ESPAÇOS DE BANACH DAS FUNÇÕES CONTÍNUAS NUM COMPACTO

Elói Medina Galego

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ANÁLISE

ORIENTADOR:
Prof. Dr. GALDINO CESAR DA ROCHA FILHO

SÃO PAULO, outubro de 1984.

À

Maria José,

Edivaldo,

Elizângela,

Eviane e

José Rubens.

I N D I C E

Introdução

Este trabalho se divide em três capítulos.

No capítulo 0 estudamos rapidamente a teoria isométrica de C(K) e também a teoria isomorfa de C(K), no caso K métrico; a bibliografia básica é o mini-curso do 19º Seminário Brasileiro de Análise (Junho de 1984).

No capítulo 1 estão as nossas contribuições originais:

1) Corrigimos um trabalho de C. Bessaga e A. Pelczynski, professores da Academia de Ciências da Polonia, qual seja: em Studia Math 19, 1960 - pág 59 e em Oeuvres-Volume II - Warszawa, 1979 pág. 267, eles dão duas classificações isomorfas dos C(K), onde K é compacto métrico enumerável infinito. Mostramos que as duas são equivalentes e que estão erradas; para isto damos um contra-exemplo à uma delas; reenunciamos e provamos uma nova classificação isomorfa para esses espaços (veja nota final do capítulo 1).

2) Corrigimos um trabalho de S. Kislyakov - publicado em Siberiam Math. J. 16, 1975 nº 2 226-231 , que fechava um problema (15 anos em aberto) deixado por C. Bessaga e A. Pelczynski em Studia Math 19, 1960 pág 61, qual seja: dar uma classificação isomorfa dos $C[1,\alpha]$ em termos dos ordinais α. Damos um con

tra exemplo a um argumento do autor acima e também damos uma nova demonstração para um dos seus teoremas, que utilizava o argumento mencionado.

3) Com auxílio de uma classificação dos compactos K que são homeomorfos a algum $[1,\alpha]$, onde α é um ordinal (Baker-1972), damos uma condição necessária e suficiente em termos de α e β para que $C[1,\alpha]$ seja isométrico a $C[1,\beta]$.

No capítulo 2, mostramos a existência de exatamente 2^{χ_0} compactos em $[0,1]$, dois a dois não homeomorfos entre si (Mostowshi - 1937), e respondemos a uma pergunta de nosso orientador, isto é: temos exatamente $2^{2^{\chi_0}}$ compactos de cardinalidade de 2^{χ_0}, dois a dois não homeomorfos entre si.

oOo

Agradecimentos

Desejamos expressar a mais profunda gratidão a várias pessoas que contribuiram para a nossa formação científica e para a consecução da presente monografia.

Ao *Prof. Dr. Galdino César da Rocha Filho* pela sua paciente orientação, dedicação em me transmitir os seus conhecimentos e sobretudo por ser um grande amigo.

Aos *Profs. Chaim Samuel Hönig, Elza Furtado Gomide, Élvia Mureb Sallum e Thiago A. S. Leandro*, incentivadores da minha formação e aos *Profs. Francisco Miraglia Neto e Ofélia Teresa Alás* pelas ajudas, trocas de idéias e paciência comigo.

Finalmente, ao *Prof. Antonio Gilioli*, não só pela ajuda, trocas de idéias e paciência comigo, como também por ter lido e apontado vários enganos na nossa redação inicial.

Aos amigos *Ana Catarina Pontone, Maria Inêz de Souza Vieira Diniz, Maria Stella Amorim Coutinho Castilha, Marina Pizzoti, Osvaldo Rio Branco de Oliveira, Vera Helena Giusti de Souza e Zara Issa Abud*, que muito me animaram a executar este trabalho, da melhor maneira possível.

A *Antonia Soares*, pelo excelente trabalho de datilografia.

São Paulo, outubro de 1984

o autor

ERRATA

O enunciado correto do teorema 1.1 da pág. 64 é o seguinte: Seja $m \geq 2^{\aleph_0}$, então existem 2^m compactos de cardinalidade m, dois a dois não homeomorfos entre si. Isto porque o argumento apresentado na pág. 68, linhas 14, 15, 16 e 17 não se aplica.

Mas como observamos nessa mesma pág., temos construído 2^m compactos de cardinalidade m, dois a dois não homeomorfos entre si (Note que temos, agora, isto como consequência da observação 2 pág 69. Mas ali temos mostrado um pouco mais, uma vez que cada um daqueles compactos é conexo).

Mostraremos que não podemos aumentar essa cardinalidade. De fato, o corolário 0.4 da pág. 69 pode ser melhorado para: Existem no máximo 2^m compactos de cardinalidade m, dois a dois não homeomorfos entre si.

Pois, pela preposição 0.3 da pág. 64 é suficiente mostrarmos que em $[0,1]^m$ não existe mais do que 2^m subconjuntos fechados e distintos dois a dois. Isto pode ser visto assim:

Uma base para a topologia de $[0,1]^m$ é dada pelos conjuntos da forma $\prod_{i \in M} O_i$, onde M é um conjunto de cardinalidade de m e os O_i são subconjuntos abertos de $[0,1]$ tais que o conjunto $\{i \in M \mid O_i \neq [0,1]\}$ é finito; logo $[0,1]^m$ possue uma base de abertos de m elementos, e portanto ele terá no máximo 2^m subconjuntos abertos distintos dois a dois e, por conseguinte, o mesmo vale para os subconjuntos fechados de $[0,1]^m$.

Corrigimos, também, as seguintes linhas:

- pag.19 ℓ.17: Por outro lado, por (3) e sendo $[\gamma_k, \gamma_{k+1}]$, $k=0,1 \ldots N-1$, dois a dois disjuntos, fixado $t \leq \alpha$, $|x_k(t)| < \frac{1}{N+1}$, exceto, possivelmente, para algum índice k, $k=0,1,\ldots N-1$.
- pag.26 ℓ.4: Sendo, agora, p um homeomorfismo estritamente crescente.
- pag.31 ℓ.11: Agora, se γ é um ordinal limite de cardinalidade menor ou igual a $\bar{\alpha}$.
- pag.39 ℓ.19: 1. Se $L=\phi$ ou $\zeta_0 = \sup L < \beta$, temos (pondo $\zeta_0 = 0$ se $L=\phi$)
- pag.45 ℓ.10: Talmente desconexo, isto é, os únicos subconjuntos não vazios conexos de K são os conjuntos unitários.
- pag.48 ℓ.19: É fácil ver que, se γ é um ordinal não limite, então t é ponto isolado, e neste caso, o lema é trivial. Podemos supor, então, que γ é ordinal limite.
- Pag 63 ℓ.15: Mostramos, assim, que o conjunto U_x das intersecções finitas de $\{V_y \mid y \in K-\{x\}\}$ forma um sistema fundamental de vizinhanças abertas para x.

-pag.66 ℓ.11: existe um ordinal $\rho < \alpha$, tal que $\alpha \in V_\rho \subset O_{so}$, onde V_ρ é uma vizinhança fundamental de α;

-pag.67 ℓ.10: um subconjunto homeomorfo a um aberto do $\mathbb{R}_4$ e um subconjunto aberto em C_1 (resp C_2) homeomorfo a um intervalo de $\mathbb{R}$

-pag.67 ℓ.13: nhança de p contém um suconjunto aberto em C_1 (resp C_2), ao qual p pertence, e homeomorfo a um intervalo de $\mathbb{R}$.

-pag.71 ℓ.15 (pois a união de m conjuntos finitos, $m<X_\alpha$, tem cardinalidade menor que X_α).

Finalmente, acrescentamos em nossa bibliografia o seguinte artigo:

[Ba] Baker-W.J. Compact spaces homeomorphic to a ray of ordinals. Fund. Math. 72 1972 nº 1 19-27.

O autor.

CAPÍTULO 0

ISOMORFISMOS ENTRE C(K)

Introdução

<u>Definição</u>: - Um espaço de Banach X é um espaço vetorial (sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), normado e completo na métrica induzida pela norma.

Exemplos:

a) $C_0(\mathbb{N}) = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ , } \forall n \text{ e } \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0\}$

b) $C(\mathbb{N}) = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ , } \forall n \text{ e } \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n\}$

c) $\ell_\infty(\mathbb{N}) = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{R} \text{ e } \exists K \in \mathbb{R} \text{ , } |a_n| \leq K, \forall n\}$;

a norma em a), b) e c) é dada por:

$$\|\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$$

d) $\ell_p(\mathbb{N}) = \{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\}$, com $\|\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}\| = (\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^p)^{1/p}$

onde $1 \leq p < \infty$.

e) Seja K um espaço topológico compacto (para nós, sempre T_2); C(K) será o espaço das funções contínuas definidas em K a valores reais com a norma: $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in K\}$, $f \in C(K)$.

f) Se X e Y são espaços de Banach, então
$X \oplus Y = \{(x,y) \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}$ é um espaço de Banach com a norma $\|(x,y)\| = \sup\{\|x\|, \|y\|\}$.

Em particular, $\mathbb{R}_n = \{(x_1,\dots,x_n) \mid x_i \in \mathbb{R},\ i=1,\dots,n\}$ com a norma $\|(x_1,\dots,x_n)\| = \sup_{1\leq i\leq n} |x_i|$, é um espaço de Banach, denotado $(\mathbb{R}_n, \|\ \|_\infty)$.

Definição: - Dois espaços de Banach X e Y são isomorfos ($X \sim Y$) se existe uma aplicação linear T de X em Y, bijetora, contínua, com inversa contínua. Lembramos que

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\}.$$

Se além disso, $\|T(x)\| = \|x\|$, $\forall x \in X$, dizemos que X e Y são isométricos ($X \equiv Y$); escrevemos $X \overset{k}{\sim} Y$ se existe um isomorfismo U de X em Y tal que $\|U\|\ \|U^{-1}\| \leq K$.

$X \not\sim Y$ ($X \not\equiv Y$) significa que X e Y não são isomorfos (isométricos).

Definição: - Dois espaços de Banach X e Y têm a mesma dimensão linear ($X \underset{\dim}{=} Y$) se cada um dos espaços X e Y é isomorfo a algum subespaço do outro. Dizemos que X tem dimensão linear menor que Y ($X \underset{\dim}{<} Y$) se existe um subespaço de Y isomorfo a X e nenhum subespaço de X é isomorfo a Y.

Exemplos:

a) $C_o(\mathbb{N}) \underset{\dim}{<} C[0,1]$ (Veja [SBA], pág. 411)

b) $\ell_1(\mathbb{N}) \oplus C[0,1] \underset{\dim}{=} C[0,1]$ (Veja [SBA], pág. 411);

mas $\ell_1(\mathbb{N}) \oplus C[0,1] \not\sim C[0,1]$ (Veja [P-I] pág. 221 - corolário 2).

c) Facilmente vê-se que não temos: $\ell_1(\mathbb{N}) \underset{\dim}{<} \ell_2(\mathbb{N})$ ou $\ell_2(\mathbb{N}) < \ell_1(\mathbb{N})$.

Definição: - Dois espaços topológicos K_1 e K_2 são homeomorfos, $K_1 \sim K_2$, se existe uma função f de K_1 em K_2, bijetora, contínua e com inversa contínua.

Estamos interessados em estudar os C(K) quanto a isomorfismos, para isto é importante dividir a classe dos compactos em métricos e não métricos.

Exemplos:

1) Compactos métricos

1a) Enumeráveis:

$K_1 = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$, onde cada p_i, $i=1,2,\dots,n$ é ponto isolado em K_1; neste caso é fácil ver que $C(K_1) \equiv (\mathbb{R}n, \|\ \|_\infty)$

$K_2 = \left\{1-\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{1\}$; $K_3 = \left\{1-\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{1\} \cup \left\{2-\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{2\}$; $K_4 = \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right\} \cup \{0\}$

onde $n \geq 2$ e $m \in \mathbb{N}$ com $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \frac{1}{n-1}$ tendo estes três últimos compactos a topologia induzida pela reta.

De maneira geral, em 1920 Mazurkiewicz e Sierpinski provaram que todo compacto métrico enumerável é homeomorfo a um segmento de ordinal, $[1,\alpha] = \{\gamma \mid 1 \leq \gamma \leq \alpha\}$, com $\alpha < \omega_1$, onde ω_1 é o primeiro ordinal não enumerável (Veja corolário 3.9 - capítulo 1) e então é fácil ver que $K_1 \sim [1,n]$; $K_2 \sim [1,\omega]$; $K_3 \sim [1,\omega.2]$ e $K_4 \sim [1,\omega^2]$, onde ω é o primeiro ordinal enumerável.

1b) Não enumeráveis

$K_1 = [0,1]$; K_2 = conjunto de Cantor em $[0,1]$; $K_3 = [0,1]^{\aleph_0}$ com a topologia produto ($\aleph_0$ é o primeiro cardinal infinito); as bolas unitárias do $\mathbb{R}_n$, $n=1,2,\ldots$

2) Compactos não métricos

$K_1 = \{0,1\}^m$, $K_2 = [0,1]^m$, $m > \aleph_0$, com as respectivas topologias produto.

$K_3 = \gamma(\Gamma)$, o compactificado de Alexandrov de um conjunto Γ, com card $\Gamma > \aleph_0$ e com a topologia discreta.

$K_4 = \beta\Gamma$, o compactificado de Stone-Cěch de um conjunto Γ com card $\Gamma \geqq \aleph_0$ e com a topologia discreta.

$K_5 = [1,\alpha]$, onde α é um ordinal maior ou igual a ω_1 .

Para entendermos melhor o que vem a seguir, faremos a seguinte observação:

Não é difícil ver que $C_0(\mathbb{N}) \not\equiv C(\mathbb{N})$, mas $C_0(\mathbb{N}) \sim C(\mathbb{N})$; isto é: podemos ter espaços de Banach isomorfos, sem serem isométricos. Surgem naturalmente duas perguntas: dados dois compactos K_1 e K_2, quando é que $C(K_1)$ é isométrico a $C(K_2)$, e quando é que $C(K_1)$ é isomorfo a $C(K_2)$?

I - Teoria Isométrica

Teorema 1.1. - $C(K_1) \equiv C(K_2) \Longleftrightarrow K_1 \sim K_2$.

Isto foi provado por Banach em 1932 sob a hipótese de metrizabilidade de K_1, mas Stone em 1937 mostrou que essa hipótese era supérflua.

Depois do teorema 1.1 e da observação acima, torna-se importante sabermos, na teoria de $C(K)$, quando é que isomorfismo implica em isometria; nesta direção temos:

Teorema 1.2. - $C(K_1) \sim C(K_2)$ com isomorfismo T, $\|T\| \; \|T^{-1}\| < 2 \Longleftrightarrow K_1 \sim K_2$.

Este resultado foi obtido independentemente por Amir em 1965 e Camberm em 1966 (Veja [SBA] pág. 358, para a demonstração de Camberm); notemos que o teorema 1.2 generaliza o teorema 1.1 (Se T é isometria então $\|T\| \; \|T^{-1}\| = 1$).

Um problema que permaneceu aberto durante 10 anos, e que foi resolvido por Cohen (Veja [SBA], pág. 372) é que o número 2 neste teorema é o melhor possível.

Com auxílio do teorema 1.1 provaremos:

Proposição 1.3. - Existem exatamente $2^{\aleph_0}$ espaços $C(K)$, com K métrico, dois a dois não isométricos entre si.

Demonstração: - Pelo teorema 1.1 é suficiente mostrarmos a existência de exatamente $2^{\aleph_0}$ compactos métricos K, dois a dois não homeomorfos entre si.

Como o cubo de Hilbert $\prod_{n\in\mathbb{N}} [0,\frac{1}{n}]$ contém de maneira homeomorfa todos os compactos métricos (Veja [ELL], pág. 230) e tem base enumerável de abertos, segue que ele tem no máximo $2^{\aleph_0}$ fechados e por conseguinte, os compactos métricos não homeomorfos entre si são de cardinalidade menor ou igual a $2^{\aleph_0}$.

Exibiremos $2^{\aleph_0}$ compactos métricos não homeomorfos entre si; para isto, sejam B_n as bolas unitárias e fechadas dos $\mathbb{R}_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $A \in P(\mathbb{N})$ consideremos $\gamma(\bigcup_{n\in A} B_n)$, a compactificação de Alexandrov da soma topológica de $(B_n)_{n\in A}$ (isto é, cada B_n, $n \in A$ é aberto e fechado em $\bigcup_{n\in A} B_n$).

Como $\bigcup_{n\in A} B_n$ tem base enumerável de abertos, cada $\gamma(\bigcup_{n\in A} B_n)$ é metrizável (Veja [ELL], pág. 226).

Seja $\gamma(\bigcup_{n\in A_1} B_n) \sim \gamma(\bigcup_{n\in A_2} B_n)$, com homeomorfismo f e com $A_1, A_2 \in P(\mathbb{N})$. Lembrando que f leva componentes conexas em componentes conexas, segue que dado $n_1 \in A_1$, existe $n_2 \in A_2$ tal que $f(B_{n_1}) = B_{n_2}$ e portanto $B_{n_1} \sim B_{n_2}$. Por um teorema de topologia algébrica temos que $n_1 = n_2$, logo $A_1 = A_2$. Conclusão: $\forall A \in P(\mathbb{N})$ $\gamma(\bigcup_{n\in A} B_n)$ tem cardinalidade $2^{\aleph_0}$, e esses compactos métricos são dois a dois não homeomorfos entre si. $\blacktriangle$

II - Teoria Isomorfa

Esta teoria é mais difícil que a anterior. Durante muito tempo pensou-se que o único $C(K)$, para K métrico enumerável infinito, nesta teoria, fosse $C[\{1-\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{1\}]$ e junto com este, era também problema aberto deixado por Banach: $C[0,1] \sim C([0,1] \times [0,1])$? (Veja [B], pág. 185).

Dividiremos esta teoria em:

a) K métricos enumeráveis

Vimos que $K \sim [1,\alpha]$ para algum ordinal $\alpha < \omega_1$; logo, basta estudarmos isomorfismos entre os $C[1,\alpha]$, $\alpha < \omega_1$; se $\alpha < \omega$ a teoria é trivial, pois como vimos $C[1,\alpha]$ é um $(\mathbb{R}_n, \| \|_\infty)$; se $\alpha \geq \omega$, temos:

<u>Teorema 2.1.</u> - Se $\omega \leqq \alpha \leqq \beta < \omega_1$, então $C[1,\alpha] \sim C[1,\beta] \Longleftrightarrow \beta < \alpha^\omega$.

Este teorema foi provado em 1960 por C. Bessaga e A. Pelczynski (Veja [SBA], pág. 375 para sua demonstração).

Agora o leitor, através de cálculos simples com ordinais pode ver facilmente que $C(K_2)$, $C(K_3)$ e $C(K_4)$ citados em 1a) são isomorfos entre si, apesar de não serem isométricos entre si (teorema 1.1) e verá também que $C[1,\omega] \not\sim C[1,\omega^\omega]$ (com este exemplo, Pelczynski, em 1958, em sua tese de doutorado, resolveu o problema citado acima para compactos métricos enumeráveis infinitos).

<u>Proposição 2.2.</u> - Existem exatamente $\aleph_1$ espaços $C(K)$, com K métrico enumerável, dois a dois não isomorfos entre si.

<u>Demonstração</u>: - Pelo teorema de Mazurkiewicz e Sierpenski, basta contarmos os $C[1,\alpha]$, com $\omega \leqq \alpha < \omega_1$, dois a dois não isomorfos entre si. Como card$[\omega,\omega_1] = \aleph_1$, é suficiente provarmos a existência de $\aleph_1$ espaços $C[1,\alpha]$ nas condições acima.

Suponha que a cardinalidade dos $C[1,\alpha]$ não isomorfos entre si seja menor que $\aleph_1$. Tomando um representante em cada uma dessas classes de isomorfismos, digamos que ficamos com: $A = \{C[1,\alpha_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Seja $\beta = \sup_n\{\alpha_n,\alpha_n^{\omega}\}$, logo $\omega \leqq \alpha_n \leqq \beta < \omega_1$, $\forall n$. Mas $\alpha_n^{\omega} \leqq \beta\ \forall n$ e portanto pelo teorema 2.1 $C[1,\beta] \not\sim C[1,\alpha_n]$, $\forall n$; absurdo pela escolha de A. $\blacktriangle$

b) K métricos não enumeráveis

<u>Teorema 2.3.</u> - Se K é métrico não enumerável, então $C(K) \sim C[0,1]$.

Isto foi provado em 1952 por Milutin (Veja [SBA], pág. 390 para uma demonstração) que ignorava o problema deixado por Banach ($C([0,1] \times [0,1]) \sim C[0,1]$?); por isso, este problema permaneceu 12 anos "aparentemente aberto"; por exemplo C. Bessaga e A. Pelczynski só conheciam que $C([0,1] \times [0,1]) \underset{\dim}{=\!=} C[0,1]$ (Veja [BP-I], pág. 61).

Conclusão: Existem exatamente $\aleph_1$ compactos métricos enumeráveis não homeomorfos entre si ($K_\lambda = [1,\omega^\lambda]$, $0 < \lambda < \omega_1$ são dois a dois não homeomorfos entre si, veja corolário 3.10 capítulo 1). E a proposição 2.2 mostra a existência de exatamente $\aleph_1$ espaços $C(K)$, com K compacto métrico enumerável dois a dois não isomorfos entre si; logo a existência de $2^{\aleph_0}$ de tais espaços é indecidível na axiomática de Zermelo-Fraenkel.

Já para os compactos métricos não enumeráveis, apesar de existirem exatamente $2^{\aleph_0}$, dois a dois não homeomorfos entre si, a teoria isomorfa é unitária.

c) K não métricos

Conhece-se muito pouco desta teoria e há pouca esperança de se conseguir uma classificação isomorfa, mesmo para compactos de cardinalidade $2^{\aleph_0}$ (veja [0], pág. 268), isto devido à grande variedade topológica dos compactos não métricos.

Alguns resultados para classes especiais destes compactos já têm sido obtidos, por exemplo: $C[0,1]^n \sim C\{0,1\}^n$, $\forall n > \aleph_0$ (Veja [P-II], pág. 42).

No capítulo 1 daremos uma classificação isomorfa dos C(K), onde K é uma classe particular destes compactos, a saber: K é um segmento de ordinal qualquer, e também caracterizaremos os compactos que são homeomorfos a tais espaços.

oOo

CAPÍTULO I

CLASSIFICAÇÃO ISOMORFA E DIMENSIONAL DOS C(K), ONDE K É UM INTERVALO DE ORDINAIS E CARACTERIZAÇÃO DOS COMPACTOS HOMEOMORFOS A ESSES INTERVALOS

Introdução

Como vimos no teorema 2.1 do capítulo 0, C. Bessaga e A. Pelczynski deram uma classificação isomorfa dos C(K), onde K é um intervalo de ordinais enumeráveis; como aplicação, dão em [B.P-I] uma classificação isomorfa dos C(K), onde K é compacto métrico enumerável infinito, através da noção de derivado de um espaço topológico. Neste capítulo daremos um contra-exemplo para o resultado lá enunciado, mostrando assim que ele estava errado e também daremos uma classificação correta para esses espaços.

No mesmo artigo deixam o seguinte problema: Dar uma classificação isomorfa para os C(K), onde K é um intervalo de ordinais quaisquer. Semadeni (veja [Se-I]) classifica os $C[0,\alpha]$, onde $\omega_1 \leqq \alpha \leqq \omega_1.\omega$. Em 1975 Kislyakov (veja [Ki]) resolve o problema; mas ao estudarmos o seu artigo descobrimos um erro em suas demonstrações (veja lema 1.6) e, em errando, ele deixa de classificar certas classes de $C[0,\alpha]$. Com auxílio do lema 1.4 e corolário 1.5, apresentaremos aqui uma demonstração para os seus enunciados.

<u>Notação</u>: - Seja Γ um conjunto qualquer. Por $\ell_\infty(\Gamma)$ denotaremos o espaço de Banach de todas as funções reais limitadas e definidas em Γ. Por $C_0(\Gamma)$ denotaremos o subespaço de $\ell_\infty(\Gamma)$ constituido

das funções f tais que para cada $\varepsilon > 0$ o conjunto $\{\gamma \in \Gamma | f(\gamma)| > \varepsilon\}$ é finito. Por $\ell_1(\Gamma)$ denotaremos o espaço de Banach de todas as funções reais definidas em Γ e absolutamente somáveis.

Lembremos que sendo $x = (x_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$,
Se $x \in \ell_\infty(\Gamma)$ ou $x \in C_0(\Gamma)$, então $\|x\| = \sup\{|x_\gamma| \; |\gamma \in \Gamma\}$;
Se $x \in \ell_1(\Gamma)$, então $\|x\|_1 = \sum_{\gamma \in \Gamma} |x_\gamma|$.

É fácil ver que a densidade de $C_0(\Gamma)$ é $|\Gamma|$, se Γ é infinito (lembre-se que a densidade de um espaço topológico X é o menor dos cardinais C tais que existem subconjuntos de cardinalidade C densos em X).

Se α é um número ordinal, α é ordinal não limite se tem antecessor (denotado $\alpha-1$); caso contrário, α é ordinal limite. A cardinalidade de α será denotada por $\bar{\alpha}$; ω denotará o primeiro ordinal infinito e ω_α será o primeiro ordinal de cardinalidade $\aleph_\alpha$. Cada conjunto de números ordinais será considerado como espaço topológico, com a topologia induzida pela ordem.

Lembremos algumas propriedades básicas dos números ordinais (veja [K] e [S]).

1- $\alpha \leqq \beta \Longrightarrow \alpha+\gamma \leqq \beta+\gamma$, $\forall\gamma$; $\alpha\gamma \leqq \beta\gamma$, $\forall\gamma$ e $\alpha^\gamma \leqq \beta^\gamma$, $\forall\gamma$.

2- $\alpha < \beta \Longrightarrow \gamma+\alpha < \gamma+\beta$, $\forall\gamma$ e $\gamma\alpha < \gamma\beta$, $\forall\gamma \geqq 1$.

3- $\alpha < \beta \Longrightarrow \gamma^\alpha < \gamma^\beta$, $\forall\gamma > 1$

4- Vale a propriedade associativa para a soma e o produto de ordinais

5- $\gamma^\alpha . \gamma^\beta = \gamma^{\alpha+\beta}$ e $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$ $\forall\alpha,\beta,\gamma$.

6- $\gamma(\alpha+\beta) = \gamma\alpha+\gamma\beta$, $\forall\alpha,\beta,\gamma$

7- As funções: $f_\alpha(\xi) = \alpha.\xi$ $(\alpha > 0)$; $g_\alpha(\xi) = \alpha+\xi$ $(\forall\alpha)$ e $h_\alpha(\xi) = \alpha^\xi$ $(\alpha > 1)$ são contínuas em qualquer intervalo de ordinais.

8- $\alpha \leqq \beta^\alpha$, $\forall\alpha \geqq 1$, $\forall\beta > 1$.

9- Se α é um ordinal limite, então α^γ é um ordinal limite para todo $\gamma \geqq 1$.

10- $\forall\alpha > 0$, $\forall\beta > 0$, existe um único par de ordinais (δ,ξ) tais que $\alpha = \beta\delta+\xi$ e $\xi < \alpha$.

11- $\overline{\overline{\alpha\gamma}} = \bar{\bar{\alpha}}\bar{\bar{\gamma}}$, $\forall\alpha,\gamma$ e $\gamma \leqq \alpha \Longrightarrow \overline{\overline{\alpha\gamma}}=\bar{\bar{\alpha}}$.

12- Todo ordinal $\alpha \geqq \omega$ é da forma $\alpha = \beta+n$, onde β é um ordinal limite e $n < \omega$.

Dado um conjunto A bem ordenado, ord A denotará o ordinal de A. Se A é um conjunto qualquer, card A ou $|A|$ indicarão a cardinalidade de A.

Os símbolos $[\eta,\xi]$, $[\eta,\xi)$, etc, onde ξ e η são números ordinais com $\eta \leqq \xi$, têm significados óbvios (por exemplo, $[\eta,\xi]$ é o conjunto de todos os números ordinais γ tais que $\eta \leqq \gamma \leqq \xi$).

Se α é um ordinal infinito, denotaremos por C^α o espaço de Banach das funções contínuas definidas no compacto $[1,\alpha]$ com a norma do supremo . C_0^α é o subespaço de C^α constituido das funções x tais que $x(\alpha) = 0$; se $\alpha \geqq \omega$ identificaremos, através de isomorfismo, C_0^α com $\{f \in C[0,\alpha] | f(\alpha) = 0\}$; pois neste caso $[0,\alpha] \sim [1,\alpha]$.

<u>Definição</u>: - Um ordinal α é inicial se é o primeiro ordinal de cardinalidade $\bar{\bar{\alpha}}$ (logo existe γ tal que $\alpha=\omega_\gamma$).

Definição: - Uma α-sequência de ordinais é uma família de ordinais $(\phi_\xi)_{\xi<\alpha}$; se $\gamma < \beta < \alpha$ implicar $\phi_\gamma < \phi_\beta$, nós dizemos que essa família é uma α-sequência estritamente crescente.

Definição: - Dizemos que um ordinal limite α é cofinal em um ordinal λ, se λ é o limite de uma α-sequência estritamente crescente de ordinais menores que λ.

Definição: - Seja λ um ordinal limite, dizemos que λ é regular se o menor ordinal cofinal em λ é λ; caso contrário dizemos que λ é singular.

Observações:

a) O menor ordinal cofinal em um ordinal limite é um ordinal inicial (veja [K] pág. 274)

b) Se ω_γ é singular, então γ é ordinal limite (veja [K] pág.309)

c) Se λ é ordinal limite, então $\lim\limits_{\xi\to\lambda} \omega_\xi = \omega_\lambda$ (veja [K] pág. 281)

Se $\alpha \leqq \beta$, $-\alpha+\beta$ indicará o ordinal d tal que $\alpha+d=\beta$ (d é a diferença entre β e α).

Definição: - Seja $\{X_t\}_{t\in T}$ uma família de espaços de Banach; o símbolo $\sum\limits_{t\in T} X_t$ denotará o espaço de Banach constituido de todas as famílias $x = \{x_t\}_{t\in T}$ para os quais $x_t \in X_t$, $\forall t \in T$ e o conjunto $\{t \in T \mid \|x_t\| > \varepsilon\}$ é finito $\forall\varepsilon > 0$. A norma neste espaço é dada por: $\|x\| = \sup\{\|x_t\| \mid t \in T\}$.

Se $X_t = X$ para cada $t \in T$ e card $T = m$, usaremos o símbolo $m\sum X$ ao invés de $\sum_{t \in T} X_t$, também usaremos a notação $X \oplus Y$, $X_1 \oplus \dots \oplus X_n$, etc., no caso de um conjunto finito T.

Lema 0.0. - Se α é um ordinal inicial, então:

a) $\beta+\alpha^{\delta}=\alpha^{\delta}$, $\forall\beta$, $\forall\delta$, com $\beta < \alpha^{\delta}$.

b) $-\alpha^{\xi}+\alpha^{\xi+1} = \alpha^{\xi+1}$, $\forall\xi$.

c) $-\beta+\alpha = \alpha$, $\forall\beta, \beta < \alpha$.

Demonstração: - Para isto precisamos dos seguintes resultados:

R1) α é tal que $\theta+\rho = \alpha$, $\rho \neq 0 \Longrightarrow \rho = \alpha$ (isto é, α é o único resto de α) $\Longleftrightarrow$ $\beta+\alpha = \alpha$, $\forall\beta$, $\beta < \alpha$ (isto é, α é um ordinal primo) (veja [S] pág. 279).

R2) A fim de que os únicos restos de um ordinal α sejam iguais a α é necessário e suficiente que o ordinal α seja uma potência de ω. (veja [K] pág. 259).

R3) Cada ordinal inicial é da forma ω^{λ} para algum λ. (Veja [K] pág. 281).

Agora, se α é inicial, por R3, existe λ tal que $\alpha = \omega^{\lambda}$; logo: $\beta+\alpha^{\delta} = \beta+(\omega^{\lambda})^{\delta} = \beta+\omega^{\lambda\delta} \overset{R_2 \text{ e } R_1}{=\!=\!=} \omega^{\lambda\delta}=\alpha^{\delta}$.

De $\alpha^{\xi}+d = \alpha^{\xi+1}$ segue que $d \leq \alpha^{\xi+1}$; se $d < \alpha^{\xi+1}$, então $\alpha^{\xi}+d < \alpha^{\xi}+\alpha^{\xi+1} = \alpha^{\xi+1}$ (isto por a)); absurdo; logo, vale b). c) segue de maneira análoga a b). Δ

<u>Lema 0.1</u>: - $C_0^{\alpha} \sim C^{\alpha}$, $\forall \alpha \geqq \omega$.

<u>Demonstração</u>: - Definimos $T: C^{\alpha} \longrightarrow C_0^{\alpha}$ pondo: $Tx = x'$, onde $x'(1) = x(\alpha)$ e $\boxed{x'(1+t) = x(t)-x(\alpha),}$ $1 \leqq t \leqq \alpha$.

Notando que, se β é infinito, então $1+\beta = \beta$, segue que T está bem definida (x' é contínua pois é "quase a transladada" de x em $[2,\alpha]$ e $x'(\alpha) = x'(1+\alpha) = x(\alpha)-x(\alpha) = 0$ e T é claramente linear e injetora.

$$\|T(x)\| = \|x'\| = \sup_{t \leq \alpha}\{|x'(1)|,|x'(1+t)|\} = \sup_{t \leq \alpha}\{|x(\alpha)|,|x(t)-x(\alpha)|\} \leqq 2\|x\| ;$$

isto é $\|T\| \leqq 2.$?

Definindo $T^{-1}: C_0^{\alpha} \longrightarrow C^{\alpha}$ por: $T^{-1}(x') = x$, onde $x(t) = x'(1+t)+x'(1)$, $t < \alpha$ e $x(\alpha) = x'(1)$.

Vemos que T^{-1} está bem definida, é linear, injetora, é inversa de T e $\|T^{-1}\| \leqq 2.$? $\Rightarrow \|T\|\cdot\|T^{-1}\| \leq 2.2 = 4.$ ▲

<u>Lema 0.2.</u> - Seja $\alpha, \beta \geqq \omega$, temos

a) $C^{\alpha+\beta} \sim C^{\beta+\alpha}$.

b) $C_0^{\alpha+\beta} \sim C_0^{\alpha} \oplus C_0^{\beta}$.

<u>Demonstração</u>: - Como $[0,\alpha+\beta]$ e $[0,\beta+\alpha]$ são a união disjunta de $[0,\alpha]$ e $[0,\beta]$ a) segue imediatamente.

Pelo lema anterior $C^{\alpha} \sim C_0^{\alpha}$ e $C^{\beta} \sim C_0^{\beta}$, logo $C^{\alpha} \oplus C^{\beta} \sim C_0^{\alpha} \oplus C_0^{\beta}$, mas $C^{\alpha} \oplus C^{\beta} \sim C^{\alpha+\beta}$ (defina $f \in C^{\alpha+\beta} \longrightarrow (f|_{[0,\alpha]} , f|_{[0,\beta]}) \in C^{\alpha} \oplus C^{\beta}$, isto identificando $[0,\alpha+\beta] = [0,\alpha] \cup [0,\beta]$) e b) segue de $C_0^{\alpha+\beta} \sim C^{\alpha+\beta}$. ▲

Lema 0.3. - Seja α um ordinal infinito. Se para cada $\gamma < \alpha$ vale a relação $C^{\gamma} \underset{\dim}{<} C^{\alpha}$, então vale $C^{\alpha} \underset{\dim}{<} C^{\alpha^{\omega}}$.

Demonstração: - Observação 1. Se $\gamma < \alpha$ então C^{γ} é isométrico a um subespaço X de C^{α}, a saber: $X = \{x \in C^{\alpha} | x(\xi) = 0, \forall \gamma < \xi\}$.

Observação 2. Para demonstrar este lema pode-se supor que α é um ordinal limite; pois desde que cada ordinal infinito α pode ser representado na forma $\gamma+n$, onde γ é um ordinal limite e n é um ordinal finito, e $[0,\gamma+n]\sim[0,n+\gamma]\sim[0,\gamma]$, temos:

$$C^{\alpha} \overset{1}{\sim} C^{\gamma+n} \overset{1}{\sim} C^{\gamma}.$$

Observação 3. Se $\gamma > 0$ então o ordinal de $(\gamma\cdot\xi)_{\xi<\alpha}$ é igual a α $(\xi \to \gamma\cdot\xi)$. De acordo com o lema 0.1. é suficiente provar que a hipótese do lema 0.3. implica que

$$C_0^{\alpha} \underset{\dim}{<} C^{\alpha^{\omega}}.$$

Suponha que a tese é falsa, isto é, que exista um subespaço X de C_0^{α} e uma constante $k > 0$ tal que $X \overset{k}{\sim} C^{\alpha^{\omega}}$. Seja N um número inteiro arbitrário fixado. Desde que o espaço C^{α^N} é isométrico a um subespaço de $C^{\alpha^{\omega}}$, existe um subespaço X_N do espaço X tal que $X_N \overset{k}{\sim} C^{\alpha^N}$, isto é, existe uma transformação linear U do espaço X_N sobre C^{α^N} tal que

(1) $$\|x\| \leq |U(x)| \leq k\|x\|, \forall x \in X_N.$$

Mostraremos que isto é impossível para $N > 4k$ e então seguirá a tese do lema.

Seja $y_0 \in C^{\alpha^N}$ a função identicamente igual a 1; $x_0 = U^{-1}(y_0)$. Seja γ_1 com $\gamma_1 < \alpha$ escolhido de tal modo que $|x_0(t)| < \frac{1}{N+1}$, para $t > \gamma_1$ (tal número existe porque $x_0 \in C_0^{\alpha}$ e α é um número ordinal limite).

Escrevemos $\Delta_{\xi}^1 = (\alpha^{N-1}\xi, \alpha^{N-1}(\xi+1)]$ para $0 \leq \xi < \alpha$. Logo,

$$[1,\alpha^N] = \bigcup_{0 \leq \xi < \alpha} \Delta_{\xi}^1 .$$

Seja $Y_1 = \bigcap_{\xi<\alpha} \{y \in C^{\alpha^N} : y(t)$ é constante em $\Delta_{\xi}^1\}$. Obviamente Y_1 é um subespaço de C^{α^N} e $Y_1 \overset{1}{\sim} C^{\alpha}(2)$ (pois, pela Observação 3 , o ordinal de $(\alpha^{N-1}\xi)_{0 \leq \xi < \alpha}$ é α).

Agora provaremos que existe um elemento x_1 em X_N e y_1 em Y_1 tal que $x_1 = U^{-1}(y_1)$, $\| x_1 \| \leq \| y_1 \| = 1$ e $|x_1(t)| < \frac{1}{N+1}$ para $t \leq \gamma_1$.

Para cada $x \in C^{\alpha}$ seja $P_{\gamma_1}(x)$ a restrição da função x à $[1,\gamma_1]$; mais exatamente, $P_{\gamma_1}(x) = z$, onde $z \in C^{\gamma_1}$ e $z(t) = x(t)$ para $t \leq \gamma_1$.

Consideramos o operador $P_{\gamma_1} U^{-1}$ do espaço Y_1 no espaço C^{γ_1}. Por (2), e usando que

$$C^{\gamma_1} \underset{\dim}{<} C^{\alpha} ,$$

este operador não pode ser isomorfismo de Y_1 em C^{γ_1}; logo, não pode existir $M > 0$ tal que $M\| y \| \leq \| P_{\gamma_1} U^{-1}(y) \|$, $\forall y \in Y$; pois, caso contrário, $P_{\gamma_1} U^{-1}$ seria um isomorfismo de Y_1 em $C^{\gamma_1} \subset C^{\alpha}$. Assim, deve existir $y \in Y_1$ tal que

$$\| P_{\gamma_1} U^{-1}(y) \| < \frac{1}{N+1} \| y \| .$$

Em particular, podemos escolher $y_1 \in Y_1$ tal que $\|y_1\| = 1$ e

$$\| P_{\gamma_1} U^{-1}(y_1) \| < \frac{1}{N+1}$$

Coloquemos $x_1 = U^{-1}(y_1)$ e então obtemos:

$$\sup_{t \leq \gamma_1} |x_1(t)| = \| P_{\gamma_1}(x_1) \| = \| P_{\gamma_1} U^{-1}(y_1) \| < \frac{1}{N+1}$$

e por (1) temos:

$$\| x_1 \| \leq \| U(x_1) \| = \| UU^{-1}(y_1) \| = \| y_1 \| = 1.$$

Seja ξ_1 um número ordinal tal que $|y_1(t)| \geq \frac{1}{2}$, $\forall t \in \Delta^1_{\xi_1}$ (ξ_1 existe pois $\| y_1 \| = 1$) e consideramos a nova família de intervalos

$$\Delta^2_\xi = (\alpha^{N-1}\xi_1 + \alpha^{N-2}\xi, \alpha^{N-1}\xi_1 + \alpha^{N-2}(\xi+1)] \text{ para } 0 \leq \xi < \alpha.$$

Então, claramente,

$$\Delta^1_{\xi_1} = \bigcup_{0 \leq \xi < \alpha} \Delta^2_\xi .$$

Seja $Y_2 = \bigcap_{0 \leq \xi < \alpha} \{y \in C^{\alpha^N} : y(t)$ é constante em Δ^2_ξ e $y(t) = 0$, $\forall t,\ t \notin \Delta^1_{\xi_1}\}$. De maneira análoga ao que foi feito acima tem-se $Y_2 \overset{1}{\sim} C^\alpha$. Seja γ_2 com $\gamma_1 < \gamma_2 < \alpha$ escolhido de tal modo que $|x_1(t)| < \frac{1}{N+1}$, $\forall t,\ t \geq \gamma_2$. Desde que C^α é isomorfo à Y_2, existe $y_2 \in Y_2$ e $x_2 \in X_N$ tal que $x_2 = U^{-1}(y_2)$, $\| x_2 \| \leq \| y_2 \| = 1$ e $|x_2(t)| < \frac{1}{N+1}$ para $t \leq \gamma_2$ (use um argumento análogo ao da obtenção de y_1).

Agora escolhemos ξ_2 com $|y_2(t)| \geq \frac{1}{2}$, $\forall t$, $t \in \Delta^2_{\xi_2}$, etc.

Repetindo este procedimento N vezes acharemos elementos $x_0, x_1, \dots, x_N$; $y_0 = U(x_0), \dots, y_N = U(x_n)$, ordinais

$$1 = \gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_N < \alpha \ ,$$

e intervalos

$$\Delta_0 = [1, \alpha^N] \supset \Delta_1 = \Delta^1_{\xi_1} \supset \Delta_2 = \Delta^2_{\xi_2} \dots \supset \Delta_N$$

tais que

(3) $\quad \|x_k\| \leq 1$, $|x_k(t)| < \frac{1}{N+1}$, $\forall t$, $t \notin [\gamma_k, \gamma_{k+1}]$, $y_k(t) = a_k =$

$=$ constante para $t \in \Delta_k$, onde $|a_k| \geq \frac{1}{2}$, $k = 0, 1, \dots, N$.

Coloquemos $c_k = \text{sgn } a_k$ e

$$z = \sum_{k=0}^{N} c_k x_k \ ;$$

desde que

$$\Delta_N = \bigcap_{k=1}^{N} \Delta_k \ , \text{ existe } t_0 \in \Delta_k \ , \ \forall k, \ k = 0, 1, 2, \dots, N.$$

Temos então,

(4) $$\|U(z)\| = \|\sum_{k=0}^{N} c_k U(x_k)\| = \|\sum_{k=0}^{N} c_k y_k\| \geq \|\sum_{k=0}^{N} c_k y_k(t_0)\| = |\sum_{k=0}^{N} c_k a_k| =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} |a_k| \geq \frac{N+1}{2} \ .$$

Por outro lado, por (3) e pelo fato de $[\gamma_k, \gamma_{k+1}]$ serem disjuntos para $k = 0, 1, \dots, N-1, N$, temos $|x_1(t)| < \frac{1}{N+1}$, para todo $t \leq \alpha$, exceto para um índice i, $i = 0, 1, \dots, k$.

De $\|x_k\| \leqq 1$, concluimos:

(5) $$\|z\| \leqq 1 + N\cdot\frac{1}{N+1} < 2 .$$

Portanto de (4) e (5) vem:

$$\|U\| \geq \left\| U\left(\frac{z}{\|z\|}\right)\right\| \geqq \frac{N}{4} > k; \quad \text{absurdo.}$$ ▲

Lema 0.4. - Sejam α e β ordinais infinitos, $\beta \geqq \alpha^{\omega}$. Então C^{α} tem menor dimensão que C^{β}.

Demonstração: - Sabemos que $\alpha \leqq \beta \Longrightarrow C^{\alpha} \underset{\dim}{\leqq} C^{\beta}$.

Suponha que $C^{\alpha} \underset{\dim}{=} C^{\beta}$, e consideremos α_1 o menor ordinal tal que

$$C^{\alpha_1} \underset{\dim}{=} C^{\alpha} .$$

Então $\forall\gamma$, $\gamma < \alpha_1$, vale

$$C^{\gamma} \underset{\dim}{<} C^{\alpha_1} ,$$

e usando o lema anterior, temos

$$C^{\alpha_1} \underset{\dim}{<} C^{\alpha_1^{\omega}} .$$

Logo,

$$C^{\beta} \underset{\dim}{=} C^{\alpha} \underset{\dim}{=} C^{\alpha_1} \underset{\dim}{<} C^{\alpha_1^{\omega}}$$, e devemos ter $\beta < \alpha_1^{\omega}$, pois

caso contrário,

$$C^{\alpha_1^{\omega}} \underset{\dim}{\leqq} C^{\beta}, \quad \text{e então} \quad C^{\beta} \underset{\dim}{<} C^{\beta} ;$$

mas $\beta < \alpha_1^{\omega} \Longrightarrow \beta < \alpha^{\omega}$: absurdo, e o lema está demonstrado. ▲

Lema 0.5. - Sejam $\{X_t\}_{t\in T}$ e $\{Y_t\}_{t\in T}$ duas famílias de espaços de Banach, se existe K tal que $X_t \overset{k}{\sim} Y_t$, $\forall t \in T$, então

$$\left(\sum_{t\in T} X_t\right) \overset{k}{\sim} \left(\sum_{t\in T} Y_t\right)$$

Demonstração: - Para cada $t \in T$, seja $J_t: X_t \longrightarrow Y_t$ um isomorfismo tal que $\|J_t\| \, \|J_t^{-1}\| \leq k$ (que podemos supor sem perda de generalidade que $\|J_t\| = 1$, $\forall t \in T$), definimos:

$$J: \sum_{t\in T} X_t \longrightarrow \sum_{t\in T} Y_t \text{ , por}$$

$$J(\{x_t\}_{t\in T}) = \{J_t(x_t)\}_{t\in T} \text{ , segue o lema.}$$ $\blacktriangle$

Lema 0.6. - Seja $\{X_{s,t}\}$ uma família de espaços de Banach enumerados por elementos do conjunto $S \times T$. Então

$$\sum_{s\in S}\left(\sum_{t\in T} X_{s,t}\right) \overset{1}{\sim} \sum_{(s,t)\in S\times T} X_{s,t} \overset{1}{\sim} \sum_{t\in T}\left(\sum_{s\in S} X_{s,t}\right).$$

Demonstração: - Provaremos o primeiro isomorfismo; o segundo é análogo.

Para cada $s \in S$, definimos $Y_s = \sum_{t\in T} X_{s,t}$, logo $\sum_{s\in S}\left(\sum_{t\in T} X_{s,t}\right) = \sum_{s\in S} Y_s$, e colocamos:

$$J: \sum_{s\in S} Y_s \longrightarrow \sum_{(s,t)\in S\times T} X_{s,t}$$

$$J(\{y_s\}_{s\in S}) = \{x_{s,t}\}_{(s,t)\in S\times T} \text{ , isto se}$$

$y_s = \{x_{s,t}\}_{t\in T}$, $s \in S$.

E facilmente se verifica que J é o isomorfismo desejado $\blacktriangle$

Provaremos os seguintes teoremas:

Teorema 1. - Sejam ξ e η ordinais de mesma cardinalidade, $\xi \leqq \eta$ e α o ordinal inicial dessa cardinalidade; assumiremos que $\alpha=\omega$, ou α é singular ou $\xi,\eta \geqq \alpha^2$. Então são equivalentes:

1º) $C^{\xi} \sim C^{\eta}$

2º) C^{ξ} e C^{η} têm a mesma dimensão linear

3º) $\eta < \xi^{\omega}$

Teorema 2. - Seja α um ordinal regular não enumerável, e $\xi,\eta \in [\alpha,\alpha^2]$. Sejam ξ',η',γ,δ ordinais tais que $\xi = \alpha\cdot\xi'+\gamma$; $\eta = \alpha\cdot\eta'+\delta$; $\xi',\eta' \leqq \alpha$; $\gamma,\delta < \alpha$. Então são equivalentes:

1º) $C^{\xi} \sim C^{\eta}$

2º) C^{ξ} e C^{η} têm a mesma dimensão linear

3º) ξ' e η' têm a mesma cardinalidade.

Observações: - a) o teorema 1 foi provado em [B.P-I] no caso $\alpha=\omega$.

b) Semadeni ([Se-I]) mostrou que 1º $\Longleftrightarrow$ 3º do teorema 2 vale para ordinais ξ e η no intervalo $[\omega_1,\omega_1\cdot\omega)$.

c) Se $C[0,\alpha] \sim C[0,\beta]$, então $\ell_1(\Gamma_1)$, onde $|\Gamma_1| = \bar{\alpha}$ e $\ell_1(\Gamma_2)$, onde $|\Gamma_2| = \bar{\beta}$ são isomorfos, isto por serem respectivamente os duais topológicos de $C[0,\alpha]$ e $C[0,\beta]$. (veja [S.B.A] pág. 412); donde concluimos que $\bar{\alpha} = \bar{\beta}$. (lembre-se que se Γ for um conjunto infinito, então a menor cardinalidade dos conjuntos que são densos em $\ell_1(\Gamma)$ é $|\Gamma|$).

I - Prova do teorema 1

Precisamos de vários lemas.

Lema 1.1. - Sejam α,γ,β ordinais, γ ordinal limite, $\alpha < \gamma$, $-\alpha+\gamma = \gamma$ e $\lambda: [\alpha,\gamma] \longrightarrow [0,\beta]$ uma função estritamente crescente e contínua (cuja notação será a indexada) tal que $\lambda_\alpha=0$, $\lambda_\gamma=\beta$ e $-\lambda_\xi+\lambda_{\xi+1}$ é infinito $\forall\xi$, $\xi \in [\alpha,\gamma)$. Vale:

$$C_0^\beta \sim C_0^\gamma \oplus \sum_{\alpha\leq\xi<\gamma} C_0^{-\lambda_\xi+\lambda_{\xi+1}}$$

Demonstração: - Seja X o subespaço de C_0^β constituido das funções que são constantes em cada intervalo $(\lambda_\xi,\lambda_{\xi+1}]$, $\xi \in [\alpha,\gamma)$ e Y o subespaço de C_0^β constituido das funções que se anulam nos pontos $\lambda_\xi, \xi \in [\alpha,\gamma)$. Mostraremos que $C_0^\beta \sim X \oplus Y$.

De fato, seja $z \in C_0^\beta$ e x a função em $[0,\beta]$ igual a $z(\lambda_{\xi+1})$ em cada intervalo $(\lambda_\xi,\lambda_{\xi+1}]$, com $x(\beta)=0$ e $x(0)=z(0)$. É claro que x é contínua e portanto $x \in X$. Escrevemos: $y = z-x$. É evidente que y é nula nos pontos $\lambda_{\xi+1}$, $\xi \in [\alpha,\gamma)$ e no ponto 0; se ξ é um ordinal limite no intervalo $(\alpha,\gamma]$, então:

$$y(\lambda_\xi) = y(\lim_{\eta\to\xi} \lambda_{\eta+1}) = \lim_{\eta\to\xi} y(\lambda_{\eta+1}) = 0, \quad \text{isto é, } y \in Y.$$

É claro que $\max\{\|x\|,\|y\|\} \leq 2\|z\|$ e $\|z\| \leq \|x\|+\|y\| \leq 2\max\{\|x\|,\|y\|\}$; logo $C_0^\beta \sim X \oplus Y$.

Desde que a relação $X \overset{1}{\sim} C_0^{-\alpha+\gamma} = C_0^\gamma$ é óbvia, completaremos a prova mostrando que

$$Y \overset{1}{\sim} \sum_{\alpha \leq \xi < \gamma} C_0^{-\lambda_\xi + \lambda_{\xi+1}} \qquad (*)$$

Para cada $y \in Y$ e $\xi \in [\alpha,\gamma)$ denotaremos por y_ξ a função que coincide com y no intervalo $(\lambda_\xi, \lambda_{\xi+1}]$ e se anula fora desse intervalo. É fácil ver que $\|y\| = \sup\limits_{\xi} \|y_\xi\|$.

Afirmamos que $(y_\xi)_{\alpha \leq \xi < \gamma}$ pertence ao espaço da direita de (*); caso contrário exisitiria $\varepsilon > 0$ tal que o conjunto $\{\xi \in [\alpha,\gamma) \mid \|y_\xi\| \geq \varepsilon\}$ seria infinito e portanto facilmente conseguiriamos uma sequência $\xi_1 < \xi_2 < \dots$ no intervalo $[\alpha,\gamma)$ tal que $\sup\{|y(t)| \mid t \in (\lambda_{\xi_n}, \lambda_{\xi_{n+1}})\} \geq \varepsilon$ e consequentemente $y(\lambda_{\xi_0}) \neq 0$, onde $\xi_0 = \sup\limits_{n \geq 1} \xi_n$; absurdo. Logo, (*) segue imediatamente. Δ

Corolário 1.2. - Seja μ um ordinal infinito e γ um ordinal limite. Se $\gamma = \mu$ ou $\gamma + \mu = \mu$, então

$$C_0^{\mu \cdot \gamma} \sim \bar{\gamma} \sum C_0^{\mu}$$

Demonstração: - Aplicando o lema 1.1 à γ-sequência $\lambda_\xi = \mu \cdot \xi$, $0 \leq \xi < \gamma$, obtemos: $C_0^{\mu \cdot \gamma} \sim C_0^{\gamma} \oplus \bar{\gamma} \sum C_0^{\mu}$, logo o caso $\gamma = \mu$ é óbvio. No caso $\gamma + \mu = \mu$, pelo lema 0.1 b) temos:

$$C_0^{\gamma} \oplus C_0^{\mu} \sim C_0^{\gamma+\mu} = C_0^{\mu} \quad \text{e portanto}$$

$C_0^{\gamma} \oplus \bar{\gamma} \sum C_0^{\mu} \sim C_0^{\gamma} \oplus C_0^{\mu} \oplus \bar{\gamma} \sum C_0^{\mu} \sim C_0^{\mu} \oplus \bar{\gamma} \sum C_0^{\mu} = \bar{\gamma} \sum C_0^{\mu}$, o que completa a prova do corolário. Δ

<u>Corolário 1.3.</u> - Seja α um ordinal inicial e γ um ordinal limite de cardinalidade menor ou igual a $\bar{\alpha}$. Então existe um subconjunto M do intervalo $[2,\gamma)$ constituido de ordinais não limites, tal que

$$C_0^{\alpha^\gamma} \sim \sum_{\mu\in M} C_0^{\alpha^\mu}.$$

<u>Demonstração</u>: - Primeiramente obteremos um ordinal $\beta \leq \alpha$ cofinal em γ através de uma β-sequência estritamente crescente e contínua em $[0,\beta]$.

Seja β o menor ordinal cofinal em γ (logo β é inicial, e portanto, de $\bar{\beta} \leq \bar{\gamma} \leq \bar{\alpha}$, temos $\beta \leq \alpha$); através da β-sequência estritamente crescente $A = (\phi_\xi)_{\xi<\beta}$ (podemos supor ϕ_0 e ϕ_1 maiores que 2) em particular $\phi\colon [0,\beta) \longrightarrow A \subset [2,\gamma)$ é uma função estritamente crescente e sobre A.

Seja $B = \{\lambda+1 | \lambda \in A\}$, logo $f\colon A \longrightarrow B$ tal que $f(\lambda)=\lambda+1$ é estritamente crescente e sobrejetora. Se C é o fecho de B na topologia da ordem em $[2,\gamma)$, então a função $g\colon C-\{\gamma\} \longrightarrow B-\{\text{mim } B\}$, que associa a cada $\lambda \in C-\{\gamma\}$ o ordinal $\text{mim}\{\xi \in B | \lambda < \xi\}$ satisfaz:

1) Está bem definida, pois $\forall\lambda < \gamma$, existe $\xi \in A$ tal que $\lambda < \xi < \gamma$ e então $\xi+1 \in B$ e $\lambda < \xi+1 < \gamma$. Obviamente, $\text{mim } B < g(\{\text{mim } B\})$ e logo abaixo mostraremos que ela é estritamente crescente; logo, $\text{mim } B < g(\lambda)$, $\forall\lambda \in C-\{\gamma\}$.

2) É estritamente crescente. Se $\lambda_1,\lambda_2 \in C-\{\gamma\}$ com $\lambda_1 < \lambda_2$, então existe $\xi \in B$ tal que $\lambda_1 < \xi \leq \lambda_2$, logo $g(\lambda_1) \leq \xi \leq \lambda_2 < g(\lambda_2)$.

3) É sobrejetora. Dado $\xi+1 \in B-\{\min B\}$, com $\xi \in A$, seja $\lambda_0 = \sup\{\lambda \in C-\{\gamma\} | \min A < \lambda \leq \xi\}$; como C é fechado segue que $\lambda_0 \in C-\{\gamma\}$ e facilmente vê-se que $g(\lambda_0) = \xi+1$.

Sendo, agora, homeomorfismo estritamente crescente de B em B-{mim B}, a função $h = g^{-1}$ pfϕ: $[0,\beta) \longrightarrow C-\{\gamma\}$ é estritamente crescente e sobrejetora, portanto a função $\chi: [0,\beta] \longrightarrow C$, dada por: $\chi(\xi) = h(\xi)$ se $\xi < \beta$ e $\chi(\beta) = \gamma$ é estritamente crescente e sobrejetora.

Afirmações: 1) Se $\xi \leq \beta$ é um ordinal limite, então $\chi_\xi = \lim_{\eta\to\xi} \chi_\eta$.

Isto segue de: se $\eta_1 < \eta_2$, então $\chi_{\eta_1} < \chi_{\eta_2}$ e de: dado $\delta_0 < \chi_\xi$, suponha que $\{\eta < \xi | \delta_0 < \chi_\eta < \chi_\xi\}$ seja vazio; consideremos então $\delta_1 = \sup\{\chi_\eta | \eta < \xi\}$, $\delta_1 \leq \delta_0$ e $\delta_1 \in C$ (C é fechado). Por conseguinte existe $\eta_0 < \xi$ tal que $\delta_1 = \chi_{\eta_0}$; logo, forçosamente devemos ter $\delta_1 < \chi_{\eta_0+1} < \chi_\xi$; absurdo.

2) Se $\xi < \beta$ é um ordinal não limite, então χ_ξ é um ordinal não limite. Isto é claro.

Finalmente, aplicando o lema 1.1 à sequência $(\lambda_\xi)_{0\leq\xi<\beta}$ onde $\lambda_0=0$ e $\lambda_\xi=\alpha^{\chi_\xi}$ para $\xi > 0$ e usando que $-\alpha^{\chi_\xi}+\alpha^{\chi_{\xi+1}}=\alpha^{\chi_{\xi+1}}$ (essencialmente é o lema 0.0.b)) obtemos:

$$C_0^{\alpha^\gamma} \sim C^\beta \oplus \sum_{\xi<\beta} C_0^{\alpha^{\chi_{\xi+1}}} = C_0^\beta \oplus C_0^{\alpha^{\chi_1}} \oplus \sum_{0<\xi<\beta} C_0^{\alpha^{\chi_{\xi+1}}}$$

De $\beta+\alpha^{\chi_1}=\alpha^{\chi_1}$ (lema 0.0 a)) e do lema 0.2 temos $C_0^{\alpha^\gamma} \sim \sum_{\xi<\beta} C_0^{\alpha^{\chi_{\xi+1}}} = \sum_{\mu\in M} C_0^{\alpha^\mu}$ onde $M = \{\chi_{\xi+1} | \xi < \beta\}$; o que prova o corolário. $\blacktriangle$

Lema 1.4. - Se α é um ordinal inicial singular, então existe um ordinal β_0 cofinal em α, através de uma β_0-sequência estritamente crescente e contínua $(i_\xi)_{1<\xi<\beta_0}$, onde $\beta_0 < i_\xi$, $\forall\xi$ e i_ξ é inicial, $\forall\xi$.

Demonstração: - Seja β_0 o menor ordinal cofinal em α (portanto β_0 é inicial e $\beta_0 < \alpha$) e suponhamos que isto se realize através da β_0-sequência estritamente crescente $(\gamma_\mu)_{1<\mu<\beta_0}$. Sendo $\alpha=\omega_\Theta$ para algum ordinal limite Θ, temos que $\lim\limits_{\eta\to\Theta} \omega_\eta = \omega_\Theta$; logo existe $\eta_0 < \Theta$ tal que $\beta_0 < \omega_{\eta_0} < \alpha$.

Seja μ_0 o menor ordinal tal que $\omega_{\eta_0} < \gamma_{\mu_0} < \alpha$. Como β_0 é inicial, vale que $\beta_0 = -\mu_0+\beta_0$ i.e $\mu_0+\beta_0 = \beta_0$, (veja lema 0.0 c)). Definiremos uma β_0-sequência $(i_\xi)_{1<\xi<\beta_0}$ de ordinais iniciais por indução transfinita.

i_1 é o menor ordinal inicial pertencente à $(\gamma_{\mu_0},\alpha]$. Supondo definidos $(i_\xi)_{1<\xi<\rho}$, $\rho < \beta_0$.

Se ρ é um ordinal não limite, definimos i_ρ como sendo o menor ordinal inicial pertencente à $(\max\{i_{\rho-1}, \gamma_{\mu_0+(\rho-1)}\},\alpha]$.

Se ρ é um ordinal limite, definimos $i_\rho = \sup\limits_{\delta<\rho} i_\delta$. E então claramente $(i_\xi)_{1<\xi<\beta_0}$ tem as propriedades:

a) $i_\xi < \alpha$, $\forall\ 1 < \xi < \beta_0$

b) $i_\xi < i_{\xi+1}$, $\forall\ 1 < \xi < \beta_0$

c) $\gamma_{\mu_0+(\xi-1)} < i_\xi$, $\forall\ 1 < \xi < \beta_0$ e ξ ordinal não limite

d) se ρ é um ordinal limite, $\rho < \beta_0$, então $i_\rho = \lim_{\delta<\rho} i_\delta$

e) $\lim_{\delta<\beta_0} i_\delta = \alpha$.

f) $\beta_0 < \omega_{\eta_0} < i_\xi$, $\forall\xi$, $1 < \xi < \beta_0$

E portanto ela satisfaz as exigências do lema. ▲

Corolário 1.5. - Sejam α, β_0 e $(i_\xi)_{1<\xi<\beta_0}$ como no lema 1.4.;
colocamos $i_0=0$ e $i_{\beta_0} = \alpha$. Então vale:

$$C_0^\alpha \sim \sum_{0\leq\xi<\beta_0} C_0^{i_{\xi+1}}.$$

Demonstração: - Definindo $\lambda_\xi = i_\xi$, $0 \leq \xi < \beta_0$ e usando os lemas 1.1 e 0.0 temos:

$$C_0^\alpha \sim C_0^{\beta_0} \oplus \sum_{0\leq\xi<\beta_0} C_0^{-i_\xi+i_{\xi+1}} \sim C_0^{\beta_0} \oplus \sum_{0\leq\xi<\beta_0} C_0^{i_{\xi+1}}$$

$$\sim C_0^{\beta_0} + C_0^{i_1} \oplus \sum_{0<\xi<\beta_0} C_0^{i_{\xi+1}} \sim C_0^{\beta_0+i_1} \oplus \sum_{0<\xi<\beta_0} C_0^{i_{\xi+1}}$$

$$\sim C_0^{i_1} \oplus \sum_{0<\xi<\beta_0} C_0^{i_{\xi+1}} = \sum_{0\leq\xi<\beta_0} C_0^{i_{\xi+1}} .$$ ▲

Lema 1.6. - Seja α um ordinal inicial singular. Então $C_0^\alpha \sim \bar{\alpha}\sum C_0^\alpha$.

Antes de demonstrarmos este lema, daremos um contra-exemplo para um argumento usado em $[K_i]$ pág. 229, na demonstração do mesmo.

Não é verdade que: se $\alpha=\omega_\gamma$ é singular, então $\gamma \not< \omega_\gamma$.

Exemplo: - Consideremos a sequência $x_1 = \omega$ e $x_{n+1} = \omega_{x_n}$, $n \geq 1$.

Seja $\lambda = \sup_n x_n$ e considere $\alpha = \omega_\lambda$. α é singular pois $\lim_{n\to\omega} \omega_{x_n} = \omega_\lambda$ e $\omega < \omega_\lambda$; mas $\lambda=\omega_\lambda$ pois

$\lambda=\sup_n x_n = \sup_n x_{n+1} = \sup_n \omega_{x_n} = \omega_\lambda$.

Demonstração do lema: - Seja $(i_\xi)_{1<\xi<\beta_0}$ como no lema 1.4. e colocamos $i_0=0$ e $i_{\beta_0} = \alpha$. E tomemos $0 \leq \beta < \beta_0$. Definamos $\lambda_\xi = i_{\beta+1}.\xi$, $0 \leq \xi < \alpha$ e observemos que $i_{\beta+1}.\alpha=\alpha$, pois

$$\alpha \leq i_{\beta+1}.\alpha = \lim_{\xi\to\beta_0} i_{\beta+1}.i_\xi = \lim_{\beta+1<\xi<\beta_0} i_{\beta+1}.i_\xi \leq \lim_{\beta+1<\xi<\beta_0} i_{\xi+1} = \alpha$$

Pelo lema 1.1 temos:

$$C_0^\alpha \sim C_0^\alpha \oplus \sum_{0\leq\xi<\alpha} C_0^{-i_{\beta+1}.\xi+i_{\beta+1}(\xi+1)} = C_0^\alpha \oplus \bar{\alpha} \sum C_0^{i_{\beta+1}},$$

Portanto (pelo lema 0.5)

$$\sum_{0\leq\beta<\beta_0} C_0^\alpha \sim \sum_{0\leq\beta<\beta_0} (C_0^\alpha \oplus \bar{\alpha}\sum C_0^{i_{\beta+1}})$$

Sendo $m=\bar{\beta}_0$ (logo $m < \bar{\alpha}$), temos pelo lema 0.6 e corolário 1.5.

$$m \sum C_0^\alpha \sim m \sum C_0^\alpha \oplus \bar{\alpha} \sum C_0^\alpha = \bar{\alpha} \sum C_0^\alpha \qquad (I)$$

Agora, sejam $A = \{\beta \mid 0 \leq \beta < \beta_0\}$ e $B = \{\beta \in A \mid \beta$ é limite$\} \cup \{0\}$.

Então

$i_{\xi+j-1} \cdot \beta_0 + i_{\xi+j} = i_{\xi+j}$ $\forall \xi \in B$ e $1 \leq j < \omega$, (pois

$\overline{i_{\xi+j-1}\beta_0} = \overline{i_{\xi+j-1}} \cdot \overline{\beta_0} = \overline{i_{\xi+j-1}} < \overline{i_{\xi+j}}$ e então

$i_{\xi+j-1}\beta_0 < i_{\xi+j}$; a igualdade segue do lema 0.0)

Pelo corolário 1.5. temos:

$$C_0^\alpha \sim \sum_{\beta \in A} C_0^{i_{\beta+1}} \sim \sum_{\lambda \in B} \Big(\sum_{1 \leq j < \omega} C_0^{i_{\lambda+j}} \Big)$$

$$\sim \sum_{\lambda \in B} \Big(C_0^{i_{\lambda+1}} \oplus \sum_{2 \leq j < \omega} C_0^{i_{\lambda+j-1} \cdot \beta_0 + i_{\lambda+j}} \Big)$$

E como $C_0^{i_{\xi+j-1} \cdot \beta_0 + i_{\xi+j}} \sim m \sum C_0^{i_{\xi+j-1}} \oplus C_0^{i_{\xi+j}}$,

(isto pelo corolário 1.2, lema 0.1 e de $\beta_0 + i_{\xi+j-1} = i_{\xi+j-1}$)

temos

$$C_0^\alpha \sim \sum_{\lambda \in B} \Big[C_0^{i_{\lambda+1}} \oplus \sum_{2 \leq j < \omega} \Big(m \sum C_0^{i_{\lambda+j-1}} \oplus C_0^{i_{\lambda+j}} \Big) \Big]$$

$$\sim \sum_{\lambda \in B} \Big[C_0^{i_{\lambda+1}} \oplus \sum_{2 \leq j < \omega} \Big(m \sum C_0^{i_{\lambda+j-1}} \Big) \Big]$$

$$\sim \sum_{\lambda \in B} \Big[C_0^{i_{\lambda+1}} \oplus \sum_{1 \leq j < \omega} \Big(m \sum C_0^{i_{\lambda+j}} \Big) \Big]$$

$$\sim \sum_{\lambda \in B} \Big(m \sum \sum_{1 \leq j < \omega} C_0^{i_{\lambda+j}} \Big) \sim m \sum \Big(\sum_{\lambda \in B} \sum_{1 \leq j < \omega} C_0^{i_{\lambda+j}} \Big)$$

$$\sim m \sum C_0^\alpha \qquad \text{(II)}$$

De (I) e (II) segue o lema. Δ

<u>Lema 1.7.</u> - Seja α um ordinal inicial e γ um ordinal de cardinalidade menor ou igual a $\bar{\alpha}$, $\gamma \geqq 2$. Então:

$$C_0^{\alpha^\gamma} \sim \bar{\alpha} \sum C_0^{\alpha^\gamma}$$

<u>Demonstração</u>: - Seja β tal que $\bar{\beta} \leqq \bar{\alpha}$; aplicando o corolário 1.2. com $\mu = \alpha^\beta$ e $\gamma=\alpha$ (se $\beta=1$, $\mu=\gamma$; se $\beta > 1$ então $\alpha < \alpha^\beta$ e pelo lema 0.0 $\gamma+\mu = \mu$) temos:

$$C_0^{\alpha^{\beta+1}} \sim \bar{\alpha} \sum C_0^{\alpha^\beta} \quad (\text{se } \beta \geqq 1).$$

Desde que $(\bar{\alpha})^2 = \bar{\alpha}$, pelo lema 0.6 temos:

$$\bar{\alpha} \sum C_0^{\alpha^{\beta+1}} \sim \bar{\alpha} \sum (\bar{\alpha} \sum C_0^{\alpha^\beta}) \sim \bar{\alpha} \sum C_0^{\alpha^\beta} \sim C_0^{\alpha^{\beta+1}} \quad (\text{se } \beta \geqq 1) \qquad (**)$$

Com isto provamos o lema para o caso γ ordinal não limite.

Agora, se γ é um ordinal limite de cardinalidade igual a $\bar{\alpha}$ e M o subconjunto do intervalo $[2,\gamma]$ mencionado no corolário 1.3., segue de (**) e do lema 0.5 que

$$C_0^{\alpha^\gamma} \sim \sum_{\mu \in M} C_0^{\alpha^\mu} \sim \sum_{\mu \in M} (\bar{\alpha} \sum C_0^{\alpha^\mu}) \sim \bar{\alpha} \sum \sum_{\mu \in M} C_0^{\alpha^\mu} \sim \bar{\alpha} \sum C_0^{\alpha^\gamma}$$ e o lema está completamente provado. ▵

<u>Lema 1.8.</u> - Seja α um ordinal inicial, $\xi \in [\alpha,\alpha^2]$, $\xi=\alpha\xi'+\beta$, onde $\xi' \leqq \alpha$ e $\beta < \alpha$. Então

$$C_0^\xi \sim \bar{\xi}' \sum C_0^\alpha .$$

Demonstração: - Notando que $\beta+\alpha\xi' = \alpha\xi'$, (pois $\alpha \leq \alpha\xi'$ e então $\alpha\xi' = \alpha+r$, logo: $\beta+\alpha\xi' = \beta+\alpha+r = \alpha+r = \alpha\xi'$ (lema 0.0)) e portanto, pelo lema 0.2 temos

$$C_0^{\xi} \sim C_0^{\alpha\xi'+\beta} \sim C_0^{\beta+\alpha\xi'} \sim C_0^{\alpha\xi'}.$$

Escrevendo $\xi' = \xi_0'+n$, onde $n < \omega$ e $\xi_0' = 0$ ou ξ_0' é um ordinal limite, vem:

Se $\xi_0' = 0$, então $n \neq 0$ e $C_0^{\alpha n} = C_0^{\alpha+\dots+\alpha} = \bar{n} \sum C_0^{\alpha}$

Se $\xi_0' \neq 0$ e $n = 0$, então o lema segue do corolário 1.2

Se $\xi_0' \neq 0$ e $n \neq 0$ temos pelos casos anteriores que:

$C_0^{\alpha\xi'} = C_0^{\alpha(\xi_0'+n)} \sim C_0^{\alpha\xi_0'+\alpha n} \sim C_0^{\alpha\xi_0'} + C_0^{\alpha n} \sim \bar{\xi}_0' \sum C_0^{\alpha} + \bar{n} \sum C_0^{\alpha}$ isto é

$C_0^{\alpha\xi'} \sim \overline{(\xi_0'+n)} \sum C_0^{\alpha} = \bar{\xi}' \sum C_0^{\alpha}$; o que prova o lema. $\blacktriangle$

Demonstração do teorema 1.

Suponha que α,ξ,η satisfazem as condições do teorema 1. É evidente que 1º $\Longrightarrow$ 2º ; a implicação 2º $\Longrightarrow$ 3º é o lema 0.4. Mostraremos que 3º $\Longrightarrow$ 1º .

Primeiramente assumiremos que $\xi,\eta \geq \alpha^2$. Seja $\gamma=\sup\{\Theta \mid \alpha^{\Theta} \leq \xi\}$; lembrando que $\Theta \leq \alpha^{\Theta} \leq \xi$ segue que $\bar{\gamma} \leq \bar{\alpha}$ e $\gamma \geq 2$. Dividindo ξ por α^{γ} obtemos $\xi=\alpha^{\gamma}.\lambda+\delta$, onde $\lambda < \alpha$ e $\delta < \alpha^{\gamma}$. De $\xi < \alpha^{\gamma+1}$ vem que $\eta < \xi^{\omega} \leq \alpha^{(\gamma+1)\omega} = \alpha^{\gamma\cdot\omega}$, pois

$$(\gamma+1)\omega = (\gamma+1)+(\gamma+1)+\dots = \gamma+(1+\gamma)+(1+\gamma)+\dots$$

$$= \gamma+\gamma+\dots = \gamma\cdot\omega$$

Seja i o maior ordinal (que é necessariamente finito) tal que $\alpha^{\gamma.i} \leqq \eta$. Dividindo η por $\alpha^{\gamma.i}$ obtemos: $\eta = \alpha^{\gamma i}\mu+\beta$ com $\mu < \alpha^{\gamma}$ e $\beta < \alpha^{\gamma i}$.

Afirmação: - Para cada ordinal finito p e para cada $\nu < \alpha^{\gamma}$ temos:

$$C_0^{\alpha^{\gamma.p}.\nu} \sim \bar{\alpha} \sum C_0^{\alpha^{\gamma}} \qquad (***)$$

De fato:

Se $\nu=1$. Por indução sobre p.

Se $p=1$ (***) é o lema 1.7. Supondo a validade de (***) para p, temos, pelo corolário 1.2. que:

$$C_0^{\alpha^{\gamma.(p+1)}} = C_0^{\alpha^{\gamma p}.\alpha^{\gamma}} \sim \overline{\alpha^{\gamma}} \sum C_0^{\alpha^{\gamma.p}}$$

Pois, se $p=1$ então $\alpha^{\gamma p} = \alpha^{\gamma}$; se $p > 1$ $\alpha^{\gamma} + \alpha^{\gamma p} = \alpha^{\gamma}(1+\alpha^{\gamma(p-1)}) = \alpha^{\gamma}.\alpha^{\gamma(p-1)} = \alpha^{\gamma p}$ (lema 0.0 a)).

Como $\bar{\gamma} \leqq \bar{\alpha}$, vem que $\overline{\alpha^{\gamma}} = \bar{\alpha}$. Usando a hipótese de indução e lema 0.6 temos:

$$C_0^{\alpha^{\gamma(p+1)}} \sim \bar{\alpha} \sum (\bar{\alpha} \sum C_0^{\alpha^{\gamma}}) \sim (\bar{\alpha})^2 \sum C_0^{\alpha^{\gamma}} = \bar{\alpha} \sum C_0^{\alpha^{\gamma}}$$

Se ν é arbitrário então $\nu=\ell+q$, onde $q < \omega$ e $\ell=0$ ou ℓ é um ordinal limite.

Se $\ell=0$ o resultado desejado segue imediatamente; caso contrário pelos lemas 0.2 e 0.6 e corolário 1.2 (a não ser que $q=0$) e ainda pelo que foi feito acima

$$
\begin{aligned}
C_0^{\alpha^{\gamma p} v} &\sim \bar{\ell} \sum C_0^{\alpha^{\gamma p}} \oplus q \sum C_0^{\alpha^{\gamma p}} \\
&\sim (\bar{\ell}+q) \sum (\bar{\alpha} \sum C_0^{\alpha^{\gamma}}) \\
&\sim (\bar{\ell}+q)\bar{\alpha} \sum C_0^{\alpha^{\gamma}} = \bar{\alpha} \sum C_0^{\alpha^{\gamma}}
\end{aligned}
$$

O que completa a prova da afirmação acima.

De $\beta + \alpha^{\gamma \cdot i}\mu = \alpha^{\gamma i}\mu$ (pois sendo $\alpha^{\gamma i} \leqq \alpha^{\gamma i}\mu$, existe d tal que $\alpha^{\gamma i}+d = \alpha^{\gamma i}\mu$. Logo $\beta+\alpha^{\gamma i}\mu = \beta+\alpha^{\gamma i}+d = \alpha^{\gamma i}+d = \alpha^{\gamma i}\mu$ (a penúltima igualdade devido ao lema 0.0 a)) e da afirmação acima temos:

$$C_0^{\eta} \sim C_0^{\alpha^{\gamma i}\mu+\beta} \sim C_0^{\beta+\alpha^{\gamma i}\mu} \sim C_0^{\alpha^{\gamma i}\cdot\mu} \sim \bar{\alpha} \sum C_0^{\alpha^{\gamma}} \qquad \text{(III)}.$$

Analogamente $C_0^{\xi} \sim \bar{\alpha} \sum C_0^{\alpha^{\gamma}}$ (IV).

De (III) e (IV) e o lema 0.1 segue que $C^{\eta} \sim C^{\xi}$.

Agora seja $\alpha = \omega$ ou α um ordinal singular, $\xi \in [\alpha,\alpha^2]$; provaremos que $C_0^{\xi} \sim C_0^{\alpha}$ o que completará a prova do teorema 1 (de fato, disto seguirá que $C^{\alpha^2} \sim C^{\alpha}$, portanto, se $\eta < \xi^{\omega}$ e $\eta \geqq \alpha^2$ segue pela primeira parte da prova que $C^{\eta} \sim C^{\alpha^2} \sim C^{\alpha} \sim C^{\xi}$).

O caso $\alpha = \omega$.

Se $\xi \in [\alpha,\alpha^2)$, então $\xi = \omega n+m$ com $n < \omega$ e $m < \omega$, pelo lema 0.2, temos:

$C_0^{\xi} \sim C^{m+\omega n} \sim C_0^{\omega n} \sim n \sum C_0^{\omega}$.

Mas $n \sum C_0^{\omega} \sim C_0^{\omega}$; para isto defina:

$(x_i)_{0 \leqq i < n-1} \in n \sum C_0^{\omega} \longrightarrow x = (b_J)_{0 \leqq J < \omega} \in C_0^{\omega}$, onde $b_{nJ+i} = a_i^j$,

$0 \leqslant i < n-1$, $0 \leq j < \omega$, se $(x_i) = (a_i^j)_{0 \leqq i < \omega}$:

Se $\xi = \omega^2$, pelo corolário 1.2 temos:

$$C_0^{\omega^2} \sim C_0^{\omega\omega} \sim \bar{\omega} \sum C_0^{\omega}$$

Mas $\bar{\omega} \sum C_0^{\omega} \sim C_0^{\omega}$, para isto defina:

$$(x_i)_{0 \leqq i < \omega} \in \bar{\omega} \sum C_0^{\omega} \longrightarrow x \in C_0^{\omega} \quad , \quad \text{pondo}$$

$x = (a_0^0, a_0^1, a_1^0, a_0^2, a_1^1, a_2^0, a_0^3, a_1^2 \ldots)$, onde $x_i = (a_i^j)_{0 \leqq j < \omega}$. ("Desenhe" uma "matriz infinita" com auxílio dos a_i^j, onde i é linha e j é coluna, para melhor entender essa aplicação).

O caso α singular.

Se $m \leqq \bar{\alpha}$, pelo lema 1.6. temos:

$C_0^{\alpha} \sim \bar{\alpha} \sum C_0^{\alpha} \sim m \sum \bar{\alpha}(\sum C_0^{\alpha}) \sim m \sum C_0^{\alpha}$ e então a relação $C_0^{\xi} \sim C_0^{\alpha}$ segue do lema 1.8. Δ

II - Prova do teorema 2

<u>Definição:</u> - Seja X um espaço de Banach, α um ordinal regular não enumerável; por X_{α} denotaremos o conjunto dos $F \in X^{**}$ (bidual de X) tendo a seguinte propriedade: para cada ordinal limite

$\beta < \alpha$ e para cada β-sequência $(f_\xi)_{\xi<\beta}$ de funcionais lineares contínuos em X que satisfaz a condição $\sup_\xi \| f_\xi \| < \infty$ e é convergente para zero na X-topologia de X* (isto é, $\lim_{\xi\to\beta} f_\xi(x) = 0$, $\forall x \in X$), temos a relação $\lim_{\xi\to\beta} F(f_\xi) = 0$.

<u>Observação</u>: - É claro que $cX \subset X_\alpha$, onde cX é a imagem de X em X**, através da imersão canônica c. Além disso, X_α é subespaço fechado (na norma) de X**. De fato: seja $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X_\alpha$, $F_n \to F$ e $(f_\xi)_{\xi<\beta}$ limitada, com $\lim_{\xi\to\beta} f_\xi(x) = 0$, $\forall x \in X$, então o resultado segue de:

$$\| F(f_\xi) \| \leq \| F_n(f_\xi) \| + \| F-F_n \| . \sup_\xi \| f_\xi \|$$

<u>Lema 2.1.</u> - Seja X um subespaço fechado do espaço de Banach Y. Então X_α/cX é isomorfo a um subespaço de Y_α/cY.

<u>Demonstração</u>: - Denotando por i a imersão de X em Y, temos $i^{**}(X_\alpha) \subset Y_\alpha$. Com efeito, sejam $F \in X_\alpha$, $\beta < \alpha$ e $(g_\xi)_{\xi<\beta}$ uma β-sequência em Y* com $(g_\xi)_{\xi<\beta}$ limitado e $\lim_{\xi\to\beta} g_\xi(y) = 0$, $\forall y \in Y$; então $(i^*(g_\xi))_{\xi<\beta}$ é uma β-sequência em X* com $(i^*(g_\xi))_{\xi<\beta}$ limitado e $\lim_{\xi\to\beta} i^*(g_\xi)(x) = 0$, $\forall x \in X$. Logo $\lim_{\xi\to\beta} i^{**}F(g_\xi) = \lim_{\xi\to\beta} Fi^*(g_\xi) = 0$ e portanto $i^{**}(F) \subset Y_\alpha$.

É claro que $i^{**}(cX) \subset cY$. Logo, podemos passar o operador $i^{**}: X_\alpha \longrightarrow Y_\alpha$ ao quociente, obtendo o operador linear contínuo $T: X_\alpha/cX \longrightarrow Y_\alpha/cY$.

Mostraremos, agora, que T é injetora, e que a sua inversa (definida sobre sua imagem) é contínua.

Para ver isto é suficiente provarmos que não existe $F \in X_\alpha$ satisfazendo as relações: $d(F,cX) > 1$ e $d(i^{**}F,cY) < \frac{1}{3}$. Com efeito, daí segue, por um lado, que se $F \in X_\alpha - cX$, então existe $\lambda > 0$ tal que $d(\lambda F,cX) > 1$, donde $d(i^{**}\lambda F,cY) \geqq \frac{1}{3}$, logo $i^{**}F \notin cY$ e portanto T é injetora. Por outro lado, $F \in X_\alpha, \| i^{**}F + cY \| < \frac{1}{3} \Longrightarrow \| F + cX \| \leqq 1$, donde T^{-1} é contínua.

Suponha que exista um tal funcional F. Tomando $y \in Y$ com $\| i^{**}F - cy \| < \frac{1}{3}$, então $d(y,iX) > \frac{2}{3}$, pois lembrando que i^{**} é isométrica sobre a imagem, temos:

$$\begin{aligned} 1 < d(F,cX) &= \inf_{x\in X} \| F + cx \| = \inf_{x\in X} \| i^{**}(F + cx) \| \\ &= \inf_{x\in X} \| i^{**}F + i^{**}cx \| = d(i^{**}F, i^{**}cX) \\ &\leqq d(i^{**}F,cy) + d(cy, i^{**}cX) \end{aligned}$$

De $d(i^{**}F,cy) < \frac{1}{3}$ segue que $d(cy,i^{**}cX) > \frac{2}{3}$, e então

$\frac{2}{3} < \| cy + cix \| = \| c(y + ix) \| = \| y + ix \|$, $\forall x \in X$, isto é, $\frac{2}{3} < d(y,iX)$.

Pelo teorema de Hahn-Banach, existe $f \in Y^*$ tal que $\| f \| = 1$, $f(ix) = 0$, $\forall x \in X$ e $|f(y)| = d(y,iX) > \frac{2}{3}$; mas neste caso $i^{**}F(f) = F(i^*(f)) = F(f\circ i) = F(0) = 0$ e portanto $|f(y)| = |cy(f)| = |(cy - i^{**}F)(f)| \leqq \| cy - i^{**}F \| < \frac{1}{3}$; absurdo.

$\blacktriangle$

Lembremos que: (veja SBA pág 412), se γ é um ordinal, todo funcional linear contínuo em C^γ é da forma

$$x^*(x) = \sum_{\xi \leqq \gamma} a_\xi x(\xi), \ \forall x \in C^\gamma, \text{ onde } \|x^*\| = \sum_{\xi \leqq \gamma} \|a_\xi\| < \infty$$

Logo, podemos identificar $(C^\gamma)^*$ com $\ell_1[0,\gamma]$, o espaço de Banach de todas γ-sequências em $\mathbb{R}$ absolutamente somáveis.

E todo funcional linear contínuo em $\ell_1[0,\gamma]$ é da forma:

$$x^*(x) = \sum_{\xi \leqq \gamma} b_\xi a_\xi \text{, onde } x=(a_\xi)_{\xi \leqq \gamma} \text{ e } \sup_\xi \|b_\xi\| < \infty .$$

Logo, podemos identificar $(C^\gamma)^{**}$ com $\ell_\infty[0,\gamma]$, o espaço de Banach de todos γ-sequências reais e limitadas.

Definição: - Seja γ um ordinal qualquer e α um ordinal regular não enumerável; por $m_\alpha[0,\gamma]$ denotaremos o subespaço de $\ell_\infty[0,\gamma]$ constituido das funções f com a propriedade: para cada ordinal limite $\beta < \alpha$ e para cada β-sequência $(\lambda_\xi)_{\xi<\beta}$ de pontos em $[0,\gamma]$ que converge para $\lambda \in [0,\gamma]$, quando $\xi \longrightarrow \beta$, temos $\lim_{\xi\to\beta} f(\lambda_\xi)=f(\lambda)$.

Não é difícil ver que $m_\alpha[0,\gamma]$ é o subconjunto de $\ell_\infty[0,\gamma]$ das funções f contínuas em todos os pontos λ de $[0,\gamma]$, tais que existe um ordinal $\beta < \alpha$, β cofinal em λ. Logo, se $\alpha > \gamma$, então $m_\alpha[0,\gamma] = C^\gamma$; se $\gamma=\alpha$, devido a regularidade de α, $m_\alpha[0,\gamma]$ é o subconjunto de $\ell_\infty[0,\gamma]$ das funções f contínuas em $[0,\gamma)$.

Definição: - Seja γ um ordinal qualquer e α um ordinal regular não enumeravel; por Λ_γ^α denotaremos o subconjunto de $[0,\gamma]$ constituido de ordinais limites que não são limites de conjuntos de cardinalidade estritamente menor que $\bar{\alpha}$.

Lembremos que $C_0([0,\gamma])$, $(C_0(\Lambda_\gamma^\alpha))$ denotam o espaço de Banach das funções reais f, (g) definidas em $[0,\gamma]$, (Λ_γ^α) tais que para todo $\varepsilon > 0$ os conjuntos $\{\xi \in [0,\gamma] \mid |f(\xi)| > \varepsilon\}$, $(\{\xi \in \Lambda_\gamma^\alpha \mid |g(\xi)| > \varepsilon\})$ são finitos.

Lema 2.2. - Seja $g \in m_{\omega_1}[0,\gamma]$. Então para cada ordinal limite $\lambda \in [0,\gamma]$, existe o limite $\tilde{g}(\lambda) = \lim\limits_{\xi\to\lambda} g(\xi)$. Nós escrevemos $\tilde{g}(\lambda) = g(\lambda)$ para ordinais $\lambda \in [0,\gamma]$ não limites. A função $\tilde{g}$ é contínua e a função $h=g-\tilde{g}$ pertence a $C_0([0,\gamma])$.

Demonstração: - Se existe $\beta \in [0,\gamma]$ ordinal limite tal que não exista $\lim\limits_{\xi\to\beta} g(\xi)$, então $(g(\xi))_{\xi<\beta}$ não é de Cauchy; logo, podemos obter uma ω-sequência estritamente crescente de ordinais $\xi_1 < \xi_2 < \dots$ tal que $|g(\xi_{2i}) - g(\xi_{2i-1})| \geq \varepsilon$, $i=1,2,\dots$, para algum $\varepsilon > 0$. Seja $\beta_0 = \sup\limits_i \xi_i$; logo $\lim\limits_{i\to\omega} \xi_i = \beta_0$ e $\omega < \omega_1$, mas não existe $\lim\limits_{i\to\omega} g(\xi_i)$, o que é absurdo, pois $g \in m_{\omega_1}[0,\gamma]$.

$\tilde{g}$ é contínua em $[0,\gamma]$, pois caso contrário existiriam $\beta \in [0,\gamma]$, β ordinal limite e $\varepsilon > 0$, tal que para todo $\delta < \beta$, existe $\xi, \delta < \xi < \beta$ com $|\tilde{g}(\xi)-\tilde{g}(\beta)| > \varepsilon$.

Consideremos $L = \{\xi < \beta \mid \xi$ é ordinal limite$\}$. Temos:

1. Se $L = \emptyset$ ou se $\xi_0 = \sup L < \beta$, temos

$$\tilde{g}(\beta) \neq \lim_{\xi_0<\xi\to\beta} \tilde{g}(\xi) = \lim_{\xi_0<\xi\to\beta} g(\xi) = \lim_{\xi\to\beta} g(\xi) \quad ;$$

absurdo pela definição de $\tilde{g}$.

2. Se $\xi_0 = \sup L = \beta$; para cada $\xi \in L$, existe $O_\xi \in (\xi,\beta)$, com $|\tilde{g}(O_\xi) - \tilde{g}(\beta)| > \varepsilon$; pela definição de $\tilde{g}$, podemos supor sem perda de generalidade que O_ξ é ordinal não limite, logo

$$\tilde{g}(\beta) \neq \lim_{\substack{\xi\to\beta \\ \xi\in L}} \tilde{g}(O_\xi) = \lim_{\substack{\xi\to\beta \\ \xi\in L}} g(O_\xi) = \lim_{\Theta\to\beta} g(\Theta) \text{ ; absurdo}$$

pela definição de $\tilde{g}(\beta)$. Logo $\tilde{g}$ é contínua em $[0,\gamma]$.

Suponha que A_ε o conjunto dos ordinais limites β de $[0,\gamma]$, tais que $|\lim_{\xi\to\beta} g(\xi) - g(\beta)| \geqq \varepsilon$ fosse infinito para algum $\varepsilon > 0$. Então A_ε teria um ponto de acumulação e disto conseguiríamos uma ω-sequência estritamente crescente $\beta_1 < \beta_2 < \ldots$, com $\beta_i \in A_\varepsilon$ para todo $i < \omega$. Definindo $\beta_0 = \sup_{i<\omega} \beta_i$, teríamos $\lim_{i\to\omega} g(\beta_i) = g(\beta_0)$, pois $g \in m_{\omega_1}[0,\gamma]$. Por outro lado, como $\beta_i \in A_\varepsilon$, existiria $\xi_i \in (\beta_{i-1},\beta_i)$, para $i \geqq 2$ tal que $|g(\xi_i)-g(\beta_i)| \geqq \frac{\varepsilon}{2}$ (*).

Mas, então, teríamos $\lim_{i\to\omega} \xi_i = \lim_{i\to\omega} \beta_i = \beta_0$ e portanto $\lim_{i\to\omega} g(\xi_i) = g(\beta_0)$. Passando (*) ao limite, teríamos $0 = |g(\beta_0)-g(\beta_0)| \geqq \frac{\varepsilon}{2}$, o que é absurdo. Logo A_ε é finito, $\forall \varepsilon > 0$ e $h \in C_0([0,\gamma])$. $\triangle$

<u>Observação</u>: - Se α for um ordinal regular, com $\alpha \geqq \omega_1$ e $g \in m_{\omega_1}[0,\gamma]$, então valem as conclusões do lema 2.2., pois $m_\alpha[0,\gamma] \subset m_{\omega_1}[0,\gamma]$.

<u>Lema 2.3.</u> - Se α é um ordinal regular não enumerável, então $(C^\gamma)_\alpha = m_\alpha[0,\gamma]$, $\forall\gamma$.

<u>Demonstração</u>: - a) $(C^\gamma)_\alpha \subset m_\alpha[0,\gamma]$. Seja $F \in (C^\gamma)_\alpha$ e sejam $\beta < \alpha$ ordinal limite, $(\lambda_\xi)_{\xi<\beta}$ uma β-sequência em $[0,\gamma]$, tal que $\lim\limits_{\xi\to\beta} \lambda_\xi = \lambda$. Definamos $x^*_{\lambda_\xi} \in (C^\gamma)^*$ por: $x^*_{\lambda_\xi}(f) = f(\lambda_\xi)$, $\forall f \in C^\gamma$. Então, $x^*_{\lambda_\xi}$ pode ser identificado com o elemento de $\ell_1[0,\gamma]$ que é igual a 1 na coordenada de índice λ_ξ e 0 nas demais. Portanto, $\| x^*_{\lambda_\xi} \| = 1$, $\forall \xi$ e como $\lim\limits_{\xi\to\beta} \lambda_\xi = \lambda$, segue que

$\lim\limits_{\xi\to\beta}(x^*_{\lambda_\xi} - x^*_\lambda)(f) = \lim\limits_{\xi\to\beta} f(\lambda_\xi) - f(\lambda) = 0$, $\forall f \in C^\gamma$. Como $F \in (C^\gamma)_\alpha$, segue que $\lim\limits_{\xi\to\beta} F(x^*_{\lambda_\xi} - x^*_\lambda) = 0$, isto é, $\lim\limits_{\xi\to\beta} F(x^*_{\lambda_\xi}) = F(x^*_\lambda)$.

Sendo $(C^\gamma)_\alpha \subset (C^\gamma)^{**} = \ell_\infty[0,\gamma]$, segue que F pode ser considerada como uma função limitada, definida em $[0,\gamma]$ e que $F(x^*_{\lambda_\xi}) = F(\lambda_\xi) \longrightarrow F(x^*_\lambda) = F(\lambda)$, portanto $F \in m_\alpha[0,\gamma]$.

b) $m_\alpha[0,\gamma] \subset (C^\gamma)_\alpha$. Seja $g \in m_\alpha[0,\gamma]$, β um ordinal limite estritamente menor que α e $(r_\xi)_{\xi<\beta}$ uma β-sequência de $\ell_1[0,\gamma]$, limitada na norma e convergente a zero na C^γ-topologia. Provaremos que $\lim\limits_{\xi\to\beta} g(r_\xi) = 0$.

Sejam $\tilde{g}$ e h funções como no lema 2.2; uma vez que $\tilde{g} \in C^\gamma \subset (C^\gamma)_\alpha$, é suficiente mostrarmos que $\lim\limits_{\xi\to\beta} h(r_\xi) = 0$

Para isso, sejam $A = \{\lambda \in [0,\gamma] \mid h(\lambda) \neq 0\}$ e $B = \{\lambda \in [0,\gamma] \mid r_\xi(\lambda) \neq 0$ para algum $\xi < \beta\}$.

Então card $B < \bar{\alpha}$ (pois o suporte de cada r_ξ é enumerável, $\beta < \alpha$ e α é regular) e portanto nenhum ponto do conjunto A é ponto limite para B (pois, se $a \in A$, $(b_\xi)_{\xi<\beta} \in B$ e $(b_\xi)_{\xi<\beta}$ converge para a, quando $\xi \to \beta$, então pela definição de $m_\alpha[0,\gamma]$, segue que $\lim_{\xi\to\beta} g(b_\xi) = g(a) = \tilde{g}(a)$ e portanto $h(a) = 0$; absurdo).

Logo, cada ponto em $C = A \cap B$ é isolado no conjunto B e então, se $\lambda \in C$, existe $\delta < \lambda$, δ ordinal não limite tal que $(\delta,\lambda] \cap B = \{\lambda\}$, isto é, $r_\xi(\Theta) = 0$, $\forall\Theta$, $\delta < \Theta < \lambda$. Seja $f \in C^\gamma$ definida por: $f(\Theta) = 1$ se $\theta \leq \delta \leq \lambda$, $f(\Theta) = 0$ caso contrário.

Logo

$$r_\xi(f) = \sum_{\Theta\leq\gamma} r_\xi(\Theta)f(\Theta) = r_\xi(\lambda)$$

E consequentemente $\lim_{\xi\to\beta} r_\xi(\lambda) = \lim_{\xi\to\beta} r_\xi(f) = 0.$

Finalmente, seja $\varepsilon > 0$ e $C_1 = \{\lambda \in C \mid |h(\lambda)| \geq \varepsilon\}$. Pelo lema 2.2., C_1 é finito, portanto existe $\eta < \beta$ tal que $\overline{C}_1 |r_\xi(\lambda)| < \varepsilon$, $\forall\xi \geq \eta$ e $\lambda \in C_1$. Neste caso, temos:

$$|h(r_\xi)| = |\sum_{\lambda\in C} h(\lambda)r_\xi(\lambda)| \leq |\sum_{\lambda\in C_1} h(\lambda)r_\xi(\lambda)| + |\sum_{\lambda\notin C_1} h(\lambda)r_\xi(\lambda)|$$

$$\leq \sup_{\lambda\in C_1} |h(\lambda)|\cdot\varepsilon + \varepsilon\,\|r_\xi\|_1 \leq \varepsilon(\|h\|_\infty + \|r_\xi\|_1)$$

para $\xi > \eta$, o que prova b) e por conseguinte o lema. $\blacktriangle$

<u>Corolário 2.4.</u> - Seja γ um ordinal qualquer e α um ordinal regular não enumerável. Então o espaço $(C^\gamma)_\alpha \,/\, C^\gamma$ é isomorfo a $C_0(\Lambda^\alpha_\gamma)$.

<u>Demonstração</u>: - Sabemos que $(C^\gamma)_\alpha = m_\alpha[0,\gamma]$ (lema 2.3.), portanto é suficiente provarmos que $m_\alpha[0,\gamma] \,/\, C^\gamma \sim C_0(\Lambda^\alpha_\gamma)$. Identificando $C_0(\Lambda^\alpha_\gamma)$ como subespaço de $C_0([0,\gamma])$ através de:

$$f \in C_0(\Lambda_\gamma^\alpha) \longrightarrow f' \in C_0([0,\gamma]) \text{ , onde}$$

$$f'(\xi) = \begin{cases} f(\xi) & \text{se } \xi \in \Lambda_\gamma^\alpha \\ 0 & \text{se } \xi \notin \Lambda_\gamma^\alpha \end{cases}$$

Definimos $T: m_\alpha[0,\gamma] \longrightarrow C_0(\Lambda_\gamma^\alpha)$

$g \longrightarrow h = g - \tilde{g}$, onde

$\tilde{g}$ é dada no lema 2.2.

1) T está bem definida; pois se $\beta \notin \Lambda_\gamma^\alpha$ segue que $g(\beta) = \tilde{g}(\beta)$ (lema 2.2 e definição de $m_\alpha[0,\gamma]$) e portanto $h(\beta) = 0$. Como $h \in C_0([0,\gamma])$ (lema 2.2.), temos que $h \in C_0(\Lambda_\gamma^\alpha)$.

2) T é claramente linear e $\|T\| \leq 2$.

3) $g \in \operatorname{Ker} T \iff h = 0$, isto é, $g = \tilde{g}$, isto é, g é contínua em $[0,\gamma]$; logo $\operatorname{Ker} T = cC^\gamma$.

4) T é sobrejetora; pois dado $h \in C_0(\Lambda_\gamma^\alpha)$ tomemos $h' \in C_0([0,\gamma])$ pela identificação acima, e então claramente $h' \in m_\alpha[0,\gamma]$ (pois $h' = 0$ em pontos atingidos por sequências de cardinalidade menor que $\bar{\alpha}$) e $T(h') = h$.

Logo, vale o isomorfismo mencionado. $\blacktriangle$

<u>Lema 2.5.</u> - Card $\Lambda_\eta^\alpha = \eta'$, se $\eta = \alpha\eta' + \delta$, com $\delta < \alpha$, $\eta' \leq \alpha$ e α ordinal regular não enumerável.

<u>Demonstração</u>: - É claro que $\Lambda_\eta^\alpha = \Lambda_{\alpha\eta'}^\alpha$, pois se $\delta \neq 0$ e $\xi = \alpha\eta' + \delta_1$, com $0 < \delta_1 \leqq \delta$, δ_1 ordinal limite, então $\xi = \lim\limits_{\beta\to\delta_1} (\alpha\eta' + \beta)$ e portanto $\xi \notin \Lambda_\eta^\alpha$.

Seja $\xi \in [0,\alpha\eta']$. Então $\xi = \alpha\xi' + \delta_1$, com $\xi' \leqq \eta'$ e $0 \leqq \delta_1 < \alpha$.

Se $\delta_1 > 0$, então $\xi = \lim\limits_{\beta\to\delta_1} (\alpha\xi' + \beta)$ e portanto $\xi \notin \Lambda_{\alpha\eta'}^\alpha$.

Se $\delta_1 = 0$ e ξ' é ordinal não limite, com $\xi' > 0$, então $\xi = \alpha\xi' = \alpha(\xi'-1)+\alpha$ e portanto $\xi \in \Lambda_{\alpha\eta'}^\alpha$.

Se $\delta_1 = 0$ e ξ' é ordinal limite, com $\xi' < \alpha$, então $\xi = \lim\limits_{\beta\to\xi'} \alpha\xi'$ e portanto $\xi \notin \Lambda_{\alpha\eta'}^\alpha$.

Finalmente, se $\delta_1 = 0$ e $\xi' = \alpha$, isto é $\eta = \alpha^2$, afirmamos que $\alpha^2 \in \Lambda_{\alpha^2}^\alpha$. De fato, se $(\phi_\xi)_{\xi<\beta}$ é uma β-sequência, $\beta < \alpha$, com $\phi_\xi \longrightarrow \alpha^2$, quando $\xi \longrightarrow \beta$, então facilmente (por indução transfinita) obtemos um β-sequência $(\Theta_\xi)_{\xi<\beta}$ estritamente crescente de ordinais em $[0,\alpha)$ tal que $\alpha\Theta_\xi \longrightarrow \alpha^2$, quando $\xi \longrightarrow \beta$ e então $\Theta_\xi \longrightarrow \alpha$, quando $\xi \longrightarrow \beta$; o que é absurdo, pois α é regular.

Logo, Card $\Lambda_{\alpha\eta'}^\alpha$ é igual a cardinalidade dos pontos não limite em $[1,\eta']$, isto é $\bar{\eta}$. Logo o lema está demonstrado. Δ

<u>Demonstração do Teorema 2</u>. - Sejam $\alpha,\xi,\eta,\xi',\eta'$ como no enunciado do Teorema 2. A implicação 1º $\Longrightarrow$ 2º é trivial; 3º $\Longrightarrow$ 1º segue do lema 1.8; provaremos que 2º $\Longrightarrow$ 3º

Assumindo que $\bar{\xi}' < \bar{\eta}'$, mas que C^η é isomorfo a um subespaço de C^ξ, segue do Corolário 2.4 e do lema 2.1 que $C_0(\Lambda_\eta^\alpha)$ é isomorfo a um subespaço de $C_0(\Lambda_\xi^\alpha)$. Mas pelo lema 2.5, teríamos card $\Lambda_\eta^\alpha = \eta' > \bar{\xi}' =$ card Λ_ξ^α; absurdo, pois a densidade de $C_0(\Lambda_\xi^\alpha)$ é igual a card $\Lambda_\xi^\alpha = \xi'$ e então ele não pode ter subespaço isomorfo a $C_0(\Lambda_\eta^\alpha)$, uma vez que sua densidade é card $\Lambda_\eta^\alpha = \eta'$ e $\bar{\xi}' < \eta'$. Δ

III. Compactos homeomorfos aos intervalos de ordinais $[1,\alpha]$

<u>Definição</u>: - Um compacto K é 0-dimensional se tem uma base formada por conjuntos aberto-fechados.

<u>Observação</u>: - Um compacto K é 0-dimensional se, e somente se é totalmente desconexo, isto é, os únicos conjuntos conexos são os conjuntos unitários (Veja [SBA] pág. 421).

<u>Definição</u>: - Um conjunto $P \neq \emptyset$, $P \subset X$, X topológico, é perfeito se é fechado e não tem pontos isolados. Um compacto K é disperso se não contém subconjunto perfeito; caso contrário K é não disperso.

<u>Observação</u>: - Se K é um compacto disperso, então K é 0-dimensional (veja [SBA] pág. 412).

Esta propriedade topológica de K, ser ou não disperso, é determinante no estudo do C(K) como espaço de Banach; por exemplo:

Teorema 3.0. - Seja K um compacto, são equivalentes

1. K é disperso
2. C(K) não contém isometricamente todos os espaços de Banach separáveis
3. Todo subespaço fechado de dimensão infinita de C(K) contém isomorficamente $C_0(\mathbb{N})$
4. $\ell_1(\mathbb{N})$ não é isomorfo a nenhum subespaço de C(K)
5. $\mathbb{R}_2$, com a norma $\|(x,y)\| = (x^2+y^2)^{1/2}$, não é isométrico a nenhum subespaço de C(K)
6. O dual topológico de C(K) é isométrico à algum $\ell_1(\Gamma)$.

Para demonstração deste teorema, bem como mais 14 equivalências, veja [SBA], pág 411 (trabalhos de Pelczynski e Semadeni [P.S]; Lacey e Morris [L.M]).

Definição: - Seja A um subconjunto de um espaço topológico X. O derivado de A é o conjunto $A^{(1)}$ de todos os pontos de acumulação de A ; se α é um ordinal, definimos o α-ésimo derivado de A por indução transfinita, pondo:

$$A^{(0)} = A \ , \ A^{(\alpha+1)} = (A^{(\alpha)})^{(1)} \ ; \ A^{(\lambda)} = \bigcap_{\alpha<\lambda} A^{(\alpha)} \text{ se } \lambda \text{ é um}$$

ordinal limite.

É fácil ver (e usaremos isto implicitamente) que se A é subconjunto aberto e fechado do espaço topológico X e $x \in A$, então $x \in A^{(\alpha)} \iff x \in X^{(\alpha)}$, qualquer que seja α. E mais ainda, se $A \subset B \subset X$, então $A^{(\alpha)} \subset B^{(\alpha)}$ para todo α.

Teorema 3.1. (Cantor-Bendixon) - Seja A um espaço topológico. Então existe um ordinal α tal que $A^{(\alpha+1)} = A^{(\alpha)}$; mais ainda: $A = P \dot{\cup} S$ onde $P = A^{(\alpha)}$ e S é disperso. A é disperso $\Longleftrightarrow P=\emptyset$.

Demonstração: - Veja [SBA] pág. 416.

Logo, se K é disperso existe um menor ordinal β tal que $K^{(\beta)} = \emptyset$; β é um ordinal não limite (pois caso contrário, $K^{(\beta)}$ seria a intersecção de uma sequência decrescente de compactos não vazios $K^{(\gamma)}$, $\gamma < \beta$; absurdo), então $\beta = \alpha+1$ e $K^{(\alpha)}$ é finito, desde que não tem ponto de acumulação.

Definição: - Se K é um compacto disperso, o sistema característico de K é o par (λ,n) onde λ é o maior ordinal tal que $K^{(\lambda)} \neq \emptyset$ e n é a cardinalidade de $K^{(\lambda)}$.

Lema 3.2. - Seja ρ uma função contínua de um compacto K_1 sobre um compacto K_2. Então a inclusão $\rho(K_1^{(\alpha)}) \supset K_2^{(\alpha)}$ é satisfeita para todo ordinal α.

Demonstração: - Veja [SBA] pág 416.

Apresentaremos uma caracterização devida a Baker (veja [Ba]) dos compactos que são homeomorfos a $[0,\alpha]$ para algum ordinal α .

Lema 3.3. - Para cada ordinal λ, $[1,\omega^{\lambda}]^{(\lambda)} = \{\omega^{\lambda}\}$. Em particular, se n é um número natural, então card $[1,\alpha]^{(\lambda)} \geq n \Longleftrightarrow \alpha \geq \omega^{\lambda}.n$.

Demonstração: - Isto é claro para $\lambda=1$. Suponhamos que o lema seja verdadeiro para todo $\lambda < \gamma$.

Se γ não é ordinal limite, então

$[\omega^{\gamma-1}(n-1) , \omega^{\gamma-1}.n]^{(\gamma-1)} = \{\omega^{\gamma-1}.n\}$ e

$[1,\omega^{\gamma}] = \bigcup_{n=1}^{\infty}[\omega^{\gamma-1}(n-1) , \omega^{\gamma-1}.n] \cup \{\omega^{\gamma}\}$ logo

$[1,\omega^{\gamma}]^{(\gamma-1)} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{\omega^{\gamma-1}.n\} \cup \{\omega^{\gamma}\}$ (lembre-se que

$\lim_{n\to\omega} \omega^{\gamma-1}.n = \omega^{\gamma}$) e portanto $[1,\omega^{\gamma}]^{(\gamma)} = \{\omega^{\gamma}\}$.

Se γ é um ordinal limite e $\mu < \omega^{\gamma}$, então $\mu \in [1,\omega^{\alpha}]$ para algum $\alpha < \gamma$. Agora $[1,\omega^{\alpha}]$ é aberto em $[1,\omega^{\gamma}]$ e $[1,\omega^{\alpha}]^{(\alpha+1)}=\emptyset$, logo $[1,\omega^{\gamma}]^{(\gamma)} \subset \{\omega^{\gamma}\}$. Desde que $[1,\omega^{\gamma}]^{(\alpha)} \neq \emptyset$, $\forall\alpha < \gamma$, segue que $[1,\omega^{\gamma}]^{(\gamma)} \neq \emptyset$ e portanto $[1,\omega^{\gamma}]^{(\gamma)} = \{\omega^{\gamma}\}$. Δ

Lema 3.4. - Suponha que T é um compacto 0-dimensional e $t \in T$; se t possue um sistema fundamental de vizinhanças constituido de uma γ-sequência decrescente $(U_{\xi})_{\xi<\gamma}$; (isto é, se $\xi_1 < \xi_2 < \gamma$, então $U_{\xi_1} \supset U_{\xi_2}$) então existem um ordinal λ, sendo λ ordinal limite se γ o for e não limite se γ não o for, e um sistema fundamental de vizinhanças para t, constituido de uma λ-sequência decrescente $(G_{\xi})_{\xi<\lambda}$ formado de conjuntos aberto-fechados.

Demonstração: - Vê-se facilmente que γ é um ordinal não limite, se e somente se t é um ponto isolado e neste caso o lema é trivial. Podemos supor então que γ é um ordinal limite e t não é ponto isolado.

Usando indução transfinita construiremos uma família $(W_\xi)_{\xi<\gamma}$ tal que se $\tau < \gamma$ temos:

(1) para cada $\alpha < \tau$, ou $W_\alpha = U_\xi$ para algum $\xi \geqq \alpha$ ou $W_\alpha = W_\tau = \{t\}$.

(2) se $\alpha < \beta < \tau$ e $W_\alpha \neq \{t\}$, então $\overline{W_\beta} \subset \text{int } W_\alpha$.

De fato: seja $W_1 = U_1$. Suponha que $\tau < \gamma$ e W_α tem sido escolhido $\forall\alpha < \tau$. Seja $S = \{\xi < \gamma \mid U_\xi \subset W_\alpha, \forall\alpha < \tau\}$.

Se $S = \emptyset$, definimos $W_\tau = \{t\}$. Se $S \neq \emptyset$, seja μ o seu primeiro elemento. Então $U_\mu \subset W_\alpha$, $\forall\alpha < \tau$. Seja agora $\Theta \geqq \tau$ tal que $\overline{U_\Theta} \subset \text{int } U_\mu$. Se W_τ é definido por $W_\tau = U_\Theta$, é fácil ver que $(W_\xi)_{\xi<\tau+1}$ satisfaz (1) e (2).

Seja $L = \{\alpha \mid \alpha=\gamma \text{ ou } W_\alpha=\{t\}\}$ e λ o seu primeiro elemento. Então λ é um ordinal limite pois, se $\lambda=\gamma$ isto é óbvio; se $\lambda < \gamma$ é fácil ver que se $\alpha+1 \in L$, então $\alpha \in L$. Além disso $(W_\xi)_{\xi<\lambda}$ é um sistema fundamental de vizinhanças para t. Com efeito, dado $\xi_0 < \gamma$, deve existir ρ com $\xi_0 < \rho$ e $U_\rho = W_\xi$ para algum $\xi < \lambda$; caso contrário, sendo $\xi_1 = \sup\{\rho \mid U_\rho = W_\xi \text{ para algum } \xi < \lambda\} \leqq \xi_0 < \gamma$ temos $U_{\xi_1} \subset W_\xi$, $\forall\xi < \lambda$ (se $\xi < \lambda$ então $W_\xi = U_{\xi'}$ para algum $\xi \leqq \xi'$ e portanto $\xi' \leqq \xi_1$ e $U_{\xi'} \supset U_{\xi_1}$); por conseguinte deveríamos ter $W_\lambda \neq \{t\}$; absurdo.

Como $\overline{W_{\alpha+1}} \subset \text{int } W_\alpha$, $\forall\alpha < \lambda$; para cada s em $\overline{W_{\alpha+1}}$ existe um conjunto aberto e fechado $V_s \subset \text{Int } W_\alpha$, contendo s. Sejam $V_{s_1}, V_{s_2}, \ldots, V_{s_n}$ uma subcobertura finita desta cobertura. Definimos $G_\alpha = \bigcup_{i=1}^{n} V_{s_i}$; de $\overline{W_{\alpha+1}} \subset G_\alpha \subset \text{int } W_\alpha$, segue que $(G_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ é uma λ-sequência decrescente de conjuntos aberto-fechados que formam um sistema fundamental de vizinhanças para t. Δ

Teorema 3.5. - Seja T um compacto disperso com sistema característico (λ,n). Se cada ponto t em T possue um sistema fundamental de vizinhanças constituido de uma τ-sequência decrescente $(U_\alpha)_{\alpha<\tau}$, então existe uma função contínua de T sobre $[1,\omega^\lambda.n]$.

Demonstração: - Primeiramente notamos que se o enunciado do teorema é verdadeiro para $(\lambda,1)$, ele é também verdadeiro para (λ,n), onde n é um número natural. De fato: suponha que $T^{(\lambda)}$ tenha exatamente n pontos, digamos $t_0,t_1,\dots,t_{n-1}$, e que o teorema tenha sido estabelecido para $(\lambda,1)$; escrevendo T como a união disjunta de aberto-fechados U_i, $i=0,1,\dots,n-1$, onde $t_i \in U_i$ para cada i, e definindo as f_i de U_i sobre $(\omega^\lambda i,\omega^\lambda(i+1)]$ temos que $f\colon T \longrightarrow [1,\omega^\lambda.n]$ tal que $f|_{U_i} = f_i$, $i=0,1,\dots,n-1$ satisfaz o desejado.

Se S é um subespaço fechado de T com sistema característico $(0,1)$, então S é homeomorfo ao intervalo $[1,1]$ e neste caso temos o teorema.

Suponha que o teorema tenha sido provado para cada subconjunto fechado de T com sistema característico $(\gamma,1)$, onde $\gamma < \lambda$ e $\lambda \geqq 1$. Então como notamos acima, podemos assumir que o teorema tenha sido provado para cada subespaço fechado de T com sistema característico (γ,m) onde $\gamma < \lambda$ e $m < \omega$.

Seja S um subespaço fechado de T com sistema característico $(\lambda,1)$ e s_0 o único ponto de $S^{(\lambda)}$. Existe uma τ-sequência decrescente de subconjuntos $(U_\alpha)_{\alpha<\tau}$ de S formando um sistema funda

mental de vizinhança para s_0 e pelo lema 3.4 podemos supor que cada U_α é aberto e fechado. É conveniente escrevermos
$U_0 = S$ e $U_\tau = \emptyset$.

Desde que $\lambda \geq 1$, s_0 não é ponto isolado e portanto τ é um ordinal limite. Supondo que $W_\alpha = U_\alpha - U_{\alpha+1}$ tenha um sistema característico $(\lambda_\alpha, n_\alpha)$ (note que se $W_\alpha = \emptyset$, então $\lambda_\alpha \doteq n_\alpha = 0$), desde que $s_0 \notin W_\alpha$, $\lambda_\alpha < \lambda$; por hipótese, existe uma função contínua f_α de W_α sobre $[1, \omega^{\lambda_\alpha} n_\alpha]$; logo existe uma função contínua g_α de W_α sobre $(\sum_{\rho<\alpha} \omega^{\lambda_\rho}, \sum_{\rho\leq\alpha} \omega^{\lambda_\rho} n_\rho]$, $(\omega^{\lambda_0} n_0 = 1)$

Definimos funções h_α de $S-U_\alpha$ sobre $[1, \sum_{\rho<\alpha} \omega^{\lambda_\rho} n_\rho]$ para cada $\alpha < \tau$, com a propriedade que $\alpha < \beta$ implica $h_\beta|_{S-U_\alpha} = h_\alpha$.

De fato:

Seja $h_1 = g_0$. Suponha que h_α tenha sido definida para cada $\alpha < \beta$, onde β é um ordinal fixado, $\beta \leq \tau$.

Se β não é ordinal limite, então $h_{\beta-1}$ existe e definimos h_β por $h_\beta|_{S-U_{\beta-1}} = h_{\beta-1}$ e $h_\beta|_{W_{\beta-1}} = g_{\beta-1}$. Claramente h_β é a função desejada, desde que $S-U_\beta = (S-U_{\beta-1}) \dot{\cup} W_{\beta-1}$ e estes dois últimos conjuntos são aberto-fechados.

Agora, suponhamos que β é ordinal limite. Desde que $\mu < \alpha < \beta$ implica $h_\alpha|_{S-U_\mu} = h_\mu$, a função g definida por $g|_{S-U_\alpha} = h_\alpha$, $\forall \alpha < \beta$, é bem definida de $S_\beta = \bigcup_{\alpha<\beta} (S-U_\alpha)$ sobre $[1, \sum_{\alpha<\beta} \omega^{\lambda_\alpha} n_\alpha)$. Pois se $s \in S_\beta$, existe $\xi < \beta$ tal que $s \in S-U_\xi$ e $g(s) = h_\xi(s) \in [1, \sum_{\alpha<\xi} \omega^{\lambda_\alpha} n_\alpha) \subset [1, \sum_{\alpha<\beta} \omega^{\lambda_\alpha} n_\alpha)$.

Mais ainda, se $\delta \in [1, \sum_{\alpha<\beta} \omega^{\lambda_\alpha} n_\alpha)$, então $\delta \in [1, \sum_{\alpha<\xi} \omega^{\lambda_\alpha} n_\alpha)$ para algum $\xi < \beta$ e existe $s \in (S-U_\xi) \subset S_\beta$ tal que $g(s) = h_\xi(s)=\delta$.

Seja h_β definida por:

$$h_\beta(s) = \begin{cases} g(s) & \text{se } s \in S_\beta = S-(\bigcap_{\alpha<\beta} U_\alpha) \\ \\ \sum_{\alpha<\beta} \omega^{\lambda_\alpha} n_\alpha & \text{se } s \in (\bigcap_{\alpha<\beta} U_\alpha)-U_\beta . \end{cases}$$

O domínio de h_β é $S-U_\beta$. h_β é sobrejetora, pois se $(\bigcap_{\alpha<\beta} U_\alpha)-U_\beta \neq \emptyset$ isto é claro; caso contrário pela compacidade de S , existe $\xi_0 < \beta$ tal que $U_{\xi_0} = U_\beta$. Logo $\sum_{\alpha<\beta} \omega^{\lambda_\alpha} n_\alpha = \sum_{\alpha<\xi_0} \omega^{\lambda_\alpha} n_\alpha$ e $S-U_{\xi_0} = S-U_\beta$; portanto facilmente vê-se que $h_{\xi_0} = h_\beta$ e por hipótese de indução h_{ξ_0} é sobrejetora.

É óbvio que h_β é contínua em cada ponto de $S-(\bigcap_{\alpha<\beta} U_\alpha)$. Suponha que $s \in (\bigcap_{\alpha<\beta} U_\alpha)-U_\beta$ e $\{s_\mu\}_{\mu\in M}$ é um net em $S-U_\beta$ tal que $s_\mu \longrightarrow s$. Seja $\delta < \sum_{\alpha<\beta} \omega^{\lambda_\alpha} n_\alpha$; existe $\xi < \beta$ tal que $\delta < \sum_{\alpha<\xi} \omega^{\lambda_\alpha} n_\alpha$, então $\delta < h_\beta(t) < \sum_{\alpha<\beta} \omega^{\lambda_\alpha} n_\alpha$, para $t \in U_\xi-(\bigcap_{\alpha<\beta} U_\alpha)$. Mas para $t \in (\bigcap_{\alpha<\beta} U_\alpha)-U_\beta$, $h_\beta(t) = \sum_{\alpha<\beta} \omega^{\lambda_\alpha} n_\alpha$; desde que $s_\mu \longrightarrow s$, existe μ_0 tal que $s_\mu \in U_\xi-U_\beta$ para $\mu \geq \mu_0$ e portanto

$h_\beta(s_\mu) \in [\delta, \sum_{\alpha<\beta} \omega^{\lambda_\alpha} n_\alpha]$, $\forall \mu \geq \mu_0$ e assim $h_\beta(s_\mu) \longrightarrow h_\beta(s)$; isto mostra que h_β é contínua. Consequentemente h_α pode ser definida $\forall \alpha \leq \tau$.

Então h_τ é uma função contínua de S sobre $[1, \sum_{\alpha<\tau} \omega^{\lambda_\alpha} n_\alpha]$.

Agora, mostraremos que $\sum_{\alpha<\tau} \omega^{\lambda_\alpha} n_\alpha \geq \omega^\lambda$.

Se λ é um ordinal não limite, então $\lambda_\alpha = \lambda - 1$ para infinitos valores de α (caso contrário, devido a $(\bigcap_{\alpha<\tau} U_\alpha) - U_\tau = \{s_0\}$, teríamos $S^{(\lambda)} = \emptyset$) , logo $\sum_{\alpha<\tau} \omega^{\lambda_\alpha} n_\alpha = \lim_{\gamma<\tau} (\sum_{\alpha<\gamma} \omega^{\lambda_\alpha} n_\alpha) \geq \omega^{\lambda-1}.n$, $\forall n < \omega$, e portanto $\sum_{\alpha<\tau} \omega^{\lambda_\alpha} n_\alpha \geq \omega^\lambda$.

Se λ é um ordinal limite e $\gamma < \lambda$, existe $\rho < \tau$ tal que $\lambda_\rho > \gamma$ (caso contrário $S^{(\lambda)} = \emptyset$); logo $\sum_{\alpha<\tau} \omega^{\lambda_\alpha} n_\alpha \geq \omega^{\lambda_\rho} \geq \omega^\gamma$; desde que isto é verdade para todo $\gamma < \lambda$, $\sum_{\alpha<\tau} \omega^{\lambda_\alpha} n_\alpha \geq \omega^\lambda$ em ambos os casos.

Se $\sum_{\alpha<\tau} \omega^{\lambda_\alpha} n_\alpha > \omega^\lambda$, existe $\gamma < \tau$ tal que $\sum_{\alpha<\gamma} \omega^{\lambda_\alpha} n_\alpha > \omega^\lambda$ e desde que a função $h_\gamma : S - U_\gamma \longrightarrow [1, \sum_{\alpha<\gamma} \omega^{\lambda_\alpha} n_\alpha]$ é sobre, $(S-U_\gamma)^{(\lambda)} \neq \emptyset$ (isto pelos lemas 3.3. e 3.2.), o que é impossível ($s_0 \notin (S-U_\gamma)$).

Portanto $\sum_{\rho<\tau} \omega^{\lambda_\rho} n_\rho = \omega^\lambda$. Então h_τ é uma função de S sobre $[1,\omega^\lambda]$. Segue-se por indução transfinita que se S é um subespaço fechado de T com sistema característico (λ,n), existe uma função contínua de S sobre $[1,\omega^\lambda.n]$; o que prova o teorema. $\blacktriangle$

Um ponto t em T satisfaz (D), se t admite um sistema fundamental de vizinhanças constituido de uma τ-sequência decrescente $(U_\alpha)_{\alpha<\tau}$ de aberto-fechados com a propriedade adicional que $(\bigcap_{\alpha<\beta} U_\alpha) - U_\beta$ contém no máximo um ponto, para cada ordinal limite β.

Observação: - É fácil ver que cada intervalo de ordinais $[1,\alpha]$ e cada compacto 0-dimensional que admite em cada ponto um sistema fundamental enumerável de vizinhanças, satisfaz a propriedade (D) em cada um dos seus pontos.

Teorema 3.6. - Seja T um compacto disperso, com sistema característico (λ,n). Se T tem a propriedade (D) em cada um de seus pontos, então T é homeomorfo a $[1,\omega^{\lambda}.n]$.

Demonstração: - A prova deste teorema é identica à do teorema anterior, exceto que "função contínua" é substituida por "homeomorfismo" no andamento da prova. Notamos que em tal caso h_β é injetora devido a $(\bigcap_{\alpha<\beta} U_\alpha)-U_\beta \neq \emptyset$ implicar que esse conjunto é unitário, se β é um ordinal limite. Δ

Corolário 3.7. - Todo subespaço fechado F de $[1,\alpha]$ é homeomorfo a $[1,\xi]$ para algum $\xi \leq \alpha$.

Demonstração: - Sejam (λ,n) e (λ_1,n_1) os sistemas característicos de $[1,\alpha]$ e F respectivamente, donde, pelo teorema 3.6.,

$F \sim [1,\omega^{\lambda_1} n_1]$. Como $F \subset [1,\alpha]$, temos: $\lambda_1 < \lambda$ ou $\lambda_1=\lambda$ e $n_1 \leq n$, consequentmente $\omega^{\lambda_1} n_1 \leq \omega^{\lambda} n \leq \alpha$, e portanto basta tomarmos $\xi = \omega^{\lambda_1} n_1$. Δ

Corolário 3.8. (Semadeni) - Um compacto K disperso que admite em cada ponto um sistema fundamental enumerável de vizinhanças é metrizável; de fato K é homeomorfo à $[1,\omega^{\alpha}n]$, onde (α,n) é o sistema característico de K e $\alpha < \omega_1$.

Demonstração: - Desde que K satisfaz (D), ele é homeomorfo a $[1,\omega^{\alpha}n]$. Agora desde que $\omega_1 \notin [1,\omega^{\alpha}.n]$, pois facilmente vê-se que ω_1 não admite um sistema fundamental enumerável de vizinhanças, segue-se do teorema de metrização de Uryshon (veja [E.LL.] pág. 231) que K é metrizável. Δ

Corolário 3.9. (Mazurkiewicz e Sierpinski) - Todo compacto métrico enumerável é homeomorfo a um intervalo de ordinais $[1,\alpha]$, com $\alpha < \omega_1$.

Demonstração: - Desde que K é enumerável, ele é disperso (veja [S.B.A.] pág. 411) e como ele também é métrico, podemos usar o corolário 3.8. Δ

Cada ordinal $\lambda > 0$ tem uma única representação na forma $\lambda = \omega^{\gamma_1}a_1 + \omega^{\gamma_2}a_2 + \dots + \omega^{\gamma_k}a_k$, onde k e $a_1, a_2, \dots, a_k$ são números naturais e $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_k$ (veja [S] pág 323). Essa é chamada a forma normal de λ; o ordinal γ_1 é o grau dessa forma e a_1 é o coeficiente dominante.

Observação: - Pelo lema 3.3, se γ tiver por forma normal a expressão acima, então o sistema característico de $[1,\lambda]$ é (γ_1,a_1).

Corolário 3.10. - Suponha que α e β são ordinais. São equivalentes:

1) $[1,\alpha] \sim [1,\beta]$

2) $[1,\alpha]$ e $[1,\beta]$ têm o mesmo sistema característico (λ, n)

3) $\omega^\lambda n \leqq \alpha < \omega^\lambda(n+1)$ e $\omega^\lambda n \leqq \beta < \omega^\lambda(n+1)$

4) as formas normais de α e β tem grau λ e coeficiente dominante n.

Demonstração: $1 \Longleftrightarrow 2 \Longleftrightarrow 4$ segue do teorema 3.6. e da observação acima; $2 \Longleftrightarrow 3$ segue do seguinte fato, fácil de ser provado: se λ é um ordinal e $n < \omega$, então o primeiro intervalo de ordinais com o sistema característico (λ,n) é $[1,\omega^\lambda n]$. Δ

Corolário 3.11. - Sejam α e β ordinais, com $\alpha \leqq \beta$. São equivalentes:

1) $[1,\alpha] \sim [1,\beta]$

2) $(-\alpha+\beta)\omega \leqq \alpha$.

Demonstração: - É suficiente provarmos $[1,\alpha+\xi] \sim [1,\alpha] \Longleftrightarrow \xi\omega \leqq \alpha$. (onde $\xi = -\alpha+\beta$).

Seja (ρ,m) o sistema característico de $[1,\alpha]$, logo $\omega^\rho.m \leqq \alpha$; como por hipotese $[1,\alpha] \sim [1,\alpha+\xi] \sim [1,\alpha] \dot{\cup} [1,\xi]$ segue que $\xi < \omega^\rho$ (pois,$([1,\alpha] \dot{\cup} [1,\xi])^{(\rho)} = [1,\alpha]^{(\rho)} \dot{\cup} [1,\xi]^{(\rho)} =$ $= \{m \text{ pontos}\} \dot{\cup} [1,\xi]^{(\rho)}$ e portanto $[1,\xi]^\rho = \emptyset$).

Seja $\xi = \omega^{\gamma_1}a_1 + \omega^{\gamma_2}a_2 + \dots + \omega^{\gamma_k}a_k$, com $a_i < \omega$, $i=1,2,\dots,k$ e $\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_k$. Como $\xi < \omega^\rho$, segue que $\gamma_1 + 1 \leqq \rho$, logo:

$$\xi \leqq \omega^{\gamma_1}a_1 + \omega^{\gamma_1}a_2 + \dots + \omega^{\gamma_1}a_k$$

$$= \omega^{\gamma_1}(a_1 + a_2 + \dots + a_k) \quad \text{e portanto}$$

$$\xi\omega \leqq \omega^{\gamma_1}[(a_1 + a_2 + \dots a_k).\omega] = \omega^{\gamma_1}.\omega = \omega^{\gamma_1+1} \leqq \omega^\rho$$

$$\leqq \omega^\rho m \leqq \alpha .$$

Reciprocamente, suponha que $\xi\omega \leqq \alpha$; seja (μ,k) o sistema característico de $[1,\xi]$ e (ρ,m) o sistema característico de $[1,\alpha]$, então $\omega^\mu k \leqq \xi$ e $\omega^\rho m \leqq \alpha < \omega^\rho\, m{+}1$ e como $\xi\omega \leqq \alpha$, temos $\omega^{\mu+1} \leqq \xi.\omega \leqq \alpha$, portanto $\omega^{\mu+1} < \omega^\rho(m+1)$; consequentemente, $\mu+1 \leqq \rho$, donde $[1,\xi]^{(\rho)} \subset [1,\xi]^{(\mu+1)} = \emptyset$.

Observando que $([1,\alpha] \cup [1,\xi])^{(\rho)} = [1,\alpha]^{(\rho)} \dot{\cup} [1,\xi]^{(\rho)} =$ {m pontos} (já que $[1,\xi]^{(\rho)} = \emptyset$), segue que $[1,\alpha] \dot{\cup} [1,\xi]$, ou seja $[1,\alpha+\xi]$ tem sistema característico (ρ,m) e pelo teorema 3.6, concluimos que $[1,\alpha+\xi] \sim [1,\alpha]$. ∆

<u>Corolário 3.12.</u> - $C[1,\alpha] \equiv C[1,\beta]$ se, e somente se vale uma das equivalências dos corolários 3.10 ou 3.11.

<u>Demonstração:</u> - Segue imediatamente do teorema 1.1. do capítulo 0 ∆

IV. Aplicações

1. Do teorema 2 segue que $C[1,\omega_1] \not\sim C[1,\omega_1.2]$, mas obviamente

$$C[1,\omega_1.2] \sim C_0[1,\omega_1.2] \sim C_0[1,\omega_1] \oplus C_0[1,\omega_1] \sim C[1,\omega_1] \oplus C[1,\omega_1] \; ;$$

isto é, obtemos mais um espaço de Banach X, tal que $X^2 = X \oplus X \not\sim X$ (problema deixado por Banach e resolvido em [B.P-II] ; veja também [Se-I]).

2. Em [B.P-I] pág 59, define-se, para cada compacto k métrico enumerável infinito, $x(K)$, como sendo o menor ordinal γ tal que o γ-ésimo derivado $K^{(\gamma)}$ é vazio e indicando $X(K) = x(K)^{\omega}$ enunciam (pág. 59).

E1) Sejam K_1 e K_2 compactos métricos enumeráveis infinitos; então $C(K_1)$ é isomorfo a $C(K_2)$ se e somente se $X(K_1)=X(K_2)$. Em [O] também enunciam (pág. 267).

E2) Sejam k_1 e k_2 compactos métricos enumeráveis infinitos, com $x(K_1) \leq x(K_2)$; então $C(K_1)$ é isomorfo a $C(K_2)$ se e somente se existe $n < \omega$ tal que $x(K_2) \leq x(K_1)^n$.

É fácil ver que $E_1 \iff E_2$,

Pois, supondo $x(K_1) \leq x(K_2)$; se existe n tal que $x(K_2) \leq x(K_1)^n$, então $x(K_1)^p \leq x(K_2)^p \leq x(K_1)^{np}$, $p < \omega$ e fazendo $p \to \omega$, temos: $x(K_1)^{\omega} = x(K_2)^{\omega}$.

Por outro lado, se $x(K_1)^\omega = x(K_2)^\omega$, deve existir $n < \omega$ tal que $x(K_2) \leqq x(K_1)^n$, pois caso contrário $x(K_1)^n < x(K_2)$, $\forall n$ e fazendo $n \longrightarrow \omega$, temos: $x(K_1)^\omega \leqq x(K_2) < x(K_2)^\omega$.

Daremos um contra exemplo para o E_2 .

Seja $K_1 = [1,\omega^\omega]$ e $K_2 = [1,\omega^{\omega^2}]$, então pelo lema 3.3. do capítulo 1, $x(K_1) = \omega+1$ e $x(K_2) = \omega^2+1$ e pelo teorema 2.1. do capítulo 0, $C(K_1)$ não é isomorfo a $C(K_2)$, pois $(\omega^\omega)^\omega = \omega^{\omega^2}$; mas vale:

$$\omega^2+1 < \omega^2 + \omega^2 = \omega^2.2 < \omega^2.\omega = \omega^3 < (\omega+1)^3 \qquad \blacktriangle$$

Seja K_1 um compacto métrico enumerável infinito; pelo corolário 3.9, K_1 é isomorfo a um intervalo de ordinais $[1,\alpha]$, onde $\alpha = \omega^{\alpha_1}n$, $n < \omega$, com $\alpha_1 = \sup\{\beta\colon K^{(\beta)} \neq \emptyset\}$ e n é a cardinalidade de $K^{(\alpha_1)}$.

Se K_1 e K_2 são compactos métricos enumeráveis infinitos com $K_1 \sim [1,\alpha]$, onde $\alpha = \omega^{\alpha_1}n$ e $K_2 \sim [1,\beta]$, onde $\beta = \omega^{\beta_1}m$; e supondo $\alpha \leqq \beta$, temos pelo teorema 2.1. do capítulo 0, que $C(K_1)$ é isomorfo a $C(K_2)$ se e somente se $\beta < \alpha^\omega$, provaremos que isto ocorre se e somente se $\beta_1 < \alpha_1.\omega$.

<u>Lema 4.1.</u> - $1 \leqq n < \omega$ e $\alpha \geqq 1 \Longrightarrow n\omega^\alpha = \omega^\alpha$.

Demonstração: - Por indução transfinita: se $\alpha = 1$ é óbvio; e o lema segue de:

$$n\omega^{\beta+1} = (n\omega^{\beta})\omega = \omega^{\beta}.\omega = \omega^{\beta+1} \quad ; \quad e$$

$$n\omega^{\gamma} = \lim_{\beta<\gamma} n\omega^{\beta} = \lim_{\beta<\gamma} \omega^{\beta} = \omega^{\gamma} \text{ , se } \gamma \text{ é um ordinal}$$

limite. ▲

Lema 4.2. - $\alpha^{\omega} = \omega^{\alpha_1 . \omega}$

Demonstração: - Seja $1 \leq p < \omega$, então

$$\begin{aligned}(\omega^{\alpha_1})^p \leq (\omega^{\alpha_1}.n)^p &= \omega^{\alpha_1}.(n\omega^{\alpha_1})\dots(n\omega^{\alpha_1}).n \\ &= \omega^{\alpha_1}.\omega^{\alpha_1}\dots\omega^{\alpha_1}.n \\ &= \omega^{\alpha_1 . p}.n \\ &\leq \omega^{\alpha_1 . p}\omega^{\alpha_1} = \omega^{\alpha_1(p+1)}\end{aligned}$$

fazendo $p \longrightarrow \omega$, segue o lema 4.2. ▲

E finalmente

$$\beta < \alpha^{\omega} \iff \omega^{\beta_1}.n < \omega^{\alpha_1 . \omega} \iff \beta_1 < \alpha_1 . \omega$$

Se $K_1 \sim [1, \omega^{\alpha_1} n_1]$ como acima, denotaremos $\alpha_1 = S(K_1)$ e então temos provado:

Teorema 4.3. - Sejam K_1 e K_2 compactos métricos enumeráveis infinitos; então $C(K_1)$ é isomorfo a $C(K_2)$ se, e somente se $\max(S(K_1), S(K_2)) \leq \min(S(K_1).\omega \text{ , } S(K_2).\omega)$.

<u>Nota final</u>: - Quando esta dissertação já estava terminada, descobrimos que M.A. Labbé em Studia Math 52-3, Isomorphisms of continuous function spaces - (1975) já havia provado que a afirmação (E1) estava errada; ele dera o mesmo contra-exemplo que nós, além de provar o mesmo teorema 4.3. acima. É claro que ele nada mencionara quanto à afirmação (E2), posto que esta só apareceu em 1979 (em [O]). Ficamos, contudo, com a impressão de que Bessaga e Pelczynski não se cientificaram do artigo de Labbé, posto que a afirmação (E2) é evidentemente equivalente a (E1), e eles a escreveram em 1979, portanto, 4 anos após o artigo de Lalbé.

oOo

CAPÍTULO 2

ALGUNS TEOREMAS SOBRE COMPACTOS NÃO HOMEOMORFOS

Introdução

Neste capítulo estamos interessados em responder as seguintes perguntas:

1. Fixado um ordinal $m \geqq 2^{\aleph_0}$, quantos compactos, dois a dois não homeomorfos entre si, dessa cardinalidade, existem? Ou equivalentemente (teorema 1.1 do capítulo 0), quantos $C(K)$, dois a dois não isométricos entre si, existem, tal que $|K| = m$?

2. Vimos (proposição 1.3. do capítulo 0) que existem exatamente $2^{\aleph_0}$ compactos métricos dois a dois não homeomorfos entre si. Será que podemos achar tal quantidade de compactos, dois a dois não homeomorfos entre si, no intervalo $[0,1]$ da reta real? E no conjunto de Cantor?

Começaremos lembrando: Se X é um espaço topológico, o peso de X, denotado $\omega(X)$, é o menor cardinal para o qual existe uma base de abertos em X, com cardinalidade $\omega(X)$.

<u>Lema 0.1.</u> - Se K é um espaço topológico compacto, então $\omega(K) \leq |K|$.

<u>Demonstração</u>: - O resultado é imediato, se K for finito. Suponhamos então K infinito.

Seja $x \in K$. Para cada $y \in K-\{x\}$, $K-\{y\}$ é uma vizinhança de x, logo existe V_y uma vizinhança aberta de x tal que $\overline{V}_y \subset K-\{y\}$.

Consideramos o conjunto A_x das intersecções finitas de elementos de $\{\overline{V}_y \mid y \in K-\{x\}\}$.

Seja O um aberto ao qual x pertença e suponhamos que O não contém nenhuma intersecção finita do tipo acima. Então qualquer uma dessas intersecções finitas têm pontos de $K-O$, donde $\{\overline{V}_y \cap (K-O) \mid y \in K-\{x\}\}$ tem a propriedade de que toda intersecção finita de seus elementos é não vazia. Como K é compacto, temos: $\bigcap_{y \in K-\{x\}} \overline{V}_y \cap (K-O) \neq \emptyset$; absurdo, pois

$\bigcap_{y \in K-\{x\}} \overline{V}_y = \{x\}$ e $x \notin K-O$.

Mostramos, assim, que $\mathcal{U}_x = \{V_y \mid y \in K-\{x\}\}$ forma um sistema fundamental de vizinhanças abertas para x. Claramente a cardinalidade de $\mathcal{U}_x$ é menor ou igual a $|K|$, e então $\beta = \bigcup_{x \in K} \mathcal{U}_x$ forma uma base de abertos de K, com cardinalidade menor ou igual a $|K|$ (pois $|K|$ é infinito) e portanto $\omega(K) \leq |K|$.

Δ

<u>Teorema 0.2</u>. - Se K é um espaço topológico compacto, com $\omega(K) \leq m$, então K é homeomorfo a um subconjunto de $[0,1]^m$, com a topologia produto.

Demonstração: - Veja [Se-I] pág. 105. ▲

Proposição 0.3. - Se K é um espaço topológico compacto, com $|K| = m$, então K é homeomorfo a um subconjunto de $[0,1]^m$, com a topologia produto.

Demonstração: - Segue imediatamente do teorema anterior e do lema 0.1 ▲

Corolário 0.4. - Existem no máximo 2^{2^m} compactos, de cardinalidade m, dois a dois não homeomorfos entre si.

Demonstração: - Pela proposição acima é suficiente mostrarmos que em $[0,1]^m$ não existem mais que 2^{2^m} conjuntos fechados e distintos dois a dois. Isto é claro, pois o conjunto de todas as partes de $[0,1]^m$ tem cardinalidade 2^{2^m}. ▲

I. Compactos de cardinalidade $m \geq 2^{\aleph_0}$, dois a dois não homeomorfos entre si

Teorema 1.1. - Seja $m \geq 2^{\aleph_0}$; existem exatamente 2^{2^m} compactos de cardinalidade m, dois a dois não homeomorfos entre si.

Demonstração: - Seja α o primeiro ordinal de cardinalidade m e $\gamma \leq \alpha$. Indicaremos por L_γ a reta longa dada pelo ordinal γ, isto é: entre cada par de ordinais consecutivos α e $\alpha+1$, com $\alpha < \gamma$, interpolamos uma cópia homeomorfa do intervalo $[0,1]$, identificando o ponto 0 com α e o ponto 1 com $\alpha+1$. L_γ é então totalmente ordenada e sempre a suporemos com a topologia induzida pela ordem.

Seja $(i_\xi)_{0\leqq\xi\leqq\sigma}$ uma σ-sequência de números 0 e 1, onde $i_\beta = 0$ se β é um ordinal limite, $i_0 = 1$ e se β não for ordinal limite ($\beta \neq 0$), i_β pode ser escolhido igual a 0 ou 1.

Para cada ordinal $\xi > 1$ não limite, tal que $i_\xi = 0$ (resp. $i_\xi=1$), associamos uma cópia homeomorfa da bola unitária e fechada do $\mathbb{R}_2$ (resp. $\mathbb{R}_3$), B_ξ . B_0 será uma cópia homeomorfa da bola unitária e fechada do $\mathbb{R}_4$. Tomamos um ponto $P_\xi \in B_\xi$, $0 \leqq \xi < \sigma$ (supomos: $\beta_1 \neq \beta_2 \Longrightarrow B_{\beta_1} \cap B_{\beta_2} = \emptyset$ e $L_\sigma \cap B_\xi = \emptyset$, $\forall\xi < \sigma$).

Definiremos, agora, espaços topológicos $K_\gamma = K_{(i_\xi)_{0\leqq\xi\leqq\gamma}}$, $\gamma \leqq \sigma$.

Identificando cada P_ξ com o ordinal ξ em L_γ. Definimos como sistema fundamental de vizinhanças para os ordinais limites η, $\eta \leqq \gamma$, os conjuntos da forma
$V_\rho = \{x \in L_\gamma \mid \rho < x \leqslant \eta\} \cup \{\bigcup_{\rho+1<\xi<\gamma} B_\xi\}$, $\rho < \eta$. Os sistemas fundamentais de vizinhanças para os ordinais não limites η, $\eta \leqq \gamma$, são os conjuntos da forma: $V \cup W$, onde V é uma vizinhança de η em L_γ e W é uma vizinhança de P_η em B_η . As vizinhanças de pontos em L_γ, que não são ordinais, são as suas vizinhanças nos intervalos homeomorfos a $(0,1)$ a que pertencem. E finalmente, se $x \in K_\gamma$, com $x \in B_\eta - L_\gamma$ para algum $0 \leqq \eta \leqq \gamma$, as vizinhanças de x são dadas pelas vizinhanças de x em B_η.

Provaremos que os espaços topológicos K_γ assim definidos (claramente eles são T_2) são compactos; faremos isto por indução transfinita.

Se $\gamma = 1$, isto é claro. Supondo que cada K_γ, $\gamma < \alpha$, $\alpha \leqq \sigma$ é compacto, temos:

Se α é ordinal não limite, então claramente $K_\alpha = K_{\alpha-1} \cup \{x \in L_\sigma \mid \alpha-1 \leqq x \leqq \alpha\} \cup B_\alpha$, onde P_α é idenficado com α e portanto facilmente se vê que K_α é compacto.

Se α é ordinal limite, seja $(O_s)_{s\in S}$ uma cobertura por abertos de K_α. Logo $\alpha \in O_{s_0}$ para algum $s_0 \in S$, e então existe um ordinal $\rho \in L_\alpha$ tal que $V_\rho \subset O_{s_0}$; por hipótese $K_{\rho+1}$ é compacto, consequentemente existem $s_1, s_2, \dots, s_n \in S$ tal que

$K_{\rho+1} \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_{s_i}$ e portanto $K_\alpha \subset \bigcup_{i=0}^{n} O_{s_i}$, isto é, K_α é compacto.

Afirmação: Os K_γ, $\gamma \leqq \sigma$ são conexos; novamente usaremos indução transfinita.

Se $\gamma=1$, isto é claro. Supondo que cada K_γ, $\gamma < \alpha$, $\alpha \leqq \sigma$ é conexo, temos:

Se α é ordinal não limite, então claramente $K_\alpha = K_{\alpha-1} \cup \{x \in L_\sigma \mid \alpha-1 \leqq x \leqq \alpha\} \cup B_\alpha$, onde P_α é identificado com α e portanto facilmente se vê que K_α é conexo.

Se α é ordinal limite; lembrando que a componente conexa de um ponto P, denotada c(P), num espaço topológico é fechada e é a união dos conjuntos conexos que o contém e obser vando que por hipótese, $\forall\gamma < \alpha$, K_γ é um conexo em K_α, que contém o ponto 0, temos: $K_o = \bigcup_{\gamma<\alpha} K_\gamma \subset c(0)$ e portanto $c(0)=K_o$; em particular K_o é conexo.

Afirmamos que $K_{(i_\xi)_{0\leq\xi\leq o}} \sim K_{(J_\xi)_{0\leq\xi\leq o}}$ se, e somente se $i_\xi = J_\xi$, $\forall 0 \leq \xi \leq o$. Para simplificar indicaremos o primeiro compacto por C_1 e o segundo por C_2. Seja f um homeomorfismo entre esses compactos. Observemos que:

1. O ponto 0 é o único ponto p em C_1 (resp C_2) com a propriedade: toda vizinhança de P em C_1 (resp. C_2) contém um subconjunto homeomorfo a um aberto do $\mathbb{R}_4$.

2. Os pontos de L_γ, que não são ordinais, são os únicos pontos p em C_1 (resp. C_2) com a propriedade: toda vizinhança de p contém um subconjunto homeomorfo a um aberto de $\mathbb{R}$.

Sendo estas propriedades conservadas por homeomorfismos, temos $f(0) = 0$ e $f(L_\gamma - A) = L_\gamma - A$, onde A é o conjunto de ordinais em L_γ. E portanto $f(A) = A$. Provaremos (por indução transfinita) que $f(\xi) = \xi$, $\forall \xi \in A$.

Sabemos que $f(0) = 0$. Supondo que $f(\xi) = \xi$, $\forall \xi < \alpha$, $\alpha > 0$, $\alpha < o$.

Se α é ordinal não limite. Por hipótese $f(\alpha-1) = \alpha-1$ e já vimos que $f(\alpha) = \beta$ para algum ordinal β.

Como $(\alpha-1,\alpha) \subset L_\gamma$ é homeomorfo a $(0,1)$ da reta, $(\alpha-1,\alpha)$ não contém pontos p com a propriedade: toda vizinhança de p contém um subconjunto homeomorfo a um aberto de $\mathbb{R}_3$ ou $\mathbb{R}_2$;

temos que $f(\alpha-1,\alpha)$ está contido num dos intervalos intercalados em $[0,\sigma]$ para a obtenção de L_σ. Mas $\alpha-1$ e $\beta \in f(\alpha-1,\alpha)$, com $\beta \geqq \alpha$, logo $f(\alpha-1,\alpha) = (\alpha-1,\beta)$ e $\beta = \alpha$.

Se α é ordinal limite, então $f(\alpha) = \lim\limits_{\substack{\xi\to\alpha \\ \xi<\alpha}} f(\xi) = \lim\limits_{\substack{\xi\to\alpha \\ \xi<\alpha}} \xi = \alpha$.

Seja agora, $0 \leqq \beta < \sigma$ tal que $i_\beta = 1$. Logo $\beta \in L_\sigma$ em C_1 satisfaz a propriedade: toda vizinhança de β contém um subconjunto homeomorfo a um aberto do $\mathbb{R}_3$. E portanto $\beta \in L_\sigma$ em C_2 também a satisfaz; logo, necessariamente $J_\beta = 1$. Concluimos que $i_\beta = j_\beta$, $\forall \beta$, $0 \leqq \beta \leqq \sigma$.

Como existem 2^m σ-sequências $(i_\beta)_{0\leqq\beta\leqq\sigma}$ como acima, pois a cardinalidade dos pontos isolados em $[0,\sigma]$ é igual a m (considere $\xi \in [0,\sigma) \longrightarrow (\xi+1) \in [0,\sigma))$; temos construido até o momento 2^m compactos conexos de cardinalidade m, dois a dois não homeomorfos entre si. Um argumento análogo ao usado na demonstração da proposição 1.3 do capítulo 0, mostra a existência de 2^{2^m} compactos de cardinalidade m, dois a dois não homeomorfos entre si, e o teorema 1.1 segue do corolário 0.4.

<u>Observações</u>: - 1. Se K é compacto enumerável infinito, então K é metrizável (veja [SBA] pág. 419). Logo pelo corolário 3.9 do capítulo 1, K é homeomorfo a um intervalo de ordinais $[1,\omega^\gamma.n]$, $\gamma < \omega_1$ e $n < \omega$ e portanto existem exatamente $\aleph_1$ compactos de cardinalidade $\aleph_0$, dois a dois não homeomorfos entre si. (pois, pelo corolário 3.10 do capítulo 1, dois compactos $[1,\omega^\gamma n]$ e $[1,\omega^{\gamma'} n']$ são homeomorfos se e somente se $\gamma = \gamma'$ e $n = n'$.

2. Se K é compacto não disperso, então existe uma função contínua de K sobre [0,1] da reta real (veja [S.B.A.] pág. 411) e consequentemente $|K| \geq 2^{\chi_0}$.

Mas existem pelo menos 2^{χ_α} compactos, de cardinalidade χ_α, dispersos dois a dois não homeomorfos entre si, se $\alpha \geq 1$. De fato:

Seja Γ um conjunto com a topologia discreta, tal que $|\Gamma| = \chi_\alpha$. Sendo $\gamma(\Gamma)$ o compactificado de Alexandrov de Γ, consideramos $(T_\xi)_{1 \leq \xi < \omega_\alpha}$, cada T_ξ sendo uma cópia homeomorfa de $\gamma(\Gamma)$, que suporemos duas a duas disjuntas entre si e tais que $T_\xi \cap [0,\omega_\alpha] = \emptyset$, $\forall\ 1 \leq \xi < \omega_\alpha$.

Seja $(i_\xi)_{1 \leq \xi < \omega_\alpha}$ uma ω_α-sequência de números 0 ou 1. Colocando $i_{\omega_\alpha} = 0$;, definiremos por indução transfinita espaços topológicos K_ξ, $1 \leq \xi < \omega_\alpha$.

Se $i_1 = 0$, $K_1 = [0,\omega]$.

Se $i_1 = 1$, $K_1 = [0,\omega] \cup T_1$, onde identificamos ω com o ponto no infinito em T_1 e definimos como sistema fundamental de vizinhanças de ω, os conjuntos da forma: $(\xi_1,\omega) \cup V$, onde V é uma vizinhança do ponto infinito em T_1 e $\xi_1 < \omega$.

Supondo definidos compactos K_ξ, $\xi < \beta$, $\beta \leq \omega_\alpha$, definiremos agora K_β.

Se β é ordinal não limite, pomos:

Se $i_\beta = 0$, $K_\beta = K_{\beta-1} \cup (\omega^{\beta-1},\omega^\beta]$

Se $i_\beta = 1$, $K_\beta = K_{\beta-1} \cup (\omega^{\beta-1},\omega^\beta] \cup T_\beta$, onde identificamos ω^β com o ponto no infinito de T_β e definimos como sistema fundamental de vizinhanças de ω^β , os conjuntos da forma: $(\xi_1,\omega^\beta] \cup V$, onde V é uma vizinhança do ponto infinito em T_β e $\xi_1 < \omega^\beta$.

Se β é ordinal limite, pomos:

Se $i_\beta = 0$, $K_\beta = \bigcup_{\xi<\beta} K_\xi \cup \{\omega^\beta\}$, onde definimos como sistema fundamental de vizinhanças de ω^β, os conjuntos da forma: $(\xi_1,\omega_\beta] \cup \{T_\xi \mid T_\xi \subset K_\xi \ , \ \xi_1 < \omega^\xi < \omega^\beta\}$.

Se $i_\beta = 1$, $K_\beta = \bigcup_{\xi<\beta} K_\xi \cup \{\omega^\beta\} \cup T_\beta$, onde identificamos o ponto ω^β com o ponto limite de T_β e definimos como sistema fundamental de vizinhanças de ω^β, os conjuntos da forma: $(\xi_1,\omega^\beta] \dot{\cup} \{T_\xi \mid T_\xi \subset K_\xi$ e $\xi_1 < \omega^\xi < \omega^\beta\} \cup V$, onde V é uma vizinhança do ponto infinito em T_β .

Não é difícil ver (basta usar indução transfinita) que cada um desses espaços topológicos K_ξ é compacto e que K_{ω_α} tem cardinalidade $\aleph_\alpha$.

Para toda ω_α-sequência $(i_\xi)_{1\leq\xi<\omega_\alpha}$ como acima (que são em quantidade de $2^{\aleph_\alpha}$) associamos o compacto $L_{(i_\xi)_{1\leq\xi<\omega_\alpha}} = K_{\omega_\alpha}$.

Afirmação: $\quad L_{(i_\xi)_{1\leq\xi<\omega_\alpha}} \sim L_{(J_\xi)_{1\leq\xi<\omega_\alpha}} \iff i_\xi = J_\xi \ , \ \forall\, 1 \leq \xi < \omega_\alpha$.

De fato.

Observemos que para $\xi > 0$, ω^ξ é o único ponto x de $L_{(i_\xi)_{1\leq\xi<\omega_\alpha}}$ que satisfaz a propriedade: x pertence a todos os derivados de ordem menor ou igual a ξ e não pertence ao derivado de ordem $\xi + 1$ (pelo lema 3.3 do capítulo 1 e lembrando que os pontos de $(T_\gamma)_{1\leq\gamma<\omega_\alpha}$ que não foram identificados com ordinais são isolados). Além disso $i_\xi = 1$, se e somente se em toda vizinhança de ω^ξ existe um conjunto de pontos isolados de cardinalidade $\aleph_\alpha$ que contém ω^ξ como único ponto de acumulação. De fato: se $i_\xi = 1$, basta tomarmos a vizinhança do ponto infinito de T_ξ contida na vizinhança dada. Se $i_\xi = 0$ temos:

1. Se ξ não é ordinal limite, então a vizinhança $(\omega^{\xi-1},\omega^\xi]$ de ω^ξ não tem a propriedade acima, pois $\text{card}(\omega^{\xi-1},\omega^\xi] < \aleph_\alpha$. (aqui usamos $\alpha \geq 1$).

2. Se ξ é ordinal limite, $\xi < \omega_\alpha$, então a vizinhança $[0,\omega^\xi] \cup \{T_\gamma \mid i_\gamma = 1 \text{ e } \gamma < \xi\}$ de ω^ξ também não tem a propriedade acima, pois a cardinalidade dos pontos isolados em $[0,\omega^\xi]$ é estritamente menor que $\aleph_\alpha$ e então qualquer conjunto A de pontos isolados, com cardinalidade $\aleph_\alpha$, dessa vizinhança deve ter infinitos pontos em algum dos T_γ (pois a união de $\aleph_\alpha$ conjuntos finitos é de cardinalidade $\aleph_\alpha$) e portanto o ponto no infinito de T_γ , isto é, ω^γ é de acumulação de A.

Como essas duas propriedades de ω^ξ são conservadas por homeomorfismos, a afirmação segue imediatamente.

II. Subespaços compactos de [0,1] e subespaços compactos do conjunto de Cantor

Teorema 2.1. - Existem exatamente $2^{\aleph_0}$ subconjuntos compactos dois a dois não homeomorfos entre si no intervalo [0,1] da reta real.

Precisamos de alguns lemas.

Seja K um compacto. Podemos escrever $K = P \dot{\cup} S$, onde P é perfeito e S é disperso (como no teorema 3.1 do capítulo 1). Dizemos que um ponto $x \in K$ é de ordem α, se $x \in P$,

$x \notin \overline{S^{(\alpha)}}$, mas $x \in \overline{S^{(\xi)}}$, $\forall \xi < \alpha$.

Sejam K_1 e K_2 compactos e $f: K_1 \longrightarrow K_2$ um homeomorfismo. Escrevendo $K_1 = P \dot{\cup} S$ e $K_2 = Q \dot{\cup} R$, como acima, temos:

<u>Lema 2.2.</u> - a) Se $X \subset K_1$, então $f(X^{(\alpha)}) = f(X)^{(\alpha)}$, $\forall \alpha$.

b) $f(P) = Q$

c) $f(S) = R$

<u>Demonstração:</u> - a) segue facilmente por indução transfinita.
b) Lembrando que P é definido como sendo $K_1^{(\beta)}$, onde β é o menor ordinal tal que $K_1^{(\beta)} = K_1^{(\beta+1)}$, de a) segue que o menor ordinal ξ, com $K_2^{(\xi)} = K_2^{(\xi+1)}$ é β; logo, $Q = K_2^{(\beta)}$ e portanto $f(P) = f(K_1^{(\beta)}) = f(K_1)^{(\beta)} = K_2^{(\beta)} = Q$. c) segue imediatamente de b). $\blacktriangle$

<u>Lema 2.3.</u> - x é ponto de ordem α de K_1 se, e somente se f(x) é ponto de ordem α de K_2.

<u>Demonstração:</u> - Segue de (usando o lema 2.2):

$$x \in P \cap [\bigcap_{\xi<\alpha} \overline{S^{(\xi)}} - \overline{S^{(\alpha)}}] \iff f(x) \in Q \cap [\bigcap_{\xi<\alpha} \overline{R^{(\xi)}} - \overline{R^{(\alpha)}}].$$

<u>Prova do teorema 2.1.</u> - É suficiente exibirmos $2^{\aleph_0}$ de tais compactos (veja proposição 1.3. do capítulo 0). Definimos por indução finita, uma sequência de compactos $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $[0,1]$.

$K_1 = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Supondo definido K_m ; K_{m+1} é definido colocando entre dois pontos consecutivos de K_m, $\{a,b\}$ com $a < b$, uma cópia da sequência $\{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n\in\mathbb{N}}$; isto é, uma sequência estritamente decrescente, contida em $[a,b]$ e convergindo para a.

Não é difícil de ver que cada K_n é homeomorfo ao intervalo de ordinais $[0,\omega^n]$, $n = 1,2,\dots$, então pelo lema 3.3. do capítulo 1 $K_n^{(n)} = \{0\}$

Seja, agora, $(i_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência arbitrária de números 0 e 1 e $n \in \mathbb{N}$. Consideremos um compacto enumerável F_n contido no intervalo $[\frac{1}{2n+1} , \frac{1}{2n}]$ cujo $2n+i_n$-ésimo derivado é o $\{\frac{1}{2n+1}\}$ (repita a construção feita acima para a obtenção dos K_n) e denotemos por I_n o intervalo $[\frac{1}{2n+2} , \frac{1}{2n+1}]$. É fácil ver que os pontos $\{\frac{1}{2n+1}\}$, $n=1,2,\dots$ são os únicos pontos de ordem finita no compacto

$$F_{i_1,i_2,\dots} = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty}[F_n \cup I_n] ,$$

onde o ponto $\{\frac{1}{2n+1}\}$ tem ordem $2n+i_n+1$

Do lema 2.3. segue que $F_{i_1,i_2,\dots} \sim F_{J_1,J_2,\dots}$ se e somente se $i_n = J_n$, $\forall n$. Como existem $2^{\aleph_0}$ sequências desse tipo, o teorema está provado. ▲

Observação: - Se ao invés de tomarmos os I_n, como acima, tomamos um conjunto de Cantor C_n em $[\frac{1}{2n+2}, \frac{1}{2n+1}]$, com extremidades em $\frac{1}{2n+2}$ e $\frac{1}{2n+1}$, de maneira análoga ao teorema anterior, vê-se que os $F_{i_1, i_2 \ldots}$ assim obtidos são dois a dois não homeomorfos entre si e são homeomorfos a subespaços compactos do conjunto de Cantor (lembremos que todo compacto 0-dimensional métrico é subespaço do conjunto de Cantor (Veja [Se-I] pág. 142)) e então temos:

Teorema 2.4. - Existem exatamente $2^{\aleph_0}$ subconjuntos compactos, dois a dois não homeomorfos entre si, no conjunto de Cantor.

III - Compactos K de cardinalidade $\aleph_\alpha$, com C(K) dois a dois não isomorfos entre si.

Teorema 3.1. - Existem pelo menos $\aleph_{\alpha+1}$ compactos K, de cardinalidade $\aleph_\alpha$, tais que C(K) são dois a dois não isomorfos entre si.

Demonstração: - Definiremos ordinais $(O_\gamma)_{1 \leq \gamma < \omega_{\alpha+1}}$ por indução transfinita.

$O_1 = \omega_\alpha^\omega$. Supondo definidos $(O_\gamma)_{1 \leq \gamma < \xi}$, $\xi < \omega_{\alpha+1}$.

Se ξ é ordinal não limite, definimos $O_\xi = (O_{\xi-1})^\omega$.

Se ξ é ordinal limite, colocamos $i_\xi = \sup\limits_{\gamma < \alpha} O_\gamma$ e definimos $O_\xi = i_\xi^\omega$.

É fácil ver que $\xi_1 < \xi_2 \Longrightarrow 0_{\xi_1} < 0_{\xi_2}$ e $0^{\omega}_{\xi_1} \leq 0_{\xi_2}$. Logo, pelo lema 0.4 do capítulo 1, $C[0,0_{\xi_1}] \not\sim C[0,0_{\xi_2}]$. Por indução transfinita em γ e usando que $\omega_{\alpha+1}$ é um ordinal regular e que $\overline{\beta^{\omega}} = \overline{\beta}$, se $\beta \geq \omega$, segue-se facilmente que $\overline{0}_{\gamma} = \aleph_{\alpha}$, $\forall\ 1 \leq \gamma < \omega_{\alpha+1}$ e assim o teorema está provado. Δ

Observemos que os compactos utilizados na demonstração do teorema anterior são dispersos. Pois bem, não conseguimos mostrar a existência de infinitos compactos K, não dispersos, com $|K| = 2^{\aleph_0}$ e C(K) dois a dois não isomorfos entre si.

O nosso orientador nos sugeriu que começássemos então, a estudar os $C([0,1]\dot{\cup}[0,\alpha])$, onde $\alpha \geq \omega_1$; mas nem sequer conseguimos decidir: $C([0,1]\dot{\cup}[0,\omega_1])$ é, ou não é, isomorfo a $C([0,1]\dot{\cup}[0,\omega_1 \cdot 2])$.

Deixamos, portanto, dois problemas:

1. Quantos C(K), dois a dois não isomorfos entre si, existem com $|K| = 2^{\aleph_0}$?

2. Dar uma classificação isomorfa dos $C([0,1]\dot{\cup}[0,\alpha])$, $\alpha \geq \omega_1$, em termos dos ordinais α.

o0o

Bibliografia

[BP-I] Bessaga, C. e Pelczynski, A. Spaces of continuous functions IV - Studia Math XIX - 1960 53-61.

[BP-II] Bessaga, C. e Pelczynski, A. Banach spaces non isomorphic to their Cartesian squares I, Bull Acad. Polon Sci, 8, 1960 77-80.

[D] Dunford, N ; Schwartz, J.T. - Linear Operators I, New York, Interscience 1958.

[ELL] E.L. Lima. Elementos de Topologia geral, Ao livro Técnico S.A. EDUSP, 1970.

[HCS] Hönig, Chaim, S. Análise Funcional e Aplicações, Vol. I e Vol II. IME - USP, 1970.

[Ki] Kislyakov, S.V. Classification of spaces of continuous functions of ordinais. Siberiam Math J. 16, 1975, nº 2, 226-231.

[K] Kuratoviski, K. e Mostowiski, A. - Set theory Warzawa, 1968.

[L] Labbe, M.A. - Isomorphisms of continuous functions space. Studia Math L II , 52-3 221-231.

[L] Lacey, H.E. - The isometric theory of classical Banach spaces, Spring-Verlag, Berlin H.N.Y. 1974.

[L.M.] Lacey, H.E. e Moris P.D. - On Universal Spaces of type C(K). Proc. Amer. Math. Soc. 23, 151-157, 1969.

[MS] Mazuerkiewiecz, S. e Sierpinski, W. Contribution ã lã topologie des ensembles denombrables. Fund. Math 1, 17-27, 1920.

[M] Mostowshi, A. Foundational Studies. Selected works vol. II, 1979.

[O] Stefan Banach, Oeuvres. Vol. II, 1979.

[P-I] Pelczynski, A. - Projections in certain Banach spaces. Studia Math. 19, 209-228, 1960.

[P-II] Pelczynski, A. - Linear extensions, linear Averagings and their application to linear topological classification of spaces of continuous functions. Dissertationes, Math 58(1968).

[P-S] Pelczynski, A., Semadeni, Z. - Spaces of continuous functions III. Studia Math, 31, 513-522, 1968.

[Se-I] Semadeni, Z. Banach spaces non-isomorphic to their Cartesian squares II. Bull Des L'Academie Polanaire Des Sciences vol. II, 81-84, 1960.

[Se-II] Semadeni, Z. Banach spaces of continuous functions, W. 1971.

[Se-III] Semadeni, Z. Sur les ensembles clairsemes - Rozpr - Mat. 19, 1959 , 1-39.

[SBA] 19º Seminário Brasileiro de Análise - São José dos Campos, S. P., junho, 1984.

[S] Sierpinski, W. - Cardinal and ordinal numbers. Warzawa, 1958.

oOo