ESPAÇOS MODULARES E
ESPAÇOS SEQUENCIAIS MODULARES

Cristina Cerri

DISSERTAÇÃO APRESENTADA AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

MATEMÁTICA

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: ANÁLISE

ORIENTADORA:

Profa. Dra. IRACEMA MARTIN BUND

Durante a elaboração deste trabalho, a autora recebeu apoio financeiro do CNPq e da FAPESP.

-SÃO PAULO, fevereiro de 1985-

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Os conceitos de espaço modular e de modular apareceram, pela primeira vez na literatura, em *Modulares Semi-ordered Linear Spaces*, de H. Nakano, em 1950 [N], onde o autor definiu modular num espaço vetorial parcialmente ordenado.

Uma definição generalizada de modular num espaço vetorial X foi dada em 1959, por J. Musielak e W. Orlicz em [MO]. Os autores, através de um modular, definiram uma quase-norma (ou F-norma) num subespaço de X. Também, nesse artigo, alguns exemplos de modulares são apresentados.

Os mesmos autores em [MO1], mostraram que é possível definir uma norma num subespaço de X, quando o modular for convexo. Desta forma, espaços de Banach clássicos tornam-se exemplos de espaços modulares, e também, obtém-se os espaços seqüenciais modulares.

Um tipo de espaço seqüencial modular foi tratado, pela primeira vez, por H. Nakano, em 1951, [N1], onde o autor caracterizou os que são espaços de Schur. Encontrou-se, assim, exemplos de espaços de Schur que não são o espaço ℓ_1. Esse espaço é semelhante ao espaço ℓ_p, que é espaço de Schur se, e somente se, $p = 1$.

Foi através da leitura de [N] que nos interessamos pelos espaços seqüenciais modulares. Em seguida, encontramos o trabalho de J. Woo [W] de 1973, que traz um estudo abrangente destes espaços, dos quais os espaços seqüenciais de Orlicz são casos particulares. Em [W], o autor generaliza vários resultados referentes aos espaços seqüenciais de Orlicz [LT-Cap.4], para os espaços seqüenciais modulares.

Dedicamos o capítulo III do nosso trabalho ao estudo dos espaços seqüenciais modulares baseado em [W]. Nos parágrafos 5 e 6, tratamos das propriedades básicas destes espaços e de outras, importantes para o restante do trabalho.

No parágrafo 7, estudamos os subespaços seqüenciais modulares separáveis, obtendo resultados através da generalização daqueles válidos para espaços seqüenciais de Orlicz, encontrados em [L]. Com isso obtemos a prova dos teoremas (7.13) e (7.15), que estão apenas enunciados em [W]. Incluímos, também, uma caracterização dos espaços seqüenciais modulares separáveis.

O parágrafo 8, é dedicado a caracterização do dual de um espaço seqüencial modular separável, e daqueles que são reflexivos. Obtemos resultados que auxiliam a prova de alguns teoremas, mas que por si só são interessantes.

No parágrafo 9, incluímos o estudo de uma classe de espaços seqüenciais modulares baseado em [N1] e [HN], onde damos uma caracterização dos elementos desta classe, que são espaços de Schur, e dos que são iguais ao espaço ℓ_1, bem como alguns exemplos.

O capítulo I é dedicado ao estudo dos espaços modulares em geral, visando organizar os conteúdos de [MO] e [MO1]. No parágrafo 1, fazemos a teoria geral e no parágrafo 2, incluímos alguns exemplos.

No capítulo II, apresentamos resultados sobre bases em espaços de Banach e sobre funções de Orlicz, que julgamos serem necessários para o entendimento do restante do trabalho.

Desejo expressar minha gratidão a Profª Drª Iracema Martins Bund, pela dedicada orientação,e pelo estímulo e apoio que dela recebi desde meu ingresso no curso de pós-graduação, principalmente na elaboração deste trabalho.

Agradeço a Srtª Virgínia Gonçalves França, pelo trabalho de datilografia.

Agradeço, também, aos meus amigos, sem os quais tudo teria sido muito mais difícil.

E, especialmente, quero agradecer aos meus pais, pelo incentivo, pela paciência e pelo carinho que me dedicaram, nas várias fases difíceis que passei. A eles dedico este trabalho.

Cristina Cerri

CONVENÇÕES

(1) Freqüentemente, escreveremos lim em lugar de $\lim\limits_{n\to\infty}$.

(2) Idem para sup $[inf]$ em lugar de $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}$ $[\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}]$.

(3) Idem para (A_k) em lugar de $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

(4) Idem para Σ em lugar de $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$.

(5) Indicaremos, por (e^k) a seqüência tal que para cada $k \in \mathbb{N}$, $e^k = (\delta_n^k)$ onde $\delta_n^n = 1$ e $\delta_n^k = 0$ se $k \neq n$.

(6) Indicaremos, por c_o e ℓ_p, respectivamente, os espaços $c_o(\mathbb{N})$ e $\ell_p(\mathbb{N})$, onde $p \in [1,\infty]$.

CAPITULO I

§1. ESPAÇOS MODULARES

A menos de menção em contrário, indicaremos por X um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(1.1) Definição. Uma função $\rho:X \to [0,\infty]$ é um modular em X se satisfaz as seguintes condições:

(i) $\rho(x) = 0 \iff x = 0$;

(ii) $\rho(-x) = \rho(x)$, $\forall x \in X$;

(iii) $\rho(ax+(1-a)y) \leqq \rho(x)+\rho(y)$, $\forall x,y \in X$ e $\forall a \in [0,1]$.

(1.2) Definição. Uma função $\rho:X \to [0,\infty]$ é um pseudo-modular em X se satisfaz (ii) e (iii) de (1.1), e se $\rho(0) = 0$.

(1.3) Exemplo. Seja X o espaço das seqüências de números reais. Para cada $k \in \mathbb{N}$ tomemos uma função $M_k : [0,\infty[\to [0,\infty[$ não-decrescente, com $M_k(0) = 0$. Seja $\rho((x_k)) = \Sigma M_k(|x_k|)$ para todo elemento (x_k) de X. Então, ρ é um pseudo-modular em X. Além disso, se $M_k(u) > 0$ para todo $u > 0$ e todo $k \in \mathbb{N}$ então ρ é um modular em X.

Com efeito, o ítem (iii) de (1.1) segue do fato de que, como, para cada $k \in \mathbb{N}$, M_k é uma função não-decrescente, então

$$\begin{aligned} M_k(au+(1-a)v) &\leq \max\{M_k(au), \ M_k((1-a)v)\} \\ &\leq \max\{M_k(u), \ M_k(v)\} \\ &\leq M_k(u)+M_k(v) \end{aligned}$$

para todo u, $v \in [0,\infty[$, é para todo $a \in [0,1]$.

(1.4) Proposição. Se ρ é um pseudo-modular em X, então as seguintes asserções são verdadeiras

(i) $\rho(ax) = \rho(|a|x)$, $\forall x \in X$, $\forall a \in \mathbb{R}$;

(ii) $\rho(ax) \leq \rho(x)$, $\forall x \in X$, $\forall a \in [0,1]$;

(iii) $\rho(ax) \leq \rho(bx)$, $\forall x \in X$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$ com $|a|<|b|$;

(iv) se (a_i) $1 \leq i \leq n$ é uma seqüência finita de números reais não-negativos com $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ e se (x_i) $1 \leq i \leq n$ é seqüência finita de X, então

$$\rho\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i).$$

Prova. O item (i) segue imediatamente de (1.1.ii). Se $x \in X$ e $a \in [0,1]$ então de (1.1.ii) tem-se que

$$\rho(ax) = \rho(ax+(1-a)0) \leq \rho(x)+\rho(0) = \rho(x)$$

o que prova (ii).

Assim (iii) decorre de (ii) e (i) pois se $|a|<|b|$ então

$$\rho(ax) = \rho\left(\frac{|a|}{|b|}|b|x\right) \leq \rho(|b|x) = \rho(bx).$$

A demonstração de (iv) se faz por indução sobre n. Observamos em primeiro lugar que a afirmação é imediata para $n = 1$, e que para $n = 2$ é o ítem (iii) de (1.1). Então consideremos $n \geq 3$ e suponhamos que a afirmação seja válida para seqüências com $n - 1$ elementos.

Se $a_n = 1$ e $a_i = 0$ para $1 \leq i \leq n - 1$ então segue trivialmente que $\rho(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i)$. Senão, seja $b = \sum_{i=1}^{n-1} a_i$. Daí como $b + a_n = 1$ e $\sum_{i=1}^{n-1} a_i/b = 1$ tem-se que

$$\rho(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i) = \rho(b \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{b} x_i + a_n x_n)$$

$$\leq \rho(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{b} x_i) + \rho(x_n)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n-1} \rho(x_i) + \rho(x_n) = \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i). \quad \square$$

(1.5) <u>Definição</u>. Seja ρ um pseudo-modular em X. Denotamos por $X\rho$ o conjunto dos elementos x de X tais que $\rho(\alpha x) < \infty$ para algum número real $\alpha > 0$, isto é,

$$X\rho = \{x \in X : \rho(\alpha x) < \infty, \text{ para algum } \alpha > 0\}.$$

O conjunto $X\rho$ é chamado de <u>espaço</u> <u>modular</u>.

(1.6) <u>Proposição</u>. Se ρ e $X\rho$ são como em (1.5) então $X\rho$ é um subespaço vetorial de X.

Prova. Sejam $x,y \in X\rho$ e α e β números reais positivos tais que $\rho(\alpha x) < \infty$ e $\rho(\beta x) < \infty$. Então de (1.1.iii) segue que

$$\rho(\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha + \beta}(x+y)) = \rho(\frac{\beta}{\alpha + \beta}(\alpha x) + \frac{\alpha}{\alpha + \beta}(\beta y))$$

$$\leq \rho(\alpha x) + \rho(\beta y),$$

e, portanto, $x + y \in X_\rho$.

Para todo $a \in \mathbb{R}$, e $a \neq 0$, tem-se $\rho(\frac{\alpha}{a}(ax)) = \rho(\alpha x)$. Portanto, $ax \in X_\rho$ para todo $a \in \mathbb{R}$, o que termina a demonstração. □

Veremos, a seguir, que por meio de um modular uma métrica pode ser definida em X_ρ.

(1.7) <u>Definição</u>. Sejam ρ e X_ρ como em (1.5). Para cada $x \in X_\rho$ definimos.

$$\| x \|_\rho = \inf\{t > 0: \rho(x/t) \leq t\}.$$

(1.8) <u>Proposição</u>. Sejam ρ e X_ρ como em (1.5). Então para todo $x,y \in X_\rho$, as seguintes afirmações são verdadeiras:

(i) $0 \leq \|x\|_\rho < \infty$;

(ii) $\|x\|_\rho < a < \infty \Rightarrow \rho(x/a) < a$;

(iii) $x = 0 \Rightarrow \|x\|_\rho = 0$;

(iv) $\|-x\|_\rho = \|x\|_\rho$;

(v) $\|x + y\|_\rho \leq \|x\|_\rho + \|y\|_\rho$;

(vi) $\|x\|_\rho < 1 \Rightarrow \rho(x) \leq \|x\|_\rho$;

(vii) $\|ax\|_\rho \leq \|bx\|_\rho$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$ com $|a| < |b|$;

(viii) se $a > 0$ for tal que $\rho(x/a) = a$, então,

$\|x\|_\rho = a$;

(ix) se $\|x\|_\rho \neq 0$, $\rho(x/\|x\|_\rho) < \infty$, e se a função $\rho_x : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ definida por $\rho_x(a) = \rho(ax)$ é contínua à esquerda em $1/\|x\|_\rho$, então $\rho(x/\|x\|_\rho) \leq \|x\|_\rho$.

Prova. Se $x \in X_\rho$ então $\rho(\alpha x) = b < \infty$ para algum $\alpha > 0$. Assim $\rho(\alpha x) \leq 1/\alpha$ se $b \leq 1/\alpha$, ou $\rho(x/b) \leq b$ se $b > 1/\alpha$. Portanto, $\|x\|_\rho \leq \max\{1/\alpha, \rho(\alpha x)\}$, o que prova (i).

Suponhamos que $\|x\|_\rho < a < \infty$. Da definição (1.7) vem que existe $0 < t < a$ tal que $\rho(x/t) \leq t$. Portanto, usando (1.4.iii), temos que $\rho(x/a) \leq \rho(x/t) < a$, e segue (ii).

Os ítens (iii), (iv) e (vii) são conseqüências imediatas de (1.2) e (1.4.iii).

Para provarmos (v) tomemos $x,y \in X_\rho$ e $\varepsilon > 0$. Se $a = \|x\|_\rho + \varepsilon/2$ e $b = \|y\|_\rho + \varepsilon/2$, então, de (1.1.iii) e do ítem (ii) vem que

$$\rho\left(\frac{x+y}{a+b}\right) = \rho\left(\frac{a}{a+b}\,\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\,\frac{x}{b}\right)$$

$$\leq \rho\left(\frac{x}{a}\right) + \rho\left(\frac{x}{b}\right) < a + b.$$

Portanto, $\|x+y\|_\rho \leq a + b = \|x\|_\rho + \|y\|_\rho + \varepsilon$, e como ε é arbitrário, temos que $\|x+y\|_\rho \leq \|x\|_\rho + \|y\|_\rho$.

Se $x \in X_\rho$ e $\|x\|_\rho < 1$, então para todo $\varepsilon > 0$ tal que $\|x\|_\rho < \|x\|_\rho + \varepsilon < 1$, segue de (1.4.iii) e do ítem (ii) que $\rho(x) \leq \rho(x/(\| x\|_\rho + \varepsilon)) < \| x\|_\rho + \varepsilon$. Logo, $\rho(x) \leq \| x\|_\rho$ e está provado (vi).

Suponhamos que exista $a > 0$ tal que $\rho(x/a) = a$. Da definição (1.7) temos que $\| x\|_\rho \leq a$. Não podemos ter $\| x\|_\rho < a$, pois, nesse caso, de (ii), teríamos $\rho(x/a) < a$, portanto, só pode ocorrer $\| x\|_\rho = a$.

Finalmente, suponhamos válidas as hipóteses de (ix). Seja (t_n) uma seqüência de números reais positivos tais que $\| x\|_\rho < t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim t_n = \| x\|_\rho$.

Do ítem (ii) temos que $\rho(x/t_n) < t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e, daí:

$$\rho\left(\frac{x}{\|x\|_\rho}\right) = \lim \rho\left(\frac{x}{t_n}\right) \leq \lim t_n = \|x\|_\rho. \quad \square$$

(1.9) <u>Proposição</u>. Seja ρ um modular em X e, sejam X_ρ como em (1.5) e $x \in X_\rho$. Então, $\| x\|_\rho = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

Prova. Se $\| x\|_\rho = 0$, então para todo $0 < \varepsilon < 1$ temos que $\| x\|_\rho < \varepsilon$. De (1.4.iii) e (1.8.ii) segue que $\rho(x) \leq \rho(x/\varepsilon) < \varepsilon$. Portanto, $\rho(x) = 0$ e, decorre de (1.1.i) que $x = 0$.

A recíproca é (1.8.iii). $\square$

(1.10) <u>Proposição</u>. Sejam ρ um pseudo-modular [modular] em X e $X\rho$, como em (1.5). Se para $x,y \in X\rho$ definimos $d(x,y) = \| x-y \|\rho$, então d é uma pseudo-métrica [métrica] em $X\rho$ invariante por translação.

Prova. O resultado segue claramente dos ítens (iii), (iv) e (v) de (1.8), e de (1.9). $\square$

(1.11) <u>Proposição</u>. Sejam ρ e $X\rho$ como em (1.5), (x_n) uma seqüência de elementos de $X\rho$, e $x \in X\rho$. Se $\lim \| x_n - x \| \rho = 0$ então $\lim \rho(x_n - x) = 0$.

Prova. É imediata a partir de (1.8.iv). $\square$

A recíproca de (1.11) é falsa como mostra o seguinte exemplo:

(1.12) <u>Exemplo</u>. Sejam ρ e X como em (1.3), e tomemos $M_k(u) = u^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Se $x_n = (1/2)e^n$, (ver convenção (5)) então, $\lim \rho(x_n) = \lim 1/2^n = 0$, mas

$$\| x_n \| \rho = \inf\{t > 0 : (\frac{1}{2t})^n \leq t\} = 2^{\frac{-n}{n+1}}$$

e, assim, $\lim \| x_n \| \rho = 1/2$.

Veremos em (1.19) que com certas condições sobre ρ podemos obter a recíproca de (1.11).

Antes, porém, introduziremos um novo conceito de convergência em $X\rho$, dado por Nakano em [N2], que proporciona uma outra maneira, às vezes mais apropriada, de descrever a topologia dada pela métrica d em $X\rho$.

(1.13) Definição. Sejam ρ e $X\rho$ como em (1.5). Uma seqüência (x_n) de elementos de $X\rho$ é dita ρ-convergente para $x \in X\rho$ se $\lim \rho(\alpha(x_n - x)) = 0$ para todo $\alpha > 0$.

(1.14) Proposição. Sejam ρ e $X\rho$ como em (1.5), (x_n) uma seqüência de elementos de $X\rho$ e $x \in X\rho$. Então, são equivalentes

(i) (x_n) é ρ-convergente para x;

(ii) existe $K > 0$ tal que $\lim \rho(\alpha(x_n - x)) = 0$ para todo $\alpha \geqq K$.

Prova. Para provar que (ii) implica (i) basta lembrar (1.4.iii). A outra implicação é óbvia. □

(1.15) Proposição. Sejam ρ e $X\rho$ como em (1.5), (x_n) uma seqüência de elementos de $X\rho$ e $x \in X\rho$. Então, (x_n) é ρ-convergente para x se, e somente se, $\lim \| x_n - x \|_\rho = 0$.

Prova. É claro que basta mostrar o resultado para $x = 0$.

Suponhamos que (x_n) seja ρ-convergente para 0. Dado $\varepsilon > 0$ então $\lim \rho(x_n/\varepsilon) = 0$ e, daí, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $\rho(x_n/\varepsilon) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Portanto, $\| x_n \|\rho \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$, isto é, $\lim \| x_n \| \rho = 0$.

Reciprocamente, se $\lim \| x_n \| \rho = 0$ e $\alpha > 0$ então, dado $0 < \varepsilon < 1/\alpha$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\| x_n \| \rho < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Decorre de (1.8.ii) que $\rho(x_n/\varepsilon) < \varepsilon$ e, então, $\rho(\alpha x_n) \leq \rho(x_n/\varepsilon) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Portanto, $\lim \rho(\alpha x_n) = 0$. $\square$

Usando a mesma técnica empregada na demonstração de (1.15) podemos provar o seguinte resultado:

(1.16) Proposição. Se ρ e $X\rho$ são como em (1.5), e (x_n) é uma seqüência de elementos de $X\rho$, então $\lim\limits_{n,m\to\infty} \| x_n - x_m \| \rho = 0$ se, e somente se, $\lim\limits_{n,m\to\infty} \rho(\alpha(x_n - x_m)) = 0$ para todo $\alpha > 0$.

A próxima proposição dá uma condição necessária para que $X\rho$ seja um espaço métrico completo.

(1.17) Proposição. Sejam ρ um modular em X e $X\rho$

como em (1.5). Suponha que exista $\beta > 0$ tal que para toda seqüência (x_n) de elementos de $X\rho$ com $\lim\limits_{n,m\to\infty} \rho(x_n - x_m) = 0$, exista $y \in X\rho$ tal que $\lim \rho(\beta(x_n - y)) = 0$. Então $X\rho$ é um espaço métrico completo.

Prova. Seja (x_n) uma seqüência de elementos de $X\rho$ que satisfaz a condição de Cauchy, isto é, $\lim\limits_{n,m\to\infty} \| x_n - x_m \| = 0$.

De (1.16) temos que $\lim\limits_{n,m\to\infty} \rho(x_n - x_m) = 0$, e pela hipótese existe $y \in X\rho$ tal que $\lim \rho(\beta(x_n - y)) = 0$. Vamos mostrar que $\lim \rho(\beta\, \varepsilon^{-1}(x_n - y)) = 0$ para todo $0 < \varepsilon \leqq 1$ e assim, por (1.14) e (1.15), teremos $\lim \| x_n - y \|_\rho = 0$.

Fixado $0 < \varepsilon \leqq 1$, por (1.16) sabemos que $\lim\limits_{n,m\to\infty} \rho(\varepsilon^{-1}(x_n - x_m)) = 0$ e, portanto, pela hipótese, existe $y_\varepsilon \in X\rho$ tal que $\lim \rho(\beta(x_n\, \varepsilon^{-1} - y_\varepsilon)) = 0$.

Temos que $y = \varepsilon y_\varepsilon$. De fato usando (1.1.iii) e (1.4.iii)

$$\begin{aligned}
\rho(\tfrac{\beta}{2}(y - \varepsilon y_\varepsilon)) &= \rho(\tfrac{\beta}{2}(y - x_n + x_n - \varepsilon y_\varepsilon)) \\
&\leqq \rho(\beta(y - x_n)) + \rho(\beta(x_n - \varepsilon y_\varepsilon)) \\
&\leqq \rho(\beta(y - x_n)) + \rho(\beta\varepsilon^{-1}(x_n - \varepsilon y_\varepsilon)) \\
&= \rho(\beta(y - x_n)) + \rho(\beta(x_n\varepsilon^{-1} - y_\varepsilon)),
\end{aligned}$$

o que implica que $\rho(\frac{\beta}{2}(y - \varepsilon y_\varepsilon)) = 0$ e, portanto, de (1.1.i), $y = \varepsilon y_\varepsilon$.

Então

$$\lim \rho(\beta\varepsilon^{-1}(x_n - y)) = \lim \rho(\beta(x_n\varepsilon^{-1} - y_\varepsilon)) = 0$$

o que termina a demonstração. □

Definiremos, agora, a condição Δ_2 para modulares e mostraremos que vale a recíproca de (1.11), quando o modular satisfaz tal condição.

(1.18) Definição. Sejam ρ e $X\rho$ como um (1.5). Dizemos que ρ satisfaz a condição Δ_2 se existem números reais positivos K e a tais que $\rho(2x) \leqq K\, \rho(x)$, para todo $x \in X\rho$ com $\rho(x) \leqq a$.

(1.19) Proposição. Sejam ρ e $X\rho$ como em (1.5), e (x_n) uma seqüência de elementos de $X\rho$. Suponha que ρ satisfaça a condição Δ_2. Então, $\lim \|x_n\|\rho = 0$ se, e somente se, $\lim \rho(x_n) = 0$.

Prova. Por (1.11) é sempre verdade que se $\lim \|x_n\|\rho = 0$, então $\lim \rho(x_n) = 0$.

Segue de (1.15) que para obtermos a recíproca, basta provar que se $\lim \rho(x_n) = 0$, então $\lim \rho(\alpha x_n) = 0$ para todo $\alpha > 0$.

Começamos por provar que

$$\lim_{n\to\infty} \rho(2^k x_n) = 0, \quad \forall\ k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Para $k = 1$ é suficiente lembrar que $\rho(2x_n) \leqq K\ \rho(x_n)$, para todo $x_n \in X\rho$ com $\rho(x_n) \leqq a$.

Suponha que $k > 1$ e que $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(2^{k-1}x_n) = 0$. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(2^{k-1}x_n) \leqq a$ para todo $n \geqq n_o$, e daí $\rho(2^k x_n) \leqq K\ \rho(2^{k-1}x_n)$, para todo $n \geqq n_o$. Portanto, $\lim \rho(2^k x_n) = 0$. Assim fica estabelecida a relação (1).

Para $\alpha > 0$ arbitrário escolhemos $k \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha < 2^k$ e, então

$$\lim \rho(\alpha x_n) \leqq \lim \rho(2^k x_n) = 0. \quad \square$$

Definiremos, agora, o subespaço $\bar{X}\rho$ de $X\rho$ onde a função $\|\ \|\rho$ será uma quase-norma [Y-p.31]. Em conseqüência teremos $\bar{X}\rho$ um espaço vetorial topológico.

(1.20) <u>Definição</u>. Seja ρ um pseudo-modular em X. Indicaremos por $\bar{X}\rho$ o conjunto dos elementos x de X tais que $\lim \rho(a_n x) = 0$ para toda seqüência (a_n) de números reais positivos com $\lim a_n = 0$.

(1.21) <u>Proposição</u>. Sejam ρ e $\bar{X}\rho$ como em (1.20). Então, $\bar{X}\rho$ é um subespaço vetorial fechado de $X\rho$.

Prova. É claro que $0 \in \bar{X}\rho$ e que $\bar{X}\rho \in X\rho$.

Sejam $x,y \in \bar{X}\rho$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e (a_n) uma seqüência de números reais positivos com $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Então, de (1.1.iii)

$$\lim \rho(a_n(x+y)) = \lim \left(\frac{2a_n}{2} x + \frac{2a_n}{2} y\right)$$

$$\leqq \lim [\rho(2a_n x) + \rho(2a_n y)] = 0,$$

e de (1.1.ii)

$$\lim \rho(a_n(\alpha x)) = \lim \rho(|a_n \alpha| x) = 0.$$

Portanto, $x+y \in \bar{X}\rho$ e $x \in \bar{X}\rho$.

Provemos, agora, que $\bar{X}\rho$ é fechado em $X\rho$. Seja (x_k) uma seqüência de $\bar{X}\rho$ que converge para x em $X\rho$. Para mostrar que $x \in \bar{X}\rho$, consideremos uma seqüência (a_n) de números reais positivos tal que $\lim a_n = 0$.

Seja $\varepsilon > 0$. Como $\lim\limits_{k\to\infty} \| x_k - x \|\rho = 0$, existe $k_o \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(2(x_{k_o} - x)/\varepsilon) < \varepsilon/2$.

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(2a_n x_{k_o}) = 0$ então existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $a_n < 1/\varepsilon$ e $\rho(2a_n x_{k_o}) < \varepsilon/2$ para todo $n \geqq n_o$. Usando

(1.1.iii) e (1.4.iii) obtemos

$$\rho(a_n x) \leqq \rho(2a_n(x_{k_o} - x) + \rho(2a_n x_{k_o})$$

$$\leqq \rho(2(x_{k_o} - x)/\varepsilon) + \rho(2a_n x_{k_o})$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

para todo $n \geqq n_o$. Portanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(a_n x) = 0$ o que termina a demonstração. □

Obteremos, a seguir, uma caracterização do conjunto $\bar{X}\rho$, a partir de $\| \ \|\rho$, que nos possibilita estabelecer (1.23).

(1.22) <u>Proposição</u>. Sejam ρ e $X\rho$ como em (1.5). Se $x \in X\rho$ então as seguintes asserções são equivalentes:

(i) $x \in \bar{X}\rho$;

(ii) $\lim \|a_n x\|\rho = 0$ para toda seqüência (a_n) de números reais com $\lim a_n = 0$.

Prova. Mostraremos, primeiramente, que (i) implica (ii).

Sejam (a_n) uma seqüência de números reais tal que $\lim a_n = 0$ e $\varepsilon > 0$. De (i) vem que $\lim \rho(|a_n|x/\varepsilon) = 0$, e então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(|a_n|x/\varepsilon) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Portanto, $\| \, |a_n|x \|\rho \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$, o que, usando (1.8.iv), prova (ii).

Decorre, facilmente, de (1.8.vi) que (ii) implica (i). □

(1.23) Proposição. Sejam ρ e $\bar{X}\rho$ como em (1.20). A função que cada $x \in \bar{X}\rho$ associa o número real positivo $\|x\|\rho$ dado em (1.7), é uma pseudo-quase-norma em $\bar{X}\rho$, isto é, as seguintes condições estão satisfeitas:

(i) $x = 0 \Rightarrow \|x\|\rho = 0$,

(ii) $\|-x\|\rho = \|x\|\rho, \quad \forall \, x \in \bar{X}\rho$,

(iii) $\|x+y\|\rho \leq \|x\|\rho + \|y\|\rho \quad , \forall \, x,y \in \bar{X}\rho$,

(iv) $\lim \|a_n x\|\rho = 0$, para todo $x \in \bar{X}\rho$ e para toda seqüência de números reais (a_n) com $\lim a_n = 0$,

(v) $\lim \|ax_n\|\rho = 0$, para todo $a \in \mathbb{R}$ e para toda seqüência (x_n) de elementos de $\bar{X}\rho$ com $\lim \|x_n\|\rho = 0$.

Prova. Os ítens (i), (ii) e (iii) são, respectivamente, (iii), (iv) e (v) de (1.8).

O ítem (iv) é conseqüência imediata de (1.22).

Sejam (x_n) uma seqüência de elementos de $\bar{X}_\rho$ com $\lim \| x_n \|_\rho = 0$ e $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

De (1.14) vem que (x_n) é ρ-convergente para 0, e então, $\lim \rho(\alpha |a| x_n) = 0$ para todo $\alpha > 0$. Logo (ax_n) é ρ-convergente para 0, e por (1.14) concluímos que $\lim \| ax_n \|_\rho = 0$. □

(1.24) <u>Proposição</u>. Sejam ρ um modular em X e X_ρ como em (1.20). Então a função que a cada $x \in X_\rho$ associa o número real positivo $\| x \|_\rho$ é uma quase-norma.

Prova. Por (1.23) basta mostrar que se $\| x \|_\rho = 0$ então $x = 0$ o que segue de (1.9). □

Como conseqüência do que acabamos de ver, temos o seguinte resultado.

(1.25) <u>Proposição</u>. Sejam ρ e $\bar{X}_\rho$ como em (1.20). Então $\bar{X}_\rho$ munido da pseudo-métrica definida em (1.10), é um espaço vetorial topológico.

Prova. Para estabelecermos a tese, é suficiente mostrar que

(1) se $x, y \in \bar{X}_\rho$ e (x_n) e (y_n) são seqüências de elementos de $\bar{X}_\rho$ tais que $\lim \| x_n - x \|_\rho = \lim \| y_n - y \|_\rho = 0$ então $\lim \| x_n + y_n - (x+y) \|_\rho = 0$.

(2) se $x \in \bar{X}_\rho$, $a \in \mathbb{R}$, (x_n) é uma seqüência de $\bar{X}_\rho$

tal que $\lim \| x_n - x \|_\rho = 0$ e (a_n) é uma seqüência de números reais com $\lim a_n = a$, então, $\lim \| a_n x_n - ax \|_\rho = 0$.

A afirmação (1) é conseqüência da desigualdade (1.23.iii).

Quanto a (2), seja $K > 0$ tal que $|a_n| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, de (1.22.iii), (1.23.ii) e de (1.8.vii) segue que

$$\begin{aligned} \| a_n x_n - ax \|_\rho &\leq \| a_n(x_n - x) \|_\rho + \| (a_n - a)x \|_\rho \\ &\leq \| K(x_n - x) \|_\rho + \| (a_n - a)x \|_\rho . \end{aligned}$$

Portanto, por (1.23.iv) e (1.23.v) tem-se $\lim \| a_n x_n - ax \|_\rho = 0$. □

(1.26) <u>Observação</u>. Segue, facilmente, de (1.22) e (1.25) que um espaço modular X_ρ mudido da pseudo-métrica definida em (1.10) é um espaço vetorial topológico se, e somente se, $X_\rho = \bar{X}_\rho$.

(1.27) <u>Observação</u>. É claro que se ρ é um modular em X e X_ρ é completo, então $\bar{X}_\rho$ é um espaço de Fréchet (ou F-espaço) [Y-p.52].

Estudaremos, agora, um tipo especial de modular com o qual se pode definir uma norma no espaço X_ρ.

(1.28) <u>Definição</u>. Seja ρ um pseudo-modular [modular] em X. Dizemos que ρ é um pseudo-modular convexo [modular convexo] em X se

$$\rho(ax + (1-a)y) \leqq a\rho(x) + (1-a)\rho(y)$$

para todo $x,y \in X$ e para todo $a \in [0,1]$.

(1.29) <u>Exemplo</u>. Seja X o espaço das seqüencias de números reais. Para cada $k \in \mathbb{N}$ tomemos uma função convexa $M_k:[0,\infty[\to[0,\infty[$ (ver [B-p.137]) com $M_k(0) = 0$. Se definimos $\rho((x_k)) = \Sigma\, M_k(|x_k|)$ para todo $(x_k) \in X$, então é fácil mostrar que ρ é um pseudo-modular convexo em X. Além disso se $M_k(u) > 0$ para todo $u > 0$ e todo $k \in \mathbb{N}$, então ρ é um modular convexo em X.

(1.30) <u>Observação</u>. Se ρ é um pseudo-modular convexo em X então é imediata conseqüência de (1.28) que

$$\rho(ax) \leqq a\rho(x) \quad \forall\, x \in X, \quad \forall\, a \in [0,1].$$

(1.31) <u>Definição</u>. Sejam ρ um pseudo-modular convexo em X e $X\rho$ como em (1.5). Para cada $x \in X\rho$ definimos

$$\| x \| = \inf\{t > 0 : \rho(\tfrac{x}{t}) \leqq 1\}.$$

(1.32) <u>Proposição</u>. Sejam ρ um pseudo-modular convexo em X e $X\rho$ como em (1.5). Para todo $x \in X\rho$ temos que

(i) $0 \leqq \|x\| < \infty$;

(ii) $\|x\| < a < \infty \Rightarrow \rho(x/a) < 1$;

(iii) $\|x\| < 1 \Rightarrow \rho(x) \leqq \|x\|$;

(iv) $\|x\| \neq 0$ e $\rho(x/\|x\|) < \infty \Rightarrow \rho(x/\|x\|) \leqq 1$.

Prova. Como $x \in X_\rho$, existe $\alpha > 0$ tal que $b = \rho(\alpha x) < \infty$. Se $b \leqq 1$ é claro que $\|x\| \leqq 1/\alpha$. Se $b > 1$, então decorre de (1.30), que $\rho(\alpha x/b) \leqq b^{-1}\rho(\alpha x) = 1$, e, portanto, $\|x\| \leqq b/\alpha$. Conclui-se que $\|x\| \leqq \alpha^{-1}\max\{1, \rho(\alpha x)\}$, o que prova (i).

Se $\|x\| < a$, segue da definição (1.31) que existe $0 < t < a$ tal que $\rho(x/t) \leqq 1$. Então usando (1.30) obtém-se

$$\rho(\frac{x}{a}) = \rho(\frac{tx}{at}) \leqq \frac{t}{a}\rho(\frac{x}{t}) \leqq \frac{t}{a} < 1.$$

Suponha, agora, que $\|x\| < 1$. Então para todo $\varepsilon > 0$ com $\|x\| < \varepsilon < 1$ tem-se, de (1.30) e do ítem (ii) que

$$\rho(x) = (\frac{\varepsilon x}{\varepsilon}) \leqq \varepsilon\rho(\frac{x}{\varepsilon}) < \varepsilon,$$

e, portanto, $\rho(x) \leqq \|x\|$.

Para provar (iv) fixado $x \in X_\rho$, considere a função $\rho_x : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ dada por $\rho_x(a) = \rho(ax)$. Então ρ_x é convexa em $[0, 1/\|x\|]$ [B-p.137]. De fato se $a,b \in [0, 1/\|x\|]$ tem-se de (1.4) que $\rho(ax) < \infty$ e $\rho(bx) < \infty$ e de (1.28) que

$$\begin{aligned}\rho_x(sa + (1-s)b) &= \rho((sa + (1-s)b)x) \\ &\leq s\rho(ax) + (1-s)\rho(bx) \\ &= s\rho_x(a) + (1-s)\rho_x(b)\end{aligned}$$

para todo $s \in [0,1]$.

Pelo teorema (A.2) de [B] segue que ρ é contínua à esquerda em $1/\|x\|$. Seja (t_n) uma seqüência de números reais positivos tal que $\|x\| < t_n$ e $\lim t_n = \|x\|$. Então, pela continuidade à esquerda de ρ_x e por (ii) obtém-se

$$\rho(\frac{x}{\|x\|}) = \lim \rho(\frac{x}{t_n}) \leq 1. \quad \square$$

Com as proposições seguintes, concluímos que $(X\rho, \|\ \|)$ é um espaço normado, quando ρ é um modular convexo.

(1.33) Proposição. Se ρ é um pseudo-modular convexo em X, e $X\rho$ como em (1.5), então a função que a cada $x \in X\rho$ associa o número real positivo $\|x\|$, definido em (1.31) é uma semi-norma em $X\rho$, isto é, vale o seguinte:

(i) $x = 0 \Rightarrow \|x\| = 0$;

(ii) $\|ax\| = |a|\,\|x\|$, $\forall\ x \in X$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$;

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall\ x,y \in X\rho$.

Prova. O ítem (i) é trivial.

Para provar (ii) basta ver que se $a \neq 0$ $\{t > 0: \rho(ax/t) \leq 1\} = \{|a|\varepsilon: \rho(x/\varepsilon) \leq 1\}$.

Tomemos, agora, $x,y \in X\rho$ e $\varepsilon > 0$. Sejam $a = \|x\| + \varepsilon/2$ e $b = \|y\| + \varepsilon/2$. Então de (1.28) e (1.32.ii) vem que

$$\rho(\frac{x+y}{a+b}) = \rho(\frac{a}{a+b}\,\frac{x}{a} + \frac{b}{a+b}\,\frac{y}{b})$$

$$\leq \frac{a}{a+b}\rho(\frac{x}{a}) + \frac{b}{a+b}\rho(\frac{y}{b})$$

$$< \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = 1$$

Portanto, $\|x+y\| \leq a+b = \|x\| + \|y\| + \varepsilon$. Como ε é arbitrário está provado (iii). □

(1.34) Proposição. Se ρ é um modular convexo em X e se $X\rho$ é como em (1.5) então, a função que a cada $x \in X\rho$ associa o número real positivo $\|x\|$, é uma norma em $X\rho$.

Prova. Por (1.33) basta mostrar que se $\|x\| = 0$ então $x = 0$. Mas isso segue, facilmente, de (1.32.iii) e (1.1.i)

O próximo resultado nos possibilita comparar $\|x\|$ com $\|x\|\rho$, sendo x um elemento de $X\rho$.

(1.35) <u>Proposição</u>. Se ρ é um pseudo-modular convexo em X e $x \in X_\rho$ então tem-se

$$\begin{array}{ll}
\text{(i)} & \|x\|_\rho < 1 \Rightarrow \|x\| \leq \|x\|_\rho\,; \\
\text{(ii)} & \|x\|_\rho \geq 1 \Rightarrow \|x\| \leq \|x\|_\rho^2\,; \\
\text{(iii)} & \|x\| \geq 1 \Rightarrow \|x\|_\rho \leq \|x\|\,; \\
\text{(iv)} & \|x\| < 1 \Rightarrow \|x\|_\rho^2 \leq \|x\|\,.
\end{array}$$

Prova. Para mostrar (i) suponha que $\|x\|_\rho < 1$. Seja $\varepsilon > 0$ tal que $\|x\|_\rho < \varepsilon < 1$. Então de (1.8.ii), $\rho(x/\varepsilon) < \varepsilon$ e daí $\rho(x/\varepsilon) < 1$. Portanto, $\|x\| \leq \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, o que implica que $\|x\| \leq \|x\|_\rho$.

Suponha, agora, que $\|x\|_\rho \geq 1$ e seja $\varepsilon > 0$ tal que $\|x\|_\rho < \sqrt{\varepsilon}$. Então de (1.8.ii) tem-se que $\rho(x/\sqrt{\varepsilon}) < \sqrt{\varepsilon}$ e, por (1.30),

$$\rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\,\rho\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) < 1.$$

Logo $\|x\| \leq \varepsilon$ e, como ε é arbitrário, $\|x\| \leq \|x\|_\rho^2$.

Para provar (iii) sejam $x \in X_\rho$ e $\varepsilon > 0$ tais que $1 \leq \|x\| < \varepsilon$. Então, de (1.32.ii) tem-se que $\rho(x/\varepsilon) < 1 < \varepsilon$ e daí $\|x\|_\rho \leq \varepsilon$. E isto implica que $\|x\|_\rho \leq \|x\|$.

Considere, agora, $\|x\| < 1$. Tome $\varepsilon > 0$ tal que $\|x\| < \varepsilon < 1$. Então decorre de (1.32.ii) que $\rho(x/\varepsilon) < 1$ e por (1.30)

$$\rho\left(\frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \leq \sqrt{\varepsilon}\ \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \leq \sqrt{\varepsilon}$$

e portanto $\| x \|_\rho \leq \sqrt{\varepsilon}$. Tem-se, então, que $\| x \|_\rho^2 \leq \| x \|$. □

Com o resultado (1.35) poderemos facilmente mostrar que em $X\rho$ as métricas provenientes de $\| \ \|$ e de $\| \ \|_\rho$ são equivalentes.

(1.36) Proposição. Sejam ρ um pseudo-modular convexo em X, (x_n) uma seqüência de elementos de $X\rho$ e $x \in X\rho$. Então

(i) $\lim \| x_n - x \| = 0 <=> \lim \| x_n - x \|_\rho = 0$;

(ii) $\lim \| x_n - x \| = 0 <=> (x_n)$ é ρ-convergente para x.

Prova. O ítem (i) é conseqüência imediata de (1.35.i) e (1.35.iii), e o ítem (ii) segue de (i) e de (1.15). □

(1.37) Corolário. Seja ρ um pseudo-modular convexo em X. Então $\bar{X}\rho = X\rho$.

Prova. Por (1.36) vemos que as métricas provenientes da norma $\| \ \|$ e de $\| \ \|_\rho$ são equivalentes em $X\rho$. Portanto o resultado segue de (1.26). □

(1.38) Observação. Seja ρ é um pseudo-modular [pseudo-modular convexo] em X. Como vimos em (1.10) [(1.33)] obtemos uma pseudo-métrica [semi-norma] em $X\rho$. Então, é fá - cil ver que, tomando $X_0 = \{x \in X\rho : \|x\|\rho = 0\}$, $[X_0 = \{x \in X_0 : \|x\| = 0\}]$, o espaço quociente $X\rho/X_0$ será métrico [normado].

§2. EXEMPLOS DE ESPAÇOS MODULARES

Estudaremos, resumidamente, alguns tipos de espaços modulares.

É interessante notar que através de modulares convexos novos espaços de Banach podem ser definidos, como veremos neste parágrafo.

Em todo este parágrafo o espaço $X\rho$ estará sempre munido da métrica definida em (1.10).

EXEMPLO I. Modulares no Espaço das Seqüências de Números Reais.

Até (2.16) X indicará o conjunto espaço das se - qüências de números reais.

(2.1) Definição. Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja $M_k:[0,\infty[\to[0,\infty[$ uma função contínua não-decrescente, e tal que $M_k(u) = 0$ se, e somente se, $u = 0$. Definimos ρ: $X \to [0,\infty]$ pela igualdade

$$\rho((x_k)) = \Sigma\ M_k(|x_k|).$$

(2.2) Proposição. Se (M_k) e ρ são como em (2.1) então

(i) ρ é um modular em X;

(ii) $X\rho = \bar{X}\rho$;

(iii) $X\rho$ é um espaço métrico completo.

Prova. É fácil ver que $\rho((x_k)) = 0$ se e só se $(x_k) = 0$, e que $\rho((x_k)) = \rho((|x_k|))$. Como M_k é não-descrescente.

$$M_k(au + (1-a)v) \leqq M_k(u) + M_k(v), \quad \forall\ a \in [0,1],$$

$\forall\ u,v \in [0,\infty[$.

Segue então que ρ satisfaz (i),(ii) e (iii) de (1.1), isto é, ρ é um modular em X.

Para provar (ii) basta verificar que $X\rho \subset \bar{X}\rho$. Sejam $(x_k) \in X\rho$ e $\alpha > 0$ tais que $\rho(\alpha(x_k)) < \infty$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $k_o \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{k=k_o}^{\infty} M_k(\alpha|x_k|)<\varepsilon/2$.

Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de números reais positivos tal que $\lim a_n = 0$. Então dado $\varepsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| \leqq \alpha$ e $\sum\limits_{k=1}^{k_o-1} M_k(|a_n x_k|) < \varepsilon/2$ para todo $n \geqq n_o$. Portanto

$$\rho(a_n(x_k)) = \sum_{k=1}^{k_o-1} M_k\,(|a_n x_k|) + \sum_{k=k_o}^{\infty} M_k(|a_n x_k|) < \varepsilon$$

para todo $n \geqq n_o$. Logo $(x_k) \in \bar{X}\rho$.

Seja (x^n) uma seqüência de $X\rho$ com $\lim\limits_{n,m\to\infty} \rho(x^n-x^m)=0$. Mostraremos que existe $y = (y_k) \in X$ tal que $\lim\,(x^n-y) = 0$ e assim o ítem (ii) seguirá de (1.17).

Se $x^n = (x_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então,

$\lim\limits_{n,m\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} M_k(|x_k^n-x_k^m|) = 0$ e daí, $\lim\limits_{n,m\to\infty} M_k(|x_k^n-x_k^m|) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como M_k é contínua, e $M_k(u) = 0$ se e só se $u = 0$, então $\lim\limits_{n,m\to\infty} |x_k^n-x_k^m| = 0$. Seja $y_k = \lim\limits_{n\to\infty} x_k^n$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e seja $y = (y_k)$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{p} M_k(|x_k^n-x_k^m|) \leqq \rho(x^n-x^m) < \varepsilon$$

para todo $n,m \geqq n_o$ e $p \in \mathbb{N}$. Então

$$\sum_{k=1}^{p} M_k(|x_k^n - y_k|) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{p} M_k(|x_k^n - x_k^m|) \leqq \varepsilon$$

para todo $n \geqq n_o$, isto é, $\lim \rho(x^n - y) = 0$.

Temos, também, que $y = (y_k) \in X\rho$ pois se $\alpha > 0$ é tal que $\rho(\alpha x^{n_o}) < \infty$ e $\beta = \min\{1,\alpha\}$ então

$$\rho(\tfrac{\beta}{2}y) \leqq \rho(\beta(x^{n_o} - y)) + \rho(\beta x^{n_o})$$

$$\leqq \rho(x^{n_o} - y) + \rho(\alpha x^{n_o}) < \infty. \qquad \square$$

(2.3) Proposição. Sejam (M_k) e ρ como em (2.1). Se $(x_k) \in X\rho$ e $\|(x_k)\|\rho \neq 0$ então

$$\rho\left(\frac{(x_k)}{\|(x_k)\|\rho}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k\left(\frac{|x_k|}{\|(x_k)\|\rho}\right) \leqq \|(x_k)\|\rho.$$

Prova. Se (t_n) é uma seqüência de reais positivos tal que $\|(x_k)\|\rho < t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e $\lim_{n\to\infty} t_n = \|(x_k)\|\rho$, então, como as funções M_k são contínuas, e $\rho((x_k)/t_n) < t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{p} M_k\left(\frac{|x_k|}{\|(x_k)\|\rho}\right) = \lim \sum_{k=1}^{p} M_k\left(\frac{|x_k|}{t_n}\right)$$

$$\leqq \lim t_n = \|(x_k)\|\rho$$

para todo $p \in \mathbb{N}$, o que termina a prova. $\square$

(2.4) <u>Proposição</u>. Sejam (M_k) e ρ como em (2.1). Suponha que existam números reais positivos K e a tais que $M_k(2u) \leqq K\, M_k(u)$, para todo $u \geqq 0$ com $M_k(u) \leqq a$, e para todo $k \in \mathbb{N}$. Nestas condições, se $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de elementos de $X\rho$ então $\lim \|x^n\|_\rho = 0$ se, e somente se, $\lim \rho(x^n) = 0$.

Prova. Decorre de (1.19) visto que, com estas hipóteses, ρ satisfaz a condição Δ_2 (ver (1.18)). $\square$

Definiremos, agora, espaços seqüenciais modulares. Antes, porém, algumas considerações sobre funções de Orlicz são necessárias.

(2.5) <u>Definição</u>. Uma função não-nula $M:[0,\infty[\to[0,\infty[$ é dita <u>função de Orlicz</u> se $M(0) = 0$, $M(u) > 0$ para todo $u > 0$, e M é convexa em $[0,\infty[$, isto é,

$$M(au + (1-a)v) \leqq a\,M(u) + (1-a)M(v)$$

para todo $a \in [0,1]$ e todo $u,v \in [0,\infty[$.

(2.6) <u>Proposição</u>. Seja M uma função de Orlicz. Tem-se que

(i) se $0 \leqq u_1 < u_2 < u_3$ então

$$\frac{M(u_2) - M(u_1)}{u_2 - u_1} \leqq \frac{M(u_3) - M(u_1)}{u_3 - u_1} \leqq \frac{M(u_3) - M(u_2)}{u_3 - u_2};$$

(ii) M é uma função contínua e crescente;

(iii) $M(u)/u$ é uma função contínua e não-decrescente em $]0,\infty[$;

(iv) $\lim\limits_{u\to\infty} M(u) = \infty$.

Prova. Se $0 \leqq u_1 < u_2 < u_3$ então

$$u_2 = \left(\frac{u_3 - u_2}{u_3 - u_1}\right)u_1 + \left(\frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}\right)u_3,$$

e pela convexidade de M temos que

$$M(u_2) \leqq \frac{u_3 - u_2}{u_3 - u_1} M(u_1) + \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1} M(u_3)$$

e daí obtemos (i).

Sejam $u,b \in [0,\infty[$ com $u < b$. Se v_1 é tal que $0 \leqq u < v_1 < b$ então de (i) temos que

$$\frac{M(v_1) - M(u)}{v_1 - u} \leqq \frac{M(b) - M(u)}{b - u},$$

de onde segue que M é contínua à direita em u. Analogamente, prova-se a continuidade à esquerda em u.

Tomemos, agora, números reais u,v onde $0 < u < v$. Assim, como M é convexa temos que

$$M(u) = M(\frac{u}{v} v + (1 - \frac{u}{v})0)$$

$$\leq \frac{u}{v} M(v).$$

Dessa desigualdade segue que M é crescente e o ítem (iii).

Suponhamos que $\lim\limits_{u\to\infty} M(u) = K < \infty$. Então $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{M(u)}{u} = 0$, o que é um absurdo por causa do ítem (ii) e do fato de M ser não-nula. □

(2.7) <u>Definição</u>. Se (M_k) é uma seqüência de funções de Orlicz então definimos o a função ρ: $X\to[0,\infty]$ por

$$\rho((x_k)) = \Sigma\, M_k(|x_k|)$$

e o conjunto $\ell(M_k)$ pela igualdade

$$\ell(M_k) = \{(x_k) \in X: \Sigma M_k(\frac{|x_k|}{t}) < \infty, \text{ para algum } t>0\}.$$

Segue, imediatamente, da definição anterior o seguinte resultado.

(2.8) <u>Proposição</u>. Sendo (M_k), ρ e $\ell(M_k)$ como em (2.7) temos que ρ é um modular convexo em X e que $\ell(M_k) = X_\rho$.

Em conseqüência temos o seguinte.

(2.9) <u>Proposição</u>. Seja (M_k) uma seqüência de funções de Orlicz. Se para todo $(x_k) \in \ell(M_k)$ definimos

$$\|(x_k)\| = \inf\{t > 0 : \Sigma\, M_k(\frac{|x_k|}{t}) \leqq 1\}$$

então $(\ell(M_k), \|\ \|)$ é um espaço de Banach, chamado de <u>espaço seqüencial modular</u>.

Prova. Devido a (2.6.ii) vale (2.2.iii). Assim o resultado segue de (1.34) e de (1.36). □

(2.10) <u>Proposição</u>. Se (M_k) e ρ são como em (2.9) então para todo $(x_k) \in \ell(M_k)$

$$\rho(\frac{(x_k)}{\|(x_k)\|}) = \Sigma\, M_k(\frac{(x_k)}{\|(x_k)\|}) \leqq 1.$$

Prova. É fácil usando o mesmo raciocínio da prova de (2.3). □

(2.11) <u>Proposição</u>. Sejam (M_k) e ρ como em (2.9) e (x^n) uma seqüência de elementos de $\ell(M_k)$ onde $x^n = (x_k^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então (x^n) converge para $x = (x_k)$ se, e somente se, para todo $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} M_k(\alpha|x_k^n - x_k|) = 0.$$

Prova. É conseqüência de (1.36.ii). □

O espaço vetorial que definiremos a seguir já foi estudado por vários autores e é conhecido como espaço seqüencial de Orlicz.

(2.12) <u>Definição</u>. Se $M_k = M$ para todo $k \in \mathbb{N}$ então $\ell(M_k)$ é indicado por $\ell(M)$, e é chamado de <u>espaço seqüencial de Orlicz</u>.

Outros modulares podem ser definidos no espaço X das seqüências de números reais.

(2.13) <u>Definição</u>. Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja $M_k\colon [0,\infty[\to[0,\infty[$ uma função contínua, não-decrescente, tal que $M(u) = 0$ se, e somente se, $u = 0$. Definimos as funções ρ^1 e ρ^2 em X pelas igualdades

$$\text{(i)}\quad \rho^1((x_k)) = \sup_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} M_k(|x_k|),$$

e

$$\text{(ii)}\quad \rho^2((x_k)) = \sup_{k\in\mathbb{N}} M_k(|x_k|).$$

(2.14) <u>Proposição</u>. Sejam (M_k), ρ^1 e ρ^2 como em (2.13). Então,

(i) ρ^1 e ρ^2 são modulares em X;

(ii) X_{ρ^1} e X_{ρ^2} são espaços métricos completos;

(iii) $\bar{X}_{\rho^1}$ e $\bar{X}_{\rho^2}$ são espaços de Fréchet.

Prova. O ítem (i) segue, facilmente, da definição (2.13) e, (iii) é decorrência imediata de (ii) e (1.26).

Vamos provar (ii) somente para o modular ρ^1, pois a prova é análoga no caso de ρ^2.

Seja $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de X_{ρ^1} com $\lim\limits_{n,m\to\infty} \rho^1(x^n-x^m) = 0$. Mostraremos que existe $y = (y_k) \in X_{\rho^1}$ tal que $\lim \rho^1(x^n-y) = 0$ e o resultado seguirá de (1.17).

Sendo $x^n = (x_k^n)$ então $\lim\limits_{n,m\to\infty} \rho^1(x^n-x^m) = 0$ implica que $\lim\limits_{n,m\to\infty} M_k(|x_k^n-x_k^m|) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Das propriedades da função M_k segue que $\lim\limits_{n,m\to\infty} |x_k^n-x_k^m| = 0$. Seja $y_k = \lim x_k^n$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $\rho^1(x^n - x^m) < \varepsilon$ para todo $n,m \geqq n_o$.

Então se $n \geqq n_o$ e $p \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} M_k(|x_k^n - y_k|) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} M_k(|x_k^n - x_k^m|) \leqq \varepsilon.$$

Portanto $\sup_{p\in\mathbb{N}} \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} M_k(|x_k^n - y_k|) \leqq \varepsilon$ para todo $n \geqq n_o$, isto é, $\lim_{n\to\infty} \rho^1(x^n - y) = 0$.

E se $\alpha > 0$ é tal que $\rho^1(\alpha x^{n_o}) < \infty$ e $\beta = \min\{1,\alpha\}$, então $\rho^1((\beta/2)y) \leqq \rho(\beta(x^{n_o} - y)) + \rho(\beta x^{n_o}) < \infty$, e, portanto, $y = (y_k) \in X_{\rho^1}$. $\square$

(2.15) <u>Observação</u>. É fácil ver que se $(x_k) \in X$ então $\rho^1((x_k)) \leqq \rho^2((x_k)) \leqq \rho((x_k))$ e, conseqüentemente, $X_\rho \subset X_{\rho^2} \subset X_{\rho^1}$.

(2.16) <u>Proposição</u>. Se (M_k) é uma seqüência de funções de Orlicz, então os modulares ρ^1 e ρ^2, dados em (2.13), são convexos e X_{ρ^1} e X_{ρ^2} são espaços de Banach. Tem-se que X_{ρ^2} é isométrico a ℓ_∞.

Prova. Devido a (2.6.ii) estão verificadas as hi póteses de (2.14). Então é fácil ver que ρ^1 e ρ^2 são modulares convexos, e que por (2.14.ii) e (1.36.i) temos que X_{ρ^1} e X_{ρ^2} são espaços de Banach. Resta provar que X_{ρ^2} e ℓ_∞ são isométricos.

Segue de (2.6.ii) que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\alpha_k > 0$ tal que $M_k(\alpha_k) = 1$. Definimos ϕ: $\ell_\infty \to \ell(M_k)$ por $\phi((x_k)) = (\alpha_k x_k)$.

É fácil verificar que ϕ é uma função linear bijetora. Se $(x_k) \in \ell_\infty$ é claro que $\rho^2\left(\frac{(\alpha_k x_k)}{\|(x_k)\|_\infty}\right) \leq 1$, e daí

$\|\phi((x_k))\| \leq \|(x_k)\|_\infty$. Por outro lado, se $(y_k) = \phi((x_k)) \in \ell(M_k)$ então $M_k\left(\frac{|y_k|}{\|(y_k)\|}\right) \leq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e daí $|y_k| \leq \alpha_k \|(y_k)\|$

o que implica que $|x_k| \leq \|(y_k)\|$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto $\|\phi((x_k))\| = \|(x_k)\|$. $\square$

Em (2.17) e (2.18) daremos condições necessárias e suficientes para que $\bar{X}_{\rho^1} = X_{\rho^1}$ e $\bar{X}_{\rho^2} = X_{\rho^2}$ quando $M_k = M$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Isto nos garante que existem espaços modulares que não são espaços vetoriais topológicos.

(2.17) <u>Proposição</u>. Seja $M: [0,\infty[\to [0,\infty[$ uma função contínua, não-decrescente e tal que $M(u) = 0$ se, e somente se, $u = 0$. Se ρ^2 é como em (2.13.ii) com $M_k = M$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então as seguintes asserções são equivalentes:

(i) $\bar{X}\rho^2 = X\rho^2$;

(ii) $\lim\limits_{u\to\infty} M(u) = \infty$.

Prova. Suponhamos que $\lim\limits_{u\to\infty} M(u) = \infty$. Sejam $(x_k) \in X\rho^2$ e $\alpha > 0$ tais que $\rho^2(\alpha(x_k)) < \infty$. Como $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} M(\alpha|x_k|) < \infty$ então para algum $\beta > 0$ tem-se $\alpha|x_k| < \beta$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto se (a_n) é uma seqüência de números reais positivos com $\lim a_n = 0$ então

$$\lim \rho^2(a_n\alpha|x_k|) \leqq \lim M(a_n\beta) = 0,$$

o que implica que $(x_k) \in \bar{X}\rho^1$.

Por outro lado, se $\lim\limits_{u\to\infty} M(u) = L < \infty$ então $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} M(k) = L$. Assim, sendo $x_k = k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, a seqüência $(x_k) \in X\rho^2$ e $(x_k) \notin \bar{X}\rho^2$, pois para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\rho^2(\frac{1}{n}(x_k)) = \sup_{k\in\mathbb{N}} M(\frac{k}{n}) = L$$

e daí $\lim\limits_{n\to\infty} \rho^2(\frac{1}{n}(x_k)) = L > 0$. $\square$

(2.18) <u>Proposição</u>. Seja $M: [0,\infty[\to[0,\infty[$ uma função contínua, não decrescente, e tal que $M(u) = 0$ se, e somente se, $u = 0$. Se ρ^1 é como em (2.13.i) com $M_k = M$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então as seguintes asserções são equivalentes:

(i) $\bar{X}\rho^1 = X\rho^1$,

(ii) para todo $\varepsilon > 0$ existem números reais positivos a_ε e u_ε tais que $M(a_\varepsilon u) \leq \varepsilon\, M(u)$ para todo $u \in [u_\varepsilon, \infty[$.

Prova. Suponhamos que (ii) seja verdadeiro. Sejam $(x_k) \in X\rho^1$ e $\alpha > 0$ com $\rho^1(\alpha(x_k)) < \infty$, e (b_n) uma seqüência de números reais positivos com $\lim b_n = 0$. Tomemos $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $b_n < \alpha\, a_\varepsilon$ e $M(b_n u_\varepsilon/\alpha) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_o$. Assim, para todo $n \geq n_o$ e $p \in \mathbb{N}$ temos

$$\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} M(b_n|x_k|) = \frac{1}{p}\sum_{\substack{k=1\\ \alpha|x_k|<u_\varepsilon}}^{p} M(b_n|x_k|) + \frac{1}{p}\sum_{\substack{k=1\\ \alpha|x_k|\geq u_\varepsilon}}^{p} M(b_n|x_k|)$$

$$\leq \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} M(b_n\frac{u_\varepsilon}{\alpha}) + \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} \varepsilon M(\alpha|x_k|)$$

$$\leq M(\frac{b_n}{\alpha}u_\varepsilon) + \varepsilon\rho^1(\alpha(x_k)),$$

e, portanto

$$\rho^1(b_n(x_k)) \leq M(\frac{b_n}{\alpha}u_\varepsilon) + \varepsilon\rho^1(\alpha(x_k))$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon\rho^1(\alpha(x_k)),$$

o que implica que $(x_k) \subset \bar{X}\rho^1$.

Provemos, agora, que (i) implica (ii). Para isso suponhamos que (ii) seja falso. Então existem $\varepsilon > 0$ e seqüências de números reais positivos (a_n) e (u_n) tais que (a_n) é decrescente, (u_n) é crescente, $\lim a_n = 0$, $\lim u_n = \infty$, e $M(a_n u_n) > \varepsilon M(u_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos exibir uma seqüência $(x_k) \in X\rho^1$ mas $(x_k) \notin \bar{X}\rho^1$. Para isso definiremos duas seqüências de índices (n_i) e (n_i') e uma seqüência de números reais (x_k) por indução, satisfazendo

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(x_k) < 2, \quad \forall\, n \leq n_i', \tag{1}$$

$$\frac{1}{2} \leq \left(1 - \frac{n_i}{n_i'}\right)M(u_i) < 1. \tag{2}$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que $M(u_1) > 1$. Sejam

$$n_1 = \min\{n \in \mathbb{N}: 2M(u_1) < n\}$$

$$n_1 = \max\{n \in \mathbb{N}: (1 - \frac{n_1}{n})M(u_1) < 1\}$$

É fácil verificar que $n_1' \geqq n_1 + 2 > n_1$ e que $(1 - \frac{n_1}{n_1'})M(u_1) < 1$. Temos, também, que $(1 - \frac{n_1}{n_1'})M(u_1) > \frac{1}{2}$. De fato se $\alpha = \frac{M(u_1)}{(M(u_1)-1)(2M(u_1)-1)}$ então $[\frac{2M(u_1)}{2M(u_1)-1}n_1 + \alpha n_1]^{(1)} = n_1'$

e daí, como $\alpha n_1 > 1$

$$(1 - \frac{n_1}{n_1'})M(u_1) > (1 - \frac{(2M(u_1) - 1)}{2M(u_1)})M(u_1) = \frac{1}{2}$$

Definimos

$$x_k = \begin{cases} 0, & 1 \leqq k \leqq n_1 \\ u_1, & n_1 \leqq k \leqq n_1' \end{cases}$$

e, assim, se $n \leqq n_1'$ então $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} M(x_k) < 2$.

Suponhamos que já estejam determinados n_{i-1}, n_{i-1}' e x_k para $k \leqq n_{i-1}'$ satisfazendo (1) e (2). Então sejam

$$n_i = \min\{n \in \mathbb{N}: n_{i-1}' < n, 2M(u_i) < n \text{ e } \sum_{k=1}^{n_{i-1}'} M(x_k) < n\}$$

---

(1) *[β] indica o maior inteiro contido em β.*

$$n_i' = \max\{n \in \mathbb{N}: (1 - \frac{n_i}{n})M(u_i) < 1\}$$

Novamente temos que $n_i' \geq n_i + 2 \geq n_i'$ e que

$$\frac{1}{2} < (1 - \frac{n_i}{n_i'})M(u_i) < 1$$

de onde segue (2).

Sendo

$$x_k = \begin{cases} 0, & n_{i-1}' < k \leq n_i \\ u_i, & n_i < k \leq n_i' \end{cases}$$

então para $n_i < n \leq n_i'$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} M(x_k) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_{i-1}'} M(x_k) + (\frac{n - n_i}{n})M(u_i)$$

$$< 1 + 1 = 2$$

donde decorre (1).

Temos que $(x_k) \in X\rho^1$. De fato de (1)

$$\rho^1((x_k)) = \sup \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} M(x_k) \leq 2.$$

Entretanto para todo $i \in \mathbb{N}$

$$\rho^1(a_i)(x_k)) = \sup \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} M(a_i x_k)$$

$$\geq \frac{1}{n_i} \sum_{k=n_i+1}^{n_i'} M(a_i x_k)$$

$$= \frac{1}{n_i}(n_i'-n_i)M(a_i u_i)$$

$$> \varepsilon(1-\frac{n_i}{n_i'})M(u_i) > \frac{1}{2}\varepsilon$$

e, portanto $(x_k) \notin \bar{X}\rho^1$. □

EXEMPLO II. Modulares em espaços de funções.

(2.19) Definição. Seja $(E,\mathcal{M},u)$ um espaço de medida σ-finito, onde E é um espaço topológico completo. Denotaremos por X o espaço das funções de E em $\bar{\mathbb{R}}$, $\mathcal{M}$-mensuráveis, finitas μ-quase-sempre.

Seja M: $E \times [0,\infty[\to[0,\infty[$ uma função tal que

(i) $M(u,v) = 0 \iff v=0$;

(ii) para cada $u \in E$, a função M_u, definida por $M_u(v) = M(u,v)$ para todo $v \geq 0$, é contínua e não-decrescente;

(iii) para cada $v \in [0,\infty[$, a função M^v definida por $M^v(u) = M(u,v)$ para todo $u \in E$, é uma função $\mathcal{M}$-mensurável.

Para cada $x \in X$ definimos

$$\rho(x) = \int_E M(t,|x(t)|)d\mu.$$

(2.20) Proposição. Se X e ρ são como em (2.19) então

(i) ρ é um pseudo-modular em X;

(ii) $\bar{X}_\rho = X_\rho$.

Prova. Em primeiro lugar é preciso mostrar que ρ está bem definida.

Então provemos que a função $f: E \to [0,\infty[$ dada por $f(t) = M(t,|x(t)|)$ é $\mathcal{M}$-mensurável, para cada $x \in X$.

Primeiramente, suponhamos que x seja uma função simples não-negativa, ou melhor, $x = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$, onde $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$ e $a_i \neq a_j$ se $i \neq j$.

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ então

$$f^{-1}(]\alpha,\infty[) = \{t \in E:\ f(t)>\alpha\}$$

$$= \{t \in E: M(t, \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}(t)) > \alpha\}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} \{t \in A_i: M(t, a_i) > \alpha\}$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} (A_i \cap M_{a_i}^{-1}(]\alpha, \infty[))$$

e este conjunto é, portanto, $\mathcal{M}$-mensurável.

Seja agora $x \in X$ uma função $\mathcal{M}$-mensurável, e (ϕ_n) uma seqüência de funções simples não-negativas tais que $\lim \phi_n(t) = |x(t)|$ para todo $t \in [0, \infty[$.

Pela propriedade (2.19.ii) tem-se

$$\begin{aligned} f(t) &= M(t, |x(t)|) \\ &= M(t, \lim \phi_n(t)) \\ &= \lim M(t, \phi_n(t)) \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, \infty[$, e como por (2.19.iii) $M(t, \phi_n(t))$ é $\mathcal{M}$-mensurável para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é uma função $\mathcal{M}$-mensurável.

Decorre, facilmente, de (2.19.i) e (2.19.ii) que ρ é um pseudo-modular em X.

Para mostrarmos que $\bar{X}_\rho = X_\rho$, tomemos uma seqüência de números reais positivos (a_n) tal que $\lim a_n = 0$.

Sejam $x \in X\rho$ e $\alpha > 0$ tais que

$$\rho(\alpha X) = \int_E M(t,\alpha|x(t)|)d\mu < \infty.$$

E seja $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leqq \alpha$ para todo $n \geqq n_o$.

De (2.19.ii) vem que $\lim_{n\to\infty} M(t,|a_n x(t)|) = 0$ para todo $t \in E$, e daí, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que $\lim_{n\to\infty} \int_E M(t,|a_n x(t)|d\mu) = 0$.

Portanto, $x \in \bar{X}\rho$ o que termina a demonstração. □

Também é verdade que $X\rho$ é um espaço pseudo-métrico completo, e para provarmos isso precisamos dos seguintes resultados.

(2.21) Lema. Seja $(E, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida finita e f uma função $\mathcal{M}$-mensurável. Então dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$A \in \mathcal{M} \text{ e } \int_A f(t)d\mu < \delta \Rightarrow \mu(A) < \varepsilon$$

Prova. Para cada $A \in \mathcal{M}$ definimos a medida $\nu(A) = \int_A f(t)d\mu$. Então verifica-se que $\int_E hd\nu = \int_E hfd\mu$ para toda $h: E \to [0,\infty[$ $\mathcal{M}$-mensurável.

Seja $g(t) = 1/f(t)$ para todo $t \in E$. Então

$g \in \mathcal{L}_1(E,M,\nu)$ pois $\int_E f(t)g(t)d\mu = \mu(E) < \infty$.

Dado $\varepsilon > 0$ decorre de [HS-(12.34)] que existe $\delta > 0$ tal que, se $A \in M$ e $\nu(\Delta) < \delta$, então $\int_A g(t)d\nu < \varepsilon$.

Como $\nu(\Delta) = \int_A f(t)d\mu$ e

$$\int_A g(t)d\nu = \int_A g(t)f(t)d\mu = \mu(\Gamma),$$

o tema está provado. □

O próximo resultado facilitará a demonstração de (2.23).

(2.22) <u>Lema</u>. Sejam X e ρ como em (2.18) e $\mu(E)<\infty$. Se (x_n) é uma seqüência de elementos de $X\rho$, com $\lim_{n,m\to\infty} \rho(x_n - x_m) = 0$, então (x_n) é de Cauchy em medida.

Prova. Sejam ε e ε' números reais positivos arbitrários. Consideremos $f:E \to [0,\infty[$ definida por $f(t)=M(t,\varepsilon')$. Por (2.19.iii) e (2.19.i) temos que f é M-mensurável e que $f(t) > 0$ para todo $t \in E$.

Seja $\delta > 0$ como em (2.21). Então existe $n_o \in \mathbb{N}$

tal que

$$\rho(x_m - x_m) = \int_E M(t,|x_n(t) - x_m(t)|)d\mu < \delta$$

para todo $n,m \geq n_o$.

Se $A_{n,m} = \{t \in E: |x_n(t)-x_m(t)| > \varepsilon'\}$ então

$$\int_{A_{n,m}} f(t)d\mu = \int_{A_{n,m}} f(t,\varepsilon')d\mu \leqq \int_{A_{n,m}} f(t,|x_n(t)-x_m(t)|d\mu<\varepsilon$$

De (2.21) segue que $\mu(A_{n,m}) < \varepsilon$ o que prova que (x_n) é de Cauchy em medida. □

(2.23) Teorema. Se X e ρ são como em (2.19) então X_ρ é um espaço pseudo-métrico completo.

Prova. Seja (x_n) uma seqüência de elementos de X_ρ tal que $\lim \rho(x_n-x_m) = 0$. Mostraremos que existe $x \in X_\rho$ tal que $\lim \rho(x_n-x) = 0$, e daí por (1.17) seguirá que X_ρ é completo.

Como E é σ-finito existe uma seqüência (E_j) de $\mathcal{M}$ tal que $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, $E_j \subset E_{j+1}$ e $\mu(E_j) < \infty$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Por (2.22) e [Ba-p.70] temos que, para cada $j \in \mathbb{N}$, a seqüência (x_n) converge em medida para uma função y_j $\mathcal{M}$-mensurável em E_j. Então existe uma subseqüência $(x^j_{n_k})$

que converge μ-quase-sempre para y_j em E_j. Daí por (2.19.ii)

$$\lim_{k\to\infty} M(t,|x_n(t)-x^j_{n_k}(t)|)=M(t,|x_n(t)-y_j(t)|) \qquad (1)$$

μ-quase-sempre.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\rho(x_n-x_m) = \int_E M(t,|x_n(t) - x_m(t)|)d\mu < \varepsilon$$

para todo $n,m \geq n_o$. Então por (1) e pelo Lema de Fatou temos que

$$\int_{E_j} M(t,|x_n(t)-y_j(t)|)d\mu \leqq \lim_{k\to\infty} \int_{E_j} M(t,|x_n(t)-x^j_{n_k}(t)|)d\mu$$

$$\leqq \lim_{k\to\infty} \int_E M(t,|x_n(t)-x^j_{n_k}(t)|)d\mu \leqq \varepsilon \quad (2)$$

para todo $n \geqq n_o$, e todo $j \in \mathbb{N}$.

Definimos $x: E \to \mathbb{R}$ por indução da seguinte forma. Seja $x(t) = y_1(t)$ se $t \in E_1$. Se x está definida em E_{j-1} com $j > 1$ então tomamos $x(t) = y_j(t)$ para todo $t \in E_j \sim E_{j-1}$.

Como (x_n) converge em medida para y_{j-1} e para y_j em E_{j-1}, então $y_{j-1} = y_j$ μ-quase-sempre em E_{j-1} e, portanto, $x = y_j$ μ-quase-sempre em E_j.

Usando o Teorema da Convergência Monótona e a relação (2) temos que

$$\rho(x_n - x) = \int_E M(t, |xn(t) - x(t)|) d\mu$$

$$= \lim_{j\to\infty} \int_{E_j} M(t, |x_n(t) - x(t)|) d\mu$$

$$= \lim_{j\to\infty} \int_{E_j} M(t, |x_n(t) - y_j(t)|) d\mu \leqq \varepsilon$$

para todo $n \geqq n_o$.

É claro que $x \in X\rho$ pois, se $\alpha > 0$ for tal que $\rho(\alpha x_{n_o}) < \infty$ e $\beta = \min\{1, \alpha\}$, então, por (1.1.iii) e (1.4.ii),

$$\rho(\tfrac{\beta}{2} x) \leqq \rho(x_{n_o} - x) + \rho(\alpha x_{n_o}). \quad \square$$

(2.24) <u>Corolário</u>. Sejam X e ρ como em (2.19) e $X_o = \{x \in X : x = 0$ μ-quase-sempre$\}$. Então o espaço quociente $Y = X\rho / X_o$ é um espaço métrico completo.

Prova. É fácil mostrar, usando (2.19.i) que

$$\{x \in X : x = 0 \ \mu\text{-quase-sempre}\} = \{x \in X\rho : \rho(x) = 0\}$$

$$= \{x \in X\rho : \|x\| = 0\}$$

Então o resultado segue de (1.38). $\square$

(2.25) Corolário. Sejam X e ρ como em (2.19) e $X_0 = \{x \in X: x = 0\ \mu\text{-quase-sempre}\}$. Se para cada $u \in E$ a função M_u é uma função de Orlicz (2.5), então $Y = X_\rho / X_0$ é um espaço de Banach.

Prova. Como ρ é um pseudo-modular convexo em X, podemos definir a semi-norma $\|\ \|$ em $X\rho$ como em (1.33). Daí por (2.23) e (1.38), $X\rho$ é completo. Sendo

$$\{x \in X: x = 0\ \mu\text{-quase-sempre}\} = \{x \in X\rho: \|x\| = 0\}$$

então o resultado segue de (1.38). □

(2.26) Observação. Se $E = \mathbb{N}$ e μ é a medida de contagem então podemos escrever $\rho(x) = \int_E M(t, x(t))\, d\mu = \Sigma M_k(|x_k|)$ onde $M_k(u) = M(k,u)$ e $x(k) = x_k$. Logo o modular definido em (2.1) é um caso particular de (2.19).

(2.27) Observação. Sejam N uma função de Orlicz e $p: E \to [1, \infty[$, uma função mensurável. Se definirmos

$$\rho(x) = \int_E (N(|x(t)|))^{p(t)} d\mu$$

então por (2.25) $Y = X\rho / X_0$ é um espaço de Banach.

Se, em particular, $p(t) = 1$ então Y é chamado de <u>espaço de Orlicz</u> e denotado por L_N.

Veremos a seguir um outro exemplo de pseudo-modular.

(2.28) <u>Definição</u>. Seja $E = [0,\infty[$ e X como em (2.19). Seja $M: [0,\infty[\to [0,\infty[$ uma função não-decrescente com $M(0) = 0$. Definimos a função ρ^1 em X pela igualdade

$$\rho^1(x) = \overline{\lim_{\alpha\to\infty}} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha M(|x(t)|)d\mu.$$

(2.29) <u>Proposição</u>. Se M e ρ^1 são como em (2.28) então

(i) ρ^1 é um pseudo-modular em X;

(ii) $X\rho^1$ é um espaço pseudo-métrico completo.

Prova. Decorre, facilmente, das propriedades da função M que ρ^1 é um pseudo-modular em X.

Seja (x_n) uma seqüência de X_{ρ^1} tal que $\lim\limits_{n,m\to\infty} (x_n - x_m) = 0$. Mostraremos que existe $y \in X_{\rho^1}$ tal que

$\lim \rho((x_n-y)/4) = 0$ e, assim, (ii) decorrerá de (1.17).

Se $k \in \mathbb{N}$ então existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $\rho(x_n - x_{n_k}) < 1/k$ para todo $n \geq n_k$. Definiremos uma seqüência de números reais positivos (α_i) por indução.

Seja $\alpha_1 = 1$ e suponha definido α_i satisfazendo

(a) se $\alpha \geqq \alpha_i$ então

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} M(x_{n_k}(t) - x_{n_i}(t))d\mu < \frac{1}{k}, \quad k \in \{1,2,\ldots,i-1\}$$

e

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} M(x_{n_i}(t) - x_{n_{i+1}}(t))d\mu < \frac{1}{i};$$

(b) $\alpha_i > 2\alpha_{i-1}$;

e vamos mostrar que existe α_{i+1} satisfazendo condições análogas a (a) e (b).

Como $\rho(x_{n_k} - x_{n_{i+1}}) < 1/k$ para todo $k \in \{1,2,\ldots,i\}$, existe $\alpha_o > 0$ tal que

$$\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} M(x_{n_k}(t) - x_{n_{i+1}}(t))d\mu < \frac{1}{k}$$

para todo $\alpha > \alpha_o$. Do mesmo modo tendo que $\rho(x_{n_{i+1}} - x_{n_{i+2}}) < 1/(i+1)$, existe $\alpha_1 > 0$ tal que

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} M(x_{n_{i+1}}(t) - x_{n_{i+2}}(t))d\mu < \frac{1}{(i+1)}$$

para todo $\alpha > \alpha_i$. Basta, então, tomar $\alpha_{i+1} > \max\{\alpha_0, \alpha_1, 2\alpha_i\}$.

Definimos a função $y:[0,\infty[\to [0,\infty[$ por $y(t)=x_{n_i}(t)$, se $t \in [\alpha_{i-1},\alpha_i[$.

Seja $k \in \mathbb{N}$. Para todo $m \geq k$ e $\alpha > \alpha_m$ temos que

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^{\alpha} M(\frac{x_{n_k}(t)-y(t)}{2})d\mu = \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{k}\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} M(\frac{x_{n_k}(t)-x_{n_i}(t)}{2})d\mu +$$

$$+\frac{1}{\alpha}\sum_{i=k+1}^{m}\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} M(\frac{x_{n_k}(t)-x_{n_i}(t)}{2})d\mu + \frac{1}{\alpha}\int_{\alpha_m}^{\alpha} M(\frac{x_{n_k}(t)-x_{n_{m+1}}(t)}{2})d\mu \quad (1)$$

Segue de (a) e do fato de M ser não-decrescente que

$$\frac{1}{\alpha}\sum_{i=k+1}^{m}\int_{\alpha_{i+1}}^{\alpha_i} M(\frac{x_{n_k}(t)-x_{n_i}(t)}{2})d\mu$$

$$\leq \frac{1}{\alpha_m}\sum_{i=k+1}^{m}\alpha_i\cdot\frac{1}{\alpha_i}\int_0^{\alpha_i} M(x_{n_k}(t) - x_{n_i}(t))d\mu$$

$$\leq \frac{1}{\alpha_m}\sum_{i=k+1}^{m}\alpha_i\cdot\frac{1}{k} < 2\frac{1}{k},$$

e que

$$\frac{1}{\alpha}\int_{\alpha_m}^{\alpha} M\left(\frac{x_{n_k}(t)-x_{n_{m+1}}(t)}{2}\right)d\mu \leq$$

$$\leq \frac{1}{\alpha}\int_{o}^{\alpha} M(x_{n_k}(t)-x_{n_m}(t))d\mu + \frac{1}{\alpha}\int_{o}^{\alpha} M(x_{n_m}(t)-x_{n_{m+1}}(t))d\mu$$

$$< \frac{1}{k} + \frac{1}{m}.$$

Sendo $K = \sum_{i=1}^{k} \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} M\left(\frac{x_{n_k}(t)-x_{n_i}(t)}{2}\right)d\mu$ então de (1)

e das desigualdades acima vem que

$$\frac{1}{\alpha}\int_{o}^{\alpha} M\left(\frac{x_{n_k}(t)-y(t)}{2}\right)d\mu < \frac{1}{\alpha}K + 3\frac{1}{k} + \frac{1}{m}$$

Portanto $\rho((x_{n_k} - y)/2) < 3/k$.

Assim para todo $n \geqq n_k$

$$\rho\left(\frac{x_n-y}{4}\right) \leqq \rho\left(\frac{x_n-x_{n_k}}{2}\right) + \rho\left(\frac{x_{n_k}-y}{2}\right) < 4\frac{1}{k}.$$

o que implica que $\lim \rho((x_n-y)/4) = 0$. □

Introduziremos, agora, um modular no espaço das funções definidas num intervalo fechado [a,b].

(2.30) Definição. Seja $M:[0,\infty[\to [0,\infty[$ uma função contínua, não-decrescente, e tal que $M(u) = 0$ se, e somente se, $u = 0$. Denotamos por Z o conjunto das funções reais definidas no intervalo $[a,b]$ e que se anulam no ponto a. Para cada $x \in Z$ definimos

$$\rho^2(x) = \sup_{\pi} \sum_{i=1}^{k} M(|x(t_i)-x(t_{i-1})|)$$

onde π é o conjunto das divisões de $[a,b]$.

(2.31) Proposição. Se Z e ρ^2 são como em (2.30) então

(i) ρ^2 é um modular em Z;

(ii) $Z\rho^2$ é um espaço métrico completo.

Prova. Decorre, facilmente, das propriedades de M que ρ^2 é um modular em Z.

Para mostrar que $Z\rho^2$ é completo, tomemos uma seqüência (x_n) de $Z\rho^2$ tal que $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m\|\rho^2 = 0$.

Então para todo $\alpha > 0$ $\lim\limits_{n,m\to\infty} \rho(\alpha(x_n - x_m) = 0$. Como $x_n(a) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim\limits_{n,m\to\infty} M(|x_n(t)-x_m(t)|) = 0$, e daí $\lim_{n,m\to\infty}|x_n(t)-x_m(t)| = 0$ para todo $t \in [a,b]$. Sendo assim, definimos a função $x:[a,b] \to \mathbb{R}$ por $x(t)=\lim x_n(t)$ para todo $t \in [a,b]$.

Mostraremos que $\lim \|x_n-x\|_{\rho^2} = 0$ e que $x \in Z\rho^2$.

Dados $\alpha > 0$ e $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n,m \geq n_0$ então

$$\rho^2(\alpha(x_n-x_m))=\sup_{\pi} \sum_{i=1}^{k} M(|x_n(t_i)-x_n(t_{i-1})-x_m(t_i)+x_m(t_{i-1})|) < \varepsilon.$$

Então se $\{t_0,t_1,\ldots t_n\}$ é uma divisão de $[a,b]$ e $n \geq n_0$, temos que

$$\sum_{i=1}^{k} M(\alpha|x_n(t_i)-x_n(t_{i-1})-x(t_i) + x(t_{i-1})|) =$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{k} M(\alpha|x_n(t_i)-x_n(t_{i-1})-x_m(t_i)+x_m(t_{i-1})|) \leq \varepsilon,$$

e daí $\rho^2(\alpha(x_n-x)) \leq \varepsilon$. Portanto $\lim\|x_n-x\|_{\rho^2} = 0$.

E $x \in Z\rho^2$ pois para todo $\alpha > 0$ temos que $\rho^2(2\alpha x) \leq \rho(\alpha(x_{n_0}-x)) + \rho(\alpha x_{n_0})$. $\square$

(2.32) <u>Observação</u>. Se $M(u) = u$ então $\rho^2(x)$ é a variação da função x em $[a,b]$. Por isso, no caso de uma função

M qualquer chamamos de $\rho^2(x)$ a M-variação da função x em [a,b].

(2.33) <u>Observação</u>. É claro que se M é uma função de Orlicz então por (2.6.ii) podemos definir o modular ρ^2 em Z (2.30). Portanto segue de (2.31) e (1.36.i) que $Z\rho^2$ é um espaço de Banach.

CAPÍTULO II

§3. BASES EM ESPAÇOS DE BANACH

Neste parágrafo reunimos os resultados sobre bases em espaços de Banach, que serão necessários no restante do trabalho, principalmente no parágrafo 7.

Em conseqüência da finalidade deste parágrafo, não apresentaremos, aqui, as demonstrações de alguns teoremas, que tornariam este trabalho desnecessariamente longo. Tais demonstrações, bem como um estudo detalhado sobre bases em espaços de Banach, podem ser encontradas em [LT - Cap.1].

A menos que haja menção em contrário, os espaços de Banach considerados serão de dimensão infinita, e X indicará um espaço de Banach qualquer.

(3.1) Definição. Seja (x_n) uma seqüência de elementos de X. Dizemos que (x_n) é uma base de Schauder de X, ou simplesmente uma <u>base de X</u>, se para cada $x \in X$ existe uma única seqüência de números reais (a_n) tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$.

(3.2) <u>Proposição</u>. Seja (x_n) uma base de X. Então as seguintes asserções são verdadeiras:

(i) se para todo $x = \Sigma a_n x_n \in X$, definimos

$$|||x||| = \sup \|\sum_{n=1}^{k} a_n x_n\|$$

então a função que a cada $x \in X$ associa o número real $|||x|||$ é uma norma em X;

(ii) $(X, |||\ \ |||)$ é um espaço de Banach;

(iii) existe $L > 0$ tal que $\|x\| \leq |||x||| \leq L \|x\|$, para todo $x \in X$;

(iv) se para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos $P_k: X \to X$ por $P_k(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n) = \sum_{n=1}^{k} a_n x_n$, então P_k é uma função linear contínua, e $\sup \|P_k\| < \infty$. O número $K = \sup \|P_k\|$ é chamado de constante da base (x_n).

Prova. É fácil mostrar (i).

Para mostrar (ii), seja $(y^i)_{i \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de X tal que $\lim_{i,j \to \infty} |||y^i - y^j||| = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, seja $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|||y^i - y^j||| < \varepsilon$ para todo $i,j \geqq i_o$. Se $y^i = \Sigma a_n^i x_n$ então

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{n=1}^{k} (a_n^i - a_n^j) x_n \right\| < \varepsilon$$

e daí

$$\|(a_k^i - a_k^j) x_k\| \leqq \left\| \sum_{n=1}^{k} (a_n^i - a_n^j) x_n \right\| + \left\| \sum_{n=1}^{k-1} (a_n^i - a_n^j) x_n \right\| < 2\varepsilon$$

para todo $i,j \geqq i_o$ e todo $k \in \mathbb{N}$.

Como (x_n) é base então $x_k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, portanto $(a_k^i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma seqüencia de Cauchy, e existe $a_k = \lim_{i \to \infty} a_k^i$. Mostraremos que $\Sigma a_n x_n$ converge.

Se $i \geqq i_o$ e $k \in \mathbb{N}$ então

$$\left\| \sum_{n=1}^{k} (a_n^i - a_n) x_n \right\| = \lim_{j \to \infty} \left\| \sum_{n=1}^{k} (a_n^i - a_n^j) x_n \right\|$$

$$\leqq \lim_{j \to \infty} |||y^i - y^j||| \leqq \varepsilon \tag{1}$$

Daí para todo $k,p \in \mathbb{N}$ temos que

$$\left\| \sum_{n=p}^{k} a_n x_n \right\| \leqq \left\| \sum_{n=p}^{k} (a_n^{i_o} - a_n) x_n \right\| + \left\| \sum_{n=p}^{k} a_n^{i_o} x_n \right\|$$

$$\leq \left\| \sum_{n=1}^{k} (a_n^{i_o} - a_n)x_n \right\| + \left\| \sum_{n=1}^{p} (a_n^{i_o} - a_n)x_n \right\| + \left\| \sum_{n=p}^{k} a_n^{i_o} x_n \right\|$$

$$\leq 2\varepsilon + \left\| \sum_{n=p}^{k} a_n^{i_o} x_n \right\|$$

e então é fácil ver que $\Sigma a_n x_n$ converge.

Se $y = \Sigma a_n x_n$ temos que

$$|||y^i - y||| = \sup_k \left\| \sum_{n=1}^{k} (a_n^i - a_n)x_n \right\| \leq \varepsilon$$

para todo $i \geq i_o$, e portanto $\lim_{i\to\infty} |||y^i - y||| = 0$.

Temos, então, que $(X, ||| \ |||)$ é um espaço de Banach e, é claro que $||x|| \leq |||x|||$ para todo $x \in X$. Logo a função identidade de $(X, || \ ||)$ em $(X, ||| \ |||)$ é contínua. Pelo Teorema da Aplicação Aberta, a função identidade é bicontínua, e, então, existe $K_1 > 0$ tal que $||x|| \leq |||x||| \leq K_1 ||x||$ para todo $x \in X$, o que prova (iii).

Se $k \in \mathbb{N}$ e P_k é como em (iv), então é claro que P_k é uma função linear. Para todo $x = \Sigma a_n x_n \in X$ temos

$$|| P_k(x) || = \left\| \sum_{n=1}^{k} a_n x_n \right\|$$

$$\leq \sup_k \left\| \sum_{n=1}^{k} a_n x_n \right.$$

$$= |||x||| \leq K_1 \|x\|$$

Portanto P_k é contínua e $\|P_k\| \leq K_1$ de onde concluímos (iv).□

(3.3) <u>Proposição</u>. Seja (x_n) uma seqüência de elementos de x. Então, (x_n) é uma base de X se, e somente se, valem

(i) $x_n \neq 0, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$;

(ii) existe $K > 0$ tal que, para toda seqüência de números reais $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e, para quaisquer inteiros n,m com $0 < n < m$, temos

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| \leq K\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\| ;$$

(iii) o subespaço vetorial fechado gerado por (x_n), que indicaremos por $[(x_n)]$, é igual a X.

Prova. Suponha que (x_n) seja base de X.

O ítem (i) é fácil obter da definição (3.1).

Sejam $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de números reais e $n,m \in \mathbb{N}$ com $n < m$.

De (3.2.iv) tem-se que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = \left\| P_n\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right) \right\|$$

$$\leq \| P_n \| \; \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|$$

$$\leq K \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\| ,$$

o que prova (ii).

É fácil ver que (iii) é verdadeiro pois se $x \in X$, então $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n x_n$, e daí $x \in [(x_n)]$.

Vamos mostrar, agora, que se valem (i), (ii) e (iii) então (x_n) é uma base de X.

Seja o conjunto

$$F = \{x \in X: x = \Sigma a_n x_n, \text{ para alguma seqüência } (a_n)\}$$

Com um cálculo análogo ao que foi feito na demonstração de (3.2.ii), prova-se que $(F, ||| \;\; |||)$ é um espaço de Banach. Mostremos que $[(x_n)] \subset F$.

Seja $y \in [(x_n)]$. Então existe uma seqüência (y_n) de $[(x_n)]$ tal que $\lim \| y_n - y \| = 0$. Seja $y_n = \sum_{i=1}^{k_n} b_i^n x_i$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $y_n \in F$ e $\| y_n - y_m \| = ||| y_n - y_m |||$ para todo $n,m \in \mathbb{N}$, então existe $x \in F$ tal que $\lim ||| y_n - x ||| = 0$. Lem brando que $\| y_n - x \| \leq |||y_n - x|||$, temos que $\lim \| y_n - x \| = 0$, portanto $y = x$, isto é, $y \in F$.

Então, se $x \in X$, existe uma seqüência de números reais (a_n) tal que $x = \Sigma a_n x_n$. Resta provar que (a_n) é única. Suponha que $x = \Sigma a_n x_n = \Sigma b_n x_n$. Então $\Sigma(a_n - b_n)x_n = 0$. Seja $k \in \mathbb{N}$. Usando (ii) temos que para todo $m \geq k$

$$|a_k - b_k| \; \| x_k \| \leq \| \sum_{n=1}^{k} (a_n - b_n)x_n \| + \| \sum_{n=1}^{k-1} (a_n - b_n)x_n \|$$

$$\leq K \| \sum_{n=1}^{m} (a_n - b_n)x_n \| + K \| \sum_{n=1}^{m} (a_n - b_n)x_n \|$$

$$= 2K \| \sum_{n=1}^{m} (a_n - b_n)x_n \|$$

Como $\| x_k \| \neq 0$ e $\lim_{m \to \infty} \| \sum_{n=1}^{m} (a_n - b_n)x_n \| = 0$ então $|a_k - b_k| = 0$, isto é, $a_k = b_k$, o que termina a demonstação. $\square$

(3.4) <u>Definição</u>. Se (x_n) é uma seqüência de elementos de X que satisfaz (i) e (ii) de (3.3) então dizemos que (x_n) é uma <u>seqüência</u> <u>básica</u> de X.

(3.5) <u>Proposição</u>. Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência básica de X então é base do subespaço $[(x_n)]$.

Prova. É conseqüência imediata de (3.3). □

(3.6) Definição. Se (x_n) é uma base [seqüência básica] de X e $\| x_n \| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então dizemos que (x_n) é uma base [seqüência básica] normalizada de X.

(3.7) Proposição. Se (x_n) é uma base [seqüência básica] de X então $(x_n / \| x_n \|)$ é uma base [seqüência básica] normalizada de X.

Prova. Decorre de (3.3). □

Os exemplos de espaço de Banach são numerosos. Os espaços c_0, ℓ_p, $C([0,1])$ e $L_p([0,1])$ têm base. Veremos, a seguir, que todo espaço seqüencial modular, definido em (2.9); admite uma seqüência básica.

(3.8) Exemplo. Seja $\ell(M_k)$ um espaço seqüencial modular (2.9). A seqüência (e^k) é uma seqüência básica de $\ell(M_k)$. De fato $e^k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e vale (3.3.ii) pois, se (a_k) é uma seqüência de números reais e $n < m$, então

$$\| \sum_{k=1}^{n} a_k e^k \| = \inf\{t > 0: \sum_{k=1}^{n} M_k(\frac{|a_k|}{t}) \leq 1\}$$

$$\leq \inf\{t > 0: \sum_{k=1}^{m} M_k(\frac{|a_k|}{t}) \leq 1\} = \| \sum_{k=1}^{m} a_k e^k \| . \quad \square$$

(3.9) <u>Proposição</u>. Todo espaço de Banach com base é separável.

Prova. Se (x_n) é base de X, espaço de Banach, então, verifica-se que o conjunto

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i : \{r_1, \ldots, r_n\} \subset Q\}$$

é enumerável e denso em X. □

(3.10) <u>Observação</u>. É conseqüência imediata de (3.9) que todo espaço de Banach não separável não tem base. Em particular, ℓ_∞ não tem base, pois ele não é separável.

Decorre do próximo resultado que todo espaço de Banach contém um subespaço vetorial fechado de dimensão infinita com base.

(3.11) <u>Teorema</u>. Todo espaço de Banach contém uma seqüência básica.

Prova. Ver teorema (1.a.5) de [LT]. □

(3.12) <u>Corolário</u>. Todo espaço de Banach contém um subespaço de dimensão infinita com base.

(3.13) Definição. Sejam X e Y espaços de Banach, (x_n) uma base [seqüência básica] de X e (y_n) uma base [seqüência básica] de Y. Dizemos que (x_n) é equivalente a (y_n) se para toda seqüência (a_n) de números reais tem-se

$$\Sigma a_n x_n \text{ converge} \iff \Sigma a_n y_n \text{ converge.}$$

(3.14) Proposição. Sejam (x_n) uma base de X e (y_n) uma seqüência de Y. Então são equivalentes as seguintes afirmações

(i) (y_n) é uma base de Y equivalente a (x_n);

(ii) existe um isomorfismo $T: X \to Y$ tal que $T(x_n) = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova. Suponha que vale (i) e seja $T: X \to Y$ dada por

$$T(x) = T(\Sigma a_n x_n) = \Sigma a_n y_n$$

Como (x_n) e (y_n) são bases equivalentes T está bem definida, e é uma função linear, sobrejetora e injetora.

Para mostrar que T é contínua, usaremos o Teorema do Gráfico Fechado. Seja, então, uma seqüência de elementos de X, (u^k), onde $u^k = \Sigma a_n^k x_n$, e tal que $\lim_{k\to\infty} u^k = 0$ e $\lim_{k\to\infty} T(u^k) = y$.

Logo, para cada $k \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$, usando (3.2.iv) temos

$$\begin{aligned} \| a_n^k x_n \| &= \| P_n(u^k) - P_{n-1}(u^k) \| \\ &\leqq \| P_n(u^k) \| + \| P_n(u^k) \| \\ &\leqq 2K \| u^k \| \end{aligned}$$

E daí, como $x_n \neq 0$, $\lim_{k\to\infty} a_n^k = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, se $y = \Sigma b_n y_n$ e $k,n \in \mathbb{N}$ então de (3.2.iv),

$$\begin{aligned} \| a_n^k y_n - b_n y_n \| &= \| P_n(T(u^k)-y) - P_{n-1}(T(u^k)-y) \| \\ &\leqq \| P_n \| \; \| T(u^k)-y \| + \| P_{n-1} \| \; \| T(u^k)-y \| \\ &\leqq 2K \| T(u^k)-y \| . \end{aligned}$$

Logo, $\lim_{k\to\infty} a_n^k = b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ pois $y_n \neq 0$.

Portanto, $b_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $y = 0$, o que prova que T é contínua.

Sendo T sobrejetora, então, T é bicontínua, e, portanto, um isomorfismo.

Provemos que (ii) implica (i). Se $T(x_n) = y_n$ então $T(\sum_{n=k}^{m} a_n x_n) = \sum_{n=k}^{m} a_n y_n$ para todo $k,m \in \mathbb{N}$. Pelo fato de T ser bicontínua, $\Sigma a_n x_n$ converge se, e somente se, $\Sigma a_n y_n$ converge. Como T é sobrejetora, (y_n) é base de Y e, portanto, (y_n) é equivalente a (x_n). □

(3.15) <u>Proposição</u>. Sejam (x_n) uma seqüência básica de X e (y_n) uma seqüência de Y. Então são equivalentes as seguintes afirmações

(i) (y_n) é uma seqüência básica equivalente a (x_n);

(ii) existe um isomorfismo $T: [(x_n)] \to [(y_n)]$ tal que $T(x_n) = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova. É análoga à demonstração feita em (3.14), lembrando que (x_n) é base de $[(x_n)]$ e (y_n) é base de $[(y_n)]$ (3.5). □

(3.16) <u>Definição</u>. Seja (x_n) uma base de X. Considere uma seqüência crescente de inteiros não-negativos

(p_j), e uma seqüência de números reais não nulos (α_n). Se, para cada $j \in \mathbb{N}$, $u_j = \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} \alpha_i x_i$, então dizemos que (u_j) é uma <u>base de blocos</u> de (x_n).

(3.17) <u>Proposição</u>. Seja (x_n) uma base de X. Toda base de blocos (u_j) de (x_n) é uma seqüência básica de X.

Prova. Como (x_n) é base de X, por (3.3) existe $K > 0$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \right\| \leq K \left\| \sum_{i=1}^{m} b_i x_i \right\|$$

para toda seqüência de números reais (b_i) e todo $n,m \in \mathbb{N}$ com $m > n$.

Logo, se para cada $j \in \mathbb{N}$, $u_j = \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} \alpha_i x_i$ então

para toda seqüência de números reais (a_j) e para todo $n,m \in \mathbb{N}$ com $n < m$ temos que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j u_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} \alpha_i x_i \right\|$$

$$= \left\| \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} a_j \alpha_i x_i \right\|$$

$$\leq K\left\| \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=p_j+1}^{p_{j+1}} a_j \alpha_i x_i \right\|$$

$$= K\left\| \sum_{j=1}^{m} a_j u_j \right\| .$$

E como $u_j \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, (u_j) satisfaz (i) e (ii) de (3.3) e, então, (u_j) é seqüência básica. □

(3.18) Teorema. Sejam (x_n) uma base de X, e Y um subespaço vetorial fechado de dimensão infinita de X. Então existe um subespaço Z de Y que tem uma base normalizada que é equivalente a uma base de blocos (u_k) de (x_n), tal que $0 < s \leq \|u_k\| \leq r$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Prova. Ver (1.a.ii) de [LT]. □

(3.19) Proposição. Seja (x_n) uma base de X e seja $y_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^k x_n$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Suponha que $\limsup \|y_k\| > 0$, e que $\lim_{k\to\infty} a_n^k = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então existe uma subseqüência $(y_{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$ de (y_k) que é uma seqüência básica equivalente a uma base de blocos (u_k) de (x_n), tal que $0 < s \leq \|u_k\| \leq r$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Prova. Ver (1.a.12) de [LT]. □

(3.20) <u>Proposição</u>. Seja (x_n) uma base de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $x_n^*: X \to \mathbb{R}$ por $x_n^*(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i) = a_n$. Então

(i) x_n^* é um funcional linear contínuo e $\| x_n^* \| \leq 2k/\| x_n \|$, onde K é a constante da base (x_n) (3.2.iv);

(ii) a seqüência (x_n^*) é caracterizada pela igualdade $x_n^*(x_m) = \delta_m^n$ onde δ_m^n, se $n \neq m$ e $\delta_m^n = 1$, para todos $n,m \in \mathbb{N}$.

Prova. Se $x = \Sigma a_i x_i$ então de (3.2.iv)

$$\begin{aligned} \| a_n x_n \| &= \| P_n(x) - P_{n-1}(x) \| \\ &\leq 2K \| x \| \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $|x_n^*(x)| = |a_n| \leq 2K\| x \| / \| x_n \|$ e então $\| x_n^* \| \leq 2K/\| x_n \|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, x_n^* é um funcional linear contínuo. E então, o ítem (ii) segue facilmente. □

(3.21) <u>Definição</u>. A seqüência (x_n^*) definida em (3.20) é chamada de seqüência de <u>funcionais biortogonais associada</u> a (x_n).

(3.22) <u>Proposição</u>. Sejam (x_n) uma base de X e (x_n^*) a seqüência de funcionais biortogonais associada a (x_n). Então (x_n^*) é uma seqüência básica de X^*.

Prova. É claro que $x_n^* \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Resta, então, provar (ii) de (3.3).

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam P_n como em (3.2.iv) e $P_n^*: X^* \to X^*$ definido por $P_n^*(y^*) = y^* \circ P_n$. Então para todo $y^* \in X^*$, $\| P_n^*(y^*) \| \leq \| y^* \| \; \| P_n \|$, e como $P_n^*(\| P_n \| x_n^*) = \| P_n \| x_n^* \circ P_n = \| P_n \| x_n^*$, temos que $\| P_n^* \| = \| P_n \|$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, se $K = \sup \| P_n \|$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^* \right\| = \left\| P_n^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^* \right) \right\|$$

$$\leq \| P_n^* \| \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i^* \right\|$$

$$\leq K \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i^* \right\| ,$$

para toda seqüência de números reais (a_i) e todos $n, m \in \mathbb{N}$ com $n < m$. □

O caso em que (x_n^*) é base de X^* tem particular interesse, como veremos a seguir.

(3.23) Definição. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma base de X. Dizemos que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dualizável se $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$, definida em (3.20), é base de X*.

Outra importante noção é a de base limitadamente completa.

(3.24) Definição. Uma base $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X é dita limitadamente completa se para toda seqüência de números reais $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\sup_k \| \sum_{n=1}^{k} a_n x_n \| < \infty$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge.

O próximo resultado é um importante teorema na teoria de bases em espaços de Banach.

(3.25) Teorema. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma base de X. Então X é reflexivo se, e somente se, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é dualizável e limitadamente completo.

Prova. Ver teorema (1.b.5) de [LT]. □

(3.26) Proposição. Seja X reflexivo. Então toda base limitada de X converge fracamente para zero.

Prova. Seja (x_n) uma base limitada de X e que não converge fracamente a zero. Então existe $y^* \in X^*$, e existem $\varepsilon > 0$ e uma subseqüência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tais que $|y^*(x_{n_k})| > \varepsilon$.

Como X é reflexivo e $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é limitada em X, existe $(x_{n_{k_i}})_{i \in \mathbb{N}}$, subseqüência de $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, fracamente convergente [DS-(II.3.28)], isto é, existe $z \in X$ tal que $\lim\limits_{i\to\infty} x^*(x_{n_{k_i}}) = x^*(z)$ para todo $x^* \in X^*$.

Daí e de (3.20) segue que $x_m^*(z) = \lim\limits_{i\to\infty} x_m^*(x_{n_{k_i}}) = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. E, portanto, também por (3.20) tem-se que $z = 0$. Conseqüentemente $\lim\limits_{i\to\infty} y^*(x_{n_{k_i}}) = y^*(z) = 0$, o que é uma contradição. □

Trataremos, agora, de outro tipo de base chamada de incondicional.

(3.27) Definição. Dizemos que uma base [seqüência básica] (x_n) de X é incondicional, se para toda seqüência (θ_n) com $\theta_n = 1$ ou $\theta_n = -1$, $\Sigma\theta_n a_n x_n$ converge, sempre que $\Sigma a_n x_n$ converge.

A noção de base incondicional está ligada à de convergência incondicional de séries em espaços de Banach [LT-Cap 1 - §6], donde segue o seguinte resultado.

(3.28) Proposição. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência básica de X. São equivalentes as seguintes afirmações.

(i) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é incondicional;

(ii) para toda permutação π de $\mathbb{N}$, a seqüência $(x_{\pi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ é seqüência básica de X;

(iii) para toda seqüência (n_i) de $\mathbb{N}$, a convergência de $\Sigma a_n x_n$ implica a convergência de $\sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} x_{n_i}$,

(iv) se $\Sigma a_n x_n$ converge e se $|b_n| \leq |a_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\Sigma b_n x_n$ converge;

Prova.Ver (1.c.6) de [LT], □

(3.29) Exemplo. A seqüência básica (e^k) de $\ell(M_k)$ definida em (3.8) é incondicional. De fato se $\Sigma a_k e^k$ converge e se $(\theta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência com $\theta_k = 1$ ou $\theta_k = -1$, então

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} \theta_k a_k e^k \right\| = \left\| \sum_{k=n}^{m} a_k e^k \right\|$$

para todo $m,n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\Sigma \theta_k a_k e^k$ converge. □

(3.30) <u>Proposição</u>. Se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma base incondicional de X e $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência crescente de inteiros positivos, então, $Y = [(x_{n_i})]$ é um subespaço complementado de X, isto é, existe uma projeção $P: X \to Y$, contínua.

Prova. Para cada $x = \Sigma a_n x_n \in X$ definimos $P(\Sigma a_n x_n) = \Sigma a_{n_i} x_{n_i}$. Como (x_n) é incondicional por (3.28) P é uma aplicação de X em Y. É claro que P é projeção. Para a continuidade, usaremos o Teorema do Gráfico Fechado.

Seja (y^k) uma seqüência de elementos de X com $\lim y^k = 0$ e $y^k = \Sigma a_n^k x_n$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Suponhamos que $\lim P(y^k) = y \in Y$ e que $y = b_i x_{n_i}$. Então por (3.2.iv) para todo $n,k \in \mathbb{N}$ temos que

$$
\begin{aligned}
|a_n^k| \, \| x_n \| &= \| P_n(y^k) - P_{n-1}(y^k) \| \\
&\leq (\| P_n \| + \| P_{n-1} \|) \| y^k \| \\
&\leq 2K \| y^k \|
\end{aligned}
$$

e que para todo $i \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
|a_{n_i}^k - b_i| \, \| x_{n_i} \| &= \| P_{n_i}(P(y^k)-y) - P_{n-1}(P(y^k)-y) \| \\
&\leq 2K \| P(y^k) - y \|
\end{aligned}
$$

Portanto para todo $i \in \mathbb{N}$

$$\lim_{k\to\infty} |a^k_{n_i} - b_i| = 0 = \lim_{k\to\infty} |a^k_{n_i}|$$

e, então, $b_i = 0$, isto é, $y = 0$. $\square$

O resultado seguinte será útil na prova de alguns resultados do parágrafo 7.

(3.31) <u>Proposição</u>. Sejam (x_n) uma base incondicional de X e (u_k) uma base de Y equivalente a (x_n). Se existem constantes K e L tais que $0 < s \leqq \| u_k \| \leqq r$ para todo $k \in \mathbb{N}$ então $(u_k/\| u_k \|)$ é uma base normalizada de Y equivalente a (x_n).

Prova. É fácil ver que como (u_k) é equivalente a (x_n) então (u_k) é incondicional.

Segue de (3.7) que $(u_k/\| u_k \|)$ é uma base normalizada de Y. E como $s \leqq \| u_k \| \leqq r$, por (3.28.iv) temos que $\Sigma a_k u_k$ converge se, e somente se, $\Sigma a_k u_k/\| u_k \|$ converge. Portanto $(u_k/\| u_k \|)$ é equivalente a (u_k) e, daí, equivalente a (x_n). $\square$

O próximo teorema une dois importantes resultados da teoria de bases.

(3.32) Teorema. Seja (x_n) uma base incondicional de X. Então

(i) (x_n) é dualizável se, e somente se, X não contém subespaço isomorfo a ℓ_1;

(ii) (x_n) é limitadamente completa se, somente se, X não contém subespaço isomorfo a c_0.

Prova. Segue dos teoremas (1.c.9) e (1.c.10) de [LT]. □

Um interessante corolário do teorema acima pode ser obtido utilizando as proposições (C.6) e (C.7) de [BP], que enunciaremos a seguir.

(3.33) Proposição. Se X tem base e se Y é um subespaço de X isomorfo a c_0 [ℓ_1] então existe um subespaço Y_1 de Y, complementado em X, isomorfo a c_0 [ℓ_1].

(3.34) Corolário. Seja (x_n) uma base incondicional de X. Então

(i) (x_n) é dualizável se, e somente se, X não contém subespaço complementado isomorfo a ℓ_1;

(ii) (x_n) é limitadamente completa se, e somente se, X não contém subespaço complementado iso morfo a c_o.

Sobre bases simétricas e subsimétricas são os próximos resultados.

(3.35) Definição. Uma base (x_n) de X e dita simétrica se para toda permutação π de $\mathbb{N}$ a seqüência $(x_{\pi(n)})$ é uma seqüência básica equivalente a (x_n).

(3.36) Observação. É conseqüência imediata de (3.28.ii) que se (x_n) é uma base simétrica de X então (x_n) é incondicional.

(3.37) Definição. Uma base (x_n) de X é dita subsimétrica se é incondicional e se toda subseqüência (x_{n_i}) de (x_n) é uma seqüência básica equivalente a (x_n).

(3.38) Proposição. Se (x_n) é uma base subsimétrica, ou simétrica de X então existem constantes s e r tais que $0 < s \leqq \|x_n\| < r$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova. Tomemos, primeiramente, (x_n) subsimétrica.

Suponhamos por absurdo que $\sup \| x_n \| = \infty$. Então existe uma seqüência crescente de inteiros positivos (n_k) tal que $\| x_{n_k} \| > 2^k \| x_k \|$ para todo $k \in \mathbb{N}$

Daí se $a_k = 1/\| x_{n_k} \|$ então

$$\| a_k x_k \| = \frac{1}{\| x_{n_k} \|} \quad \| x_k \| < \frac{1}{2^k}$$

e a série $\Sigma a_k x_k$ converge. Mas $\Sigma a_k x_{n_k}$ diverge, pois $\| a_k x_{n_k} \| = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como (x_n) é base subsimétrica, isto é, um absurdo.

Suponhamos, agora, que $\inf \| x_n \| = 0$. Então existe uma seqüência crescente de inteiros positivos (n_k) tal que $\| x_{n_k} \| < 1/k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Então, para todo $i \in \mathbb{N}$, existe $x_{n_{k_i}}$ tal que

$\| x_{n_{k_i}} \| 2^i < \| x_i \|$. Portanto, se $a_i = 1/\| x_i \|$, então,

$\Sigma a_i x_{n_{k_i}}$ converge. Mas $\Sigma a_i x_i$ diverge, pois $\| a_i x_i \| = 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e temos novamente uma contradição.

Portanto, $\inf \| x_n \| > 0$ e $\sup \| x_n \| < \infty$.

Com os mesmos argumentos prova-se que se (x_n) é simétrica então $\inf \| x_n \| > 0$ e $\sup \| x_n \| < \infty$. $\square$

O resultado acima é relevante para a demonstração do seguinte.

(3.39) Proposição. Toda base simétrica é subsimétrica.

Prova. Ver (3a.3) de [LT]. □

§4. FUNÇÕES DE ORLICZ

O objetivo deste parágrafo é estabelecer definições, notações e resultados conhecidos sobre funções de Orlicz, que serão usados posteriormente.

(4.1) Definição. Uma função não-nula $M: [0,\infty[\to [0,\infty[$ é dita função de Orlicz se $M(0) = 0$, $M(u) > 0$ para todo $u > 0$, e M é convexa em $[0,\infty[$, isto é,

$$M(au + (1-a)v) \leqq aM(u) + (1-a)M(v)$$

para todo $a \in [0,1]$ e $u,v \in [0,\infty[$.

(4.2) Proposição. Seja M uma função de Orlicz. As seguintes afirmações são verdadeiras.

(i) se $0 \leqq u_1 < u_2 < u_3$, então

$$\frac{M(u_2)-M(u_1)}{u_2 - u_1} \qquad \frac{M(u_3)-M(u_1)}{u_3 - u_1} \qquad \frac{M(u_3)-M(u_2)}{u_3 - u_2};$$

(ii) M é uma função contínua e crescente;

(iii) $\dfrac{M(u)}{u}$ é uma função contínua e não-decrescente em $]0,\infty[$;

(iv) $\lim\limits_{u\to\infty} M(u) = \infty$.

Prova. Ver (2.6). □

(4.3) <u>Proposição</u>. Se M é uma função de Orlicz e $\alpha > 0$, então a função N definida por $N(u) = M(\alpha u)$ é uma função de Orlicz. Em particular, existe $\alpha > 0$ tal que $M(\alpha) = 1$ e, então, $M^+(u) = M(\alpha u)$ é uma função de Orlicz com $M^+(u) = $ $= M^+(1) = 1$.

Prova. É fácil mostrar que N é uma função de Orlicz. Como M é contínua e crescente (4.2.ii) então existe $\alpha > 0$ tal que $M(\alpha) = 1$, donde segue que $M^+(1) = 1$. □

O teorema seguinte estabelece uma importante caracterização das funções de Orlicz, e é conseqüência de um resultado geral sobre funções convexas.

(4.4) Teorema. Seja $M:[0,\infty[\to [0,\infty[$ com $M(0)=0$. Então as seguintes asserções são equivalentes

(i) M é uma função de Orlicz;

(ii) para cada $u \in [0,\infty[$, existe e é finita a derivada à direita $M'_+(u)$ e $M'_+(u) > 0$ se $u > 0$; a função M'_+ é não-decrescente e contínua à direita; também existe M' em $[0,\infty[$, a menos de um conjunto enumerável, e M' é não decrescente no seu domínio;

(iii) existe uma função $p:[0,\infty[\to [0,\infty[$ não-decrescente, contínua à direita, com $p(t) > 0$ para todo $t > 0$ e tal que

$$M(u) = \int_0^u p(t)dt$$

para todo $u \geqq 0$.

Prova. Ver (A2), (A3) e (A4) de [B]. □

(4.5) Observação. Seja M uma função de Orlicz.

(i) tendo em vista (4.4.ii) indicaremos por M' a derivada à direita de M.

(ii) É fácil mostrar que se p é a função dada em (4.4.iii) então $M' = p$ em $[0,\infty[$, e, portanto, $M(u) = \int_0^u M'(t)dt$ para todo $u \in [0,\infty[$.

(4.6) <u>Proposição</u>. Seja M uma função de Orlicz. Então

(i) $\frac{M(u)}{u} \leqq M'(u) < \frac{M(2u)}{u}$, para todo $u \in]0,\infty[$;

(ii) se $M'(0) = 0$, a função $M(u)/u$ é crescente em $]0,\infty[$.

Prova. Seja $u \in]0,\infty[$. De (4.2.i) tem-se

$$\frac{M(u) - M(0)}{u} \leq \frac{M(u+h) - M(u)}{h}$$

para todo $h > 0$. Portanto

$$\frac{M(u)}{u} \leqq \lim_{h\to 0^+} \frac{M(u+h) - M(u)}{h} = M'(u)$$

E de (4.5.ii) e (4.4.ii) tem-se

$$M(2u) = \int_0^{2u} M'(t)dt > \int_u^{2u} M'(t)dt \geqq u\, M'(u).$$

Para provar (ii) lembremos que de (4.2.iii) temos que $M(u)/u$ é não-decrescente. Suponhamos que existam $u_2, u_3 \in]0,\infty[$ com $u_2 < u_3$ e tais que $M(u_2)/u_2 = M(u_3)/u_3 = \alpha$.

Como $M'(0) = 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{M(u)}{u} < \alpha, \quad \forall\, u \in]0,\delta[.$$

Seja $u_1 \in]0,\delta[$ e $u_1 < u_2$. Por (4.2.i)

$$\frac{M(u_2) - M(u_1)}{u_2 - u_1} \leqq \frac{M(u_3) - M(u_2)}{u_3 - u_2} = \alpha$$

Mas

$$\frac{M(u_2) - M(u_1)}{u_2 - u_1} > \frac{\alpha u_2 - \alpha u_1}{u_2 - u_1} = \alpha$$

o que é um absurdo. $\square$

A seguir definiremos a função complementar de uma função de Orlicz.

(4.7) <u>Definição</u>. Seja M uma função de Orlicz com $M'(0) = 0$ e $\lim_{t\to\infty} M'(t) = \infty$. Então para cada $s \geqq 0$ definimos a <u>inversa à direita</u> de M' pela igualdade

$$q(s) = \sup\{t \subset [0,\infty[: M'(t) \leqq s\}$$

e $M^*(v)$ por

$$M^*(v) = \int_0^v q(s)ds$$

para todo $v \geqq 0$. A função M^* é chamada de <u>função complementar</u> de M.

(4.8) <u>Proposição</u>. Se M e M^* são como em (4.7), então

(i) M^* é uma função de Orlicz e $q = (M^*)'$ em $[0,\infty[$;

(ii) se M é derivável e M' é contínua e crescente, então M^* é derivável e $(M^*)' = (M')^{-1}$.

Prova. Não há dificuldade em provar que a função q definida em (4.7) é não-decrescente, contínua à direita e com $q(t) > 0$, para todo $t > 0$. Portanto de (4.4.iii) temos que M^* é uma função de Orlicz. E como q é contínua à direita em $[0,\infty[$, segue (i).

Para provar (ii) basta ver que pela hipótese M' é inversível e daí $(M')^{-1}$ é contínua, crescente e $q(t)=(M')^{-1}(t)$ para todo $t \geq 0$. Portanto M^* é derivável e $(M^*)'(t)=(M')^{-1}(t)$ para todo $t \geq 0$. $\square$

O próximo teorema estabelece outras relações entre uma função de Orlicz e sua complementar.

(4.9) <u>Teorema</u>. Sejam M e M^* como em (4.7). Então as seguintes asserções são verdadeiras.

(i) $uv \leq M(u)+M^*(v)$, $\forall\ u,v \in [0,\infty[$;

(ii) $v(M^*)'(v)=M((M^*)'(v))+M^*(v)$, $\forall\ v \in [0,\infty[$;

(iii) $uM'(u)=M(u)+M^*(M'(u))$, $\forall\ u \in [0,\infty[$;

(iv) $M^*(v)=\max\{uv - M(u): u \in [0,\infty[\}$.

Prova. Os ítens (i), (ii) e (iii) seguem do teorema (2.18) de [B]. O ítem (iv) é conseqüência de (i) e (ii) $\square$

As seguintes propriedades serão úteis nos próximos parágrafos.

(4.10) Proposição. Se M e N são funções de Orlicz tem-se

(i) $M^{**}(u) = M(u), \quad \forall\, u \in [0,\infty[$;

(ii) $M^*(1) \leqq 1$, quando $M(1) = 1$;

(iii) se $M(u) \leqq N(u)$ para todo $u \in [0,1]$ e $M(1) = N(1) = 1$ então $M^*(1) \geqq N^*(1)$;

(iv) se $M(u) \leqq N(u)$ para todo $u \in [0,\infty[$, então $M^*(v) \geqq N^*(v)$ para todo $v \in [0,\infty[$;

(v) se $\alpha > 0$ é tal que $N(u) = \alpha M(u)$ para todo $u \in [0,\infty[$, então $N^*(v) = \alpha M^*(v/\alpha)$ para todo $v \in [0,\infty[$.

Prova. Sejam p a função dada em (4.4.iii) e q a inversa à direita de p como em (4.7). Provemos que p é a inversa à direita de q, isto é, que para todo $s \in [0,\infty[$

$$p(s) = \sup\{t \in [0,\infty[: q(t) \leqq s\}. \tag{1}$$

Se $s \in [0,\infty[$ e $r \in [0,p(s)[$ então

$s \in \{t \in [0,\infty[: p(t) > r\}$, e daí $q(r) \leqq s$ o que implica que $r \leqq \sup\{t \in [0,\infty[: q(t) \leqq s\}$. Portanto

$$p(s) \leqq \sup\{t \in [0,\infty[: q(t) \leqq s\}.$$

Mas se $t \in [0,\infty[$ e $q(t) \leqq s$ então $p(q(t)) \leqq p(s)$, pois p é não-decrescente. E como $t \leqq p(q(t))$ (ver por exemplo o teorema (1.8) de [B]) então $t \leqq p(s)$ donde segue que $\sup\{t \in [0,\infty[: q(t) \leqq s\} \leqq p(s)$, e (1) está provado.

Como de (4.8.ii) tem-se $q = (M^*)'$, então por (1)

$$p(s) = \{t \in [0,\infty[: (M^*)'(t) \leqq s)\}$$

e daí por (4.7) e (4.4.iii)

$$M^{**}(u) = \int_0^u p(s)ds = M(u)$$

para todo $u \in [0,\infty[$, e (i) está provado.

Se $M(1) = 1$, então

$$\sup\{u-M(u): u \in [0,\infty[\} = \sup\{u-M(u): u \in [0,1]\} \quad (2)$$

De fato, como $M(v)/v$ é não decrescente, então $u \leqq M(u)$ para todo $u \in [1,\infty[$.

E como para todo $u \in [0,1]$, $M(u) \leqq u$ temos $0 \leqq u - M(u) \leqq 1 - M(u) \leqq 1$. Logo de (2) e de (4.9.iv) temos que $M^*(1) \leqq 1$.

Se M e N são como em (iii) então por (4.9.iv) e (2)

$$\begin{aligned} M^*(1) &= \sup\{u-M(u):\ u \in [0,1]\} \\ &\geqq \sup\{u-N(u):\ u \in [0,1]\} = N^*(1). \end{aligned}$$

Tomando M e N como em (iv) e usando (4.9.iv)

$$\begin{aligned} M^*(v) &= \sup\{vu - M(u):\ u \in [0,\infty[\} \\ &\geqq \sup\{vu - N(u):\ u \in [0,\infty[\} = N^*(v) \end{aligned}$$

para todo $v \in [0,\infty[$.

E se α, M e N são como em (v) então também de (4.9.iv)

$$\begin{aligned} N^*(v) &= \sup\{vu - N(u):\ u \in [0,\infty[\} \\ &= \sup\{vu - \alpha M(u):\ u \in [0,\infty[\} \\ &= \alpha\sup\{\frac{vu}{\alpha} - M(u):\ u \in [0,\infty[\} = \alpha M^*(\frac{v}{\alpha}) \end{aligned}$$

para todo $v \in [0,\alpha[$. $\square$

(4.11) <u>Exemplos</u>. (1) Se $p \geqq 1$ então a função $M(u) = u^p$ é uma função de Orlicz com $M(1) = 1$. E temos para $p > 1$ que

$$M^*(v) = \int_0^v \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{(p-1)}} \cdot (s)^{\frac{1}{p-1}} ds$$

$$= \left(\frac{1}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \left(\frac{p-1}{p}\right) \cdot v^{\frac{p}{p-1}}$$

$$= (p-1)\left(\frac{v}{p}\right)^{\frac{p}{p-1}} \leqq v^{\frac{p}{p-1}}$$

para todo $v \in [0,\infty[$.

(2) Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\alpha \geqq 2$, então a função

$$N(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } u = 0 \\ \beta^\alpha e^{2(1-\frac{\beta}{u})}, & \text{se } u \in]0,\beta[\\ u^\alpha, & \text{se } u \in [\beta,\infty[\end{cases}$$

é uma função de Orlicz. De fato

$$N'(u) = \begin{cases} 0, & \text{se } u = 0 \\ \dfrac{\beta^\alpha 2\beta e^{2(1-\frac{\beta}{u})}}{u^2}, & \text{se } u \in]0,\beta[\\ \alpha u^{\alpha-1}, & \text{se } u \in [\beta,\infty[\end{cases}$$

e não-decrescente, pois para todo $u \in]0,\beta[$

$$N'(u) \leq 2\beta^{\alpha-1} \leq \alpha\beta^{\alpha-1} = N'(\beta)$$

e o resultado segue de (4.4).

CAPITULO III

§5. ESPAÇOS SEQÜENCIAIS MODULARES

Seja (M_k) uma seqüência de funções de Orlicz. Se X é o espaço das seqüências de números reais consideremos

$$\ell(M_k) = \{(x_k) \in X: \sum M_k(\frac{|x_k|}{t}) < \infty, \text{ para algum } t>0\}$$

Como vimos em (2.9), se para cada $(x_k) \in \ell(M_k)$ definimos

$$\|(x_k)\| = \inf\{t > 0: \sum M_k(\frac{|x_k|}{t}) \leq 1\}$$

então $(\ell(M_k), \| \ \|)$, ou simplesmente $\ell(M_k)$, é um espaço de Banach. Este é o chamado espaço seqüencial modular que passaremos a estudar.

Tendo em vista que os espaços seqüenciais de Orlicz são um caso particular de espaços seqüenciais modulares, como mostramos em (2.12), as definições e os resultados aqui incluídos são análogos aos já estabelecidos para espaços seqüenciais de Orlicz.

O primeiro conceito importante que veremos é o de equivalência entre seqüências de funções de Orlicz.

(5.1) <u>Definição</u>. Sejam (M_k) e (N_k) seqüências de funções de Orlicz. Dizemos que (M_k) e (N_k) são <u>equivalentes</u>, ou que (M_k) é equivalente a (N_k), se $\ell(M_k) = \ell(N_k)$.

(5.2) <u>Proposição</u>. Se (M_k) e (N_k) são seqüências de funções de Orlicz equivalentes então a função identidade é um isomorfismo de $\ell(M_k)$ em $\ell(N_k)$.

Prova. Seja $I: \ell(M_k) \to \ell(N_k)$ a função identidade. É claro que I é uma função linear, injetora e sobrejetora. Para provarmos que I é contínua usaremos o Teorema Gráfico Fechado.

Seja (x^n) uma seqüência de elementos de $\ell(M_k)$ tal que

(1) (x^n) converge para zero em $\ell(M_k)$,

(2) (x^n) converge para $x = (x_k)$ em $\ell(N_k)$.

Sendo $x^n = (x_k^n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, segue de (1) e de (2.11) que $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} M_k(|x_k^n|) = 0$. Então, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} M_k(|x_k^n|) = 0$. Como M_k é contínua (4.2.ii) e $M(u) = 0$ se, e somente se, $u = 0$ (4.1), então $\lim_{n\to\infty} |x_k^n| = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Usando os mesmos argumentos, segue de (2) que $\lim_{n\to\infty} |x_k^n - x_k| = 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Portanto, $x_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Logo I é contínua, e como é sobrejetora, I é bi-contínua. □

Para o restante do trabalho será fundamental o conceito de seqüência de funções de Orlicz normalizada que definiremos a seguir.

(5.3) <u>Definição</u>. Seja (M_k) uma seqüência de funções de Orlicz. Dizemos que (M_k) é <u>normalizada</u> se $M_k(1) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como observamos em (4.3), se M é uma função de Orlicz e se $\alpha > 0$ é tal que $M(\alpha) = 1$, então a função definida por $M^+(u) = M(\alpha u)$ é uma função de Orlicz com $M^+(1) = 1$. É conseqüência disto o próximo resultado.

(5.4) <u>Proposição</u>. Seja (M_k) uma seqüência de funções de Orlicz. Então (M_k^+) é uma seqüência de funções de Orlicz normalizada, e os espaços $\ell(M_k)$ e $\ell(M_k^+)$ são isométricos.

Prova. Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja $\alpha_k > 0$ tal que $M_k(\alpha_k) = 1$, e $M_k^+(u) = M_k(\alpha_k u)$. Segue de (4.3) que (M_k) é uma seqüência de funções de Orlicz normalizada.

Se, para todo $(x_k) \in \ell(M_k^+)$, definimos $\phi((x_k)) = (\alpha_k x_k)$, então ϕ é uma isometria de $\ell(M_k^+)$ em $\ell(M_k)$.

De fato se $(x_k) \in \ell(M_k^+)$ temos que

$$\Sigma\, M\, (\alpha_k|x_k|/t) = \Sigma\, M^+(|x_k|/t) < \infty$$

para algum $t > 0$, isto é, $\phi((x_k)) \in \ell(M_k)$. É fácil ver que ϕ é linear, injetora e sobrejetora. E para todo $(x_k) \in \ell(M_k^+)$ temos que

$$\|(x_k)\| = \inf\{t > 0 : \Sigma\, M_k^+(|x_k|/t) \leqq 1\}$$

$$= \inf\{t > 0 : \Sigma\, M_k(\alpha_k|x_k|/t) \leqq 1\} = \|\phi((x_k))\|.$$

$\square$

(5.5) <u>Observação</u>. Decorre do resultado anterior que não há perda de generalidades em supor (M_k) normalizada, quando se estuda propriedades topológicas de $\ell(M_k)$.

Os próximos resultados são úteis para garantirmos a equivalência entre duas seqüências de funções de Orlicz, e serão muito usados nos outros parágrafos.

(5.6) <u>Lema</u>. Se (M_k) é uma seqüência de funções de Orlicz normalizada e se $(x_k) \in \ell(M_k)$ então

$$|x_n| \leq \|(x_k)\| \qquad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Prova. Basta ver que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k\left(\frac{|x_k|}{|x_n|}\right) \geq M_n\left(\frac{|x_n|}{|x_n|}\right) = 1 \qquad \square$$

(5.7) <u>Proposição</u>. Sejam (M_k) e (N_k) seqüências de funções de Orlicz normalizadas. Se existirem números reais positivos K, L, a, b e u_0, e um número natural k_0, tais que

$$KM_k(au) \leq N_k(u) \leq LM_k(bu), \qquad \forall\ k \geq k_o,\ \forall\ u \in [0,u_o],$$

então (M_k) e (N_k) são equivalentes.

Prova. Primeiramente, mostraremos que $\ell(M_k) \subset \ell(N_k)$.

Se $(x_k) \in \ell(M_k)$ então por (2.10), $\Sigma\, M_k(|x_k|/\|(x_k)\|) \leq 1$. Decorre de (5.6) que $|x_k| \leq \|(x_k)\|$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Seja $t_o = \max\{\|(x_k)\|,\ \|(x_k)\|/u_o b\}$. Então $|x_k| \leq t_o u_o b$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e assim,

$$\sum_{k=k_o}^{\infty} N_k\left(\frac{|x_k|}{bt_o}\right) \leq \sum_{k=k_o}^{\infty} L\ M_k\left(\frac{|x_k|}{t_o}\right) \leq L.$$

Portanto $(x_k) \in \ell(N_k)$.

Analogamente mostra-se que $\ell(N_k) \subset \ell(M_k)$. □

(5.8) Proposição. Sejam (M_k) e (N_k) seqüências de funções de Orlicz normalizadas. Se existirem números reais positivos K, L e u_o, um natural k_o, e uma seqüência (u_k) de $[0,u_o]$, tais que

(i) $K\ M_k(u) \leq N_k(u) \leq L\ M_k(u)$, $\forall\ k \geq k_o$, $\forall\ u \in [u_k,u_o]$,

e

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \sup\{|M_k(u)-N_k(u)|: u \in [0,u_k[\}$ converge,

então (M_k) e (N_k) são equivalentes.

Prova. Se $(x_k) \in \ell(M_k)$, então por (2.10)

$$\Sigma\, M_k(|x_k|/\|(x_k)\| \leqq 1.$$

E de (5.6) temos que $|x_k| \leqq \|(x_k)\|$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se $t_o = \max\{\|(x_k)\|, \|(x_k)\|/u_o\}$ então $|x_k| \leqq u_o t_o$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Consideremos os conjuntos

$$E = \{k \in \mathbb{N}: k \geqq k_o \text{ e } |x_k| < u_k t_o\},$$

$$F = \{k \in \mathbb{N}: k \geqq k_o \text{ e } |x_k| \geqq u_k t_o\}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja

$$\beta_k = \sup\{|M_k(u) - N_k(u)|: u \in [0,u_k[\}.$$

Então

$$\sum_{k=k_o}^{\infty} N_k\left(\frac{|x_k|}{t_o}\right) = \sum_{k\in E} N_k\left(\frac{|x_k|}{t_o}\right) + \sum_{k\in F} N_k\left(\frac{|x_k|}{t_o}\right)$$

$$\leq \sum_{k\in E}\left[M_k\left(\frac{|x_k|}{t_o}\right)+\beta_k\right]+\sum_{k\in F} LM_k\left(\frac{|x_k|}{t_o}\right)$$

$$\leq \sum_{k=k_o}^{\infty}\beta_k + \max\{L,1\}\sum_{k=k_o}^{\infty} M_k\left(\frac{|x_k|}{t_o}\right),$$

o que implica que $\sum_{k=1}^{\infty} N_k(|x_k|/t_o)$ converge. Portanto $\ell(M_k) \subset \ell(N_k)$.

De forma análoga prova-se que $\ell(N_k) \subset \ell(M_k)$. □

(5.9) <u>Observação</u>. É importante notar que para obtermos os resultados (5.7) e (5.8) só analisamos o comportamento das funções em vizinhanças do zero. Em geral, veremos que para o estudo dos espaços seqüenciais modulares, feito neste trabalho, este comportamento é um dos mais importantes.

Observemos que o resultado seguinte é válido também para seqüências não-normalizadas.

(5.10) <u>Proposição</u>. Sejam (M_k) e (N_k) seqüências de funções de Orlicz. Suponha que existam números reais positivos L e K, um número natural k_o, e uma seqüência (u_k) de números reais não-negativos, tais que

(i) $K\, M_k(u) \leqq N_k(u) \leqq L\, M_k(u), \quad \forall\, k \geqq k_o,$
$\forall\, u \geqq u_k,$

e

(ii) $\Sigma\, M_k(u_k)$ converge.

Então (M_k) e (N_k) são equivalentes.

Prova. Sejam $(x_k) \in \ell(M_k)$ e $\alpha > 0$ tal que $\Sigma\, M_k(|x_k|/\alpha) < \infty$.

Considere os conjuntos

$$E = \{k \geqq k_o\colon\ |x_k| < \alpha u_k\}$$

$$F = \{k \geqq k_o\colon\ |x_k| \geqq \alpha u_k\}.$$

Então

$$\sum_{k=k_o}^{\infty} N_k\left(\frac{|x_k|}{\alpha}\right) = \sum_{k\in E} N_k\left(\frac{|x_k|}{\alpha}\right) + \sum_{k\in F} N_k\left(\frac{|x_k|}{\alpha}\right)$$

$$\leqq \sum_{k\in E} N_k(u_k) + \sum_{k\in F} L M_k\left(\frac{|x_k|}{\alpha}\right)$$

$$\leqq L\left[\sum_{k=k_o}^{\infty} M_k(u_k) + \sum_{k=k_o}^{\infty} M_k\left(\frac{|x_k|}{\alpha}\right)\right] < \infty$$

o que implica que $(x_k) \in \ell(N_k)$. Portanto $\ell(M_k) \subset \ell(N_k)$.

Prova-se de forma análoga que $\ell(N_k) \subset \ell(M_k)$ o que termina a demonstração. □

(5.11) <u>Corolário</u>. Sejam (M_k) e (N_k) seqüências de funções de Orlicz, e seja $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N_k = M_k$ para todo $k \geqq k_0$. Então (M_k) e (N_k) são equivalentes.

O conceito de quase-igualdade, que veremos a seguir será importante para obtermos uma recíproca de (5.7).

(5.12) <u>Definição</u>. Dizemos que duas seqüências de funções de Orlicz (M_k) e (N_k) são <u>quase-iguais</u> se, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $u_k \geqq 0$ tal que $M_k(u) = N_k(u)$, para todo $u \geqq u_k$, e $\Sigma\, M_k(u_k) < \infty$.

(5.13) <u>Proposição</u>. Se (M_k) e (N_k) são seqüências de função de Orlicz quase-iguais então (M_k) e (N_k) são equivalentes.

Prova. O resultado segue imediatamente de (5.10). □

Os próximos resultados e definições serão muito importantes para o estudo dos espaços seqüenciais modulares.

(5.14) Definição. Seja (M_k) uma seqüência de funções de Orlicz. Dizemos que $(x_k) \in c(M_k)$ se $\Sigma M_k(|x_k|/t) < \infty$ para todo $t > 0$, isto é,

$$c(M_k) = \{(x_k) \in \ell(M_k) : \Sigma M_k(\frac{|x_k|}{t}) < \infty, \quad \forall\ t > 0\}.$$

(5.15) Proposição. Seja (M_k) uma seqüência de funções de Orlicz. Então $c(M_k)$ é um subespaço vetorial fechado de $\ell(M_k)$, e a seqüência (e^k) é uma base incondicional de $c(M_k)$. Além disso, (e^k) é uma base normalizada de $c(M_k)$ se, e somente se, (M_k) é normalizada.

Prova. É fácil ver que $c(M_k)$ é um subespaço vetorial de $\ell(M_k)$.

Para provar que $c(M_k)$ é fechado, seja (x^n) uma seqüência de $c(M_k)$ que converge para $x = (x_k)$. Então se $x^n = (x_k^n)$ e $t > 0$ tem-se de (2.11) que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} M_k(\frac{2|x_k^n - x_k|}{t}) = 0$$

Daí e da convexidade de M_k segue que para algum $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k(\frac{|x_k|}{t}) \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} M_k(\frac{2|x_k^n - x_k|}{t}) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} M_k(\frac{2|x_k^n|}{t}) < \infty$$

e então $(x_k) \in c(M_k)$.

Em (3.8) e (3.29) provamos que (e^k) é uma seqüência básica incondicional de $\ell(M_k)$. Para garantirmos que $c(M_k) = [(e^k)]$ basta mostrar que se $(x_k) \in c(M_k)$ então $(x_k) = \Sigma x_k e^k$.

Seja $(x_k) \in c(M_k)$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k e^k$. Dado $\varepsilon > 0$, temos $\Sigma M_k(|x_k|/\varepsilon) < \infty$, e então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=n}^{\infty} M_k(|x_k|/\varepsilon) \leq 1$ para todo $n \geq n_0$. Assim $\| (x_k)-S_n \| \leq \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$, o que implica que $(x_k)=\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k e^k$.

Como $\| e^k \| = \inf\{t > 0: M_k(\frac{1}{t}) \leq 1\}$ e M_k é contínua e crescente (4.2.ii), $\| e^k \| = 1/M_k^{-1}(1)$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, $\| e^k \| = 1$ se, e somente se, $M_k(1) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Da demonstração do resultado anterior segue o seguinte corolário.

(5.16) Corolário. Seja (M_k) uma seqüência de funções de Orlicz. Então $(x_k) \in c(M_k)$ se, e somente se, $(x_k) = \Sigma x_k e^k$.

(5.17) Proposição. Se (M_k) e (N_k) são seqüências de funções de Orlicz equivalentes então $c(M_k) = c(N_k)$.

Prova. Decorre de (5.2) que a função identidade é um isoformismo de $\ell(M_k)$ em $\ell(N_k)$. Logo, se $(x_k) \in c(M_k)$, então existe $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k e^k$ em $\ell(N_k)$ e, portanto $(x_k) \in c(N_k)$. E reciprocamente $c(N_k) \subset c(M_k)$. Portanto $c(M_k) = c(N_k)$. □

(5.18) Proposição. Se (M_k) é uma seqüência de funções de Orlicz então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) $\ell(M_k) = c(M_k)$;

(ii) $\Sigma M_k(|x_k|) < \infty, \quad \forall\ (x_k) \in \ell(M_k)$;

(iii) a seqüência (e^k) é uma base de $\ell(M_k)$.

Prova. É evidente que (i) implica (ii). Suponha que vale (ii). Se $(x_k) \in \ell(M_k)$ então $(\lambda x_k) \in \ell(M_k)$ para todo $\lambda > 0$ e daí $\Sigma M_k(\lambda|x_k|) < \infty$. Portanto $(x_k) \in c(M_k)$, e então (i) é verdadeiro.

Decorre que (5.15) que (ii) e (i) são equivalentes. □

(5.19) Proposição. Se (M_k) é uma seqüência de funções de Orlicz então são equivalentes

(i) $\ell(M_k) = c(M_k)$;

(ii) a seqüência (e^k) é uma base limitadamente completa de $c(M_k)$.

Prova. Suponha que vale (i). Por (3.24) provar (ii) é mostrar que se (a_k) é uma seqüência de números reais com $\sup_{n \in \mathbb{N}} \| \sum_{k=1}^{n} a_k e^k \| < \infty$, então $\Sigma a_k e^k$ converge.

Se $\| \sum_{k=1}^{n} a_k e^k \| \leq \beta$, para todo $n \in \mathbb{N}$ então $\sum_{k=1}^{n} M_k(|a_k|/\beta) \leq 1$, e daí $\sum_{k=1}^{\infty} M_k(|a_k|/\beta) \leq 1$. Portanto $(a_k) \in \ell(M_k)$. Como $(a_k) \in c(M_k)$ então de (5.16), $(a_k) = \Sigma a_k e^k$ e (ii) está provado.

Para provar que (ii) implica (i) seja $(x_k) \in \ell(M_k)$. Então $\Sigma M_k(|x_k|/\alpha) \leq 1$ para algum $\alpha > 0$, e daí $\sum_{k=1}^{n} M_k(|x_k|/\alpha) \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto $\sup_{n \in \mathbb{N}} \| \sum_{k=1}^{n} x_k e^k \| \leq \alpha$ e de (ii) temos que $\Sigma x_k e^k$ converge. Por (5.16) $(x_k) \in c(M_k)$, e assim (i) está provado. □

(5.20) Lema. Seja (M_k) uma seqüência de funções de Orlicz normalizada, e suponha que $\ell(M_k)$ não contenha subespaços isomorfos a ℓ_∞. Então para toda seqüência $(x_k) \in \ell(M_k)$ com $\Sigma M_k(|x_k|) < \infty$, tem-se $\lim x_k = 0$.

Prova. Suponha que exista uma seqüência $(y_k) \in \ell(M_k)$ tal que $\Sigma M_k(|y_k|) < \infty$, e que não tenhamos $\lim y_k = 0$.

Então existem uma subseqüência (y_{k_i}) e $\beta > 0$ tais que, $0 < \beta < |y_{k_i}|$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Como $\sum_{i=1}^{\infty} M_{k_i}(\beta) = A < \infty$, então tomando $\alpha = \beta\min\{1,A^{-1}\}$ temos que $\sum_{i=1}^{\infty} M_{k_i}(\alpha) \leq 1$.

Para cada $(a_i) \in \ell_\infty$ definimos $T(a_i) = (x_k)$ por

$$x_k = \begin{cases} a_i, & \text{se } k = k_i \text{ para algum } i \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{se } k \neq k_i \text{ para todo } i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Desta forma temos uma função $T:\ell_\infty \to \ell(M_k)$, que evidentemente é linear e injetora. Também é contínua, pois para $a=\sup|a_i|>0$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k\left(\frac{|x_k|\alpha}{a}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} M_{k_i}\left(\frac{|a_i|\alpha}{a}\right) \leq 1$$

e temos

$$\| T(a_i)\| = \| (x_k)\| \leq \frac{a}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\| (a_i)\| .$$

Além disso por (5.6), para todo $i \in \mathbb{N}$, vale a relação

$$|a_i| \leq \inf\{t>0: \sum_{i=1}^{\infty} M_{k_i}\left(\frac{|a_i|}{t}\right) \leq 1\} = \| T(a_i)\| ,$$

e então $\| (a_i)\| \leq \| T(a_i)\|$.

Portanto T é um isoformismo de ℓ_∞ num subespaço de $\ell(M_k)$ o que contraria a hipótese. □

Temos, agora, condições de estabelecer uma espécie de recíproca de (5.7), que é análoga ao resultado (4.a.5) de [LT].

Lembramos que, conforme (4.5), se M é uma função de Orlicz, M' indica a derivada à direita de M.

(5.21) Teorema. Sejam (M_k) e (N_k) seqüências de funções de Orlicz normalizadas e suponha que a seqüência (e^k) seja base de $\ell(M_k)$ e de $\ell(N_k)$. Então são equivalentes:

(i) $\ell(M_k) = \ell(N_k)$;

(ii) existem seqüências normalizadas $(M_k^{\S})$ e $(N_k^{\S})$ quase-iguais, respectivamente a (M_k) e (N_k), tais que, existem reais positivos K, L, e u_o, e um natural k_o para os quais vale

$$KM_k^{\S}(u) \leqq N_k^{\S}(u) \leqq LM_k^{\S}(u)$$

para todo $k \geqq k_o$ e todo $u \in [0,u_o]$.

Prova. Segue de (5.7) e de (5.13) que (ii) implica (i). Observamos que não foi usado que (e^k) é base de

$\ell(M_k)$ e $\ell(N_k)$.

Suponhamos que (i) seja verdadeiro.

Para cada $n,k \in \mathbb{N}$ seja

$$u_{k,n}=\sup\{u \in [0,n^{-2}]:n\ M_k(u) \leq N_k(u)\}. \tag{1}$$

Afirmamos que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} M_k(u_{k,p})$ converge.

Para provar isso suponhamos que $\sum_{k=1}^{\infty} M_k(u_{k,n})$ diverge para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos então tomar uma seqüência crescente de inteiros positivos $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\frac{1}{n^2} < \sum_{k=j_n+1}^{j_{n+1}} M_k(u_{k,n}) \leq \frac{2}{n^2}, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

De fato tomemos $j_1 = 0$ e suponhamos escolhido $j_n \in \mathbb{N}$. Como $\sum_{k=j_{n+1}}^{\infty} M_k(u_{k,n})$ diverge existe

$$j_{n+1} = \min\{i \in \mathbb{N}: \sum_{k=j_n+1}^{j_{n+1}} M_k(u_{k,n}) > n^{-2}\}.$$

Daí segue que $\sum_{k=j_n+1}^{j_{n+1}-1} M_k(u_{k,n}) \leq n^{-2}$. Como $M_k(u)/u$ é uma função não-decrescente, $M_k(u_{k,n}) \leq u_{k,n} \leq n^{-2}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e em particular para $k = j_{n+1}$, então

$$\frac{1}{n^2} < \sum_{k=j_n+1}^{j_{n+1}} M_k(u_{k,n}) \leq \frac{2}{n^2}.$$

Seja (x_k) uma seqüência dada por

$x_k = u_{k,n}$, se $j_n < k \leq j_{n+1}$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Então $(x_k) \in \ell(M_k)$ pois

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k(|x_k|) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=j_n+1}^{j_{n+1}} M_k(u_{k,n}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2/n^2.$$

De (i) segue que $(x_k) \in \ell(N_k)$ e então, como (e^k) é base de $\ell(N_k)$, de (5.18) vem que $\Sigma N_k(|x_k|) < \infty$.

Decorre de (1) e da continuidade das funções M_k e N_k que $n\, M_k(u_{k,n}) \leq N_k(u_{k,n})$. Daí

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_k(|x_k|) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=j_n+1}^{j_{n+1}} N_k(u_{k,n})$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=j_n+1}^{j_{n+1}} n\, M_k(u_{k,n})$$

$$\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

o que é uma contradição.

Seja $p \in \mathbb{N}$ tal que $\Sigma\, M_k(u_{k,p}) < \infty$. Vamos definir uma seqüência de funções $(M_k^{\S})$ quase-igual a (M_k).

Por hipótese $\ell(M_k)$ tem base e então, por (3.10), sabemos que $\ell(M_k)$ não contém subespaço isomorfo a ℓ_∞. Daí de (5.20) temos que $\lim\limits_{k\to\infty} u_{k,p} = 0$. Seja $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $u_{k,p} < p^{-2}$, para todo $k \geq k_1$.

Se $k \geq k_1$ então de (1) vem que

$$N_k(u) < pM_k(u), \qquad \forall\ u \in \left]u_{k,p}, p^{-2}\right],$$

e, usando a continuidade das funções N_k e M_k, temos que

$$N_k(u_{k,p}) \leq pM_k(u_{k,p})$$

Portanto $N_k(u_{k,p}) = pM_k(u_{k,p})$.

Se $1 \leq k < k_1$ definimos $M_k^{\S} = M_k$, e para $k \geq k_1$ seja

$$M_k^{\S}(u) = \begin{cases} p^{-1}N_k(u), & \text{se } u \in [0, u_{k,p}[, \\ M_k(u), & \text{se } u \in [u_{k,p}, \infty[. \end{cases}$$

É claro que para cada $k \geq k_1$ $M_k^{\S}$ é contínua, e $M_k^{\S}(1) = 1$. Para mostrar que $M_k^{\S}$ é de Orlicz, basta verificar que $p^{-1}N_k'(u_{k,p}) \leq M_k'(u_{k,p})$ e usar (4.4).

Se $k \geq k_1$, temos que, para $u \in \left]u_{k,p}, p^{-2}\right]$,

$$\frac{N_k(u)}{M_k(u)} < p = \frac{N_k(u_{k,p})}{M_k(u_{k,p})}$$

e então

$$\left(\frac{N_k}{M_k}\right)'(u_{k,p}) = \lim_{u\to u_{k,p}^+} \frac{N_k(u)/M_k(u) - N_k(u_{k,p})/M_k(u_{k,p})}{u - u_{k,p}} \leq 0$$

o que implica que

$$N_k'(u_{k,p})M_k(u_{k,p}) - N_k(u_{k,p})M_k'(u_{k,p}) \leq 0.$$

Daí $[N_k'(u_{k,p})\ M_k(u_{k,p}) - p\ M_k(u_{k,p})M_k'(u_{k,p})] \leq 0$, e portanto, $p^{-1}N_k'(u_{k,p}) \leq M_k'(u_{k,p})$.

Assim $(M_k^{\S})$ é uma seqüência de funções de Orlicz normalizada quase-igual a (M_k). E é fácil verificar que se $k \geq k_1$ então $M_k^{\S}(u) \geq p^{-1}N_k(u)$ para todo $u \in [0,p^{-2}]$.

Agora obteremos a partir de $(M_k^{\S})$, uma seqüência de funções $(N_k^{\S})$, quase-igual a (N_k).

Para cada k, $n \in \mathbb{N}$ seja

$$t_{k,n} = \sup\{u \in [0,n^{-2}]:\ n\ N_k(u) \leq M_k^{\S}(u)\}.$$

Lembrando que, de (5.14) e (5.2), temos que $\ell(M_k^{\S}) = \ell(M_k)$ e (e^k) é uma base de $\ell(M_k^{\S})$, usando os mesmos argumentos da parte anterior pode-se mostrar que existe $q \in \mathbb{N}$ com $\sum_{k=1}^{\infty} N_k(t_{k,q})$ convergente, e que existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$t_{k,q} < q^{-2}$ para todo $k \geq k_2$.

Se $1 \leq k < k_2$ tomemos $N_k^{\S} = N_k$, e se $k \geq k_2$ seja

$$N_k^{\S}(u) = \begin{cases} q^{-1}M_k^{\S}(u), & \text{se } u \in [0,t_{k,q}[, \\ N_k(u), & \text{se } u \in [t_{k,q},\infty[. \end{cases}$$

De forma análoga ao que já foi feito mostra-se que $(N_k^{\S})$ é uma seqüência de funções de Orlicz normalizada quase-igual a (N_k). E também temos que $N_k^{\S}(u) \geq q^{-1}M_k^{\S}(u)$, para todo $k \geq k_2$ e todo $u \in [0,q^{-2}]$.

Portanto, se $k_0 = \max\{k_1,k_2\}$, $u_0 = \min\{p^{-2},q^{-2}\}$, $K = q^{-1}$ e $L = p$ então

$$KM_k^{\S}(u) \leq N_k^{\S}(u) \leq LM_k^{\S}(u)$$

para todo $u \in [0,u_0]$ e $k \geq k_0$. □

§6. AS CONDIÇÕES Δ_2 UNIFORME E Δ_2^* UNIFORME

As condições Δ_2-uniforme e Δ_2^*-uniforme terão um papel importante na caracterização dos espaços seqüenciais modulares separáveis, e no estudo dos duais destes espaços.

Lembramos que, como em (4.5), se M é uma função de Orlicz, indicaremos por M' a derivada à direita de M.

(6.1) <u>Definição</u>. Uma seqüência de funções de Orlicz (M_k) satisfaz a <u>condição Δ_2-uniforme</u>, se existem constantes $K \geqq 1$ e $k_o \in \mathbb{N}$ tais que

$$\frac{uM_k'(u)}{M_k(u)} \leqq K$$

para todo $k \geqq k_o$, e todo $u > 0$ com $M_k(u) < 1$.

(6.2) <u>Definição</u>. Uma seqüência de funções de Orlicz (M_k) satisfaz a <u>condição Δ_2^*-uniforme</u>, se existem constantes $L > 1$ e $k_o \in \mathbb{N}$ tais que

$$\frac{uM_k'(u)}{M_k(u)} \geqq L$$

para todo $k \geqq k_o$, e todo $u > 0$ com $M_k(u) < 1$.

(6.3) <u>Proposição</u>. Seja (M_k) uma seqüência de funções de Orlicz normalizada. Então (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme se, e somente se, existem constantes $K \geqq 1$ e $k_o \in \mathbb{N}$ tais que

$$\frac{uM_k'(u)}{M_k(u)} \leq K, \qquad \forall\ k \geq k_o, \qquad \forall\ u \in]0,1[.$$

E também (M_k) satisfaz a condição Δ_2^*-uniforme se, e somente se, existem constantes $L > 1$ e $k_o \in \mathbb{N}$ tais que

$$\frac{uM_k'(u)}{M_k(u)} \geq L, \qquad \forall\ k \geq k_o, \qquad \forall\ u \in]0,1[.$$

Prova. É decorrência imediata das definições (6.1) e (6.2), e do fato de que uma função de Orlicz é crescente (4.2.ii). □

(6.4) Proposição. Uma seqüência de funções de Orlicz (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme [Δ_2^*-uniforme] se, e somente se, (M_k^+) satisfaz a mesma condição.

Prova. Se (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme, então existem constantes $K \geq 1$ e $k_o \in \mathbb{N}$ tais que

$$\frac{uM_k'(u)}{M_k(u)} \leq K, \qquad \forall\ k \geq k_o, \qquad \forall\ u > 0 \text{ com } M(u) < 1.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja $\alpha_k > 0$ tal que $M_k(\alpha_k) = 1$. Como M_k é crescente, tem-se $0 < M_k(\alpha_k u) < 1$ para todo $u \in]0,1[$. E lembrando que $M_k^+(u) = M_k(\alpha_k u)$, obtém-se

$$\frac{u(M_k^+)'(u)}{M_k^+(u)} = \frac{u\,\alpha_k M_k(\alpha_k u)}{M_k(\alpha_k u)} \leqq K$$

para todo $k \geqq k_0$ e $u \in]0,1[$.

A outra asserção prova-se de forma análoga. □

(6.5) Exemplos. Seja (p_k) uma seqüência de números reais com $p_k \geqq 1$. Se $M_k(u) = u^{p_k}$ para $u \in [0,\infty[$, então (M_k) é uma seqüência de funções de Orlicz normalizada, e

$$\frac{uM_k'(u)}{M_k(u)} = p_k, \qquad \forall\ u \in]0,\infty[, \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Se existem $K \geqq 1$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tais que $p_k \leqq K$ para todo $k \geqq k_0$, então (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme.

Se existem $L > 1$ e $k_1 \in \mathbb{N}$ tais que $p_k \geqq L$ para todo $k \geqq k_1$, então (M_k) satisfaz a condição Δ_2^*-uniforme.

Dessa forma podemos obter exemplos de seqüências de funções que satisfazem a condição Δ_2-uniforme e não satisfazem Δ_2^*-uniforme e, reciprocamente, que satisfazem Δ_2^*-uniforme e não satisfazem Δ_2-uniforme.

Os resultados (6.6) e (6.7) mostram a semelhança da condição Δ_2-uniforme com a condição Δ_2, definida em (1.18), e com a condição Δ_2 para uma função de Orlicz, definida em (4.a.3) de [LT].

(6.6) Proposição. Seja (M_k) uma seqüência de funções de Orlicz normalizada, que satisfaz a condição Δ_2-uniforme. Então as seguintes asserções são verdadeiras:

(i) existem constantes $\alpha \geqq 1$ e $k_o \in \mathbb{N}$ tais que $M_k(2u) \leqq \alpha\, M_k(u)$, $\forall\, u \in [0,1/2]$, $\forall\, k \geqq k_o$;

(ii) existe $k_o \in N$ tal que para todo $\gamma > 1$ existem constantes $\alpha(\gamma) \geqq 1$ e $u(\gamma) > 0$ tais que $M_k(\gamma u) \leqq \alpha(\gamma)\, M_k(u)$, $\forall\, u \in [0,u(\gamma)]$, $\forall\, k \geqq k_o$.

Prova. Se (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme, então existem constantes $k_o \in \mathbb{N}$ e $K \geqq 1$ tais que

$$\frac{uM_k'(u)}{M_k(u)} \leqq K, \quad \forall\, u \in [0,1], \quad \forall\, k \geqq k_o.$$

Para todo $u \in [0,\ 1/2]$ e todo $k \geqq k_o$ temos que

$$\int_u^{2u} \frac{M_k'(t)}{M_k(t)}\, dt \leqq K \int_u^{2u} \frac{1}{t}\, dt,$$

então

$$\ell n\left(\frac{M_k(2u)}{M_k(u)}\right) \leqq K\ \ell n\left(\frac{2u}{u}\right) = K \cdot \ell n 2$$

e daí

$$M_k(2u) \leq 2^K M_k(u)$$

o que prova (i).

Para demonstrarmos o ítem (ii) seja $\gamma > 1$, e tomemos $k_0 \in \mathbb{N}$ como em (i). Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma \leq 2^n$, e $u(\gamma) = 2^{-n}$. Então, usando o ítem (i), temos que para todo $u \in [0,2^{-n}]$ e $k \geq k_0$

$$M_k(\gamma u) \leq M_k(2^n u) \leq K^n M_k(u)$$

o que termina a demonstração. $\square$

(6.7) <u>Proposição</u>. Seja (M_k) uma seqüência de funções de Orlicz normalizada. Então são equivalentes:

(i) (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme;

(ii) existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $\gamma > 1$, existem constantes $\alpha(\gamma) \geq 1$ e $u(\gamma) > 0$ tais que

(a) $M_k(\gamma u) \leq \alpha(\gamma) M_k(u)$, $\forall\, u \in [0,u(\gamma)]$, $\forall\, k \geq k_0$,

(b) $\lim_{\gamma \to 1^+} u(\gamma) \geq 1$,

(c) $\lim_{\gamma \to 1^+} \dfrac{\alpha(\gamma)-1}{\gamma - 1} < \infty$.

Prova. Suponha que vale (i), isto é, que existem $K \geq 1$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\frac{uM_k'(u)}{M_k(u)} \leq K, \qquad \forall\ u \in \,]0,1[, \qquad \forall\ k \geq k_o \tag{1}$$

Considere $L > K \geq 1$ e seja $1 < \gamma_o < L(L-1)^{-1}$

Se $1 < \gamma \leq \gamma_o$ então $\gamma < L(L-1)^{-1}$ e daí $L-\gamma L + \gamma > 0$.

Definimos

$$\alpha(\gamma) = \frac{\gamma}{L-\gamma L+\gamma} \qquad e \qquad u(\gamma) = \frac{1}{\gamma}.$$

Seja $k \geq k_o$ e $u \in [0,\alpha(\gamma)]$. Como $\gamma u < 1$ e $K < L$, decorre de (4.2.i) e de (1) que

$$\frac{M_k(\gamma u)-M_k(u)}{\gamma u - u} \leq \lim_{h\to 0^+} \frac{M_k(\gamma u+h)-M_k(\gamma u)}{h}$$

$$= M_k'(\gamma u) < \frac{LM_k(\gamma u)}{\gamma u}.$$

Então $(L - \gamma L + \gamma)M_k(\gamma u) < \gamma M_k(u)$, e daí $M_k(\gamma u) < \alpha(\gamma)M_k(u)$.

Para $\gamma > \gamma_o$ seja $n(\gamma) = \min\{n \in \mathbb{N}: \gamma \leq \gamma_o^n$. Nesse caso definimos $\alpha(\gamma) = [\alpha(\gamma_o)]^{n(\gamma)}$ e $u(\gamma) = u(\gamma_o)\ \gamma_o^{-n(\gamma)} = \gamma_o^{-n(\gamma)-1}$

Então, se $k \geq k_o$ e $u \in [0,u(\gamma)]$ temos que

$$M_k(\gamma u) \leq M_k(\gamma_o^{n(\gamma)}\ u) \leq [\alpha(\gamma_o)]^{n(\gamma)}\ M_k(u) = \alpha(\gamma)\ M_k(u),$$

o que prova o ítem (a).

Para provar (b) e (c) basta observar que

$$\lim_{\gamma\to 1^+} u(\gamma) = \lim_{\gamma\to 1^+} \frac{1}{\gamma} = 1$$

e que

$$\lim_{\gamma\to 1^+} \frac{\alpha(\gamma)-1}{\gamma-1} = \lim_{\gamma\to 1^+} \left[\left(\frac{\gamma}{L-\gamma L+\gamma} - 1\right) \frac{1}{\gamma-1} \right]$$

$$= \lim_{\gamma\to 1^+} \left[\frac{(\gamma-1)L}{(L-\gamma L+\gamma)(\gamma-1)} \right]$$

$$= \lim_{\gamma\to 1^+} \frac{L}{L-\gamma L+\gamma} = L .$$

Suponhamos, agora, que (ii) seja verdadeiro.

Decorre de (c) que existem números reais $K \geqq 1$ e $\gamma_0 > 1$ tais que

$$\frac{\alpha(\gamma)-1}{\gamma-1} \leqq K, \qquad \forall\ \gamma \in]1,\gamma_0[.$$

E de (b) temos que existe $\gamma_1 \in]1,\gamma_0[$ tal que $\alpha(\gamma_1) > 1$.

Seja $k \geqq k_0$ e $u \in]0,1[\subset]0,\alpha(\gamma_1)[$. Segue de (4.2.i) que

$$M_k'(u) = \lim_{h\to 0^+} \frac{M_k(u+h)-M_k(u)}{h} \leq \frac{M_k(\gamma_1 u)-M_k(u)}{\gamma_1 u-u}$$

e daí, usando (a), temos que

$$\frac{uM_k'(u)}{M_k(u)} \leq \frac{u}{M_k(u)} \cdot \frac{M_k(\gamma_1 u)-M_k(u)}{\gamma_1 u-u}$$

$$\leq \frac{M_k(\gamma_1 u)-M_k(u)}{M_k(u)(\gamma_1-1)}$$

$$\leq \frac{\alpha(\gamma_1)\ M_k(u)-M_k(u)}{M_k(u)(\gamma_1-1)}$$

$$\leq \frac{\alpha(\gamma_1)-1}{\gamma_1-1} \leq K.$$

Portanto (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme. □

Em (6.9), temos uma propriedade do espaço $\ell(M_k)$, quando (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme, ou Δ_2^*-uniforme.

(6.8) <u>Proposição</u>. Seja (M_k) uma seqüência de funções de Orlicz normalizada. Se (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme [Δ_2^*-uniforme], então existem constantes $K \geq 1$ [$L > 1$] e $k_o \in \mathbb{N}$ tais que $M_k(u) \geq u^K$ [$M_k(u) \leq u^L$], para todo $u \in [0,1]$ e $k \geq k_o$.

Prova. Se (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme, então existem constantes $K \geq 1$ e $k_o \in \mathbb{N}$ tais que

$$\frac{uM_k'(u)}{M_k(u)} \leq K, \qquad \forall\ k \geq k_o, \quad \forall\ u \in]0,1[.$$

Sendo assim, se $t \in [0,1]$ temos que

$$\int_t^1 \frac{M_k'(u)}{M_k(u)}\,du \leq \int_t^1 \frac{k}{u}\,du,$$

e então $\ln(M_k(t)) \geq \ln t$. Portanto $M_k(t) \geq t^K$ para todo $t \in [0,1]$ e todo $k \geq k_o$.

Analogamente prova-se a outra asserção. □

(6.9) <u>Corolário</u>. Seja (M_k) uma seqüência de funções de Orlicz normalizada. Se (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme [Δ_2^*-uniforme], então existe $p \geq 1$ [$q > 1$] tal que $\ell(M_k) \subset \ell_p$ [$\ell(M_k) \supset \ell_q$].

Prova. Suponha que (M_k) satisfaça a condição Δ_2-uniforme. Sejam $(x_k) \in \ell(M_k)$ e $t > 0$ tais que $\Sigma\, M_k(|x_k|/t) \leq 1$. Então por (6.8), existem constantes $K \geq 1$ e $k_o \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sum_{k=k_o}^{\infty} \left(\frac{|x_k|}{t}\right)^K \leq \sum_{k=k_o}^{\infty} M_k\left(\frac{|x_k|}{t}\right)$$

e portanto, sendo $p = K$, $(x_k) \in \ell_p$.

Analogamente prova-se a outra asserção. □

E como conseqüência imediata de (6.9) temos o se seguinte corolário.

(6.10) Corolário. Seja (M_k) uma seqüência de funções de Orlicz que satisfaz a condição Δ_2-uniforme. Nestas condições, se $(x_k) \in \ell(M_k)$ então $\lim x_k = 0$.

Não é verdade que se (M_k) e (N_k) são seqüências de funções de Orlicz equivalentes, e se (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme [Δ_2^*-uniforme], então (N_k) satisfaz a mesma condição, como mostra o próximo exemplo.

(6.11) Exemplo. (1) Seja $2 \leqq p_k \leqq 3$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $M_k(u) = u^{p_k}$. É claro que (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme (6.5).

Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja $\beta_k > 0$ tal que $M_k(\beta_k) = 1/2^k$. Definimos

$$N_k(u) = \begin{cases} 0 & , \quad \text{se } u = 0 \\ (\beta_k)^{p_k} \, e^{2(1-\frac{\beta_k}{u})} & , \quad \text{se } u \in \,]0, \beta_k[\\ u^{p_k} & , \quad \text{se } u \in [\beta_k, \infty[. \end{cases}$$

Segue de (4.11) que (N_k) é uma seqüência de funções de Orlicz.

Como $\Sigma\, M_k(\beta_k) = 1$ decorre de (5.13) que (M_k) e (N_k) são equivalentes. Entretanto

$$\frac{uN_k'(u)}{N_k(u)} = \frac{2\beta_k}{u} \qquad \forall\ u \in]0,\beta_k[$$

o que implica que (N_k) não satisfaz a condição Δ_2-uniforme.

(2) Seja (M_k) uma seqüência de funções de Orlicz normalizada que satisfaz a condição Δ_2^*-uniforme. Como M_k é contínua e crescente (4.2.ii) existe $\beta_k \in]0,1[$ tal que $M_k(\beta_k) = 1/2^k$. Logo, $\Sigma M_k(\beta_k) = 1$. Definimos

$$N_k(u) = \begin{cases} \dfrac{M_k(\beta_k)u}{\beta_k} & , \quad \text{se } u \in [0,\beta_k[, \\ M_k(u) & , \quad \text{se } u \in [\beta_k,\infty[. \end{cases}$$

De (4.6.i) segue que N_k' é não-decrescente e, portanto, usando (4.4) temos que (N_k) é uma seqüência de funções de Orlicz normalizada. Por (5.13) temos que (N_k) e (M_k) são equivalentes. Entretanto (N_k) não satisfaz a condição Δ_2^*-uniforme, pois para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{uN_k'(u)}{N_k(u)} = 1, \qquad \forall\ u \in]0,\beta_k[.$$

Os próximos resultados mostram que em alguns ca -

sos, úteis no restante do trabalho, as condições Δ_2-uniforme e Δ_2^*-uniforme são mantidas pela relação de equivalência (5.1).

(6.12) <u>Proposição</u>. Seja (M_k) uma seqüência de funções de Orlicz normalizada. Então existe uma seqüência de funções de Orlicz normalizada (N_k) equivalente a (M_k), tal que $N_k'(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, se (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme [Δ_2^*-uniforme] então (N_k) satisfaz a mesma condição.

Prova. Se $k \in \mathbb{N}$, como M_k é contínua e crescente (4.2.ii), existe $\beta_k \in]0,1[$ tal que $M_k(\beta_k) = 1/2^k$, e assim $\Sigma M_k(\beta_k) = 1$. Seja $p_k = \dfrac{\beta_k M_k'(\beta_k)}{M_k(\beta_k)}$. Por (4.6.i), tem-se $p_k \geqq 1$.

Vamos considerar dois casos.

<u>1º</u> <u>caso</u>: Suponhamos que $p_k > 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Definimos

$$N_k(u) = \begin{cases} \dfrac{u^{p_k} M_k(\beta_k)}{(\beta_k)^{p_k}}, & \text{se } u \in [0,\beta_k[\\[2ex] M_k(u), & \text{se } u \in [\beta_k,\infty[. \end{cases}$$

É fácil ver que N_k' é uma função não-decrescente e então, por (4.4.ii), N_k é uma função de Orlicz. Logo (N_k) é uma seqüência de funções de Orlicz normalizada com $N_k'(0) = 0$ para todo

$k \in \mathbb{N}$. E por (5.13), as seqüências (M_k) e (N_k) são equivalentes.

Além disso, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{uN_k'(u)}{N_k(u)} = \begin{cases} p_k \ , & \text{se } u \in [0, \beta_k[, \\ \dfrac{uM_k'(u)}{M_k(u)} \ , & \text{se } u \in [\beta_k, \infty[. \end{cases}$$

o que implica que (N_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme [Δ_2^*-uniforme], se (M_k) satisfaz a mesma condição.

<u>2º caso</u>: Suponhamos que $p_k = 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

Neste caso, vamos definir uma seqüência de funções de Orlicz normalizada $(M_k^{\S})$, equivalente a (M_k) para a qual tem-se

$$\frac{\beta_k (M_k^{\S})'(\beta_k)}{M_k^{\S}(\beta_k)} > 1, \qquad \forall\ k \in \mathbb{N},$$

e é tal que satisfaz a condição Δ_2-uniforme [Δ_2^*-uniforme], se (M_k) satisfaz a mesma condição.

Feito isso, aplica-se o resultado do 1º caso à seqüência $(M_k^{\S})$.

Seja o conjunto

$$E = \{k \in \mathbb{N}: \ \frac{\beta_k M_k'(\beta_k)}{M_k(\beta_k)} = 1\}.$$

Se $k \notin E$, tomemos $M_k^{\S} = M_k$, e se $k \in E$ definimos

$$M_k^{\S}(u) = \begin{cases} \dfrac{M_k(\beta_k)u}{\beta_k(2-M_k(\beta_k))} & , \text{ se } u \in [0,\beta_k[, \\[2ex] \dfrac{2M_k(u)-M_k(\beta_k)}{2-M_k(\beta_k)} & , \text{ se } u \in [\beta_k,\infty[. \end{cases}$$

Temos que $(M_k^{\S})'$ é não-decrescente, pois de (4.6.i) decorre que

$$\frac{M_k(\beta_k)}{\beta_k(2-M_k(\beta_k))} \leq \frac{M_k'(\beta_k)}{2-M_k(\beta_k)}.$$

Como $M_k^{\S}(1) = 1$ então $(M_k^{\S})$ é uma seqüência de funções de Orlicz normalizada.

Se $k \in E$ e $u \in [0,\beta_k]$, então, por (4.2.iii), $\beta_k M_k(u) \leq u\, M_k(\beta_k)$, e daí

$$M_k^{\S}(u) - M_k(u) = \frac{M_k(\beta_k)u}{\beta_k(2-M_k(\beta_k))} - M_k(u)$$

$$\leq \frac{\beta_k M_k(u)}{\beta_k(2-M_k(\beta_k))} - M_k(u)$$

$$= \left(\frac{1}{2-M_k(\beta_k)} - 1\right) M_k(u)$$

$$\leq M_k(u) \leq M_k(\beta_k).$$

Portanto

$$\Sigma\sup\{|M_k^{\S}(u)-M_k(u)|: u \in [0,\beta_k[\} \leq \Sigma M_k(\beta_k) < 1 \tag{1}$$

o que dá (5.8.ii).

Se $k \in E$ e $u \in [\beta_k, 1]$, então da definição de $M_k^{\S}$ temos

$$\frac{M_k(u)}{2-M_k(\beta_k)} \leq M_k^{\S}(u) \leq \frac{2\ M_k(u)}{2-M_k(\beta_k)}.$$

Como $0 \leq \dfrac{1}{2-M_k(\beta_k)} \leq 1$ e $\dfrac{2}{2-M_k(\beta_k)} \geq 1$, então para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\left[\frac{1}{2-M_k(\beta_k)}\right] M_k(u) \leq M_k^{\S}(u) \leq \left[\frac{2}{2-M_k(\beta_k)}\right] M_k(u) \tag{2}$$

para todo $u \in [\beta_k, 1]$.

Como vale (1) e (2) segue de (5.8) que (M_k) e $(M_k^{\S})$ são equivalentes.

Temos, também, que

$$\frac{\beta_k(M_k^{\S})'(\beta_k)}{M_k^{\S}(\beta_k)} = \begin{cases} \dfrac{\beta_k M_k'(\beta_k)}{M_k(\beta_k)}, & \text{se } k \notin E, \\[2ex] \dfrac{2\beta_k M_k'(\beta_k)}{M_k(\beta_k)}, & \text{se } k \in E. \end{cases}$$

Logo $\dfrac{\beta_k(M_k^{\S})'(\beta_k)}{M_k^{\S}(\beta_k)} > 1$, para todo $k \in E$.

Resta mostrar que se (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme [Δ_2^*-uniforme], então $(M_k^{\S})$ satisfaz a mesma condi - ção.

Se $k \in E$ então

$$\frac{u(M_k^{\S})'(u)}{M_k^{\S}(u)} = \begin{cases} 1 & , \quad \text{se } u \in]0,\beta_k[, \\[2ex] \dfrac{2uM_k'(u)}{2M_k(u)-M_k(\beta_k)}, & \text{se } u \in [\beta_k,1[. \end{cases}$$

Mas como

$$\frac{2uM_k'(u)}{2M_k(u)-M_k(\beta_k)} = \frac{uM_k'(u)}{M_k(u)}\left[\frac{M_k(u)}{M_k(u)-2^{-1}M_k(\beta_k)}\right],$$

e para $u \in [\beta_k,1]$

$$1 \leqq \frac{M_k(u)}{M_k(u)-2^{-1}M_k(\beta_k)} \leqq 2,$$

Portanto se $k \in \mathbb{N}$

$$\frac{uM_k'(u)}{M_k(u)} \leq \frac{u(M_k^{\S})'(u)}{M_k^{\S}(u)} \leq 2\frac{uM_k'(u)}{M_k(u)}$$

para todo $u \in \,]0,1[$, o que termina a demonstração. □

(6.13) <u>Proposição</u>. Seja (M_k) uma seqüência de funções de Orlicz normalizada. Então existe uma seqüência de funções de Orlicz normalizada (N_k), equivalente a (M_k), tal que $\lim_{u\to\infty} N_k'(u) = \infty$ e $N_k'(0) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. E se (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme [Δ_2^*-uniforme] então (N_k) satisfaz a mesma condição.

Prova. Devido a (6.12) podemos supor, sem perda de generalidade, que $M_k'(0) = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$N_k(u) = \begin{cases} M_k(u) & , \quad \text{se } u \in [0,1[, \\ u\, M_k(u) & , \quad \text{se } u \in [1,\infty[. \end{cases}$$

Como $M_k'(1) \leq M_k(1) + 1M_k'(1) = N_k'(1)$, então N_k' é não-decrescente. De (4.4) temos que N_k é uma função de Orlicz. Além disso, $N_k'(0) = M_k'(0) = 0$, e por (4.2.iv),
$\lim_{u\to\infty} N_k'(u) = \lim_{u\to\infty} (M_k(u) + uM_k'(u)) = \infty.$

Sendo $N_k(u) = M_k(u)$ para todo $u \in [0,1]$ e todo $k \in \mathbb{N}$ temos que se (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme [Δ_2^*-uniforme] então (N_k) também satisfaz; e de (5.7) concluímos que (N_k) e (M_k) são equivalentes. □

(6.14) Proposição. Seja (M_k) uma seqüência de funções de Orlicz normalizada que satisfaz a condição Δ_2-uniforme. Então existe uma seqüência de funções de Orlicz normalizada (N_k), equivalente a (M_k), que satisfaz a condição Δ_2-uniforme, e tal que para todo $k \in N$, $N_k'(0) = 0$, N_k' é uma função contínua, crescente, e $\lim_{u\to\infty} N_k'(u) = \infty$. Além disso, se (M_k) satisfaz a condição Δ_2^*-uniforme então (N_k) satisfaz a mesma condição.

Prova. Decorre de (6.13) que podemos supor $M_k'(0) = 0$ e $\lim_{u\to\infty} M_k'(u) = \infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$N_k(u) = \frac{\int_0^u \frac{M_k(t)}{t}dt}{\int_0^1 \frac{M_k(t)}{t}dt}$$

para todo $u \in [0,\infty[$.

É claro que (N_k) é uma seqüência de funções de Orlicz normalizada. Como $N_k'(u) = M_k(u)/u$, para todo $u \in]0,\infty[$, e $M'(0) = 0$ então por (4.6.ii) temos que N_k' é crescente em $]0,\infty[$. Como $M_k(u)/u$ é não-decrescente (4.2.iii), é fácil ver que $N_k(u) \leq M_k(u)$ e, portanto,

$$N_k'(0) = \lim_{u\to 0^+} \frac{N_k(u)}{u} \leqq \lim_{u\to 0^+} \frac{M_k(u)}{u} = M_k'(0) = 0,$$

e de (4.6.i), $\lim_{u\to\infty} N_k'(u) = \lim_{u\to\infty} M_k'(u) = \infty$.

Por hipótese (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme, então existem constantes $K \geqq 1$ e $k_o \in \mathbb{N}$ tais que

$$\frac{uM_k'(u)}{M_k(u)} \leq K, \qquad \forall\ u \in\ ]0,1[, \qquad \forall\ k \geq k_o.$$

Decorre daí e de (4.6.i) que

$$\frac{M_k(t)}{t} \leqq M_k'(t) \leqq K\, \frac{M_k(t)}{t}, \qquad \forall\ t \in\ ]0,1[,\ \forall\ k \geq k_o,$$

e assim, se $u \in [0,1]$ e $k \geq k_o$,

$$\int_o^u \frac{M_k(t)}{t} dt \leq M_k(u) \leq K \int_o^u \frac{M_k(t)}{t} dt. \tag{1}$$

Portanto de (5.7) segue que (M_k) e (N_k) são equivalentes.

Decorre de (1) que (N_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme, e que se (M_k) satisfaz a condição Δ_2^*-uniforme, en-

(N_k) também satisfaz. □

(6.15) <u>Proposição</u>. Seja (M_k) uma seqüência de funções de Orlicz normalizada. Suponha que existam constantes $K \geqq 1$, $k_o \in \mathbb{N}$ e $\beta \in]0,1[$ tais que

$$(A) \begin{cases} (i) \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} M_k(\beta) > 0 \\ (ii) \dfrac{uM_k'(u)}{M_k(u)} \leqq K, \quad \forall\, u \in]0,\beta[, \quad \forall\, k \geqq k_o. \end{cases}$$

Nestas condições, existe uma seqüência de funções de Orlicz normalizada (N_k), equivalente a (M_k), que satisfaz a condição Δ_2-uniforme.

Prova. Para cada $k \in \mathbb{N}$, tomemos $p_k = \dfrac{\beta M_k'(\beta)}{M_k(\beta)}$. Temos de (A) que $p_k \leqq K$ para todo $k \geqq k_o$.

Definimos

$$N_k(u) = \begin{cases} \dfrac{\beta^{p_k} M_k(u)}{M_k(\beta)}, & \text{se } u \in [0,\beta[, \\ u^{p_k}, & \text{se } u \in [\beta,\infty[. \end{cases}$$

É fácil ver que N_k' é uma função não-decrescente, e $N_k(1) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então (N_k) é uma seqüência de funções de Orlicz normalizada.

Também temos que

$$\frac{uN_k'(u)}{N_k(u)} = \begin{cases} \dfrac{uM_k'(u)}{M_k(u)}, & \text{se } u \in]0,\beta[\,, \\ p_k, & \text{se } u \in [\beta,\infty[\,, \end{cases}$$

e assim de (A) vem que $\dfrac{uN_k'(u)}{N_k(u)} \leqq K$, para todo $k \geqq k_o$ e para todo $u \in]0,\infty[$, o que implica que (N_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme.

Se $k \geqq k_o$ então $p_k \leqq K$ e daí, sendo $c = \inf M_k(\beta)$ temos que

$$\beta^K \leqq \frac{\beta^{p_k}}{M_k(\beta)} \leqq \frac{1}{c}$$

e, portanto

$$\beta^K M_k(u) \leqq N_k(u) \leqq \frac{1}{c}\; M_k(u)$$

para todo $u \in [0,\beta]$, o que, lembrando (5.7), implica que (N_k) e (M_k) são equivalentes. □

(6.16) <u>Proposição</u>. Seja (M_k) uma seqüência de funções de Orlicz normalizada que satisfaz a condição Δ_2-uniforme. Suponha que existam constantes $L > 1$, $k_0 \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in]0,1[$ tais que

$$(B) \begin{cases} (i) \ \inf M_k(\alpha) > 0 \\ (ii) \ \dfrac{uM_k'(u)}{M_k(u)} > L, \qquad \forall\, u \in]0,\alpha], \ \forall\, k \geq k_0 \end{cases}$$

Nestas condições, existe uma seqüência de funções de Orlicz normalizada (N_k), equivalente a (M_k), que satisfaz as condições Δ_2^*-uniforme e Δ_2-uniforme.

Prova. Por hipótese existem constantes $K \geq 1$ e $k_1 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\frac{uM_k'(u)}{M_k(u)} \leq K, \qquad \forall\, u \in [0,1], \quad \forall\, k \geq k_1 \tag{1}$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ seja $q_k = \dfrac{\alpha M_k'(\alpha)}{M_k(\alpha)}$, e definimos

$$N_k(u) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^{q_k} M_k(u)}{M_k(\alpha)}, & \text{se } u \in [0,\alpha[, \\ u^{q_k}, & \text{se } u \in [\alpha,\infty[. \end{cases}$$

É fácil ver que N_k' é uma função não-decrescente, e daí segue que (N_k) é uma seqüência de funções de Orlicz normalizada.

Segue de (1) que $q_k \leqq K$ para todo $k \geqq k_1$, e sendo $c = \inf M_k(\alpha)$ temos que

$$\alpha^K \leqq \frac{\alpha^{q_k}}{M_k(\alpha)} \leqq \frac{1}{c}$$

e, portanto

$$\alpha^K M_k(u) \leqq N_k(u) \leqq \frac{1}{c} M_k(u)$$

para todo $u \in [0,\alpha]$ e todo $k \geqq k_1$. Decorre então de (5.7) que (M_k) e (N_k) são equivalentes.

E para todo $k \in \mathbb{N}$ temos que

$$\frac{uN_k'(u)}{N_k(u)} = \begin{cases} \dfrac{uM_k'(u)}{M_k(u)}, & \text{se } u \in \,]0,\alpha[\\ q_k, & \text{se } u \in [\alpha,\infty[. \end{cases}$$

Daí por (1) e (B) segue que $L < \dfrac{uN_k'(u)}{N_k(u)} \leqq K$, para todo $u \in \,]0,\infty[$ e todo $k \geqq \max\{k_o,k_1\}$. Portanto (N_k) satisfaz as condições Δ_2-uniforme e Δ_2^*-uniforme. $\square$

§7. ALGUNS RESULTADOS SOBRE ESPAÇOS SEQÜENCIAIS MODULARES SEPARÁVEIS

O primeiro resultado importante deste parágrafo é o (7.2), que traz a caracterização dos espaços seqüenciais modulares separáveis. É interessante notar a semelhança de (7.2) com a proposição (4.a.4) de [LT].

O restante deste parágrafo é dedicado ao estudo dos subespaços dos espaços seqüenciais modulares separáveis, onde destacamos as proposições (7.5), (7.9), (7.10) e (7.12).

Em todo esse parágrafo (M_k) indicará uma seqüência de funções de Orlicz normalizada.

Em conseqüência de (5.4), os resultados (7.5), (7.9), (7.10), (7.12), (7.14) e (7.15), são válidos também para seqüências de funções de Orlicz não-normalizadas.

(7.1) Lema. Se (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme, então $\ell(M_k) = c(M_k)$.

Prova. Sejam $(x_k) \in \ell(M_k)$ e $s > 0$ tais que $\Sigma M_k(|x_k|/s) < \infty$. Se $t \geq s$ é claro que $\Sigma M_k(|x_k|/t) < \infty$.

Considere, agora, $t < s$. Decorre de (6.6.ii) que para $\gamma = s/t$ existem constantes $\alpha(\gamma) \geq 1$, $u(\gamma) > 0$ e $k_1 \in \mathbb{N}$

tais que

$$M_k(\frac{su}{t}) \leqq \alpha(\gamma)\ M_k(u), \qquad \forall\ u \in [0,u(\gamma)],\ \forall\ k \geqq k_1.$$

E de (6.10) tem-se que $\lim\limits_{k\to\infty} |x_k| = 0$. Então existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_k| < u(\gamma)s$ para todo $k \geqq k_2$.

Assim, se $k_0 = \max\{k_1,k_2\}$ então

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} M_k(\frac{|x_k|}{t}) \leqq \alpha(\gamma) \sum_{k=k_0}^{\infty} M_k(\frac{|x_k|}{s}) < \infty$$

Portanto $\Sigma M_k(|x_k|/t) < \infty$ para todo $t > 0$, isto é, $(x_k) \in c(M_k)$. □

(7.2) <u>Teorema</u>. As seguintes asserções são equivalentes.

(i) (M_k) é quase-igual a uma seqüência de funções de Orlicz normalizada que satisfaz a condição (A) de (6.15);

(ii) (M_k) é equivalente a uma seqüência de funções de Orlicz normalizada que satisfaz a condição Δ_2-uniforme;

(iii) $\ell(M_k) = c(M_k)$;

(iv) a seqüência (e^k) é uma base de $\ell(M_k)$;

(v) $\ell(M_k)$ é separável;

(vi) $\ell(M_k)$ não contém subespaço isomorfo à ℓ_∞;

(vii) $c(M_k)$ não contém subespaço isomorfo à c_0.

Prova. É fácil mostrar a partir de (6.15) e (5.13) que (i) implica (ii). Por outro lado, se existe uma seqüência de funções de Orlicz normalizada (N_k), equivalente à (M_k), que satisfaz a condição Δ_2-uniforme, então de (7.1), $c(N_k) = \ell(N_k)$, de (5.1), $\ell(N_k) = \ell(M_k)$ e de (5.17), $\ell(M_k) = c(M_k)$. Portanto, $c(M_k) = \ell(M_k)$.

É conseqüência imediata de (5.18) que (iii) e (iv) são equivalentes. Decorre de (3.9) que (iv) implica (v), e como ℓ_∞ não é separável, é claro que (v) implica (vi).

Em (3.29) mostramos que (e^k) é uma base incondicional de $c(M_k)$. Então por (3.32.ii) e por (5.19) temos que (vii) é equivalente a (iii).

Portanto para terminar basta provar que (vi) implica (i).

Para cada $k,n \in \mathbb{N}$ seja

$$u_{k,n} = \sup\{u \in [0,2^{-n}]: uM_k'(u) \geq 2^n M_k(u)\}.$$

Como de (4.2.ii), M_k é contínua, e de (4.4), M_k' é não-decrescente, é fácil ver que

$$u_{k,n}M'_k(u_{k,n}) \geqq 2^n M_k(u_{k,n})$$

e então por (4.6.i)

$$M_k(2u_{k,n}) \geqq 2^n M_k(u_{k,n}) \tag{1}$$

para todo $k,n \in \mathbb{N}$.

Afirmamos que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} M_k(u_{k,p}) < \infty$

Suponhamos que isto seja falso, isto é, que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^{\infty} M_k(u_{k,n})$ divirja. Com os mesmos argumentos usados na demonstração de (5.21), podemos mostrar que existe uma seqüência crescente de inteiros positivos (j_n) tal que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2^n} < \sum_{k=j_n+1}^{j_{n+1}} M_k(u_{k,n}) \leqq \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{2}$$

Para cada $(a_n) \in \ell_\infty$ definimos $(x_k) = T(a_n)$ por

$$x_k = a_n u_{k,n}, \quad \text{se } j_n < k \leqq j_{n+1}, \quad \text{para algum } n \in \mathbb{N}.$$

Então T é uma função com valores em $\ell(M_k)$, que é um isomorfismo na imagem.

De fato, $T(a_n) \in \ell(M_k)$ pois, lembrando que M_k é convexa e (2) temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=j_n+1}^{j_{n+1}} M_k\left(\frac{|a_n| u_{k,n}}{2\|(a_n)\|_\infty}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=j_n+1}^{j_{n+1}} \frac{1}{2} M_k(u_{k,n})$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Desta desigualdade segue, também, que $\|T(a_n)\| \leq 2 \|(a_n)\|_\infty$. É fácil ver que T é linear e injetora. Portanto, para garantirmos que T é um isomorfismo na imagem, basta provar que T^{-1} é contínua.

Tomemos $(a_n) \in \ell_\infty$ com $\|T(a_n)\| = 1$. Então $\|(a_n)\|_\infty = \sup|a_n| \leq 2$. Com efeito, se $|a_i| > 2$ para algum $i \in \mathbb{N}$, então lembrando (2) e (1),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=j_n+1}^{j_{n+1}} M_k(|a_n| u_{k,n}) \geq \sum_{k=j_i+1}^{j_{i+1}} M_k(|a_i| u_{k,i})$$

$$> \sum_{k=j_i+1}^{j_{i+1}} M_k(2u_{k,i})$$

$$\geq \sum_{k=j_i+1}^{j_{i+1}} 2^i M_k(u_{k,i}) > 1,$$

e daí $\|T(a_n)\| > 1$, o que é absurdo. Portanto, T^{-1} é contínua e $\|T^{-1}\| \leq 2$.

Portanto, $\ell(M_k)$ contém um subespaço isomorfo a ℓ_∞, o que contradiz a hipótese de (vi).

Concluímos que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} M_k(u_{k,p}) < \infty$.

Como M_k é contínua e crescente, podemos tomar $y_k > u_{k,p}$ tal que $M_k(y_k) = M_k(u_{k,p}) + 2^{-p}$. Temos que $y_k \leqq 1$. De fato, como $u_{k,p} \leqq 2^{-p}$ e $M(u)/u$ é não-decrescente, $M_k(u_{k,p}) \leqq u_{k,p} \leqq 2^{-p}$ e então $M_k(y_k) \leqq 1$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$N_k(u) = \begin{cases} \dfrac{uM_k(y_k)}{y_k}, & \text{se } u \in [0, y_k[, \\ \\ M_k(u), & \text{se } u \in [y_k, \infty[. \end{cases}$$

Vamos mostrar que (N_k) tem as propriedades desejadas.

Como $y_k \leqq 1$ tem-se que $N_k(1) = M_k(1) = 1$. De (4.6.i) segue que $M_k(y_k) \leqq y_k M'(y_k)$, e daí N_k' é uma função não-decrescente. Logo, por (4.4), (N_k) é uma seqüência de funções de Orlicz normalizada. E como $\Sigma M_k(y_k) = \Sigma(M_k(u_{k,p}) + 2^{-p}) < \infty$ segue de (5.12) que (N_k) é quase-igual a (M_k).

Vamos verificar que (N_k) satisfaz a condição (A) de (6.15). Comecemos por (ii).

Se $2^{-p} < y_k$ então

$$\frac{uN_k'(u)}{N_k(u)} = 1, \qquad \forall\ u \in\ ]0, 2^{-p}],$$

e quando $y_k \leqq 2^{-p}$

$$\frac{uN_k'(u)}{N_k(u)} = \begin{cases} 1, & \text{se } u \in \,]0,y_k[\\ \dfrac{uM_k'(u)}{M_k(u)}, & \text{se } u \in [y_k, 2^{-p}]. \end{cases}$$

Como $y_k > u_{k,p} = \sup\{u \in [0,2^{-p}]:\ uM_k'(u) \geqq 2^p M_k(u)\}$, então para todo $u \in [y_k, 2^{-p}]$

$$\frac{uN_k'(u)}{N_k(u)} = \frac{uM_k'(u)}{M_k(u)} < 2^p$$

E também (N_k) satisfaz (i) de (A) de (6.15), pois $\inf\limits_{k \in \mathbb{N}} M_k(2^{-p}) > 0$. Com efeito, supondo que $\inf\limits_{k \in \mathbb{N}} M_k(2^{-p}) = 0$, então existe uma subseqüência $(M_{k_i}(2^{-p}))$ tal que $\sum\limits_{i=1}^{\infty} M_{k_i}(2^{-p}) < \infty$. É fácil ver que $\ell(M_{k_i})$ é isomorfo a um subespaço de $\ell(M_k)$, e então de (vi) temos que $\ell(M_{k_i})$ não contém subespaço isomorfo a ℓ_∞. Logo por (5.20) $\lim\limits_{i\to\infty} 2^{-p} = 0$ o que é, evidentemente, um absurdo.

Como

$$N_k(2^{-p}) = \begin{cases} M_k(2^{-p}), & \text{se } y_k \leqq 2^{-p}, \\ \dfrac{2^{-p}M(y_k)}{y_k}, & \text{se } 2^{-p} < y_k, \end{cases}$$

então $N_k(2^{-p}) \geq M_k(2^{-p})$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e daí $\inf\limits_{k \in \mathbb{N}} N_k(2^{-p}) > 0$.

Portanto (N_k) satisfaz a condição (A) de (6.15). □

Para um estudo dos subespaços de $\ell(M_k)$ que faremos a seguir, precisamos dos seguintes resultados.

(7.3) <u>Lema</u>. Em $\ell(M_k)$ seja (u_k) uma base de blocos normalizada de (e^k). Se para cada $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \sum\limits_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} \alpha_i e^i$ e $N_k(u) = \sum\limits_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} M_i(|\alpha_i|u)$, então (N_k) é uma seqüência de funções de Orlicz normalizada. Se (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme, então tem-se

(i) (N_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme;

(ii) $\Sigma x_k u_k$ converge em $\ell(M_k)$ se, e somente se, $\Sigma x_k e^k$ converge em $\ell(N_k)$, isto é, (u_k) é equivalente à base (e^k) de $\ell(N_k)$.

Prova. Se N_k é como na hipótese, então é claro que é uma função de Orlicz, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Como $1 = \| u_k \| = \inf\{t > 0 : \sum\limits_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} M_i(|\alpha_i|/t) \leq 1\}$, então $\sum\limits_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} M_i(|\alpha_i|) = 1$ e daí $N_k(1) = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme, existem constantes $k_o \in \mathbb{N}$ e $K \geq 1$ tais que, $vM_k'(v) \leq KM_k(v)$ para todo $v \in]0,1[$ e todo $k \geq k_o$.

Seja $u \in]0,1[$ e $k \geq k_o$. Como $M_i(|\alpha_i|) \leq 1$, então $\alpha_i|u| \leq 1$. Além disso, lembrando que (p_k) é crescente temos $p_k \geq k \geq k_o$. Daí

$$\frac{uN_k'(u)}{N_k(u)} = \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} \frac{u|\alpha_i|M_i'(|\alpha_i|u)}{\sum\limits_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} M_i(|\alpha_i|u)}$$

$$\leq \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} \frac{KM_i(|\alpha_i|u)}{\sum\limits_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} M_i(|\alpha_i|u)} = K.$$

E isto prova que (N_k) satisfaz a condição Δ_2 uniforme.

Para provar (ii) suponhamos, em primeiro lugar, que $\Sigma x_k e^k$ converge em $\ell(N_k)$. De (7.2) tem-se que (e^k) é base de $\ell(N_k)$ e, então de (5.18) segue que $\Sigma N_k(|x_k|) < \infty$. Como

$$\sum_{k=1}^{\infty} N_k(|x_k|) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} M_i(|\alpha_i x_k|) < \infty$$

e $c(M_k) = \ell(M_k)$ (7.2), então segue de (5.16) que

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k u_k = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} x_k \alpha_i e^i$$

converge em $\ell(M_k)$.

Analogamente prova-se que, se $\Sigma x_k u_k$ converge em $\ell(M_k)$, então $\Sigma x_k e^k$ converge em $\ell(N_k)$. Portanto (u_k) é equivalente a (e^k). $\square$

(7.4) Lema. Suponha que (M_k) satisfaça a condição Δ_2-uniforme. Em $\ell(M_k)$ seja (u_k) uma base de blocos normalizada de (e^k). Então, existe uma subseqüência de (u_k), que é uma seqüência básica, equivalente à base (e^k) de algum espaço seqüencial de Orlicz $\ell(N)$.

Prova. Se $u_k = \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} \alpha_i e^i$ e $N_k(u) = \sum_{i=p_k+1}^{p_{k+1}} M_i(|\alpha_i|u)$

então, decorre de (7.3.i), que (N_k) é uma seqüência de funções de Orlicz normalizada, que satisfaz a condição Δ_2-uniforme, isto é, existem constantes $k_o \in \mathbb{N}$ e $K \geq 1$, tais que

$$\frac{uN_k'(u)}{N_k(u)} \leq K, \qquad \forall\ k \geq k_o, \quad \forall\ u \in]0,1[. \tag{1}$$

Além disso, de (6.14) e (5.2) podemos supor, sem perda de generalidade, que N_k é contínua para cada $k \in \mathbb{N}$.

Em $[0,1]$ a seqüência $(N_k)_{k \geq k_o}$ é equilimitada, pois é normalizada. Além disso, é eqüicontínua. De fato, se $u,t \in [0,1]$, então pelo Teorema do Valor Médio, existe

$s_k \in]0,1[$ tal que

$$|N_k(u) - N_k(t)| = N_k'(s_k)|u-t|.$$

Usando (1) e o fato de que a função $N_k(u)/u$ é não-decrescente temos

$$|N_k(u) - N_k(t)| \leq \frac{KN_k(s_k)}{s_k} |u-t|$$

$$\leq K|u-t|$$

para todo $k \geq k_o$.

Portanto, segue do Teorema de Ascoli-Arzela [E-p. 329] que existe uma subseqüência (N_{k_i}) que converge uniformemente em $[0,1]$ para $N \in C([0,1])$. Podemos tomar (N_{k_i}) tal que, $\sup\{|N_{k_i}(u) - N(u)|: u \in [0,1]\} \leq 1/2^i$, para todo $i \in \mathbb{N}$, e então

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sup\{|N_{k_i}(u)-N(u)|: u \in [0,1]\} \leq 1. \qquad (2)$$

Como para todo $u \in [0,1]$, $N(u) = \lim_{i\to\infty} N_{k_i}(u)$, é claro que $N(0) = 0$, $N(1) = 1$ e que N é uma função convexa em $[0,1]$.

Queremos definir N em $[0,\infty[$, conservando a convexidade. Para tal, observamos que se $0 \leqq u < t < 1$ então

$$N(t)-N(u) \leqq |N_{k_i}(t)-N(t)|+|N_{k_i}(t)-N_{k_i}(u)|+|N_{k_i}(u)-N(u)|$$

$$\leqq |N_{k_i}(t)-N(t)|+K(t-u)+|N_{k_i}(u)-N(u)|$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, e assim fazendo $k_i \to \infty$ obtém-se

$$N(t)-N(u) \leqq K(t-u).$$

Daí, sendo $N'(u)$ a derivada à direita de N em t, temos que $N'(u) \leqq K$. Portanto, definindo $N(u) = u^K$ para $u \in [1,\infty[$, segue de (4.4) que N é convexa em $[0,\infty[$.

Como $\ell(N)$ é um particular espaço seqüencial modular (2.12), então por (2) e (5.8) temos que $\ell(N) = \ell(N_{k_i})$. E usando (5.2), temos que a função identidade é um isomorfismo de $\ell(N)$ em $\ell(N_{k_i})$.

Como (N_{k_i}) satisfaz a condição Δ_2-uniforme, por (7.2) temos que $\ell(N_{k_i})$ é separável. Portanto $\ell(N)$ também é separável,e por (7.2) a seqüência (e^i) é base de $\ell(N)$.

Segue, facilmente, de (2) que $\sum_{i=1}^{\infty} N(|x_i|)$ converge se, e somente se, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} N_{k_i}(|x_i|) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{j=p_{k_i}+1}^{p_{k_i+1}} M_j(\alpha_j|x_i|)$

converge. Daí de (5.18) e (5.16) temos que $\Sigma x_i e^i$ converge em $\ell(N)$ se, e somente se, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sum\limits_{j=p_{k_i}+1}^{p_{k_i+1}} x_i \alpha_j e^j = \sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i u_{k_i}$ converge em $\ell(M_k)$.

Portanto a seqüência (u_{k_i}) é uma seqüência básica de $\ell(M_k)$, equivalente à base (e^i) de $\ell(N)$. □

Estamos, agora, em condições de obter os seguintes resultados.

(7.5) <u>Proposição</u>. Sejam $\ell(M_k)$ um espaço seqüencial modular separável e Y um subespaço fechado de $\ell(M_k)$. Então

(i) existe um subespaço de Y isomorfo a um espaço seqüencial modular $\ell(N_k)$;

(ii) existe um subespaço de Y isomorfo a um espaço seqüencial de Orlicz $\ell(N)$.

Prova. Em conseqüência de (7.2) e (5.2) podemos supor, sem perda de generalidade, que (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme.

Por (7.2) a seqüência (e^k) é uma base de $\ell(M_k)$. Decorre de (3.18) que existe um subespaço Z de Y, que tem uma base (z_k) que é equivalente à uma base de blocos (u_k) de (e^k), onde $0 < s \leq \| u_k \| \leq r$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Como de (3.29) (e^k) é incondicional, segue de (3.31) que $(u_k/\| u_k \|)$ é uma base de blocos normalizada de (e^k), equivalente à (z_k).

Por (7.3.ii) temos que $(u_k/\| u_k \|)$ é equivalente à base (e^k) de um espaço seqüencial modular $\ell(N_k)$. Então (z_k) é equivalente à (e^k), e usando (3.14) temos que Z é isomorfo a $\ell(N_k)$.

Usando os mesmos argumentos obtém-se (ii), aplicando (7.4). □

(7.6) <u>Corolário</u>. Sejam $\ell(M)$ um espaço seqüencial de Orlicz separável e Y um subespaço fechado de $\ell(M)$. Então existe um subespaço de Y isomorfo a um espaço seqüencial modular $\ell(N_k)$. E existe um subespaço de Y isomorfo a um espaço seqüencial de Orlicz $\ell(N)$.

Prova. É conseqüência imediata de (7.5) lembrando que um espaço seqüencial de Orlicz é um particular espaço seqüencial modular (2.12). □

(7.7) <u>Proposição</u>. Seja $\ell(M_k)$ um espaço seqüen -

cial modular separável. Então existe um subespaço complementado de $\ell(M_k)$, isomorfo a um espaço seqüencial modular $\ell(N_k)$. E também existe um subespaço complementado de $\ell(M_k)$ isomorfo a um espaço seqüencial de Orlicz $\ell(N)$.

Prova. Por (7.2) e (5.2) podemos supor que $\ell(M_k)$ satisfaz a condição Δ_2-uniforme.

Seja (e^{k_i}) uma subseqüência de (e^k). Como (e^{k_i}) é uma base de blocos de (e^k), segue de (7.3.ii) que (e^{k_i}) é equivalente à base (e^k) de um espaço $\ell(N_k)$ (na verdade $\ell(N_k) = \ell(M_{k_i})$).

Como (e^k) é base incondicional de $\ell(M_k)$ (3.29), segue de (3.30) que $[(e^{k_i})]$ é um subespaço complementado de $\ell(M_k)$. E de (3.15) temos que $[(e^{k_i})]$ é isomorfo a $\ell(N_k)$.

Com os mesmos argumentos usados acima e de (7.4) prova-se que existe uma subseqüência (e^{k_j}) de (e^{k_i}) que é equivalente a base (e^k) de algum $\ell(N)$. Portanto, de (3.30) e de (3.15), segue que $[(e^{k_j})]$ é um subespaço complementado de $\ell(M_k)$ isomorfo a $\ell(N)$. □

Os próximos resultados são conseqüências de (7.6) e do teorema (1) de [LT1], que enunciaremos a seguir.

(7.8) <u>Teorema</u>. Todo espaço seqüencial de Orlicz separável contém um subespaço isomorfo a algum ℓ_p, para

$p \in [1,\infty[$.

(7.9) <u>Corolário</u>. Sejam $\ell(M_k)$ um espaço seqüencial modular separável, e Y um subespaço fechado de $\ell(M_k)$. Então Y contém um subespaço isomorfo a algum ℓ_p para $p \in [1,\infty[$.

(7.10) <u>Corolário</u>. Se $\ell(M_k)$ é um espaço seqüencial modular então ele contém um subespaço isomorfo a algum ℓ_p para $p \in [1,\infty]$.

Prova. Se $\ell(M_k)$ não é separável então por (7.2), ele contém um subespaço isomorfo a ℓ_∞.

Se $\ell(M_k)$ é separável o resultado decorre de (7.9). □

Nessa linha ainda temos a proposição (7.12), e para prová-la precisamos do seguinte lema.

(7.11) <u>Lema</u>. Suponha que (M_k) satisfaça a condição Δ_2-uniforme. Seja (y_i) uma seqüência básica de $\ell(M_k)$ tal que $\| y_i \| \geq \alpha > 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$, e $\lim_{i\to\infty} e_k^*(y_i) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, onde (e_k^*) é a seqüência de funcionais biortogonais associados à base (e^k). Então existe uma subseqüência de (y_i), que é seqüência básica equivalente à base (e^k) de algum espaço seqüencial de Orlicz $\ell(N)$.

Prova. Como $\| y_i \| \geq \alpha > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e $\lim_{i\to\infty} e_k^*(y_i) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, por (3.19) tem-se que existe (y_{i_n}) subseqüência de (y_i), que é seqüência básica equivalente à uma base de blocos (u_k) de (e^k), e que $0 < s \leq \|u_k\| \leq r$.

Daí, por (3.29) e (3.31), $(u_k/\| u_k \|)$ é base de blocos normalizada de (e^k), equivalente a (u_k).

Logo, de (7.4), temos que existe uma subseqüência de $(u_k/\| u_k \|)$, que é seqüência básica equivalente à base (e^k) de algum espaço seqüencial $\ell(N)$. Portanto, existe uma subseqüência de (y_{i_n}) que é equivalente à base (e^k) de $\ell(N)$. □

(7.12) <u>Proposição</u>. Sejam $\ell(M_k)$ um espaço seqüencial modular separável, e X um subespaço fechado de $\ell(M_k)$. Se (z_i) é uma base incondicional de X com $0 < s \leq \| z_i \| \leq r$, para todo $i \in \mathbb{N}$, então X contém um subespaço complementado isomorfo a algum espaço seqüencial de Orlicz $\ell(N)$.

Prova. Podemos supor, sem perda de generalidade, que (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme.

Primeiramente, suponhamos que X seja reflexivo. De (3.26) temos que (z_i) converge fracamente a zero. Logo $\lim_{i\to\infty} e_k^*(z_i) = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Então o resultado segue de (7.11), de (3.30) e de (3.14).

Observemos que por (7.2), X não contém subespaço isomorfo a c_0, portanto, por (3.32.ii), (z_i) é limitadamente completa.

Assim, se X não é reflexivo de (3.25) segue que (z_i) não é dualizável, e daí, por (3.34.i) temos que X contém um subespaço complementado isomorfo a ℓ_1. □

Em (7.15) daremos uma caracterização dos espaços seqüenciais modulares, que são isomorfos a um espaço seqüencial de Orlicz, usando os conceitos de bases simétricas.

(7.13) Lema. Suponha que (M_k) satisfaça a condição Δ_2-uniforme. Seja Y um subespaço fechado de $\ell(M_k)$ com uma base subsimétrica (z_i). Então (z_i) é equivalente à base (e^k) de algum espaço seqüencial de Orlicz $\ell(N)$.

Prova. Como (z_i) é base subsimétrica, de (3.38) segue que existem constantes r e s tais que $0 < s \leq \|z_i\| \leq r$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Logo, por (3.20), $|e_k^*(z_i)| \leq 2Kr$, para quaisquer $k,i \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que existe uma subseqüência (w_n) de (z_i) tal que, a seqüência $(e_k^*(w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como $(e_1^*(z_i))$ é limitada, (z_i) tem uma subseqüência (z_i^1) tal que $(e_1^*(z_i^1))$ converge. E como $(e_2^*(z_i^1))$ é limitada existe uma subseqüência (z_i^2) de (z_i^1) tal que $(e_2^*(z_i^2))$ converge. Suponhamos que para $k \in \mathbb{N}$, $k > 2$ temos uma seqüên cia (z_i^{k-1}) onde $e_j^*(z_i^{k-1})_{i\in\mathbb{N}}$ converge, para todo $j \in \{1,2,\ldots,k-1\}$. Então como $(e_k^*(z_i^{k-1}))_{i\in\mathbb{N}}$ é limitada, existe uma subseqüência $(z_i^k)_{i\in\mathbb{N}}$ de $(z_i^{k-1})_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $(e_k^*(z_i^k))$ converge, e daí, $(e_j^*(z_i^k))_{i\in\mathbb{N}}$ converge para todo $j \in \{1,2,\ldots,k\}$.

Definimos $w_n = z_n^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então (w_n) é subseqüência de (z_i) e de (z_i^k) para todo $k \in \mathbb{N}$ e, portanto, $(e_k^*(w_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para todo $k \in \mathbb{N}$.

Assim, tem-se que $\lim\limits_{n\to\infty} e_k^*(w_{2n+1} - w_{2n}) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. E decorre de (7.11), que existe uma subseqüência de $(w_{2n+1} - w_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ que é equivalente à base (e^k) de algum espaço seqüencial de Orlicz $\ell(N)$. Seja $(w_{2n_j+1} - w_{2n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ esta tal subseqüência.

Como (z_i) é base incondicional, então (w_{2n_j}) é seqüência básica incondicional e daí, $\Sigma a_j(w_{2n_j+1} - w_{2n_j})$ converge, se, e somente se $\Sigma a_j w_{2n_j}$ e $\Sigma a_j w_{2n_j+1}$ convergem. E pelo fato de (z_i) ser subsimétrica, concluímos que $\Sigma a_j z_j$ converge, se, e somente se $\Sigma a_j(w_{2n_j+1} - w_{2n_j})$ converge, isto é, (z_i) é equivalente à $(w_{2n_j+1} - w_{2n_j})_{j\in\mathbb{N}}$. Portanto (z_i) é equivalente à base canônica de $\ell(N)$. $\square$

(7.14) <u>Proposição</u>. Se um espaço seqüencial modular $\ell(M_k)$ tem base subsimétrica, então $\ell(M_k)$ é isomorfo a algum espaço sequencial de Orlicz separável $\ell(N)$.

Prova. Por (3.9), $\ell(M_k)$ é separável. Devido à (7.2) e (5.2) podemos supor que (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme. E daí, o resultado é consequência imediata de (7.13). □

(7.15) <u>Corolário</u>. Um espaço seqüencial modular $\ell(M_k)$ tem base simétrica se, e somente se, $\ell(M_k)$ é isomorfo a um espaço seqüencial de Orlicz separável $\ell(N)$.

Prova. Como toda base simétrica é subsimétrica (3.39), então segue de (7.14) que,se $\ell(M_k)$ tem base simétrica,então é isomorfo a um espaço seqüencial de Orlicz $\ell(N)$.

A outra afirmação segue do fato de (e^k) ser base simétrica de $\ell(N)$ (ver(4.a.2) e (4.a.4) de [LT]). □

§8. <u>O DUAL DE ESPAÇOS SEQÜENCIAIS MODULARES</u>

Neste parágrafo, mais precisamente em (8.3), obteremos a caracterização do dual de um espaço seqüencial modular separável. E em (8.6) estabelecemos condições necessárias e suficientes para que um espaço seqüencial modular se ja reflexivo.

Estes resultados são análogos, respectivamente, a (4.b.1) e (4.b.2) de [LT], que se referem aos espaços seqüenciais de Orlicz.

Em todo este parágrafo, (M_k) indicará uma seqüência de funções de Orlicz normalizada com $M_k'(0) = 0$ e $\lim_{u\to\infty} M_k'(u) = \infty$, para todo $k \in \mathbb{N}$, o que devido a (6.14) não trará perda de generalidade e nos permite definir M_k^*, como em (4.7).

(8.1) <u>Definição</u>. Para toda seqüência (x_k) de números reais definimos

$$|||(x_k)||| = \sup\{\Sigma|x_k y_k| : \Sigma M_k^*(|y_k|) \leqq 1\}.$$

(8.2) <u>Proposição</u>. Tem-se que $\ell(M_k) = \{(x_k) : |||(x_k)||| < \infty\}$, e que em $\ell(M_k)$ a função $|||\cdot|||$ é uma norma equivalente à $\|\cdot\|$. Mais precisamente

$$\|(x_k)\| \leq |||(x_k)||| \leq 2\|(x_k)\|, \quad \forall\ (x_k) \in \ell(M_k).$$

E então $(\ell(M_k), |||\ \ |||)$ é um espaço de Banach.

Prova. Se $0 \neq (x_k) \in \ell(M_k)$ e (y_k) é tal que

$\Sigma M_k^*(|y_k|) \leq 1$ então, pela desigualdade de Young (4.9.i)

$$\frac{|x_k y_k|}{\|(x_k)\|} \leq M_k\left(\frac{|x_k|}{\|x_k\|}\right) + M_k^*(|y_k|), \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Portanto $\Sigma \dfrac{|x_k y_k|}{\|(x_k)\|} \leq 2$, e então $|||(x_k)||| \leq 2\|(x_k)\|$.

Por outro, lado se (x_k) é tal que $0 < |||(x_k)||| < \infty$, então $\Sigma|x_k y_k| \leq |||(x_k)|||$ sempre que $\Sigma M^*(|y_k|) \leq 1$. Como $|||(x_k)||| \neq 0$ então $x_k \neq 0$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $M_k\left(\dfrac{|x_k|}{|||(x_k)|||}\right) \leq 1$.

Seja $z_k = |x_k|/|||(x_k)|||$. Supondo que $\Sigma M^*(M_k'(z_k)) \leq 1$, então $\Sigma|x_k M_k'(z_k)| \leq |||(x_k)|||$, isto é, $\Sigma z_k M_k'(z_k) \leq 1$. Como, por (4.9.iii) temos que

$$z_k M_k'(z_k) = M_k(z_k) + M_k^*(M_k'(z_k)) \qquad (1).$$

Daí $(x_k) \in \ell(M_k)$ e $\|(x_k)\| \leq |||(x_k)|||$.

Resta, então, provar que $\Sigma M^*(M_k'(z_k)) \leq 1$. Suponha que isto seja falso. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k=1}^{n_0} M_k^*(M_k'(z_k)) > 1$, e tal que $z_k \neq 0$, para algum $k \leq n_0$. Pela convexidade de M_k^* temos que

$$\sum_{k=1}^{n_o} M_k^*[M_k'(z_k)/\sum_{k=1}^{n_o} M_k^*(M_k'(z_k))] \leq 1$$

Portanto

$$\sum_{k=1}^{n_o}[z_k M_k'(z_k)/\sum_{k=1}^{n_o} M_k^*(M_k'(z_k))] \leq |||(z_k)||| = 1$$

e então

$$\sum_{k=1}^{n_o} z_k M_k'(z_k) \leq \sum_{k=1}^{n_o} M_k^*(M_k'(z_k)).$$

Disto e de (1) temos que

$$\sum_{k=1}^{n_o} M_k^*(M_k'(z_k)) \geq \sum_{k=1}^{n_o} z_k M_k'(z_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n_o} M_k(z_k) + \sum_{k=1}^{n_o} M_k^*(M_k'(z_k))$$

o que é um absurdo, pois $\sum_{k=1}^{n_o} M_k(z_k) > 0$.

É fácil mostrar que $||| \ |||$ é uma norma em $\ell(M_k)$, o que termina a demonstração. $\square$

A seguir caracterizaremos o dual de $c(M_k)$.

(8.3) <u>Teorema</u>. O espaço $c(M_k)^*$ é isomorfo a $\ell(M_k^*)$. E se (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme então $\ell(M_k)^*$ é isomorfo a $\ell(M_k^*)$.

Prova. Se (M_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme decorre de (7.2) que $c(M_k) = \ell(M_k)$, e se $c(M_k)^*$ é isomorfo a $\ell(M_k^*)$, então $\ell(M_k)^*$ é isomorfo a $\ell(M_k^*)$.

Resta provar que $c(M_k)^*$ é isomorfo a $\ell(M_k^*)$. Indicaremos por $\| \ \|_*$ a norma de $\ell(M_k^*)$.

Seja $(y_k) \in \ell(M_k^*)$. Definimos a aplicação $T(y_k)$ em $c(M_k)$ por

$$T(y_k)((x_k)) = \Sigma x_k y_k. \tag{1}$$

Como $\Sigma M_k^*\left(\frac{y_k}{\|(y_k)\|_*}\right) \leq 1$, segue de (8.1) e (8.2) que

$$\Sigma |x_k y_k| \leq |||(x_k)||| \ \|(y_k)\|_*$$

$$\leq 2 \,\|(x_k)\| \ \|(y_k)\|_*$$

para todo $(x_k) \in c(M_k)$.

Logo é claro que $T(y_k) \in c(M_k)^*$ e que $\|T(y_k)\| \leq 2\|(y_k)\|_*$.

Portanto é fácil ver que a aplicação

$T:\ell(M_k^*) \to c(M_k)^*$ definida por (1) é linear, injetora, contínua, e que $\|T\| \leq 2$.

Para terminar basta mostrar que T é sobrejetora.

Sejam $f \in c(M_k)^*$, e $y_k = f(e^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Como, por (4.10.i), $M_k^{**} = M_k^*$, temos

$$|||(y_k)|||_* = \sup\{\Sigma|z_k y_k| : \Sigma M_k^{**}(|z_k|) \leq 1\}$$

$$= \sup\{\Sigma|z_k y_k| : \Sigma M_k(|z_k|) \leq 1\} \qquad (2)$$

Vamos provar que $(y_k) \in \ell(M_k^*) =$
$= \sup\{(x_k): |||(x_k)|||_* < \infty\}$.

Se (z_k) é tal que $\Sigma M_k(|z_k|) \leq 1$ então, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k y_k| = \sum_{k=1}^{n} sg(z_k y_k) z_k y_k$$

$$= f\left(\sum_{k=1}^{n} sg(z_k y_k) z_k e^k\right)$$

$$\leq \|f\| \; \left\|\sum_{k=1}^{n} sg(z_k y_k) z_k e^k\right\|$$

$$= \|f\| \; \left\|\sum_{k=1}^{n} z_k e^k\right\| \leq \|f\|$$

Portanto $\Sigma|z_k y_k| \leq \|f\|$, e então $|||(y_k)|||_* \leq \|f\|$.

E, finalmente, por (5.16) e por f ser contínua temos que, para todo $(x_k) \in \ell(M_k)$

$$T(y_k)((x_k)) = \Sigma x_k y_k$$

$$= \Sigma x_k f(e^k)$$

$$= f(\Sigma x_k e^k) = f((x_k)),$$

isto é, $f = T(y_k)$. $\square$

É importante notar que mesmo quando (M_k) é normalizada, a seqüência (M_k^*) pode não ser normalizada. Mostraremos que, em certos casos, isso pode ser remediado.

(8.4) <u>Lema</u>. Seja (M_k) de tal modo que existam $\alpha > 0$ e $k_o \in \mathbb{N}$ tais que $M_k^*(1) \geq \alpha$, para todo $k \geq k_o$. Se, para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$M_k^\dagger(u) = \frac{M_k^*(u)}{M_k^*(1)}$$

para todo $u \in [0,\infty[$, então

(i) $(M_k^\dagger)$ e (M_k^*) são equivalentes;

(ii) $(M_k^{\dagger})$ e (M_k) são equivalentes.

Prova. É claro que $(M_k^{\dagger})$ é uma seqüência de funções de Orlicz normalizada.

De (4.10.ii) temos que $M_k^*(1) \leqq 1$, e então

$$M_k^*(u) \leqq M_k^{\dagger}(u) \leqq \alpha^{-1} M_k^*(u),$$

e de (4.10.iv) e (4.10.v) que

$$M_k(u) \geqq M_k^{\dagger *}(u) \geqq \alpha^{-1} M_k(\alpha u)$$

para todo $k \geqq k_0$ e $u \in [0,\infty[$.

Portanto, o resultado decorre diretamente de (5.10). □

(8.5) <u>Lema</u>. Suponha que (M_k) satisfaça a condição Δ_2^*-uniforme e que M_k' seja contínua e crescente, para todo $k \in \mathbb{N}$. Se $(M_k^{\dagger})$ é como em (8.4), então

(i) $(M_k^{\dagger})$ e (M_k^*) são equivalentes;
(ii) $(M_k^{\dagger *})$ e (M_k) são equivalentes;
(iii) $(M_k^{\dagger})$ satisfaz a condição Δ_2-uniforme.

Prova. Sejam $L > 1$ e $k_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\frac{u\, M_k'(u)}{M_k(u)} \geq L, \qquad \forall\, u \in \,]0,1[\quad e \quad \forall\, k \geq k_o.$$

Para provar (i) e (ii) basta mostrar que existem $\alpha > 0$ e $k_o \in \mathbb{N}$ tais que $M_k^*(1) \geq \alpha$, para todo $k \geq k_o$, e usar (8.4).

Decorre de (6.8) que $M_k(u) \leq u^L = N(u)$ para todo $u \in [0,1]$ e $k \geq k_o$. Por (4.10.iii) e (4.11) temos que $M_k^*(1) \geq N_k^*(1) = (L-1)(\frac{1}{L})^{L(L-1)^{-1}}$. Portanto, $M_k^*(1) \geq \alpha > 0$ para todo $\alpha > 0$.

Para provarmos que $(M_k^\dagger)$ satisfaz a condição Δ_2-uniforme tomemos $u \in \,]0,1[$.

Como M_k' é contínua e crescente, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $t_k > 0$ tal que $M_k'(t_k) = u$. E como por (4.6.i) $M_k'(1) \geq 1$, temos que $t_k \in \,]0,1[$.

Portanto se $k \geq k_o$, usando (4.8.ii) e (4.9.iii) concluímos que

$$\frac{u\,(M_k^\dagger)'(u)}{M_k^\dagger(u)} = \frac{M_k'(t_k)(M_k^*)'(M_k'(t_k))}{M_k^*(M_k'(t_k))}$$

$$= \frac{M_k'(t_k)\; t_k}{t_k M_k'(t_k) - M_k(t_k)}$$

$$= \left(1 - \frac{M_k(t_k)}{t_k M_k'(t_k)}\right)^{-1}$$

$$\leq (1 - \frac{1}{L})^{-1} = \frac{L}{L-1}. \qquad \square$$

Uma caracterização de espaços seqüenciais modulares reflexivos pode ser agora obtida.

(8.6) <u>Teorema</u>. O espaço $\ell(M_k)$ é reflexivo se, e somente se, existe uma seqüência (R_k) equivalente a (M_k), que satisfaz as condições Δ_2-uniforme e Δ_2^*-uniforme.

Prova. Suponhamos que exista (R_k), equivalente a (M_k), que satisfaz as condições Δ_2-uniforme e Δ_2^*-uniforme. Devido a (5.2) podemos supor que (M_k) satisfaz essas condições. E segue de (6.14) que não há perda de generalidade em supor que M_k' é contínua e crescente, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Devemos mostrar que a aplicação canônica de $\ell(M_k)$ em $\ell(M_k)^{**}$ é uma isometria. Na verdade, esta aplicação é sempre linear contínua, injetora e mantém a norma. Então basta mostrar que ela é sobrejetora.

É conseqüência de (8.5) e (5.2) que $\ell(M_k^{\dagger}) = \ell(M_k^*)$, $\ell(M_k^{\dagger *}) = \ell(M_k)$, que as funções identidades são isomorfismos, e também que $(M_k^{\dagger})$ satisfaz a condição Δ_2-uniforme. Decorre, então, de (8.3) que $\ell(M_k)^*$ é isomorfo a $\ell(M_k^*)$, e que $\ell(M_k^{\dagger})^*$ é isomorfo a $\ell(M_k^{\dagger *})$. Devido à forma com que estes isomorfismos são definidos (ver (8.3)) pode-se provar, sem dificuldade, que a aplicação canônica de $\ell(M_k)$ em $\ell(M_k)^{**}$ é sobrejetora.

Reciprocamente suponhamos que $\ell(M_k)$ seja reflexivo.

Então $\ell(M_k)$ não contém subespaço isomorfo a ℓ_∞, e daí, por (7.2), existe uma seqüência de funções de Orlicz normalizada (N_k), equivalente a (M_k), que satisfaz a condição Δ_2-uniforme.

Queremos obter uma seqüência de funções de Orlicz normalizada, equivalente a (N_k), que satisfaz a condição Δ_2^*-uniforme, e também a condição Δ_2-uniforme. Para isso, construiremos seqüências de funções de Orlicz auxiliares.

Para simplificar a leitura destacamos as asserções mais importantes contidas nesta demonstração que nos possibilitam concluir a tese.

<u>1ª asserção</u>. Se $(N_k^\dagger)$ é como em (8.4), então $(N_k^\dagger)$ e (N_k^*) são equivalentes.

<u>2ª asserção</u>. Existe uma seqüência (P_k), quase-igual a $(N_k^\dagger)$, que satisfaz a condição (A) de (6.15).

<u>3ª asserção</u>. Existe uma seqüência (S_k), quase igual a (N_k), que satisfaz a condição Δ_2-uniforme, e satisfaz a condição (B) de (6.16).

Obtida (S_k) como acima, decorre de (6.16) que existe uma seqüência de funções de Orlicz normalizada (R_k) equivalente a (S_k), que satisfaz as condições Δ_2-uniforme e Δ_2^*-uniforme. Como por (5.13), (S_k) é equivalente a (N_k), então (R_k) é equivalente a (N_k), o que termina a prova do teorema.

Resta, portanto, provar as asserções acima.

Prova da 1ª asserção. Decorre de (8.4) que basta provar que $\inf N_k^*(1) > 0$. Suponhamos por absurdo que $\inf N_k^*(1) = 0$. Então podemos obter uma subseqüência $(N_{k_i}^*(1))$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} N_{k_i}^*(1) < \infty$.

Segue de (4.9.iv) que, para todo $i \in \mathbb{N}$

$$N_{k_i}^*(1) \geq u - N_{k_i}(u), \qquad \forall\, u \in [0,1],$$

e daí por (4.2.iii)

$$u - N_{k_i}^*(1) \leq N_{k_i}(u) \leq u, \qquad \forall\, u \in [0,1].$$

Usando esta última desigualdade é fácil mostrar que $\ell_1 = \ell(N_{k_i})$ e, portanto, de (5.2) segue que a função identidade é um isomorfismo de ℓ_1 em $\ell(N_{k_i})$. Também é fácil ver que $\ell(N_{k_i})$ é isomorfo a um subespaço de $\ell(N_k)$ que é reflexivo, pois $\ell(N_k)$ e $\ell(M_k)$ são isomorfos (5.2). E isto é uma contradição pois ℓ_1 não é reflexivo.

Prova da <u>2ª asserção</u>. Como vimos acima $\ell(N_k)$ é reflexivo, e então $\ell(N_k)^*$ também é reflexivo. De (8.3) temos que $\ell(N_k^*)$ é isomorfo à $\ell(N_k)^*$ e,portanto,$\ell(N_k^*)$ não contém subespaço isomorfo a ℓ_∞. Decorre da 1ª asserção e de (5.2) que $\ell(N_k^\dagger)$ não contém subespaço isomorfo a ℓ_∞. Aplicando (7.2) tem-se que existe uma seqüência de funções de Orlicz normalizada (P_k),quase-igual a $(N_k^\dagger)$,que satisfaz a condição (A) de (6.15).

Prova da <u>3ª asserção</u>. Seja (P_k) como na 2ª asserção. Então existem constantes $K \geq 1$, $k_0 \in \mathbb{N}$ e $\beta \in]0,1[$, tais que

$$\inf P_k(\beta) > 0$$

e

$$\frac{t\, P_k'(t)}{P_k(t)} \leq K, \quad \forall\ t \in]0,\beta] \text{ e } \forall\ k \geq k_0.$$

Como (P_k) é quase-igual a $(N_k^\dagger)$, então existe uma seqüência de números reais positivos (t_k) tal que,para todo $k \in \mathbb{N}$

$$P_k(t) = N_k^\dagger(t) \qquad \forall\ t \geq t_k \tag{1}$$

e

$$\Sigma N_k^{\dagger}(t_k) < \infty$$

Como vimos na prova da 2ª asserção $\ell(N_k^{\dagger})$ não contém subespaço isomorfo a ℓ_∞, então, segue de (5.20), que $\lim t_k = 0$.

Lembrando que, por (6.14), podemos supor que N_k' é contínua e crescente para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $u_k > 0$ tal que $N_k'(u_k) = t_k$. Temos que $\Sigma N_k(u_k) < \infty$.

De fato, se $k_1 \in \mathbb{N}$ é tal que $t_k \in]0,\beta]$, para todo $k \geqq k_1$, então, para $k \geqq k_2 = \max\{k_0, k_1\}$ temos que

$$\frac{t_k (N_k^{\dagger})'(t_k)}{N_k^{\dagger}(t_k)} = \frac{t_k P_k'(t_k)}{P_k(t_k)} \leqq K$$

e daí, por (4.6.i), (4.8.ii) e (4.10.i)

$$\begin{aligned} N_k(u_k) &\leqq u_k t_k = (N_k^*)'(N_k'(u_k)) t_k \\ &= (N_k^{\dagger})'(t_k) t_k N_k^*(1) \\ &\leqq K . N_k^{\dagger}(t_k) N_k^*(1) \\ &\leqq K . N_k^{\dagger}(t_k). \end{aligned}$$

Então $\Sigma N_k(u_k) \leqq K \Sigma N_k^{\dagger}(t_k) < \infty$.

Além disso, como $\ell(N_k)$ é reflexivo, segue de (5.20) que $\lim u_k = 0$. Seja $k_3 \in \mathbb{N}$ tal que $u_k \leqq 1$ para todo $k \geqq k_3$.

Para todo $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$S_k(u) = \begin{cases} N_k(u_k)\left(\dfrac{u}{u_k}\right)^{p_k}, & \text{se } u \in [0,u_k[, \\ \\ N_k(u), \text{ se } u \in [u_k,\infty[\end{cases}$$

onde $p_k = \dfrac{u_k N_k'(u_k)}{N_k(u_k)}$.

É fácil ver que (S_k) é uma seqüência de funções de Orlicz normalizada, quase-igual a (N_k). Como (N_k) satisfaz a condição Δ_2-uniforme, um cálculo simples mostra que (S_k) também satisfaz a mesma condição.

Resta provar que (S_k) satisfaz a condição (B) de (6.16).

Seja $\alpha = \inf(N_k^*)'(\beta)$. Temos que $\alpha > 0$.

Com efeito, para todo $k \geqq k_1, t_k \in]0,\beta]$ e por (1) $P_k(\beta) = N_k^\dagger(\beta)$. Daí

$$(N_k^*)'(\beta) = (N_k^\dagger)'(\beta)\, N_k^*(1)$$
$$\geqq \frac{N_k^\dagger(\beta)\, N_k^*(1)}{\beta}$$

$$\geq \frac{P_k(\beta)\ N_k^*(1)}{\beta}$$

$$\geq \frac{\inf P_k(\beta) \cdot \inf N_k^*(1)}{\beta} > 0$$

Mostremos que existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\inf S_k(\alpha) > 0 \tag{2}$$

e

$$\frac{uS_k'(u)}{S_k(u)} \geq \frac{K}{K-1}, \quad \forall\ u \in]0,\alpha], \quad \forall\ k \geq n_o \tag{3}$$

Temos de (8.3) que $\ell(S_k)^*$ é isomorfo à $\ell(S_k^*)$, e como $\ell(N_k)$ é reflexivo então $\ell(N_k)^*$ é reflexivo,e daí por (5.13) e (5.2), $\ell(S_k^*)$ é reflexivo. Lembrando que de (4.9.i), (4.2.iii) e (4.10.ii) tem-se

$$\alpha u - S_k(u) \leq S_k^*(u) \leq S_k^*(1)u \leq u$$

para todo $u \in [0,1]$, então prova-se sem dificuldade (2), usando os mesmos argumentos da prova da 1ª asserção.

Vamos mostrar que vale (3). Como $\lim u_k = 0$,existe $k_4 \in \mathbb{N}$ tal que $u_k \leq \alpha$ para todo $k \geq k_4$. Daí para todo $u \in [u_k,\alpha]$ temos que $t = N_k'(u) \in [t_k,\beta]$, e por (4.8.ii) $u = N_k^*(t)$. Portanto para $k \geq n_o = \max\{k_2,k_3,k_4\}$ obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{uS_k'(u)}{S_k(u)} &= \frac{uN_k'(u)}{N_k(u)} \\
&= \frac{t\ (N_k^*)'(t)}{N_k((N_k^*)'(t))} \\
&= \frac{t\ N_k^*(t)}{t(N_k^*)'(t) - N_k^*(t)} \\
&= (1 - \frac{N_k^*(t)}{t(N_k^*)'(t)})^{-1} \\
&= (1 - \frac{N_k^\dagger(t)}{t(N_k^\dagger)'(t)})^{-1} \\
&\geqq (1 - \frac{1}{K})^{-1} = \frac{K}{K-1},
\end{aligned}$$

donde segue (3), pois $p_k = \dfrac{u_k N_k'(u_k)}{N_k(u_k)} \geqq \dfrac{K}{K-1}$. □

§9. EXEMPLOS DE ESPAÇOS SEQÜENCIAIS MODULARES QUE SÃO ESPAÇOS DE SCHUR

Sejam (p_k) e (w_k) seqüências de números reais com $p_k \geqq 1$ e $w_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Considere então $M_k(u)=w_k u^{p_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $u \geqq 0$.

Assim temos que (M_k) é uma seqüência de funções de Orlicz e $\ell(M_k)$ é um espaço seqüencial modular.

Estudaremos estes particulares espaços, e estabeleceremos condições necessárias e suficientes para que eles sejam espaços de Schur. Em conseqüência, teremos, facilmente, que ℓp é espaço de Schur se, e somente se, $p = 1$.

Devido à (5.4) e (5.5) estudaremos apenas os espaços com $w_k = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e, neste parágrafo, indicaremos estes espaços seqüenciais modulares por $\ell(p_k)$, isto é, faremos $\ell(M_k) = \ell(p_k)$, e também $c(M_k) = c(p_k)$.

(9.1) <u>Definição</u>. Seja X um espaço de Banach. Dizemos que X é um <u>espaço de Schur</u> se toda seqüência que converge fracamente para zero, converge em norma para zero.

(9.2) <u>Lema</u>. Sejam $p_k \geqq 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e $E = \{k \in \mathbb{N}: p_k > 1\}$. Para cada $k \in E$ tomemos q_k tal que $1/p_k + 1/q_k = 1$. Seja (y_k) uma seqüência de números reais com $\sum_{k\in E} |y_k|^{q_k} \leqq \alpha < \infty$. Se para todo $(x_k) \in \ell(p_k)$ definimos

$$\phi((x_k)) = \Sigma y_k x_k$$

então $\phi \in \ell(p_k)^*$ e $\|\phi\| \leqq 1 + \alpha$.

Prova. Se $(x_k) \in \ell(p_k)$ então, usando (13.3) de [HS], temos

$$|y_k u_k| \leqq \frac{|x_k|^{p_k}}{p_k} + \frac{|y_k|^{q_k}}{q_k} \leqq |x_k|^{p_k} + |y_k|^{q_k}$$

para todo $k \in E$. Portanto

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} |y_k x_k| &= \sum_{k \in E} |y_k x_k| + \sum_{k \notin E} |y_k x_k| \\ &\leqq \sum_{k \in E} (|x_k|^{p_k} + |y_k|^{q_k}) + \sum_{k \notin E} |x_k| \\ &= \sum_{k \in E} |x_k|^{p_k} + \sum_{k \notin E} |x_k|^{p_k} + \sum_{k \in E} |y_k|^{q_k} \\ &\leqq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} + \alpha\end{aligned}$$

o que implica que $\phi \in \ell(p_k)^*$, e que $\|\phi\| \leqq 1 + \alpha$. □

(9.3) Teorema. Seja $p_k \geqq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. O espaço $\ell(p_k)$ é um espaço de Schur se, e somente se, $\lim p_k = 1$.

Prova. Suponhamos, primeiramente, que não tenhamos $\lim p_k = 1$.

Então existe $\delta \in]0,1[$, e uma subseqüência (p_{k_i}) de (p_k) tal que, $p_{k_i} > 1 + \delta$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Seja (e^{k_i}) subseqüência da seqüência (e^k). Como $\| e^{k_i} \| = 1$, para todo $i \in \mathbb{N}$, então (e^{k_i}) não converge em norma. Mostraremos que (e^{k_i}) converge fracamente a zero.

Sejam $f \in \ell(p_k)^*$ e $a_i = f(e^{k_i})$. Tomemos uma seqüência de números reais positivos (b_i) tal que $\Sigma(b_i)^{1+\delta} \leq 1$.

Como $p_{k_i} > 1 + \delta$ e $b_o < 1$ para todo $i \in \mathbb{N}$, então

$$\Sigma(b_i)^{p_{k_i}} \leq \Sigma(b_i)^{1+\delta} \leq 1 \qquad (1)$$

Vamos mostrar que $(b_i) \in c(p_k)$, isto é, que para todo $\varepsilon > 0$, $\sum_{i=1}^{\infty} (\frac{b_i}{\varepsilon})^{p_{k_i}} < \infty$ (ver (5.14)).

Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim b_i = 0$, existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $b_i < \varepsilon$ para todo $i \geq n_o$. Então

$$\sum_{i=n_o}^{\infty} (\frac{b_i}{\varepsilon})^{p_{k_i}} \leq \sum_{i=n_o}^{\infty} (\frac{b_i}{\varepsilon})^{1+\delta}$$

$$= \varepsilon^{-(1+\delta)} \sum_{i=n_o}^{\infty} (b_i)^{1+\delta} \leq \varepsilon^{-(1+\delta)}$$

Portanto, segue de (5.16) que $(b_i) = \Sigma b_i e^{k_i}$, e de (1) que $\| \Sigma b_i e^{k_i} \| \leq 1$.

Então $|\Sigma b_i a_i| = |f(\Sigma b_i e^{k_i})| \leq \| f \|$.

Pela desigualdade de Holder [HS-pag.191] temos que

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^{\delta/(1+\delta)}\right|^{(1+\delta)/\delta}\left|\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^{-\delta}\right|^{-1/\delta} \leq \left|\sum_{i=1}^{\infty}a_ib_i\right| \leq \|f\|$$

e daí $\Sigma|a_i|^{\delta/(1+\delta)} < \infty$, o que implica que $0 = \lim\limits_{i\to\infty} a_i = \lim\limits_{i\to\infty} f(e^{k_i})$.

Portanto $\ell(p_k)$ não é espaço de Schur.

Suponhamos, agora, que $\lim p_k=1$ e que exista uma seqüência (x^n) de elementos de $\ell(p_k)$, tal que (x^n) converge fracamente para zero, e para a qual não temos $\lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\| = 0$.

Seja $x^n = (x_k^n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se (e_k^*) é a seqüência de funcionais biortogonais associada a (e^k) então,

$$\lim_{n\to\infty} e_k^*(x^n) = \lim_{n\to\infty} x_k^n = 0 \tag{2}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Podemos supor que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\delta \leq \|x^n\| \leq 1$ para algum $\delta > 0$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k^n|^{p_k} \leq 1 \qquad \text{e} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{x_k^n}{\delta}\right|^{p_k} > 1$$

e sendo $r = \sup p_k$, temos que $\delta^r \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k^n|^{p_k} \leq 1$.

Seja $\alpha = \delta^r$. Por indução sobre $i \in \mathbb{N}$, definiremos seqüências de inteiros (n_i), (k_i) e (k_i') tais que (k_i) e (k_i') são crescentes com $k_i < k_i'$ e se $J_i = \{k_i,\ldots,k_i'\}$, então para todo $i \in \mathbb{N}$ vale

$$(a)\ p_k < \frac{i}{i-1}, \quad \text{se } k \in J_i \text{ e } i > 1,$$

$$(b)\ \sum_{k \in J_i} |x_k^{n_i}|^{p_k} > \alpha/2,$$

$$(c)\ \sum_{k \notin J_i} |x_k^{n_i}|^{p_k} < (\alpha/16)^r.$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^1|^{p_k}$ converge, existe $k_1' \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{k_1'+1}^{\infty} |x_k^1|^{p_k} < (\alpha/16)^r$, e então

$$\sum_{k=1}^{k_1'} |x_k^1|^{p_k} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^1|^{p_k} - \sum_{k=k_1'+1}^{\infty} |x_k^1|^{p_k} \geqq \alpha - (\alpha/16)^r > \alpha/2.$$

Então (b) e (c) satisfeitos para $n_1 = k_1 = 1$ e o k_1' escolhido.

Suponhamos que para $i \in \mathbb{N}$ existam inteiros n_i, k_i' e k_i que satisfazem (a), (b) e (c). Vamos encontrar n_{i+1}, k_{i+1}' e k_{i+1}, satisfazendo as mesmas condições.

Como $\lim p_k = 1$, existe $k_{i+1}'' \in \mathbb{N}$ tal que $p_k < \frac{i+1}{i}$, para todo $k \geqq k_{i+1}''$.

Seja $k_{i+1} = \max\{k_i', k_{i+1}''\}$. Então devido a (2) existe $n_{i+1} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{k_{i+1}-1} |x_k^{n_{i+1}}|^{p_k} < \frac{(\alpha/16)^r}{2}$$

Pelo fato de $\sum_{k=k_{i+1}}^{\infty} |x_k^{n_{i+1}}|$ convergir, existe $k'_{i+1} > k_{i+1}$ tal que

$$\sum_{k=k'_{i+1}+1}^{\infty} |x_k^{n_{i+1}}| < \frac{(\alpha/16)^r}{2}$$

e daí, se $J_{i+1} = \{k_{i+1},\dots,k'_{i+1}\}$ então

$$\sum_{k\notin J_{i+1}} |x_k^{n_{i+1}}|^{p_k} = \sum_{k=1}^{k_{i+1}-1} |x_k^{n_{i+1}}|^{p_k} + \sum_{k=k'_{i+1}+1}^{\infty} |x_k^{n_{i+1}}|^{p_k} < (\alpha/16)^r$$

que é exatamente (c). E em conseqüência temos (b), pois

$$\sum_{k\in J_{i+1}} |x_k^{n_{i+1}}|^{p_k} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{n_{i+1}}|^{p_k} - \sum_{k\notin J_{i+1}} |x_k^{n_{i+1}}|^{p_k} \geq \alpha > \alpha-(\alpha/16)^r > \alpha/2.$$

Assim determinamos as seqüências (n_i), (J_i) e consequentemente uma subseqüência (x^{n_i}) de (x^n). Seja (y_k) uma seqüência definida da seguinte forma

$$y_k = \begin{cases} \frac{1}{2}\, sg(x_k^{n_i})|x_k^{n_i}|^{p_k-1}, & \text{se } k \in J_i \text{ e } x_k^{n_i} \neq 0 \text{ para } i \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{se } k \notin \cup J_i \text{ ou } x_k^{n_i} = 0. \end{cases}$$

Seja $E = \{k \in \mathbb{N}: p_k > 1\}$ e para todo $k \in E$ tome - mos q_k tal que $1/p_k + 1/q_k = 1$.

Se $i \in \mathbb{N}$ e $k \in J_i \cap E$, então de (a) $p_k < i/i-1$ e daí, $q_k > 1$. Temos que

$$\sum_{k\in J_i\cap E} |y_k|^{q_k} \leqq \sum_{k\in J_i\cap E} \frac{1}{2^{q_k}} |x_k^{n_i}|^{p_k}$$

$$< \sum_{k\in J_i\cap E} \frac{1}{2^i} |x_k^{n_i}|^{p_k}$$

$$< \frac{1}{2^i} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{n_i}|^{p_k} < \frac{1}{2^i}.$$

Portanto

$$\sum_{k\in E} |y_k|^{q_k} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k\in J_i\cap E} |y_k|^{q_k} \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$$

Para cada $(x_k) \in \ell(p_k)$ definimos

$$\phi((x_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$$

Segue de (9.2) que $\phi \in \ell(p_k)^*$ e que $\|\phi\| \leqq 2$.

Como (x^n) converge fracamente para zero $\lim \phi(x^n)=0$.

Para cada $i \in \mathbb{N}$ seja $(z_k^{n_i})$ dada por

$$z_k^{n_i} = \begin{cases} x_k^{n_i}, & \text{se } k \notin J_i, \\ 0, & \text{se } k \in J_i. \end{cases}$$

Temos que $\|(z_k^{n_i})\| \leqq \alpha/16$, pois de (c)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{|z_k^{n_i}|}{\alpha/16}\right)^{p_k} = \sum_{k \notin J_i} \left(\frac{|x_k^{n_i}|}{\alpha/16}\right)^{p_k}$$

$$\leqq \sum_{k \notin J_i} \frac{|x_k^{n_i}|^{p_k}}{(\alpha/16)^r} < 1.$$

Assim para todo $i \in \mathbb{N}$ temos

$$|\phi(x^{n_i})| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} y_k x_k^{n_i}\right|$$

$$\geqq \left|\sum_{k \in J_i} y_k x_k^{n_i}\right| - \left|\sum_{k \notin J_i} y_k x_k^{n_i}\right|$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k \in J_i} |x_k^{n_i}|^{p_k} - \left|\sum_{k=1}^{\infty} y_k z_k^{n_i}\right|$$

$$> \frac{1}{2}\,\frac{\alpha}{2} - \|\phi\|\ \ \|(z_k^{n_i})\|$$

$$> \frac{\alpha}{4} - 2\,\frac{\alpha}{16} = \frac{\alpha}{8}$$

o que é uma contradição. □

Lembrando a relação de equivalência entre seqüências de funções de Orlicz, definida em (5.1), é interessante obter um espaço modular $\ell(p_k)$ que não é igual a ℓ_1, e que tem a propriedade de Schur. Para isso daremos em (9.6) uma condição necessária e suficiente para que $\ell(p_k) = \ell(q_k)$.

(9.4) <u>Lema</u>. Sejam (p_k) e (q_k) seqüências de números reais com $p_k > q_k \geqq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se $\Sigma\theta^{p_k q_k/(p_k - q_k)}$ diverge para todo $\theta \in]0,1[$, então existem seqüências de números reais (x_k) e (r_k) tais que $\lim r_k = 0$, $\Sigma|x_k|^{p_k} < \infty$ e $\Sigma|r_k x_k|^{q_k}$ diverge.

Prova. Para cada $i \in \mathbb{N}$ escolhemos $\theta_i \in]0,1/2^i[$. Seja $n_o = 0$. Lembrando que $\Sigma\theta_1^{p_k q_k/(p_k - q_k)}$ diverge, tomemos

$$n_1 = \min\{n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{n} \theta_1^{p_k q_k/(p_k - q_k)} > 1\}.$$

Então

$$1 < \sum_{k=1}^{n_1} \theta_1^{p_k q_k/p_k - q_k} < \sum_{k=1}^{n_1 - 1} \theta_1^{p_k q_k/(p_k - q_k)} + 1 \leqq 2.$$

Escolhido $0 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_i$ seja

$$n_{i+1} = \min\{n \in \mathbb{N}: \sum_{k=n_i+1}^{n} (\theta_{i+1})^{p_k q_k/(p_k - q_k)} > 1\}$$

Lembrando que $\theta_i < 1$ temos $n_{i+1} > n_i + 1$ e

$$1 < \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} (\theta_i)^{p_k q_k/(p_k - q_k)} < 2$$

Para todo $k \in \mathbb{N}$, se $n_i < k \leqq n_{i+1}$ definimos

$$x_k = \frac{1}{2^i} \theta_i^{q_k/(p_k - q_k)} \quad \text{e} \quad r_k = 2^i \theta_i.$$

Então temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^{p_k} &= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} (\frac{1}{2^i})^{p_k} \theta_i^{p_k q_k/(p_k - q_k)} \\ &\leqq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} \theta_i^{p_k q_k/(p_k - q_k)} \\ &\leqq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = 2 \end{aligned}$$

É claro que $\lim r_k = 0$. Além disso, para todo $j \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n_j} |r_k x_k|^{q_k} = \sum_{i=1}^{j} \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} \theta_i^{p_k q_k/(p_k-q_k)} > j$$

o que implica que $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^{q_k}$ diverge. □

(9.5) <u>Proposição</u>. Sejam (p_k) e (q_k) seqüências de números reais com $p_k > q_k \geq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então são equivalentes

(i) $\Sigma|x_k|^{p_k} < \infty \Rightarrow$ existe $\alpha \in]0,1[$ tal que $\Sigma|\alpha x_k|^{q_k} < \infty$;

(ii) existe $\theta \in]0,1[$ tal que $\Sigma\theta^{p_k q_k/(p_k-q_k)} < \infty$.

Prova. Suponha que (ii) seja verdadeiro. Como para todo $k \in \mathbb{N}$, $p_k/q_k > 1$, usando (13.3) de [HS] temos

$$|\theta x_k|^{q_k} = \theta^{q_k}|x_k|^{q_k} \leq (\theta^{q_k})^{p_k/(p_k-q_k)} + (|x_k|^{q_k})^{p_k/q_k}$$

$$= \theta^{p_k q_k/(p_k-q_k)} + |x_k|^{p_k}$$

Portanto se $\Sigma|x_k|^{p_k} < \infty$, então $\Sigma|\theta x_k|^{q_k} < \infty$.

Para provarmos que (i) implica (ii) suponhamos que (ii) seja falso. Então $\Sigma\theta^{p_k q_k/(p_k-q_k)}$ diverge para todo $\theta \in]0,1[$.

Decorre de (9.4) que existem seqüências (x_k) e (r_k) tais que $\lim r_k = 0$ $\Sigma|x_k|^{p_k} < \infty$, e $\Sigma|r_k x_k|^{q_k}$ diverge.

Então, para todo $\alpha \in]0,1[$, existe $k_o \in \mathbb{N}$ tal que $|r_k| < \alpha$ para todo $k' \geq k_o$, e daí

$$\sum_{k=k_o}^{\infty} |\alpha x_k|^{q_k} \geq \sum_{k=k_o}^{\infty} |r_k x_k|^{q_k}$$

o que implica que $\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^{q_k}$ diverge.

Portanto (i) é falso, o que termina a demonstração. □

(9.6) Corolário. Sejam (p_k) e (q_k) seqüências de números reais com $p_k \geq 1$ e $q_k \geq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes.

(i) $\Sigma |x_k|^{p_k} < \infty \Rightarrow$ existe $\alpha \in]0,1[$ tal que $\Sigma |\alpha x_k|^{q_k} < \infty$,

(ii) existe $\theta \in]0,1[$ tal que $\sum_{k \in J} \theta^{p_k q_k/(p_k - q_k)} < \infty$, onde $J = \{k \in \mathbb{N}: p_k > q_k\}$.

Prova. Suponha que (ii) seja verdadeiro, e que $\Sigma |x_k|^{p_k} < \infty$.

Segue de (9.5) que $\sum_{k \in J} |\alpha x_k|^{q_k} < \infty$ para algum $\alpha \in]0,1[$.

Como $\Sigma |x_k|^{p_k} < \infty$, o conjunto $F = \{k \in \mathbb{N}: |x_k| > 1\}$ é finito. Daí se $k \notin F$ e $k \notin J$, então $|\alpha x_k|^{q_k} \leq |\alpha x_k|^{p_k}$.

Portanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha x_k|^{q_k} = \sum_{k \notin J} |\alpha x_k|^{q_k} + \sum_{k \in J} |\alpha x_k|^{q_k}$$

$$= \sum_{\substack{k \in F \\ k \notin J}} |\alpha x_k|^{q_k} + \sum_{\substack{k \notin F \\ k \notin J}} |\alpha x_k|^{q_k} + \sum_{k \in J} |\alpha x_k|^{q_k}$$

$$\leqq \sum_{k \in F} |\alpha x_k|^{q_k} + \sum_{\substack{k \notin F \\ k \notin J}} |\alpha x_k|^{q_k} + \sum_{k \in J} |\alpha x_k|^{q_k}$$

$$\leqq \sum_{k \in F} |\alpha x_k|^{q_k} + \sum_{\substack{k \notin F \\ k \notin J}} |x_k|^{p_k} + \sum_{k \in J} |\alpha x_k|^{q_k} < \infty.$$

Decorre facilmente de (9.5) que (i) implica (ii).□

(9.7) Corolário. Sejam (p_k) e (q_k) seqüências de números reais com $p_k \geqq 1$ e $q_k \geqq 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Então $\ell(p_k) = \ell(q_k)$ se, e somente se, $\sum_{k \in E} \theta^{p_k q_k / |p_k - q_k|} < \infty$ para algum $0 < \theta < 1$, onde $E = \{k \in \mathbb{N}: p_k \neq q_k\}$.

Prova. Suponha que $\ell(p_k) = \ell(q_k)$.

Se $\sum |x_k|^{p_k} < \infty$ então $(x_k) \in \ell(q_k)$ o que implica que $\sum |\alpha x_k|^{q_k} < \infty$ para algum $\alpha > 0$.

Decorre de (9.6) que $\sum_{k \in J_1} \theta_1^{p_k q_k/(p_k - q_k)} < \infty$ para algum $\theta_1 \in]0,1[$, onde $J_1 = \{k \in \mathbb{N}: p_k > q_k\}$.

Se $\Sigma|y_k|^{q_k} < \infty$ então $(y_k) \in \ell(p_k) = \ell(q_k)$ e daí $\Sigma|\beta y_k|^{p_k} < \infty$, para algum $\beta > 0$. Segue de (9.6) que $\sum_{k\in J_2} \theta_2^{p_k q_k/(q_k-p_k)} < \infty$, para algum $\theta_2 \in]0,1[$, onde $J_2 = \{k \in \mathbb{N}: q_k > p_k\}$.

Portanto, se $\theta = \min\{\theta_1,\theta_2\}$

$$\sum_{k\in E} \theta^{p_k q_k/|p_k-q_k|} = \sum_{k\in J_1} \theta^{p_k q_k/p_k-q_k} + \sum_{k\in J_2} \theta^{p_k q_k/q_k-p_k}$$

$$\leqq \sum_{k\in J_1} \theta_1^{p_k q_k/p_k-q_k} + \sum_{k\in J_2} \theta_2^{p_k q_k/q_k-p_k} < \infty$$

Reciprocamente, suponhamos que $\sum_{k\in E} \theta^{p_k q_k/|p_k-q_k|} < \infty$, para algum $\theta \in]0,1[$.

Se $(x_k) \in \ell(p_k)$ então $\Sigma|\beta x_k|^{p_k} < \infty$, para algum $\beta > 0$. Como $\sum_{k\in J_1} \theta^{p_k q_k/(p_k-q_k)} < \infty$, por (9.6) temos que $\Sigma|\alpha\beta x_k|^{q_k} < \infty$, para algum $\alpha \in]0,1[$, isto é, $(x_k) \in \ell(q_k)$.

Analogamente mostra-se que $\ell(q_k) \subset \ell(p_k)$. $\square$

A seguir damos dois exemplos de espaços seqüenciais modulares que são espaços de Schur, e são diferentes de ℓ_1.

Segue de (9.3) e (9.7) que $\ell(p_k)$, com $p_k > 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tem as propriedades desejadas se $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = 1$ e $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \theta^{p_k/(p_k-1)}$ diverge para todo $\theta \in]0,1[$.

(9.8) <u>Exemplo</u>. Seja $p_k = 1 + \varepsilon_k$ com $\varepsilon_k > 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Para que $\ell(p_k)$ seja um espaço de Schur diferente de ℓ_1 basta tomar (ε_k) com as seguintes propriedades

(i) $\lim \varepsilon_k = 0$

e

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{m})^{p_k/p_k-1} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{m})^{1+\varepsilon_k^{-1}}$ diverge para todo $m \in \mathbb{N}$.

Seja $j_1 = 1$ e para cada $m \in \mathbb{N}$ tome $j_{m+1}=j_m+(m)^{1+m}$. Defina (ε_k) por $\varepsilon_k = 1/m$ para todo k tal que, $j_m < k \leqq j_{m+1}$.

Então para todo $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=j_m+1}^{j_{m+1}} (\frac{1}{m})^{1+\varepsilon_k^{-1}} = \sum_{k=j_m+1}^{j_{m+1}} (\frac{1}{m})^{1+m} = 1$$

e portanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{m})^{1+\varepsilon_k^{-1}} \geqq \sum_{k=j_m+1}^{\infty} (\frac{1}{m})^{1+\varepsilon_k^{-1}}$$

$$= \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{k=j_i+1}^{j_{i+1}} (\frac{1}{m})^{1+i} \geqq \sum_{i=m}^{\infty} \sum_{k=j_i+1}^{j_{i+1}} (\frac{1}{i})^{1+i} = \infty$$

(9.9) Exemplo. Seja $p_k = 1 + \dfrac{1}{\ell n(\ell n(k+1))}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. É claro que $\lim\limits_{k\to\infty} p_k = 1$ e então por (9.2), $\ell(p_k)$ é um espaço de Schur.

Resta provar que $\ell(p_k) \neq \ell_1$, o que devido a (9.7) é equivalente a mostrar que $\Sigma\theta(\ell n(k+1))^{\ell n\theta}$ diverge para todo $\theta \in \,]0,1[$.

Como $\ell n\theta < 0$, basta mostrar que $\sum\limits_{k=2}^{\infty} (\ell nk)^{-p}$ diverge, para todo $p > 0$.

Isto é claro para $0 < p \leqq 1$ pois $(\ell nk)^{-1} < k^{-1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Para $p > 1$ basta ver que $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{k}{(\ell nk)^p} = \infty$, o que nos permite afirmar que $\dfrac{1}{(\ell nk)^p} > \dfrac{1}{k}$ para $k \geqq k_o$.

(9.10) Observação. Decorre facilmente dos teoremas (IV.1.6) e (VII.4.2) de [S], que se um espaço de Banach X é reflexivo e espaço de Schur, então X tem dimensão finita. Portanto os espaços modulares dos exemplos (9.8) e (9.9) acima, não são reflexivos.

REFERÊNCIAS

[Ba] R.G. Bartle, *The Elements of Integration.* John Wiley & Sons Inc., New York, 1966.

[BP] C. Bessaga e A. Pelczyński, *On Bases and Uncondicional Convergence of Series in Banach Spaces.* Studia Math 17 (1958), 151-164.

[B] I.M. Bund, *Birbaum-Orlicz Spaces.* IME-USP, São Paulo, 1978 (Notas do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Série Matemática, 4).

[DS] N. Dunford e J.T. Schwartz, *Linear Operator, vol. I: General Theory.* Pure and Appl. Math., vol. 7, Interscience, New York, 1958.

[E] E.L. Lima, *Curso de Análise, vol. 1.* Coleção Projeto Euclides, Rio de Janeiro, IMPA-CNPq, 1978.

[HN] I. Halperin e H. Nakano, *Generalized ℓ_p Spaces and the Schur Property.* Journ. Math. Soc. Japan, 5 (1953), 49-58.

[HS] E. Hewitt e K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis.* Springer-Verlag, New York, 1969.

[L] K.J. Lindberg, *On Subspaces of Orlicz Sequence Spaces.* Studia Math. 45 (1973), 119-146.

[LT] J. Lindenstrauss e L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I*, Springer-Verlag, New York, 1977.

[LT1] J. Lindenstrauss e L. Tzafriri, *On Orlicz Sequence Spaces.* Israel J. Math. 10 (1971) 379-390.

[MO] J. Musielak e W. Orlicz, *On Modular Spaces.* Studia Math. 18 (1959), 49-65.

[MO1] J. Musielak e W. Orlicz, *Some Remark on Modular Spaces.* Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math., Astr. et Phys. 7 (1959) 661-668.

[N] H. Nakano, *Modulared Semi-ordered Linear Spaces.* Tokyo, 1950.

[N1] H. Nakano, *Modulared Sequence Space.* Proc. Jap. Acad. 27 (1951), 508-512.

[N2] H. Nakano, *Generalized Modular Spaces.* Studia Math. 31 (1968), 439-449.

[R] G. Rocha Filho, *Notas de aula do curso "Geometria dos Espaços de Banach"*, 1982.

[W] J.Y.T. Woo, *On Modular Sequence Spaces.* Studia Math. 48 (1973), 271-289.

[Y] K. Yosida, *Functional Analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 1965.