FUNÇÕES DE SEMI-VARIAÇÃO LIMITADA

DE MAIS DE UMA VARIAVEL

JOÃO CARLOS PRANDINI

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE

EM

MATEMÁTICA

ORIENTADOR:

PROF.Dr.CHAIM SAMUEL HÖNIG

- SÃO PAULO,MAIO DE 1978 -

INTRODUÇÃO

As funções de variação limitada de uma variável real tem diferentes aspetos:

1º) Integrais de Riemann-Stieltjes e Teorema de Riesz.

2º) Curvas Retificáveis segundo Jordan.

3º) Relações com funções absolutamente contínuas.

Quando se procura generalizar esta noção para duas ou mais variáveis reais, por exemplo, segundo Vitali, não se consegue preservar todos os aspectos, (por exemplo é possível haver $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de variação limitada segundo Vitali, que após uma rotação de 45º aplicada a $\mathbb{R}^2$ deixe de sê-la). Mas sob o ponto de vista dos Teoremas de Representação, as funções de variação limitada segundo Vitali, e segundo Frechet, são os entes perfeitos para representarem certos espaços funcionais; ver os teoremas 2.15 e 2.28, de representação do capítulo 2.

Morse e Transue, abordaram as funções de variação limitada segundo Frechet e os teoremas de representação a elas relacionados, para espaços de funções contínuas, estendendo as integrais usuais de Riemann-Stieltjes para dimensão dois, isto é, para retângulos. No presente texto utilizamo-nos de integrais interiores ampliando a classe de funções integráveis para as funções regradas. Veja os resultados 2.13 e 2.22 do capítulo 2.

O fato de usarmos integrais interiores, e funções regradas, facilita muito o manejo da integral e a demonstração de suas propriedades. Na realidade a dificuldade fica transferida para a demonstração do fato que, para funções contínuas, a integral interior e a integral usual coincidem. Para o caso de uma variável veja [VSIE] pg. 9 theorem 1.2; para a integral usando núcleos de variação limitada de Vitali, a demonstração utiliza as mesmas idéias da prova desta referência e, para integrais com núcleos de variação limitada de Frechet, segue do theorem 1.2 com o teorema 2.29 do capítulo 2. Aliás o teorema 2.29 dá ao teorema 2.27 a feição do resultado de M. Frechet. Convém notar que o limite com refinamentos da integral interior permite demonstrações mais simples, enquanto o limite com amplitudes, para a integral usual, vantagens computacionais evidentes.

Morse e Transue, nos seus artigos, que datam do fim da década de 40 e início da de 50, além de estudarem as funções de variação limitada de Frechet, aplicam os teoremas lá obtidos às séries múltiplas de Fourier e ao cálculo das variações. Nosso enfoque permitiu demonstrações dos seus resultados de modo mais simples e de forma mais geral, veja o capítulo 3.

Outros resultados também mantém-se neste contexto; por exemplo, se $K:[c,d]\times[a,b] \longrightarrow L(X;Y)$ é tal que para toda função f regrada existe

$$\iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K(t,s)f(t,s)$$

então K é de semi-variação limitada segundo Vitali; veja as definições pertinentes no texto que se segue.

Agradeço pela sugestão do tema e do seu enfoque, bem como pelo magnífico trabalho de orientação, ao Prof.Dr. Chaim Samuel Hönig.

Agradeço também ao Sr. João Baptista Esteves de Oliveira pela datilografia deste trabalho

São Paulo, maio de 1978

João Carlos Prandini

NOTAÇÃO

Dados conjuntos A e B, o conjunto das funções de A em B é indicado por B^A.

Dada $K:T\times S \longrightarrow R$ definimos $K^{\square}:T \longrightarrow R^S$ por $K^{\square}(t)(s) = K(t,s)$, e dado $t\in T$ ($s\in S$) colocamos $K^t:S \longrightarrow R$ ($K_s:T \longrightarrow R$) onde $K^t(s) = K(t,s)$ ($K_s(t) = K(t,s)$).

Dado um conjunto N, uma parte A de N, um espaço métrico M e uma função $f:N \longrightarrow M$ a oscilação de f em A é $\omega_A(f) = \sup\{d(f(x);f(y)):x,y\in A\}$

As letras X,Y, e Z indicarão, salvo menção em contrário, espaços de Banach complexos ou reais e o conjunto das aplicações lineares (bilineares) contínuas de X em Y (de Y×X em Z), será denotado por $L(X,Y)$ ($B(Y\times X;Z)$).

CAPÍTULO 1

FUNÇÕES REGRADAS DE $\mathbb{R}^2$

Apresentaremos a definição e algumas propriedades de funções *regradas*, definidas num retângulo $[c,d]\times[a,b]$ de $\mathbb{R}^2$, tomando valores num espaço de Banach. Faremos eventualmente uso de propriedades de funções regradas de uma variável, estas propriedades encontram-se em [VSIE].

1.1. Definições: Dado um intervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, uma *divisão* d de $[a,b]$ é uma sequência finita $d: t_0 = a < \ldots < t_n = b$. Escrevemos $|d| = n$ e $\Delta d = \sup\{t_j - t_{j-1} : 1 \leq j \leq |d|\}$, chamamos Δd de *amplitude de* d. O conjunto das divisões de $[a,b]$ é simbolizado por $\mathbb{D}_{[a,b]}$. Dada $d \in \mathbb{D}_{[a,b]}$ $d: t_0 = a < \ldots < t_{|d|} = b$, os *intervalos básicos* de d são os subconjuntos $\{t_j\}$ para $0 \leq j \leq |d|$ e $]t_{j-1}, t_j[$ para $1 \leq j \leq |d|$.

Seja agora o retângulo $[c,d]\times[a,b]$. Uma *divisão* d de $[c,d]\times[a,b]$ é um produto $d = d'' \times d'$; onde $d'' \in \mathbb{D}_{[c,d]}$ e $d' \in \mathbb{D}_{[a,b]}$. Colocamos $|d| = |d''|\,|d'|$ e a *amplitude de* d é $\Delta d = \Delta d'' \Delta d'$. Indicamos o conjunto das divisões de $[c,d]\times[a,b]$ por $\mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$. Um *intervalo básico de* $d = d''\times d' \in \mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$ é um produto de intervalo básico de d'', por um de d'.

1.2. Definições: Dada $f:[c,d]\times[a,b] \longrightarrow F(f:[a,b] \longrightarrow F)$, onde F é um espaço normado, diremos que f é uma *função em patamar* (*função em escada*) se existir $d\in\mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}(d\in\mathbb{D}_{[a,b]})$ tal que f seja constante sobre seus intervalos básicos. Indicamos o conjunto das função em patamar (escada) por $E([c,d]\times[a,b];F)$ $(E([a,b];F))$.

1.3. Definições: Uma função $f:[c,d]\times[a,b] \longrightarrow X(f:[a,b] \rightarrow X)$ diz-se *regrada* se f é limite uniforme, na norma do sup, de funções em patamar (em escada). O conjunto das funções regradas é simbolizado por $G([c,d]\times[a,b];X)(G([a,b];X))$.
Se $B([c,d]\times[a,b];X)(B([a,b];X))$ é o espaço de Banach com a norma do sup, das funções limitadas de $[c,d]\times[a,b]$ $([a,b])$ em X, então $G([c,d]\times[a,b];X) = \overline{E([c,d]\times[a,b];X)}$ $(G([a,b];X) = \overline{E([a,b];X)})$ em $B([c,d]\times[a,b];X)$ (em $B[a,b];X)$). Portanto o conjunto das funções regradas é um espaço de Banach.

1.4. Teorema: A aplicação

$$f\in G([c,d]\times[a,b];X) \longrightarrow f^{\square}\in G([c,d];G([a,b]))$$

é uma isometria do primeiro espaço de Banach sobre o segundo.

Demonstração: Dado um espaço normado F, seja $\hat{F}$ o seu completado. Então $\widehat{E([c,d];F)} = G([c,d];\hat{F})$. Seja então a aplicação

$f \in E([c,d]\times[a,b];X) \longrightarrow f^{\square} \in E([c,d];E([a,b];X))$.

Esta aplicação é sobrejetora: dada $f^{\square}$ em $E([c,d];E([a,b];X))$ obtemos uma $f \in E([c,d]\times[a,b];X)$ fazendo eventualmente refinamentos das divisões em $[c,d]$ e em $[a,b]$. Obtemos uma extensão desta aplicação linear para os completados i.e. de $G([c,d]\times[a,b];X)$ em $G([c,d];G([a,b];X))$. Ela era uma isometria de $E([c,d]\times[a,b];X)$ sobre $E([c,d];E([a,b];X))$ logo também o será de $G([c,d]\times[a,b];X)$ sobre $G([c,d];G([a,b];X))$.

1.5. <u>Proposição</u>: Dada $f:[c,d]\times[a,b] \longrightarrow X$ são equivalentes as propriedades abaixo:

a) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists d_\varepsilon = d''_\varepsilon \times d'_\varepsilon \in \mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$ tal que $\omega^{\bullet}_{d_\varepsilon}(f) < \varepsilon$ onde $\omega^{\bullet}_{d}(f) = \sup\{\omega_I(f): I$ é intervalo básico de $d\}$

b) $f \in G([c,d]\times[a,b];X)$.

c) Dado $(t,s) \in [c,d]\times[a,b]$, existe, sempre que estiver definido, cada limite

$$\lim_{\substack{\tau\downarrow 0\\ \sigma\downarrow 0}} f(t+\tau,s+\sigma) = f(t+,s+); \quad \lim_{\substack{\tau\downarrow 0\\ \sigma\downarrow 0}} f(t+\tau,s-\sigma) = f(t+,s-);$$

$$\lim_{\substack{\tau\downarrow 0\\ \sigma\downarrow 0}} f(t-\tau,s+\sigma) = f(t-,s+); \quad \lim_{\substack{\tau\downarrow 0\\ \sigma\downarrow 0}} f(t-\tau,s-\sigma) = f(t-,s-);$$

$$\lim_{\sigma\downarrow 0} f(t,s+\sigma) = f(t,s+); \quad \lim_{\sigma\downarrow 0} f(t,s-\sigma) = f(t,s-);$$

$$\lim_{\tau\downarrow 0} f(t+\tau,s) = f(t+,s); \quad \lim_{\tau\downarrow 0} f(t-\tau,s) = f(t-,s).$$

Demonstração: a) $\Longrightarrow$ b): Dado $\varepsilon > 0$; seja $d_\varepsilon \in \mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$ como em a). Para cada intervalo básico I de d_ε, seja $p_I \in I$ e a função $g = \sum_I x_I\ f(p_I)$; g é uma função em patamar e $\|f-g\| < 2\varepsilon$, logo $f \in ([c,d]\times[a,b];X)$.

b) $\Longrightarrow$ c) segue trivialmente de 1.4.

c) $\Longrightarrow$ a) Dado um ponto $(t,s) \in]c,d[\times]a,b[$ é possível então obter uma vizinhança V de (t,s) da forma $]t-\delta,t+\delta[\times]s-\delta,s+\delta[$, de modo que se

$V^1 = V\cap(]t,t+\delta[\times]s,s+\delta[)$; $V^2 = V\cap(]t,t+\delta[\times]s-\delta,s[)$;

$V^3 = V\cap(]t-\delta,t[\times]s,s+\delta[)$; $V^4 = V\cap(]t-\delta,t[\times]s-\delta,s[)$;

$V^5 = V\cap(\{t\}\times]s,s+\delta[)$; $V^6 = V\cap(\{t\}\times]s-\delta,s[)$:

$V^7 = V\cap(]t,t+\delta[\times\{s\})$; $V^8 = V\cap(]t-\delta,t[\times\{s\})$.

teremos $\omega_{V^i}(f) < \infty$ para $1 \leq i \leq 8$. Para um ponto de fronteira de $[c,d]\times[a,b]$ façamos mesma coisa. Considerando a cobertura do compacto $[c,d]\times[a,b]$ formada por tais vizinhanças tomemos uma subcobertura finita delas para $[c,d]\times[a,b]$ e projetamos sobre os eixos de coordenadas os seus vértices e os seus centros. Com os pontos assim obtidos temos uma divisão d''_ε de $[c,d]$ e uma d'_ε de $[a,b]$, cujo produto $d_\varepsilon = d''_\varepsilon \times d'_\varepsilon$ é a divisão para a qual $\omega^{\bullet}_{d_\varepsilon}(f) < \varepsilon$. De fato, se I é um intervalo básico de d_ε; I é uma parte de algum V^i para algum (t,s) onde já tínhamos $\varepsilon > \omega_{V^i}(f) \geq \omega_I(f)$. Portanto vale (a)

1.6. De 1.4, fica estabelecido que $f \in G([c,d]\times[a,b];X)$ então:

a) $f(t+,s) = f^{\square}(t+)(s)$ b) $f(t-,s) = f^{\square}(t-)(s)$

c) $f(t+,s+) = f^{\square}(t+)(s+)$ d) $f(t+,s-) = f^{\square}(t+)(s-)$

e) $f(t-,s+) = f^{\square}(t-)(s+)$ f) $f(t-,s-) = f^{\square}(t-)(s-)$

g) $f(t,s+) = f^{\square}(t)(s+)$ h) $f(t,s-) = f^{\square}(t)(s-)$

o que os limites (a) e (b) são uniformes em s e os (g) e (h) em t.

1.7. Proposição: Dada $f \in G([c,d]\times[a,b];X)$ as suas descontinuidades estão num conjunto enumerável de retas paralelas aos eixos.

Demonstração: Designemos por $\mathcal{D}(f)$ o conjunto das descontinuidades de f. Para uma função $g \in E([c,d]\times[a,b];X)$ o resultado é válido e $\mathcal{D}(g)$ está contido num número finito de retas paralelas aos eixos. Escrevendo

$$\mathcal{D}^n(f) = \{(t,s)\in[c,d]\times[a,b]:\ \omega_{(t,s)}(f)>1/n\} \qquad n\geq 1,$$

temos $\mathcal{D}(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}^n(f)$. Portanto é suficiente provar que $\mathcal{D}^n(f)$ está contido num número finito de retas paralelas aos eixos. Tomemos $g\in E([c,d]\times[a,b];X)$ de modo que $\|f-g\| < 1/3n$. Então $\mathcal{D}^n(f)\subset\mathcal{D}^{3n}(g)$ pois se $(t,s)\notin\mathcal{D}^{3n}(g)$ há uma vizinhança V de (t,s) tal que se $(y,x);(v,u)\in V$ tem-se $\|g(y,x)-g(v,u)\|\leq\frac{1}{3n}$. Daí

$$\|f(y,x)-f(v,u)\| \leq \|f(y,x)-g(y,x)\| + \|g(y,x)-g(v,u)\| + \|g(v,u)-f(v,u)\| < \frac{1}{n}$$

isto é, $(t,s)\notin\mathcal{D}^n(f)$.

Faremos agora uma decomposição de $G([c,d]\times[a,b]$ numa soma direta de espaços de Banach, onde uma das finalidades está nos teoremas de representação que obteremos.

1.8. <u>Definição</u>: Dada $f\in G([c,d]\times[a,b];X)$ colocamos:

a) $f\in G_{--}([c,d]\times[a,b];X)$, se e somente se, $f(c,s)=f(t,a)=0$ $\forall t\in[c,d]$; $\forall s\in[a,b]$ e $f(t-,s)=f(t,s-)=f(t-,s-)=$ $=f(t,s)$ se $t\neq c$ e $s\neq a$.

b) $f\in\Omega_0([c,d]\times[a,b];X)$, se e somente se $\forall\ \varepsilon>0$ $\exists d_\varepsilon\in\mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$ tal que se

$$\Omega_\varepsilon=\{(t,s)\in[c,d]\times[a,b]:\|f(t,s)\|\geq\varepsilon\}$$

então Ω_ε está contido nas retas paralelas aos eixos, definidas pelos pontos de d_ε.

c) Dado $f\in G([c,d]\times[a,b];X)$, $I_{--}f:[c,d]\times[a,b]\longrightarrow X$ por $(I_{--}f)(c,s)=(I_{--}f)(t,a)=0$ e se $t\neq c$ e $s\neq a$ $(I_{--}f)(t,s)=f(t-,s-)$. Denotaremos $I_{--}f$ por f_{--}.

1.9. <u>Teorema</u>: Temos:

a) I_{--} é uma projeção contínua de $G([c,d]\times[a,b]$ sobre $G_{--}([c,d]\times[a,b]$

b) O kernel de I_{--} é $\Omega_0([c,d]\times[a,b];X)$

c) $G([c,d]\times[a,b]=G_{--}([c,d]\times[a,b];X)\oplus\Omega_0([c,d]\times[a,b];X)$

Demonstração: a) Dada $f\in G([c,d]\times[a,b];X)$; $I_{--}f\in G([c,d]\times[a,b];X)$, por exemplo $(I_{--}f)(t+,s+)=f(t+,s+)$, pois se para $0<\tau<\delta$, $0<\sigma<\delta$ temos $\|f(t+,s+)=f(t+\tau,s+\sigma)\|<\varepsilon$; então temos $\|f(t+,s+)-f[(t+\tau)-;(s+\sigma)-]\|<2\varepsilon$; e $(I_{--}f)(t-,s)=(I_{--}f)(t,s-)=$ $=f(t-,s-)=(I_{--}f)(t,s)$ de modo análogo. Logo $I_{--}f\in G_{--}([c,d]\times[a,b];X)$. Obviamente $\|I_{--}f\|\leq\|f\|$ e $I_{--}(I_{--}f)=I_{--}f$.

b) Dado $f\in\Omega_0([c,d]\times[a,b];X)$ e $\varepsilon > 0$ seja d_ε como em 1.8 (b). Dado $(t,s)\in[c,d]\times[a,b]$ com $t \neq c$ e $s \neq a$ temos $\|(I_{--}f)(t,s)\| < 2\varepsilon$ e portanto $I_{--}f = 0$.

c) Se $f\in G_{--}([c,d]\times[a,b];X)$ é imediato que $I_{--}f = f$ portanto vale (c).

1.10. <u>Corolário</u>: $G_{--}([c,d]\times[a,b];X)$ e $\Omega_0([c,d]\times[a,b];X)$ são subespaços de Banach de $G([c,d]\times[a,b];X)$.

1.11. Poderíamos também obter 1.9 e 1.10 por meio da isometria de 1.4, a saber, escrevendo

$G([c,d]\times[a,b];X)) = G([c,d];G_-([a,b];X))\oplus G([c,d];C_0([a,b];X))=$

$= G_-([c,d];G_-([a,b];X))\oplus C_0[c,d];G_-([a,b];X))\oplus G_-([c,d];C_0([a,b];X))\oplus$

$\oplus C_0([c,d];C_0([a,b];X))$. Ver [VSIE] pg. 16-20. Neste caso

$G_{--}([c,d]\times[a,b];X) \cong G_-([c,d];G_-([a,b];X))$ e $\Omega_0([c,d]\times[a,b];X) \cong$

$\cong G_-([c,d];C_0([a,b];X)\oplus C_0([c,d];G_-([a,b];X))\oplus C_0([c,d];C_0([a,b];X))$.

1.12. <u>Proposição</u>: Dados $x\in X$; $\tau\in]c,d]$ e $\sigma\in]a,b]$ a função $\chi_{]c,\tau]\times]a,\sigma]}x$ está em $G_{--}([c,d]\times[a,b];X)$. Tais funções formam uma parte total deste espaço.

Demonstração: Lembremos que em $G_-([\alpha,\beta]);X)$ os elementos $\chi_{]\alpha,u]}x$ formam um subconjunto total de $G_-([\alpha,\beta]X)$, ver [VSIE] pag. 39, Theorem 5.1. Mas a função $\chi_{]c,\tau]\times]a,\sigma]}$ corresponde pela isometria de 1.4 à $\chi_{]c,\tau]}\otimes\chi_{]a,\sigma]}x$; estas últimas funções, contudo, formam uma parte total de $G_-([c,d];G_-[a,b];X))$

1.13. Uma consequência imediata de 1.12 é que se $\phi,\psi\in L(G_{--}([c,d]\times[a,b];X);Y)$ então $\phi = \psi$ se e somente se ϕ e ψ

coincidem nos elementos da forma $\chi_{]c,\tau]\times]a,\sigma]}x$.

- □ -

CAPÍTULO 2

FUNÇÕES DE SEMI-VARIAÇÃO LIMITADA

Aqui será feito um estudo das funções definidas num retângulo $[c,d]\times[a,b]$ de $\mathbb{R}^2$, com valores em $L(X,Y)$ ou em $B(Y\times X;Z)$, que possuem a propriedade de serem de semi-variação limitada. Estas noções serão aqui apresentadas e generalizam as definições clássicas de Vitali e Frechet. Os espaços de funções de semi-variação limitada tem importância para os teoremas de representação que obteremos.

A) Funções de Semi-variação limitada segundo Vitali

2.1. Definições: Dada $K:[c,d]\times[a,b] \longrightarrow X$ e $d = d''\times d' \in \mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$; $d'': t_0 < \ldots < t_{|d''|}$ e $d': s_0 < \ldots < s_{|d'|}$ coloquemos

$$K_{ji} = K(t_j,s_i) - K(t_j,s_{i-1}) - K(t_{j-1},s_i) + K(t_{j-1},s_{i-1});$$

$$1 \le j \le |d''|,\ 1 \le i \le |d'| \quad \text{e} \quad \sum_{j,i}^{|d|} K_{ji} = \sum_{j=1}^{|d''|}\sum_{i=1}^{|d'|} K_{ji}$$

a) Consideremos, então $K:[c,d]\times[a,b] \longrightarrow L(X,Y)$ e $d \in \mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$ definimos:

$$SV_d[K] = \sup\left\{\left\|\sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}x_{ji}\right\| : x_{ji}\in X,\ \|x_{ji}\|\le 1\right\} \text{ e}$$

$$SV[K] = \sup\left\{SV_d[K] : d\in \mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}\right\}$$

Chamamos $SV[K]$ de semi-variação de Vitali de K, e o conjunto das funções de $[c,d]\times[a,b]$ em $L(X,Y)$ de semi-variação de Vitali finita é denotado por $SV([c,d]\times[a,b];L(X;Y))$, ele é um espaço vetorial e SV é uma semi-norma.

b) Dada $K:[c,d]\times[a,b] \longrightarrow Z$ e $d\in\mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$ escrevemos

$$V_d[K] = \sum_{j,i}^{|d|}\|K_{ji}\| \quad \text{e} \quad V[K] = \sup\left\{V[K] :\ d\in\mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}\right\}$$

Chamamos $V[K]$ de variação de Vitali de K, e o conjunto das funções de $[c,d]\times[a,b]$ em Z de variação limitada de Vitali é denotado por $BV([c,d]\times[a,b],Z)$.

2.2. Quando $Y = \mathbb{C}$ temos, dada $d\in\mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$, $SV_d[K]=V_d[K]$ e portanto $SV[K] = V[K]$, escrevemos então $BV([c,d]\times[a,b];X')$ no lugar de $SV([c,d]\times[a,b];L(X;\mathbb{C}))$, se $X = Y = \mathbb{C}$, pomos simplesmente $BV([c,d]\times[a,b])$.

2.3. Dadas $\bar{d}$; $d\in\mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$ dizemos que $\bar{d}$ é mais fina que d se $\bar{d}''\supset d''$ e $\bar{d}'\supset d'$ ($\bar{d} = \bar{d}''\times\bar{d}'$ e $d = d''\times d'$) e escreve-se $\bar{d}\ge d$. temos $SV_{\bar{d}}[K]\ge SV_d[K]$. Se R é um subretângulo de $[c,d]\times[a,b]$ e $K\in SV([c,d]\times[a,b];L(X;Y))$ então $K_{|R}\in SV(R;L(X;Y))$.

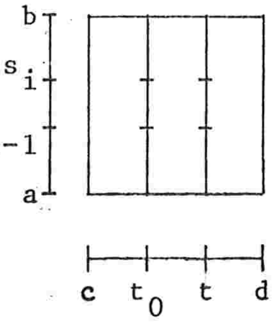
2.4. <u>Normalização de $SV([c,d]\times[a,b];L(X;Y))$</u>: É possível ter $K\in SV([c,d]\times[a,b];L(X;Y))$ sem que K^t ou K_s sejam de semi-variação limitada.

a) Exemplo: $Y = X = \mathbb{R}$ $[c,d] = [a,b] = [0,1]$;
$K:[0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: Se $t\in\mathbb{Q}$, $K(t,s) = 1$; se $t\notin\mathbb{Q}$, $K(t,s) = 0$. Dada $d\in\mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$ qualquer, temos $K_{ji} = 0$ donde $SV[K] = 0$. Contudo nenhuma secção K_s é de variação limitada.

Para contornar este inconveniente, procede uma normalização deste espaço. Alguns autores impõe que hajam duas restrições, K^t e K_s que sejam de semi-variação limitada e designam este sub-espaço por $SV_*([c,d]\times[a,b];L(X;Y))$. Posteriormente imporemos que $K(t,a) = K(c,s) = 0$ e denotaremos o este sub-espaçopor $SV_{c,a}([c,d]\times[a,b]$;dada K em
$SV([c,d]\times[a,b];L(X;Y))$
obtemos $\tilde{K}\in SV_{c,a}([c,d]\times[a,b];L(X;Y))$ pondo $\tilde{K}(t,s) = K(t,s) - K(c,s) - K(t,a) + K(c,a)$ ambas funções definirão a mesma integral definida em 2.12, veja 2.14.

b) Se $K\in SV_*([c,d]\times[a,b];L(X;Y))$ ou $K\in SV_{c,a}([c,d]\times[a,b];L(X;Y))$ os cortes K^t e K_s são de semi-variação limitada.

Demonstração: Suponhamos que $K\in SV_*([c,d]\times[a,b];L(X;Y))$ e que $K^{t_0}\in SV([a,b];L(X;Y))$ e $K_{s_0}\in SV([c,d];L(X;Y))$.



Seja $t\in[c,d]$ qualquer e $d'\in\mathbb{D}_{[a,b]}$ $d':s_0 = a < \ldots < s_{|d'|} = b$. Então dados

$x_i\in X$ $\|x_i\| \le 1$; $1 \le i \le |d'|$ temos

$$\|\sum_{i=1}^{|d'|}[K^t(s_i)-K^t(s_{i-1})]\cdot x_i\| = \|\sum_{i=1}^{|d'|}[K^t(s_i)-K^t(s_{i-1})-K^{t_0}(s_i)+K^{t_0}(s_{i-1})]\cdot x_i +$$
$$+\sum_{i=1}^{|d'|}[K^{t_0}(s_i)-K^{t_0}(s_{i-1})]\cdot x_i\| \leq SV[K]+SV[K^{t_0}].$$

Analogamente para os outros casos. É imediato que em $SV_{c,a}([c,d]\times[a,b];L(X;Y))$, SV é uma norma.

2.5. Lembremos que se $(\mathcal{D}'',R'')$ e $(\mathcal{D}',R')$ são conjuntos dirigidos então podemos tornar $\mathcal{D} = \mathcal{D}''\times\mathcal{D}'$ um conjunto dirigido colocando $(q,p)R(v,u)$, sse $qR''v$ e $pR'u$. Vale ainda que se $f\colon \mathcal{D} \longrightarrow X$ é uma função tal que existe $\lim\limits_{\mathcal{D}} f(q,p) = \alpha$ e se existe $p_0\in\mathcal{D}'$ tal que se $pR'p_0$ implica que existe $\lim\limits_{\mathcal{D}''} f(p,q) = g(p)$, então existe $\lim\limits_{\mathcal{D}'} g(p) = \lim\limits_{\mathcal{D}'}\lim\limits_{\mathcal{D}''} f(p,q) = \lim\limits_{\mathcal{D}} f(p,q)=\alpha$. Um exemplo é o conjunto $\mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]} = \mathbb{D}_{[c,d]}\times\mathbb{D}_{[a,b]}$.

Lembremos ainda que dada $K\colon[c,d]\times[a,b] \longrightarrow Z$, vale

$$\sup_{d''\in\mathbb{D}_{[c,d]}}\ \sup_{d'\in\mathbb{D}_{[a,b]}}\ \sum_{j,i}^{|d|}\|K_{ji}\| = \sup_{d''\times d'\in\mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}}\ \sum_{j,i}^{|d|}\|K_{ji}\|,$$

sejam eles finitos ou não.

2.6. <u>Lema</u>: Seja $\mathcal{D}$ um conjunto dirigido e $j\in\mathbb{N}^*$ e $f_j\colon\mathcal{D} \longrightarrow R_+$ crescentes. Então temos

$$\sup_{d\in\mathcal{D}}\sum_{j=1}^{n} f_j(d) = \sum_{j=1}^{n}\sup_{d\in\mathcal{D}} f_j(d). \text{ Mais ainda } \sup_{d\in\mathcal{D}}\sum_{j=1}^{\infty} f_j(d) = \sum_{j=1}^{\infty}\sup_{d\in\mathcal{D}} f_j(d).$$

Demonstração: Caso haja $j\in\mathbb{N}^*$ com $\sup\limits_{d\in\mathcal{D}} f_j(d) = \infty$, tudo é imediato. Senão a primeira igualdade é uma forma particular de se afirmar que o limite dasoma é a soma dos limites. Para a segunda igualdade, é suficiente observar que, se algum membro é infinito, o outro também será. Quando algum membro é finito estamos no caso dos comentário 2.5.

2.7. Teorema: A aplicação

$$K \in BV_{c,a}([c,d]\times[a,b];Z) \longrightarrow K^{\square} \in BV_c([c,d];BV_a([a,b];Z))$$

é uma isometria do primeiro espaço de Banach sobre o segundo.

Demonstração: Observe-se que dado $t \in [c,d]$ e $d' \in \mathbb{D}_{[a,b]}$ temos

$$\sum_{i=1}^{|d'|} \|K^{\square}(t)(s_i) - K^{\square}(t)(s_{i-1})\| \leq V[K]$$

e que, portanto, $\forall t \in [c,d]$ temos $K^{\square}(t) \in BV_a([a,b];Z)$. Mais ainda

$$V[K^{\square}] = \sup_{d'' \in \mathbb{D}_{[c,d]}} \sum_{j=1}^{|d''|} V[K^{\square}(t_j) - K^{\square}(t_{j-1})] =$$

$$= \sup_{d'' \mathbb{D}_{[c,d]}} \sum_{j=1}^{|d''|} \sup_{d' \in \mathbb{D}_{[a,b]}} \sum_{i=1}^{|d'|} \|K_{ji}\| = \sup_{d'' \times d' \in \mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}} \sum_{j,i}^{|d|} \|K_{ji}\| = V[K]$$

de acordo com 2.5 e 2.6.

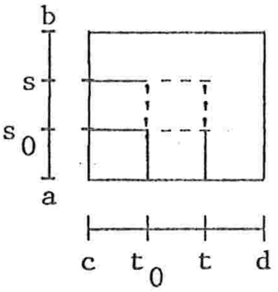
2.8. Podemos ainda generalizar 2.7, do seguinte modo: Se $K \in BV_{c,a}([c,d]\times[a,b];Z)$ e $t_0, t \in [c,d]$, com $t_0 < t$ então $V_{[t_0,t]}[K^{\square}] = V_{[t_0,t]\times[a,b]}[K]$; a demonstração é análoga à de 2.7.

2.9. Proposição: Dada $K \in BV_{c,a}([c,d]\times[a,b];Z)$, coloquemos $\nu_K : [c,d]\times[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definindo $\nu_K(t,s) = V_{[c,t]\times[a,s]}[K]$; então a função ν_K é aditiva sobre intervalos, isto é dados

$t_0, t\in[c,d]$; $s_0, s\in[a,b]$ e $t_0 \le t$; $s_0 \le s$ vale

$$\nu_K(t,s)-\nu_K(t_0,s_0)=V_{[t_0,t]\times[a,s_0]}[K]+V_{[c,t_0]\times[s_0,s]}[K]+V_{[t_0,t]\times[s_0,s]}[K]$$

Demonstração: Supondo, inicialmente, que $s = s_0$ temos



$$\nu_K(t,s_0) - \nu_K(t_0,s_0) = V_{[c,t]\times[a,s_0]}[K] - V_{[c,t_0]\times[a,s_0]}[K]$$

$$= \mathrm{V}_{[c,t]}[K^{\square}] - \mathrm{V}_{[c,t_0]}[K^{\square}] = \mathrm{V}_{[t_0,t]}[K^{\square}] =$$

$= V_{[t_0,t]\times[a,s_0]}[K]$, por 2.8. Quando $t = t_0$, o mesmo acontece com a função $\check{K}(s,t) = K(t,s)$ e como $V[\check{K}] = V[K]$, temos o resultado. No caso geral em que $t_0 < t$ e $s_0 < s$, escrevemos:

$$\nu_K(t,s) - \nu_K(t_0,s_0) = \nu_K(t,s) - \nu_K(t_0,s) + \nu_K(t_0,s) - \nu_K(t_0,s_0) =$$

$= V_{[t_0,t]\times[a,s]}[K] + V_{[c,t_0]\times[s_0,s]}[K]$; mas

$$V_{[t_0,t]\times[a,s]}[K] = V_{[t_0,t]\times[a,s_0]}[K] + V_{[t_0,t]\times[s_0,s]}[K].$$

2.10. Proposição: Dada $K\in BV_{c,a}([c,d]\times[a,b];Z)$, são equivalentes:

a) ν_K é contínua.

b) K é contínua.

Demonstração: a) $\Longrightarrow$ b). Vamos mostrar que dado $s_0\in[a,b]$ a função $t\in[c,d] \longrightarrow K(t,s_0)\in Z$ é contínua. Dado $t_0\in[c,d]$ e $t > t_0$, temos $\|K(t,s_0) - K(t_0,s_0)\| \le V_{[t_0,t]\times[a,s_0]}[K] = \nu_K(t,s_0) - \nu_K(t_0,s_0)$. Logo esta função é contínua. Analogamente a função $s\in[a,b] \longrightarrow K(t_0,s)\in Z$, o é.

Consideremos (t_0,s_0); $(t,s)\in[c,d]\times[a,b]$; $t<t_0$; $s<s_0$. Então, $\|K(t,s)-K(t,s_0)-K(t_0,s)+K(t_0,s_0)\| \leq$ $\leq V_{[t_0,t]\times[s_0,s]}^{[K]} \leq \nu_K(t,s) - \nu_K(t_0,s_0)$ por 2.9. Como ν_K é contínua existe $\bar{\delta}>0$ tal que $t_0<t<t_0+\bar{\delta}$; $s_0<s<s_0+\bar{\delta} \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \nu_K(t,s)-\nu_K(t_0,s_0)<\varepsilon/3$. Sabemos que K^{t_0} é contínua em s_0 logo existe $\delta'>0$ tal que $s_0<s<s_0+\delta' \Longrightarrow \|K(t_0,s)-K(t_0,s_0)\|<$ $<\varepsilon/3$. Como K_{s_0} é contínua em t_0 $\exists\delta''>0$ tal que $t_0<t<t_0+\delta''$ $\Longrightarrow \|K(t,s_0)-K(t,s_0)\|<\varepsilon/3$. Enfim se $0<\delta<\min\{\delta,\delta',\delta''\}$ segue-se que:

$$\|K(t,s)-K(t_0,s_0)\| \leq \|K(t,s)-K(t,s_0)\| + \|K(t,s_0)-K(t_0,s_0)\| < \frac{2\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

b) $\Longrightarrow$ a). Vamos provar que a função $t\in[c,d] \longrightarrow \nu_K(t,s_0)$ é contínua; $s_0\in[a,b]$. Se, por absurdo, dado $t_0\in[c,d]$, $\nu_K(t,s_0)$ não fosse contínua (à direita) em t_0, existiria $r>0$ tal que existe $\tau>t_0$ e $\nu_K(\tau,s_0)-\nu_K(t_0,s_0)>r$. Seja $d=d''\times d'\in D_{[t_0,\tau]\times[a,s_0]}$ tal que $\sum_{j,i}^{|d|}\|K_{ji}\|>\frac{r}{2}$. Tomemos $\theta\in[c,d]$ com $t_0<\theta<\tau$ e tal que $\|K(\theta,s_i)-K(t_0,s_i)\|<\frac{r}{8|d'|}$ para $1\leq i\leq |d'|$. Então se $\tilde{d}=d''\cup\{\theta\}\times d'$ temos

$$\sum_{j,i}^{|\tilde{d}|}\|K_{ji}\| = \sum_{i=1}^{|d'|}\|K_{1i}\| + \sum_{j\neq 1,i}^{|\tilde{d}|}\|K_{ji}\| > \frac{r}{2}. \text{ Mas}$$

$\sum_{i=1}^{|d'|}\|K_{1i}\| \leq \frac{r}{4}$. Logo $\sum_{j\neq 1,i}^{|\tilde{d}|}\|K_{ji}\| > \frac{r}{4}$ e portanto $V_{[\theta,\tau]\times[a,s_0]}^{[K]} >$ $>\frac{r}{4}$. Recomeçando o mesmo raciocínio em $\left[t_0;\frac{t_0+\theta}{2}\right]$ e levando-o ad infinitum obtemos $V_{[t_0,d]\times[a,s_0]}^{[K]}=\infty$, uma contradição. Analogamente é contínua a função $s\in[a,b] \longrightarrow \nu_K(t_0,s)$.

No caso geral, dados $t > t_0$; $s > s_0$ temos

$$\nu_K(t,s)-\nu_K(t_0,s_0) = V_{[t_0,t]\times[a,s_0]}[K]+V_{[c,t_0]\times[s_0,s]}[K]+V_{[t_0,t]\times[a,s_0]}[K]=$$

$$= [\nu_K(t,s_0)-\nu_K(t_0,s_0)]+[\nu_K(t_0,s)-\nu_K(t_0,s_0)]+V_{[t_0,t]\times[s_0,s]}[K]$$

e observando que se $t \longrightarrow t_0$ (ou $s \longrightarrow s_0$) temos $V_{[t_0,t]\times[s_0,s]}[K] \longrightarrow 0$ como foi feito acima, decorre a tese.

2.11. <u>Teorema</u>: A aplicação

$$K\in BVC_{c,a}([c,d]\times[a,b];Z) \longrightarrow K^{\square}\in BVC_c([c,d];BVC_a([a,b];X))$$

é uma isometria do primeiro espaço de Banach sobre o segundo.

Demonstração: Consoante 2.7 e o fato da aplicação $K \longrightarrow K^{\square}$ ser uma isometria de $C([c,d]\times[a,b];X)$ sobre $C([c,d];C([a,b];X))$ segue-se que $K^{\square}\in BV_c([c,d]);\ BVC_a([a,b];X))$. De acordo com 2.8 $V_{[c,t]}[K^{\square}] = V_{[c,t]\times[a,b]}[K] = \nu_K(t,b)$ é contínua por 2.10. Então $K^{\square}$ também é contínua (Conf. [ARSI] pg. 25-30). Portanto a associação é bem definida.

Ela é sobrejetora: pois dado

$$K^{\square}\in BVC_c([c,d];BVC_a([a,b];X))$$

temos $V_{[c,t]}[K^{\square}]$ é contínua e dado $t\in[c,d]$, $V_{[a,s]}[K^{\square}(t)]$ é contínua. Logo K^t e K_s são contínuas e como se $t \longrightarrow t_0$, $s \longrightarrow s_0$ $V_{[t_0,t]\times[a,s_0]}[K] \longrightarrow 0$ temos como em 2.10, parte a) $\Longrightarrow$ b) que K é contínua.

2.12. <u>Definição</u>: Sejam $K:[c,d]\times[a,b] \longrightarrow L(X;Y)$ e

$f:[c,d]\times[a,b] \longrightarrow X$. Dada $d = d''\times d' \in \mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$, $d''=\{t_0,\dots,t_{|d''|}\}$, $d' = \{s_0,\dots,s_{|d'|}\}$ e pontos $\eta_j^{\cdot} \in]t_{j-1},t_j[$, $1 \le j \le |d''|$ e $\xi_i^{\cdot} \in]s_{i-1},s_i[$, $1 \le i \le |d'|$ escrevemos $\eta^{\cdot} = (\eta_1^{\cdot},\dots,\eta_{|d''|}^{\cdot})$; $\xi^{\cdot} = (\xi_1^{\cdot},\dots,\xi_{|d'|}^{\cdot})$ e $\sigma_{d,\eta^{\cdot},\xi^{\cdot}} = \sigma_d = \sum\limits_{j,i}^{|d|} K_{ji} f(\eta_j^{\cdot},\xi_i^{\cdot})$. Diremos que *existe a integral de f com respeito à K ou f é K-integrável* se existir

$$\lim_{\mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}} \sigma_{d,\eta^{\cdot},\xi^{\cdot}} = \iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{t,s}K(t,s)f(t,s)$$ para qualquer escolha de $\eta^{\cdot}$, $\xi^{\cdot}$.

2.13. <u>Proposição</u>. Sejam $f \in G([c,d]\times[a,b];X)$ e $K \in BV([c,d]\times[a,b];L(X;Y))$ então

a) Existe $\iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{t,s}K(t,s)f(t,s)$

b) Se $F_K(f) = \iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K(t,s)f(t,s)$ então

$\|F_K(f)\| \le SV[K]\cdot\|f\|$

c) Se $f \in \Omega_0([c,d]\times[a,b];X)$ então $F_K(f) = 0$

d) $F_K(f) = F_K(f_{--})$ e $\|F_K(f)\| \le SV[K]\cdot\|f_{--}\|$

e) Se $d \in \mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$ então $\|F_K(f) - \sigma_{d,\eta^{\cdot},\xi^{\cdot}}\| \le SV[K]\omega_d^{\cdot}(f)$.

Demonstração: a) e e) Vamos provar que vale o Critério de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$ $\exists d_\varepsilon \in \mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$: $\omega_{d_\varepsilon}^{\cdot}(f) < \frac{\varepsilon}{2SV[K]}$; de acordo com 1.5(a). (Se $SV[K] = 0$ tudo é automático). Suponhamos $d \ge d_\varepsilon$ e que haja $t^* \in d''-d_\varepsilon''$; $s^* \in d'-d_\varepsilon'$; com $t^* \in]t_{j-1},t_j[$; $t_{j-1},t_j \in d_\varepsilon''$; $s^* \in]s_{i-1},s_i[$; $s_{i-1},s_i \in d_\varepsilon'$. Considerando a divisão $\{t_{j-1},t^*,t_j\}\times\{s_{i-1},s^*,s_i\}$ de $[t_{j-1},t_j]\times[s_{i-1},s_i]$, temos

$K(t_j,s_i)-K(t_j,s_{i-1}) - K(t_{j-1},s_i) + K(t_{j-1},s_{i-1}) = K_{11}+K_{12}+K_{21}+K_{22}$; logo se $\eta_j^\bullet \in]t_{j-1},t_j[; \xi_i^\bullet \in]s_{i-1},s_i[$, temos $K_{ji}f(\eta_j^\bullet,\xi_i^\bullet) =$

$$K_{11}f(\eta_j^\bullet,\xi_i^\bullet) + K_{12}f(\eta_j^\bullet,\xi_i^\bullet) + K_{21}f(\eta_j^\bullet,\xi_i^\bullet) + K_{22}f(\eta_j^\bullet,\xi_i^\bullet)$$

Deste modo podemos escrever

$$\|\sigma_d - \sigma_{d_\varepsilon}\| = \|\sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}[f(\eta_j^\bullet,\xi_i^\bullet) - f(\tilde{\eta}_j^\bullet,\tilde{\xi}_i^\bullet)]\|,$$

onde $\tilde{\eta}_j^\bullet$, $\tilde{\xi}_i^\bullet$ eram pontos de d_ε que foram desdobrados para d na forma acima explicitada. Enfim $\|\sigma_d - \sigma_{d_\varepsilon}\| \le SV[K]\frac{\varepsilon}{2SV[K]} = \frac{\varepsilon}{2}$. Daí se $\bar{d}, d \ge d_\varepsilon$ temos $\|\sigma_{\bar{d}} - \sigma_d\| < \varepsilon$.

Note-se que ficou provado também que se $\bar{d} \ge d$ temos $\|\sigma_{\bar{d}} - \sigma_d\| < SV[K]\omega_d^\bullet(f)$; levando $\bar{d}$ ao limite obtemos e).

b) Quando $f = 0$ o resultado é imediato. Senão dado $\varepsilon > 0$ $\exists d_\varepsilon \in \mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$ tal que $\|F_K(f) - \sigma_{d_\varepsilon}\| < \varepsilon$ ou seja

$$\|F_K(f)\| \le \|\sigma_d\| + \varepsilon = \|\sigma_{d\cdot\frac{1}{\|f\|}}\| \;\|f\| + \varepsilon \le SV[K]\|f\| + \varepsilon$$

c) Se $f \in \Omega_0([c,d]\times[a,b];X)$, dado $\frac{\varepsilon}{SV[K]}$ existe $d \in \mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$ tal que $\left\{p \in [c,d]\times[a,b] : \|f(p)\| \ge \frac{\varepsilon}{SV[K]}\right\}$ está contido nas retas definidas por d_ε. Logo

$$\|F_K(f)\| \le \frac{\varepsilon}{SV[K]} SV[K] = \varepsilon.$$

d) É imediato por 1.10 e 1.11.

2.14. Convém observar que dada $K \in SV([c,d]\times[a,b];L(X;Y))$ a função $\tilde{K} \in SV_{c,a}([c,d]\times[a,b];L(X;Y))$ onde $\tilde{K}(t,s) = K(t,s) - K(t,a) - K(c,s) + K(c,a)$ é tal que $\forall d \in \mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$ temos $K_{ji} = \tilde{K}_{ji}$. Por isto $SV[K] = SV[\tilde{K}]$ e dada $f \in G([c,d]\times[a,b];X)$

temos:

$$\iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K(t,s)f(t,s) = \iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}\tilde{K}(t,s)f_{--}(t,s).$$

A função $\tilde{K}$ chama-se normalizada de K.

2.15. <u>Teorema</u>: A aplicação

$$K\in SV_{c,a}([c,d]\times[a,b];L(X;Y)) \longrightarrow F_K\in L(G_{--}([c,d]\times[a,b];X);Y)$$

onde $F_K(f) = \iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K(t,s)f(t,s)$ é uma isometria do primeiro espaço de Banach sobre o segundo.

Demonstração: Por 2.13 b) $F_K\in L(G_{--}([c,d]\times[a,b];X);Y)$ e $\|F_K\| \leq SV[K]$. A aplicação é linear e injetora. Dado $K\in SV_{c,a}([c,d]\times[a,b];L(X;Y))$; $K \neq 0$, existem $(\tau,\sigma)\in]c,d]\times]a,b]$ $x\in X$ e $K(\tau,\sigma)\, x \neq 0$. Porém se $f = \chi_{]c,\tau]\times]a,\sigma]}x$ temos $F_K(f) = K(\tau,\sigma)\, x \neq 0$.

Ela é sobrejetora. Dado $f\in L(G_{--}([c,d]\times[a,b];X);Y)$ definimos $K:[c,d]\times[a,b] \longrightarrow L(X;Y)$, $K(t,s) = F(\chi_{]c,t]\times]a,s]}x)$ $K(t,s)\in L(X;Y)$ e dada

$$d\in \mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}, \left\|\sum_{j=1}^{|d|} K_{ji}x_{ji}\right\| = \left\|\sum_{j,i}^{|d|} F(\chi_{]t_{j-1},t_j]\times]s_{i-1},s_i]}x_{ji})\right\| =$$

$$= \left\|F\left(\sum_{j,i}^{|d|} \chi_{]t_{j-1},t_j]\times]s_i-s_{i-1}]}x_{ji}\right)\right\| \leq \|F\|.$$

Daí $SV[K] \leq \|F\|$ e como F e F_K coincidem nos elementos da forma $\chi_{]c,t]\times]a,s]}x$ segue-se que $F = F_K$ por 1.12 e 1.13.

Um colário imediato de 2.15 é que

$SV_{c,a}([c,d]\times[a,b];L(X;Y))$ é um espaço de Banach.

2.16. Teorema (Helly): Sejam $K_n \in SV([c,d]\times[a,b];L(X;Y))$ e suponhamos que exista $K:[c,d]\times[a,b] \longrightarrow L(X;Y)$ tal que $\forall x \in X$, $\forall (t,s) \in [c,d]\times[a,b]$, $K_n(t,s)x \longrightarrow K(t,s)x$ e que $\exists M > 0$ tal que $SV[K_n] \leq M$. Então:

a) $K \in SV([c,d]\times[a,b];L(X;Y))$ e $SV[K] \leq M$.

b) $\forall f \in G([c,d]\times[a,b];X)$ $\displaystyle\iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K_n(t,s)\, f(t,s) \longrightarrow$

$$\longrightarrow \iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K(t,s)f(t,s).$$

Demonstração: a) Seja $d \in \mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$ e $x_{ji} \in X$ com $\|x_{ji}\| \leq 1$ e $\varepsilon > 0$.

$$\Big\|\sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}x_{ji}\Big\| = \Big\|\sum_{j,i}^{|d|}[K_{ji} - K_{ji}^{(n)} + K_{ji}^{(n)}]x_{ji}\Big\| \leq \Big\|\sum_{j,i}^{|d|}[K_{ji} - K_{ji}^{(n)}]x_{ji}\Big\| +$$

$+ \Big\|\sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}^{(n)}x_{ji}\Big\| < \varepsilon + M$; para $n \geq n_0$ com n_0 conveniente. Logo $K \in SV([c,d]\times[a,b];L(X;Y))$ e $SV[K] \leq M$.

b) Dada $f \in G([c,d]\times[a,b];X)$ existirá conforme 2.13 a), a integral $\displaystyle\iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{t,s}K(t,s)f(t,s)$. Daí

$$\left\| \iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K(t,s)f(t,s) - \iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K_n(t,s)f(t,s) \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K(t,s)f(t,s) - \sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}f(\eta_j^\bullet,\xi_i^\bullet) \right\| + \left\| \sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}f(\eta_j^\bullet,\xi_i^\bullet) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}^{(n)}f(\eta_j^\bullet,\xi_i^\bullet) \right\| + \left\| \iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K_n(t,s)f(t,s) - \sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}^{(n)}f(\eta_j^\bullet,\xi_i^\bullet) \right\| \leq$$

$$\leq 2M\omega_d^\bullet(f) + \left\| \sum_{j,i}^{|d|} [K_{ji} - K_{ji}^{(n)}]f(\eta_j^\bullet,\xi_i^\bullet) \right\| \text{ conforme 2.13 e).}$$

Tomando $d\in\mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$ de sorte que $\omega_d^\bullet(f) < \frac{\varepsilon}{2M}$ de acordo com 1.5 a) e, para esta d, $n\in\mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{j,i}^{|d|} [K_{ji} - K_{ji}^{(n)}]f(\eta_j^\bullet,\xi_i^\bullet) \right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

decorre a tese.

2.17. <u>Definição</u>: Sejam $K:[c,d]\times[a,b] \longrightarrow L(Y;Z)$ e $L:[c,d]\times[a,b] \longrightarrow L(X;Y)$. Dados pontos $(t,s);(v,u)\in[c,d]\times[a,b]$ temos $K(t,s)\circ L(v,u)\in L(X;Y)$; logo, dada $d\in\mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$, $\sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}\circ L(\eta_j^\bullet,\xi_i^\bullet)\in L(X;Z)$, quando existir o limite

$$\lim_{\mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}} \sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}\circ L(\eta_j^\bullet,\xi_i^\bullet) = \iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K(t,s)\circ L(t,s)$$

diremos que L é K *integrável*.

É válido para a definição acima que se

$L\in G([c,d]\times[a,b];L(X;Y))$ e $K\in SV([c,d]\times[a,b];L(Y;Z))$

então L é K integrável. A demonstração é análoga à de 2.13 a).

2.18. <u>Teorema</u> (Bray). Sejam $J = [c,d]\times[a,b]$; $I = [\alpha,\beta]$ $K\in SV([c,d]\times[a,b];L(Y;Z))$, $h:J\times I \longrightarrow L(X;Y)$ tal que $\forall u\in I$ $h_u\in G([c,d]\times[a,b];L(X;Y))$ e $\forall (t,s)\in J$, $h^{(t,s)}\in SV([\alpha,\beta];L(X;Y))$ e $\sup_{(t,s)\in J}\left\{SV[h^{(t,s)}]\right\} < \infty$ e $g\in G([\alpha,\beta];X)$. Então:

a) $$\int_\alpha^\beta \circ d_u\left[\iint_{[c,d]\times[a,b]} \circ d_{ts}K(t,s)\circ h(t,s,u)\right]g(u) =$$

$$= \iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K(t,s)\left[\int_\alpha^\beta \cdot d_u h(t,s,u)g(u)\right]$$

b) $$\left\|\iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K(t,s)\left[\int_\alpha^\beta \cdot d_u h(t,s,u)\cdot g(u)\right]\right\| \le$$

$$\le SV[K] \sup_{(t,s)\in[c,d]\times[a,b]}\{SV[h^{(t,s)}]\}\|g\|$$

A demonstração será precedida por dois lemas.

2.19. <u>Lema</u>: A função $\phi:[\alpha,\beta] \longrightarrow L(X;Y)$;

$$\phi(u) = \iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K(t,s)\circ h(t,s,u)$$

é de semi-variação limitada e

$$SV[\phi] \le SV[K] \sup_{(t,s)\in[c,d]\times[a,b]} \{SV[h^{(t,s)}]\}$$

Demonstração: Consoante 2.17 é bem definida a função ϕ. Notemos também, que, dado $x\in X$

$$\left[\iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K(t,s)\circ h(t,s,u)\right]x = \iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K(t,s)[h(t,s,u)x].$$

Para demonstrar esta afirmação observe que a função $(t,s)\in[c,d]\times[a,b] \longrightarrow h(t,s,u)x$ é regrada e o resto segue das definições. Portanto dado $\tilde{d}\in\mathbb{D}_{[\alpha,\beta]}$ temos:

$$\left\|\sum_{k=1}^{|\tilde{d}|}(\phi(u_k)-\phi(u_{k-1}))x_k\right\| =$$

$$= \left\|\sum_{k=1}^{|\tilde{d}|}\iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K(t,s)([h(t,s,u_k)-h(t,s,u_{k-1})]x_k)\right\| =$$

$$= \left\|\iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K(t,s)\left(\sum_{k=1}^{|\tilde{d}|}[h(t,s,u_{k-1})]x_k\right)\right\| \leq$$

$$\leq SV[K] \sup_{(t,s)\in[c,d]\times[a,b]} \{SV[h^{(t,s)}]\}.$$

2.20. <u>Lema</u>. A função $\psi:[c,d]\times[a,b] \longrightarrow Y$

$$\psi(t,s) = \int_\alpha^\beta \cdot d_u h(t,s,u)g(u) \text{ é regrada.}$$

Demonstração: A função ψ é bem definida; conferir [VSIE] Theorem 4.12 pg. 26. Tomemos $(t,s)\in[c,d]\times[a,b]$ e, por exemplo, $t_n\uparrow t$ e $s_n\uparrow s$; $(t_n,s_n)\in[c,d]\times[a,b]$.

Como $h_u\in G([c,d]\times[a,b];L(X;Y))$ temos $h(t_n,s_n,u) \longrightarrow h(t-,s-,u)$ e dado $x\in X$ $h(t_n,s_n,u)x \longrightarrow h(t-,s-,u)x$ pelo Teorema de Helly para uma variável conf [VSIE] Theorem 5.6, pg.46 temos:

$$\int_\alpha^\beta \cdot d_u h(t_n,s_n,u)g(u) \longrightarrow \int_\alpha^\beta \cdot d_u h(t-,s-,u)g(u),$$

i.é. $\psi(t_n,s_n) \longrightarrow \int_\alpha^\beta \cdot d_u h(t-,s-,u)g(u)$.

Demonstração do Teorema de Bray: Devemos, de acordo com as notações de 2.19 e 2.20, provar que

$$\int_\alpha^\beta \cdot d_u\phi(u)g(u) = \iint_{[c,d]\times[a,b]} d_{t_0}K(t,s)\psi(t,s)$$

Consideremos então $S,T:G([\alpha,\beta];X) \longrightarrow Z$ definidos por:

$$S(g) = \int_\alpha^\beta \cdot d_u\phi(u)g(u) = \int_\alpha^\beta \cdot d_u\left[\iint_J \cdot d_{ts}K(t,s)\circ h(t,s,u)\right]g(u) \text{ e}$$

$$T(g) = \iint_J \cdot d_{ts}K(t,s)\psi(t,s) = \iint_J \cdot d_{ts}K(t,s)\left[\int_I \cdot d_u h(t,s,u)g(u)\right]$$

$S,T\in L(G_-([\alpha,\beta];X);Z)$, de fato:

$\|S(g)\| \leq SV[K] \sup_{(t,s)\in J} \{SV[h^{(t,s)}]\}\cdot\|g\|$ e $\|T(g)\| \leq$

$\leq SV[K] \sup_{(t,s)\in J} \{SV[h^{(t,s)}]\}\cdot\|g\|$, e se $g = \chi_{]\alpha,\theta]}x$; $x\in X$, temos

$S(g) = \phi(\theta)x = \left[\iint_J \cdot d_{ts}K(t,s)\circ h(t,s,\theta)\right]x$, i.e. $S(g) =$

$= \iint_J \cdot d_{ts}K(t,s)[h(t,s,\theta)x]$ e $T(g) = \iint_J \cdot d_{ts}K(t,s)[h(t,s,\theta)x]$

donde $S = T$ em $G_-([\alpha,\beta];X)$ e portanto em $G([\alpha,\beta];X)$, (conf. [VSIE] pg 26 Theorem 4.12).

2.21. Esta versão do Teorema de Bray, com o teorema de representação de $L(G_-([\alpha,\beta];X);Z)$ diz que se $S:G_-([\alpha,\beta];X) \longrightarrow Z$

é o operador

$$S(g) = \iint_J \cdot d_{ts}K(t,s)\left[\int_\alpha^\beta \cdot d_u h(t,s,u)\, g(u)\right] \text{ então } S(g) = \int_\alpha^\beta \cdot d_u \phi(u)\, g(u)$$

onde $\phi(u) = \iint_J \cdot d_{ts}K(t,s) \circ h(t,s,u)$

2.22. Outra versão do Teorema de Bray, usando os resultados deste trabalho é a seguinte: Sejam $J = [c,d]\times[a,b]$, $R = [\gamma,\delta]\times[\alpha,\beta]$, $K \in SV([c,d]\times[a,b];L(Y;Z))$; $L: J\times R \longrightarrow L(X;Y)$ tal que $\forall (v,u) \in R$ temos $L_{(v,u)} G([c,d]\times[a,b];L(X;Y))$ e $\forall (t,s) \in J$ temos $L^{(t,s)} \in SV([\gamma,\delta]\times[\alpha,\beta];L(X;Y))$ de modo que $\sup\limits_{(t,s)\in J} \{SV[L^{(t,s)}]\} < \infty$ e $g \in G([\gamma,\delta]\times[\alpha,\beta];X)$. Então:

a) $$\iint_R \cdot d_{vu}\left[\iint_J \cdot d_{ts}K(t,s) \circ L(t,s,v,u)\right] g(v,u) =$$

$$= \iint_J \cdot d_{ts}K(t,s)\left[\iint_R \cdot d_{vu}L(t,s,v,u)\, g(v,u)\right]$$

b) $$\left\| \iint_R \cdot d_{vu}\left[\iint_J \cdot d_{ts}K(t,s) \circ L(t,s,v,w)\right] g(v,u) \right\| \leq$$

$$\leq SV[K] \sup_{(t,s)\in J} \{SV[L^{(t,s)}]\} \|g\| .$$

A demonstração imita em todos os pontos a anterior, substituindo-se os resultados de uma variável pelos de duas. À luz de 2.15 se $S: G_{--}([\delta,\gamma]\times[\alpha,\beta];X) \longrightarrow Z$;

$$S(g) = \iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K(t,s)\left[\iint_{[\delta,\gamma]\times[\alpha,\beta]} \cdot d_{vu}L(t,s,v,u)g(v,u)\right]$$

existe uma única função $M:[\delta,\gamma]\times[\alpha,\beta] \longrightarrow L(Z;X)$ tal que

$S(g) = \iint_{[\delta,\gamma]\times[\alpha,\beta]} \cdot d_{vu}M(v,u)g(v,u)$; esta versão do teorema de Bray afirma que $M(v,u) = \iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K(t,s)\circ L(t,s,v,u)$.

B. Funções de Semi-Variação Limitada no sentido de Frechet

2.2.3. Definição. Seja $K:[c,d]\times[a,b] \longrightarrow B(Y\times X;Z)$ e $d = d''\times d' \in \mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$ definimos:

$$SF_d[K] = \sup\left\{\left\| \sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}(y_j, x_i)\right\| : x_j \in X,\ y_i \in Y; \|x_i\| \le 1 \text{ e } \|y_j\| \le 1\right\}$$

$$SF[K] = \sup\{SF_d[K]: d \in \mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}\}.$$

Chamamos $SF[K]$ de *semi-variação de Frechet de* K e denotaremos por $SF([c,d]\times[a,b];B(Y\times X;Z))$ o conjunto das funções de $[c,d]\times[a,b]$ em $B(Y\times X;Z)$ que tem semi-variação de Frechet finita $SF([c,d]\times[a,b];B(Y\times X;Z))$ é um espaço vetorial e nele a aplicação $K \in SF([c,d]\times[a,b];B(Y\times X;Z)) \longrightarrow SF[K] \in \mathbb{R}_+$ é uma semi-norma.

O conjunto $SF_{c,a}([c,d]\times[a,b];B(Y\times X;Z) =$ $= \{K \in SF([c,d]\times[a,b];B(Y\times X;Z)):K(t,a) = K(c,s) = 0\}$ é um espaço vetorial onde SF é uma norma.

Quando $X = Y = Z = \mathbb{C}$ escrevemos $SF([c,d]\times[a,b])$ e $SF_{c,a}([c,d]\times[a,b])$, no lugar de $SF([c,d]\times[a,b];B(\mathbb{C}\times\mathbb{C};\mathbb{C}))$ e $SF_{c,a}([c,d]\times[a,b];B(\mathbb{C}\times\mathbb{C};\mathbb{C}))$, respectivamente.

Quando $K \in SF([c,d]\times[a,b])$, temos dada $d \in \mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$, que existem $\beta_j, \alpha_i \in \mathbb{C}$ tais que $SF_d[K] = \sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}\beta_j\alpha_i$

Basta observar que $\left|\sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}z_j z_i\right| \leq \sum_{j=1}^{|d''|}\left|\sum_{i=1}^{|d'|} K_{ji}z_i\right|$, mas $\sum_{i=1}^{|d'|} K_{ji}z_i = \left|\sum_{i=1}^{|d'|} K_{ji}z_i\right| e^{i\theta(j)}$; coloquemos então $\beta_j = e^{-i\theta(j)}$. Temos:

$\left|\sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}\alpha_j z_i\right| = \left|\sum_{j=1}^{|d''|}\left|\sum_{i=1}^{|d'|} K_{ji}z_i\right|\right| = \sum_{j=1}^{|d''|}\sum_{i=1}^{|d'|}|K_{ji}z_i|$. Contudo $\left|\sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}\beta_j z_i\right| \leq$

$\leq \sum_{i=1}^{|d'|}\left|\sum_{j=1}^{|d''|} K_{ji}\beta_j\right|$ e $\sum_{j=1}^{|d''|} K_{ji}\beta_j = \left|\sum_{j=1}^{|d''|} K_{ji}\beta_j\right| e^{i\theta(i)}$; seja $\alpha_i = e^{-i\theta(i)}$,

temos finalmente $\left|\sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}z_j z_i\right| \leq \sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}\beta_j\alpha_i$.

Definimos ainda $SF_*([c,d]\times[a,b])$ como sendo o sub-espaço de $SF([c,d]\times[a,b])$ formados pelas funções K para as quais existem $t_0 \in [c,d]$, $s_0 \in [a,b]$ onde K^{t_0} e K_{s_0} são de variação limitada.

2.24. A aplicação $B \in B(Y\times X;Z) \longrightarrow B^{(1)} \in L(Y;L(X;Z))$ onde $B^{(1)}(y)(x) = B(y,x)$ é uma isometria do primeiro espaço de Banach sobre o segundo, bem como a aplicação $B \in B(Y\times X;Z) \longrightarrow$ $\longrightarrow B^{(2)} \in L(X;L(Y;Z))$ onde $B^{(2)}(x)(y) = B(y,x)$.

2.25. Proposição.: Se $K \in SF_{c,a}([c,d]\times[a,b];B(Y\times X;Z))$ então, dados $t\in[c,d]$, $s\in[a,b]$, temos

$$K_s^{(1)} \in SV_c([c,d];L(Y;L(X;Z)) \quad \text{e} \quad K^{t(2)} \in SV_a([a,b];L(X;L(Y;Z))$$

Demonstração: Seja $s\in[a,b]$ e $d''\in \mathbb{D}_{[c,d]}$ e $y_j \in Y$, $\|y_j\| \le 1$.

$$\Big\|\sum_{j=1}^{|d''|}[K_s(t_j)^{(1)}-K_s(t_{j-1})^{(2)}]y_j\Big\| = \sup_{\|x\|\le 1}\Big\|\sum_{j=1}^{|d''|}[K(t,s_j)-K(t,s_{j-1})](y_j,x)\Big\| \le SF[K]$$

Daí $SV[K_s^{(1)}] \le SF[K]$. Analogamente $SV[K^{t(2)}] \le SF[K]$.

2.26. Definição: Sejam $g:[c,d] \longrightarrow Y$; $f:[a,b] \longrightarrow X$ e $K:[c,d]\times[a,b] \longrightarrow B(Y\times X;Z)$. Diremos que *o par* $(g;f)$ *é K-integrável* se existir o limite

$$\lim_{\mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}} \sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}(g(\eta_j^{\cdot}),f(\xi_i^{\cdot})) = \iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K(t,s)(g(t);f(s))$$

onde $\eta_j^{\cdot}\in]t_{j-1},t_j[$, $\xi_i^{\cdot}\in]s_{i-1},s_i[$.

2.27. Proposição: Sejam $K\in SF([c,d]\times[a,b];B(Y\times X;Z))$, $g\in G([c,d];Y)$, $f\in G([a,b];X)$. Então:

a) Existe $B_K(g,f) = \displaystyle\iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K(t,s)(g(t);f(s))$

b) $\|B_K(g,f)\| \le SF[K]\|g\|\|f\|$

c) Se $g\in C_0([c,d];Y)$ ou $f\in C_0([a,b];X)$ então $B_K(g,f) = 0$.

d) Dada $d = d''\times d'\in \mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$ temos

$$\left\| \iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K(t,s)(g(t),f(s)) = \sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}(g(\eta_j^{\cdot});f(\xi_i^{\cdot}))\right\| \leq$$

$$\leq SF[K](\|g\|\omega^{\cdot}_{d''}(f) + \|f\|\omega^{\cdot}_{d'}(g)).$$

Demonstração: a) Suporemos $g \neq 0$; $f \neq 0$ e $K \neq 0$; senão tudo é verificado. Vamos mostrar que se cumpre o Critério de Cauchy. Seja $\varepsilon > 0$ e tomemos $d''_\varepsilon \in \mathbb{D}_{[c,d]}$ e $d'_\varepsilon \in \mathbb{D}_{[a,b]}$ tais que

$\omega^{\cdot}_{d''_\varepsilon}(g) < \dfrac{\varepsilon}{2SF[K]\|f\|}$ e $\omega^{\cdot}_{d'_\varepsilon}(f) < \dfrac{\varepsilon}{2SF[K]\|g\|}$. Se $d \geq d_\varepsilon = d''_\varepsilon \times d'_\varepsilon$ temos:

$$\left\|\sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}(g(\eta_j^{\cdot}),f(\xi_j^{\cdot})) - \sum_{n,m}^{|d_\varepsilon|} K_{nm}(g(\eta_n^{\cdot}),f(\xi_m^{\cdot}))\right\| =$$

$$= \left\|\sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}(g(\eta_j^{\cdot})-g(\eta^{\cdot}_{n(j)}),f(\xi_i^{\cdot})) + \sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}(g(\eta_j^{\cdot}),f(\xi_i^{\cdot})-f(\xi^{\cdot}_{m(i)}))\right\| \leq$$

$$\leq \left\|\sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}\left([g(\eta_j^{\cdot})-g(\eta^{\cdot}_{n(j)})]\,\frac{2\|f\|SF[K]}{\varepsilon},\ \frac{f(\xi_i^{\cdot})}{\|f\|}\right)\right\| \frac{\varepsilon}{2SF[K]} +$$

$$+ \left\|\sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}\left(\frac{g(\eta_j^{\cdot})}{\|g\|},[f(\xi_i^{\cdot})-f(\xi^{\cdot}_{n(i)})]\,\frac{2\|g\|SF[K]}{\varepsilon}\right)\right\|\frac{\varepsilon}{2SF[K]} < \varepsilon.$$

onde $\eta^{\cdot}_{m(j)}$ e $\xi^{\cdot}_{n(i)}$ são como na demonstração de 2.13 a).

Da igualdade acima tomando-se o limite vem a parte d).

b) Dado $d \in \mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$, $\left\|\sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}(g(\eta_j^{\cdot}),f(\xi_i^{\cdot}))\right\| =$

$= \left\|\sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}\left(\dfrac{g(\eta_j^{\cdot})}{\|g\|},\dfrac{f(\xi_i^{\cdot})}{\|f\|}\right)\right\| \|g\|\,\|f\| \leq SF[K]\|g\|\,\|f\|$, logo

$\|B_K(g,f)\| \leq SF[K]\,\|g\|\,\|f\|$.

c) Suponhamos que $g \in C_0([c,d];Y)$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $d''_\varepsilon \in \mathbb{D}_{[c,d]}$ tal que $\left\{t \in [c,d] : \|g(t)\| \geq \frac{\varepsilon}{SF[K]\|f\|}\right\} \subset d''_\varepsilon$. Logo se $d'' \geq d''_\varepsilon$ e $d = d'' \times d'$ onde $d' \in \mathbb{D}_{[a,b]}$ é qualquer vem:

$$\left\|\sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}(g(\eta_j^{\cdot}), f(\xi_i^{\cdot}))\right\| = \left\|\sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}\left(g(\eta_j^{\cdot}) \frac{SF[K]}{\varepsilon}\|f\|;\ \frac{f(\xi_i^{\cdot})}{\|f\|}\right)\right\| \frac{\varepsilon}{SF[K]} \leq$$

$$\leq SF[K]\frac{\varepsilon}{SF[K]} = \varepsilon \text{ e por isto } B_K(g,f) = 0.$$

Os resultados sobre funções regradas de uma variável que aqui usamos, bem como os que usaremos até o fim deste capítulo estão em [VSIE] pg. 16-20.

2.27. Lembremos que em $G_-([\alpha,\beta];Z)$ os elementos da forma $\chi_{]\alpha,t]}z$ $t \in [\alpha,\beta]$; $z \in Z$ formam um subconjunto total deste espaço. Notemos ainda que dada $K \in SF([c,d]\times[a,b];B(Y\times X;Z))$ e $g = \chi_{]c,\tau]}y$ $f = \chi_{]a,\sigma]}x$, temos $B_K(g,f) = K(\tau,\sigma)(y,x)$.

2.28. <u>Teorema</u>: A aplicação $K \in SF_{c,a}([c,d]\times[a,b];B(Y\times X;Z)) \longrightarrow$ $\longrightarrow B_K \in B(G_-([c,d];Y)\times G_-([a,b];X);Z)$ onde

$$B_K(g,f) = \iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K(t,s)(g(t),f(s))$$ é uma isometria do primeiro espaço de Banach sobre o segundo.

Demonstração: A associação é bem definida; $\|B_K\| \leq SF[K]$ conforme 2.26 b); linear e injetora, pois se $K \neq 0$ existem $\tau \in]c,d[$, $\sigma \in]a,b[$, $y \in Y$, $x \in X$ com $0 \neq K(\tau,\sigma)(y,x) = B_K(\chi_{]c,\tau]}y, \chi_{]a,\sigma]}x)$ conforme 2.27. Dado

$B \in B(G_-([c,d];Y) \times G_-([a,b];X);Z)$ definimos $K:[c,d]\times[a,b] \longrightarrow$ $\longrightarrow B(Y\times X;Z)$ por $K(t,s)(y,x) = B_K(\chi_{]c,t]}y;\chi_{]a,s]}x)$. É claro que $K(t,s) \in B(Y\times X;Z)$ $\forall t$ $\forall s$. Dada $d''\times d' \in \mathbb{D}_{[c,d]\times[a,b]}$ e $y_j \in Y$, $x_i \in X$, $\|y_j\| \le 1$, $\|x_i\| \le 1$, temos

$$\Big\|\sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}(y_j,x_i)\Big\| = \Big\|\sum_{j,i}^{|d|} B(\chi_{]t_{j-1},t_j]}y_j;\chi_{]s_{i-1},s_i]}x_i)\Big\| =$$

$$=\Big\|B\Big(\sum_{j=1}^{|d''|}\chi_{]t_{j-1},t_j]}y_j;\sum_{i=1}^{|d'|}\chi_{]s_{i-1},s_i]}x_i\Big)\Big\| \le \|B\|.$$

Logo $K \in SF_{c,a}([c,d]\times[a,b];B(Y\times X;Z))$ e $SF[K] \le \|B\|$. Como B_K e B coincidem nos elementos da forma $\chi_{]c,\tau]}y$ e $\chi_{]a,\sigma]}x$, por 2.27, elas coincidem em $G_-([c,d];Y)\times G_-([a,b];X)$.

2.29. Teorema: Sejam $g \in G([c,d];Y)$; $f \in G([a,b];X)$ $K \in SF([c,d]\times[a,b];B(Y\times X;Z))$, então

$$\iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K(t,s)(g(t),f(s)) = \int_a^b \cdot d_s\Big[\int_c^d \cdot\, d_tK(t,s)^{(1)}g(t)\Big]f(s) =$$

$$= \int_c^d \cdot d_t\Big[\int_a^b \cdot\, d_sK(t,s)^{(2)}f(s)\Big]\, g(t).$$

Demonstração: Como foi estabelecido em 2.25 é bem definida a função $\phi:[a,b] \longrightarrow L(X;Z)$,

$$\phi(s) = \int_c^d \cdot d_tK(t,s)^{(1)}g(t).$$ Dada $d' \in \mathbb{D}_{[a,b]}$ temos

$$\Big\|\sum_{i=1}^{|d'|}[\phi(s_i)-\phi(s_{i-1})]x_i\Big\| = \Big\|\sum_{i=1}^{|d'|}\Big[\int_c^d \cdot d_t[K(t,s_i)^{(1)}-K(t,s_{i-1})^{(1)}]g(t)\Big]x_i\Big\| \le$$

$$\leq \left\| \sum_{i=1}^{|d'|} \left[\int_c^d \cdot d_t [K(t,s_i)^{(1)} - K(t,s_{i-1})^{(1)}] g(t) \right] x_i - \sum_{i=1}^{|d'|} \left[\sum_{j=1}^{|d''|} K_{ji}{}^{(1)} g(\eta_j^{\cdot}) \right] x_i \right\| +$$

$+ \left\| \sum_{j,i}^{|d|} K_{ji}(g(\eta_j^{\cdot}), x_i) \right\|$. É possível tomar $d'' \in \mathbb{D}_{[c,d]}$ tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^{|d''|} K_{ji}{}^{(1)} g(\eta_j^{\cdot}) - \int_c^d \cdot d_t [K(t,s_i)^{(1)} - K(t,s_{i-1})^{(1)}] g(t) \right\| < \frac{\varepsilon}{|d'|}$$

em consequência temos $\left\| \sum_{i=1}^{|d'|} [\phi(s_i) - \phi(s_{i-1})] x_i \right\| \leq \varepsilon + SF[K] \|g\|$

i.e. $SV[\phi] \leq SF[K] \|g\|$.

Assim é também bem definida a integral

$$\int_a^b \cdot d_s \phi(s) f(s) = \int_a^b \cdot d_s \left[\int_c^d \cdot d_t K(t,s)^{(1)} g(t) \right] f(s).$$

Os operadores $S, T : G_-([c,d];Y) \times G_-([a,b];X) \longrightarrow Z$;

$$S(g,f) = \iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts} K(t,s)(g(t), f(s)),$$

$T(g,f) = \int_a^b \cdot d_s \left[\int_c^d \cdot d_t K(t,s)^{(1)} g(t) \right] f(s)$ são bilineares e contínuas e se $g = \chi_{]c,\tau]} y$ e $f = \chi_{]a,\sigma]} x$ temos $S(g,f) = K(\tau,\sigma)(y,x)$ e

$$T(g,f) = \int_a^b \cdot d_s \left[\int_c^d \cdot d_t K(t,s) g(t) \right] f(s) = \int_c^b \cdot d_s [K(\tau,s)^{(1)} y] \chi_{]a,\sigma]} x =$$

$= K(\tau,\sigma)^{(1)}(y)(s) = K(\tau,\sigma)(y,x)$. Então $S = T$ e por 2.26 c)

$$\iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts} K(t,s)(g(t), f(s)) = \int_a^b \cdot d_s \left[\int_c^d \cdot d_t K(t,s)^{(1)} g(t) \right] f(s),$$

$\forall g \in G([c,d];Y)$; $\forall f \in G([a,b];X)$. Analogamente para a outra igualdade.

CAPÍTULO 3

APLICAÇÕES

Faremos algumas aplicações dos resultados obtidos nos capítulos anteriores. Lançaremos mão, também, de alguns resultados que não se encontram aqui, são eles.

3.1. A aplicação $\alpha \in SV_a([a,b];L(X,Y)) \longrightarrow F_\alpha \in L(G_-([a,b];X);Y)$ onde $F_\alpha(f) = \int_a^b \cdot d\alpha(t)f(t)$ é uma isometria do primeiro espaço de Banach sobre o segundo.

Escrevemos $SV_a([a,b];L(X;Y)) \cong L(G_-([a,b];X);Y)$. Quando $Y = \mathbb{C}$ escrevemos $BV_a([a,b];X')$; quando $X = \mathbb{C}$ escrevemos $BW_a([a,b];Y)$. Ver [VSIE] pg. 22, 38, 39; também olhar em [ARSI] pg. 13, 14, 25, 35, 43.

3.2. Seja X um espaço normado e Y um espaço de Banach reflexivo ou, mais geralmente, um espaço de Banach fracamente sequencialmente completo. Se $\alpha \in SV([a,b];L(X;Y))$ então $\forall t \in [a,b[$ $(t \in]a,b])$ temos $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} SV_{]t,t+\varepsilon]}[\alpha] = 0$ $(\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} SV_{[t-\varepsilon,t[}[\alpha] = 0)$

O resultado 3.2 é o principal de [SVC]. Do mesmo local, outro resultado que nos é importante é:

3.3. Sob as hipóteses de 3.2, toda função $\alpha \in SV([a,b];L(X;Y))$ é regrada.

3.4. O espaço $BV_a([a,b])$ é fracamente sequencialmente completo.

O resultado 3.4 acha-se em [LO] pg. 337 §12 cap. 4 Theorem 1.

3.5 Dado um espaço de Banach X, temos $BV([a,b];X) = BW([a,b];X)$ se e somente se X é de dimensão finita.

A) Aplicações das Isometrias

3.6. Teorema: São isométricos os seguintes espaços de Banach pelas isometrias canônicas definidas anteriormente.

a) $SF_{c,a}([c,d]\times[a,b];B(Y\times X;Z)) \cong SV_c([c,d];L(Y;SV_a([a,b];L(X;Z))))$

b) $SF_{c,a}([c,d]\times[a,b];B(\mathbb{C}\times X;Z)) \cong BW_c([c,d];SV_a([a,b];L(X;Z)))$

c) $SF_{c,a}([c,d]\times[a,b]) \cong BW_c([c,d];BV_a([a,b]))$

d) $SF_{c,a}([c,d]\times[a,b];B(Y\times X;Z)) \cong L(G_-([c,d];Y),SV_a([a,b];L(X;Z)))$

e) $SF_{c,a}([c,d]\times[a,b];B(Y\times X;\mathbb{C})) \cong L(G_-([c,d];Y);BV_a([a,b];X'))$

f) $SF_{c,a}([c,d]\times[a,b];B(Y\times\mathbb{C};Z)) \cong L(G_-([c,d];Y);BW_a([a,b];Z))$

g) $SF_{c,a}([c,d]\times[a,b]) \cong L(G_-([c,d]);BV_a([a,b]))$

Demonstração: a) e d). Por 2.28 temos $SF_{c,a}([c,d]\times[a,b];B(Y\times X;Z)) \cong B(G_-([c,d];Y)\times G_-([a,b];X);Z)$. Porém, por 2.24 $B(G_-([c,d];Y)\times G_-([a,b];X);Z) \cong L(G_-([c,d];Y);L(G_-([a,b];X);Z))$ é de acordo com 3.1, temos enfim que:

$L(G_-([c,d];Y);L(G_-([a,b];X)Z)) \cong L(G_-([c,d];Y);SV_a[a,b];L(X;Z))) \cong$

$\cong SV_c([c,d];L(Y;SV_a([a,b];L(X;Z))))$, provando a) e d).

As demais isometrias são instâncias de a) e d) de acordo com 3.1.

3.7. Teorema. O espaço $BV_{c,a}([c,d]\times[a,b])$ é um subespaço próprio de $SF_{c,a}([c,d]\times[a,b])$.

Demonstração: Por 2.7 temos $BV_{c,a}([c,d]\times[a,b]) \cong BV_c([c,d];BV_a([a,b])$, este último é uma parte própria de $BW_c([c,d];BV_a([a,b]))$, de acordo com 3.5. Por 3.6 c) segue-se a tese.

A demonstração para 3.7 existe na literatura, é muito ad hoc e mais complicada; veja [DBVFTV] em especial na pg. 841.

3.8. Teorema: O espaço $SF_{c,a}([c,d]\times[a,b])$ é um subespaço de $G([c,d]\times[a,b])$.

Demonstração: Usando 3.6 c); 3.3 e 3.4 é imediata a tese.

Novamente a demonstração deste resultado existe na literatura, para o caso real, de modo mais complicado, veja [FBFV].

3.9. Por 3.6 b) temos $SF_{c,a}([c,d]\times[a,b];B(\mathbb{C}\times Y;Z)\cong BW_c([c,d];SV_a([a,b];L(X;Z)))$. Quando $X=\mathbb{C}$ e $Z=G_-([a,b])$ e $\alpha:[a,b]\longrightarrow Z$ é $\alpha(s)=\chi_{]a,s]}$, temos que α *não* regrada. Logo a função

$$K:[c,d]\times[a,b]\longrightarrow B(\mathbb{C}\times\mathbb{C};G_-([a,b]))\cong G_-([a,b])$$

definida por $K(t,s)=(t-c)\alpha(s)$ não poderá ser regrada por 1.4. Contudo $K\in BW_c([c,d];BW_a([a,b];Z))\cong SF_{c,a}([c,d]\times[a,b];B(\mathbb{C}\times\mathbb{C};Z))$ posto que dada $d''\in\mathbb{D}_{[c,d]}$, temos

$$\left\| \sum_{j=1}^{|d''|} [K^{\square}(t_j)-K^{\square}(t_{j-1})]z_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{|d''|} (t_j-t_{j-1})\alpha(s)z_j \right\| =$$

$$= \left\| \alpha(s) \sum_{j=1}^{|d''|} (t_{j-1}-t_j)z_j \right\| = \|\alpha(s)\| \left| \sum_{j=1}^{|d''|} (t_{j-1}-t_j)z_j \right| \le \sum_{j=1}^{|d''|} |t_{j-1}-t_j| = d-c,$$

i.e., $W[K^{\square}] \le d - c$.

B) Séries Duplas de Fourier

3.10. Proposição: Se ϕ_n e ψ_m são sistemas ortogonais (ortonormais) completos de $L_2(X'';\mu'')$ e de $L_2(X';\mu')$ então os produtos $e_{nm} = \phi_n\psi_m$ formam um sistema ortogonal (ortonormal) completo de $L_2(X''\times X';\mu''\otimes\mu')$. Conferir em [EAFTF] pg.440. Teorema 1.

Portanto, dados os sistemas $A = \left\{e^{int}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de $L_2([-\pi,\pi])$ obtemos o sistema $S = \{e^{int}\, e^{ims}\}_{n,m\in\mathbb{Z}}$ de $L_2([-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi])$. Doravante adotaremos a notação: $e_{nm}(t,s) = e^{int}\, e^{ims} = e^{i(nt+ms)}$.

3.11. Definição: Dada $f\in L_2([-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi])$, periódica em $\mathbb{R}^2$, o seu nm *coeficiente de Fourier* é

$C_{nm}[f] = \dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t,s)\,\overline{e_{nm}(t,s)}\,dtds$. A "nm soma" da série de Fourier de f é $S_{nm}[f] = \displaystyle\sum_{\ell=-n}^{n}\sum_{k=-m}^{m} c_{\ell k}[f]e_{\ell k}(t,s)$ e a série de Fourier de f é, caso exista, o limite

$$\lim_{n,m\to\infty} S_{nm}[f](t,s) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{\ell k}[f]e_{\ell k}(t,s) = S[f](t,s).$$

3.12. Proposição: Dada $f\in L_2([-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi])$, periódica em $\mathbb{R}^2$, temos: $S_{nm}[f](t,s) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-v,s-u)D_{n,m}(v,u)\,dvdu$ onde

$D_{n,m}(v,u) = D_n(v)D_m(u) = \dfrac{\operatorname{sen}(n+1/2)v}{2\pi\operatorname{sen} v/2}\cdot\dfrac{\operatorname{sen}(m+1/2)u}{2\pi\operatorname{sen} u/2}$ e

$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_{nm}(v,u)\,dvdu = 1.$

Demonstração: $S_{nm}[f] = \sum_{\ell=-n}^{n}\sum_{k=-m}^{m} c_{\ell k}[f]e_{\ell k}(t,s) =$

$$= \sum_{\ell=-n}^{n}\sum_{k=-m}^{m}\left(\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y,x)\overline{e_{\ell k}(y,x)}\,dydx\right)e_{\ell k}(t,s) =$$

$$= \sum_{\ell=-n}^{n}\sum_{k=-m}^{m}\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y,x)e^{i[\ell(t-y)+k(s-x)]}dydx =$$

$$= \sum_{\ell=-n}^{n}\sum_{k=-m}^{m}\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-v,s-u)e^{i(\ell v+ku)}dvdu =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-v,s-u)\sum_{\ell=-n}^{n}\sum_{k=-m}^{m}\frac{1}{4\pi^2}e^{i\ell v}\,e^{iku}dvdu.$$

Como $D_n(v) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\ell=-n}^{n} e^{i\ell v}$; $D_m(v) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-m}^{m} e^{iku}$ temos

$$D_n(v)\cdot D_n(u) = \frac{1}{4\pi^2}\sum_{\ell=-n}^{n}\sum_{k=-m}^{m} e^{i\ell v}\,e^{iku} = D_{nm}(v,u).$$

Lembrando que $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(v)\,dv = \int_{-\pi}^{\pi} D_m(u)\,du = 1$ temos:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_{nm}(v,u)\,dvdu = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} D_n(v)\,dv\right]D_m(u)\,du = 1.$$

Fazendo uma conveniente mudança de variáveis, podemos escrever a expressão 3.12 sob outra forma, isto é

3.13. Nas condições de 3.12, temos: $S_{nm}[f](t,s) =$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} [f(t+v,s+u)+f(t-v,s+u)+f(t+v,s-u)+f(t-v,s-u)]D_{nm}(v,u)\,dvdu.$$

3.14. Para todos $\alpha,\beta \in [0,\pi]$; $k \in \mathbb{N}^*$, tem-se

$$\left|\int_\alpha^\beta \frac{\operatorname{sen}(k+1/2)\sigma}{\operatorname{sen}\sigma/2}\,d\sigma\right| \leq \pi^2 \quad \text{(Küsterman)}$$

Demonstração: Seja $\sigma = 2u$; $2k+1 = m$, temos

$$\int_\alpha^\beta \frac{\operatorname{sen}(k+1/2)\sigma}{\operatorname{sen}\sigma/2}\,d\sigma = 2\int_{\alpha/2}^{\beta/2} \frac{\operatorname{sen} mu}{\operatorname{sen} u}\,du,$$

daí

$$\left|\int_\alpha^\beta \frac{\operatorname{sen}(k+1/2)\sigma d\sigma}{\operatorname{sen}\sigma/2}\right| \leq 2\int_0^{\pi/m} \frac{\operatorname{sen} mu}{\operatorname{sen} u}\,du \leq \int_0^{\pi/m} \frac{mu}{\operatorname{sen} u}\,du \leq \int_0^{\pi/m} m\pi\,du = \pi^2$$

3.15. Se $K \in SF_{c,a}([c,d]\times[a,b])$, $g \in L_1([c,d])$, $f \in L_1([a,b])$, Então:

$$\left|\int_c^d\int_a^b K(t,s)g(t)f(s)\,dtds\right| \leq SF[K] \sup_{t\in[c,d]}\left|\int_t^d g(\tau)d\tau\right| \sup_{s\in[a,b]}\left|\int_s^b f(\sigma)d\sigma\right|$$

Demonstração: Como K é limitada em $[c,d]\times[a,b]$ a forma bilinear

$$(g,f) \longrightarrow \int_c^d\int_a^b K(t,s)g(t)f(s)\,dtds$$

é contínua em $L_1([c,d])\times L_1([a,b])$. Basta provar a desigualda de acima para quando termos $g \in C([c,d])$ e $f \in C([a,b])$. Neste caso sejam $\phi(t) = \int_t^d g(\tau)d\tau$ e $\psi(s) = \int_s^b f(\tau)d\tau$, temos $\phi'(t) = -g(t)$, $\psi'(s) = -f(s)$. Daí

$$\int_c^d K(t,s)d\phi(t) = -\int_c^d K(t,s)g(t)dt$$

e como

$$\int_c^d K(t,s)d\phi(t) + \int_c^d \phi(t)d_tK(t,s) = K\phi\Big|_c^d = 0$$

temos

$$\int_c^d d_tK(t,s)g(t)dt = \int_c^d\left[\int_t^d g(\tau)d\tau\right]d_tK(t,s) = \int_c^d d_tK(t,s)\int_t^d g(\tau)d\tau.$$

Logo

$$\int_c^d\int_a^b K(t,s)g(t)f(s)dtds = \int_a^b\left[\int_c^d K(t,s)g(t)dt\right]f(s)ds =$$

$$= \int_a^b\left[\int_c^d d_tK(t,s)\int_t^d g(\tau)d\tau\right]f(s)ds.$$

Porém

$$\int_a^b\left[\int_c^d d_tK(t,s)\int_t^d g(\tau)d\tau\right]f(s)ds = -\int_a^b\left[\int_c^d d_tK(t,s)\int_t^d g(\tau)d\tau\right]d_s\psi(s)$$

e como

$$\int_a^b\left[\int_c^d d_tK(t,s)\int_t^d g(\tau)d\tau\right]d_s\psi(s) + \int_a^b d_s\left[\int_c^d d_tK(t,s)\int_t^d g(\tau)d\tau\right]f(\sigma)d\sigma =$$

$$= \left(\int_c^d d_tK(t,s)\int_t^d g(\tau)d\tau\right)\int_s^b f(\sigma)d\sigma\Big|_a^b = 0,$$

vem que

$$\int_c^d\int_a^b K(t,s)g(t)f(s)dtds = \int_a^b d_s\left[\int_c^d d_t K(t,s)\int_t^d g(\tau)d\tau\right]f(\sigma)d\sigma =$$

$$= \iint_{[c,d]\times[a,b]} \cdot d_{ts}K(t,s)\left(\int_t^d g(\tau)d\tau, \int_s^b f(\sigma)d\sigma\right)$$

devido ao resultado 2.29. A tese é então imediata.

3-16. Teorema: Seja $f\in SF_*([-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi])$, $(t_0,s_0)\in[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$ e f periódica em $\mathbb{R}^2$; então $S[f](t_0,s_0) = \frac{1}{4}[f(t_0+,s_0+)+f(t_0+,s_0-)+f(t_0-,s_0+)+f(t_0-,s_0-)] = \frac{1}{4}\alpha$.

Demonstração: Consoante 3.12 e 3.13 temos que

$$S[f](t_0,s_0) = \frac{1}{4}\alpha \iff \lim_{n,m\to\infty}\int_0^\pi\int_0^\pi\Big[f(t_0+v,s_0+u)-f(t_0+,s_0+)+\ldots+$$

$$+ f(t_0-v,s_0-u)-f(t_0-,s_0-)\Big]D_{nm}(v,u)\,dvdu = 0.$$

Mostraremos que

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_0^\pi\int_0^\pi\Big[f(t_0-v,s_0-u)-f(t_0-,s_0-)\Big]D_{nm}(v,u)\,dvdu = 0,$$

apelando para 1.11 os outros limites são demonstrados de forma análoga à daqui, com adaptações convenientes.

Temos $SF_*([-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi])\subset G([-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi])$, portanto por 1.11 $f = f_{--}+r$ e por 1.7 $f = f_{--}$ quase sempre; daí basta provar que

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_0^\pi\int_0^\pi K(v,u)D_{nm}(v,u)\,dvdu = 0$$

onde $K(v,u) = f_{--}(t_0-v, s_0-u) - f(t_0-s_0-)$. Não é difícil ver que se $f \in SF_*([-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi])$ então $f_{--} \in SF_*([-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi])$; portanto $K \in SF([0,\pi]\times[0,\pi])$. Normalizamos K da forma $\tilde{K}(v,u) = K(v,u)-K(v,0)-K(0,u)+K(0,0)$. Então $\tilde{K} \in F_{0,0}([0,\pi]\times[0,\pi])$.

Notemos que $K(0,0) = 0$ e que portanto,

$$\int_0^\pi\int_0^\pi K(v,u)D_{nm}(v,u)\,dvdu = \int_0^\pi\int_0^\pi \tilde{K}(v,u)D_{nm}(v,u)\,dvdu +$$
$$+ \int_0^\pi\int_0^\pi K(v,0)D_{nm}(v,u)\,dvdu + \int_0^\pi\int_0^\pi K(0,u)D_{nm}(v,u)\,dvdu$$

Vamos provar que cada uma das parcelas acima é nula no limite para $n,m \to \infty$. Por exemplo:

$$\int_0^\pi\int_0^\pi K(0,u)D_{nm}(v,u)\,dvdu = \left(\int_0^\pi K(0,u)D_n(u)\,du\right)\int_0^\pi D_m(v)\,dv = \frac{1}{2}\int_0^\pi K(0,u)D_n(u)\,du.$$

Porém, conforme 2.25, $K(0,u) \in BV([0,\pi])$ e $\lim_{u\to 0} K(0,u) = 0$, logo

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^\pi K(0,u)D_m(u)\,du = 0.$$

O mesmo argumento aplica-se para provar que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi\int_0^\pi K(v,0)D_{nm}(v,u)\,dvdu = 0.$$

Para a parcela restante temos:

$$\int_0^\pi\int_0^\pi \tilde{K}(v,u)D_{nm}(v,u)\,dvdu = \int_0^\delta\int_0^\pi \tilde{K}(v,u)D_{nm}(v,u)\,dvdu + \int_0^\pi\int_0^\delta \tilde{K}(v,u)D_{nm}(v,u)\,dvdu +$$

$$+\int_\delta^\pi\int_\delta^\pi \tilde{K}(v,u)D_{nm}(v,u)\,dvdu - \int_0^\delta\int_0^\delta \tilde{K}(v,u)D_{nm}(v,u)\,dvdu.$$

Portanto, de acordo com 3.14 e 3.15 temos

$$\left|\int_0^\pi\int_0^\pi \tilde{K}(v,u)D_{nm}(v,u)\,dvdu\right| \le \frac{\pi^2}{4}\Big[SF_{[0,\delta]\times[0,\delta]}[\tilde{K}] +$$

$$+ SF_{[0,\delta]\times[0,\pi]}[\tilde{K}] + SF_{[0,\pi]\times[0,\delta]}[\tilde{K}]\Big] + \left|\int_\delta^\pi\int_\delta^\pi \tilde{K}(v,u)D_{nm}(v,u)\,dvdu\right|$$

Agora como $\tilde{K}^{\square} \in BW_0([0,\pi];\ BV_0([0,\pi])$ [3.6,c)] e $\tilde{K}^{\square}$ é contínua no 0 (o limite é uniforme sobre u consoante 1.6) e em vista de 3.2 temos que existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{\pi^2}{4}\Big[SF_{[0,\delta]\times[0,\delta]}[\tilde{K}] + SF_{[0,\delta]\times[0,\pi]}[\tilde{K}] + SF_{[0,\pi]\times[0,\delta]}[\tilde{K}]\Big] < \frac{\varepsilon}{2};$$

dado $\varepsilon > 0$ (para $SF_{[0,\pi]\times[0,\delta]}[\tilde{K}]$, basta repetir o argumento invertendo a ordem das variáveis), pelo lema de Riemann-Lebesgue temos

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_0^\pi\int_0^\pi \tilde{K}(v,u)\,D_{nm}(v,u)\,dvdu = 0.$$

- o -

BIBLIOGRAFIA

[DBVFTV] - Clarkson, R. -"On definitions of bounded variation for functions of two variables", Transactions American Math. Society, 35, (1933), 824-854.

[LO] - Dunford,N.,Schwarz ,J.I. - "Linear Operators Part I",fourth printing 1967, Interscience Publishens, Inc. New York.

[VSIE] - Hönig,C.S. - "Volterrra-Stieltjes Integral Equations", Mathematics Studies 16, North-Holland Publising Company, Amsterdam, 1975.

[SVC] - Hönig,C.S. - "Semivariation and Continuity", 3º Seminário Brasileiro de Análise.

[ARSI] - Hönig,C.S. - "The abstract Riemann-Stieltjes integral and its applications to Linear Differential Equations with generalized boundary conditions", Notas do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo. Série Matemática nº 1, 1973.

[EAFTF] - Kolmogorov,A.N., Fómin,S. - "Elementos de la Teoria de Funciones y del Analisis Funcional", Editorial Mir Moscu, 1972.

[FBFV] - Morse,M, Transue,W. - "Functionals of bounded Frechet Variation", Canadian Journ. Math., 1 (1949), 153-165.