular cujos parâmetros são isotérmicos, então

$$\det G = \lambda^4$$

$$e \quad H(N) = \frac{h_{11}(N) + h_{22}(N)}{2\lambda^2}$$

*LEMA 2* - Se  $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  define uma superfície regular de classe  $C^2$ , cujos parâmetros são isotérmicos, então

$$\nabla^2 x = 2\lambda^2 H$$

onde  $\nabla^2 x$  é o Laplaciano da aplicação  $\underline{x}$  e  $H$  o vetor curvatura da superfície.

*prova:* Temos  $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij} \implies$

$$\implies \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_2}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle$$

$$e \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle = 0$$

Derivando a primeira dessas equações em relação a  $u_1$  e a segunda em relação a  $u_2$ , temos

$$\left. \begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_2}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_1 \partial u_2}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2} \right\rangle &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2} \right\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2}, \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\langle \nabla^2 x, \frac{\partial x}{\partial u_1} \right\rangle = 0$$

Portanto, o vetor  $\nabla^2 x$  é ortogonal ao vetor  $\frac{\partial x}{\partial u_1}$

No mesmo modo, derivando a primeira equação em relação a  $u_2$  e a segunda em relação a  $u_1$ , concluímos que  $\nabla^2 x$  é ortogonal a  $\frac{\partial x}{\partial u_2}$ .

Portanto,  $\nabla^2 x \in \pi^\perp$

Suponhamos, agora, um vetor  $N$ , qualquer de  $\pi^\perp$  e calculemos

$$\begin{aligned} \langle \nabla^2 x, N \rangle &= \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2}, N \right\rangle = \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_1^2}, N \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2}, N \right\rangle = \\ &= b_{11}(N) + b_{22}(N) = 2\lambda^2 H(N) \end{aligned}$$

Assim,  $\forall N \in \pi^\perp$  temos

$$\left\langle \frac{\nabla^2 x}{2\lambda^2}, N \right\rangle = H(N) \implies$$

$$\implies H = \frac{\nabla^2 x}{2\lambda^2} \implies \nabla^2 x = 2\lambda^2 H \quad \square$$

Observamos que, se a superfície  $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  for mínima e  $(u_1, u_2)$  são parâmetros isotérmicos, temos, pelo 1º lema,  $b_{11}(N) = -b_{22}(N)$ ,  $\forall N \in \pi^\perp$ . Pelo 2º lema temos  $\nabla^2 x = 0$ , o que significa que, se  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\nabla^2 x_k = 0$ ,  $\forall k \implies x_k(u_1, u_2)$  são harmônicos,  $\forall k = 1, \dots, n$

Estes primeiros resultados motivam o estudo da existência de parâmetros isotérmicos, especialmente para superfícies mínimas.

13 - APLICAÇÕES CONFORME

DEFINIÇÃO 7 - Dada uma aplicação diferenciável

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad U \subset \mathbb{R}^m$$

diz-se que a aplicação é conforme se, quaisquer que sejam  $v_1$  e  $v_2$  em  $T_p U$ , tem-se

$$\langle df_p(v_1), df_p(v_2) \rangle = \lambda^2(p) \langle v_1, v_2 \rangle_p$$

onde  $\lambda(p)$  é função diferenciável em  $U$ .

PROPOSIÇÃO 8 - Uma aplicação  $f$  é conforme  $\iff$  ela preserva os ângulos formados por curvas que se interceptam.

*prova:* Seja  $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação conforme e sejam  $\gamma(t)$  e  $\bar{\gamma}(t)$  duas curvas em  $U$  que se interceptam segundo um ângulo  $\alpha$  no ponto  $\gamma(t_0) = u = \bar{\gamma}(t_0)$

$$\cos \alpha = \frac{\langle \gamma'(t_0), \bar{\gamma}'(t_0) \rangle}{|\gamma'(t_0)| |\bar{\gamma}'(t_0)|}$$

As imagens dessas curvas, pela aplicação  $f$ , são curvas em  $\mathbb{R}^n$ , definidas por

$$f \circ \gamma(t) \quad \text{e} \quad f \circ \bar{\gamma}(t)$$

que se interceptam segundo um ângulo  $\beta$ , no ponto  $f(u)$ .

As velocidades das novas curvas no ponto  $f(u)$  são

$$\frac{d}{dt} (f \circ \gamma) (t_0) = df_u(\gamma'(t_0))$$

$$\frac{d}{dt} (f \circ \bar{\gamma}) (t_0) = df_u(\bar{\gamma}'(t_0))$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{\langle df_u(\gamma'(t_0)), df_u(\bar{\gamma}'(t_0)) \rangle}{|df_u(\gamma'(t_0))| |df_u(\bar{\gamma}'(t_0))|} = \\ &= \frac{\lambda^2 \langle \gamma'(t_0), \bar{\gamma}'(t_0) \rangle}{\lambda^2 |\gamma'(t_0)| |\bar{\gamma}'(t_0)|} = \cos \alpha \end{aligned}$$

Portanto,  $f$  preserva ângulos

Reciprocamente, suponhamos que a aplicação  $f$  preserva ângulos de curvas que se interceptam. Então, se  $\gamma$  e  $\bar{\gamma}$  se interceptam segundo um ângulo  $\alpha$  e suas imagens segundo  $\beta$ , temos  $\cos \alpha = \cos \beta \implies$

$$\frac{\langle \gamma'(t_0), \bar{\gamma}'(t_0) \rangle}{|\gamma'(t_0)| |\bar{\gamma}'(t_0)|} = \frac{\langle df_u(\gamma'(t_0)), df_u(\bar{\gamma}'(t_0)) \rangle}{|df_u(\gamma'(t_0))| |df_u(\bar{\gamma}'(t_0))|}$$

$$\begin{aligned} \implies \langle df_u(\gamma'(t_0)), df_u(\bar{\gamma}'(t_0)) \rangle &= \\ &= \frac{|df_u(\gamma'(t_0))| |df_u(\bar{\gamma}'(t_0))|}{|\gamma'(t_0)| |\bar{\gamma}'(t_0)|} \langle \gamma'(t_0), \bar{\gamma}'(t_0) \rangle \end{aligned}$$

Para que a proposição fique demonstrada, é suficiente verificar que  $h = \frac{|df_u(\gamma'(t_0))| |df_u\bar{\gamma}'(t_0)|}{|\gamma'(t_0)| |\bar{\gamma}'(t_0)|}$  é função só do ponto  $\underline{u}$ . Ou seja, que fixado o ponto  $\underline{u}$ ,  $h$  é constante.

Observamos que se  $f$  conserva ângulos,

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad \text{em } \mathbb{R}^m \implies$$

$$\implies \langle df_u e_i, df_u e_j \rangle = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad \text{em } \mathbb{R}^n$$

Por outro lado, se considerarmos o vetor

$$v = e_1 + \dots + e_m \quad \text{em } \mathbb{R}^n, \text{ temos}$$

$$\langle v, e_i \rangle = 1, \quad \forall i \implies \cos \alpha_i = \frac{\sqrt{m}}{m}, \quad \forall i$$

Mas,  $df_u$  é aplicação linear:

$$df_u v = df_u e_1 + \dots + df_u e_m$$

$$\text{e } \langle df_u v, df_u e_i \rangle = |df_u v| |df_u e_i| \cos \alpha_i, \quad \forall i$$

Temos então,

$$\langle v, e_i \rangle = \langle v, e_j \rangle, \quad \forall i, j$$

$$\implies \langle df_u v, df_u e_i \rangle = \langle df_u v, df_u e_j \rangle, \quad \forall i, j \implies$$

$$\Rightarrow |df_u v| |df_u e_i| \frac{\sqrt{m}}{m} = |df_u v| |df_u e_j| \frac{\sqrt{m}}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |df_u e_i| = |df_u e_j|, \psi_{ij}$$

Com tais resultados podemos calcular

$$h = \frac{|df_u(\gamma'(t_0))| |df_u(\bar{\gamma}'(t_0))|}{|\gamma'(t_0)| |\bar{\gamma}'(t_0)|} = \frac{|df_u e_1|^2 |\bar{\gamma}'(t_0)| |\bar{\gamma}'(t_0)|}{|\gamma'(t_0)| |\bar{\gamma}'(t_0)|} = c^2 e$$

PROPOSIÇÃO 7 - Seja  $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma superfície. Então, os parâmetros  $(u_1, u_2)$  são isotérmicos  $\iff x$  é uma aplicação conforme.

*prova:* Se  $(u_1, u_2)$  são isotérmicos, temos

$$g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$$

Sejam  $v = v_1 e_1 + v_2 e_2$  e  $w = w_1 e_1 + w_2 e_2$ , vetores em  $T_p D$ . Então,

$$dx_p(v) = v_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} + v_2 \frac{\partial x}{\partial u_2}$$

$$dx_p(w) = w_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} + w_2 \frac{\partial x}{\partial u_2}$$

$$\Rightarrow \langle dx_p(v), dx_p(w) \rangle = \lambda^2 \langle v, w \rangle_p \Rightarrow$$

$\Rightarrow x$  é aplicação conforme.

Mais ainda,  $\underline{x}$  é estritamente conforme já que a orientação de  $T_p S$  é induzida por  $\underline{x}$ , da orientação de  $D \implies \underline{x}$  sempre preserva orientação.

Reciprocamente, se  $\underline{x}$  é uma aplicação conforme, temos

$$\langle dx_p(v), dx_p(w) \rangle = \lambda^2 \langle v, w \rangle_p, \quad \forall v, w \in T_p D$$

Em particular, considerando

$$v = e_i \quad e \quad w = e_j, \quad i, j = 1 \text{ ou } 2$$

$$\text{temos} \quad \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle = \lambda^2 \langle e_i, e_j \rangle_p \implies$$

$$\implies g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij} \implies$$

$$\implies (u_1, u_2) \text{ são parâmetros isotérmicos} \quad \square$$

#### 14 - EXISTÊNCIA DE PARÂMETROS ISOTÉRMICOS PARA SUPERFÍCIES MÍNIMAS

A existência de parâmetros isotérmicos para qualquer superfície de classe  $C^2$ , foi demonstrada por S.S.Chern [6]

Para nossos objetivos, interessa a existência de parâmetros isotérmicos para superfícies mínimas e, para este caso específico, podemos apresentar uma demonstração elementar.

Usaremos, neste parágrafo, a parametrização de  $\underline{S}$  na forma não-paramétrica. Para isso precisaremos, eventualmente, diminuir um pouco o domínio da aplicação  $\underline{x}$ .

Seja  $\underline{x} : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C^2$

com  $x_k = f_k(x_1, x_2)$ ,  $k = 3, \dots, n$

Introduzimos a seguinte notação:

$$f = (f_3, \dots, f_n)$$

$$p = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$$

Vamos procurar a expressão da equação das superfícies mínimas na nova notação. Temos:

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial x_1} = (1, 0, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \dots) = (1, 0, p)$$

$$\frac{\partial \underline{x}}{\partial x_2} = (0, 1, \dots, \frac{\partial f_i}{\partial x_2}, \dots) = (0, 1, q)$$

Portanto,

$$g_{11} = \left\langle \frac{\partial \underline{x}}{\partial x_1}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial x_1} \right\rangle = 1 + |p|^2$$

$$g_{22} = \left\langle \frac{\partial \underline{x}}{\partial x_2}, \frac{\partial \underline{x}}{\partial x_2} \right\rangle = 1 + |q|^2$$

$$g_{12} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial x_1}, \frac{\partial x}{\partial x_2} \right\rangle = \langle p, q \rangle$$

Por outro lado,

$$b_{11}(N) = \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial x_1^2}, N \right\rangle = \sum_{k=3}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_1^2} \cdot N_k$$

$$b_{22}(N) = \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u_2^2}, N \right\rangle = \sum_{k=3}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_2^2} \cdot N_k$$

$$b_{12}(N) = \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial x_1 \partial x_2}, N \right\rangle = \sum_{k=3}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_1 \partial x_2} \cdot N_k$$

Assim, a equação das superfícies mínimas

$$g_{22}b_{11}(N) + g_{11}b_{22}(N) - 2g_{12}b_{12}(N) = 0, \quad \forall N \in \pi^\perp$$

se escreve, em termos da nova notação,

$$\sum_{k=3}^n \left[ (1+|q|^2) \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_1^2} + (1+|p|^2) \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_2^2} - 2 \langle p, q \rangle \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_1 \partial x_2} \right] N_k = 0,$$

$$\forall N \in \pi^\perp$$

$$\implies (1+|q|^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + (1+|p|^2) \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - 2 \langle p, q \rangle \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \implies$$

$$\implies \boxed{(1+|q|^2)r + (1+|p|^2)t - 2 \langle p, q \rangle s = 0}$$

LEMA 3 - Se  $S$  é superfície mínima, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1 + |q|^2}{w} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\langle p, q \rangle}{w} \right) \\ \text{b) } \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\langle p, q \rangle}{w} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1 + |p|^2}{w} \right) \end{array} \right.$$

onde  $w = \sqrt{\det(g_{ij})}$

prova: Note-se que  $w^2 = g_{11}g_{22} - \alpha_{12}^2 =$   
 $= (1 + |p|^2) (1 + |q|^2) - \langle p, q \rangle^2$

Calculemos

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1 + |q|^2}{w} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\langle p, q \rangle}{w} \right)$$

Para isso, observemos que

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (1 + |p|^2) = \frac{\partial}{\partial x_1} (1 + \langle p, p \rangle) = 2 \langle p, r \rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (1 + |q|^2) = \frac{\partial}{\partial x_1} (1 + \langle q, q \rangle) = 2 \langle q, s \rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \langle p, q \rangle = \langle p, s \rangle + \langle q, r \rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (1 + |p|^2) = 2 \langle p, s \rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (1 + |q|^2) = 2 \langle q, t \rangle$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \langle p, q \rangle = \langle p, t \rangle + \langle q, s \rangle$$

$$2w \frac{\partial w}{\partial x_1} = (1 + |p|^2) \frac{\partial}{\partial x_1} (1 + |q|^2) + (1 + |q|^2) \frac{\partial}{\partial x_1} (1 + |p|^2) -$$

$$- 2 \langle p, q \rangle \frac{\partial}{\partial x_1} \langle p, q \rangle =$$

$$= 2 \left[ (1 + |p|^2) \langle q, s \rangle + (1 + |q|^2) \langle p, r \rangle - \langle p, q \rangle \langle p, s \rangle - \langle p, q \rangle \langle q, r \rangle \right]$$

$$2w \frac{\partial w}{\partial x_2} = 2 \left[ (1 + |p|^2) \langle q, t \rangle + (1 + |q|^2) \langle p, s \rangle - \langle p, q \rangle \langle p, t \rangle - \langle p, q \rangle \langle q, s \rangle \right]$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1 + |q|^2}{w} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\langle p, q \rangle}{w} \right) =$$

$$= \frac{1}{w^2} \left[ w \frac{\partial}{\partial x_1} (1 + |q|^2) - (1 + |q|^2) \frac{\partial w}{\partial x_1} - w \frac{\partial}{\partial x_2} \langle p, q \rangle + \right.$$

$$\left. \langle p, q \rangle \frac{\partial w}{\partial x_2} \right] =$$

$$= \frac{1}{w^3} \left[ 2 (1 + |q|^2) \langle p, q \rangle \langle p, s \rangle - 2 \langle p, q \rangle^2 \langle q, s \rangle - \right.$$

$$\left. - (1 + |q|^2)^2 \langle p, r \rangle + (1 + |q|^2) \langle p, q \rangle \langle q, r \rangle - \right.$$

$$\begin{aligned}
 & - (1+|n|^2)(1+|a|^2) \langle p, t \rangle + (1+|p|^2) \langle p, q \rangle \langle a, t \rangle \Big] = \\
 & = \frac{1}{w^3} \left[ \langle 2(1+|a|^2) \langle p, q \rangle p - 2\langle n, a \rangle^2 a, s \rangle - \right. \\
 & \quad - \langle (1+|q|^2)^2 p - (1+|q|^2) \langle p, q \rangle q, r \rangle - \\
 & \quad \left. - \langle (1+|p|^2)(1+|a|^2) p - (1+|p|^2) \langle p, q \rangle q, t \rangle \right] = \\
 & = \frac{1}{w^3} \left[ (2\langle p, a \rangle) \langle (1+|a|^2) p - \langle p, q \rangle q, s \rangle - \right. \\
 & \quad - (1+|q|^2) \langle (1+|a|^2) p - \langle p, q \rangle q, r \rangle - \\
 & \quad \left. - (1+|p|^2) \langle (1+|a|^2) p - \langle p, q \rangle q, t \rangle \right] = \\
 & = \frac{1}{w^3} \langle - (1+|q|^2) p + \langle p, q \rangle q, (1+|a|^2)r + (1+|p|^2)t - \\
 & \quad - 2\langle p, q \rangle s \rangle
 \end{aligned}$$

Mas, o segundo fator desse produto escalar é a expressão da equação das superfícies mínimas, sendo, portanto, identicamente nulo.

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1+|a|^2}{w} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\langle p, q \rangle}{w} \right) = 0$$

o que prova a primeira parte do lema.

Analogamente se prova a segunda parte,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\langle p, q \rangle}{w} \right) - \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{1 + |p|^2}{w} \right) = 0 \quad \square$$

**TEOREMA 1** - Seja  $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C^2$ , definindo uma superfície  $S$ . Todo ponto regular de  $S$  admite uma vizinhança na qual existe uma reparametrização em parâmetros isotérmicos.

*prova:* Consideremos o ponto  $p = x(a_1, a_2)$ , regular, de  $S$ . Seja  $D'$  uma vizinhança simplesmente conexa de  $(a_1, a_2)$ , contida em  $D$ , na qual a superfície está na forma não paramétrica.

Pelo lema 3, temos

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{1 + |q|^2}{w} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\langle p, q \rangle}{w} \right)$$

numa região simplesmente conexa  $D'$ . Isto significa que a forma diferencial

$$\frac{\langle p, q \rangle}{w} dx_1 + \frac{1 + |q|^2}{w} dx_2$$

é exata  $\implies \exists F(x_1, x_2)$ , definida em  $D'$ ,

tal que  $\frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\langle p, q \rangle}{w}$  e

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = \frac{1+|q|^2}{w}$$

Analogamente, pela segunda parte do lema 3,  $\exists G(x_1, x_2)$  definida em  $D'$ , tal que

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = \frac{1+|p|^2}{w} \quad e$$

$$\frac{\partial G}{\partial x_2} = \frac{\langle p, q \rangle}{w}$$

Consideremos a transformação

$$\begin{cases} \xi_1 = x_1 + G(x_1, x_2) \\ \xi_2 = x_2 + F(x_1, x_2) \end{cases}$$

Temos:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + 1 + \frac{\partial G}{\partial x_1} = 1 + \frac{1+|p|^2}{w} = \frac{w + (1+|p|^2)}{w}$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} = \frac{\partial G}{\partial x_2} = \frac{\langle p, q \rangle}{w}$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} = \frac{\langle p, q \rangle}{w}$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = 1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} = 1 + \frac{1+|q|^2}{w} = \frac{w + (1+|q|^2)}{w}$$

Logo, a matriz Jacobiana da transformação é

$$A = \frac{1}{w} \begin{pmatrix} w + (1+|p|^2) & \langle p, q \rangle \\ \langle p, q \rangle & w + (1+|q|^2) \end{pmatrix}$$

e o Jacobiano da transformação

$$\begin{aligned} J &= \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{1}{w^2} \left[ (w+1+|q|^2)(w+1+|p|^2) - \langle p, q \rangle^2 \right] = \\ &= \frac{1}{w^2} \left[ w^2 + w \left( (1+|p|^2) + (1+|q|^2) \right) + (1+|p|^2)(1+|q|^2) - \right. \\ &\qquad \qquad \qquad \left. - \langle p, q \rangle^2 \right] = \\ &= \frac{1}{w^2} \left[ 2w^2 + w(2 + |p|^2 + |q|^2) \right] = \\ &= 2 + \frac{2+|p|^2 + |q|^2}{w} > 0 \end{aligned}$$

Portanto, a transformação  $(x_1, x_2) \mapsto (\xi_1, \xi_2)$  é um difeomorfismo numa vizinhança  $D'' \subset D'$  do ponto  $(a_1, a_2)$ . Logo, o difeomorfismo inverso  $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (x_1, x_2)$ , define uma mudança de parâmetros para a superfície  $\underline{S}$  restrita a  $D''$ .

Em termos dos novos parâmetros temos

$$x_1 = x_1 (\xi_1, \xi_2)$$

$$x_2 = x_2 (\xi_1, \xi_2)$$

$$x_k = f_k (x_1 (\xi_1, \xi_2), x_2 (\xi_1, \xi_2))$$

Mostraremos que  $(\xi_1, \xi_2)$  são parâmetros isotérmicos para a superfície  $S$  restrita ao domínio de definição da aplicação  $(\xi_1, \xi_2) \mapsto (x_1, x_2)$ .

A matriz Jacobiana da mudança de parâmetros é  $A^{-1}$ .

$$A^{-1} = \frac{1}{JW} \begin{pmatrix} w + 1 + |q|^2 & -\langle p, q \rangle \\ -\langle p, q \rangle & w + 1 + |p|^2 \end{pmatrix}$$

Assim, 
$$\frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} = \frac{w+1+|q|^2}{JW}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} = \frac{\langle p, q \rangle}{JW}$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} = -\frac{\langle p, q \rangle}{JW}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} = \frac{w+1+|p|^2}{JW}$$

$$\frac{\partial x_k}{\partial \xi_1} = \frac{\partial f_k}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f_k}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} =$$

$$= \frac{w+1+|q|^2}{JW} p_k - \frac{\langle p, q \rangle}{JW} q_k ; \quad k = 3, \dots, n$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_2} &= \frac{\partial f_k}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} + \frac{\partial f_k}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} = \\ &= \frac{w+1+|p|^2}{JW} q_k - \frac{\langle p, q \rangle}{JW} p_k \quad ; \quad k = 3, \dots, n \end{aligned}$$

Portanto, calculando  $g_{11}$  em relação aos novos parâmetros  $(\xi_1, \xi_2)$ , temos

$$\begin{aligned} g_{11} &= \left\langle \frac{\partial x}{\partial \xi_1}, \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \right\rangle = \\ &= \left( \frac{w+1+|q|^2}{JW} \right)^2 + \left( \frac{\langle p, q \rangle}{JW} \right)^2 + \sum_{k=3}^n \left( \frac{w+1+|q|^2}{JW} p_k - \frac{\langle p, q \rangle}{JW} q_k \right)^2 = \\ &= \left( \frac{w+1+|q|^2}{JW} \right)^2 \left( 1 + \sum_{k=3}^n p_k^2 \right) + \left( \frac{\langle p, q \rangle}{JW} \right)^2 \left( 1 + \sum_{k=3}^n q_k^2 \right) - \\ &\quad - 2 \frac{w+1+|q|^2}{JW} \cdot \frac{\langle p, q \rangle}{JW} \cdot \sum_{k=3}^n p_k q_k \implies \\ g_{11} &= \left( \frac{w+1+|q|^2}{JW} \right)^2 (1+|p|^2) + \left( \frac{\langle p, q \rangle}{JW} \right)^2 (1+|q|^2) - \\ &\quad - 2 \frac{w+1+|q|^2}{JW} \frac{\langle p, q \rangle}{JW} \langle p, q \rangle = \\ &= \frac{1}{(JW)^2} \left[ (w+1+|q|^2)^2 (1+|p|^2) + \langle p, q \rangle^2 (1+|q|^2) - 2 - \right. \\ &\quad \left. - 2w - 2|q|^2 \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{(JW)^2} \left[ w^2 (1+|p|^2) + (1+|q|^2)^2 (1+|p|^2) + 2w (1+|q|^2) (1+|p|^2) - \langle p, q \rangle^2 (1+|q|^2) - 2w \langle p, q \rangle^2 \right] = \\
 &= \frac{1}{(JW)^2} \left\{ w^2 (1+|p|^2) + (1+|q|^2) \left[ (1+|p|^2) (1+|q|^2) - \langle p, q \rangle^2 \right] + \right. \\
 &\quad \left. + 2w \left[ (1+|q|^2) (1+|p|^2) - \langle p, q \rangle^2 \right] \right\} = \\
 &= \frac{1}{(JW)^2} \left[ w^2 (1+|p|^2) + (1+|q|^2) w^2 + 2w^3 \right] = \\
 &= \frac{1}{(JW)^2} w^2 \left[ 2 + |p|^2 + |q|^2 - 2w \right] = \frac{JW \cdot W^2}{(JW)^2} = \frac{W}{J}
 \end{aligned}$$

Temos,  $g_{11} = \frac{W}{J}$

Analogamente, se prova que  $g_{22} = \frac{W}{J}$  e  $g_{12} = 0$   $\square$

PROPOSIÇÃO 8 - Seja  $\underline{S}$  uma superfície definida por  $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , cujos parâmetros  $(u_1, u_2)$  são isotérmicos. Seja  $\tilde{\underline{S}}$  uma reparametrização de  $\underline{S}$  definida por um difeomorfismo  $u(\tilde{u})$ . Então,  $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$  são parâmetros isotérmicos  $\iff$  a aplicação  $u(\tilde{u})$  é conforme.

prova:  $(u_1, u_2)$  parâmetros isotérmicos  $\iff g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$

$$\text{Seja } U = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial \tilde{u}_j} \end{pmatrix} \text{ e } \tilde{G} = U^t G U$$

$$\text{Temos } G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \tilde{G} = \lambda^2 U^t U$$

Suponhamos que  $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$  sejam parâmetros isotérmicos. Então,  $\tilde{g}_{ij} = \tilde{\lambda}^2 \delta_{ij} \implies$

$$\implies \tilde{G} = \tilde{\lambda}^2 I$$

$$\text{Logo } \tilde{\lambda}^2 I = \lambda^2 U^t U \implies$$

$$\implies \left( \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} \right)^2 U^t U = I \implies$$

$$\implies \left( \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} U \right)^t \left( \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} U \right) = I \implies$$

$$\implies \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} U \text{ é matriz ortogonal}$$

Portanto, para a aplicação  $u(\tilde{u})$  temos

$$\tilde{g}_{11} = \left\langle \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}_1}, \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}_1} \right\rangle = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial \tilde{u}_1} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial \tilde{u}_1} =$$

$$= \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^2 \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} \frac{\partial u_i}{\partial \tilde{u}_1}\right) \left(\frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} \frac{\partial u_i}{\partial \tilde{u}_1}\right) = \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^2$$

$$\tilde{g}_{22} = \left\langle \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}_2}, \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}_2} \right\rangle = \left(\frac{\tilde{\lambda}}{\lambda}\right)^2$$

$$\tilde{g}_{12} = \left\langle \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}_1}, \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}_2} \right\rangle = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial u_i}{\partial \tilde{u}_1} \frac{\partial u_i}{\partial \tilde{u}_2} = 0$$

e a aplicação  $u(\tilde{u})$  é conforme.

Reciprocamente, supondo que a aplicação  $u(\tilde{u})$  é conforme, temos

$$\tilde{g}_{11} = \tilde{g}_{22} = a^2 \quad \text{e} \quad \tilde{g}_{12} = 0 \implies$$

$$\implies U^t U = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Mas, } \tilde{G} = \lambda^2 U^t U \implies \tilde{G} = \lambda^2 a^2 I \implies$$

$\implies$  para a superfície  $\tilde{S}$  temos

$$\tilde{g}_{ij} = (\lambda a)^2 \delta_{ij} \implies$$

$\implies (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2)$  são parâmetros isotérmicos para  $\tilde{S}$ .  $\square$

#### 15 - PROPRIEDADES DAS SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM RELAÇÃO AOS PARÂMETROS ISOTÉRMICOS

LEMA 4 - Seja  $x : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $C^2$ , uma superfície regular cujos parâmetros  $(u_1, u_2)$  são isotérmicos. Então, a

superfície é mínima  $\iff$  as funções coordenadas  $x_k(u_1, u_2)$  são harmônicas.

*prova:* Já vimos que, se  $(u_1, u_2)$  são parâmetros isotérmicos, temos  $g_{11} = g_{22} = \lambda^2$  e  $g_{12} = 0$  e, se  $H$  é o vetor curvatura média,

$$\nabla^2 x = 2\lambda^2 H$$

$$\text{Então, } H = 0 \iff \nabla^2 x = 0$$

$$\iff \nabla^2 x_k = 0 \iff$$

$$\iff x_k \text{ são harmônicas} \quad \square$$

**LEMA 5** - Seja  $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n, C^2$ , uma superfície. Chamando  $z = u_1 + iu_2$  e definindo em  $D \subset \mathbb{C}$ , as funções a valores complexos

$$\phi_k(z) = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2}$$

temos: a)  $\phi_k(z)$  são analíticas  $\iff x_k(u_1, u_2)$  são harmônicas

b)  $(u_1, u_2)$  são parâmetros isotérmicos  $\iff \sum_{k=1}^n \phi_k^2(z) \equiv 0$

c) Se  $(u_1, u_2)$  são parâmetros isotérmicos, então, a superfície é regular  $\iff \sum_{k=1}^n |\phi_k(z)|^2 \neq 0$

*prova:* a) Se  $\phi_k(z)$  são analíticas, valem as equações de Cauchy-Riemann  $\implies$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \right) = \frac{\partial}{\partial u_2} \left( - \frac{\partial x_k}{\partial u_2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nabla^2 x_k = 0 \Rightarrow x_k \text{ são harmônicas}$$

Reciprocamente, se as  $x_k$  são harmônicas, temos

$$\nabla^2 x_k = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \right) = \frac{\partial}{\partial u_2} \left( - \frac{\partial x_k}{\partial u_2} \right)$$

Por outro lado,  $\frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \right) = - \frac{\partial}{\partial u_1} \left( - \frac{\partial x_k}{\partial u_2} \right)$  porque

a superfície é de classe  $C^2$ .

Então, as componentes de  $\phi_k(z)$  são harmônicas conjugadas e possuem derivadas primeiras contínuas. Logo,  $\phi_k(z)$  são analíticas.

b) calculando temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \phi_k^2(z) &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \right)^2 - \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial x_k}{\partial u_2} \right)^2 - 2i \sum_{k=1}^n \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \frac{\partial x_k}{\partial u_2} = \\ &= (g_{11} - g_{22}) - i(2g_{12}) \end{aligned}$$

$$\text{Então, } \left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n \phi_k^2(z) \equiv 0 &\iff g_{11} - g_{22} = 0 \\ &g_{12} = 0 \end{aligned} \right\} \iff$$

$\iff (u_1, u_2)$  são parâmetros isotérmicos

c) Temos

$$\sum_{k=1}^n |\phi_k(z)|^2 = \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \right)^2 + \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial x_k}{\partial u_2} \right)^2 = g_{11} + g_{22}$$

Suponhamos que  $(u_1, u_2)$  são parâmetros isotérmicos da superfície. Temos  $g_{11} = g_{22} = \lambda^2$ . Então,

$$\sum_{k=1}^n |\phi_k(z)|^2 = 2\lambda^2$$

$$\text{e } \det G = \lambda^4$$

Se a superfície é regular, temos  $\lambda^4 \neq 0 \implies 2\lambda^2 \neq 0 \implies \sum_{k=1}^n |\phi_k(z)|^2 \neq 0$ , e reciprocamente.  $\square$

**TEOREMA 2** - Seja  $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , uma superfície mínima regular,  $S$ , cujos parâmetros  $(u_1, u_2)$  são isotérmicos. Então, as funções  $\phi_k(z) = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2}$ ,  $z = u_1 + iu_2$ , são analíticas e  $\sum_{k=1}^n \phi_k^2(z) \equiv 0$  e  $\sum_{k=1}^n |\phi_k(z)|^2 \neq 0$ .

Reciprocamente, dadas funções analíticas  $\phi_1(z), \dots, \phi_n(z)$  que satisfazem a essas duas condições em um domínio simplesmente conexo  $D$ , existe uma superfície mínima  $x : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que as funções coordenadas  $x_k(u_1, u_2)$ , satisfazem

$$\phi_k(z) = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2}$$

*prova:* Se  $S$  é superfície mínima, pelo Lema 4,  $x_k(u_1, u_2)$  são harmônicas. Então, pelo Lema 5,  $\phi_k(z)$  são analí

tivas e satisfazem às duas condições do teorema.

Reciprocamente, consideremos as funções analíticas  $\phi_k(z)$  dadas, definidas em um domínio  $D$ , simplesmente conexo. Então, estão bem definidas as funções

$$x_k(u_1, u_2) = \operatorname{Re} \int_{z_0}^z \phi_k(\xi) d\xi$$

onde  $z = u_1 + iu_2$  e  $z_0$  é um ponto fixado em  $D$ .

Pondo  $\phi_k(z) = U(z) + iV(z)$ , temos

$$x_k(u_1, u_2) = \int_{z_0}^z U du_1 - V du_2$$

onde a integral é calculada sobre qualquer caminho ligando  $z_0$  a  $z$ . Então,

$$\frac{\partial x_k}{\partial u_1} = U \quad \text{e} \quad \frac{\partial x_k}{\partial u_2} = -V$$

isto é,

$$\phi_k(z) = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2}$$

Considerando a aplicação

$$x : D \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x(u_1, u_2) = (x_1(u_1, u_2), \dots, x_n(u_1, u_2))$$

temos uma superfície cujas funções coordenadas  $x_k(u_1, u_2)$  são harmônicas porque as  $\phi_k(z)$  são analíticas. Além disso, como  $\sum_{k=1}^n \phi_k^2(z) = 0$ , pelo Lema 5,  $(u_1, u_2)$  são parâmetros isotérmicos para essa superfície.

Logo, pelo Lema 4, essa é uma superfície mínima.

Por outro lado, como  $\sum_{k=1}^n |\phi_k(z)|^2 \neq 0$ , ainda pelo

Lema 5, concluímos que a superfície é regular.  $\square$

## CAPÍTULO II

### TEORIA GLOBAL DAS SUPERFÍCIES MÍNIMAS

A definição local de superfície como aplicação  $C^r$ ,  $x : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$  com  $D \subset \mathbb{R}^2$ , motiva uma definição global como uma aplicação  $C^r$ ,  $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$  onde  $M$  é uma variedade diferenciável de dimensão 2.

Por outro lado, propriedades das superfícies locais como existência da métrica  $G = (g_{ij})$  e existência de parâmetros isotérmicos, por exemplo, motivam a colocação de estrutura Riemanniana ou estrutura conforme em  $M$ , de acordo com o problema que se deseja focalizar.

Apresentamos neste capítulo, um resumo das principais propriedades das variedades, que usaremos para estudar superfícies mínimas.

#### §1º - VARIEDADES

1 - DEFINIÇÃO 1 - Uma variedade de dimensão  $n$  é um espaço topológico de Hausdorff tal que cada ponto admite uma vizinhança homeomorfa a um subconjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$

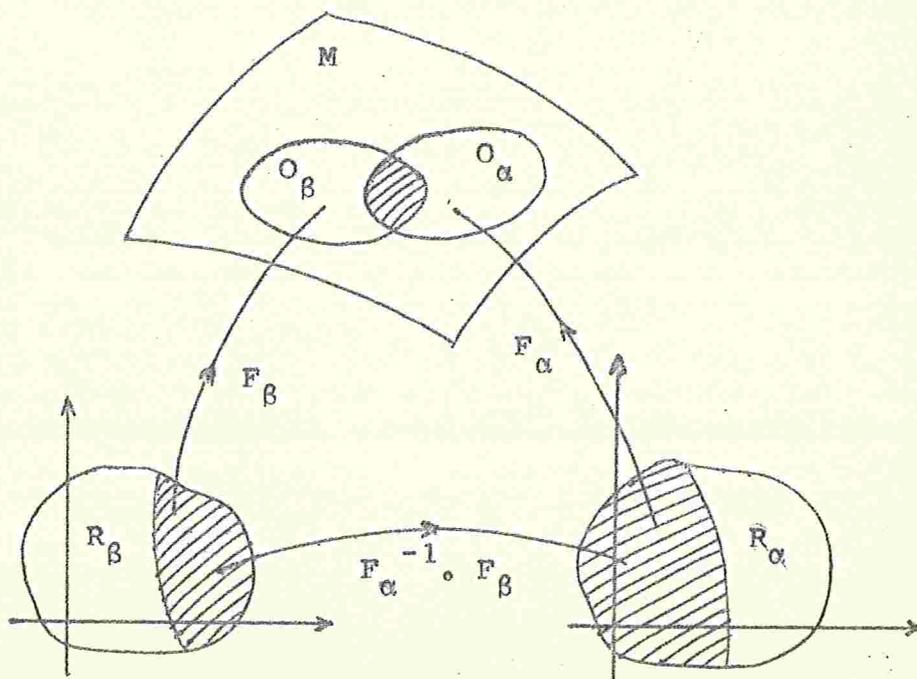
Um atlas de uma variedade  $M$  de dimensão  $n$  é uma coleção  $A = \{(R_\alpha, O_\alpha, F_\alpha)\}$  onde  $R_\alpha$  é um domínio em  $\mathbb{R}^n$ ,  $O_\alpha$  é um aberto de  $M$ ,  $F_\alpha : R_\alpha \rightarrow O_\alpha$  é um homeomorfismo e  $\bigcup_{\alpha} O_\alpha = M$ .

Cada elemento de  $A$ , isto é, cada tripla  $(R_\alpha, O_\alpha, F_\alpha)$  é uma carta da variedade  $M$ .

## 2 - ESTRUTURAS SOBRE UMA VARIEDADE

### a) Estrutura orientada

Uma estrutura orientada sobre uma variedade  $M$  é um atlas para o qual cada homeomorfismo  $F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$  (chamado mudança de cartas), preserva orientação onde estiver definido, isto é, tem Jacobiano estritamente positivo em cada ponto de seu domínio.



Uma variedade é orientável se admite uma estrutura orientada. Neste caso, a estrutura é chamada orientação de  $M$ .

b) Estrutura Diferenciável

Uma estrutura diferenciável da classe  $C^r$  sobre uma variedade  $M$  é um atlas para o qual cada mudança de cartas,  $F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$  é de classe  $C^r$  onde estiver definida.

DEFINIÇÃO 2 - Seja  $M$  uma variedade de dimensão  $n$  com estrutura  $C^r$ ,  $A$  e  $\tilde{M}$  uma variedade de dimensão  $m$  com estrutura  $C^r$ ,  $\tilde{A}$ . Uma aplicação  $f : M \rightarrow \tilde{M}$  será dita de classe  $C^p$  ( $p \leq r$ ) se cada aplicação  $F_\beta^{-1} \circ f \circ F_\alpha$  é de classe  $C^p$ , onde estiver definida.

As estruturas  $C^r$  de  $M$  e  $\tilde{M}$  garantem a não dependência da mudança de cartas nesta definição.

c) Estrutura Conforme

Uma estrutura conforme sobre  $M$  é um atlas para o qual cada mudança de cartas,  $F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$ , é aplicação conforme onde estiver definida e o Jacobiano da transformação é positivo em cada ponto.

A definição diz que toda variedade conforme é orientável.

EXEMPLO: A esfera de Riemann, isto é, a esfera unitária  $S^2 \subset \mathbb{R}^3$  munida da estrutura definida pelas projeções estereográficas segundo os pontos  $(0,0,1)$  e  $(0,0,-1)$ , é uma variedade conforme.

$$\text{Temos } A = \{(R_1, O_1, F_1), (R_2, O_2, F_2)\}$$

$$\text{onde } O_1 = \{p \in S^2 / p \neq (0,0,1)\}$$

$$R_1 = \mathbb{R}^2$$

$$F_1 : R_1 \longrightarrow O_1$$

$$F_1(u_1, u_2) = \left( \frac{2u_1}{|w|^2 + 1}, \frac{2u_2}{|w|^2 + 1}, \frac{|w|^2 - 1}{|w|^2 + 1} \right); w = u_1 + iu_2$$

$$\text{e } O_2 = \{p \in S^2 / p \neq (0,0,-1)\}$$

$$R_2 = \mathbb{R}^2$$

$$F_2 : R_2 \longrightarrow O_2$$

$$F_2(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) = \left( \frac{2\tilde{u}_1}{|\tilde{w}|^2 + 1}, \frac{-2\tilde{u}_2}{|\tilde{w}|^2 + 1}, \frac{1 - |\tilde{w}|^2}{|\tilde{w}|^2 + 1} \right); \tilde{w} = \tilde{u}_1 + i\tilde{u}_2$$

$$\text{e } O_1 \cup O_2 = S^2$$

Calculando a inversa de  $F_1$ , temos

$$F_1^{-1}(x, y, z) = w = u_1 + iu_2 = \frac{x+iy}{1-z}$$

Logo, as únicas mudanças de cartas são

$$w = F_1^{-1} \circ F_2(\tilde{w}) = \frac{\frac{2\tilde{u}_1}{|\tilde{w}|^2 + 1} + i \frac{-2\tilde{u}_2}{|\tilde{w}|^2 + 1}}{1 - \frac{1 - |\tilde{w}|^2}{|\tilde{w}|^2 + 1}} = \frac{1}{\tilde{w}}$$

$$e \quad \tilde{w} = F_2^{-1} \circ F_1(w) = \frac{1}{w}$$

que são aplicação conforme por serem analíticas, para  $0 < |\tilde{w}| < \infty$  e  $0 < |w| < \infty$

PROPOSIÇÃO 1 - Se  $M$  é uma variedade conforme de dimensão 2, então, a mudança de cartas,  $f = F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$ , é função analítica.

*prova:* De fato, temos  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D \subset \mathbb{C}$ , aplicação conforme que preserva orientação.

Da teoria das funções de variáveis complexas, sabemos que tal aplicação é analítica [1] □

Observação - Uma variedade conforme de dimensão 2 é também chamada Superfície de Riemann ou Variedade Complexa de dimensão 1.

DEFINIÇÃO 3 - Sejam  $M$  e  $\tilde{M}$  variedades conforme de dimensão 2. Uma aplicação  $f : M \rightarrow \tilde{M}$  é analítica se cada aplicação  $F_\beta^{-1} \circ f \circ F_\alpha$  é analítica.

DEFINIÇÃO 4 - Duas variedades conforme de dimensão 2,  $M$  e  $\tilde{M}$  são conformemente equivalentes se existe uma aplicação analítica  $f : M \rightarrow \tilde{M}$  que é bijetora.

DEFINIÇÃO 5 - Seja  $M$  uma variedade conforme de dimensão 2 e seja  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Dizemos que  $h$  é harmônica (ou subharmônica) se, para cada  $\alpha$ ,  $h \circ F_\alpha$  é harmônica (ou subharmônica)

As estruturas conforme das variedades  $M$  e  $\tilde{M}$  garantem que as definições acima não dependem da mudança de cartas.

DEFINIÇÃO 6 - Uma aplicação meromorfa sobre uma variedade conforme  $M$ , de dimensão 2, é uma aplicação analítica de  $M$ , na esfera de Riemann.

A definição diz que as aplicações  $F_\alpha^{-1} \circ f \circ F_\beta$ , são meromorfas, isto é, são analíticas cujas únicas singularidades são polos.

d) Estrutura Riemanniana

Seja  $M$  uma variedade diferenciável de classe  $C^r$ . Uma estrutura Riemanniana sobre  $M$ , de classe  $C^q$  ( $0 \leq q \leq r-1$ ) é uma coleção de matrizes,  $\{G_\alpha(p), p \in O_\alpha\}$ , associada aos pontos de  $M$ , tais que os elementos de  $G_\alpha(p)$  são funções de classe  $C^q$  definidas em  $O_\alpha$ , e em cada ponto,  $G_\alpha$  é definida e positiva.

Além disso, se  $u(\tilde{u}) = F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$  está definida, vale  $G_\beta = U^t G_\alpha U$  onde  $U$  é a matriz Jacobiana da mudança de cartas  $F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$ .

PROPOSIÇÃO 2 - Se  $M, C^r$ , é uma variedade Riemanniana, então a aplicação

$$g : T_p M \times T_p M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(a, b) \longmapsto a G_\alpha b^t = \sum_{i,j} g_{ij}(p) \alpha^i \beta^j$$

$$\text{onde } a = (\alpha^1, \dots, \alpha^m) \quad \text{e} \quad b = (\beta^1, \dots, \beta^m)$$

é um produto interno em  $T_p M$

*prova:* De fato,  $g$  é bilinear e simétrica

$$g(a, b) = g(b, a)$$

Além disso, como  $G_\alpha$  é definida positiva,

$$g(a, a) = \sum_{i,j} g_{ij}(p) \alpha^i \alpha^j \geq 0$$

$$\text{e } g(a, a) = 0 \iff \alpha^i = 0, \forall i \quad \square$$

PROPOSIÇÃO 3 - O produto interno, definido em  $T_p M$  pela estrutura Riemanniana de  $M$ , não depende da mudança de cartas.

*prova:* Temos  $G_\beta = U^t G_\alpha U$

onde  $U$  é a matriz Jacobiana da mudança de cartas

$$u = u(\tilde{u})$$

$$\text{Seja } G_\alpha = (g_{ij}), \quad G_\beta = (\tilde{g}_{ij}), \quad U = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial \tilde{u}_j} \end{pmatrix}$$

Consideremos dois vetores,  $a$  e  $b$ , em  $T_p M$   
 $a = (\alpha^1, \dots, \alpha^m)$  e  $b = (\beta^1, \dots, \beta^m)$  em relação à carta  $(R_\alpha, O_\alpha, F_\alpha)$   
 e  $a = (\tilde{\alpha}^1, \dots, \tilde{\alpha}^m)$  e  $b = (\tilde{\beta}^1, \dots, \tilde{\beta}^m)$  em relação à carta  $(R_\beta, O_\beta, F_\beta)$

$$\text{Temos } \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}^m \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \vdots \\ \alpha^m \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} \tilde{\beta}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}^m \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \vdots \\ \beta^m \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Então, } \tilde{g}(a,b) &= (\tilde{\alpha}^1, \dots, \tilde{\alpha}^m) G_\beta \begin{pmatrix} \tilde{\beta}^1 \\ \vdots \\ \tilde{\beta}^m \end{pmatrix} = \\ &= (\alpha^1, \dots, \alpha^m) U^t G_\beta U \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \vdots \\ \beta^m \end{pmatrix} = \\ &= (\alpha^1, \dots, \alpha^m) G_\alpha \begin{pmatrix} \beta^1 \\ \vdots \\ \beta^m \end{pmatrix} = g(a,b) \end{aligned}$$

### 3 - ESPAÇO DE RECOBRIMENTO DE UMA VARIEDADE

DEFINIÇÃO 7 - Se  $M$  e  $\tilde{M}$  são duas variedades de dimensão  $m$ , a aplicação  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  é uma aplicação de recobrimento de  $M$ , se

- a)  $\pi$  é contínua e  $\pi(\tilde{M}) = M$
- b) todo ponto  $p \in M$  admite uma vizinhança  $U$ , em  $M$ , tal que  $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$  onde  $V_{\alpha}$  são abertos disjuntos dois a dois de  $\tilde{M}$ , tais que a restrição de  $\pi$  a cada  $V_{\alpha}$  é um homeomorfis-

mo de  $V_\alpha$  sobre  $U$ .

Os abertos  $U$  são chamados abertos admissíveis do recobrimento e  $\tilde{M}$  é chamada variedade de recobrimento de  $M$  ou espaço de recobrimento de  $M$ .

*EXEMPLO:* Seja  $M$  o anel  $1 < r < e$ , no plano, isto é, o anel da

$$\text{do por } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases} ; 1 < r < e$$

$$\text{e seja } \tilde{M} \text{ dada por } \begin{cases} 0 < x < 1 \\ -\infty < y < \infty \end{cases}$$

A aplicação  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$

$$(x, y) \mapsto (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$$

é uma aplicação de recobrimento de  $M$  que leva cada retângulo

$$\text{lo } \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 2k\pi \leq y < 2(k+1)\pi \end{cases} , \text{ homeomorficamente, sobre o anel.}$$

São fatos topológicos bem conhecidos, as seguintes proposições:

PROPOSIÇÃO 4 - Uma variedade conexa  $M$ , de dimensão 2, admite um espaço de recobrimento  $\tilde{M}$ , simplesmente conexo. [21].

O espaço  $\tilde{M}$  de que fala esta proposição, contém todos os outros espaços de recobrimento e é chamado espaço de recobrimento universal de  $M$ .

PROPOSIÇÃO 5 - Uma variedade de dimensão 2,  $M$ , com estrutura  $C^r$ , não orientável, admite um espaço de recobrimento  $\tilde{M}$ ,  $C^r$  e orientável, tal que cada ponto de  $M$  corresponde a dois pontos de  $\tilde{M}$ .

É fácil ver que estruturas  $C^r$  e conforme sobre  $M$ , induzem estruturas correspondentes sobre um espaço de recobrimento  $\tilde{M}$ .

De fato, se  $F_\alpha$  e  $F_\beta$  são cartas para  $M$ , considero para  $\tilde{M}$  as cartas correspondentes,  $\pi^{-1} \circ F_\alpha$  e  $\pi^{-1} \circ F_\beta$ , que são homeomorfismos, desde que se restrinja  $F_\alpha$  e  $F_\beta$  de modo que  $F_\alpha(R_\alpha) \cap F_\beta(R_\beta) \subset U$ , onde  $U$  é um aberto admissível do recobrimento  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ .

Neste caso, as mudanças de cartas para  $\tilde{M}$  são  $(\pi^{-1} \circ F_\alpha)^{-1} \circ (\pi^{-1} \circ F_\beta) = F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$ .

Logo, se a mudança de cartas é  $C^r$  ou conforme para  $M$ , também o será para  $\tilde{M}$ .

Do mesmo modo, se  $(M, g)$  é variedade Riemanniana e  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  é aplicação de recobrimento de  $M$ , podemos considerar a métrica  $\tilde{g}$ , induzida por  $\pi$  sobre  $\tilde{M}$ , onde

$$\tilde{g}_p(a, b) = g_{\pi(p)}(\pi_* a, \pi_* b)$$

de modo que  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  é também uma variedade Riemanniana.

#### 4 - VARIETADES COMPLETAS

Seja  $(M, g)$  variedade Riemanniana e consideremos

seguintes definições:

- a) Uma curva diferenciável sobre  $M$  é uma aplicação diferenciável

$$p(t) : [a,b] \longrightarrow M, \quad [a,b] \subset \mathbb{R}$$

- b) O comprimento da curva  $p(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , em relação à métrica Riemanniana de  $M$  é definido por

$$L = \int_a^b |p'(t)| dt$$

onde  $p'(t) = (p'_1(t), \dots, p'_m(t))$

$$\text{e } |p'(t)|^2 = g(p'(t), p'(t))$$

- c) Um caminho divergente sobre  $M$  é uma aplicação contínua  $p(t) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow M$ , tal que para todo subconjunto compacto  $K \subset M$ ,  $\exists t_0 \in \mathbb{R}^+$ , tal que  $p(t) \notin K$ ,  $\forall t > t_0$ .

Se o caminho divergente for diferenciável, seu comprimento é definido por

$$\int_0^{\infty} |p'(t)| dt$$

- d) Uma variedade Riemanniana  $M$  é completa em relação à métrica  $g$  se  $\int_0^{\infty} |p'(t)| dt$  diverge para todo caminho divergente diferenciável,  $p(t)$ , sobre  $M$ .

e) Dada uma variedade Riemanniana  $(M, g)$ , definimos

$$\rho : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\rho(p, q) = \inf \{L(\gamma) / \gamma \in \Omega_{pq}\}$$

onde  $\Omega_{pq}$  é o conjunto de todas as curvas diferenciáveis por partes, ligando  $p$  a  $q$ .

A função  $\rho$ , assim definida, define uma distância sobre  $M$ , isto é  $(M, \rho)$  é um espaço métrico.

Sabemos que  $(M, \rho)$  é completo, como espaço métrico, se e somente se, toda sequência de Cauchy em  $M$ , converge.

PROPOSIÇÃO 6 - Se  $(M, g)$  é variedade Riemanniana e  $\rho$  é a distância associada, então  $(M, \rho)$  é completo  $\iff$  todos os subconjuntos limitados e fechados são compactos.

A demonstração dessa equivalência envolve o teorema de Hopf Rinow [5] e [7].

PROPOSIÇÃO 7 -  $(M, \rho)$  completo  $\iff$   $(M, g)$  é completo

*prova:* a) Suponhamos  $(M, \rho)$  completo

Seja  $\gamma : [0, \infty) \longrightarrow M$  um caminho divergente e

$$L(\gamma) < R < \infty$$

Então,  $\gamma \subset D_\rho(\gamma(0), R)$ , disco de centro  $\gamma(0)$  e raio  $R$ , na métrica  $\rho$ , porque

$\forall q \in \gamma$ , temos  $\rho(\gamma(0), q) \leq L(\gamma) < R$

Mas o fecho de  $D_\rho(\gamma(0), R)$  é limitado e fechado em

$M$  e, portanto, pela proposição 6, é compacto. Logo, o caminho  $\gamma$  não pode ser divergente, contrariando a hipótese. Assim, temos  $L(\gamma) = \infty$  e, portanto,  $(M, g)$  é completa.

b) Suponhamos  $(M, g)$  completa.

Seja  $\{p_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$ , uma sequência de Cauchy em  $M$  e

seja  $\tau_i = \rho(p_i, p_{i+1})$ ,  $i \in \mathbb{N}^*$ .

A sequência de números reais  $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$  é sequência de Cauchy e, portanto, possui uma subsequência que converge e que ainda chamaremos, por simplicidade,  $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}^*}$

$$\tau_i = \inf \left\{ L(\gamma) / \gamma \in \Omega_{p_i p_{i+1}} \right\} \implies$$

$$\implies \exists \gamma_i \in \Omega_{p_i p_{i+1}} \text{ tal que } L(\gamma_i) = \tau_i + \frac{1}{2^i}, i \in \mathbb{N}^*$$

Considero o caminho  $\gamma = U \gamma_i : [0, \infty) \rightarrow M$

$$\text{Então, } L(\gamma) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} \tau_i \right) + 1 < \infty$$

Como  $(M, g)$  é completa,  $\gamma$  não pode ser um caminho divergente e, portanto, existe um compacto  $K \subset M$  tal que

$$\forall t_0, \exists t > t_0 / \gamma(t) \in K$$

Logo, posso escolher um compacto  $\tilde{K} \subset M$  com  $K \subset (\tilde{K})^\circ$  e  $\tilde{K}$  contém uma subsequência de  $\{p_i\}$ ,  $\{p_{i_k}\}$ . Logo,  $\{p_{i_k}\}$  converge  $\implies \{p_i\}$  converge  $\implies (M, \rho)$  é completo.  $\square$

PROPOSIÇÃO 8 - Seja  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  uma aplicação de recobrimento de  $M$ , sendo  $(M, g)$  variedade Riemanniana e seja  $\tilde{g}$  a métrica Riemanniana induzida sobre  $\tilde{M}$  por  $\pi$ . Então,

$$(M, g) \text{ é completa} \iff (\tilde{M}, \tilde{g}) \text{ é completa.}$$

*prova:* a) Suponhamos,  $(M, g)$  completa.

Seja  $\{\tilde{p}_n\}$  uma sequência de Cauchy em  $\tilde{M}$ .

Consideremos dois pontos  $\tilde{p}_k$  e  $\tilde{p}_s$  dessa sequência e uma curva  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{M}$  ligando esses pontos. Então,  $\pi(\tilde{\gamma}) = \gamma : [0, 1] \rightarrow M$ , é uma curva ligando  $\pi(\tilde{p}_k) = p_k$  e  $\pi(\tilde{p}_s) = p_s$ .

Calculando os comprimentos de  $\tilde{\gamma}$  e  $\gamma$ , temos

$$\begin{aligned} L(\tilde{\gamma}) &= \int_0^1 |\tilde{\gamma}'(t)| dt = \int_0^1 \left[ \tilde{g}_{\tilde{\gamma}(t)}(\tilde{\gamma}'(t), \tilde{\gamma}'(t)) \right]^{1/2} dt = \\ &= \int_0^1 \left[ g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t)) \right]^{1/2} dt = \\ &= \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = L(\gamma) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\tilde{\rho}(\tilde{p}_k, \tilde{p}_s) = \inf_{\tilde{\gamma} \in \Omega_{\tilde{p}_k \tilde{p}_s}} L(\tilde{\gamma}) \geq \inf_{\gamma \in \Omega_{p_k p_s}} L(\gamma) = \rho(p_k, p_s)$$

Portanto, a sequência  $\{p_n\}$ ,  $p_n = \pi(\tilde{p}_n)$ , é sequência de Cauchy em  $M$ . Como  $(M, \rho)$  é completo (porque  $(M, g)$  é completa),  $\exists p \in M$  tal que  $p_n \rightarrow p$  e portanto,  $\exists \tilde{p} \in \tilde{M}$ ,  $\tilde{p} \in \pi^{-1}(p)$ , tal que  $\tilde{p}_n \rightarrow \tilde{p} \implies (\tilde{M}, \tilde{\rho})$  é completo  $\implies (\tilde{M}, \tilde{g})$  é completa.

b) Suponhamos  $(\tilde{M}, \tilde{g})$  completa.

Seja  $\gamma$  um caminho divergente em  $(M, g)$  e consideremos um levantamento,  $\tilde{\gamma}$ , de  $\gamma$  em  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ , isto é, uma curva  $\tilde{\gamma}$  em  $\tilde{M}$  tal que  $\pi(\tilde{\gamma}) = \gamma$ .

Suponhamos que  $\tilde{\gamma}$  não seja um caminho divergente em  $(\tilde{M}, \tilde{g})$ . Então, existe um compacto  $\tilde{K} \subset \tilde{M}$  tal que,  $\forall t$ ,  $\exists t_0$  /  $\tilde{\gamma}(t) \in \tilde{K}$ .

Mas,  $\pi(\tilde{K}) = K$  é compacto em  $M$  e,  $\forall t$ ,  $\exists t_0$  /  $\gamma(t) = \pi(\tilde{\gamma}(t)) \in K$ . Logo,  $\gamma$  não pode ser um caminho divergente em  $M$ , contrariando a hipótese.

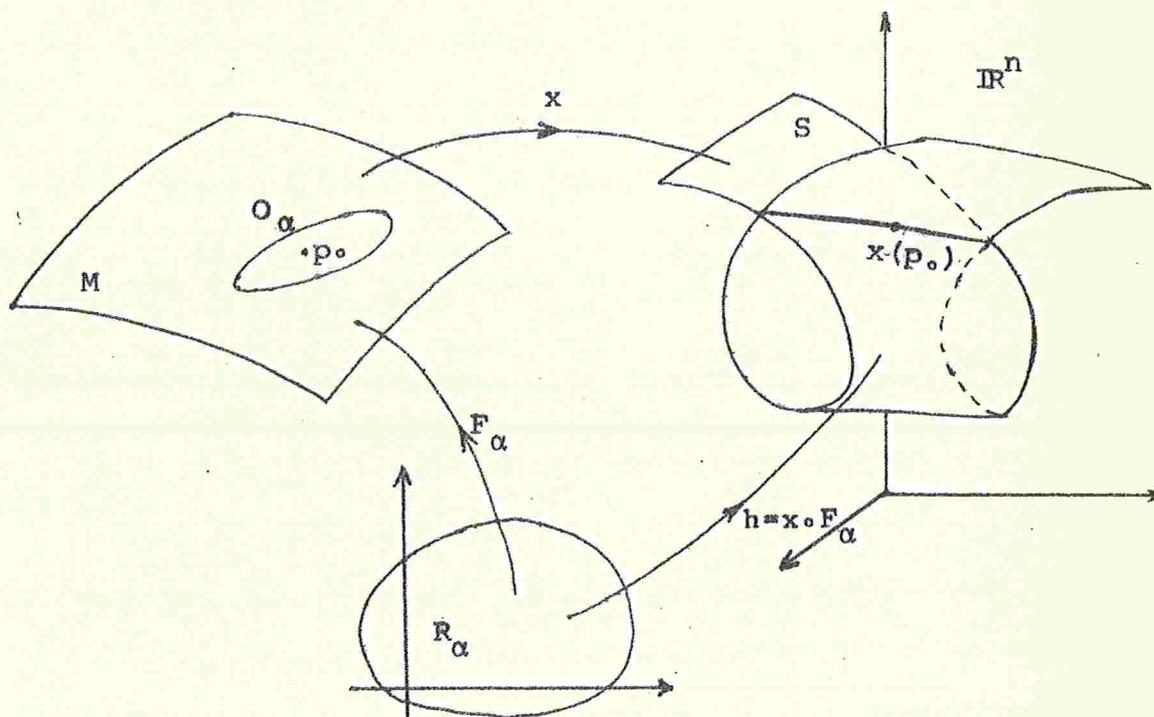
Portanto, se  $\gamma$  é divergente em  $M$ , devemos ter  $\tilde{\gamma}$ , divergente em  $\tilde{M}$  e

$$L(\gamma) = L(\tilde{\gamma}) = \infty$$

Logo,  $(M, g)$  é completa □

### §29 - SUPERFÍCIES

1 - DEFINIÇÃO 8 - Uma superfície  $S$  é uma aplicação  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^r$  ( $r \geq 1$ ) onde  $M$  é uma variedade diferenciável, de classe  $C^r$ , de dimensão 2.



Se  $A$  é o atlas da estrutura  $C^r$  de  $M$  e  $F_\alpha: R_\alpha \rightarrow O_\alpha$  uma carta, então, a aplicação  $h = x \circ F_\alpha: R_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma superfície local,  $S_\alpha$ , de classe  $C^r$ .

Se  $u = u(\tilde{u})$  define uma mudança de cartas  $F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$ , então, a superfície local,  $S_\beta$ , definida por  $h(\tilde{u}) = x \circ F_\beta$  é uma superfície local obtida de  $S_\alpha$  por mudança de parâmetros.

Chamamos ponto da superfície  $S$ , um par  $(p_0, x(p_0))$  onde  $p_0 \in M$ .

As considerações acima nos dizem que as propriedades locais das superfícies, que são independentes de parâmetros

tros, estão bem definidas para a superfície global  $S$ , como sendo as propriedades correspondentes da superfície  $h(u) : R_\alpha \longrightarrow R^n$ , onde  $p_0 \in O_\alpha$ .

Portanto, estão bem definidas os conceitos de regularidade em um ponto, plano tangente em um ponto, vetor curvatura média em um ponto, etc.

As propriedades globais de  $S$  são as propriedades globais de  $M$ . Assim,  $S$  é compacta, conexa, simplesmente conexa, etc., se  $M$  o é. Diremos que  $S$  é orientável se  $M$  é orientável e uma orientação de  $S$  é a orientação correspondente de  $M$ .

Consideraremos apenas superfícies conexas já que, se uma superfície é não conexa, cada componente conexa é superfície conexa e poderemos estudá-la separadamente.

PROPOSIÇÃO 9 - a) A cada superfície não orientável  $S$ ,  $x : M \longrightarrow R^n$ , corresponde uma superfície orientável  $\tilde{S}$ ,  $\tilde{x} : \tilde{M} \longrightarrow R^n$ .

b) A cada superfície  $S$ ,  $x : M \longrightarrow R^n$ , corresponde uma superfície simplesmente conexa,  $\tilde{S}$ ,  $\tilde{x} : \tilde{M} \longrightarrow R^n$  (que chamaremos superfície de cobertura universal de  $S$ )

*prova:* Basta considerar, em cada caso, a correspondente aplicação de cobertura de  $M$ ,  $\pi : \tilde{M} \longrightarrow M$  e a superfície  $\tilde{S}$  definida por  $\tilde{x} = x \circ \pi$   $\square$

Considerando a superfície  $\tilde{S}$ , em qualquer dos casos da proposição, as propriedades locais de  $\tilde{S}$  são as mesmas de  $S$  visto que as de  $S$  são as propriedades correspondentes em

$$h : R_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad p_0 \in O_\alpha$$

e as de  $\tilde{S}$  são as propriedades correspondentes em

$$\tilde{h} : \tilde{R}_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

onde  $\tilde{h} = \tilde{x} \circ \tilde{F}_\alpha$

$$\text{Mas, } \tilde{x} = x \circ \pi \quad \text{e} \quad \tilde{F}_\alpha = \pi^{-1} \circ F_\alpha$$

e, portanto,  $\tilde{h} = (x \circ \pi) \circ (\pi^{-1} \circ F_\alpha) = x \circ F_\alpha = h$  onde es tiver definida.

Em vista disto, podemos sempre considerar a superfície simplesmente conexa, para estudar propriedades locais.

PROPOSIÇÃO 10 - Se  $\underline{S}$  é uma superfície  $C^r$  em  $\mathbb{R}^n$ , definida por  $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{S}$  induz uma estrutura Riemanniana sobre  $M$ .

*prova:* Temos  $h(u) = x(F_\alpha(u))$

Chamemos  $x(u) = h(u)$  e definamos, em cada ponto,

$$G_\alpha = (g_{ij}) \quad \text{onde} \quad g_{ij} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle$$

Para uma mudança  $u = u(\tilde{u})$ , temos

$$\frac{\partial x_i}{\partial \tilde{u}_k} = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial \tilde{u}_k} \implies$$

$$\implies \tilde{M} = MU$$

$$\text{onde } M = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial u_j} \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{u}_j} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial \tilde{u}_j} \end{pmatrix}$$

$$\text{Logo, } G_\alpha = M^t M$$

$$\text{e } G_\beta = \tilde{M}^t \tilde{M} = U^t M^t M U = U^t G_\alpha U$$

Além disso,  $\forall \alpha$ ,  $G_\alpha$  é definida e positiva em cada ponto regular de  $\underline{S}$ .

Logo,  $\{G_\alpha = (g_{ij}(p)), p \in O_\alpha\}$  é uma estrutura Riemanniana sobre  $M$ .

DEFINIÇÃO 9 - Uma superfície  $S$ ,  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , é completa  $\iff M$  é completa em relação à métrica induzida

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle$$

## 2 - SUPERFÍCIES MÍNIMAS

DEFINIÇÃO 10 - Uma superfície regular de classe  $C^2$ , em  $\mathbb{R}^n$ , é uma superfície mínima se seu vetor curvatura média se anula em cada ponto.

PROPOSIÇÃO 11 - Seja  $\underline{S}$  uma superfície mínima regular em  $\mathbb{R}^n$ , definida por  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Então,  $\underline{S}$  induz uma estrutura conforme sobre  $M$ .

*prova* : Podemos considerar  $\underline{S}$  como sendo orientável pois, se não for, passamos para a superfície  $\tilde{S}$  de cobertura, orientável.

Seja  $A$  o atlas que define a orientação de  $M$ .

Para cada ponto  $(p, x(p))$  de  $S$ , consideremos uma carta  $F_\alpha : R_\alpha \rightarrow O_\alpha$  tal que  $p \in O_\alpha$ . Temos, então, a superfície mínima local,

$$h = x \circ F_\alpha, \text{ de classe } C^2$$

e, portanto, existe uma reparametrização,  $\tilde{h}$ , em parâmetros isotérmicos, dada por  $u = u(\tilde{u})$ .

Consideremos a transformação  $u = u(\tilde{u})$  de tal modo que o Jacobiano seja positivo.

$$\text{Seja } \tilde{F}_\alpha = x \circ \tilde{h} : \tilde{R}_\alpha \subset R_\alpha \rightarrow \tilde{O}_\alpha = \tilde{F}_\alpha(\tilde{R}_\alpha)$$

A existência de parâmetros isotérmicos em uma vizinhança de cada ponto regular, garante que  $\bigcup_\alpha \tilde{O}_\alpha = M$  e o fato de termos escolhido as mudanças de carta com Jacobiano positivo, garante que o novo atlas,  $\tilde{A} = \{(\tilde{R}_\alpha, \tilde{O}_\alpha, \tilde{F}_\alpha)\}$ , é uma estrutura orientada de  $S$ .

Além disso,  $\tilde{F}_\alpha^{-1} \circ \tilde{F}_\beta$  é mudança de parâmetros isotérmicos e, portanto, é uma aplicação conforme onde estiver definida.

Assim,  $\tilde{A}$  é uma estrutura conforme para a variedade  $M$ .

### 3- SUPERFÍCIES MÍNIMAS GENERALIZADAS

DEFINIÇÃO 11 - Uma superfície mínima generalizada  $S$ , em  $\mathbb{R}^n$ , é uma aplicação não constante,  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

onde  $M$  é uma variedade de dimensão 2 com es  
trutura conforme definida por um atlas  $A =$   
 $= \{(R_\alpha, O_\alpha, F_\alpha)\}$  tal que as funções coordenadas  
 $x_k(p)$  são harmônicas sobre  $M$  e ainda mais,  
sendo

$$h_k(z) = x_k(F_\alpha(z)) \quad , \quad z = u_1 + iu_2$$

$$\text{e} \quad \phi_k(z) = \frac{\partial h_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial h_k}{\partial u_2} \quad , \quad k = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{temos} \quad \sum_{k=1}^n \phi_k^2(z) \equiv 0$$

### OBSERVAÇÕES

1- Se  $S$  é superfície mínima regular, considerando  
a estrutura conforme induzida sobre  $M$  temos, pelo lema 5,  
Cap.1, as funções

$$\phi_k(z) = \frac{\partial h_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial h_k}{\partial u_2} \quad \text{são analíticas}$$

$h_k(z)$  são harmônicas

$$\text{e} \quad \sum_{k=1}^n \phi_k^2(z) \equiv 0$$

Portanto, uma superfície mínima regular  $S$ , é tam-  
bém uma superfície mínima generalizada.

Além disso, temos  $\sum_{k=1}^n |\phi_k(z)|^2 \neq 0$ ,  $\forall z$ , que ca-  
racteriza o fato de  $S$  ser regular em todo ponto.

2- Se  $\underline{S}$  é uma superfície mínima generalizada, temos  $x(p)$  não constante  $\implies \exists k / x_k(p)$  é não constante  $\implies \implies \phi_k(z) = \frac{\partial h_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial h_k}{\partial u_2}$  pode ter, no máximo, zeros isolados já que é analítica  $\implies \sum_{k=1}^n |\phi_k(z)|^2 = 0$ , no máximo, em pontos isolados.

Então,  $\underline{S}$  menos os pontos isolados em que  $\sum_{k=1}^n |\phi_k(z)|^2 = 0$ , é uma superfície mínima regular.

3- A diferença entre superfícies mínimas generalizadas e regulares é que naquelas, admitimos pontos singulares isolados.

Deste ponto em diante, quando dissermos superfície mínima, estaremos entendendo superfície mínima generalizada.

PROPOSIÇÃO 12 - Uma superfície mínima (generalizada) não pode ser compacta.

*prova:* Seja  $\underline{S}$  a superfície mínima definida por  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^n$

Cada função coordenada  $x_k(p)$  é harmônica sobre  $M \implies x_k(F_\alpha(u_1, u_2))$  é harmônica.

Se  $M$  for compacta,  $x_k(p)$  atinge seu máximo em um ponto de  $M$ . Logo, considerando a função analítica  $e^{f_k}$  onde  $f_k$  é a função analítica que tem  $x_k$  como parte real, temos que  $|e^{f_k}| = e^{x_k}$  atinge seu máximo em  $M \implies x_k$  é cons

tante,  $\forall k \implies x$  é constante. □

Admitiremos, sem demonstração, o teorema da uniformização para superfícies, devido a Koebe e Poincaré. Para a demonstração indicamos ([2] - III - 11 G)

PROPOSIÇÃO 13 - (Teorema da Uniformização) - A superfície de cobertura universal de qualquer superfície Riemanniana é conformemente equivalente ao disco, ao plano ou à esfera.

PROPOSIÇÃO 14 - Toda superfície mínima simplesmente conexa,  $S$ , admite uma reparametrização na forma  $x : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$  onde  $D$  é ou o disco unitário  $|z| < 1$ , ou o plano todo.

prova: Seja  $S$  definida por  $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Pela proposição 12,  $M$  não pode ser compacta. Então, considerando a proposição 13, temos que  $M$  é conformemente equivalente ao disco  $|z| < 1$ , ou ao plano todo. Isto é, existe uma função analítica e bijetora

$$f : D \longrightarrow M$$

onde  $D$  é o disco ou o plano todo.

A aplicação composta,  $x \circ f$

$$D \xrightarrow{f} M \xrightarrow{x} \mathbb{R}^n$$

é a reparametrização procurada para a superfície  $S$ . □

Este resultado juntamente com a proposição 9 deste capítulo, permitem que se considere apenas superfícies orientáveis, simplesmente conexas, no estudo de muitas questões sobre superfícies mínimas.

### CAPÍTULO III

#### ESTUDO ANALÍTICO DAS SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM $\mathbb{R}^3$

Este capítulo fornece conexão entre as superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$  e as funções analíticas: a proposição 2 dá uma representação analítica local para as superfícies mínimas e a proposição 3, uma representação analítica global.

Partindo desses resultados, a aplicação normal de Gauss pode ser representada por uma função analítica  $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $D \subset \mathbb{C}$  e, desta forma, propriedades geométricas das superfícies mínimas podem ser vistas como propriedades de uma função analítica e estudadas como tais.

Resultado importante conseguido deste maneira é a proposição 7 que, de certa forma, é o análogo do "pequeno teorema de Picard" para funções definidas em  $\mathbb{C}$ : "*Se  $g : \mathbb{C} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  é uma função meromorfa definida no plano todo, então  $g$  é constante ou  $g$  assume todos os valores de  $\hat{\mathbb{C}}$  com exceção de, no máximo, dois pontos.*" ([1], pg.297)

Finalmente, definimos curvatura Gaussiana e Curvatura Total para uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ . A proposição 9 usa a representação analítica para mostrar que numa superfície mínima, a curvatura Gaussiana, se não for identicamente nula, só

pode se anular em pontos isolados.

1- REPRESENTAÇÃO DE WEIERSTRASS PARA SUPERFÍCIES MÍNIMAS EM  $\mathbb{R}^3$

**LEMA 1** - Seja  $D$  um domínio em  $\mathbb{C}$ ,  $f(z)$  função analítica em  $D$  e  $g(z)$  função meromorfa em  $D$ , tais que, se  $z_0 \in D$  é polo de  $g(z)$  de ordem  $m$ , então  $z_0$  é zero de  $f(z)$  de ordem maior ou igual a  $2m$ .

Nestas condições, as funções definidas em  $D$  por

$$\phi_1(z) = \frac{1}{2} f(1-g^2)$$

$$\phi_2(z) = \frac{i}{2} f(1+g^2)$$

$$\phi_3(z) = fg$$

são analíticas em  $D$  e satisfazem

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$$

Reciprocamente, dada uma tripla de funções analíticas em um domínio  $D$ , satisfazendo  $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ , temos  $\phi_1 = i\phi_2$  e  $\phi_3 = 0$  ou, existe um par  $(f, g)$  de função nas condições anteriores.

*prova:* Seja  $z_0$  um polo de  $g(z)$  de ordem  $m$ . Então, pelas condições impostas a  $f$  e  $g$ , temos

$$fg = (z-z_0)^k \tilde{f}(z) \frac{\tilde{g}(z)}{(z-z_0)^m}$$

com  $k \geq 2m$  e  $\tilde{f}(z) \cdot \tilde{g}(z)$  não tem polos em  $D$ .

Portanto, as funções

$$fg = (z-z_0)^{k-m} \tilde{f}(z) \cdot \tilde{g}(z) \quad , \quad k-m \geq m \geq 0$$

$$fg^2 = (z-z_0)^{k-2m} \tilde{f}(z) \cdot \tilde{g}(z) \quad , \quad k-2m \geq 0$$

são analíticas em  $D$ . Logo,  $\phi_1(z)$ ,  $\phi_2(z)$ ,  $\phi_3(z)$  são analíticas em  $D$  e, é imediato que

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$$

Reciprocamente, sejam  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ , funções analíticas em  $D$  tais que  $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$  e suponhamos que não ocorra o caso em que  $\phi_1 = i\phi_2$  e  $\phi_3 = 0$ .

Definimos, então, as funções

$$f(z) = \phi_1 - i\phi_2 \quad \text{e} \quad g(z) = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}$$

Temos,

$$\begin{aligned} \phi_1^2 + \phi_2^2 = -\phi_3^2 &\implies (\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) = -\phi_3^2 \implies \\ &\implies \phi_1 + i\phi_2 = -\frac{\phi_3^2}{\phi_1 - i\phi_2} = -fg^2 \end{aligned}$$

Logo,  $f - fg^2 = 2\phi_1 \implies \phi_1 = \frac{1}{2} f(1-g^2)$

$$f + fg^2 = -2i\phi_2 \implies \phi_2 = \frac{i}{2} f(1+g^2)$$

$$\text{e} \quad \phi_3 = fg$$

Da definição de  $f$  e  $g$  temos:

$\phi_1, \phi_2$  analíticas  $\implies f$  analítica em  $D$

$\phi_1, \phi_2, \phi_3$  analíticas  $\implies g$  analítica em  $D$ , exceto nos pontos que são zeros de  $f$ .

Tais pontos são polos de  $g$ , e, portanto,  $g$  é meromorfa em  $D$ .

Por outro lado,

$\phi_1, \phi_2$  analíticas  $\implies \phi_1 + i\phi_2 = -fg^2$  analítica em  $D \implies$   
 $\implies$  se  $g$  tem um polo de ordem  $m$  num ponto  $z_0 \in D$ , então  $z_0$  tem que ser um zero de ordem maior ou igual a  $2m$  de  $f$ . □

PROPOSIÇÃO 2 - Toda superfície mínima  $S$ , simplesmente conexa, em  $\mathbb{R}^3$ , pode ser representada na forma

$$x_k(z) = \operatorname{Re} \left\{ \int_c^z \phi_k(\xi) d\xi \right\} + c_k ; k = 1, 2, 3$$

onde  $\phi_k(z)$  são funções definidas por

$$\begin{cases} \phi_1(z) = \frac{1}{2} f(1-g^2) \\ \phi_2(z) = \frac{i}{2} f(1+g^2) \\ \phi_3(z) = fg \end{cases}$$

com  $f$  e  $g$ , funções nas condições do lema 1, sendo o domí-

nio  $D$ , o disco unitário  $|z| < 1$  ou o plano todo e sendo  $C$ , um caminho arbitrário ligando um ponto fixado  $z_0 \in D$ , ao ponto  $z$ .

A superfície será regular se

$z_0$  é polo de  $g(z)$  de ordem  $m \iff z_0$  é zero de  $f(z)$  de ordem  $2m$ .

*prova:* Pela proposição 14 do capítulo anterior, a superfície  $S$  pode ser representada na forma

$$x : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

onde  $D$  é o disco unitário ou o plano todo. Como  $S$  é superfície mínima, as funções coordenadas  $x_k(z)$ , são harmônicas em  $D$ .

Considerando as funções

$$\phi_k(z) = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2}, \quad k=1,2,3, \quad \text{onde } z = u_1 + iu_2,$$

temos uma tripla de funções analíticas,

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \quad \text{satisfazendo } \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0.$$

Podemos admitir que não ocorre o caso  $\phi_1 = i\phi_2$  e  $\phi_3 = 0$  porque se não, fazemos uma rotação nos índices.

Aplicando o lema 1 à tripla de funções analíticas,

$\phi_1, \phi_2, \phi_3$ , temos um par de funções  $(f, g)$  tais que

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{1}{2} f(1-g^2) \\ \phi_2 = \frac{1}{2} f(1+g^2) \\ \phi_3 = fg \end{cases}$$

com  $f$  e  $g$  nas condições do lema 1 .

As funções

$$x_k(z) = \operatorname{Re} \left\{ \int_{z_0}^z \phi_k(\xi) d\xi \right\} + c_k ; \quad k = 1, 2, 3$$

estão bem definidas porque  $D$  é simplesmente conexo e, portanto, as integrais não dependem do caminho.

A superfície  $\underline{S}$  é regular no ponto  $z \iff$

$$\iff \sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2 \neq 0 \iff \exists k / \phi_k(z) \neq 0$$

Suponhamos que  $\underline{S}$  seja superfície mínima regular e seja  $z_0 \in D$ , um ponto em que  $g$  é analítica.

Se  $f(z_0) = 0$ , temos  $\phi_k(z_0) = 0, \forall k \implies \sum_{k=1}^3 |\phi_k(z_0)|^2 = 0 \implies \underline{S}$  não é regular no ponto  $z_0$ , contra a hipótese de regularidade de  $\underline{S}$ . Portanto,  $f$  só pode se anular em pontos que são polos de  $g$ .

Seja  $z_1 \in D$ , um polo de ordem  $m$  de  $g$ . Pelo lema 1,  $z_1$  é zero de ordem maior ou igual a  $2m$ , de  $f$ . Suponhamos que  $z_1$  seja um zero de ordem estritamente maior que  $2m$ . Neste caso, temos, novamente,  $\phi_k(z_1) = 0, \forall k \implies \sum_{k=1}^3 |\phi_k(z_1)|^2 = 0$ , contrariando a regularidade de  $\underline{S}$ .

Logo, se  $\underline{S}$  é regular, temos:  $z$  é polo de ordem  $m$  de  $g \iff z$  é zero de ordem  $2m$  de  $f$ .

Reciprocamente, se os zeros de  $f$  e os polos de  $g$  satisfazem tal condição, temos

$$\phi_k(z) \neq 0, \forall z ; \quad k = 1, 2 \implies$$

$$\implies \sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2 \neq 0, \forall z \in D \implies \underline{S} \text{ é regular} \quad \square$$

DEFINIÇÃO 1 - As equações

$$\begin{cases} \phi_1 = \frac{1}{2} f(1-g^2) \\ \phi_2 = \frac{i}{2} f(1+g^2) \\ \phi_3 = fg \end{cases}$$

associadas à superfície  $\underline{S}$ , são chamadas representação de Weierstrass da superfície mínima, simplesmente conexa,  $\underline{S}$ .

PROPOSIÇÃO 3 - Toda superfície mínima  $\underline{S}$  de classe  $C^2$  dada

por  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , pode ser representada na forma

$$x_k(z) = \operatorname{Re} \left\{ \int_{z_0}^z \psi_k \right\} + c_k, \quad k = 1, 2, 3$$

onde  $\psi_k(z)$  são formas diferenciais analíticas definidas por

$$\begin{cases} \psi_1 = \frac{1}{2} (1-g^2)w \\ \psi_2 = \frac{i}{2} (1+g^2)w \\ \psi_3 = gw \end{cases}$$

sendo  $w$  uma forma diferencial analítica definida sobre  $M$  e  $g$  uma função meromorfa definida em  $M$  tais que, se  $p_0 \in M$  é polo de  $g$  de ordem  $m$  então  $p_0$  é zero de  $w$  de ordem maior ou igual a  $2m$ . A integral é calculada sobre um caminho arbitrário ligando um ponto  $z_0$  fixado, a  $z$ .

*prova:* Consideremos um atlas  $A = \{(R_\alpha, O_\alpha, F_\alpha)\}_\alpha$  de  $M$ , tal que  $R_\alpha$  é simplesmente conexo, qualquer que seja  $\alpha$ .

Consideremos as funções analíticas  $\phi_{\alpha k}(z)$ ,  $k=1,2,3$ , definidas em  $R_\alpha$  por

$$\phi_{\alpha k} = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2}$$

onde  $x \circ F_\alpha = (x_1, x_2, x_3)$  e  $z = u_1 + iu_2$

Consideremos uma mudança de cartas,  $F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$ , dada por  $z = z(\tilde{z})$  com  $\tilde{z} = \tilde{u}_1 + i\tilde{u}_2$  e  $x \circ F_\beta = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ . Como  $M$  é variedade conforme, sabemos que  $z = z(\tilde{z})$  é função analítica e portanto,

$$\frac{dz}{d\tilde{z}} = \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{u}_1} + i \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{u}_1} \quad \text{com} \quad \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{u}_1} = \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{u}_2}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{u}_2} = - \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{u}_1}$$

Temos, então,

$$\begin{aligned} \phi_{\beta k}(\tilde{z}) &= \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial \tilde{u}_1} - i \frac{\partial \tilde{x}_k}{\partial \tilde{u}_2} \quad \text{com} \quad \tilde{x}_k(\tilde{z}) = x_k(z(\tilde{z})) \implies \\ \implies \phi_{\beta k}(\tilde{z}) &= \left( \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{u}_1} + \frac{\partial x_k}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{u}_1} \right) - i \left( \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{u}_2} + \frac{\partial x_k}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{u}_2} \right) = \\ &= \left( \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{u}_1} + \frac{\partial x_k}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{u}_1} \right) + i \left( \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{u}_1} - \frac{\partial x_k}{\partial u_2} \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{u}_1} \right) = \\ &= \left( \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2} \right) \left( \frac{\partial u_1}{\partial \tilde{u}_1} + i \frac{\partial u_2}{\partial \tilde{u}_1} \right) = \\ &= \phi_{\alpha k}(z) \frac{dz}{d\tilde{z}} \end{aligned}$$

Podemos definir formas diferenciais analíticas em  $R_\alpha$ , por  $\psi_{\alpha k}(z) = \phi_{\alpha k}(z) dz$ ,  $k=1,2,3$

Temos,

$$\psi_{\beta k}(\tilde{z}) = \phi_{\beta k}(\tilde{z}) d\tilde{z} = \phi_{\alpha k} \frac{dz}{d\tilde{z}} d\tilde{z} = \phi_{\alpha k}(z) dz = \psi_{\alpha k}(z)$$

o que significa que estas formas estão definidas globalmente sobre  $M$ . Escreveremos simplesmente  $\psi_k(z) = \phi_k(z) dz$

Considerando cada superfície local definida por  $h = x \circ F_\alpha$  e aplicando a ela a proposição 2, temos a representação de Weierstrass

$$\begin{cases} \phi_{\alpha 1} = \frac{1}{2} f_\alpha (1-g_\alpha^2) \\ \phi_{\alpha 2} = \frac{i}{2} f_\alpha (1+g_\alpha^2) \\ \phi_{\alpha 3} = f_\alpha g_\alpha \end{cases}$$

$$e \quad f_\alpha(z) = \phi_{\alpha 1}(z) - i \phi_{\alpha 2}(z)$$

$$g_\alpha(z) = \frac{\phi_{\alpha 3}(z)}{\phi_{\alpha 1}(z) - i \phi_{\alpha 2}(z)}$$

Considerando a mudança de cartas  $F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$ , temos

$$\begin{aligned} f_\beta(\tilde{z}) &= \phi_{\beta 1}(\tilde{z}) - i \phi_{\beta 2}(\tilde{z}) = \\ &= \left[ \phi_{\alpha 1}(z) - i \phi_{\alpha 2}(z) \right] \frac{dz}{d\tilde{z}} = f_\alpha(z) \frac{dz}{d\tilde{z}}; \quad \forall \alpha, \beta \end{aligned}$$

Portanto, podemos definir globalmente sobre  $M$ , a forma diferencial analítica

$$w = f(z) dz$$

Por outro lado,

$$g_{\beta}(\tilde{z}) = \frac{\phi_{\beta 3}(\tilde{z})}{\phi_{\beta 1}(\tilde{z}) - i\phi_{\beta 2}(\tilde{z})} = \frac{\phi_{\alpha 3}(z) \frac{dz}{d\tilde{z}}}{[\phi_{\alpha 1}(z) - i\phi_{\alpha 2}(z)] \frac{dz}{d\tilde{z}}} = g_{\alpha}(z); \forall \alpha, \beta$$

e, portanto, temos uma função meromorfa,  $g$ , definida globalmente sobre  $M$ .

Assim, podemos associar à superfície  $S$ , uma forma diferencial analítica  $w$  e uma função meromorfa  $g$ , sobre  $M$ , dadas por

$$\begin{cases} w = \psi_1 - i\psi_2 \\ g = \frac{\psi_3}{\psi_1 - i\psi_2} \end{cases}$$

tais que

$$\begin{cases} \psi_1 = \frac{1}{2} (1-g^2)w \\ \psi_2 = \frac{i}{2} (1+g^2)w \\ \psi_3 = gw \end{cases}$$

que é a representação de Weierstrass para uma superfície mínima (não necessariamente, simplesmente conexa).

Aplicando o lema 1 às funções  $f_{\alpha}$  e  $g_{\alpha}$ , em cada carta, concluímos que se  $g$  tem um polo de ordem  $m$  em  $p \in M$ , então  $p$  é um zero de ordem maior ou igual a  $2m$  de  $f_{\alpha}$  e, portanto, de  $w$ .

Observamos que as formas diferenciais  $\psi_k(z)$  são exatas.

De fato, seja  $h_k$  uma função analítica cuja parte real é  $x_k$ , definida sobre  $M$ .

$$h_k = x_k + iy_k \quad \text{onde} \quad \frac{\partial x_k}{\partial u_1} = \frac{\partial y_k}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial x_k}{\partial u_2} = -\frac{\partial y_k}{\partial u_1}$$

Temos

$$\frac{\partial h_k}{\partial u_1} = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} + i \frac{\partial y_k}{\partial u_1} = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2} = \phi_k$$

$$\frac{\partial h_k}{\partial u_2} = \frac{\partial x_k}{\partial u_2} + i \frac{\partial y_k}{\partial u_2} = \frac{\partial x_k}{\partial u_2} + i \frac{\partial x_k}{\partial u_1} = i \left( \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2} \right) = i \phi_k$$

$$\Rightarrow dh_k(z) = \phi_k du_1 + i \phi_k du_2 = \phi_k dz = \psi_k(z) ; k=1,2,3$$

Portanto, estão bem definidas as integrais

$$x_k(z) = \operatorname{Re} \left\{ \int_{c^{z_0}}^z \psi_k \right\} + c_k ; k = 1,2,3$$

onde  $C$  é um caminho qualquer ligando  $z_0$  a  $z$  □

OBSERVAÇÃO: Para estudo de problemas locais, podemos sempre considerar uma representação de Weierstrass local, isto é,  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  dadas pelas funções  $f$  e  $g$ , em lugar de formas diferenciais.

PROPOSIÇÃO 4 - Dados uma forma diferencial analítica  $w$ , definida sobre uma variedade de dimensão 2,  $M$ , e

uma função meromorfa  $g$ , definida sobre  $M$ , tais que se  $p_0 \in M$  é polo de  $g$  de ordem  $m$ , então  $p_0$  é zero de  $w$  de ordem maior ou igual a  $2m$ ; então, as formas diferenciais

$$\text{definidas por } \begin{cases} \psi_1 = \frac{1}{2} (1-g^2)w \\ \psi_2 = \frac{i}{2} (1+g^2)w \\ \psi_3 = gw \end{cases}$$

são analíticas e, se as integrais

$$x_k = \operatorname{Re} \left\{ \int_C \psi_k \right\}$$

são independentes do caminho  $C$  que liga um ponto fixado  $z_0$  a  $z$ , então  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$  define uma superfície mínima.

*prova:* A afirmação de que as formas  $\psi_k$  são analíticas sobre  $M$ , é imediata a partir das condições sobre polos e zeros de  $w$  e  $g$ .

Suponhamos que as integrais não dependem do caminho e seja  $(O_\alpha, z)$ ,  $z = u_1 + iu_2$ , uma carta local para  $M$ :

$$\psi_k \text{ analíticas} \implies \exists \phi_k(z) \text{ tal que } \psi_k(z) = \phi_k(z) dz$$

e, localmente,  $x_k = \operatorname{Re} \left\{ \int_C \phi_k(z) dz \right\}$  onde a inte-

gral independe do caminho  $\implies \exists$  função analítica  $h_k(z)$  tal

que  $dh_k(z) = \phi_k(z)dz$  e cuja parte real  $\bar{e} x_k(z) \implies x_k(z)$  é harmônica.

Então, pelo lema 1 (cap.I-15), a superfície definida por  $x \circ F_\alpha$  é mínima.

Mas, se  $x \circ F_\alpha$  é superfície mínima,  $\forall O_\alpha$  em  $M$ , então,  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  é superfície mínima.  $\square$

Como exemplos de superfícies mínimas dadas por suas representações de Weierstrass, temos as superfícies definidas por :

a)  $f = 1$  e  $g(z) = z$  sendo  $M = \mathbb{C}$

$$\text{ou seja, } \begin{cases} w = dz \\ g(z) = z \end{cases}$$

$x : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida a partir de  $f$  e  $g$  é a superfície de Enneper, que é simplesmente conexa.

$$\text{b) } \begin{cases} w = \frac{1}{z^2} dz, \text{ sendo } M = \mathbb{C} - \{0\} \\ g(z) = z \end{cases}$$

A superfície  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  assim definida é o catenóide e esta não é simplesmente conexa.

c)  $f = z^2$  e  $g(z) = z + \frac{1}{z}$ , sendo  $M = \mathbb{C}$

$$\text{ou seja, } \begin{cases} w = z^2 dz \\ g(z) = z + \frac{1}{z} \end{cases}$$

A superfície  $x : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definida por  $f$  e  $g$  é simplesmente conexa.

Acrescentamos, para uso posterior, que

em a) ,  $g(M) = \mathbb{C} = \hat{\mathbb{C}} - \{\infty\}$

em b) ,  $g(M) = \mathbb{C} - \{0\} = \hat{\mathbb{C}} - \{0, \infty\}$

em c) ,  $g(M) = \hat{\mathbb{C}}$

OBSERVAÇÃO - Seja  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície mínima,  $S$ .

Em uma vizinhança de cada ponto temos

$$\phi_k(z) = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2}, \quad k = 1, 2, 3$$

e podemos escrever

$$(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = \frac{\partial x}{\partial u_1} - i \frac{\partial x}{\partial u_2}$$

Como  $u_1$  e  $u_2$  são parâmetros isotérmicos, te-

mos  $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$  onde  $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial x}{\partial u_j} \right\rangle$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \left| \frac{\partial x}{\partial u_1} \right|^2 = \left| \frac{\partial x}{\partial u_2} \right|^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 |\phi_k|^2 \implies \\ \implies \lambda^2 &= \left[ \frac{|f| (1+|g|^2)}{2} \right]^2 \end{aligned}$$

## 2 - A APLICAÇÃO NORMAL DE GAUSS

Consideremos a representação de Weierstrass (local)

de uma superfície mínima  $\underline{S}$ , em uma vizinhança de cada ponto, e calculemos a expressão da normal  $N$ , em cada ponto regular de  $\underline{S}$ , em função de  $f$  e  $g$ .

Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial x}{\partial u_2} &= \left( \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \frac{\partial x_3}{\partial u_2} - \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \frac{\partial x_2}{\partial u_2}, \frac{\partial x_3}{\partial u_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_2} - \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \frac{\partial x_3}{\partial u_2}, \frac{\partial x_1}{\partial u_1} \frac{\partial x_2}{\partial u_2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial x_2}{\partial u_1} \frac{\partial x_1}{\partial u_2} \right) = \\ &= \text{Im} (\phi_2 \bar{\phi}_3, \phi_3 \bar{\phi}_1, \phi_1 \bar{\phi}_2) = \\ &= \frac{|f|^2 (1+|g|^2)}{4} (2 \text{Re}\{g\}, 2 \text{Im}\{g\}, |g|^2 - 1) \end{aligned}$$

$$e \quad \left| \frac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial x}{\partial u_2} \right| = \left[ \frac{|f| (1+|g|^2)}{2} \right]^2$$

$$\text{Então,} \quad N = \frac{\frac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial x}{\partial u_2}}{\left| \frac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial x}{\partial u_2} \right|} =$$

$$= \left( \frac{2 \text{Re}\{g\}}{|g|^2 + 1}, \frac{2 \text{Im}\{g\}}{|g|^2 + 1}, \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right)$$

é o vetor unitário, normal à superfície  $S$ , com a orientação canônica (induzida de  $\mathbb{R}^3$ ).

DEFINIÇÃO 2 - Dada uma superfície regular  $S$ , definida por  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , a aplicação normal de Gauss é a

aplicação  $N : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$   
 $p \longmapsto N(p)$

onde  $N(p)$  é a normal à superfície  $S$  no ponto  $(p, x(p))$ .

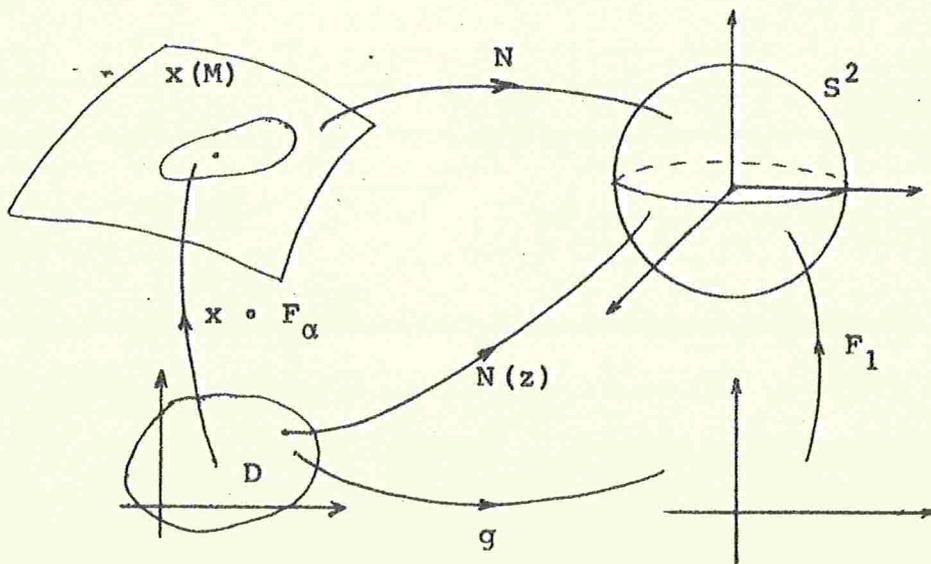
O fato de  $N(p)$  ser vetor unitário diz que  $N(M) \subset S^2$ , esfera unitária de  $\mathbb{R}^3$ .

Se a superfície  $S$  é uma superfície mínima generalizada, embora o vetor normal  $N$  não esteja definido em pontos não regulares, podemos estender a aplicação normal de Gauss também aqueles pontos, já que  $g$  está definida também para tais pontos.

Assim, para superfícies mínimas definimos a aplicação normal de Gauss, localmente, por  $N(z) = N \circ x \circ F_\alpha$

$$N(z) : D \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$z \longmapsto \begin{cases} N(z) = \left( \frac{2 \operatorname{Re}\{g\}}{|g|^2+1}, \frac{2 \operatorname{Im}\{g\}}{|g|^2+1}, \frac{|g|^2-1}{|g|^2+1} \right), \text{ se } g(z) \neq \infty \\ N(z) = (0, 0, 1), \text{ se } g(z) = \infty \end{cases}$$



PROPOSIÇÃO 5 - Se  $x : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  define uma superfície mínima, então a aplicação normal de Gauss,  $N(z)$ , define uma aplicação analítica de  $D$  na esfera unitária, considerada como a esfera de Riemann.

prova: Temos 
$$N(z) = \left( \frac{2 \operatorname{Re}\{g\}}{|g|^2+1}, \frac{2 \operatorname{Im}\{g\}}{|g|^2+1}, \frac{|g|^2-1}{|g|^2+1} \right)$$

Considerando a projeção estereográfica  $F_1$  de  $S^2$ , em relação ao ponto  $(0,0,1)$ , temos

$$F_1^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$$

Então,

$$\begin{aligned} F_1^{-1} \circ N(z) &= F_1^{-1} \left( \frac{2 \operatorname{Re}\{g\}}{|g|^2+1}, \frac{2 \operatorname{Im}\{g\}}{|g|^2+1}, \frac{|g|^2-1}{|g|^2+1} \right) = \\ &= \frac{\frac{2 \operatorname{Re}\{g\}}{|g|^2+1} + i \frac{2 \operatorname{Im}\{g\}}{|g|^2+1}}{1 - \frac{|g|^2-1}{|g|^2+1}} = g(z) \end{aligned}$$

Como  $g(z)$  é meromorfa de  $D$  em  $\mathbb{C}$ , ela é analítica de  $D$  em  $\hat{\mathbb{C}}$ , donde se conclue que  $N(z)$  é analítica.  $\square$

OBSERVAÇÃO - A proposição 5 mostra que  $g(z)$  é a expressão analítica de  $N(z)$ , isto é,  $g(z)$  é a expressão de  $N(z)$  em coordenadas locais de  $M$  e  $S^2$ . Assim,  $g$  caracteriza completamente a aplicação normal de Gauss de modo que

as propriedades da aplicação normal são as propriedades correspondentes da aplicação meromorfa  $\underline{g}$ .

Observamos ainda que, como vimos na proposição 3,  $\underline{g}$  está definida globalmente. Portanto,  $\underline{g}$  é uma representação analítica global da aplicação normal de Gauss, desde que se considere

$$g : M \longrightarrow \mathbb{C}$$

dada pela composição

$$M \xrightarrow{x} x(M) \xrightarrow{N} S^2 \xrightarrow{F_1^{-1}} \mathbb{C}$$

PROPOSIÇÃO 6 - Dados  $w$  e  $g$  nas condições da proposição 4 deste capítulo, existe uma superfície mínima  $x : \bar{M} \longrightarrow \mathbb{R}^3$  onde  $\bar{M} = M$  ou  $\bar{M} = \tilde{M}$ , espaço de recobrimento universal de  $M$ , tal que se  $\bar{g}$  é a expressão analítica da aplicação de Gauss dessa superfície, tem-se  $\bar{g}(\bar{M}) = g(M)$ .

*prova:* Pela proposição 4, podemos definir as formas analíticas  $\psi_k$ , sobre  $M$  e, se  $x_k = \operatorname{Re} \left\{ \int \psi_k \right\}$  não dependem do caminho,  $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $x = (x_1, x_2, x_3)$ , define uma superfície mínima. Logo, temos  $\bar{M} = M$  e  $\bar{g} = g$  e não há o que demonstrar.

Em outro caso, considero a aplicação de cobertura universal,  $\pi : \tilde{M} \longrightarrow M$ . Temos uma forma diferencial analítica  $\tilde{w} = w \circ \pi$  e uma função meromorfa  $\tilde{g} = g \circ \pi$ , definidas sobre  $\tilde{M}$ . Podemos definir as formas diferenciais analíticas

$\tilde{\psi}_k(z)$ , como na proposição 4, e

$$x_k = \operatorname{Re} \left\{ \int \tilde{\psi}_k \right\}$$

não dependem do caminho porque  $\tilde{M}$  é simplesmente conexa. Logo,  $x : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  define uma superfície mínima para a qual,

$$\tilde{g}(\tilde{M}) = g \circ \pi(\tilde{M}) = g(M)$$

Logo,  $\bar{M} = \tilde{M}$  e  $\bar{g} = \tilde{g}$  □

PROPOSIÇÃO 7 - Seja  $\underline{S}$  uma superfície mínima definida por  $x : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  onde  $D$  é o plano todo. Então,  $x(D)$  está contido em um plano ou as normais a  $\underline{S}$  tomam todas as direções, com 2 exceções, no máximo.

*prova:* Consideremos as funções analíticas,  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ , associadas à superfície  $\underline{S}$ . Se  $\phi_1 = i\phi_2$  e  $\phi_3 = 0$ , temos  $x_3 = c \underline{te}$  e, portanto,  $x(D)$  está contido no plano.

Se este não for o caso, está definida a função meromorfa  $\underline{g}$ , no plano todo. Aplicando o pequeno teorema de Picard à função  $\underline{g}$ , concluímos que:

a) ou  $g(z)$  é constante, e neste caso, a aplicação normal  $N(z)$  é constante e, portanto,  $x(D)$  está num plano;

b) ou  $g(z)$  assume todos os valores em  $\hat{\mathbb{C}}$ , com duas exceções, no máximo. Observando a expressão de  $N(z)$  em função de  $g(z)$ , concluímos que o mesmo ocorre com  $N(z)$ , isto é, todas as direções são assumidas com, no máximo, duas exceções □

Destacamos do item anterior os exemplos:

a) superfície de Enneper -  $g(D) = \hat{C} - \{\infty\}$

b) a superfície de recobrimento universal do catinóide -

$$g(D) = \hat{C} - \{0, \infty\}$$

c) a superfície definida por  $\begin{cases} w = z^2 dz \\ g = z + \frac{1}{z} \end{cases} - g(D) = \hat{C}$

### 3 - CURVATURA GAUSSIANA e CURVATURA TOTAL

Vimos no capítulo I, 9, a definição de curvatura normal de uma superfície  $S$ , em relação a um vetor normal  $N$ , segundo direção  $T$ , em cada ponto de  $S$ ,

$$k(N, T) = \left\langle \frac{d^2 x}{ds^2}, N \right\rangle$$

onde  $x = x(s)$  é uma curva da superfície com velocidade  $T$  no ponto, parametrizada por comprimento de arco.

$$\text{Chamamos } k_1(N) = \max_T k(N, T)$$

$$k_2(N) = \min_T k(N, T)$$

as curvaturas principais de  $S$  em relação a  $N$ .

Seja  $S$  uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ , de classe  $C^2$ , dada por  $x : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Neste caso, em cada ponto de  $S$ , temos um único vetor normal  $N$ , e podemos definir a curvatura normal, em cada ponto, como função da direção  $T$ .

$$k(T) = \left\langle \frac{d^2 x}{ds^2}, N \right\rangle$$

e as curvaturas principais,  $k_1$  e  $k_2$ , são funções do ponto

de  $S$ .

É fácil ver que  $k_1$  e  $k_2$  são valores próprios da aplicação  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$ , diferencial da aplicação normal de Gauss no ponto  $(p, x(p))$ . [4]

DEFINIÇÃO 3 - Chama-se curvatura gaussiana de  $S$  em um ponto, o produto de suas curvaturas principais no ponto

$$K = k_1 k_2$$

Se  $S$  é uma superfície mínima, temos  $H = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0 \implies k_1 = -k_2 \implies K \leq 0$ .

PROPOSIÇÃO 8 - Se  $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$  é uma métrica Riemanniana de uma superfície  $S$  de classe  $C^2$  (isto é, se a superfície  $S$  está parametrizada por parâmetros isotérmicos), e  $K$  é sua curvatura gaussiana, então

$$K = - \frac{\nabla^2 \log \lambda}{\lambda^2}$$

Para provar esta proposição, usa-se a expressão de  $K$  em função dos símbolos de Kristoffel, dada pelo teorema egregio de Gauss e impõe-se as condições sobre  $g_{ij}$  para calcular esses símbolos. ([4] pg.121 - exercícios 1 e 2)

PROPOSIÇÃO 9 - A curvatura gaussiana de uma superfície mínima é identicamente nula (neste caso a superfície é plana) ou se anula apenas em pontos isolados.

*prova:* Se a superfície for plana, temos  $N(z) = c^{te} \implies k_1 = k_2 = 0$  em todo ponto  $\implies K \equiv 0$ .

Se este não for o caso, consideramos a representação de Weierstrass da superfície e temos

$$\lambda^2 = \left[ \frac{|f| (1 + |g|^2)}{2} \right]^2$$

Como a superfície é mínima, ela é de classe  $C^2$  e  $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij} \implies K = - \frac{\nabla^2 (\log \lambda)}{\lambda^2}$

Calculando o laplaciano de  $\log \lambda$ , chegamos à expressão

$$K = - \left[ \frac{4|g'|}{|f| (1 + |g|^2)^2} \right]^2$$

Portanto,

$$K = 0 \iff |g'| = 0 \iff g' = 0$$

Mas,  $g'$  é uma função analítica e, portanto, seus zeros são isolados, o que prova a proposição.  $\square$

DEFINIÇÃO 4 - Seja  $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície  $\underline{S}$ . Definimos a curvatura total de  $\underline{S}$  por

$$\iint_M |K| dA$$

PROPOSIÇÃO 10 - Se  $K$  é a curvatura Gaussiana de uma superfície  $x : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  e  $\Delta$  é um domínio tal que  $\bar{\Delta} \subset D$ , então a área da imagem de  $\Delta$  sob a aplicação normal de Gauss é igual à curvatura total da superfície  $S$  definida por  $x|_{\Delta}$

*prova:* Considero uma parametrização da superfície em parâmetros isotérmicos  $u_1, u_2$ , isto é, tal que  $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$ .  
Então, a curvatura total de  $S$  é

$$\iint_{\Delta} |K| dA = \iint_{\Delta} |K| \lambda^2 du_1 du_2$$

Como  $N(z)$  é a normal unitária em cada ponto, temos  $\langle N, N \rangle = 1 \implies \langle N, \frac{\partial N}{\partial u_1} \rangle = 0$  e  $\langle N, \frac{\partial N}{\partial u_2} \rangle = 0 \implies$

$\implies \frac{\partial N}{\partial u_1}$  e  $\frac{\partial N}{\partial u_2}$  são paralelos ao plano tangente

em cada ponto.

Assim, temos  $\frac{\partial N}{\partial u_1} = a_{11} \frac{\partial x}{\partial u_1} + a_{12} \frac{\partial x}{\partial u_2}$

$$\frac{\partial N}{\partial u_2} = a_{21} \frac{\partial x}{\partial u_1} + a_{22} \frac{\partial x}{\partial u_2}$$

$$e \quad \frac{\partial N}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial N}{\partial u_2} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial x}{\partial u_2} =$$

$$= \det(dN) \cdot \frac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial x}{\partial u_2} =$$

$$= K \cdot \frac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial x}{\partial u_2}$$

A área da imagem de  $\Delta$  sob a aplicação normal de Gauss,  $N(z)$ , sobre a esfera, é dada por

$$\begin{aligned} & \iint_{\Delta} \left| \frac{\partial N}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial N}{\partial u_2} \right| du_1 du_2 = \\ & = \iint_{\Delta} |K| \left| \frac{\partial x}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial x}{\partial u_2} \right| du_1 du_2 = \\ & = \iint_{\Delta} |K| \lambda^2 du_1 du_2 = \iint_{\Delta} |K| dA \quad \square \end{aligned}$$

OBSERVAÇÃO: Para superfícies mínimas temos  $K \leq 0$  e  $g: M \rightarrow \mathbb{C}$ , definida globalmente sobre  $M$ . Logo, podemos escrever,

$$\iint_M K dA = \iint_M K \lambda^2 du_1 du_2 = - \iint_M \left( \frac{2|g'|}{1+|g|^2} \right)^2 du_1 du_2$$

## CAPÍTULO IV

### AS NORMAIS A UMA SUPERFÍCIE MÍNIMA COMPLETA

Neste capítulo procuramos analisar o comportamento global das normais a uma superfície mínima completa em  $\mathbb{R}^3$ .

Todo o capítulo é resultado da aplicação dos dois teoremas de Picard. O "pequeno", enunciado na introdução ao capítulo III, traz como consequências, neste capítulo, os teoremas 1, 2 e 3. Esses teoremas analisam o conjunto imagem da aplicação normal de Gauss,  $N(M)$ , em  $S^2$ . O principal resultado, então, é dado pelo teorema 3, exibindo superfícies em que o conjunto  $E = S^2 - N(M)$  tem exatamente  $k$  elementos, onde  $k = 0, 1, 2, 3$  ou  $4$ .

O "grande" teorema de Picard: "Dada uma função meromorfa  $g$ , se um ponto for singularidade essencial de  $g$ , então  $g$  assume todos os valores, infinitas vezes, em qualquer vizinhança do ponto, com no máximo duas exceções" ([8], pg.45), traz como consequência imediata, o lema 4 e consequentemente, o importante teorema 5.

Parece que a variedade  $M = \tilde{M} - \{p_1, \dots, p_k\}$  dada pelo teorema 4 e a curvatura total  $\iint_M |K| dA = 4\pi m$ , dada

pelo teorema 5 , classificam as superfícies mínimas completas com curvatura total finita. O teorema 7 exemplifica este fato para o caso  $m = 1$  .

O teorema 6 garante que a superfície em que  $k = 4$  , dada no teorema 3 , não pode ter curvatura total finita, pois, neste caso,  $k \leq 3$  .

Temos exemplos de superfícies mínimas completas com curvatura total finita para os casos  $k = 0$  ,  $k = 1$  ,  $k = 2$  , dados no capítulo III .

A superfície para  $k = 3$  , dada no teorema 3 , tem curvatura total infinita. A existência de superfície mínima completa com curvatura total finita cuja aplicação normal omite exatamente 3 pontos de  $S^2$  é problema aberto.

Para estudar estas superfícies, na linha deste trabalho, devemos empregar funções elíticas em lugar de funções analíticas pois, o corolário do teorema 6 mostra que, se  $k = 3$  , então  $\tilde{M}$  é um  $n$ -toro ( $n \geq 1$ )

O teorema 3 não garante a não existência de superfícies mínimas completas para  $k > 4$  . Apenas, pelo teorema 6 , se essas superfícies existirem, têm que ter curvatura total infinita. Sua existência é também problema aberto.

#### 1 - AS NORMAIS A UMA SUPERFÍCIE MÍNIMA COMPLETA

LEMA 1 - Seja  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  uma função analítica onde  $D$  é o disco unitário com, no máximo, um número finito de ze

ros. Então, existe um caminho divergente  $C$ , em  $D$ , tal que

$$\int_C |f(z)| |dz| < \infty$$

prova: a) Suponhamos que  $f(z) \neq 0$ ,  $\forall z \in D$

Definamos a função

$$F(z) = \int_0^z f(\xi) d\xi$$

onde a integral é calculada sobre qualquer caminho ligando  $0$  a  $z$ , no disco  $D$ .

Temos que  $F(z)$  é analítica em  $D$  e  $F'(z) = f(z) \neq 0$ ,  $\forall z \in D$ . Logo, o jacobiano de  $F$ ,  $JF = F'(z)$ , é não nulo em todo ponto de  $D$  e, portanto,  $F$  é um difeomorfismo local  $\implies \exists G = F^{-1}$  em uma vizinhança de cada ponto  $z \in D$ .

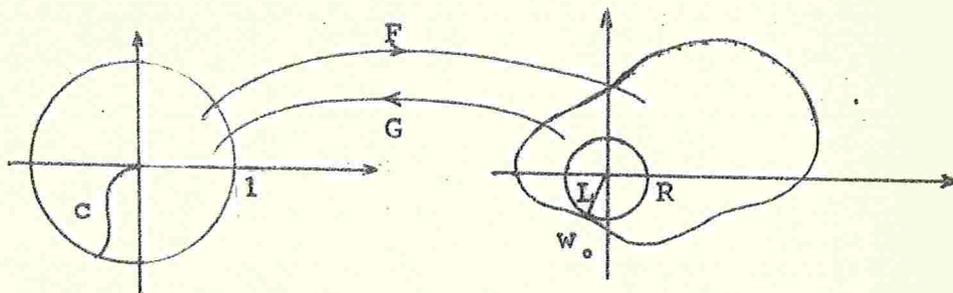
Como  $F(0) = 0$ , seja  $z = G(w)$  a inversa de  $F$  que satisfaz  $G(0) = 0$ .

Temos  $|z| = |G(w)| < 1 \implies G$  é analítica, limitada e não é constante  $\implies G$  não pode estar definida em todo plano, pelo teorema de Liouville. Portanto, existe um maior disco

$$|w| < R < \infty$$

no qual  $G(w)$  está definida.

Logo, existe um ponto  $w_0$ , com  $|w_0| = R$  tal que  $G(w)$  não pode ser estendida a uma vizinhança de  $w_0$ .



Seja  $L$  o segmento de reta definido por  $w = tw_0$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , e seja  $C$  a imagem de  $L$  por  $G$ .

Consideremos uma seqüência  $\{t_n\}$  tal que  $t_n \rightarrow 1$ , e a seqüência  $\{w_n\}$  correspondente. Temos  $w_n \rightarrow w_0$  sobre  $L$  e, pela aplicação  $G$ , os pontos  $w_n$  são levados em uma seqüência  $z_n$  em  $C$ .

Suponhamos que  $z_n \rightarrow z_0$  e  $z_0 \in D$ . Então, temos  $F(z_0) = w_0$  e  $F'(z_0) = f(z_0) \neq 0 \implies$  a função  $G(w)$  pode ser estendida a uma vizinhança de  $w_0$ , o que é absurdo.

Assim, devemos ter  $z_0 \in \partial D$  e o caminho  $C$  é divergente.

Temos agora, por cálculos,

$$\begin{aligned} \int_C |f(z)| |dz| &= \int_0^1 |f(z(t))| \left| \frac{dz}{dt} \right| dt = \\ &= \int_0^1 \left| \frac{d}{dt} (F(z(t))) \right| dt = \int_0^1 \left| \frac{dw}{dt} \right| dt = R < \infty \end{aligned}$$

b) Suponhamos que  $f(z)$  tem um número finito de zeros de ordem  $p_k$ , nos pontos  $z_k$ .

Consideremos a função

$$f_1(z) = f(z) \cdot \prod_k \left( \frac{1 - \bar{z}_k z}{z - z_k} \right)^{p_k}$$

Temos  $f(z) = \prod_k (z - z_k)^{p_k} \tilde{f}(z)$  onde  $\tilde{f}(z)$  é analítica e não se anula em  $D$ .

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \tilde{f}(z) \prod_k (z - z_k)^{p_k} \cdot \prod_k \left( \frac{1 - \bar{z}_k z}{z - z_k} \right)^{p_k} = \\ &= \tilde{f}(z) \prod_k (1 - \bar{z}_k z)^{p_k} \end{aligned}$$

Temos, então,

$$\begin{aligned} f_1(z) = 0 &\iff 1 - \bar{z}_k z = 0 \quad \text{para algum } k \iff \\ &\iff z = \frac{z_k}{|\bar{z}_k|^2} \quad \text{para algum } k \end{aligned}$$

Mas, neste caso,  $|z| = \frac{1}{|z_k|} > 1 \implies z \notin D$

Isto é,  $f_1(z)$  não se anula em  $D$  e, pela parte a, existe um caminho divergente  $C$ , tal que

$$\int_C |f_1(z)| |dz| < \infty$$

Por outro lado, sabemos que se  $|z_k| < 1$  e  $|z| < 1$ ,

então, 
$$\left| \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z} \right| < 1$$

e, portanto,

$$|f(z)| = |f_1(z)| \cdot \prod_k \left| \frac{z - z_k}{1 - \bar{z}_k z} \right| < |f_1(z)| \implies$$

$$\Rightarrow \int_c |f(z)| |dz| < \int_c |f_1(z)| |dz| < \infty \quad \square$$

TEOREMA 1 - Seja  $S$  uma superfície mínima, regular e completa em  $\mathbb{R}^3$ , definida por  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  e seja  $N(z)$  a aplicação normal de Gauss para  $S$ . Então, ou  $N(M)$  é constante (neste caso  $S$  é um plano) ou  $N(M)$  é densa em  $S^2$ .

*prova:* Suponhamos que  $N(M)$  não é densa em  $S^2$ . Então, existe um aberto  $U$ , na esfera unitária, tal que  $U \cap N(M) = \emptyset$

Por rotação do espaço  $\mathbb{R}^3$ , podemos assumir que o ponto  $(0,0,1)$  está nesse aberto. Então, pondo  $N = (N_1, N_2, N_3)$  temos que  $\exists \eta > 0$  tal que  $N_3 \leq \eta < 1$ .

Consideremos a superfície de cobertura universal de  $S$ ,  $\tilde{S}$ , definida por  $\tilde{x} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$  sendo  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$  a aplicação de cobertura de  $M$ , correspondente.

Temos  $\tilde{N} = N \circ \pi$ , a aplicação normal de Gauss para  $\tilde{S}$ , e

$$\tilde{N}(\tilde{M}) = N \circ \pi(\tilde{M}) = N(M)$$

donde  $\tilde{N}_3 \leq \eta < 1$

Por outro lado,  $\tilde{S}$  é simplesmente conexa e pode ser representada na forma  $\tilde{x} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  onde  $D$  é o plano todo ou o disco unitário.

Considerando a representação de Weierstrass de  $\tilde{S}$ , temos as funções  $f(z)$  e  $g(z)$ , definidas em  $D$  e

$$\tilde{N}(z) = \left( \frac{2 \operatorname{Re}\{g\}}{|g|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im}\{g\}}{|g|^2 + 1}, \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right)$$

Então,

$$\tilde{N}_3 \leq \eta < 1 \iff \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \leq \eta \iff |g| \leq \sqrt{\frac{1 + \eta}{1 - \eta}} = K$$

O fato de  $|g| \leq K < \infty$ , implica que  $g$  não tem polos em  $D$  e, como  $\tilde{S}$  é regular,  $f$  não tem zeros em  $D$ .

Temos

$$g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij} \quad \text{onde} \quad \lambda^2 = \left[ \frac{|f| (1 + |g|^2)}{2} \right]^2$$

Seja  $C$  um caminho em  $\tilde{S}$ , dado por  $x(u_1(t), u_2(t))$ ,  $a \leq t \leq b$ . Então, o módulo de sua velocidade será

$$\begin{aligned} |v|^2 &= g_{11} (u_1'(t))^2 + 2g_{12} u_1'(t) u_2'(t) + g_{22} (u_2'(t))^2 = \\ &= \lambda^2 \left[ (u_1'(t))^2 + (u_2'(t))^2 \right] = \lambda^2 |u'(t)|^2 \implies \end{aligned}$$

$$\implies |v| = \lambda |u'(t)|$$

Logo, o comprimento da curva será

$$L(C) = \int_a^b |v| dt = \int_a^b \lambda |u'(t)| dt = \int_c \lambda |dz| \implies$$

$$\implies L(C) = \frac{1}{2} \int_c |f| (1 + |g|^2) |dz| \leq \frac{1+K^2}{2} \int_c |f| |dz|$$

Se  $D$  for um disco, como  $f$  não se anula em  $D$ ,

podemos aplicar o lema 1, isto é, existe um caminho divergente  $C$  tal que

$$L(C) < \frac{1 + K^2}{2} \int_C |f| |dz| < \infty$$

e, portanto,  $\tilde{S}$  não pode ser completa, isto é,  $\tilde{M}$  não é completa. Portanto,  $M$  não é completa, contrariando a hipótese de que  $\underline{S}$  é completa. Portanto,  $D$  é o plano todo e, aplicando a proposição 7 do capítulo III, concluimos que  $x(D)$  está contido num plano ou  $N(M)$  assume todas as direções com duas exceções no máximo.

A última hipótese, porém, está eliminada porque, por hipótese, existe um aberto  $U$  tal que  $U \cap \tilde{N}(\tilde{M}) = \emptyset$ . Logo,  $\tilde{S}$  está contida em um plano, isto é,  $N(M) = \tilde{N}(\tilde{M}) = \text{cte}$ , e, portanto,  $S$  também está contida em um plano. Como  $S$  é completa, concluimos que  $\underline{S}$  é o plano todo.  $\square$

OBSERVAÇÃO: O teorema 1 ainda é verdadeiro se  $\underline{S}$  não é regular em apenas um número finito de pontos já que, ainda neste caso, podemos aplicar o lema 1.

Corolário (Teorema de Bernstein)

O gráfico de uma função definida em  $\mathbb{R}^2$ , com valores em  $\mathbb{R}$ , é uma superfície mínima em  $\mathbb{R}^3 \iff$  é um plano.

*prova:* O gráfico de uma aplicação de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}$  é uma superfície na forma não paramétrica,  $x_3 = f(x_1, x_2)$ , defi

nida em todo plano  $\mathbb{R}^2$ , regular e completa. As normais a essa superfície são tais que  $N(\mathbb{R}^2)$  está contido em um único hemisfério de  $S^2$ . Logo,  $N(\mathbb{R}^2)$  não é denso em  $S^2$  e, portanto, a superfície é o plano.

DEFINIÇÃO 1 - Seja  $D$  um domínio no plano complexo  $\mathbb{C}$ . O complemento  $E$  de  $D$ , sobre a esfera de Riemann (isto é, sobre  $\hat{\mathbb{C}}$ ) tem capacidade logarítmica zero  $\iff$  a função  $\log(1+|w|^2)$ , definida em  $D$ , não tem majorante harmônica em  $D$ .

TEOREMA 2 - Seja  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície mínima, regular e completa,  $S$ , e seja  $N(z)$  a aplicação normal de Gauss de  $S$ . Então, ou  $S$  é um plano, ou o conjunto  $E = S^2 - N(M)$  tem capacidade logarítmica zero.

*prova:* Suponhamos que  $S$  não seja plano. Consideremos a aplicação meromorfa  $g : M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ , expressão analítica de  $N(z)$ , para a superfície  $S$ .

Seja  $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ , a aplicação de cobertura de  $M$  que define a superfície de cobertura universal,  $\tilde{S}$ , de  $S$ .

Temos,

$$\tilde{g} = g \circ \pi \implies \tilde{g}(\tilde{M}) = g(M)$$

Mas,  $\tilde{S}$  pode ser representada na forma  $\tilde{x} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  onde  $D$  é o disco unitário ou o plano todo, isto é  $\tilde{M} = D$  e

$$\tilde{g}(D) = g(M)$$

Assim, temos

$$F_1^{-1}(\tilde{g}(D)) = F_1^{-1}(g(M)) \Rightarrow \tilde{N}(D) = N(M) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = S^2 - \tilde{N}(D)$$

Se  $E$  é vazio, não há o que demonstrar.

Suponhamos  $E \neq \emptyset$ . Podemos assumir que  $(0,0,1) \in E$  (pelo menos depois de uma rotação do espaço  $\mathbb{R}^3$ ).

a) Suponhamos que  $D$  é o plano todo.

Então, pela proposição 7 do capítulo III,  $E$  pode conter, no máximo, dois pontos.

Se  $E$  contém só o ponto  $(0,0,1)$ , temos  $g(M) = \tilde{g}(D) = \mathbb{C}$ . Se existir uma função harmônica  $h(w)$ , definida em  $g(M)$  que majora  $\log(1+|w|^2)$ , temos

$$h(w) \geq \log(1+|w|^2) \geq 0$$

Então,  $h(w)$  é harmônica definida no plano todo e limitada. Logo,  $h(w)$  é constante. Mas isto é absurdo porque

$$\log(1+|w|^2) \rightarrow \infty \text{ quando } |w| \rightarrow \infty$$

e, portanto, não pode ser majorada por constante.

Se  $E$  contém dois pontos, temos  $g(M) = \mathbb{C} - \{z_0\}$

Considero a aplicação recobrimento de  $\mathbb{C} - \{z_0\}$  dada por  $w = w(z) = z_0 - e^z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

Supondo que exista  $h(w)$ , harmônica em  $g(M)$  que majora  $\log(1+|w|^2)$ , temos

$$h(w(z)) \geq \log(1+|w(z)|^2) \geq 0$$

Mas, a função  $H(z) = h(w(z))$  é harmônica como composta de função harmônica e analítica, definida no plano todo e limitada. Logo, recaímos no mesmo absurdo anterior.

Logo,  $E$  tem capacidade logaritmica zero.

b) Suponhamos que  $D$  é o disco  $|z| < 1$ .

A função  $\tilde{g}(z)$  é analítica em  $D$  porque estamos supondo que  $(0,0,1) \notin \tilde{N}(D) = N(M)$ . Portanto, como  $\tilde{S}$  é regular, temos que  $\tilde{f}(z) \neq 0, \forall z \in D$ .

Suponhamos que existe uma função harmônica  $h(w)$ , definida em  $\tilde{g}(D)$  tal que  $\log(1+|w|^2) \leq h(w)$

Então,  $h(\tilde{g}(z))$  é harmônica em  $D$ , como composta de harmônica com analítica. Seja  $G(z)$  uma função analítica em  $D$  cuja parte real é  $h(\tilde{g}(z))$ , e seja  $F(z) = e^{G(z)}$

Temos  $|F(z)| = e^{h(\tilde{g}(z))}$  e

$$\log(1+|\tilde{g}(z)|^2) \leq h(\tilde{g}(z)) \Rightarrow 1+|\tilde{g}(z)|^2 \leq |F(z)|$$

Seja  $C$  um caminho divergente qualquer em  $D$

$$L(C) = \int_C \lambda |dz| = \frac{1}{2} \int_C |\tilde{f}| (1+|\tilde{g}|^2) |dz| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_C |\tilde{f}F(z)| |dz|$$

Mas a função  $\tilde{f}F(z)$  é analítica em  $D$ , como produto de funções analíticas e não se anula em  $D$ . Logo, pelo lema 1, existe um caminho divergente para o qual a integral

converge. Logo, a superfície de cobertura universal  $\tilde{S}$ , não pode ser completa e, portanto,  $S$  não é completa.

Assim, o conjunto  $E$  tem capacidade logarítmica zero.  $\square$

TEOREMA 3 - Se  $E$  é um conjunto arbitrário de  $k$  pontos sobre a esfera unitária, com  $k \leq 4$ . Então existe uma superfície mínima regular e completa em  $\mathbb{R}^3$  cuja imagem da aplicação normal de Gauss omite precisamente o conjunto  $E$ .

*prova:* Se  $k = 0$ , temos a superfície definida por  $f(z) = z^2$  e  $g(z) = z + \frac{1}{z}$ ,  $z \in \mathbb{C}$

Suponhamos, então,  $0 < k \leq 4$ . Por uma rotação do espaço podemos assumir que  $(0,0,1) \in E$ .

Se  $(0,0,1)$  é o único ponto de  $E$ , a superfície de Enneper ( $f(z) = 1$  e  $g(z) = z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ) resolve o problema.

Suponhamos, portanto,  $1 < k \leq 4$  e sejam  $w_m$ ,  $m = 1, \dots, k-1$ , as imagens dos pontos de  $E$ , diferentes de  $(0,0,1)$ , sob a projeção estereográfica.

Consideremos  $M = \mathbb{C} - \{w_m ; m = 1, \dots, k-1\}$  e consideremos sobre  $M$ , a forma diferencial analítica  $w = f(z) dz$  onde  $f(z) = \frac{1}{\prod_{m=1}^{k-1} (z-w_m)}$  e a função meromorfa  $g(z) = z$ .

Como  $g$  não tem polos e  $w$  não tem zeros em  $M$ , estamos nas condições da proposição 6 do capítulo III, isto é, existe

uma superfície mínima  $x : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ , tal que  $\bar{g}(\bar{M}) = g(M)$  se  $\bar{g}$  é a expressão analítica de sua aplicação normal.

Como  $g(M)$  omite  $\{w_m ; m = 1, \dots, k-1\}$ , segue que  $N(\bar{M})$  omite  $E$ .

Que esta superfície é regular, é imediato, porque  $f$  não a anula e  $g$  não tem polos em  $M$ . Resta mostrar que ela é completa.

A proposição 6 do capítulo III mostra que  $\bar{M} = M$  ou  $\bar{M} = \tilde{M}$  onde  $\tilde{M}$  é variedade de recobrimento de  $M$ . Em qualquer dos casos, a superfície é completa se  $M$  é completa.

Mostremos, pois, que  $M$  é completa em relação à métrica  $g_{ij} = \lambda \delta_{ij}$  onde  $\lambda = \frac{1}{2} |f| (1 + |g|^2)$

Um caminho divergente  $C$ , em  $M$ , é um caminho que contém uma sequência  $\{z_j\}_j$  tal que  $z_j \rightarrow \infty$  ou  $z_j \rightarrow w_m$

a) Suponhamos o primeiro caso, isto é,  $\exists \{z_j\}_j$  tal que  $z_j \rightarrow \infty$

$$\text{Temos } \lambda = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{\prod_{m=1}^{k-1} (z-w_m)} \right| (1 + |z|^2)$$

$$\begin{aligned} \text{Então, } 2 L(C) &= \int_C 2\lambda |dz| = \int_C \left| \frac{1}{\prod_{m=1}^{k-1} (z-w_m)} \right| (1 + |z|^2) |dz| = \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-z_0}^z \left| \frac{1}{\prod_{m=1}^{k-1} (z-w_m)} \right| (1 + |z|^2) |dz| \geq \end{aligned}$$

$$\geq \left| \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{z_0}^z \frac{1+z^2}{\prod_{m=1}^{k-1} (z-w_m)} dz \right|$$

Mas, o limite é uma integral do tipo  $\int_{z_0}^{\infty} \frac{P_1(z)}{P_2(z)} dz$  onde

de  $P_1(z)$  e  $P_2(z)$  são polinômios.

Esta integral diverge se, e somente se,

$$\text{grau } P_1 - \text{grau } P_2 \geq -1 \implies 2-k+1 \geq -1 \implies k \leq 4$$

Logo,  $L(C) = \infty$

b) Suponhamos que  $C$  contém  $\{z_j\}_j$  tal que  $z_j \rightarrow w_m$ , para algum  $m$ . Por exemplo, seja  $m = 1$ .

Então, temos

$$2 L(C) = \int_C 2\lambda |dz| \geq \int_C \left| \frac{1+z^2}{\prod_{m=2}^{k-1} (z-w_m)} \right| \cdot \frac{1}{|z-w_1|} |dz|$$

Mas,  $\exists K > 0$  tal que  $\left| \frac{1+z^2}{\prod_{m=2}^{k-1} (z-w_m)} \right| \geq K, \forall z \in C$

e, portanto,

$$2 L(C) \geq K \int_C \frac{|dz|}{|z-w_1|} \geq K \left| \int_{z_0}^{w_1} \frac{dz}{z-w_1} \right| = \infty$$

Logo,  $M$  é completa e, portanto, a superfície mínima encontrada é regular e completa, o que demonstra o teorema  $\square$

2 - AS NORMAS A UMA SUPERFÍCIE MÍNIMA COMPLETA COM CURVATURA TOTAL FINITA

LEMA 2 - Seja  $D$  um domínio no plano complexo e  $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$  uma métrica Riemanniana em  $D$  tal que  $\lambda = \lambda(z)$  é de classe  $C^2$ . Suponhamos que  $D$  seja completa em relação a essa métrica. Se existe uma função harmônica  $h(z)$ , em  $D$ , tal que

$$\log \lambda(z) \leq h(z), \quad \forall z \in D$$

então,  $D$  é o plano todo ou o plano sem um ponto.

prova: Definimos em  $D$  uma nova métrica Riemanniana  $\tilde{g}_{ij} = \tilde{\lambda}^2 \delta_{ij}$ , onde  $\tilde{\lambda}(z) = e^{h(z)}$

$$\begin{aligned} \text{Temos, } \log \lambda(z) \leq h(z) &\implies \lambda(z) \leq e^{h(z)} \implies \\ &\implies \lambda(z) \leq \tilde{\lambda}(z), \quad \forall z \in D \end{aligned}$$

Seja  $\gamma$  qualquer caminho divergente em  $D$ . Calculando seu comprimento na nova métrica, temos

$$\int_{\gamma} \tilde{\lambda}(z) |dz| \geq \int_{\gamma} \lambda(z) |dz| = \infty$$

e, portanto,  $D$  é completo em relação à nova métrica.

Seja  $\pi : \tilde{D} \rightarrow D$  a aplicação de recobrimento universal de  $D$ . Então,  $\tilde{D}$  é completo em relação à métrica induzida  $\tilde{\lambda}(\pi(z)) = e^{h(\pi(z))} = e^{\tilde{h}(z)}$

Considerando para  $\tilde{D}$  um atlas tal que  $\tilde{F}_\alpha = F_\alpha \circ \pi$ , temos  $F_\alpha \circ \pi \circ \tilde{F}_\alpha^{-1} = \text{id}$  e, portanto,  $\pi$  é analítica

e  $\tilde{h}(z)$  é harmônica em  $\tilde{D}$ .

Seja  $f(z)$  uma função analítica, definida em  $\tilde{D}$ , cuja parte real é  $\tilde{h}(z)$  e consideremos a aplicação de  $\tilde{D}$  em  $\tilde{D}$ , definida por

$$w(z) = \int_{z_0}^z e^{f(\xi)} d\xi, \quad z \in \tilde{D}$$

onde  $z_0$  é um ponto fixado em  $\tilde{D}$ . A função está bem definida porque  $\tilde{D}$  é simplesmente conexo.

Temos

$$\left| \frac{dw}{dz} \right| = \left| e^{f(z)} \right| = e^{\tilde{h}(z)} = \tilde{\lambda}(\pi(z)) \neq 0$$

Então, qualquer curva  $\gamma$  em  $\tilde{D}$  tem comprimento

$$\tilde{L}(\gamma) = \int_{\gamma} \tilde{\lambda}(\pi(z)) |dz| = \int_{\gamma} \left| \frac{dw}{dz} \right| |dz| = \int_{w(\gamma)} |dw|$$

isto é, o comprimento de qualquer curva em  $\tilde{D}$  é igual ao comprimento euclidiano de sua imagem em  $\tilde{D}$  pela aplicação  $w(z)$ .

Por outro lado, como  $\left| \frac{dw}{dz} \right| \neq 0$ ,  $\forall z \in \tilde{D}$ , temos que  $w(z)$  é difeomorfismo local e, portanto, admite uma inversa definida em uma vizinhança de cada ponto de  $w(\tilde{D})$ .

Temos  $w(z_0) = 0$  e podemos considerar a inversa definida numa vizinhança de zero em  $\tilde{D}$  com imagens numa vizinhança de  $z_0$  em  $\tilde{D}$ .

Repetindo o raciocínio do lema 1 deste capítulo con

cluimos que  $\exists w_0 \in \tilde{D}$  com  $|w_0| = R$  e a bola  $|w_0| \leq R$  con-  
tida em  $w(\tilde{D})$  tal que, considerando o caminho  $L$  definido  
por  $w = tw_0$ ,  $0 \leq t < 1$ , e sua imagem  $C = w^{-1}(L)$  em  $\tilde{D}$ ,  
esta tem que ser um caminho divergente.

$$\text{Mas, } \tilde{L}(C) = \int_L |dw| = R \quad \text{e como } \tilde{D} \text{ é comple}$$

to, segue que  $R = \infty$

Logo, existe uma inversa definida em todo plano, isto é, a aplicação  $w : \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{C}$  é difeomorfismo global. Como  $w$  é analítica,  $\tilde{D}$  é conformemente equivalente ao plano.

Considerando a função analítica

$$\pi \circ w^{-1} : \mathbb{C} \longrightarrow D \subset \mathbb{C}$$

temos, pelo pequeno teorema de Picard, que  $D$  é o plano todo ou  $D = \mathbb{C} - \{p\}$  para algum  $p \in \mathbb{C}$  □

LEMA 3 - Seja  $D = \{z \in \mathbb{C} / 0 < r_1 < |z| < r_2 \leq \infty\}$  e seja  $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$  uma métrica Riemanniana em  $D$  tal que  $\lambda = \lambda(z)$  é de classe  $C^2$ . Suponhamos que exista uma função harmônica  $h(z)$ , em  $D$ , tal que

$$\log \lambda(z) \leq h(z), \quad \forall z \in D$$

e que  $\int_C \lambda |dz| = \infty$  para todo caminho  $\gamma(t)$ ,  $0 \leq t < 1$ ,

tal que  $\lim_{t \rightarrow 1} |\gamma(t)| = r_2$ . Então,  $r_2 = \infty$

prova: Suponhamos  $r_2 < \infty$

Por uma mudança conforme de variáveis, da forma  $z \mapsto cz$ ,  
 $c \in \mathbb{R}$ , podemos supor  $r_1$  e  $r_2$  tais que

$$r_1 < \frac{1}{r_2} < 1 < r_2$$

Seja  $\Delta = \{z \mid \frac{1}{r_2} < |z| < r_2\}$

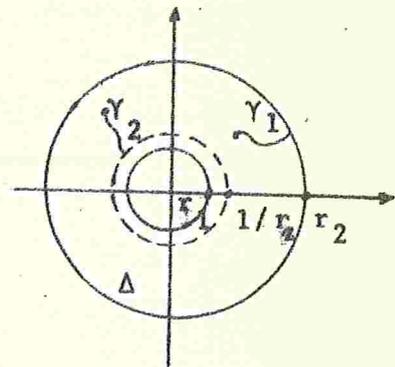
e consideremos em  $\Delta$  a métrica

$$\tilde{g}_{ij} = \tilde{\lambda}^2 \delta_{ij}$$

onde  $\tilde{\lambda}(z) = \lambda(z) \cdot \lambda\left(\frac{1}{z}\right)$ ,

que está bem definida porque

$\forall z \in \Delta$ , temos  $\frac{1}{z} \in \Delta$ .



Temos  $\log \lambda(z) \leq h(z)$  para  $r_1 < |z| < r_2$

e  $\log \lambda\left(\frac{1}{z}\right) \leq h\left(\frac{1}{z}\right)$  para  $\frac{1}{r_2} < |z| < \frac{1}{r_1}$ ,

e, portanto,  $\log \tilde{\lambda}(z) = \log \lambda(z) + \log \lambda\left(\frac{1}{z}\right) \leq h(z) + h\left(\frac{1}{z}\right)$

para  $\frac{1}{r_2} < |z| < r_2$ , isto é, para  $z \in \Delta$

Definindo  $H(z) = h(z) + h\left(\frac{1}{z}\right)$ , temos  $\log \tilde{\lambda}(z) \leq H(z)$ ,

$\forall z \in \Delta$  onde  $H(z)$  é harmônica em  $\Delta$  e  $\tilde{\lambda}(z)$  de classe  $C^2$ .

Vamos mostrar que  $\Delta$  é completo em relação a essa métrica.

Os caminhos divergentes de  $\Delta$  são da forma  $\gamma(t)$ ,  $0 \leq t < 1$ ,

tais que  $\lim_{t \rightarrow 1} |\gamma(t)| = r_2$  ou  $\lim_{t \rightarrow 1} |\gamma(t)| = \frac{1}{r_2}$

Seja  $\gamma_1(t)$ ,  $0 \leq t < 1$ , tal que  $\lim_{t \rightarrow 1} |\gamma_1(t)| = r_2$ ,

em  $\Delta$ .

Chamando  $z_1 = \lim_{t \rightarrow 1} \gamma_1(t)$ , temos  $|z_1| = r_2 \implies$   
 $\implies \left| \frac{1}{z_1} \right| = \frac{1}{r_2} \implies$  existe vizinhança  $V$  de  $\frac{1}{z_1}$  tal que  $\bar{V} \subset D$ .  
Logo,  $\lambda\left(\frac{1}{z}\right)$  está definida e é limitada em  $\bar{V}$ .

Por outro lado, pondo  $U = \left\{ \frac{1}{z} / z \in \gamma_1(t) \right\} - V$ , te-  
mos um compacto em  $\Delta$  e, portanto,  $\lambda\left(\frac{1}{z}\right)$  está definida e  
é limitada em  $U$ .

Portanto,  $\exists K > 0 / \lambda\left(\frac{1}{z}\right) \geq K, \forall z \in \gamma_1(t)$ .

Assim,

$$\int_{\gamma_1} \tilde{\lambda}(z) |dz| = \int_{\gamma_1} \lambda(z) \lambda\left(\frac{1}{z}\right) |dz| \geq K \int_{\gamma_1} \lambda(z) |dz| = \infty$$

Do mesmo modo, seja  $\gamma_2(t), 0 \leq t < 1$ , um cami-  
nho tal que  $\lim_{t \rightarrow 1} |\gamma_2(t)| = \frac{1}{r_2}$ . Logo, o caminho  $\gamma_3(t) =$   
 $\frac{1}{\gamma_2(t)}$  é tal que  $\lim_{t \rightarrow 1} |\gamma_3(t)| = r_2$  e, portanto,

$$\int_{\gamma_3} \tilde{\lambda}(z) |dz| = \int_{\gamma_3} \lambda(z) \lambda\left(\frac{1}{z}\right) |dz| = \infty \implies$$

$$\implies \int_{\gamma_2} \tilde{\lambda}(z) |dz| \geq \frac{1}{(r_2)^2} \int_{\gamma_3} \tilde{\lambda}(z) |dz| = \infty$$

Logo,  $\int_{\gamma} \tilde{\lambda}(z) |dz| = \infty$  para qualquer caminho di-

vergente em  $\Delta$  e, portanto,  $\Delta$  é completo. Assim, pelo le-  
ma 1,  $\Delta = \mathbb{C}$  ou  $\Delta = \mathbb{C} - \{p\}$ , contra a hipótese de que  
 $r_2 < \infty$  ■

Enunciamos, no capítulo II, o teorema da uniformização : "A superfície de recobrimento universal de qualquer superfície de Riemann é conformemente equivalente a um disco, um plano ou a uma esfera."

Este teorema leva à classificação das superfícies de Riemann simplesmente conexas em elíticas, parabólicas ou hiperbólicas .

As superfícies elíticas são aquelas que são conformemente equivalentes à esfera  $S^2$  (logo, são compactas). As parabólicas são as equivalentes ao plano complexo  $(\mathbb{C})$  . As hiperbólicas são as equivalentes a um disco  $(D \subset \mathbb{C})$  .

Como uma superfície mínima não pode ser compacta, concluímos que as superfícies mínimas simplesmente conexas são parabólicas ou hiperbólicas.

Daremos, a seguir, uma caracterização das superfícies simplesmente conexas não compactas (não necessariamente mínimas) como parabólicas ou hiperbólicas, pela existência ou não de funções de Green definidas sobre elas. Como tais superfícies são cobertas por uma só carta, é suficiente estudar a existência de funções de Green em regiões do plano complexo.

Dada uma região  $T \subset \mathbb{C}$  e um ponto  $\xi \in T$ , podemos procurar uma função  $H_\xi(z)$ , definida em  $T$ , harmônica, tal que 
$$H_\xi(z) = \log |z - \xi|, \quad \forall z \in \partial T$$

DEFINIÇÃO 2 - Se existir tal função, definimos  $G_\xi(z) = H_\xi(z) - \log|z - \xi|$  em  $T - \{\xi\}$ , que é chamada função de Green relativa a  $\xi$ .

PROPOSIÇÃO 1 - Se  $T$  é um domínio simplesmente conexo em  $\mathbb{C}$ , conformemente equivalente ao disco unitário  $D \subset \mathbb{C}$ , e se  $F : T \rightarrow D$  é uma função analítica e bijetora tal que  $f(z_0) = 0$ ,  $z_0 \in T$ , então, a função  $-\log|f(z)|$  é uma função de Green para  $T$ , relativa ao ponto  $z_0$ , isto é,

$$G_{z_0}(z) = -\log|f(z)|$$

*prova:* Considero o desenvolvimento em série de Taylor em uma vizinhança  $U$  de  $z_0$ , em  $T$ ,  $f(z) = a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$ , onde  $a_1 \neq 0$  porque sendo  $f$  bijetora,  $\frac{df}{dz}(z_0) \neq 0$ .

Temos, em  $U$ ,

$$f(z) = (z - z_0) \left( a_1 + a_2(z - z_0) + \dots \right)$$

$$|f(z)| = |z - z_0| \left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i (z - z_0)^{i-1} \right|$$

$$-\log|f(z)| = \log \frac{1}{|z - z_0|} + \log \frac{1}{\left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i (z - z_0)^{i-1} \right|}$$

Defino, em  $T$ , a função  $H_{z_0}(z)$  por

$$\begin{cases} H_{z_0}(z) = -\log|f(z)| + \log|z - z_0|, & \text{para } z \neq z_0. \\ H_{z_0}(z) = \log \frac{1}{\left| \sum_{i=1}^{\infty} a_i (z - z_0)^{i-1} \right|}, & \text{para } z = z_0. \end{cases}$$

que está bem definida porque a série  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i (z-z_0)^{i-1}$  converge em  $z_0$  e é diferente de zero. Na verdade, em  $U - \{z_0\}$ , qualquer uma das expressões serve para calcular  $H_{z_0}(z)$ .

Vamos mostrar que  $H_{z_0}(z)$  assim definida é harmônica em  $T$ :

Em  $U$ ,  $H_{z_0}(z) = \log \left| \frac{1}{\sum_{i=1}^{\infty} a_i (z-z_0)^{i-1}} \right|$  é harmônica porque  $\log|z|$  é harmônica e  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i (z-z_0)^{i-1}$  é analítica.

Pela mesma razão,  $-\log|f(z)|$  e  $\log|z-z_0|$  são harmônicas em  $T - \{z_0\}$ .

Logo,  $H_{z_0}(z) = -\log|f(z)| + \log|z-z_0|$  é harmônica em  $T - \{z_0\}$ .

Assim,  $H_{z_0}$  é harmônica em  $T$ .

Resta provar que  $-\log|f(z)|$  se aproxima de zero quando  $z$  se aproxima da fronteira de  $T$ .

Se  $z \rightarrow z_1$ ,  $z_1 \in \partial T$ , temos

$$|f(z)| \rightarrow |f(z_1)|$$

Mas,  $f(z_1) \in \partial D \implies |f(z_1)| = 1 \implies$

$$\implies |f(z)| \rightarrow 1 \implies$$

$$\implies -\log|f(z)| \rightarrow 0$$

Temos, então,  $H_{z_0}(z)$  harmônica em  $T$  e  $H_{z_0}(z) = \log|z-z_0|$  se  $z \in \partial T$ , isto é,  $G_{z_0}(z) = H_{z_0}(z) - \log|z-z_0| = -\log|f(z)|$  é uma função de Green em  $T - \{z_0\}$   $\square$

OBSERVAÇÃO: Sabemos que,  $\forall \xi \in D$ , existe uma aplicação analítica bijetora  $g : D \rightarrow D$  tal que  $g(\xi) = 0$ . Logo,  $\forall z_0 \in T$ , existe  $f : T \rightarrow D$ , analítica e bijetora tal que  $f(z_0) = 0$ .

Portanto,  $\forall z_0 \in T$ , existe uma função de Green  $G_{z_0}(z)$  em  $T - \{z_0\}$ .

Além disso, como  $|f(z)| < 1$ ,  $\forall z \in T$ , temos  $G_{z_0}(z) > 0$ ,  $\forall z \in T - \{z_0\}$ .

PROPOSIÇÃO 2 - Se  $T$  é um domínio simplesmente conexo em  $\mathbb{C}$ , conformemente equivalente ao plano  $\mathbb{C}$ , então, não pode existir uma função de Green  $G_{z_0}(z)$  para nenhum  $z_0 \in T$ .

*prova:* Suponhamos que exista  $G_{z_0}(z)$  para algum  $z_0 \in T$ .

Então,  $G_{z_0}(z) = -\log|z-z_0| + H_{z_0}(z)$  onde  $H_{z_0}(z)$  é harmônica em  $T$  e  $\lim_{z \rightarrow \infty} H_{z_0}(z) = +\infty$ .

Então, existe um compacto  $K \subset T$  e um número  $M > 0$  tal que  $H_{z_0}(z) \geq M$ ,  $\forall z \in T - K$ .

Por outro lado,  $\exists N > 0$  tal que

$$|H_{z_0}(z)| \leq N, \forall z \in K \implies H_{z_0}(z) \geq -N, \forall z \in K$$

Portanto,  $H_{z_0}(z) \geq -N$ ,  $\forall z \in T$ .

Considerando uma função analítica  $F$ , cuja parte real é  $H_{z_0}(z)$ , temos  $|e^F| = e^{H_{z_0}(z)} \geq e^{-N}$ .

Logo,  $F$  tem que ser constante, portanto,  $H_{z_0}(z)$  é constante.

Mas,  $\lim_{z \rightarrow \infty} H_{z_0}(z) = \infty$  torna tal resultado absurdo.  $\square$

As proposições 1 e 2 mostram que a existência ou não de função de Green em  $T - \{z_0\}$ ,  $\forall z_0 \in T$ , caracteriza completamente as superfícies simplesmente conexas hiperbólicas ou parabólicas.

Este resultado sugere a seguinte definição para superfícies abertas arbitrárias:

DEFINIÇÃO 3 - Uma superfície de Riemann (não compacta) é hiperbólica se existe função de Green relativa a cada um de seus pontos. E em caso contrário, a superfície é dita parabólica.

LEMA 4 - O anel  $T = \{z / r_1 < |z| < r_2 \leq \infty\} \subset \mathbb{C}$  é superfície hiperbólica.

*prova:* Consideremos a superfície de recobrimento universal de  $T$ , que é o disco unitário  $D$ ,  $|z| \leq 1$ .

Em  $D$ , consideramos o segmento aberto  $(A,B)$  onde  $A = (0,-1)$  e  $B = (0,1)$ . Chamamos  $C$  a fronteira de  $D$  e  $C_z$  as circunferências de centro  $(0,y)$ ,  $-1 < y < 1$ , que passam por  $B$  e por  $z \in (A,B)$ .

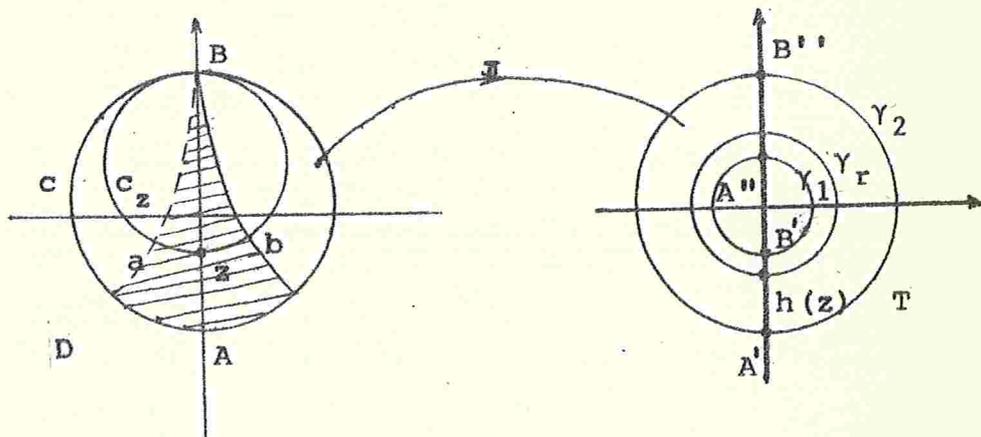
Em  $T$ , chamamos  $\gamma_1$  a curva  $|\xi| = r_1$ ;  $\gamma_2$  a

curva  $|\xi| = r_2$ ;  $\gamma_r$  a curva  $|\xi| = r$ ,  $r_1 < r < r_2$

Uma aplicação de recobrimento,  $\pi : D \rightarrow T$  é uma aplicação analítica que leva cada curva  $C_z - \{B\}$  em uma circunferência,  $|\xi| = r$ ,  $r_1 < r < r_2$ , de tal modo que

$$\pi|_{C_z - \{B\}} = \pi_1 \circ h_1$$

onde  $\pi_1$  é aplicação de recobrimento universal da circunferência  $\gamma_r$  e  $h_1$  é um homeomorfismo de  $C_z - \{B\}$  na reta.



Podemos considerar o homeomorfismo

$$h = \pi|_{(A,B)} : (A,B) \longrightarrow (A',B')$$

onde  $A' = (0, -r_2)$  e  $B' = (0, -r_1)$  tal que  $h(z)$  tende a  $B'$  quando  $z$  tende a  $B$ . (se não for assim, basta fazer uma rotação em  $\mathbb{R}^2$ ).

Vamos construir a função de Green  $G_{\xi_0}(\xi)$  em  $T - \{\xi_0\}$  onde  $\xi_0 = h(0)$  :

Em cada circunferência  $C_z$  existe um intervalo semi-fechado  $(a, b]$ , que podemos tomar simétrico em relação ao eixo dos  $y$ , tal que  $\pi((a, b]) = \gamma_r$  onde  $r = |h(z)|$  e  $\pi|_{(a, b]}$  é bijetora sobre  $\gamma_r$ .

Considerando tais intervalos em todas as circunferências  $C_z$ , construímos um conjunto  $V \subset D$ , simétrico em relação ao eixo dos  $y$ , tal que  $\pi|_V$  é bijetora sobre  $T$ .

Consideremos agora o aberto  $\tilde{V}$ , interior de  $V$  em  $D$ , e a aplicação  $\tilde{\pi} = \pi|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \longrightarrow T - (A'', B'')$ , onde  $A'' = (0, r_1)$  e  $B'' = (0, r_2)$ . Esta aplicação é analítica e bijetora.

A função de Green relativa a zero no disco é  $\tilde{G}_0(z) = -\log|z|$

Defino  $G_{\xi_0}(\xi) = -\log|\tilde{\pi}^{-1}(\xi)|$  em  $T - (A'', B'')$

Temos, então,

$$\begin{aligned} G_{\xi_0}(\xi) &= -\log|\xi - \xi_0| - \log \left| \frac{\tilde{\pi}^{-1}(\xi)}{\xi - \xi_0} \right| = \\ &= -\log|\xi - \xi_0| - \log \left| \frac{\tilde{\pi}^{-1}(\xi) - \tilde{\pi}^{-1}(\xi_0)}{\xi - \xi_0} \right| \end{aligned}$$

Como  $\tilde{\pi}^{-1}$  é analítica em  $T - (A'', B'')$ ,  $\xi_0$  é singularidade removível de  $\frac{\tilde{\pi}^{-1}(\xi) - \tilde{\pi}^{-1}(\xi_0)}{\xi - \xi_0}$  e esta função

é analítica em  $T - (A'', B'')$ .

Logo, a função  $H_{\xi_0}(\xi) = -\log \left| \frac{\tilde{\pi}^{-1}(\xi) - \tilde{\pi}^{-1}(\xi_0)}{\xi - \xi_0} \right|$

é harmônica em  $T - (A'', B'')$ .

Por outro lado,  $\forall \xi_1 \in (A'', B'')$

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_1} \left| \frac{\tilde{\pi}^{-1}(\xi) - \tilde{\pi}^{-1}(\xi_0)}{\xi - \xi_0} \right| = \left| \frac{\tilde{\pi}^{-1}(\xi_1) - \tilde{\pi}^{-1}(\xi_0)}{\xi_1 - \xi_0} \right|$$

e, portanto,  $H_{\xi_0}(\xi)$  pode ser estendida de maneira contínua a todo  $T$ .

A função estendida, que ainda chamaremos  $H_{\xi_0}(\xi)$ , é harmônica em  $T$ .

Temos, então,

$$G_{\xi_0}(\xi) = -\log |\xi - \xi_0| + H_{\xi_0}(\xi)$$

Calculemos o limite de  $G_{\xi_0}(\xi)$  quando  $\xi$  tende a um ponto da fronteira de  $T$ .

Temos,  $\lim_{\xi \rightarrow \xi_2} \tilde{\pi}^{-1}(\xi) = A, |\xi_2| = r_1$

e  $\lim_{\xi \rightarrow \xi_3} \tilde{\pi}^{-1}(\xi) = z_3 \in C - \{B\}, |\xi_3| = r_2$

e, em qualquer dos casos,

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_2 \text{ ou } \xi_3} G_{\xi_0}(\xi) = -\log 1 = 0$$

Logo,  $G_{\xi_0}(\xi) = -\log |\tilde{\pi}^{-1}(\xi)|$  é função de Green relativa a  $\xi_0$ .

Para obter função de Green relativa a qualquer outro ponto  $\xi$  de  $T$  basta considerar  $z = \tilde{\pi}^{-1}(\xi)$  e a apli-

cação  $g : D \rightarrow D$  da observação da proposição 1, que leva  $z$  no ponto zero e considerar para aplicação de recobrim<sub>ento</sub> de  $T$ ,  $\pi \circ g^{-1}$

Logo, existe a função de Green relativa a qualquer ponto de  $T$  e, portanto,  $T$  é hiperbólico.  $\square$

**LEMA 5** - Seja  $D$  um domínio hiperbólico de  $\mathbb{C}$  e seja  $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$  uma métrica Riemanniana, com  $\lambda(z)$  de classe  $C^2$ , em relação à qual  $D$  é completo.

Se a)  $\nabla^2 \log \lambda \geq 0$

$$b) \iint_D |\nabla^2 \log \lambda| dx dy < \infty ; z = x + iy$$

então, existe uma função harmônica  $h(z)$ , em  $D$ , tal que  $\log \lambda(z) \leq h(z)$

*prova:* Como  $D$  é hiperbólico, existe, para cada  $\xi \in D$ , uma função de Green  $G_\xi(z) > 0$  em  $D - \{\xi\}$ , tal que

$$G_\xi(z) + \log |z - \xi| = H_\xi(z)$$

onde  $H_\xi(z)$  é harmônica em  $D$ .

Definimos a função

$$u(\xi) = \frac{1}{2\pi} \iint_D G_\xi(z) \nabla^2 \log \lambda(z) dx dy$$

Temos  $G_\xi(z) \equiv 0$  sobre a fronteira de  $D$ . Logo, existe um conjunto compacto  $K \subset D$  e  $\xi \in \overset{\circ}{K}$  tal que

$$|G_\xi(z)| < \varepsilon, \quad \forall z \in D - K$$

Considerando uma bola  $B_\xi$  de centro  $\xi$ , contida em  $\overset{\circ}{K}$ , temos que  $\exists M > 0$  tal que

$$|G_\xi(z)| \leq M, \quad \forall z \in K - B_\xi$$

porque  $K - B_\xi$  é compacto e  $G_\xi(z)$  é contínua nesse compacto.

Assim, temos

$$\begin{aligned} & \left| \iint_D G_\xi(z) \nabla^2 \log \lambda(z) \, dx \, dy \right| \leq \\ & \leq \varepsilon \iint_{D-K} |\nabla^2 \log \lambda(z)| \, dx \, dy + M \iint_{K-B_\xi} |\nabla^2 \log \lambda(z)| \, dx \, dy + \\ & \quad + \iint_{\overline{B}_\xi} |G_\xi(z)| |\nabla^2 \log \lambda(z)| \, dx \, dy \end{aligned}$$

As duas primeiras integrais do segundo membro existem, finitas, porque ambas são majoradas por

$$\iint_D |\nabla^2 \log \lambda| \, dx \, dy < \infty$$

Quanto à terceira integral, podemos escrever

$$\begin{aligned} & \iint_{\overline{B}_\xi} |G_\xi(z)| |\nabla^2 \log \lambda(z)| \, dx \, dy \leq \\ & \leq \iint_{\overline{B}_\xi} |H_\xi(z)| |\nabla^2 \log \lambda(z)| \, dx \, dy + \iint_{\overline{B}_\xi} \log |z-\xi| |\nabla^2 \log \lambda(z)| \, dx \, dy \end{aligned}$$

Mas,  $\exists N > 0 / |H_\xi(z)| \leq N$ ,  $\forall z \in \bar{B}_\xi$  e, portanto, a primeira dessas integrais existe, finita. Quanto à segunda, temos  $|\nabla^2 \log \lambda(z)|$  limitada em  $\bar{B}_\xi$  e  $\iint_{\bar{B}_\xi} \log|z-\xi| dx dy$

existe .

Portanto,  $u(\xi) \in \mathbb{C}$ ,  $\forall \xi \in D$  e, como  $\nabla^2 \log \lambda \geq 0$  pela hipótese a) e  $G_\xi(z) > 0$ , temos  $u(\xi) \geq 0$  em  $D$ .

Usando a fórmula de Poisson, [10], temos

$$\nabla^2 u = - \nabla^2 \log \lambda \implies$$

$$\implies \nabla^2 (u + \log \lambda) = 0 \implies$$

$$\implies u + \log \lambda \text{ é função harmônica em } D .$$

Pondo  $h(z) = u(z) + \log \lambda(z)$

temos  $\log \lambda(z) \leq h(z)$  em  $D$ . □

TEOREMA 4 - Seja  $M$  uma variedade Riemanniana de dimensão 2, completa, cuja curvatura Gaussiana satisfaz

a)  $K \leq 0$

b)  $\iint_M |K| dA < \infty$

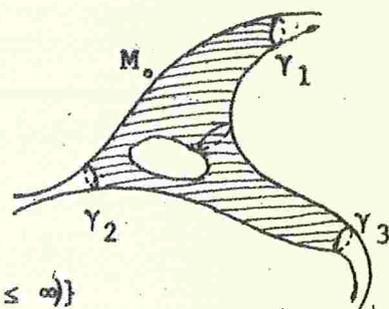
Então, existe uma variedade de dimensão 2,  $\tilde{M}$ , compacta, e um número finito de pontos,  $p_1, \dots, p_k$  em  $\tilde{M}$ , tal que  $M$  é conformemente equivalente a  $\tilde{M} - \{p_1, \dots, p_k\}$

*prova:* Usamos um teorema devido a Huber: "Se  $M$  é variedade Riemanniana de dimensão 2, infinitamente conexa e

$\iint_M |K| dA < \infty$ , então  $M$  não pode ser completa." ([9], pg.61)

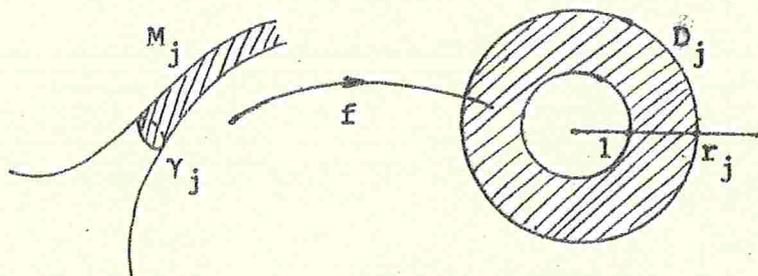
Assim, com nossas hipóteses,  $M$  é finitamente conexa. Logo, existe uma região compacta,  $M_0 \subset M$ , limitada por um número finito de curvas de Jordan, regulares  $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ , tais que, cada componente conexa,  $M_j$ , de  $M - M_0$  é duplamente conexa. [2]

Cada  $M_j$  pode ser aplicada conformemente sobre um anel



$$D_j = \{z \in \mathbb{C} / 1 < |z| < r_j \quad (r_j \leq \infty)\}$$

onde  $\gamma_j$  corresponde à curva  $|z| = 1$



A métrica sobre  $M_j$ , restrição da de  $M$ , é da forma  $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$  e induz sobre  $D_j$  uma métrica  $\tilde{g}_{ij} = \tilde{\lambda}^2 \delta_{ij}$  onde  $\tilde{\lambda} = \lambda \circ f^{-1}$

Considerando a relação da proposição 8 do capítulo III,  $K = -\frac{\nabla^2 \log \lambda}{\lambda^2}$ , temos  $K \leq 0 \iff \nabla^2 \log \lambda \geq 0$

$$\iint_D |K| dA = \iint_D \left| \frac{\nabla^2 \log \lambda}{\lambda} \right| dA = \iint_D |\nabla^2 \log \lambda| dx dy < \infty$$

Por outro lado, como  $M$  é completa, qualquer caminho  $\gamma(t)$ ,  $0 \leq t < 1$ , tal que  $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma(t) = r_2$  em  $D_j$ , corresponde a um caminho divergente em  $M$  e, portanto, tem comprimento infinito.

Além disso, pelo Lema 4,  $D_j$  é domínio hiperbólico.

Estamos, pois, nas condições do lema 5 e, portanto, existe uma função harmônica  $h(z)$ , em  $D_j$ , tal que

$$\log \lambda(z) \leq h(z), \quad \forall z \in D_j.$$

Aplicando, agora, o lema 3 concluímos que  $r_j = \infty$ .

Seja  $\tilde{D}_j = D_j \cup \{\infty\}$ , isto é,  $\tilde{D}_j = F_1^{-1}(D_j)$  é um disco sobre a esfera de Riemann.

$$F_1: S^2 \rightarrow D_j$$

Seja  $\tilde{M}$  a superfície compacta obtida colando os discos  $\tilde{D}_j$  a  $M_0$  ao longo de  $\gamma_j$ , pela aplicação conforme  $f$ , isto é,

$$\tilde{M} = \sum_j \left( M_0 \cup_{\gamma_j} \tilde{D}_j \right)$$

Chamando  $\{p_j\} = \tilde{D}_j - D_j$ , temos finalmente que  $M$  é conformemente equivalente a  $\tilde{M} - \{p_1, \dots, p_k\}$  ■

**LEMA 6** - Seja  $S$  uma superfície mínima regular e completa, definida por  $x: M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , cuja curvatura total é finita. Então, existe uma variedade compacta  $\tilde{M}$  tal que  $M$  é conformemente equivalente a  $\tilde{M} - \{p_1, \dots, p_k\}$  e a expressão analítica,  $g$ , da aplicação normal de Gauss da superfície  $S$  se estende a uma função mero

morfa sobre  $\tilde{M}$  .

*prova:* Se  $S$  é superfície mínima, temos  $K \leq 0$  e como a curvatura total é finita, isto é  $\iint_M |K| dA < \infty$  , podemos aplicar o teorema 4 . Logo,  $M$  é conformemente equivalente a  $\tilde{M} - \{p_1, \dots, p_k\}$  onde  $\tilde{M}$  é variedade de dimensão 2 , compacta .

Logo, podemos considerar  $S$  , definida por uma aplicação  $\tilde{x} : \tilde{M} - \{p_1, \dots, p_k\} \rightarrow \mathbb{R}^3$

Considerando a aplicação normal de Gauss de  $S$  , temos sua expressão analítica

$$g : \tilde{M} - \{p_1, \dots, p_k\} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$$

que é função meromorfa em  $\tilde{M} - \{p_1, \dots, p_k\}$  .

Nosso problema consiste em estender esta aplicação a toda a variedade  $\tilde{M}$  .

Os pontos  $p_j, j = 1, \dots, k$  , são singularidades de  $g$  . Suponhamos que exista  $j$  tal que  $p_j$  seja singularidade essencial de  $g$  . Então, pelo grande teorema de Picard,  $g$  assume todos os valores infinitas vezes, com, no máximo duas exceções. Isto implica que a área esférica de  $g(\tilde{M} - \{p_1, \dots, p_k\})$  , isto é, a área de  $F_1^{-1}(g(\tilde{M} - \{p_1, \dots, p_k\}))$  em  $S^2$  , é infinita e, portanto, a curvatura total tem que ser infinita, contra a hipótese.

Logo,  $g$  tem, no máximo, um polo em cada  $p_j$  , isto é,  $g$  é meromorfa em  $\tilde{M}$  □

TEOREMA 5 - Seja  $S$  uma superfície mínima completa em  $\mathbb{R}^3$ .  
Então, a curvatura total de  $S$  só pode assumir  
valores da forma  $-4\pi m$  onde  $m \in \mathbb{Z}_+$  ou a cur-  
vatura total é infinita.

prova: Temos  $K \leq 0$  e  $\iint_M |K| dA \leq \infty$

Supondo  $\iint_M |K| dA < \infty$ , podemos aplicar o lema 6 e

$\iint_M |K| dA$  é igual à imagem esférica de  $g(\tilde{M} - \{p_1, \dots, p_k\})$

Como  $g$  é aplicação meromorfa em  $\tilde{M}$ , temos

a)  $g = c^{te} \implies K = 0 \implies \iint_M |K| dA = 0$

*g(w) é finito  
g é holomorfa*

b)  $g \neq c^{te}$ . Neste caso,  $g$  é uma aplicação aberta  
e, portanto,  $g(\tilde{M})$  é aberto e compacto em  $\hat{\mathbb{C}}$ . Logo,  $g(\tilde{M}) = \hat{\mathbb{C}}$ ,  
isto é, todo  $\hat{\mathbb{C}}$  é atingido por  $g$  e cada valor é assumido  
um mesmo número  $m$  de vezes.

Portanto, a área esférica de  $g(\tilde{M})$  é  $m$  vezes a  
área da esfera, isto é,  $4\pi m$ . O mesmo acontece, portanto, com  
a área esférica de  $g(\tilde{M} - \{p_1, \dots, p_k\})$  já que apenas um nú-  
mero finito de pontos foi removido.

Logo,

$$\iint_M |K| dA = 4\pi m, m \in \mathbb{Z}_+ \quad \text{ou} \quad \iint_M |K| dA = \infty \quad \square$$

LEMA 7 - Seja  $S$  uma superfície mínima completa com curvatura total finita, definida por

$$x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad M = \tilde{M} - \{p_1, \dots, p_r\}$$

Considerando as formas analíticas em  $M$

$$\psi_k = \phi_k(z) dz, \quad k = 1, 2, 3$$

onde 
$$\phi_k(z) = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2}, \quad z = u_1 + iu_2,$$

temos que, para cada ponto  $p_j$ ,  $j = 1, \dots, r$ , existe  $k$  tal que  $\psi_k$  tem polo de ordem  $m \geq 2$  em  $p_j$ .

*prova:* Considero, para cada  $j$ , um sistema de coordenadas locais para  $\tilde{M}$ ,  $(U_j, z)$ , onde  $U_j = \{z \in \mathbb{C} / |z| < 1\}$  e tal que o ponto zero corresponde ao ponto  $p_j$ .

Tenho, então, as funções  $\phi_k(z)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , definidas em  $U_j - \{0\}$ , meromorfas em  $U_j$  porque  $g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}$  é meromorfa em  $U_j$ .

Considerando o desenvolvimento em série de Laurent de cada  $\phi_k$  em torno do ponto zero, temos

$$\phi_k(z) = \frac{c_k}{z^m} + h_k(z)$$

onde  $m$  é inteiro e existe  $k / c_k \neq 0$

Logo,

$$\sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2 \leq \frac{c}{z^{2m}} \quad \text{onde} \quad c = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 > 0.$$

A superfície dada é completa e, portanto, devemos

ter, sobre qualquer caminho divergente  $\gamma$ , indo para  $p_j$ ,

$$\int_{\gamma} \lambda |dz| = \infty$$

Mas, como  $\lambda^2 = \sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2 \leq \frac{c}{|z|^{2m}}$

temos  $\int_{\gamma} \frac{1}{|z|^m} |dz| = \infty$  e esta integral diverge  $\iff m \geq 1$

Temos, pois,

$$\sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2 \leq \frac{c}{|z|^{2m}} \quad \text{com } c > 0 \quad \text{e } m \geq 1$$

Logo, existe  $\underline{k}$  tal que zero é polo de ordem  $m \geq 1$  para  $\phi_{\underline{k}}(z)$ .

Vamos mostrar que  $\underline{m}$  não pode ser 1. Se  $m = 1$ , temos  $\phi_k(z) = \frac{c_k}{z} + h_k(z)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , onde as constantes  $c_k$  não são todas nulas e onde  $h_k(z)$  são analíticas.

Por outro lado, em  $U_j$ , estão bem definidas as funções  $x_k = \text{Re} \left\{ \int \phi_k(z) dz \right\}$  e, portanto,  $\text{Re} \left\{ \int \phi(z) dz \right\} = 0$  sobre qualquer curva fechada contida na vizinhança coordenada.

Consideremos a curva definida por  $|z| = \epsilon$  em  $U_j$ :

$$\int_{|z|=\epsilon} \phi_k(z) dz = \int_{|z|=\epsilon} \frac{c_k}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{c_k}{\epsilon e^{it}} i \epsilon e^{it} dt = 2c_k \pi i$$

e  $\text{Re}\{2c_k \pi i\} = 0 \implies c_k \in \mathbb{R}, \forall k$

Mas, sabemos que  $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$  e  $\sum_{k=1}^3 \phi_k^2 =$   
 $= \frac{\sum_{k=1}^3 c_k^2}{z^2} + \dots$  é uma série de potências identifica-  
 mente nula. Logo,  $\sum_{k=1}^3 c_k^2 = 0 \implies c_1=c_2=c_3=0 \implies m \leq 0$ ,  
 contra a hipótese.

Assim, temos  $m \geq 2$  □

OBSERVAÇÃO - Por rotação de  $\mathbb{R}^3$ , posso sempre escolher coor-  
 denadas locais de modo que  $\phi_1(z)$  ou  $\phi_2(z)$   
 tenham polo de ordem  $m \geq 2$  para  $z = 0$ .

Como  $f = \phi_1 - i\phi_2$ , segue que  $f$  terá, sempre,  
 polo de ordem  $m \geq 2$  em  $z = 0$ , correspondente a  $p_j$ .

TEOREMA 6 - Seja  $S$  uma superfície mínima regular, comple-  
 ta, cuja curvatura total é finita, definida por  
 $x : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ .

Então, se a aplicação normal de Gauss omite mais  
 que 3 pontos de  $S^2$ , isto é, se  $S^2 - g(M)$  tem mais que  
 3 pontos, então  $x(M)$  é um plano.

*prova:* Sendo  $S$  superfície mínima com curvatura total fini-  
 ta, pelo teorema 1, podemos assumir  $M = \tilde{M} - \{p_1, \dots, p_k\}$   
 onde  $\tilde{M}$  é superfície de Riemann compacta de genus  $\gamma$ .

Sejam  $g(z)$  e  $w = fdz$ , a função meromorfa e a  
 diferencial analítica, definidas em  $M$ , dadas pela represen-  
 tação global de Weierstrass da superfície.

Pelo lema 6,  $g$  se estende a uma aplicação meromorfa  
 $g : \tilde{M} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$

Depois de uma rotação do espaço  $\mathbb{R}^3$ , podemos assumir que

a)  $g(p_j) \neq \infty, \forall j = 1, \dots, k$

(isto é possível porque só existe número finito de  $p_j$ )

b)  $g$  tem apenas polos simples em  $\tilde{M}$ , isto é, se  $p \in \tilde{M}$  é polo de  $g$ , então  $\frac{dg}{dz}(p) \neq 0$ .

(isto é possível porque  $\frac{dg}{dz}$  é meromorfa e seus zeros são, pois, isolados).

Suponhamos que  $g$  tenha ordem  $m$ , isto é,  $g: \tilde{M} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  assume cada valor exatamente  $m$  vezes (contadas as multiplicidades). Logo,  $g$  tem  $m$  polos simples.

1) Seja  $n$  o número de zeros da forma diferencial  $\theta = \left(\frac{dg}{dz}\right) dz$ , definida em  $\tilde{M}$

Como  $g$  tem  $m$  polos simples, segue que  $\theta$  tem  $m$  polos duplos em  $\tilde{M}$  pois, se  $g = \frac{k}{z} + \dots$  numa vizinhança de cada polo, então  $\frac{dg}{dz} = -\frac{k}{z^2} + \dots$  nessa vizinhança.

Então, pela relação de Riemann, o número de zeros menos o número de polos da forma diferencial meromorfa  $\theta$ , satisfaz  $n - 2m = 2\gamma - 2$  onde  $\gamma$  é o genus da variedade  $\tilde{M}$ . [11]

Temos, pois,  $n = 2(m + \gamma - 1)$

ii) Consideremos, agora, a forma  $w = f(z) dz$  em  $M$ . Sabemos que ela tem zeros duplos nos pontos que são polos de  $g$  e não tem outros zeros, porque  $\underline{S}$  é regular.

Por outro lado, escolhendo coordenadas locais para uma vizinhança de  $p_j$  em  $\tilde{M}$ , tal que  $z = 0$  corresponda a  $p_j$  e que não inclua outros  $p_i$ , temos, pela observação que segue o lema 7, que  $f$  é meromorfa e tem um polo de ordem  $m_j \geq 2$  em  $z = 0$ . Como  $f$  é analítica em  $M = \tilde{M} - \{p_1, \dots, p_k\}$   $f$  não tem outros polos.

Logo, a forma diferencial  $w = f(z) dz$  se estende a uma forma diferencial meromorfa em  $\tilde{M}$ , tendo polos de ordem  $m_j \geq 2$  em cada ponto  $p_j$ ,  $j = 1, \dots, k$ , e não outros polos.

Aplicando a relação de Riemann a esta forma, temos

$$2m - \sum_{j=1}^k m_j = 2\gamma - 2 \implies$$

$$\implies 2m - 2k \geq 2\gamma - 2 \implies$$

$$\implies \boxed{k + \gamma - 1 \leq m}$$

iii) Suponhamos, agora, que  $g|_M$  omite, pelo menos,  $\underline{l}$  pontos,  $q_1, \dots, q_l$ , de  $\tilde{C}$ .

Então,  $g^{-1}(\{q_1, \dots, q_l\}) \subset \{p_1, \dots, p_k\}$  e cada  $q_i$  tem exatamente  $\underline{m}$  pré-imagens, contadas as multiplicidades.

Se  $g$  assume seu valor  $g(p_j)$  com multiplicidade  $1 + a_j$  temos

$$l \cdot m \leq \sum_{j=1}^k (1+a_j) = k + \sum_{j=1}^k a_j$$

Por outro lado, temos a série de Taylor

$$g(z) - g(p_j) = \sum_{k=1+a_j}^{\infty} b_k (z-p_j)^k$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dz} &= \sum_{k=1+a_j}^{\infty} b_k k (z-p_j)^{k-1} = \\ &= \sum_{k=a_j}^{\infty} b_{k+1} (k+1) (z-p_j)^k \end{aligned}$$

Isto é,  $\frac{dg}{dz}$  tem zero de ordem  $a_j$  em  $p_j$ ,  $j = 1, \dots, k$

Como  $n$  é o número total de zeros da forma diferencial  $\theta = \left(\frac{dg}{dz}\right) dz$  em  $\tilde{M}$ , temos  $\sum_{j=1}^k a_j \leq n$ .

Então,  $\boxed{l \cdot m \leq k + n}$

Reunindo, agora, os resultados temos

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} \text{i) e iii) } \Rightarrow l \cdot m - k \leq 2(m + \gamma - 1) \\ \text{ii) } \quad \quad \quad k + \gamma - 1 \leq m \end{array} \right\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow l \cdot m + \gamma - 1 \leq 3m + 2\gamma - 2 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \boxed{(3 - l)m \geq 1 - \gamma} \quad \text{(iv)} \end{aligned}$$

De ii) temos  $1 - \gamma \geq k - m$  e, portanto,

$$(3 - \ell)m \geq k - m \implies$$

$$\implies \boxed{(4 - \ell)m \geq k} \quad (v)$$

Como  $M$  não pode ser compacta, temos  $k \geq 1$ , e, portanto,

$$4 - \ell > 0 \implies \boxed{\ell < 4} \quad \square$$

Corolário - Seja  $S$  uma superfície mínima regular e completa com curvatura total finita. Então, se as normais omitem exatamente 3 direções, o genus de  $\tilde{M}$  é  $\gamma \geq 1$  e a ordem de  $g$  é  $m \geq 3$ .

*prova:* Usamos a relação (iv) do teorema para  $\ell = 3$ , então

$$1 - \gamma \leq 0 \implies \gamma \geq 1$$

Por outro lado, a relação (v) do teorema, para  $\ell=3$ , dá

$$m \geq k$$

Mas, como  $g^{-1} \{ \{q_1, \dots, q_\ell\} \} \subset \{p_1, \dots, p_k\}$ , temos

$$k \geq \ell \implies k \geq 3 \implies$$

$$\implies m \geq 3$$

Isto é,  $g$  assume cada valor  $m$  vezes com  $m \geq 3$ . Portanto, a curvatura total da superfície é  $\iint_M |K| dA \geq 12\pi \quad \square$

**LEMA 8** - a) Seja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , analítica com polo no infinito. Então  $f(z)$  é um polinômio.

b) Seja  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  com polos em  $z_0$  e  $\infty$

Então,  $f(z)$  é uma função racional com polos em  $z_0$  e  $\infty$ .

*próva:* a) Considero a extensão  $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  pondo  $f(\infty) = \infty$   
 $f$  é analítica em  $\hat{\mathbb{C}}$  e, portanto, posso considerar seu desenvolvimento em série de Taylor em uma vizinhança do ponto  $z = 0$ , com raio de convergência infinito.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (1)$$

$$\text{sendo } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi$$

onde  $\gamma$  é uma curva qualquer, fechada, simples e positiva em torno do ponto  $z = 0$ .

Por outro lado, posso considerar o desenvolvimento em série de Laurent de  $f$ , numa vizinhança do infinito, ainda com raio de convergência infinito.

$$f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{c_{-k}}{w^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{w} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k, \quad \forall w \neq 0$$

onde  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k$  é analítica em  $\mathbb{C}$  e não tem polos e  $w = \frac{1}{z}$

Como o raio de convergência é infinito, esta expressão de  $f(\xi)$  vale para pontos  $\xi = \frac{1}{w}$  da curva  $\gamma$

Seja  $\gamma$  dada por  $z = Re^{it}$ ,  $0 \leq t < 2\pi$  e chamemos  $g(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{1}{\xi^k}$

Então,  $\exists M > 0$  tal que  $|g(\xi)| \leq M$ ,  $\forall \xi$  tal que  $|\xi| \geq R$ , isto é,  $|w| \leq R$ .

Usando a expressão (2) de  $f$  para calcular os coeficientes de (1) temos

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left( \frac{c_{-k} \xi^k + \dots + c_{-1}}{\xi^{n+1}} + \frac{g(\xi)}{\xi^{n+1}} \right) d\xi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left( \frac{c_{-k}}{\xi^{-k+n+1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{\xi^n} \right) d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi$$

Considerando  $n > k \geq 1$ , temos a primeira integral sempre nula.

Para a segunda integral temos

$$\left| \int_{\gamma} \frac{g(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi \right| \leq M \int_{\gamma} \frac{|d\xi|}{|\xi^{n+1}|} = M \int_0^{2\pi} \frac{R}{R^{n+1}} dt = \frac{M}{R^n} \cdot 2\pi$$

Como podemos repetir o raciocínio para qualquer valor de  $R$ , temos  $a_n = 0$  ( $a_n \rightarrow 0$  quando  $R \rightarrow \infty$ )

Logo, para  $n > k$ , temos  $a_n = 0$  e, portanto,  $f(z)$  é um polinômio.

b) Seja  $f: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$

Como  $z_0$  é polo de  $f$  temos, numa vizinhança de  $z_0$ ,

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

onde  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$  é analítica em  $\mathbb{C}$  com polo no infinito.

Pela parte a),  $g$  é um polinômio. Logo,

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + g(z)$$

é uma função racional com polos em  $z_0$  e  $\infty$  □

TEOREMA 7 - Uma superfície mínima, regular e completa em  $\mathbb{R}^3$ , cuja curvatura total é  $4\pi$  é, ou a superfície de Enneper ou o Catenóide.

*prova:* Seja  $S$  uma superfície mínima completa cuja curvatura total é  $4\pi$ , definida por  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $M = \tilde{M} - \{p_1, \dots, p_k\}$

Sabemos que  $\iint_M |K| dA = 4\pi m$  e, portanto,  $m = 1$ ,

isto é,  $g : \tilde{M} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  é bijetora. Portanto,  $\tilde{M}$  é conformemente equivalente a  $\hat{\mathbb{C}} = S^2$

Podemos, portanto, assumir que  $\tilde{M} = S^2$ , ou seja,  $M = S^2 - \{p_1, \dots, p_k\}$  o que significa assumir  $g(z) = z$ ,  $\forall z$

Como  $\tilde{M} = S^2$ , temos  $\gamma = 0$  e, aplicando a relação (i) do teorema 3, temos

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{m} \geq k - 1 \\ m = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow k \leq 2$$

Portanto, temos

$$M = S^2 - \{p_0\} \quad \text{ou} \quad M = S^2 - \{p_0, p_1\}$$

1º caso - Seja  $k = 1$ , isto é,  $M = S^2 - \{p_0\}$

Por rotação do espaço podemos assumir  $M = S^2 - \{\infty\} = \mathbb{C}$

Temos  $g(z) = z$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$  e a forma diferencial  $w = f(z) dz$  não pode ter zeros em  $\mathbb{C}$  já que  $g$  não tem polos.

Pelo lema 7,  $w = f(z) dz$  se estende a uma forma diferencial meromorfa em  $\tilde{M} = S^2 = \hat{\mathbb{C}}$ .

Por outro lado, como  $M = \mathbb{C}$ ,  $f(z)$  está definida globalmente e, pelo lema 8, é um polinômio em  $z$ .

Mas  $f(z)$  não tem zeros em  $\mathbb{C}$  e, portanto,  $f(z)$  é constante. Logo, a superfície é definida por

$$\begin{cases} g(z) = z \\ f(z) = c^{te} \end{cases}$$

isto é, a superfície é a superfície de Enneper.

2º caso - Seja  $k = 2$ , isto é,  $M = S^2 - \{p_0, p_1\}$

Por uma rotação do espaço podemos assumir que  $M = \hat{\mathbb{C}} - \{\infty, z_0\}$

Temos, pois,  $g(z) = z$  definida em  $\mathbb{C} - \{z_0\}$  e  $w = f(z) dz$ , pela representação de Weierstrass da superfície.

Como  $\mathbb{C} - \{z_0\}$  é coberta por uma única carta, te-

mos  $g(z) = z$  e  $f(z)$  definidas globalmente em  $\mathbb{C} - \{z_0\}$

Pelo lema 7,  $w$  se estende a uma forma diferencial meromorfa em  $\mathbb{C} - \{z_0\}$  com polos em  $z_0$  e  $\infty$ , o mesmo acontecendo com  $f(z)$ . Logo, pelo lema 8,  $f(z)$  é uma função racional em  $z$  com esses polos.

Por outro lado,  $g$  não tem polos em  $\mathbb{C} - \{z_0\}$  e por isso,  $f(z)$  não tem zeros e, por ser analítica, não tem polos em  $\mathbb{C} - \{z_0\}$

Pelo lema 7,  $f(z)$  tem polo de ordem  $m \geq 2$  em  $z_0$ .

Temos, portanto,

$$f(z) = \frac{c}{(z-z_0)^m} \quad \text{onde } c \neq 0 \text{ e } m \geq 2$$

Como  $M$  é completa, devemos ter, para todo caminho divergente  $\gamma$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \lambda |dz| &= \frac{1}{2} \int_{\gamma} |f| (1+|g|^2) |dz| = \\ &= \frac{|c|}{2} \int_{\gamma} \frac{1+|z|^2}{|z-z_0|^m} |dz| = \infty \end{aligned}$$

Mas, se  $\gamma$  é um caminho que diverge para infinito, sabemos que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{P_1(z)}{P_2(z)} dz \right| \leq \int_{\gamma} \frac{|P_1(z)|}{|P_2(z)|} |dz|$$

e  $\int_{\gamma} \frac{P_1(z)}{P_2(z)} dz$  diverge  $\iff$  grau  $P_1$  - grau  $P_2 \geq -1$

Logo, devemos ter  $2 - m \geq -1 \implies m \leq 3$

Vamos provar que  $m = 2$  e  $z_0 = 0$  :

Sejam  $\phi_k(z) = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2}$ ,  $k = 1, 2, 3$

$z = u_1 + iu_2$

numa vizinhança de  $z_0$ . Sabemos que estão bem definidas as

funções  $x_k = \operatorname{Re} \left\{ \int \phi_k(z) dz \right\}$

e, portanto,  $\operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma} \phi_k(z) dz \right\} = 0$  para qualquer curva

fechada  $\gamma$  contida na vizinhança considerada de  $z_0$ .

Seja  $\gamma : z - z_0 = ce^{it}$

Temos  $\phi_1(z) = \frac{1}{2} f(1 - g^2)$  e

$\int_{\gamma} \phi_1(z) dz = \frac{c}{2} \int_{\gamma} \frac{1-z^2}{(z-z_0)^m} dz =$

$= \frac{c}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1-(z_0+ce^{it})^2}{\epsilon^m e^{imt}} \epsilon i e^{it} dt =$

$= \begin{cases} -2\pi icz_0 & \text{se } m = 2 \\ -\pi ic & \text{se } m = 3 \end{cases}$

Para que se tenha  $\operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma} \phi_1(z) dz \right\} = 0$  deve-

mos ter  $c \in \mathbb{R}$ .

Considerando, agora,  $\phi_2(z) = \frac{i}{2} f(1+g^2)$  temos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \phi_2(z) dz &= \frac{ic}{2} \int_{\gamma} \frac{1+z^2}{(z-z_0)^m} dz = \\ &= \frac{ic}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1+(z_0+\epsilon e^{it})^2}{\epsilon^m e^{imt}} \epsilon i e^{it} dt = \\ &= \begin{cases} -2\pi c z_0 & \text{se } m=2 \\ -\pi c & \text{se } m=3 \end{cases} \end{aligned}$$

onde sabemos que  $c \in \mathbb{R}$  e  $c \neq 0$ .

Logo, para que  $\operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma} \phi_2(z) dz \right\} = 0$  devemos

ter  $m=2$  e  $z_0=0$

Considerando  $\phi_3(z) = fg$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \phi_3(z) dz &= c \int_{\gamma} \frac{z}{(z-z_0)^m} dz = c \int_0^{2\pi} \frac{z+\epsilon e^{it}}{\epsilon^m e^{imt}} \epsilon i e^{it} dt = \\ &= \begin{cases} c 2\pi i & \text{se } m=2 \\ 0 & \text{se } m=3 \end{cases} \end{aligned}$$

isto é,  $\operatorname{Re} \left\{ \int_{\gamma} \phi_3(z) dz \right\} = 0$  e não há nenhuma con-

dição a acrescentar.

Temos, portanto,  $\left\{ \begin{array}{l} f(z) = \frac{c}{z^2} \\ g(z) = z \end{array} \right.$  em  $\mathbb{C} - \{0\}$

isto é, a superfície definida é o catenóide.

□

B I B L I O G R A F I A

- [1] L.V.Ahlfors Complex Analysis
- [2] L.V.Ahlfors and Sario Riemann Surfaces
- [3] M.do Carmo Elementos de Geometria Diferencial - IMPA
- [4] M.do Carmo Introdução à Geometria Diferencial Global - IMPA, 1970
- [5] M.do Carmo Notas de Geometria Riemanniana IMPA
- [6] S.S.Chern "An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface". Proc. Amer. Math.Soc., 6(1955), 771-782
- [7] C.E.Harle Geometria Riemanniana, São Carlos, 1974.
- [8] M.Heins Selected Topics in the Classical Theory of Functions of a Complex Variable .
- [9] A.Huber "On subharmonic functions and differential geometry in the large", Comm.Math.Helv., 32(1957) 13-72
- [10] O.D.Kellog Foundations of Potencial Theory

- [11] Lipman Bers Riemann Surfaces
- [12] H.B.Lawson Jr. Lectures on minimal submanifolds,  
IMPA.
- [13] W.S.Massey Algebraic Topology: An Introduction
- [14] J.C.C.Nitsche "On new results in the theory of  
minimal surfaces". Bull.Amer.Math.Soc., 71(1965), 195-270
- [15] R.Osserman "Proof of a conjecture of Nirem-  
berg". Comm.Pure Appl.Math., 12  
(1959), 229-232
- [16] R.Osserman "On the Gauss curvature of mini-  
mal surfaces". Trans.Amer. Math.  
Soc., 96 (1960), 115-128.
- [17] R.Osserman "Minimal surfaces in the large".  
Comm. Math.Helv., 35(1961), 65-76
- [18] R.Osserman "On complete minimal surfaces".  
Arch.Rational Mech.Anal., 13(1963),  
392-404.
- [19] R.Osserman "Global properties of minimal  
surfaces in  $E^3$  and  $E^n$ ". Ann.  
of Math. (2) 80(1964), 340-364.
- [20] R.Osserman "A Survey of Minimal Surfaces" .  
Van Mostrand Reinhold, N.Y., 1969
- [21] G.Springer Introduction to Riemann Surfaces