INSTITUTO DE PESQUISAS MATEMÁTICAS

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

UM TÓPICO DE ANÁLISE FUNCIONAL NÃO LINEAR

Prof. Galdino Cesar da Rocha Filho

SÃO PAULO

1970

Agradecimento

Nossa homenagem aos profs. Alexandre A. M. Rodrigues, Carlos B. Lira, Waldir M. Oliva, José B. Neto e aos amigos Jacob, Riesler e Coursol pelo muito que tentaram nos ensinar.

Cabe-nos tôda a culpa se não o conseguiram.

Em particular nossos agradecimentos a Chain S. Hönig, que nos iniciou na Análise Funcional, nossa admiração por sua enorme cultura matemática.

A Djairo G. de Figueiredo, cabe a responsabilidade de nos ter encaminhado para alguns Tópicos da Análise Funcional não Linear, inclusive o que faz parte destas páginas; a êle o nosso muito obrigado.

Finalmente à profª Elza Gomide nossa eterna gratidão por tudo que fêz pelos jovens estudantes de pós-graduação em Matemática da USP, como diretora do antigo departamento de matemática da FFCL da USP.

São Paulo, 5 de março de 1970

Galdino Cesar da Rocha Filho

- 0 -

Introdução

O objetivo destas páginas é dar soluções do problema BK (de Browder - Kirk) que é exibir espaços métricos onde tôda função não expansiva ($d(f(x)f(y)) \leq d(x,y)$) tenha ponto fixo.
Historicamente Browder [17] foi o primeiro a exibir uma classe dêstes espaços e o objetivo era o de demonstrar a existência de soluções periódicas para equações diferenciais em espaços funcionais.
Depois Kirk [11] e finalmente Yôichi Kijima e Wataru Takahashi [9] generalizaram o teorema em questão.

Sendo êste assunto e os relacionados com êle objeto de pesquiza nos últimos anos ([9] foi publicado em setembro de 1969), achamos interessante para um futuro grupo de estudo da Análise Funcional não linear, sua redação em português.

Tentamos esclarecer alguns pontos. Deixamos o trabalho de propor problemas em aberto e as aplicações, para os seminários com os interessados, para não alongar em demasia êste folheto, tornando cansativa sua leitura, já que acreditamos dever ser o trabalho de mestrado expositivo e didático na medida do possível.

Capítulo 0

§ 1 Espaços Especiais

Neste parágrafo abordaremos alguns espaços de Banach que num certo sentido são bem comportados, sendo mesmo uma aproximação razoável dos espaços de Hilbert. Intuitivamente tais espaços terão suas bolas uniformemente arredondadas e sem possibilidade de pedaços planos na superfície.

Definição 1 - Um espaço de Banach E é dito uniformemente convexo (ou uniformemente arredondado) se $\forall\, \varepsilon > 0$ existe um $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x - y\| \geq \varepsilon$ então $\left\| \dfrac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$ (Clarkson [13]).

Exemplos

1º) Todo espaço de Hilbert é uniforme_

mente convexo.

Prova

De fato se E é de Hilbert (E tendo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ como corpo de escalares) então $\|x+y\|^2 = 2[\|x\|^2 + \|y\|^2] - \|x-y\|^2$ como supomos $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x-y\| \geq \varepsilon$ virá $\|x+y\|^2 \leq$

$$\leq 4\left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2\right] \Longrightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} =$$

$$= 1 - \delta(\varepsilon) \text{ com } \delta(\varepsilon) := 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2}$$

2º) Se $1 < p < \infty$ então os l_p (L_p) são uniformemente convexos. (Observe-se que tais espaços sòmente para $p = 2$ são de Hilbert o que mostra que a classe dos uniformemente convexos é mais ampla que a classe dos Hilbertianos).

Prova

Lema (Clarkson [1], [13], [15] e [16]).

Para os espaços L_p (l_p) com $p \geq 2$ valem as desigualdades $\left(q := \frac{p}{p-1}\right)$

$$① \quad 2(\|x\|^p + \|y\|^p) \leq \|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leq$$
$$\leq 2^{p-1}(\|x\|^p + \|y\|^p)$$

② $2(\|x\|^p + \|y\|^p)^{q-1} \leq \|x+y\|^q + \|x-y\|^q$

③ $\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leq 2(\|x\|^q + \|y\|^q)^{p-1}$

Para $1 < p < 2$ as desigualdades acima valem no sentido contrário. (Para demonstração consultar [1], [13], [15] ou [16]).

Admitido o lema provemos que os l_p (L_p) são uniformemente convexos

a) Se $p \geq 2$ tomemos ① e de $\|x+y\|^p + \|x-y\|^p \leq 2^{p-1}(\|x\|^p + \|y\|^p)$ supondo $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x-y\| \geq \varepsilon$ virá $\|x+y\|^p \leq$

$$\leq 2^p\left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right] \Longrightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

com $\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt[p]{1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p}$

b) Se $1 < p < 2$ tomamos ② e como estamos supondo $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x-y\| \geq \varepsilon$ virá $2^q \geq \|x+y\|^q + \varepsilon^q \Longrightarrow \left\|\frac{x+y}{2}\right\|^q \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \left\|\frac{x-y}{2}\right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon) \quad \text{com } \delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt[q]{1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^q}$$

3º) Se $1 < p < \infty$ os $(\mathbb{R}^n; \|\ \|_p)$ são uniformemente convexos.

Sai imediatamente do fato de tais espa_

ços poderem ser imersos isometricamente no l_p.

Contra exemplos

1º) O $\mathbb{R}^2$ com a norma $\|(u,v)\|_1 = |u| + |v|$

Basta observar que se $x = (1,0)$ e $y = (0,1) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \|x\| = \|y\| = 1$; $\|x-y\| = 2$ e $\left\| \dfrac{x+y}{2} \right\| = 1$

2º) Os $\mathbb{R}^n$ com a norma $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$. Decorre do exemplo 1.

3º) O $l_1(\mathbb{N})$ é também contra exemplo e decorre do exemplo 1.

4º) $C_0(\mathbb{N})$ - Basta que consideremos

$x = (1,1,0,0,\ldots)$ $y = (0,1,1,0,\ldots)$

$\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = 1$ e $\|x-y\|_\infty = \|(1,0,-1,0,\ldots)\|_\infty = 1$ e

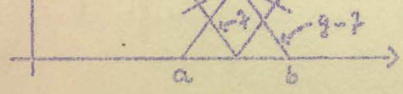
$\left\| \dfrac{x+y}{2} \right\|_\infty = 1$

f cont.?

5º) $l_\infty(\mathbb{N})$ - Decorre do anterior.

6º) $C[a,b] = \{ f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid \|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \}$

Sai do fato de podermos ter $\|f\| = \|g\| = 1$ e $\|f-g\| = 1$ com $\left\| \dfrac{f+g}{2} \right\| = 1$ como se vê imediatamente na figura abaixo.



Observação - O fato de um espaço ser uniformemente convexo não é uma propriedade topológica, métrica, nem siquer é invariante por normas equivalentes! De fato o $\mathbb{R}^2$ com as normas $\| \|_1$ e $\| \|_2$ (que são equivalentes) não é e é uniformemente convexo respectivamente.

Nesta primeira proposição mostramos que uniforme arredondamento exigido na superfície se propaga ao interior de tôda a bola.

Proposição 1

① E de Banach e uniformemente convexo $\Longleftrightarrow$ ② $\forall\, d > 0$; $\forall\, \varepsilon > 0$ as desigualdades $\|x\| \leq d$; $\|y\| \leq d$ e $\|x-y\| \geq \varepsilon \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq \left[1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{d}\right) \right] d. \qquad \delta\left(\frac{\varepsilon}{d}\right) = ?$$

Prova

a) ② $\Longrightarrow$ ① é trivial, basta tomar $d = 1$ e $\|x\| = \|y\| = 1$ com $\|x-y\| \geq \varepsilon$ e então

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$$

b) ① $\Longrightarrow$ ②

Observemos que se provarmos

$$① \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \|x\| = 1 \\ \|y\| \leq 1 \\ \|x-y\| \geq \varepsilon \end{array} \right. \Longrightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon) \Bigg\} ②a$$

teremos provado ① ⟹ ②

De fato se $\|y\| \leq d$; $\|x\| \leq d$; $\|x-y\| \geq \varepsilon$ seja $\|y\| \leq \|x\|$ (caso $\|x\| = 0$; é trivial pois não teríamos $\|x-y\| \geq \varepsilon$) logo sejam

$$\left\{ \begin{array}{l} U = \dfrac{x}{\|x\|} \Longrightarrow \|U\| = 1 \\ V = \dfrac{y}{\|x\|} \Longrightarrow \|V\| \leq 1 \end{array} \right. \quad \text{com } \|U-V\| = \frac{\|x-y\|}{\|x\|} \geq \frac{\varepsilon}{\|x\|} \geq \frac{\varepsilon}{d}$$

mas então estamos nas condições ②a logo

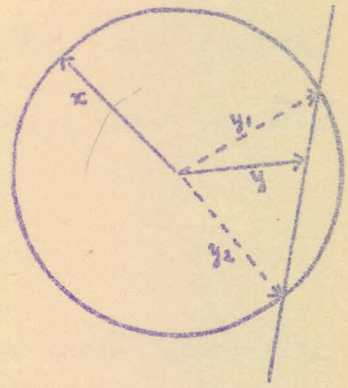
$$\left\| \frac{U+V}{2} \right\| \leq 1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{d}\right) \Longrightarrow \left\| \frac{x+y}{2\|x\|} \right\| \leq 1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{d}\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq \left[1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{d}\right) \right] d \quad \text{que é } ②$$

Para provarmos que ① ⟹ ②a consideremos x e y tal que $\|x\| = 1$; $\|y\| \leq 1$; $\|x-y\| \geq \varepsilon$

Por Hahn-Banach forma geométrica sabemos que

$y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$ $(\lambda_1, \lambda_2 \geq 0 ; \lambda_1 + \lambda_2 = 1)$ com $y_1 y_2$ tal que $\left\{ \begin{array}{l} \|x - y_1\| \geq \varepsilon \quad ; \quad \|y_1\| = \|y_2\| = 1 \\ \|x - y_2\| \geq \varepsilon \end{array} \right.$



A afirmação anterior é óbvia se pensarmos no "hiperplano" que passa por y e não corta a $B_{\|y-x\|}(x)$. Êste "hiperplano" corta a bola unitária e então uno êste ponto a "extremidade" de y; e esta reta corta a bola em outro ponto y_2. (Se $\|y\|=1$ não há o que provar)

Na verdade o problema é bidimensional.

Assim sendo

$$\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| \leq \left\|\lambda_1\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y_1\right)+\lambda_2\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y_2\right)\right\| \leq$$

$$\leq \lambda_1\left\|\frac{x+y_1}{2}\right\| + \lambda_2\left\|\frac{x+y_2}{2}\right\| \text{ ; como } \|x-y_1\| \geq \varepsilon,$$

$\|x-y_2\| \geq \varepsilon$ e $\|x\| = \|y_1\| = \|y_2\| = 1$

aplicando ① virá

$$\left\|\frac{1}{2}(x+y)\right\| \leq \lambda_1(1-\delta(\varepsilon)) + \lambda_2(1-\delta(\varepsilon)) = 1-\delta(\varepsilon)$$

C. Q. D.

A proposição 2 mostra que o <u>segmento</u> $\alpha x + (1-\alpha)y$; $\alpha \in (0,1)$ está dentro da bola de raio <u>d</u>; se $\|x\| \leq d$ e $\|y\| \leq d$

com $\|x-y\| \geq \varepsilon$ mais ainda mostra a proximidade de um seu ponto genérico ao centro

Proposição 2

Se E é um espaço de Banach uniformemente convexo então $\forall\, \varepsilon > 0$, $d > 0$ e $\alpha \in (0,1)$ se $\|x\| \leq d$; $\|y\| \leq d$ e $\|x-y\| \geq \varepsilon$ então
$$\|\alpha x + (1-\alpha) y\| \leq \left[1 - 2\delta\left(\frac{\varepsilon}{d}\right) \min (\alpha, \beta)\right] d$$
com $\beta = 1-\alpha$

Prova

Suponhamos $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ (caso contrário tomaríamos β como α) então
$$\|\alpha x + \beta y\| = \|\alpha(x+y) + (\beta-\alpha) y\| \leq$$
$$\leq 2\alpha\left\|\frac{x+y}{2}\right\| + (\beta-\alpha)\|y\| \leq 2\alpha\left[1-\delta\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)\right] d + (\beta-\alpha) d =$$
$$= \left[1 - 2\alpha\, \delta\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)\right] d \quad \text{ou} \quad \|\alpha x + (1-\alpha) y\| \leq \left[1 - 2\delta\left(\frac{\varepsilon}{d}\right)\alpha\right] d =$$
$$= \left[1 - 2\delta\left(\frac{\varepsilon}{d}\right) \min (\alpha, \beta)\right] d.$$

C. Q. D.

Proposição 3

Num espaço E normado são equivalentes as proposições:-

1º) $\forall\, x, y \,.\, x \neq y$ com $\|x\| = \|y\| = 1 \Longrightarrow$
$$\Longrightarrow \|\lambda x + (1-\lambda) y\| < 1 \qquad (0 < \lambda < 1)$$

2º) $\forall x, y$. tal que $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Rightarrow x = \lambda y$
$\lambda > 0$ $\quad (x \neq 0$ e $y \neq 0)$

Prova

② $\Rightarrow$ ① Suponhamos $\|\lambda x + (1-\lambda) y\| = \lambda \|x\| + (1-\lambda)\|y\|$;
por ② vem $(1-\lambda) y = u \lambda x$
como $\|x\| = \|y\| = 1 \Rightarrow \frac{1-\lambda}{u\lambda} = 1 \Rightarrow y = x$.
Como em ① $x \neq y$ temos então
$\|\lambda x + (1-\lambda) y\| < \lambda \|x\| + (1-\lambda)\|y\| = \lambda + 1 - \lambda = 1$
(já que $\|x\| = \|y\| = 1$).

① $\Rightarrow$ ② Em ② como estamos supondo $\|x\| \neq 0$ e $\|y\| \neq 0$; suponhamos $0 < \|y\| \leq \|x\|$ e tomemos $\lambda = \frac{\|x\|}{\|y\|} \geq 1$. Se agora $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ então

$$\lambda (\|x\| + \|y\|) = \lambda \|x+y\| = \|\lambda x + \lambda y + x - x\| \leq$$
$$\leq \|x + \lambda y\| + (\lambda - 1)\|x\| \leq \|x\| + \lambda\|y\| + \lambda\|x\| - \|x\| =$$
$$= \lambda(\|x\| + \|y\|) \Rightarrow \|x\| - \lambda\|x\| + \lambda(\|x\| + \|y\|) \leq$$
$$\leq \|x + \lambda y\| \leq \lambda(\|x\| + \|y\|) + \|x\| - \lambda\|x\| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|x\| + \lambda\|y\| \leq \|x + \lambda y\| \leq \|x\| + \lambda\|y\|$$ lembrando que $\lambda = \frac{\|x\|}{\|y\|}$ $\quad \|x + \lambda y\| = 2\|x\| \Rightarrow$
$$\Rightarrow \|x + \lambda y\| = 2\|x\| \Rightarrow \left\|x + \frac{\|x\|}{\|y\|} y\right\| = 2\|x\| \Rightarrow$$
$$\left\|\frac{\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}}{2}\right\| = 1$$ mas por ① temos $\frac{y}{\|y\|} = \frac{x}{\|x\|} \Rightarrow y = \lambda x$
$\lambda > 0$

<u>Definição 2</u> - Um espaço de Banach que

satisfaz uma das condições acima é dito estritamente convexo (estritamente arredondado).

Note-se que estamos exigindo em ① um arredondamento da Bola unitária mas não um arredondamento uniforme; entretanto:-

Proposição 4

Todo espaço de dimensão finita E estritamente convexo é uniformemente convexo.

Prova

Dado $\varepsilon > 0$, se $\|x\| = \|y\| = 1$ e $\|x-y\| \geq \varepsilon$ consideremos a função $F : X \to \mathbb{R}$; $F(x,y) = \left\|\frac{x+y}{2}\right\|$ onde $X = B \times B - A$ onde $B = \{x \mid x \in E;\ \|x\| = 1\}$ e $A = \{(x,y) \in B \times B \mid \|x-y\| < \varepsilon\}$

Como A é aberto $B \times B - A$ é fechado em $B \times B$ logo compacto. (já que a bola unitária é compacta). Como por hipótese $F(x,y) < 1$ (pois $\|\lambda x + (1-\lambda) y\| < 1$ se $\lambda = \frac{1}{2}$) $F(x,y)$ tem maximo estritamente menor que 1 em $\{B \times B - A\}$; chamemos êste máximo de $1 - \delta(\varepsilon)$ e então $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$

Exemplos de Espaços Estritamente Convexos

1º) Todo espaço uniformemente convexo (Espaços de Hilbert; os l_p (L_p) etc.).

De fato da proposição ② sai imediatamente que $\| \lambda x + (1-\lambda) y \| \leq$
$\leq 1 - 2\,\delta(\varepsilon)\frac{1}{2} = 1 - \delta(\varepsilon) < 1$ C. Q. D.

Outra demonstração dêste fato seria
Dados x, y com $\|x\| = \|y\| = 1$ e λ t.q. $0 < \lambda < 1$ sabemos que existe $a > 0$ t.q. $0 < \lambda + a < 1$ e $0 < \lambda - a < 1$ então consideramos os vetores $U = (\lambda + a) x + (1 - \lambda - a) y$;
$V = (\lambda - a) x + (1 - \lambda + a) y$ então como
$\|U\| \leq 1$; $\|V\| \leq 1$ e $\|U - V\| = 2a \|x - y\| \geq \varepsilon \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \left\| \frac{U+V}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon) \Longrightarrow \| \lambda x + (1-\lambda) y \| < 1$

2º) Consideremos o espaço $\widehat{\overset{2}{\oplus}} E_n = E$ onde
$E_n = l_n$ $n \geq 2$ [Ver ④ ou ⑤].
Tal espaço é de Banach (notas de curso 1969 Hönig) com a norma $\|x\| = \left[\sum_{2}^{\infty} \|x_n\|_n^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ afirmamos então:- a) E não é uniformemente convexo; b) E é estritamente convexo.

a) De fato se considerarmos que cada E_n está imerso em E; para os vetores de E_n teríamos como já vimos (exemplo 2, pag.1)

$\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt[n]{1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n}$ então se $n \to \infty$ $\delta(\varepsilon) \to 0$

logo não podemos ter $\left\| \frac{x-y}{2} \right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$

b) $\| \lambda x + (1-\lambda) y \| = \left[\sum_{n=2}^{\infty} \| \lambda x_n + (1-\lambda) y_n \|_n^2 \right]^{\frac{1}{2}} \overset{①}{\leq}$

$\leq \left[\sum_{n=2}^{\infty} \left[\lambda \| x_n \|_n + (1-\lambda) \| y_n \|_n \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq$

(a igualdade em ① se verifica $\iff \forall n\ \exists u_n > 0$ tal que $y_n = u_n x_n$ $n \geq 2$)

$\overset{②}{\leq} \left[\sum_2^{\infty} (\lambda \| x_n \|_n)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_2^{\infty} \left[(1-\lambda) u_n \| x_n \|_n \right]^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ (Cauchy-Schwartz) de novo a igualdade se verifica $\iff u \lambda \| x_n \| = u_n (1-\lambda) \| y_n \|$ supondo que se deu a igualdade ① e ② teremos

$u \lambda \| x_n \| = (1-\lambda) u_n \| x_n \| \Rightarrow u_n = \frac{u \lambda}{1-\lambda} \Rightarrow y = \frac{u \lambda}{1-\lambda} x$

ou $y = u_1 x$, $u_1 > 0$ mas como $\|y\| = \|x\| = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = x$. Se então $y \neq x$ com $\|x\| = \|y\| = 1$

virá $\| \lambda x + (1-\lambda) y \| < \lambda \underbrace{\left[\sum_2^{\infty} (\| x_n \|_n)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}_{\leq 1} +$

$+ (1-\lambda) \underbrace{\left[\sum_2^{\infty} (\| y_n \|_n)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}_{\leq 1} = 1$

Com o que foi visto antes vimos que todo espaço uniformemente convexo é estritamente convexo; para dimensão finita vale a recíproca, mas existem espaços estritamente convexos que não são uniformemente convexos.

Contra exemplos

Qualquer dos contra exemplos anteriores para espaços uniformemente convexos (§ 1 cap. 0).

§ 2 Conjuntos "normais" e "Anormais"

Neste parágrafo estudaremos conjuntos convexos limitados tais que todos os seus pontos são num certo sentido diametrais; procuraremos mais tarde excluir tais conjuntos por serem Anormais; é claro que estamos excluindo as possibilidades do conjunto ser vazio e unitário.

Definição 1 - Seja C convexo e limitado em E espaço de Banach; se $\delta(C)$ é o seu diâmetro diremos que $x \in C$ é ponto diametral de C se $\delta(C) = \sup_{y \in C} \|x - y\|$

Exemplos de Convexos limitados onde todo conjunto é diametral

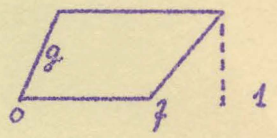
1º) Em $\mathcal{C}[0 1]$ com a norma do sup consideremos o conjunto $C = \{ f \,/\, f(0) = 0 ;$ $f(1) = 1 ; \ 0 \leq f(t) \leq 1 \}$.

É fácil ver que C é :- a) Convexo; limitado; $\delta(C) = 1$. b) todo $x \in C$ é diametral

a) 1) $h = \lambda f + (1-\lambda) g ; \ f, g \in C$
$0 \leq \lambda \leq 1$ então $h(0) = 0$; $h(1) = 1$;
$0 \leq h(t) \leq 1 \Rightarrow h \in C$.

a) 2) Se $f \in C$ $\|f\| \leq 1 \Rightarrow C$ limitado;

a) 3) $\|f - g\| \leq \|f\| \leq 1 \Rightarrow \delta(C) \leq 1$; $\delta(C) = 1$ pois as funções da figura ao lado são tais que $\|f - g\| = 1$



b) Que todo ponto é diametral sai imediatamente do fato de $\forall f \in C \; \exists g_n \in C$ t.q. $\|f - g_n\| \longrightarrow 1$.

2º) Em C_0 consideremos o conjunto $C = \{(c_1, c_2, \dots c_n, \dots) / 0 \leq c_i \leq 1 \; i = 1 2 \dots\}$.

Da mesma forma C é:- a) convexo; limitado; $\delta(C) = 1$. b) Todo $x \in C$ é diametral..

a) 1) $\lambda x + (1-\lambda) y = (\lambda c_i + (1-\lambda) c_i')_{i \in \mathbb{N}}$ e é claro que $0 \leq \lambda c_i + (1-\lambda) c_i' \leq 1$

a) 2) se $x \in C$ $\|x\| \leq 1 \Rightarrow C$ limitado

a) 3) $x, y \in C \Rightarrow \|x - y\| \leq 1 \Rightarrow \delta(C) \leq 1$ e se tomamos $x = (0, 0, 0, \dots)$ $y = (1, 0, 0 \dots) \Rightarrow$
$\Rightarrow \|x - y\| = 1 \Rightarrow \delta(C) = 1$

b) Dado $x \in C$ como $x \in C_0$ se $x = (x_1, \dots x_n, \dots)$ $\forall \varepsilon \; \exists n_0$ t.q. $n \geq n_0 \Rightarrow x_n \leq \frac{\varepsilon}{2}$ $(\varepsilon < 1)$.
Consideremos $y_n = (0, 0 \dots, 1 - x_n, 0, 0, \dots) \Rightarrow$
$\Rightarrow \|y_n - x\| \geq |1 - 2x_n| \geq 1 - 2|x_n| \geq 1 - \varepsilon$ logo todo ponto é diametral.

3º) Em $l_\infty(\mathbb{N})$ o mesmo conjunto do exemplo anterior (já que $C_0 \subset l_\infty$) nos mos_ tra que em l_∞ existe convexo limitado tal que todo ponto é diametral.

4.º) Em $l_1(\mathbb{N})$ consideremos

$C = \{ x = (x_1, \dots x_n; \dots) \mid 0 \leq x_i \leq 1 ; \sum_1^\infty |x_i| = 1 \}$

a) C é convexo limitado ; $\delta(C) = 2$

b) Todo $x \in C$ é diametral.

a) 1) C é convexo. $x, y \in C$; $\lambda x + (1-\lambda) y =$
$= (\lambda x_i + (1-\lambda) y_i)_{i \in \mathbb{N}} \Rightarrow 0 \leq \lambda x_i + (1-\lambda) y_i \leq$
≤ 1 e $\sum_{i=1}^\infty (\lambda x_i + (1-\lambda) y_i) = \lambda \sum_1^\infty x_i + (1-\lambda) \sum_1^\infty y_i = 1 \Rightarrow$
$\lambda x + (1-\lambda) y \in C$.

a) 2) Se $x \in C$ $\|x\| = 1 \Rightarrow \delta(C) \leq 2$; se agora
$x \in C \Rightarrow \sum_1^\infty |x_n| = 1 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \; n_0$ t.q.
$0 \leq x_n \leq \varepsilon$ para $n > n_0$

Seja $y_n = \begin{cases} 0 & n \neq n_0 \\ y_{n_0} = 1 & n = n_0 \end{cases} \Rightarrow \|y_n - x\| \geq \sum_{n \neq n_0} x_n + (1 - x_{n_0}) =$

$= \sum_1^\infty x_n + 1 - 2x_{n_0} = 2 - 2x_{n_0} \geq 2 - 2\varepsilon$ ∴ se considerarmos os pontos y_n vemos que $\|y_n - x\| \to 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow \delta(C) = 2$ e mais ainda que todo ponto é diametral.

Veremos adiante que o fato de só darmos exemplos de conjuntos convexos limitados em que todo ponto é diametral em espaços que não são uniformemente convexos não é uma coincidência. Antes porém procuremos definir uma classe de conjuntos convexos que exclua os acima; mais ainda excluirmos a possibilidade do convexo conter um conjunto como os acima.

<u>Definição 2</u> _ Um conjunto convexo $X \subset E$; onde E é um espaço de Banach é dito de <u>estrutura normal</u> se, para todo convexo limitado de X com mais de um ponto, existe um ponto que não é diametral.

Observe-se que as <u>esferas</u> unitárias em $C[a\,b]$; $C_0(\mathbb{N})$; $l_\infty(\mathbb{N})$ e $l_1(\mathbb{N})$ tem um ponto (a origem) que não é diametral, mas estas esferas contém conjuntos convexos tais que todo ponto é diametral; logo elas não tem <u>estrutura normal</u>.

A existência de uma classe grande de conjuntos convexos com estrutura normal é garantida por:-

<u>Proposição 1</u>

Todo convexo compacto K (com mais de um ponto) de um espaço de Banach tem estrutura normal.

<u>Prova</u>

Devemos provar que todo convexo de

K com mais de um ponto tem um ponto que não é diametral; vamos em primeiro lugar mostrar que a demonstração pode ser feita sòmente para os convexos compactos. De fato se $C \subset K$ é um convexo $\Rightarrow \bar{C} \subset K$ e $\bar{C}$ é convexo pois se $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{C}$ $\forall \varepsilon > 0$ existem $x, y \in C$ tal que $\|\bar{x} - x\| \leq \varepsilon$ $\quad \|\bar{y} - y\| \leq \varepsilon \Rightarrow$ se $\beta = 1 - \alpha$

$\|\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} - (\alpha x + \beta y)\| \leq \alpha \|\bar{x} - x\| + \beta \|\bar{y} - y\| \leq$
$\leq (\alpha + \beta)\varepsilon = \varepsilon \Rightarrow$ já que $\alpha x + \beta y \in C$ que $\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} \in \bar{C}$! $\bar{C} \subset K$ sai do fato de K ser compacto.

Se agora $x_0 \in \bar{C}$ não é diametral $\Rightarrow A = \sup_{x \in \bar{C}} \|x_0 - x\| < \delta(\bar{C}) = \delta(C)$

mas então existe $y_0 \in C$ t.q. $\|y_0 - x_0\| < \frac{\varepsilon}{2} =$
$= \frac{\delta(C) - A}{2}$. Então $\forall x \in C$ temos

$\|y_0 - x\| \leq \|y_0 - x_0\| + \|x_0 - x\| < \frac{\varepsilon}{2} + A \therefore \sup_{x \in C} \|y_0 - x\| \leq$
$\leq A + \frac{\varepsilon}{2} < \delta(C) \Rightarrow y_0$ não é diametral em C.

Isto posto passemos a provar a proposição

Seja K um compacto convexo de um espaço de Banach E; se supuzermos que êle não tem estrutura normal, conseguiremos exibir uma seqüência $x_1, x_2, \dots x_n \dots$ de pontos de K tais que

(1) $\|x_i - x_k\| = \delta(K)$ $(i, k = 1, 2 \ldots n \ldots \; i \neq k)$; mas isto contraria a compacidade de K pois temos uma seqüência infinita de pontos de K que não contém pontos de acumulação. Resta pois provar a existência de tal seqüência.

Seja x_1 um ponto de K; como êle é diametral $\sup_{x \in K} \|x_1 - x\| = \delta(K)$; como a função $f_{x_1}(x) = \|x_1 - x\|$ é contínua em K atinge seu máximo em $x_2 \in K \therefore$ existe x_2 t. q. $\|x_2 - x_1\| = \delta(K)$. Suponhamos obtidos n pontos nas condições (1) e seja $x = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$, $[x \in K \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ pois se $n = 2$ $x = \frac{x_1 + x_2}{2} \in K$ (convexidade) supondo $x_1, \ldots x_{n-1} \in K$ (convexidade de K) $\Longrightarrow x \in K]$.*

Da mesma maneira que obtivemos x_2 existe x_{n+1} t.q.

$\left\| x_{n+1} - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \right\| = \delta(K)$ resta provar que $\|x_{n+1} - x_i\| = \delta(K)$. $\delta(K) = \left\| x_{n+1} - \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \right\| =$

$= \frac{1}{n} \|(x_{n+1} - x_1) + (x_{n+1} - x_2) \ldots + (x_{n+1} - x_n)\| \leq$

$\leq \frac{1}{n} \left[\|x_{n+1} - x_1\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\| \right] \leq$

$\leq \frac{1}{n} \left[\delta(K) + \delta(K) + \ldots + \delta(K) \right] = \delta(K)$ então

$\delta(K) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \|x_{n+1} - x_i\| \leq \delta(K) \Longrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \|x_{n+1} - x_i\| =$

$= \delta(K) \Longrightarrow$ [já que $\|x_{n+1} - x_i\| \leq \delta(K)$] $\|x_{n+1} - x_i\| = \delta(K)$.

* Observar que $x = \frac{n-1}{n} \left(\frac{x_1 + \ldots + x_{n-1}}{n-1} \right) + \frac{1}{n} x_n$

Corolário 1

Todo espaço de dimensão finita tem estrutura normal.

Prova

Sai imediatamente da proposição anterior e das observações iniciais da sua demonstração

Exemplos

1º) Todo convexo compacto tem estrutura normal; logo, todo convexo de um espaço de dimensão finita também tem estrutura normal.

Surge uma pergunta trivial nesta altura; um convexo compacto de um espaço de Banach não está sempre num sub espaço de dimensão finita?

Se assim fôsse a classe dos conjuntos com estrutura normal não seria tão "grande" quanto desejávamos. Veremos adiante que a resposta é negativa; o que mostra que a classe dos conjuntos com estrutura normal é "realmente grande"

2º) Todo espaço Uniformemente Convexo (os l_p (L_p); $1 < p < \infty$; os Hilbert etc.) tem estrutura normal.

Prova

Seja C um convexo limitado (contendo mais de um ponto) de E uniformemente convexo.

Se $x_1, x_2 \in C$ $x_1 \neq x_2$ consideremos $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ e chamemos de $\delta(C) = d$ o diâmetro de C.

$\forall x \in C \begin{cases} \|x - x_1\| \leq \delta(C) \\ \|x - x_2\| \leq \delta(C) \end{cases}$; se chamarmos de $\begin{cases} U = x - x_1 \\ V = x - x_2 \end{cases}$

$\|U\| \leq \delta(C)$; $\|V\| \leq \delta(C)$; $\|U - V\| = \|x_1 - x_2\| \geq \varepsilon$

(pois $x_1 \neq x_2$) $\Rightarrow \left\|\frac{U+V}{2}\right\| \leq \left[1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{\delta(C)}\right)\right] \delta(C)$

(proposição 1 § 1) ou $\left\|x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right\| \leq \left[1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{\delta(C)}\right)\right] \delta(C)$

chamando de $A = \left[1 - \delta\left(\frac{\varepsilon}{\delta(C)}\right)\right] \delta(C) < \delta(C)$ temos

$\left\|x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right\| \leq A < \delta(C) \quad \forall x \in C$ logo

$\sup_{x \in C} \left\|x - \frac{x_1 + x_2}{2}\right\| \leq A < \delta(C) \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{2}$ não é diametral $\Rightarrow C$ tem estrutura normal.

O próximo exemplo contém uma resposta à pergunta do exemplo 1.

3º) Qualquer que seja o espaço de Banach E existem conjuntos (convexos normais) convexos compactos que não pertencem a nenhum seu sub-espaço de dimensão finita.

Prova

Seja E de Banach, consideremos em E conjunto $\{e, e_2 \dots e_n \dots\}$ de vetores LI tais que $\|e_n\| \leq \frac{1}{2^n}$. Seja agora $K = \{x = \sum_1^\infty x_n e_n; |x_n| \leq 1\}$ claro que a expressão $x = \sum_1^\infty x_n e_n$ tem sentido pois a seqüência $x_j = \sum_1^j x_i e_i$ é de Cauchy já que $\| x_j - x_p \| = \| \sum_p^j x_i e_i \| \leq \sum_p^j \frac{1}{2^n} \leq \varepsilon \Rightarrow x$ está bem definido já que nosso espaço é de Banach. Então afirmamos que tal conjunto é convexo. De fato se $x, y \in K$, $\lambda x + (1-\lambda) y \in K$ já que $\lambda x + (1-\lambda) y = \sum [\lambda x_m + (1-\lambda) x'_m] e_m$ e $|\lambda x_m + (1-\lambda) x'_m| \leq [\lambda + (1-\lambda)] = 1$ então o conjunto é convexo.

Consideremos agora $\overline{K}$; êle é convexo.

Provemos que é compacto.

Sejam $K_{n_0} = \{ y / y = \sum_{n=1}^{n_0} y_n e_n ; |y_n| \leq 1 \}$ para cada n_0 tal conjunto é compacto pois é fechado (e está imerso num espaço de dimensão finita) e limitado.

Mas então $\forall \varepsilon > 0$ tomemos n_0 t.q. $\sum_{n_0}^\infty \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ então K_{n_0} tem a propriedade que $x \in K \Rightarrow d(x; K_{n_0}) \leq \varepsilon$.

De fato $d(x, K_{n_0}) \leq \| x - x_{n_0} \| = \| \sum_{n_0}^\infty y_n e_n \| \leq \sum_{n_0}^\infty \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ onde $x_{n_0} = \sum_1^{n_0} x_i e_i$ com x_i coeficiente de x.

Assim sendo, K é relativamente compacto logo seu fêcho é compacto.

Nota - A demonstração é trivial a partir do lema de Mazur. cap. 0 § 5.

§ 3 - Reflexividade (resumo)

Seja E um espaço de Banach; anotaremos por E' o seu dual topológico e por E'' o dual topológico de E'. Se agora $J: E \to E''$ é a função definida por $J(x) := x''$ com $x''(x') := x'(x)$; é fácil ver que :- a) J é linear; b) J é uma isometria (Hahn - Banach) Ver [5].

Definição 1 - Se J de E em E'' é sôbre diremos que E é um espaço reflexivo.

Exemplos

1º) Todo espaço de Hilbert é reflexivo.

2º) Os $l_p(I)$ ($L_p(I)$) $1 < p < \infty$ são reflexivos.

3º) Os espaços de dimensão finita são reflexivos.

Contra-exemplos

1º) $C[a, b]$; 2º) $l_1(I)$, $l_\infty(I)$; 3º) $c_0(I)$ ($c_0(I)'' = l_\infty(I)$).

Para as demonstrações (tanto dos exemplos como dos contra-exemplos) consultar [4] e [5]

Proposição 1

Todo espaço uniformemente convexo é reflexivo. Demonstração - [Ver 1, 8 ou 10]

Observações

1º) A recíproca é falsa, basta tomar o $\mathbb{R}^2$ com a norma $\|(a\,b)\|_1 = |a| + |b|$

2º) A recíproca parcial da proposição, isto é, um espaço reflexivo de dimensão infinita seria uniformemente convexo; é falsa. Basta tomar

$$\widehat{\bigoplus_{i\in I}}^{p} E_i = \{x \in \prod_{i\in I} E_i \,/\, \|x\|_p < \infty\} \text{ onde } \|x\|_p = \left\{\sum \|x_i\|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

$1 < p < \infty$ onde $E_i = \mathbb{R}^2$ com a norma 1 $\widehat{\bigoplus}^{p} E_i$ é reflexivo (Ver [4] ou [5]) mas trivialmente não é uniformemente convexo (basta tomar a imersão dos $\mathbb{R}^2$ para se ver isto).

§ 4 - Topologia Fraca

Seja E de Banach e E' seu dual topológico ($\forall u \in E'$ pomos $\|u'\| = \sup_{x \in B_1(0)} |u(x)|$.) Dado $\varepsilon > 0$ e $u_1, u_2, \ldots, u_n \in E'$ seja $V(u_1, u_2 \ldots, u_n ; \varepsilon) = \{x \in E \,/\, |u_i(x)| < \varepsilon \quad i = 1, 2, \ldots n\}$ É fácil ver que o conjunto dos $V(u_1, \ldots, u_n; \varepsilon)$ quando variam os $u \in E'$ e os $\varepsilon > 0$ definem em E uma topologia pois esta leção $\mathcal{V}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de zero.

Definição 1. - A topologia definida por $\mathcal{V}$ será chamada Topologia Fraca sôbre E.

Propriedades da Topologia Fraca

1º) $x_n \xrightarrow{fraç} x_0 \iff \lim_{n \to \infty} u(x_n) = u(x_0) \; \forall \, u \in E'$

2º) Se $x_n \xrightarrow{fraç} x_0 \implies x_n$ limitada e

$\| x_0 \| \leq \lim_{n \to \infty} \inf \| x_n \|$

3º) A topologia fraca é menos fina que a normada e Top. Fraca = Top. normada $\iff$ E tem dimensão finita

Teoremas

1º) Todo convexo fechado de um espaço de Banach E é necessariamente fracamente fechado.

2º) Um espaço de Banach E é reflexivo $\iff$ sua bola unitária é fracamente compacta.

§ 5. Alguns Teoremas de Ponto Fixo

Citaremos neste parágrafo os teoremas

de ponto fixo que usaremos no decorrer da exposição.

1º) O Teorema de Banach

Se $f : (M, d) \longrightarrow (M, d)$ é uma função tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \times d(x, y)$ $0 < c < 1$ e $(M; d)$ é completo então f tem um ponto fixo e único.

Demonstração (consultar Hönig [6]).

Observações

1) Se exigirmos sòmente $d(f(x), f(y)) \leq$ $\leq d(x, y)$ os contra-exemplos são inúmeros mesmo que o espaço M seja compacto (dois pontos já são suficientes). Entretanto se exigirmos no caso compacto $d[f(x), f(y)] < d(x, y)$ $(x \neq y)$ f terá um ponto fixo; basta tomar a função $h(x) = d(x; f(x))$ $(h : K \longrightarrow \mathbb{R})$ ela tem um mínimo em $x_0 \in K$ e êste mínimo deverá ser zero pois caso contrário $d[f(x_0)\, f^2(x_0)] < d(x_0\, f(x_0))$ absurdo. Mas de :- $d(x_0, f(x_0)) = 0 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow f(x_0) = x_0 \Longrightarrow x_0$ ponto fixo.

2) São contra exemplos para o caso compacto com $d[f(x), f(y)] \leq d(x,y)$, o círculo; dois pontos; etc. Somos levados a pensar que a não convexidade é que nos permite obtê-lo!!! Uma primeira aproximação desta conjectura é:-

2.º) O Teorema de Brower

Se F é uma função de uma bola do $\mathbb{R}^n$ nela mesma; contínua então, F tem ponto fixo.

Demonstração- 1.ª) Via análise consultar Milnor [14]; 2.ª) Via topologia consultar [13]

Observações

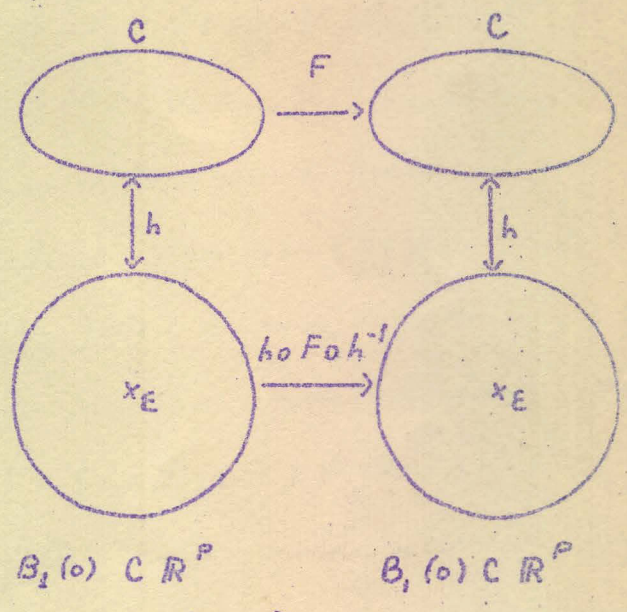
1) Ambas as demonstrações se baseiam no fato de que é impossível obtermos uma função contínua da Bola em si que deixa a fronteira fixa.

2) Sabe-se (Ver 7) que no $\mathbb{R}^n$ um convexo compacto com ponto interior é homeomorfo a uma bola, daí sai imediatamente que todo convexo do $\mathbb{R}^n$ compacto é homeomorfo a uma bola do $\mathbb{R}^p$ $(p \leq n)$; então temos:

Proposição

Tôda função contínua de um convexo compacto de $\mathbb{R}^n$ nêle mesmo terá ponto fixo.

De fato o diagrama ao lado mostra que se ε é ponto fixo de $h \circ F \circ h^{-1}$ então $h^{-1}(\varepsilon)$ é ponto fixo de F; o que responde à pergunta acima.



$$\left[h\circ F\circ h^{-1}(\varepsilon)=\varepsilon \Rightarrow F(h^{-1}(\varepsilon)) = h^{-1}(\varepsilon)\right]$$

3) Poderíamos ter a esperança de que o teorema de Brower fôsse generalizável em dimensão infinita, entretanto mesmo um espaço de Hilbert é falso.

Contra-exemplo de Brower em $l_2(\mathbb{N})$ (ver 7)

Ponhamos $F: B_1(0) \subset l_2(\mathbb{N}) \longrightarrow B_1(0) \subset l_2(\mathbb{N})$ da seguinte forma.

Se $x = (x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots)$ $\quad F(x) = (\sqrt{1-\|x\|^2}, x_1, x_2, \ldots)$

É fácil ver que

a) F está bem definida já que

$\|F(x)\|^2 = 1 - \|x\|^2 + \|x\|^2 = 1 \Longrightarrow \|F(x)\| = 1$

b) F é contínua pois

$$F = f_1 + f_2 \text{ com } \begin{cases} f_1 : B_1(0) \subset l_2(\mathbb{N}) \longrightarrow B_1(0) \subset l_2(\mathbb{N}) \\ f_2 : B_1(0) \subset l_2(\mathbb{N} \longrightarrow B_1(0) \subset l_2(\mathbb{N}) \end{cases}$$

$$\text{definidas por } \begin{cases} (x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots) \xrightarrow{f_1} (\sqrt{1-\|x\|^2}, 0, 0, \ldots) \\ (x_1, x_2 \ldots x_n \ldots) \xrightarrow{f_2} (0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \end{cases}$$

e ambas são obviamente contínuas.

c) F não tem ponto fixo pois se $(x_1\, x_2 \ldots x_n \ldots) =$
$= (\sqrt{1-\|x\|^2}, x_1, x_2 \ldots x_n \ldots) \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = \ldots$
logo $x = 0$ seria a única possibilidade de ponto fixo mas $F(0) = (1,0,0,0\ldots) \neq 0$.

Uma vêz visto isto gostaríamos de generalizar para os espaços de <u>dimensão infinita</u> ao menos o caso <u>compacto convexo</u> e então virá :-

3º) Os Teoremas de Schauder

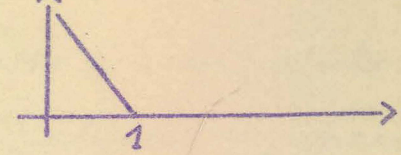
Lema I

Seja E de Banach e K compacto convexo então $\forall\, \varepsilon > 0$ existe $h : K \longrightarrow T_\varepsilon$; onde T_ε está imerso num subespaço de dimensão finita, com h tal que h contínua e $\| h(x) - x \| \leq \varepsilon$

Prova

Consideremos uma função contínua

$$W(t) = \begin{cases} 0 & t \geq 1 \\ >0 & 0 \leq t < 1 \end{cases}$$



$W : \mathbb{R}^{+} \to \mathbb{R}$

Escolhemos agora $\{x_1, x_2, \dots x_r\} \subset K$ t.q. todo ponto de K está a uma distância menor que ε de $\{x, x_2 \dots x_r\}$ (K é compacto!)

Sejam agora as funções

$\psi_i : K \to \mathbb{R}$ t.q. $\psi_i(x) = W\left(\frac{d(x, x_i)}{\varepsilon}\right)$ $i = 1, 2, 3 \dots r$

então $\sum_{i=1}^{r} \psi_i(x) > 0$ em K já que uma das parcelas é maior que zero.

Seja $\varphi_i(x) = \frac{\psi_i(x)}{\sum_1^r \psi_i(x)}$ $\qquad \varphi_i : K \to \mathbb{R}$

φ_i é contínua em K (quociente de contínuas) e $\varphi_i(x) = 0$ se $d(x, x_i) \geq \varepsilon$; mais ainda $\sum_i^r \varphi_i(x) = 1$

Seja agora o fêcho convexo de $\{x, x_2 \dots x_r\}$; [note-se que tal fêcho está em K pois K é convexo e compacto; e tal fêcho convexo está imerso num sub-espaço de dimensão finita] chamemos de T_ε tal conjunto

Consideremos agora $h : K \to T_\varepsilon$ definida por $h(x) = \sum_1^r \varphi_i(x)\, x_i$. É claro que $h(x) \in T_\varepsilon$ [pois $\sum \varphi_i(x) = 1$] e é contínua.

$\| h(x) - x \| = \| \sum_1^r \varphi_i(x)\, x_i - \sum_1^r \varphi_i(x)\, x \| \leq \sum \varphi_i(x) \| x_i - x \| = (1)$

Basta agora observar que dado x, êle dista dos $x_1, x_2 \ldots x_r$ menos que ε para alguns i, para aquêles de que dista mais que ε, $\varphi_i(x) = 0$; então ① $\leq \left[\sum_1^r \varphi_i(x)\right] \varepsilon = \varepsilon$

1º Teorema de Schauder

Se E é de Banach, K compacto convexo e $F: K \to K$ contínua; então F tem ponto fixo.

Prova

Tomemos no lema anterior $\varepsilon = 1, \frac{1}{2} \ldots \frac{1}{n} \ldots$ e consideremos $h_n : K \to T_{1/n}$ e $F_n : T_{1/n} \to T_{1/n}$ definida por $F_n(x) = h_n(F(x))$ (restrita a $T_{1/n}$ é claro). Então por Brower F_n tem ponto fixo x_n; considerando agora que K é compacto existe $x_{n_k} \to x_\infty$. Por outro lado $\| F(x) - F_n(x) \| \leq \frac{1}{n}$ $\forall x \in K$ (se pensarmos em F_n como definida em K; sai do lema ① substituindo x por $F(x)$).
Mas isto significa $\| F(x) - F_n(x) \| \to 0$ com $n \to \infty$. Em particular se $x = x_{n_k}$ e $n_k \to \infty$ teremos $\| F(x_\infty) - x_\infty \| = 0 \Rightarrow F(x_\infty) = x_\infty$ C.Q.D.

2º Teorema de Schauder

Se F é fechado e convexo em E espaço de Banach e $K \subset F$ é compacto então se $f: F \longrightarrow F$ é contínua e tal que $f(F) \subset K$ então f tem ponto fixo.

Prova

Consideremos o fecho convexo de K êle estará contido em F (pois êste é fechado e convexo); tal fecho K_c é compacto (Mazur).

Seja $f/_{K_c} : K_c \longrightarrow K_c$; como pelo teorema 1 $f/_{K_c}$ tem ponto fixo em K_c então a nossa f terá ponto fixo em F. C.Q.D.

Resta provar que o fecho convexo de um compacto é compacto.

Lema de Mazur

Se K é compacto sua envoltória convexa fechada é compacta.

(Consideraremos K tal que se $x \in K$, $\|x\| \leq 1$. Em nada particularizará a demonstração tal restrição).

Prova

Chamemos de $\overline{H}$ a envoltória convexa fechada de K. Sabemos que

$$\overline{H} = \overline{\{x \,/\, x = \sum_1^n \lambda_i x_i \;;\; n \in \mathbb{N} \;;\; \sum_1^n \lambda_i = 1;\ \lambda_i \geq 0,\ x_i \in K\}} \quad (A)$$

Provaremos que $\overline{H}$ é compacto provando que H é totalmente limitado.

Dado $\varepsilon > 0$ já que K é compacto existem $a_1 a_2 \dots a_r$ em K t.q. todo ponto de K tem distância menor que ε a ao menos um dos a_i $i \in \{1 2 \dots r\}$.

Se agora $x \in H$, $x = \sum_1^n \lambda_i x_i$ Ⓐ consideremos $y = \sum_1^n \lambda_i a_{j_i} = \sum_1^r \lambda'_i a_i$; a_{j_i} t.q. $\| x_i - a_{j_i} \| \leq \varepsilon$.

Então $\| x - y \| \leq \sum_1^n \lambda_i \| x_i - a_{j_i} \| \leq \varepsilon$

Dividamos agora o intervalo $[0,1]$ em m intervalos tais que $\frac{1}{m} < \frac{\varepsilon}{r}$

Seja $z = \sum_1^r \frac{p_i}{m} a_i$ onde $\left| \frac{p_i}{m} - \lambda'_i \right| < \frac{\varepsilon}{r}$ ① (p_i inteiro).

O número de p_i será limitado para cada i e conseqüentemente o número dos zs.

Então $\| y - z \| \leq \sum_1^r \left| \lambda'_i - \frac{p_i}{m} \right| \| a_i \|$

(como $a_{j_i} \in K$, $\| a_i \| \leq 1$) $\Longrightarrow$ $\| y - z \| \leq r \frac{\varepsilon}{r} = \varepsilon$.

Agora $\| z - x \| \leq \| x - y \| + \| y - z \| \leq 2 \varepsilon$ logo o H é totalmente limitado.

Capítulo I

Os Teoremas de Browder-Kirk.

§ 1 Funções não Expansivas

Definição 1 - Seja C um espaço métrico e $T: C \to C$ uma função. T será dita não expansiva se:- $d(T(x), T(y)) \leq d(x,y)$ $\forall x, y \in C$.

Exemplos

1º) Isometrias (i.e $d(T(x)\,T(y)) = d(x,y)$ $\forall x, y \in C$)

2º) Contrações (i.e $d(T(x)T(y)) \leq a\,d(x,y)$ $\forall x, y \in C$ $0<a<1$)

3º) Menos trivial mas instrutivo é o caso em que C é compacto e $T: C \to C$ t.q $d(T(x)\,T(y)) \geq d(x,y)$ $\forall x, y \in C$ (na verdade T é uma isometria).

§ 2 O Problema de Browder-Kirk.

Estamos interessados nos espaços métricos C tais que tôda função não expansiva tem ponto fixo; nosso objetivo daqui para frente é determinar alguns dêstes espaços; que chamaremos solução do Problema BK.

Definição 1 - Seja $C \subset E$ onde E é um espaço normado. Nós diremos que C é estrelado com centro de estrela x se $\forall y \in C$ o segmento $\lambda x + (1-\lambda) y \in C$ $\quad 0 \leq \lambda \leq 1$

Proposição 1

Se $C \subset E$ (E normado) é compacto e estrelado com centro de estrela 0 então C é solução do problema BK.

Prova

Seja $T: C \to C$ não expansiva e tomemos $H_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) T(x) \quad n = 1, 2, 3 \ldots$

Então $H_n: C \to C$ está bem definida $\forall n \in \mathbb{N}$.

De fato $H_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) T(x) + \frac{1}{n} 0 \in C$

Por outro lado $\| H_n(x) - H_n(y) \| = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \| T(x) - T(y) \| \leq$ $\leq \left(1 - \frac{1}{n}\right) \| x - y \|$ $\therefore$ H_n tem ponto fixo $x_n \in C$.

Como C é compacto existe x_{n_k} convergente para x e então $H_{n_k}(x_{n_k}) = \left(1 - \frac{1}{n_k}\right) x_{n_k}$.

Tomando o limite quando $n_k \to \infty$ temos $T(x) = x$.

Teorema 1 (Kirk)

Seja E de Banach e $C \subset E$ convexo, fechado, limitado com estrutura normal se E é reflexivo; C é solução do problema BK.

Comentários

1º) C deve ser limitado - Basta considerar $\mathbb{R}$ com a topologia usual e a função $T(x) = x + a$ $a \neq 0$. T não tem ponto fixo e estão satisfeitas tôdas as condições do teorema 1 salvo C ser limitado.

2º) C deve ser fechado - Ainda na reta seja C o interior da bola unitária; isto é $C = \{x \mid \|x\| < 1\}$ e $T: C \to C$ definida por $T(x) = \frac{x+a}{2}$ com $\|a\| = 1$ então $\|T(x)\| = \frac{1}{2}\|x + a\| < 1$ o que prova que T está bem definida e se $\frac{x+a}{2} = x \Rightarrow x = a$.

3º) C deve ser convexo. Considerar $C = \{a, b\} \subset \mathbb{R}$ e $T(a) = b$; $T(b) = a$

4º) Se C não é convexo normal e E não é reflexivo o teorema é falso (Kirk). De fato se $E = \mathcal{C}[0,1]$ com a norma Sup e $C \subset E$ t.q. $C = \{ f \mid f(0) = 0 \quad f(1) = 1 \quad 0 \leq f(x) \leq 1 \}$ e $T: C \to C$ definida por $f \in C \longrightarrow xf \in C$

Se existisse f t.q. $T(f) = f \Rightarrow f(x) = xf(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow (1-x) f(x) \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0$

<u>Corolário 1</u> (Browder)

Seja E um espaço de Banach uniformemente convexo e C um fechado, limitado e convexo em E. Então C é solução do problema BK.

Prova

Sabemos que os espaços uniformemente convexos são reflexivos e tem estrutura normal (§2 cap. 0 e §3 cap. 0) o que demonstra o corolário.

Observações

1) Em particular os convexos limitados e fechados de espaços de Hilbert são solução do problema BK.

2) Os conjuntos homeomorfos a convexos compactos são solução do problema BK (1º Teorema de Schauder ou prop. 1 dêste capítulo) o que mostra que não é essencial a convexidade.

Definição 2 - Um subconjunto de um espaço métrico X é chamado admissível se é interseção de esferas fechadas ([18])

É imediato que todo conjunto admissível num espaço de Banach é fechado, limitado e convexo.

A recíproca é falsa; basta tomar o exemplo (comentários) 4 anterior; qualquer bola que contenha o conjunto

$C = \{ f \mid f(0) = 0,\ f(1) = 1 \quad 0 \leq f(x) \leq 1 \}\ C \subset E = \mathcal{C}[0,1]$

contém zero

Consideremos $B_r(f) = \{ g / \| g - f \| \leq r \}$; $C \subset B_r(f)$.
Vamos mostrar que $0 \in B_r(f)$. De fato $\forall t \in (0 1)$ temos imediatamente

$$r \geq |f(t)| \Rightarrow r \geq \|f\| \Rightarrow r \geq \|f - 0\| \Rightarrow 0 \in B_r(f)$$

Teorema 2 (Yochi Kijima e Wataru Takahashi [9])

Se X é um espaço métrico limitado e satisfaz as condições:-

1º) Se uma família de esferas fechadas tem a propriedade da interseção finita então a interseção da família é não vazia.

2º) Todo subconjunto admissível que contém mais de um ponto contém um ponto que não é diametral

Então X é solução do problema BK.

Corolário 1

Se C é um subconjunto de um espaço de Banach, convexo, limitado, fracamente compacto com estrutura normal então C é a solução do problema BK.

Prova

Devemos verificar 1 e 2 do teorema 2 já que a limitação é hipótese do corolário 1.

① As esferas de C serão fechadas na top. fraca e como C é fracamente compacto se uma família de esferas tem a propriedade de intersecção finita sua intersecção é não vazia.

② Como um conjunto admissível é convexo e como por hipótese C é normal tal conjunto tem um ponto que não é diametral.

Corolário 2 (Kirk)

O Teorema 1 decorre do Teorema 2.

Prova

De fato se E é reflexivo a bola é fracamente compacta e então todo convexo limitado e fechado será fracamente compacto por ser fracamente fechado; recaímos no corolário 1.

§ 3 Demonstração do Teorema 2

Seja B um conjunto limitado de um

espaço métrico X, denotemos por $r_x(B)$ o $\sup\limits_{y \in B} \{d(x,y)\}$ x fixado em B.

Seja agora $r(B) = \inf\limits_{x \in B} \{r_x(B)\}$

<u>Definição 3</u> - Chamaremos de <u>Centro do Conjunto B</u> e denotaremos por $C(B)$ o conjunto $C(B) = \{x \in B \mid r_x(B) = r(B)\}$

<u>Observações</u>

1) Em linguagem geométrica o centro é composto de pontos, centros das esferas de menor raio e que contém o conjunto em questão.

2) Podemos ter a) $C(B) = B$ b) $C(B) = \phi$; mesmo no caso convexo podemos ter $C(B) = B$ (cap. 0 § 2)

3) Nas demonstrações que se seguem $S(x,r)$ será a notação para as bolas fechadas isto é $\{y \in X \mid d(y,x) \leq r\}$ onde X é um espaço métrico.

<u>Lema 1</u>

Se X é um espaço métrico nas condições do Teorema 2 e se Φ é a família dos conjuntos admissíveis não vazios de X invariantes por T e se considerarmos Φ ordenada por inclusão, então Φ terá um elemento minimal F (admissível).

Prova

Seja $\{A_i / i \in I\}$ uma subfamília totalmente ordenada de Φ; se A é a interseção de todos os A_i temos já que
$A_i = \cap \{S(x_j, r_j) / j \in J_i\}$ e supondo J_{i_1} e J_{i_2} disjuntos para $i_1 \neq i_2$ e $J = \bigcup_{i \in I} J_i$

$$A = \cap \{S(x_j\ r_j) / j \in J\}$$

É claro que $T(A) = T(\cap A_i) \subset \cap T(A_i) \subset \cap A_i = A$
Logo A é invariante por T.
Seja agora $S(x_{j_1}, r_{j_1}) \dots S(x_{j_n}, r_{j_n})$ um conjunto finito de esferas da família
$\{S(x_j, r_j) / j \in J\}$
Claro que cada $S(x_{j_k}, r_{j_k})$ $k = 1 2 \dots n$ contém um A_{i_k} então

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k} \subset \bigcap_{k=1}^{n} S(x_{j_k}, r_{j_k})$$

Como os A_i estão ordenados totalmente por inclusão e são não vazios

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_{i_k} \neq \phi$$

Logo as esferas $\{S(x_j\ r_j) / j \in J\}$ tem a propriedade da interseção finita e então por ① teorema 2; $A \neq \phi$. Aplicando agora o lema de Zorn a Φ existe um elemento minimal F.

Como F é admissível vamos considerá-lo como $\cap \{ S(x_j, r_j) / \gamma \in \Gamma \}$ e então :-

Lema 2

Nas condições do lema 1 $C(F)$ (centro de F) é um conjunto admissível e diferente do vazio.

Prova

De fato é admissível e isto sai imediatamente de

$$C(F) = [\cap \{ S(x_j, r_j) / \gamma \in \Gamma \}] \cap [\cap \{ S(x, r + \tfrac{1}{n}) / x \in F, n = 1 2 3 \ldots \}]$$

onde r no caso é $r(F) = \inf_{x \in F} \{ r_x(F) \}$ com $r_x(F) = \sup_{y \in F} \{ d(xy) \}$

Mostremos agora que a família

$\{ S(x_j, r_j) \ (\gamma \in \Gamma), \ S(x, r + \frac{1}{n}) \ (x \in F, n = 1 2 \ldots) \}$

tem a propriedade de interseção finita; para isto é suficiente que $\bigcap_{k=1}^{m} S(x_k, r + \frac{1}{n_k})$ contenha um ponto de F $\forall x, x_2 \ldots x_m \in F$ e quaisquer $n_1 n_2 \ldots n_m \in \mathbb{N}$ pois qualquer $S(x_j, r_j)$ contém F.

Seja $n = \max \{ n_1, n_2, \ldots, n_m \}$, por definição de $r(B) = r$ existe $x \in F$ tal que

$\sup \{ d(x, y), y \in F \} \leq r + \frac{1}{n}$. Como $x_k \in F$ $k = 1 2 \ldots m$

$d(x, x_k) \leq r + \frac{1}{n} \leq r + \frac{1}{n_k}$ $k = 1 2 \ldots m$ $\Longrightarrow$

$x \in \bigcap_{k=1}^{m} S(x_k, r + \frac{1}{n_k})$ ||

Lema 3

a) $T(C(F)) \subset C(F)$

b) $C(F)$ é um conjunto unitário

Prova

a) Se $x \in C(F)$ por T ser não expansiva
$d(T(x), T(y)) \leq d(x,y) \leq \sup_{y \in F} d(x,y) = r_x(F)$
$\forall y \in F$. Então $d(T(x), T(y)) \leq d(x,y) \leq r$
(já que $x \in C(F)$).

Logo $T(F) \subset S(T(x), r)$

Como $T(F) \subset F$ (lema 1) é imediato que
$T(F \cap S(T(x),r)) \subset F \cap S(T(x), r)$ ①
e como $F \cap S(T(x),r)$ é admissível (pois F é admissível) e não vazio (pois $T(F) \subset S(T(x),r)$ e $T(F) \subset F$) então $F \cap S(T(x), r) \in \Phi$

Mas F é minimal de ① concluimos que $F \subset S(T(x), r)$

Isto mostra que $r_{T(x)}(F) = r$ ou $T(x) \in C(F)$ $\forall x \in C(F)$ ou $T(C(F)) \subset C(F)$.

b) De fato de novo pelo fato de F ser minimal $C(F) = F$ (pois $C(F) \in \Phi$) e se $C(F)$ tivesse mais de um ponto um dêles x_0 por exemplo seria não diametral e daí como ⓐ $r_{x_0}(F) < S(F)$ temos

$$\delta(C(F)) = \operatorname{Sup}\{d(y,z) / y, z \in C(F)\} \underset{①}{\leq} r(F) \underset{②}{\leq} r_{x_0}(F) \underset{③}{<} \delta(F)$$

① Basta notar que a Bola de centro em todo ponto de $C(F)$ e raio $r(F)$ contém todos os pontos de F

② Sai imediatamente da definição de $r(F)$

③ Sai de ⓐ.

§ 4 Aplicações

[consultar [19] pag. 35 ou p. N.A.S 53 (1965) p 1100-1103]

Livros e papéis consultados

1) Pettis, B J - A proof that every uniformly convex space is reflexive - Duke Math J. 5 (1939 p 249 - 253)

2) Topics in nonlinear functional analysis Djairo Guedes de Figueiredo (University of Maryland 1967).

3) Nonexpansive and monotone mappings in Banach spaces Zdzislaw Opial (Brown University 1967)

4) Hönig 1967 Notas de Análise Funcional

5) Hönig 1969 Notas de Análise Funcional e Operadores

6) Hönig Aplicações da Topologia à Análise

7) Elon L. Lima Elementos de Topologia Geral Volume II

8) Milman D.P. On some criteria for regularity

of Spaces of type (B) Doke Akad Nauk SSSR (N.S) 20 1938

9) Kōdai Matematical Seminar Reports Volume 21 n: 3 Sptember 1969

10) Kakutani S- Weak Topology and regularity of Banach Spaces Proc Imp Acad Tokyo 15 (1939) pp 169-173

11) The American Mathematical Monthly Volume 72 n: 9 1965

12) C. B. Lira - Notas de aula do curso de Top. Algébrica 1968

13) Clarkson, J. A - Uniformly Convex Spaces Trans. Am. Math Soc 40 (1936) pp 396-414

14) Topology from the Differenciable Viewpoint.

15) Köethe

16) Bulletin of the American Matematical Society Volume 75 nº6

17) PNAS 53 (1965) p 1100-1103 Browder

18) Dunford Schwartz - Linear Operator pag. 459

19) Topics in non Linear Funcional Analysis Djairo G. de Figueiredo.