Hipersuperfícies de rotação em espaços de curvatura constante

Cristina de Abreu Suzuki

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Geometria Diferencial**
Orientadora: **Profa. Dra. Célia Contin Góes**

– SÃO PAULO, Junho de 1989 –

À memória de
Rosângela Maria Sonvesso

AGRADECIMENTOS

- À todos aqueles, que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.
- Aos colegas do MAE e do MAC, pelos ensinamentos na área de edição de textos.
- Àqueles colegas de curso e professores do MAT, que sempre solícitos e incentivadores, acabaram como grandes amigos.
- Aos companheiros do xerox, pelo impecável trabalho realizado.
- Ao pessoal da gráfica, pelo notável serviço de encadernação.
- À Pfa. Dra. Célia Contin Goés, por colaborar com a minha formação, e, pela paciência e incansável dedicação ao desempenhar o duplo papel de orientadora e amiga, desde 1982.
- E, especialmente, ao João Carlos de Oliveira, pelo encorajamento, pelo apoio e por colaborar de forma grandiosa e decisiva na edição desta monografia.

Cristina de Abreu Suzuki
junho de 1989

Conteúdo

INTRODUÇÃO

1 O ESPAÇO DE LORENTZ L^n 1

1.1 Generalidades sobre L^n. 1

1.1.1 A conexão de Levi-Civita de L^n. 6

1.1.2 Geodésicas de L^n. 9

1.1.3 Subvariedades totalmente geodésicas de L^n. 10

1.2 Isometrias de L^n. 10

2 ESPAÇOS DE CURVATURA CONSTANTE 16

2.1 Introdução. 16

2.2 Considerações sobre isometrias em espaços de curvatura constante. 16

2.3 Generalidades sobre $\mathcal{H}^n(c)$. 17

2.3.1 O espaço tangente $T_x\mathcal{H}^n(c)$. 17

2.3.2 A curvatura de $\mathcal{H}^n(c)$. 18

2.3.3 Isometrias de $\mathcal{H}^n(c)$. 19

2.3.4 A geometria do espaço hiperbólico. 20

2.3.4.1 Geodésicas 20

2.3.4.2 Esferas geodésicas. 21

2.3.4.3 Horoesferas. 22

2.3.4.4 Superfícies equidistantes. 23

2.3.4.5 Subvariedades umbílicas. 24

2.4 Outros modêlos da Geometria Hiperbólica. 32

2.4.1 O modêlo de Klein $D^n(1)$. 34

2.4.2 O modêlo de Poincaré $B^n(2)$. 35

2.4.3 O modêlo de Poincaré $\mathbb{R}^n_+$. 39

2.4.4 Isometrias entre os modêlos. 42

2.5 Espaços de recobrimento dos espaços de curvatura constante. 43

2.6 Uma família de superfícies mínimas geodesicamente-regradas de $\overline{M}^3(c)$. 45

2.6.1 Introdução. 45

2.6.2 Parametrização de uma família de superfícies mínimas geodesicamente-regradas de $\overline{M}^3(c)$. 45

2.7 Superfícies mínimas conjugadas. 51

3 HIPERSUPERFÍCIES DE ROTAÇÃO EM ESPAÇOS DE CURVATURA CONSTANTE 58

3.1 Introdução. 58

3.2 Caracterização das hipersuperfícies de rotação em um espaço de curvatura constante $\overline{M}^{n+1}(c)$. 58

3.3 Hipersuperfícies de rotação nos vários modêlos da Geometria Hiperbólica. 73

3.3.1 As hipersuperfícies de rotação no modêlo $(\mathbb{R}^{n+1}{}_+, g_+)$. 73

3.3.2 As hipersuperfícies de rotação nos outros modêlos. 82

4 HIPERSUPERFÍCIES DE ROTAÇÃO MÍNIMAS EM ESPAÇOS DE CURVATURA CONSTANTE 87

4.1 Curvaturas principais e curvatura média. 87

4.2 Hipersuperfícies de rotação com curvatura média constante. 107

4.3 Equação das hipersuperfícies mínimas de rotação. 116

5 CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA QUE UMA HIPERSUPERFÍCIE DE $\overline{M}^{n+1}(c)$, $n \geq 3$, SEJA DE ROTAÇÃO 130

5.1 Fatos utilizados. 130

5.2 Descrição das condições suficientes. 133

BIBLIOGRAFIA

INTRODUÇÃO

O propósito deste trabalho é estender aos vários modêlos da Geometria Hiperbólica (o modêlo de Lorentz $\mathcal{H}^{n+1}(c)$, o modêlo de Klein $D^{n+1}(1)$, o môdelo de Poincaré $B^{n+1}(2)$ e o môdelo de Poincaré $\mathbb{R}^{n+1}{}_{+}$), o conceito de superfícies de rotação de um 3-espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$.

O presente texto tem seu fundamento no artigo de M. do Carmo e M. Dajczer (1983), denominado *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature* [5].

Nos Capítulos 1 e 2, desenvolvemos as preliminares que nos permitirão tratar da proposta deste trabalho. O Capítulo 1 compreende uma caracterização do espaço de Lorentz L^n. O Capítulo 2 consiste no estudo dos espaços de curvatura seccional constante c, e, em particular, no caso $c < 0$, aparecem como espaço de curvatura seccional constante c, o hiperbolóide $\mathcal{H}^n(c)$ e os outros modêlos da Geometria Hiperbólica, o modêlo de Klein $D^n(1)$, o môdelo de Poincaré $B^n(2)$ e o môdelo de Poincaré $\mathbb{R}^n{}_{+}$. Ainda, no Capítulo 2, estendemos ao espaço hiperbólico $\mathcal{H}^3(c)$, o conceito de **superfícies conjugadas** que aparece entre o catenóide e o helicóide, no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$.

No Capítulo 3 apresentamos a definição de **hipersuperfície de rotação** em espaços de curvatura constante, $\overline{M}^{n+1}(c)$, e fornecemos uma parametrização. Veremos que escolhendo uma curva conveniente $\mathcal{C}$, obtemos tal hipersuperfície, movendo uma $(n-1)$-subvariedade umbílica Σ, com curvatura variável, ao longo de $\mathcal{C}$. Então, Σ descreve o que chamamos de **paralelos** da hipersuperfície de rotação. Desse modo, de acordo com a natureza dos paralelos, classificamos as hipersuperfícies de rotação em **esféricas**, se os paralelos são esferas geodésicas; **hiperbólicas**, se os paralelos são superfícies equidistantes; e **parabólicas**, se os paralelos são horoesferas. O Capítulo contém a parte essencial desta dissertação: o estudo das hipersuperfícies de rotação de $\overline{M}^{n+1}(c), c < 0$, nos vários modêlos da Geometria Hiperbólica.

No Capítulo 4 são computadas as curvaturas principais e a curvatura média de uma hipersuperfície de rotação, estabelecendo-se uma equação diferencial ordinária de segunda ordem associada a hipersuperfícies de rotação de curvatura média constante. Este Capítulo encerra com a descrição de uma família a um parâmetro $\lambda > 0$, de superfícies mínimas geodesicamente-regradas em $\mathcal{H}^3(-1)$, tal que cada superfície é conjugada a uma superfície de rotação mínima de $\mathcal{H}^3(-1)$, que no caso parabólico é única, a menos de isometrias de $\mathcal{H}^3(-1)$.

Finalmente, o Capítulo 5, é dedicado a descrição de algumas condições suficientes para que uma hipersuperfície de $\overline{M}^{n+1}(c)$, $n \geq 3$, seja de rotação. Um resultado importante é que se as curvaturas principais $k_1, \ldots, k_n$ de uma hipersuperfície $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+1}(c), n \geq 3$, satizfazem $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-1} = -\lambda \neq 0$ e $k_n = -\mu(\lambda), \lambda \neq \mu$, então f é uma hipersuperfície de rotação (teorema 5.2.1). O resultado é falso para $n = 2$ (observação 5.2.2). Outra condição suficiente está relacionada com a questão de determinar quais hipersuperfícies de $\overline{M}^{n+1}(c)$ são invariantes por um subgrupo a l-parâmetros de isometrias de $\overline{M}^{n+1}(c)$, e possuem uma propriedade específica. Mostramos que, excluindo-se as hipersuperfícies com curvaturas principais constantes e assumindo-se que l é o maior valor admissível, $f(M^n)$ está contida numa hipersuperfície de rotação.

Capítulo 1

O ESPAÇO DE LORENTZ L^n

1.1 Generalidades sobre L^n.

Consideremos sobre $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$, a **métrica Lorentziana**

$$g_{-1}(x, y) = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

que é uma forma bilinear simétrica, não-degenerada de índice 1, sobre $\mathbb{R}^n$.

Denotaremos por L^no par $(\mathbb{R}^n, g_{-1})$ que chamaremos **espaço de Lorentz**.

O **índice** ν de uma forma bilinear simétrica $\mathcal{B}$ sobre um $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathcal{V}$, é a maior dimensão de qualquer subespaço $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ no qual se $w \in \mathcal{W}$, $w \neq 0$ então $\mathcal{B}(w, w) < 0$, isto é, $\mathcal{B}$ é negativa-definida em $\mathcal{W}$.

Mostremos que o índice ν da forma bilinear simétrica g_{-1} é igual a 1.

Seja $x = (x_1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Temos

$$\begin{aligned} & g_{-1}(x, x) = -x_1^2 < 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow g_{-1}\,|_{\mathcal{W}_-} \text{ é negativa-definida} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \nu \geq 1 \end{aligned}$$

onde $\mathcal{W}_- = \{(x_1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n\}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} & y = (0, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Rightarrow \\ & \Rightarrow g_{-1}(y, y) = x_2^2 + \cdots + x_n^2 > 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow g_{-1}\,|_{\mathcal{W}_+} \text{ é positiva-definida} \end{aligned}$$

sendo $\mathcal{W}_+ = \{(0, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\}$.

Suponhamos que exista um subconjunto $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$, com $\dim \mathcal{W} \geq 2$ tal que $g_{-1}\,|_{\mathcal{W}}$ é negativa-definida. Temos

$$\dim \mathcal{W} \geq 2 \Rightarrow \exists w \in \mathcal{W} \cap \mathcal{W}_+, w \neq 0 \Rightarrow g_{-1}(w, w) < 0 < g_{-1}(w, w)$$

o que é absurdo.

Logo, não existe tal subespaço $\mathcal{W}$. Portanto $\nu = 1$.

Além disso, a forma é não-degenerada, pois, se existisse $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $g_{-1}(x, y) = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}^n$, tomando $y = (0, x_2, \ldots, x_n)$, teríamos $0 = g_{-1}(x, (0, x_2, \ldots, x_n)) \Rightarrow$ $\Rightarrow 0 = x_2^2 + \cdots + x_n^2 \Rightarrow x_2 = \ldots = x_n = 0 \Rightarrow g_{-1}(x, x) = -x_1^2$.

Mas $g_{-1}(x, x) = 0$, logo $x = 0$.

Usaremos a seguinte notação:

Se $x : U \longrightarrow L^n$ é uma parametrização de L^n em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, denotamos as componentes de g_{-1}, em U, por

$$g_{ij}(q) = g_{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q)\right) \quad i, j = 1, \ldots, n$$

onde $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx_q(e_i), q \in U$, $i = 1, \ldots, n$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base canônica de $T_q\mathbb{R}^n$.

Se V e W são campos de vetores tangentes a L^ndefinidos em U, podemos escrever

$$V = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad W = \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad g_{-1}(V, W) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} v_i w_j$$

Sendo g_{-1} não degenerada, a matriz $(g_{ij}(p))$, de ordem n, possui inversa, a qual denotaremos por $(g^{ij}(p))$.

De g_{-1} ser simétrica, obtemos

$$\begin{aligned} g_{ij}(q) &= g_{ji}(q) \\ g^{ij}(q) &= g^{ji}(q), \; q \in U, \; i, j = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Definição 1.1.1 *Seja $v \in L^n$, definimos a norma de v por*

$$\|v\| = \sqrt{|g_{-1}(v, v)|}$$

Desse modo, é natural falarmos em vetores ortogonais e vetores unitários.

Dado um subespaço vetorial k-dimensional, $\mathcal{W}$, de L^n, existem três possibilidades mutuamente exclusivas para $\mathcal{W}$:

$$\begin{aligned} &g_{-1}\,|_{\mathcal{W}} \text{ é positiva-definida,} \\ &g_{-1}\,|_{\mathcal{W}} \text{ é não-degenerada de índice 1,} \\ &g_{-1}\,|_{\mathcal{W}} \text{ é degenerada} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Proposição 1.1.2 *Se $\mathcal{W}$é um k-subespaço de L^n, então $n = \dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^{\perp}$ e $\mathcal{W}^{\perp\perp} = \mathcal{W}$, onde $\mathcal{W}^{\perp} = \{v \in L^n \mid g_{-1}(v, w) = 0, \forall w \in \mathcal{W}\}$.*

Demonstração. Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base de L^n, tal que $\{e_1, \ldots, e_k\}$ é base de $\mathcal{W}$. Seja a aplicação $f : L^n \longrightarrow \mathcal{W}$ dada por

$$f(v) = \textstyle\sum_{i=1}^{k} g_{-1}(v, e_i) e_i$$

Observemos que

$$f(v) = 0 \Leftrightarrow g_{-1}(v, e_i) = 0, \; i = 1, \ldots, k \Leftrightarrow \ker f = \mathcal{W}^{\perp}$$

Agora, dado $w = \sum_{i=1}^{k} w_i e_i \in \mathcal{W}$, tome $\tilde{w} = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} w_i g^{i\ell} e_\ell$.
Então

$$f(\tilde{w}) = \sum_{j=1}^{k} g_{-1}\left(\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} w_i g^{i\ell} e_\ell, e_j\right) e_j \Rightarrow f(\tilde{w}) = \sum_{i,j=1}^{k} w_i \delta_{ij} e_j = w$$

o que nos mostra que f é sobrejetora.

Portanto,

$$\dim \mathcal{W}^\perp = \dim \ker f = n - \dim \operatorname{Im} f = n - \dim \mathcal{W}$$

isto é,

$$n = \dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp$$

Para todo $v \in \mathcal{W}$, temos $g_{-1}(v, w) = 0$, $\forall w \in \mathcal{W}^\perp$.
Logo $v \in \mathcal{W}^{\perp\perp}$ e $\mathcal{W} \subset \mathcal{W}^{\perp\perp}$.
Analogamente, obtemos a inclusão $\mathcal{W}^{\perp\perp} \subset \mathcal{W}$.
Portanto, segue que $\mathcal{W} = \mathcal{W}^{\perp\perp}$.

□

Proposição 1.1.3 *Se $z \in L^n$ é tal que $g_{-1}(z, z) < 0$, então*

(1) *$g_{-1}|_{[z]}$ é não-degenerada de índice 1 e $L^n = [z] \oplus [z]^\perp$.*

(2) *$g_{-1}|_{[z]^\perp}$ é positiva-definida.*

Demonstração. É imediato que se $g_{-1}(z, z) < 0$, então o subespaço $[z]$ é não-degenerado de índice 1.

Temos

$$n = \dim[z] + \dim[z]^\perp = \dim([z] + [z]^\perp) + \dim([z] \cap [z]^\perp)$$

Mostremos que $[z] \cap [z]^\perp = \{0\}$, daí $L^n = [z] \oplus [z]^\perp$

$$\begin{aligned} w \in [z] \cap [z]^\perp \subset [z] \quad &\Rightarrow \quad \exists a \in \mathbb{R} \mid w = az \\ w \in [z] \cap [z]^\perp \subset [z]^\perp \quad &\Rightarrow \quad 0 = g_{-1}(w, z) = a\, g_{-1}(z, z) \end{aligned}$$

mas $g_{-1}(z, z) < 0$ e portanto $a = 0$, isto é, $w = 0$, e isto prova (1).

Para provar (2) observamos que $g_{-1}|_{[z]^\perp}$ é positiva-semidefinida, isto é, suponhamos que existe $x \in [z]^\perp$ tal que $g_{-1}(x, x) < 0$. Como $g_{-1}(x, z) = 0$, segue que $g_{-1}|_{[x,x]}$ é negativa-definida e $\dim[z, x] = 2 \leq 1$ (índice de L^n), que é absurdo.

Portanto,

$$g_{-1}(x, x) \geq 0, \ \forall x \in [z]^\perp$$

Observamos, ainda, que vale a **desigualdade de Cauchy-Schwarz**

$$g_{-1}{}^2(x, y) \leq g_{-1}(x, x)\, g_{-1}(y, y), \ \forall x, y \in [z]^\perp$$

De fato, sejam $x, y \in [z]^\perp$, temos

$$\begin{aligned} x + \lambda y \in [z]^\perp, \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad & 0 \leq g_{-1}(x + \lambda y, x + \lambda y) = \\ & = g_{-1}(x, x) + 2\lambda\, g_{-1}(x, y) + \lambda^2\, g_{-1}(y, y), \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Se $g_{-1}(y,y) = 0$ temos

$$\begin{aligned} g_{-1}(x,x) + 2\lambda\, g_{-1}(x,y) \geq 0,\ \forall \lambda \in I\!R \Rightarrow \\ \Rightarrow\ g_{-1}(x,y) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 = {g_{-1}}^2(x,y) \leq g_{-1}(x,x)\, g_{-1}(y,y) = 0 \end{aligned}$$

Se $g_{-1}(y,y) \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} 4\,{g_{-1}}^2(x,y) - 4\, g_{-1}(y,y)\, g_{-1}(x,x) \leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow\ {g_{-1}}^2(x,y) \leq g_{-1}(x,x)\, g_{-1}(y,y) \end{aligned}$$

Finalmente, mostremos que

$$g_{-1}\,|_{[z]^\perp} \text{ é positiva-definida}$$

Como já vimos que $g_{-1}\,|_{[z]^\perp}$ é positiva-semidefinida, basta verificarmos a implicação

$$x \in [z]^\perp, x \neq 0 \Rightarrow g_{-1}(x,x) \neq 0$$

Suponhamos $x \in [z]^\perp$ e $g_{-1}(x,x) = 0$. Da desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} {g_{-1}}^2(x,y) \leq g_{-1}(x,x)\, g_{-1}(y,y) = 0,\ \forall y \in [z]^\perp \Rightarrow \\ \Rightarrow g_{-1}(x,y) = 0,\ \forall y \in [z]^\perp \Rightarrow x \in [z] \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$x \in [z]^\perp,\ x \neq 0 \Rightarrow g_{-1}(x,x) \neq 0$$

□

Proposição 1.1.4 *Se $\mathcal{W}$ é um subespaço de L^n, então $g_{-1}\,|_{\mathcal{W}}$ é não-degenerada de índice 1, se e somente se, $g_{-1}\,|_{\mathcal{W}}^{\perp}$ é positiva-definida.*

Demonstração. Suponhamos que $g_{-1}\,|_{\mathcal{W}}$ seja não-degenerada de índice 1.

Então, $\exists \bar{w} \in \mathcal{W}$, $\bar{w} \neq 0$ tal que $g_{-1}(\bar{w},\bar{w}) < 0$.

Tomemos qualquer $z \in \mathcal{W}^\perp$, $z \neq 0$. Então $g_{-1}(z,\bar{w}) = 0$. Pela proposição (1.1.3), $g_{-1}\,|_{[\bar{w}]^\perp}$ é positiva-definida e como $z \in [\bar{w}]^\perp$ temos $g_{-1}(z,z) > 0$, isto é, $g_{-1}\,|_{\mathcal{W}^\perp}$ é positiva-definida.

Agora, suponhamos que $g_{-1}\,|_{\mathcal{W}^\perp}$ é positiva-definida.

Se $\bar{w} \in \mathcal{W}$ é tal que $g_{-1}(\bar{w},w) = 0$, $\forall w \in \mathcal{W}$, então $\bar{w} \in \mathcal{W}^\perp$ e $g_{-1}(\bar{w},\bar{w}) = 0$. Mas como $g_{-1}\,|_{\mathcal{W}^\perp}$ é positiva-definida, devemos ter $\bar{w} = 0$ e $g_{-1}\,|_{\mathcal{W}}$ é não-degenerada.

A fim de mostrarmos que $g_{-1}\,|_{\mathcal{W}}$ possui índice 1, observemos que pela proposição (1.1.2) $n = \dim \mathcal{W} + \dim \mathcal{W}^\perp \Rightarrow L^n = \mathcal{W} + \mathcal{W}^\perp$.

Como o índice de g_{-1} em L^né 1, existe $v \in L^n$, $v \neq 0$, tal que $g_{-1}(v,v) < 0$ e desta forma $v \in \mathcal{W}$ e $v \notin \mathcal{W}^\perp$.

Logo, $g_{-1}\,|_{\mathcal{W}}$ possui índice maior ou igual a 1.

Da definição de índice, segue que o índice de $g_{-1}\mid_{\mathcal{W}}$ é menor ou igual ao índice de $g_{-1}\mid_{L^n}$, que é 1.

Portanto, $g_{-1}\mid_{\mathcal{W}}$ possui índice 1.

□

Observação 1.1.5 *Uma vez que $\mathcal{W}^{\perp\perp} = \mathcal{W}$, os termos "não-degenerada de índice 1" e "positiva-definida" podem ser trocadas e segue que $g_{-1}\mid_{\mathcal{W}}$ é degenerada, se e somente se, $g_{-1}\mid_{\mathcal{W}^{\perp}}$ é degenerada.*

Nos subespaços $\mathcal{W}$, onde $g_{-1}\mid_{\mathcal{W}}$ é positiva-definida, vale a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$|g_{-1}(v,w)| \leq \|v\|\,\|w\| \;\forall v,w \in \mathcal{W}$$

verificando-se a igualdade, se e somente se, v e w são linearmente dependentes.

A próxima proposição fornece critérios para um subespaço $\mathcal{W}$ ser não-degenerado de índice 1.

Proposição 1.1.6 *Seja $\mathcal{W}$ um subespaço k-dimensional de L^n, sendo $k \geq 2$. São equivalentes.*

(1) *$g_{-1}\mid_{\mathcal{W}}$ é não-degenerada de índice 1.*

(2) *$\mathcal{W}$ contém dois vetores nulos, linearmente independentes (w é um* **vetor nulo** *$\Leftrightarrow w \neq 0$ e $g_{-1}(w,w) = 0$).*

(3) *existe $w \in \mathcal{W}$, $w \neq 0$, tal que $g_{-1}(w,w) < 0$.*

Demonstração.

$$(1) \Rightarrow (2)$$

Se $g_{-1}\mid_{\mathcal{W}}$ é não-degenerada de índice 1, deduz-se da proposição (1.1.3) que existe uma base ortonormal $\{e_1,\ldots,e_k\}$ de $\mathcal{W}$, tal que $g_{-1}(e_1,e_1) = -1$ e $g_{-1}(e_i,e_j) = \delta_{ij}$, $i \neq 1$. Então, $e_1 + e_2$ e $e_1 - e_2$ são vetores nulos linearmente independentes, pois, $g_{-1}(e_1+e_2, e_1+e_2) = 0 = g_{-1}(e_1-e_2, e_1-e_2)$ e se $a,b \in \mathbb{R}$ são tais que $a(e_1+e_2) + b(e_1-e_2) = 0$, temos $a+b = b-a = 0$, ou seja, $a = b = 0$.

$$(2) \Rightarrow (3)$$

Sejam u e v vetores nulos, linearmente independentes de $\mathcal{W}$.

Afirmamos que $g_{-1}(u,v) \neq 0$.

Suponhamos, por absurdo, que $g_{-1}(u,v) = g_{-1}(u,u) = g_{-1}(v,v) = 0$. Como e_1 é vetor unitário em L^n tal que $g_{-1}(e_1,e_1) < 0$, então, pela proposição (1.1.3) existem reais,

únicos u_1 e v_1, que podemos supor, sem perda de generalidade, ambos positivos (trocando, se necessário, u por $-u$ ou v por $-v$), tais que

$$u = u_1 e_1 + \bar{u}$$
$$v = v_1 e_1 + \bar{v}$$

onde $\bar{u} \neq 0$ e $\bar{v} \neq 0$ pertencem ao subespaço $[e_1]^\perp$.

Observamos que

$$g_{-1}(u,u) = 0 \Rightarrow g_{-1}(\bar{u},\bar{u}) = u_1^2$$
$$g_{-1}(v,v) = 0 \Rightarrow g_{-1}(\bar{v},\bar{v}) = v_1^2$$

Além disso, pela observação (1.1.5)

$$\begin{aligned} g_{-1}(u,v) = 0 \quad &\Rightarrow \quad u_1 v_1 = g_{-1}(\bar{u},\bar{v}) \leq |u_1||v_1| \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \exists \lambda \in I\!R \mid \bar{u} = \lambda \bar{v} \\ &\Rightarrow \quad \lambda = \frac{u_1}{v_1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad u = \lambda v_1 e_1 + \lambda \bar{v} = \lambda v \end{aligned}$$

o que é absurdo.

Logo,

$$g_{-1}(u,v) = -u_1 v_1 + g_{-1}(\bar{u},\bar{v}) \neq 0$$

Temos então,

$$\begin{aligned} g_{-1}(u+v,u+v) &= -(u_1+v_1)^2 + g_{-1}(\bar{u},\bar{u}) + g_{-1}(\bar{v},\bar{v}) + 2\,g_{-1}(\bar{u},\bar{v}) = \\ &= 2(-u_1 v_1 + g_{-1}(\bar{u},\bar{v})) = 2\,g_{-1}(u,v) \neq 0 \\ g_{-1}(u-v,u-v) &= -(u_1-v_1)^2 + g_{-1}(\bar{u},\bar{u}) + g_{-1}(\bar{v},\bar{v}) - 2\,g_{-1}(\bar{u},\bar{v}) = \\ &= 2(u_1 v_1 - g_{-1}(\bar{u},\bar{v})) = -2\,g_{-1}(u,v) \neq 0 \end{aligned}$$

sendo pois, um deles menor que zero.

$$(3) \Rightarrow (1)$$

Seja $z \in \mathcal{W}$ tal que $g_{-1}(z,z) < 0$, então $\mathcal{W}^\perp \subset [z]^\perp$ e sendo $g_{-1}\mid_{[z]^\perp}$ positiva-definida, $g_{-1}\mid_{\mathcal{W}^\perp}$ também o é.

Então $\mathcal{W} = \mathcal{W}^{\perp\perp}$, e, $g_{-1}\mid_{\mathcal{W}}$ é não-degenerada de índice 1.

□

1.1.1 A conexão de Levi-Civita de L^n.

Definição 1.1.1.1 *Sejam $V, W \in \chi(L^n)$ (conjunto dos campos de vetores de classe C^∞ em L^n) e $f \in \mathcal{F}(L^n)$ (anel das funções reais de classe C^∞ definidas em L^n), definimos o colchete $[V,W] \in \chi(L^n)$ pela expressão*

$$[V,W](f) = V(W[f]) - W(V[f])$$

sendo $V[f] = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} f$, a derivada de f na direção de $V = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Teorema 1.1.1.2 *Existe uma única aplicação* $\tilde{\nabla} : \chi(L^n) \times \chi(L^n) \longrightarrow \chi(L^n)$ *tal que*

(1) $\tilde{\nabla}_V W$ *é* $\mathcal{F}(L^n)$*-linear em* V.

(2) $\tilde{\nabla}_V W$ *é* $\mathbb{R}$*-linear em* W.

(3) $\tilde{\nabla}_V(fW) = V[f]W + f\tilde{\nabla}_V W$, *para* $f \in \mathcal{F}(L^n)$.

(4) $[V, W] = \tilde{\nabla}_V W - \tilde{\nabla}_W V$.

(5) $X\, g_{-1}(V, W) = g_{-1}(\tilde{\nabla}_X V, W) + g_{-1}(V, \tilde{\nabla}_X W)$, $\forall X, V, W \in \chi(L^n)$.

$\tilde{\nabla}$ *é denominada* **conexão de Levi-Civita de** L^n.

Inicialmente, vamos provar o seguinte lema

Lema 1.1.1.3 *Se* $V \in \chi(L^n)$, *seja* V^* *a 1-forma em* L^n *tal que* $V^*(X) = g_{-1}(V, X)$, $\forall X \in \chi(L^n)$. *Então, a aplicação* $V \longmapsto V^*$ *é um isomorfismo* $\mathcal{F}(L^n)$*-linear de* $\chi(L^n)$ *em* $(\chi(L^n))^*$.

Demonstração. Observamos que, dado $V \in \chi(L^n)$, a aplicação $V^* : \chi(L^n) \longrightarrow \mathcal{F}(L^n)$ é $\mathcal{F}(L^n)$-linear e, portanto, uma 1-forma em L^n. Além disso,

$$\begin{aligned}
(fV)^*(X) &= g_{-1}(fV, X) = \\
&= fV^*(X), \ \forall X \in \chi(L^n), \forall f \in \mathcal{F}(L^n) \\
(V + W)^*(X) &= g_{-1}(V + W, X) = V^*(X) + W^*(X) = \\
&= (V^* + W^*)(X), \ \forall X \in \chi(L^n)
\end{aligned}$$

isto é, a aplicação $V \longrightarrow V^*$ é $\mathcal{F}(L^n)$-linear.

Suponha que $V^* = W^*$, isto é, $g_{-1}(V, X) = g_{-1}(W, X)$, $\forall X \in \chi(L^n)$, então, $g_{-1}(V_p, X_p) = g_{-1}(W_p, X_p)$, $\forall p \in L^n$, $\forall X_p \in T_pL^n$, onde $V_p = V(p)$. Sendo g_{-1} métrica não-degenerada obtemos $V_p = W_p$, $\forall p \in L^n$, isto é, $V = W$. Logo, $V \longmapsto V^*$ é uma aplicação injetiva.

Tome $\theta \in (\chi(L^n))^*$ e seja $\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i dx_i$, sua expressão num sistema de coordenadas $(U, (x_1, \ldots, x_n))$.

Se $V = \sum_{i,j=1}^n g^{ij}\theta_i \frac{\partial}{\partial x_j}$, temos

$$\begin{aligned}
V^*\left(\frac{\partial}{\partial x_\ell}\right) &= g_{-1}\left(V, \frac{\partial}{\partial x_\ell}\right) = \sum_{i=1}^n \theta_i \sum_{j=1}^n g^{ij} g_{j\ell} = \sum_{i=1}^n \theta_i \delta_{i\ell} = \theta_\ell = \\
&= \theta\left(\frac{\partial}{\partial x_\ell}\right), \ell = 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

Donde concluímos, pela $\mathcal{F}(L^n)$-linearidade, que $\theta = V^*$. Assim, mostramos que a aplicação $V \longmapsto V^*$ é sobrejetiva.

□

Demonstração do teorema (1.1.1.2)

Suponhamos que exista uma tal $\tilde{\nabla}$. Usando (5)

$$\begin{aligned}
(a)\, W\, g_{-1}(V,X) &= g_{-1}(\tilde{\nabla}_W V, X) + g_{-1}(V, \tilde{\nabla}_W X) \\
(b)\, V\, g_{-1}(X,W) &= g_{-1}(\tilde{\nabla}_V X, W) + g_{-1}(X, \tilde{\nabla}_V W) \\
(c)\, X\, g_{-1}(V,W) &= g_{-1}(\tilde{\nabla}_X V, W) + g_{-1}(V, \tilde{\nabla}_X W)
\end{aligned}$$

Fazendo $(a)+(b)-(c)$ e a aplicando (4), obtemos

$$\begin{aligned}
2\, g_{-1}(\tilde{\nabla}_V W, X) &= V\, g_{-1}(W,X) + W\, g_{-1}(X,V) - X\, g_{-1}(V,W) - \\
&\quad - g_{-1}(V,[W,X]) + g_{-1}(W,[X,V]) + g_{-1}(X,[V,W])
\end{aligned} \tag{1.2}$$

O que nos leva a definir a 1-forma $\theta_{VW} : \chi(L^n) \longrightarrow \mathcal{F}(L^n)$, $\quad V, W \in \chi(L^n)$, dada por

$$\begin{aligned}
\theta_{VW}(X) &= V\, g_{-1}(W,X) + W\, g_{-1}(X,V) - X\, g_{-1}(V,W) - \\
&\quad - g_{-1}(V,[W,X]) + g_{-1}(W,[X,V]) + g_{-1}(X,[V,W])
\end{aligned}$$

Sendo $\theta_{VW} \in (\chi(L^n))^*$, $V, W \in \chi(L^n)$, pelo lema (1.1.1.3), existe um único campo de vetores, que denotaremos por $\tilde{\nabla}_V W$, tal que

$$\frac{1}{2}\theta_{VW}(X) = g_{-1}(\tilde{\nabla}_V W, X), \ \forall X \in \chi(L^n)$$

Verifica-se imediatamente que valem (1) a (5), e a existência de uma tal aplicação $\tilde{\nabla}$ está garantida.

A expressão (1.2) mostra que $\tilde{\nabla}$ está univocamente determinada pela métrica g_{-1}, o que prova o teorema.

□

Tomemos o sistema de coordenadas canônicas $(x_1, \ldots, x_n)$ de L^n.

As funções a valores reais Γ^ℓ_{ij} definidas em L^npor

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{\ell=1}^n \Gamma^\ell_{ij} \frac{\partial}{\partial x_\ell}$$

são os **símbolos de Christoffel** da conexão.

Pelo teorema (1.1.1.2), (4) temos,

$$\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = [\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} = 0$$

o que equivale a $\Gamma^\ell_{ij} = \Gamma^\ell_{ji}$.

Fazendo $V = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $W = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $X = \frac{\partial}{\partial x_h}$ em (1.2) e observando que $[W,X] = [X,V] = [V,W] = 0$, temos

$$\begin{aligned}
2\, g_{-1}\left(\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_h}\right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jh} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{hi} - \frac{\partial}{\partial x_h} g_{ij} \\
2\sum_{\ell=1}^n \Gamma^\ell_{ij} g_{\ell h} &= \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jh} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{hi} - \frac{\partial}{\partial x_h} g_{ij}
\end{aligned}$$

Mas,

$$g_{rs} = g_{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_r}, \frac{\partial}{\partial x_s}\right) = \begin{cases} -\delta_{rs}, & s = 1 \\ \delta_{rs}, & s = 2, \ldots, n \end{cases}$$

Então,

$$2\sum_{\ell=1}^{n} \Gamma_{ij}^{\ell} g_{\ell h} = 0, \; i, j, h = 1, \ldots, n$$

Fazendo $h = 1$,

$$0 = 2\sum_{\ell=1}^{n} \Gamma_{ij}^{\ell} g_{\ell 1} = -2\sum_{\ell=1}^{n} \Gamma_{ij}^{\ell} \delta_{\ell 1} = -2\Gamma_{ij}^{1}, \; i, j = 1, \ldots, n$$

e para $h = 2, \ldots, n$

$$0 = 2\sum_{\ell=1}^{n} \Gamma_{ij}^{\ell} g_{\ell h} = 2\sum_{\ell=1}^{n} \Gamma_{ij}^{\ell} \delta \ell h = 2\Gamma_{ij}^{h}, \; i, j = 1, \ldots, n$$

logo, os símbolos de Christoffel de L^nsão todos nulos, ou seja,

$$\Gamma_{ij}^{\ell}(x) = 0, \; x \in L^n, \; i, j, \ell = 1, \ldots, n \tag{1.3}$$

Logo, se $V, W \in \chi(L^n)$, com $V = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial}{\partial x_j}$, $W = \sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, por (1), (2) e (3) do teorema (1.1.1.2)

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_V W &= \tilde{\nabla}_V \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} V[w_i] \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} w_i \tilde{\nabla}_V \frac{\partial}{\partial x_i} = \\ &= \sum_{i=1}^{n} V[w_i] \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^{n} w_i v_j \sum_{\ell=1}^{n} \Gamma_{ij}^{\ell} \frac{\partial}{\partial x_\ell} \end{aligned}$$

Assim,

$$\tilde{\nabla}_V W = \sum_{i=1}^{n} V[w_i] \frac{\partial}{\partial x_i} \tag{1.4}$$

Usando o resultado do teorema (1.1.1.2) podemos definir os vários conceitos da Geometria Riemanniana, como geodésicas e subvariedades totalmente geodésicas, dos quais trataremos a seguir.

1.1.2 Geodésicas de L^n.

Definição 1.1.2.1 *Seja $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow L^n$ uma curva de L^n. Dizemos que γ é uma geodésica de L^n, se e somente se, $\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$.*

Seja $(x_1, \ldots, x_n)$ o sistema de coordenadas usual de L^n.

Fazendo a identificação $L^n \sim T_{\gamma(t)} L^n$, $t \in I$, temos

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (x_1 \circ \gamma(t), \ldots, x_n \circ \gamma(t)) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)), \; t \in I \\ \dot{\gamma}(t) &= \left(\frac{d}{dt} x_1 \circ \gamma(t), \ldots, \frac{d}{dt} x_n \circ \gamma(t)\right) = (\dot{\gamma}_1(t), \ldots, \dot{\gamma}_n(t)), \; t \in I \end{aligned}$$

Por (1.4)

$$\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}\gamma_i\right) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d^2}{dt^2}(\gamma_i) \frac{\partial}{\partial x_i} = \ddot{\gamma}$$

Portanto γ é geodésica, se e somente se, $\frac{d^2}{dt^2}(\gamma_i(t)) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, isto é, se γ é geodésica tal que $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v$, então $\gamma(t) = p + tv$, $t \in I$.

Concluímos portanto, que as geodésicas de L^nsão retas $\gamma(t) = p + tv$, $t \in \mathbb{R}$, e portanto L^né variedade geodesicamente completa.

1.1.3 Subvariedades totalmente geodésicas de L^n.

Dizemos que um k-subespaço afim ($k > 1$) de L^né um conjunto $\overline{\mathcal{P}}^k = x + \mathcal{P}^k$, onde $x \in L^n$ e $\mathcal{P}^k$ é um subespaço k-dimensional (não-degenerado) de L^n.

Mostremos que, em L^n, as subvariedades totalmente geodésicas, completas e conexas são os k-planos não-degenerados. (1.5)

Seja $\overline{\mathcal{P}}^k$ um k-subespaço afim e $p \in \overline{\mathcal{P}}^k$. Tome um vetor $v \in T_pL^n$ tal que $v \in T_p\overline{\mathcal{P}}^k$, então a geodésica γ tal que $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = v$ é

$$\gamma(t) = p + tv, \; t \in I$$

que é uma reta por $p \in \overline{\mathcal{P}}^k$ e portanto, está totalmente contida em $\overline{\mathcal{P}}^k$. Logo, todo k-subespaço afim é uma subvaridade totalmente geodésica de L^n.

Agora, considere M^k subvariedade totalmente geodésica de L^n. Pela hipótese, toda geodésica de M é geodésica de L^n e, portanto, toda geodésica de M é uma reta. Então, dado $p \in M$, existe um disco $D_p^k \subset T_pM$ tal que $D_p^k \subset M$. Sendo p arbitrário, concluímos que M está contida num k-subespaço afim.

1.2 Isometrias de L^n.

Definimos por $O_1(n)$, o conjunto dos operadores lineares inversíveis $\mathcal{O} : L^n \longrightarrow L^n$ tais que $g_{-1}(\mathcal{O}u, \mathcal{O}v) = g_{-1}(u, v)$, $u, v \in L^n$.

Um elemento $\mathcal{O} \in O_1(n)$ será chamado de **transformação ortogonal de** L^n. $O_1(n)$ assim definido é um grupo relativamente à composição dos operadores.

Agora, identificando os elementos de $O_1(n)$ com as matrizes (a_{ij}) relativamente a uma base fixada $\{e_i\}$, onde $a_{ij} = g_{-1}(\mathcal{O}e_i, \mathcal{O}e_j)$, podemos concluir que $O_1(n)$ é um grupo relativamente à multiplicação de matrizes e admite estrutura de variedade diferenciável de modo que $O_1(n)$ é grupo de Lie com dimensão $n(n-1)/2$.

Teorema 1.2.1 *As condições seguintes são equivalentes:*

(1) $\mathcal{O} \in O_1(n)$.

(2) *$\mathcal{O}$ leva base ortonormal $\{e_i\}$ em base ortonormal $\{\mathcal{O}e_i\}$ onde $g_{-1}(e_{i_0}, e_{i_0}) = -1$ e $g_{-1}(\mathcal{O}e_{i_0}, \mathcal{O}e_{i_0}) = -1$ para algum $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$.*

(3) *Se $\mathcal{O}$ é identificado com sua matriz na base canônica de L^n, as colunas (linhas) de $\mathcal{O}$ formam uma base ortonormal de L^n, onde o primeiro vetor v_1 satizfaz $g_{-1}(v_1, v_1) < 0$.*

(4) *Se $\mathcal{O}$ é identificado com sua matriz na base canônica de L^n, $\mathcal{O}^t = \Xi\mathcal{O}^{-1}\Xi$, onde*

$$\Xi = \begin{bmatrix} -1 & & 0 & \\ & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots \\ & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Demonstração. Observemos, primeiramente, que se $x, y \in L^n$ então,

$$g_{-1}(x,y) = -x_0y_0 + x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = \langle \Xi x, y\rangle$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ representa o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$.

$$(1) \Rightarrow (2)$$

Sejam $\mathcal{O} \in O_1(n)$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base ortonormal de L^n, tal que

$$g_{-1}(e_\ell, e_\jmath) = \begin{cases} \delta_{\ell\jmath} & ,\ell \neq \imath_0 \\ -\delta_{\ell\jmath} & ,\ell = \imath_0 \end{cases}$$

para algum $\imath_0 \in \{1, \ldots, n\}$.

Então $g_{-1}(\mathcal{O}e_\ell, \mathcal{O}e_\jmath) = g_{-1}(e_\ell, e_\jmath)$ implica em que $\{\mathcal{O}e_1, \ldots, \mathcal{O}e_n\}$ é base ortonormal de L^ne $g_{-1}(\mathcal{O}e_{\imath_0}, \mathcal{O}e_{\imath_0}) = g_{-1}(e_{\imath_0}, e_{\imath_0}) = -1$.

$$(2) \Rightarrow (1)$$

Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é base ortonormal de L^n, por hipótese $\{\mathcal{O}e_1, \ldots, \mathcal{O}e_n\}$ também o é, e

$$g_{-1}(\mathcal{O}e_\ell, \mathcal{O}e_\jmath) = \begin{cases} \delta_{\ell\jmath} & ,\ell \neq \imath_0 \\ -\delta_{\ell\jmath} & ,\ell = \imath_0 \end{cases} = g_{-1}(e_\ell, e_\jmath)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} g_{-1}(v,w) &= g_{-1}\left(\textstyle\sum_{\ell=1}^n v_\ell e_\ell, \sum_{\jmath=1}^n w_\jmath e_\jmath\right) = \textstyle\sum_{\ell,\jmath=1}^n v_\ell w_\jmath\, g_{-1}(e_\ell, e_\jmath) = \\ &= \textstyle\sum_{\ell,\jmath=1}^n v_\ell w_\jmath\, g_{-1}(\mathcal{O}e_\ell, \mathcal{O}e_\jmath) = g_{-1}\left(\mathcal{O}\left(\sum_{\ell=1}^n v_\ell e_\ell\right), \mathcal{O}\left(\sum_{\jmath=1}^n w_\jmath e_\jmath\right)\right) = \\ &= g_{-1}(\mathcal{O}v, \mathcal{O}w),\ \forall v, w \in L^n \end{aligned}$$

$$(1) \Leftrightarrow (4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{O} \in O_1(n) &\Leftrightarrow g_{-1}(\mathcal{O}v, \mathcal{O}w) = g_{-1}(v,w),\ \forall v, w \in L^n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle \Xi\mathcal{O}v, \mathcal{O}w\rangle = \langle \Xi v, w\rangle,\ \forall v, w \in L^n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle \mathcal{O}^t\Xi\mathcal{O}v, w\rangle = \langle \Xi v, w\rangle,\ \forall v, w \in L^n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle \mathcal{O}^t\Xi\mathcal{O}v - \Xi v, w\rangle = 0,\ \forall v, w \in L^n \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathcal{O}^t\Xi\mathcal{O} = \Xi \Leftrightarrow \mathcal{O}^t\Xi = \Xi\mathcal{O}^{-1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathcal{O}^t = \Xi\mathcal{O}^{-1}\Xi \end{aligned}$$

$$(2) \Rightarrow (3)$$

Basta observar que as colunas de $\mathcal{O}$ são os vetores $\mathcal{O}U_1, \ldots, \mathcal{O}U_n$, onde $\{U_1, \ldots, U_n\}$ é a base canônica de L^n, que é ortonormal relativamente à g_{-1}. E para linhas, basta notar que por (4), se $\mathcal{O} \in O_1(n)$, $g_{-1}(\mathcal{O}^t v, \mathcal{O}^t w) = \langle \Xi \mathcal{O}^t v, \mathcal{O}^t w \rangle = \langle \mathcal{O}^{-1} \Xi v, \mathcal{O}^t w \rangle$. Então, $g_{-1}(\mathcal{O}^t v, \mathcal{O}^t w) = \langle \mathcal{O}\mathcal{O}^{-1} \Xi v, w \rangle = \langle \Xi v, w \rangle = g_{-1}(v, w)$ e, portanto, $\mathcal{O}^t \in O_1(n)$. E, analogamente, $\mathcal{O}^t \in O_1(n)$ implica $\mathcal{O} \in O_1(n)$.

$$(3) \Rightarrow (2)$$

Seja $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base ortonormal de L^n com $g_{-1}(e_{\imath_0}, e_{\imath_0}) = -1$, para algum $\imath_0 \in \{1, \ldots, n\}$.

As colunas de $\mathcal{O}$ relativamente à base canônica $\{U_1, \ldots, U_n\}$ de L^nsão $\{\mathcal{O}U_1, \ldots, \mathcal{O}U_n\}$ onde

$$g_{-1}(\mathcal{O}U_\imath, \mathcal{O}U_\jmath) = \delta_{\imath\jmath}, \ \imath \neq 1 \quad \text{e} \quad g_{-1}(\mathcal{O}U_1, \mathcal{O}U_\jmath) = -\delta_{1\jmath}, \ \imath, \jmath = 1, \ldots, n$$

Temos

$$\begin{aligned} & e_\imath = \textstyle\sum_\ell m_{\imath\ell} U_\ell \\ & \mathcal{O}e_\imath = \textstyle\sum_\ell m_{\imath\ell} \mathcal{O}U_\ell \\ & \text{e} \\ & g_{-1}(e_\imath, e_\jmath) = \textstyle\sum_{\ell,\hbar} m_{\imath\ell} m_{\jmath\hbar}\, g_{-1}(U_\ell, U_\hbar) = \sum_{\ell \neq 1} m_{\imath\ell} m_{\jmath\ell} - m_{\imath 1} m_{\jmath 1} \end{aligned}$$

para $\imath, \jmath = 1, \ldots, n$.

Então,

$$\begin{aligned} g_{-1}(\mathcal{O}e_\imath, \mathcal{O}e_\jmath) &= \sum_{\ell,\hbar} m_{\imath\ell} m_{\jmath\hbar}\, g_{-1}(\mathcal{O}U_\ell, \mathcal{O}U_\hbar) = \\ &= \sum_{\substack{\ell,\hbar \\ \ell \neq 1}} m_{\imath\ell} m_{\jmath\hbar} \delta_{\ell\hbar} - \sum_{\hbar} m_{\imath 1} m_{\jmath\hbar} \delta_{1\hbar} = \\ &= \sum_{\ell \neq 1} m_{\imath\ell} m_{\jmath\ell} - m_{\imath 1} m_{\jmath 1} = \\ &= g_{-1}(e_\imath, e_\jmath) \end{aligned}$$

para $\imath, \jmath = 1, \ldots, n$.

Em particular, $g_{-1}(\mathcal{O}e_{\imath_0}, \mathcal{O}e_{\imath_0}) = g_{-1}(e_{\imath_0}, e_{\imath_0}) = -1$.

□

As isometrias de L^nsão aplicações $F : L^n \longrightarrow L^n$ tais que, para cada $p \in L^n$

$$g_{-1}(dF_p v, dF_p w) = g_{-1}(v, w), \ \forall v, w \in T_p L^n$$

ou seja, $dF_p \in O_1(n)$. Logo, as isometrias de L^n são, precisamente, as aplicações da forma $F : L^n \longrightarrow L^n$ dadas por $F(p) = \mathcal{O}p + q$ onde $\mathcal{O} \in O_1(n)$ e $q \in L^n$. Obsevamos que $O_1(n)$ é o conjunto das isometrias lineares de L^n, isto é, $F(0) = 0$.

Se $\mathcal{P}^k$ é um k-subespaço de L^n, dizemos que $\mathcal{P}^k$ é **Lorentziano** se a restrição $g_{-1}\mid_{\mathcal{P}^k}$ é não-degenerada de índice 1 (métrica Lorentziana); $\mathcal{P}^k$ é **Riemanniano** se $g_{-1}\mid_{\mathcal{P}^k}$ é positiva-definida (métrica Riemanniana) e $\mathcal{P}^k$ é **Degenerado** se $g_{-1}\mid_{\mathcal{P}^k}$ é degenerada.

Usaremos $[v_1,\ldots,v_k]$ para denotar o subespaço de L^ngerado pelos vetores $v_1,\ldots,v_k$. Denotaremos por $O(\mathcal{P}^2)$ o conjunto das transformações ortogonais de L^ncom determinante positivo que deixam $\mathcal{P}^2$, um 2-subespaço de L^n, fixo, ponto a ponto. pg. 4

Sejam $\mathcal{P}^2$ um subespaço de $L^n(n\geq 3)$, de dimensão 2, e $\{e_1,\ldots,e_n\}$ uma base ortonormal de L^ntal que $\mathcal{P}^2=[e_{n-1},e_n]$. 3?

O operador $\mathcal{O}\in O(\mathcal{P}^2)$, identificado à sua matriz relativamente a esta base

$\mathcal{P}$ $w=[(1,0,1),(0,1,0)]$
$w^\perp=[(1,0,1)]$

$$\mathcal{O}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n}\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn}\end{bmatrix}$$

satisfaz

$$\begin{aligned}\mathcal{O}e_{n-1}=e_{n-1} &\Leftrightarrow a_{1,n-1}=\cdots=a_{n-2,n-1}=a_{n,n-1}=0,\ a_{n-1,n-1}=1\\ \mathcal{O}e_n=e_n &\Leftrightarrow a_{1n}=\cdots=a_{n-1,n}=0,\ a_{nn}=1\end{aligned}$$

isto é,

$$\mathcal{O}=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-2} & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0\\ a_{n-2,1} & \cdots & a_{n-2,n-2} & & \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,n-2} & 1 & 0\\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Podemos escolher uma base especial $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de L^n, conforme cada uma das três possibilidades para $\mathcal{P}^2$, a fim de simplificarmos a forma de $\mathcal{O}$.

No caso em que $\mathcal{P}^2$ é **Lorentziano**, pela proposição(1.1.6), existe $w\in\mathcal{P}^2$, $w\neq 0$ tal que $g_{-1}(w,w)<0$ e pela proposição(1.1.4) $[w]^\perp$ é positiva-definida. Portanto, podemos supor, sem perda de generalidade, que a base escolhida inicialmente é tal que

$$g_{-1}(e_n,e_n)=-1 \text{ e } g_{-1}(e_{n-1},e_n)=0$$

Temos então

$$\begin{aligned} L^n=[e_1,\ldots,e_{n-1},e_n] \qquad & \mathcal{P}^2=[e_{n-1},e_n]\\ g_{-1}(e_n,e_n)=-1 & \\ g_{-1}(e_i,e_j)=\delta_{ij} \qquad & i,j=1,\ldots,n,\ i\neq n\end{aligned} \tag{1.6}$$

Portanto nessa base

$$\mathcal{O}=\begin{bmatrix} \overline{\mathcal{O}} & 0 & \\ 0 & 1 & 0\\ & 0 & 1\end{bmatrix}$$

pois possui produto interno e é indefinido.

onde $\overline{\mathcal{O}}$ é matriz de ordem $(n-2)$, ortogonal, do espaço euclidiano $[e_1, \ldots, e_{n-2}]$ com a métrica $g_{-1}\,|_{[e_1,\ldots,e_{n-2}]}$.

No caso em que $\mathcal{P}^2$ é **Riemanniano**, pela proposição (1.1.4) e pela observação (1.1.5), $g_{-1}\,|_{\left[\mathcal{P}^2\right]^\perp}$ é não-degenerada de índice 1 e pela proposição (1.1.6), existe $w \in [\mathcal{P}^2]^\perp$, $w \neq 0$ tal que $g_{-1}(w,w) < 0$, além disso, existe uma base $\{e_{n-1}, e_n\}$ ortonormal de $\mathcal{P}^2$.

Sendo $g_{-1}(w,w) < 0$ e $w \in [\mathcal{P}^2]^\perp$ segue que o conjunto $\left\{\frac{w}{\|w\|}, e_{n-1}, e_n\right\}$ é ortonormal em L^n.

Pela proposição (1.1.3), podemos completar o conjunto $\{e_{n-1}, e_n\}$ à uma base ortonormal de $[w]^\perp$ e obteremos

$$\begin{aligned} L^n = [e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n] \qquad & \mathcal{P}^2 = [e_{n-1}, e_n] \\ g_{-1}(e_1, e_1) = -1 \qquad & \\ g_{-1}(e_i, e_j) = \delta_{ij} \qquad & i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq 1 \end{aligned} \tag{1.7}$$

onde $e_1 = \frac{w}{\|w\|}$.

Logo, nessa base

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \overline{\mathcal{O}} & 0 & \\ & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

onde $\overline{\mathcal{O}}$ é matriz de ordem $(n-2)$, ortogonal, do espaço Lorentziano $[e_1, \ldots, e_{n-2}]$ com a métrica $g_{-1}\,|_{[e_1,\ldots,e_{n-2}]}$.

No caso em que $\mathcal{P}^2$ é **degenerado**, existe $v \in \mathcal{P}^2$, $v \neq 0$ tal que $g_{-1}(v,w) = 0$, para qualquer $w \in \mathcal{P}^2$.

Podemos escolher e_{n-1} tal que $g_{-1}(e_{n-1}, w) = 0$, $\forall w \in \mathcal{P}^2$, basta tomarmos $e_{n-1} = \frac{v}{\|v\|}$. Em particular $g_{-1}(e_{n-1}, e_n) = 0 = g_{-1}(e_{n-1}, e_{n-1})$.

Como $g_{-1}\,|_{\mathcal{P}^2}$ é degenerada e $g_{-1}(e_{n-1}, e_{n-1}) = 0$, pela proposição (1.1.6), devemos ter $g_{-1}(e_n, e_n) \neq 0$ e ainda mais $g_{-1}(e_n, e_n) > 0$, (caso contrário, $g_{-1}\,|_{\mathcal{P}^2}$ seria não-degenerada).

pois $\exists$ dois vetores unitários em $\mathcal{P}^2$.

Suponhamos que $g_{-1}(e_n, e_n) = 1$, logo $g_{-1}\,|_{[e_n]}$ é Riemanniana, e pela proposição (1.1.4) e pela observação (1.1.5), segue que $g_{-1}\,|_{[e_n]^\perp}$ é Lorentziana. Como $e_{n-1} \in [e_n]^\perp$, existe $e_1 \in [e_n]^\perp$, $e_1 \neq 0$ tal que $g_{-1}(e_1, e_1) = 0$; o conjunto $\{e_1, e_{n-1}\}$ é linearmente independente em L^n e $\boxed{g_{-1}(e_1, e_{n-1}) \neq 0}$. Podemos supor $g_{-1}(e_1, e_{n-1}) = 1$.

Isto era de maximização de (2)$\Rightarrow$3) de 1.6.

Observamos que se $ae_1 + be_{n-1} + ce_n = 0$, então

$$a\, g_{-1}(e_1, e_1) + b\, g_{-1}(e_{n-1}, e_1) + c\, g_{-1}(e_n, e_1) = 0 \Rightarrow b = 0$$

e

$$0 = g_{-1}(ae_1, ae_1) = g_{-1}(-ce_n, -ce_n) = c^2\, g_{-1}(e_n, e_n) \Rightarrow c = 0$$

logo, $a = 0$ e $\{e_1, e_{n-1}, e_n\}$ é linearmente independente.

Ainda pela proposição (1.1.6), $g_{-1}\,|_{[e_1, e_{n-1}, e_n]}$ é Lorentziana e pela proposição (1.1.4) $g_{-1}\,|_{[e_1, e_{n-1}, e_n]^\perp}$ é Riemanniana. Podemos então, completar, o conjunto $\{e_1, e_{n-1}, e_n\}$ à

uma base especial $\{e_1, e_2, \ldots, e_{n-2}, e_{n-1}, e_n\}$ de L^ntal que $[e_2, \ldots, e_{n-2}] = [e_1, e_{n-1}, e_n]^\perp$, e satisfazendo as condições

$$g_{-1}(e_i, e_j) = \delta_{ij},\ i, j = 1, \ldots, n,\ j \neq 1,\ j \neq n-1$$

$$g_{-1}(e_1, e_1) = 0 = g_{-1}(e_{n-1}, e_{n-1}),\ g_{-1}(e_1, e_{n-1}) = 1$$

Construímos portanto, uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de L^n, satisfazendo

$$\begin{array}{rl} L^n = [e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n] & \mathcal{P}^2 = [e_{n-1}, e_n] \\ g_{-1}(e_1, e_1) = 0 = g_{-1}(e_{n-1}, e_{n-1}) & g_{-1}(e_1, e_{n-1}) = 1 \\ g_{-1}(e_i, e_j) = \delta_{ij} & i, j = 1, \ldots, n,\ i \neq 1,\ i \neq n-1 \end{array} \tag{1.8}$$

Temos, então

$$\begin{aligned} 1 &= g_{-1}(e_1, e_{n-1}) = g_{-1}(\mathcal{O}e_1, \mathcal{O}e_{n-1}) = \\ &= g_{-1}(a_{11}e_1 + \cdots + a_{n1}e_n, e_{n-1}) = a_{11}\, g_{-1}(e_1, e_{n-1}) = \\ &= a_{11} \\ 0 &= g_{-1}(e_i, e_{n-1}) = g_{-1}(\mathcal{O}e_i, \mathcal{O}e_{n-1}) = \\ &= g_{-1}(a_{1i}e_1 + \cdots + a_{ni}e_n, e_{n-1}) = a_{1i}\, g_{-1}(e_1, e_{n-1}) = \\ &= a_{1i},\ i = 2, \ldots, n-2 \\ 0 &= g_{-1}(e_i, e_n) = g_{-1}(\mathcal{O}e_i, \mathcal{O}e_n) = \\ &= g_{-1}(a_{1i}e_1 + \cdots + a_{ni}e_n, e_n) = a_{ni}\, g_{-1}(e_n, e_n) = \\ &= a_{ni},\ i = 1, \ldots, n-2 \end{aligned}$$

e portanto, nesta base

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & & \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-2} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sendo

$$\begin{aligned} 0 &= g_{-1}(e_1, e_1) = g_{-1}(\mathcal{O}e_1, \mathcal{O}e_1) = \\ &= g_{-1}(e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n-1,1}e_{n-1}\,,\, e_1 + a_{21}e_2 + \cdots + a_{n-1,1}e_{n-1}) = \\ &= 2a_{n-1,1}\, g_{-1}(e_1, e_{n-1}) + a_{21}^2\, g_{-1}(e_2, e_2) + \cdots + a_{n-2,1}^2\, g_{-1}(e_{n-2}, e_{n-2}) \end{aligned}$$

isto é, $2a_{n-1,1} + a_{21}^2 + \cdots + a_{n-2,1}^2 = 0$, se $n \geq 4$ ou $2a_{n-1,1} = 0$, se $\boxed{n = 3.}$

$\Rightarrow \mathcal{O} = Id$

Capítulo 2

ESPAÇOS DE CURVATURA CONSTANTE

2.1 Introdução.

Um **espaço de curvatura constante** é uma variedade Riemanniana $(\overline{M}^n(c), g)$ de curvatura seccional constante $K = c$, ou seja, o valor de K não depende do ponto $x \in M$, nem da secção plana $\varrho \subset T_xM^n$ onde é computado.

Aparecem como exemplos clássicos de espaços de curvatura constante $c = 0$ e $c > 0$, de dimensão n, respectivamente, o espaço euclidiano $\overline{M}^n(0) = I\!R^n$ com a métrica Riemanniana usual e a n-esfera $\overline{M}^n(c) = S^n(1/\sqrt{c})$ de raio $1/\sqrt{c}$ do espaço euclidiano $I\!R^{n+1}$, com a métrica induzida. O exemplo clássico para um espaço de curvatura constante $c < 0$ é o espaço hiperbólico n-dimensional $\mathcal{H}^n(c)$ (veja seção 2.3). As variedades $I\!R^n$, $S^n(c)$ e $\mathcal{H}^n(c)$ são completas e simplesmente conexas. Observamos no final deste capítulo (veja seção 2.5) que estas são essencialmente as únicas variedades Riemannianas completas, simplesmente conexas, com curvatura seccional constante.

2.2 Considerações sobre isometrias em espaços de curvatura constante.

A propriedade importante dos espaços de curvatura constante está no fato deles possuirem um número suficientemente grande de isometrias locais. É o que nos mostram as proposições que enunciamos a seguir.

Proposição 2.2.1 *Sejam M e $\tilde{M}$ espaços de mesma curvatura constante e de mesma dimensão n. Sejam $p \in M$ e $\tilde{p} \in \tilde{M}$. Dadas bases ortonormais $\{e_j\}$ de T_pM e $\{\tilde{e}_j\}$ de $T_{\tilde{p}}\tilde{M}$, $j = 1, \ldots, n$, existem vizinhanças $V \subset M$ de p, e $\tilde{V} \subset \tilde{M}$ de $\tilde{p}$, e uma isometria $f : V \longrightarrow \tilde{V}$ tal que $df_p(e_j) = \tilde{e}_j$.*

Proposição 2.2.2 *Seja M um espaço de curvatura constante e sejam p e q dois pontos quaisquer de M. Sejam $\{e_j\}$ e $\{f_j\}$ bases ortonormais arbitrárias de T_pM e T_qM, respectivamente. Então existem U vizinhança de p e V vizinhança de q, e uma isometria $g : U \longrightarrow V$, tal que $dg_p(e_j) = f_j$.*

Uma demonstração desses resultados, pode ser encontrada em [7].

2.3 Generalidades sobre $\mathcal{H}^n(c)$.

Tomemos a hipersuperfície de L^{n+1}

$$\mathcal{H}^n(c) = \{x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in L^{n+1} \mid g_{-1}(x,x) = 1/c, x_0 > 0\}$$

para c real negativo. $\mathcal{H}^n(c)$ é uma subvariedade de L^{n+1}, denominada **espaço hiperbólico de dimensão n.**

2.3.1 O espaço tangente $T_x\mathcal{H}^n(c)$.

Para cada vetor $v \in T_x\mathcal{H}^n(c)$, consideremos uma curva

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{H}^n(c), \text{ tal que } \alpha(0) = x,\ \dot{\alpha}(0) = v$$

Então, para todo $t \in I$

$$g_{-1}(\alpha(t), \alpha(t)) = 1/c \Longrightarrow g_{-1}(\dot{\alpha}(t), \alpha(t)) = 0$$

e, em particular, $g_{-1}(v, x) = 0$.

Seja $F : T_xL^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(v) = g_{-1}(v, x),\ v \in T_xL^{n+1}$$

Temos

$$T_x\mathcal{H}^n(c) \subset \ker F = \{v \in T_xL^{n+1} \mid g_{-1}(v,x) = 0\}$$

e

$$\dim T_x\mathcal{H}^n(c) = \dim \ker F = n$$

Logo,

$$T_x\mathcal{H}^n(c) = \{v \in T_xL^{n+1} \mid g_{-1}(v,x) = 0\} = [x]^{\perp}$$

onde consideramos $x \in T_xL^{n+1}$.

A métrica em $\mathcal{H}^n(c)$ induzida por g_{-1} é positiva-definida , isto é, $g_{-1}\mid_{\mathcal{H}^n(c)}$ é Riemanniana.

De fato, $g_{-1}(x,x) = 1/c < 0$, implica que $g_{-1}\mid_{[x]}$ é não-degenerada de índice 1 e $L^{n+1} = [x] \oplus [x]^{\perp}$ e pela proposição (1.1.4) $g_{-1}\mid_{[x]^{\perp}}$ é positiva-definida.

2.3.2 A curvatura de $\mathcal{H}^n(c)$.

Tomemos a parametrização de $\mathcal{H}^n(c)$ dada pela projeção

carta

$$\begin{array}{rccc} x: & \mathcal{H}^n(c) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (x_0, x_1, \ldots, xn) & \longmapsto & (x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

Sua inversa, x^{-1}, é uma carta (global) para $\mathcal{H}^n(c)$

parametrização

$$\begin{array}{rccc} x^{-1}: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathcal{H}^n(c) \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (x_0, x_1, \ldots, xn) \end{array}$$

onde

$$x_0 = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^n x_i^2 - 1/c}$$

Temos

$$dx_p^{-1} U_i = \tfrac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n, \qquad \forall p \in \mathcal{H}^n(c)$$

sendo $\{U_1, \ldots, U_n\}$ base canônica de $\mathbb{R}^n$e $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ base de $T_p\mathcal{H}^n(c)$ tal que

$$\tfrac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{x_i}{\sqrt{\sum_{\ell=1}^n x_\ell^2 - \frac{1}{c}}}, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0 \right) \in L^{n+1}$$

$$(g_{-1})_{ij} = g_{-1}\left(\tfrac{\partial}{\partial x_i}, \tfrac{\partial}{\partial x_j}\right) = -\frac{x_i x_j}{x_0^2} + \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n$$

e $\xi(p) = \frac{p}{\|p\|} = \sqrt{-c}\, p$ é a normal unitária a $T_p\mathcal{H}^n(c)$ no ponto p, ou melhor,

$$\xi(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \sqrt{-c}\,(x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

com $x_0^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 1/c$.

O operador de Weingarten associado a ξ é $\mathcal{A}^\xi X = -(\tilde{\nabla}_X \xi)^\top$, onde $\tilde{\nabla}$ é a conexão Levi-Civita de L^{n+1} e $X \in \chi(\mathcal{H}^n(c))$.

Temos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\xi \tfrac{\partial}{\partial x_i} &= -\left(\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \sqrt{-c}\,(x_0, x_1, \ldots, x_n) \right)^\top = \\ &= -\sqrt{-c} \left(\frac{x_i}{\sqrt{\sum_{\ell=1}^n x_\ell^2 - \frac{1}{c}}}, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0 \right) = \\ &= -\sqrt{-c}\, \tfrac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Logo,

$$(\mathcal{A}^\xi)_p = -\sqrt{-c}\, \mathrm{id}_{T_p\mathcal{H}^n(c)} \tag{2.1}$$

Pela equação (1.3) os símbolos de Christoffel de L^{n+1} são todos nulos e por isso o tensor de curvatura de L^{n+1} é identicamente nulo.

Chamando de $\overline{R}$ o tensor de curvatura de $\mathcal{H}^n(c)$, a equação de Gauss fica:

$$\begin{aligned} g_{-1}(\overline{R}(X,Y)Z,W) &= g_{-1}(\mathcal{A}Y,Z)\,g_{-1}(\mathcal{A}X,W) - g_{-1}(\mathcal{A}X,Z)\,g_{-1}(\mathcal{A}Y,W) = \\ &= g_{-1}(-\sqrt{-c}Y,Z)\,g_{-1}(-\sqrt{-c}X,W) - \\ &\quad - g_{-1}(-\sqrt{-c}X,Z)\,g_{-1}(-\sqrt{-c}Y,W) = \\ &= -c(\,g_{-1}(Y,Z)\,g_{-1}(X,W) - g_{-1}(X,Z)\,g_{-1}(Y,W)) \\ &\quad \forall p \in \mathcal{H}^n(c),\ \forall X,Y,Z,W \in T_p\mathcal{H}^n(c) \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} g_{-1}(\overline{R}(X,Y)X,Y) &= c(-\,g_{-1}(Y,X)\,g_{-1}(X,Y) + g_{-1}(X,X)\,g_{-1}(Y,Y)) \\ &= c\,g_{-1}(X\wedge Y, X\wedge Y),\ \forall p \in \mathcal{H}^n(c),\ \forall X,Y \in T_p\mathcal{H}^n(c) \end{aligned}$$

A curvatura seccional do plano gerado pelos vetores X e Y, tangentes a $\mathcal{H}^n(c)$ em p, é então dada por

$$\frac{g_{-1}(\overline{R}(X,Y)X,Y)}{g_{-1}(X\wedge Y, X\wedge Y)} = c$$

ou seja, $\mathcal{H}^n(c)$ é variedade Riemanniana de curvatura constante negativa c.

2.3.3 Isometrias de $\mathcal{H}^n(c)$.

Lema 2.3.3.1 *Sejam $f,h : M \longrightarrow N$ isometrias da variedade Riemanniana conexa M na variedade Riemanniana N. Se existe um ponto $p \in M$ tal que $f(p) = h(p)$ e $(df)_p = (dh)_p$, então $f = h$.*

Demonstração. Considere a isometria $\phi = f^{-1} \circ h : M \longrightarrow M$ e observe que

$$\phi(p) = p \ \text{ e } \ (d\phi)_p = (df^{-1})_{h(p)} \circ (dh)_p = \mathrm{id}_{T_pM}$$

Seja V uma vizinhança totalmente normal de p em M e seja $q \in V$. Então, existe um único $v \in T_pM$ tal que $\gamma(t) = \exp_p tv$ é a geodésica minimizante ligando p a q.

Seja $r = \phi(q)$. Como ϕ é isometria, $\phi \circ \gamma$ é geodésica minimizante ligando $\phi(p) = p$ a $\phi(q) = r$ e $r \in V$; então, novamente pelo fato de V ser totalmente normal, $(\phi\circ\gamma)(t) = \exp_p tw$, onde w é o único vetor tal que $\exp_p w = r$.

Então,

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)(0) = w$$

e, por outro lado,

$$\frac{d}{dt}(\phi \circ \gamma)(t)\,|_{t=0} = (d\phi)_p\dot{\gamma}(0) = (d\phi)_p v = v$$

portanto $w = v$ e segue que $r = q$, isto é, $\phi(q) = q$ e, como q é arbitrário, $\phi\,|_V = \mathrm{id}_v$.

Como M é conexa, qualquer ponto $r \in M$ pode ser ligado a p por um conjunto finito de tais vizinhanças com a propriedade de que o centro de cada uma delas está contido na anterior. Segue que $\phi(r) = r$, para todo $r \in M$. Logo $\phi = \mathrm{id}_M$ e $f = h$.

□

Proposição 2.3.3.2 *As isometrias de $\mathcal{H}^n(c)$ são as aplicações $\mathcal{O} \in O_1(n+1)$ que deixam invariante o conjunto*

$$\mathcal{H}^n(c) = \{p = (p_0, p_1, \ldots, p_n) \in L^{n+1} \mid p_0 > 0 \ \ e \ \ g_{-1}(p,p) = 1/c\}$$

Demonstração. Seja $\mathcal{O} \in O_1(n+1)$ isometria de L^{n+1} que deixa invariante o conjunto $\mathcal{H}^n(c)$, isto é, $\mathcal{O}(p) \in \mathcal{H}^n(c)$ para todo $p \in \mathcal{H}^n(c)$. Então $\mathcal{O}$ é isometria do espaço hiperbólico, pela definição de isometria.

Reciprocamente, consideremos uma isometria $\tilde{\mathcal{O}}$ de $\mathcal{H}^n(c)$. Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de $T_p\mathcal{H}^n(c)$, $p \in \mathcal{H}^n(c)$ fixado, e sejam $w_i = (d\tilde{\mathcal{O}})_p(v_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Então $\{w_1, \ldots, w_n\}$ é base ortonormal de $T_{\tilde{\mathcal{O}}(p)}\mathcal{H}^n(c)$ e, além disso, $g_{-1}(p, v_i) = 0$ e $g_{-1}(\tilde{\mathcal{O}}(p), w_i) = 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

Assim $\{\sqrt{-c}\,p, v_1, \ldots, v_n\}$ é base ortonormal de T_pL^{n+1} e $\{\sqrt{-c}\,\tilde{\mathcal{O}}(p), w_1, \ldots, w_n\}$ é base ortonormal de $T_{\tilde{\mathcal{O}}(p)}L^{n+1}$.

Consideremos a aplicação linear $\mathcal{O} : L^{n+1} \longrightarrow L^{n+1}$ definida por

$$\begin{aligned} &\mathcal{O}(v_i) = w_i, \ i = 1, \ldots, n \\ &\mathcal{O}(p) = \tilde{\mathcal{O}}(p) \end{aligned}$$

Pelo teorema (1.2.1), $\mathcal{O} \in O_1(n+1)$.

Se $q \in L^{n+1}$ é tal que $g_{-1}(q,q) = 1/c$, então, $g_{-1}(\mathcal{O}(q), \mathcal{O}(q)) = g_{-1}(q,q) = 1/c$.

Portanto, $\mathcal{O}$ deixa o hiperbolóide $\{q \mid g_{-1}(q,q) = 1/c\}$ invariante. Por outro lado, sendo $\mathcal{O}$ contínua e $p, \mathcal{O}(p) \in \mathcal{H}^n(c)$, temos que $\mathcal{O}(\mathcal{H}^n(c)) = \mathcal{H}^n(c)$. Logo, $\mathcal{O}$ é isometria de $\mathcal{H}^n(c)$ e, pelo lema (2.3.3.1), $\mathcal{O} = \tilde{\mathcal{O}}$.

□

Indicaremos por $O_1^+(n+1)$ o conjunto das isometrias de $\mathcal{H}^n(c)$.

2.3.4 A geometria do espaço hiperbólico.

2.3.4.1 Geodésicas

Seja $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{H}^n(c)$ geodésica parametrizada pelo comprimento de arco em $\mathcal{H}^n(c)$. Denotando por $\overline{\nabla}$ a conexão Riemanniana de $\mathcal{H}^n(c)$, segue por (1.3)

$$\begin{aligned} &(\overline{\nabla}_{\dot\alpha(t)}\dot\alpha(t))^{\top} = 0, \ \forall t \in I \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ & \ddot\alpha(t) \in L^{n+1} \text{ é normal a } T_{\alpha(t)}\mathcal{H}^n(c) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \ & \exists \lambda : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid \ddot\alpha(t) = \lambda(t)\alpha(t) \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} g_{-1}(\dot\alpha(t), \alpha(t)) = 0 \ \Rightarrow \ & g_{-1}(\ddot\alpha(t), \alpha(t)) = -\,g_{-1}(\dot\alpha(t), \dot\alpha(t)) \Rightarrow \\ \Rightarrow \ & \lambda(t)\,g_{-1}(\alpha(t), \alpha(t)) = -1 \Rightarrow \lambda(t) = -c \end{aligned}$$

Segue que uma curva α, parametrizada pelo comprimento de arco, é geodésica em $\mathcal{H}^n(c)$, se e somente se,

$$\ddot\alpha(t) + c\alpha(t) = 0$$

ou seja,

$$\alpha(t) = (\cosh\sqrt{-c}\,t)C_1 + \frac{1}{\sqrt{-c}}(\sinh\sqrt{-c}\,t)C_2,\ t \in \mathbb{R},\ C_1, C_2 \in L^{n+1}$$

Impondo condições iniciais $\alpha(0) = p$ e $\dot{\alpha}(0) = v$, $v \in T_p\mathcal{H}^n(c)$, $\|v\| = 1$, a geodésica de $\mathcal{H}^n(c)$ que passa por p com velocidade inicial v , isto é,

$$\alpha(t) = (\cosh\sqrt{-c}\,t)p + \frac{1}{\sqrt{-c}}(\sinh\sqrt{-c}\,t)v, t \in \mathbb{R}$$

está inteiramente contida no plano que passa pela origem, gerado por p e v.

Desse modo, as geodésicas $\alpha : I \longrightarrow \mathcal{H}^n(c)$, são as intesecções $\mathcal{H}^n(c) \cap \Pi$, onde Π é o plano de L^{n+1} gerado por $\alpha(0)$ e $\dot{\alpha}(0)$ e que passa pela origem.

Como uma subvariedade é totalmente geodésica, se toda geodésica da variedade, tangente a essa subvariedade em um ponto, está totalmente contida nessa subvariedade, segue também que as k-subvariedades totalmente geodésicas de $\mathcal{H}^n(c)$ são intersecções $\mathcal{H}^n(c) \cap \mathcal{V}^{k+1}$, onde $\mathcal{V}^{k+1}$ é subespaço vetorial de L^{n+1}.

2.3.4.2 Esferas geodésicas.

Definição 2.3.4.2.1 *Dados um ponto $p \in \mathcal{H}^n(c)$, um número real $r > 0$ e um conjunto $\{v_1, \ldots, v_{k+1}\}$ de vetores ortonormais em $T_p\mathcal{H}^n(c)$, $k = 1, \ldots, n-1$, o conjunto*

$$S_p^k(r, V) = \left\{ x(t) = \cosh(\sqrt{-c}\,r)p + \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\sinh(\sqrt{-c}\,r)}{\sqrt{-c}} \frac{t_i}{|t|} v_i,\ t = (t_1, \ldots, t_{k+1}) \in \mathbb{R}^{k+1} \setminus \{0\} \right\}$$

onde $V = [v_1, \ldots, v_{k+1}]$ e $|t| = \left(\sum_{i=1}^{k+1} (t_i)^2\right)^{1/2}$, é uma subvariedade de $\mathcal{H}^n(c)$, de dimensão k, chamada **k-esfera geodésica de raio r e centro p.**

Observe que, para cada vetor unitário $v = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{t_i}{|t|} v_i$ em $T_p\mathcal{H}^n(c)$, o ponto $x(t)$ correspondente está na geodésica parametrizada pelo comprimento de arco

$$\gamma(t) = \cosh(\sqrt{-c}\,t)p + \frac{\sinh(\sqrt{-c}\,t)}{\sqrt{-c}} v$$

onde $\gamma(0) = p$ e $\gamma(r) = x(t)$, isto é, $x(t) = \exp_p(rv)$.

Logo,

$$S_p^k(r, V) \subset [p, v_1, \ldots, v_{k+1}] \cap \mathcal{H}^n(c)$$

Além disso, podemos escrever, para cada $t = (t_1, \ldots, t_{k+1})$,

$$x(t) = \left(\cosh(\sqrt{-c}\,r)p + \frac{\sinh(\sqrt{-c}\,r)}{\sqrt{-c}} v_1\right) + \frac{\sinh(\sqrt{-c}\,r)}{\sqrt{-c}} \left(\left(\frac{t_1}{|t|} - 1\right) v_1 + \sum_{i=2}^{k+1} \frac{t_i}{|t|} v_i\right)$$

e $S_p^k(r, V)$ está inteiramente contida no $(k+1)$-hiperplano afim de L^{n+1}

$$\overline{\mathcal{P}}^{k+1} = \cosh(\sqrt{-c}\,r)p + \frac{\sinh(\sqrt{-c}\,r)}{\sqrt{-c}} v_1 + [v_1, \ldots, v_{k+1}]$$

Como $\overline{\mathcal{P}}^{k+1} \cap \mathcal{H}^n(c) \supset S_p^k(r,V)$ e $\overline{\mathcal{P}}^{k+1} \cap \mathcal{H}^n(c)$ é subvariedade k-dimensional, segue que

$$S_p^k(r,V) = \overline{\mathcal{P}}^{k+1} \cap \mathcal{H}^n(c) \tag{2.2}$$

e observando que o $(k+1)$-hiperplano afim $\overline{\mathcal{P}}^{k+1}$ é ortogonal a p, $\overline{\mathcal{P}}^{k+1}$ só intercepta uma componente conexa do hiperbolóide $\{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in L^{n+1} \mid g_{-1}(x,x) = 1/c \text{ e } x_0 > 0\}$.

Notemos, ainda, que

$$S_p^k(r,V) \subset [p, v_1, \ldots, v_{k+1}] \cap \mathcal{H}^n(c)$$

significa que $S_p^k(r,V)$ está contida na $(k+1)$-subvariedade totalmente geodésica, $[p, v_1, \ldots, v_{k+1}] \cap \mathcal{H}^n(c)$.

2.3.4.3 Horoesferas.

Definição 2.3.4.3.1 *Tomemos uma geodésica de $\mathcal{H}^n(c)$ com ponto inicial $q \in \mathcal{H}^n(c)$. Para cada ponto p dessa geodésica, consideremos a $(n-1)$-esfera geodésica com centro p e que passa por q. Quando seu centro p tende a infinito, esta esfera tende a um conjunto limite, denominado* **hiper-horoesfera de** $\mathcal{H}^n(c)$.

Seja $\alpha : [0, +\infty[\longrightarrow \mathcal{H}^n(c)$ a geodésica parametrizada pelo comprimento de arco com $\alpha(0) = q$, escolhida para fazer variar os centros das $(n-1)$-esferas geodésicas e consideremos campos ortonormais $v_1, \ldots, v_n$, diferenciáveis ao longo de α, satisfazendo para todo $t \geq 0$,

$$v_1(t) = \dot{\alpha}(t), \;\; g_{-1}(v_i(t), v_j(t)) = \delta_{ij}, \;\; g_{-1}(\alpha(t), v_i(t)) = 0, \;\; i,j = 1, \ldots, n$$

Para cada $t > 0$, tomemos o número real positivo $r(t)$ tal que $\exp_{\alpha(t)}(-r(t)v_1(t)) = q$ e consideremos a $(n-1)$-esfera geodésica de centro $\alpha(t)$ e raio $r(t)$, dada por

$$S_{\alpha(t)}^{n-1}(r(t), [v_1(t), \ldots, v_n(t)]) = \overline{\mathcal{P}}^n(\tilde{p}, t) \cap \mathcal{H}^n(c)$$

onde

$$\overline{\mathcal{P}}^n(\tilde{p}, t) = \tilde{p} + [v_1(t), \ldots, v_n(t)], \; \tilde{p} = \cosh(\sqrt{-c}\, r(t))\alpha(t) \in L^{n+1}$$

Assim, fazendo t tender a infinito, temos que $\dot{\alpha}(t)$ tende a uma direção paralela a uma geratriz do cone $x_0^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ e portanto $\overline{\mathcal{P}}^n(\tilde{p}, t)$ tende a um n-hiperplano afim $\overline{\Pi}^n$ paralelo a um n-hiperplano tangente ao cone.

Concluímos, então, que as hiper-horoesferas de $\mathcal{H}^n(c)$, são da forma $\overline{\Pi}^n \cap \mathcal{H}^n(c)$, onde, $\overline{\Pi}^n$ é um n-hiperplano afim, paralelo a uma geratriz do cone $x_0^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$, e reciprocamente, todo conjunto deste tipo é uma hiper-horoesfera de $\mathcal{H}^{n+1}(c)$.

Neste momento, passemos a definição de k-horoesfera de $\mathcal{H}^n(c)$ para $k = 1, \ldots, n-1$ e $n \geq 3$, que coincidirá com a definição de hiper- horoesfera quando $k = n-1$.

Definição 2.3.4.3.2 *Seja N^{k+1} uma $(k+1)$-subvariedade totalmente geodésica de $\mathcal{H}^n(c)$. Como na definição anterior, tomemos uma geodésica de N^{k+1} com ponto inicial $q \in N^{k+1}$ e para cada ponto p dessa geodésica, a k-esfera geodésica com centro p, que passa por q (da definição de totalmente geodésica essa k-esfera geodésica está inteiramente contida em N^{k+1}). Fazendo p tender a infinito, o conjunto limite será denominado k-horoesfera de $\mathcal{H}^n(c)$.*

Como no caso de hiper-horoesfera, uma k-horoesfera de $\mathcal{H}^n(c)$ é da forma

$$\overline{\Pi}^{k+1} \cap \mathcal{H}^n(c) \tag{2.3}$$

onde, $\overline{\Pi}^{k+1}$ é um $(k+1)$-hiperplano afim de L^{n+1}, paralelo a uma geratriz do cone $x_0^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$, e, dessa maneira, obtemos todas as k-horoesferas de $\mathcal{H}^n(c)$.

2.3.4.4 Superfícies equidistantes.

Definição 2.3.4.4.1 *Seja N^{n-1} uma hipersuperfície totalmente geodésica de $\mathcal{H}^n(c)$. Vimos no ítem (2.3.4.1) que podemos escrever $N^{n-1} = \mathcal{V}^n \cap \mathcal{H}^n(c)$, onde $\mathcal{V}^n$ é um subespaço vetorial de L^{n+1}. Tomemos $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) \in L^{n+1}$ não nulo, tal que*

Tomando $\xi \perp \mathcal{V}^n$.

$$g_{-1}(\xi, p) = -\xi_0 p_0 + \cdots + \xi_n p_n = 0, \ \forall p = (p_0, p_1, \ldots, p_n) \in N^{n-1}$$

isto é, $\xi \in T_p\mathcal{H}^n(c)$, $\forall p \in N^{n-1}$.

Para cada real $d > 0$ consideremos o conjunto

$$HE(N, d) = \{\beta_p(d), p \in N\}$$

onde $\beta_p(s) = (\cosh\sqrt{-c}s)p + \frac{\sinh\sqrt{-c}\,s}{\sqrt{-c}}\xi$, $s \in \mathbb{R}$ é a geodésica em $\mathcal{H}^n(c)$ parametrizada pelo comprimento de arco, que passa por p com velocidade ξ.

É claro que esta geodésica é ortogonal a N, portanto $\beta_p(\mathbb{R}) = [p, \xi] \cap \mathcal{H}^n(c)$ e $HE(N, d)$ é o conjunto de pontos de $\mathcal{H}^n(c)$ a uma distância intrínseca fixa d de N.

Notemos que $HE(N, d) \subset \overline{\mathcal{V}}^n = \frac{\sinh\sqrt{-c}\,d}{\sqrt{-c}}\xi + \mathcal{V}^n$. Vamos mostrar que

$$HE(N, d) = \overline{\mathcal{V}}^n \cap \mathcal{H}^n(c).$$

Basta verificarmos que se $q \in \overline{\mathcal{V}}^n \cap \mathcal{H}^n(c)$, então

$$q \in \overline{\mathcal{V}}^n \quad \Rightarrow \quad q = \frac{\sinh\sqrt{-c}\,d}{\sqrt{-c}}\xi + w, \ w \in \mathcal{V}^n$$

$$q \in \mathcal{H}^n(c) \quad \Rightarrow \quad 1/c = g_{-1}(q, q) = \frac{\sinh^2\sqrt{-c}\,d}{-c} + g_{-1}(w, w) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad g_{-1}(w, w) = \frac{\sinh^2\sqrt{-c}\,d + 1}{c} = \frac{\cosh^2\sqrt{-c}\,d}{c}$$

Podemos escrever

$$q = \frac{\sinh\sqrt{-c}\,d}{\sqrt{-c}}\xi + \cosh\sqrt{-c}\,d\frac{w}{\cosh\sqrt{-c}\,d}$$

onde

$$g_{-1}\left(\frac{w}{\cosh\sqrt{-c}\,d},\frac{w}{\cosh\sqrt{-c}\,d}\right)=\frac{1}{\cosh^2\sqrt{-c}\,d}\,g_{-1}(w,w)=\frac{1}{c}$$

Logo, $\frac{w}{\cosh\sqrt{-c}\,d}\in\mathcal{H}^n(c)\cap\mathcal{V}^n=N^{n-1}$*,e, portanto,* $q\in HE(N,d)$.

Concluímos, então, que $HE(N,d)$ *é uma subvariedade de codimensão* 1 *de* $\mathcal{H}^n(c)$*, denominada* **hipersuperfície equidistante.**

Observemos que $\overline{\mathcal{V}}^n$ sempre intercepta as duas componentes conexas de $\mathcal{H}^n(c)$.

Reciprocamente, uma subvariedade do tipo $\overline{\mathcal{V}}^n\cap\mathcal{H}^n(c)$, onde $\overline{\mathcal{V}}^n$ é um hiperplano afim de L^{n+1} que intercepta as duas componentes conexas de $\mathcal{H}^n(c)$, é uma hipersuperfície equidistante, pois existe $\mathcal{V}^n\cap\mathcal{H}^n(c)$ hipersuperfície totalmente geodésica da qual os pontos de $\overline{\mathcal{V}}^n\cap\mathcal{H}^n(c)$, distam um mesmo valor fixo $d>0$.

Vamos, agora, definir k-superfície equidistante de $\mathcal{H}^n(c)$ para $k=1,\ldots,n-1$, $n\geq 3$. A definição será dada de modo que, quando $k=n-1$, a $(n-1)$-superfície equidistante é a hipersuperfície equidistante.

Definição 2.3.4.4.2 *Consideremos* N^{k+1} *uma* $(k+1)$*-subvariedade totalmente geodésica de* $\mathcal{H}^n(c)$ *e o* $(k+2)$*-subespaço vetorial* $\mathcal{V}^{k+2}\subset L^{n+1}$ *que a define , isto é,* $N^{k+1}=\mathcal{V}^{k+2}\cap\mathcal{H}^n(c)$*. Tomemos ,ainda, uma k-subvariedade totalmente geodésica* $N^k=\mathcal{V}^{k+1}\cap\mathcal{H}^n(c)$*, de modo que* $\mathcal{V}^{k+1}$ *é subespaço vetorial de* $\mathcal{V}^{k+2}$*, ou seja,* N^k *é subvariedade de codimensão* 1 *de* N^{k+1}*. Como foi feito para hipersuperfície equidistante, para cada real* $d>0$*, consideramos a subvariedade de codimensão* 1 *de* N^{k+1}

$$HE^k(N^k,d)=\{\beta_p(d),p\in N^k\}$$

onde

$$\beta_p(s)=(\cosh\sqrt{-c}\,s)p+\frac{\sinh\sqrt{-c}\,s}{\sqrt{-c}}\xi_k,\ s\in I\!R$$

e ξ_k *normal a* N^k *e tangente a* N^{k+1}*, são encontrados como antes. Chamaremos* $HE^k(N^k,d)$ *de* **k-superfície equidistante de** $\mathcal{H}^n(c)$.

Notemos que, neste caso, também obtemos a equivalência: M^k é k-superfície equidistante de $\mathcal{H}^n(c)$, se e somente se, existe $\overline{\mathcal{V}}^{k+1}$, $(k+1)$-subespaço afim de L^{n+1}, que intercepta as duas componentes conexas do hiperbolóide $\{x\in\mathcal{V}^{k+3}:g_{-1}(x,x)=1/c\}$ e

$$M^k\doteq\overline{\mathcal{V}}^{k+1}\cap\mathcal{H}^n(c) \tag{2.4}$$

2.3.4.5 Subvariedades umbílicas.

Seja M uma k-subvariedade de $\mathcal{H}^n(c)$, $k=1,\ldots,n$. Denotemos por $\overline{\nabla}$e ∇ as conexões de Levi-Civita de $\mathcal{H}^n(c)$ e M, respectivamente, e por $\overline{R}$ o tensor de curvatura de $\mathcal{H}^n(c)$.

Vamos usar a notação que segue:

A **segunda forma fundamental** α de M é dada pela fórmula de Gauss

$$\overline{\nabla}_XY=\nabla_XY+\alpha(X,Y);\ X,Y\in\chi(M) \tag{2.5}$$

o **operador de Weingarten de** M, associado a $\xi \in T_pM^{\perp}, p \in M$ por

$$\mathcal{A}^{\xi}X = -(\overline{\nabla}_X\xi)^{\top},\ X \in \chi(M) \tag{2.6}$$

e portanto vale a relação

$$g_{-1}(\mathcal{A}^{\xi}X, Y) = g_{-1}(\alpha(X,Y),\xi),\ Y \in \chi(M) \tag{2.7}$$

O **vetor curvatura média** $h(p)$ de M em $p \in M$ é

$$h(p) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha(X_j, X_j) \tag{2.8}$$

onde $X_1, \ldots, X_k \in T_pM$ e $g_{-1}(X_i, X_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, k$.
Denotaremos por $\nabla^{\perp}$ a conexão normal de M , isto é,

$$\nabla^{\perp}_X\xi = (\overline{\nabla}_X\xi)^{\perp},\ \xi \in (\chi(M))^{\perp},\ X \in \chi(M)$$

A equação de Codazzi é

$$(R(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_X)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_Y)(X,Z),\ \forall X,Y,Z \in \chi(M)$$

Por outro lado,

$$R(X,Y)Z = c(X \wedge Y)Z = c\,g_{-1}(Y,Z)X - c\,g_{-1}(X,Z)Y,\ \forall X,Y,Z \in \chi(M)$$

pois, $\mathcal{H}^n(c)$ tem curvatura seccional constante c.
Logo, $(R(X,Y)Z)^{\perp} = 0 \Longrightarrow$

$$(\nabla^{\perp}_X\alpha)(Y,Z) = (\nabla^{\perp}_Y\alpha)(X,Z),\ \forall X,Y,Z \in \chi(M) \tag{2.9}$$

Definição 2.3.4.5.1 *Dizemos que* M *é* **subvariedade umbílica de** $\mathcal{H}^n(c)$ *se para todo* $p \in M$

$$\mathcal{A}^{\xi} = \lambda_{\xi}\, id_{T_pM}$$

para todo $\xi \in (T_pM)^{\perp}$, *com* λ_{ξ} *real* .

De (2.5), (2.6), (2.7) e (2.8) obtemos as relações equivalentes:

$$\left.\begin{array}{l} (i)\ M \text{ é subvariedade umbílica de } \mathcal{H}^n(c). \\ (ii) \text{ Para todo } p \in M, \mathcal{A}^{\xi} = g_{-1}(h(p),\xi)\, id_{T_pM},\ \forall \xi \in (T_pM)^{\perp}. \\ (iii) \text{ Para todo } p \in M, \alpha(X,Y) = g_{-1}(X,Y)\, h(p),\ \forall X,Y \in T_pM \end{array}\right\} \tag{2.10}$$

Definição 2.3.4.5.2 *Dizemos que uma subvariedade* M *de* $\mathcal{H}^n(c)$ *tem* **vetor curvatura média** h **paralelo** *se*

$$\nabla^{\perp}_X h = 0,\ \textit{para todo } X \in \chi(M)$$

Nêste caso, temos que $\|h\|$ *é constante ao longo de* M, *ou seja,* $\|h(p)\| = \lambda$, $\forall p \in M$.

Proposição 2.3.4.5.3 *Se M^k $(k \geq 2)$ é subvariedade umbílica de $\mathcal{H}^n(c)$, então, o vetor curvatura média h é paralelo.*

Demonstração. Sejam $X, Y, Z \in \chi(M)$, quaisquer. Pelas três equivalências em (2.10) e por (2.9), temos:

$$\begin{aligned}
(\nabla^{\perp}_X \alpha)(Y,Z) &= \nabla^{\perp}_X \alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z) = \\
&= \nabla^{\perp}_X (g_{-1}(Y,Z)h) - g_{-1}(\nabla_X Y, Z)h - g_{-1}(Y, \nabla_X Z)h = \\
&= g_{-1}(Y,Z)\nabla^{\perp}_X h = \\
&= g_{-1}(X,Z)\nabla^{\perp}_Y h, \ \forall X, Y, Z \in \chi(M)
\end{aligned}$$

Tomando, agora, $Y = Z$ tal que $g_{-1}(Y,X) = 0$ (note que aqui é essencial que $k \geq 2$) vem, $\nabla^{\perp}_X h = 0$, $\forall X \in \chi(M)$, isto é, h é paralelo.

□

Observemos que se $\lambda = 0$, por (2.10), $\alpha \equiv 0$ e M é totalmente geodésica.

Determinaremos a seguir as subvariedades umbílicas conexas M^k de $\mathcal{H}^n(c)$. Observemos primeiro que existe um mergulho natural de L^{n+1} em L^{n+1+r} dado por

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n) \longmapsto (a_0, \ldots, a_n, 0, \ldots, 0)$$

Este mergulho, além de ser isométrico, é totalmente geodésico (leva geodésicas em geodésicas) e deste se deduz um mergulho natural, totalmente geodésico de $\mathcal{H}^n(c)$ em $\mathcal{H}^{n+r}(c)$. Notemos, ainda, que a imagem natural de $\mathcal{H}^n(c)$ em $\mathcal{H}^{n+r}(c)$ é a intersecção de $\mathcal{H}^{n+r}(c)$ com a imagem natural de L^{n+1} em L^{n+1+r}.

Fixemos um ponto $p \in M$.

Pela proposição (2.2.2), existe uma isometria local $\varphi : U \subset \mathcal{H}^n(c) \to V \subset \mathcal{H}^n(c)$ onde U é vizinhança de p em $\mathcal{H}^n(c)$ tal que

$$\varphi(p) = \frac{1}{\sqrt{-c}} U_0 = q \in V, \ U_0 = (1, 0, \ldots, 0) \in L^{n+1}, \tag{2.11}$$

$$\varphi_* T_p M \text{é a imagem natural de } \mathbb{R}^k \text{ em } \mathbb{R}^n \sim T_q \mathcal{H}^n(c), \tag{2.12}$$

e

$$h(\varphi(p)) = \lambda U_{k+1}, \tag{2.13}$$

onde $U_{k+1} = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0) \in T_q \mathcal{H}^n(c)$, com 1 na $(k+1)$-ésima posição e $h(\varphi(p))$ é o vetor curvatura média de $\varphi(M)$ em q.

Assim $\varphi_* T_p M$ é o complemento ortogonal de $\{U_0, U_{k+1}, \ldots, U_n\}$ em L^{n+1}.

Observemos que toda isometria φ de $\mathcal{H}^n(c)$ leva subvariedades umbílicas M em subvariedades umbílicas $\varphi(M)$, pois, para cada $p \in M$

$$\overline{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* \xi = \varphi_*(\overline{\nabla}_X \xi),$$

$\forall X \in T_p M$, para todo campo ξ definido numa vizinhança de p, ortogonal a M em $\mathcal{H}^n(c)$

Então,

$$(\overline{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_*\xi)^{\top} = \sum_{j=1}^{n} g_{-1}(\overline{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_*\xi, \varphi_* X_j)\varphi_* X_j$$

onde $\{X_j : j = 1, \ldots, n\}$ é base ortonormal de T_pM.

Temos

$$g_{-1}(\overline{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_*\xi, \varphi_* X_j) = g_{-1}(\varphi_*(\overline{\nabla}_X\xi), \varphi_* X_j) = g_{-1}(\overline{\nabla}_X\xi, X_j) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\overline{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_*\xi)^{\top} = \sum_{j=1}^{n} g_{-1}(\overline{\nabla}_X\xi, X_j)\varphi_* X_j = \varphi_*(\sum_{j=1}^{n} g_{-1}(\overline{\nabla}_X\xi, X_j)X_j) = \varphi_*(\overline{\nabla}_X\xi)^{\top} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}^{\varphi_*\xi}\varphi_* X = -(\overline{\nabla}_{\varphi_* X}\varphi_*\xi)^{\top} = -\varphi_*(\overline{\nabla}_X\xi)^{\top} = \varphi_*(-\overline{\nabla}_X\xi)^{\top} = \varphi_*(\mathcal{A}^{\xi}X) = \lambda_\xi\varphi_* X$$
$$\forall X \in T_pM, \ \forall \xi \in (T_pM)^{\perp}$$

E, além disso, se $h(x)$ é vetor curvatura média de $\varphi(M)$ em x

$$h(x) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k}\alpha(\varphi_* X_j, \varphi_* X_j)$$

sendo $\{\varphi_* X_i, \ i = 1, \ldots, n\}$ uma base ortonormal de $\varphi_* T_{\varphi^{-1}(x)}\mathcal{H}^n(c)$, de maneira que $\{\varphi_* X_i, i = 1, \ldots, k\}$ é base ortonormal de $\varphi_* T_{\varphi^{-1}(x)}M$.

Por (2.7) podemos escrever para cada $j = 1, \ldots, k$,

$$\begin{aligned}\alpha(\varphi_* X_j, \varphi_* X_j) &= \sum_{\ell=k+1}^{n} g_{-1}(\alpha(\varphi_* X_j, \varphi_* X_j), \varphi_* X_\ell)\varphi_* X_\ell = \\ &= \sum_{\ell=k+1}^{n} g_{-1}(-\overline{\nabla}_{\varphi_* X_j}\varphi_* X_\ell, \varphi_* X_j)\varphi_* X_\ell\end{aligned}$$

e, obtemos

$$\begin{aligned}h(x) &= \tfrac{1}{k}\textstyle\sum_{j=1}^{k}\sum_{\ell=k+1}^{n} g_{-1}(-\overline{\nabla}_{\varphi_* X_j}\varphi_* X_\ell, \varphi_* X_j)\varphi_* X_\ell = \\ &= \varphi_*\left(\tfrac{1}{k}\textstyle\sum_{j=1}^{k}\sum_{\ell=k+1}^{n} g_{-1}(-\overline{\nabla}_{X_j}X_\ell, X_j)X_\ell\right) = \\ &= \varphi_*\tilde{h}(\varphi^{-1}(x))\end{aligned} \tag{2.14}$$

onde $\tilde{h}(\varphi^{-1}(x))$ é o vetor curvatura média de M em $\varphi^{-1}(x)$.

Seja $\sigma : I \subset \mathbb{R} \to M$ uma curva diferenciável tal que $\sigma(0) = p$ e seja Z um campo tangente a $\mathcal{H}^n(c)$, ao longo de $\varphi \circ \sigma$, isto é, $Z(t) \in T_{\varphi\circ\sigma(t)}\mathcal{H}^n(c), t \in I$, satisfazendo

$$\overline{\nabla}_t Z = \overline{\nabla}_{\frac{d}{dt}} Z = 0 \, (Z \text{ é } \overline{\nabla}\text{-paralelo}) \tag{2.15}$$

$$Z(0) \in (\varphi_* T_pM)^{\perp} = [U_{k+1}, \ldots, U_n] \tag{2.16}$$

$$g_{-1}(Z(0), h\varphi(p)) = 0 \tag{2.17}$$

isto é, Z é o transporte paralelo de $Z(0)$ satisfazendo (2.16) e (2.17) ao longo de $\varphi \circ \sigma$.

Então, podemos escrever

$$Z(t) = \varphi_* X(t) + f(t)\, h(\varphi \circ \sigma(t)) + \zeta(t),\ \forall t \in I$$

onde, para todo $t \in I$

$$X(t) \in T_{\sigma(t)}M,\ \zeta(t) \in (\varphi_* T_{\sigma(t)}M)^{\perp},\ g_{-1}(\zeta(t), h(\varphi \circ \sigma(t))) = 0 \tag{2.18}$$

Em particular para $t = 0$

$$Z(0) = \varphi_* X(0) + f(0)h(\varphi(p)) + \zeta(0) \in (\varphi_* T_p M)^{\perp} \Rightarrow \varphi_*(X(0)) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$

Temos ainda por (2.17) e (2.18)

$$\begin{aligned} g_{-1}(Z(0), h\varphi(p)) &= g_{-1}(f(0)h\varphi(p) + \zeta(0), h\varphi(p)) = \\ &= f(0)\lambda^2 + g_{-1}(h\varphi(p), \zeta(0)) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(0)\lambda^2 &= g_{-1}(Z(0), h\varphi(p)) - g_{-1}(h\varphi(p), \zeta(0)) = 0 \end{aligned}$$

Se $\lambda = 0$, definimos $f(0) = 0$.
De qualquer forma, temos

$$X(0) = 0 \text{ e } f(0) = 0 \tag{2.19}$$

Calculando a derivada do campo $Z(t)$ ao longo da curva $\varphi \circ \sigma : I \longrightarrow \varphi(M)$, por (2.15), temos

$$0 = \overline{\nabla}_t Z(t) = \overline{\nabla}_{\varphi_* \dot{\sigma}(t)} Z(t) \Longrightarrow$$

$$0 = \overline{\nabla}_{\varphi_* \dot{\sigma}(t)} \varphi_* X(t) + \dot{f}(t) h(\varphi \circ \sigma(t)) + f(t) \overline{\nabla}_{\varphi_* \dot{\sigma}(t)} h(\varphi \circ \sigma(t)) + \overline{\nabla}_{\varphi_* \dot{\sigma}(t)} \zeta(t) \tag{2.20}$$

Passemos a desenvolver separadamente cada parcela de (2.20). Pela terceira relação de (2.10) e por (2.14)

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{\varphi_* \dot{\sigma}(t)} \varphi_* X(t) &= \varphi_* \nabla_{\dot{\sigma}(t)} X(t) + \varphi_* \alpha(\dot{\sigma}(t), X(t)) = \varphi_* \nabla_t X(t) + \varphi_* \alpha(\dot{\sigma}(t), X(t)) = \\ &= \varphi_* \nabla_t X(t) + g_{-1}(\dot{\sigma}(t), X(t)) h(\varphi \circ \sigma(t)) \end{aligned}$$

Usando a fórmula de Weingarten, a proposição (2.3.4.5.3) e a terceira relação de (2.10)

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{\varphi_* \dot{\sigma}(t)} h(\varphi \circ \sigma(t)) &= -\mathcal{A}^{h(\varphi \circ \sigma(t))}(\varphi_* \dot{\sigma}(t)) + \nabla^{\perp}_{\varphi_* \dot{\sigma}(t)} h(\varphi \circ \sigma(t)) = \\ &= -\mathcal{A}^{h(\varphi \circ \sigma(t))}(\varphi_* \dot{\sigma}(t)) = -\, g_{-1}(h(\varphi \circ \sigma(t)), h(\varphi \circ \sigma(t)))\varphi_* \dot{\sigma}(t) = \\ &= -\lambda^2 \varphi_* \dot{\sigma}(t) \end{aligned}$$

Pela segunda relação de (2.10), por (2.18) e, novamente, pela fórmula de Weingarten,

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{\varphi_* \dot{\sigma}(t)} \zeta(t) &= -\mathcal{A}^{\zeta(t)}(\varphi_* \dot{\sigma}(t)) + \nabla^{\perp}_{\varphi_* \dot{\sigma}(t)} \zeta(t) = \\ &= -\, g_{-1}(h(\varphi \circ \sigma(t)), \zeta(t))\varphi_* \dot{\sigma}(t) + \nabla^{\perp}_t \zeta(t) = \\ &= \nabla^{\perp}_t \zeta(t) \end{aligned}$$

Derivando a última relação de (2.18) na direção de $\varphi_*\dot{\sigma}(t)$, pela proposição (2.3.4.5.3) e por (2.14), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{d}{dt} g_{-1}(h(\varphi\circ\sigma(t)),\zeta(t)) = \\ &= g_{-1}\left(\overline{\nabla}_{\varphi_*\dot{\sigma}(t)}h(\varphi\circ\sigma(t)),\zeta(t)\right) + g_{-1}\left(h(\varphi\circ\sigma(t)),\overline{\nabla}_{\varphi_*\dot{\sigma}(t)}\zeta(t)\right) = \\ &= g_{-1}\left(\nabla^{\perp}_{\varphi_*\dot{\sigma}(t)}h(\varphi\circ\sigma(t)),\zeta(t)\right) + g_{-1}\left(h(\varphi\circ\sigma(t)),\nabla^{\perp}_{\varphi_*\dot{\sigma}(t)}\zeta(t)\right) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$g_{-1}(h(\varphi\circ\sigma(t)),\nabla^{\perp}_{\varphi_*\dot{\sigma}(t)}\zeta(t)) = 0,\ \forall t\in I \tag{2.21}$$

Retomando (2.20), temos agora,

$$\begin{aligned} 0 &= \overline{\nabla}_t Z(t) = \\ &= \varphi_*\nabla_t X(t) - \lambda^2 f(t)\varphi_*\dot{\sigma}(t) + (\dot{f}(t) + g_{-1}(\dot{\sigma}(t),X(t)))\,h(\varphi\circ\sigma(t)) + \nabla^{\perp}_t\zeta(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 = g_{-1}(\nabla^{\perp}_t\zeta(t),\overline{\nabla}_t Z(t)) = g_{-1}(\nabla^{\perp}_t\zeta(t),\nabla^{\perp}_t\zeta(t)),\ \forall t\in I \Rightarrow \\ &\Rightarrow \overline{\nabla}_{\varphi_*\dot{\sigma}(t)}\zeta(t) = \nabla^{\perp}_t\zeta(t) = 0,\ \forall t\in I \end{aligned}$$

Mas, por (2.15) e (2.19)

$$\zeta(0) = Z(0) - f(0)h\varphi(p) = Z(0) \Rightarrow \overline{\nabla}_t Z(t) = \overline{\nabla}_{\varphi_*\dot{\sigma}(t)}Z(t) = 0,\ \forall t\in I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z(t) = \zeta(t),\ \forall t\in I$$

ou seja, o campo Z é $\overline{\nabla}$-paralelo, ortogonal a h e a $\varphi(M)$ ao longo de $\varphi\circ\sigma$ (2.22)

Temos em L^{n+1},

$$\tilde{\nabla}_t Z(t) = \overline{\nabla}_t Z(t) + c\,g_{-1}(\tilde{\nabla}_t Z(t),\varphi\circ\sigma(t))\varphi\circ\sigma(t)$$

Mas, para todo $t\in I$

$$\begin{aligned} & Z(t)\in T_{\varphi\circ\sigma(t)}\mathcal{H}^n(c) \Rightarrow g_{-1}(Z(t),\varphi\circ\sigma(t)) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow\ 0 &= \tfrac{d}{dt} g_{-1}(Z(t),\varphi\circ\sigma(t)) = g_{-1}(\tilde{\nabla}_t Z(t),\varphi\circ\sigma(t)) + g_{-1}(Z(t),\tilde{\nabla}_t\varphi\circ\sigma(t)) = \\ &= g_{-1}(\tilde{\nabla}_t Z(t),\varphi\circ\sigma(t)) + g_{-1}(Z(t),\varphi_*\dot{\sigma}(t)) \Rightarrow \\ \Rightarrow\ 0 &= g_{-1}(\tilde{\nabla}_t Z(t),\varphi\circ\sigma(t)) \end{aligned}$$

onde, a última igualdade é consequência de (2.22).

Logo,

$$\tilde{\nabla}_t Z(t) = \overline{\nabla}_t Z(t) = 0,\ \forall t\in I$$

e Z é um vetor constante em L^{n+1} , isto é, $Z(0) = Z(t)$, $\forall t\in I$, em particular

$$Z(0)\in(\varphi_*T_{\sigma(t)}M)^{\perp},\ \forall t\in I \tag{2.23}$$

Sendo M conexa, dado $y \in M$, diferente de p, existe um caminho diferenciável σ com imagem contida em M tal que $\sigma(0) = p$ e $\sigma(t_0) = y$, para algum t_0 real. Por (2.23) $Z(0) \in (\varphi_* T_y M)^{\perp}$.

Segue que, para todo $y \in M, \varphi_* T_y M$ é ortogonal ao vetor constante $Z(0)$.

Tomando $U_{k+2}, \ldots, U_n$, sucessivamente como valores iniciais de Z, finalmente concluímos que $\varphi_* T_y M$ é ortogonal a cada um dos vetores $U_{k+2}, \ldots, U_n$, para todo $y \in M$.

Vamos denotar por Z_{k+j}, $j = 2, \ldots, n-k$, os vetores tangentes a $\mathcal{H}^n(c)$ ao longo de $\varphi \circ \sigma$ que satisfazem (2.15), (2.16), (2.17) com $Z_{k+j}(0) = U_{k+j}$, $j = 2, \ldots, n-k$.

Consideremos o caso em que $\lambda \neq 0$ e mostremos que o $(k+1)$-subespaço de $T_{\varphi \circ \sigma(t)} \mathcal{H}^n(c)$, gerado por

$$\left[\varphi_{*\sigma(t)} \tfrac{\partial}{\partial x_1}(\sigma(t)), \ldots, \varphi_{*\sigma(t)} \tfrac{\partial}{\partial x_k}(\sigma(t)), h(\varphi \circ \sigma(t))\right], \; t \in I$$

é constante e igual a $[U_1, \ldots, U_k, U_{k+1}] \subset L^{n+2}$, onde $(U, x = (x_0, \ldots, x_k))$ é uma parametrização de uma vizinhança U de p em M, supondo $\sigma(I) \subset U$.

Basta, então, verificarmos que, para cada $t \in I$, existe uma matriz $M(t)$ de ordem $(k+1)$ a coeficientes reais, tal que

$$M(t) \begin{bmatrix} \varphi_{*\sigma(t)} \frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma(t)) \\ \vdots \\ \varphi_{*\sigma(t)} \frac{\partial}{\partial x_k}(\sigma(t)) \\ h(\varphi \circ \sigma(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_k \\ U_{k+1} \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

onde, os colchetes representam as matrizes de $(k+1)$-linhas por $(n+2)$-colunas, cujas linhas são compostas pelas coordenadas dos vetores de L^{n+1}, aí indicados.

Supondo (2.24) satisfeita, e que podemos derivá-la com relação a t, encontramos para todo $t \in I$

$$\dot{M}(t) \begin{bmatrix} \varphi_{*\sigma(t)} \frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma(t)) \\ \vdots \\ \varphi_{*\sigma(t)} \frac{\partial}{\partial x_k}(\sigma(t)) \\ h(\varphi \circ \sigma(t)) \end{bmatrix} + M(t) \begin{bmatrix} \overline{\nabla}_t \varphi_{*\sigma(t)} \frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma(t)) \\ \vdots \\ \overline{\nabla}_t \varphi_{*\sigma(t)} \frac{\partial}{\partial x_k}(\sigma(t)) \\ \overline{\nabla}_t h(\varphi \circ \sigma(t)) \end{bmatrix} = 0 \tag{2.25}$$

Mostremos que h é ortogonal a $Z_{k+j}, j = 2, \ldots, n-k$. Pela proposição (2.3.4.5.3) e por (2.14), (2.15), (2.22)

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt} g_{-1}(h(\varphi \circ \sigma(t)), Z_{k+j}(t)) &= g_{-1}(\overline{\nabla}_t h(\varphi \circ \sigma(t)), Z_{k+j}(t)) + \\ &\quad + g_{-1}(h(\varphi \circ \sigma(t)), \overline{\nabla}_t Z_{k+j}(t)) = \\ &= g_{-1}(\overline{\nabla}_{\varphi_* \dot{\sigma}(t)} h(\varphi \circ \sigma(t)), Z_{k+j}(t)) = \\ &= g_{-1}(\nabla_t h(\varphi \circ \sigma(t)) + \nabla_t^{\perp} h(\varphi \circ \sigma(t)), Z_{k+j}(t)) = \\ &= g_{-1}(\nabla_t h(\varphi \circ \sigma(t)), Z_{k+j}(t)) = 0 \end{aligned}$$

para todo $t \in I$.

Logo, por (2.13)

$$g_{-1}(h(\varphi \circ \sigma(t)), Z_{k+j}(t)) = g_{-1}(h\varphi(p), Z_{k+j}(0)) = g_{-1}(h(q), U_{k+j}) = 0$$

para todo $t \in U$ e $j = 2, \ldots, n-k$.

Daí segue que $T_{\varphi\circ\sigma(t)}\mathcal{H}^n(c)$ é gerado por

$$\left[\varphi_{*\sigma(t)}\tfrac{\partial}{\partial x_1}(\sigma(t)), \ldots, \varphi_{*\sigma(t)}\tfrac{\partial}{\partial x_k}(\sigma(t)), Z_{k+2}(t), \ldots, Z_n(t), h(\varphi\circ\sigma(t))\right]$$

para todo $t \in I$, já que os $Z_{k+j}(t)$ são constantes e linearmente independentes.

Podemos então escrever, para todo $t \in I$, $(k(n-1)+1)$ funções reais $x_{\ell_i}(t)$, $z_{\ell_j}(t)$, $a(t)$ convenientes, fixado $\ell = 1, \ldots, k$,

$$\overline{\nabla}_t\varphi_{*\sigma(t)}\tfrac{\partial}{\partial x_\ell}(\sigma(t)) = \textstyle\sum_{i=1}^k x_{\ell_i}(t)\varphi_{*\sigma(t)}\tfrac{\partial}{\partial x_i}(\sigma(t)) + \displaystyle\sum_{j=2}^{n-k} z_{\ell_j}(t)Z_{k+j}(t) + a(t)h(\varphi\circ\sigma(t))$$

Para cada $\ell = 1, \ldots, k$ e $j = 2, \ldots, n-k$, usando (2.15) e (2.22),

$$\begin{aligned} &g_{-1}(\overline{\nabla}_t\varphi_{*\sigma(t)}\tfrac{\partial}{\partial x_\ell}(\sigma(t)), Z_{k+j}(t)) = \\ &= \frac{d}{dt}g_{-1}\left(\varphi_{*\sigma(t)}\tfrac{\partial}{\partial x_\ell}(\sigma(t)), Z_{k+j}(t)\right) - g_{-1}\left(\varphi_{*\sigma(t)}\tfrac{\partial}{\partial x_\ell}(\sigma(t)), \overline{\nabla}_t Z_{k+j}(t)\right) = 0 \end{aligned}$$

Como h é ortogonal a Z_{k+j}, $j = 2, \ldots, n-k$ e vale (2.22) para cada Z_{k+j}, obtemos que $z_{\ell_j}(t) = 0$, $\forall t \in I$, $\ell = 1, \ldots, k$, $j = 2, \ldots, n-k$.

Portanto, como

$$\overline{\nabla}_t h(\varphi\circ\sigma(t)) = -\lambda^2\varphi_*\dot{\sigma}(t)$$

e

$$\overline{\nabla}_t\varphi_{*\sigma(t)}\tfrac{\partial}{\partial x_\ell}(\sigma(t)) \in \left[\varphi_{*\sigma(t)}\tfrac{\partial}{\partial x_1}(\sigma(t)), \ldots, \varphi_{*\sigma(t)}\tfrac{\partial}{\partial x_k}(\sigma(t)), h(\varphi\circ\sigma(t))\right]$$

existe uma matriz $B(t)$, de ordem $(k+1)$, com coeficientes diferenciáveis tal que

$$\begin{bmatrix} \overline{\nabla}_t\varphi_{*\sigma(t)}\frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma(t)) \\ \vdots \\ \overline{\nabla}_t\varphi_{*\sigma(t)}\frac{\partial}{\partial x_k}(\sigma(t)) \\ \overline{\nabla}_t h(\varphi\circ\sigma(t)) \end{bmatrix} = B(t)\begin{bmatrix} \varphi_{*\sigma(t)}\frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma(t)) \\ \vdots \\ \varphi_{*\sigma(t)}\frac{\partial}{\partial x_k}(\sigma(t)) \\ h(\varphi\circ\sigma(t)) \end{bmatrix}, \quad t \in I$$

Substituindo em (2.25) e observando que o conjunto

$$\left\{\varphi_{*\sigma(t)}\tfrac{\partial}{\partial x_1}(\sigma(t)), \ldots, \varphi_{*\sigma(t)}\tfrac{\partial}{\partial x_k}(\sigma(t)), h(\varphi\circ\sigma(t))\right\}$$

é linearmente independente, encontrar $M(t)$ satisfazendo (2.24) é equivalente a resolver a equação diferencial matricial

$$\dot{M}(t) + M(t)B(t) = 0$$

com condição inicial $M(0) = I_{k+1}$, matriz identidade de ordem $(k+1)$.

Como as funções em B são diferenciáveis, existe uma única solução $M(t)$, tal que $M(0) = I_{k+1}$, inversível numa vizinhança de $t = 0$, pois $\det M(0) = 1$.

Segue-se que $\varphi(M)$ está contida no $(k+1)$-hiperplano afim de L^{n+1} dado por

$$\overline{\mathcal{P}}^{k+1} = \varphi(p) + [U_1, \ldots, U_k, U_{k+1}]$$

pois, existe $M(t)$ satisfazendo (2.24) e $\varphi_* T_y M$ é ortogonal a $U_{k+2}, \ldots, U_n$ para todo $y \in M$.

Logo,

$$\varphi(M) \subset \overline{\mathcal{P}}^{k+1} \cap \mathcal{H}^n(c)$$

ou seja, $\varphi(M)$ está contida em uma k-subvariedade obtida da intersecção de um $(k+1)$-hiperplano afim e o espaço hiperbólico $\mathcal{H}^n(c)$.

Para o caso em que $\lambda = 0$ já foi observado que $\varphi(M)$ é totalmente geodésica, então podemos adicionar o vetor U_{k+1} a lista dos possíveis valores iniciais de Z e analogamente ao caso anterior, concluir que $\varphi(M)$ está contida no $(k+1)$-hiperplano $[U_1, \ldots, U_k, U_{k+1}]$, ou seja, $\varphi(M)$ esta contida na imagem natural de L^{k+1} em L^{n+1}.

Podemos então enunciar a

Proposição 2.3.4.5.4 *As subvariedades umbílicas de $\mathcal{H}^n(c)$ são obtidas tomando-se intersecções de $\mathcal{H}^n(c)$ com subespaços afins de L^{n+1}, portanto são esferas geodésicas, horoesferas ou superfícies equidistantes, além das superfícies totalmente geodésica (veja figura 2.1).*

2.4 Outros modêlos da Geometria Hiperbólica.

Neste item, consideraremos apenas $c = -1$, a fim de facilitar os cálculos. Então o par $(\mathcal{H}^n(-1), g_{-1})$ é uma variedade Riemanniana, onde g_{-1} é a métrica de Lorentz sobre o espaço hiperbólico n-dimensional $\mathcal{H}^n(-1) = \{x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in L^{n+1} \mid g_{-1}(x,x) = -1$ e $x_0 > 0\}$. Descreveremos variedades diferenciáveis

$$\begin{aligned} D^n(1) &= \{(p_0, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid p_0 = 1, p_1^2 + \cdots + p_n^2 < 1\}, \\ B^n(2) &= \{(p_1, \cdots, p_n) \in \mathbb{R}^n \mid p_1^2 + \cdots + p_n^2 < 4\}, \\ \mathbb{R}^n{}_+ &= \{(p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n \mid p_1 > 0\} \end{aligned}$$

difeomorfas a $\mathcal{H}^n(-1)$, e os difeomorfismos correspondentes

$$\phi_I : \mathcal{H}^n(-1) \longrightarrow D^n(1)$$

$$\phi_{II} : \mathcal{H}^n(-1) \longrightarrow B^n(2)$$

$$\phi_+ : \mathcal{H}^n(-1) \longrightarrow \mathbb{R}^n{}_+$$

Estas aplicações ϕ_I, ϕ_{II} e ϕ_+ induzem métricas Riemannianas g_I, g_{II} e g_+ em $D^n(1)$, $B^n(2)$ e $\mathbb{R}^n{}_+$, respectivamente, de forma que a variedade Riemanniana $(\mathcal{H}^n(-1), g_{-1})$ fica isométrica a cada uma das variedades Riemannianas $(D^n(1), g_I), (B^n(2), g_{II})$ e $(\mathbb{R}^n{}_+, g_+)$. Consequentemente, junto com $(\mathcal{H}^n(-1), g_{-1})$, estas serão variedades Riemannianas de curvatura seccional constante $c = -1$. Nesse caso, diremos que tais variedades são **modêlos da geometria hiperbólica.**

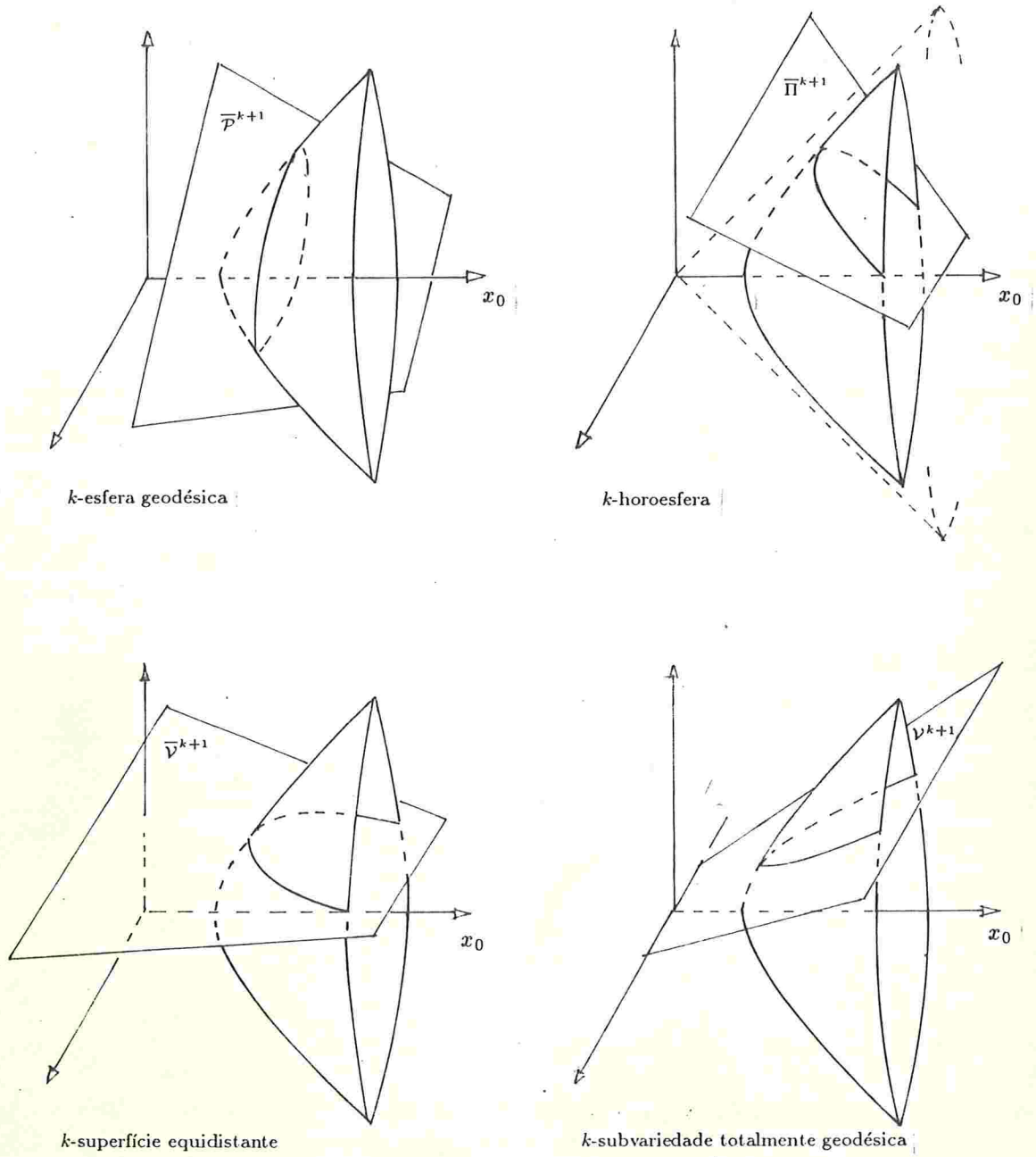

Figura 2.1: Subvariedades umbílicas

2.4.1 O modêlo de Klein $D^n(1)$.

Seja $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{H}^n(-1)$ e considere a reta r_x, pela origem de $\mathbb{R}^{n+1}$, que passa por x.

A projeção central $\phi_I : \mathcal{H}^n(-1) \longrightarrow D^n(1)$, é a aplicação que a cada x, associa $\phi_I(x)$, intersecção de r_x com $D^n(1)$(veja figura 2.2). Daí, se $\phi_I(x) = (y_0, y_1, \ldots, y_n) \in D^n(1)$, então $\phi_I(x) = tx$ para algum $t \in \mathbb{R}$ e $y_0 = 1$, logo

$\phi_I(x) \in D^n(1)$

$$\begin{cases} 1 = y_0 = tx_0 & \Rightarrow & t = \frac{1}{x_0} \\ y_1 = tx_1 & \Rightarrow & y_1 = \frac{x_1}{x_0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n = tx_n & \Rightarrow & y_n = \frac{x_n}{x_0} \end{cases}$$

e fazendo a identificação

$$\phi_I(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \left(1, \frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) \sim \left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) \tag{2.26}$$

Determinemos sua inversa

$$\begin{array}{rccc} \phi_I^{-1} : & D^n(1) & \longrightarrow & \mathcal{H}^n(-1) \\ & (y_1, \ldots, y_n) & \longmapsto & \phi_I^{-1}(y_1, \ldots, y_n) \end{array}$$

Sejam $y = (y_1, \ldots, y_n) \in D^n(1)$ e $\|y\|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$

$$\phi_I^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{H}^n(-1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \phi_I(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) = (y_1, \ldots, y_n) \quad \Rightarrow \quad y_i = \frac{x_i}{x_0},\ i = 1, \ldots, n$$

Mas

$$-x_0^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad x_0^2 = 1 + \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 + x_0^2 \|y\|^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_0^2(1 - \|y\|^2) = 1 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \|y\|^2}}$$

Logo,

$$\phi_I^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{\sqrt{1 - \|y\|^2}}(1, y_1, \ldots, y_n) \tag{2.27}$$

Vamos agora, através da projeção central, encontrar a expressão da métrica g_I em $D^n(1)$ induzida por ϕ_I^{-1}.

Para cada par de vetores $v, w \in T_y D^n(1)$, $y \in D^n(1)$, definimos

$$(g_I)_y(v, w) = g_{-1}\left((\phi_I^{-1})_{*y} v, (\phi_I^{-1})_{*y} w\right)$$

desse modo, ϕ_I é isometria entre $(\mathcal{H}^n(-1), g_{-1})$ e $(D^n(1), g_I)$.

A matriz Jacobiana de ϕ_I^{-1} calculada em $y \in D^n(1)$ é

$$\left[(\phi_I^{-1})_{*y}\right] = \frac{1}{(1-\|y\|^2)^{3/2}} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ 1 - \sum_{i \neq 1} y_i^2 & y_1 y_2 & \cdots & y_1 y_n \\ y_2 y_1 & 1 - \sum_{i \neq 2} y_i^2 & \cdots & y_2 y_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n y_1 & y_n y_2 & \cdots & 1 - \sum_{i \neq n} y_i^2 \end{bmatrix}$$

Fazendo a identificação $T_yD^n(1) \sim \mathbb{R}^n$, $y \in D^n(1)$, segue para $i, j = 1, \ldots, n$

$$g_{-1}\left((\phi_I^{-1})_{*y}U_i, (\phi_I^{-1})_{*y}U_j\right) =$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{(1-\|y\|^2)^3}\left(-y_i^2 + \sum_{\ell\neq i} y_\ell^2 y_i^2 + (1 - \sum_{\ell\neq i} y_\ell^2)^2\right) & , i = j \\ \frac{1}{(1-\|y\|^2)^3}\left(-y_i y_j + \sum_{\ell\neq i,j} y_\ell^2 y_i y_j + y_i y_j (2 - \sum_{\ell\neq i} y_\ell^2 - \sum_{\ell\neq j} y_\ell^2)\right) & , i \neq j \end{cases}$$

Desenvolvendo as expressões para $i, j = 1, \ldots, n$, ficamos com

$$g_{-1}((\phi_I^{-1})_{*y}U_i, (\phi_I^{-1})_{*y}U_j) = \begin{cases} \frac{1}{(1-\|y\|^2)^2}\left(1 - \sum_{\ell\neq i} y_\ell^2\right) & , i = j \\ \frac{1}{(1-\|y\|^2)^2}(y_i y_j) & , i \neq j \end{cases}$$

Observemos que para $v, w \in \mathbb{R}^n$ e $y = (y_1, \ldots, y_n) \in D^n(1)$ temos, por definição,

$$dy_\ell \otimes dy_k(v, w) = \frac{dy_\ell(v)dy_k(w) + dy_\ell(w)dy_k(v)}{2}, \quad \ell, k = 1, \ldots, n$$
$$\sum_{\ell<k}(y_\ell dy_k - y_k dy_\ell)^2 = \sum_{\ell<k}(y_\ell^2 dy_k \otimes dy_k + y_k^2 dy_\ell \otimes dy_\ell - 2y_\ell y_k dy_\ell \otimes dy_k), \quad \ell, k = 1, \ldots, n$$

Então

$$\left(\sum_{\ell=1}^n dy_\ell \otimes dy_\ell - \sum_{\ell<k}(y_\ell dy_k - y_k dy_\ell)^2\right)(U_i, U_j) =$$
$$= \begin{cases} 1 - \sum_{\ell\neq i} y_\ell^2 & , i = j \\ 2\sum_{\ell<k} y_\ell y_k \frac{\delta_{i\ell}\delta_{jk} + \delta_{\ell j}\delta_{ki}}{2} & , i \neq j \end{cases} =$$
$$= \begin{cases} 1 - \sum_{\ell\neq i} y_\ell^2 & , i = j \\ y_i y_j & , i \neq j \end{cases}$$

para $i, j = 1, \ldots, n$.

Portanto, podemos escrever

$$(g_I)_y = \frac{1}{(1 - \|y\|^2)^2}\left(\sum_{\ell=1}^n dy_\ell \otimes dy_\ell - \sum_{\ell<k}(y_\ell dy_k - y_k dy_\ell)^2\right) \tag{2.28}$$

2.4.2 O modêlo de Poincaré $B^n(2)$.

Consideremos a n-esfera $S(U_0, 1) = \{x = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : (x_0 - 1)^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ de centro $U_0 = (1, 0, \ldots, 0)$ e raio unitário, e a projeção estereográfica σ pelo pólo norte $p_N = (2, 0, \ldots, 0)$ da esfera $S(U_0, 1)$:

$$\begin{aligned} \sigma : S(U_0, 1) \setminus \{p_N\} &\longrightarrow \{0\} \times \mathbb{R}^n \sim \mathbb{R}^n \\ \sigma(x_0, x_1, \ldots, x_n) &= \frac{2}{2 - x_0}(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{2.29}$$

Determinemos uma expressão para a inversa de σ

$$\begin{array}{rccl} \sigma^{-1}: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & S(U_0,1)\setminus\{p_N\}\subset\mathbb{R}^{n+1} \\ & (y_1,\ldots,y_n) & \longmapsto & \sigma^{-1}(y_1,\ldots,y_n) \end{array} \tag{2.30}$$

Tomemos $y=(y_1,\ldots,y_n)\subset\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} &\sigma^{-1}(y_1,\ldots,y_n)=(x_0,x_1,\ldots,x_n)\in S(U_0,1)\setminus\{p_N\}\Rightarrow \\ &\Rightarrow (y_1,\ldots,y_n)=\sigma(x_0,x_1,\ldots,x_n)=\frac{2}{2-x_0}(x_1,\ldots,x_n)\Rightarrow \\ &\Rightarrow y_i=\frac{2x_i}{2-x_0},\ i=1,\ldots,n \end{aligned}$$

De $(x_0-1)^2+\sum_{i=1}^n x_i^2=1$, segue que

$$\|y\|^2=\sum_{i=1}^n y_i^2=\frac{4}{(2-x_0)^2}\sum_{i=1}^n x_i^2=\frac{4x_0}{2-x_0}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-x_0)\|y\|^2=4x_0\Rightarrow (4+\|y\|^2)x_0=2\|y\|^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{rcl} x_0 & = & \frac{2\|y\|^2}{4+\|y\|^2} \\ x_i & = & \frac{(2-x_0)}{2}y_i=\frac{2x_0}{\|y\|^2}y_i=\frac{4y_i}{4+\|y\|^2},\ i=1,\ldots,n \end{array}\right.$$

Logo,

$$\sigma^{-1}(y_1,\ldots,y_n)=\frac{2}{4+\|y\|^2}(\|y\|^2,2y_1,\ldots,2y_n) \tag{2.31}$$

Seja a semi-esfera unitária

$$S(U_0,1)_-=\{x=(x_0,x_1,\ldots,x_n)\in S(U_0,1):0\le x_0<1\}$$

centrada em U_0.

Vamos agora, introduzir uma aplicação

$$\tau: S(U_0,1)_-\longrightarrow D^n(1)$$

bijetora, tal que a composta

$$\sigma\circ\tau^{-1}: D^n(1)\longrightarrow B^n(2)$$

seja um difeomorfismo.

Definimos τ como sendo a restrição a $S(U_0,1)_-$ da projeção canônica

$$\begin{array}{rccl} \pi: & \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (x_0,x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & (x_1,\ldots,x_n) \end{array}$$

ou seja, $\tau(x)=\pi(x)$ para cada $x\in S(U_0,1)_-$ (veja figura 2.2).

Mostremos que τ é inversível, exibindo sua inversa

$$\begin{array}{rccl} \tau^{-1}: & D^n(1) & \longrightarrow & S(U_0,1)_- \subset \mathbb{R}^{n+1} \\ & (a_1,\ldots,a_n) & \longmapsto & \tau^{-1}(a_1,\ldots,a_n) \end{array}$$

$$\tau^{-1}(a_1,\ldots,a_n) = (x_0,x_1,\ldots,x_n) \in S(U_0,1)_- \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \tau(x_0,x_1,\ldots,x_n) = (a_1,\ldots,a_n) \Rightarrow x_i = a_i, \quad i = 1,\ldots,n \text{ e } \|x\| = \|a\| \\ \text{e} \\ x_0 - 1 = -\sqrt{1-\|x\|^2} < 0 \Rightarrow x_0 = 1 - \sqrt{1-\|x\|^2} \end{cases}$$

Segue que

$$\tau^{-1}(a_1,\ldots,a_n) = (1-\sqrt{1-\|a\|^2}, a_1,\ldots,a_n) \tag{2.32}$$

Seja $a = (a_1,\ldots,a_n) \in D^n(1)$, então,

$$\sigma \circ \tau^{-1}(a_1,\ldots,a_n) = \frac{2}{1+\sqrt{1-\|a\|^2}}(a_1,\ldots,a_n)$$

e

$$\|\sigma \circ \tau^{-1}(a)\|^2 = \frac{4\|a\|^2}{(1+\sqrt{1-\|a\|^2})^2}$$

Como

$$0 \le \|a\| < 1 \Rightarrow 0 \le \|a\|^2 < 1 \Rightarrow 0 < 1 - \|a\|^2 \le 1$$

Então

$$\begin{aligned} \|\sigma \circ \tau^{-1}(a)\|^2 - 4 &= 4\left(\frac{\|a\|^2 - (1+\sqrt{1-\|a\|^2})^2}{(1+\sqrt{1-\|a\|^2})^2}\right) = \\ &= \frac{4}{(1+\sqrt{1-\|a\|^2})^2}\left(\|a\|^2 - \left(1 + 2\sqrt{1-\|a\|^2} + 1 - \|a\|^2\right)\right) = \\ &= \frac{4}{(1+\sqrt{1-\|a\|^2})^2}\left(-2(1-\|a\|^2) - 2\sqrt{1-\|a\|^2}\right) = \\ &= (-8)\frac{(1-\|a\|^2+\sqrt{1-\|a\|^2})}{(1+\sqrt{1-\|a\|^2})^2} < 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sigma \circ \tau^{-1}(a) \in B^n(2)$$

Temos, pois, a aplicação

$$\sigma \circ \tau^{-1} : (a_1,\ldots,a_n) \in D^n(1) \mapsto \frac{2}{1+\sqrt{1-\|a\|^2}}(a_1,\ldots,a_n) \in B^n(2) \tag{2.33}$$

Analogamente

$$y = (y_1,\ldots,y_n) \in B^n(2) \Rightarrow 0 \le \|y\| < 2 \Rightarrow 0 \le \|y\|^2 < 4 \Rightarrow \|y\|^2 - 4 < 0$$

$$\tau \circ \sigma^{-1}(y) = \frac{4}{4+\|y\|^2}(y_1,\ldots,y_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|\tau \circ \sigma^{-1}(y)\|^2 - 1 = \frac{16\|y\|^2}{(4+\|y\|^2)^2} - 1 =$$

$$= \frac{16\|y\|^2 - (16 + 8\|y\|^2 + \|y\|^4)}{(4+\|y\|^2)^2} =$$

$$= \frac{8\|y\|^2 - \|y\|^4 - 16}{(4+\|y\|^2)^2} = \frac{-(\|y\|^2-4)^2}{(4+\|y\|^2)^2} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau \circ \sigma^{-1}(y) \in D^n(1)$$

e a inversa de (2.33) está bem definida

$$\tau \circ \sigma^{-1} : (y_1,\ldots,y_n) \in B^n(2) \mapsto \frac{4}{4+\|y\|^2}(y_1,\ldots,y_n) \in D^n(1) \tag{2.34}$$

Consideremos, então

$$\begin{array}{rccc} \phi_{II}: & \mathcal{H}^n(-1) & \longrightarrow & B^n(2) \\ & (x_0,x_1,\ldots,x_n) & \longmapsto & \phi_{II}(x_0,x_1,\ldots,x_n) \end{array}$$

dada por

$$\phi_{II}(x_0,x_1,\ldots,x_n) = \sigma \circ \tau^{-1} \circ \phi_I(x_0,x_1,\ldots,x_n)$$

Por (2.26) e (2.33)

$$\phi_{II}(x_0,x_1,\ldots,x_n) = \sigma \circ \tau^{-1}\left(\frac{x_1}{x_0},\ldots,\frac{x_n}{x_0}\right) = \frac{2}{1+x_0}(x_1,\ldots,x_n) \tag{2.35}$$

e a sua inversa

$$\begin{array}{rccc} \phi_{II}^{-1}: & B^n(2) & \longrightarrow & \mathcal{H}^n(-1) \\ & (y_1,\ldots,y_n) & \longmapsto & \phi_{II}^{-1}(y_1,\ldots,y_n) \end{array}$$

De (2.27) e (2.34)

$$\phi_{II}^{-1}(y_1,\ldots,y_n) =$$

$$= \phi_I^{-1} \circ \tau \circ \sigma^{-1}(y_1,\ldots,y_n) = \phi_I^{-1}\left(\frac{4}{4+\|y\|^2}(y_1,\ldots,y_n)\right) =$$

$$= \frac{1}{4-\|y\|^2}\left(4+\|y\|^2, 4y_1,\ldots,4y_n\right) \tag{2.36}$$

Por (2.35) e (2.36) vemos que ϕ_{II} e sua inversa ϕ_{II}^{-1} são aplicações diferenciáveis e a matriz Jacobiana de ϕ_{II}^{-1} calculada em $y \in B^n(2)$, é

$$\left[(\phi_{II}^{-1})_{*y}\right] = \frac{4}{(4-\|y\|^2)^2}\begin{bmatrix} 4y_1 & 4y_2 & \cdots & 4y_n \\ 4-\|y\|^2+2y_1^2 & 2y_1y_2 & \cdots & 2y_1y_n \\ 2y_2y_1 & 4-\|y\|^2+2y_2^2 & \cdots & 2y_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2y_ny_1 & 2y_ny_2 & \cdots & 4-\|y\|^2+2y_n^2 \end{bmatrix}$$

Vamos identificar $T_yB^n(2) \sim \mathbb{R}^n$, $y \in B^n(2)$ e considerar a métrica em $B^n(2)$

$$(g_{II})_y(v,w) = g_{-1}\left((\phi_{II}^{-1})_{*y}v, (\phi_{II}^{-1})_{*y}w\right), \; v,w \in T_yD^n(1)$$

induzida por ϕ_{II}^{-1}. Deste modo, ϕ_{II} é isometria entre $(\mathcal{H}^n(-1), g_{-1})$ e $(B^n(2), g_{II})$.

Temos, para $i = j$

$$\begin{aligned}
&g_{-1}\left((\phi_{II}^{-1})_{*y}U_i, (\phi_{II}^{-1})_{*y}U_j\right) = \\
&= \frac{16}{(4-\|y\|^2)^4}\left(-16y_i^2 + 4y_i\sum_{\ell\neq i} y_\ell^2 + (4-\|y\|^2+2y_i^2)^2\right) = \\
&= \frac{16}{(4-\|y\|^2)^4}\left(16+\|y\|^4 - 8\|y\|^2\right) = \\
&= \frac{16}{(4-\|y\|^2)^2}
\end{aligned}$$

e, para $i \neq j$

$$\begin{aligned}
&g_{-1}\left((\phi_{II}^{-1})_{*y}U_i, (\phi_{II}^{-1})_{*y}U_j\right) = \\
&= \frac{16}{(4-\|y\|^2)^4}\left(-16y_iy_j + 4y_iy_j\sum_{\ell\neq i,j} y_\ell^2 + 2y_iy_j\left(4-\|y\|^2+2y_i^2\right) + \right. \\
&\left. +2y_jy_i\left(4-\|y\|^2+2y_j^2\right)\right) = \\
&= \frac{16}{(4-\|y\|^2)^4}\left(4y_iy_j\|y\|^2 - 4y_iy_j\|y\|^2\right) = 0
\end{aligned}$$

Obtemos então

$$(g_{II})_y = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\|y\|^2\right)^2}\sum_{\ell=1}^n dy_\ell \otimes dy_\ell \tag{2.37}$$

2.4.3 O modêlo de Poincaré $\mathbb{R}^n_+$.

A seguir vamos construir um difeomorfismo ϕ_+ entre $\mathcal{H}^n(-1)$ e $\mathbb{R}^n{}_+$ e a métrica induzida sobre $\mathbb{R}^n{}_+$.

Daremos os seguintes passos:

Primeiramente levaremos $(\mathcal{H}^n(-1), g_{-1})$ isometricamente sobre $(D^n(1), g_I)$ através da aplicação ϕ_I (definido por 2.26); em seguida, pelo difeomorfismo τ^{-1} (definido por 2.32) passaremos para o conjunto $S(U_0,1)_-$, fazendo a seguir uma rotação ρ desse conjunto, para finalmente através da projeção estereográfica σ (definida por 2.29) atingirmos $\mathbb{R}^n{}_+$ (veja figura 2.2).

Seja

$$\begin{array}{rccc}
\rho: & \mathbb{R}^{n+1} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\
& (a_0, a_1, \ldots, a_n) & \longmapsto & \rho(a_0, a_1, \ldots, a_n)
\end{array}$$

transformação ortogonal de $\mathbb{R}^n$ que dá uma rotação de $\frac{\pi}{2}$ no plano $[U_0, U_1]$ e fixa $[U_0, U_1]^\perp$ ponto a ponto.

Para determinarmos ρ, basta olharmos para o que acontece com as coordenadas a_0 e a_1, pois, os pontos $(a_0, \ldots, a_n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ são levados por ρ em pontos do tipo

$$(f(a_0, a_1), g(a_0, a_1), a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

ou seja, pertencem ao mesmo plano paralelo a $[U_0, U_1]$, passando por $(0, 0, a_2, \ldots, a_n)$.

Em coordenadas polares, no plano $[U_0, U_1]$, com polo $(0, 1)$

$$(a_0, a_1) = (r\cos\theta, 1 + r\sin\theta) = (0, 1) + re^{i\theta}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\rho\,|_{[U_0,U_1]}\,(a_1, a_0) = \\
&\quad = (0,1) + re^{i(\theta+\pi/2)} = (0,1) + r(\cos(\theta+\pi/2), \sin(\theta+\pi/2)) = \\
&\quad = (0,1) + r(-\sin\theta, \cos\theta) = (-r\sin\theta, 1 + r\cos\theta) = \\
&\quad = (1 - a_0, 1 + a_1)
\end{aligned}$$

e

$$\rho(a_0, a_1, \ldots, a_n) = (1 + a_1, 1 - a_0, a_2, \ldots, a_n) \tag{2.38}$$

Seja

$$\begin{array}{rccl}
\phi_+ : & \mathcal{H}^n(-1) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n{}_+ \\
& (x_0, x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \phi_+(x_0, x_1, \ldots, x_n)
\end{array}$$

definida por $\phi_+ = \sigma \circ \rho \circ \tau^{-1} \circ \phi_I$, ou seja,

$$\phi_+(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{2}{x_0 - x_1}(1, x_2, \ldots, x_n) \tag{2.39}$$

onde usamos (2.26), (2.29), (2.32) e (2.38).

Vamos exibir sua inversa

$$\begin{array}{rccl}
\phi_+^{-1} : & \mathbb{R}^n{}_+ & \longrightarrow & \mathcal{H}^n(-1) \\
& (y_1, \ldots, y_n) & \longmapsto & \phi_+^{-1}(y_1, \ldots, y_n)
\end{array}$$

Se $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n{}_+$

$$\phi_+^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = (x_0, x_1, \ldots, x_n) \;\Rightarrow\; \phi_+(x_0, x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y_1 &=& \frac{2}{x_0 - x_1} \\ y_i &=& \frac{2x_i}{x_0 - x_1}, \quad i = 2, \ldots, n \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{rcl} x_0 - x_1 &=& \frac{2}{y_1} \\ x_i &=& \frac{y_i}{y_1}, \quad i = 2, \ldots, n \end{array}\right.$$

Mas

$$-x_0^2 + x_1^2 + \textstyle\sum_{i=2}^n x_i^2 = -1 \;\Rightarrow\; (x_1 - x_0)(x_1 + x_0) = -1 - \sum_{i=2}^n \frac{y_i^2}{y_1^2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{-2}{y_1}(x_1 + x_0) = \frac{-y_1^2 - \sum_{i=2}^n y_i^2}{y_1^2} \;\Rightarrow\; x_1 + x_0 = \frac{\|y\|^2}{2y_1} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; x_1 + \left(x_1 + \frac{2}{y_1}\right) = \frac{\|y\|^2}{2y_1} \;\Rightarrow\; \left\{\begin{array}{rcl} x_1 &=& \frac{1}{y_1}\left(\frac{\|y\|^2}{4} - 1\right) \\ x_0 &=& \frac{1}{y_1}\left(\frac{\|y\|^2}{4} + 1\right) \end{array}\right.$$

Portanto

$$\phi_+^{-1}(y_1,\ldots,y_n) = \frac{1}{y_1}\left(\frac{\|y\|^2}{4}+1, \frac{\|y\|^2}{4}-1, y_2,\ldots,y_n\right) \tag{2.40}$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
&(y_1,\ldots,y_n) \in \mathbb{R}^n{}_+ \Rightarrow \\
&\quad g_{-1}\left(\phi_+^{-1}(y_1,\ldots,y_n), \phi_+^{-1}(y_1,\ldots,y_n)\right) = \\
&\quad = \frac{-1}{y_1^2}\left(1+\frac{\|y\|^2}{4}\right) + \frac{1}{y_1^2}\left(-1+\frac{\|y\|^2}{4}\right) + \sum_{\ell=2}^{n}\frac{y_\ell^2}{y_1^2} = \\
&\quad = \frac{-\|y\|^2 + \sum_{\ell=2}^n y_\ell^2}{y_1^2} = -1
\end{aligned}$$

ou seja, ϕ_+^{-1} está bem definida.

A métrica g_+ induzida por ϕ_+^{-1} em $\mathbb{R}^n{}_+$ é

$$(g_+)_y(v,w) = g_{-1}\left((\phi_+^{-1})_{*y}v, (\phi_+^{-1})_{*y}w\right), \; v,w \in T_y\mathbb{R}^n{}_+, \; y \in \mathbb{R}^n{}_+$$

e a matriz Jacobiana

$$\left[(\phi_+^{-1})_{*y}\right] = \frac{1}{y_1}\begin{bmatrix} \frac{1}{4y_1}(2y_1^2 - \|y\|^2 - 4) & \frac{y_2}{2} & \cdots & \frac{y_n}{2} \\ \frac{1}{4y_1}(2y_1^2 - \|y\|^2 + 4) & \frac{y_2}{2} & \cdots & \frac{y_n}{2} \\ \frac{-y_2}{y_1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-y_n}{y_1} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos identificar $T_y\mathbb{R}^n{}_+$ com $\mathbb{R}^n$, para todo $y \in \mathbb{R}^n{}_+$, e obtermos

$$g_{-1}\left((\phi_+^{-1})_{*y}U_\imath, (\phi_+^{-1})_{*y}U_\jmath\right) =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{y_1^2}\left(\frac{-1}{16y_1^2}\left(2y_1^2 - \|y\|^2 - 4\right)^2 + \frac{1}{16y_1^2}\left(2y_1^2 - \|y\|^2 + 4\right)^2 + \frac{\sum_{\ell=2}^n y_\ell^2}{y_1^2}\right), & \imath = \jmath = 1 \\ \frac{1}{y_1^2}\left(\frac{-y_\imath^2}{4} + \frac{y_\imath^2}{4} + 1\right), & \imath = \jmath, \jmath \neq 1 \\ \frac{1}{y_1^2}\left(\left(\frac{-y_\imath}{2}\right)\left(\frac{2y_1^2 - \|y\|^2 - 4}{4y_1}\right) + \left(\frac{y_\imath}{2}\right)\left(\frac{2y_1^2 - \|y\|^2 + 4}{4y_1}\right) - \frac{y_\imath}{y_1}\right), & \imath \neq \jmath, \jmath = 1 \\ \frac{1}{y_1^2}\left(\frac{-y_\imath y_\jmath}{4} + \frac{y_\imath y_\jmath}{4}\right), & \imath \neq \jmath, \imath \neq 1, \jmath \neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{y_1^2} & , \imath = \jmath = 1 \\ \frac{1}{y_1^2} & , \imath = \jmath \neq 1 \\ 0 & , \imath \neq \jmath, \imath = 1 \\ 0 & , \imath \neq \jmath, \imath \neq 1, \jmath \neq 1 \end{cases}$$

De onde, segue que

$$(g_+)_y = \frac{1}{y_1^2}\sum_{\ell=1}^n dx_\ell \otimes dx_\ell \tag{2.41}$$

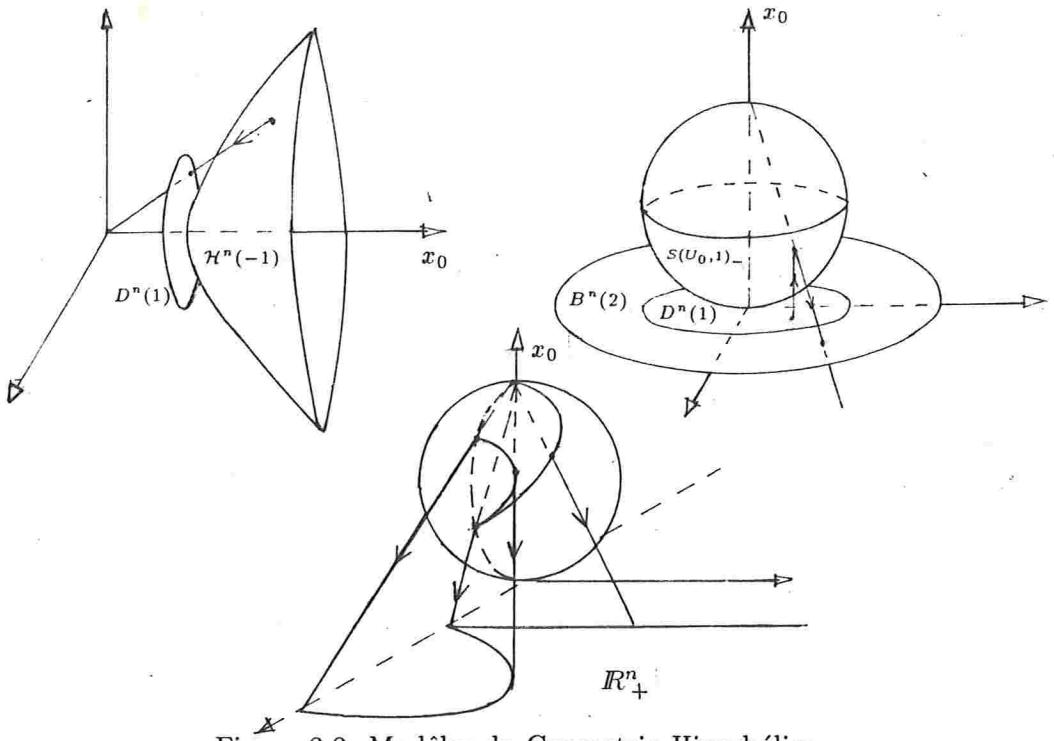

Figura 2.2: Modêlos da Geometria Hiperbólica

2.4.4 Isometrias entre os modêlos.

Nos itens (2.4.1), (2.4.2) e (2.4.3), estudamos três modêlos da Geometria Hiperbólica,

$$(D^n(1), g_I), (B^n(2), g_{II}) \text{ e } (\mathbb{R}^n{}_+, g_+)$$

e cada um deles é isométrico a $(\mathcal{H}^n(-1),\ g_{-1})$ através das isometrias

$$\begin{array}{llll} \phi_I: & \mathcal{H}^n(-1) & \longrightarrow & D^n(1) \\ & (x_0, x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \left(\frac{x_1}{x_0}, \ldots, \frac{x_n}{x_0}\right) \qquad \text{, por (2.26)} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \phi_{II}: & \mathcal{H}^n(-1) & \longrightarrow & B^n(2) \\ & (x_0, x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \frac{2}{1+x_0}(x_1, \ldots, x_n) \qquad \text{, por (2.35)} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \phi_+: & \mathcal{H}^n(-1) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n{}_+ \\ & (x_0, x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \frac{2}{x_0-x_1}(1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \text{, por (2.39),} \end{array}$$

respectivamente.

Consequentemente, obtemos as seguintes isometrias entre os modêlos

$$\begin{array}{llll} \phi_{II} \circ \phi_I^{-1}: & D^n(1) & \longrightarrow & B^n(2) \\ & (y_1, \ldots, y_n) & \longmapsto & \phi_{II} \circ \phi_I^{-1}(y_1, \ldots, y_n) \end{array}$$

$$\phi_{II} \circ \phi_I^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = \sigma \circ \tau^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \|y\|^2}}(y_1, \ldots, y_n) \tag{2.42}$$

$$\begin{array}{rccl} \phi_+ \circ \phi_I^{-1} : & D^n(1) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n{}_+ \\ & (y_1, \ldots, y_n) & \longmapsto & \phi_+ \circ \phi_I^{-1}(y_1, \ldots, y_n) \end{array}$$

$$\phi_+ \circ \phi_I^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = \sigma \circ \rho \circ \tau^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = \frac{2}{1 - y_1}\left(\sqrt{1 - \|y\|^2}, y_2, \ldots, y_n\right) \tag{2.43}$$

$$\begin{array}{rccl} \phi_+ \circ \phi_{II}^{-1} : & B^n(2) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n{}_+ \\ & (y_1, \ldots, y_n) & \longmapsto & \phi_+ \circ \phi_{II}^{-1}(y_1, \ldots, y_n) \end{array}$$

$$\phi_+ \circ \phi_{II}^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = \phi_I^{-1} \circ \tau\sigma^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = \frac{2}{4 + \|y\|^2 - 4y_1}\left(4 - \|y\|^2, 4y_2, \ldots, 4y_n\right) \tag{2.44}$$

2.5 Espaços de recobrimento dos espaços de curvatura constante.

Definição 2.5.1 *Se M e $\tilde{M}$ são duas variedades de dimensão m, a aplicação $\pi : \tilde{M} \to M$ é uma* **aplicação de recobrimento** *se:*

(1) *π é contínua e $\pi(\tilde{M}) = M$,*

(2) *todo ponto $p \in M$ admite uma vizinhança U, em M, tal que $\pi^{-1}(U) = \sqcup_\alpha(V_\alpha)$, onde os V_α são abertos de $\tilde{M}$, disjuntos dois a dois, tais que a restrição de π a cada V_α é um homeomorfismo de V_α sobre U.*

Os abertos U são chamados abertos admissíveis do recobrimento e $\tilde{M}$ é a chamada variedade de recobrimento de M ou **espaço de recobrimento de M**.

Proposição 2.5.2 *Uma variedade conexa M, de dimensão n, admite um espaço de recobrimento $\tilde{M}$, simplesmente conexo.*

O espaço $\tilde{M}$, de que fala esta proposição, "contém" todos os outros espaços de recobrimento, a menos de difeomorfismo, e é, por isso, chamado **espaço de recobrimento universal de M**.

Teorema 2.5.3 *Seja M^n uma variedade Riemanniana completa e de curvatura seccional constante c. Então o recobrimento universal $\tilde{M}$, de M, com a métrica induzida pela aplicação de recobrimento, é, a menos de isometria:*

(1) *$\mathcal{H}^n(c)$, se $c < 0$*

(2) *$\mathbb{R}^n$, se $c = 0$*

(3) *$S^n(c)$, se $c > 0$*

Demonstração. O recobrimento universal $\tilde{M}$, de M, é uma variedade completa, simplesmente conexa, de curvatura seccional constante c.

Consideremos $c < 0$ ou $c = 0$ e indiquemos tanto o $\mathcal{H}^n(c)$ quanto o $\mathbb{R}^n$, por conveniência, pelo símbolo $\triangle$. Fixemos pontos $p \in \triangle, \tilde{p} \in \tilde{M}$ e uma isometria linear $\iota : T_p\triangle \to T_{\tilde{p}}\tilde{M}$.

Seja $f : \triangle \to \tilde{M}$ dada por

$$f = \exp_{\tilde{p}} \circ \iota \circ \exp_p^{-1}$$

$\triangle$ e $\tilde{M}$ são ambas completas com curvaturas seccionais não positivas, o que implica em todo $p \in \triangle$ e $\tilde{p} \in \tilde{M}$, $\exp_p : T_p\triangle \to \triangle$ e $\exp_{\tilde{p}} : T_{\tilde{p}}\tilde{M} \to \tilde{M}$ são difeomorfismos locais; portanto, f está bem definida.

Nessas condições, como $\triangle$ e $\tilde{M}$ têm a mesma curvatura seccional, pela proposição (2.2.1) segue que f é uma isometria local que preserva comprimentos. Isso implica que f é uma aplicação de recobrimento. Como $\tilde{M}$ é simplesmente conexo, f é um difeomorfismo e, portanto uma isometria.

Tomemos, agora, $c > 0$. Fixemos pontos $p \in S^n(c)$ e $\tilde{p} \in \tilde{M}$ e seja $\iota : T_pS^n(c) \to T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ uma isometria linear.

Seja $q \in S^n(c)$ o ponto antípoda de p e definamos

$$f = \exp_{\tilde{p}} \circ \iota \circ \exp_p^{-1} : S^n(c) \setminus \{q\} \to \tilde{M}$$

Novamente pela proposição (2.2.1), segue que f é uma isometria local, já que as curvaturas de $S^n(c)$ e $\tilde{M}$ são iguais.

Seja $\hat{p} \in S^n(c)$, $\hat{p} \neq p, q$ e sejam $\breve{p} = f(\hat{p})$ e $\iota' = df_{\hat{p}}$.

Definamos

$$\bar{f} = \exp_{\breve{p}} \circ \iota' \circ \exp_{\hat{p}}^{-1} : S^n(c) \setminus \{\hat{q}\} \to \tilde{M},$$

onde $\hat{q}$ é o antípoda de $\hat{p}$.

Temos $S^n(c) \setminus \{q, \hat{q}\} = W$ conexo, $\hat{p} \in W, f(\hat{p}) = \breve{p} = \bar{f}(\hat{p})$, $df_{\hat{p}} = \iota' = d\bar{f}_p$, e como $\bar{f}$ é, pelo mesmo motivo anterior, uma isometria local, segue do lema (2.3.3.1) que $f = \bar{f}$ em W.

Então, podemos definir $\aleph : S^n(c) \to \tilde{M}$ por:

$$\aleph(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in S^n(c) \setminus \{q\} \\ \bar{f}(x), & \text{se } x \in S^n(c) \setminus \{\hat{q}\} \end{cases}$$

É claro que $\aleph$ é isometria local e, portanto, um difeomorfismo local. Pela compacidade de $S^n(c)$, $\aleph$ é uma aplicação de recobrimento e como $\tilde{M}$ é simplesmente conexo, $\aleph$ é um difeomorfismo.

Logo, $\aleph$ é uma isometria.

□

Nos capítulos que seguem, trabalharemos com variedades de curvatura seccional constante e, em particular, com as variedades de curvatura seccional constante negativa. Sendo assim, poderemos pensar apenas em $\mathcal{H}^n(c)$, $S^n(c)$ ou $\mathbb{R}^n$, segundo a curvatura c seja negativa, positiva ou nula, uma vez que estes serão os respectivos espaços de recobrimento da variedade.

Vamos denotar por $\overline{M}^n(c)$, uma variedade Riemanniana, completa, simplesmente conexa, com curvatura seccional constante c, onde c é um número real.

2.6 Uma família de superfícies mínimas geodesicamente-regradas de $\overline{M}^3(c)$.

2.6.1 Introdução.

No capítulo 3, definiremos hipersuperfícies de rotação de $\overline{M}^3(c)$, que serão classificadas em três tipos: esférica, hiperbólica ou parabólica, de acordo com a natureza da subvariedade umbílica, $(n-1)$-dimensional, que gera tal hipersuperfície. Na verdade, como veremos na seção (4.3), chegamos aos dois últimos tipos, ao considerarmos uma família a 1-parâmetro de superfícies mínimas geodesicamente-regradas em $\overline{M}^3(c)$, que será apresentada, a seguir, nesta seção.

A proposição (2.6.2.1) fornece uma parametrização de uma família de superfícies geodesicamente-regradas de $\overline{M}^3(c)$, que são mínimas.

2.6.2 Parametrização de uma família de superfícies mínimas geodesicamente-regradas de $\overline{M}^3(c)$.

Proposição 2.6.2.1 *A superfície M^2 em $\overline{M}^3(c)$ dada por*

$$f(t,s) = (F(\vartheta t)F(s), G(\vartheta t)F(s), (\cos\varsigma t)G(s), (\sin\varsigma t)G(s)),\ (t,s) \in \mathbb{R}^2$$

na base canônica do espaço ambiente, onde ϑ, ς são constantes reais, ambas não nulas, e

$$F(u) = \begin{cases} \cosh(u\sqrt{-c}) & ,c<0 \\ \cos(u\sqrt{c}) & ,c>0 \\ 1 & ,c=0 \end{cases} \quad e \quad G(u) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-c}}\sinh(u\sqrt{-c}) & ,c<0 \\ \frac{1}{\sqrt{c}}\sin(u\sqrt{c}) & ,c>0 \\ u & ,c=0 \end{cases}$$

é mínima, geodesicamente-regrada e tem como primeira e segunda formas fundamentais, respectivamente

$$\begin{aligned} I_f &= ds^2 + (\vartheta^2F^2(s) + \varsigma^2G^2(s))\,dt^2 \\ II_f &= 2\psi_{\vartheta\varsigma}(s)dsdt \end{aligned}$$

onde $\psi_{\vartheta\varsigma}(s) = \frac{|\vartheta\varsigma|}{(\vartheta^2F^2(s)+\varsigma^2G^2(s))^{1/2}}$.

Além disso, uma normal unitária a M^2 em $\overline{M}^3(c)$ é dada por

$$N(t,s) = \frac{1}{\psi_{\vartheta\varsigma}(s)}\overline{N}(t,s)$$

sendo $\overline{N}(t,s) = \frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}(t,s) - \frac{\vartheta^2F(s)\dot{F}(s)+\varsigma^2G(s)\dot{G}(s)}{\vartheta^2F^2(s)+\varsigma^2G^2(s)}\frac{\partial f}{\partial t}(t,s)$

Demonstração. Para facilitar os cálculos, podemos supor sem perda de generalidade que se $c \neq 0$, então $c = -1$ ou $c = 1$.

Denotaremos o espaço de curvatura constante respectivamente por

$$(\mathcal{H}^3(-1), g_{-1}),\ (S^3(1), g_1) \text{ ou } (\mathbb{R}^3, g_0),\ \mathbb{R}^3 \sim \mathbb{R}^3 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^4$$

conforme $c = -1$, $c = 1$ ou $c = 0$.

Vamos dividir a prova em 5 partes.

- <u>Parte 1</u> - $M^2 = \{f(t,s) : (t,s) \in \mathbb{R}^2\}$ é hipersuperfície de $\overline{M}^3(c)$.

No espaço ambiente, temos

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s) &= \Big(F(\vartheta t)\dot{F}(s), G(\vartheta t)\dot{F}(s), \dot{G}(s)\cos(\varsigma t), \dot{G}(s)\sin(\varsigma t)\Big) \\
\tfrac{\partial f}{\partial t}(t,s) &= \Big(\vartheta\dot{F}(\vartheta t)F(s), \vartheta\dot{G}(\vartheta t)F(s), -\varsigma G(s)\sin(\varsigma t), \varsigma G(s)\cos(\varsigma t)\Big)
\end{aligned}$$

Na métrica de $\overline{M}^3(c)$, se $c = -1$,

$$\begin{aligned}
g_{-1}(f,f) &= -F^2(\vartheta t)F^2(s) + G^2(\vartheta t)F^2(s) + \cos^2(\varsigma t)G^2(s) + \sin^2(\varsigma t)G^2(s) = \\
&= \Big(\sinh^2(\vartheta t) - \cosh^2(\vartheta t)\Big)\cosh^2 s + \sinh^2 s = -1 \\
g_{-1}(\tfrac{\partial f}{\partial s}, \tfrac{\partial f}{\partial s}) &= -F^2(\vartheta t)\dot{F}^2(s) + G^2(\vartheta t)\dot{F}^2(s) + \dot{G}^2(s) = -\sinh^2 s + \cosh^2 s = 1 \\
g_{-1}(\tfrac{\partial f}{\partial s}, \tfrac{\partial f}{\partial t}) &= -\vartheta F(\vartheta t)\dot{F}(\vartheta t)F(s)\dot{F}(s) + \vartheta G(\vartheta t)\dot{G}(\vartheta t)F(s)\dot{F}(s) = 0 \\
g_{-1}(\tfrac{\partial f}{\partial t}, \tfrac{\partial f}{\partial t}) &= -\vartheta^2\dot{F}^2(\vartheta t)F^2(s) + \vartheta^2\dot{G}^2(\vartheta t)F^2(s) + \varsigma^2 G^2(s) = \\
&= \vartheta^2\cosh^2 s + \varsigma^2\sinh^2 s \neq 0
\end{aligned}$$

Se $c = 1$,

$$\begin{aligned}
g_1(f,f) &= F^2(\vartheta t)F^2(s) + G^2(\vartheta t)F^2(s) + G^2(s) = \\
&= \cos^2(\vartheta t)\cos^2 s + \sin^2(\vartheta t)\cos^2 s + \sin^2 s = 1 \\
g_1\left(\tfrac{\partial f}{\partial s}, \tfrac{\partial f}{\partial s}\right) &= F^2(\vartheta t)\dot{F}^2(s) + G^2(\vartheta t)\dot{F}^2(s) + \dot{G}^2(s) = \sin^2 s + \cos^2 s = 1 \\
g_1\left(\tfrac{\partial f}{\partial s}, \tfrac{\partial f}{\partial t}\right) &= \vartheta F(\vartheta t)\dot{F}(\vartheta t)F(s)\dot{F}(s) + \vartheta G(\vartheta t)\dot{G}(\vartheta t)F(s)\dot{F}(s) = 0 \\
g_1\left(\tfrac{\partial f}{\partial t}, \tfrac{\partial f}{\partial t}\right) &= \vartheta^2\dot{F}^2(\vartheta t)F^2(s) + \vartheta^2\dot{G}^2(\vartheta t)F^2(s) + \varsigma^2 G^2(s) = \\
&= \vartheta^2\cos^2 s + \varsigma^2\sin^2 s \neq 0
\end{aligned}$$

Se $c = 0$,

$$\begin{aligned}
f(t,s) &= (\vartheta t, s\cos(\varsigma t), s\sin(\varsigma t), 0) \in \mathbb{R}^3 \\
g_0\left(\tfrac{\partial f}{\partial s}, \tfrac{\partial f}{\partial s}\right) &= F^2(\vartheta t)\dot{F}^2(s) + G^2(\vartheta t)\dot{F}^2(s) + \dot{G}^2(s) = 1 \\
g_0\left(\tfrac{\partial f}{\partial s}, \tfrac{\partial f}{\partial t}\right) &= \vartheta(F(\vartheta t)\dot{F}(\vartheta t) + G(\vartheta t)\dot{G}(\vartheta t))F(s)\dot{F}(s) = 0 \\
g_0\left(\tfrac{\partial f}{\partial t}, \tfrac{\partial f}{\partial t}\right) &= \vartheta^2\dot{G}^2(\vartheta t)F^2(s) + \varsigma^2 G^2(s) = \vartheta^2 + \varsigma^2 s^2 \neq 0
\end{aligned}$$

Temos, então, em todos os casos, $\{\frac{\partial f}{\partial s}(t,s), \frac{\partial f}{\partial t}(t,s)\}$ linearmente independente em $\overline{M}^3(c)$, e, portanto M^2 é uma hipersuperfície imersa em $\overline{M}^3(c)$.

- Parte 2 - Determinação de uma normal unitária a M^2 em $\overline{M}^3(c)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s) &= (F(\vartheta t)\ddot{F}(s), G(\vartheta t)\ddot{F}(s), \ddot{G}(s)\cos(\varsigma t), \ddot{G}(s)\sin(\varsigma t)) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(t,s) &= (\vartheta\dot{F}(\vartheta t)\dot{F}(s), \vartheta\dot{G}(\vartheta t)\dot{F}(s), -\varsigma\dot{G}(s)\sin(\varsigma t), \varsigma\dot{G}(s)\cos(\varsigma t)) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,s) &= (\vartheta^2\ddot{F}(\vartheta t)F(s), \vartheta^2\ddot{G}(\vartheta t)F(s), -\varsigma^2 G(s)\cos(\varsigma t), -\varsigma^2 G(s)\sin(\varsigma t))
\end{aligned}$$

Se $c = -1$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s) &= (\cosh(\vartheta t)\cosh s, \sinh(\vartheta t)\cosh s, \cos(\varsigma t)\sinh s, \sin(\varsigma t)\sinh s) = f(t,s) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(t,s) &= (\vartheta\sinh(\vartheta t)\sinh s, \vartheta\cosh(\vartheta t)\sinh s, -\varsigma\sin(\varsigma t)\cosh s, \varsigma\cos(\varsigma t)\cosh s) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,s) &= (\vartheta^2\cosh(\vartheta t)\cosh s, \vartheta^2\sinh(\vartheta t)\cosh s, -\varsigma^2\cos(\varsigma t)\sinh s, -\varsigma^2\sin(\varsigma t)\sinh s)
\end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}
g_{-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}, f\right) &= -\vartheta\sinh(\vartheta t)\cosh(\vartheta t)\sinh s\cosh s + \vartheta\cosh(\vartheta t)\sinh(\vartheta t)\sinh s\cosh s - \\
&\quad -\varsigma\cos(\varsigma t)\sin(\varsigma t)\cosh s\sinh s + \varsigma\cos(\varsigma t)\sin(\varsigma t)\cosh s\sinh s = 0 \\
g_{-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) &= -\vartheta\sinh(\vartheta t)\cosh(\vartheta t)\sinh^2 s + \vartheta\cosh(\vartheta t)\sinh(\vartheta t)\sinh^2 s - \\
&\quad -\varsigma\sin(\varsigma t)\cos(\varsigma t)\cosh^2 s + \varsigma\cos(\varsigma t)\sin(\varsigma t)\cosh^2 s = 0 \\
g_{-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) &= -\vartheta^2\sinh^2(\vartheta t)\sinh s\cosh s + \vartheta^2\cosh^2(\vartheta t)\sinh s\cosh s + \\
&\quad +\varsigma^2\sinh^2(\varsigma t)\sinh s\cosh s + \varsigma^2\cosh^2(\varsigma t)\sinh s\cosh s = \\
&= (\vartheta^2 + \varsigma^2)\sinh s\cosh s
\end{aligned}$$

Daí o vetor

$$\overline{N}(t,s) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t} - \frac{g_{-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)}{g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)}\frac{\partial f}{\partial t}\right)(t,s)$$

é tangente a $\mathcal{H}^3(-1)$ em $f(t,s)$, normal a M^2 e o quadrado de sua norma é

$$\begin{aligned}
g_{-1}(\overline{N}, \overline{N}) &= g_{-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}, \frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}\right) - \frac{2\left(g_{-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)\right)^2}{g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)} + \frac{\left(g_{-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)\right)^2}{g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)} = \\
&= \vartheta^2\sinh^2 s + \varsigma^2 cosh^2 s - \frac{(\vartheta^2 + \varsigma^2)^2\cosh^2 s\sinh^2 s}{\vartheta^2\cosh^2 s + \varsigma^2\sinh^2 s} = \\
&= \frac{\vartheta^2\varsigma^2(\sinh^4 s + \cosh^4 s - 2\cosh^2 s\sinh^2 s)}{\vartheta^2 cosh^2 s + \varsigma^2\sinh^2 s} = \frac{\vartheta^2\varsigma^2}{\vartheta^2 cosh^2 s + \varsigma^2\sinh^2 s}
\end{aligned}$$

Se $c = 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s) &= (-\cos(\vartheta t)\cos s, -\sin(\vartheta t)\cos s, -\cos(\varsigma t)\sin s, -\sin(\varsigma t)\sin s) = -f(t,s) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}(t,s) &= (\vartheta \sin(\vartheta t)\sin s, -\vartheta\cos(\vartheta t)\sin s, -\varsigma\sin(\varsigma t)\cos s, \varsigma\cos(\varsigma t)\cos s) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,s) &= (-\vartheta^2\cos(\vartheta t)\cos s, -\vartheta^2\sin(\vartheta t)\cos s, -\varsigma^2\cos(\varsigma t)\sin s, -\varsigma^2\sin(\varsigma t)\sin s) \\
g_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}, f\right) &= \vartheta\sin(\vartheta t)\cos(\vartheta t)\sin s\cos s - \vartheta\cos(\vartheta t)\sin(\vartheta t)\sin s\cos s - \\
&\quad -\varsigma\sin(\varsigma t)\cos(\varsigma t)\cos s\sin s + \varsigma\cos(\varsigma t)\sin(\varsigma t)\cos s\sin s = 0 \\
g_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) &= -\vartheta\sin(\vartheta t)\cos(\vartheta t)\sin^2 s + \vartheta\cos(\vartheta t)\sin(\vartheta t)\sin^2 s - \\
&\quad -\varsigma\sin(\varsigma t)\cos(\varsigma t)\cos^2 s + \varsigma\cos(\varsigma t)\sin(\varsigma t)\cos^2 s = 0 \\
g_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) &= (-\vartheta^2 + \varsigma^2)\cos s\sin s
\end{aligned}$$

O vetor

$$\overline{N}(t,s) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t} - \frac{g_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)}{g_1\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)}\frac{\partial f}{\partial t}\right)(t,s)$$

é tangente a $S^3(1)$ em $f(t,s)$, normal a M^2 e sua norma é a raiz positiva de

$$\begin{aligned}
g_1(\overline{N},\overline{N}) &= \vartheta^2\sin^2 s + \varsigma^2\cos^2 s - \frac{(\varsigma^2-\vartheta^2)^2\cos^2 s\sin^2 s}{\vartheta^2\cos^2 s + \varsigma^2\sin^2 s} = \\
&= \frac{\vartheta^2\varsigma^2(\sin^2 s + \cos^2)^2}{\vartheta^2\cos^2 s + \varsigma^2\sin^2 s} = \\
&= \frac{\vartheta^2\varsigma^2}{\vartheta^2\cos^2 s + \varsigma^2\sin^2 s}
\end{aligned}$$

Se $c = 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s) &= (0,0,0,0) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}(t,s) &= (0,0,-\varsigma\sin(\varsigma t), \varsigma\cos(\varsigma t)) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,s) &= (0,0,-\varsigma^2 s\cos(\varsigma t), -\varsigma^2 s\sin(\varsigma t)) \\
g_0\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right) &= -\varsigma\cos(\varsigma t)\sin(\varsigma t) + \varsigma\cos(\varsigma t)\sin(\varsigma t) = 0 \\
g_0\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) &= s\varsigma^2\left(\sin^2(\varsigma t) + \cos^2(\varsigma t)\right) = s\varsigma^2
\end{aligned}$$

O vetor

$$\overline{N}(t,s) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t} - \frac{g_0\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)}{g_0\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)}\frac{\partial f}{\partial t}\right)(t,s)$$

é normal a M^2 e tangente a $\mathbb{R}^3$ e o quadrado de sua norma é

$$g_0(\overline{N},\overline{N}) = \varsigma^2 - \frac{2s\varsigma^2(s\varsigma^2)}{\vartheta^2 + s^2\varsigma^2} + \frac{s^2\varsigma^4}{\vartheta^2 + s^2\varsigma^2} = \frac{\vartheta^2\varsigma^2}{\vartheta^2 + \varsigma^2 s^2}$$

Portanto, um vetor unitário normal a $M^2 \subset \overline{M}^3(c)$ é dado, para cada $(t,s) \in \mathbb{R}^2$, por

$$\begin{aligned} N(t,s) &= \frac{1}{\frac{|\vartheta\varsigma|}{\sqrt{\vartheta^2F^2(s)+\varsigma^2G^2(s)}}}\overline{N}(t,s) = \\ &= \frac{1}{\psi_{\vartheta\varsigma}(s)}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}(t,s) - \frac{\vartheta^2F^2(s)\dot{F}(s)+\varsigma^2G(s)\dot{G}(s)}{\vartheta^2F^2(s)+\varsigma^2G^2(s)}\frac{\partial f}{\partial t}(t,s)\right) \end{aligned}$$

- Parte 3 - M^2 é geodesicamente-regrada.

Mostremos que para cada t real, a curva $\alpha_t(s) = f(t,s)$ é uma geodésica de $\overline{M}^3(c)$.
Vamos denotar por $\overline{\nabla}$ a conexão afim de $\overline{M}^3(c)$.
Fixemos t real.
Seja o campo de vetores tangentes a M^2, ao longo de α_t, dado por

$$V(s) = \frac{\partial f}{\partial s}(t,s) = \dot{\alpha}_t(s),\ s \in \mathbb{R}$$

Em $\overline{M}^3(c)$, podemos escrever a derivada covariante de V, ao longo de α, na forma

$$\frac{DV}{ds}(s) = \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial s}(t,s) = \overline{\nabla}_{\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)}\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)$$

que representa a parte tangente a $\overline{M}^3(c)$, do vetor $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s)$ tangente ao espaço ambiente.
Se $c = -1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s) &= \overline{\nabla}_{\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)}\frac{\partial f}{\partial s}(t,s) - g_{-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s), f(t,s)\right) f(t,s) \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{\nabla}_{\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)}\frac{\partial f}{\partial s}(t,s) &= \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s) + g_{-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s), f(t,s)\right) f(t,s) = \\ &= f(t,s) + g_{-1}(f(t,s), f(t,s))f(t,s) = (0,0,0,0) \end{aligned}$$

Se $c = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s) &= \overline{\nabla}_{\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)}\frac{\partial f}{\partial s}(t,s) + g_{1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s), f(t,s)\right) f(t,s) \Rightarrow \\ \Rightarrow \overline{\nabla}_{\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)}\frac{\partial f}{\partial s}(t,s) &= \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s) - g_{1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s), f(t,s)\right) f(t,s) = \\ &= -f(t,s) - g_1(-f(t,s), f(t,s))f(t,s) = (0,0,0,0) \end{aligned}$$

Se $c = 0$

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)}\frac{\partial f}{\partial s}(t,s) = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s) = (0,0,0,0)$$

Logo,

$$\frac{DV(s)}{ds} = \overline{\nabla}_{\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)}\frac{\partial f}{\partial s}(t,s) = 0,\ s \in \mathbb{R}$$

e $\alpha_t(s)$ é uma geodésica em $\overline{M}^3(c)$, para cada t real.

- Parte 4 - Computação das primeira e segunda formas fundamentais de M^2.

Como $\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)$ é unitário, $\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)$ e $\frac{\partial f}{\partial t}(t,s)$ são ortogonais e a norma de $\frac{\partial f}{\partial t}(t,s)$ é dada por $(\vartheta^2F^2(s)+\varsigma^2G^2(s))^{\frac{1}{2}}$, segue que a primeira forma fundamental de M^2 é

$$I_f(t,s) = ds^2 + \left(\vartheta^2F^2(s)+\varsigma^2G^2(s)\right)dt^2$$

Calculemos os coeficietes da segunda forma fundamental de M^2.
Se $c=-1$,

$$\begin{aligned}
g_{-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2},N\right) &= g_{-1}(f,N)=0\\
g_{-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t},N\right) &= \frac{g_{-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t},\overline{N}\right)}{\left(g_{-1}\left(\overline{N},\overline{N}\right)\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(g_{-1}(\overline{N},\overline{N})\right)^{\frac{1}{2}} = \psi_{\vartheta\varsigma}(s), \text{ pois}\\
& g_{-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t},\overline{N}\right) =\\
& = g_{-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t},\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}\right) - \frac{\left(g_{-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t},\frac{\partial f}{\partial t}\right)\right)^2}{g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial t}\right)} = g_{-1}(\overline{N},\overline{N})\\
g_{-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2},N\right) &= \frac{g_{-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2},\overline{N}\right)}{\left(g_{-1}(\overline{N},\overline{N})\right)^{\frac{1}{2}}} = 0, \text{ pois}\\
& g_{-1}(\tfrac{\partial^2 f}{\partial t^2},\tfrac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}) =\\
& = -\vartheta^3\sinh(\vartheta t)\cosh(\vartheta t)+\sinh s\cosh s +\\
& +\vartheta^3\cosh(\vartheta t)\sinh(\vartheta t)\sinh s\cosh s +\\
& +\varsigma^3\sin(\varsigma t)\cos(\varsigma t)\sinh s\cosh s -\\
& -\varsigma^3\cos(\varsigma t)\sin(\varsigma t)\cosh s\sinh s = 0\\
& g_{-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2},\frac{\partial f}{\partial t}\right) =\\
& = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial t},\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vartheta^2\cosh^2 s+\varsigma^2\sinh^2 s) = 0
\end{aligned}$$

Se $c=1$,

$$\begin{aligned}
g_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2},N\right) &= g_1(-f,N)=0\\
g_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t},N\right) &= \frac{g_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t},\overline{N}\right)}{\left(g_1(\overline{N},\overline{N})\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(g_1(\overline{N},\overline{N})\right)^{\frac{1}{2}} = \psi_{\vartheta\varsigma}(s), \text{ pois}\\
& g_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s\partial t},\overline{N}\right) = g_1(\overline{N},\overline{N})\\
g_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2},N\right) &= \frac{g_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t^2},\overline{N}\right)}{\left(g_1(\overline{N},\overline{N}\right)^{\frac{1}{2}}} = 0, \text{ pois}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& g_1\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \tfrac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}\right) = \\
& = -\vartheta^3 \sin(\vartheta t)\cos(\vartheta t)\sin s \cos s + \\
& + \vartheta^3 \sin(\vartheta t)\cos(\vartheta t)\sin s \cos s + \\
& + \varsigma^3 \sin(\varsigma t)\cos(\varsigma t)\cos s \sin s - \\
& - \varsigma^3 \cos(\varsigma t)\sin(\varsigma t)\sin s \cos s = 0
\end{aligned}
$$

$$
g_1\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \tfrac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\vartheta^2 \cos^2 s + \varsigma^2 \sin^2 s\right) = 0
$$

Se $c = 0$,

$$
\begin{aligned}
g_0\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}, N\right) &= 0 \\
g_0\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}, N\right) &= \frac{g_0\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}, \overline{N}\right)}{\left(g_0(\overline{N}, \overline{N})\right)^{\frac{1}{2}}} = \psi_{\vartheta\varsigma}(s), \text{ como no caso } c = -1 \\
g_0\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}, N\right) &= \frac{g_0\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \overline{N}\right)}{\left(g_0(\overline{N}, \overline{N})\right)^{\frac{1}{2}}} = 0, \text{ pois}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& g_0\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \tfrac{\partial^2 f}{\partial s \partial t}\right) = \\
& = s\varsigma^3 \sin(\varsigma t)\cos(\varsigma t) - s\varsigma^3 \cos(\varsigma t)\sin(\varsigma t) = 0
\end{aligned}
$$

$$
g_0\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \tfrac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vartheta^2 + s^2\varsigma^2) = 0
$$

Então a segunda forma fundamental de M^2 é

$$
II_f(t,s) = 0\, ds^2 + 2\psi_{\vartheta\varsigma}(s)\, ds dt + 0\, dt^2
$$

- <u>Parte 5</u> - M^2 é mínima.

A curvatura média H de M^2, é identicamente nula, pois se $c = -1$, $c = 1$ ou $c = 0$

$$
H(t,s) = \frac{1}{2}\frac{0 g_c\left(\tfrac{\partial f}{\partial t}, \tfrac{\partial f}{\partial t}\right) - 2\psi_{\vartheta\varsigma}(s) g_c\left(\tfrac{\partial f}{\partial s}, \tfrac{\partial f}{\partial t}\right) + 0 g_c\left(\tfrac{\partial f}{\partial s}, \tfrac{\partial f}{\partial s}\right)}{g_c\left(\tfrac{\partial f}{\partial s}, \tfrac{\partial f}{\partial s}\right) g_c\left(\tfrac{\partial f}{\partial t}, \tfrac{\partial f}{\partial t}\right) - \left(g_c\left(\tfrac{\partial f}{\partial s}, \tfrac{\partial f}{\partial t}\right)\right)^{\frac{1}{2}}}
$$

□

2.7 Superfícies mínimas conjugadas.

O resultado a seguir será utilizado na seção (4.3), mais especificamente na demonstração do teorema (4.3.3).

Proposição 2.7.1 *Seja $f : M^2 \to \overline{M}^3(c)$ uma superfície mínima em parâmetros isotérmicos (σ, t), onde M^2 é conexa. Denote por $I = E(d\sigma^2 + dt^2)$ e por $II = \beta_{11}d\sigma^2 + 2\beta_{12}d\sigma dt + \beta_{22}dt^2$ as primeira e segunda formas quadráticas de f, respectivamente. Seja $\psi = \beta_{11} - i\beta_{12}$ e defina uma família de formas quadráticas dependentes de um parâmetro θ, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, por*

$$\begin{array}{rcccl} \beta_{11}(\theta) & = & \Re e(e^{i\theta}\psi) & = & \beta_{11}\cos\theta - \beta_{12}\sin\theta \\ \beta_{22}(\theta) & = & -\Re e(e^{i\theta}\psi) & = & -\beta_{11}\cos\theta + \beta_{12}\sin\theta \\ \beta_{12}(\theta) = \beta_{21}(\theta) & = & \Im m(e^{i\theta}\psi) & = & \beta_{11}\sin\theta + \beta_{12}\cos\theta \end{array}$$

Então

$$I_\theta = I \text{ e } II_\theta = \beta_{11}(\theta)d\sigma^2 + 2\beta_{12}(\theta)d\sigma dt + \beta_{22}(\theta)dt^2$$

satisfazem as equações de Gauss e Codazzi, fornecendo assim, uma família isométrica $f_\theta : \tilde{M}^2 \to \overline{M}^3(c)$ de imersões mínimas, onde $\tilde{M}^2$ é o recobrimento universal de M^2. A imersão $f_{\frac{\pi}{2}}$ é chamada **imersão conjugada de** $f_0 = f$.

Para demonstrar a proposição, vamos precisar do

Teorema 2.7.2 (Teorema Fundamental das Imersões) *Sejam $E^p \xrightarrow{\tau} M^n$ um fibrado vetorial p-dimensional, com métrica Riemanniana $\langle\ ,\ \rangle$ e uma conexão ∇^E compatível com a métrica. Dada uma secção diferenciável $\alpha : M \to \hom(TM \otimes TM, E)$ do fibrado $\hom(TM \otimes TM, E)$ com $\alpha(X,Y) = \alpha(Y,X)$ que satisfaz para algum real c, todos X, Y, Z, W tangentes a M e todos $\eta, \xi \in E$, as equações*

(G)

$$\begin{aligned} c\,(g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)) - g(R(X,Y)Z,W) = \\ = \langle\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle - \langle\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle \end{aligned}$$

(C)

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_X\alpha)(Y,Z) - (\nabla_Y\alpha)(X,Z) \\ &\quad \textit{onde } (\nabla_X\alpha)(Y,Z) = \nabla^E_X(\alpha(Y,Z)) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z) \end{aligned}$$

(R)

$$\begin{aligned} -\langle R^E(X,Y)\xi,\eta\rangle &= g\left(\left[\mathcal{A}^\eta, \mathcal{A}^\xi\right]X, Y\right) \\ \textit{onde} \quad R^E(X,Y)\xi &= \nabla^E_Y\nabla^E_X\xi - \nabla^E_X\nabla^E_Y\xi + \nabla^E_{[X,Y]}\xi \\ e \quad \left[\mathcal{A}^\eta, \mathcal{A}^\xi\right] &= \mathcal{A}^\eta \circ \mathcal{A}^\xi - \mathcal{A}^\xi \circ \mathcal{A}^\eta \end{aligned}$$

sendo que a aplicação $\mathcal{A}^\eta$ é definida para cada $\eta \in E$, por $\langle\alpha(X,Y),\eta\rangle = g(\mathcal{A}^\eta(X),Y)$ para todos X e Y tangentes a M,

onde ∇, R e g representam, respectivamente, a conexão afim, o tensor de curvatura e a métrica de M. Então, existe uma imersão isométrica local $\bar{f} : M^n \to \overline{M}^{n+p}(c)$ tal que $E^p \xrightarrow{\tau} M$ é isométrico ao fibrado normal e α é a segunda forma fundamental de $\bar{f}$. Além disso, se M é simplesmente conexo, então $\bar{f}$ está globalmente definida. A imersão $\bar{f}$ é única a menos de isometrias do espaço $\overline{M}^{n+p}(c)$.

Demonstração. (veja [15]).

□

Supondo que existe uma isometria $\bar{f} : M^n \to \overline{M}^{n+p}(c)$ nas condições do Teorema Fundamental das Imersões; se $\overline{R}$ e $\bar{g}$ são respectivamente o tensor de curvatura e a métrica Riemanniana de $\overline{M}^{n+p}(c)$, então podemos reescrever as equações que aparecem no teorema, como segue.

Como $\bar{f}$ é uma isometria, $\tau : E^p \to M$ é isométrico ao fibrado normal e $\overline{M}^{n+p}(c)$ é um espaço de curvatura constante. Para todos $X, Y, Z, W \in TM$ e $\eta, \xi \in E$, temos

<u>equação (G)</u>

$$\begin{aligned}
&c\,(g(Y,Z)g(X,W) - g(X,Z)g(Y,W)) - g\,(R(X,Y)Z,W) = \\
&\quad = \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle - \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z)\rangle \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow c(\bar{g}(\bar{f}_*Y, \bar{f}_*Z)\bar{g}(\bar{f}_*X, \bar{f}_*W) - \bar{g}(\bar{f}_*X, \bar{f}_*Z)\bar{g}(\bar{f}_*Y, \bar{f}_*W)) - g(R(X,Y)Z,W) = \\
&\quad = \bar{g}(\alpha(X,Z), \alpha(Y,W)) - \bar{g}(\alpha(X,W), \alpha(Y,Z)) \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow \bar{g}(\overline{R}(\bar{f}_*X, \bar{f}_*Y)\bar{f}_*Z, \bar{f}_*W) - g(R(X,Y)Z,W) = \\
&\quad = \bar{g}(\alpha(X,Z), \alpha(Y,W)) - \bar{g}(\alpha(X,W), \alpha(Y,Z))
\end{aligned}$$

que é a equação de Gauss.

<u>equação (C)</u>

$$\begin{aligned}
\overline{R}(\bar{f}_*X, \bar{f}_*Y)\bar{f}_*Z &= \\
&= c\,(\bar{g}(\bar{f}_*Y, \bar{f}_*Z)\bar{f}_*X - \bar{g}(\bar{f}_*X, \bar{f}_*Z)\bar{f}_*Y) \Rightarrow \\
\Rightarrow 0 = (\overline{R}(\bar{f}_*X, \bar{f}_*Y)\bar{f}_*Z)^{\perp} &= (\nabla_X \alpha)(Y,Z) - (\nabla_Y \alpha)(X,Z)
\end{aligned}$$

que é a equação de Codazzi.

<u>equação (R)</u>

$$\begin{aligned}
&-\langle R^E(X,Y)\xi, \eta\rangle = g\left(\left[\mathcal{A}^\eta, \mathcal{A}^\xi\right] X, Y\right) \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow c(\bar{g}(\bar{f}_*Y, \xi)\bar{g}(\bar{f}_*X, \eta) - \bar{g}(\bar{f}_*X, \xi)\bar{g}(\bar{f}_*Y, \eta)) - \langle R^E(X,Y)\xi, \eta\rangle = \\
&\quad = g\left(\left[\mathcal{A}^\eta, \mathcal{A}^\xi\right] X, Y\right) \Rightarrow \\
&\quad \Rightarrow \bar{g}\left(\overline{R}(X,Y)\xi, \eta\right) - \langle R^E(X,Y)\xi, \eta\rangle = g\left(\left[\mathcal{A}^\eta, \mathcal{A}^\xi\right] X, Y\right)
\end{aligned}$$

que é a equação de Ricci.

Demonstração da proposição (2.7.1).

Verifiquemos se as hipóteses do Teorema Fundamental das Imersões são satisfeitas.

Temos $n = 2, p = 1$ no caso da proposição (2.7.1).

Definimos para cada $q \in M$, a fibra $E_q = \mathbb{R}$, ou seja, $\pi^{-1}(q) = E_q = \mathbb{R}$, e assim $\pi : E \longrightarrow M$ é um fibrado vetorial 1-dimensional sobre M.

Seja a secção diferenciável, para cada $\theta \in [0, 2\pi]$, $\alpha_\theta : M \longrightarrow \hom(TM \otimes TM, E)$ do fibrado $\hom(TM \otimes TM, E)$, dada pelo homomorfismo

$$\alpha_{\theta q} : T_qM \otimes T_qM \longrightarrow E_q \sim \mathbb{R},\ q = f(\sigma,t) \in M$$

onde

$$\begin{aligned}
\alpha_{\theta q}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}(\sigma,t), \frac{\partial}{\partial\sigma}(\sigma,t)\right) &= \beta_{11}(\theta) \in \mathbb{R} \\
\alpha_{\theta q}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}(\sigma,t), \frac{\partial}{\partial t}(\sigma,t)\right) &= \beta_{12}(\theta) \in \mathbb{R} \\
\alpha_{\theta q}\left(\frac{\partial}{\partial t}(\sigma,t), \frac{\partial}{\partial\sigma}(\sigma,t)\right) &= \beta_{21}(\theta) \in \mathbb{R} \\
\alpha_{\theta q}\left(\frac{\partial}{\partial t}(\sigma,t), \frac{\partial}{\partial t}(\sigma,t)\right) &= \beta_{22}(\theta) \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

é claro que $\alpha_\theta(X,Y) = \alpha_\theta(Y,X)$, $\forall X, Y \in TM$.

Falta verificarmos que valem as equações de Gauss, Codazzi e Ricci.

Como $p = 1$, a fibra E_q sobre $q \in M$ é $\mathbb{R}$ e quaisquer que sejam $\xi, \eta \in E_q$, temos

$$\begin{aligned}
\bar{g}(\overline{R}(X,Y)\xi,\eta) &= 0 \\
\langle R^E(X,Y)\xi,\eta\rangle &= 0 \\
g\left(\left[\mathcal{A}^\eta, \mathcal{A}^\xi\right] X, Y\right) &= 0
\end{aligned}$$

e a equação de Ricci (R) é obviamente satisfeita para todo $\theta \in [0, 2\pi]$.

Tomemos os seguintes elementos básicos de TM

$$e_1 = \tfrac{\partial}{\partial\sigma} \quad e_2 = \tfrac{\partial}{\partial t}$$

vale

$$g(e_i, e_j) = E\,\delta_{ij},\ i,j = 1,2$$

então, basta mostrarmos que, para cada $\theta \in [0, 2\pi]$, valem (G) e (C) computadas em e_1 e e_2.

Observemos que

$$f : M^2 \longrightarrow \overline{M}^3(c) \text{ é mínima } \Leftrightarrow H \equiv 0 \Leftrightarrow \frac{1}{E}(\beta_{11} + \beta_{22}) = 0 \Leftrightarrow \beta_{11} = -\beta_{22}$$

Sendo $f : M^2 \longrightarrow \overline{M}^3(c)$ uma superfície, valem para $f_0 = f$ as duas equações seguintes:

- de Gauss -

$$\begin{aligned}
&\bar{g}(\overline{R}(f_*e_1, f_*e_2)f_*e_1, f_*e_2) - g(R(e_1,e_2)e_1,e_2) = \\
&= \alpha_0(e_1,e_1)\alpha_0(e_2,e_2) - \alpha_0(e_1,e_2)\alpha_0(e_2,e_1) \Rightarrow \\
&\Rightarrow c\,(g(e_2,e_1)g(e_1,e_2) - g(e_1,e_1)g(e_2,e_2)) - g(R(e_1,e_2)e_1,e_2) = \\
&= -\beta_{11}^2 - \beta_{12}^2
\end{aligned}$$

- de Codazzi -

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla_X\alpha_0)(Y,Z) - (\nabla_Y\alpha_0)(X,Z) = \\
&= \nabla_X^E(\alpha_0(Y,Z)) - \alpha_0(\nabla_X Y, Z) - \alpha_0(Y, \nabla_X Z) - \\
&-\nabla_Y^E(\alpha_0(X,Z)) + \alpha_0(\nabla_Y X, Z) + \alpha_0(X, \nabla_Y Z)
\end{aligned}$$

para todos campos X, Y, Z tangentes a M.

Temos

$$\begin{aligned}
-\beta_{11}^2(\theta) - \beta_{12}^2(\theta) &= -(\beta_{11}^2\cos^2\theta + \beta_{12}^2\sin^2\theta - 2\beta_{11}\beta_{12}\sin\theta\cos\theta) - \\
&\quad -(\beta_{11}^2\sin^2\theta + \beta_{12}^2\cos^2\theta + 2\beta_{11}\beta_{12}\sin\theta\cos\theta) = \\
&= -\beta_{11}^2 - \beta_{12}^2
\end{aligned}$$

para $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Logo, pela equação de Gauss acima

$$c\,(g(e_2,e_1)g(e_1,e_2) - g(e_1,e_1)g(e_2,e_2)) - g(R(e_1,e_2)e_1,e_2) = -\beta_{11}^2(\theta) - \beta_{12}^2(\theta)$$

que é a equação (G) para $\theta \in [0, 2\pi]$.

Escolhendo $X = e_1, Y = e_2, Z = e_i$ $(i = 1,2)$ na equação de Codazzi acima e usando

$$0 = [e_k, e_j] = \nabla_{e_j}e_k - \nabla_{e_k}e_j,\ k,j = 1,2$$

vem

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_{e_1}^E(\alpha_0(e_2,e_i)) - \alpha_0(\nabla_{e_1}e_2, e_i) - \alpha_0(e_2, \nabla_{e_1}e_i) - \\
&\quad -\nabla_{e_2}^E(\alpha_0(e_1,e_i)) + \alpha_0(\nabla_{e_2}e_1, e_i) + \alpha_0(e_1, \nabla_{e_2}e_i) = \\
&= \nabla_{e_1}^E(\beta_{2i}) - \alpha_0\left(\textstyle\sum_{j=1}^2 \frac{g(\nabla_{e_1}e_2, e_j)}{E}e_j, e_i\right) - \alpha_0\left(e_2, \textstyle\sum_{j=1}^2 \frac{g(\nabla_{e_1}e_i, e_j)}{E}e_j\right) - \\
&\quad -\nabla_{e_2}^E(\beta_{1i}) + \alpha_0\left(\textstyle\sum_{j=1}^2 \frac{g(\nabla_{e_2}e_1, e_j)}{E}e_j, e_i\right) + \alpha_0\left(e_1, \textstyle\sum_{j=1}^2 \frac{g(\nabla_{e_2}e_i, e_j)}{E}e_j\right) = \\
&= \nabla_{e_1}^E(\beta_{2i}) - \nabla_{e_2}^E(\beta_{1i}) - \textstyle\sum_{j=1}^2 g(\nabla_{e_1}e_i, e_j)\frac{\beta_{2j}}{E} + \sum_{j=1}^2 g(\nabla_{e_2}e_i, e_j)\frac{\beta_{1j}}{E}
\end{aligned}$$

Substituindo as relações

$$g(e_k,e_j) = 0 \Rightarrow g(\nabla_{e_k}e_k, e_j) = -g(e_k, \nabla_{e_k}e_j) = -g(e_k, \nabla_{e_j}e_k),\ k,j = 1,2,\ k \neq j$$

$$g(e_1,e_1)=g(e_2,e_2)=E \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} g(\nabla_{e_1}e_1,e_1) & = & g(\nabla_{e_1}e_2,e_2) & = & g(\nabla_{e_2}e_1,e_2) \\ g(\nabla_{e_2}e_2,e_2) & = & g(\nabla_{e_2}e_1,e_1) & = & g(\nabla_{e_1}e_2,e_1) \end{array} \right.$$

e $\beta_{11}=-\beta_{22}$.

Para $i=1$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^E_{e_1}(\beta_{21})-\nabla^E_{e_2}(\beta_{11})-g(\nabla_{e_1}e_1,e_1)\tfrac{\beta_{21}}{E}- \\ &\quad -g(\nabla_{e_1}e_1,e_2)\tfrac{\beta_{22}}{E}+g(\nabla_{e_2}e_1,e_1)\tfrac{\beta_{11}}{E}+g(\nabla_{e_2}e_1,e_2)\tfrac{\beta_{12}}{E}= \\ &= \nabla^E_{e_1}(\beta_{21})-\nabla^E_{e_2}(\beta_{11})--g(\nabla_{e_2}e_1,e_2)\tfrac{\beta_{21}}{E}+ \\ &\quad +g(e_1,\nabla_{e_2}e_1)\tfrac{\beta_{22}}{E}+g(\nabla_{e_2}e_1,e_1)\tfrac{\beta_{11}}{E}+g(\nabla_{e_2}e_1,e_2)\tfrac{\beta_{12}}{E}= \\ &= \nabla^E_{e_1}(\beta_{21})-\nabla^E_{e_2}(\beta_{11}) \end{aligned}$$

Para $i=2$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^E_{e_1}(\beta_{22})-\nabla^E_{e_2}(\beta_{12})-g(\nabla_{e_1}e_2,e_1)\tfrac{\beta_{21}}{E}- \\ &\quad -g(\nabla_{e_1}e_2,e_2)\tfrac{\beta_{22}}{E}+g(\nabla_{e_2}e_2,e_1)\tfrac{\beta_{11}}{E}+g(\nabla_{e_2}e_2,e_2)\tfrac{\beta_{12}}{E}= \\ &= \nabla^E_{e_1}(\beta_{22})-\nabla^E_{e_2}(\beta_{12})-g(\nabla_{e_2}e_2,e_2)\tfrac{\beta_{21}}{E}+ \\ &\quad +g(e_1,\nabla_{e_2}e_2)\tfrac{\beta_{22}}{E}+g(\nabla_{e_2}e_2,e_1)\tfrac{\beta_{11}}{E}+g(\nabla_{e_2}e_2,e_2)\tfrac{\beta_{12}}{E}= \\ &= \nabla^E_{e_1}(\beta_{22})-\nabla^E_{e_2}(\beta_{12}) \end{aligned}$$

Logo, para todo $\theta\in[0,2\pi]$,

$$\begin{aligned} &\nabla_{e_1}\alpha_\theta(e_2,e_i)-\nabla_{e_2}\alpha_\theta(e_1,e_i)= \\ &= \nabla^E_{e_1}(\beta_{2i}(\theta))-\nabla^E_{e_2}(\beta_{1i}(\theta))-\sum_{j=1}^{2}g(\nabla_{e_1}e_i,e_j)\frac{\beta_{2j}(\theta)}{E}+\sum_{j=1}^{2}g(\nabla_{e_2}e_i,e_j)\frac{\beta_{1j}(\theta)}{E}= \\ &= \nabla^E_{e_1}(\beta_{2i}(\theta))-\nabla^E_{e_2}(\beta_{1i}(\theta))-g(\nabla_{e_1}e_i,e_1)\frac{\beta_{21}(\theta)}{E}-g(\nabla_{e_1}e_i,e_2)\frac{\beta_{22}(\theta)}{E}+ \\ &\quad +g(\nabla_{e_2}e_i,e_1)\frac{\beta_{11}(\theta)}{E}+g(\nabla_{e_2}e_i,e_2)\frac{\beta_{12}(\theta)}{E}=\nabla^E_{e_1}(\beta_{2i}(\theta))-\nabla^E_{e_2}(\beta_{1i}(\theta))- \\ &\quad -g(\nabla_{e_2}e_i,e_2)\frac{\beta_{21}(\theta)}{E}+g(e_1,\nabla_{e_2}e_i)\frac{\beta_{22}(\theta)}{E}+g(\nabla_{e_2}e_i,e_1)\frac{\beta_{11}(\theta)}{E}+g(\nabla_{e_2}e_i,e_2)\frac{\beta_{12}(\theta)}{E}= \\ &= \nabla^E_{e_1}(\beta_{2i}(\theta))-\nabla^E_{e_2}(\beta_{1i}(\theta)) \end{aligned}$$

Fazendo $\imath = 1$

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1}\alpha_\theta(e_2,e_1) - \nabla_{e_2}\alpha_\theta(e_1,e_1) = \nabla^E_{e_1}(\beta_{21}(\theta)) - \nabla^E_{e_2}(\beta_{11}(\theta)) &= \\
= \quad \sin\theta\nabla^E_{e_1}\beta_{11} + \cos\theta\nabla^E_{e_1}\beta_{12} - \cos\theta\nabla^E_{e_2}\beta_{11} + \sin\theta\nabla^E_{e_2}\beta_{12} &= \\
= \quad \sin\theta\left(\nabla^E_{e_1}\beta_{11} + \nabla^E_{e_2}\beta_{12}\right) + \cos\theta\left(\nabla^E_{e_1}\beta_{12} - \nabla^E_{e_2}\beta_{11}\right) &= \\
= \quad \sin\theta\left(-\nabla^E_{e_1}\beta_{22} + \nabla^E_{e_2}\beta_{12}\right) + \cos\theta\left(\nabla^E_{e_1}\beta_{12} - \nabla^E_{e_2}\beta_{11}\right) &= 0
\end{aligned}$$

e se $\imath = 2$

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1}\alpha_\theta(e_2,e_2) - \nabla_{e_2}\alpha_\theta(e_1,e_2) = \nabla^E_{e_1}(\beta_{22}(\theta)) - \nabla^E_{e_2}(\beta_{12}(\theta)) &= \\
= \quad -\cos\theta\nabla^E_{e_1}\beta_{11} + \sin\theta\nabla^E_{e_1}\beta_{12} - \sin\theta\nabla^E_{e_2}\beta_{11} - \cos\theta\nabla^E_{e_2}\beta_{12} &= \\
= \quad \sin\theta\left(\nabla^E_{e_1}\beta_{12} - \nabla^E_{e_2}\beta_{11}\right) + \cos\theta\left(-\nabla^E_{e_1}\beta_{11} - \nabla^E_{e_2}\beta_{12}\right) &= \\
= \quad \sin\theta\left(\nabla^E_{e_1}\beta_{12} - \nabla^E_{e_2}\beta_{11}\right) + \cos\theta\left(\nabla^E_{e_1}\beta_{22} - \nabla^E_{e_2}\beta_{12}\right) &= 0
\end{aligned}$$

Resumindo

$$\nabla_{e_1}\alpha_\theta(e_2,e_\imath) - \nabla_{e_2}\alpha_\theta(e_1,e_\imath) = 0, \ \imath = 1,2$$

que é a equação (C) para $\theta \in [0,2\pi]$.

Podemos então, aplicar o Teorema Fundamental das Imersões, que garante a existência de uma família isométrica $\bar{f}_\theta : M^2 \to \overline{M}^3(c)$ de imersões mínimas.

Usando a aplicação $\pi : \tilde{M}^2 \to M^2$ do recobrimento universal $\tilde{M}$ de M^2, para cada $\theta \in [0,2\pi]$, podemos definir de modo único, a partir de $\bar{f}_\theta$, a aplicação f_θ pelo diagrama a seguir:

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{M}^2 & \xrightarrow{f_\theta} & \overline{M}^3(c) \\
\pi \downarrow & \overset{\bar{f}_\theta}{\nearrow} & \\
M^2 & &
\end{array}$$

Obtemos, portanto, uma família isométrica $f_\theta : \tilde{M}^2 \to \overline{M}^3(c)$ de imersões mínimas, como queríamos.

□

Capítulo 3

HIPERSUPERFÍCIES DE ROTAÇÃO EM ESPAÇOS DE CURVATURA CONSTANTE

3.1 Introdução.

Neste capítulo estenderemos a noção clássica de superfícies de rotação do espaço 3-espaço euclidiano, $\mathbb{R}^3$, a hipersuperfícies de um $(n+1)$-espaço $\overline{M}^{n+1}(c)$, de curvatura constante c.

Na seção (3.2) definiremos **hipersuperfície de rotação de** $\overline{M}^{n+1}(c)$ e forneceremos sua parametrização. Tal hipersuperfície é gerada por uma subvariedade umbílica, $(n-1)$-dimensional, $\Sigma \subset \overline{M}^{n+1}(c)$, com curvatura variável, que se move ao longo de uma curva convenientemente escolhida. No caso particular em que $c < 0$, as várias posições que Σ ocupa, descrevem o que chamamos de **paralelos** da hipersuperfície de rotação, a qual será, então, classificada de acordo com a natureza dos paralelos: **esférica**, se os paralelos são esferas, **hiperbólica**, se os paralelos são superfícies equidistantes, e **parabólica**, se os paralelos são horoesferas.

Em seguida, na seção (3.3) nos ateremos ao caso particular em que o espaço ambiente $\overline{M}^{n+1}(c)$ tem curvatura seccional constante $c < 0$, a fim de relacionarmos as hipersuperfícies de rotação nos vários modêlos da Geometria Hiperbólica.

3.2 Caracterização das hipersuperfícies de rotação em um espaço de curvatura constante $\overline{M}^{n+1}(c)$.

Definição 3.2.1 *Consideremos os subespaços*

$$\mathcal{P}^2 \text{ e } \mathcal{P}^3 \supset \mathcal{P}^2$$

do espaço ambiente $(L^{n+2}$, *no caso* $c < 0$ *ou* $\mathbb{R}^{n+2}$ *no caso* $c \geq 0)$, $n \geq 2$, *tais que,*

$$\mathcal{P}^3 \cap \overline{M}^{n+1}(c) = \overline{M}^2(c) \neq \emptyset$$

e seja C *uma curva regular contida em* $\overline{M}^2(c)$ *que não intercepta* $\mathcal{P}^2$. *A órbita de* C *sob a ação de* $O(\mathcal{P}^2)$*(conjunto das transformações ortogonais do espaço ambiente, com determi-*

nante positivo, que deixam $\mathcal{P}^2$ fixo, ponto a ponto) é chamada **hipersuperfície de rotação** *M^n contida em $\overline{M}^{n+1}(c)$, gerada pela curva C em torno de $\mathcal{P}^2$.*

Chamamos de **meridiano** *de M^n, a curva $\mathcal{O}(C)$ onde $\mathcal{O} \in O(\mathcal{P}^2)$ e de* **paralelo** *de M^n, a órbita de um ponto da curva C sob $O(\mathcal{P}^2)$.*

Agora, verificaremos que M^n, dada pela definição (3.2.1), é realmente uma hipersuperfície de $\overline{M}^{n+1}(c)$. Mostraremos isso, fornecendo uma parametrização de M^n através de uma descrição de $O(\mathcal{P}^2)$.

No caso em que $c < 0$, o espaço ambiente é L^{n+2} e temos três possibilidades para o espaço $\mathcal{P}^2$: $\mathcal{P}^2$ é **Lorentziano**, $\mathcal{P}^2$ é **Riemanniano** ou $\mathcal{P}^2$ é **Degenerado** e em cada caso, escolhemos uma base especial $\{e_1, \ldots, e_{n+2}\}$ de L^{n+2}.

Para o caso $\mathcal{P}^2$ Lorentziano, por (1.6), podemos escolher a base $\{e_1, \ldots, e_{n+2}\}$ de modo que

$$\begin{aligned}
&L^{n+2} = [e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, e_{n+2}],\ \mathcal{P}^2 = [e_{n+1}, e_{n+2}],\ \mathcal{P}^3 = [e_1, e_{n+1}, e_{n+2}]\\
&g_{-1}(e_{n+2}, e_{n+2}) = -1\\
&g_{-1}(e_i, e_j) = \delta_{ij}, i \neq n+2,\ i, j = 1, \ldots, n+2
\end{aligned}$$

ficando a matriz $\mathcal{O}$, de um operador de $O(\mathcal{P}^2)$, na forma

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & & \\ & 0 & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

onde

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

é matriz de ordem n, ortogonal no espaço euclidiano $([e_1, \ldots, e_n], g_{-1}|_{[e_1, \ldots, e_n]})$.

No caso $\mathcal{P}^2$ Riemanniano, por (1.7), escolhemos a base de modo que

$$\begin{aligned}
&L^{n+2} = [e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, e_{n+2}],\ \mathcal{P}^2 = [e_{n+1}, e_{n+2}],\ \mathcal{P}^3 = [e_1, e_{n+1}, e_{n+2}]\\
&g_{-1}(e_1, e_1) = -1\\
&g_{-1}(e_i, e_j) = \delta_{ij}, i \neq 1,\ i, j = 1, \ldots, n+2
\end{aligned}$$

ficando a matriz $\mathcal{O}$ na forma:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & & \\ & 0 & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

onde

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

é matriz de ordem n, ortogonal no espaço lorentziano $([e_1, \ldots, e_n], g_{-1}|_{[e_1,\ldots,e_n]})$.

Quando $\mathcal{P}^2$ é Degenerado, por (1.8), podemos escolher a base de modo que

$$\begin{aligned} &L^{n+2} = [e_1, \ldots, e_{n+2}],\ \mathcal{P}^2 = [e_{n+1}, e_{n+2}],\ \mathcal{P}^3 = [e_1, e_{n+1}, e_{n+2}] \\ &g_{-1}(e_1, e_1) = 0 = g_{-1}(e_{n+1}, e_{n+1}),\ g_{-1}(e_1, e_{n+1}) = 1 \\ &g_{-1}(e_i, e_j) = \delta_{ij}, i \neq 1, n+1,\ i, j = 1, \ldots, n+2 \end{aligned}$$

e a matriz $\mathcal{O}$, nessa base é da forma

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & & \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & & \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

onde

$$a_{n+1,1} = -\frac{1}{2}(a_{21}^2 + \cdots + a_{n1}^2)$$

Podemos obter uma parametrização de M^n, parametrizando a órbita $U(p)$ por cada ponto p da curva e em seguida, fazendo o parâmetro da curva C variar dentro do seu intervalo de definição.

Tomemos a base especial $\{e_1, \ldots, e_{n+2}\}$ de L^{n+2}, adequada a cada caso, e consideremos uma parametrização da curva $C \subset \mathcal{P}^3 \cap \mathcal{H}^{n+1}(c)$ na base $\{e_1, \ldots, e_{n+2}\}$

$$\gamma(s) = x_1(s)e_1 + x_{n+1}(s)e_{n+1} + x_{n+2}(s)e_{n+2},\ s \in I \subset \mathbb{R} \tag{3.4}$$

sendo s o comprimento de arco de γ.

Como a curva C não deve interceptar $\mathcal{P}^2 = [e_{n+1}, e_{n+2}]$ vamos supor $x_1(s) > 0$, $\forall s \in I$.

Fixemos $s = s_0 \in I$ e encontremos a órbita $U(s_0)$ do ponto $\gamma(s_0)$ da curva C, sob a ação de $O(\mathcal{P}^2)$.

Daqui em diante, usaremos a notação $(a_1, \ldots, a_{n+2}) = \sum_{i=1}^{n+2} a_i e_i$, $a_i \in \mathbb{R}$.

<u>Caso (L) - $\mathcal{P}^2$ é Lorentziano</u> Usando (3.1), um ponto $\mathcal{O}(\gamma(s_0))$ de $U(s_0)$ é dado por

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & & \\ & 0 & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(s_0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{n+1}(s_0) \\ x_{n+2}(s_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1(s_0) \\ a_{21}x_1(s_0) \\ \vdots \\ a_{n1}x_1(s_0) \\ x_{n+1}(s_0) \\ x_{n+2}(s_0) \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

onde $a_{i1} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, $\mathcal{O}(e_1) = (a_{11}, \ldots, a_{n1}, 0, 0)$ e $a_{11}^2 + \cdots + a_{n1}^2 = 1$.

Seja $\overline{\mathcal{P}}^n(s_0)$ o n-subespaço afim de L^{n+2}, paralelo a $[e_1, \ldots, e_{n+1}]$ e que passa pelo ponto $(0, \ldots, 0, x_{n+1}(s_0), x_{n+2}(s_0))$

$$\overline{\mathcal{P}}^n(s_0) = \{(p_1, \ldots, p_n, x_{n+1}(s_0), x_{n+2}(s_0)) \in L^{n+2}\}$$

Se

$$p = (p_1, \ldots, p_n, x_{n+1}(s_0), x_{n+2}(s_0)) \in \overline{\mathcal{P}}^n(s_0) \cap \mathcal{H}^{n+1}(c),$$

segue por (1.6) e por (3.5), que

$$\begin{aligned} 1/c = g_{-1}(p,p) &= p_1^2 + \cdots + p_n^2 + x_{n+1}^2(s_0) - x_{n+2}^2(s_0) = \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n p_i^2 + 1/c - x_1^2(s_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow \textstyle\sum_{i=1}^n p_i^2 = x_1^2(s_0) &\Rightarrow \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $\overline{\mathcal{P}}^n(s_0) \cap \mathcal{H}^{n+1}(c)$ é uma $(n-1)$-esfera de centro $(0, \ldots, 0, x_{n+1}(s_0), x_{n+2}(s_0))$ e raio $x_1(s_0)$ contida em $\overline{\mathcal{P}}^n(s_0)$.

Como $\mathcal{O}(\gamma(s_0)) \in \overline{\mathcal{P}}^n(s_0) \cap \mathcal{H}^{n+1}(c)$, para todo $\mathcal{O} \in O(\mathcal{P}^2)$, segue que a órbita $U(s_0)$ é uma $(n-1)$-esfera. (3.6)

Consideremos uma parametrização ortogonal da esfera unitária $(n-1)$-dimensional contida em $[e_1, \ldots, e_n]$:

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)),\ t = (t_1, \ldots, t_{n-1}) \in U \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

com $\sum_{i=1}^n \varphi_i^2(t) = 1$.

Então, a esfera de raio $x_1(s_0)$ de centro $(0, \ldots, 0, x_{n+1}(s_0), x_{n+2}(s_0))$ será parametrizada por

$$f(t, s_0) = (\varphi_1(t)x_1(s_0), \ldots, \varphi_n(t)x_1(s_0), x_{n+1}(s_0), x_{n+2}(s_0))$$

Assim,

$$f(t,s) = (\varphi_1(t)x_1(s), \ldots, \varphi_n(t)x_1(s), x_{n+1}(s), x_{n+2}(s)),\ (t,s) \in U \times I \subset \mathbb{R}^n \tag{3.7}$$

descreve o conjunto M^n, órbita de C sob ação de $O(\mathcal{P}^2)$.

A fim de mostrarmos que M^n é hipersuperfície imersa em L^{n+2}, basta verificarmos que o conjunto

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s), \frac{\partial f}{\partial s}(t,s),\ (t,s) \in U \times I,\ i = 1, \ldots, n-1\right\},\ t = (t_1, \ldots, t_{n-1})$$

é linearmente independente em L^{n+2}.

Temos, para $(t,s) \in U \times I$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s) &= \left(x_1(s)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}(t),\ldots,x_1(s)\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}(t),0,0\right),\ i=1,\ldots,n-1 \\
\frac{\partial f}{\partial s}(t,s) &= (\varphi_1(t)\dot{x}_1(s),\ldots,\varphi_n(t)\dot{x}_1(s),\dot{x}_{n+1}(s),\dot{x}_{n+2}(s)) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s) &= (\varphi_1(t)\ddot{x}_1(s),\ldots,\varphi_n(t)\ddot{x}_1(s),\ddot{x}_{n+1}(s),\ddot{x}_{n+2}(s)) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s}(t,s) &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}(t)\dot{x}_1(s),\ldots,\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}(t)\dot{x}_1(s),0,0\right),\ i=1,\ldots,n-1 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}(t,s) &= \left(x_1(s)\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_i \partial t_j}(t),\ldots,x_1(s)\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t_i \partial t_j}(t),0,0\right),\ i,j=1,\ldots,n-1
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Como $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ é uma parametrização ortogonal de uma esfera unitária, tiramos para $i,j = 1,\ldots,n-1$, $t \in U$, as relações:

$$\begin{aligned}
\varphi_1^2(t) + \cdots + \varphi_n^2(t) &= 1 \\
2\varphi_1(t)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}(t) + \cdots + 2\varphi_n(t)\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}(t) &= 0 \\
\varphi_1(t)\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_j \partial t_i}(t) + \cdots + \varphi_n(t)\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t_j \partial t_i}(t) &= -\textstyle\sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \varphi_\ell(t)}{\partial t_j}\frac{\partial \varphi_\ell(t)}{\partial t_i} \\
\textstyle\sum_{\ell=1}^n \frac{\partial \varphi_\ell(t)}{\partial t_j}\frac{\partial \varphi_\ell(t)}{\partial t_i} &= \begin{cases} \sum_{\ell=1}^n (\frac{\partial \varphi_\ell(t)}{\partial t_i})^2 \neq 0 & , i=j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Usando (1.6), (3.4) e (3.9) para $i,j = 1,\ldots,n-1$, $(t,s) \in U \times I$

$$\begin{aligned}
g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s),\frac{\partial f}{\partial t_j}(t,s)\right) &= x_1^2(s)\textstyle\sum_{\ell=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_\ell(t)}{\partial t_i}\frac{\partial \varphi_\ell(t)}{\partial t_j}\right) = \\
&= \begin{cases} x_1^2(s)\sum_{\ell=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_\ell(t)}{\partial t_i}\right)^2 \neq 0 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \\
g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s),\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right) &= x_1(s)\dot{x}_1(s)\textstyle\sum_{\ell=1}^n \varphi_\ell(t)\frac{\partial \varphi_\ell(t)}{\partial t_i} = 0 \\
g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s),\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) &= \dot{x}_1^2(s)\textstyle\sum_{\ell=1}^n \varphi_\ell^2(t) + \dot{x}_{n+1}^2(s) - \dot{x}_{n+2}^2(s) = \\
&= g_{-1}(\dot{\gamma}(s),\dot{\gamma}(s)) = 1
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Portanto (3.7) é uma parametrização da hipersuperfície de rotação M^n, gerada pela curva C em torno de $\mathcal{P}^2 = [e_{n+1}, e_{n+2}]$ e por serem os paralelos de M^n esferas, chamaremos M^n de **hipersuperfície de rotação esférica de $\mathcal{H}^{n+1}(c)$**.

<u>Caso (R) - $\mathcal{P}^2$ é Riemanniano</u>

Por (3.2), um ponto $\mathcal{O}(\gamma(s_0)) \in U(s_0)$ é dado por

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & & \\ & 0 & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(s_0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{n+1}(s_0) \\ x_{n+2}(s_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1(s_0) \\ \vdots \\ a_{n1}x_1(s_0) \\ x_{n+1}(s_0) \\ x_{n+2}(s_0) \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

onde $a_{i1} \in I\!R$, $i = 1, \ldots, n$, $\mathcal{O}(e_1) = (a_{11}, \ldots, a_{n1}, 0, 0)$ e $-a_{11}^2 + a_{21}^2 + \cdots + a_{n1}^2 = 1$.

Seja $\overline{\mathcal{P}}^n(s_0)$ como no caso (L), e

$$p = (p_1, \ldots, p_n, x_{n+1}(s_0), x_{n+2}(s_0)),\ p \in \overline{\mathcal{P}}^n(s_0) \cap \mathcal{H}^{n+1}(c).$$

Por (1.7), (3.4)

$$\begin{aligned} 1/c = g_{-1}(p,p) &= -p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2 + x_{n+1}^2(s_0) + x_{n+2}^2(s_0) = \\ &= -p_1^2 + \textstyle\sum_{i=2}^n p_i^2 + 1/c + x_1^2(s_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow -p_1^2 + \textstyle\sum_{\ell=2}^n p_\ell^2 &= -x_1^2(s_0) \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \overline{\mathcal{P}}^n(s_0) \cap \mathcal{H}^{n+1}(c)$ é uma $(n-1)$-superfície equidistante contida no n-subespaço afim $\overline{\mathcal{P}}^n(s_0)$ de L^{n+2}.

Como $\mathcal{O}(\gamma(s_0)) \in \overline{\mathcal{P}}^n(s_0) \cap \mathcal{H}^{n+1}(c)$, para todo $\mathcal{O} \in O(\mathcal{P}^2)$, segue que a órbita $U(s_0)$ é uma $(n-1)$-superfície equidistante. (3.12)

Tomando uma parametrização ortogonal da $(n-1)$- superfície equidistante unitária contida em $[e_1, \ldots, e_n]$:

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)),\ t = (t_1, \ldots, t_{n-1}) \in U \subset I\!R^{n-1}$$

com $-\varphi_1^2(t) + \sum_{\ell=2}^n \varphi_\ell^2(t) = -1$.

Segue que,

$$f(t,s) = (\varphi_1(t)x_1(s), \ldots, \varphi_n(t)x_1(s), x_{n+1}(s), x_{n+2}(s)),\ (t,s) \in U \times I \subset I\!R^n \tag{3.13}$$

descreve o conjunto M^n, órbita de C sob ação de $O(\mathcal{P}^2)$.

Como no caso (L), verifiquemos que o conjunto

$$\left\{ \tfrac{\partial f}{\partial t_i}(t,s), \tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s),\ (t,s) \in U \times I,\ i = 1, \ldots, n-1 \right\},\ t = (t_1, \ldots, t_{n-1})$$

é linearmente independente em L^{n+2}.

Temos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s) &= \left(x_1(s)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}(t),\ldots,x_1(s)\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}(t),0,0\right),\ i=1,\ldots,n-1\\
\frac{\partial f}{\partial s}(t,s) &= (\varphi_1(t)\dot{x}_1(s),\ldots,\varphi_n(t)\dot{x}_1(s),\dot{x}_{n+1}(s),\dot{x}_{n+2}(s))\\
\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s) &= (\varphi_1(t)\ddot{x}_1(s),\ldots,\varphi_n(t)\ddot{x}_1(s),\ddot{x}_{n+1}(s),\ddot{x}_{n+2}(s))\\
\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s}(t,s) &= \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}(t)\dot{x}_1(s),\ldots,\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}(t)\dot{x}_1(s),0,0\right),\ i=1,\ldots,n-1\\
\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}(t,s) &= \left(x_1(s)\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_i \partial t_j}(t),\ldots,x_1(s)\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t_i \partial t_j}(t),0,0\right),\ i,j=1,\ldots,n-1
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

onde $(t,s)\in U\times I$ e $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ satisfaz para todo $t\in U$, $i,j=1,\ldots,n-1$

$$
\begin{aligned}
-\varphi_1^2(t)+\cdots+\varphi_n^2(t) &= 1\\
-2\varphi_1(t)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}(t)+\sum_{\ell=2}^{n}2\varphi_\ell(t)\frac{\partial \varphi_\ell}{\partial t_i}(t) &= 0\\
-\varphi_1(t)\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_j \partial t_i}(t)+\sum_{\ell=2}^{n}\varphi_\ell(t)\frac{\partial^2 \varphi_\ell}{\partial t_j \partial t_i}(t) &= \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t_j}\frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t_i}-\sum_{\ell=2}^{n}\frac{\partial \varphi_\ell(t)}{\partial t_j}\frac{\partial \varphi_\ell(t)}{\partial t_i}\\
-\frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t_j}\frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t_i}+\sum_{\ell=2}^{n}\frac{\partial \varphi_\ell(t)}{\partial t_j}\frac{\partial \varphi_\ell(t)}{\partial t_i} &= \begin{cases} -\left(\frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t_i}\right)^2+\sum_{\ell=2}^{n}\left(\frac{\partial \varphi_\ell(t)}{\partial t_i}\right)^2\neq 0, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Por (1.7), (3.14), (3.15) e (3.4), temos para $(t,s)\in U\times I$, $i,j=1,\ldots,n-1$, as seguintes relações

$$
\begin{aligned}
g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s),\frac{\partial f}{\partial t_j}(t,s)\right) &= \begin{cases} x_1^2(s)\left(-\left(\frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t_i}\right)^2+\sum_{\ell=2}^{n}\left(\frac{\partial \varphi_\ell(t)}{\partial t_i}\right)^2\right)\neq 0 & ,i=j\\ 0 & ,i\neq j\end{cases}\\
g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s),\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right) &= x_1(s)\dot{x}_1(s)\left(-\varphi_1(t)\frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t_i}+\sum_{\ell=2}^{n}\varphi_\ell(t)\frac{\partial \varphi_\ell(t)}{\partial t_i}\right)=0\\
g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s),\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) &= \dot{x}_1^2(s)\left(-\varphi_1^2(t)+\sum_{\ell=2}^{n}\varphi_\ell^2(t)\right)+\dot{x}_{n+1}^2(s)-\dot{x}_{n+2}^2(s)=\\
&= g_{-1}\left(\dot{\gamma}(s),\dot{\gamma}(s)\right)=1
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

Logo (3.13), parametriza M^n, hipersuperfície de rotação gerada por C em torno de $\mathcal{P}^2=[e_{n+1},e_{n+2}]$ e como os paralelos de M^n são superfícies equidistantes, diremos que M^n é uma **hipersuperfície de rotação hiperbólica** de $\mathcal{H}^{n+1}(c)$.

<u>Caso (D) - $\mathcal{P}^2$ é Degenerado</u>

Se $\mathcal{O}(\gamma(s_0)) \in U(s_0)$, então por (3.3) esse ponto tem a forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & & \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & & \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(s_0) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{n+1}(s_0) \\ x_{n+2}(s_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(s_0) \\ a_{21}x_1(s_0) \\ \vdots \\ a_{n1}x_1(s_0) \\ a_{n+1,1}x_1(s_0)+x_{n+1}(s_0) \\ x_{n+2}(s_0) \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

sendo $a_{i1} \in \mathbb{R}$, $i = 2, \ldots, n+1$.

Observando que $g_{-1}(\mathcal{O}(e_1), \mathcal{O}(e_1)) = g_{-1}(e_1, e_1) = 0$ e $\mathcal{O}(e_1) = (1, a_{21}, \ldots, a_{n+1}, 0)$ temos

$$a_{n+1,1} = -\frac{1}{2}(a_{21}^2 + \cdots + a_{n1}^2)$$

Tomemos $\overline{\mathcal{P}}^n(s_0)$ definido como no caso (L) e

$$p = (p_1, \ldots, p_n, x_{n+1}(s_0), x_{n+2}(s_0)) \in \overline{\mathcal{P}}^n(s_0) \cap \mathcal{H}^{n+1}(c).$$

Usando (1.8) e (3.4) obtemos

$$\begin{aligned} 1/c = g_{-1}(p,p) &= 2p_1x_{n+1}(s_0) + p_2^2 + \ldots + p_n^2 + x_{n+2}^2(s_0) = \\ &= 2p_1x_{n+1}(s_0) + \textstyle\sum_{i=2}^n p_i^2 - 2x_1(s_0)x_{n+1}(s_0) + 1/c \Rightarrow \\ \Rightarrow 2p_1x_{n+1}(s_0) + \textstyle\sum_{\ell=2}^n p_\ell^2 &= 2x_1(s_0)x_{n+1}(s_0) \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \overline{\mathcal{P}}^n(s_0) \cap \mathcal{H}^{n+1}(c)$ é uma $(n-1)$-horoesfera contida no n-subespaço afim $\overline{\mathcal{P}}^n(s_0)$ de L^{n+2}.

Como $\mathcal{O}(\gamma(s_0)) \in \overline{\mathcal{P}}^n(s_0) \cap \mathcal{H}^{n+1}(c)$, para todo $\mathcal{O} \in O(\mathcal{P}^2)$, segue que a órbita $U(s_0)$ é uma $(n-1)$-horoesfera. (3.18)

Fazendo a substituição de variáveis

$$a_{i1} = t_i, \; i = 2, \ldots, n+1$$

com $\mathcal{O} \in O(\mathcal{P}^2)$ variando em (3.17), ficamos com a aplicação

$$f(t_2, \ldots, t_n, s) = (x_1(s), t_2x_1(s), \ldots, t_nx_1(s), t_{n+1}x_1(s) + x_{n+1}(s), x_{n+2}(s)) \tag{3.19}$$

para $(t_2, \ldots, t_n, s) \in \mathbb{R}^{n-1} \times I \subset \mathbb{R}^n$, onde

$$t_{n+1} = -\frac{1}{2}(t_2^2 + \cdots + t_n^2) \text{ para } n \geq 2$$

que descreve M^n, órbita de C sob a ação de $O(\mathcal{P}^2)$.

Analogamente ao caso (L), mostremos que os vetores

$$\tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s), \; \tfrac{\partial f}{\partial t_i}(t,s), \; i = 2, \ldots, n, \quad (t,s) = (t_2, \ldots, t_n, s) \in \mathbb{R}^{n-1} \times I \subset \mathbb{R}^n$$

são linearmente independentes em L^{n+2}.

Segue por (1.8) e (3.4), para $(t,s) \in I\!R^{n-1} \times I$, $i,j = 2,\ldots,n$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s) &= (0,\ldots,x_1(s),\ldots,0,-t_i x_1(s),0),\ (x_1(s) \text{ na } i\text{-ésima posição}) \\
\frac{\partial f}{\partial s}(t,s) &= (\dot{x}_1(s),\dot{x}_1(s)t_2,\ldots,\dot{x}_1(s)t_n,\dot{x}_{n+1}(s)+t_{n+1}\dot{x}_1(s),\dot{x}_{n+2}(s)) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial s \partial t_i}(t,s) &= (0,\ldots,\dot{x}_1(s),\ldots,0,-t_i\dot{x}_1(s),0),\ (\dot{x}_1(s) \text{ na } i\text{-ésima posição}) \\
\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}(t,s) &= \begin{cases} (0,\ldots,0,-x_1(s),0) & ,i=j \\ (0,\ldots,0) & ,i \neq j \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

onde, por (3.4) e (1.8)

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_{n+1}(s) + t_{n+1}\dot{x}_1(s) = \\
&= \frac{d}{ds}\left(\frac{1/c - x_{n+2}^2(s)}{2x_1(s)}\right) + t_{n+1}\dot{x}_1(s) = \\
&= \frac{-2x_{n+2}(s)\dot{x}_{n+2}(s)x_1(s) - \frac{\dot{x}_1(s)}{c} + \dot{x}_1(s)x_{n+2}^2(s) - \dot{x}_1(s)x_1^2(s)\sum_{\ell=2}^{n} t_\ell^2}{2x_1^2(s)}
\end{aligned}$$

A partir de (1.8) e (3.20) conseguimos as relações

$$\begin{aligned}
g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s),\frac{\partial f}{\partial t_j}(t,s)\right) &= x_1^2(s)\delta_{ij} \\
g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s),\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right) &= -x_1(s)\dot{x}_1(s)t_i + x_1(s)\dot{x}_1(s)t_i = 0 \\
g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s),\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) &= 2\dot{x}_1(s)\left(\dot{x}_{n+1}(s)+t_{n+1}\dot{x}_1(s)\right) + \\
&\quad + \dot{x}_1^2(s)\left(t_2^2+\cdots+t_n^2\right) + \dot{x}_{n+2}^2(s) = \\
&= \frac{(\dot{x}_1(s)x_{n+2}(s)-x_1(s)\dot{x}_{n+2}(s))^2}{x_1^2(s)} - \frac{\dot{x}_1^2(s)}{cx_1^2(s)} = 1
\end{aligned} \tag{3.21}$$

sendo a última válida por (3.22) a seguir, onde $(t,s) \in I\!R^{n-1} \times I$, $i,j = 2,\ldots,n$.

Mostremos que vale a relação

$$(\dot{x}_1(s)x_{n+2}(s) - x_1(s)\dot{x}_{n+2}(s))^2 = x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c},\ s \in I \tag{3.22}$$

De (3.4) e (1.8), vem

$$\begin{aligned}
1/c &= g_{-1}(\gamma(s),\gamma(s)) = 2x_1(s)x_{n+1}(s) + x_{n+2}^2(s) \\
1 &= g_{-1}(\dot{\gamma}(s),\dot{\gamma}(s)) = 2\dot{x}_1(s)\dot{x}_{n+1}(s) + \dot{x}_{n+2}^2(s)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Logo,

$$(\dot{x}_1(s)x_{n+2}(s) - x1(s)\dot{x}_{n+2}(s))^2 =$$

$$
\begin{aligned}
&= \dot{x}_1^2(s)x_{n+2}^2(s) + x_1^2(s)\dot{x}_{n+2}^2(s) - 2x_1(s)\dot{x}_1(s)x_{n+2}(s)\dot{x}_{n+2}(s) = \\
&= \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c} + x_1^2(s) - x_1(s)\dot{x}_1(s)\left(2\dot{x}_1(s)x_{n+1}(s) + 2x_1(s)\dot{x}_{n+1}(s) + 2x_{n+2}(s)\dot{x}_{n+2}(s)\right) = \\
&= \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c} + x_1^2(s) - x_1(s)\dot{x}_1(s)\frac{d}{ds}g_{-1}(\gamma(s),\gamma(s)) = \\
&= \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c} + x_1^2(s)
\end{aligned}
$$

Finalmente concluímos que (3.19) é uma parametrização da hipersuperfície de rotação M^n gerada pela curva C em torno de $\mathcal{P}^2 = [e_{n+1}, e_{n+2}]$ e os paralelos de M^n são horoesferas. Por esse motivo denominamos M^n de **hipersuperfície de rotação parabólica** de $\mathcal{H}^{n+1}(c)$.

Em cada caso em que o plano $\mathcal{P}^2$ se classifica, vamos exibir os coeficientes $x_{n+1}(s)$ e $x_{n+2}(s)$, que surgem nas parametrizações f de M^n, como função de $x_1(s)$ para $s \in I$.

Caso (L)

Como $\gamma(s) \in \mathcal{H}^{n+1}(c)$, $\forall s \in I$ e s representa o comprimento de arco dessa curva, segue de (3.4) e (1.6) que:

$$
\begin{aligned}
x_1^2(s) + x_{n+1}^2(s) - x_{n+2}^2(s) &= g_{-1}(\gamma(s),\gamma(s)) = 1/c \\
\dot{x}_1^2(s) + \dot{x}_{n+1}^2(s) - \dot{x}_{n+2}^2(s) &= g_{-1}(\dot{\gamma}(s),\dot{\gamma}(s)) = 1
\end{aligned}
\tag{3.24}
$$

Portanto, existe uma função $\phi(s)$ tal que

$$
\begin{aligned}
x_{n+1}(s) &= \sqrt{x_1^2(s) - 1/c}\,\sinh\phi(s) \\
x_{n+2}(s) &= \sqrt{x_1^2(s) - 1/c}\,\cosh\phi(s)
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

De (3.25) segue que

$$
e^{\phi(s)} = \frac{x_{n+1}(s)}{\sqrt{x_1^2(s) - 1/c}} + \frac{x_{n+2}(s)}{\sqrt{x_1^2(s) - 1/c}}
$$

logo, $\phi(s)$ é diferenciável.

Derivando (3.25) com relação a s e substituindo $\dot{x}_{n+1}(s)$ e $\dot{x}_{n+2}(s)$ na segunda equação de (3.24) obtém-se

$$
\dot{\phi}^2(s) = \frac{-\frac{1}{c} + x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}{\left(x_1^2(s) - \frac{1}{c}\right)^2}
\tag{3.26}
$$

Considerando a solução $\phi(s)$ que satisfaz $\phi(0) = 0$ definimos

$$
\phi(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{-\frac{1}{c} + x_1^2(\sigma) + \frac{\dot{x}_1^2(\sigma)}{c}}}{\left(x_1^2(\sigma) - \frac{1}{c}\right)^2}\,d\sigma
\tag{3.27}
$$

Para uso posterior calculemos as derivadas de primeira e segunda ordem de (3.25)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_{n+1}(s) &= \frac{x_1(s)\dot{x}_1(s)}{\sqrt{x_1^2(s)-1/c}}\sinh\phi(s) + \sqrt{x_1^2(s) - 1/c}\,\cosh\phi(s)\dot{\phi}(s) \\
\dot{x}_{n+2}(s) &= \frac{x_1(s)\dot{x}_1(s)}{\sqrt{x_1^2(s)-1/c}}\cosh\phi(s) + \sqrt{x_1^2(s) - 1/c}\,\sinh\phi(s)\dot{\phi}(s)
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

Derivando novamente e substituindo (3.26)

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_{n+1}(s) &= \frac{1}{\sqrt{x_1^2(s)-1/c}}\left(\sinh\phi(s)(x_1(s)\ddot{x}_1(s)+1)+\frac{\dot{x}_1(s)\cosh\phi(s)(\ddot{x}_1(s)+cx_1(s))}{c\sqrt{-1/c+x_1^2(s)+\dot{x}_1^2(s)/c}}\right)\\
\ddot{x}_{n+2}(s) &= \frac{1}{\sqrt{x_1^2(s)-1/c}}\left(\cosh\phi(s)(x_1(s)\ddot{x}_1(s)+1)+\frac{\dot{x}_1(s)\sinh\phi(s)(\ddot{x}_1(s)+cx_1(s))}{c\sqrt{-1/c+x_1^2(s)+\dot{x}_1^2(s)/c}}\right)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Caso (R)

Analogamente ao caso (L), obtemos das relações

$$\begin{aligned}
-x_1^2(s)+x_{n+1}^2(s)+x_{n+2}^2(s) &= g_{-1}(\gamma(s),\gamma(s)) = 1/c\\
-\dot{x}_1^2(s)+\dot{x}_{n+1}^2(s)+\dot{x}_{n+2}^2(s) &= g_{-1}(\dot{\gamma}(s),\dot{\gamma}(s)) = 1
\end{aligned} \tag{3.30}$$

os resultados

$$\begin{aligned}
x_{n+1}(s) &= \sqrt{x_1^2(s)+1/c}\,\cos\phi(s)\\
x_{n+2}(s) &= \sqrt{x_1^2(s)+1/c}\,\sin\phi(s)
\end{aligned} \tag{3.31}$$

sendo $\phi(s)$ a função que satisfaz

$$\dot{\phi}(s) = \frac{\sqrt{\frac{1}{c}+x_1^2(s)+\frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}}{x_1^2(s)+\frac{1}{c}} \text{ e } \phi(0)=0 \tag{3.32}$$

definida portanto por

$$\phi(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{\frac{1}{c}+x_1^2(\sigma)+\frac{\dot{x}_1^2(\sigma)}{c}}}{x_1^2(\sigma)+\frac{1}{c}}\,d\sigma \tag{3.33}$$

As derivadas primeira e segunda de (3.30), são

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{n+1}(s) &= \frac{x_1(s)\dot{x}_1(s)}{\sqrt{x_1^2(s)+1/c}}\cos\phi(s)-\sqrt{x_1^2(s)+1/c}\,\sin\phi(s)\dot{\phi}(s)\\
\dot{x}_{n+2}(s) &= \frac{x_1(s)\dot{x}_1(s)}{\sqrt{x_1^2(s)+1/c}}\sin\phi(s)+\sqrt{x_1^2(s)+1/c}\,\cos\phi(s)\dot{\phi}(s)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_{n+1}(s) &= \frac{1}{\sqrt{x_1^2(s)+1/c}}\left(\cos\phi(s)(x_1(s)\ddot{x}_1(s)-1)-\frac{\dot{x}_1(s)\sin\phi(s)(\ddot{x}_1(s)+cx_1(s))}{c\sqrt{1/c+x_1^2(s)+\dot{x}_1^2(s)/c}}\right)\\
\ddot{x}_{n+2}(s) &= \frac{1}{\sqrt{x_1^2(s)+1/c}}\left(\sin\phi(s)(x_1(s)\ddot{x}_1(s)-1)+\frac{\dot{x}_1(s)\cos\phi(s)(\ddot{x}_1(s)+cx_1(s))}{c\sqrt{1/c+x_1^2(s)+\dot{x}_1^2(s)/c}}\right)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Caso (D)

Observamos que, por (3.22),

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d}{ds}\left(\frac{x_{n+2}(s)}{x_1(s)}\right)\right)^2 &= \frac{(\dot{x}_{n+2}(s)x_1(s)-\dot{x}_1(s)x_{n+2}(s))^2}{x_1^4(s)} =\\
&= \left(x_1^2(s)+\frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}\right)\frac{1}{x_1^4(s)},\ s\in I
\end{aligned}$$

Escolhendo a raiz positiva da igualdade

$$\dot{x}_{n+2}(s)x_1(s) - \dot{x}_1(s)x_{n+2}(s) = \sqrt{\left(x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}\right)} \tag{3.36}$$

temos a equação diferencial

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{x_{n+2}(s)}{x_1(s)}\right) = \frac{\sqrt{x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}}{x_1^2(s)}, \; s \in I$$

e tomando a solução tal que $\frac{x_{n+2}(0)}{x_1(0)} = 0$, definimos

$$x_{n+2}(s) = x_1(s)\int_0^s \frac{\sqrt{x_1^2(\sigma) + \frac{\dot{x}_1^2(\sigma)}{c}}}{x_1^2(\sigma)}\, d\sigma \tag{3.37}$$

Pela primeira relação de (3.23)

$$x_{n+1}(s) = \left(1/c - x_{n+2}^2(s)\right)\frac{1}{2x_1(s)} \tag{3.38}$$

que, junto com (3.37) define $x_{n+1}(s)$ a partir de $x_1(s)$.

No caso em que $c \geq 0$, o espaço ambiente é o espaço euclidiano $(\mathbb{R}^{n+2}, g_1)$ sendo g_1 a métrica euclidiana.

Analogamente ao caso em que $c < 0$, vamos escolher uma base ortonormal do espaço euclidiano, tal que

$$\begin{aligned} &\mathbb{R}^{n+2} = [e_1, \ldots, e_{n+2}],\; \mathcal{P}^2 = [e_{n+1}, e_{n+2}],\; \mathcal{P}^3 = [e_1, e_{n+1}, e_{n+2}] \\ &g_1(e_i, e_j) = \delta_{ij},\; i, j = 1, \ldots, n+2 \end{aligned} \tag{3.39}$$

e parametrizar a curva $C \subset \mathcal{P}^3 \cap \overline{M}^{n+1}(c)$, nessa base por

$$\gamma(s) = (x_1(s), 0, \ldots, 0, x_{n+1}(s), x_{n+2}(s)),\; s \in I \subset \mathbb{R}$$

onde s representa o comprimento de arco de C.

Novamente escolhemos C tal que $C \cap \mathcal{P}^2$ seja vazio, isto é, $x_1(s) > 0$, $\forall s \in I$.

Assim, cada ponto $\mathcal{O}(\gamma(s))$ da órbita, $U(s)$, de um ponto $\gamma(s)$ da curva C sob a ação de $O(\mathcal{P}^2)$ é da forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & & \\ & 0 & & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(s) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{n+1}(s) \\ x_{n+2}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1(s) \\ \vdots \\ a_{n1}x_1(s) \\ x_{n+1}(s) \\ x_{n+2}(s) \end{bmatrix}$$

onde $a_{i1} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, $\mathcal{O}(e_1) = (a_{11}, \ldots, a_{n1}, 0, 0)$ e $a_{11}^2 + \cdots + a_{n1}^2 = 1$.

Suponhamos $c > 0$.

Como antes, verifica-se que a órbita $U(s)$ é uma $(n-1)$-esfera contida no n-subespaço afim de $\mathbb{R}^{n+2}$

$$\overline{\mathcal{P}}^n(s) = \{(p_1, \ldots, p_n, x_{n+1}(s), x_{n+2}(s)) \in \mathbb{R}^{n+2}\}$$

dada pela equação

$$\textstyle\sum_{\ell=1}^n p_\ell^2 = x_1^2(s)$$

e uma descrição de $M^n \subset \overline{M}^{n+1}(c) = S^{n+1}$ é fornecida por

$$f(t,s) = (\varphi_1(t)x_1(s), \ldots, \varphi_n(t)x_1(s), x_{n+1}(s), x_{n+2}(s)) \tag{3.40}$$

para $(t,s) = (t_1, \ldots, t_{n-1}, s) \in U \times I \subset \mathbb{R}^n$, onde

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)),\ t = (t_1, \ldots, t_{n-1}) \in U \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

é uma parametrização ortogonal da esfera unitária $(n-1)$-dimensional contida em $[e_1, \ldots, e_n]$.

Temos, para $(t,s) \in U \times I$

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f}{\partial t_i}(t,s) &= \left(x_1(s)\tfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}(t), \ldots, x_1(s)\tfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}(t), 0, 0\right),\ i = 1, \ldots, n-1 \\
\tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s) &= (\varphi_1(t)\dot{x}_1(s), \ldots, \varphi_n(t)\dot{x}_1(s), \dot{x}_{n+1}(s), \dot{x}_{n+2}(s)) \\
\tfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s) &= (\varphi_1(t)\ddot{x}_1(s), \ldots, \varphi_n(t)\ddot{x}_1(s), \ddot{x}_{n+1}(s), \ddot{x}_{n+2}(s)) \\
\tfrac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s}(t,s) &= \left(\tfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}(t)\dot{x}_1(s), \ldots, \tfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}(t)\dot{x}_1(s), 0, 0\right),\ i = 1, \ldots, n-1 \\
\tfrac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}(t,s) &= \left(x_1(s)\tfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_i \partial t_j}(t), \ldots, x_1(s)\tfrac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t_i \partial t_j}(t), 0, 0\right),\ i, j, \ldots, n-1
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Como a base $\{e_1, \ldots, e_{n+2}\}$ é ortonormal, usando relações análogas a (3.9), temos

$$\begin{aligned}
g_1\left(\tfrac{\partial f}{\partial t_i}(t,s), \tfrac{\partial f}{\partial t_j}(t,s)\right) &= \delta_{ij} x_1^2(s) \textstyle\sum_{\ell=1}^n \left(\tfrac{\partial \varphi_\ell(t)}{\partial t_i}\right)^2,\ i, j, \ldots, n-1 \\
g_1\left(\tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s), \tfrac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right) &= 0,\ i = 1, \ldots, n-1 \\
g_1\left(\tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s), \tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) &= g_1(\dot{\gamma}(s), \dot{\gamma}(s)) = 1
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Logo (3.40) é parametrização da hipersuperfície M^n gerada por C, em torno de $\mathcal{P}^2 = [e_{n+1}, e_{n+2}]$ cujos paralelos são esferas.

Novamente, obtemos relações entre os coeficientes $x_1(s), x_{n+1}(s)$ e $x_{n+2}(s)$ que surgem em (3.40), para cada $s \in I$.

$$\begin{aligned}
x_{n+1}(s) &= \sqrt{-x_1^2(s) + 1/c}\,\sin\phi(s) \\
x_{n+2}(s) &= \sqrt{-x_1^2(s) + 1/c}\,\cos\phi(s)
\end{aligned} \tag{3.43}$$

e a função $\phi(s)$, escolhida como no caso $c < 0$, é

$$\phi(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{\frac{1}{c} - x_1^2(\sigma) - \frac{\dot{x}_1^2(\sigma)}{c}}}{-x_1^2(\sigma) + \frac{1}{c}} d\sigma \tag{3.44}$$

As derivadas de primeira e segunda ordem de (3.43), são

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_{n+1}(s) &= \frac{1}{\sqrt{-x_1^2(s)+1/c}}\left(-x_1(s)\dot{x}_1(s)\sin\phi(s) + \sqrt{-1/c - x_1^2(s) - \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}\cos\phi(s)\right) \\ \dot{x}_{n+2}(s) &= \frac{1}{\sqrt{-x_1^2(s)+1/c}}\left(-x_1(s)\dot{x}_1(s)\cos\phi(s) - \sqrt{-1/c - x_1^2(s) - \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}\sin\phi(s)\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.45}$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_{n+1}(s) &= \frac{1}{\sqrt{-x_1^2(s)+1/c}}\left(-\sin\phi(s)(x_1(s)\ddot{x}_1(s)+1) - \frac{\dot{x}_1(s)\cos\phi(s)\left(\frac{\ddot{x}_1(s)}{c}+x_1(s)\right)}{\sqrt{1/c-x_1^2(s)-\dot{x}_1^2(s)/c}}\right) \\ \ddot{x}_{n+2}(s) &= \frac{1}{\sqrt{-x_1^2(s)+1/c}}\left(-\cos\phi(s)(x_1(s)\ddot{x}_1(s)+1) + \frac{\dot{x}_1(s)\sin\phi(s)\left(\frac{\ddot{x}_1(s)}{c}+x_1(s)\right)}{\sqrt{1/c-x_1^2(s)-\dot{x}_1^2(s)/c}}\right) \end{aligned}\right. \tag{3.46}$$

Suponhamos agora, $c = 0$. Para o caso $\mathbb{R}^{n+1}$, por analogia com os outros casos, consideramos $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ com $x_{n+2} = 0$.

Uma hipersuperfície de rotação $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, do mesmo modo, pode ser descrita por

$$f(t,s) = (\varphi_1(t)x_1(s), \ldots, \varphi_n(t)x_1(s), x_{n+1}(s), 0) \tag{3.47}$$

para $(t,s) = (t_1, \ldots, t_{n-1}, s) \in U \times I \subset \mathbb{R}^n$, sendo

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)),\ t = (t_1, \ldots, t_{n-1}) \in U \subset \mathbb{R}^{n-1}$$

definida como no caso $c > 0$.

Para $(t,s) \in U \times I$, obtemos relações análogas ao caso $c > 0$

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f}{\partial t_i}(t,s) &= \left(x_1(s)\tfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}(t),\ldots,x_1(s)\tfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}(t),0,0\right),\ i=1,\ldots,n-1\\
\tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s) &= (\varphi_1(t)\dot{x}_1(s),\ldots,\varphi_n(t)\dot{x}_1(s),\dot{x}_{n+1}(s),0)\\
\tfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s) &= (\varphi_1(t)\ddot{x}_1(s),\ldots,\varphi_n(t)\ddot{x}_1(s),\ddot{x}_{n+1}(s),0)\\
\tfrac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s}(t,s) &= \left(\tfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_i}(t)\dot{x}_1(s),\ldots,\tfrac{\partial \varphi_n}{\partial t_i}(t)\dot{x}_1(s),0,0\right),\ i=1,\ldots,n-1\\
\tfrac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial t_j}(t,s) &= \left(x_1(s)\tfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_i \partial t_j}(t),\ldots,x_1(s)\tfrac{\partial^2 \varphi_n}{\partial t_i \partial t_j}(t),0,0\right),\ i,j,\ldots,n-1\\
g_1\left(\tfrac{\partial f}{\partial t_i}(t,s),\tfrac{\partial f}{\partial t_j}(t,s)\right) &= \delta_{ij}x_1^2(s)\textstyle\sum_{\ell=1}^{n}\left(\tfrac{\partial \varphi_\ell(t)}{\partial t_i}\right)^2,\ i,j,\ldots,n-1\\
g_1\left(\tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s),\tfrac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right) &= =0,\ i=1,\ldots,n-1\\
g_1\left(\tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s),\tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) &= g_1(\dot{\gamma}(s),\dot{\gamma}(s))=1
\end{aligned} \tag{3.48}$$

e, portanto, (3.47) parametriza a hipersuperfície de rotação M^n, gerada por C, em torno de $\mathcal{P}^2 = [e_{n+1}, e_{n+2}]$.

De $g_1(\dot{\gamma}(s),\dot{\gamma}(s)) = \dot{x}_1^2(s) + \dot{x}_{n+1}^2(s) = 1$, $\forall s \in I$, obtém-se $\dot{x}_{n+1}^2(s) = 1 - \dot{x}_1^2(s)$, $\forall s \in I$ e fazendo-se a escolha

$$\dot{x}_{n+1}(s) = \sqrt{1-\dot{x}_1^2(s)},\ s \in I \tag{3.49}$$

tiramos os resultados

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_{n+1}(s) &= \tfrac{-\dot{x}_1(s)\ddot{x}_1(s)}{\sqrt{1-\dot{x}_1^2(s)}}\\
x_{n+1}(s) &= \textstyle\int_0^s \sqrt{1-\dot{x}_1^2(\sigma)}\,d\sigma(\text{ solução de (3.49) tal que } x_{n+1}(0)=0)
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Usaremos a notação $M^n_{c,\delta}$ para designar uma hipersuperfície de rotação de $\overline{M}^{n+1}(c)$, conforme o caso:

se $c < 0$ $\begin{cases} \delta = 1, \text{ significa que } M^n_{c,\delta} \text{ é hipersuperfície de rotação esférica;}\\ \delta = 0, \text{ significa que } M^n_{c,\delta} \text{ é hipersuperfície de rotção parabólica;}\\ \delta = -1, \text{ significa que } M^n_{c,\delta} \text{ é hipersuperfície de rotção hiperbólica;}\end{cases}$

se $c \geq 0$, sempre adotaremos $\delta = 1$

3.3 Hipersuperfícies de rotação nos vários modêlos da Geometria Hiperbólica.

Neste momento, passemos a estudar as hipersuperfícies de rotação $M^n \subset \mathcal{H}^{n+1}(c)$ nos outros modêlos da Geometria Hiperbólica, façamos $c = -1$ e $\mathcal{H}^{n+1}(-1)$ é o espaço hiperbólico em L^{n+2}.

3.3.1 As hipersuperfícies de rotação no modêlo $(\mathbb{R}^{n+1}{}_+, g_+)$.

Caso (L) - $\mathcal{P}^2$ é Lorentziano.

Uma hipersuperfície de rotação esférica, a menos de isometria de $\mathcal{H}^{n+1}(-1)$, é a hipersuperfície de rotação em que

$$\mathcal{P}^2 = [(0,1,0,\ldots,0),(1,0,\ldots,0)] \text{ e } \mathcal{P}^3 = [(0,0,1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),(1,0,\ldots,0)]$$

Tomemos a base canônica de L^{n+2}, denotando segundo (1.6)

$$\begin{aligned} e_1 &= (0,0,1,0,\ldots,0) \\ e_i &= (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0), \text{ (1 na } (i+2)\text{-ésima posição)}, i = 2,\ldots,n \\ e_{n+1} &= (0,1,0,\ldots,0) \\ e_{n+2} &= (1,0,\ldots,0) \end{aligned}$$

A curva $C \subset \mathcal{P}^3 \cap \mathcal{H}^{n+1}(-1)$, que não intercepta o plano $\mathcal{P}^2$, parametrizada nesta base, como em (3.4), por

$$\gamma(s) = (x_{n+2}(s), x_{n+1}(s), x_1(s), 0, \ldots, 0),\ s \in I$$

gera a hipersuperfície de rotação $M^n \subset \mathcal{H}^{n+1}(-1)$ em torno de $\mathcal{P}^2$, a qual tem a parametrização

$$f(t,s) = (x_{n+2}(s), x_{n+1}(s), \varphi_1(t)x_1(s), \ldots, \varphi_n(t)x_1(s)),\ (t,s) \in U \times I \subset \mathbb{R}^n \tag{3.51}$$

como em (3.7).

Passemos ao modêlo $(\mathbb{R}^{n+1}{}_+, g_+)$ através da isometria ϕ_+ definida em (2.39).

Usando (3.51) obtemos uma parametrização de $\phi_+(M^n) \subset \mathbb{R}^{n+1}$

$$f_+^L(t,s) = \phi_+ \circ f(t,s) = \frac{2}{x_{n+2}(s) - x_{n+1}(s)}(1, \varphi_1(t)x_1(s), \ldots, \varphi_n(t)x_1(s)) \tag{3.52}$$

para $(t,s) \in U \times I \subset \mathbb{R}^n$.

O paralelo $s = \bar{s}$ ($\bar{s}$ constante) de (3.52), é

$$\begin{aligned} &\phi_+ \circ f_{\bar{s}}(t) = \\ &= \frac{2}{x_{n+2}(\bar{s}) - x_{n+1}(\bar{s})}((1,0,\ldots,0) + \varphi_1(t)(0,x_1(\bar{s}),0,\ldots,0) + \cdots + \\ &\quad + \varphi_n(t)(0,\ldots,x_1(\bar{s}),0)),\ t \in U \subset \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned}$$

e está inteiramente contido no hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\left(\frac{2}{x_{n+2}(\bar{s}) - x_{n+1}(\bar{s})}, 0, \ldots, 0\right) + [(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1,0)] \tag{3.53}$$

que é uma n-horoesfera de $\mathbb{R}^{n+1}{}_+$.

Observamos que

$$f(t,\bar{s}) \in \mathcal{H}^{n+1}(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2\varphi_i(t)x_1(\bar{s})}{x_{n+2}(\bar{s})-x_{n+1}(\bar{s})}\right)^2 = \frac{4x_1^2(\bar{s})}{(x_{n+2}(\bar{s})-x_{n+1}(\bar{s}))^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\langle \phi_+ \circ f_{\bar{s}}(t) - \left(\frac{2}{x_{n+2}(\bar{s})-x_{n+1}(\bar{s})}, 0, \ldots, 0\right), \phi_+ \circ f_{\bar{s}}(t) - \left(\frac{2}{x_{n+2}(\bar{s})-x_{n+1}(\bar{s})}, 0, \ldots, 0\right)\right\rangle =$$

$$= \frac{4x_1^2(\bar{s})}{(x_{n+2}(\bar{s})-x_{n+1}(\bar{s}))^2}$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ é a métrica euclidiana de $\mathbb{R}^{n+1}$, nos mostra que o paralelo $s = \bar{s}$ ($\bar{s}$ constante), é uma $(n-1)$-esfera de $\mathbb{R}^{n+1}$ de raio $\frac{2x_1(\bar{s})}{x_{n+2}(\bar{s})-x_{n+1}(\bar{s})}$ e centro $\left(\frac{2}{x_{n+2}(\bar{s})-x_{n+1}(\bar{s})}, 0, \ldots, 0\right)$ contida no hiperplano (3.53).

O **meridiano** $t = \bar{t}$ ($\bar{t}$ constante) de (3.52) é uma curva

$$\phi_+ \circ f_{\bar{t}}(s) =$$
$$= 2\left(\frac{1}{x_{n+2}(s) - x_{n+1}(s)}, \varphi_1(\bar{t})\frac{x_1(s)}{x_{n+2}(s) - x_{n+1}(s)}, \ldots, \varphi_n(\bar{t})\frac{x_1(s)}{x_{n+2}(s) - x_{n+1}(s)}\right), s \in I$$

contida no 2-plano de $\mathbb{R}^{n+1}$, passando pela origem,

$$[(1,0,\ldots,0),(0,\varphi_1(\bar{t}),\ldots,\varphi_n(\bar{t}))]$$

ortogonal ao hiperplano $p_1 = 0$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, que é superfície totalmente geodésica 2-dimensional de $(\mathbb{R}^{n+1}{}_+, g_+)$.

Concluimos então que

$$f_+^L(t,s) = (\alpha_1(s), \varphi_1(t)\alpha_2(s), \ldots, \varphi_n(t)\alpha_2(s)),\ (t,s) \in U \times I \subset \mathbb{R}^n \tag{3.54}$$

parametriza a hipersuperfície de rotação da curva em $(\mathbb{R}^{n+1}{}_+, g_+)$

$$\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), 0, \ldots, 0)\ s \in I$$

com $\alpha_1(s) > 0, \alpha_2(s) > 0$, em torno da geodésica $\{(X_1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}, X_1 > 0\}$, que não intercepta a curva α, estando esta inteiramente contida no 2-plano $[(1,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0)]$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Por exemplo, fazendo $n = 2$, temos

$$\begin{aligned} f_+^L(t,s) = \phi_+ \circ f(t,s) &= \frac{2}{x_4(s) - x_3(s)}(1, x_1(s)\cos t, x_1(s)\sin t),\ (t,s) \in U \times I \subset \mathbb{R}^2 \\ \alpha(s) &= \frac{2}{x_4(s) - x_3(s)}(1, x_1(s), 0),\ s \in I \end{aligned}$$

Isto é, a menos de isometrias do espaço hiperbólico, as superfícies de rotação esféricas no modêlo $(\mathbb{R}^3{}_+, g_+)$ são as superfícies de $\mathbb{R}^3$, obtidas por rotação de uma curva $\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), 0)$ com $\alpha_1(s) > 0$ e $\alpha_2(s) > 0$, em torno do eixo dos z (ver figura 3.3.1).

Caso (R) - $\mathcal{P}^2$ é Riemanniano.

A menos de isometrias, podemos supor que

$$\mathcal{P}^2 = [(0,1,0,\ldots,0),(0,\ldots,0,1)] \text{ e } \mathcal{P}^3 = [(0,\ldots,0,1),(0,1,0,\ldots,0),(1,0,\ldots,0)]$$

Fazendo

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,\ldots,0) \\ e_i &= (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0), \text{ (1 na } (i+2)\text{-ésima posição)}, i = 2,\ldots,n \\ e_{n+1} &= (0,1,0,\ldots,0) \\ e_{n+2} &= (0,\ldots,0,1) \end{aligned}$$

o conjunto $\{e_1,\ldots,e_{n+1},e_{n+2}\}$ é uma base de L^{n+2} e está nas condições de (1.7).

Com a mesma notação do caso (L), a curva parametrizada, como em (3.4), por

$$\gamma(s) = (x_1(s), x_{n+1}(s), 0, \ldots, 0, x_{n+2}(s)),\ s \in I$$

é geratriz da hipersuperfície de rotação $M^n \subset \mathcal{H}^{n+1}(-1)$ parametrizada por

$$f(t,s) = (\varphi_1(t)x_1(s), x_{n+1}(s), \varphi_2(t)x_1(s), \ldots, \varphi_n(t)x_1(s), x_{n+2}(s)) \tag{3.55}$$

para $(t,s) \in U \times I \subset \mathbb{R}^n$, como em (3.13).

As hipersuperfícies de rotação no modêlo $(\mathbb{R}^{n+1}{}_+, g_+)$ são parametrizadas por

$$f_+^R(t,s) = \phi_+ \circ f(t,s) = \frac{2}{\varphi_1(t)x_1(s) - x_{n+1}(s)}(1, \varphi_2(t)x_1(s), \ldots, \varphi_n(t)x_1(s), x_{n+2}(s)) \tag{3.56}$$

para $(t,s) \in U \times I \subset \mathbb{R}^n$.

O **paralelo** $s = \bar{s}$ ($\bar{s}$ constante) de (3.56), é

$$\begin{aligned} &\phi_+ \circ f_{\bar{s}}(t) = \\ &= \frac{2}{\varphi_1(t)x_1(\bar{s}) - x_{n+1}(\bar{s})}((1,0,\ldots,0,x_{n+2}(\bar{s})) + \varphi_2(t)(0,x_1(\bar{s}),0,\ldots,0) + \cdots + \\ &\quad + \varphi_n(t)(0,\ldots,x_1(\bar{s}),0)),\ t \in U \subset \mathbb{R}^{n-1} \end{aligned}$$

Usando a notação

$$\begin{aligned} Y_1(t,\bar{s}) &= \frac{2\sqrt{1+x_{n+2}^2(\bar{s})}}{\varphi_1(t)x_1(\bar{s}) - x_{n+1}(\bar{s})} \\ Y_i(t,\bar{s}) &= \frac{2x_1(\bar{s})\varphi_i(t)}{\varphi_1(t)x_1(\bar{s}) - x_{n+1}(\bar{s})},\ i = 2,\ldots,n \end{aligned} \tag{3.57}$$

podemos escrever para cada $t \in U \subset \mathbb{R}^{n-1}$

$$\phi_+ \circ f_{\bar{s}}(t) =$$
$$= Y_1(t,\bar{s})\frac{(1,0,\ldots,0,x_{n+2}(\bar{s}))}{\sqrt{1+x_{n+2}^2(\bar{s})}} + Y_2(t,\bar{s})(0,1,0,\ldots,0) + \cdots + Y_n(t,\bar{s})(0,\ldots,0,1,0)$$

concluindo, portanto, que o paralelo $s = \bar{s}$ está contido no hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$, pela origem

$$\left[\frac{(1,0,\ldots,0,x_{n+2}(\bar{s}))}{\sqrt{1+x_{n+2}^2(\bar{s})}},(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1,0)\right] \tag{3.58}$$

Somando as expressões em (3.57) para $i = 2,\ldots,n$, temos

$$\sum_{i=2}^{n} Y_i^2(t,\bar{s}) = \frac{4x_1^2(\bar{s})}{(\varphi_1(t)x_1(\bar{s}) - x_{n+1}(\bar{s}))^2}(\varphi_1^2(t) - 1) \tag{3.59}$$

Da primeira relação de (3.57), tiramos

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{x_1(\bar{s})}\left(x_{n+1}(\bar{s}) + \frac{2\sqrt{1+x_{n+2}^2(\bar{s})}}{Y_1(t,\bar{s})}\right)$$

Substituindo em (3.59)

$$\begin{aligned}\sum_{i=2}^{n} Y_i^2(t,\bar{s}) &= \frac{4x_1^2(\bar{s})Y_1^2(t,\bar{s})}{4(1+x_{n+2}^2(\bar{s}))x_1^2(\bar{s})}\left(\left(x_{n+1}(\bar{s}) + \frac{2\sqrt{1+x_{n+2}^2(\bar{s})}}{Y_1(t,\bar{s})}\right)^2 - x_1^2(\bar{s})\right) = \\ &= \frac{Y_1^2(t,\bar{s})}{(1+x_{n+2}^2(\bar{s}))}\left(-1 - x_{n+2}^2(\bar{s})\right) + \frac{4x_{n+1}(\bar{s})Y_1(t,\bar{s})}{\sqrt{1+x_{n+2}^2(\bar{s})}} + 4\end{aligned}$$

Completando quadrados temos, finalmente,

$$-\left(Y_1(t,\bar{s}) - \frac{2x_{n+1}(\bar{s})}{\sqrt{1+x_{n+2}^2(\bar{s})}}\right)^2 + \frac{4x_1^2(\bar{s})}{1+x_{n+2}^2(\bar{s})} = \sum_{i=2}^{n} Y_i^2(t,\bar{s}) \tag{3.60}$$

Logo, o paralelo $s = \bar{s}$, é a intersecção de $\mathbb{R}^{n+1}{}_+$ com a $(n-1)$-esfera de $\mathbb{R}^{n+1}$ de centro $\frac{2x_{n+1}(\bar{s})}{1+x_{n+2}^2(\bar{s})}(1,0,\ldots,0,x_{n+2}(\bar{s})) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e raio $\frac{2x_1(\bar{s})}{\sqrt{1+x_{n+2}^2(\bar{s})}}$, contida no hiperplano (3.58).

Da relação (3.59) tiramos, para cada $s \in I$ fixado, a equação da $(n-1)$-esfera do espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\left(Y_1 - \frac{2x_{n+1}(s)}{\sqrt{1+x_{n+2}^2(s)}}\right)^2 + \sum_{i=2}^{n} Y_i^2 = \frac{4x_1^2(s)}{1+x_{n+2}^2(s)}$$

onde $(Y_1,\ldots,Y_n)$ representa coordenadas relativamente ao hiperplano (3.58) e cuja intersecção com o $(n-1)$-plano $Y_1 = 0$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, para todo $s \in I$, satisfaz a equação $\sum_{i=2}^{n} Y_i^2 = 4$.

No caso $n = 2$, a intersecção com o hiperplano (3.58) degenera em dois pontos, que são $(0,2,0)$ e $(0,-2,0)$.

O **meridiano** $t = \bar{t}$ ($\bar{t}$ constante) de (3.56) é uma curva

$$\begin{aligned}&\phi_+ \circ f(t,s) = \\ &= \frac{2}{\varphi_1(\bar{t})x_1(s) - x_{n+1}(s)}((1,0,\ldots,0) + x_1(s)(0,\varphi_2(\bar{t}),\ldots,\varphi_n(\bar{t}),0)+ \\ &+x_{n+2}(s)(0,\ldots,0,1))\end{aligned}$$

contida no 3-plano de $\mathbb{R}^{n+1}$ $[(1,0,\ldots,0),(0,\varphi_2(\bar{t}),\ldots,\varphi_n(\bar{t}),0),(0,\ldots,0,1)]$.

Consideremos a curva plana

$$\alpha(s) = \frac{2}{x_1(s) - x_{n+1}(s)}(1,0,\ldots,0,x_{n+2}(s)),\ s \in I$$

que é o meridiano $t = \bar{t}$, tal que $\varphi_i(\bar{t}) = \delta i1$, $i = 2,\ldots,n$.

Observamos que, denotando

$$\begin{aligned}C(s) &= \frac{2x_{n+1}(s)}{1 + x_{n+2}^2(s)}(1,0,\ldots,0,x_{n+2}(s)) \\ R(s) &= \frac{2x_1(s)}{\sqrt{1 + x_{n+2}^2(s)}} \\ V(s) &= \frac{(1,0,\ldots,0,x_{n+2}(s))}{\sqrt{1 + x_{n+2}^2(s)}}\end{aligned}$$

temos $C(s) = \alpha(s) - R(s)V(s)$, $\forall s \in I$ isto é, essa equação descreve o lugar geométrico ocupado pelos centros $C(s)$ das $(n-1)$-esferas de $\mathbb{R}^{n+1}$, cujas intersecções com $\mathbb{R}^{n+1}{}_+$ são os paralelos de (3.56).

Em particular, quando $n = 2$ (ver figura 3.3.1), temos

$$\begin{aligned}f_+^R(t,s) = \phi_+ \circ f(t,s) &= \frac{2}{x_1(s)\sinh t - x_3(s)}(1, x_1(s)\cosh t, x_4(s)),\ (t,s) \in U \times I \subset \mathbb{R}^2 \\ \alpha(s) &= \frac{2}{x_1(s) - x_3(s)}(1,0,x_4(s)),\ s \in I\end{aligned}$$

Consideremos, agora, a seguinte transformação de $\mathbb{R}^3{}_+$ em $\mathbb{R}^3{}_+$

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^3{}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^3{}_+ \\ & (y_1,y_2,y_3) & \longmapsto & \frac{1}{y_1^2+(y_2+2)^2+y_3^2}(4y_1, y_1^2+y_2^2+y_3^2-4, 4y_3) \quad y_1 > 0 \end{array}$$

Essa aplicação possui as seguintes propriedades:

(1) T é uma isometria de $(\mathbb{R}^3{}_+, g_+)$,

(2) T leva o plano $y_2 = 0$ na superfície totalmente geodésica $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$,

(3) T leva cada circunferência passando por três pontos dados: $\bar{y} = (0,2,0), -\bar{y} = (0,-2,0)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ e contida no plano $-y_1\alpha_3 + y_3\alpha_1 = 0$, na reta que passa pela origem e pelo ponto $T(\alpha) = T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$,

(4) T leva uma superfície de rotação hiperbólica da forma encontrada em (3.56), numa superfície que é o cone de vértice na origem sôbre uma curva $(y_1(s), y_2(s), y_3(s)) = T(\alpha(s))$ da superfície totalmente geodésica $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$.

Assim, a menos de uma isometria de $(\mathbb{R}^3{}_+, g_+)$, toda superfície de rotação hiperbólica é um cone com vértice na origem, construído sôbre uma curva na superfície $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$.

Caso (D) - $\mathcal{P}^2$ é Degenerado.

Suponhamos que

$$\mathcal{P}^2 = \left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \ldots, 0\right), (0, \ldots, 0, 1)\right]$$

e

$$\mathcal{P}^3 = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \ldots, 0\right), (0, \ldots, 0, 1), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \ldots, 0\right)\right]$$

e consideremos os seguintes elementos básicos de L^{n+2}.

$$\begin{aligned}
e_1 &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \ldots, 0\right) \\
e_i &= (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0), \text{ (1 na } (i+1)\text{-ésima posição)}, \ i = 2, \ldots, n \\
e_{n+1} &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \ldots, 0\right) \\
e_{n+2} &= (0, \ldots, 0, 1)
\end{aligned}$$

nas condições de (1.8).

Usando a notação do caso (L), a hipersuperfície de rotação $M^n \subset \mathcal{H}^{n+1}(-1)$, parametrizada, como em (3.19), por

$$\begin{aligned}
f(t,s) = &\left(\tfrac{\sqrt{2}}{2}x_1(s) - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\|t\|^2 x_1(s) + x_{n+1}(s)\right), -\tfrac{\sqrt{2}}{2}x_1(s) - \right. \\
&\left. -\tfrac{\sqrt{2}}{2}\left(-\tfrac{1}{2}\|t\|^2 x_1(s) + x_{n+1}(s)\right), t_2 x_1(s), \ldots, t_n x_1(s), x_{n+2}(s)\right)
\end{aligned} \tag{3.61}$$

onde $(t,s) = (t_2, \ldots, t_n, s) \in \mathbb{R}^{n-1} \times I \subset \mathbb{R}^n$, $\|t\|^2 = \sum_{i=2}^n t_i^2$, é gerada pela curva

$$\gamma(s) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x_1(s) - \frac{\sqrt{2}}{2}x_{n+1}(s), -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1(s) - \frac{\sqrt{2}}{2}x_{n+1}(s), 0, \ldots, 0, x_{n+2}(s)\right), \ s \in I$$

dada por (3.4).

Levando (3.61) até o modêlo $(\mathbb{R}^{n+1}{}_+, g_+)$ obtemos

$$f_+^D(t,s) = \phi_+ \circ f(t,s) = \frac{\sqrt{2}}{x_1(s)}(1, t_2 x_1(s), \ldots, t_n x_1(s), x_{n+2}(s)) \tag{3.62}$$

para $(t,s) \in I\!R^{n-1} \times I \subset I\!R^n$.

O **paralelo** $s = \bar{s}$ ($\bar{s}$ constante) de (3.62)

$$\phi_+ \circ f_{\bar{s}}(t) = \frac{\sqrt{2}}{x_1(\bar{s})}((1,0,\ldots,0,x_{n+2}(\bar{s})) + x_1(\bar{s})(0,t_2,\ldots,t_n,0)),\ t \in I\!R^{n-1}$$

está contido no $(n-1)$-hiperplano de $I\!R^{n+1}$

$$\frac{\sqrt{2}}{x_1(\bar{s})}(1,0,\ldots,0,x_{n+2}(\bar{s})) + [(0,1,0,\ldots,0,),\ldots,(0,\ldots,0,1,0)] \tag{3.63}$$

que é uma $(n-1)$-horoesfera de $I\!R^{n+1}{}_+$. Na verdade, o paralelo $s = \bar{s}$ ($\bar{s}$ constante)é a horoesfera (3.63).

O **meridiano** $t = \bar{t}$ ($\bar{t}$ constante) de (3.62)

$$\phi_+ \circ f_{\bar{t}}(s) = \sqrt{2}\left(\frac{1}{x_1(s)},0,\ldots,0,\frac{x_{n+2}(s)}{x_1(s)}\right) + \sqrt{2}(0,\bar{t}_2,\ldots,\bar{t}_n,0)$$

é uma curva plana contida no 2-plano de $I\!R^{n+1}$

$$[(1,0,\ldots,0),(0,\ldots,0,1)] + \sqrt{2}(0,\bar{t}_2,\ldots,\bar{t}_n,0)$$

ortogonal ao hiperplano $[(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1,0)]$ de $I\!R^{n+1}$, uma 2-superfície totalmente geodésica de $I\!R^{n+1}{}_+$.

Em particular, o meridiano $t = 0$, é a curva plana

$$\alpha(s) = \phi_+ \circ f_0(s) = \frac{\sqrt{2}}{x_1(s)}(1,0,\ldots,0,x_{n+2}(s)),\ s \in I$$

Então, se escrevermos

$$\alpha(s) = (\alpha_1(s),0,\ldots,0,\alpha_{n+1}(s)),\ s \in I$$

com $\alpha_1(s) > 0$, a hipersuperfície de rotação em $(I\!R^{n+1}{}_+, g_+)$, gerada por α, pode ser parametrizada por

$$f_+^D(t,s) = (\alpha_1(s),t_2,\ldots,t_n,\alpha_{n+1}(s)),\ (t,s) \in I\!R^{n-1} \times I \subset I\!R^n \tag{3.64}$$

No caso $n = 2$ (ver figura 3.3.1)

$$\begin{aligned} f_+^D(t,s) = \phi_+ \circ f(t,s) &= (\alpha_1(s),t,\alpha_3(s)),\ (t,s) = (t_2,s) \in I\!R \times I \subset I\!R^2 \\ \alpha(s) &= (\alpha_1(s),0,\alpha_3(s)),\ \alpha_1(s) > 0,\ s \in I \end{aligned}$$

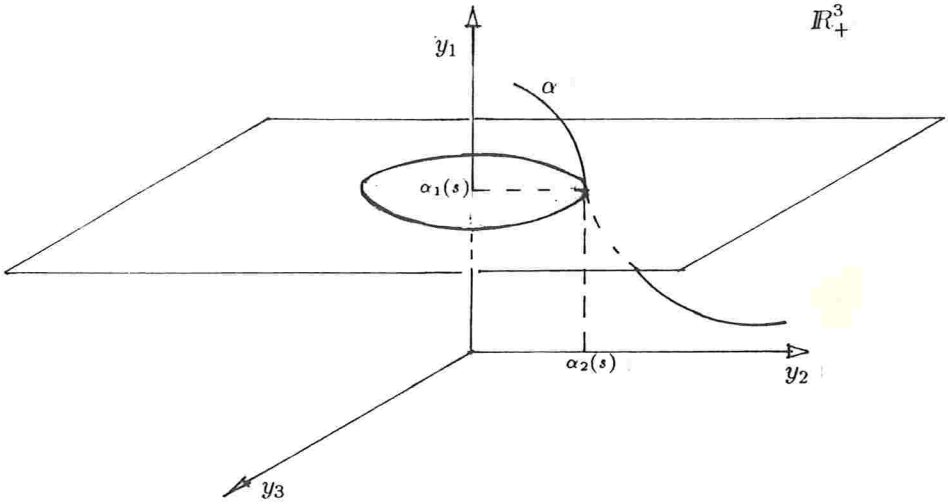

Figura 3.1: Hipersuperfície de rotação esférica

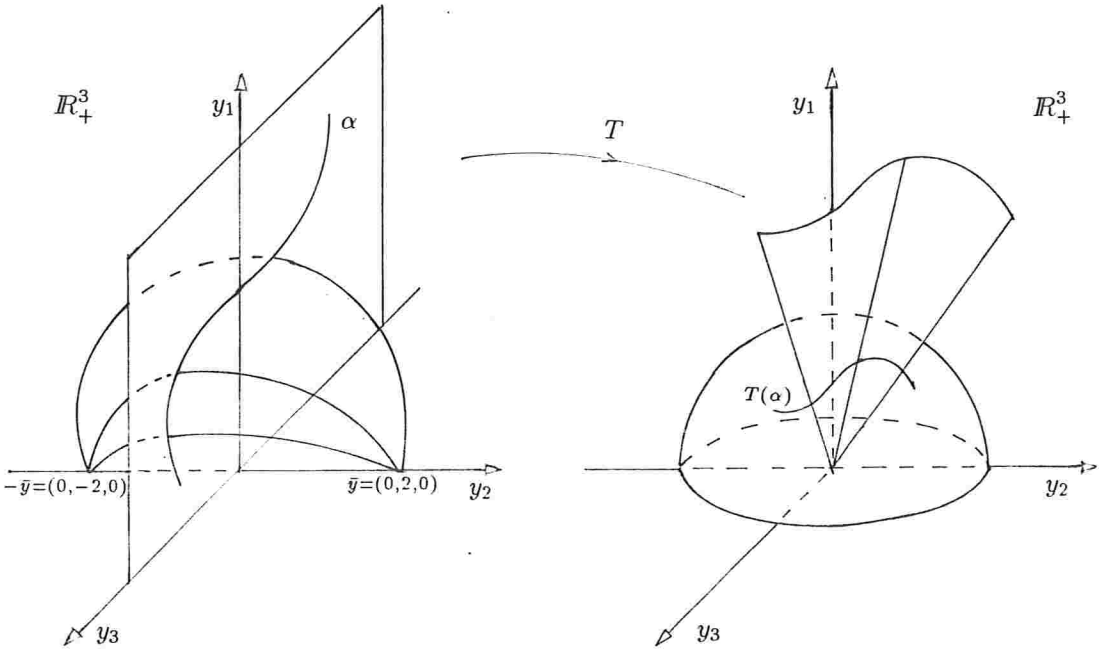

Figura 3.2: Hipersuperfície de rotação hiperbólica

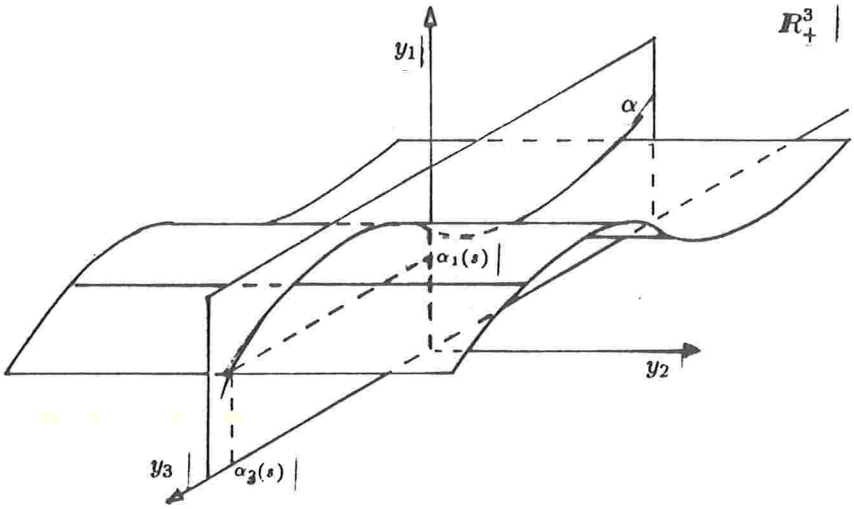

Figura 3.3: Hipersuperfície de rotação parabólica.

3.3.2 As hipersuperfícies de rotação nos outros modêlos.

Descreveremos as hipersuperfícies de rotação através de suas parametrizações, também caracterizando os paralelos e meridianos de tais hipersuperfícies. Os cálculos são análogos àqueles da subseção anterior.

No caso em que o plano $\mathcal{P}^2$ é **Lorentziano**, as hipersuperfícies de rotação podem ser parametrizadas como segue.

No **modêlo** $(D^{n+1}(1), g_I)$, podemos parametrizar $\phi_I(M^n) \subset D^{n+1}(1)$ por

$$\phi_I \circ f(t,s) = \left(\frac{x_{n+1}(s)}{x_{n+2}(s)}, \frac{\varphi_1(t)x_1(s)}{x_{n+2}(s)}, \frac{\varphi_n(t)x_1(s)}{x_{n+2}(s)}\right), (t,s) \in U \times I \subset \mathbb{R}^n \tag{3.65}$$

O paralelo $s = \bar{s}$ ($\bar{s}$ constante) de (3.65) é uma $(n-1)$-esfera de $\mathbb{R}^{n+1}$ com centro em $\left(\frac{x_{n+1}(\bar{s})}{x_{n+2}(\bar{s})}, 0, \ldots, 0\right)$ e raio $\frac{x_1(\bar{s})}{|x_{n+2}(\bar{s})|}$, contida no hiperplano

$$\left(\frac{x_{n+1}(\bar{s})}{x_{n+2}(\bar{s})}, 0, \ldots, 0\right) + [(0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1)]$$

cuja intersecção com $D^{n+1}(1)$ é uma n-horoesfera de $(D^{n+1}(1), g_I)$.

O meridiano $t = \bar{t}$ ($\bar{t}$ constante) de (3.65) é uma curva contida no 2-plano de $\mathbb{R}^{n+1}$, pela origem,

$$[(1.0,\ldots,0), (0, \varphi_1(\bar{t}), \ldots, \varphi_n(\bar{t}))]$$

cuja intersecção com $D^{n+1}(1)$ é uma 2-superfície totalmente geodésica de $(D^{n+1}(1), g_I)$.

Reescrevendo (3.65) na forma

$$f_I^L(t,s) = (\alpha_1(s), \varphi_1(t)\alpha_2(s), \ldots, \varphi_n(t)\alpha_2(s)), (t,s) \in U \times I \subset \mathbb{R}^n \tag{3.66}$$

obtemos uma parametrização da hipersuperfície de rotação da curva plana

$$\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), 0, \ldots, 0) \in D^{n+1}(1), s \in I$$

com $\alpha_2(s) \neq 0$, para todo $s \in I$, em torno da geodésica de $(D^{n+1}(1), g_I)$

$$\{(X, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1} : -1 < X < 1\}$$

que não intercepta a curva α.

No **modêlo** $(B^{n+1}(2), g_{II})$, uma parametrização de $\phi_{II}(M^n) \subset B^{n+1}(2)$ é

$$\phi_{II} \circ f(t,s) = \frac{2}{1 + x_{n+2}(s)}(x_{n+1}(s), \varphi_1(t)x_1(s), \ldots, \varphi_n(t)x_1(s)), (t,s) \in U \times I \subset \mathbb{R}^n \tag{3.67}$$

O paralelo $s = \bar{s}$ ($\bar{s}$ constante) de (3.67) é uma $(n-1)$-esfera de $\mathbb{R}^{n+1}$ com centro $\left(\frac{2x_{n+1}(\bar{s})}{1+x_{n+2}(\bar{s})}, 0, \ldots, 0\right)$ e raio $\frac{2x_1(\bar{s})}{|1+x_{n+2}(\bar{s})|}$, contida na n-horoesfera de $(B^{n+1}(2), g_{II})$

$$\left(\left(\frac{2x_{n+1}(\bar{s})}{1 + x_{n+2}(\bar{s})}, 0, \ldots, 0\right) + [(0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1)]\right) \cap B^{n+1}(2).$$

O meridiano $t = \bar{t}$ ($\bar{t}$ constante) de (3.67) é uma curva plana, contida na 2-superfície totalmente geodésica de $(B^{n+1}(2), g_{II})$

$$[(1.0,\ldots,0),(0,\varphi_1(\bar{t}),\ldots,\varphi_n(\bar{t}))] \cap B^{n+1}(2).$$

Podemos reescrever (3.67) e obtermos

$$f_{II}^L(t,s) = (\alpha_1(s), \varphi_1(t)\alpha_2(s), \ldots, \varphi_n(t)\alpha_2(s)),\ (t,s) \in U \times I \subset I\!R^n \tag{3.68}$$

parametrização da hipersuperfície de rotação da curva plana

$$\alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), 0, \ldots, 0) \in B^{n+1}(2),\ s \in I$$

com $\alpha_2(s) \neq 0$, para todo $s \in I$, em torno da geodésica de $(B^{n+1}(2), g_{II})$

$$\{(X, 0, \ldots, 0) \in I\!R^{n+1} : -2 < X < 2\}$$

cuja intersecção com a curva α é vazia.

No caso em que o plano $\mathcal{P}^2$ é **Riemanniano**, as hipersuperfícies de rotação são dadas a seguir.

No **modêlo** $(D^{n+1}(1), g_I)$ a hipersuperfície de rotação $\phi_I(M^n) \subset D^{n+1}(1)$ é

$$\phi_I \circ f(t,s) = \left(\frac{x_{n+1}(s)}{\varphi_1(t)x_1(s)}, \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}, \ldots, \frac{\varphi_n(t)}{\varphi_1(t)}, \frac{x_{n+2}(s)}{\varphi_1(t)x_1(s)}\right),\ (t,s) \in U \times I \subset I\!R^n \tag{3.69}$$

O paralelo $s = \bar{s}$ ($\bar{s}$ constante) de (3.69) tal que $x_{n+1}^2(\bar{s}) + x_{n+2}^2(\bar{s}) \neq 0$, está contido no $(n-1)$-elipsóide

$$\begin{cases} Y_1 \frac{(x_{n+1}(\bar{s}),0,\ldots,0,x_{n+2}(\bar{s}))}{\sqrt{x_{n+1}^2(\bar{s})+x_{n+2}^2(\bar{s})}} + Y_2(0,1,0,\ldots,0) + \cdots + Y_n(0,\ldots,0,1,0) \in I\!R^{n+1} \\ \left(\frac{Y_1}{\frac{\sqrt{x_{n+1}^2(\bar{s})+x_{n+2}^2(\bar{s})}}{x_1(\bar{s})}}\right)^2 + \sum_{i=2}^n Y_i^2 = 1 \end{cases}$$

Observemos que os paralelos $s = \bar{s}$, estão contidos em $(n-1)$-elipsóides, todos com a intersecção comum

$$\{(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1,0),(0,-1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,-1,0)\} \subset I\!R^{n+1}.$$

O paralelo $s = \bar{s}$ ($\bar{s}$ constante) de (3.69) tal que $x_{n+1}^2(\bar{s}) + x_{n+2}^2(\bar{s}) = 0$, é a intersecção de $D^{n+1}(1)$ com o $(n-1)$-plano $[(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1,0)]$ de $I\!R^{n+1}$.

O meridiano $t = \bar{t}$ ($\bar{t}$ constante) de (3.69) é uma curva contida no 2-plano de $I\!R^{n+1}$

$$\left(0, \frac{\varphi_2(\bar{t})}{\varphi_1(\bar{t})}, \ldots, \frac{\varphi_n(\bar{t})}{\varphi_1(\bar{t})}, 0\right) + [(1,0,\ldots,0),(0,\ldots,0,1)]$$

Outra forma de (3.69) é

$$f_I^R(t,s) = \left(\frac{\alpha_1(s)}{\varphi_1(t)}, \frac{\varphi_2(t)}{\varphi_1(t)}, \ldots, \frac{\varphi_n(t)}{\varphi_1(t)}, \frac{\alpha_{n+1}(s)}{\varphi_1(t)}\right),\ (t,s) \in U \times I \subset I\!R^n \tag{3.70}$$

onde a curva plana

$$\alpha(s) = (\alpha_1(s), 0, \ldots, 0, \alpha_{n+1}(s)) \in D^{n+1}(1),\ s \in I$$

é a geratriz da hipersuperfície de rotação.

No **modêlo** $(B^{n+1}(2), g_{II})$, parametrizamos $\phi_{II}(M^n) \subset B^{n+1}(2)$ por

$$\phi_{II} \circ f(t,s) = \frac{2}{1+\varphi_1(t)x_1(s)}(x_{n+1}(s), \varphi_2(t)x_1(s), \ldots, \varphi_n(t)x_1(s), x_{n+2}(s)) \tag{3.71}$$

para $(t,s) \in U \times I \subset \mathbb{R}^n$.

O paralelo $s = \bar{s}$ ($\bar{s}$ constante) de (3.71), que satisfaz $x_{n+1}^2(\bar{s}) + x_{n+2}^2(\bar{s}) \neq 0$, é parte da $(n-1)$-esfera

$$\begin{cases} Y_1 \frac{(x_{n+1}(\bar{s}), 0, \ldots, 0, x_{n+2}(\bar{s}))}{\sqrt{x_{n+1}^2(\bar{s}) + x_{n+2}^2(\bar{s})}} + Y_2(0,1,0,\ldots,0) + \cdots + Y_n(0,\ldots,0,1,0) \in \mathbb{R}^{n+1} \\ \left(Y_1 - \left(\frac{-2}{\sqrt{x_1^2(\bar{s})-1}}\right)\right)^2 + \sum_{i=2}^n Y_i^2 = \left(\frac{2x_1(\bar{s})}{\sqrt{x_1^2(\bar{s})-1}}\right)^2 \end{cases}$$

Notemos que tais $(n-1)$-esferas, todas contêm o conjunto de $2(n-1)$ elementos

$$\{(0,2,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,2,0), (0,-2,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,-2,0)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

e possuem intersecção não vazia com

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \overline{B^{n+1}(2)} = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|p\|^2 \geq 4\}$$

O paralelo $s = \bar{s}$ ($\bar{s}$ constante) de (3.71), tal que$x_{n+1}^2(\bar{s}) + x_{n+2}^2(\bar{s}) = 0$, é, como no modêlo anterior, a intersecção

$$[(0,1,0,\ldots,0), \ldots, (0,\ldots,0,1,0)] \cap B^{n+1}(2).$$

O meridiano $t = \bar{t}$ ($\bar{t}$ constante) de (3.71), é uma curva contida no 3-plano de $\mathbb{R}^{n+1}$

$$[(1,0,\ldots,0), (0,\ldots,0,1), (0, \varphi_2(\bar{t}), \ldots, \varphi_n(\bar{t}), 0)]$$

No caso em que o plano $\mathcal{P}^2$ é **Degenerado**, podemos parametrizar as hipersuperfícies de rotação, como segue.

No **modêlo** $(D^{n+1}(1), g_I)$, obtemos $\phi_I(M^n) \subset D^{n+1}(1)$ através da parametrização

$$\phi_I \circ f(t,s) = \frac{\left(-1 + \frac{\|t\|^2}{2} - \frac{x_{n+1}(s)}{x_1(s)}, \sqrt{2}t_2, \ldots, \sqrt{2}t_n, \sqrt{2}\frac{x_{n+2}(s)}{x_1(s)}\right)}{\left(1 + \frac{\|t\|^2}{2} - \frac{x_{n+1}(s)}{x_1(s)}\right)},\ (t,s) \in U \times I \subset \mathbb{R}^n \tag{3.72}$$

O paralelo $s = \bar{s}$ ($\bar{s}$ constante) de (3.72) é o $(n-1)$-elipsóide, exceto o ponto $(1,0,\ldots,0)$, com centro

$$(1,0,\ldots,0) + \frac{\sqrt{2x_1^2(\bar{s}) + x_{n+2}^2(\bar{s})}}{\sqrt{2}(x_1(\bar{s}) - x_{n+1}(\bar{s}))}\vec{V}_1(\bar{s})$$

e semi-eixos

$$\begin{aligned} b_1(\bar{s}) &= \frac{\sqrt{2x_1^2(\bar{s}) + x_{n+2}^2(\bar{s})}}{\sqrt{2}\,(x_1(\bar{s}) - x_{n+1}(\bar{s}))} \\ b_i(\bar{s}) &= \sqrt{\frac{x_1(\bar{s})}{x_1(\bar{s}) - x_{n+1}(\bar{s})}},\ i = 2, \ldots, n \end{aligned}$$

inteiramente contido no hiperplano de $I\!R^{n+1}$

$$\pi(\bar{s}) = \left(0, \ldots, 0, \frac{x_{n+2}(\bar{s})}{\sqrt{2}x_1(\bar{s})}\right) + \left[\vec{V}_1(\bar{s}), \vec{V}_2(\bar{s}), \ldots, \vec{V}_n(\bar{s})\right]$$

onde

$$\begin{aligned} \vec{V}_1(\bar{s}) &= \frac{\left(-1, 0, \ldots, 0, \frac{x_{n+2}(\bar{s})}{\sqrt{2}x_1(\bar{s})}\right)}{\sqrt{1 + \frac{x_{n+2}^2(\bar{s})}{2x_1^2(\bar{s})}}} \\ \vec{V}_i(\bar{s}) &= (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0),\ (1 \text{ na } i\text{-ésima posição})\ i = 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

O ponto do $(n-1)$-elipsóide oposto a $(1, 0, \ldots, 0)$, é o ponto $\phi_I \circ f(0, \bar{s})$.

Observemos que, tal $(n-1)$-elipsóide está totalmente contido em $D^{n+1}(1)$, exceto o ponto $(1, 0, \ldots, 0)$, e, portanto é uma $(n-1)$-horoesfera de $(D^{n+1}(1), g_I)$.

O meridiano $t = \bar{t}$ ($\bar{t}$ constante) de (3.72) é uma curva contida em

$$[(1, 0, \ldots, 0), (0, \ldots, 0, 1), (0, \bar{t}_2, \ldots, \bar{t}_n, 0)] \subset I\!R^{n+1}$$

No **modêlo** $(B^{n+1}(2), g_{II})$, as hipersuperfícies $\phi_{II}(M^n) \subset B^{n+1}(2)$ podem ser parametrizadas por

$$\begin{aligned} &\phi_{II} \circ f(t, s) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2} + x_1(s)\left(1 + \frac{\|t\|^2}{2}\right) - x_{n+1}(s)} \left(x_1(s)\left(-1 + \frac{\|t\|^2}{2}\right) - x_{n+1}(s), \sqrt{2}x_1(s)t_2, \ldots, \right. \\ &\left. \ldots, \sqrt{2}x_1(s)t_n, \sqrt{2}x_{n+2}(s)\right) \end{aligned} \tag{3.73}$$

para $(t, s) \in U \times I \subset I\!R^n$.

Conclui-se, como no modêlo anterior, que o **paralelo** $s = \bar{s}$ ($\bar{s}$ constante), exceto o ponto $(2, 0, \ldots, 0)$, é um $(n-1)$-elipsóide cujo centro é

$$(2, 0, \ldots, 0) + \frac{\sqrt{\left(\sqrt{2} + 2x_1(\bar{s})\right)^2 + 2x_{n+2}^2(\bar{s})}}{x_1(\bar{s}) - x_{n+1}(\bar{s}) + \sqrt{2}} \vec{W}(\bar{s})$$

e semi-eixos

$$\begin{aligned} b_1(\bar{s}) &= \frac{b(\bar{s})}{a(\bar{s})} \\ b_i(\bar{s}) &= b(\bar{s}),\ i = 2, \ldots, n \end{aligned}$$

onde

$$\vec{W}(\bar{s}) = \frac{\left(-\sqrt{2}-\sqrt{2}x_1(\bar{s}),0,\ldots,0,\sqrt{2}x_{n+2}(\bar{s})\right)}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+2x_1(\bar{s})\right)^2+2x_{n+2}^2(\bar{s})}}$$

$$a^2(\bar{s}) = \frac{4x_1(\bar{s})\left(x_1(\bar{s})-x_{n+1}(\bar{s})+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2}+2x_1(\bar{s})\right)^2+2x_{n+2}^2(\bar{s})}$$

$$b^2(\bar{s}) = \frac{4x_1(\bar{s})}{x_1(\bar{s})-x_{n+1}(\bar{s})+\sqrt{2}}$$

O ponto $\phi_{II} \circ f(0,\bar{s})$ da hipersuperfície de rotação é o ponto do elipsóide oposto a $(2,0,\ldots,0)$.

Novamente, esse $(n-1)$-elipsóide é uma $(n-1)$-horoesfera de $(B^{n+1}(2), g_{II})$.

O meridiano $t=\bar{t}$ ($\bar{t}$ constante) de (3.73) é uma curva no subespaço de $\mathbb{R}^{n+1}$

$$[(1,0,\ldots,0),(0,\ldots,0,1),(0,\bar{t}_2,\ldots,\bar{t}_n,0)]$$

Capítulo 4

HIPERSUPERFÍCIES DE ROTAÇÃO MÍNIMAS EM ESPAÇOS DE CURVATURA CONSTANTE

4.1 Curvaturas principais e curvatura média.

Nesta seção vamos computar as curvaturas principais e a curvatura média de uma hipersuperfície de rotação. Isto nos permite estabelecer um equação diferencial ordinária de segunda ordem para hipersuperfícies de rotação de curvatura média constante.

Em geral, para cada tipo $M^n_{c,\delta}$ existe uma família a 1-parâmetro de soluções distintas da equação. Vamos provar, entretanto, que no caso parabólico, a solução é única a menos de isometrias.

Proposição 4.1.1 *Seja $M^n_{c,\delta} \subset \overline{M}^{n+1}(c)$ uma hipersuperfície de rotação parametrizada por $f(t,s)$ (veja (3.7),(3.13), (3.19), (3.40) ou (3.47), conforme o caso). Então as direções dadas por $\frac{\partial f}{\partial s}$ e $\frac{\partial f}{\partial t_i}$, são direções principais; as curvaturas principais ao longo das curvas coordenadas $t_i = \bar{t}_i$($\bar{t}_i$ constante) são todas iguais e dadas por*

$$\lambda = \frac{-\sqrt{\delta - cx_1^2 - \dot{x}_1^2}}{x_1} \tag{4.1}$$

e a curvatura principal ao longo das curvas coordenadas $s = \bar{s}$($\bar{s}$ constante) é

$$\mu = \frac{\ddot{x}_1 + cx_1}{\sqrt{\delta - cx_1^2 - \dot{x}_1^2}} \tag{4.2}$$

Logo, λ tem multiplicidade pelo menos igual a $(n-1)$.

Demonstração. Vamos dividir a prova em cinco casos:

(1) $c < 0, \delta = 1$;

(2) $c < 0, \delta = -1$;

(3) $c < 0, \delta = 0$;

(4) $c > 0$, $\delta = 1$;

(5) $c = 0$, $\delta = 1$.

Caso (1) $c < 0$, $\delta = 1$.

Temos

$$f(t,s) = (\varphi_1(t)x_1(s), \ldots, \varphi_n(t)x_1(s), x_{n+1}(s), x_{n+2}(s))$$

Procuremos um vetor unitário N, normal a $M^n_{c,\lambda}$ e tangente a $\mathcal{H}^{n+1}(c)$, isto é, para cada $(t,s) \in U \times I \subset \mathbb{R}^n$

$$N(t,s) \in \left(T_{f(t,s)}M^n_{c,\delta}\right)^{\perp} \subset T_{f(t,s)}\mathcal{H}^{n+1}(c)$$

ou seja,

$$\begin{array}{rcl} g_{-1}\left(N(t,s), \frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) & = & 0 \\ g_{-1}\left(N(t,s), \frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right) & = & 0, \quad i = 1, \ldots, n-1 \\ g_{-1}\left(N(t,s), f(t,s)\right) & = & 0 \end{array} \tag{4.3}$$

Definimos, primeiramente

$$\overline{N}(t,s) = \overline{N}_1(t,s)e_1 + \cdots + \overline{N}_{n+2}(t,s)e_{n+2}, \ \forall (t,s) \in U \times I \subset \mathbb{R}^n$$

onde $\{e_1, \ldots, e_{n+2}\}$ é uma base de L^{n+2} satisfazendo as condições de (1.6) e as funções reais $\overline{N}_i(t,s)$, $i = 1, \ldots, n+2$, são dadas por

$$\begin{array}{rcl} \overline{N}_i(t,s) & = & g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s) \wedge \frac{\partial f}{\partial t_1}(t,s) \wedge \ldots \wedge \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}}(t,s) \wedge f(t,s), e_i\right) = \\ & = & \begin{vmatrix} \dot{x}_1(s)\varphi_1(t) & \cdots & \dot{x}_1(s)\varphi_i(t) & \cdots & \dot{x}_1(s)\varphi_n(t) & \dot{x}_{n+1}(s) & \dot{x}_{n+2}(s) \\ x_1(s)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t) & \cdots & x_1(s)\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_1}(t) & \cdots & x_1(s)\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}(t) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1(s)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_{n-1}}(t) & \cdots & x_1(s)\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_{n-1}}(t) & \cdots & x_1(s)\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_{n-1}}(t) & 0 & 0 \\ x_1(s)\varphi_1(t) & \cdots & x_1(s)\varphi_i(t) & \cdots & x_1(s)\varphi_n(t) & x_{n+1}(s) & x_{n+2}(s) \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array}$$

para $i = 1, \ldots, n+1$, e

$$\begin{array}{rcl} \overline{N}_{n+2}(t,s) & = & g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s) \wedge \frac{\partial f}{\partial t_1}(t,s) \wedge \ldots \wedge \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}}(t,s) \wedge f(t,s), -e_{n+2}\right) = \\ & = & \begin{vmatrix} \dot{x}_1(s)\varphi_1(t) & \cdots & \dot{x}_1(s)\varphi_n(t) & \dot{x}_{n+1}(s) & \dot{x}_{n+2}(s) \\ x_1(s)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t) & \cdots & x_1(s)\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}(t) & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1(s)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_{n-1}}(t) & \cdots & x_1(s)\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_{n-1}}(t) & 0 & 0 \\ x_1(s)\varphi_1(t) & \cdots & x_1(s)\varphi_n(t) & x_{n+1}(s) & x_{n+2}(s) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \end{array}$$

Usaremos a seguinte notação matricial, para indicar a supressão de uma coluna:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{m,i-1} & a_{m,i+1} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix}_{m\times(r-1)} = \begin{bmatrix} \widehat{a_{1i}} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \quad i = 1, \ldots, r$$

Para $i = 1, \ldots, n$, temos, então,

$$\overline{N}_i(t,s) = (-1)^i \left(\dot{x}_{n+2}(s)x_{n+1}(s) - x_{n+2}(s)\dot{x}_{n+1}(s)\right)(x_1(s))^{n-1} \begin{vmatrix} \widehat{\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_1}(t)} \\ \vdots \\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial t_{n-1}}(t) \end{vmatrix}$$

e, para $i = n+1$,

$$\begin{aligned} \overline{N}_{n+1}(t,s) &= (-1)^{2n+3} \begin{vmatrix} \dot{x}_1(s)\varphi_1(t) & \cdots & \dot{x}_1(s)\varphi_n(t) & \dot{x}_{n+2}(s) \\ x_1(s)\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}(t) & \cdots & x_1(s)\frac{\partial\varphi_n}{\partial t_1}(t) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1(s)\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_{n-1}}(t) & \cdots & x_1(s)\frac{\partial\varphi_n}{\partial t_{n-1}}(t) & 0 \\ x_1(s)\varphi_1(t) & \cdots & x_1(s)\varphi_n(t) & x_{n+2}(s) \end{vmatrix} = \\ &= (-1)^{n+1}\dot{x}_{n+2}(s)(x_1(s))^n \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_{n-1}}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_{n-1}}(t) \\ \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \end{vmatrix} + \\ &\quad +(-1)x_{n+2}(s)\dot{x}_1(s)(x_1(s))^{n-1} \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_{n-1}}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_{n-1}}(t) \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Logo,

$$\overline{N}_{n+1}(t,s) = \left(\dot{x}_{n+2}(s)x_1(s) - x_{n+2}(s)\dot{x}_1(s)\right)(x_1(s))^{n-1} \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_{n-1}}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_{n-1}}(t) \end{vmatrix}$$

Analogamente, para $i = n+2$, obtemos

$$\overline{N}_{n+2}(t,s) = -(-1)^{2n+2} \begin{vmatrix} \dot{x}_1(s)\varphi_1(t) & \cdots & \dot{x}_1(s)\varphi_n(t) & \dot{x}_{n+1}(s) \\ x_1(s)\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}(t) & \cdots & x_1(s)\frac{\partial\varphi_n}{\partial t_1}(t) & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1(s)\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_{n-1}}(t) & \cdots & x_1(s)\frac{\partial\varphi_n}{\partial t_{n-1}}(t) & 0 \\ x_1(s)\varphi_1(t) & \cdots & x_1(s)\varphi_n(t) & x_{n+1}(s) \end{vmatrix} =$$

$$= (\dot{x}_{n+1}(s)x_1(s) - x_{n+1}(s)\dot{x}_1(s))\,(x_1(s))^{n-1} \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_{n-1}}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_{n-1}}(t) \end{vmatrix}$$

Mostremos que valem as relações:

$$\begin{vmatrix} \widehat{\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_1}(t)} \\ \vdots \\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial t_{n-1}}(t) \end{vmatrix} = (-1)^{i+1}\varphi_i(t) \begin{vmatrix} \varphi(t) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t) \end{vmatrix}, \; i = 1, \ldots, n \tag{4.4}$$

onde

$$\begin{vmatrix} \varphi(t) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_{n-1}}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_{n-1}}(t) \end{vmatrix}, \; t \in U$$

Consideremos o sistema linear em $y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$\begin{cases} \varphi_1(t)y_1 + \varphi_2(t)y_2 + \cdots + \varphi_n(t)y_n = 1 \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}(t)y_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_1}(t)y_2 + \cdots + \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_1}(t)y_n = 0 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_{n-1}}(t)y_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial t_{n-1}}(t)y_2 + \cdots + \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_{n-1}}(t)y_n = 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

Por (3.9) $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, $t \in U$ é solução de (4.5).

Sendo $\varphi(t)$ parametrização de uma $(n-1)$-esfera, o determinante $\begin{vmatrix} \varphi(t) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t) \end{vmatrix}$ é não nulo para todo $t \in U$.

Portanto $\varphi(t)$ é solução única de (4.5), que pode ser escrita na forma :

$$y_i = \varphi_i(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_{i-1}(t) & 1 & \varphi_{i+1}(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_{i-1}}{\partial t_1}(t) & 0 & \frac{\partial\varphi_{i+1}}{\partial t_1}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_1}(t) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_{n-1}}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_{i-1}}{\partial t_{n-1}}(t) & 0 & \frac{\partial\varphi_{i+1}}{\partial t_{n-1}}(t) & \cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial t_{n-1}}(t) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi(t) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t) \end{vmatrix}^{-1} =$$

$$= (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} \widehat{\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_1}(t)} \\ \vdots \\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial t_{n-1}}(t) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi(t) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t) \end{vmatrix}^{-1}, \; i = 1, \ldots, n, \; t \in U$$

Substituindo-se em $\overline{N}_i(t,s)$, $i = 1, \ldots, n$, temos

$$\overline{N}_i(t,s) =$$

$$= (-1)^i\,(x_1(s))^{n-1}\,(\dot{x}_{n+2}(s)x_{n+1}(s) - x_{n+2}(s)\dot{x}_{n+1}(s))\,(-1)^{i+1}\varphi_i(t) \begin{vmatrix} \varphi(t) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t) \end{vmatrix}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}&\overline{N}(t,s) = \\ &= (x_1(s))^{n-1} \begin{vmatrix} \varphi(t) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t) \end{vmatrix} (-A(s)(\varphi_1(t)e_1 + \cdots + \varphi_n(t)e_n) + B(s)e_{n+1} - C(s)e_{n+2})\end{aligned} \tag{4.6}$$

onde

$$\begin{aligned} A(s) &= \dot{x}_{n+2}(s)x_{n+1}(s) - x_{n+2}(s)\dot{x}_{n+1}(s) \\ B(s) &= \dot{x}_{n+2}(s)x_1(s) - x_{n+2}(s)\dot{x}_1(s) \\ C(s) &= \dot{x}_1(s)x_{n+1}(s) - x_1(s)\dot{x}_{n+1}(s) \end{aligned}$$

para todo $s \in I$.

Calculemos o produto

$$g_{-1}\left(-A(s)\sum_i \varphi_i(t)e_i + B(s)e_{n+1} - C(s)e_{n+2}, -A(s)\sum_i \varphi_i(t)e_i + B(s)e_{n+1} - C(s)e_{n+2}\right) =$$

$$= A^2(s)\textstyle\sum_{i=1}^n \varphi_i^2(t) + B^2(s) - C^2(s) = A^2(s) + B^2(s) - C^2(s)$$

Substituindo (3.24), (3.26) e (3.28) em cada uma das parcelas, segue que

$$\begin{aligned} A^2(s) &= (\dot{x}_{n+2}(s)x_{n+1}(s) - x_{n+2}(s)\dot{x}_{n+1}(s))^2 = (x_1^2(s) - 1/c)^2\dot{\phi}^2(s) = \\ &= -\tfrac{1}{c} + x_1^2(s) + \tfrac{\dot{x}_1^2(s)}{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^2(s) &= (\dot{x}_{n+2}(s)x_1(s) - x_{n+2}(s)\dot{x}_1(s))^2 = \\ &= -x_1^2(s) + \dot{x}_1^2(s)x_1^2(s) + \dot{x}_{n+1}^2(s)x_1^2(s) - \\ &\quad -\tfrac{\dot{x}_1^2(s)}{c} + \dot{x}_1^2(s)x_1^2(s) + \dot{x}_1^2(s)x_{n+1}^2(s) - \\ &\quad -2x_1(s)\dot{x}_1(s)\left(\dot{x}_1(s)x_1(s) + \dot{x}_{n+1}(s)x_{n+1}(s)\right) = \\ &= \dot{x}_{n+1}^2(s)x_1^2(s) + \dot{x}_1^2(s)x_{n+1}^2(s) - x_1^2(s) - \\ &\quad -\tfrac{\dot{x}_1^2(s)}{c} - 2x_1(s)x_{n+1}(s)\dot{x}_1(s)\dot{x}_{n+1}(s) \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} C^2(s) &= (\dot{x}_1(s)x_{n+1}(s) - x_1(s)\dot{x}_{n+1}(s))^2 = \\ &= \dot{x}_1^2(s)x_{n+1}^2(s) + x_1^2(s)\dot{x}_{n+1}^2(s) - \\ &\quad -2x_1(s)\dot{x}_1(s)x_{n+1}(s)\dot{x}_{n+1}(s) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} &A^2(s) + B^2(s) - C^2(s) = \\ &= -\frac{1}{c} + x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c} + \dot{x}_{n+1}^2(s)x_1^2(s) + \dot{x}_1^2(s)x_{n+1}^2(s) - x_1^2(s) - \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c} - \\ &\quad -2x_1(s)x_{n+1}(s)\dot{x}_1(s)\dot{x}_{n+1}(s) - \dot{x}_1^2(s)x_{n+1}^2(s) - x_1^2(s)\dot{x}_{n+1}^2(s) + \\ &\quad +2x_1(s)\dot{x}_1(s)x_{n+1}(s)\dot{x}_{n+1}(s) = \\ &= -\frac{1}{c} > 0 \end{aligned}$$

Definimos então o campo normal unitário,

$$N(t,s) = \frac{\sqrt{-c}}{(x_1(s))^{n-1}\begin{vmatrix} \varphi(t) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t) \end{vmatrix}}\overline{N}(t,s), \ \forall (t,s) \in U \times I \subset I\!R^n \tag{4.8}$$

onde $\overline{N}(t,s)$ é dado por (4.6).

As curvas coordenadas são linhas de curvatura, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^N\left(\tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) &= \mu(t,s)\tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s) \\ \mathcal{A}^N\left(\tfrac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right) &= \lambda_i(t,s)\tfrac{\partial f}{\partial t_i}(t,s), \ i = 1,\ldots,n-1 \end{aligned}$$

onde $\mathcal{A}^N$ é operador de Weingarten de $M^n_{c,\delta}$ associado a normal unitária N, já que por (3.8), (3.9) e (4.8), se verificam as seguintes identidades para $i,j,\ell = 1,\ldots,n-1$, $\ell \neq j$

$$\begin{aligned} g_{-1}\left(\mathcal{A}^N\left(\tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right), \tfrac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right) &= g_{-1}\left(\left(\nabla_{\frac{\partial f}{\partial t_i}}\tfrac{\partial f}{\partial s}\right)(t,s), N(t,s)\right) = \\ &= g_{-1}\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s}(t,s), N(t,s)\right) = \\ &= -\sqrt{-c}\,\dot{x}_1(s)A(s)\textstyle\sum_{k=1}^n \varphi_k(t)\tfrac{\partial\varphi_k}{\partial t_i}(t) = 0 \\ g_{-1}\left(\mathcal{A}^N\left(\tfrac{\partial f}{\partial t_\ell}(t,s)\right), \tfrac{\partial f}{\partial t_j}(t,s)\right) &= g_{-1}\left(\left(\nabla_{\frac{\partial f}{\partial t_j}}\tfrac{\partial f}{\partial t_\ell}\right)(t,s), N(t,s)\right) = \\ &= g_{-1}\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial t_j \partial t_\ell}(t,s), N(t,s)\right) = \\ &= -\sqrt{-c}\,x_1(s)A(s)\textstyle\sum_{k=1}^n \varphi_k(t)\tfrac{\partial^2\varphi_k}{\partial t_j \partial t_\ell}(t) = 0 \end{aligned}$$

Passemos ao cálculo das curvaturas principais $\lambda_i(t,s)$ ao longo das curvas coordenadas $t_i = \bar{t}_i(\bar{t}_i$ constante), $i = 1,\ldots,n-1$

$$\lambda_i(t,s) = \frac{g_{-1}\left(N(t,s), \frac{\partial^2 f}{\partial t_i{}^2}(t,s)\right)}{g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s), \frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right)}$$

De (3.8) e (4.8), temos:

$$\begin{aligned} g_{-1}\left(N(t,s), \tfrac{\partial^2 f}{\partial t_i{}^2}(t,s)\right) &= -\sqrt{-c}\,x_1(s)A(s)\textstyle\sum_{k=1}^n \varphi_k(t)\tfrac{\partial^2\varphi_k}{\partial t_i{}^2}(t) = \\ &= -\sqrt{-c}\,x_1(s)A(s)\left(-\textstyle\sum_{k=1}^n (\tfrac{\partial\varphi_k}{\partial t_i}(t))^2\right) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \lambda_i(t,s) &= \frac{\sqrt{-c}\,x_1(s)A(s)\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial t_i}(t)\right)^2}{x_1^2(s)\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial t_i}(t)\right)^2} = \\ &= \frac{-\sqrt{-c}\sqrt{-\frac{1}{c} + x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}}{x_1(s)} = \\ &= -\frac{\sqrt{1 - cx_1^2(s) - \dot{x}_1^2(s)}}{x_1(s)} \end{aligned}$$

nos mostra que as curvaturas principais ao longo das curvas coordenadas $t_i = \bar{t}_i (\bar{t}_i$ constante), $i = 1, \ldots, n-1$, são todas iguais a

$$\lambda_i(t,s) = \lambda(s) = -\frac{\sqrt{1 - cx_1^2(s) - \dot{x}_1^2(s)}}{x_1(s)}$$

Calculemos

$$\mu(t,s) = \frac{g_{-1}\left(N(t,s), \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s)\right)}{g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s), \frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right)} = g_{-1}\left(N(t,s), \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s)\right)$$

Por (3.8) e (4.8), temos

$$g_{-1}\left(N(t,s), \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s)\right) = \sqrt{-c}\,\left(-A(s)\ddot{x}_1(s) + B(s)\ddot{x}_{n+1}(s) - C(s)(-\ddot{x}_{n+2}(s))\right)$$

Substituindo as expressões de $B(s)$ e $C(s)$:

$$\begin{aligned} & g_{-1}\left(N(t,s), \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s)\right) = \\ = \; & \sqrt{-c}\,\left(-A(s)\ddot{x}_1(s) + \dot{x}_1(s)\left(\ddot{x}_{n+2}(s)x_{n+1}(s) - x_{n+2}(s)\ddot{x}_{n+1}(s)\right) + \right. \\ & \left. + x_1(s)\left(\dot{x}_{n+2}(s)\ddot{x}_{n+1}(s) - \ddot{x}_{n+2}(s)\dot{x}_{n+1}(s)\right)\right) = \\ = \; & \sqrt{-c}\,\left(-A(s)\ddot{x}_1(s) + \dot{x}_1(s)\dot{A}(s) + \right. \\ & \left. + x_1(s)\left(\dot{x}_{n+2}(s)\ddot{x}_{n+1}(s) - \ddot{x}_{n+2}(s)\dot{x}_{n+1}(s)\right)\right) \end{aligned}$$

Derivando relativamente ao parâmetro s, a primeira relação de (4.7), obtemos

$$\dot{A}(s) = \frac{2\dot{x}_1(s)\left(x_1(s) + \frac{\ddot{x}_1(s)}{c}\right)}{2A(s)} = \frac{-\dot{x}_1(s)\left(x_1(s) + \frac{\ddot{x}_1(s)}{c}\right)}{\sqrt{-\frac{1}{c} + x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}}$$

Então

$$\begin{aligned} g_{-1}\left(N(t,s), \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s)\right) = \sqrt{-c}\,\Bigg(& \ddot{x}_1(s)\sqrt{-\frac{1}{c} + x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}} + \\ & + \frac{-\dot{x}_1^2(s)\left(x_1(s) + \frac{\ddot{x}_1(s)}{c}\right)}{\sqrt{-\frac{1}{c} + x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}} + x_1(s)\left(\dot{x}_{n+2}(s)\ddot{x}_{n+1}(s) - \ddot{x}_{n+2}(s)\dot{x}_{n+1}(s)\right)\Bigg) \end{aligned}$$

Mas por (3.26), (3.28) e (3.29)

$$\begin{aligned} & \dot{x}_{n+2}(s)\ddot{x}_{n+1}(s) - \ddot{x}_{n+2}(s)\dot{x}_{n+1}(s) = \\ = \; & \frac{1}{x_1^2(s) - \frac{1}{c}}\left(\frac{x_1(s)\dot{x}_1^2(s)\left(\ddot{x}_1(s) + cx_1(s)\right)}{c\sqrt{-\frac{1}{c} + x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}} - \left(x_1(s)\ddot{x}_1(s) + 1\right)\sqrt{-\frac{1}{c} + x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}\right) = \\ = \; & \frac{\frac{x_1(s)\ddot{x}_1(s)}{c} - x_1^3(s)\ddot{x}_1(s) + \frac{1}{c} - x_1^2(s) - \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c} + x_1^2(s)\dot{x}_1^2(s)}{\left(x_1^2(s) - \frac{1}{c}\right)\sqrt{-\frac{1}{c} + x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}} = \\ = \; & \frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{c} + x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}}\left(-x_1(s)\ddot{x}_1(s) - 1 + \dot{x}_1^2(s)\right) \end{aligned}$$

Logo,

$$g_{-1}\left(N(t,s),\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s)\right)=\sqrt{-c}\left(\ddot{x}_1(s)\left(-\frac{1}{c}+x_1^2(s)+\frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}\right)-\dot{x}_1^2(s)x_1(s)\right.$$

$$\left.-\dot{x}_1^2(s)\frac{\ddot{x}_1(s)}{c}-x_1^2(s)\ddot{x}_1(s)-x_1(s)+x_1(s)\dot{x}_1^2(s)\right)\frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{c}+x_1^2(s)+\frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}}=$$

$$=\frac{\sqrt{-c}\sqrt{-c}}{\sqrt{1-cx_1^2(s)-\dot{x}_1^2(s)}(-c)}(\ddot{x}_1(s)+cx_1(s))$$

e

$$\mu(t,s)=\mu(s)=\frac{\ddot{x}_1(s)+cx_1(s)}{\sqrt{1-cx_1^2(s)-\dot{x}_1^2(s)}}$$

<u>Caso (2)</u> $c<0$, $\delta=-1$.

Temos

$$f(t,s)=(\varphi_1(t)x_1(s),\ldots,\varphi_n(t)x_1(s),x_{n+1}(s),x_{n+2}(s))$$

Procedendo da mesma forma como no caso (1) obtemos um campo $\overline{N}$ normal a $M^n_{c,\delta}$, tangente a $\mathcal{H}^{n+1}(c)$, isto é,

$$\overline{N}(t,s)\in\left(T_{f(t,s)}M^n_{c,\delta}\right)^{\perp}\subset T_{f(t,s)}\mathcal{H}^{n+1}(c),\ \forall(t,s)\in U\times I\subset I\!R^n$$

dado por

$$\overline{N}(t,s)=\textstyle\sum_{i=1}^{n+2}\overline{N}_i(t,s)e_i$$

onde

$$\overline{N}_i(t,s)=\begin{cases} g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\wedge\frac{\partial f}{\partial t_1}(t,s)\wedge\ldots\wedge\frac{\partial f}{\partial t_{n-1}}(t,s)\wedge f(t,s),e_i\right) & ,i\neq 1\\ g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\wedge\frac{\partial f}{\partial t_1}(t,s)\wedge\ldots\wedge\frac{\partial f}{\partial t_{n-1}}(t,s)\wedge f(t,s),-e_1\right) & ,i=1\end{cases}$$

para $i=1,\ldots,n+2$, e $\{e_1,\ldots,e_{n+2}\}$ representa uma base de L^{n+2} que satisfaz as condições (1.7).

Encontramos expressões análogas àquelas do caso (1), dadas por:

$$\overline{N}_i(t,s)=$$

$$=\begin{cases}(x_1(s))^{n-1}\left(\dot{x}_{n+2}(s)x_{n+1}(s)-x_{n+2}(s)\dot{x}_{n+1}(s)\right)\left|\begin{array}{c}\widehat{\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_1}(t)}\\ \vdots\\ \frac{\partial\varphi_1}{\partial t_{n-1}}(t)\end{array}\right| & ,i=1\\ (-1)^i(x_1(s))^{n-1}\left(\dot{x}_{n+2}(s)x_{n+1}(s)-x_{n+2}(s)\dot{x}_{n+1}(s)\right)\left|\begin{array}{c}\widehat{\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_1}(t)}\\ \vdots\\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial t_{n-1}}(t)\end{array}\right| & ,i=2,\ldots,n\\ (x_1(s))^{n-1}\left(\dot{x}_{n+2}(s)x_1(s)-x_{n+2}(s)\dot{x}_1(s)\right)\left|\begin{array}{c}\varphi(t)\\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t)\end{array}\right| & ,i=n+1\\ -(x_1(s))^{n-1}\left(\dot{x}_{n+1}(s)x_1(s)-x_{n+1}(s)\dot{x}_1(s)\right)\left|\begin{array}{c}\varphi(t)\\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t)\end{array}\right| & ,i=n+2\end{cases}$$

e valem relações do tipo de (4.4)

$$\begin{vmatrix} \widehat{\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_1}(t)} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial t_{n-1}}(t) \end{vmatrix} = \begin{cases} (-1)^i \varphi_i(t) \begin{vmatrix} \varphi(t) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t) \end{vmatrix} & , i = 2, \ldots, n \\ \varphi_1(t) \begin{vmatrix} \varphi(t) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t) \end{vmatrix} & , i = 1 \end{cases} \tag{4.9}$$

Substituindo (4.9) em $\overline{N}_i(t,s)$ para $i = 1, \ldots, n$, temos

$$\overline{N}_i(t,s) = (x_1(s))^{n-1} \left(\dot{x}_{n+2}(s) x_{n+1}(s) - x_{n+2}(s) \dot{x}_{n+1}(s)\right) \varphi_1(t) \begin{vmatrix} \varphi(t) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t) \end{vmatrix}$$

Donde segue que

$$\overline{N}(t,s) = (x_1(s))^{n-1} \begin{vmatrix} \varphi(t) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t) \end{vmatrix} \left(A(s) \textstyle\sum_{i=1}^n \varphi_i(t) e_i + B(s) e_{n+1} + C(s) e_{n+2}\right) \tag{4.10}$$

sendo

$$\begin{aligned} A(s) &= \dot{x}_{n+2}(s) x_{n+1}(s) - x_{n+2}(s) \dot{x}_{n+1}(s) \\ B(s) &= \dot{x}_{n+2}(s) x_1(s) - x_{n+2}(s) \dot{x}_1(s) \\ C(s) &= \dot{x}_1(s) x_{n+1}(s) - x_1(s) \dot{x}_{n+1}(s) \end{aligned}$$

para todo $s \in I$.

Como no caso (1), mostra-se que

$$g_{-1}\left(A(s) \sum_i \varphi_i(t) e_i + B(s) e_{n+1} + C(s) e_{n+2}, A(s) \sum_i \varphi_i(t) e_i + B(s) e_{n+1} + C(s) e_{n+2}\right) =$$

$$= -A^2(s) + B^2(s) + C^2(s) = -\frac{1}{c} - x_1^2(s) - \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c} + x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c} = \frac{1}{-c} > 0$$

Definimos, portanto, o campo normal e unitário

$$N(t,s) = \frac{\sqrt{-c}}{(x_1(s))^{n-1} \begin{vmatrix} \varphi(t) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t) \end{vmatrix}} \overline{N}(t,s), \ \forall (t,s) \in U \times I \subset \mathbb{R}^n \tag{4.11}$$

sendo $\overline{N}(t,s)$ dado por (4.10).

Usando a mesma notação do caso (1), vamos mostrar que as curvas coordenadas são linhas de curvatura, isto é,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^N\left(\tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) &= \mu(t,s) \tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s) \\ \mathcal{A}^N\left(\tfrac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right) &= \lambda_i(t,s) \tfrac{\partial f}{\partial t_i}(t,s), \ i = 1, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

Para $\imath, \jmath, \ell = 1, \ldots, n-1$, $\ell \neq \jmath$, por (3.14), (3.15) e (4.8) temos

$$\begin{aligned} g_{-1}\left(\mathcal{A}^N\left(\tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right), \tfrac{\partial f}{\partial t_\imath}(t,s)\right) &= g_{-1}\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial t_\imath \partial s}(t,s), N(t,s)\right) = \\ &= \sqrt{-c}\,\dot{x}_1(s)A(s)\left(-\varphi_1(t)\tfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_\imath}(t) + \sum_{k=2}^{n} \varphi_k(t)\tfrac{\partial \varphi_k}{\partial t_\imath}(t)\right) = 0 \\ g_{-1}\left(\mathcal{A}^N\left(\tfrac{\partial f}{\partial t_\ell}(t,s)\right), \tfrac{\partial f}{\partial t_\jmath}(t,s)\right) &= g_{-1}\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial t_\jmath \partial t_\ell}(t,s), N(t,s)\right) = \\ &= \sqrt{-c}\,x_1(s)A(s)\left(-\varphi_1(t)\tfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_\jmath \partial t_\ell}(t) + \sum_{k=2}^{n} \varphi_k(t)\tfrac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t_\jmath \partial t_\ell}(t)\right) = 0 \end{aligned}$$

As curvaturas principais ao longo das curvas coordenadas $t_\imath = \bar{t}_\imath$($\bar{t}_\imath$ constante), para $\imath = 1, \ldots, n-1$, são

$$\lambda_\imath(t,s) = \frac{g_{-1}\left(N(t,s), \frac{\partial^2 f}{\partial t_\imath^2}(t,s)\right)}{g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial t_\imath}(t,s), \frac{\partial f}{\partial t_\imath}(t,s)\right)}$$

De fato, por (3.14), (3.15) e (4.11)

$$\begin{aligned} g_{-1}\left(N(t,s), \tfrac{\partial^2 f}{\partial t_\imath^2}(t,s)\right) &= \sqrt{-c}\,x_1(s)A(s)\left(-\varphi_1(t)\tfrac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t_\imath^2}(t) + \sum_{k=2}^{n} \varphi_k(t)\tfrac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t_\imath^2}(t)\right) = \\ &= -\sqrt{-c}\,x_1(s)A(s)\left(-\left(\tfrac{\partial \varphi_1}{\partial t_\imath}(t)\right)^2 + \sum_{k=2}^{n}\left(\tfrac{\partial \varphi_k}{\partial t_\imath}(t)\right)^2\right) \end{aligned}$$

e por (3.16)

$$\begin{aligned} \lambda_\imath(t,s) &= \frac{-\sqrt{-c}\,x_1(s)A(s)}{x_1^2(s)} = \frac{-\sqrt{-c}\sqrt{\frac{1}{c} + x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}}{x_1(s)} = \\ &= -\frac{\sqrt{-1 - cx_1^2(s) - \dot{x}_1^2(s)}}{x_1(s)} \end{aligned}$$

E portanto

$$\lambda_\imath(t,s) = \lambda(s) = -\frac{\sqrt{-1 - cx_1^2(s) - \dot{x}_1^2(s)}}{x_1(s)}$$

A curvatura principal ao longo da curva coordenada $s = \bar{s}$($\bar{s}$ constante), é

$$\mu(t,s) = \frac{g_{-1}\left(N(t,s), \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s)\right)}{g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s), \frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right)} = g_{-1}\left(N(t,s), \tfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s)\right)$$

De fato,

$$\begin{aligned} g_{-1}\left(N(t,s), \tfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s)\right) &= \sqrt{-c}\,\left(-A(s)\ddot{x}_1(s) + B(s)\ddot{x}_{n+1}(s) + C(s)\ddot{x}_{n+2}(s)\right) = \\ &= \sqrt{-c}\,\left(-A(s)\ddot{x}_1(s) + \dot{x}_1(s)\left(\ddot{x}_{n+2}(s)x_{n+1}(s) - x_{n+2}(s)\ddot{x}_{n+1}(s)\right) + \right. \\ &\quad \left. + x_1(s)\left(\dot{x}_{n+2}(s)\ddot{x}_{n+1}(s) - \ddot{x}_{n+2}(s)\dot{x}_{n+1}(s)\right)\right) = \\ &= \sqrt{-c}\,\left(-A(s)\ddot{x}_1(s) + \dot{x}_1(s)\dot{A}(s) + \right. \\ &\quad \left. + x_1(s)\left(\dot{x}_{n+2}(s)\ddot{x}_{n+1}(s) - \ddot{x}_{n+2}(s)\dot{x}_{n+1}(s)\right)\right) \end{aligned}$$

E, como no caso anterior, obtemos:

$$\dot{A}(s) = \frac{\dot{x}_1(s)\left(x_1(s) + \frac{\ddot{x}_1(s)}{c}\right)}{\sqrt{\frac{1}{c} + x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}}$$

$$\dot{x}_{n+2}(s)\ddot{x}_{n+1}(s) - \ddot{x}_{n+2}(s)\dot{x}_{n+1}(s) = \frac{x_1(s)\ddot{x}_1(s) - 1 - \dot{x}_1^2(s)}{\sqrt{\frac{1}{c} + x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}}$$

Voltando na expressão

$$\begin{aligned} g_{-1}\left(N(t,s), \tfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s)\right) &= \sqrt{-c}\left(-\ddot{x}_1(s)\left(\frac{1}{c} + x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}\right) + \dot{x}_1^2(s)\left(x_1(s) + \frac{\ddot{x}_1(s)}{c}\right) + \right. \\ &\left. + x_1(s)\left(x_1(s)\ddot{x}_1(s) - 1 - \dot{x}_1^2(s)\right)\right) \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{c} + x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}} \end{aligned}$$

Donde segue que

$$\mu(t,s) = \mu(s) = \frac{\ddot{x}_1(s) + cx_1(s)}{\sqrt{-1 - cx_1^2(s) - \dot{x}_1^2(s)}}$$

<u>Caso (3)</u> $c < 0$, $\delta = 0$.

Temos

$$f(t,s) = (x_1(s), t_2x_1(s), \ldots, t_nx_1(s), t_{n+1}x_1(s) + x_{n+1}(s), x_{n+2}(s))$$

onde $(t,s) = (t_2, \ldots, t_n, s)$.

Tomemos uma base $\{e_1, \ldots, e_{n+2}\}$ de L^{n+2} nas condições de (1.8). Um campo tangente a $\mathcal{H}^{n+1}(c)$, normal a $M^n_{c,\delta}$ dado por

$$\overline{N}(t,s) = \overline{N}_1(t,s)e_1 + \cdots + \overline{N}_{n+2}(t,s)e_{n+2}, \ \forall (t,s) \in \mathbb{R}^{n-1} \times I$$

satisfaz

$$\begin{aligned} g_{-1}(\overline{N}(t,s), f(t,s)) &= 0 \\ g_{-1}\left(\overline{N}(t,s), \tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) &= 0 \\ g_{-1}\left(\overline{N}(t,s), \tfrac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right) &= 0, \quad i = 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{4.12}$$

Por (1.8) e (3.20), para $i = 2, \ldots, n$ temos

$$0 = g_{-1}\left(\overline{N}(t,s), \tfrac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right) = \overline{N}_1(t,s)(-t_ix_1(s)) + \overline{N}_i(t,s)x_1(s) \Rightarrow \overline{N}_i(t,s) = t_i\overline{N}_1(t,s)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= g_{-1}(\overline{N}(t,s), f(t,s)) = \\ &= \overline{N}_1(t,s)\left(\frac{-x_1(s)}{2}\left(\sum_{i=2}^{n} t_i^2\right) + x_{n+1}(s)\right) + \overline{N}_{n+1}(t,s)x_1(s) + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+x_1(s)\left(\sum_{i=2}^{n} t_i \overline{N}_i(t,s)\right) + \overline{N}_{n+2}(t,s)x_{n+2}(s) = \\
= \;& \overline{N}_1(t,s)\left(\frac{-x_1(s)}{2}\left(\sum_{i=2}^{n} t_i^2\right) + x_{n+1}(s) + x_1(s)\left(\sum_{i=2}^{n} t_i^2\right)\right) + \\
&+\overline{N}_{n+1}(t,s)x_1(s) + \overline{N}_{n+2}(t,s)x_{n+2}(s)
\end{aligned}
$$

Logo

$$
\overline{N}_{n+1}(t,s) = \frac{1}{x_1(s)}\left(-\overline{N}_1(t,s)\left(\frac{x_1(s)}{2}\left(\sum_{i=2}^{n} t_i^2\right) + x_{n+1}(s)\right) - \overline{N}_{n+2}(t,s)x_{n+2}(s)\right) \tag{4.13}
$$

Consideremos o campo

$$
\eta(t,s) = x_1(s)e_1 + t_2x_1(s)e_2 + \cdots + t_nx_1(s)e_n + a(t,s)e_{n+1} + x_{n+2}(s)e_{n+2} \tag{4.14}
$$

definido para todo $(t,s) \in \mathbb{R}^{n-1} \times I$, onde $a(t,s)$ é obtido a partir de (4.13), fazendo $\overline{N}_{n+1}(t,s) = a(t,s)$, $\overline{N}_1(t,s) = x_1(s)$ e $\overline{N}_{n+2}(t,s) = x_{n+2}(s)$.

Logo, da definição de $\eta(t,s)$ segue que

$$
g_{-1}(\eta(t,s), f(t,s)) = 0
$$

e $\eta(t,s)$ é tangente a $\mathcal{H}^{n+1}(c)$, e ainda mais

$$
g_{-1}\left(\eta(t,s), \tfrac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right) = 0,\ i = 2,\ldots,n \tag{4.15}
$$

Usando (1.8), (3.20) e (4.14), calculamos

$$
\begin{aligned}
& g_{-1}\left(\eta(t,s), \tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) = \\
= \;& x_1(s)\frac{-2x_{n+2}(s)\dot{x}_{n+2}(s)x_1(s) - \frac{\dot{x}_1(s)}{c} + \dot{x}_1(s)x_{n+2}^2(s) - \dot{x}_1(s)x_1^2(s)\sum_{\ell=2}^{n} t_\ell^2}{2x_1^2(s)} + \\
& +\dot{x}_1(s)a(t,s) + x_1(s)\dot{x}_1(s)\textstyle\sum_{\ell=2}^{n} t_\ell^2 + x_{n+2}(s)\dot{x}_{n+2}(s) = \\
= \;& -x_{n+2}(s)\dot{x}_{n+2}(s) - \frac{\dot{x}_1(s)}{2cx_1(s)} + \frac{\dot{x}_1(s)x_{n+2}^2(s)}{2x_1(s)} - \frac{x_1(s)\dot{x}_1(s)}{2}\textstyle\sum_{\ell=2}^{n} t_\ell^2 + \\
& +\frac{\dot{x}_1(s)}{x_1(s)}\left(-\frac{x_1^2(s)}{2}\textstyle\sum_{\ell=2}^{n} t_\ell^2 - x_1(s)x_{n+1}(s) - x_{n+2}^2(s)\right) + \\
& +x_1(s)\dot{x}_1(s)\textstyle\sum_{\ell=2}^{n} t_\ell^2 + x_{n+2}(s)\dot{x}_{n+2}(s) = \\
= \;& -\frac{\dot{x}_1(s)}{2cx_1(s)} + \frac{\dot{x}_1(s)x_{n+2}^2(s)}{2x_1(s)} - \frac{x_1(s)\dot{x}_1(s)}{2}\textstyle\sum_{\ell=2}^{n} t_\ell^2 - \frac{x_1(s)\dot{x}_1(s)}{2}\textstyle\sum_{\ell=2}^{n} t_\ell^2 - \\
& -\dot{x}_1(s)\left(\frac{1/c - x_{n+2}^2(s)}{2x_1(s)}\right) - \frac{\dot{x}_1(s)x_{n+2}^2(s)}{x_1(s)} + x_1(s)\dot{x}_1(s)\textstyle\sum_{\ell=2}^{n} t_\ell^2 = \\
= \;& -\frac{\dot{x}_1(s)}{2cx_1(s)} - \frac{\dot{x}_1(s)}{2cx_1(s)} = -\frac{\dot{x}_1(s)}{cx_1(s)}
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Por (1.8), (3.4) e (4.14) temos

$$\begin{aligned} g_{-1}(\eta(t,s),\eta(t,s)) &= 2x_1(s)a(t,s) + x_1^2(s)\textstyle\sum_{\ell=2}^n t_\ell^2 + x_{n+2}^2(s) = \\ &= 2x_1(s)\tfrac{1}{x_1(s)}\left(-\tfrac{x_1^2(s)}{2}\textstyle\sum_{\ell=2}^n t_\ell^2 - x_1(s)x_{n+1}(s) - x_{n+2}^2(s)\right)+ \\ &\quad +x_1^2(s)\textstyle\sum_{\ell=2}^n t_\ell^2 + x_{n+2}^2(s) = -2x_1(s)x_{n+1}(s) - x_{n+2}^2(s) = \\ &= \tfrac{1}{-c} > 0 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Podemos então, escrever para $(t,s) \in I\!R^{n-1} \times I$,

$$\overline{N}(t,s) = \eta(t,s) + \varpi(t,s)\tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s) + \sum_{i=2}^n \theta_i(t,s)\tfrac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)$$

onde

$$\begin{aligned} &\varpi(t,s) = \\ &= \frac{g_{-1}\left(\overline{N}(t,s),\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) - g_{-1}\left(\eta(t,s),\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) - \sum_{i=2}^n \theta_i(t,s)\, g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s),\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right)}{g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s),\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right)} = \\ &= \tfrac{\dot{x}_1(s)}{cx_1(s)} \end{aligned}$$

por (3.21), (4.12) e (4.16), e para cada $i = 2,\ldots,n$

$$\theta_i(t,s) = \frac{g_{-1}\left(\overline{N}(t,s),\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right) - g_{-1}\left(\eta(t,s),\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right) - \varpi(t,s)\, g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s),\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right)}{g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s),\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right)} = 0$$

por (3.21), (4.12) e (4.15).

Então, um campo tangente a $\mathcal{H}^{n+1}(c)$ e normal a $M_{c,\delta}^n$ é

$$\overline{N}(t,s) = \eta(t,s) + \frac{\dot{x}_1(s)}{cx_1(s)}\frac{\partial f}{\partial s}(t,s),\ \forall (t,s) \in I\!R^{n-1} \times I \tag{4.18}$$

onde $\eta(t,s)$ é definido por (4.14).

Calculemos sua norma

$$\begin{aligned} g_{-1}(\overline{N}(t,s),\overline{N}(t,s)) &= g_{-1}(\eta(t,s),\eta(t,s)) + \frac{2\dot{x}_1(s)}{cx_1(s)}\, g_{-1}\left(\eta(t,s),\tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) + \\ &\quad + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c^2x_1^2(s)}\, g_{-1}\left(\tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s),\tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) = \\ &= -\frac{1}{c} + \frac{2\dot{x}_1(s)}{cx_1(s)}\frac{(-\dot{x}_1(s))}{cx_1(s)} + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c^2x_1^2(s)} = \\ &= \frac{1}{-cx_1^2(s)}\left(x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}\right) \end{aligned}$$

por (3.21), (4.16) e (4.17).

Finalmente, definimos o campo unitário e normal a $M^n_{c,\delta}$ por

$$N(t,s) = \frac{\overline{N}(t,s)}{\sqrt{g_{-1}(\overline{N}(t,s),\overline{N}(t,s))}} = \frac{\sqrt{-c}\,x_1(s)}{\sqrt{x_1^2(s)+\frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}}\left(\eta(t,s)+\frac{\dot{x}_1(s)}{cx_1(s)}\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) \tag{4.19}$$

sendo $\eta(t,s)$ dado por (4.14).

Com a mesma notação do caso (1), vamos mostrar que as curvas coordenadas são linhas de curvatura, e a seguir calcular as curvaturas principais $\lambda_i(t,s)$, $i = 2,\ldots,n$ e $\mu(t,s)$, $(t,s) \in \mathbb{R}^{n-1} \times I$.

Temos por (1.8), (3.20), (4.14) e (4.19), para $i,j,k = 2,\ldots,n$, $j \neq k$

$$g_{-1}\left(\mathcal{A}^N\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right),\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right) = g_{-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s}(t,s),N(t,s)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{-c}\,x_1(s)}{\sqrt{x_1^2(s)+\frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}}\,g_{-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s}(t,s),\eta(t,s)+\frac{\dot{x}_1(s)}{cx_1(s)}\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{-c}\,x_1(s)}{\sqrt{x_1^2(s)+\frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}}\left(-t_i\dot{x}_1(s)x_1(s)+\dot{x}_1(s)t_ix_1(s)+\frac{\dot{x}_1(s)}{cx_1(s)}\left(-t_i\dot{x}_1^2(s)+\dot{x}_1^2(s)t_i\right)\right) = 0$$

$$g_{-1}\left(\mathcal{A}^N\left(\frac{\partial f}{\partial t_k}(t,s)\right),\frac{\partial f}{\partial t_j}(t,s)\right) = g_{-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t_k \partial t_j}(t,s),N(t,s)\right) = 0$$

Para $i = 2,\ldots,n$

$$\begin{aligned}
\lambda_i(t,s) &= \frac{g_{-1}\left(\mathcal{A}^N\left(\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right),\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right)}{g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s),\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right)} = \frac{g_{-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t_i^2}(t,s),N(t,s)\right)}{x_1^2(s)} = \\
&= \frac{1}{x_1^2(s)}(-x_1(s))\frac{\sqrt{-c}\,x_1(s)}{\sqrt{x_1^2(s)+\frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}}\left(x_1(s)+\frac{\dot{x}_1(s)}{cx_1(s)}\dot{x}_1(s)\right) = \\
&= \frac{-\sqrt{-c}}{x_1(s)}\sqrt{x_1^2(s)+\frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}
\end{aligned}$$

por (1.8), (3.20), (3.21) e (4.19).

Logo,

$$\lambda_i(t,s) = \lambda(s) = -\frac{\sqrt{-cx_1^2(s)-\dot{x}_1^2(s)}}{x_1(s)}$$

Temos por (3.21), (4.12) e (4.19)

$$\begin{aligned}
\mu(t,s) &= \frac{g_{-1}\left(\mathcal{A}^N\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right),\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right)}{g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s),\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right)} = g_{-1}\left(N(t,s),\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s)\right) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{g_{-1}(\overline{N}(t,s),\overline{N}(t,s))}}\,g_{-1}\left(\overline{N}(t,s),\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s)\right) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\frac{d}{ds}\, g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s), \overline{N}(t,s)\right) - g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s), \frac{\partial \overline{N}}{\partial s}(t,s)\right)}{\sqrt{g_{-1}(\overline{N}(t,s), \overline{N}(t,s))}} =$$

$$= \frac{-\, g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s), \frac{\partial \overline{N}}{\partial s}(t,s)\right)}{\sqrt{g_{-1}(\overline{N}(t,s), \overline{N}(t,s))}}$$

De (4.14) e (4.18) vem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{N}}{\partial s}(t,s) &= \frac{\partial \eta}{\partial s}(t,s) + \frac{\ddot{x}_1(s)cx_1(s) - \dot{x}_1^2(s)c}{c^2x_1^2(s)}\frac{\partial f}{\partial s}(t,s) + \frac{\dot{x}_1(s)}{cx_1(s)}\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s) \\
\frac{\partial \eta}{\partial s}(t,s) &= \left(\dot{x}_1(s)e_1 + t_2\dot{x}_1(s)e_2 + \cdots + t_n\dot{x}_1(s)e_n + \frac{d}{ds}a(t,s)e_{n+1} + \dot{x}_{n+2}(s)e_{n+2}\right) \\
\frac{d}{ds}a(t,s) &= \frac{1}{2}\left(-\dot{x}_1(s)\sum_{i=2}^{n} t_i^2 + \frac{\dot{x}_1(s)}{cx_1^2(s)} - \frac{2x_{n+2}(s)\dot{x}_{n+2}(s)}{x_1(s)} + \frac{x_{n+2}^2(s)\dot{x}_1(s)}{x_1^2(s)}\right)
\end{aligned}$$

Então, por (3.21)

$$\begin{aligned}
& g_{-1}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s), \overline{N}(t,s)\right) = -\, g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s), \frac{\partial \eta}{\partial s}(t,s)\right) - \\
& -\frac{\ddot{x}_1(s)x_1(s) - \dot{x}_1^2(s)}{cx_1^2(s)}\, g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s), \frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) - \frac{\dot{x}_1(s)}{cx_1(s)}\, g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s), \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s)\right) = \\
& = -\, g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s), \frac{\partial \eta}{\partial s}(t,s)\right) - \frac{\ddot{x}_1(s)x_1(s) - \dot{x}_1^2(s)}{cx_1^2(s)}\, g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s), \frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) - \\
& -\frac{\dot{x}_1(s)}{2cx_1(s)}\, \frac{d}{ds}\, g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s), \frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) = \\
& = -\, g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s), \frac{\partial \eta}{\partial s}(t,s)\right) - \frac{\ddot{x}_1(s)}{cx_1(s)} + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{cx_1^2(s)}
\end{aligned}$$

sendo

$$\begin{aligned}
& g_{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s), \frac{\partial \eta}{\partial s}(t,s)\right) = \\
& = \dot{x}_1(s)\frac{d}{ds}a(t,s) + \dot{x}_1(s)\left(\dot{x}_{n+1}(s) + t_{n+1}\dot{x}_1(s)\right) + +\dot{x}_1^2(s)\left(\sum_{i=2}^{n} t_i^2\right) + \dot{x}_{n+2}^2(s) = \\
& = -\frac{\dot{x}_1^2(s)}{2}\left(\sum_{i=2}^{n} t_i^2\right) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{2cx_1^2(s)} - \frac{x_{n+2}(s)\dot{x}_{n+2}(s)}{x_1(s)}\dot{x}_1(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)x_{n+2}^2(s)}{2x_1^2(s)} - \\
& \quad -\frac{x_{n+2}(s)\dot{x}_{n+2}(s)x_1(s)\dot{x}_1(s)}{x_1^2(s)} - \frac{\dot{x}_1^2(s)}{2cx_1^2(s)} + \frac{\dot{x}_1^2(s)x_{n+2}^2(s)}{2x_1^2(s)} - \\
& \quad -\frac{\dot{x}_1^2(s)}{2}\left(\sum_{i=2}^{n} t_i^2\right) + \dot{x}_1^2(s)\left(\sum_{i=2}^{n} t_i^2\right) + \dot{x}_{n+2}^2(s) = \\
& = \frac{-2x_{n+2}(s)\dot{x}_{n+2}(s)x_1(s)\dot{x}_1(s)}{x_1^2(s)} + \frac{2\dot{x}_1^2(s)x_{n+2}^2(s)}{2x_1^2(s)} + \dot{x}_{n+2}^2(s) =
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x_1^2(s)}\left(-2x_{n+2}(s)\dot{x}_{n+2}(s)x_1(s)\dot{x}_1(s) + \dot{x}_1^2(s)x_{n+2}^2(s) + x_1^2(s)\dot{x}_{n+2}^2(s)\right) =$$

$$= \frac{\left(\dot{x}_1^2(s)x_{n+2}(s) - x_1(s)\dot{x}_{n+2}(s)\right)^2}{x_1^2(s)}$$

Temos, finalmente

$$g_{-1}\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s), \overline{N}(t,s)\right) =$$

$$= -\frac{\left(\dot{x}_1(s)x_{n+2}(s) - x_1(s)\dot{x}_{n+2}(s)\right)^2}{x_1^2(s)} - \frac{\ddot{x}_1(s)}{cx_1(s)} + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{cx_1^2(s)} =$$

$$= \frac{-c\left(\dot{x}_1(s)x_{n+2}(s) - x_1(s)\dot{x}_{n+2}(s)\right)^2 - x_1(s)\ddot{x}_1(s) + \dot{x}_1^2(s)}{cx_1^2(s)}$$

Portanto, por (3.22), temos

$$g_{-1}\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s), N(t,s)\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{-c}\,x_1(s)}{\sqrt{x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}}\,\frac{-c\left(\dot{x}_1(s)x_{n+2}(s) - x_1(s)\dot{x}_{n+2}(s)\right)^2 - x_1(s)\ddot{x}_1(s) + \dot{x}_1^2(s)}{cx_1^2(s)} =$$

$$= \frac{-c\left(\dot{x}_1(s)x_{n+2}(s) - x_1(s)\dot{x}_{n+2}(s)\right)^2 - x_1(s)\ddot{x}_1(s) + \dot{x}_1^2(s)}{x_1(s)\sqrt{-cx_1^2(s) - \dot{x}_1^2(s)}}\,\frac{\sqrt{-c}\sqrt{-c}}{c} =$$

$$= \frac{-c\left(x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}\right) - x_1(s)\ddot{x}_1(s) + \dot{x}_1^2(s)}{-x_1(s)\sqrt{-cx_1^2(s) - \dot{x}_1^2(s)}} =$$

$$= \frac{cx_1^2(s) + x_1(s)\ddot{x}_1(s)}{x_1(s)\sqrt{-cx_1^2(s) - \dot{x}_1^2(s)}}$$

e

$$\mu(t,s) = \mu(s) = \frac{\ddot{x}_1(s) + cx_1(s)}{\sqrt{-cx_1^2(s) - \dot{x}_1^2(s)}}$$

<u>Caso (4)</u> $c > 0$, $\delta = 1$.

Temos

$$f(t,s) = (\varphi_1(t)x_1(s), \ldots, \varphi_n(t)x_1(s), x_{n+1}(s), x_{n+2}(s))$$

Fazendo da mesma maneira que no caso (1), definimos

$$N(t,s) = \sqrt{c}\left(-A(s)(\varphi_1(t)e_1 + \cdots + \varphi_n(t)e_n) + B(s)e_{n+1} + C(s)e_{n+2}\right) \tag{4.20}$$

onde $\{e_1, \ldots, e_{n+2}\}$ é uma base ortonormal do espaço euclidiano $(\mathbb{R}^{n+2}, g_1)$ e para todo $s \in I$

$$\begin{aligned} A(s) &= \dot{x}_{n+2}(s)x_{n+1}(s) - x_{n+2}(s)\dot{x}_{n+1}(s) \\ B(s) &= \dot{x}_{n+2}(s)x_1(s) - x_{n+2}(s)\dot{x}_1(s) \\ C(s) &= \dot{x}_1(s)x_{n+1}(s) - x_1(s)\dot{x}_{n+1}(s) \end{aligned}$$

Por (3.43), (3.44) e (3.45), a norma de $N(t,s)$ é

$$\begin{aligned} g_1(N(t,s),N(t,s)) &= c\left(A^2(s)+B^2(s)+C^2(s)\right) = \\ &= c\left(\frac{1}{c}-x_1^2(s)-\frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}\right)+c\left(x_1^2(s)+\frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}\right)=1 \end{aligned}$$

Temos por (3.40), (3.41) e (4.20)

$$\begin{aligned} g_1(N(t,s),f(t,s)) &= \sqrt{c}(-A(s)x_1(s)+B(s)x_{n+1}(s)+C(s)x_{n+2}(s)) = \\ &= \sqrt{c}(-x_1(s)x_{n+1}(s)\dot{x}_{n+2}(s)+x_1(s)x_{n+2}(s)\dot{x}_{n+1}(s)+ \\ &\quad +x_{n+1}(s)x_1(s)\dot{x}_{n+2}(s)-x_{n+1}(s)x_{n+2}(s)\dot{x}_1(s)+ \\ &\quad +x_{n+2}(s)x_{n+1}(s)\dot{x}_1(s)-x_{n+2}(s)\dot{x}_{n+1}(s)x_1(s))=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1\left(N(t,s),\tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) &= \sqrt{c}(-A(s)\dot{x}_1(s)+B(s)\dot{x}_{n+1}(s)+C(s)\dot{x}_{n+2}(s)) = \\ &= \sqrt{c}(-\dot{x}_1(s)\dot{x}_{n+2}(s)x_{n+1}(s)+\dot{x}_1(s)x_{n+2}(s)\dot{x}_{n+1}(s)+ \\ &\quad +\dot{x}_{n+1}(s)\dot{x}_{n+2}(s)x_1(s)-\dot{x}_{n+1}(s)\dot{x}_1(s)x_{n+2}(s)+ \\ &\quad +\dot{x}_{n+2}(s)\dot{x}_1(s)x_{n+1}(s)-\dot{x}_{n+2}(s)\dot{x}_{n+1}(s)x_1(s))=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_1\left(N(t,s),\tfrac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right) &= \sqrt{c}(-A(s))\,x_1(s)\left(\textstyle\sum_{k=1}^n \frac{\partial\varphi_k}{\partial t_i}(t)\varphi_k(t)\right) = \\ &= -\sqrt{c}A(s)x_1(s)\,\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t_i}\left(\textstyle\sum_{k=1}^n\varphi_k^2(t)\right) = \\ &= 0,\ i=1,\ldots,n-1 \end{aligned}$$

Logo, $N(t,s)$ definido por (4.20) é um campo unitário, tangente a S^{n+1} e normal a $M^n_{c,\delta}$.

De forma análoga ao caso (1), as curvas coordenadas são linhas de curvatura, pois, para $i,j,\ell=1,\ldots,n-1$, $j\neq\ell$

$$\begin{aligned} g_1\left(\mathcal{A}^N\left(\tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right),\tfrac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right) &= \sqrt{c}(-A(s))\,\dot{x}_1(s)\left(\textstyle\sum_{k=1}^n\varphi_k(t)\frac{\partial\varphi_k}{\partial t_i}(t)\right)=0 \\ g_1\left(\mathcal{A}^N(\tfrac{\partial f}{\partial t_\ell}(t,s)),\tfrac{\partial f}{\partial t_j}(t,s)\right) &= \sqrt{c}(-A(s))\,x_1(s)\left(\textstyle\sum_{k=1}^n\varphi_k(t)\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial t_\ell\partial t_j}(t)\right)=0 \end{aligned}$$

e as curvaturas principais, são

$$\begin{aligned} \lambda_i(t,s) &= \frac{g_1\left(N(t,s),\frac{\partial^2 f}{\partial t_i{}^2}(t,s)\right)}{g_1\left(\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s),\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right)} = \frac{\sqrt{c}x_1(s)A(s)}{x_1^2(s)} = \frac{\sqrt{c}A(s)}{x_1(s)} = \\ &= -\frac{\sqrt{c}}{x_1(s)}\sqrt{\frac{1}{c}-x_1^2(s)-\frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}} = \\ &= -\frac{\sqrt{1-cx_1^2(s)-\dot{x}_1^2(s)}}{x_1(s)} = \lambda(s) \end{aligned}$$

por (3.41), (3.42), (4.20), para $i = 1, \ldots, n-1$ e

$$\begin{aligned}
\mu(t,s) &= \frac{g_1\left(N(t,s), \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s)\right)}{g_1\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s), \frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right)} = g_1\left(N(t,s), \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s)\right) = \\
&= \sqrt{c}(-A(s)\ddot{x}_1(s) + B(s)\ddot{x}_{n+1}(s) + C(s)\ddot{x}_{n+2}(s)) = \\
&= \sqrt{c}\Big(-A(s)\ddot{x}_1(s) + \dot{x}_1(s)\dot{A}(s) + \\
&\quad + x_1(s)(\ddot{x}_{n+1}(s)\dot{x}_{n+2}(s) - \dot{x}_{n+1}(s)\ddot{x}_{n+2}(s))\Big) = \\
&= \sqrt{c}\left(-A(s)\ddot{x}_1(s) + \dot{x}_1(s)\dot{A}(s) + x_1(s)\frac{-\dot{x}_1^2(s) + x_1(s)\ddot{x}_1(s) + 1}{\sqrt{\frac{1}{c} - x_1^2(s) - \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}}\right) = \\
&= \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\frac{1}{c} - x_1^2(s) - \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}}\left(\ddot{x}_1(s)\left(\frac{1}{c} - x_1^2(s) - \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}\right) + \right. \\
&\quad \left. + \dot{x}_1^2(s)\left(x_1(s) + \frac{\ddot{x}_1(s)}{c}\right) + x_1(s)\left(1 - \dot{x}_1^2(s) + x_1(s)\ddot{x}_1(s)\right)\right) = \\
&= \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{\frac{1}{c} - x_1^2(s) - \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}}\frac{(cx_1(s) + \ddot{x}_1(s))}{c} = \\
&= \frac{\ddot{x}_1(s) + cx_1(s)}{\sqrt{1 - cx_1^2(s) - \dot{x}_1^2(s)}} = \mu(s)
\end{aligned}$$

por (3.41), (3.42), (3.44), (3.45), (3.46) e (4.20).

Caso (5) $c = 0$, $\delta = 1$.

Temos

$$f(t,s) = (\varphi_1(t)x_1(s), \ldots, \varphi_n(t)x_1(s), x_{n+1}(s), 0)$$

Seja o campo

$$\overline{N}(t,s) = \overline{N}_1(t,s)e_1 + \cdots + \overline{N}_{n+2}(t,s)e_{n+2}, \ \forall (t,s) \in U \times I \subset \mathbb{R}^n$$

onde $\{e_1, \ldots, e_{n+2}\}$ é uma base ortonormal de $(\mathbb{R}^{n+2}, g_1)$ e

$$\overline{N}_i(t,s) = \begin{cases} g_1\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s) \wedge \frac{\partial f}{\partial t_1}(t,s) \wedge \ldots \wedge \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}}(t,s), e_i\right) & , i = 1, \ldots, n+1 \\ 0 & , i = n+2 \end{cases}$$

Assim definido no espaço euclidiano $(\mathbb{R}^{n+2}, g_1)$, o campo $\overline{N}(t,s)$ é tangente ao espaço ambiente $\mathbb{R}^{n+2}$ e normal a $M^n_{c,\delta} \sim \mathbb{R}^{n+1}$.

Com a mesma notação do caso (1), façamos os cálculos análogos

$$\overline{N}_i(t,s) = \begin{vmatrix} \dot{x}_1(s)\varphi_1(t) & \cdots & \dot{x}_1(s)\varphi_i(t) & \cdots & \dot{x}_1(s)\varphi_n(t) & \dot{x}_{n+1}(s) \\ x_1(s)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1}(t) & \cdots & x_1(s)\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_1}(t) & \cdots & x_1(s)\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1}(t) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ x_1(s)\frac{\partial \varphi_1}{\partial t_{n-1}}(t) & \cdots & x_1(s)\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_{n-1}}(t) & \cdots & x_1(s)\frac{\partial \varphi_n}{\partial t_{n-1}}(t) & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{i}\dot{x}_{n+1}(s)(x_1(s))^{n-1}\begin{vmatrix} \widehat{\frac{\partial\varphi_i}{\partial t_1}(t)} \\ \vdots \\ \frac{\partial\varphi_i}{\partial t_{n-1}}(t) \end{vmatrix} = \\
&= -\dot{x}_{n+1}(s)(x_1(s))^{n-1}\varphi_i(t)\begin{vmatrix} \varphi(t) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t) \end{vmatrix}, \; i = 1,\dots,n \\
\overline{N}_{n+1}(t,s) &= \dot{x}_1(s)(x_1(s))^{n-1}\begin{vmatrix} \varphi(t) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t) \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Logo, um campo unitário normal a $M^n_{c,\delta} \sim \mathbb{R}^{n+1}$ é definido como antes por

$$
\begin{aligned}
N(t,s) &= \frac{-1}{\sqrt{g_1(\overline{N}(t,s),\overline{N}(t,s))}}\overline{N}(t,s) = \\
&= \frac{1}{(x_1(s))^{n-1}\begin{vmatrix} \varphi(t) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t) \end{vmatrix}}(x_1(s))^{n-1}\begin{vmatrix} \varphi(t) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}(t) \end{vmatrix}(\dot{x}_{n+1}(s)\textstyle\sum_{i=1}^n\varphi_i(t)e_i - \dot{x}_1(s)e_{n+1}) = \\
&= \overset{+}{-}\dot{x}_{n+1}(s)(\varphi_1(t)e_1 + \cdots + \varphi_n(t)e_n) \overset{-}{+} \dot{x}_1(s)e_{n+1}
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

para $(t,s) \in U \times I \subset \mathbb{R}^n$.

As relações que seguem, mostram que as curvas coordenadas são linhas de curvatura

$$
\begin{aligned}
g_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t_i \partial s}(t,s), N(t,s)\right) &= \dot{x}_1(s)\dot{x}_{n+1}(s)\left(\textstyle\sum_{\ell=1}^n\varphi_\ell(t)\frac{\partial\varphi_\ell}{\partial t_i}(t)\right) = 0 \\
g_1\left(\frac{\partial^2 f}{\partial t_k \partial t_j}(t,s), N(t,s)\right) &= x_1(s)\dot{x}_{n+1}(s)\left(\textstyle\sum_{\ell=1}^n\varphi_\ell(t)\frac{\partial^2\varphi_\ell}{\partial t_k \partial t_j}(t)\right) = 0
\end{aligned}
$$

por (3.48) e (4.21), onde $i,j,k = 1,\dots,n-1$, $k \neq j$ e $\varphi(t) = (\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t))$ é parametrização ortogonal de uma $(n-1)$-esfera unitária.

Então os auto-valores associados as direções principais são

$$
\begin{aligned}
\lambda_i(t,s) &= \frac{g_1\left(N(t,s), \frac{\partial^2 f}{\partial t_i^2}(t,s)\right)}{g_1\left(\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s), \frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right)} = \frac{x_1(s)\dot{x}_{n+1}(s)\left(\sum_{\ell=1}^n\varphi_\ell(t)\frac{\partial^2\varphi_\ell}{\partial t_i^2}(t)\right)}{x_1^2(s)\left(\sum_{\ell=1}^n(\frac{\partial\varphi_\ell}{\partial t_i}(t))^2\right)} = \\
&= \left(\frac{\dot{x}_{n+1}(s)}{x_1(s)}\right)\frac{-\sum_{\ell=1}^n\left(\frac{\partial\varphi_\ell}{\partial t_i}(t)\right)^2}{\sum_{\ell=1}^n\left(\frac{\partial\varphi_\ell}{\partial t_i}(t)\right)^2} = \frac{-\dot{x}_{n+1}(s)}{x_1(s)} = \\
&= \frac{-\sqrt{1-\dot{x}_1^2(s)}}{x_1(s)} = \lambda(s), \; i = 1,\dots,n-1 \\
\mu(t,s) &= \frac{g_1\left(N(t,s), \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s)\right)}{g_1\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s), \frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right)} = \dot{x}_{n+1}(s)\ddot{x}_1(s)\left(\textstyle\sum_{\ell=1}^n\varphi_\ell^2(t)\right) - \dot{x}_1(s)\ddot{x}_{n+1}(s) = \\
&= \sqrt{1-\dot{x}_1^2(s)}\,\ddot{x}_1(s) - \dot{x}_1(s)\frac{d}{ds}\sqrt{1-\dot{x}_1^2(s)} = \\
&= \frac{\ddot{x}_1(s)}{\sqrt{1-\dot{x}_1^2(s)}} = \mu(s)
\end{aligned}
$$

onde usamos (3.48), (3.49) e (4.21).

□

Corolário 4.1.2 *As primeira e segunda formas fundamentais de $M^n_{c,\delta}$ são dadas por*

$$I = ds^2 + x_1^2(s)\sum_{i=1}^{n-1}\epsilon_i(t)dt_i^2 \tag{4.22}$$

$$II = \mu(s)ds^2 + \lambda(s)x_1^2(s)\sum_{i=1}^{n-1}\epsilon_i(t)dt_i^2 \tag{4.23}$$

onde

$$\epsilon_i(t) = \begin{cases} \sum_{\ell=1}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_\ell}{\partial t_i}(t)\right)^2 & , se\ \delta = 1 \\ -\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t_i}(t)\right)^2 + \sum_{\ell=2}^{n}\left(\frac{\partial\varphi_\ell}{\partial t_i}(t)\right)^2 & , se\ \delta = -1 \\ 1 & , se\ \delta = 0 \end{cases}$$

para $i = 1,\ldots,n-1$. (Observamos que no caso $\delta = 0$ fizemos em (3.19) a mudança $f(\bar{t}_2,\ldots,\bar{t}_n,s) = f(t,s)$, onde $\bar{t}_j = t_{j-1}$, $j = 2,\ldots,n$).

Demonstração. Tomemos $p \in M^n_{c,\delta}$ e $v = \sum_{i=1}^{n-1} v_i\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s) + v_0\frac{\partial f}{\partial s}(t,s) \in T_pM^n_{c,\delta}$.
Por definição

$$I_p(v) = g_c(v,v)$$

e

$$II_p^N(v) = g_c(\mathcal{A}^N{}_p(v),v)$$

onde $g_c = g_{-1}$ se $c < 0$ e $g_c = g_1$ se $c \geq 0$.
Logo,

$$\begin{aligned} I_p(v) &= \sum_{i,j=1}^{n-1} v_i v_j\, g_c\left(\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s),\frac{\partial f}{\partial t_j}(t,s)\right) + 2v_0\sum_{i=1}^{n-1} v_i\, g_c\left(\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s),\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) + \\ &\quad + v_0^2\, g_c\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s),\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) = x_1^2(s)\sum_{i=1}^{n-1} v_i^2\epsilon_i(t) + v_0^2 = \\ &= x_1^2(s)\sum_{i=1}^{n-1}\epsilon_i(t)dt_i^2(v) + ds^2(v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} II_p(v) &= g_c(\mathcal{A}^N{}_p(v),v) = \sum_{i,j=1}^{n-1} v_i v_j\, g_c\left(\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s),\mathcal{A}^N{}_p\left(\frac{\partial f}{\partial t_j}(t,s)\right)\right) + \\ &\quad + v_0\sum_{j=1}^{n-1} v_j\, g_c\left(\mathcal{A}^N{}_p\left(\frac{\partial f}{\partial t_j}(t,s)\right),\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) + \\ &\quad + v_0\sum_{i=1}^{n-1} v_i\, g_c\left(\mathcal{A}^N{}_p\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right),\frac{\partial f}{\partial t_i}(t,s)\right) + \\ &\quad + v_0^2\, g_c\left(\mathcal{A}^N{}_p\left(\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right),\frac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(v_i^2 x_1^2(s)\lambda(s)\epsilon_i(t)\right) + v_0^2\mu(s) = \\ &= \mu(s)ds^2(v) + x_1^2(s)\lambda(s)\sum_{i=1}^{n-1}\epsilon_i(t)dt_i^2(v) \end{aligned}$$

onde usamos (3.10), (3.16), (3.21), (3.42), (3.48), (4.1) e (4.2).

□

Observação 4.1.3 *Poderíamos questionar se μ está bem definido em pontos onde $\lambda = 0$. Para verificarmos que este é o caso, consideremos, por exemplo, a hipersuperfície de rotação esférica ($\delta = 1$) de $\mathcal{H}^{n+1}(c)$.*

De (3.27) obtemos que

$$\begin{aligned}
\ddot{\phi}(s) &= \\
&= \frac{\dot{x}_1(s)x_1(s) + \frac{\ddot{x}_1(s)}{c}}{\left(x_1^2(s) - \frac{1}{c}\right)\sqrt{-\frac{1}{c} + x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}} + \frac{\sqrt{-\frac{1}{c} + x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c}}}{\left(x_1^2(s) - \frac{1}{c}\right)^2} 2x_1(s)\dot{x}_1(s) = \\
&= \frac{\dot{x}_1(s)}{x_1^2(s) - \frac{1}{c}}\mu(s) - \frac{2x_1^2(s)\dot{x}_1(s)\sqrt{-c}}{\left(x_1^2(s) - \frac{1}{c}\right)^2}\lambda(s)
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\lambda(s_0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad g_{-1}\left(N(t, s_0), \frac{\partial^2 f}{\partial t_1^2}(t, s_0)\right) = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad A(s_0) = 0 \Rightarrow \dot{\phi}(s_0) = 0 \Rightarrow -\dot{x}_{n+1}^2(s_0) + \dot{x}_{n+2}^2(s_0) = 1 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \quad \dot{x}_1^2(s_0) = 1 - \dot{x}_{n+1}^2(s_0) + \dot{x}_{n+2}^2(s_0) = 2 \Rightarrow \dot{x}_1(s_0) \neq 0
\end{aligned}$$

Então,

$$\ddot{\phi}(s_0) = \frac{\dot{x}_1(s_0)}{x_1^2(s_0) - 1/c}\mu(s_0)$$

e $\mu(s)$ está bem definida por (4.2).

Da mesma forma se verifica para os outros casos.

4.2 Hipersuperfícies de rotação com curvatura média constante.

Consideremos, agora, uma hipersuperfície de rotação $M_{c,\delta}^n$ com uma dada curvatura média $H(t_1, \ldots, t_{n-1}, s)$.

Observemos que, pela proposição (4.1.1) $H(t_1, \ldots, t_{n-1}, s) = H(s)$ com

$$\begin{aligned}
H(s) &= \frac{1}{n}((n-1)\lambda(s) + \mu(s)) \Rightarrow \\
nH(s) &= \frac{-(n-1)\left(\delta - cx_1^2(s) - \dot{x}_1^2(s)\right) + x_1(s)\ddot{x}_1(s) + cx_1^2(s)}{x_1(s)\sqrt{\delta - cx_1^2(s) - \dot{x}_1^2(s)}} \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$x_1(s)\ddot{x}_1(s) + (n-1)\dot{x}_1^2(s) + ncx_1^2(s) - \delta(n-1) = nH(s)x_1(s)\sqrt{\delta - cx_1^2(s) - \dot{x}_1^2(s)} \quad (4.24)$$

que é uma equação diferencial satisfeita por $M_{c,\delta}^n$.

Se a curvatura média H de $M_{c,\delta}^n$ é constante, então a proposição seguinte fornece uma integral primeira de (4.24).

Proposição 4.2.1 *Se H é constante, então uma integral primeira de (4.24) é dada por*

$$\dot{x}_1^2(s) = \delta - cx_1^2(s) - \left(Hx_1(s) - \frac{a}{(x_1(s))^{n-1}}\right)^2 \tag{4.25}$$

onde a é uma constante não-negativa.

Demonstração. Seja $y(s) = \sqrt{\delta - cx_1^2(s) - \dot{x}_1^2(s)}$.
Temos por (4.24)

$$\begin{aligned}
\dot{y}(s) &= \frac{1}{2}\left(\delta - cx_1^2(s) - \dot{x}_1^2(s)\right)^{-1/2}(-2cx_1(s)\dot{x}_1(s) - 2\dot{x}_1(s)\ddot{x}_1(s)) = \\
&= -\dot{x}_1(s)\left(x_1(s)c + \ddot{x}_1(s)\right) \Rightarrow \\
\Rightarrow y(s)\dot{y}(s) &= -\dot{x}_1(s)\left(cx_1(s) + \ddot{x}_1(s)\right) = \\
&= -\dot{x}_1(s)\left(cx_1(s) - (n-1)\frac{\dot{x}_1^2(s)}{x_1(s)} - ncx_1(s) + \frac{\delta(n-1)}{x_1(s)} + nHy(s)\right) \Rightarrow \\
\Rightarrow \dot{y}(s) &= \frac{-\dot{x}_1(s)}{x_1(s)}\left(c\frac{x_1^2(s)}{y(s)} - (n-1)\frac{\dot{x}_1^2(s)}{y(s)} - \frac{ncx_1^2(s)}{y(s)} + \frac{\delta(n-1)}{y(s)} + nHx_1(s)\right) = \\
&= \frac{-\dot{x}_1(s)}{x_1(s)}\left(\frac{1}{y(s)}(n-1)\left(-\dot{x}_1^2(s) + \delta - cx_1^2(s)\right) + nHx_1(s)\right) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\dot{y}(s) = \frac{-\dot{x}_1(s)}{x_1(s)}\left((n-1)y(s) + nHx_1(s)\right) \tag{4.26}$$

Seja $f(s) = y(s) + Hx_1(s)$, $s \in I$.
Como H é constante, (4.26) implica que

$$\begin{aligned}
\dot{f}(s)x_1(s) &= \left(\dot{y}(s) + H\dot{x}_1(s)\right)x_1(s) = \\
&= \frac{-\dot{x}_1(s)}{x_1(s)}\left((n-1)y(s) + nHx_1(s)\right)x_1(s) + H\dot{x}_1(s)x_1(s) = \\
&= -\dot{x}_1(s)nHx_1(s) - \dot{x}_1(s)(n-1)y(s) + H\dot{x}_1(s)x_1(s) = \\
&= -\dot{x}_1(s)(nHx_1(s) + (n-1)y(s) - Hx_1(s)) = \\
&= -\dot{x}_1(s)\left((n-1)Hx_1(s) + y(s)\right) = \\
&= -\dot{x}_1(s)(n-1)f(s)
\end{aligned}$$

Então, supondo $f(s) \neq 0$ para algum s

$$\begin{aligned}
& \frac{\dot{f}(s)}{f(s)} = \frac{-\dot{x}_1(s)}{x_1(s)}(n-1) && \Rightarrow \\
\Rightarrow\ & \frac{d}{ds}\ln f(s) = -(n-1)\frac{d}{ds}\ln x_1(s) && \Rightarrow \\
\Rightarrow\ & \ln f(s) = -(n-1)\ln x_1(s) + k && \Rightarrow \\
\Rightarrow\ & f(s) = e^{-(n-1)\ln x_1(s)}e^k && \Rightarrow \\
\Rightarrow\ & f(s) = e^k\frac{1}{e^{\ln(x_1(s))^{n-1}}} = e^k\frac{1}{(x_1(s))^{n-1}}
\end{aligned}$$

Logo

$$f(s) = \frac{a}{(x_1(s))^{n-1}}, \text{ com } a \text{ uma constante não-negativa}$$

Portanto

$$\begin{aligned} y(s) &= f(s) - Hx_1(s) = \frac{a}{(x_1(s))^{n-1}} - Hx_1(s) \Rightarrow \\ \Rightarrow y^2(s) &= \left(\frac{a}{(x_1(s))^{n-1}} - Hx_1(s)\right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \delta - cx_1^2(s) - \dot{x}_1^2(s) &= \left(\frac{a}{(x_1(s))^{n-1}} - Hx_1(s)\right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \dot{x}_1^2(s) &= \delta - cx_1^2(s) - \left(\frac{a}{(x_1(s))^{n-1}} - Hx_1(s)\right)^2 \end{aligned}$$

□

Usaremos (4.24) para provar o seguinte fato

Teorema 4.2.2 *A menos de isometrias de $\mathcal{H}^{n+1}(c)$, existe uma única hipersuperfície de rotação parabólica completa com uma dada curvatura média constante H. Tal hipersuperfície é simplesmente conexa e se $H \equiv 0$, ela é mergulhada.*

Demonstração. Ponhamos $\delta = 0$ em (4.24)

$$x_1(s)\ddot{x}_1(s) + (n-1)\dot{x}_1^2(s) + ncx_1^2(s) = nH(s)x_1(s)\sqrt{-cx_1^2(s) - \dot{x}_1^2(s)}$$

Pela proposição (4.2.1), sendo H constante, temos

(1) $\dot{x}_1^2(s) = -cx_1^2(s) - \left(Hx_1(s) - \frac{a}{(x_1(s))^{n-1}}\right)^2$

onde a é uma constante não-negativa.

Suponhamos $a \neq 0$.

Façamos em (1) a substituição

$$x_1^n(s) = az(s),\ s \in I$$

sendo n inteiro positivo.

Como em (3.4), escolhemos $x_1(s) > 0$, $s \in I$, devemos ter também $z(s) > 0$, $\forall s \in I$, para todo inteiro positivo n.

Derivando (1),

$$\begin{aligned} nx_1^{n-1}(s)\dot{x}_1(s) &= a\dot{z}(s) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad (x_1(s))^{n-1}\dot{x}_1(s) &= \tfrac{a}{n}\dot{z}(s) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad (x_1(s))^{2n-2}\dot{x}_1^2(s) &= \tfrac{a^2}{n^2}\dot{z}^2(s) \end{aligned}$$

Por outro lado, por (1)

$$\begin{aligned}
(x_1(s))^{2n-2}\dot{x}_1^2(s) &= -c(x_1(s))^{2n} - \left(Hx_1(s) - \frac{a}{(x_1(s))^{n-1}}\right)^2 (x_1(s))^{2n-2} = \\
&= -c(x_1(s))^{2n} - (Hx_1^n(s) - a)^2 = \\
&= -ca^2z^2(s) - (Haz(s) - a)^2 = \frac{a^2\dot{z}^2(s)}{n^2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \dot{z}^2(s) = n^2\left(-cz^2(s) - (Hz(s) - 1)^2\right) = \\
&= n^2\left(-cz^2(s) - H^2z^2(s) + 2Hz(s) - 1\right) \Rightarrow
\end{aligned}$$

(2) $\dot{z}^2(s) = n^2(-(c + H^2)z^2(s) + 2Hz(s) - 1)$

expressão que não depende de a.

Sejam $x_1(s, a)$ e $z(s)$ soluções gerais de (1) e (2), respectivamente, que vamos supor, sem perda de generalidade, definidas para $s \in I$. Para todo a positivo, temos

$$x_1^n(s, a) = az(s) = a\left((z(s))^{1/n}\right)^n \Rightarrow x_1(s, a) = a^{1/n}(z(s))^{1/n},\ s \in I$$

Substituindo esta expressão e tomando $\delta = 0$ em (4.1) e (4.2) vem

$$\begin{aligned}
\lambda(s) &= \frac{-\sqrt{-ca^{2/n}z^{2/n}(s) - \frac{a^{2/n}}{n^2}(z(s))^{\frac{2n-2}{n}}\dot{z}(s)}}{a^{1/n}z^{1/n}(s)} = \frac{-\sqrt{-cz^{2/n}(s) - \frac{(z(s))^{\frac{2n-2}{n}}\dot{z}(s)}{n^2}}}{z^{1/n}(s)} \\
\mu(s) &= \frac{\frac{a^{1/n}}{n}\left(\frac{1-n}{n}(z(s))^{\frac{1-2n}{n}}\dot{z}^2(s) + (z(s))^{\frac{1-n}{n}}\ddot{z}(s)\right) + ca^{1/n}z^{1/n}(s)}{\sqrt{-ca^{2/n}z^{2/n}(s) - \frac{a^{2/n}}{n^2}(z(s))^{\frac{2n-2}{n}}\dot{z}(s)}} = \\
&= \frac{\frac{1-n}{n^2}(z(s))^{\frac{1-2n}{n}}\dot{z}^2(s) + \frac{1}{n}(z(s))^{\frac{1-n}{n}}\ddot{z}(s) + cz^{1/n}(s)}{\sqrt{-cz^{2/n}(s) - \frac{1}{n^2}(z(s))^{\frac{2n-2}{n}}\dot{z}(s)}}
\end{aligned}$$

expressões que não dependem de a.

Nesse caso, as formas fundamentais (4.22) e (4.23)

$$\begin{aligned}
I &= ds^2 + a^{2/n}(z(s))^{2/n}\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} dt_i^2 \\
II &= \mu(s)ds^2 + \lambda(s)a^{2/n}(z(s))^{2/n}\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} dt_i^2
\end{aligned}$$

com a mudança de variáveis $\bar{t}_i = a^{1/n}t_i$, $i = 1, \ldots, n-1$ e $(d\bar{t}_i)^2 = a^{2/n}(dt_i)^2$, nos dão

(3)

$$\begin{aligned}
I(a, s, \bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_{n-1}) &= ds^2 + (z(s))^{2/n}\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} d\bar{t}_i^2 \\
II(a, s, \bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_{n-1}) &= \mu(s)ds^2 + \lambda(s)(z(s))^{2/n}\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} d\bar{t}_i^2
\end{aligned}$$

para todo a positivo, ou seja, as expressões das primeira e segunda formas fundamentais nos parâmetros $(s, \bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_{n-1})$ não dependem de a.

Observemos que no caso $a = 0$, (1) fica na forma

$$\dot{x}_1^2(s) = -cx_1^2(s) - H^2x_1^2(s) = -(c + H^2)x_1^2(s)$$

daí

$$\begin{aligned} I &= ds^2 + x_1^2(s)\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} dt_i^2 \\ II &= \mu(s)ds^2 + \lambda(s)x_1^2(s)\textstyle\sum_{i=1}^{n-1} dt_i^2 \end{aligned}$$

Como uma hipersuperfície simplesmente conexa de $\mathcal{H}^{n+1}(c)$ é determinada, a menos de isometrias de $\mathcal{H}^{n+1}(c)$, pelas duas formas fundamentais (3), isto prova a existência e unicidade da hipersuperfície de rotação parabólica $M^n_{c,\delta}$ de $\mathcal{H}^{n+1}(c)$, com curvatura média constante H.

Para provar que $M^n_{c,\delta}$ é completa, mostremos que se $\gamma(I)$ é fechado em $\mathcal{H}^{n+1}(c)$, $M^n_{c,\delta}$ também o é.

Seja $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de $M^n_{c,\delta}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} p_k = p \in \mathcal{H}^{n+1}(c)$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$, se escrevermos numa base de L^{n+2}, nas condições de (1.8)

$$p_k = (p_{k_1}, \ldots, p_{k_{n+2}}) \text{ e } p = (p_1, \ldots, p_{n+2})$$

então existem $s_k \in I$, $t_{k_i} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n-1$, tais que, por (3.19)

$$\begin{aligned} p_{k_1} &= x_1(s_k) \\ p_{k_2} &= t_{k_1}x_1(s_k) \\ &\vdots \\ p_{k_n} &= t_{k_{n-1}}x_1(s_k) \\ p_{k_{n+1}} &= \frac{-((t_{k_1})^2 + \cdots + (t_{k_{n-1}})^2)}{2}x_1(s_k) + x_{n+1}(s_k) \\ p_{k_{n+2}} &= x_{n+2}(s_k) \end{aligned}$$

e

$$\lim_{k\to\infty} p_{k_i} = p_i,\ i = 1, \ldots, n+2$$

Segue então, em particular, que

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} x_1(s_k) &= \lim_{k\to\infty} p_{k_1} = p_1 \\ \lim_{k\to\infty} x_{n+1}(s_k) &= \lim_{k\to\infty}\left(p_{k_{n+1}} + x_1(s_k)\frac{(t_{k_1})^2 + \cdots + (t_{k_{n-1}})^2}{2}\right) = \\ &= p_{n+1} + \frac{p_1}{2}\left(\frac{p_2^2}{p_1^2} + \cdots + \frac{p_n^2}{p_1^2}\right) = p_{n+1} + \frac{\sum_{i=2}^n p_i^2}{2p_1} \\ \lim_{k\to\infty} x_{n+2}(s_k) &= \lim_{k\to\infty} p_{k_{n+2}} = p_{n+2} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\gamma(s_k) &= \lim_{k\to\infty}(x_1(s_k),0,\ldots,0,x_{n+1}(s_k),x_{n+2}(s_k)) = \\ &= \left(p_1,0,\ldots,0,p_{n+1}+\frac{\sum_{i=2}^n p_i^2}{2p_1},p_{n+2}\right)\in\mathcal{H}^{n+1}(c)\end{aligned}$$

Mas, por hipótese $\gamma(I)$ é fechado, logo existe $s\in I$ tal que

$$\lim_{k\to\infty}\gamma(s_k)=\gamma(s)$$

ou seja,

$$\begin{aligned}p_1 &= x_1(s)\\ p_{n+1}+\frac{p_2^2+\cdots+p_n^2}{2p_1} &= x_{n+1}(s)\\ p_{n+2} &= x_{n+2}(s)\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}p &= (p_1,p_2,\ldots,p_n,p_{n+1},p_{n+2}) = f\left(\frac{p_2}{p_1},\ldots,\frac{p_n}{p_1},s\right) = f(t,s)\in M^n_{c,\delta}\\ t &= \left(\frac{p_2}{p_1},\ldots,\frac{p_n}{p_1}\right)\in I\!R^{n-1}\end{aligned}$$

Assim, $M^n_{c,\delta}$ é um subespaço fechado do espaço métrico completo $\mathcal{H}^{n+1}(c)$ e portanto também é um espaço métrico completo com a métrica induzida de $\mathcal{H}^{n+1}(c)$.

Para provar a segunda parte, vamos substituir $H\equiv 0$ em (2),

$$\begin{aligned}\dot z^2(s) = n^2\left(-(c+0)z^2(s)+0z(s)-1\right) &\Rightarrow\\ \Rightarrow\left(\frac{\dot z(s)}{n}\right)^2 = \left(\sqrt{-c}\,z(s)\right)^2-1 &\Rightarrow\\ \Rightarrow\left(\sqrt{-c}\,z(s)\right)^2-\left(\frac{\dot z(s)}{n}\right)^2 &= 1\end{aligned}$$

Procuremos uma solução do tipo

$$\sqrt{-c}\,z(s)=k_1\cosh(k_2s)$$

onde k_1 e k_2 são constantes reais.

Pela existência e unicidade da primeira parte, basta tomar uma solução particular de (2)

$$\begin{aligned}\dot z^2(s) &= \left(\frac{k_1}{\sqrt{-c}}\right)^2k_2^2\sinh^2(k_2s) = \frac{k_1^2k_2^2}{-c}\left(\cosh^2(k_2s)-1\right)\\ n^2\left(-cz^2(s)-1\right) &= n^2\left(k_1^2\cosh^2(k_2s)-1\right)\end{aligned}$$

o que nos dá para todo $s \in I\!R$

$$\frac{k_1^2 k_2^2}{-c}\left(\cosh^2(k_2 s) - 1\right) = n^2\left(k_1^2 \cosh^2(k_2 s) - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{k_1^2 k_2^2}{-c} = n^2 k_1^2 \\ \frac{-k_1^2 k_2^2}{-c} = -n^2 \Rightarrow \frac{k_1^2 k_2^2}{-c} = n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1^2 = 1 \\ k_2^2 = -cn^2 \end{cases}$$

Então vamos escolher $k_1 = 1$ e $k_2 = \sqrt{-c}\, n$.
Nesse caso

$$z(s) = \frac{1}{\sqrt{-c}} \cosh\left(\sqrt{-c}\, ns\right) \Rightarrow x_1^n(s) = \frac{a}{\sqrt{-c}} \cosh\left(n\sqrt{-c}\, s\right) \Rightarrow$$

(4) $x_1(s) = \left(\frac{a}{\sqrt{-c}}\right)^{1/n} \cosh^{1/n}\left(n\sqrt{-c}\, s\right)$, $s \in I\!R$

Observemos que $x_1(s)$ é função ilimitada, logo pela definição dada em (3.19)

(5) $f(t,s)$ é função ilimitada.

Derivando (4), temos

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(s) &= \left(\frac{a}{\sqrt{-c}}\right)^{1/n} \frac{n\sqrt{-c}}{n} \cosh^{\frac{1-n}{n}}\left(n\sqrt{-c}\, s\right) \sinh\left(n\sqrt{-c}\, s\right) = \\ &= \left(\frac{a}{\sqrt{-c}}\right)^{1/n} \sqrt{-c}\, \frac{\sinh\left(n\sqrt{-c}\, s\right)}{\cosh^{\frac{1-n}{n}}\left(n\sqrt{-c}\, s\right)}, \; s \in I\!R \end{aligned}$$

e

$$\dot{x}_1(s) = 0 \Longleftrightarrow s = 0$$

Então $x_1(s)$ é estritamente monótona em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$ e, portanto

$$\left.\begin{array}{lll} s_1, s_2 \in]-\infty, 0[& \Rightarrow & x_1(s_1) \neq x_1(s_2) \\ s_1, s_2 \in]0, +\infty[& \Rightarrow & x_1(s_1) \neq x_1(s_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

(6) $f(s_1, t) \neq f(s_2, \bar{t})$, $\forall t, \bar{t} \in I\!R^{n-1}$

Temos

$$x_1(s_1) = x_1(s_2) \Leftrightarrow \cosh\left(n\sqrt{-c}\, s_1\right) = \cosh\left(n\sqrt{-c}\, s_2\right) \Leftrightarrow s_1 = \pm s_2$$

Suponhamos que existe $s_0 \neq 0$ tal que $x_{n+2}(s_0) = x_{n+2}(-s_0)$.
Logo, o conjunto

$$D = \{s \in I\!R,\, s > 0 : x_{n+2}(s) = x_{n+2}(-s)\}$$

é não-vazio.

Substituindo (4) no segundo membro de (3.22), temos

$$
\begin{aligned}
&(\dot{x}_1(s)x_{n+2}(s) - x_1(s)\dot{x}_{n+2}(s))^2 = \\
= &\left(\frac{a}{\sqrt{-c}}\right)^{2/n} \cosh^{2/n}\left(n\sqrt{-c}\,s\right) - \left(\frac{a}{\sqrt{-c}}\right)^{2/n} \frac{\sinh^2\left(n\sqrt{-c}\,s\right)}{\cosh^{\frac{2n-2}{n}}\left(n\sqrt{-c}\,s\right)} = \\
= &\left(\frac{a}{\sqrt{-c}}\right)^{2/n} \cosh^{2/n}\left(n\sqrt{-c}\,s\right)\left(1 - \frac{\sinh^2\left(n\sqrt{-c}\,s\right)}{\cosh^2\left(n\sqrt{-c}\,s\right)}\right) \Rightarrow \\
\Rightarrow\ &\dot{x}_{n+2}(s)x_1(s) - \dot{x}_1(s)x_{n+2}(s) = \left(\frac{a}{\sqrt{-c}}\right)^{1/n} \cosh^{1/n}(n\sqrt{-c}\,s)\frac{1}{\cosh\left(n\sqrt{-c}\,s\right)} \Rightarrow \\
\Rightarrow\ &\dot{x}_{n+2}(s)\left(\frac{a}{\sqrt{-c}}\right)^{1/n} \cosh^{1/n}\left(n\sqrt{-c}\,s\right) - \left(\frac{a}{\sqrt{-c}}\right)^{1/n} \sqrt{-c}\frac{\sinh\left(n\sqrt{-c}\,s\right)}{\cosh^{\frac{n-1}{n}}\left(n\sqrt{-c}\,s\right)} x_{n+2}(s) = \\
= &\left(\frac{a}{\sqrt{-c}}\right)^{1/n} \cosh^{\frac{1-n}{n}}\left(n\sqrt{-c}\,s\right) \Rightarrow
\end{aligned}
$$

(7) $\dot{x}_{n+2}(s)\cosh\left(n\sqrt{-c}\,s\right) - \sqrt{-c}\,\sinh\left(n\sqrt{-c}\,s\right) x_{n+2}(s) = 1$

Consideremos a solução de (7) tal que $x_{n+2}(0) = 0$.
Nesse caso a função $x_{n+2}(s)$ é ímpar, como verificaremos a seguir.
Temos

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_{n+2}(s)\cosh\left(n\sqrt{-c}\,s\right) - \sqrt{-c}\,\sinh\left(n\sqrt{-c}\,s\right) x_{n+2}(s) &= 1 \\
\dot{x}_{n+2}(-s)\cosh\left(n\sqrt{-c}\,s\right) - \sqrt{-c}\,\sinh\left(n\sqrt{-c}\,s\right) x_{n+2}(-s) &= 1
\end{aligned}
$$

para todo $s \in \mathbb{R}$.

Subtraindo-se a primeira da segunda equação, obtemos

$$
\begin{aligned}
0 &= (\dot{x}_{n+2}(-s) - \dot{x}_{n+2}(s))\cosh\left(n\sqrt{-c}\,s\right) + \\
&\quad +(x_{n+2}(-s) + x_{n+2}(s))\sqrt{-c}\,\sinh\left(n\sqrt{-c}\,s\right) \Rightarrow \\
\Rightarrow 0 &= -\frac{d}{ds}(x_{n+2}(-s) + x_{n+2}(s))\cosh\left(n\sqrt{-c}\,s\right) + \\
&\quad +(x_{n+2}(-s) + x_{n+2}(s))\sqrt{-c}\sinh\left(n\sqrt{-c}\,s\right)
\end{aligned}
$$

para todo $s \in \mathbb{R}$.

Suponha que existe $s_1 \in \mathbb{R}$, $s_1 \neq 0$ tal que $x_{n+2}(-s_1) + x_{n+2}(s_1) \neq 0$, então numa vizinhança de s_1 podemos escrever

$$
\frac{\frac{d}{ds}(x_{n+2}(-s) + x_{n+2}(s))}{x_{n+2}(-s) + x_{n+2}(s)} = \frac{\sqrt{-c}\,\sinh\left(n\sqrt{-c}\,s\right)}{\cosh\left(n\sqrt{-c}\,s\right)}
$$

Integrando

$$
\begin{aligned}
\ln|x_{n+2}(-s) + x_{n+2}(s)| &= \frac{1}{n}\ln\left(\cosh\left(n\sqrt{-c}\,s\right)\right) + k \Rightarrow \\
\Rightarrow |x_{n+2}(-s) + x_{n+2}(s)| &= e^k \cosh^{1/n}\left(n\sqrt{-c}\,s\right) > 0
\end{aligned}
$$

para todo $s \in I\!R$, sendo k uma constante real.

Mas isto é absurdo, já que

$$|x_{n+2}(-0) + x_{n+2}(0)| = 2|x_{n+2}(0)| = 0$$

Portanto

$$x_{n+2}(-s) + x_{n+2}(s) = 0, \ \forall s \in I\!R$$

E o conjunto

$$D = \{s \in I\!R^* : x_{n+2}(s) = 0\}$$

é não-vazio, e além disso, por (7),

$$x_{n+2}(0) = 0 \Rightarrow \dot{x}_{n+2}(0) = 1$$

Como $\dot{x}_{n+2}(s) = \frac{d}{ds}\left(x_1(s)\int_0^s \frac{\sqrt{x_1^2(\sigma)+\frac{\dot{x}_1^2(\sigma)}{c}}}{x_1^2(\sigma)}d\sigma\right)$ é uma função contínua em $I\!R$, segue que existe $\delta > 0$ tal que $\dot{x}_{n+2}(s) > 0$ para $-\delta < s < \delta$ e $x_{n+2}(s)$ é estritamente crescente em $[-\delta, \delta]$, donde

(8) $x_{n+2}(\delta) > x_{n+2}(0) = 0$

Sendo D não-vazio e limitado inferiormente, existe $\bar{s} = \inf D$, que por (8) é tal que $\bar{s} \geq \delta$. Como $\bar{s} = \inf D$, existe uma sequência $(s_m)_{m \in I\!N}$ tal que $s_m \in D$ e $\lim_{m \to +\infty} s_m = \bar{s}$. Sendo $x_{n+2}(s)$ contínua em $I\!R$, por (7) segue que

$$\begin{aligned} x_{n+2}(\bar{s}) &= \lim_{m \to +\infty} x_{n+2}(s_m) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \dot{x}_{n+2}(\bar{s}) = \frac{1}{\cosh\left(n\sqrt{-c}\,\bar{s}\right)} > 0 \end{aligned}$$

Portanto, como $\bar{s} > 0$ e $x_{n+2}(\bar{s}) = 0$, $\bar{s}$ é mínimo de D e $x_{n+2}(s) \neq 0$, $0 < s < \bar{s}$. Novamente por $\dot{x}_{n+2}(s)$ ser contínua em $I\!R$ e $\dot{x}_{n+2}(\bar{s}) > 0$, existe $\bar{\delta} > 0$ tal que

(9) $x_{n+2}(\bar{s} - \bar{\delta}) < x_{n+2}(\bar{s}) = 0$

De (8) e (9), observando que $x_{n+2}(s)$ é contínua e derivável em $I\!R$, segue que existe $\tilde{s}$ entre δ e $(\bar{s} - \bar{\delta})$ tal que $x_{n+2}(\tilde{s}) = 0$, o que é absurdo, pois, contradiz o fato de que $x_{n+2}(s) \neq 0$ para $0 < s < \bar{s}$.

Portanto D é vazio e $x_{n+2}(s) \neq x_{n+2}(-s)$, $\forall s \in I\!R$.

Então, concluímos que

(10) $f(s,t) \neq f(-s,\bar{t})$, para todo $s, t, \bar{t}$ reais.

Por (5), (6) e (10) segue que $M^n_{c,\delta}$ não possui auto-intersecção, $f(t,s)$ é ilimitada em $I\!R^{n-1} \times I$ e $M^n_{c,\delta}$ é completa, donde concluímos que a inclusão $\iota : M^n_{c,\delta} \to \mathcal{H}^{n+1}(c)$ é uma aplicação aberta e portanto $M^n_{c,\delta}$ é uma subvariedade mergulhada em $\mathcal{H}^{n+1}(c)$.

□

4.3 Equação das hipersuperfícies mínimas de rotação.

Nesta seção vamos mostrar que em analogia com a situação do $I\!R^3$, onde helicóides são conjugados a catenóides, é natural esperar-se que exista uma família a um parâmetro $\lambda > 0$, de superfícies mínimas geodesicamente-regradas em $\mathcal{H}^3(-1)$, tal que cada superfície é conjugada, no sentido da proposição (2.7.1), a uma superfície de rotação mínima $M_\lambda \subset \mathcal{H}^3(-1)$.

Comecemos analisando o caso em que $H \equiv 0$, $c = 0$ e $n = 2$. Da equação (4.24) temos

$$\begin{aligned}
&x_1(s)\ddot{x}_1(s) + \dot{x}_1^2(s) - 1 = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{d}{ds}x_1(s)\dot{x}_1(s) = 1 \Rightarrow x_1(s)\dot{x}_1(s) = s + k_1, \quad k_1 \text{ constante real } \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{d}{ds}x_1^2(s) = 2s + 2k_1 \Rightarrow x_1^2(s) = s^2 + 2k_1 s + k_2, \quad k_2 \text{ constante real } \Rightarrow \\
&\Rightarrow x_1(s) = \sqrt{s^2 + 2k_1 s + k_2}, \quad s \in J
\end{aligned}$$

onde $J = \{s \in I\!R : s^2 + 2k_1 s + k_2 > 0\}$.

Temos, por (3.49), que $1 - \dot{x}_1^2(s) > 0$, $s \in J$. Então,

$$\begin{aligned}
1 - \dot{x}_1^2(s) &= 1 - \left(\frac{s + k_1}{\sqrt{s^2 + 2k_1 s + k_2}}\right)^2 = \frac{s^2 + 2k_1 s + k_2 - (s + k_1)^2}{s^2 + 2k_1 s + k_2} = \\
&= \frac{k_2 - k_1^2}{s^2 + 2k_1 s + k_2} > 0, \; s \in J \Rightarrow \\
&\Rightarrow k_1^2 - k_2 < 0 \Rightarrow s^2 + 2k_1 s + k_2 > 0, \; \forall s \in I\!R \Rightarrow J = I\!R
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $\bar{s} = s + k_1$,

$$x_1(\bar{s}) = \sqrt{\bar{s}^2 + k_2 - k_1^2} = \sqrt{\bar{s}^2 + k^2} \tag{4.27}$$

onde k é uma constante não-nula.

Então, uma solução de (4.24) é $x_1(s) = \sqrt{1 + s^2}$, $s \in I\!R$. Neste caso, a curva γ é uma catenária parametrizada pelo comprimento de arco s. De fato, por (3.50) temos

$$\begin{aligned}
x_3(s) &= \int_0^s \sqrt{1 - \dot{x}_1^2(\sigma)}d\sigma = \int_0^s \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{1 + \sigma^2}}d\sigma = \int_0^s \frac{d\sigma}{\sqrt{1 + \sigma^2}} = \\
&= \operatorname{arcsinh} s, \; s \in I\!R
\end{aligned}$$

Então

$$\gamma(s) = \left(\sqrt{1 + s^2}, 0, \operatorname{arcsinh} s, 0\right), \; s \in I\!R$$

que é uma catenária parametrizada pelo comprimento de arco s.

No caso $H \equiv 0$ e para qualquer c, chamaremos de **catenóides** as soluções de (4.24). Para $c < 0$ os classificaremos em catenóides **esféricos** ($\delta = 1$), **parabólicos** ($\delta = 0$) e

hiperbólicos ($\delta = -1$). Para $c > 0$, as hipersuperfícies de rotação mínimas são determinadas em [14].

Fazendo $H \equiv 0, c = 1, \delta = 1$ em (4.24) obtemos

$$x_1(s)\ddot{x}_1(s) + (n-1)\dot{x}_1^2(s) + nx_1^2(s) - (n-1) = 0$$

Uma solução trivial é $x_1^2(s) = \frac{n-1}{n}$. Nesse caso obtemos a **hipersuperfície mínima de Clifford**

$$M_{1,1}^n = S^{n-1} \times S \subset S^{n+1}(1) = \overline{M}^{n+1}(1)$$

cuja parametrização pode ser dada por (3.40)

$$f(t,s) = \left(\varphi_1(t)\sqrt{1-\frac{1}{n}}, \ldots, \varphi_n(t)\sqrt{1-\frac{1}{n}}, \sqrt{\frac{1}{n}}\cos\phi(s), \sqrt{\frac{1}{n}}\sin\phi(s)\right)$$

onde $\phi(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{1/n}}{1/n} d\sigma = \sqrt{n}s$, $s \in I\!R$ por (3.44).

Logo,

$$f(t,s) = \left(\varphi_1(t)\sqrt{1-\frac{1}{n}}, \ldots, \varphi_n(t)\sqrt{1-\frac{1}{n}}, \sqrt{\frac{1}{n}}\cos(\sqrt{n}s), \sqrt{\frac{1}{n}}\sin(\sqrt{n}s)\right)$$

para $(t,s) \in U \times I\!R \subset I\!R^n$, sendo $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ parametrização ortogonal de uma esfera unitária, $(n-1)$-dimensional.

Para o caso $n = 2$, $H \equiv 0$ e $c \neq 0$, (4.24) pode ser facilmente integrada em termos de funções elementares. A fim de podermos usar algumas das expressões assim obtidas, para provar os teoremas (4.3.1) e (4.3.3) que seguem, forneceremos alguns detalhes.

Temos

$$\begin{aligned} x_1(s)\ddot{x}_1(s) + \dot{x}_1^2(s) + 2cx_1^2(s) - \delta &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1(s)\ddot{x}_1(s) + \dot{x}_1^2(s) &= \delta - 2cx_1^2(s) \end{aligned}$$

Façamos a substituição $y(s) = \delta - 2cx_1^2(s)$,

Logo,

$$\begin{aligned} \dot{y}(s) &= -4cx_1(s)\dot{x}_1(s) \\ \ddot{y}(s) &= -4c\left(\dot{x}_1^2(s) + x_1(s)\ddot{x}_1(s)\right) = \\ &= -4cy(s) \end{aligned}$$

A equação $\ddot{y} = -4cy$ tem solução geral

$$y = \begin{cases} b_1 e^{2\sqrt{-c}\,s} + b_2 e^{-2\sqrt{-c}\,s} & \text{se } c < 0 \\ b_1\cos(2\sqrt{c}s) + b_2\sin(2\sqrt{c}s) & \text{se } c > 0 \end{cases}$$

Encontremos as soluções de

$$\begin{cases} \ddot{y} = & -4cy \\ \text{com} & y(0) = \delta - 2cx_1^2(0) \\ \text{e} & \dot{y}(0) = -4cx_1(0)\dot{x}_1(0) = 0 \end{cases} \tag{4.28}$$

onde tomamos $\dot{x}_1(0) = 0$.

Caso $c < 0$.

Temos

$$\begin{cases} y(0) &= b_1 + b_2 = \delta - 2cx_1^2(0) \\ \dot{y}(0) &= 2\sqrt{-c}\,(b_1 - b_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow b_1 = b_2 = \frac{\delta - 2cx_1^2(0)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(s) = (\delta - 2cx_1^2(0)) \cosh\left(2\sqrt{-c}\,s\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta - 2cx_1^2(s) = (\delta - 2cx_1^2(0)) \cosh\left(2\sqrt{-c}\,s\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1^2(s) = \frac{(\delta - 2cx_1^2(0))}{2(-c)} \cosh\left(2\sqrt{-c}\,s\right) - \frac{\delta}{2(-c)} \Rightarrow$$

$$x_1(s) = \left(\frac{\delta - 2cx_1^2(0)}{2(-c)} \cosh\left(2\sqrt{-c}\,s\right) - \frac{\delta}{2(-c)}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.29}$$

De (3.25) e (3.27) obtemos o catenóide esférico ($\delta = 1$)

$$\begin{aligned} x_3(s) &= \sqrt{x_1^2(s) - \frac{1}{c}} \sinh \phi(s) \\ x_4(s) &= \sqrt{x_1^2(s) - \frac{1}{c}} \cosh \phi(s) \\ \phi(s) &= \int_0^s \frac{\sqrt{-\frac{1}{c} + x_1^2(\sigma) + \frac{\dot{x}_1^2(\sigma)}{c}}}{x_1^2(\sigma) - \frac{1}{c}} d\sigma \end{aligned}$$

De (3.31) e (3.33) obtemos o catenóide hiperbólico ($\delta = -1$)

$$\begin{aligned} x_3(s) &= \sqrt{x_1^2(s) + \frac{1}{c}} \cos \phi(s) \\ x_4(s) &= \sqrt{x_1^2(s) + \frac{1}{c}} \sin \phi(s) \\ \phi(s) &= \int_0^s \frac{\sqrt{\frac{1}{c} + x_1^2(\sigma) + \frac{\dot{x}_1^2(\sigma)}{c}}}{x_1^2(\sigma) + \frac{1}{c}} d\sigma \end{aligned}$$

De (3.37) e (3.38) obtemos o catenóide parabólico ($\delta = 0$)

$$\begin{aligned} x_4(s) &= x_1(s) \int_0^s \frac{\sqrt{x_1^2(\sigma) + \frac{\dot{x}_1^2(\sigma)}{c}}}{x_1^2(\sigma)} d\sigma \\ x_3(s) &= \left(1/c - x_4^2(s)\right) \frac{1}{2x_1(s)} \end{aligned}$$

Vamos computar $\phi(s)$ no caso $\delta^2 = 1$. Para isso, escreveremos

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{-c\delta} \\ b &= \frac{\delta - 2cx_1^2(0)}{2} \end{aligned}$$

Em ambos os casos temos,

$$\phi(s) = \int_0^s \frac{\sqrt{k + x_1^2(\sigma) + \frac{\dot{x}_1^2(\sigma)}{c}}}{x_1^2(\sigma) + k}$$

$$\begin{aligned}
k + x_1^2(s) + \frac{\dot{x}_1^2(s)}{c} &= \\
&= k + \frac{\delta}{2c} - \frac{b}{c}\cosh\left(2\sqrt{-c}\,s\right) - \frac{b^2}{c^2}\frac{\sinh^2\left(2\sqrt{-c}\,s\right)}{\frac{\delta}{2c} - \frac{b}{c}\cosh\left(2\sqrt{-c}\,s\right)} = \\
&= k + \frac{\frac{\delta^2}{4c^2} + \frac{b^2}{c^2}\cosh^2\left(2\sqrt{-c}\,s\right) - \frac{\delta b}{c^2}\cosh\left(2\sqrt{-c}\,s\right) - \frac{b^2}{c^2}\sinh^2\left(2\sqrt{-c}\,s\right)}{\frac{\delta}{2c} - \frac{b}{c}\cosh\left(2\sqrt{-c}\,s\right)} = \\
&= \frac{k\frac{\delta}{2c} - \frac{kb}{c}\cosh\left(2\sqrt{-c}\,s\right) + \frac{\delta^2}{4c^2} + \frac{b^2}{c^2} - \frac{\delta b}{c^2}\cosh\left(2\sqrt{-c}\,s\right)}{\frac{\delta}{2c} - \frac{b}{c}\cosh\left(2\sqrt{-c}\,s\right)} = \\
&= \frac{\frac{-1}{2c^2} + \frac{b}{\delta c^2}\cosh\left(2\sqrt{-c}\,s\right) + \frac{1}{4c^2} + \frac{b^2}{c^2} - \frac{\delta b}{c^2}\cosh\left(2\sqrt{-c}\,s\right)}{\frac{\delta}{2c} - \frac{b}{c}\cosh\left(2\sqrt{-c}\,s\right)} = \\
&= \frac{\frac{-1}{4c^2} + \frac{b^2}{c^2}}{\frac{\delta}{2c} - \frac{b}{c}\cosh\left(2\sqrt{-c}\,s\right)} = \\
&= \frac{4b^2 - 1}{2c\left(\delta - 2b\cosh\left(2\sqrt{-c}\,s\right)\right)} \geq 0
\end{aligned}$$

Observemos que se $b = \pm 1/2$ então $\phi \equiv 0$ e obtemos uma superfície totalmente geodésica. Vamos escolher as soluções de (4.28) tais que $b > 1/2$ (notemos que $-\frac{1}{2} < b < \frac{1}{2}$ não pode ser escolhido, pois, neste caso teríamos $2c\left(\delta - 2b\cosh\left(2\sqrt{-c}\,s\right)\right) > 0$ para $\delta = -1$ ou para $\delta = 1$).

$$\begin{aligned}
x_1^2(s) + k &= \frac{b}{(-c)}\cosh\left(2\sqrt{-c}\,s\right) + \frac{\delta}{2c} - \frac{1}{c\delta} = \\
&= \frac{b}{(-c)}\cosh\left(2\sqrt{-c}\,s\right) + \frac{\delta}{2(-c)}
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\phi(s) &= \sqrt{\frac{4b^2 - 1}{2(-c)}}\int_0^s \frac{1}{\sqrt{-\delta + 2b\cosh\left(2\sqrt{-c}\,\sigma\right)}}\frac{2(-c)}{\left(\delta + 2b\cosh\left(2\sqrt{-c}\,\sigma\right)\right)}d\sigma = \\
&= \sqrt{2(-c)(4b^2 - 1)}\int_0^s \frac{d\sigma}{\sqrt{4b^2\cosh^2\left(2\sqrt{-c}\,\sigma\right) - 1}\sqrt{2b\cosh\left(2\sqrt{-c}\,\sigma\right) + \delta}},\ b > 1/2
\end{aligned}$$

<u>Caso $c > 0$</u>.

Temos

$$\left\{\begin{array}{lcl} y(0) & = & b_1 = 1 - 2cx_1^2(0) \\ \dot{y}(0) & = & 2\sqrt{c}\, b_2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} b_1 & = & 1 - 2cx_1^2(0) \\ b_2 & = & 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(s) = (1 - 2cx_1^2(0))\cos(2\sqrt{c}s) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - 2cx_1^2(s) = (1 - 2cx_1^2(0))\cos(2\sqrt{c}s) \Rightarrow$$

$$x_1(s) = \left(\frac{1}{2c} - \frac{1 - 2cx_1^2(0)}{2c}\cos(2\sqrt{c}s)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.30}$$

De (3.43) e (3.44) obtemos

$$\begin{aligned} x_3(s) &= \sqrt{\frac{1}{c} - x_1^2(s)}\sin\phi(s) \\ x_4(s) &= \sqrt{\frac{1}{c} - x_1^2(s)}\cos\phi(s) \\ \phi(s) &= \int_0^s \frac{\sqrt{\frac{1}{c} - x_1^2(\sigma) - \frac{\dot{x}_1^2(\sigma)}{c}}}{\frac{1}{c} - x_1^2(\sigma)} d\sigma \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} &\frac{1}{c} - x_1^2(\sigma) - \frac{\dot{x}_1^2(\sigma)}{c} = \\ &= \frac{1}{c} - \frac{1}{2c} + \frac{b_1}{2c}\cos(2\sqrt{c}\sigma) - \frac{b_1^2}{4c^2}\frac{\sin^2(2\sqrt{c}\sigma)}{\frac{1 - b_1\cos(2\sqrt{c}\sigma)}{2c}} = \\ &= \frac{1 - b_1^2}{2c(1 - b_1\cos(2\sqrt{c}\sigma))} \end{aligned}$$

Vamos tomar $|b_1| < 1$.

Como

$$\frac{1}{c} - x_1^2(s) = \frac{1 + b_1\cos(2\sqrt{c}s)}{2c}$$

segue que

$$\phi(s) = \sqrt{2c(1 - b_1^2)}\int_0^s \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - b_1^2\cos^2(2\sqrt{c}\sigma)}\sqrt{1 + b_1\cos(2\sqrt{c}\sigma)}}, \quad -1 < b_1 < 1$$

No caso $c < 0$, usaremos na demonstração do teorema (4.3.1), os fatos que seguem

$$\phi \text{ é uma função ímpar de } s \tag{4.31}$$

pois, se $s > 0$

$$\phi(-s) = \sqrt{2(4b^2 - 1)(-c)}\int_0^{-s} \frac{d\sigma}{\sqrt{4b^2\cosh^2(2\sqrt{-c}\,\sigma) - 1}\sqrt{2b\cosh(2\sqrt{-c}\,\sigma) + \delta}}$$

e fazendo a mudança de variável $u = -\sigma$ na integral, vem

$$\phi(-s) = \sqrt{2(4b^2-1)(-c)} \int_0^s \frac{-du}{\sqrt{4b^2\cosh^2(2u\sqrt{-c})-1}\sqrt{2b\cosh(2u\sqrt{-c})+\delta}} = -\phi(s)$$

Além disso, observamos que

$$\dot{\phi}(s) > 0, \text{ para todo } s \text{ real} \tag{4.32}$$

Se $\delta = -1$ então

$$\phi(s) < \pi, \text{ para todo } s > 0 \tag{4.33}$$

pois, consideremos $s > 0$

$$\begin{aligned}
\phi(s) &= \int_0^s \frac{\sqrt{-c(4b^2-1)2}}{\sqrt{4b^2\cosh^2(2\sqrt{-c}\,\sigma)-1}\sqrt{2b\cosh(2\sqrt{-c}\,\sigma)-1}}d\sigma \leq \\
&\leq \int_0^s \frac{\sqrt{-c(4b^2-1)2}}{\sqrt{2b\cosh(2\sqrt{-c}\,\sigma)-1}\sqrt{2b\cosh(2\sqrt{-c}\,\sigma)-1}}d\sigma = \\
&= \int_0^s \frac{\sqrt{-c(4b^2-1)2}}{2b\cosh(2\sqrt{-c}\,\sigma)-1}\,d\sigma
\end{aligned}$$

Usando a fórmula de Taylor, o cosseno hiperbólico pode ser escrito na forma

$$\cosh\theta = 1 + \frac{\theta^2}{2!} + R(\theta),\ \theta \in I\!R$$

e

$$\cosh\theta > 1 + \frac{\theta^2}{2!}, \text{ se } \theta > 0$$

Então, como $b > 1/2$, temos

$$\begin{aligned}
\phi(s) &< \int_0^s \frac{\sqrt{-c(4b^2-1)2}}{2b + b(2\sqrt{-c}\,\sigma)^2 - 1}d\sigma = \\
&= \int_0^s \frac{\sqrt{-c(4b^2-1)2}}{(2b-1)\left(1+\left(\frac{\sqrt{-c4b}\,\sigma}{\sqrt{2b-1}}\right)^2\right)}d\sigma = \\
&= \frac{\sqrt{2b+1}\sqrt{-2c}}{\sqrt{2b-1}}\int_0^s \frac{d\sigma}{1+\left(\frac{\sqrt{-c4b}\,\sigma}{\sqrt{2b-1}}\right)^2} = \\
&= \frac{\sqrt{2b+1}}{\sqrt{2b-1}}\sqrt{-2c}\,\frac{\sqrt{2b-1}}{\sqrt{-c4b}}\arctan\left(\frac{\sqrt{-c4b}\,s}{\sqrt{2b-1}}\right) = \\
&= \frac{\sqrt{2b+1}}{\sqrt{2b}}\arctan\left(\frac{\sqrt{-c4b}\,s}{\sqrt{2b-1}}\right)
\end{aligned}$$

e

$$b > \frac{1}{2} \Rightarrow 6b > 1 \Rightarrow 8b > 1 + 2b \Rightarrow 8 > \frac{2b+1}{b} \Rightarrow \sqrt{\frac{2b+1}{2b}} < 2$$

Logo

$$\phi(s) < 2 \arctan\left(\frac{\sqrt{-c4b}\, s}{\sqrt{2b-1}}\right), \ \forall s > 0$$

Observemos que $\arctan\left(\frac{\sqrt{-c4b}\, s}{\sqrt{2b-1}}\right)$ é uma função estritamente crescente de s, e, como $\lim_{s\to+\infty} \arctan\left(\frac{\sqrt{-c4b}\, s}{\sqrt{2b-1}}\right) = \frac{\pi}{2}$, segue que para todo s positivo

$$\phi(s) < \pi$$

Estamos, agora, prontos para provar o seguinte resultado :

Teorema 4.3.1 *Seja $f : M^2 \to \mathcal{H}^3(c)$, $c < 0$, um catenóide completo. Então f é um mergulho.*

Demonstração. O caso $\delta = 0$ está contido no teorema (4.2.2), então podemos assumir que $\delta = \pm 1$.

Das parametrizações definidas por (3.13) e (3.7), temos que

(1) $f(t,s)$ é uma função ilimitada,

pois, por (4.29) a função $x_1(s)$ é ilimitada.

Temos, ainda que

(2) $M^2_{c\delta}$ não possui auto-intersecção,

pois, quando $\delta = 1$, se existissem $(t,s), (\bar{t},\bar{s}) \in \mathbb{R}^{n-1} \times I$ tais que $f(t,s) = f(\bar{t},\bar{s})$ teríamos

$$\left.\begin{array}{rcl} \varphi_1(t)x_1(s) & = & \varphi_1(\bar{t})x_1(\bar{s}) \\ \varphi_2(t)x_1(s) & = & \varphi_2(\bar{t})x_1(\bar{s}) \\ x_3(s) & = & x_3(\bar{s}) \\ x_4(s) & = & x_4(\bar{s}) \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi_1^2(t)x_1^2(s) + \varphi_2^2(t)x_1^2(s) + x_3^2(s) - x_4^2(s) =$$

$$\begin{array}{rl} = & \varphi_1^2(\bar{t})x_1^2(\bar{s}) + \varphi_2^2(\bar{t})x_1^2(\bar{s}) + x_3^2(\bar{s}) - x_4^2(\bar{s}) = \\ = & \varphi_1^2(\bar{t})x_1^2(\bar{s}) + \varphi_2^2(\bar{t})x_1^2(\bar{s}) + x_3^2(s) - x_4^2(s) \Rightarrow \\ \Rightarrow & x_1^2(s)\left(\varphi_1^2(t) + \varphi_2^2(t)\right) = x_1^2(\bar{s})\left(\varphi_1^2(\bar{t}) + \varphi_2^2(\bar{t})\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow & x_1^2(s) = x_1^2(\bar{s}) \Rightarrow \\ \Rightarrow & \cosh\left(2\sqrt{-c}\, s\right) = \cosh\left(2\sqrt{-c}\, \bar{s}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow & s = \pm\bar{s} \end{array}$$

Suponhamos $\bar{s} = -s$, então,

$$\begin{array}{rcl} x_3(\bar{s}) & = & x_3(s) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sqrt{x_1^2(\bar{s}) - \frac{1}{c}}\, \sinh\phi(\bar{s}) & = & \sqrt{x_1^2(s) - \frac{1}{c}}\, \sinh\phi(s) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin\phi(\bar{s}) & = & \sin\phi(s) \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi(\bar{s}) & = & \phi(s) \end{array}$$

Logo, por (4.31) segue que $\phi(s) = 0$, e, como o integrando de $\phi(s)$ é uma função positiva, obtemos que $s = 0$. Então $s = \bar{s}$, e nesse caso $\varphi_1(t) = \varphi_1(\bar{t}), \varphi_2(t) = \varphi_2(\bar{t})$, portanto $t = \bar{t}$, e f é injetora.

No caso $\delta = -1$, se $f(t,s) = f(\bar{t},\bar{s})$ para $(t,s),(\bar{t},\bar{s}) \in \mathbb{R}^{n-1} \times I$, como no caso $\delta = 1$ obtemos $x_1^2(s) = x_1^2(\bar{s})$ e $\bar{s} = \pm s$.

Suponhamos $\bar{s} = -s$ e $s > 0$

$$\begin{cases} x_3(\bar{s}) &= x_3(s) \\ x_4(\bar{s}) &= x_4(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\phi(\bar{s}) &= \cos\phi(s) \\ \sin\phi(\bar{s}) &= \sin\phi(s) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi(\bar{s}) = \phi(s) - 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

De (4.31) e (4.33)

$$\phi(\bar{s}) = \phi(s) \Rightarrow \phi(s) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ k < 1$$

e

$$\phi(\bar{s}) = -k\pi$$

Por (4.32), ϕ é função estritamente crescente de s e

$$s > 0 \Rightarrow -s = \bar{s} < s \Rightarrow \phi(\bar{s}) < \phi(s) < \pi \Rightarrow -k\pi < \pi \Rightarrow -k < 1 \Rightarrow k > -1$$

Logo

$$k \in \mathbb{Z},\ -1 < k < 1 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \phi(s) = \phi(\bar{s}) = 0$$

E, como no caso $\delta = 1$, concluímos que $s = \bar{s} = 0$ e $t = \bar{t}$, e f é uma função injetora.

Sendo $M^n_{c,\delta}$ completa, usando os mesmos argumentos da segunda parte da demonstração do teorema (4.2.2), por (1) e (2) concluímos que $M^n_{c,\delta}$ está mergulhada em $\mathcal{H}^3(c)$, $c < 0$, isto é, a aplicação $f : M^n_{c,\delta} \to \mathcal{H}^3(c)$, $c < 0$ é um mergulho.

□

Observação 4.3.2 *É conveniente notar que catenóides que não são totalmente geodésicos não possuem pontos umbílicos. Isto segue da proposição (4.2.1). De fato, substituindo-se $H \equiv 0$ em (4.25) obtemos*

$$\dot{x}_1^2(s) = \delta - cx_1^2(s) - \left(\frac{a}{x_1^{n-1}(s)}\right)^2 \Rightarrow \delta - cx_1^2(s) - \dot{x}_1^2(s) = \frac{a^2}{(x_1(s))^{2n-2}}$$

e por (4.1)

$$\lambda^2 x_1^2(s) = \delta - cx_1^2(s) - \dot{x}_1^2(s) = \frac{a^2}{(x_1(s))^{2n-2}}$$

Como $x_1 > 0$ podemos assumir $a \neq 0$, caso contrário $\lambda \equiv 0$ e como $H \equiv 0$ temos $\mu \equiv 0$ e o catenóide é totalmente geodésico. Logo, se o catenóide não é totalmente geodésico, λ numca se anula. Então

$$0 = H = \frac{(n-1)\lambda + \mu}{n} \Rightarrow \mu \neq \lambda$$

e, não existem pontos umbílicos.

Agora, vamos usar as expressões explicitadas anteriormente para $x_1(s)$ e $\phi(s)$, $s \in I$, a fim de provarmos que as superfícies conjugadas, no sentido da proposição (2.7.1), aos catenóides 2-dimensionais em $\overline{M}^3(c)$, são as superfícies mínimas geodesicamente-regradas em $\overline{M}^3(c)$, estudadas na seção (2.6).

Teorema 4.3.3 *Seja $\bar{f} : M^2 \to \overline{M}^3(c)$ um catenóide dado no caso $c = -1$ por (4.29), no caso $c = 1$ por (4.30) e no caso $c = 0$ por (4.27). Sua superfície mínima conjugada é a superfície geodesicamente-regrada mínima f definida na proposição (2.6.2.1), onde*

$$\begin{cases} se\ c = -1, & \vartheta = (b - \frac{\delta}{2})^{\frac{1}{2}} \quad e \quad \varsigma = (b + \frac{\delta}{2})^{\frac{1}{2}}, \quad b = \frac{\delta + 2x_1^2(0)}{2} > \frac{1}{2}; \\ se\ c = 1, & \vartheta = (-\frac{b_1}{2} + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} \quad e \quad \varsigma = (\frac{b_1}{2} + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}, \quad b_1 = 1 - 2x_1^2(0), |b_1| < 1; \\ se\ c = 0, & \vartheta = |k| \quad e \quad \varsigma = 1, \quad k \neq 0 \end{cases} \tag{4.34}$$

Demonstração. Pelo corolário (4.1.2) a primeira e a segunda formas fundamentais do catenóide $\bar{f}$ são dadas pelas relações (4.22) e (4.23). Substituindo-se (4.29), (4.30) e (4.27), temos

Caso $c = -1$.

$$\begin{aligned} x_1(s) &= \left(b\cosh 2s - \frac{\delta}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \\ \dot{x}_1(s) &= \frac{b\sinh 2s}{\left(b\cosh 2s - \frac{\delta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \ddot{x}_1(s) &= \frac{b^2\cosh^2 2s + b^2 - b\delta\cosh 2s}{\left(b\cosh 2s - \frac{\delta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \ddot{x}_1(s) - x_1(s) &= \left(b^2 - \frac{\delta^2}{4}\right)\frac{1}{\left(b\cosh 2s - \frac{\delta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \\ \delta + x_1^2(s) - \dot{x}_1^2(s) &= \left(b^2 - \frac{\delta^2}{4}\right)\frac{1}{b\cosh 2s - \frac{\delta}{2}} \end{aligned}$$

Logo,

$$\mu(s) = -\lambda(s) = \frac{\left(b^2 - \frac{\delta^2}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}{b\cosh 2s - \frac{\delta}{2}} = \frac{\vartheta\varsigma}{x_1^2(s)}$$

Caso $c = 1$.

$$\begin{aligned} x_1(s) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{b_1}{2}\cos 2s\right)^{\frac{1}{2}} \\ \dot{x}_1(s) &= \frac{\sqrt{2}b_1\sin 2s}{2(1 - b_1\cos 2s)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1(s) &= \frac{2b_1\cos 2s - b_1^2 - b_1^2\cosh^2 2s}{2(-b_1\cos 2s+1)^{\frac{1}{2}}} \\
\ddot{x}_1(s) + x_1(s) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{(1-b_1^2)}{(-b_1\cos 2s+1)^{\frac{3}{2}}} \\
\delta - x_1^2(s) - \dot{x}_1^2(s) &= \frac{(1-b_1^2)}{2(-b_1\cos 2s+1)}
\end{aligned}$$

Então,

$$\mu(s) = -\lambda(s) = \frac{(1-b_1^2)^{\frac{1}{2}}}{-b_1\cos 2s+1} = \frac{\vartheta\varsigma}{x_1^2(s)}$$

<u>Caso $c = 0$</u>.

$$\begin{aligned}
x_1(s) &= \sqrt{s^2+k^2} \\
\dot{x}_1(s) &= \frac{s}{\sqrt{s^2+k^2}} \\
\ddot{x}_1(s) &= \frac{k^2}{(s^2+k^2)^{\frac{3}{2}}} \\
\delta - \dot{x}_1^2(s) &= 1 - \frac{s^2}{s^2+k^2} = \frac{k^2}{s^2+k^2}
\end{aligned}$$

E portanto,

$$\mu(s) = -\lambda(s) = \frac{|k|}{s^2+k^2} = \frac{\vartheta\varsigma}{x_1^2(s)}$$

Então, em todos os casos, $c = -1, 1$, ou 0, temos

$$\begin{aligned}
\overline{I}(t,s) &= ds^2 + x_1^2(s)dt^2 \\
\overline{II}(t,s) &= \frac{\vartheta\varsigma}{x_1^2(s)}ds^2 - \vartheta\varsigma dt^2
\end{aligned}$$

A função definida para todo s real, por

$$\sigma(s) = \int_0^s \frac{d\rho}{x_1(\rho)}$$

é uma mudança de parâmetros, pois

$$\frac{d\sigma}{ds}(s) = \frac{1}{x_1(s)} > 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma \text{ é estritamente crescente em } \mathbb{R}$$

e, portanto, inversível.

Fazendo a mudança de parâmetros σ, nas formas fundamentais de $\bar{f}$:

$$\begin{aligned}
\overline{I}(t,\sigma) &= x_1^2(s(\sigma))\left(d\sigma^2 + dt^2\right) \\
\overline{II}(t,\sigma) &= \vartheta\varsigma\left(d\sigma^2 - dt^2\right)
\end{aligned}$$

onde $s = s(\sigma)$ é a inversa de σ.

Nos parâmetros isotérmicos (t, σ), vamos fazer $f = \bar{f}$ na proposição (2.7.1).

Para $\bar{f}$ temos os coeficientes da segunda forma fundamental

$$\bar{\beta}_{11} = -\bar{\beta}_{22} = \vartheta\varsigma, \ \bar{\beta}_{12} = 0$$

Para $f_{\frac{\pi}{2}}$, imersão conjugada de $\bar{f}$, fornecida pela proposição (2.7.1) temos

$$\begin{aligned}
\beta_{11}(\pi/2) &= \bar{\beta}_{11}\cos\pi/2 + \bar{\beta}_{12}\sin\pi/2 = 0 \\
\beta_{22}(\pi/2) &= -\beta_{11}(\pi/2) = 0 \\
\beta_{12}(\pi/2) &= \bar{\beta}_{11}\sin\pi/2 - \bar{\beta}_{12}\cos\pi/2 = \vartheta\varsigma \\
I_{\frac{\pi}{2}}(t,\sigma) &= \bar{I}(t,\sigma) \\
II_{\frac{\pi}{2}}(t,\sigma) &= 2\vartheta\varsigma d\sigma dt
\end{aligned}$$

Por outro lado, substituindo ϑ e ς definidos por (4.34) em $\vartheta^2F^2 + \varsigma^2G^2$, onde F e G são as funções definidas na proposição (2.6.2.1), temos

No caso $c = -1$,

$$\begin{aligned}
\vartheta^2F^2(s(\sigma)) + \varsigma^2G^2(s(\sigma)) &= \left(b - \frac{\delta}{2}\right)\cosh^2(s(\sigma)) + \left(b + \frac{\delta}{2}\right)\sinh^2(s(\sigma)) = \\
&= b\left(\cosh^2(s(\sigma)) + \sinh^2(s(\sigma))\right) - \frac{\delta}{2} = \\
&= b\cosh(2s(\sigma)) - \frac{\delta}{2} = \\
&= x_1^2(s(\sigma))
\end{aligned}$$

No caso $c = 1$,

$$\begin{aligned}
\vartheta^2F^2(s(\sigma)) + \varsigma^2G^2(s(\sigma)) &= \frac{-b_1+1}{2}\cos^2(s(\sigma)) + \frac{b_1+1}{2}\sin^2(s(\sigma)) = \\
&= -\frac{b_1}{2}\cos(2s(\sigma)) + \frac{1}{2} = \\
&= x_1^2(s(\sigma))
\end{aligned}$$

E, no caso $c = 0$,

$$\begin{aligned}
\vartheta^2F^2(s(\sigma)) + \varsigma^2G^2(s(\sigma)) &= k^21 + 1^2s^2(\sigma) = \\
&= x_1^2(s(\sigma))
\end{aligned}$$

Portanto, observando que $\vartheta\varsigma > 0$, e que $\frac{d\sigma}{ds}(s) = \frac{1}{x_1(s)}$, temos:

$$I_{\frac{\pi}{2}}(t,\sigma) = x_1^2(s(\sigma))\left(d\sigma^2 + dt^2\right) \Rightarrow I_{\frac{\pi}{2}}(t,s) = ds^2 + x_1^2(s)dt^2$$

$$II_{\frac{\pi}{2}}(t,\sigma) = 2|\vartheta\varsigma|d\sigma dt \Rightarrow II_{\frac{\pi}{2}}(t,s) = \frac{2|\vartheta\varsigma|}{x_1(s)}dsdt$$

onde $s = s(\sigma)$ é a inversa de σ, obtendo assim, respectivamente, a primeira e a segunda formas fundamentais da superfície mínima f geodesicamente-regrada de $\overline{M}^3(c)$, definida na proposição (2.6.2.1).

Como as superfícies são univocamente determinadas, a menos de isometrias de $\overline{M}^3(c)$, por suas, primeira e segunda, formas fundamentais, concluímos que f, superfície mínima geodesicamente-regrada, é a conjugada do catenóide $\bar{f}$, completando a prova.

□

A seguir, descreveremos a família a um parâmetro $\lambda > 0$, de superfícies mínimas geodesicamente-regradas de $\mathcal{H}^3(-1)$, mencionadas no início desta seção.

Consideremos um catenóide M_λ de $\mathcal{H}^3(-1)$, tal que, $x_1^2(0) > 0$ se $\delta = 1$, $x_1^2(0) > 1$ se $\delta = -1$ ou $x_1^2(0) > \frac{1}{2}$ se $\delta = 0$, onde

$$\lambda = \sqrt{\frac{x_1^2(0)}{\delta + x_1^2(0)}} > 0$$

Pelo teorema (4.3.3), uma parametrização da superfície mínima conjugada de M_λ, é

$$\begin{aligned} f(t,s) &= \left(\cosh\left(\sqrt{x_1^2(0)}\,t\right)\cosh s, \sinh\left(\sqrt{x_1^2(0)}\,t\right)\cosh s,\right. \\ &\quad \left.\cos\left(\sqrt{\delta + x_1^2(0)}\,t\right)\sinh s, \sin\left(\sqrt{\delta + x_1^2(0)}\,t\right)\sinh s\right), \ (t,s) \in I\!R^2 \end{aligned}$$

que, com a mudança de parâmetro $\bar{t} = \sqrt{\delta + x_1^2(0)}\,t$, fornece a família a um parâmetro $\lambda > 0$

$$f_\lambda(\bar{t}, s) = (\cosh \lambda\bar{t} \cosh s, \sinh \lambda\bar{t} \cosh s, \cos \bar{t} \sinh s, \sin \bar{t} \sinh s), \ (\bar{t}, s) \in I\!R^2$$

Como $\lambda > 0$ e

$$\delta = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = \frac{x_1^2(0)}{1+x_1^2(0)} < 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda < 1$$

$$\delta = -1 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = \frac{x_1^2(0)}{-1+x_1^2(0)} > 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda > 1$$

$$\delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = \frac{x_1^2(0)}{0+x_1^2(0)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$$

vemos que, se M_λ é superfície de rotação mínima esférica, então $0 < \lambda < 1$; se M_λ é superfície de rotação mínima hiperbólica, então $\lambda > 1$; e se M_λ é a única (veja teorema (4.2.2)) superfície de rotação mínima parabólica, então $\lambda = 1$.

Como exemplo de superfície auto-conjugada, temos o toro de Clifford mínimo

$$M = S^1(r) \times S^1(\bar{r}) \subset S^3(1) \subset I\!R^4$$

parametrizado por

$$f(t,s) = (r\cos s, r\sin s, \bar{r}\cos t, \bar{r}\sin t) \in S^3(1), \ (t,s) \in I\!R^2$$

onde $r^2 + \bar{r}^2 = 1$, e $r, \bar{r}$ são constantes reais positivas.

De fato,

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s) &= (-r\sin s, r\cos s, 0, 0)\\
\tfrac{\partial f}{\partial t}(t,s) &= (0, 0, -\bar{r}\sin t, \bar{r}\cos t)\\
\tfrac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}(t,s) &= (0,0,0,0)\\
\tfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}(t,s) &= (-r\cos s, -r\sin s, 0, 0)\\
\tfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,s) &= (0, 0, -\bar{r}\cos t, -\bar{r}\sin t)\\
g_1\left(\tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s), \tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s)\right) &= r^2\\
g_1\left(\tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s), \tfrac{\partial f}{\partial t}(t,s)\right) &= 0\\
g_1\left(\tfrac{\partial f}{\partial t}(t,s), \tfrac{\partial f}{\partial t}(t,s)\right) &= \bar{r}^2
\end{aligned}$$

Uma normal a M, tangente a $S^3(1)$ é dada por

$$\begin{aligned}
\overline{N}(t,s) &= \tfrac{\partial f}{\partial s}(t,s) \wedge \tfrac{\partial f}{\partial t}(t,s) \wedge f(t,s) =\\
&= \left(-r\bar{r}^2\cos s, -r\bar{r}^2\sin s, r^2\bar{r}\cos t, r^2\bar{r}\sin t\right)\\
\text{sendo } g_1\left(\overline{N}(t,s), \overline{N}(t,s)\right) &= r^2\bar{r}^4 + r^4\bar{r}^2 = r^2\bar{r}^2\left(\bar{r}^2 + r^2\right) =\\
&= r^2\bar{r}^2
\end{aligned}$$

Definimos o vetor unitário

$$N(t,s) = (-\bar{r}\cos s, -\bar{r}\sin s, r\cos t, r\sin t)$$

que é normal a M e tangente a $S^3(1)$.

Os coeficientes da segunda forma fundamental de f são

$$\begin{aligned}
\beta_{11} &= g_1\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial s^2}, N\right) = r\bar{r}\\
\beta_{12} &= g_1\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial s\partial t}, N\right) = 0\\
\beta_{22} &= g_1\left(\tfrac{\partial^2 f}{\partial t^2}, N\right) = -r\bar{r}
\end{aligned}$$

Para f ser mínima, devemos ter

$$\begin{aligned}
H \equiv 0 \;&\Rightarrow\; \beta_{11}g_1\left(\tfrac{\partial f}{\partial t}, \tfrac{\partial f}{\partial t}\right) - 2\beta_{12}g_1\left(\tfrac{\partial f}{\partial t}, \tfrac{\partial f}{\partial s}\right) + \beta_{22}g_1\left(\tfrac{\partial f}{\partial s}, \tfrac{\partial f}{\partial s}\right) = 0 \Rightarrow\\
&\Rightarrow\; r\bar{r}(\bar{r}^2) - r\bar{r}(r^2) = 0 \Rightarrow r\bar{r}(\bar{r}+r)(\bar{r}-r) = 0 \Rightarrow \bar{r} = r
\end{aligned}$$

Logo

$$f(t,s) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos s, \sin s, \cos t, \sin t)$$

pois $\bar{r}^2 + r^2 = 1$.

A primeira e a segunda formas fundamentais de f ficam então, respectivamente

$$\begin{aligned} I(t,s) &= \frac{1}{2}\left(ds^2 + dt^2\right) \\ II(t,s) &= \frac{1}{2}\left(ds^2 - dt^2\right) \end{aligned}$$

Podemos encontrar a superfície mínima $f_{\frac{\pi}{2}}$ conjugada a f, através da proposição (2.7.1), já que (t,s) são parâmetros isotérmicos para f mínima.

Temos

$$\begin{aligned} I_{\frac{\pi}{2}}(t,s) &= I(t,s) \\ II_{\frac{\pi}{2}}(t,s) &= (\beta_{11}\cos(\pi/2) - \beta_{12}\sin(\pi/2))\,ds^2 + 2\,(\beta_{11}\sin(\pi/2) + \beta_{12}\cos(\pi/2))\,dsdt - \\ &\quad - (\beta_{11}\cos(\pi/2) - \beta_{12}\sin(\pi/2))\,dt^2 = 2r^2 dsdt \\ &= dsdt \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de parâmetros

$$\begin{cases} s = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v) \\ t = \frac{1}{\sqrt{2}}(u-v) \end{cases}$$

ficamos com

$$\begin{aligned} I_{\frac{\pi}{2}}(u,v) &= \frac{1}{2}\left(\frac{2du^2 + 2dudv + 2dv^2 - 2dudv}{2}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(du^2 + dv^2\right) \\ II_{\frac{\pi}{2}}(u,v) &= \frac{du+dv}{\sqrt{2}}\,\frac{du-dv}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{1}{2}\left(du^2 - dv^2\right) \end{aligned}$$

Logo $f_{\frac{\pi}{2}}(u,v)$ e $f(t,s)$ são isométricas, e a conjugada de f é a própria f.

Capítulo 5

CONDIÇÕES SUFICIENTES PARA QUE UMA HIPERSUPERFÍCIE DE $\overline{M}^{n+1}(c)$, $n \geq 3$, SEJA DE ROTAÇÃO

5.1 Fatos utilizados.

Para demonstrar os resultados deste capítulo, vamos precisar dos seguintes fatos

Proposição 5.1.1 *Seja $f : M^n \to M^n(c)$ uma hipersuperfície. Se em cada ponto de M existem exatamente duas curvaturas principais distintas λ e μ. Então a distribuição definida por $D_\lambda = \{X \in \chi(M) : \mathcal{A}X = -\lambda X\}$, onde $\mathcal{A}$ é o operador de Weingarten de f, é diferenciável e involutiva. Além disto, se a dimensão de D_λ for maior do que um, então $X[\lambda] = 0$, para todo $X \in D_\lambda$, ou seja, λ é constante ao longo das folhas de D_λ.*

Demonstração. Fixemos $x_0 \in M$.

Seja N um campo de vetores normais a M^n, em $\overline{M}^{n+1}(c)$ definido numa vizinhança V, em M, de x_0.

Sabemos que $\lambda \neq \mu$ em M, que λ e μ são diferenciáveis e possuem multiplicidade constante.

Escolhamos campos de vetores diferenciáveis $X_1, X_2, \ldots, X_n$ em volta de x_0, os quais podemos supor, sem perda de generalidade, definidos em V, de modo que $\{X_1(x_0), \ldots, X_p(x_0)\}$ e $\{X_{p+1}(x_0), \ldots, X_n(x_0)\}$ são bases de $D_{\lambda(x_0)}$ e $D_{\mu(x_0)}$ respectivamente.

Sejam

$$Y_i = \begin{cases} (\mathcal{A} + \mu)X_i & i = 1, \ldots, p \\ (\mathcal{A} + \lambda)X_i & i = p+1, \ldots, n \end{cases}$$

campos definidos em V.

Então, sendo X_i campos de vetores diferenciáveis em V, os campos de vetores Y_i são diferenciáveis em V, para $i = 1, \ldots, n$.

Em x_0, os vetores são linearmente independentes e

$$Y_i = \begin{cases} (\mu(x_0) - \lambda(x_0))X_i(x_0), & i = 1, \ldots, p \\ -(\mu(x_0) - \lambda(x_0))X_i(x_0), & i = p+1, \ldots, n \end{cases}$$

Logo, pela continuidade dos campos Y_i, $i = 1, \ldots, n$, existe uma vizinhança de x_0 em M, que podemos supor, sem perda de generalidade, igual a V, onde o conjunto $\{Y_i : i = 1, \ldots, n\}$ é linearmente independente.

Além disso, $\{Y_1, \ldots, Y_p\}$ e $\{Y_{p+1}, \ldots, Y_n\}$ são bases, respectivamente de D_λ e D_μ em volta de x_0. Isto segue do fato de $t^2 + (\lambda + \mu)t + \lambda\mu = 0$ ser a equação característica de $\mathcal{A}$. Então,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A} + \lambda)Y_i &= (\mathcal{A} + \lambda)(\mathcal{A} + \mu)X_i = \\
&= (\mathcal{A}^2 + (\lambda + \mu)\mathcal{A} + \lambda\mu)X_i = 0, \quad i = 1, \ldots, p \Rightarrow \\
&\Rightarrow Y_i \in D_\lambda, i = 1, \ldots, p \\
(\mathcal{A} + \mu)Y_i &= (\mathcal{A} + \mu)(\mathcal{A} + \lambda)X_i = \\
&= (\mathcal{A}^2 + (\lambda + \mu)\mathcal{A} + \lambda\mu)X_i = 0, \quad i = p + 1, \ldots, n \Rightarrow \\
&\Rightarrow Y_i \in D_\mu, i = p + 1, \ldots, n
\end{aligned}$$

Mostramos, portanto, que D_λ e D_μ são diferenciávies, faltando verificar que D_λ e D_μ são involutivas.

Em hipersuperfícies, se N é normal unitária, a conexão normal satisfaz $\nabla^\perp_X N = 0$, para todo X tangente, daí a equação de Codazzi se escreve:

$$0 = (\nabla_X \mathcal{A})_N Y - (\nabla_Y \mathcal{A})_N X$$

para X, Y tangentes a M, onde

$$(\nabla_X \mathcal{A})_N Y = \nabla_X(\mathcal{A}^N Y) - \mathcal{A}^{\nabla^\perp_X N} Y - \mathcal{A}^N(\nabla_X Y) = \nabla_X(\mathcal{A}Y) - \mathcal{A}(\nabla_X Y)$$

Então, para todos X e Y em D_λ

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}[X, Y] &= \mathcal{A}(\nabla_X Y) - \mathcal{A}(\nabla_Y X) = \nabla_X(\mathcal{A}Y) - \nabla_Y(\mathcal{A}X) = \\
&= \nabla_X(-\lambda Y) - \nabla_Y(-\lambda X) = -X[\lambda]Y + Y[\lambda]X - \lambda[X, Y] \Rightarrow \\
&\Rightarrow (\mathcal{A} + \lambda)[X, Y] = Y[\lambda]X - X[\lambda]Y \in D_\lambda
\end{aligned}$$

Mas

$$(\mathcal{A} + \mu)(\mathcal{A} + \lambda)[X, Y] = (\mathcal{A}^2 + (\lambda + \mu)\mathcal{A} + \lambda\mu)[X, Y] = 0 \Rightarrow (\mathcal{A} + \lambda)[X, Y] \in D_\mu$$

Logo,

$$(\mathcal{A} + \lambda)[X, Y] \in D_\lambda \cap D_\mu = \{0\} \Rightarrow [X, Y] \in D_\lambda$$

e, D_λ é involutivo. Analogamente, mostra-se que D_μ é involutivo.

Se a dimensão de D_λ for maior do que um, isto é, se existem $X, Y \in D_\lambda$ linearmente independentes, então

$$(\mathcal{A} + \lambda)[X, Y] = Y[\lambda]X - X[\lambda]Y = 0 \Rightarrow Y[\lambda] = X[\lambda] = 0 \Rightarrow W[\lambda] = 0, \forall W \in D_\lambda$$

□

Admitiremos os seguintes resultados gerais:

Teorema 5.1.2 *Sejam $n \geq 3$ fixado e $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}(c)$ uma hipersuperfície invariante por um subgrupo $\mathcal{S}_l\left(\overline{M}^{n+1}(c)\right)$, a l-parâmetros de isometrias de $\overline{M}^{n+1}(c)$. Para cada $p \in M^n$ se Σ_p é a órbita de p sob a ação do subgrupo a l-parâmetros, então todas as curvaturas normais da imersão f nas direções contidas em $T_p(\Sigma_p)$ são iguais.*

Demonstração. Sejam $p \in M$, N a normal unitária da imersão f e $\mathcal{A}^N$ o operador de Weingarten de f associado a N.

Denotemos por $\overline{\nabla}$ e g_c, respectivamente, a conexão e a métrica Riemanniana de $\overline{M}^{n+1}(c)$.

Inicialmente, observemos que, para toda isometria $\mathcal{O} \in \mathcal{S}_l\left(\overline{M}^{n+1}(c)\right)$

$$X \in T_p(\Sigma_p) \Rightarrow \mathcal{O}_* X \in T_{\mathcal{O}(p)}(\Sigma_p)$$

e, para cada $X \in T_pM$

$$\mathcal{O} \circ N = N \circ \mathcal{O} \Rightarrow \overline{\nabla}_{\mathcal{O}_* X} N = \mathcal{O}_*\left(\overline{\nabla}_X N\right)$$

pois, tomando-se uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$, $\epsilon > 0$, onde $\alpha(0) = p$ e $\dot{\alpha}(0) = X$, e definindo-se $\beta(t) = \mathcal{O}(\alpha(t))$

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_{\mathcal{O}_* X} N &= \frac{d}{dt} N \circ \beta(t) \mid_{t=0} = \frac{d}{dt} N \circ \mathcal{O}(\alpha(t)) \mid_{t=0} = \frac{d}{dt} \mathcal{O} \circ N(\alpha(t)) \mid_{t=0} = \\ &= \mathcal{O}_*\left(\overline{\nabla}_X N\right) \end{aligned}$$

Vamos mostrar que se $X \in T_pM$ é uma direção principal, isto é,

$$\mathcal{A}^N(X) = kX \text{ e } g_c(X, X) = 1$$

então,

$$\mathcal{A}^{N \circ \mathcal{O}}(\mathcal{O}_* X) = k\mathcal{O}_* X, \ \forall \mathcal{O} \in \mathcal{S}_l\left(\overline{M}^{n+1}(c)\right)$$

ou seja, $\mathcal{O}_* X$ é também uma direção principal e a curvatura correspondente é a mesma.

Basta vermos que

$$\begin{aligned} -g_c\left(\mathcal{A}^{N \circ \mathcal{O}}(\mathcal{O}_* X), \mathcal{O}_* X\right) &= g_c\left(\overline{\nabla}_{\mathcal{O}_* X} N, \mathcal{O}_* X\right) = g_c\left(\mathcal{O}_*\left(\overline{\nabla}_X N\right), \mathcal{O}_* X\right) = \\ &= g_c\left(\overline{\nabla}_X N, X\right) = -g_c\left(\mathcal{A}^N(X), X\right) = -k g_c(X, X) = \\ &= -k \end{aligned}$$

□

Teorema 5.1.3 *Sejam M^n uma variedade Riemanniana conexa e $G(M)$ o grupo de isometrias de M. Então $\dim G(M) \leq n(n+1)/2$ e se $\dim G(M) = n(n+1)/2$, então M é espaço de curvatura constante.*

Demonstração. Veja [9].

□

Teorema 5.1.4 (Método dos multiplicadores de Lagrange) *Se $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, U aberto, f de classe $C^k (k \geq 1)$ e $\varphi^{-1}(c), \psi^{-1}(d)$ são hiperfícies contidas em U, imagens inversas dos valores regulares reais c, d das funções $\varphi : U \to \mathbb{R}$, $\psi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^k, com $\nabla\varphi\,|_B$ e $\nabla\psi\,|_B$ não paralelos, onde $B = \varphi^{-1}(c) \cap \psi^{-1}(d)$ e $\nabla(\ )$ denota o gradiente da função. Então $p \in B$ é ponto crítico de $f\,|_B$, se e somente se, existem λ_1, λ_2 reais, tais que $\nabla f(p) = \lambda_1 \nabla\varphi(p) + \lambda_2 \nabla\psi(p)$.*

Demonstração. Veja [11]

□

5.2 Descrição das condições suficientes.

O principal teorema deste parágrafo é o

Teorema 5.2.1 *Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}(c)$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície arbitrária, com M^n conexa. Suponha que as curvaturas principais $k_1, \ldots, k_n$ de f satisfazem $k_1 = k_2 = \cdots = k_{n-1} = -\lambda \neq 0$ e $k_n = -\mu = -\mu(\lambda)$, e $\lambda - \mu \neq 0$. Então $f(M^n)$ está contida numa hipersuperfície de rotação.*

Demonstração. Sejam N a normal unitária da imersão f, $\mathcal{A}^N$ o operador de Weingarten de f associado a N e as distribuições

$$\begin{aligned} D_\lambda &= \{X \in TM : \mathcal{A}^N X = -\lambda X\} \\ D_\mu &= \{X \in TM : \mathcal{A}^N X = -\mu X\} \end{aligned}$$

Pela proposição (5.1.1) M é folheada pelas folhas, Σ e L, variedades integrais das distribuições diferenciávies e involutivas D_λ e D_μ, respectivamente; além disso $n \geq 3 \Rightarrow \dim D_\lambda = n - 1 > 1$. Portanto,

(1) λ é constante ao longo de Σ.

Fixemos $p \in M$. Tomemos uma parametrização $(u_1, \ldots, u_n, t)$ de uma vizinhança U de p em M, tal que $(u_1, \ldots, u_{n-1})$ são coordenadas locais em Σ; t é uma coordenada em L; os campos $V_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$, $i = 1, \ldots, n-1$ e $\frac{\partial}{\partial t}$ são auto-vetores (ortogonais) do operador de Weingarten $\mathcal{A}^N$ e $T = \frac{\partial}{\partial t}$ é unitário (basta parametrizar as curvas u = constante pelo comprimento de arco).

Vamos mostrar que, numa vizinhança de p, f é superfície de rotação.

Primeiramente mostremos que Σ_q é umbílica em $\overline{M}^{n+1}(c)$, para todo $q \in U$.

Denotemos por $\overline{\nabla}, g_c$ e $\overline{R}$, respectivamente, a conexão de Levi-Civita, a métrica Riemanniana e o tensor de curvatura de $\overline{M}^{n+1}(c)$.

$$g_c(N, N) = 1 \Rightarrow g_c(\overline{\nabla}_{V_i} N, N) = 0 = g_c(\overline{\nabla}_T N, N) \Rightarrow$$

$$(2)\quad \begin{cases} \overline{\nabla}_{V_i}N = -\mathcal{A}^N(V_i) = \lambda V_i, & i=1,\dots,n-1 \\ \overline{\nabla}_T N = -\mathcal{A}^N(T) = \mu T \end{cases}$$

Por (1), $V_i[\lambda]=0$. Como $\mu=\mu(\lambda)$, temos também $V_i[\mu]=0$.
Por (1) e (2)

$$(3)\quad \begin{cases} \overline{\nabla}_T\overline{\nabla}_{V_i}N = \overline{\nabla}_T(\lambda V_i) = T[\lambda]V_i+\lambda\overline{\nabla}_T V_i = \dot{\lambda}(t)V_i+\lambda\overline{\nabla}_T V_i \\ \overline{\nabla}_{V_i}\overline{\nabla}_T N = \overline{\nabla}_{V_i}(\mu T) = V_i[\mu]T+\mu\overline{\nabla}_{V_i}T = \mu\overline{\nabla}_{V_i}T \end{cases}$$

Do fato de $\overline{M}^{n+1}(c)$ ter curvatura seccional constante, por $[V_i,T]=\left[\frac{\partial}{\partial u_i},\frac{\partial}{\partial t}\right]=0$ e por (3) concluimos que

$$\begin{aligned} 0 &= c(g_c(T,N)V_i-g_c(V_i,N)T)=\overline{R}(V_i,T)N= \\ &= \overline{\nabla}_T\overline{\nabla}_{V_i}N-\overline{\nabla}_{V_i}\overline{\nabla}_T N=\dot{\lambda}(t)V_i+\lambda\overline{\nabla}_T V_i-\mu\overline{\nabla}_{V_i}T= \\ &= \dot{\lambda}(t)V_i+(\lambda-\mu)\overline{\nabla}_{V_i}T \end{aligned}$$

Portanto,

$$(4)\quad \begin{cases} \overline{\nabla}_{V_i}T = \frac{-\dot{\lambda}}{\lambda-\mu}V_i \\ \overline{\nabla}_{V_i}N = \lambda V_i, \quad i=1,\dots,n-1 \end{cases}$$

sendo T e N as normais a Σ_q.
Então Σ_q é umbílica em $\overline{M}^{n+1}(c)$, qualquer q em U.
Vamos considerar dois casos:

Caso $c\neq 0$.

Pela proposição (2.3.4.5.4) no caso $c<0$, e por resultado análogo no caso $c>0$ (veja [15]), para todo $q\in U$, $\Sigma_q\subset\overline{\mathcal{P}}^n{}_q\cap\overline{M}^{n+1}(c)$, onde $\overline{\mathcal{P}}^n{}_q$ é um n-subespaço afim do espaço ambiente.
Observamos que

$$q,\bar{q}\in U \text{ e } \bar{q}\in\Sigma_q\Rightarrow\Sigma_q=\Sigma_{\bar{q}}\Rightarrow\overline{\mathcal{P}}^n{}_q=\overline{\mathcal{P}}^n{}_{\bar{q}}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\overline{\mathcal{P}}^n$ é constante ao longo de cada direção V_i, $i=1,\dots,n-1$.

Queremos mostrar que os espaços $\overline{\mathcal{P}}^n$, correspondentes a folhas Σ, distintas, são paralelos no espaço ambiente, ao longo das curvas integrais de T.

Denotemos por $\tilde{\nabla}, g_c$ e x, respectivamente, a conexão de Levi Civita, a métrica Riemanniana e o vetor posição do espaço ambiente de $\overline{M}^{n+1}(c)$ (L^{n+2} ou $\mathbb{R}^{n+2}$).

Consideremos a distribuição no espaço ambiente, definida para cada $q\in U$, por

$$\hat{D}(q)=[V_1(q),\dots,V_{n-1}(q)]\oplus H(q)$$

onde $H(q)$ é o vetor curvatura média de Σ_q considerado como variedade no espaço ambiente, no ponto $q\in U$.

Como $\Sigma\subset\overline{\mathcal{P}}^n$ e o espaço $\overline{M}^{n+1}(c)$ é a $(n+1)$-esfera unitária ou o $(n+1)$-espaço hiperbólico, segue que $\hat{D}(q)\in\overline{\mathcal{P}}^n{}_q$, $\forall q\in U$.

Mostremos que H nunca se anula em U.

Por (2) e (4), a segunda forma fundamental da folha Σ no espaço ambiente é, para X e Y tangentes a Σ:

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= g_c(B(X,Y),T)T + g_c(B(X,Y),N)N + cg_c(B(X,Y),x)x = \\ &= g_c(-\overline{\nabla}_X T,Y)T + g_c(-\overline{\nabla}_X N,Y)N + cg_c(-\tilde{\nabla}_X x,Y)x = \\ &= \left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda-\mu}T - \lambda N - cx\right) g_c(X,Y) \end{aligned}$$

Logo, se $\{e_j,\ j = 1,\ldots,n-1\}$ é uma base ortonormal do plano tangente a folha Σ_q, então

$$\begin{aligned} H(q) &= \frac{1}{n-1}(B(e_1,e_1) + \cdots + B(e_1,e_1)) = \\ &= \frac{1}{n-1}\left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda-\mu}T(q) - \lambda N(q) - cx(q)\right)(n-1) \Rightarrow \end{aligned}$$

(5) $H(q) = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda-\mu}T(q) - \lambda N(q) - cx(q)$

que é um vetor não nulo ($\lambda \neq 0$).

Portanto, a distribuição $\hat{D}(q)$ é n-dimensional e coincide com $\overline{\mathcal{P}}^n{}_q$, $\forall q \in U$.

Os campos definidos em U,

$$W = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda-\mu}N + \lambda T \text{ tangente a } \overline{M}^{n+1}(c)$$

$$\text{e } Z = -x + \frac{1}{\lambda}N, \text{ no espaço ambiente}$$

são ambos não nulos e satisfazem as seguintes propriedades:

(6) W e Z são linearmente independentes

pois, se existem funções $a, b : U \to \mathbb{R}$ tais que $aW + bZ = 0$, então

$$\left(a\frac{\dot{\lambda}}{\lambda-\mu} + \frac{b}{\lambda}\right)N + a\lambda T - bx = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a\frac{\dot{\lambda}}{\lambda-\mu} + \frac{b}{\lambda} &=& 0 \\ a\lambda &=& 0 \\ b &=& 0 \end{array}\right. \Rightarrow a = b = 0$$

(7) W e Z são ortogonais a $\overline{\mathcal{P}}^n = \hat{D}$, e ortogonais entre si,

pois

$$\begin{aligned} g_c(W,V_i) &= \frac{\dot{\lambda}}{\lambda-\mu}g_c(N,V_i) + \lambda g_c(T,V_i) = 0 \\ g_c(Z,V_i) &= -g_c(x,V_i) + \frac{1}{\lambda}g_c(N,V_i) = 0,\ i = 1,\ldots,n-1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g_c(W,H) &= \left(\frac{\dot\lambda}{\lambda-\mu}N+\lambda T, \frac{\dot\lambda}{\lambda-\mu}T-\lambda N-cx\right) = \\
&= \frac{\dot\lambda\lambda}{\lambda-\mu}g_c(N,N)+\frac{\dot\lambda\lambda}{\lambda-\mu}g_c(T,T)=0 \\
g_c(Z,H) &= g_c\left(-x+\frac{1}{\lambda}N, \frac{\dot\lambda}{\lambda-\mu}T-\lambda N-cx\right) = \\
&= cg_c(x,x)-\frac{\dot\lambda}{\lambda}g_c(N,N)=0
\end{aligned}
$$

(8) W e Z são constantes ao longo de Σ,

ou seja, $W=W(t)$, $Z=Z(t)$, pois temos para $i=1,\dots,n-1$

$$
\textbf{(9)} \left\{
\begin{array}{lllllllll}
0 &=& g_c(N,V_i) &=& g_c(N,\tilde\nabla_{V_i}x) &=& -g_c(\tilde\nabla_{V_i}N,x) &\Rightarrow& \tilde\nabla_{V_i}N &=& \overline\nabla_{V_i}N \\
0 &=& g_c(T,V_i) &=& g_c(T,\tilde\nabla_{V_i}x) &=& -g_c(\tilde\nabla_{V_i}T,x) &\Rightarrow& \tilde\nabla_{V_i}T &=& \overline\nabla_{V_i}N,
\end{array}
\right.
$$

Logo, por (1), (2) e (9)

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u_i}Z &= \tilde\nabla_{V_i}Z = -\tilde\nabla_{V_i}x+V_i\left[\frac{1}{\lambda}\right]N+\frac{1}{\lambda}\tilde\nabla_{V_i}N = -V_i+\frac{1}{\lambda}\lambda V_i = 0 \\
\frac{\partial}{\partial u_i}W &= \tilde\nabla_{V_i}W = \\
&= V_i\left[\frac{\dot\lambda}{\lambda-\mu}\right]N+\frac{\dot\lambda}{\lambda-\mu}\overline\nabla_{V_i}N+V_i[\lambda]T+\lambda\overline\nabla_{V_i}T = \\
&= \frac{\dot\lambda}{\lambda-\mu}\lambda V_i+\frac{\lambda(-\dot\lambda)}{\lambda-\mu}V_i = 0,\ i=1,\dots,n-1
\end{aligned}
$$

Consideremos o 2-plano $\pi=[W,Z]$. π é um subespaço ortogonal a $\overline{\mathcal{P}}^n$, e é constante ao longo das folhas Σ. Portanto para mostrarmos que os subespaços $\overline{\mathcal{P}}^n$ são paralelos no espaço ambiente, ao longo da direção T, é suficiente provar que os 2-planos π são paralelos ao longo de L, isto é, que existe um 2-plano π_0 contendo a origem, no espaço ambiente tal que π é paralelo a π_0.

Isto ocorre, se e somente se, existem duas direções constantes, não nulas, W_0 e Z_0 no espaço ambiente que geram todos os 2-planos π, ou seja, para cada t, existe $M(t)$ matriz de ordem 2 e coeficientes reais, tal que

$$
\textbf{(10)}\quad M(t)\begin{bmatrix} W(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_0 \\ Z_0 \end{bmatrix}
$$

onde $\begin{bmatrix} W(t) \\ Z(t) \end{bmatrix}$ é a matriz $2\times(n+2)$ dos coeficientes dos vetores indicados, relativamente a uma base qualque do espaço ambiente e $\pi_0=[W_0,Z_0]=\pi(t_0)$ para algum t_0.

Nesse caso,

$$(11)\quad \dot{M}(t)\begin{bmatrix} W(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} + M(t)\begin{bmatrix} \tilde{\nabla}_T W \\ \tilde{\nabla}_T Z \end{bmatrix} = 0$$

Suponhamos por um instante que $\tilde{\nabla}_T W$ e $\tilde{\nabla}_T Z$ são constantes ao longo das folhas Σ e ambos pertencem a $\pi = [W, Z]$.

Logo, existe $B(t)$ matriz de ordem 2 e coeficientes reais, tal que

$$\begin{bmatrix} \tilde{\nabla}_T W(t) \\ \tilde{\nabla}_T Z(t) \end{bmatrix} = B(t)\begin{bmatrix} W(t) \\ Z(t) \end{bmatrix}$$

e consequentemente, podemos reescrever (11) na forma

$$(\dot{M}(t) + M(t)B(t))\begin{bmatrix} W(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} = 0$$

e por (6), $\dot{M}(t) + M(t)B(t) = 0$.

Consideremos então, o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \dot{M}(t) + M(t)B(t) &= 0 \\ M(t_0) &= I \end{cases}$$

Sendo seus coeficientes de classe C^∞, esse sistema possui uma única solução $M(t)$ que satisfaz (10), onde $W_0 = W(t_0)$ e $Z_0 = Z(t_0)$.

Portanto, o paralelismo de π ocorre sob as condições

$$\tilde{\nabla}_T W = \tilde{\nabla}_T W(t),\ \tilde{\nabla}_T Z = \tilde{\nabla}_T Z(t), \text{ e}$$

$\tilde{\nabla}_T W, \tilde{\nabla}_T Z$ ambos ortogonais a $\overline{\mathcal{P}}^n = \hat{D}$.

Vamos verificar tais condições a seguir.

Tomando uma parametrização do espaço ambiente, tal que, restrita a U coincida com $(u_1, \ldots, u_{n-1}, t)$, teremos para $i = 1, \ldots, n-1$

$$[T, V_i] = 0 \ \Rightarrow\ \begin{aligned} R(V_i, T)W &= \tilde{\nabla}_T \tilde{\nabla}_{V_i} W - \tilde{\nabla}_{V_i} \tilde{\nabla}_T W \\ R(V_i, T)Z &= \tilde{\nabla}_T \tilde{\nabla}_{V_i} Z - \tilde{\nabla}_{V_i} \tilde{\nabla}_T Z \end{aligned}$$

De (8) e de $R(V_i, T)W = 0 = R(V_i, T)Z = 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= R(V_i, T)W = -\tilde{\nabla}_{V_i} \tilde{\nabla}_T W \ \Rightarrow\ \tilde{\nabla}_T W = \tilde{\nabla}_T W(t) \\ 0 &= R(V_i, T)Z = -\tilde{\nabla}_{V_i} \tilde{\nabla}_T Z \ \Rightarrow\ \tilde{\nabla}_T Z = \tilde{\nabla}_T Z(t) \end{aligned}$$

Por (4) , por $g_c(W, V_i) = 0$ e $[T, V_i] = 0$, temos

$$\begin{aligned} g_c(\tilde{\nabla}_T W, V_i) &= -g_c(W, \tilde{\nabla}_T V_i) = -g_c(W, \tilde{\nabla}_{V_i} T) = \\ &= -g_c(W, \overline{\nabla}_{V_i} T) = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda - \mu} g_c(W, V_i) = 0 \\ &\Rightarrow\ g_c(\tilde{\nabla}_T W, V_i) = 0 \end{aligned}$$

Logo, existem funções reais h, w, z tais que

$$\tilde{\nabla}_T W = hH + wW + zZ$$

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{V_i}\tilde{\nabla}_T W = 0,\ i = 1,\dots,n-1 \text{ e } (8) \ \Rightarrow\ & 0 = V_i[h]H + h\tilde{\nabla}_{V_i}H + V_i[z]Z + \\ & +z\tilde{\nabla}_{V_i}Z + V_i[w]W + w\tilde{\nabla}_{V_i}W = \\ & = V_i[h]H + h\tilde{\nabla}_{V_i}H + V_i[z]Z + V_i[w]W\end{aligned}$$

Por (1), (4), (5) e (9),

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_{V_i}H &= \tilde{\nabla}_{V_i}\left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda-\mu}T - \lambda N - cx\right) = \\ &= \frac{\dot{\lambda}}{\lambda-\mu}\tilde{\nabla}_{V_i}T - \lambda\tilde{\nabla}_{V_i}N - c\tilde{\nabla}_{V_i}x = \\ &= \frac{\dot{\lambda}}{\lambda-\mu}\left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda-\mu}\right)V_i - \lambda\lambda V_i - cV_i = \\ &= -\left(\left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda-\mu}\right)^2 + \lambda^2 + c\right)V_i,\ i = 1,\dots,n-1\end{aligned}$$

Sendo os vetores V_i, $i = 1,\dots,n-1; H, Z$, e W linearmente independentes, segue que

$$\begin{aligned}V_i[h] = 0 &\Rightarrow h = h(t)\\ V_i[z] = 0 &\Rightarrow z = z(t)\\ V_i[w] = 0 &\Rightarrow w = w(t)\end{aligned}$$

e

$$h\left(\left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda-\mu}\right)^2 + \lambda^2 + c\right) = 0$$

Observemos que o vetor curvatura média H de $\Sigma \subset \overline{\mathcal{P}}^n$, é não nulo ($\lambda \neq 0$) e normal a Σ em $\overline{\mathcal{P}}^n$, e, consequentemente, não é constante ao longo de Σ, ou seja, para algum $i_0 \in \{1,\dots,n-1\}$, $\tilde{\nabla}_{V_{i_0}}H \neq 0$.

Então, $(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda-\mu})^2 + \lambda^2 + c$ nunca se anula e portanto

$$h(t) = 0,\ \forall t \text{ e } \tilde{\nabla}_T W = wW + zZ \in \pi$$

Por (4) e por $g_c(Z, V_i) = 0$, e $[T, V_i] = 0$,

$$\begin{aligned}g_c(\tilde{\nabla}_T Z, V_i) &= -g_c(Z, \tilde{\nabla}_T V_i) = -g_c(Z, \tilde{\nabla}_{V_i}T) = \\ &= -g_c(Z, \overline{\nabla}_{V_i}T) = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda-\mu}g_c(Z, V_i) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow g_c(\tilde{\nabla}_T Z, V_i) &= 0\end{aligned}$$

De (5) e das relações

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_T N &= \overline{\nabla}_T N + c g_c(\tilde{\nabla}_T N, x)x = \\
&= \mu T - c g_c(N, \tilde{\nabla}_T x)x = \mu T - c g_c(N, T)x = \\
&= \mu T \\
\tilde{\nabla}_T Z &= -\tilde{\nabla}_T x - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2} N + \frac{1}{\lambda}\tilde{\nabla}_T N = \\
&= -T - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2} N + \frac{1}{\lambda}\tilde{\nabla}_T N = \\
&= \left(\frac{\mu}{\lambda} - 1\right) T - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2} N
\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
g_c(\tilde{\nabla}_T Z, H) &= g_c\left(\left(\frac{\mu}{\lambda} - 1\right) T - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2} N, \frac{\dot{\lambda}}{\lambda - \mu} T - \lambda N - cx\right) = \\
&= -\lambda\left(-\frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2} N\right) + \left(\frac{\mu}{\lambda} - 1\right)\frac{\dot{\lambda}}{\lambda - \mu} = \\
&= \frac{\lambda\dot{\lambda}}{\lambda^2} + \frac{(\mu - \lambda)\dot{\lambda}}{\lambda(\lambda - \mu)} = 0
\end{aligned}$$

Portanto $\tilde{\nabla}_T Z \in \pi$.

Lembramos que, como estamos supondo $c \neq 0$, $\overline{M}^{n+1}(c)$ não é $\mathbb{R}^{n+1}$.

Agora, escolhamos uma base do espaço ambiente $\{e_1, \ldots, e_{n+2}\}$, tal que $\overline{\mathcal{P}}^n$ seja paralelo a $\mathcal{P}^n = [e_1, \ldots, e_n]$ e de modo que tenhamos:

No caso $c < 0$,

- se $\mathcal{P}^n$ é Riemanniano $\left\{\begin{array}{rcl} g_c(e_{n+2}, e_{n+2}) &=& -1 \\ g_c(e_i, e_j) &=& \delta_{ij}\ i, j = 1, \ldots, n+2,\ i \neq n+2 \end{array}\right.$

- se $\mathcal{P}^n$ é Lorentziano, $\left\{\begin{array}{rcl} g_c(e_1, e_1) &=& -1 \\ g_c(e_i, e_j) &=& \delta_{ij}\ i, j = 1, \ldots, n+2,\ i \neq 1 \end{array}\right.$

- se $\mathcal{P}^n$ é Degenerado, $\left\{\begin{array}{rcl} g_c(e_1, e_1) &=& 0 = g_c(e_{n+1}, e_{n+1}), \\ g_c(e_1, e_{n+1}) &=& 1 \\ g_c(e_i, e_j) &=& \delta_{ij}\ i, j = 1, \ldots, n+2,\ i \neq 1, i \neq n+1 \end{array}\right.$

Denotando $\mathcal{P}^2 = [e_{n+1}, e_{n+2}]$, se tomarmos uma folha Lq, $q \in U$, a órbita de $\bar{q} \in Lq$ sob a ação de $O(\mathcal{P}^2)$

$$\{\mathcal{O}(\bar{q}) : \mathcal{O} \in O(\mathcal{P}^2)\} = \overline{\mathcal{P}}^n{}_{\bar{q}} \cap \mathcal{H}^{n+1}(c)$$

contém a folha $\Sigma_{\bar{q}}$, em outras palavras, quando $\overline{\mathcal{P}}^n$ move-se ao longo da folha Lq, sua intersecção com $\overline{M}^{n+1}(c) = \mathcal{H}^{n+1}(c)$ descreve uma hipersuperfície de rotação em volta de $\mathcal{P}^2$, na qual $f(U)$ está contida.

No caso $c > 0$, $g_c(e_i e_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n+2$. Concluímos de forma análoga que quando $\overline{\mathcal{P}}^n$ se move ao longo de uma folha da distribuição D_μ, sua intersecção com $\overline{M}^{n+1}(c) = S^{n+1}$ descreve uma hipersuperfície de rotação em volta de $\mathcal{P}^2$, que contém $f(U)$.

<u>Caso $c = 0$.</u>

Como $\lambda \neq 0$ e Σ_q é umbílica em $\mathbb{R}^{n+1}$, $\forall q \in U$, Σ_q é parte de uma $(n-1)$-esfera S_q de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Agora $\overline{M}^{n+1}(c) = \mathbb{R}^{n+1}$ e o argumento do caso anterior não funciona. Devemos mostrar que as $(n-1)$-esferas S_q, $q \in U$ estão em n-hiperplanos paralelos $\overline{\mathcal{P}}^n$ e têm seus centros sobre uma reta ortogonal a $\overline{\mathcal{P}}^n$.

Seja a distribuição em U

$$\hat{D}(q) = [V_1(q), \ldots, V_{n-1}(q)] \oplus \overline{H}(q),$$

onde $\overline{H}(q)$ é o vetor curvatura média de Σ_q em $\mathbb{R}^{n+1}$ no ponto q.

Para todos X e Y tangentes a folha Σ, a segunda forma fundamental de Σ em $\mathbb{R}^{n+1}$ é

$$\overline{B}(X,Y) = g_0(\overline{B}(X,Y),T)T + g_0(\overline{B}(X,Y),N)N$$

onde por (4)

$$\begin{aligned}
g_0(\overline{B}(X,Y),T)\cancel{T} &= g_0(-\overline{\nabla}_X T, Y) = \\
&= \frac{\dot{\lambda}}{\lambda - \mu} g_0(X,Y) \\
g_0(\overline{B}(X,Y),N)\cancel{N} &= g_0(-\overline{\nabla}_X N, Y) = \\
&= -\lambda g_0(X,Y)
\end{aligned}$$

Analogamente ao primeiro caso, obtemos

$$\overline{H} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda - \mu} T - \lambda N$$

que é um vetor não nulo ($\lambda \neq 0$).

Logo, para todo $q \in U$, $\overline{\mathcal{P}}^n{}_q = \hat{D}(q)$ é um n-hiperplano que contém a $(n-1)$-esfera S_q.

Seja $W = \lambda T + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda - \mu} N$, campo de vetores tangentes a $\mathbb{R}^{n+1}$ definido em U.

Observamos que W é não nulo ($\lambda \neq 0$) e W é ortogonal a $\overline{\mathcal{P}}^n$, pois

$$\begin{aligned}
g_0(W, V_i) &= \lambda g_0(T, V_i) + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda - \mu} g_0(N, V_i) = 0, \; i = 1, \ldots, n-1 \\
g_0(W, \overline{H}) &= g_0\left(\lambda T + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda - \mu} N, \frac{\dot{\lambda}}{\lambda - \mu} T - \lambda N\right) = \\
&= \lambda \frac{\dot{\lambda}}{\lambda - \mu} - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda - \mu} \lambda = 0;
\end{aligned}$$

O campo W é constante ao longo de Σ, pois

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{V_i}W &= V_i[\lambda]T + \lambda\overline{\nabla}_{V_i}T + V_i\left[\frac{\dot{\lambda}}{\lambda-\mu}\right]N + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda-\mu}\overline{\nabla}_{V_i}N = \\ &= \lambda\frac{(-\dot{\lambda})}{\lambda-\mu}V_i + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda-\mu}\lambda V_i = 0, i = 1,\ldots,n-1\end{aligned}$$

Como no caso $c \neq 0$, vamos mostrar que os subespaços $\overline{\mathcal{P}}^n$ são paralelos em $\mathbb{R}^{n+1}$, ao longo da direção T, verificando que existe uma direção constante W_0, não nula, tal que para cada t existe um função real $M(t)$, satisfazendo

$$M(t)W(t) = W_0$$

Primeiramente mostremos que $\overline{\nabla}_T W = \overline{\nabla}_T W(t)$ e $\overline{\nabla}_T W \in [W]$.

$$\begin{aligned}[T,V_i] = 0, \overline{R}(V_i,T)W = 0 &\Rightarrow \overline{\nabla}_{V_i}\overline{\nabla}_T W = \overline{\nabla}_T\overline{\nabla}_{V_i}W = 0, i = 1,\ldots,n-1 \\ &\Rightarrow \overline{\nabla}_T W = \overline{\nabla}_T W(t) \\ [T,V_i] = 0, g_0(W,V_i) = 0 &\Rightarrow g_0(\overline{\nabla}_T W, V_i) = -g_0(W,\overline{\nabla}_T V_i) = -g_0(W,\overline{\nabla}_{V_i}T) = \\ &= -\frac{\dot{\lambda}}{\lambda-\mu}g_0(W,V_i) \Rightarrow \\ &\Rightarrow g_0(\overline{\nabla}_T W, V_i) = 0, i = 1,\ldots,n-1\end{aligned}$$

Logo, podemos escrever

$$\overline{\nabla}_T W = h\overline{H} + wW$$

onde h e w são funções reais

$$\begin{aligned}0 = \overline{\nabla}_{V_i}\overline{\nabla}_T W &\Rightarrow 0 = V_i[h]\overline{H} + h\overline{\nabla}_{V_i}\overline{H} + V_i[w]W + w\overline{\nabla}_{V_i}W \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} V_i[h] = 0 & \Rightarrow h = h(t) \\ h(-(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda-\mu})^2 - \lambda^2) & = 0 \\ V_i[w] = 0 & \Rightarrow w = w(t)\end{cases}\end{aligned}$$

Analogamente ao caso anterior, obtemos que

$$\overline{\nabla}_{V_i}\overline{H} = -\left(\left(\frac{\dot{\lambda}}{\lambda-\mu}\right)^2 + \lambda^2\right)V_i, i = 1,\ldots,n-1$$

não é identicamente nulo, já que Σ está contida numa $(n-1)$-esfera, o que vai implicar na condição $h(t) = 0$, $\forall t$, e consequentemente $\overline{\nabla}_T W \in [W]$.

Como no caso anterior, ao considerarmos o sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} \dot{M}(t) + w(t)M(t) &= 0 \\ M(t_0) &= 1\end{cases}$$

$$M(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} w(r)\,dr}$$

que tem solução única $M(t)$ satisfazendo $M(T)W(t) = W(t_0) \neq 0$, concluimos que os subespaços $\overline{\mathcal{P}}^n$ são paralelos a um subespaço vetorial $\mathcal{P}^n$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Falta verificarmos que as $(n-1)$-esferas S_q, $q \in U$ que contêm cada folha Σ_q, e estão em n-hiperplanos paralelos $\overline{\mathcal{P}}^n$, têm seus centros sobre uma mesma reta ortogonal a $\mathcal{P}^n$.

Seja $Y : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ definida por

$$Y(u,t) = f(u,t) - \frac{1}{\lambda(t)}N(u,t),\ u \in \Sigma,\ t \in L$$

Temos

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_{V_i}Y &= \overline{\nabla}_{V_i}f - V_i\left[\frac{1}{\lambda}\right]N - \frac{1}{\lambda}\overline{\nabla}_{V_i}N = V_i - \frac{1}{\lambda}\lambda V_i \Rightarrow \\
&\Rightarrow \overline{\nabla}_{V_i}Y = 0,\ i = 1,\ldots,n-1 \\
&\Rightarrow Y = Y(t)
\end{aligned}$$

Para cada t, a n-esfera em $\mathbb{R}^{n+1}$ de centro $Y(t)$ e raio $\frac{1}{|\lambda(t)|}$ é tangente a $f(M)$ ao longo de Σ, pois

$$f(u,t) - Y(t) = \frac{1}{\lambda(t)}N(u,t),\ \forall t$$

e contém a $(n-1)$-esfera $S_{f(u,t)}$.

Resta, portanto, provar que $Y(t)$ é uma reta ortogonal ao n-subespaço vetorial $\mathcal{P}^n$.

Primeiramente, mostraremos que $\overline{\nabla}_T Y$ e $\overline{\nabla}_T\overline{\nabla}_T Y \in [W]$

$$\begin{aligned}
\overline{\nabla}_T Y &= \overline{\nabla}_T f - \left(\frac{-\dot{\lambda}}{\lambda^2}\right)N - \frac{1}{\lambda}\overline{\nabla}_T N = T + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2}N - \frac{1}{\lambda}\mu T = \\
&= \frac{\lambda-\mu}{\lambda}T + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2}N \\
g_0(\overline{\nabla}_T Y, V_i) &= \frac{\lambda-\mu}{\lambda}g_0(T,V_i) + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2}g_0(N,V_i) = 0,\ i = 1,\ldots,n-1 \\
g_0(\overline{\nabla}_T Y, \overline{H}) &= \frac{\lambda-\mu}{\lambda}\frac{\dot{\lambda}}{\lambda-\mu} + \frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2}(-\lambda) = 0
\end{aligned}$$

Portanto $\overline{\nabla}_T Y \in [W]$.

$$\begin{aligned}
g_0(\overline{\nabla}_T Y, V_i) = 0,\ [T,V_i] = 0 \ &\Rightarrow\ g_0(\overline{\nabla}_T\overline{\nabla}_T Y, V_i) = -g_0(\overline{\nabla}_T Y, \overline{\nabla}_T V_i) = \\
&= -g_0(\overline{\nabla}_T Y, \overline{\nabla}_{V_i}T) = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda-\mu}g_0(\overline{\nabla}_T Y, V_i) \Rightarrow \\
&\Rightarrow\ g_0(\overline{\nabla}_T\overline{\nabla}_T Y, V_i) = 0,\ i = 1,\ldots,n-1 \\
g_0(\overline{H}, W) = 0, \overline{\nabla}_T W \in [W] \ &\Rightarrow\ g_0(\overline{\nabla}_T\overline{H}, W) = -g_0(\overline{H}, \overline{\nabla}_T W) = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow\ g_0(\overline{\nabla}_T\overline{H}, \overline{\nabla}_T Y) = 0,\ \text{pois } \overline{\nabla}_T Y \in [W]
\end{aligned}$$

$$g_0(\overline{\nabla}_T Y, \overline{H}) = 0 \Rightarrow g_0(\overline{\nabla}_T \overline{\nabla}_T Y, \overline{H}) = -g_0(\overline{\nabla}_T Y, \overline{\nabla}_T H) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g_0(\overline{\nabla}_T \overline{\nabla}_T Y, \overline{H}) = 0$$

Logo, $\overline{\nabla}_T Y$ e $\overline{\nabla}_T \overline{\nabla}_T Y$ são ambos ortogonais a $\overline{\mathcal{P}}^n$ e portanto paralelos a W.
Então, $\overline{\nabla}_T \overline{\nabla}_T Y$ é um vetor nulo ou é paralelo a $\overline{\nabla}_T Y$.
No primeiro caso,

$$\overline{\nabla}_T \overline{\nabla}_T Y = 0 \Rightarrow \frac{d^2Y}{dt^2} = 0 \Rightarrow Y(t) = y_1(t) + y_2$$

onde $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^{n+1}$.

No segundo caso, $\overline{\nabla}_T \overline{\nabla}_T Y$ é paralelo a $\overline{\nabla}_T Y$, ou seja, $\frac{d^2Y}{dt^2}$ é paralelo a $\frac{dy}{dt}$ e novamente $Y(t)$ é uma reta.

Em ambos os casos, a reta $Y(t)$ é ortogonal a $\mathcal{P}^n$, e isto mostra que, $f(U)$ está contida numa hipersuperfície de rotação.

Tome $\bar{p} \in M \setminus \{p\}$, arbitrário, sendo M conexa, existe um caminho inteiramente contido em M, ligando p a q. Podemos cobrir esse caminho por um número finito de vizinhanças U_k tais que $f(U_k)$ é parte de uma hipersuperfície de rotação.

Pelo corolário (4.1.2), vemos que uma hipersuperfície de rotação está localmente determinada pelas funções $\lambda(s)$ e $\mu(s)$. Logo, pelo argumento de conexão concluimos que $f(\mu)$ está contida em uma hipersuperfície de rotação, como queríamos provar.

M

□

Observação 5.2.2 *O teorema (5.2.1) é falso para $n = 2$, pois, qualquer superfície mínima no $\mathbb{R}^3$, diferente do catenóide ou do plano, satisfaz as demais hipóteses do teorema mas não é de rotação.*

No caso $c > 0$, o resultado que segue foi obtido por Otsuki, veja [14].

Corolário 5.2.3 *Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}(c)$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície mínima que possui duas curvaturas principais λ e μ, onde uma delas, digamos λ, tem multiplicidade pelo menos $n-1$. Então $f(M)$ está contida em um catenóide.*

Demonstração. f é analítica, pois é mínima. Em $\overline{M}^{n+1}(c)$, $c > 0$, devemos ter $\lambda \neq 0$ e se existe uma vizinhança U formada somente de pontos umbílicos, $f(U)$ é totalmente geodésica, e portanto, $f(U)$ está contida numa hipersuperfície de rotação mínima. Por outro lado, se existe uma vizinhança U de pontos não umbílicos, o Teorema (5.2.1) se aplica em U. De qualquer modo, por analiticidade $f(M)$ está contida em um catenóide.

□

Definição 5.2.4 *Uma variedade Riemanniana é chamada* **conformemente plana** *se localmente ela é conformemente equivalente a um espaço euclidiano, isto é, se cada ponto da variedade possui uma vizinhança onde existe um difeomorfismo conforme sobre um subconjunto aberto de um espaço euclidiano.*

Claramente, toda variedade Riemanniana de curvatura seccional constante é conformemente plana.

Teorema 5.2.5 *Seja M^n uma hipersuperfície de uma $(n+1)$-variedade Riemanniana conformemente plana $\tilde{M}^{n+1}(c)$, $n \geq 4$ (veja [12]). Então M^n é conformemente plana, se e somente se, em cada ponto de M^n, o operador de Weingarten $\mathcal{A}$ de M^n é de um dos seguintes tipos*

(I) *$\mathcal{A} = \lambda I$, I transformação identidade;*

(II) *$\mathcal{A}$ possui dois auto-valores distintos com multiplicidades $(n-1)$ e 1 respectivamente.*

Usando esse resultado, podemos concluir que uma hipersuperfície $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}(c)$, para $n \geq 4$, é conformemente plana, se e somente se, pelo menos $(n-1)$ de suas curvaturas principais são iguais, digamos, a $-\lambda$. Denotemos a outra curvatura principal por $-\mu$.

O que segue é uma consequência imediata do teorema (5.2.1).

Corolário 5.2.6 *Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}(c)$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície conformemente plana e assuma que $\lambda \neq 0$, $\mu = \mu(\lambda)$ e $\lambda - \mu \neq 0$. Então $f(M)$ está contida numa hipersuperfície de rotação.*

Para o caso $c = 0$, o corolário seguinte foi obtido por Blair, veja [2].

Corolário 5.2.7 *Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}(c)$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície conformemente plana. Então $f(M)$ está contida num catenóide.*

Demonstração. Análoga ao do corolário (5.2.3).

□

O próximo teorema está relacionado com a questão de determinar quais hipersuperfície de $\overline{M}^{n+1}(c)$ são invariantes por um subgrupo a ℓ-parâmetros de isometrias de $\overline{M}^{n+1}(c)$ e possuem uma propriedade específica. Rigorosamente falando, nós mostraremos que se excluirmos as hipersuperfícies que possuem curvaturas principais constantes e assumimos que ℓ é o máximo valor admissível, então $f(M)$ está contida numa hipersuperfície de rotação.

Será conveniente denotar por $\mathcal{C}(n,c)$ o conjunto das hipersuperfícies de $\overline{M}^{n+1}(c)$ que possuem curvaturas principais constantes.

Teorema 5.2.8 *Sejam $n \geq 3$ fixado e $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}(c)$ uma hipersuperfície invariante por um subgrupo a ℓ-parâmetros de isometrias de $\overline{M}^{n+1}(c)$. Suponha que $f \notin \mathcal{C}(n,c)$. Então ℓ é no máximo $n(n-1)/2$. E se $\ell = n(n-1)/2$, $f(M)$ possui duas curvaturas principais λ, μ, onde, uma delas, digamos λ, tem multiplicidade maior ou igual a $n-1$. Se além disso, $\lambda \neq 0$, $\mu = \mu(\lambda)$ e $\lambda - \mu \neq 0$, então $f(M)$ está contida numa hipersuperfície de rotação.*

Demonstração. A última frase é uma consequência imediata do teorema (5.2.1).

Para provar a primeira parte do teorema (5.2.8), começaremos por mostrar que ℓ é no máximo $n(n-1)/2$.

No capítulo 3 (seção (3.2)), definimos hipersuperfície de rotação de $M^n \subset \overline{M}^{n+1}(c)$, por intermédio do subgrupo $O(\mathcal{P}^2)$ de isometrias de $\overline{M}^{n+1}(c)$, formado pelas transformações ortogonais do espaço ambiente $[e_1, \ldots, e_{n+2}]$, com determinante positivo, que deixam o plano $\mathcal{P}^2 = [e_{n+1}, e_{n+2}]$ fixo, ponto a ponto.

Como $O(\mathcal{P}^2)$ é o grupo de isometrias da $(n-1)$-variedade $\overline{M}^{n+1}(c) \cap \overline{\mathcal{P}}^n$, onde $\overline{\mathcal{P}}^n$ é um n-hiperplano afim do espaço ambiente, paralelo a $[e_1, \ldots, e_n]$, sua dimensão é $n(n-1)/2$. Desse modo, M^n é invariante pelo subgrupo, $O(\mathcal{P}^2)$, de isometrias de $\overline{M}^{n+1}(c)$, a $n(n-1)/2$-parâmetros, e a existência de hipersuperfícies de rotação garante que ℓ pode assumir o valor $n(n-1)/2$.

Sejam $p \in M$ e Σ_p a órbita de p sob a ação de um subgrupo a ℓ parâmetros de isometrias de $\overline{M}^{n+1}(c)$. É claro que a dimensão do grupo $G(\Sigma_p)$ de isometrias da órbita Σ_p, é igual a ℓ.

Assuma que $\ell > n(n-1)/2$.

Nesse caso, $\dim \Sigma_p = n$, caso contrário se $\dim \Sigma_p \leq n-1$, pelo teorema (5.1.3) deveríamos ter $\ell \leq n(n-1)/2$.

Como $\dim \Sigma_p = n$, $\Sigma_p \subset M$ e Σ_p é uma órbita, segue que $\Sigma_p = M^n$ e $f \in \mathcal{C}$, o que contradiz a hipótese e mostra que $\ell \leq n(n-1)/2$.

Agora tomemos $\ell = n(n-1)/2$. Queremos mostrar que f possui duas curvaturas principais e uma delas tem pelo menos multiplicidade $(n-1)$.

Sejam novamente $p \in M^n$ e Σ_p a órbita de p sob a ação do subgrupo a ℓ-parâmetros. Suponha $\dim \Sigma_p < n-1$, novamente pelo teorema (5.1.3), $\ell \leq (n-2)(n-1)/2$, o que é impossível. Logo, como $f \notin \mathcal{C}$, $\dim \Sigma_p = n-1$.

Se p é umbílico, $-\lambda(p) = k_1(p) = \cdots = k_n(p)$, a curvatura principal λ tem multiplicidade n, e o teorema segue. Podemos, pois, assumir que p não é umbílico.

Sejam $e_1, \ldots, e_n$ vetores principais unitários em p, com curvaturas principais $k_1 = \cdots = k_n$, respectivamente.

Observemos que $v = v_1 e_1 + \cdots + v_n e_n \in T_pM$, é um vetor unitário e tangente a Σ_p em p, se e somente se, $g_c(v,v) = 1$ e $g_c(v,w) = 0$, onde $w = \sum_{i=1}^n w_i e_i$ é um vetor unitário e normal a $\Sigma_p \subset M$ em p, ou seja,

(1) $\sum_{i=1}^n v_i^2 = 1$, $\sum_{i=1}^n w_i^2 = 1$, e $\sum_{i=1}^n w_i v_i = 0$

Primeiramente mostraremos que o espaço tangente $T_p(\Sigma_p)$ de Σ_p em p contém $n-1$ vetores principais. Isto se reduz a provar que se $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ satisfaz (1), então algum $v_i = 0$.

Sejam N a normal unitária e $\mathcal{A}^N$ o operador de Weingarten da imersão f.

O teorema (5.1.2), neste contexto, significa que a função

$$\begin{aligned} F(v_1, \ldots, v_n) &= k_N(v) = g_c(\mathcal{A}^N v, v) = \\ &= g_c(\textstyle\sum_{i=1}^n v_i \mathcal{A}^N e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j) = \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n k_i v_i^2 \end{aligned}$$

que representa a curvatura normal em $p \in M \subset \overline{M}^{n+1}(c)$, na direção de v, segundo N, restrita ao subconjunto de T_pM definido por

$$\begin{cases} G(v_1,\ldots,v_n) &= \sum_{i=1}^n v_i^2 - 1 &= 0 \\ H(v_1,\ldots,v_n) &= \sum_{i=1}^n w_i v_i &= 0 \end{cases}$$

é constante.

Como v e w são unitários e ortogonais, segue que os vetores gradiente das funções G e H, são tais que

$$\begin{aligned} \nabla G &= 2(v_1,\ldots,v_n) \neq 0 \\ \nabla H &= (w_1,\ldots,w_n) \neq 0 \end{aligned}$$

e ∇G e ∇H são ortogonais.

Logo, pelo teorema (5.1.4) existem reais λ e μ tais que

$$\nabla(F + \lambda G + \mu H) = 0$$

Então

$$2v_i(k_i + \lambda) + \mu w_i = 0,\ i = 1,\ldots,n$$

para todo v_i real.

Se $\mu \neq 0$, então $w_i = 0$, $i = 1,\ldots,n$ e $w = 0$, o que é impossível.

Logo, $\mu = 0$ e $v_i(k_i + \lambda) = 0$, $i = 1,\ldots,n$. Se todos $v_i \neq 0$, então todos os k_i são iguais e isto contradiz a hipótese de que p e não-umbílico. Então algum $v_i = 0$ e isto prova a nossa afirmação.

Notemos que a segunda parte da prova não funciona no caso $n = 2$, pois, no teorema (5.1.2) usamos $n > 2$.

Mas se $n = 2$, f tem no máximo duas curvaturas principais distintas.

Segue que $n-1$ das curvaturas principais são iguais, digamos, $k_1(p),\ldots,k_{n-1}(p) = -\lambda(p)$, e isto completa a prova. A □

Observação 5.2.9 *A classe $C(n,c)$ é a classe de famílias isoparamétricas de $\overline{M}^{n+1}(c)$ no sentido de Elie Cartan. Para o caso $c \leq 0$ elas foram classificadas (veja [6]) e não existem muitas delas. Então a restrição $f \notin C(n,c)$, $c \leq 0$, não é realmente grave.*

Em qualquer caso ($c \leq 0$ ou $c > 0$), para hipersuperfícies mínimas podemos ser mais precisos.

Corolário 5.2.0.1 *Seja $f : M^n \to \overline{M}^{n+1}(c)$, $c \leq 0$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície, não totalmente geodésica, invariante por um subgrupo a ℓ-parâmetros de isometrias de $\overline{M}^{n+1}(c)$. Então, $\ell \leq n(n-1)/2$ e se $\ell = n(n-1)/2$, $f(M)$ é um catenóide, istó é, uma hipersuperfície mínima de rotação.*

Demonstração. Como a única hipersuperfície mínima em $\mathcal{C}(n,c)$, $c \leq 0$, é totalmente geodésica, $f \notin \mathcal{C}$. Logo, pelo teorema (5.2.8) $\ell \leq n(n-1)/2$ e se $\ell = n(n-1)/2$, f tem duas curvaturas principais λ, μ, uma delas, digamos λ, possui multiplicidade pelo menos $n-1$. Segue pelo corolário (5.2.3) que $f(M)$ está contido num catenóide.

□

Observação 5.2.0.2 *Para o caso em que o espaço de curvatura constante é $S^{n+1}(c)$, $n \geq 3$, o resultado do corolário (5.2.0.1) é falso, como mostram os dois exemplos que seguem.*

Exemplo 1.

As hipersuperfícies mínimas de Clifford $S^{n-1} \times S^1 \subset S^{n+1}(1)$ são catenóides invariantes por um subgrupo a ℓ-parâmetros de isometrias de $S^{n+1}(1)$, onde $\ell = n(n-1)/2 + 1$.

Tomemos a solução trivial $x_1^2(s) = (n-1)/n$ de (4.24); obtemos a hipersuperfície de rotação mínima M^n, parametrizada por

$$f(t,s) = (\sqrt{1-1/n}\,\varphi_1(t), \ldots, \sqrt{1-1/n}\,\varphi_n(t), \sqrt{1/n}\cos(\sqrt{n}s), -\sqrt{1/n}\sin(\sqrt{n}s))$$

onde $t = (t_1, \ldots, t_{n-1})$ e $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ é uma parametrização ortogonal da esfera unitária $S^{n+1}(1) \cap \mathbb{R}^n$. Observemos que $M^n = S^{n-1}(\sqrt{1-1/n}) \times S^1(\sqrt{1/n}) \subset S^{n+1}(1)$ e por (3.43) e (3.44) a curva geratriz de M^n é dada por

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{1-1/n} \\ x_{n+1} &= \sqrt{1/n}\sin(\sqrt{n}s) \\ x_{n+2} &= \sqrt{1/n}\cos(\sqrt{n}s) \end{aligned}$$

Uma isometria de M^n é uma isometria de $S^{n+1}(1)$ que deixa M^n invariante, ou seja, uma aplicação ortogonal de $\mathbb{R}^{n+2}$ que deixa M^n invariante.

Consideremos o subgrupo $SG(M^n)$ de isometrias de M^n gerado pelas matrizes de ordem $(n+2)$

$$\begin{bmatrix} Q_n & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} \begin{matrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{matrix} & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$$

onde Q_n e Q_2 são matrizes ortogonais de ordem, respectivamente, n e 2. É claro que $SG(M^n)$ é subgrupo de isometrias de $S^{n+1}(1)$ que deixa M^n invariante.

Como $\dim O(m) = m(m-1)/2$,

$$\ell = \dim SG(M^n) = n(n-1)/2 + 2(2-1)/2 = n(n-1)/2 + 1$$

Exemplo 2.

As hipersuperfícies mínimas de Clifford $S^2 \times S^2 \subset S^5(1)$ são invariantes por um subgrupo a ℓ-parâmetros de isometrias de $S^5(1)$ onde $\ell = n(n-1)/2 = 6$, mas não é um catenóide.

Suponhamos que $M^4 = S^2(r_1) \times S^2(r_2) \subset s^5(1)$ *é hipersuperfície de rotação de* $S^5(1)$. *Pela proposição (4.1.1),* M^4 *possui uma curvatura principal* λ *de multiplicidade pelo menos 3.*

Logo, $\lambda = \frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2}$, M^4 *é umbílica em* $S^5(1)$ *e portanto* M^4 *é uma esfera* $S^4 \subset S^5(1)$, *o que é impossível. Portanto* M^4 *não pode ser hipersuperfície de rotação de* $S^5(1)$. *Da mesma forma como verificamos para* $M^n = S^{n-1} \times S^1 \subset S^{n+1}(1)$, M^4 *é invariante por um subgrupo a* ℓ*-parâmetros de isometrias de* $S^5(1)$, *sendo* $\ell = 3(3-1)/2 + 3(3-1)2 = 6$.

Bibliografia

[1] Barbosa, J. L. and Carmo, M. do, *Helicoids, catenoids and minimal hypersurfaces of $\mathbb{R}^n$ invariant by an l-parameter group of motions*, An. Acad. Brasil. Ciênc. **53** (1981), p 403-408.

[2] Blair, D., *A generalization of the catenoid*, Canad. J. Math. **27** (1975), p 231-236.

[3] Boothby, W. M., *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, Academic Press, Inc., New York, 1975.

[4] Carmo, M. do, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1979.

[5] Carmo, M. do, and Dajczer, M., *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Transactions of the AMS,(2) **277** (1983), p 685-709.

[6] Cartan, E., *Familles de surfaces isoparamétriques dans les espaces à courbure constant*, Ann. Mat. Pura Appl. **17** (1938), p 177-191.

[7] Cartan, E., *Leçons sur la Geomètrie des Espaces de Riemann*, Gauthier-Villars, Paris, 1951.

[8] Delaunay, C., *Sur les surfaces de revolution dont la courbure moyenne est constante*, J. Math. Pures Appl.(1) **6** (1841), p 309-320.

[9] Kobayashi, S. and Nomizu, K., *Foundation of Differential Geometry*, vol. 1 e vol. 2, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.

[10] Lawson Jr., H. B., *Complete minimal surfaces in S^3*, Ann. of Math. (2) **92** (1970), p 335-374.

[11] Lima, E. L., *Curso de Análise*, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, vol. 2.

[12] Nishikawa, S. and Maeda, Y., *Conformally flat surfaces in a conformally flat Riemannian manifold*, Tôhoku Math. J. **26** (1979), p 159-168.

[13] O'Neill, B., *Semi-Riemannian geometry: with application to relativity*, Academic Press, New York, 1983.

[14] Otsuki, T., *Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of constant curvature*, Amer. J. Math. **92** (1970), p 145-173.

[15] Ribeiro Filho, H. B., *Imersões isométricas*, Escola de Geometria Diferencial, Universidade Federal do Ceará, 1978.

[16] Ryan, P., *Homogeneity and curvature conditions for hypersurfaces*, Tôhoku Math. J. **21** (1969), p 363-388.

[17] Spivak, M., *A comprehensive introduction to Differential Geometry*, Publish or Perish, Inc., Boston, Massachusetts, 1970.

[18] Warner, F. W., *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Scott-Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1971.