SUPERFÍCIES DE CURVATURA MÉDIA CONSTANTE EM $\mathbb{R}^3$

Carlos José Matheus

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de concentração: Geometria
Orientador: Prof. Dr. Fabiano Gustavo Braga Brito

– São Paulo, agosto de 1992 –

ABSTRACT

We deal with surfaces $\Sigma^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ which are complete, properly embedded, homeomorphic to a sphere with a finite number of punctures (finite topological type) and have constant mean curvature $H_\Sigma \neq 0$. In chapter II we prove the theorem of the cylindrical boundeness (due to W. Meeks III) which asserts that any end of such surfaces is contained in a solid cylinder, and has an imediate consequence that no such Σ can exist with only one end, that all those Σ having two ends are globally contained in cylinders, and those having three ends lie in slabs (theorems II-1 and corallary II-2, see also [8] and [10]).

Chapter III is partitioned into three sections. All results in this chapter are due to N. Korevaar, R. Kusner and B. Solomon. In §1, we prove two theorems (as in [8]), the first of which asserts that the only surfaces Σ (as above) which can be contained in a solid cylinder are the spheres and the Delaunay surfaces.

In §2 we construct (following [8]) the background to §3 and prove that the curvature $|A|$ of Σ is uniformly bounded. Among other results of this section we have that the area and the total curvature of an end of Σ grow linearly with the lenght (or height) function associated to the end.

In §3 we give the proof of the main result of this work, the theorem of strong convergence, which is the following

Theorem: (Theorem III-3.1) For any end E of a complete, properly embedded surface $\Sigma^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, of finite type and constant mean curvature $\neq 0$, there exists a Delaunay surface D to which it converges exponentially. Near infinity, E and D can be expressed as cylindrical graphs of functions ρ_E and ρ_D, respectively, with $|\rho_E - \rho_D| < ce^{-\lambda x}$ (λ, c constants > 0), as $x \to \infty$.

Initially we define slide back sequence (definition III-3.5) and prove that any slide back sequence to an end E of Σ has a subsequence that converges in a locally C^2 manner to a Delaunay surface D, defined up to translations along its axis L_D.

Next we show that, for a suitable norm $\| \ \|$ (see III-3.9), and still using slide backs the normalized u of the difference $w = \rho_E - \rho_D$ tends to a solution of the Jacobi's equation, as $x \to \infty$. And then, annalytical techniques of elliptic equations and a study of the Jacobi fields yield the tools for demonstrating the main theorem, III-3.1.

RESUMO

Neste trabalho estudamos o artigo [8] de N. Korevaar, R. Kusner e B. Solomon, onde se prova que todo fim E de uma superfície $\Sigma^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, completa, propriamente mergulhada, de tipo topológico finito e curvatura média H_Σ constante e $\neq 0$ é assintoticamente uma superfície de Delaunay D, para a qual converge exponencialmente (teorema 5.18 de [8]). Prova-se também (teorema 2.10) que se Σ tem dois fins, então $\Sigma \equiv D$ e se Σ está contida em um cilindro sólido, então Σ é uma esfera ou uma superfície de Delaunay.

Os dois grandes resultados que possibilitaram esse trabalho são o teorema de W. Meeks III da limitação cilíndrica (teorema 1.10; ver também [10]) e a técnica de reflexão de Aleksandrov. No §3 de [8] deduz-se uma fórmula do fluxo que permite associar um peso (vetorial) a cada fim ([8], definição 3.8) e mostrar, no §4, que a curvatura $|A|$ de Σ é uniformemente limitada (teorema 4.6).

No §5 as técnicas de equações diferenciais elíticas e um estudo de campos de Jacobi permitem chegar ao teorema principal.

CAPÍTULO I

Introdução

Vamos neste capítulo fixar a notação e estabelecer as convenções que fazemos ao longo de todo este trabalho. Nosso objetivo é o estudo detalhado de alguns resultados recentes no contexto da teoria das superfícies do $\mathbb{R}^3$ cuja curvatura média é constante e não nula. Denotaremos sempre por Σ uma tal superfície. Supomos que $\Sigma^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ é completa (sem bordo) e propriamente mergulhada. O Teorema da Convergência Forte de Korevaar, Kusner e Solomon, resultado principal deste trabalho, afirma que, se Σ tem tipo finito, cada fim de Σ é assintoticamente uma superfície de Delaunay, para a qual converge uniforme e exponencialmente (dizemos que Σ tem tipo (topológico) finito quando Σ é homeomorfa a uma esfera com um número finito de "furos"). De importância vital para a obtenção desse resultado é o Teorema da Limitação Cilíndrica, de Meeks, que demonstraremos no próximo capítulo.

Os dois grandes resultados que permitem chegar ao Teorema da Convergência Forte são o princípio de reflexão de Alexandrov (hoje bem conhecido) e a limitação cilíndrica. Este último afirma que cada fim de Σ está contido em um cilindro sólido (de raio $< \infty$), se a curvatura média H de Σ não se aproxima de zero. O princípio de reflexão empregado em um caso não compacto (porém cilindricamente limitado) permite concluir simetria rotacional. Com esses dois resultados e a técnica de "Slide Back" (ver capítulo III, §3) obtém-se o teorema, a menos do modo de convergência (exponencial), o que se consegue com o auxílio de campos de Jacobi.

Segue-se do teorema de Alexandrov que Σ é ilimitada (e tem um laço essencial) ou é uma esfera redonda. Em qualquer caso, Σ separa o $\mathbb{R}^3$ em duas componentes conexas e podemos falar em *interior* e *exterior*, relativamente a Σ. Fica definido (globalmente) um

campo normal unitário "exterior", que chamaremos ν. Se h é o vetor curvatura média de Σ, temos $h = -H\nu$.

Seja $\Sigma^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ hipersuperfície como acima. Indicaremos com H_Σ a função curvatura média de Σ. Quando $H_\Sigma = H$ for constante, chamaremos Σ uma *H-superfície.*

E denotará um fim anular de Σ, ou seja, um subconjunto propriamente mergulhado tal que existe um homeomorfismo $F : D \setminus 0 \cong E$, com $F(y) \to \infty$ quando $y \to 0$ ($D\backslash 0$ é o disco $D^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ (raio 1 e centro $(0,0)$) menos a origem). Diremos que o fim $E \subseteq \Sigma$ é *cilindricamente limitado* se E está contido em um semi-cilindro sólido.

$\Xi^\infty(\Sigma)$ é o conjunto $\{X : \Sigma \to T\Sigma / X \in C^\infty\}$ dos campos C^∞ tangentes a Σ.

Indicaremos com A a segunda forma fundamental de Σ. Assim, se λ_1 e λ_2 são autovalores associados à normal "exterior" ν (definida acima), tem-se $|A|^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$. Se $\{f_1, f_2\} \subseteq \Xi^\infty(\Sigma)$ é um referencial (móvel) ortonormal em $T\Sigma$, o vetor curvatura média h satisfaz

$$h = -H_\Sigma \nu = (\sum_i \nabla_{f_i} f_i)^\perp = \Delta \overline{x} \, ,$$

onde $\overline{x}$ é o vetor posição.

Fixemos, de uma vez por todas, a notação para subconjuntos do $\mathbb{R}^3$ que serão frequentemente utilizados.

$B_R(q) = \{y \in \mathbb{R}^3 / |y - q| < R\}$ é a bola (aberta) de raio R e centro $q \in \mathbb{R}^3$.

$S_R(q) = \partial B_R(q)$ é a esfera de raio R e centro q.

$D_{v,R}(q) = \overline{B_R(q) \cap v_q^\perp} = \{y \in \mathbb{R}^3 / |y - q| \leq R \, . \, < y - q, v >= 0\}$ é o disco de raio R e centro q, normal a v.

$C_{v,R}(q) = \{y + \lambda v / y \in D_{v,R}(q) \, . \, \lambda \in \mathbb{R}\}$ é o cilindro sólido de raio R cujo eixo passa por q e é paralelo a v.

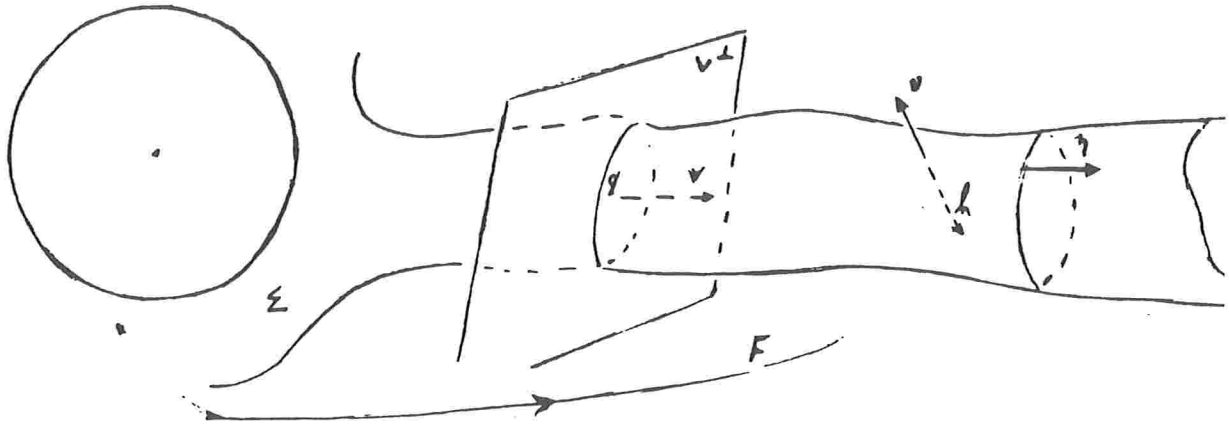
$C^+_{v,R}(q) = \{y + \lambda v / y \in D_{v,R}(q) \, , \, \lambda > 0\}$ é o semi-cilindro sólido de raio R e eixo paralelo a v passando por q.

Se $q = 0$ ou $R = 1$, não será necessário explicitá-los. Assim, $B_R = B_R(0)$, $B = B_1(0)$,

etc.

Seja Ω a componente de $R^3 \setminus \Sigma$ para a qual aponta o vetor h (Ω é o "interior" de $\Sigma = \partial\Omega$). Indicamos com W qualquer parte de Ω contida em algum semi-cilindro sólido $C^+_{v,R}(q)$ (então $W \subseteq \Omega \cap C^+_{v,R}(q)$). Nesse contexto, $E \subseteq \Sigma$ é um fim cilindricamente limitado se $E = \partial W \setminus D_{v,R}(q)$, para alguma tripla (v, R, q).

S denotará (quando não $S_1(0)$) um aberto em Σ.



$U \subseteq \mathbb{R}^3$, aberto, será (se existir) tal que ∂U é C^∞ por partes e $\partial U \cap \Sigma = S$.

$Q = \partial U \setminus \Sigma$ é chamado um chapéu para (S, U).

η será o vetor conormal, definido em $\partial S = \partial Q$.

Indicaremos com Div a divergência em $\mathbb{R}^3$, e com div a divergência relativa a Σ.

Observação

Quando, em um capítulo qualquer, quisermos referir-nos a um resultado ou definição do mesmo capítulo, indicaremos simplesmente o número com que tal resultado ou definição aparece no capítulo (o número do § sempre fica à esquerda). Quando no referirmos a um resultado ou definição de outro capítulo, indicaremos obrigatoriamente o número do capítulo referido em romanos. Por exemplo, III-2.1 indica o teorema 2.1 do capítulo III.

O teorema de Delaunay afirma (ver [4]) que as únicas superfícies de revolução $\Sigma^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

com curvatura média constante $\neq 0$ são as superfícies que hoje têm seu nome. Sabe-se hoje que se Σ é H-superfície ($H \neq 0$) completa, propriamente mergulhada, contida em um cilindro sólido, então Σ é uma superfície de Delaunay ou uma esfera (ver Teorema III-1.1). Em particular, se Σ tem dois fins, então Σ é uma superfície de Delaunay (ver corolário II-2). Se Σ é compacta, o teorema de Alexandrov afirma que Σ é uma esfera. Se Σ tem bordo, o artigo [2] de F. Brito e R. Sá Earp estuda a dependência da geometria de Σ em relação à do bordo e prova, em particular, que se $\partial\Sigma$ é um círculo e Σ está contida localmente ao longo do bordo em um dos dois semi-espaços determinados pelo plano que contém $\partial\Sigma$, então Σ é uma capa esférica.

Tudo leva a crer que a hipótese *propriamente mergulhada* é bastante restritiva, mesmo no caso não-compacto, no sentido de que existem poucas H-superfícies completas (de tipo finito) satisfazendo essa hipótese.

A teoria das varifolds, necessária para o capítulo III (§2 e §3) encontra-se em [14]. O símbolo $V = \underline{v}(M, \theta)$ denotará uma varifold V, com $\operatorname{spt} V = M$ e multiplicidade θ, ou seja, a classe de equivalência dos pares $(\widetilde{M}, \tilde{\theta})$ tais que $\mu(\widetilde{M} \triangle M) = 0$ e $\tilde{\theta} = \theta$ q.t.p. em $M \cap \widetilde{M}$, (onde $\widetilde{M}$ (e M) são conjuntos 2-retificáveis e $\mu = H^2$, a medida de Hausdorff em dimensão 2). Dizemos que uma sequência $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de varifolds converge para uma varifold V (e escrevemos $V_k \to V$) se a sequência $(\mu_{V_k})_{k\in\mathbb{N}}$ satisfaz $\mu_{V_k} \to \mu_V$, onde (para uma varifold V) μ_V é a medida definida por

$$\mu_V(A) = \int_{A\cap M} \theta d\mu \ .$$

CAPÍTULO II
A Limitação Cilíndrica

Nosso objetivo neste capítulo é demonstrar o seguinte teorema (devido a W. Meeks III):

Teorema 1 (limitação cilíndrica)

Seja $A \equiv S^1 \times [0,1)$ um anel propriamente mergulhado em $\mathbb{R}^3$ com curvatura média $H \equiv 1$. Existem $R > 0$ e $q_0 \in \mathbb{R}^3$ tais que $A \subseteq C^+_{a,R}(q_0)$, onde a é vetor axial (ver definição 7).

Segue-se o corolário abaixo:

Corolário 2

Se $\Sigma^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ é superfície completa, propriamente mergulhada, de tipo topológico finito e curvatura média $H \equiv 1$, então cada fim de Σ é cilindricamente limitado. Se $E_1, \ldots, E_k$ são todos os fins de Σ e $a_1, \ldots, a_k$ os vetores axiais correspondentes, então $a_1, \ldots, a_k$ *não estão* todos em um mesmo hemisfério aberto de S^2. Em particular,

$k = 1$ é impossível;
se $k = 2$, então Σ está contida em um cilindro sólido;
e se $k = 3$, então Σ está contida em um plano espesso.

Precisaremos de dois lemas. O lema chave é o Lema 5. O Lema 3 (abaixo) é o lema da altura máxima para gráficos.

Lema 3

Seja $M^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ um gráfico conexo sobre um domínio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $\partial M \subseteq \mathbb{R}^2$ e cuja curvatura média H_M satisfaz $H_M \equiv 1$. Então

(i) $M \cap \mathbb{R}^2 = \partial M$ e

(ii) se M é o gráfico de $f : \Omega \to \mathbb{R}$, então $\max_{\Omega} f \leq 1$.

Observação

A condição (i) diz que M fica totalmente de um lado do plano que contém ∂M.

Note-se também que $M \cap \mathbb{R}^2 \subseteq \overline{\Omega}$ (em verdade $M \cap \mathbb{R}^2 = \partial\Omega$), pois M é um gráfico.

Corolário 4

Se $M^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, superfície conexa, compacta, de curvatura média $H_M \equiv 1$ é tal que $\partial M \subseteq \mathbb{R}^2$, então a distância máxima de M a $\mathbb{R}^2$ é 2.

Observação

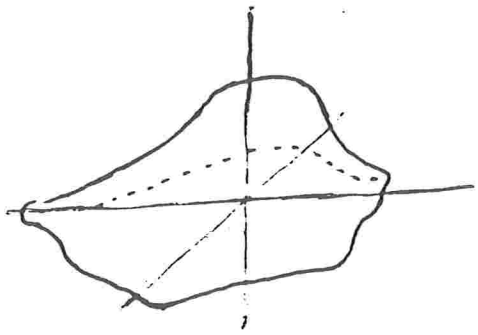
O Corolário 4 é válido (com demonstração análoga) supondo $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $\partial M \subseteq \{x_{n+1} = 0\}$ e H_M constante $\neq 0$ (não necessariamente $= 1$). Se fizéssemos $H = \Sigma\lambda_i$ (a soma das curvaturas principais) e substituíssemos a distância máxima 2 por $\frac{2n}{H}$, então, para $H \equiv 1$ e $n = 2$, teríamos $d_{\max} = 4$. Daí o nome "height-4" nos artigos em inglês.

Lema 5 (lema da separação dos planos)

Seja $A \cong S^1 \times [0, 1)$ um anel completo, propriamente mergulhado em $\mathbb{R}^3$ cuja curvatura média H_A satisfaz $H_A \geq 1$, e sejam π_+ e π_- planos paralelos a distância > 4 um do outro. Sejam $\prod_+$ o semi-espaço disjunto de π_- cujo bordo é π_+ e $\prod_-$ o semi-espaço disjunto de π_+ cujo bordo é π_-. Então $A \cap \prod_+$ ou $A \cap \prod_-$ tem todas as componentes conexas compactas.

Passemos às demonstrações.

Demonstração de 3



Sejam λ_1 e λ_2 as funções curvaturas principais de M. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$(2H)^2 = \left(\sum_{i=1}^{2} \lambda_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{2} 1\lambda_i\right)^2 \leq \sum 1^2 \sum \lambda_i^2 = 2|A|^2$$

Logo $|A|^2 - 2H^2 \geq 0$. No nosso caso, $|A|^2 \geq 2$.

Sendo M um gráfico, o campo normal (de Gauss) $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ satisfaz $\nu_3 \geq 0$. Lembrando, da geometria riemanniana, que

$$\Delta f = -2H\nu_3 = -2\nu_3 \quad \text{e} \quad \Delta\nu_3 = -|A|^2\nu_3 \ ,$$

temos

$$\Delta(f - \nu_3) = \Delta f - \Delta\nu_3 = (|A|^2 - 2)\nu_3 \geq 0 \ :$$

e segue-se do princípio do máximo (para funções subharmônicas) que a função $w = f - \nu_3$ não pode ter um máximo em $\operatorname{int}\Omega$, a menos que seja constante.

E como

$$w|_{\partial\Omega} = -\nu_3|_{\partial\Omega} \leq 0 \ ,$$

temos que

$$w \leq 0 \text{ em } \overline{\Omega} \ .$$

Ou seja, $f \leq \nu_3 \leq 1$ em $\overline{\Omega}$ e (ii) está demonstrado.

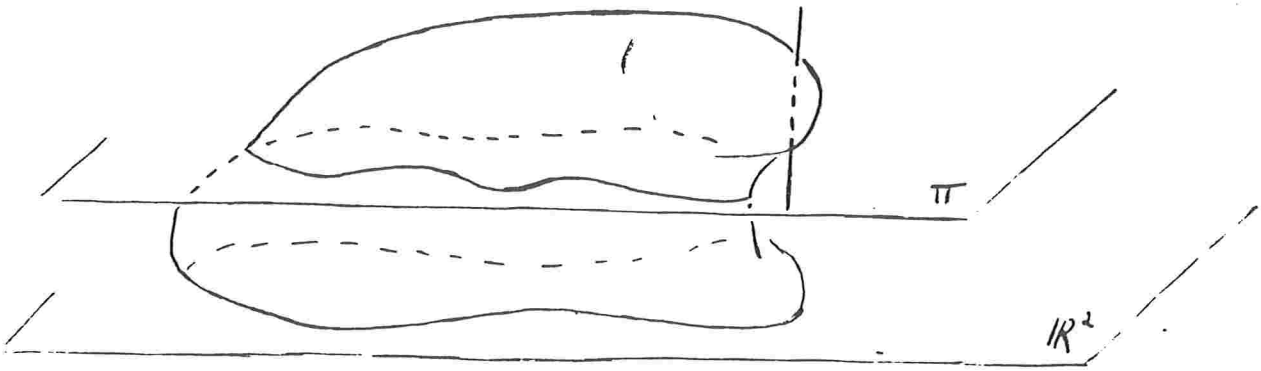
Se $\partial M \subsetneq M \cap \mathbb{R}^2$, então o princípio do máximo acarreta que ν_3 muda de sinal, em contradição com a hipótese de M ser um gráfico conexo.

□

Demonstração de 4

Considerando as componentes conexas de $M \backslash \mathbb{R}^2$, basta mostrar o resultado no caso em que M está contida em um dos semi-espaços determinados em $\mathbb{R}^3$ pelo "plano" $\mathbb{R}^2$.

Seja M como no enunciado e seja d a distância máxima de M a $\mathbb{R}^2$. Indicando com π o plano não disjunto de M cuja distância a $\mathbb{R}^2$ é $\frac{d}{2}$, e com $\prod$ o semi-espaço disjunto de $\mathbb{R}^2$ cujo bordo é π, afirmamos que $M \cap \prod$ é um gráfico, cujo bordo está em π.



Realmente, se supomos o contrário, a técnica de reflexão de Alexandrov vai fornecer uma superfície fechada acima de π (que teria que ser uma esfera).

Logo a distância máxima ($= \frac{d}{2}$) de M a π é 1 (pelo Lema 3), e segue-se que $d \leq 2$. □

A fim de demonstrar 5, fazemos a seguinte definição:

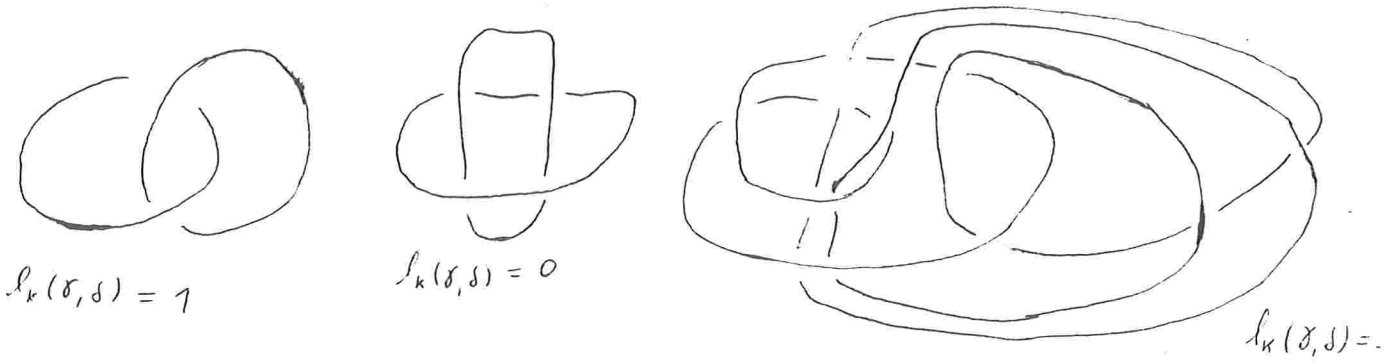
Definição 6

Sejam γ e δ laços simples orientados em $\mathbb{R}^3$ tais que $\gamma \cap \delta = \emptyset$, e seja $\Delta^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, Δ transversal a γ um disco (topológico) orientado tal que $\partial\Delta = \delta$. O *número de link* entre γ e δ é

$$l_k(\gamma, \delta) = i(\gamma, \Delta) ,$$

onde $i(\gamma, \Delta) \in \mathbb{Z} \cap [-\#(\gamma \cap \Delta), \#(\gamma \cap \Delta)]$ é o número de pontos em $\gamma \cap \Delta$, contados de acordo com a orientação de γ. Em palavras, é o número de vezes que γ "fura" Δ com

uma escolha de sinal.



Observemos que $\gamma \mapsto l_k(\gamma, \delta)$ é um cociclo em $\mathbb{R}^3 \backslash \delta$ pois, se existe $\Gamma \in \mathbb{R}^3 \backslash \delta$ tal que $\partial\Gamma = \gamma$, então $l_k(\gamma, \delta) = 0$. Logo $l_k(\cdot, \delta)$ representa uma classe em $H^1(\mathbb{R}^3 \backslash \delta, \mathbb{Z})$.

Se $\tilde{\gamma} \approx \gamma$ em $\mathbb{R}^3 \backslash \delta$, fazendo $\tilde{\gamma} - \gamma = \partial\overline{\gamma}$ temos

$$l_k(\tilde{\gamma}, \delta) - l_k(\gamma, \delta) = l_k(\tilde{\gamma} - \gamma, \delta) = l_k(\partial\overline{\gamma}, \delta) = 0 \ .$$

Em verdade $[l_k(\cdot, \delta)]$ gera $H^1(\mathbb{R}^3 \backslash \delta, \mathbb{Z}) \cong H_2(\mathbb{R}^3 \backslash \delta, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Recordemos que, dados um paralelo λ e um meridiano μ em um toro τ, para todo laço simples essencial γ em τ existem $\ell, m \in \mathbb{Z}$, relativamente primos, tais que

$$\gamma \approx \ell\lambda + m\mu \ .$$

Se $\ell = 0$, segue-se que $m = \pm 1$.

Demonstração de 5

Suponhamos por absurdo que $A \cap \Pi_+$ e $A \cap \Pi_-$ contêm ambos componentes não compactas. Seja $R > z = \frac{1}{2}d(\pi_+, \pi_-)$ tal que $B_R \supseteq \partial A$. Seja $\mathcal{O}$ um toro sólido (fechado) de raio $\frac{z+2}{2}$, cujo eixo é o círculo c, bordo do disco flat $D_{R+z} \| \pi_+$ e seja $\tau = \partial\mathcal{O}$.

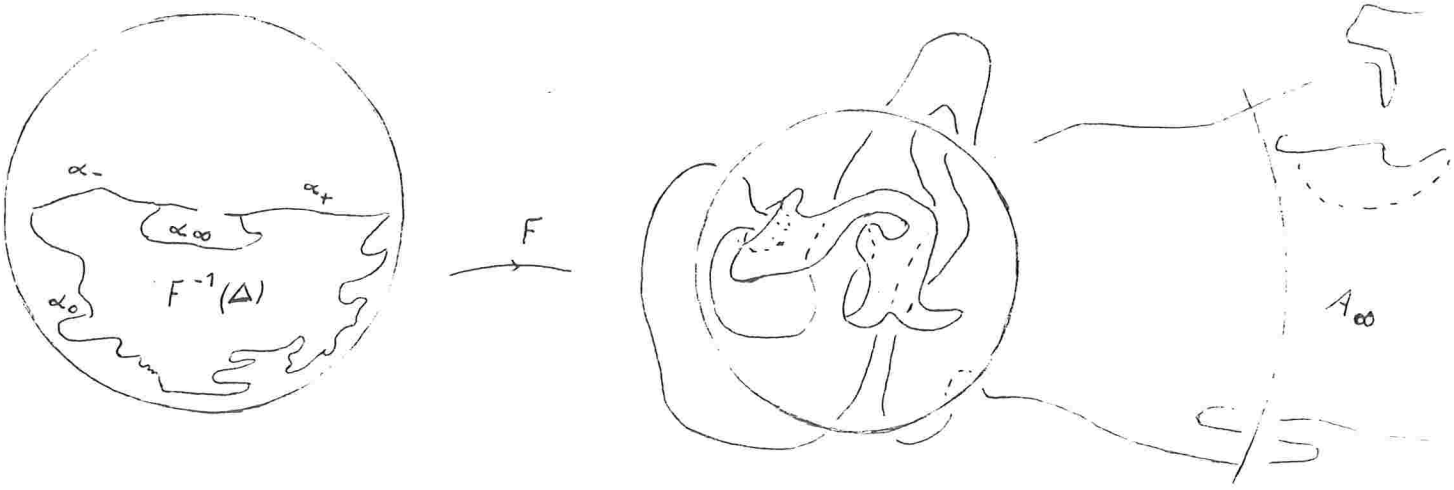
Sejam δ_+ e δ_- arcos próprios não-compactos em $A \cap \Pi_+$ e $A \cap \Pi_-$, partindo de $S_R = \partial B_R$ (se R é suficientemente grande, isso é possível).

Sendo A conexo por caminhos, existe um arco $\delta_0 : [0,1] \to A$, tal que $\delta_0(0) = \delta_+(0)$ e $\delta_0(1) = \delta_-(0)$. E sendo δ_0 compacto, podemos supor (aumentando R, se necessário, e mudando os pontos de partida de $\delta_\pm$) que $\delta_0 \subseteq \overline{B}_R$.

Além disso, como $\delta_\pm$ não são limitados, existe um arco compacto $\delta_\infty : [0,1] \to A \backslash B_{3R}$ tal que $\delta_\infty(0) = \delta_-(t)$, $\delta_\infty(1) = \delta_+(t)$, t suficientemente grande, o que decorre do fato que $A \backslash B_{3R}$ tem uma única componente não-compacta.

Realmente, se $F : D \backslash 0 \cong A$ é parametrização, existe $r \in (0,1]$ tal que $F(x) \notin \overline{B_{3R}}$ sempre que $|x| < r$, pois, caso contrário, teríamos uma seqüência $x_n \to 0$ tal que $F(x_n) \in \overline{B_{3R}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, em contradição com a hipótese de que F é própria.

Seja A_∞ a componente não-compacta de $A \backslash B_{3R}$, e construímos o arco $\delta_\infty : [0,1] \to A_\infty$, "começando" em δ_- e "terminando" em δ_+ (sendo arcos próprios e não-compactos, δ_+ e δ_- intersetam A_∞).

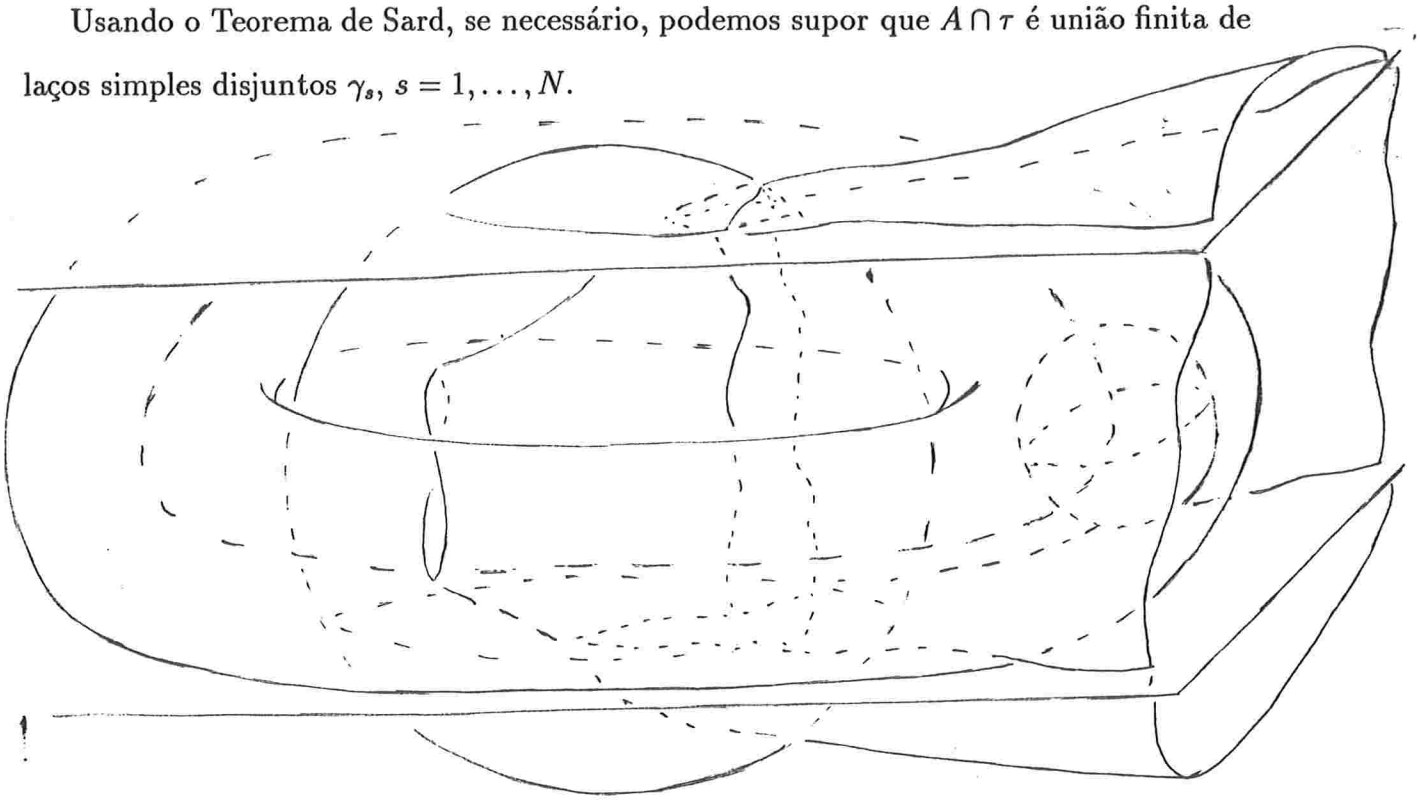


Fazendo $\overline{\delta_\pm} = \delta_\pm|_{[0,t]}$ a curva fechada $\delta = \delta_0 \cup \overline{\delta_-} \cup \delta_\infty \cup \overline{\delta_+}$ é bordo de um disco $\Delta \subseteq A$, compacto, homotopicamente trivial (isso pode ser visto considerando os arcos $\alpha_0 = F^{-1}(\delta_0)$, $\alpha_\infty = F^{-1}(\delta_\infty)$ e $\alpha_\pm = F^{-1}(\delta_\pm)$. É sempre possível escolher α_∞, e logo δ_∞, de modo que $\alpha_0 \cup \overline{\alpha}_- \cup \alpha_\infty \cup \overline{\alpha}_+$ seja trivial em $D \backslash 0$). Observemos que $l_k(\delta, c) = i(c, \Delta) = \pm 1$.

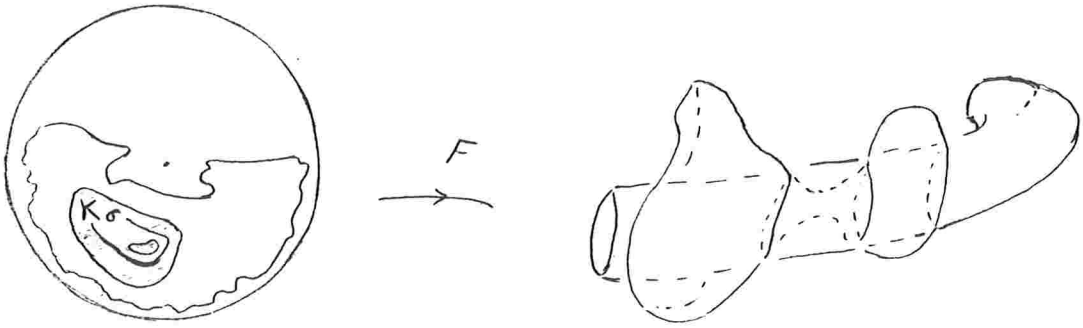
Se S' é uma esfera de raio 2 e centro sobre c, então, movendo o centro de S' ao longo

de c, é intuitivamente óbvio que S' "atravessa" Δ e que o primeiro contato se dá em um ponto interior de $\Delta \cap \mathcal{O}$.

Usando o Teorema de Sard, se necessário, podemos supor que $A \cap \tau$ é união finita de laços simples disjuntos γ_s, $s = 1, \ldots, N$.



Seja $\Delta \cap \tau = \sum_{s=1}^{n} \gamma_s$, $n \leq N$, e sejam λ e μ um paralelo e um meridiano em τ. Então, para $s = 1, \ldots, n$, $\gamma_s = \ell_s \lambda + m_s \mu$, $\ell_s, m_s \in \mathbb{Z}$, $(\ell_s, m_s) = 1$, ou $\gamma_s \approx 0$. E logo, se $\gamma_s \not\approx 0$, $l_k(\gamma_s, \delta) = \pm \ell_s$, pois $\lambda \approx c$ (em $\mathcal{O}$) e μ é bordo de um disco $K \subseteq \mathcal{O}$ (e portanto $i(\delta, K) = 0$). Além disso, qualquer que seja s, tem-se $\gamma_s \approx 0$ em Δ, e logo $l_k(\gamma_s, \delta) = 0$. Logo $\ell_s = 0$ e segue-se que $m_s = \pm 1$. Então $\gamma_s \approx \pm \mu$ ou $\gamma_s = 0$.



Sendo $\Sigma \gamma_s = \Delta \cap \tau \approx \delta$, não se pode ter $\gamma_s \approx 0$, $\forall s$. Logo, existe s tal que $\gamma_s \approx \pm \mu$.

$F^{-1}(\Delta \cap \mathcal{O})$ é então uma união finita de domínios K_σ, $\sigma = 1, \ldots, n_\Delta$, e $\partial(\Delta \cap \mathcal{O}) = \cup \gamma_s$. Seja s tal que $\gamma_s \approx \pm\mu$. Seja σ tal que $F^{-1}(\gamma_s) \subseteq K_\sigma$ e seja $\overline{\gamma}$ o mais interno dos $\overline{\gamma}_s \subseteq K_\sigma$ tais que $\gamma_s \approx \pm\mu$, $\gamma_s = F(\overline{\gamma}_s)$. Seja $\gamma = F(\overline{\gamma})$.

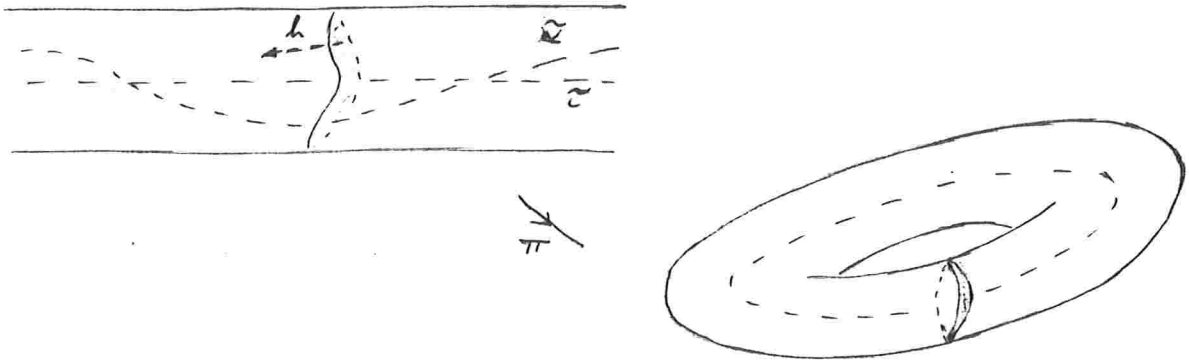
Seja Δ^0 a região fechada em $\Delta \cap \mathcal{O}$ limitada por γ. Δ tem uma única componente fronteira essencial $\gamma \approx \pm\mu$ em $\Delta \cap \tau$.

Seja $\tilde{\mathcal{O}}$ o recobrimento universal de $\mathcal{O}$. Obviamente, $i_*\pi_1(\Delta^0) = 0$ em $\pi_1(\mathcal{O})$.

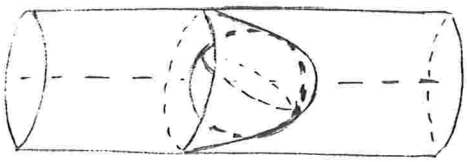
Seja então $\widetilde{\Delta^0}$ um levantamento compacto de Δ^0. Se $\tilde{\alpha}$ é um arco em $\tilde{\mathcal{O}}$ propriamente homotópico ao levantamento $\tilde{c}$ de c, então

$$i(\tilde{\alpha}, \widetilde{\Delta^0}) = i(\pi\tilde{\alpha}, \Delta^0) = i(c, \Delta^0) = l_k(c, \gamma) = l_k(c, \pm\mu) = \pm 1 \ ,$$

logo $\tilde{\alpha} \cap \widetilde{\Delta^0} \neq \emptyset$. Vemos então que $\widetilde{\Delta^0}$ separa os dois fins de $\tilde{\mathcal{O}}$. Sendo $\mathcal{O}$ isometricamente imerso em $\mathbb{R}^3$, $\widetilde{\Delta^0}$ é localmente congruente a Δ^0.



Então $H_{\widetilde{\Delta^0}} = H_{\Delta^0}$. Seja então S uma esfera de raio 2 e centro sobre $\tilde{c}$, na componente conexa de $\tilde{\mathcal{O}} \backslash \widetilde{\Delta^0}$ para a qual aponta o vetor $h_{\widetilde{\Delta^0}} = -H_{\Delta^0}\nu_{\widetilde{\Delta^0}}$. Deslocando S na direção de $\widetilde{\Delta^0}$, o primeiro contato tem que ser em um ponto *interior* de $\widetilde{\Delta^0}$. E comparando as curvaturas $H_s = \frac{1}{2}$ e $H_{\widetilde{\Delta^0}} \geq 1$ chegamos a uma contradição.



$\square$

Definição 7

Seja $A \cong S^1 \times [0,1)$ como no Lema 5. Um vetor $a \in S^2$ é um *vetor axial* para A se existe uma seqüência $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $q_n \longrightarrow \infty$ e $\frac{q_n}{|q_n|} \longrightarrow a$.

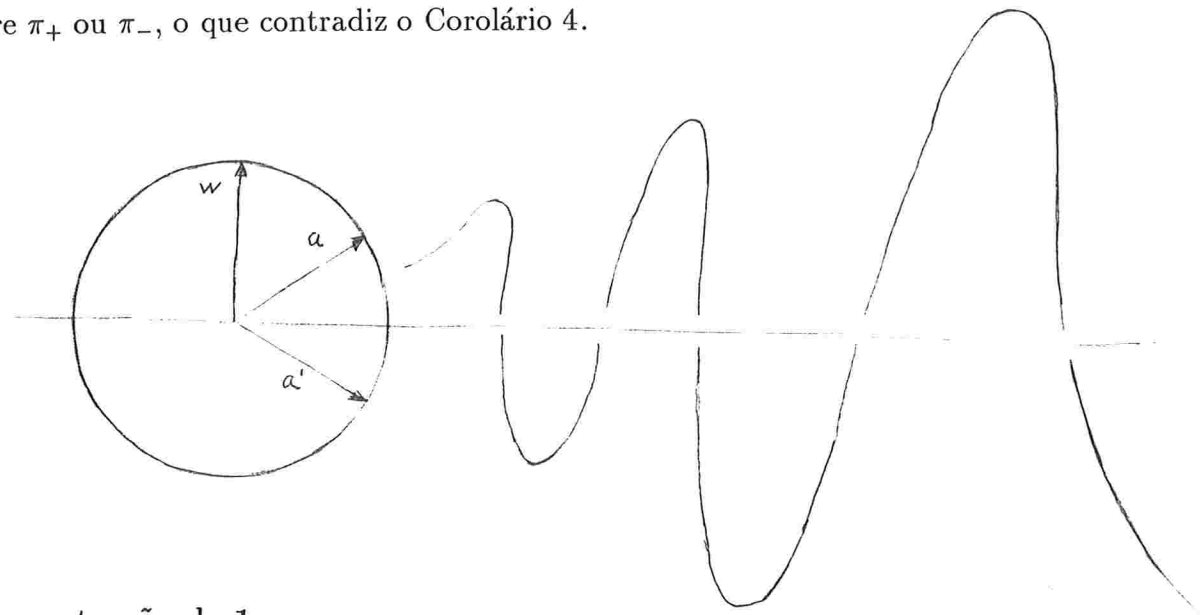
Observação

A existência de a decorre da compacidade de S^2. A unicidade decorre do Lema 5 e do corolário 4.

Realmente, se $a' \neq a$ é vetor axial, fazendo $w = \frac{a-a'}{|a-a'|}$, temos, por definição, que, qualquer que seja $N \in \mathbb{N}$, existem $q_n, q'_n \in A$ tais que

$$< q_n.w >> N \ , \qquad < q'_n, w >< -N \ .$$

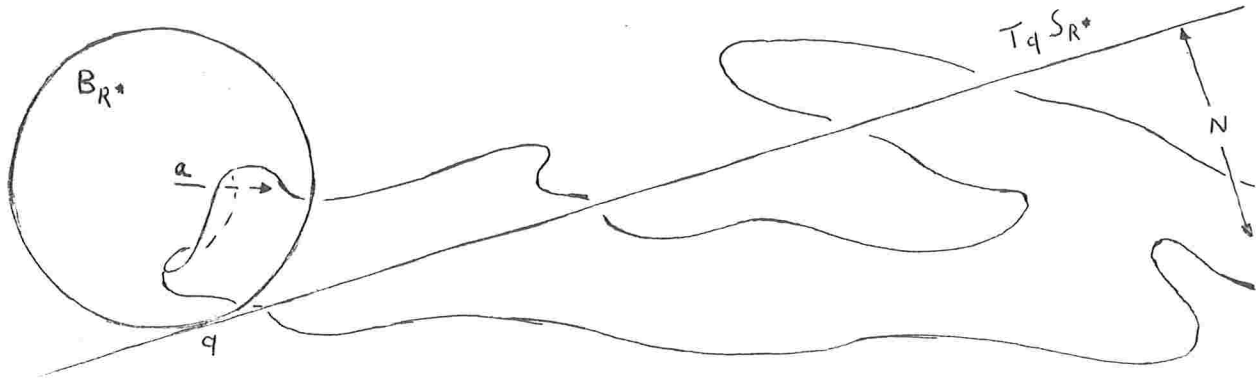
Fazendo $\pi_+ = w^\perp + 3w$ e $\pi_- = w^\perp - 3w$, e definindo $\sqcap_+$ e $\sqcap_-$ como antes, vemos que ou $A \cap \sqcap_+$ e $A \cap \sqcap_-$ tem ambos componentes conexas não-compactas, o que contradiz o Lema 5, ou existem componentes conexas compactas de altura arbitrariamente grande sobre π_+ ou π_-, o que contradiz o Corolário 4.



Demonstração de 1

Seja a vetor axial para A, e seja $R^* > 0$ tal que $\partial A \subseteq B_{R^*}$. Suponhamos que $R^* > 2$, de modo que a distância entre dois planos disjuntos $T_q S_{R^*}$ e $T_{-q} S_{R^*}$, $q \in S_{R^*}$, tangentes a S_{R^*}, é > 4.

Se $T_qS_{R^*}$ interseta o semi-eixo $[a]^+ = \{ta|t > 0\}$, então $A \cap \tau_q S^{\emptyset}_{R^*}$ tem uma componente conexa não-compacta, onde indicamos com $\tau_q S^{\emptyset}_{R^*}$ o semi-espaço fechado em $\mathbb{R}^3$ cujo bordo é TqS_{R^*} e que não contém S_{R^*}. Realmente, para todo $N \in \mathbb{N}$, existe $\tilde{q} \in A \cap \tau_q S^{\emptyset}_{R^*}$ tal que $d(\tilde{q}, T_qS_{R^*}) > N$ (se todas as componentes fossem compactas, $\tilde{q}$ estaria em uma delas e, pelo Corolário 4, teríamos $d(\tilde{q}, T_qS_{R^*}) \leq 2$).



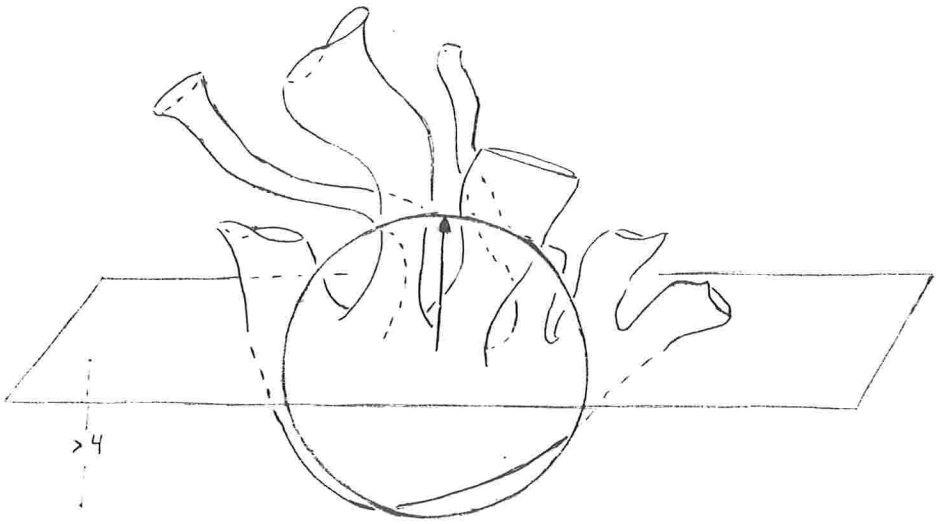
Sendo $R^* > 2$, segue-se do Lema 5 que $A\tau_{-q}S^{\emptyset}_{R^*}$ tem todas as componentes conexas compactas e, pelo Corolário 4, todas têm altura ≤ 2 sobre $T_{-q}S_{R^*}$. Se $T_qS_{R^*}$ é paralelo a a, observemos que a "altura 2" é preservada na passagem al limite (considere-se uma seqüência convergente de planos que não intersetam $[a]^+$).

Então, para todo $v \in S^2$ tal que $v \perp a$, A não "ultrapassa" o plano $\pi_{R^*+2} = v^{\perp} + (R^*+2)v$. E logo $A \subseteq \overline{C_{a,R}}$, $R = R^* + 2$. Também se tem A "à direita" do plano $x \equiv -R$, e segue-se que

$$A \subseteq C^+_{a,R}(q_0) \ , \quad q_0 = -Ra \ . \qquad \square$$

Demonstração de 2

Sendo Σ completa e mergulhada, cada fim de Σ é anular e a primeira afirmação segue do Teorema 1.



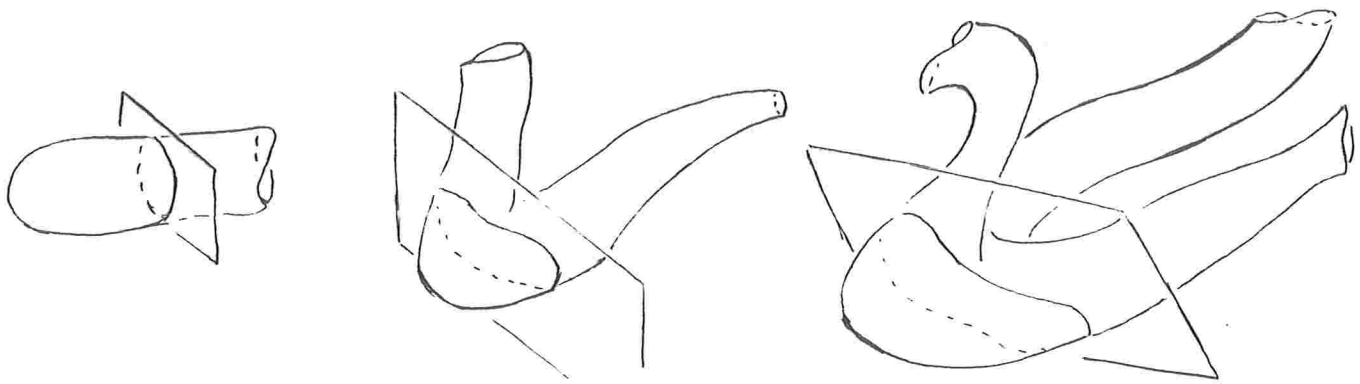
Se $E_1, \ldots, E_k$ estão em um mesmo hemisfério aberto de S^2, é imediato a partir do Corolário 4, da unicidade dos vetores $a_1, \ldots, a_k$ e do Teorema 1 que obteremos uma contradição.

Se $k = 1$, então $a_1 = a_k$ tem que estar em um único hemisfério aberto de S^2. Logo tal Σ não existe.

Se $k = 2$ e Σ não está em um cilindro sólido, então a_1 e $a_2 = a_k$ estão em um mesmo hemisfério aberto de S^2 (pois são independentes).

Se $k = 3$ e Σ não está em um slab, então a_1, a_2 e $a_3 = a_k$ são independentes, e logo a_3 aponta para fora de um semi-espaço fechado cujo bordo é o plano gerado por a_1 e a_2.

Em consequência, a_1, a_2 e a_3 estão em um mesmo hemisfério aberto de S^2.



$\square$

Observemos que não existe função "altura" própria positiva em uma superfície $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ completa, não-compacta, propriamente mergulhada e de curvatura média constante . Caso existisse, teríamos uma contradição com o corolário acima.

CAPÍTULO III
A Convergência Forte

Neste capítulo os principais resultados de [8] são demonstrados e tópicos recentes da teoria das H-superfícies são abordados.

Suponhamos que $\Sigma^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ é completa, propriamente mergulhada (sem bordo), de tipo topológico finito e curvatura média H_Σ constante $\neq 0$. No §1 apresentamos a prova (devida a N. Korevaar, R. Kusner e B. Solomon) de que as únicas tais Σ com dois fins são as superfícies de Delaunay (ver [4] ou [5]). O método na demonstração é um emprego da técnica de reflexão (de Alexandrov) definindo a função de Alexandrov. Segue-se também uma restrição para as Σ que estão contidas em um semi-espaço.

No §2 constrói-se o aparato para os resultados do §3 e prova-se o teorema da limitação uniforme da curvatura.

No último parágrafo (§3) constrói-se a técnica de "slide back" e prova-se o teorema principal de [8]. Todo fim $E \subseteq \Sigma$ é assintoticamente uma superfície de Delaunay, para a qual converge exponencialmente uma subsequência de qualquer "slide back sequence" partindo de E.

§1

Vamos provar neste § os dois teoremas seguintes.

Teorema 1.1

Se $\Sigma^2 \in \mathbb{R}^3$ é H-superfície completa, propriamente mergulhada, contida em um cilindro sólido, então Σ é rotacionalmente simétrica em relação a uma reta paralela ao eixo do cilindro. Em verdade, Σ é uma esfera ou uma superfície de Delaunay.

Observação

Segue-se do teorema da limitação cilíndrica (ver Corolário II-2) e do Teorema 1.1 que se Σ tem dois fins, então Σ é uma superfície de Delaunay.

Teorema 1.2

Se Σ é H-superfície completa, propriamente mergulhada em $\mathbb{R}^3$, de tipo finito e está contida em um semi-espaço de $\mathbb{R}^3$, então Σ tem um plano de simetria paralelo ao bordo do semi-espaço. Mais que isso: Σ é a união de um gráfico (de altura máxima $\frac{1}{H_\Sigma}$ sobre o plano de simetria) e sua reflexão (em particular, Σ está em um slab).

As demonstrações desses dois teoremas são quase imediatas a partir dos dois lemas abaixo, que utilizam as funções de Alexandrov.

Lema 1.3

Seja $E \subseteq \Sigma \cap C^+_{a,R}, R > 0$, a vetor axial. Se a função auxiliar α_1 de Alexandrov (ver definição 1.5) tem um valor máximo local interior z em um ponto $q \in \pi$ ($\pi = v^\perp$, $v \in S^2 \cap a^\perp$), então $\pi_z = \pi + zv$ é um plano de simetria para Σ.

Lema 1.4

Seja E como no Lema 1.3. Então, qualquer que seja $\pi \parallel a$, ou bem a função α de Alexandrov (ver Definição 1.7) é estritamente decrescente, ou Σ tem um plano de simetria paralelo a π.

Passamos à contrução das funções α_1 e α.

Sejam $W = \Omega \cap C^+_{a,R}$ e $S = \partial W \cap \Sigma$, como no capítulo I. Seja $\pi = v^\perp$, $v \in S^2 \cap a^\perp$, e indiquemos com π_t e $\prod_t$ o plano $\pi + tv$ e o semi-espaço $\bigcup_{s \geq t} \pi_s$. Se $q \in \pi$, L_q é a reta $q+$. Se $G \subseteq \mathbb{R}^3$, $\tilde{G}_t$ denota a reflexão de $G \cap \prod_t$ através de π_t.

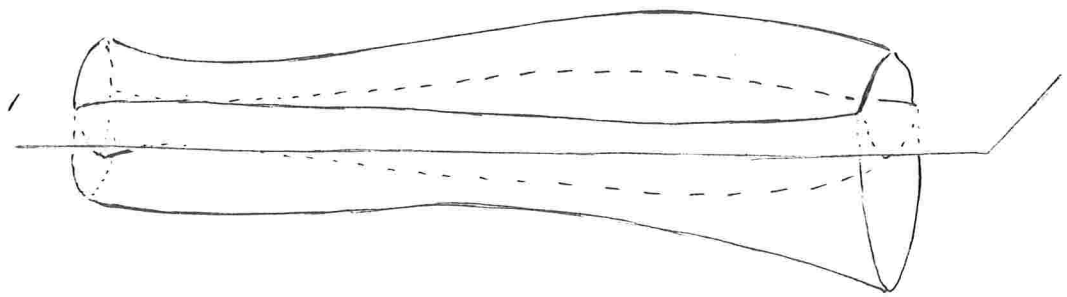
Definição 1.5

Seja $q_1 = q_1(q) = q + t_1 v$, onde $t_1 = t_1(q)$ é o maior valor de t para o qual $q + tv \in \overline{W}$ (q_1 é o ponto onde L_q "entra" em $\overline{W}$ pela "primeira vez", "vindo de cima", e existe se $L_q \cap \overline{W} \neq \emptyset$, pela limitação cilíndrica). Se existe $t_2 = t_2(q) < t_1$ tal que $q + tv \in \overline{W}$ $\forall t \in [t_2, t_1]$, $q + tv \notin W$ para todo $t < t_2$ suficientemente próximo de t_2 e $q + t_2 v \in S$, seja $q_2 = q_2(q) = q + t_2 v$ (o ponto onde L_q "sai" de W pela "primeira vez"). Se L_q é tangente a S em q_1, seja $q_2 = q_1$. Em qualquer desses casos está definida (na interseção dos domínios de q_1 e q_2) a *função auxiliar de Alexandrov* α_1, por

$$\alpha_1(q) = \frac{t_1 + t_2}{2} .$$

Observemos que, no caso em que L_q é transversal a S em q_1, $\alpha_1(q)$ é o valor de t para o qual a reflexão de q_1 através de π_t tem o primeiro contato com S, para $t < t_1$.

Demonstração de 1.3



Seja q um ponto de máximo local interior para α_1. Diremos que q é do *tipo 1* se existir $U_q \ni q$, aberto em π, tal que existe $\alpha_1(q')$ $\forall q' \in U_q$. Diremos que q é do *tipo 2* se, qualquer

que seja $U_q \ni q$ aberta em π, existir $q' \in U_q$ tal que $Lq' \cap \overline{W} = \emptyset$.

Se q é do tipo 1, existe uma vizinhança G de $q_1(q)$, aberta em Σ, tal que $\widetilde{G}_z \subseteq W$, e o princípio do máximo no interior se aplica. Por conexidade e pela continuação analítica, π_z é plano de simetria.

Se q é do tipo 2, Σ tem um plano tangente vertical em $q_1(q) = q_2(q)$, e o princípio do máximo no bordo se aplica. E novamente a analiticidade fornece que π_z é plano de simetria. □

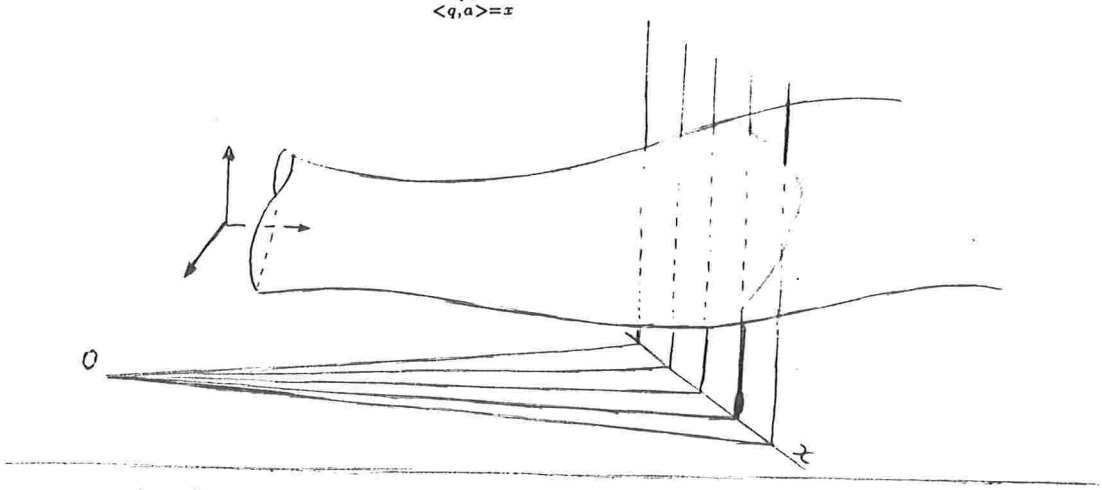
Observação

A função α_1 é, por construção, semi-contínua superiormente, e logo atinge o supremo em qualquer domínio compacto.

Definição 1.7

Sejam $E \subseteq \Sigma$ um fim cilindricamente limitado, a vetor axial e $\pi = v^{\perp} \parallel a$, como antes. Seja $x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $q \mapsto < q, a >$. A *função de Alexandrov* $\alpha : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ é definida por

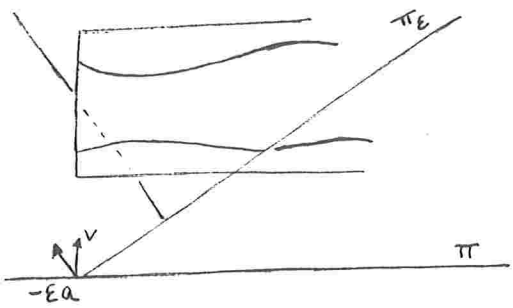
$$\alpha(x) = \max_{\substack{q \in \pi \\ <q,a>=x}} \alpha_1(q) \ , \qquad x \geq 0 \ .$$

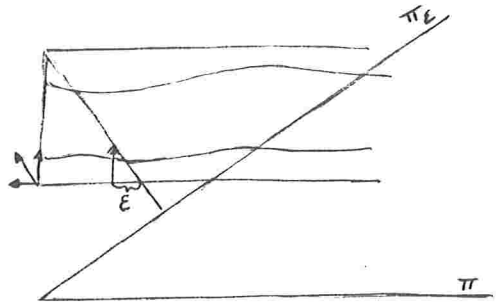


Demonstração de 1.4

Seja $\alpha_{1,\epsilon} : \pi_\epsilon \to \mathbb{R}$ a função auxiliar para E relativa a $\pi_\epsilon = (v - \epsilon a)^{\perp}$, $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$. Como $\partial E \subseteq D_{a,R}$ (e $E \subseteq C^{+}_{a,R}$), temos que se $q \in E$ e $x(q) \geq 2R\epsilon$, então a projeção normal de

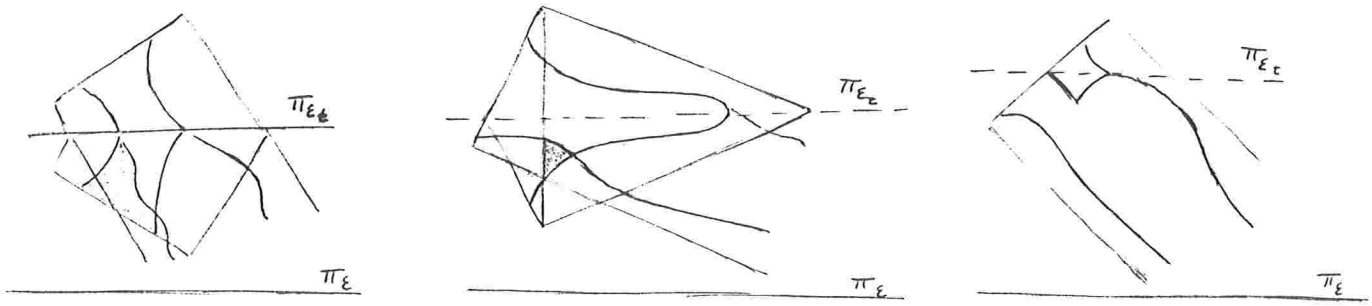
q sobre π_ϵ está no domínio de $\alpha_{1,\epsilon}$.





Além disso, a projeção normal sobre π_ϵ da reflexão $\tilde{q}_{\epsilon_t}$ através de π_{ϵ_t} de um ponto $q \in E \cap \prod_{\epsilon_t}$ ($t \in \mathbb{R}$) "cai" no domínio de $\alpha_{1,\epsilon}$ se, e somente se, tal se dá com a projeção normal sobre π_ϵ do próprio q (pois $\pi_{\epsilon_t} \parallel \pi_\epsilon$), e logo $\alpha_{1,\epsilon}$ está definida na projeção sobre π_ϵ de $\tilde{q}_{\epsilon_t}$, se $x \geq 2R\epsilon$.

Não é verdade, em geral, que $\widetilde{E_{\epsilon_t}} \subseteq W$, ou mesmo que $\widetilde{E_{\epsilon_t}} \cap \{x \geq 2R\epsilon\} \subseteq \overline{W}$; mas se t é suficientemente grande, isso acontece.



Observemos então que $\alpha_{1,\epsilon}(q) \to -\infty$, quando $x(q) \to \infty$ (para $\epsilon > 0$). Logo, se $\alpha_{1,\epsilon}$ tem um máximo em $\{\alpha_{1,\epsilon}(q) \geq 0\}$, então $\alpha_{1,\epsilon}$ tem um máximo (global). Mas $\{\alpha_{1,\epsilon}(q) \geq 0\}$ é compacto, e $\alpha_{1,\epsilon}$ é semi-contínua superiormente, logo esse máximo existe.

Além disso, pela limitação cilíndrica, E não tem plano de simetria paralelo a π_ϵ, e segue-se do Lema 1.3 que $\alpha_{1,\epsilon}$ não tem máximo local interior.

Assim, $\alpha_{1,\epsilon}$ tem um valor máximo (global) $z_\epsilon = \alpha_{1,\epsilon}(q_\epsilon)$, que é atingido na projeção q_ϵ (sobre π_ϵ) de um ponto de ∂E.

Então, se $t \geq z_\epsilon$, $\widetilde{E_{\epsilon_t}} \cap \{x \geq 2R\epsilon\} \subseteq \overline{W}$.

Realmente, z_ϵ é a maior das "alturas de ponto médio" de segmentos normais a π_ϵ que tem interseção $\neq \emptyset$ com ∂E e que estão contidos em $\overline{W}$. Se $t' = \alpha_{1,\epsilon}(q')$ é uma dessas "alturas", então

$$\widetilde{q_{1,\epsilon}(q)}_{t'} < q_{2,\epsilon}(q), \text{ se } \alpha_{1,\epsilon}(q) > t' \text{ e } \widetilde{q_{1,\epsilon}(q)}_{t'} \geq q_{2,\epsilon}(q), \text{ se } \alpha_{1,\epsilon}(q) \leq t' .$$

Sendo z_ϵ máxima entre essas "alturas", se $t \geq z_\epsilon$, então $\alpha_{1,\epsilon}(q) \leq t$, $\forall q \in \pi_\epsilon$; e logo $\widetilde{E_{\epsilon_t}} \subseteq \overline{W}$.

E $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$ era qualquer. Então, para todo $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$,

$$\widetilde{E_{\epsilon_t}} \cap \{x \geq 2R\epsilon\} \subseteq \overline{W}, \quad \forall t \geq z_\epsilon .$$

Fazendo $\epsilon \to 0^+$, temos $\pi_\epsilon \to \pi$ e, como $z_\epsilon \leq 2R$ para todo ϵ, existe $\lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \sup z_\epsilon$. Seja $(s_\epsilon)_{\epsilon>0} \subseteq (z_\epsilon)_{\epsilon>0}$ tal que $s_\epsilon \to \lim\limits_{\epsilon \to 0^+} \sup z_\epsilon$. Então, por passagem ao limite,

$$\widetilde{E_t} \cap \{x \geq 0\} \subseteq \overline{W}, \text{ para todo } t \geq \limsup_{\epsilon \to 0^+} z_\epsilon .$$

Fazendo $s_\epsilon = \alpha_{1,\epsilon}(q_\epsilon)$ (e passando a uma subsequência, se necessário), temos $q_\epsilon \to q \in x^{-1}(0)$, e logo (usando a semi-continuidade),

$$\limsup_{\epsilon \to 0^+} z_\epsilon \leq \alpha_1(q) \leq \alpha(0) .$$

Logo, se $t \geq \alpha(0)$, necessariamente $\widetilde{E}_t \cap \{x \geq 0\} \subseteq \overline{W}$.

Afirmamos então que

$$\alpha(x) \leq \alpha(0)\ \forall x \geq 0 \text{ se, e somente se, } \widetilde{E}_t \cap \{x \geq 0\} \subseteq \overline{W}\ \forall t \geq \alpha(0)\ .$$

Realmente, se $\alpha(x) \leq \alpha(0)\ \forall x \geq 0$, seja $t > \alpha(0)$. Então $t > \alpha(x)$, $\forall x \geq 0$, e logo $t > \alpha_1(q)\ \forall q \in \pi$ tal que $x(q) \geq 0$.

Mas então, para todo $q \in \pi$ tal que $x(q) \geq 0$, $\widetilde{q_1(q)_t}$ está "acima" de (ou sobre) $\widetilde{q_1(q)_{\alpha_1(q)}} = q_2(q)$, ou seja, $< \widetilde{q_1(q)_t}, v > \in [t_2(q), t_1(q)]$. E logo $\widetilde{E}_t \cap \{x > 0\} \subseteq \overline{W}$.

Reciprocamente, suponhamos que $\widetilde{E}_t \cap \{x \geq 0\} \subseteq \overline{W}\ \forall t \geq \alpha(0)$, e seja $x \geq 0$.

Então, se $\widetilde{E}_{\alpha(x)} \cap \{x > 0\} \not\subseteq W$, temos $\alpha(x) < \alpha(0)$. E se $\widetilde{E_{\alpha(x)}} \cap \{x > 0\} \subseteq \overline{W}$, seja $q \in \pi$ tal que $\alpha_1(q) = \alpha(x)$. Então $\widetilde{q_1(q)_{\alpha(x)}} = q_2(q)$ e, pelo princípio do máximo, $\widetilde{E_{\alpha(x)}} = E \setminus \prod_{\alpha(x)}$ e $\pi_{\alpha(x)}$ é plano de simetria para E, e logo $\alpha(x) = \alpha(0)$.

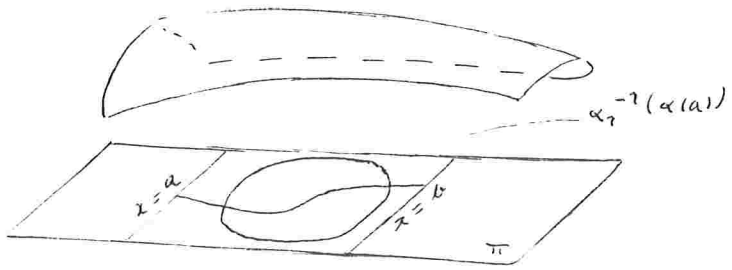
Em qualquer caso, $\alpha(x) \leq \alpha(0)$.

Ficou provado que $\alpha(0) \geq \alpha(x)\ \forall x \geq 0$. Então, substituindo 0 por $x_0 > 0$, teremos $\alpha(x) \leq \alpha(x_0)$ para todo $x \geq x_0$. Em consequência

$$\alpha(x) \leq \alpha(x_0) \quad \forall x \geq x_0, \text{ para todo } x_0 \in [0, \infty)\ .$$

Ou seja, α é não-crescente.

Segue-se que ou α é estritamente decrescente, ou existem $a < b \in [0, \infty)$ tais que $\alpha|_{[a,b]}$ é constante. Nesse caso, α_1 tem um máximo local interior $(= \alpha(a))$ em $x^{-1}([a, b]) \cap \pi$, e pelo Lema 1.3, Σ tem um plano de simetria paralelo a π.

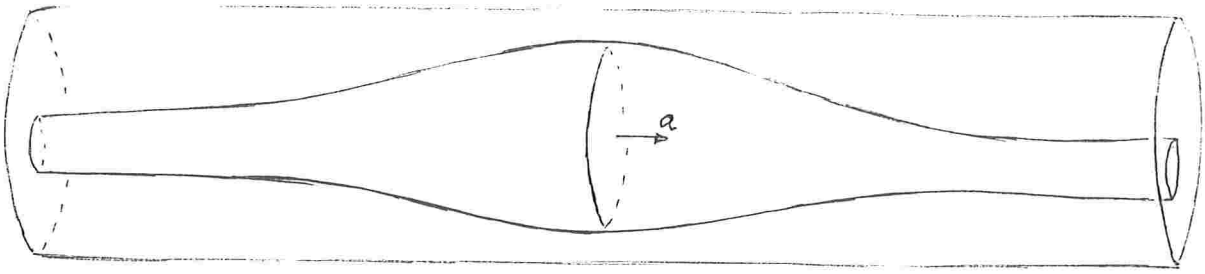


$\square$

Demonstração de 1.1

Seja $\Sigma \subseteq C_{a,R}$. Se $\Sigma \subseteq C^{+}_{a,R}(ta)$ para algum $t \in \mathbb{R}$, segue-se do Corolário II-2 que Σ é compacta (pois a função $x|_{\Sigma} : q \to < q, a >$ é própria) e do teorema de Alexandrov que Σ é uma esfera.

Suponhamos portanto que Σ tem dois fins, E_0 e E_1, tais que $\partial E_0 = \partial E_1$, e seja $\pi \parallel a$. Pelo Lema 1.4, ou Σ tem um plano de simetria paralelo a π ou $\alpha|_{E_0}$ e $\alpha|_{E_1}$ são ambas estritamente decrescentes, e logo atingem o máximo em ∂E_0, que é um máximo interior para α em Σ, e logo Σ tem plano de simetria paralelo a π. Como $\pi \parallel a$ era qualquer, Σ tem plano de simetria paralelo a todo plano que contenha o eixo de $C_{a,R}$.



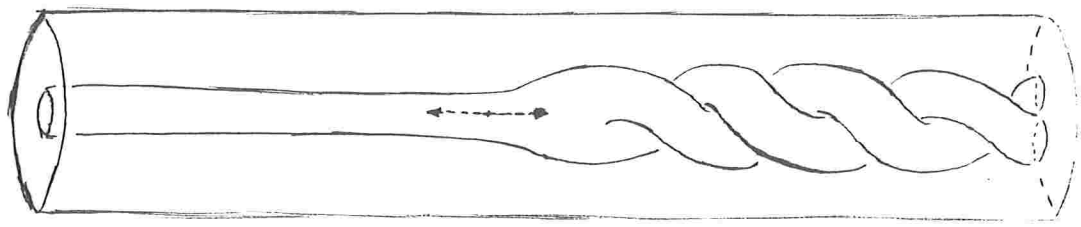
Em seguida, seja $\gamma = \Sigma \cap \beta$, $\beta \parallel a^{\perp}$, uma seção normal de Σ. Então γ é simétrica em relação a todas as direções, que são dadas pelas interseções de β com os planos de simetria de Σ, e logo todas essas interseções concorrem no centro de massa m_{β} de γ.

Em consequência, γ é um círculo, de centro m_{β}. E como $\beta \perp a$ era qualquer, todas as seções normais de Σ são círculos cujos centros estão na mesma reta, e segue-se que Σ é rotacionalmente simétrica com relação a essa reta. □

Observação

Se $\Sigma \subseteq C_{a,R}$ tem mais que dois fins, existem dois fins com o mesmo vetor axial, a. Então, para pelo menos um deles, e para algum plano $\pi \parallel a$, a função α não é não-

crescente. Absurdo.



Demonstração de 1.2

Sejam $E_1, \ldots, E_k$ os fins de Σ e seja $\alpha_1 : \partial H_S \to \mathbb{R}$ definida no bordo do semi-espaço H_S que contém Σ. Se Σ não tem plano de simetria paralelo a ∂H_S, então α é estritamente decrescente sobre E_j (atingindo o máximo em ∂E_j), $j = 1, \ldots, k$.

Além disso, como $K = \Sigma \setminus \overline{\bigcup_{j=1}^{k} E_j}$ é compacto, α_1 tem um máximo local interior (relativo a K). E segue-se que existe um plano de simetria paralelo a ∂H_S. Se o vetor axial a_j de E_j não é paralelo a ∂H_S, então $\alpha|_{E_j} \to -\infty$, e a simetria acarreta que tal E_j não existe. Em verdade, Σ está em um slab.

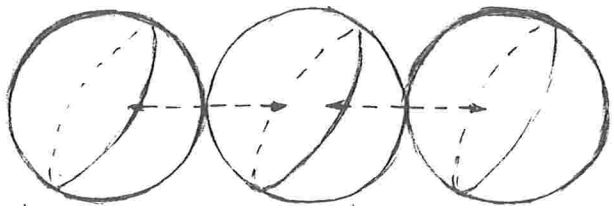
A técnica de reflexão de Alexandrov fornece então que Σ é um gráfico G acima do plano de simetria, e os pontos de Σ "abaixo" desse plano são as reflexões dos pontos "acima". Logo $\Sigma = G \cup \tilde{G}$. A estimativa de altura é consequência imediata de II-3. $\square$

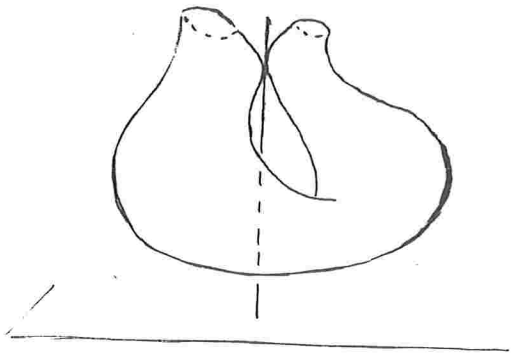
Observação

Esses resultados são válidos em um contexto mais geral, a saber, o caso em que Σ é *fracamente mergulhada* (Σ é imersa e a imersão deixa de ser mergulho devido a pontos isolados com auto-tangência entre folhas cujo vetor curvatura média aponta em sentidos contrários. Um exemplo é dado pela superfície limite da família a um parâmetro das superfícies de Delaunay (com $H \equiv \frac{1}{2a}$, fixo).

Se Σ é fracamente mergulhada e $(S, W) \subseteq (\Sigma, \Omega)$, define-se a função α_1 como antes,

sendo que, em um ponto de auto-tangência, faz-se $q_2 = q_1$.





Segue-se do Teorema 1.2 que não existe Σ com três fins e dois vetores axiais antípodas, pois Σ estaria na interseção de dois semi-espaços H_S e H_t tais que $\partial H_S \perp \partial H_t$, e teria que ser simétrica em relação a cada bordo.

Corolário 1.8

Se os vetores axiais $a_1, \ldots, a_k$ de Σ estão em um mesmo hemisfério fechado de S^2, então Σ está em um slab.

A demonstração é óbvia.

O resultado principal deste § é o teorema abaixo:

Teorema 2.1 (limitação uniforme da curvatura)

A curvatura de uma H-superfície (completa, propriamente mergulhada, de tipo finito) $\Sigma^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ é uniformemente limitada. Ou seja, existe $K > 0$ tal que $|A_\Sigma(q)| < K, \forall q \in \Sigma$.

A demonstração de 2.1 depende de vários resultados, que enunciamos a seguir. As demonstrações serão dadas na mesma ordem.

Teorema 2.2 (fórmula balancing)

Se $H_\Sigma \equiv H$, então

$$\int_{\partial S} \eta - H \int_Q \nu = 0 \ .$$

Mais que isso: existe uma classe $\omega \in H^1\ (\Sigma; \mathbb{R}^3)$ definida por

$$\omega : [\Gamma] \in H_1(\Sigma) \mapsto \int_\Gamma \eta - H \int_K \nu \ ,$$

onde $\Gamma \in Z_1(\Sigma)$, grupo dos 1-ciclos em Σ e $K \in C_2(\mathbb{R}^3)$ é tal que $\partial K = \Gamma$ (com as escolhas consistentes de orientação).

Observação:

A classe ω permite definir o peso $w(E)$ (ver definição 2.10) de $E \subseteq \Sigma$ e a fórmula acima fornece que a soma dos pesos dos fins de Σ é $= 0$. A demonstração do teorema 2.1 decorre de um absurdo que se obtém comparando os pesos de um fim de Σ e de um catenóide M cuja construção é possível em virtude do comportamento linear da área e da curvatura total nos fins de Σ. O passo de absurdo é garantido pelo lema 2.3 (abaixo).

Lema 2.3

O peso de um fim de um catenóide é $\neq 0$.

Teorema 2.4 (crescimento linear de área)

Seja $E \subseteq C^+_{a,R}$ um fim cilindricamente limitado de uma 1-superfície $\Sigma^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ e seja $w = w(E)$ o peso de E. Então existe uma constante $c = c(R, < a, w >)$ tal que

$$|E \cap C_L| < cL \ ,$$

onde $C_L \subseteq C_{a,R}$ é um cilindro (compacto) de raio R e altura $L - 2R$.

Proposição 2.5 (fórmula de monotonicidade)

Seja $\Sigma = \partial\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ H-superfície completa e propriamente mergulhada, e seja $S_q(r) = \Sigma \cap B_r(q), q \in \mathbb{R}^3$. Então

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{|S(r)|}{r^2}\right) \geq -4\pi H \ ,$$

e se $0 < r < 1$,

$$\frac{|S(r)|}{r^2} \leq |s(r)| + 4\pi H(1 - r) \ .$$

Teorema 2.6 (crescimento linear de $\int |A|^2$)

Seja $E \subseteq \Sigma \cap C^+_{a,R}$ um fim cilindricamente limitado. Existe uma constante $d = d(E)$ tal que, para todo $L \geq d$,

$$\int_{E_{(L,2L)}} |A|^2 \leq dL \ ,$$

onde $A = A_\Sigma$ é a segunda forma e $E_{a,b} = E \cap x^{-1}([a, b])$, $x(q) =< q, a >$.

Observação: A demonstração de 2.6 utiliza o teorema de Gauss-Bonnet, o teorema 2.4 (acima) e lema seguinte, que será, portanto, demonstrado antes de 2.6.

Lema 2.7 (lema da componente crítica)

Se $b - a > 4$, existe uma única componente crítica (ver definição 2.12) $\mathcal{O} \subseteq E_{(a,b)}$. Existe um anel compacto Z tal que $E_{(a+2,b-2)} \subseteq \mathcal{O} \subseteq Z \subseteq E_{(a-2,b+2)}$.

Vamos ainda utilizar os dois lemas abaixo.

Lema 2.8 (lema do gráfico uniforme)

Seja $M^2 \subseteq B^3_{2R}(q_0)$ fechada, mergulhada e com curvatura uniformemente limitada $|A| < C$, e seja $\nu : M \to S^2$ a normal (exterior) de Gauss. Então existe $r > 0$ tal que, para todo $q \in M \cap B_R(q_0)$, A componente que contém q de $M \cap C_{\nu(q),r}(q)$ é um gráfico sobre $D_{\nu(q),r}(q)$ de uma função u que satisfaz

$$|u| \leq Cr^2, \quad |\nabla u| \leq 2Cr, \quad |\nabla^2 u| \leq 2C \ .$$

Lema 2.9 (lema das folhas paralelas)

Seja M como no lema 2.8. Então existe $K = K(R, C)$ tal que, quaisquer que sejam $q_1, q_2 \in M \cap B_R(q_0)$, tem-se

$$|\nu(q_1) - \nu(q_2)| \leq K\sqrt{|q_1 - q_2|} \ .$$

Isso feito, define-se a transformação scaling (ver definição 2.14) e prova-se a afirmação 2.15 que dá o passo crucial na demonstração de 2.1.

Passemos às demonstrações dos resultados.

Observação

Se $X \in \Xi^\infty(\mathbb{R}^3)$ e S, Q, U, ν e η são como no capítulo I, a taxa de variação de $|U|$ sob ação de X é

$$\delta_X|U| = \int_U \operatorname{Div} X = \int_{\partial U} < X, \nu >= \int_S < X, \nu > + \int_Q < X, \nu > \ .$$

A taxa de variação de $|S|$ é

$$\delta_X|S| = \int_S \operatorname{div} Y \ .$$

Fazendo $X = X^T + X^\perp$ (relativamente a Σ) e usando a compatibilidade da conexão e o teorema de Stokes, chegamos a

$$\operatorname{div} X^\perp = H_\Sigma < X, \nu > \quad \text{e} \quad \int_S \operatorname{div} X^T = \int_{\partial S} < X, \eta > .$$

Logo

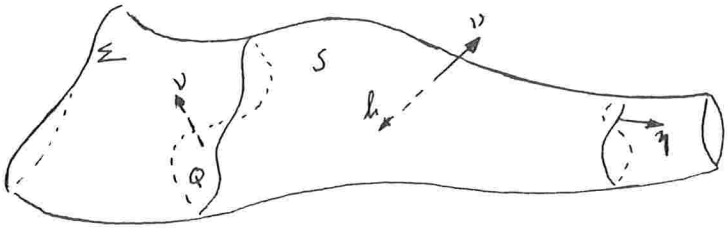
$$\delta_X |S| = \int_{\partial S} < X, \eta > + \int_S H_\Sigma < X, \nu > .$$

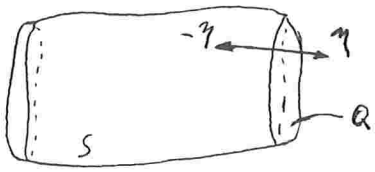
Se H é uma constante, temos a fórmula de primeira variação

$$\delta_X(|S| - H|U|) = \int_{\partial S} < X, \eta > -H \int_Q < X, \nu > + \int_S (H_\Sigma - H) < X, \nu > ,$$

e Σ satisfaz $H_\Sigma \equiv H$ sse, para todo $(S, U) \subseteq (\Sigma, \mathbb{R}^3)$ tal que $\partial U = S \cup Q$ e $\partial S = \partial Q$; e para todo $X \in \Xi^\infty(\mathbb{R}^3)$ tal que $X|_Q \equiv 0$,

$$\delta_X(|S| - H|U|) = 0 .$$





Demonstração de 2.2

Os campos definidos por $X_j \equiv e_j$, $j = 1, 2, 3$, determinam três isometrias de $\mathbb{R}^3$. E logo

$$\delta_{X_j}|S| = \delta_{X_j}|U| = 0, \quad j = 1, 2, 3 .$$

Sendo $H_\Sigma \equiv H$, tem-se

$$0 = \delta_{X_j}(|S| - H|U|) = \int_{\partial S} < X_j, \eta > -H \int_Q < X_j, \nu >, \quad j = 1, 2, 3 ;$$

e logo

$$\int_{\partial S}\eta - H\int_Q \nu = \sum_{j=1}^{3}\left(\int_{\partial S} < e_j,\eta > -H\int_Q < e_j,\nu >\right)e_j = \sum_{j=1}^{3}\delta_{X_j}(|S| - H|U|)e_j = 0\ .$$

A partir dessa fórmula, e como na cohomologia de De Rham, é fácil provar que $\omega \in H^1(\Sigma, \mathbb{R}^3)$, etc. (observe-se que a escolha de K é sempre possível, pois $H_*(\mathbb{R}^3) = 0$). □

Definição 2.10

Sejam $E \subseteq \Sigma \cap C_{a,R}(q)$ um fim cilindricamente limitado, e seja $\pi \parallel \nu^\perp$ um plano tal que π é transversal aE e $\pi \cap E$ é compacto, com $< \nu, a >> 0$. O *peso* $w(E)$ *de* E é o vetor $w(E) = \omega([\pi \cap E])$. Ou seja,

$$w(E) = \int_{\pi\cap E}\eta - H\int_{\pi\cap W}\nu\ ,$$

onde $\pi \cap W = \pi \cap \Omega \cap C^+_{a,R}$ tem orientação consistente com a de $\pi \cap E$.

Observação

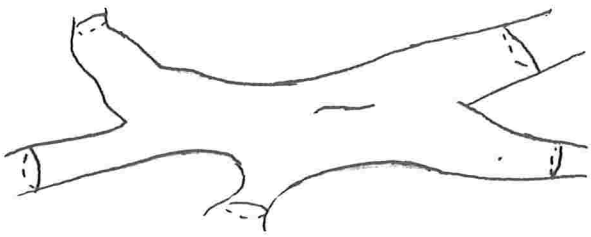
Segue-se da fórmla balancing que a soma dos pesos dos fins de Σ é zero. Segue-se também que $w(E)$ está bem definido.

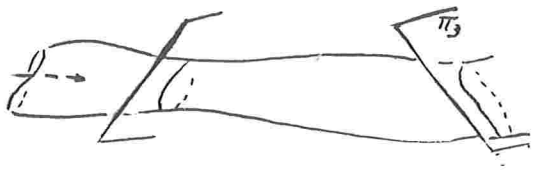
Se $E_1, \ldots, E_k$ são os fins de Σ, então

$$\sum_{j=1}^{k} w(E_j) = \sum_{j=1}^{k}\left(\int_{\pi_j\cap E_j}\eta - H\int_{\pi_j\cap W_j}\nu\right) = \int_{\partial S}\eta - H\int_Q \nu = 0\ .$$

Se $\pi_j = \nu_j^\perp$ transversal aE é tal que $\pi_j \cap E$ é compacta e $< \nu_j, a >> 0$, $j = 1, 2$; seja $\pi_3 = \nu_3^\perp$, transversal aE, $< \nu_3, a >> 0$, tal que $\pi_3 \cap E$ é compacta e disjunta de $\pi_j \cap E$, $j = 1, 2$ (escolha-se π_3 próximo do infinito, se necessário). Então

$$\begin{aligned}
&\int_{\pi_1\cap E}\eta - H\int_{\pi_1\cap W}\nu - \int_{\pi_2\cap E}\eta + H\int_{\pi_2\cap W}\nu \\
&= \sum_{j=1}^{2}(-1)^{j-1}\left(\int_{\pi_j\cap E}\eta - H\int_{\pi_j\cap W}\nu - \int_{\pi_3\cap E}\eta + H\int_{\pi_3\cap W}\nu\right) \\
&= \sum_{j=1}^{2}\left(\int_{\partial S_j}\eta - H\int_{Q_j}\nu\right) = 0\ .
\end{aligned}$$





Demonstração de 2.3

Se M é um catenóide e $\psi(x,t) = (\lambda x, \lambda\rho(x)\cos t, \lambda\rho(x)\text{sen}\, t)$ é parametrização, fazendo $a = e_1$ e $\pi = a^{\perp}$, temos $< a, \eta >= (1+\rho'^2)^{-\frac{1}{2}}$.

O peso w^+ de $M^+ = M \cap \{x \geq 0\}$ é paralelo a e_1 (por simetria) e não depende de x (pois está bem definido). Então $w^+ = me_1$ e m (a *massa* de M^+) satisfaz

$$m =< w^+, e_1 >=< \int_{\pi\cap M^+} \eta, e_1 >= \int_{\pi\cap M^+} \frac{1}{\sqrt{1+\rho'(x)^2}} = \frac{2\pi\lambda\rho(x)}{\sqrt{1+\rho'(x)^2}}, \forall x \geq 0 \ .$$

Fazendo $r = \rho(x) = \cosh x$, $x \geq 0$, e usando o teorema da função inversa, temos

$$\frac{m}{2\pi\lambda r} = \frac{1}{\sqrt{1+\rho'^2}} = \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2}}, \quad x = x(r) \ .$$

Integrando e observando que $x'(r) \to 0$ quando $r \to \infty$, obtemos

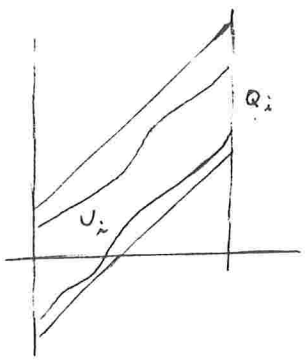
$$x(r) \approx \ell + \frac{m}{2\pi\lambda}\log r \ . \tag{2.11}$$

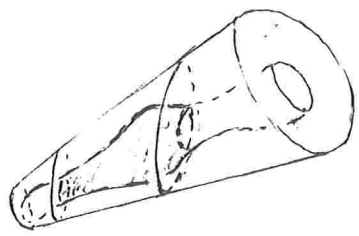
Seja $\ell^+ = \inf\{x | < q, e_1 >\leq x \quad \forall q \in M^+\}$. Então $m > 0$ sse $\ell^+ = \infty$. E, obviamente, $\ell^+ = \infty$. □

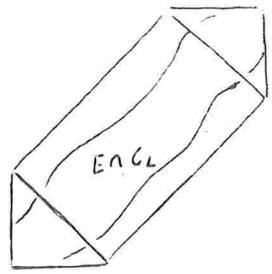
Demonstração de 2.4

Fixemos $L \geq 2R$ e seja $C_L = \{xa + D_{a,R} | R \leq x \leq L - R\}$. Seja $a = \frac{\Sigma e_i}{\sqrt{3}}$ e, para $i = 1,2,3$, seja $C_i = C_{a,R} \cap \{0 \leq x_i \leq La_i\}$, $a_i =< a, e_i >$. Sejam $U_i = W \cap C_i$. $S_i = E \cap C_i$

e $Q_i = W \cap \partial C_i$ (observe-se que $\partial U_i \backslash Q_i = S_i$).







Seja $X_i = x_i e_i$, $i = 1, 2, 3$. Então $\operatorname{div} X_i = |\nabla x_i|^2$ (seja $\{f_s\}$ um referencial ortonormal em Σ e observe-se que $\nabla_{f_s} X_i =< f_s, e_i > e_i$). E, como $|\nabla x_i|^2 + \nu_i^2 = |e_i|^2 = 1$, tem-se

$$\operatorname{div} X_i = 1 - \nu_i^2 \ .$$

Obviamente, $\operatorname{Div} X_i = 1$. Sejam então π_i o plano $\{x_i = La_i\}$ e $\pi_{i,0}$ o plano $\{x_i = 0\}$. Podemos supor que $\pi_i \cap E$ é transversa e compacta, e logo

$$w(E) = \int_{\pi_i \cap E} \eta - H \int_{\pi_i \cap W} \nu \ ,$$

qualquer que seja $i \in \{1, 2, 3\}$.

Por construção,

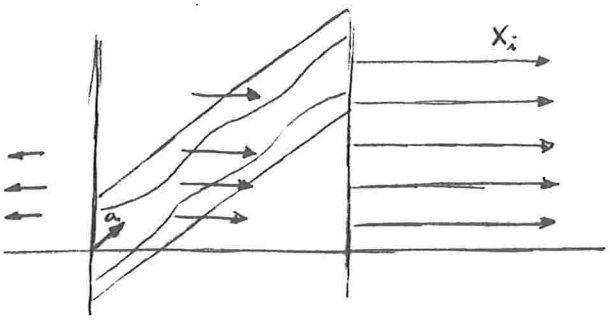
$$X_i|_{\pi_i} \equiv La_i e_i \quad \text{e} \quad X_i|_{\pi_{i,0}} \equiv 0 \ .$$

Fazendo $H_\Sigma \equiv H$ na fórmula de variação, obtemos a seguinte *fórmula de divergência dupla*:

$$\int_S \operatorname{div} X - H \int_U \operatorname{Div} X = \int_{\partial S} < X, \eta > - H \int_Q < X, \nu >$$

e fazendo $X = X_i$, chegamos a

$$\begin{aligned} \int_{S_i} 1 - \nu_i^2 - |U_i| &= \int_{\partial S_i} < X_i, \eta > - \int_{Q_i} < X_i, \nu > \\ &= \int_{\pi_i \cap E} La_i < e_i, \eta > - \int_{\pi_i \cap W} La_i < e_i, \nu > \\ &= La_i < e_i, w(E) > \ . \end{aligned}$$



Observando que $\Sigma \int_{\cap S_i} \nu_i^2 = \int_{\cap S_i} |\nu|^2 = |\cap S_i|$, e somando de 1 a 3 (lembremos que $E \cap C_L \subseteq \cap S_i$), temos

$$2|E \cap C_L| \leq 2|\cap S_i| = 3|\cap S_i| - |\cap S_i| = 3\int_{\cap S_i} 1 - \int_{\cap S_i} \Sigma\nu_i^2 = \Sigma \int_{\cap S_i} (1-\nu_i^2) \leq$$
$$\Sigma \int_{S_i} (1-\nu_i^2) = \Sigma|U_i| + L\Sigma a_i < e_i, w(E) >= \Sigma|U_i| + L < a, w(E) > .$$

Sendo $U_i \subseteq C_i$, existem $k_i = R\lambda_i > 0$ tal que $|U_i| \leq L$, $i = 1,2,3$; e logo $\Sigma|U_i| \leq L$, $k = \Sigma k_i > 0$.

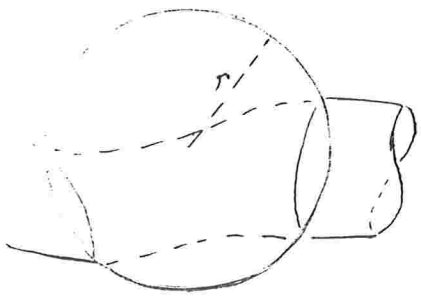
Segue-se que $|E \cap C_L| \leq \frac{1}{2}L(k+ < a, w(E) >) = cL$, onde $c < \infty$. □

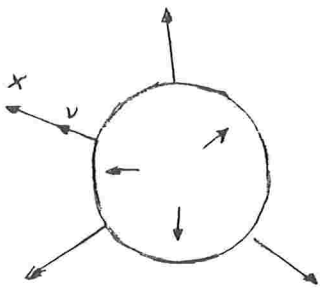
Demonstração de 2.5:

Seja $q = 0$ e seja $X = \Sigma x_i e_i$. Sejam $U(r) = \Omega \cap B_r$ e $Q(r) = \partial U(r) \backslash S(r) = \Omega \cap S_r$. Observemos que

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{2} < \nabla_{f_i} X, f_i >= 2, \text{ e que } \operatorname{Div} X = \sum_{i=1}^{3} < \nabla_{e_j} X, e_j >= 3,$$

onde $\{f_1, f_2\}$ é referencial ortonormal para Σ.





Observemos também que $X = r\nu$ sobre $Q(r)$ (pois $Q(r) \subseteq S_r$), e logo

$$< X, \nu >\equiv r \quad \text{em} \quad Q(r) .$$

Segue-se da fórmula de divergência dupla (ver demonstração de 2.4) que

$$2|S(r)| - 3H|U(r)| = \int_{\partial S(r)} < X, \eta > -Hr|Q(r)| \ ,$$

e da fórmula de co-área (ver [14]) que

$$\int_{\partial S(r)} < X, \eta \leq r\frac{d}{dr}|S(r)| \ .$$

Então $r\frac{d}{dr}|S(r)| - 2|S(r)| \geq -3H|U(r)| + Hr|Q(r)| > -4\pi Hr^3$, pois $U(r) \subseteq B_r$.

Logo

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}|S(r)| - \frac{2}{r^3}|S(r)| \geq -4\pi H$$

e segue-se a primeira afirmação.

A última desigualdade é imediata por integração. □

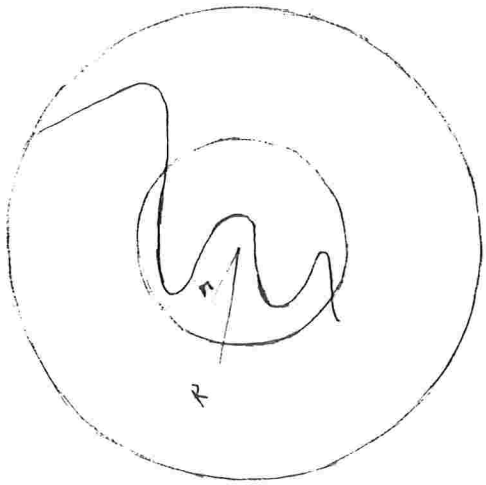
Observação

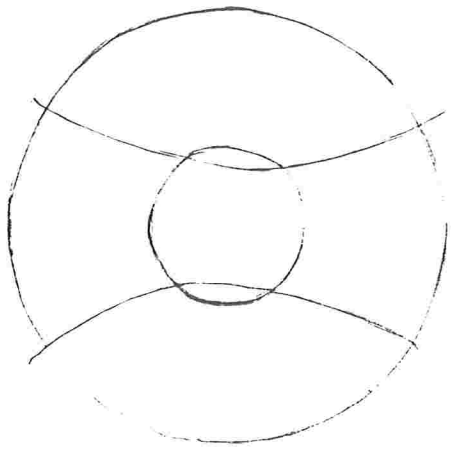
Segue-se de 2.5 que, dentro de limites bem definidos, $|S(r)|$ cresce com r^2, a menos de um fator linear (pois a taxa de crescimento da razão é minorada por uma constante).

Integrando entre r e R $(0 < r < R)$, temos

$$\frac{|S(R)|}{R^2} \geq \frac{|S(r)|}{r^2} - 4\pi H(R-r), \quad \text{ou} \quad \frac{|S(R)|}{4\pi R^2} \geq \frac{|S(r)|}{4\pi r^2} - H(R-r) \ .$$

Em palavras, a "concentração de volume" não aumenta arbitrariamente (qualquer aumento de "concentração de volume" está sob controle).



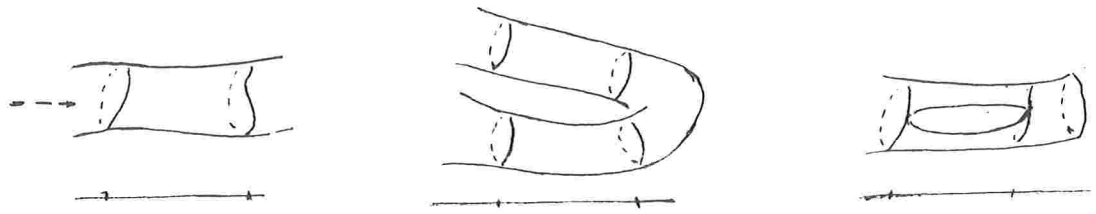


No caso em que Σ é mínima, a função "concentração" é monótona. Se $r = 1$ e $H = 0$,

tem-se $|S(R)| \geq |S(1)|R^2$.

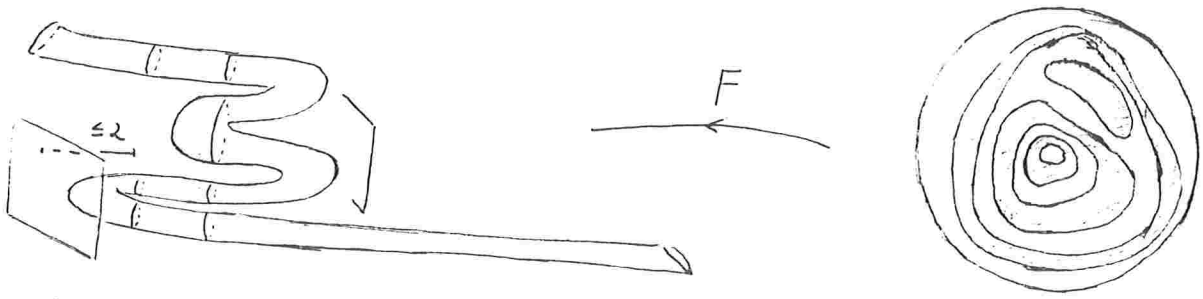
Definição 2.12

Seja $E \subseteq \Sigma \cap C^+_{a,R}$ um fim (anular) cilindricamente limitado com vetor axial $a = e_1$, e seja $E_{a,b} = E \cap x^{-1}([a,b])$, $0 \leq a \leq b$, $x : q \mapsto < q, e_1 >$. Se $\mathcal{O} \subseteq E_{(a,b)}$ é aberto e conexo, dizemos que $\mathcal{O}$ *é crítico* se $x(\mathcal{O}) = (a,b)$.



Demonstração de 2.7

Sem perda de generalidade, $E_{\{a\}} \cup E_{\{b\}}$ é uma união finita e disjunta de laços simples. Chamaremos γ um a-laço ou b-laço conforme $F(\gamma) \subseteq E_{\{a\}}$ ou $F(\gamma) \subseteq E_{(b)}$. γ é essencial se $0 \in \operatorname{int}\gamma$ (caso contrário, $\gamma \sim *$ em $D\backslash 0$ é trivial).

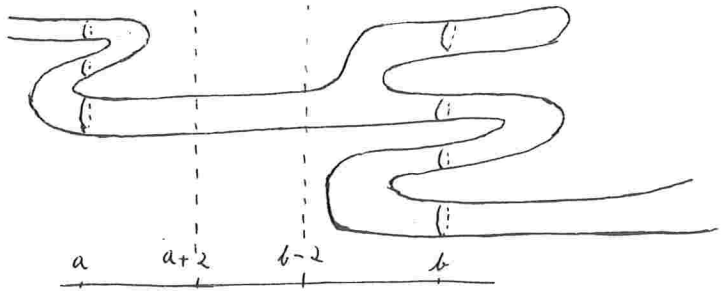


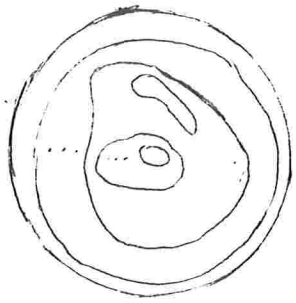
Observemos que existem necessariamente um a-laço essencial e um b-laço essencial (pois $x(E) = [0,\infty)$). Segue-se do lema "height-4" (corolário II-4) que se $R \subseteq D\backslash 0$ é uma região limitada inteiramente por a-laços (não contendo b-laços), então $F(R) \subseteq E_{(a-2,a+2)}$ (a mesma afirmação trocando a e b), e logo $F(R)$ não é crítico. Em particular, se R é limitada por um laço trivial, $F(R)$ não é crítico. Consideremos, portanto, apenas os laços essenciais.

essenciais.

Necessariamente, o laço mais interno é um b-laço, e o mais externo um a-laço. Se γ é o a-laço mais interno, então todo b-laço está em $\operatorname{int}\gamma$. Seja Z a imagem por F da região anular entre γ e o b-laço mais externo. Então qualquer componente crítica de $E_{(a,b)}$ tem que estar contida em Z.

Seja $\mathcal{O} \subseteq Z \cap E_{(a,b)}$ conexo, tal que $\partial\mathcal{O} \supseteq \partial Z$. Então $\partial\mathcal{O}$ contém a imagem de um a-laço e a imagem de um laço, e logo $\mathcal{O}$ é crítico. Além disso, $E_{(a+2,b-2)} \cap \tilde{\mathcal{O}} \neq \emptyset$ para uma única componente $\tilde{\mathcal{O}}$ de $Z \cap E_{(a,b)}$, e logo $Z \cap E_{(a,b)}$ tem uma única componente crítica. Obviamente, $Z \subseteq E_{(a-2,b+2)}$.





□

Demonstração de 2.6

Segue-se de 2.3 que, quaisquer que sejam $a < b \in [0,\infty)$, tem-se $|E_{(a,b)}| < K(b-a)$, para uma constante K conveniente. Existe, portanto, uma constante $c \in (0,\infty)$ tal que

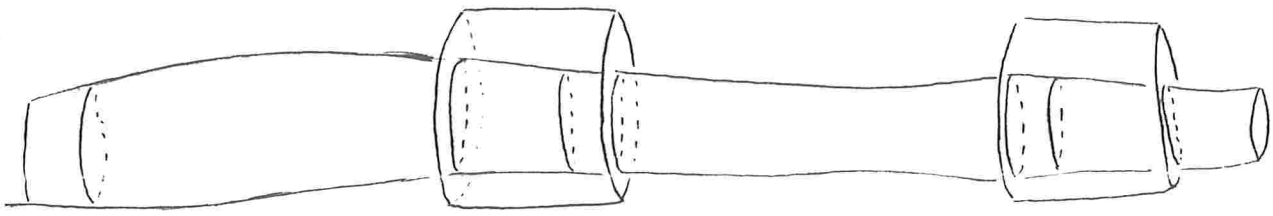
$$E_{(x,x+1)}| < c, \quad \forall x \in [0,\infty) .$$

Seja $c > \pi R$ e sejam $a < b$ tais que

$$a+4+c < L < a+5+c \quad \text{e} \quad b-5-c < 2L < b-4-c .$$

Então $|E_{\{a\}}|, |E_{\{b\}}| \leq 2\pi R < 2c$

e $$(a+5+c, b-5-c) \subseteq (L, 2L) \subseteq (a+4+c, b-4-c) .$$



Seja $Z \subseteq E_{(a-2,b+2)}$ como em 2.7, e sejam G_a e G_b laços geodésicos de comprimento mínimo entre os laços essenciais em E que passam por $q_a \in \partial Z \cap E_{\{a\}}$ e $q_b \in \partial Z \cap E_{\{b\}}$. Obviamente, $|G_a|, |G_b| < 2c$. Seja $S \subseteq E$ o anel limitado por G_a e G_b.

Então

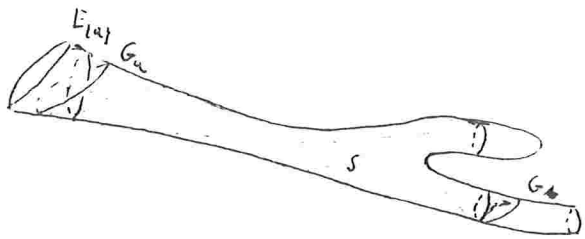
$$Z \cap E_{(L,2L)} \subseteq Z \cap E_{(a+4+c,b-4-c)} \subseteq S \subseteq E_{(a-4-c,b+4+c)} \ .$$

Segue-se do teorema de Gauss-Bonnet que

$$\Sigma \int_{G_i} k_g + \int_S K + \Sigma\theta_i = 2\pi\mathcal{X}(S) = 0$$

e como $|\theta_i| \leq \pi, i = 1, 2$, temos

$$|\int_S K| = |\theta_1 + \theta_2| \leq 2\pi \ .$$



Então, se $H_\Sigma \equiv 1$,

$$\begin{aligned} \int_{E_{(L,2L)}} |A|^2 &\leq \int_S |A|^2 = \int_S (H^2 - 2K) = |S| - 2\int_S K \leq \\ &\leq E_{(a-4-c,b+4+c)} + 2\int_S K \leq E_{(a-4-c,b+4+c)} + 4\pi \ . \end{aligned}$$

Sendo $|E_{(a-4-c,b+4+c)}| < c(b-a+8+2c)$ e (por construção) $L = 2L - L \geq b - a - 10 - 2c$, temos $b - a \leq L + 10 + 2c$ e logo $|E_{(a-4-c,b+4+c)}| < c(L + 18 + 4c)$.

Então

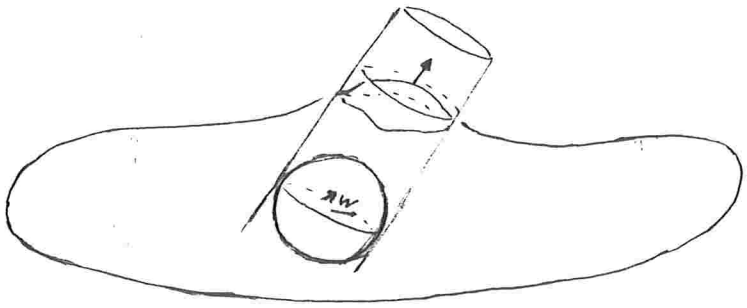
$$\int_{E_{(L,2L)}} |A|^2 < c(L + 18 + 4c) + 4\pi \ .$$

Seja $d > \max\left(c, \frac{c+\sqrt{c^2+4\lambda}}{2}\right)$, onde $\lambda = c(18 + 4c) + 4\pi$. □

Demonstração de 2.8

Sendo M localmente um gráfico, e compacta, existe $r > 0$ tal que, se $q \in M$, a componente que contém q de $M \cap C_{\nu(q),r}(q)$ é um gráfico sobre $D_{\nu(q),r}(q)$ de uma função $u \in C^\infty$ (recubra-se M com abertos (conexos) $U_\lambda \subseteq M \cap C_{\nu(q_\lambda),r_\lambda}(q_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, tais que U_λ é gráfico de $u_\lambda : D_{\nu(q_\lambda),r_\lambda}(q_\lambda) \to \mathbb{R}$, $u_\lambda \in C^\infty$, $\lambda \in \Lambda$, e seja $r > 0$ um número de Lebesgue).

Fixemos $q \in M$, e seja $u : D_{\nu(q),r}(q) \to \mathbb{R}$, $u \in C^\infty$, tal que $\mathrm{Graf}(u) \subseteq M \cap C_{\nu(q),r}(q)$ contém q.



Sendo a matriz $[\nabla^2 u]$ da forma bilinear $u''(q)$ a matriz Jacobiana de ν em q, temos $A = \nabla^2 u$ (por construção, $u(q) = 0$ e $\nabla u(q) = 0$). Então $|\nabla^2 u| < 2C$.

Seja u_w a restrição de u ao segmento $[q, q+rw] \subseteq D_{\nu(q),r}(q)$, onde $w \in S^2(q) \cap D_{\nu(q),1}(q)$. Então, para $0 \leq t < r$,

$$|u'_w(t)| = |\int_0^t u''_w(s)ds| < 2C \int_o^t ds < 2Cr \ ;$$

e, analogamente, $|u_w(t)| < 2C \int_0^t s ds < Cr^2$, e w era qualquer. □

Demonstração de 2.9

Sendo $M \cap \overline{B(q_0)}$ compacta, e $\nu \in C^\infty$, seja $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ cobertura tal que $\operatorname{diam} U_\alpha < \frac{1}{2}$ e $|\nu(q_1) - \nu(q_2)| < K_\alpha |q_1 - q_2|$, $q_1, q_2 \in U_\alpha$, $\alpha \in A$. Extraia-se subcobertura finita $M \cap \overline{B(q_0)} \subseteq U_1 \cup \ldots \cup U_n$, e seja

$$K = \max\left(K_1, \cdots, K_n, \frac{3}{\sqrt{\lambda}}\right) ,$$

onde $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ é um número de Lebesgue para $\{U_1, \cdots, U_n\}$.

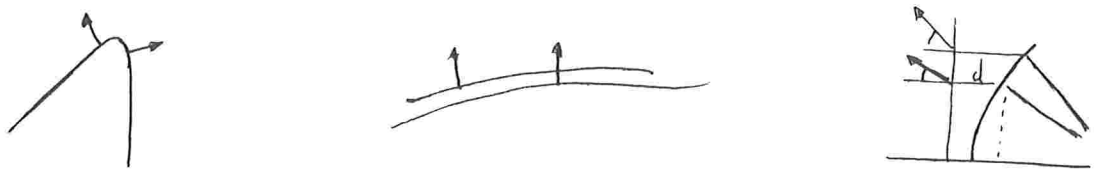
Então, fazendo $k = \frac{9}{K^2}$;

Se $|q_1 - q_2| \geq k$,

$$|\nu(q_1) - \nu(q_2)| \leq 2 < \left(\frac{3}{\sqrt{k}}\right) \sqrt{|q_1 - q_2|} = K\sqrt{|q_1 - q_2|}$$

e se $|q_1 - q_2| < k$,

$$|q_1 - q_2| < \lambda, \quad \text{e logo } |\nu(q_1) - \nu(q_2)| \leq K|q_1 - q_2| \leq K\sqrt{|q_1 - q_2|} .$$



□

A demonstração de 2.1 começa com o lema abaixo.

Lema 2.13

Se $|A|$ não é limitada em E, existe $(q_k, \rho_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq E \times (0, \frac{1}{2}]$ tal que $\rho_k |A(q_k)| \to \infty$ e $|A(q)| < 2|A(q_k)|$ qualquer que seja $q \in E \cap B_{\rho_k}(q_k)$, $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração de 2.13

Seja

$$\eta_k(x) = \begin{cases} 1 & , 0 \leq x \leq k \\ k + 1 - x & , k \leq x \leq k+1 \\ 0 & , x \geq k+1 \end{cases}$$

e definamos q_k, $k \in \mathbb{N}$, por

$$\eta_k(x_k)|A(q_k)| = \max_{q \in E} \eta_k(x)|A(q)|, \quad x = x(q) =< q, a >, \quad x_k = x(q_k) .$$

Se $M \in \mathbb{R}$, existe (por hipótese) $q \in E$ tal que $|A(q)| > M$. Tomando $k > x(q)$,

$$\eta_k(x_k)|A(q_k)| \geq \eta_k(x)|A(q)| = |A(q)| > M .$$

Fazendo $\rho_k = \frac{\eta_k(x_k)}{2}$, temos $\rho_k|A(q_k)| \to \infty$.

Se $x_k \in [0, k]$, então $\rho_k = \frac{1}{2}$ e, quando $|q - q_k| < \rho_k$, temos $|x - x_k| < \frac{1}{2}$, logo $x < k + \frac{1}{2}$, e logo $\eta_k(x) > \frac{1}{2}$; e segue-se de $\eta_k(x)|A(q)| \leq \eta_k(x_k)|A(q_k)|$ que

$$|A(q)| \leq \frac{|A(q_k)|}{\eta_k(x)} < 2|A(q_k)| .$$

Se $x_k \in (k, k+1)$ temos $(|\nabla \eta_k| \leq 1)$ que , quando $|q - q_k| < \rho_k$,

$$|x - x_k| < \frac{\eta_k(x_k)}{2} = \frac{\eta_k(x_k) - 0}{2} = \frac{|\eta_k(x_k) - \eta_k(k+1)|}{2} \leq \frac{|x_k - (k+1)|}{2} = \frac{k + 1 - x_k}{2}$$

e logo $x < x_k + \frac{k+1-x_k}{2} = \frac{x_k+k+1}{2} < k + 1$. Então $\eta_k(x) > 0$ e segue-se de

$$|\eta_k(x) - \eta_k(x_k)| \leq |x - x_k| < \rho_k \quad \text{que} \quad \eta_k(x) > \eta_k(x_k) - \rho_k = \frac{\eta_k(x_k)}{2}$$

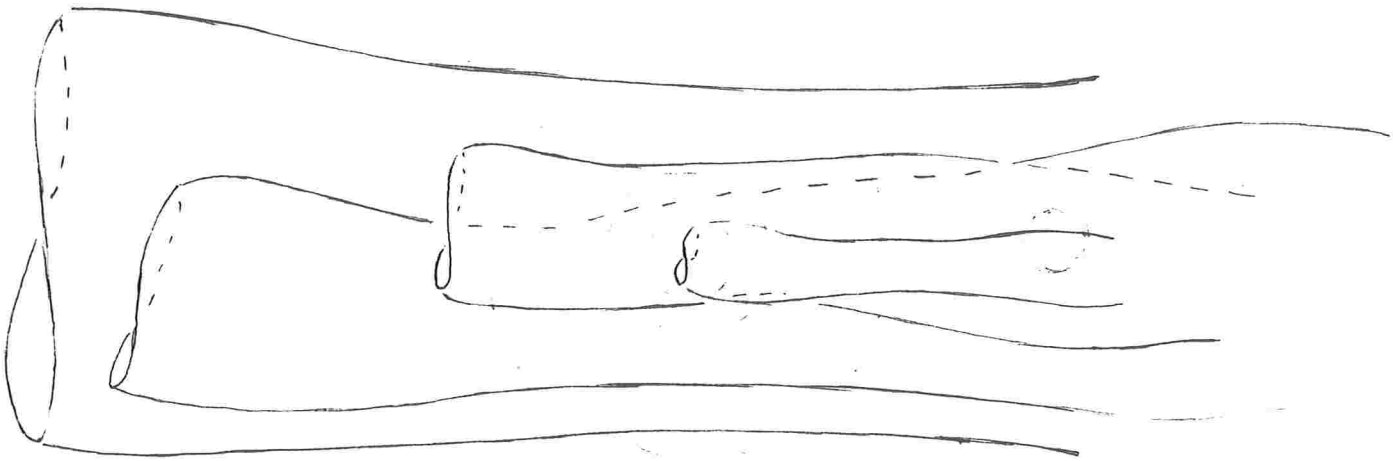
e logo que $|A(q)| \leq \frac{\eta_k(x_k)}{\eta_k(x)}|A(q_k)| < 2|A(q_k)|$.

□

Definição 2.14

Seja $M^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ superfície C^∞ e seja $(q_k, r_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq M \times (0, \infty)$ tal que $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é estritamente monótona. Seja $h_k : M \mapsto \mathbb{R}^3, k \in \mathbb{N}$, definida por $q \mapsto r_k(q - q_k)$.

A sequência $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é *a sequência scaling associada a* $(q_k, r_k)_{k\in\mathbb{N}}$. A sequência $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $M_k = h_k(M)$, é *a scaling sequence de* M *relativa a* $(q_k, r_k)_{k\in\mathbb{N}}$.



Afirmação 2.15

Seja $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a scaling sequence de um fim cilindricamente limitado $E \subseteq \Sigma, H_\Sigma \equiv 1$, relativa a $(q_k, r_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E \times (0,\infty)$ tal que $r_k \to \infty$, e suponhamos que existem $K_1, K_2, K_3 > 0$ tais que

$$\begin{array}{rll} |A_k(q)| \leq K_1 & , \forall q \in E_k \cap B_{r_k} & , \\ |E_k \cap B(q)| \leq K_2 & , \forall q \in B_{\frac{r_k}{2}-1} & , \\ \text{e } \int_{E_k \cap B_{r_k}} |A_k|^2 \leq K_3 & & , k \in \mathbb{N} . \end{array}$$

Então, se $V_k = \underline{v}(E_k, 1)$ é a varifold retificável (ver [14]) com suporte E_k e multiplicidade $\theta_k \equiv 1$, $k \in \mathbb{N}$, a sequência $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência que converge para uma varifold inteira $V = \underline{v}(M, m)$ onde M é um plano ou tem fins catenóides.

Demonstração de 2.15

Se $k \in \mathbb{N}$ é fixo, seja $q_k \in B_{r_k-2}$. Então $B_2(q_k) \subseteq B_{r_k}$, e logo $|A_k(q)| \leq K_1$, $\forall q \in E_k \cap B_2(q_k)$.

Segue-se de 2.8 (com $R = 1$, $K = K_1$), que existe $r > 0$ tal que, para todo $\tilde{q} \in E_k \cap B(q)$, a componente que contém $\tilde{q}$ de $E_k \cap C_{\nu(\tilde{q}),r}(\tilde{q})$ é o gráfico de $\tilde{u} : D_{\nu(\tilde{q}),r}(\tilde{q}) \to \mathbb{R}$

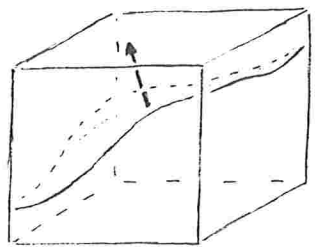
tal que $|\tilde{u}| < K_1 r^2$, $|\nabla \tilde{u}| < 2K_1 r$ e $|\nabla^2 \tilde{u}| < 2K_1$.

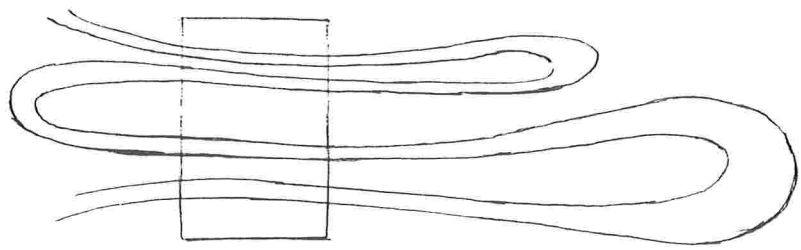
Então existe $r > 0$ tal que $\forall \tilde{q} \in E_k \cap B(q)$ a $\tilde{q}$-componente de $E_k \cap C_{\nu(\tilde{q}),r}(\tilde{q})$ é gráfico de $\tilde{u} : D_{\nu(\tilde{q}),r}(\tilde{q}) \to \mathbb{R}$ como acima, $\forall q \in B_{r_k-2}$.

Logo, qualquer que seja $\tilde{q} \in E_k \cap B_{r_k-1}$, a componente que contém $\tilde{q}$ de $E_k \cap C_{\nu(\tilde{q}),r}(\tilde{q})$ é o gráfico de uma função $u : D_{\nu(\tilde{q}),r}(\tilde{q}) \to \mathbb{R}$ tal que $|u| < K_1 r^2$, $|\nabla u| < 2K_1 r$ e $|\nabla| < 2K_1$, e isso é verdade para todo k tal que $r_k > 2$. Supondo então que $r_0 > 2$ (o que é verdade a menos de homotetia), teremos r independente de k.

Seja $\mathbb{R}^3 = \cup_{i \in \mathbb{N}} Q_i$, onde Q_i são cubos tais que $\operatorname{diam} Q_i = \frac{r}{4}$, e seja $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\cup_{i \leq i_0} Q_i \subseteq B_{r_k-1}$. Então qualquer componente conexa de $E_k \cap Q_i$, $i \leq i_0$, é gráfico de uma função $u_{i,k}$ como acima.

Se $k' > k$, então $B_{r_{k'-1}} \supseteq B_{r_k-1} \supseteq \bigcup_{i \leq i_0} Q_i$, e logo qualquer componente de $E_{k'} \cap Q_i$ é também o gráfico de uma função $u_{i,k'}$ como acima , com o mesmo r, $\forall i \leq i_0$.





Seja então $u_{i,k,l}$ a função cujo gráfico é a l–ésima componente de $E_k \cap Q_i$, $k \geq 0$, $i \leq i_0$; e escolhamos , para cada $\alpha = (i, k, l)$, $i \leq i_0$, um ponto (q_α, ν_α) no fibrado normal unitário de $E_k \cap Q_i$, $q_\alpha \in \operatorname{Graf}(u_\alpha)$, $\nu_\alpha = \nu(q_\alpha)$.

Se o índice l aumentar com k, então, para k suficientemente grande, teremos ($l \in \mathbb{N}$) $|E_k \cap Q_i| > K_2$, em contradição com a hipótese.

Logo l é uniformemente limitado em relação a k, e podemos supor que $l \in [1, l(i)]$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $i \leq i_0$.

Tomando a diagonal (de Cantor), temos uma sequência (q_α, ν_α) em um compacto, e

logo (Heine-Borel) existe $(q,\nu) = \lim(q_\beta, \nu_\beta)$, limite de uma subsequência de (q_α, ν_α), com a topologia da convergência localmente C^2.

A compacidade elítica fornece então que $u_\beta \to \overline{u_\alpha}$, definida em um disco de raio $\frac{r}{2}$; e as "folhas limite"estão bem definidas pela equação limite e pela convergência das normais $\nu_\beta \to \overline{\nu_\alpha}$. A união dessas folhas limite é, obviamente, um conjunto 2-retificável, satisfazendo a equação de superfície mínima (pois $H_k = \frac{1}{r_k} \to 0$), e a varifold limite $V = \lim_{k\to\infty} V_k$ tem que ser da forma $V = \underline{v}(\widetilde{M}, m)$, onde $0 < m \in \mathbb{Z}$ é finito, pois $|\widetilde{M} \cap B(q)| \leq K_2$ (e $\mu(\mathrm{Graf}(u_\alpha)) > 0$, $\forall\alpha$), e $\widetilde{M}$ é uma união enumerável de superfícies mínimas. Escolhemos $M \subseteq \widetilde{M}$, conexa.

Segue-se de 2.9, por passagem ao limite, que $|\nu(q) - \nu(\tilde{q})| \leq K\sqrt{|q-\tilde{q}|}$, $\forall q, \tilde{q} \in M$.

A convergência $\nu_\beta \to \overline{\nu_\alpha}$ e o princípio do máximo acarretam que M é mergulhada. E $\int_{E_k \cap B_{r_k}} |A_k|^2 \leq K_3$, qualquer que seja k , logo $\int_M |A_M|^2 < \infty$.

Finalmente, como cada E_k tinha dois fins, temos que M tem tipo finito.

Segue-se (ver [11]), que M é um plano ou cada fim de M é assintoticamente um catenóide. □

Demonstração de 2.1

Seja $a_k = |A(q_k)|$, onde $(q_k, \rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é como em 2.13, e seja $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $E_k = h_k(E)$ a scaling sequence de E relativa a $(q_k, a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (então $0 \in E_k, \forall k$). Denotando com A_k a segunda forma de E_k, $k \in \mathbb{N}$, segue-se de e 2.13 que

$$|A_k(0)| = 1 \quad \text{e} \quad |A_k(q)| < 2, \quad \forall q \in B_{\rho_k, a_k}, \quad \forall k\ .$$

Sejam

$$S_k(r)_q = E_k \cap B_r(q) \quad \text{e} \quad C_{a_k} = C_L$$

(notação de 2.4), com $L = a_k$.

As fórmulas de 2.5 e 2.4 fornecem (observando que $S_k(1)_q \subseteq S_k(\frac{a_k}{2})$)

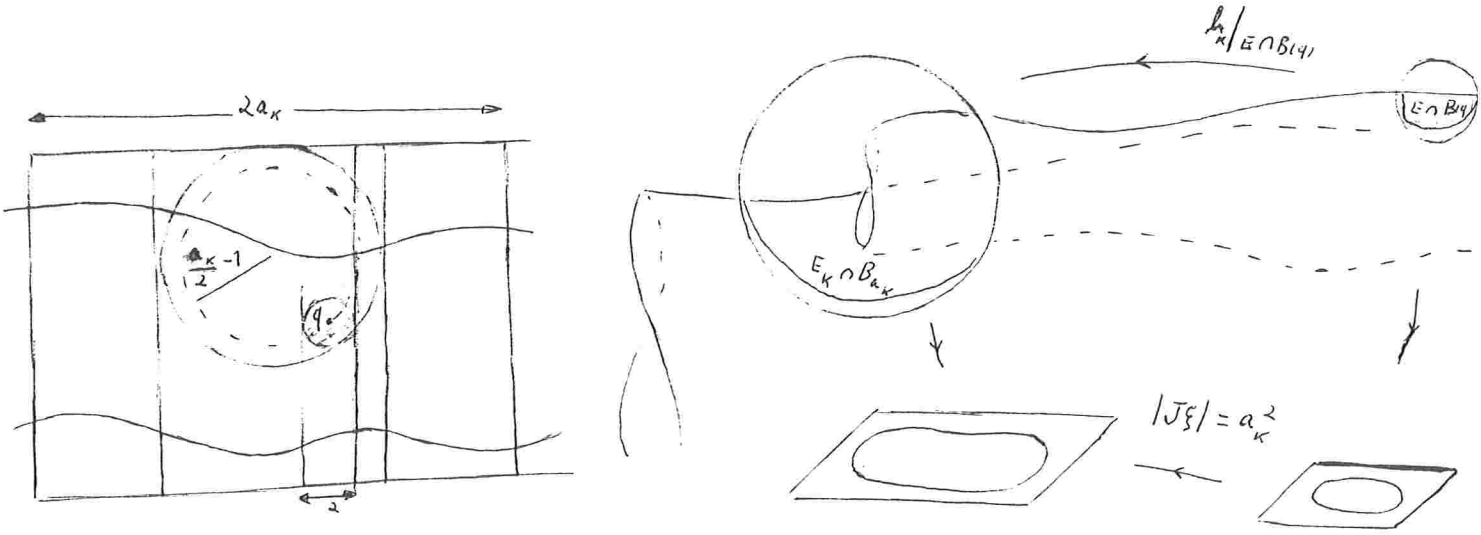
$$\begin{aligned} |S_k(1)_q| &\leq \frac{4|S_k\left(\frac{a_k}{2}\right)|}{a_k^2} + 4\pi H_k\left(\frac{a_k}{2} - 1\right) < \frac{4|E_k \cap C_{a_k}|}{a_k^2} + \frac{4\pi}{a_k}\left(\frac{a_k}{2}\right) \\ &\leq \frac{4k' a_k}{a_k^2} + 2\pi = \frac{4k'}{a_k} + 2\pi \ , \end{aligned}$$

onde $k' = \alpha a_k + \beta w_k$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $w_k = w(E_k)$; e como $k' = k'(a_k, < a, w_k >)$, temos que $\widetilde{K} = \frac{4k'}{a_k} + 2\pi$ não depende de k.

Analogamente,

$$\int_{E_k \cap B_{a_k}} |A_k|^2 = a_k^2 \int_{E \cap B(q_k)} |A_k|^2 \circ h_k = \int_{E \cap B(q_k)} |A|^2 \leq \int_{E_{(x_k - 1, x_k + 1)}} |A|^2 \leq 2d, \forall k \ ,$$

onde d é como em 2.6 .



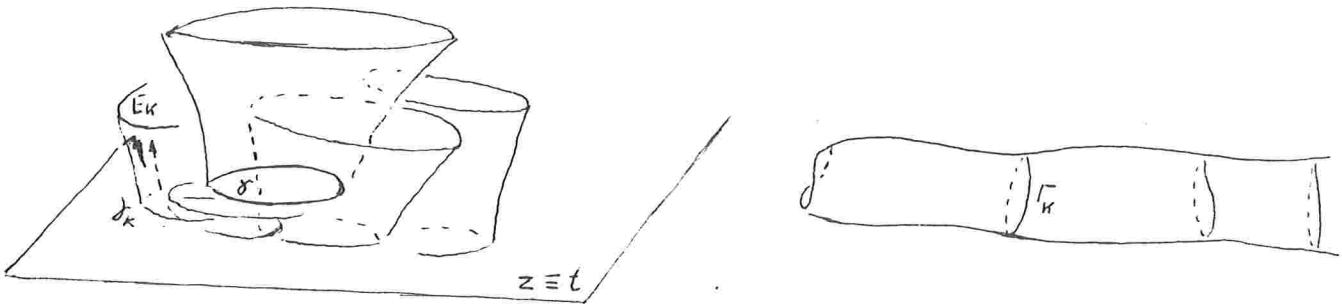
Segue-se então de 2.15, com $K_1 = 2$, $K_2 = \widetilde{K}$ e $K_3 = 2d$, que a sequência de varifolds $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $V_k = \underline{v}(E_k, 1)$ tem uma subsequência convergente para uma varifold $V = \underline{v}(M, m)$, $m < \infty$, cujo suporte é um plano ou tem fins ̈cateóides.̈ Sendo $|A_k(0)| = 1 \quad \forall k$, M não é flat, logo M tem fins ̈catenóides.̈

Seja M^+ o fim "de cima" de M. A menos de uma rotação, a normal ν_M de M "tende" ao vetor e_3. Por 2.3, o peso $w^+ = me_3$ de M^+ é $\neq 0$.

Seja $\gamma \cong S^1$ a curva $M \cap \{z \equiv t\}$, t suficientemente grande, e sejam R o "raio" aproximado de γ e η_3 o ângulo de inclinação aproximado da conormal η_M em γ. Então (ver equação 2.11)

$$\eta_3 R \cong \frac{m}{2\pi} \quad ,$$

e como $V_k \to V$, cada E_k está (próximo do infinito) em uma união de folhas anulares que convergem C^∞ para uma folha "catenóide", quando $k \to \infty$. Logo $E_k \cap \{z \equiv t\}$ é uma união de curvas $[\widetilde{\gamma_k}]$, $\widetilde{\gamma_k} \to \gamma$. Escolhamos, para cada k, uma componente γ_k de $[\widetilde{\gamma_k}]$.



Temos que $\gamma_k \to \gamma$, suavemente. Seja $\epsilon_k = \frac{1}{a_k}$. Então $\Gamma_k = q_k + \epsilon_k \gamma_k = h_k^{-1}(\gamma_k)$ é uma curva fechada em E, qualquer que seja k. E seja K_k um disco flat tal que $\partial K_k = \Gamma_k$. Necessariamente (ver definição 2.10) $w_k = \omega([\Gamma_k]) = \pm w(E)$, ou $w_k = 0$ (caso Γ_k trivial), qualquer que seja k. E

$$w_k = \int_{\Gamma_k} \eta - \int_{K_k} \nu = \epsilon_k \left(w^+ + o(\epsilon_k)\right) - O(\epsilon_k^2) = \epsilon_k w^+ + \tilde{o}(\epsilon_k^2) \ .$$

Sendo $w^+ \neq 0$ e $\epsilon_k \to 0$ (o termo $\tilde{o}(\epsilon_k^2)$ é diferença entre $\epsilon_k o(\epsilon_k)$ e o termo $O(\epsilon_k^2)$, relacionado com $|K_k|$), temos que o conjunto

$$\{\epsilon_k w^+ + \tilde{o}(\epsilon_k^2) / k \in \mathbb{N}\}$$

é necessariamente infinito. Absurdo. $\square$

§3

Neste § provamos provamos o resultado principal deste trabalho.

Teorema 3.1 (Teorema Principal)

Qualquer que seja o fim E da H-superfície Σ, existe uma superfície de Delaunay $D \subseteq \mathbb{R}^3$ para a qual E converge exponencialmente. Próximo do infinito, E e D podem ser expressos como gráficos cilíndricos de funções ρ_E e ρ_D tais que $|\rho_E - \rho_D| < Ce^{-\lambda x}$ ($C, \lambda > 0$ constantes), quando $x \longrightarrow \infty$.

O primeiro passo da demonstração é o teorema 3.2 abaixo, que prova a existência de D e a convergência localmente C^2. A idéia central na demonstração de 3.2 é a de "sliding back" o fim E até que se possam aplicar os resultados do §1, devido à limitação cilíndrica (ver definição 3.5).

Teorema 3.2

Seja $E \subseteq \Sigma$ um fim cilindricamente limitado. Toda slide back sequence (definição 3.5) para E tem uma subsequência que converge para uma superfície de Delaunay D cujo peso é $w(D) = w(E)$. Se L_D é o eixo de D, toda slide back sequence convergente $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge para uma translação de D ao longo de L_D. Além disso, olhando E_k como um gráfico normal sobre D, a convergência é C^2 nos compactos de D.

E_k é, portanto, o gráfico cilíndrico (definição 3.6) de uma função "bem comportada" $\rho_k = \rho_{E_k}$, se k é suficientemente grande. Comparando as equações de curvatura média (na forma cilíndrica-equações 3.7) vemos que a diferença $w_k = \rho_k - \rho_D$ satisfaz uma E.D.P. cuja parte linear define a equação de Jacobi

$$= \left(\frac{\rho^2}{v^2}\right) u_{xx} + u_{\theta\theta} + \left(\frac{\rho\rho_x}{v^2} - \frac{3\rho^2\rho_x\rho_{xx}}{v^4}\right) u_x + u = 0 \quad , \tag{3.3}$$

e a sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ das normalizadas $u_k = \frac{w_k}{\|w_k\|_I}$, (para uma norma $\| \quad \|_I$ conveniente 3.9) tem uma subsequência que converge localmente C^2 para um campo de Jacobi (Lema 3.10), que pode ser suposto definido em uma semi-reta $[a, \infty)$ (em virtude do lema 3.11, adiante). Precisamente:

Lema 3.4

Se $a \in \mathbb{R}$,a sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência que converge localmente C^2 para um campo de Jacobi u definido em $[a, \infty)$.

Em seguida, o método de separação de variáveis fornece uma base L^2 para as soluções de 3.3 e permite que u seja expresso por uma série de Fourier cujos termos, com exceção do primeiro, são exponencialmente decrescentes, completando o aparato para a demonstração de 3.1.

Definição 3.5

Seja $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $t_k \to \infty$. Se $E \subseteq \Sigma \cap C^+_{a,R}$ é um fim cilindricamente limitado, a *slide back sequence para E relativa a $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$* é a sequência $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dada por

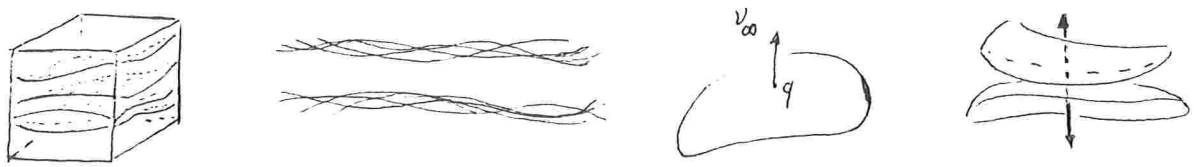
$$E_k = E - t_k a \quad , k \in \mathbb{N} .$$

Demonstração de 3.2

O raciocínio na demonstração da afirmação 2.15 pode ser feito aqui. Existe (pelo Teorema 2.1) $K > 0$ tal que $|A_k(q)| < K$, $\forall q \in E_k$, $k \in \mathbb{N}$. Podemos escrever $\mathbb{R}^3 =$

$\cup_{i\in\mathbb{N}} Q_i$, onde Q_i, $i \in \mathbb{N}$, são cubos de diâmetro suficientemente pequeno e tais que $\operatorname{int} Q_i \cap \operatorname{int} Q_j = \emptyset$, $i \neq j$; e construir gráficos de funções $u_{i,k,l}$ de altura uniformemente limitada que "remendam" E_k, $k \in \mathbb{N}$. Cada um desses "remendos coordenados" é C^∞ e satisfaz a equação de curvatura média $H \equiv 1$. Em torno de cada $q \in E_k$ temos $h = \pm\nu$.

A compacidade elítica novamente vai fornecer uma subsequência de $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (também indicada com k) tal que a sequência $(\overline{v}(E_k, 1))_{k\in\mathbb{N}}$ converge para uma varifold inteira V, tal que $\operatorname{spt} V$ é a união de gráficos C^∞ sobre discos, e todo $q \in \operatorname{spt} V$ está no interior de pelo menos um desses gráficos. O número de folhas em cada Q_i é controlado pelo crescimento linear de área, e as cotas superiores são preservadas na passagem ao limite. Além disso, em cada $q \in \operatorname{spt} V$ está definida (a menos de sinal) uma normal exterior (unitária) $\nu_\infty(q)$ (o que decorre do Lema 2.9), e o princípio do máximo acarreta que, se q está em dois gráficos, então os vetores curvatura média em q apontam em sentidos contrários.

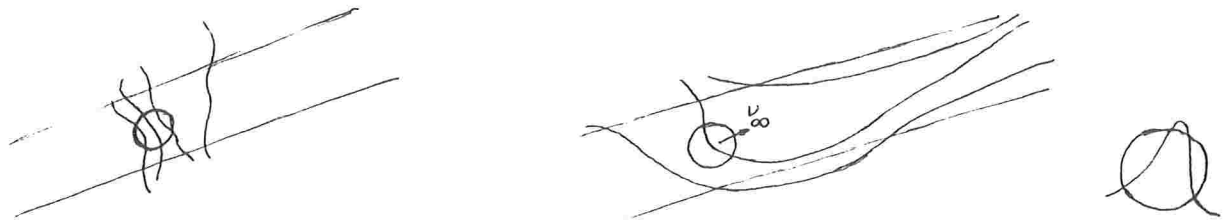


Observemos que a limitação cilíndrica e o fato que toda seção normal $E_k \cap \{x = N\}$ de E_k, $k \in \mathbb{N}$, $N > 0$ é não-vazia acarretam que $\operatorname{spt} V \neq \emptyset$.

Seja $q \in \operatorname{spt} V$. A limitação uniforme da curvatura e os resultados acima permitem afirmar que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo k suficientemente grande,

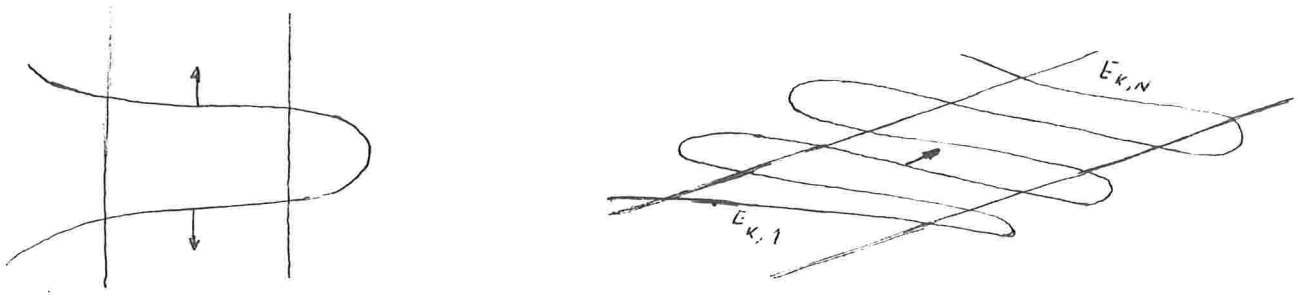
$$\text{toda componente } E_{k,j} \text{ de } E_k \cap C_{\nu_\infty(q),2\delta}(q) \text{ tal que } E_{k,j} \cap B_{\delta(q)} \neq \emptyset$$

é o gráfico sobre $D_{\nu_\infty(q),2\delta}(q)$ de uma função $u_{k,j}$ que satisfaz $|\nabla u_{k,j}| < \epsilon$.



Seja W_k a região limitada por E_k. Entre duas folhas sucessivas $E_{k,j}$ e $E_{k,j+1}$ de $E_k \cap C_{\nu_\infty(q),2\delta}(q)$ a normal ν_∞ muda de orientação, pois $\nu_\infty(q)$ aponta para fora da componente de $\overline{W_k \cap C_{\nu_\infty(q),2\delta}(q)}$ que contém q.

Fixemos k e sejam $u_{k,j}$ como acima, $j = 1, 2, \ldots, N$ (obviamente j é limitado em cada compacto de $C_{\nu_\infty(q),2\delta}(q)$). Seja o conjunto $\{u_{k,j}/1 \leq j \leq N\}$ ordenado de tal forma que (fazendo $\nu_\infty(q) = e_3$) $u_{k,j} \leq u_{k,j'}$ se $j \leq j'$.



Temos, para cada j,

$$\nu_{k,j} = \frac{(1, 0, \partial_1 u_{k,j}) \times (0, 1, \partial_2 u_{k,j})}{\sqrt{1 + |\nabla_{k,j}|^2}} = \frac{(-\partial_1 u_{k,j}, -\partial_2 u_{k,j}, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla u_{j,k}|^2}}$$

e logo

$$1 = H = \pm \mathrm{tr} \nabla \nu_{k,j} = \pm \mathrm{Div} \left(\frac{\nabla u_{k,j}}{\sqrt{1 + |\nabla u_{j,k}|^2}} \right) .$$

Então, para todo (k, j) com k suficientemente grande,

$$\mathrm{Div} \left(\frac{\nabla u_{k,j}}{\sqrt{1 + |\nabla u_{k,j}|^2}} \right) = \pm 1 .$$

Suponhamos que $u_{k,j}$ e $u_{k,j-1}$ satisfazem a equação acima com lado direito igual a -1 e 1, respectivamente. Então, fazendo $u_{k,j} = u(x,y)$ e $u_{k,j-1} = w(x,y)$, temos

$$\begin{aligned}
-2 &= \operatorname{Div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) - \operatorname{Div}\left(\frac{\nabla w}{\sqrt{1+|\nabla w|^2}}\right) = \\
&= \frac{\Delta u}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} - \frac{\Delta w}{\sqrt{1+w_x^2+w_y^2}} + \frac{u_x^2 u_{xx} + u_y^2 u_{yy} + 2u_x u_y u_{xy}}{(1+u_x^2+u_y^2)^{\frac{5}{2}}} - \\
&- \frac{w_x^2 w_{xx} + w_y^2 w_{yy} + 2w_x w_y w_{xy}}{(1+w_x^2+w_y^2)^{\frac{5}{2}}}.
\end{aligned}$$

Sendo $|A_k(q)| < K \ \forall q \in E_k$ e $|\nabla u|, |\nabla w| \leq \epsilon$

$$1 \leq \sqrt{1+|\nabla u|^2}, \sqrt{1+|\nabla w|^2} \leq \sqrt{1+\epsilon^2}$$

e

$$|u_{xx}|, |u_{xy}|, |u_{yy}|, |w_{xx}|, |w_{xy}|, |w_{yy}| \leq 2K \ ; \ |u_x|, |u_y|, |w_x|, |w_y| \leq \min(\epsilon, 4K\delta).$$

Logo

$$u_x^2 u_{xx} + u_y^2 u_{yy} + 2u_x u_y u_{xy} \leq 16K\epsilon^2 \quad \text{e} \quad w_x^2 w_{xx} + w_y^2 w_{yy} + 2w_x w_y w_{xy} \leq 16k\epsilon^2 \ ,$$

E logo

$$-2 = \Delta(u-w) - 0(\epsilon) \ ,$$

ou seja,

$$\Delta(u_{k,j} - u_{k,j-1}) = -2 + 0(\epsilon) \, .$$

Se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno, temos

$$\Delta(u_{k,j} - u_{k,j-1}) < -1 \, .$$

Seja

$$v(x,y) = 2\delta^2 - \frac{x^2+y^2}{4} \ , \ (x,y) \in \overline{D_{\nu_\infty(q),2\delta}(q)} \, .$$

Então

$$\Delta v \equiv -1 \, , \ v(0) = 2\delta^2 \quad \text{e} \quad v\Big|_{\partial D_{\nu_\infty(q),2\delta}(q)} \equiv \delta^2 \, .$$

Logo

$$\Delta((u_{k,j} - u_{k,j-1}) - v) \leq 0 \quad \text{e} \quad u_{k,j} - u_{k,j-1} \geq v \quad \text{em} \quad \partial D_{\nu_{\infty}(q),2\delta}(q)\ ;$$

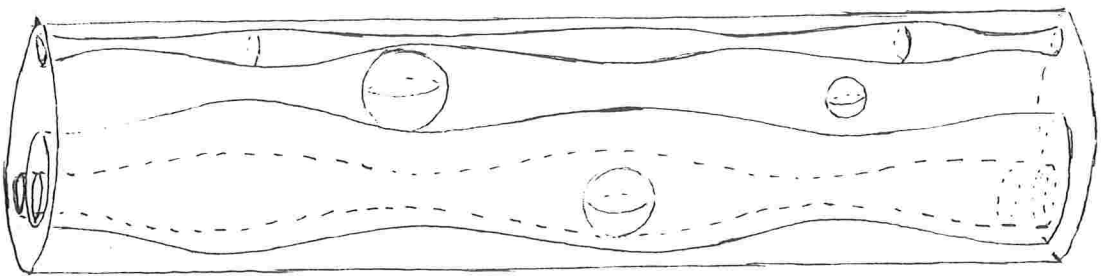
e, pelo princípio do mínimo (para funções superharmônicas),

$$u_{k,j} - u_{k,j-1} > \delta^2 \text{ em } D_{\nu_{\infty}(q),2\delta}(q) \ (k \text{ suficientemente grande}).$$

Seja então $k \to \infty$. Temos $u_{k,j} \to u_{\infty,j}$, solução da mesma equação $H \equiv 1$ (e, pelo Lema 2.8 a convergência é C^2 sobre $D_{\nu_{\infty}(q),2\delta}(q)$). Seja $j_0 \in [1, \mathbb{N}] \cap \mathbb{Z}$ tal que $q \in \text{Graf}(u_{\infty,j_0})$, e suponhamos que $\text{Div}\left(\frac{\nabla u_{\infty,j_0}}{\sqrt{1+|\nabla u_{\infty,j_0}|^2}}\right) = -1$. Então, se $q \in \text{Graf}(u_{\infty,j}), j \neq j_0$, tem-se necessariamente $j = j_0 + 1$ (pois $|u_{\infty,j_0} - u_{\infty,j_0-1}| \geq \delta^2$), e os vetores curvatura média de $\text{Graf}(u_{\infty,j_0})$ e $\text{Graf}(u_{\infty,j_0+1})$ em q apontam em sentidos contrários.

E $q \in \text{spt}\, V$ era qualquer. Segue-se que $\text{spt}\, V$ é uma união enumerável de subvariedades C^∞ fracamente mergulhadas, pois em uma vizinhança uniforme de cada $q \in \text{spt}\, V$ temos um ou (no máximo) dois "remendos coordenados" distintos, imagens de uma ou (no máximo) duas imersões C^∞.

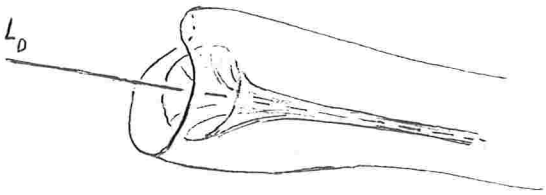
Lembrando os resultados do §1, e notando que $E_k \subseteq C_{a,R}$, $\forall k$, concluímos que cada uma dessas subvariedades é necessariamente uma esfera ou uma superfície de Delaunay .



Em vista de tudo isso, conclui-se que, em todo compacto de $\mathbb{R}^3$ e para k suficientemente grande, $\text{spt}\, V$ é um gráfico normal sobre E_k, com norma C^2 pequena, de modo que, quando $k \to \infty$, tem-se $|u_{k,j} - u_{\infty,j}| \to 0$, $|u'_{k,j} - u'_{\infty,j}| \to 0$ e $|u''_{k,j} - u''_{\infty,j}| \to 0$. Sendo um gráfico normal sobre $E_k \cong S^1 \times [0,1)$, $\text{spt}\, V$ não contém esferas. E, pelo Lema 2.7, $\text{spt}\, V$ não contém mais que uma superfície de Delaunay.

Segue-se que spt V é uma superfície de Delaunay D, cada E_k (k suficientemente grande) é um gráfico normal sobre D, e a convergência $E_k \to D$ é C^2 nos compactos de D. Em consequência $w(D) = w(E)$.

Fica determinado o limite D, a menos de translação. No entanto, se o eixo L_D de D não fosse o eixo gerado por a (observe-se que a é vetor axial para todo E_k), então uma das funções de Alexandrov relativas a planos paralelos a L_D não seria não-crescente, em contradição com os resultados do §1 (as funções de Alexandrov são todas não-crescentes e assintóticas ao eixo gerado por a). Logo os dois eixos coincidem.



$\square$

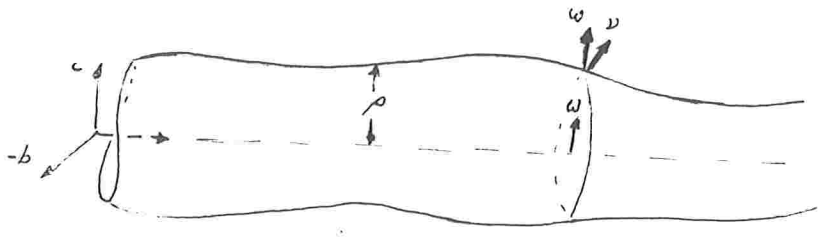
Definição 3.6

Se a é um vetor axial, $\{b, c\}$ é uma base ortonormal de $a^\perp$ e $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função periódica (de período 2π) na segunda variável, então a imagem da aplicação $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$F(x, \theta) = xa + \rho(x, \theta)\omega(\theta), \qquad \omega(\theta) = b\cos\theta + \operatorname{sen}\theta$$

é chamada o *gráfico cilíndrico* de ρ. Se $\{a, b, c\} = \{e_1, e_2, e_3\}$ temos $F(x, \theta) = (x, \rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$. O *steepness* de ρ é definido por

$$v = \frac{1}{< \nu, \omega >} = \sqrt{1 + \rho_x^2 + \left(\frac{\rho_\theta}{\rho}\right)^2} \quad , \text{ onde } \nu \text{ é a normal exterior (de Gauss).}$$



Observe-se que

$$\nu = \frac{F_x \times F_\theta}{|F_x \times F_\theta|} = \frac{\left(-\rho_x, \frac{\rho_\theta}{\rho}\text{sen}\,\theta + \cos\theta, \frac{\rho_\theta}{\rho}\cos\theta - \text{sen}\,\theta\right)}{\sqrt{1+\rho_x^2+\left(\frac{\rho_\theta}{\rho}\right)^2}},$$

e logo

$$< \nu, \omega >= \frac{1}{\sqrt{1+\rho_x^2+\left(\frac{\rho_\theta}{\rho}\right)^2}}.$$

Vamos provar o lema 3.4. As considerações abaixo serão necessárias.

Seja $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma Slide Back Sequence tal que $E_k \to D$, D uma superfície de Delaunay fixa, com vetor axial a, e seja $E = E_0 \subseteq C^+_{a,R}$ o gráfico cilíndrico de uma função ρ_E sobre o eixo L_D de D. Sejam r_- e r_+ os raios mínimo e máximo de D.

A convergência localmente C^2 dada por 3.2 permite supor que $\frac{1}{2}r_- \leq \rho_E \leq 2$, que o steepness v_E de E satisfaz $v_E \leq 2v_{D\,\max}$ e que a curvatura $|A_E|$ de E satisfaz $|A_E| \leq 2|A_D|_{\max}$, onde $v_{D\,\max}$ e $|A_D|_{\max}$ são o steepness máximo e a curvatura máxima de D. Realmente, em torno de cada $q \in D$ temos que E e D são gráficos de funções u_E e u_D, com $|u_E - u_D| \to 0$, $|u'_E - u'_D| \to 0$ e $|u''_E - u''_D| \to 0$, quando $x \to \infty$, o que acarreta $\rho_E \to \rho_D$, $v_E \to v_D$ e $A_E \to A_D$, quando $x \to \infty$. Logo, se E não satisfaz essas estimativas, existirá necessariamente $k \in \mathbb{N}$ tal que E_k satisfaz.

Junto com essas hipóteses, as estimativas de ordem superior para equações elíticas ([6]) acarretam a limitação uniforme de todas as derivadas de ρ.

Usando ainda a parametrização $F(x,\theta) = (x, \rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$, temos

$$\begin{array}{lll} E = 1+\rho_x^2 & e = \dfrac{-\rho_{xx}}{v} & \\ F = \rho_x\rho_\theta & f = \dfrac{\rho_x\rho_\theta - \rho\rho_{x\theta}}{\rho v} & \sqrt{EG-F^2} = \rho v \\ G = \rho^2+\rho_\theta^2 & g = \dfrac{\rho^2 - \rho\rho_{\theta\theta} + 2\rho_\theta^2}{\rho v} & \end{array}$$

Logo

$$\begin{aligned} 1 &= H = \frac{eG+gE-2fF}{\rho^2 v^2} = \\ &= -\frac{(\rho^3+\rho\rho_\theta^2)\rho_{xx}}{\rho^3 v^3} - \frac{(\rho+\rho\rho_x^2)\rho_{\theta\theta}}{\rho^3 v^3} + \frac{2\rho\rho_x\rho_\theta}{\rho^3 v^3}\rho_{x\theta} + \frac{\rho^2+2\rho_\theta^2+\rho^2\rho_x^2}{\rho^3 v^3}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$(3.7)(i) \qquad \frac{1+\left(\frac{\rho_\theta}{\rho}\right)^2}{v^3}\rho_{xx} + \frac{1+\rho_x^2}{\rho^2 v^3}\rho_{\theta\theta} - \frac{2\rho_x\rho_\theta}{\rho^2 v^3}\rho_{x\theta} - \frac{1}{\rho v^3}(1+\rho_x^2+2\left(\frac{\rho_\theta}{\rho}\right)^2) + 1 = 0\,.$$

No caso de D, $\rho = \rho_D$ é independente de θ, e satisfaz (note-se que $1+\rho_{D_x}^2 = v_D^2$)

$$(3.7)(ii) \qquad \frac{\rho_{xx}}{v^3} - \frac{1}{\rho v} + 1 = 0\,.$$

Seja $w = \rho - \rho_D$, com $\rho \equiv \rho_E$ (solução de $3.7(i)$). Observando que, a menos possivelmente de termos quadráticos em $(w, \nabla w, \nabla^2 w)$, temos

$$\rho^2 = \rho_D^2 + 2\rho_D w \quad , \quad v^2 = v_D^2 + 2\rho_x w_x \quad \text{e} \quad \frac{1}{v^3} - \frac{1}{v_D^3} = -2\rho_x w_x \frac{v_D^2+v^2+vv_D}{v^3 v_D^3(v+v_D)}$$

concluímos (no que segue, $Q_j, j \in \mathbb{N}$, são somas de termos que dependem quadraticamente de $(w, \nabla w, \nabla^2 w)$), que

$$\frac{\rho_{xx}}{v^3} + \frac{w_{\theta\theta}}{\rho^2 v} - \frac{1}{\rho v} + 1 = Q_1, \quad \text{e logo} \quad \frac{\rho^2}{v^2}w_{xx} + w_{\theta\theta} - \rho + \rho^2 v = Q_2\,.$$

Sendo $\dfrac{\rho_{D_{xx}}}{v_D^3} - \dfrac{1}{\rho_D v_D} = -1$, temos

$$\frac{\rho^2}{v^2}w_{xx} + w_{\theta\theta} - \rho + \left(\frac{\rho^2}{v^2} - \frac{\rho^2 v}{v_D^3}\right)\rho_{Dxx} + \frac{\rho^2 v}{\rho_D v_D} = Q_3,$$

ou seja,

$$\frac{\rho^2}{v^2}w_{xx} + w_{\theta\theta} - \rho + \rho^2 v\left(-2\frac{v_D^2 + v^2 + vv_D}{v^3 v_D^3(v+v_D)}\right)\rho_x w_x \rho_{xx} + \frac{\rho^2 v}{\rho_D v_D} = Q_3$$

(pois $w_x \rho_{D_{xx}} = w_x \rho_{xx} + Q_4$).

Então

$$\frac{\rho^2}{v^2}w_{xx} + w_{\theta\theta} - \rho - 2\frac{\rho^2\rho_x\rho_{xx}}{v^4}w_x\left(1 + \frac{v^2}{v_D(v+v_D)}\right) + \frac{\rho^2 v}{\rho_D v_D} = Q_5\,,$$

ou

$$\frac{\rho^2}{v^2}w_{xx} + w_{\theta\theta} - 3\frac{\rho^2\rho_x\rho_{xx}}{v^4}w_x + w + \frac{\rho^2\rho_x\rho_{xx}}{v^4}w_x\left(1 - \frac{2v_D}{v+v_D}\right) + \frac{\rho^2 v}{\rho_D v_D} - 2w - \rho_D = Q_6.$$

Notando que

$$\frac{\rho^2 v}{\rho_D v_D} - 2w - \rho_D + \frac{\rho^2\rho_x\rho_{xx}}{v^4}w_x\left(1 - \frac{2v_D}{v+v_D}\right) = (2w+\rho_D)\frac{v}{v_D} - 2w-$$

$$-\rho_D + \frac{\rho^2\rho_x\rho_{xx}}{v^4}w_x\left(\frac{v^2 - v_D^2}{(v+v_D)^2}\right) + Q_7 = (2w+\rho_D)\left(\frac{v}{v_D} - 1\right) + Q_8 = (w+\rho)\frac{2\rho_x w_x}{v_D(v+v_D)} + Q_9 =$$

$$= \frac{2\rho\rho_x w_x}{v_D(v+v_D)} + Q_{10}\,,$$

e que

$$2v^2 - vv_D - v_D^2 = 2\rho_x w_x + \frac{v(v^2 - v_D^2)}{v+v_D} + Q_{11} = 2\rho_x\left(1 + \frac{v}{v+v_D}\right)w_x + Q_{12}\,,$$

e logo

$$\frac{2\rho\rho_x w_x}{vv_D + v_D^2} - \frac{\rho\rho_x w_x}{v^2} = \frac{\rho\rho_x w_x}{v^2(vv_D + v_D^2)}2\rho_x\left(1 + \frac{v}{v+v_D}\right)w_x + Q_{13} = Q_{14}\,,$$

temos que

$$\frac{\rho^2}{v^2}w_{xx} + w_{\theta\theta} - 3\frac{\rho^2\rho_x\rho_{xx}}{v^4}w_x + w + \frac{\rho\rho_x w_x}{v^2} = Q_{15}\,,$$

e segue-se que $w = \rho_E - \rho_D$ satisfaz

$$\frac{\rho^2}{v^2}w_{xx} + w_{\theta\theta} + \left(\frac{\rho\rho_x}{v^2} - 3\frac{\rho^2\rho_x\rho_{xx}}{v^4}\right)w_x + w = Q(w, \nabla w, \nabla^2 w)\,, \tag{3.8}$$

onde Q, além de depender pelo menos quadraticamente de $(w, \nabla w, \nabla^2 w)$, é tal que cada termo com $\nabla^2 w$ tem um fator w ou ∇w.

Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ uma região, e $\alpha \in (0,1)$. Uma função $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é α-Hölder em $\overline{\Omega}$ se $\sup\limits_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \dfrac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty$. $\partial^k f$ é α-Hölder se todas as derivadas $\dfrac{\partial^k f}{\partial x_1^{\beta_1}\dots\partial x_n^{\beta_n}}, \Sigma\beta_i = k$, são α-Hölder. Com a notação de [6], consideramos no espaço $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) = \{u \in C^k(\overline{\Omega}) | \partial^k u$ é α -Hölder$\}$, a norma

$$||u||_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \sum_{j=0}^{k} \sup_{x\in\overline{\Omega}} \sup_{\Sigma\beta_i=j} \left| \frac{\partial^j u}{\partial x_1^{\beta_1}\dots\partial x_n^{\beta_n}}(x) \right| + \sup_{\Sigma\beta_i=k} \sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}} \frac{\left| \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\beta_1}\dots\partial x_n^{\beta_n}}(x) - \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\beta_1}\dots\partial x_n^{\beta_n}}(y) \right|}{|x-y|^\alpha}.$$

Em particular, se $\tilde{I} \subset\subset I \subseteq \mathbb{R}$,

$$C^{\frac{1}{2}}(\tilde{I}) = C^{0,\frac{1}{2}}(\tilde{I}) = \{u \in C^0(\tilde{I}) | \sup_{\substack{x,y\in\tilde{I}\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{\sqrt{|x-y|}} < \infty\},$$

e

$$||u||_{C^0(I)} = \sup_{x\in I} |u(x)| \ ; \ ||u||_{C^{\frac{1}{2}}(I)} = \sup_{\substack{x,y\in\overline{I}\\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{\sqrt{|x-y|}} \ ; \ ||u||_{C^3(I)} = \Sigma_{j=0}^{3} \sup_{x\in I} |u^{(j)}(x)|.$$

Fazendo $\epsilon = ||w||_{C^0(I)}$, e tomando $k' > 0$ tal que $|\nabla^2 w| \leq k'$ (sabemos que $|A_E| \leq 2|A_D|_{\max}$) temos $|\nabla w| \leq k'r$ e $|w| \leq k'r^2$, onde $r = |\tilde{I}|$.

Se $\epsilon > 0$, seja $\Lambda \in \left(0, \frac{\sqrt{\epsilon}}{r}\right]$. Então $|\nabla w|^2 \leq k'^2 r^2 \leq \frac{k'^2}{\Lambda^2}\epsilon = k_0^2\epsilon$ (para algum $k_0 > 0$). Logo $|\nabla w| \leq k\sqrt{\epsilon}$ em $\tilde{I}$ (para algum $k > 0$). Analogamente, $|w| \leq k_1\epsilon$ (para algum $k_1 > 0$).

Então

$$||Q(w, \nabla w, \nabla^2 w)||_{C^0(\tilde{I})} \leq K\sqrt{\epsilon}, \text{ e segue-se que} ||Q(w, \nabla w, \nabla^2 w)||_{C^{\frac{1}{2}}(\tilde{I})} \leq K.$$

A teoria de regularidade ([6]) e as estimativas acima fornecem $||w||_{C^2(\tilde{I})} \leq K\sqrt{\epsilon}$ e, a fortiori (voltando a 3.8 e começando com um subintervalo intermediário) $||w||_{C^3(\tilde{I})} \leq K\epsilon$. Seja a norma $|| \ ||_I$, definida por

$$||w||_I = \sup_{x\in I} \sqrt{\int_0^{2\pi} w(x,\theta)^2 d\theta}. \tag{3.9}$$

A limitação de $\nabla^2 w$ acarreta que $||w||_{\{x\}}$ é uniformemente equivalente a $|| \; ||_{C^0(\{x\})}$, e logo

$$||w||_{C^3(\tilde{I})} \leq K||w||_I \; .$$

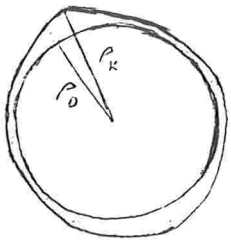
O Lema 3.4 é então consequência dos dois resultados abaixo.

Lema 3.10

Sejam $\tilde{I} \subset\subset I \subset\subset \mathbb{R}$, $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma slide-back sequence, $E_k \xrightarrow{\text{loc } C^2} D$. Sejam $\rho_k = \rho_{E_k} : (x,\theta) \mapsto \rho_E(x+t_k,\theta)$ e $w_k = \rho_k - \rho_D$, $k \in \mathbb{N}$. Fazendo $||w||_I = \epsilon_k$, seja $u_k = \frac{w_k}{\epsilon_k}$. Então $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tem um subsequência que converge em $C^2(\tilde{I})$ para uma solução de 3.3 .

Demonstração de 3.10

Sendo limitada em $C^3(\tilde{I})$, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é sequencialmente compacta em $C^2(\tilde{I})$, e logo existe $(u_{k_s})_{s\in\mathbb{N}} \subseteq (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente. Além disso, sendo $Q(w,\nabla w,\nabla^2 w)$ uma soma de termos quedráticos em $w, \nabla w$ e $\nabla^2 w$, e como $||w_k||_{C^2(\tilde{I})} \to 0$, temos que $\frac{Q(w,\nabla w,\nabla^2 w)}{\epsilon_k} \to 0$.



□

Lema 3.11

Existe $K < \infty$ tal que, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, a hipótese $\sup|\rho_\theta| < \epsilon$ em $x = b$ acarreta $|\rho_\theta| < K\epsilon$, qualquer que seja $x \geq b$.

Demostração de 3.11

Seja $\pi//a$ identificado com o plano xy e α a função de Alexandrov (§1) para E relativa a π. Seja $F(x,\theta) = (x, \rho\cos\theta, \rho\text{sen}\,\theta)$ (como em *3.6*). Fazendo $x = b$, temos $F_b(\theta) =$

$(b, \rho\cos\theta, \rho\text{sen}\,\theta)$ e $F_b'(\theta) = (0, \rho_\theta\cos\theta - \rho\text{sen}\,\theta, \rho_\theta\text{sen}\,\theta + \rho\cos\theta)$.

Seja $q = (< q, e_1 >, < q, e_2 >, 0) \in \pi$, e sejam θ_1 e θ_2 tais que (com a notação do §1) $Q_j(x) = q + t_j e_3 = F(x, \theta_j) = (x, \rho\cos\theta_j, \rho\text{sen}\,\theta_j)$, $j = 1, 2$. Então $t_j =< Q_j - q, e_3 >= \rho\text{sen}\,\theta_j$, $j = 1, 2$, e logo

$$\alpha(x) = \frac{1}{2}\max_{<q,e_1>=x}(\rho(x,\theta_1)\text{sen}\,\theta_1 + \rho(x,\theta_2)\text{sen}\,\theta_2).$$

Seja $\gamma_b = F_b([0, 2\pi])$ a interseção (quase circular) de E com o plano $x \equiv b$.

Então existem Q_1, $Q_2 \in \gamma_b$ tais que $\alpha(b) = \frac{1}{2}(\rho_1\text{sen}\,\theta_1 + \rho_2\text{sen}\,\theta_2)$, e $\rho_j\text{sen}\,\theta_j =< Q_j, \epsilon_3 >$, $j = 1, 2$. A reflexão de $\gamma_b \cap \prod_{\alpha(b)}$ através de $\pi_{\alpha(b)}$ (ver § 1) é tangente a γ_b em Q_2. Logo, se v_1 e v_2 são vetores unitários tangentes a γ_b em Q_1 e Q_2, então $< v_1, e_2 >= - < v_2, e_2 >$, ou seja,

$$\frac{\rho_1\text{sen}\,\theta_1 - \rho_{\theta_1}\cos\theta_1}{\sqrt{\rho_1^2 + \rho_{\theta_1}^2}} = \frac{\rho_{\theta_2}\cos\theta_2 - \rho_2\text{sen}\,\theta_2}{\sqrt{\rho_2^2 + \rho_{\theta_2}^2}}$$

Lembrando que $\rho \leq 2r_+$ e $v \leq 2v_D$ max, e observando que $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$, temos

$$\rho_1\text{sen}\,\theta_1 - \rho_{\theta_1}\cos\theta_1 = \lambda_1\sqrt{\rho_1^2 + \rho_{\theta_1}^2} \quad \text{e} \quad \rho_2\text{sen}\,\theta_2 - \rho_{\theta_2}\cos\theta_2 = \lambda_2\sqrt{\rho_2^2 + \rho_{\theta_2}^2},$$

onde fizemos $\lambda_j = - < v_j, e_2 >$, $j = 1, 2$ (então $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$), e logo

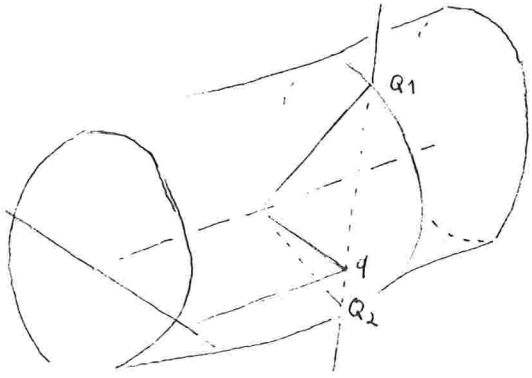
$$\rho_1\text{sen}\,\theta_1 + \rho_2\text{sen}\,\theta_2 - (\rho_{\theta_1} + \rho_{\theta_2})\cos\theta_1 = \lambda_1\sqrt{\rho_1^2 + \rho_{\theta_1}^2} + \lambda_2\sqrt{\rho_2^2 + \rho_{\theta_2}^2}.$$

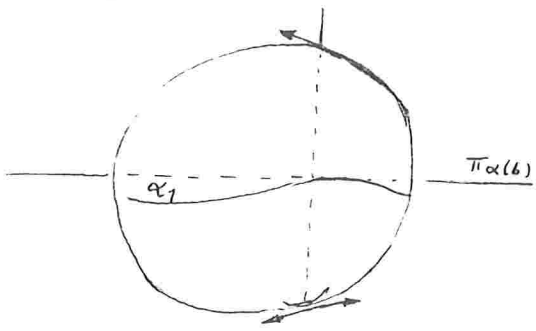
Se $\sup_\theta |\rho_\theta| < \epsilon$, então $|\rho_1 - \rho_2| \leq |\int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho_\theta d\theta| < k\epsilon$, e segue-se que

$$\rho_1^2 + \rho_{\theta_1}^2 \leq \rho_2^2 + \rho_{\theta_2}^2 + (\rho_1 + \rho_2)k\epsilon + \epsilon^2, \quad \text{e} \quad |\rho_{\theta_1} + \rho_{\theta_2}| < 2\epsilon.,$$

e

$$\alpha(b) = \frac{1}{2}(\rho_1\text{sen}\,\theta_1 + \rho_2\text{sen}\,\theta_2) < 2\epsilon\cos\theta_1 + (\lambda_1 + \lambda_2)\sqrt{\rho_2^2 + \rho_{\theta_2}^2} + \lambda_1\tilde{k}\epsilon = k_1\epsilon.$$



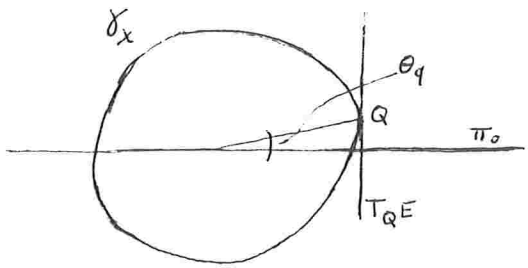


Sendo α não-crescente, $|\alpha(x)| < k_1\epsilon$, $\forall x \geq b$, e $\pi//a$ e a qualquer. Logo, se $\epsilon > 0$ é suficientemente pequeno, $|\alpha_\pi(x)| < k_1\epsilon$, $\forall x \geq b$, $\forall \pi//a$.

Suponhamos que $\alpha_\pi(x) \leq \epsilon$, qualquer que seja $\pi//a$, e seja $Q \in E$ tal que $< Q, e_1 >= x$ (fixando um plano π e fazendo $\pi = z^{-1}(0)$) e tal que $T_QE \perp \pi$. Se $q = xe_1 + < Q, e_2 > e_2$, então $\alpha_1(q) =< Q, e_3 >$, pois $E_k \to D$ localmente C^2 (Teorema 3.2) e logo, para x suficientemente grande, γ_x é convexa, e tem no máximo um ponto de tangência com cada plano paralelo a a.

Seja θ_q tal que $\alpha_1(q) = \rho(x, \theta_q)\text{sen}\,\theta_q$. Então θ_q é um ponto de máximo para a função $\theta \mapsto \rho\cos\theta$, e logo $(\rho\cos\theta)_\theta\Big|_{\theta=\theta_q} = 0$. Ou seja,

$$\rho(x, \theta_q)\text{sen}\,\theta_q = \rho_\theta(x, \theta_q)\cos\theta_q\,.$$



Sendo γ_x próxima de um círculo, os pontos $Q \in \gamma_x$ em que $T_QE \perp \pi$ estão próximos de π_0 (o plano "horizontal" que separa D em duas metades com a mesma área), e logo $\cos\theta_q \approx 1$. Seja então $\mu > 0$ tal que $\cos\theta_q \geq \mu$, e segue-se que

$$|\rho_\theta(x, \theta_q)| = \left|\frac{\rho(x, \theta_q)\text{sen}\,\theta_q}{\cos\theta_q}\right| \leq \mu^{-1}\alpha_1(q) \leq \mu^{-1}\alpha(x) \leq \mu^{-1}\epsilon\,.$$

A afirmação é então imediata a partir da monotonicidade de α (observe-se que $\exists K/\ |\rho_\theta| < K\epsilon$ sse $\exists K_1/|\alpha| < K_1\epsilon$). □

Demonstração de 3.4

Seja $a' < a < b$ tal que $[a', b) \subset\subseteq I$. Vamos provar que, qualquer que seja $M < \infty$, existe $k_M = k(M)$ tal que $||u_k||_{C^0([a',M])} \leq k_M$.

Segue-se de $||u_k||_{C^3(\widetilde{I})} \leq K$ que $|\nabla w_k| = o(\epsilon_k)$ em a'. Em particular, $|\rho_{k_\theta}| = |w_{k_\theta}| = o(\epsilon_k)$ (em a') e, por 3.11, $|w_{k_\theta}| = o(\epsilon_k)$ em x, $\forall x \geq a'$.

Fazendo $u = \rho_\theta$ em 3.7, multiplicando por $\rho^2 v^3$ e derivando em relação a θ, vemos que ρ_θ é solução da equação quasilinear

$$\begin{aligned}
&(u^2+\rho^2)u_{xx} + (1+\rho_x^2)u_{\theta\theta} - 2\rho_x u u_{x\theta} - \\
&-2uu_x^2 - 4\rho\rho_x u_x - \frac{4u}{\rho}u_\theta + 2\rho_{xx}uu_\theta + 3v(\rho^2\rho_x u_x + uu_\theta) + \\
&+(2\rho\rho_{xx} - 1 - \rho_x^2)u - \frac{2}{\rho^2}u^3 + 2\rho uv(1+\rho_x^2 + \frac{u^2}{\rho^2} - \frac{3u^3}{\rho}) = 0 \ ,
\end{aligned}$$

que é uniformemente elítica (com $\Lambda(x,\theta) = 1+\rho_x^2$ e $\lambda(x,\theta) = u^2+\rho^2$).

A estimativa interior de Schauder ([6], ch.6) fornece então

$$||\rho_{k_\theta}||_{C^1([a',\infty))} = o(\epsilon_k) \, .$$

Além disso, $|\rho_k(a',\theta) - \rho_D(a',\theta)| = o(\epsilon_k)$, para todo θ fixo (pois $a' \in \widetilde{I}$), e logo, pelo teorema de dependência diferenciável para equações diferenciais ordinárias, temos $|\rho_k - \rho_D| = o(\epsilon_k)$ em $[a', M]$, se $M < \infty$. Está provada a afirmação do início. Sendo $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ limitada em $C^0([a',M])$, tem uma subsequência $(u_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ convergente para um campo de Jacobi em $[a',M]$, por 3.10 e pela unicidade de soluções máximas (de E.D.O.).

Se $M_s \to \infty$, escolhendo uma subsequência convergente $(u_{k_s})_{s\in\mathbb{N}}$ tal que u_{k_s} está definida em $[a', M_s]$, a diagonalização de Cantor vai fornecer uma sequência convergente para um campo de Jacobi definido em $[a,\infty)$. A convergência é C^2-local, pois, se $x \in [a,\infty)$, existe $\widetilde{I} \ni x$ tal que $||u_k||_{C^3(\widetilde{I})} \leq K_{\widetilde{I}}$. □

Observação

Fazendo $u(x,\theta) = X(x)\Theta(\theta)$, obtemos

(3.12)(i) $$\Theta_{\theta\theta} + k^2\Theta = 0 \quad , k \in \mathbb{N}$$

(3.12)(ii) $$X_{xx} - \left(\log\left(\frac{v^3}{\rho}\right)\right)_x X_x + (1-k^2)\frac{v^2}{\rho^2}X = 0$$

(observe-se que $\left(\log \frac{v^3}{\rho}\right)_x = \frac{3\rho_x\rho_{xx}}{v^2} - \frac{\rho_x}{\rho}$).

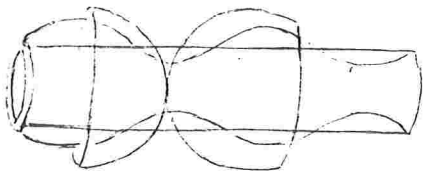
Se $k = 0$, seja $(D_s)_{s\in(0,1]}$, a família a um parâmetro das superfícies de Delaunay (com $H \equiv 1$) de raio mínimo s em $x = 0$, $0 < s \leq 1$, e seja $D_\sigma = D$ (a Delaunay limite da nossa slide back sequence). A função $G : (s, x, \theta) \mapsto \rho_s(x, \theta) = \rho_s(x)$ é tal que $G_\theta = G_{s\theta} = G_{\theta s} \equiv 0$ e, fazendo $w_s = \rho_s - \rho_\sigma$, $\epsilon_s = ||w_s||_I = \sqrt{2\pi}\sup_{x\in I}|\rho_s(x) - \rho_\sigma(x)|$, vemos que (a menos de uma constante multiplicativa)

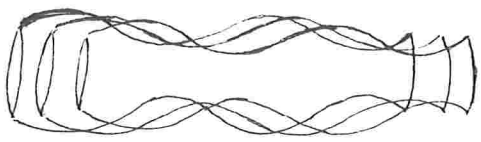
$$\frac{\partial}{\partial s}\rho_s(x)\Big|_{s=\sigma} = G_s(\sigma, x) = \lim_{s\to\sigma}\frac{\rho_s(x) - \rho_\sigma(x)}{s - \sigma} = \lim_{s\to\sigma} u_s(x) = u(x)$$

é um campo de Jacobi independente de θ. Então $u \equiv X_{O,D}$, solução de 3.12 (ii) (com $k = 0$).

Se D_σ é um cilindro, então D_σ está na família a um parâmetro das 1-superfícies de Delaunay com raio máximo em $x = 0$, e o mesmo argumento fornece uma solução (com $k = 0$) linearmente independente de $X_{O,D}$.

Se D não é um cilindro, considere-se a família a um parâmetro definida pelas translações de D ao longo L_D, $D_s = D + se_1$, e, analogamente, obteremos que ρ_{D_x} é solução linearmente independente de $X_{O,D}$.





Se $k > 0$, fazendo $t = g(x)$, temos

$$\begin{aligned} X_{tt}\, g'(x)^2 \;&+\; \left(g''(x) + \left(\frac{\rho_x}{\rho} - \frac{3v_x}{v}\right) g'(x)\right) X_t + (1 - k^2)\frac{v^2}{\rho^2}X = \\ &= X_{xx} + \left(\frac{\rho_x}{\rho} - 3\frac{v_x}{v}\right) X_x + (1 - k^2)\frac{v^2}{\rho^2}X = 0\,. \end{aligned}$$

Logo, para $g(x) = \int_0^x \frac{v^3}{\rho}$, a equação fica

$$(3.12)' \qquad X_{tt} + \frac{1-k^2}{v^4} X = 0 \ .$$

A limitação de ρ e a de v permitem estudar as propriedades de crescimento através de $X(t)$ ou de $X(x)$, pois a razão

$$\frac{t}{x} = \frac{g(x)}{x} = \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(\xi) = \frac{v^3}{\rho}\Big|_{x=\xi} \leq K \quad , \text{se } x \in [a,b] \, , \ a \in (0,b) \, .$$

Se $k = 1$, temos $X_{tt} \equiv 0$, e logo $X(t) = k_0 + k_1 t = k_0 + k_1 g(x)$. Só existe uma solução limitada ($X \equiv 1$, a menos de múltiplo escalar). As outras soluções crescem linearmente com t (ou com x, pois $g'(x) > 0$).

Se $k \geq 2$, existe exatamente uma solução não-nula que decai exponencialmente quando $x \to \infty$. Todas as outras são minoradas por $e^{\lambda x}$ para algum $\lambda > 0$, quando $x \to \infty$ (pois nesse caso 3.12 é da forma $X_{tt} = fX$, $f(t) > 0 \ \forall t$, e logo $X = \lambda e^{\int_0^t \psi}$, com $\psi' + \psi^2 = f$).

O net das soluções que satisfazem $X(0) = 1$, $X(M) = 0$, $M > 0$, é estritamente crescente, quando $M \to \infty$, e o limite é uma solução > 0 com decaimento exponencial, o que se pode mostrar com funções barreira exponenciais $\mathcal{E}_M$, $M > 0$, $\mathcal{E}_M(0) = 1$ e a taxa de decaimento de $\mathcal{E}_M$ é menor que $\inf \frac{\sqrt{k^2-1}}{v^2}$. As soluções que satisfazem $X(0) = 1$, $X'(0) > 0$, crescem exponencialmente, quando $x \to \infty$.

Feita essa observação, temos o seguinte lema:

Lema 3.13

Se o campo de Jacobi u provem de slide-back sequence, então u tem a expansão

$$u(x,\theta) = a_0 \rho_{D_x} + \sum_{k \geq 2} \operatorname{sen}(k\theta + \phi_k) X_k(x) \ ,$$

onde, para $k \geq 2$, $\phi_k \equiv$ constante e X_k é uma função com decaimento exponencial (ou $\equiv 0$). A menos do termo ρ_{D_x}, u decai a uma taxa exponencial uniforme, quando $x \to \infty$.

Demonstração de 3.13

O método de espaço de Hilbert fornece

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{sen}(k\theta + \phi_k) X_k(x) \ ,$$

sendo a convergência uniforme e C^2 nos compactos.

Sendo u_θ uniformemente limitado em $[a, \infty)$, a integral L^2 de u relativa a θ sobre a seção normal $\Gamma_b (x \equiv b)$ é também uniformemente limitada. Então existe $\widetilde{K}$ tal que

$$\pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 X_k(b)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} k^2 \cos^2(k\theta + \phi_k) d\theta X_k(b)^2 = \int_{\Gamma_b} u_\theta^2 d\theta \leq \widetilde{K}$$

e segue-se que X_k é limitado, para todo $k \geq 1$. Em consequência (em vista da observação anterior), X_1 é constante e X_k é exponencialmente decrescente, $k \geq 2$.

Se $X_1 \neq 0$, uma rotação em torno do eixo x fornece $\phi_1 = 0$ e $X_1 < 0$. Então existe $\overline{x}$ tal que $|X_k(x)| < -X_1$, $\forall x \geq \overline{x}$, se $k \geq 2$. Além disso,

$$\rho_j = \rho_j(x + t_j, \theta) = \rho_D + \epsilon_j u + o(\epsilon_j) \ ,$$

e $\rho_D + \epsilon_j X_o$ é axialmente simétrica. Logo, se L é suficientemente grande, a função auxiliar α_1 (de Alexandrov) satisfaz $\alpha_1((t_j + L)e_1) < 0$. Como o valor de α em $x \geq t_j + L$ está próximo do valor de α_1 sobre o eixo x ($x \geq t_j + L$), teremos que $\alpha(t_j + L) < 0$, absurdo, pois α é estritamente decrescente (ou $\alpha \equiv 0$) e $\alpha(x) \to 0$, quando $x \to \infty$. Segue-se que $X_1 \equiv 0$.

A aproximação de ρ_j (acima) fornece que $w(E_j) = \int_{\Gamma_j} \eta - \int_{K_j} \nu \approx \pi\rho_D(2 - \rho_D) + \epsilon_j(1 - \rho_D) \int_0^{2\pi} u d\theta + o(\epsilon_j)$ e $w(D) = \pi\rho_D(2 - \rho_D)$. Temos (por 3.2),

$$0 = w(E_j) - w(D) = \epsilon_j(1 - \rho_D) \int_0^{2\pi} u d\theta + o(\epsilon_j) \ ;$$

e, sendo $\int_0^{2\pi} u \, d\theta = -2\pi \operatorname{sen} \phi_o X_o$, temos que (se D não é um cilindro), fazendo $X_o = a_o \rho_{D_x} + b_o X_{O,D}$, e observando que $X_{O,D}$ e ρ_{D_x} são linearmente independentes, necessariamente $b_o = 0$. □

Demonstração de 3.1

Seja D a Delaunay limite de uma slide-back sequence $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ para E, como em 3.2 (D é única a menos de translação ao longo de L_D), e sejam $\rho_t(x,\theta) = \rho_E(x+t,\theta)$ e $w_t = \rho_t - \rho_D$, $t > 0$. O passo crucial é a observação abaixo:

Existem T, um múltiplo (> 0) do período de D, e $N > 0$ tais que, para todo t suficientemente grande, tem-se

$$\epsilon(t+T+s) < \frac{\epsilon(t)}{2}, \quad \text{para algum } s = s(t) \text{ tal que } |s| < N\epsilon(t)\ , \tag{3.14}$$

onde $\epsilon(t) = ||w_t||_{[0,T]} = \max_{x\in[0,T]} \sqrt{\int_0^{2\pi} |w_t(x,\theta)|^2 d\theta}$.

Suponhamos que isso não é verdade. Então, quaisquer que sejam T e N, existe uma sequência $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $t_j \to \infty$ e

$$\epsilon(t_j+T+s) \geq \frac{\epsilon_j}{2}\ , \ \forall s/|s| \leq N\epsilon_j \quad (\text{onde } \epsilon_j = \epsilon(t_j))\ .$$

Seja $u_j = \frac{w_{t_j}}{\epsilon_j}$. Segue-se de 3.4 e 3.13 que $u_j \xrightarrow{\text{loc } C^2} u$, u um campo de Jacobi definido em $[1,\infty)$ cuja expansão é

$$u(x,\theta) = a_o\rho_{D_x} + \sum_{k=2}^{\infty} \text{sen}\,(k\theta+\phi_k)X_k(x)\,.$$

Então (por hipótese), $||u||_{[T,2T]} = \lim_{j\to\infty} \frac{||w_{t_j}||_{[T,2T]}}{\epsilon} \geq \frac{1}{2}$, e logo $u \not\equiv 0$. Se D não é um cilindro, necessariamente existe uma cota superior K para todos os valores possíveis de $|a_o|$, pois $||u||_{[0,T]} \leq 1$. Se $N > K$, então $-a_o\epsilon_j < N\epsilon_j$, $\forall j$, e fazemos $s_j = -a_o\epsilon_j$, $j \in \mathbb{N}$. E a convergência uniforme e C^∞ em $[1,2T]$ vai fornecer

$$\begin{aligned} w_{t_j+s_j}(x,\theta) = \rho_E(x+t_j-a_o\epsilon_j,\theta) - \rho_D(x) &= \\ = \rho_E(x+t_j-a_o\epsilon_j,\theta) - \rho_E(x+t_j,\theta) + \rho_E(x+t_j,\theta) - \rho_D(x) &= \\ = w_{t_j}(x,\theta) - a_o\epsilon_j\rho_{E_x}(x,\theta) + o(\epsilon_j) = \epsilon_j(u_j - a_o\rho_{E_x} + o(\epsilon_j) &= \\ = \epsilon_j\left(\sum_{j=2}^{\infty} \text{sen}\,(k\theta+\phi_k)X_k(x)\right) + o(\epsilon_j) &\quad , \end{aligned}$$

e como $\lim_{x\to\infty}\sum_{j\geq 2}\operatorname{sen}(k\theta+\phi_k)X_k(x)=0$ (sendo a convergência exponencial e com taxa uniforme), temos que, para T suficientemente grande,

$$||w_{t_j+s_j+T}||_{[0,T]}=||w_{t_j+s_j}||_{[T,2T]}=\epsilon_j\max_{x\in[T,2T]}\sqrt{\pi\sum_{k\geq 2}X_k(x)^2}+o(\epsilon_j)\leq$$
$$\leq\frac{\epsilon_j}{3}\sqrt{\pi\sum_{k\geq 2}X_k(x)^2}+o(\epsilon_j)\leq\frac{1}{3}||w_{t_j}||_{[0,T]}+o(\epsilon_j)\,.$$

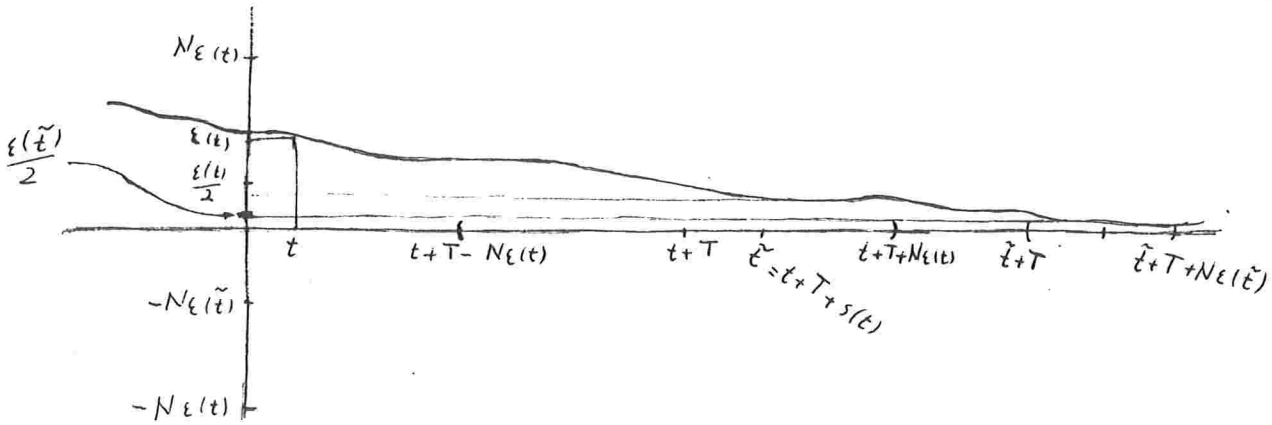
Então $\frac{\epsilon_j}{2}<\epsilon(t_j+T+s_j)\leq\frac{\epsilon_j}{3}+o(\epsilon_j)$, $\forall j$, absurdo. E segue-se a observação.

Suponhamos, portanto, que T,N e $s=s(t)\in C^\infty(\mathbb{R})$ são como acima, para $t\geq 0$. Seja $\epsilon(0)<\frac{T}{2N}$ e definamos (recursivamente), para $j\in\mathbb{N}$, com $t_o=0$ e $s_0=s(0)$,

$$t_j=\sigma_j+jT\quad,\quad\sigma_j=\sum_{i=0}^{j-1}s_i\qquad,j=1,2,\ldots$$

Então $t_j=t_{j-1}+T+s(t_{j-1})$ e segue-se que

$$\epsilon(t_j)<\frac{T}{2^j}<\frac{T}{2^{j+1}N}\qquad\text{e}\qquad|s_j|<\frac{T}{2^{j+1}}\qquad,j=1,2,\ldots$$



Observemos que $\sigma_j\leq|\sigma_j|\leq\sum_{i=0}^{j}\frac{T}{2^{i+1}}\to T$, e logo existe $\sigma=\lim_{j\to\infty}\sigma_j$. Logo

$$w_\sigma(x,\theta)=\rho_E(x+\sigma,\theta)-\rho_D(x)\quad=$$
$$=\rho_E(x+\sigma_j,\theta)-\rho_D(x)+\rho_E(x+\sigma,\theta)-\rho_E(x+\sigma_j,\theta)\quad=$$
$$=w_{t_j}(x-jT,\theta)+\rho_E(x+\sigma,\theta)-\rho_E(x+\sigma_j,\theta)\quad,$$

e então

$$|w_\sigma(x,\theta)| \leq |w_{t_j}(x-jT,\theta)| + ||\rho_{E_x}(\xi,\theta)||\,|\sigma-\sigma_j| \leq K_o\frac{\epsilon(0)}{2^j} + K_1|\sum_{i>j} s_i|\,,$$

em consequência da limitação do steepness e da equivalência entre $||\ ||_I$, e $||\ ||_\infty$. Ou seja, $\exists K/$

$$|w_\sigma(x,\theta)| \leq \frac{K}{2^j}\,, \quad \text{qualquer que seja } j\,.$$

Segue-se que $|w(x,\theta)| \leq Ce^{\frac{-\log 2}{T}x}$. □

Corolário 2.14

Toda 1-superfície $\Sigma^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ completa, propriamente mergulhada, de tipo finito é conformemente difeomorfa a uma superfície de Riemann compacta com um número finito de "furos".

A demonstração está em [8].

REFERÊNCIAS

[1] Aleksandrov, A.D. Uniqueness theorems for surfaces in the large I. *Vestnik Leningrad Univ. Math.* (1956), **19**, 5–17.

[2] Brito, F.G. and Earp, R.S. Saci's cap configurations by constant mean curvature surfaces. Pre-print (1990). PUC-RJ.

[3] Do Carmo, M. *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides, RJ.

[4] Delaunay, Ch. Sur la surface de revolution dont la courbure moyenne est constante. *J. Math. Pures et Appliés* (1841), 309–315.

[5] Earp, R. and Rosenberg, H. Some remarks on surfaces with prescribed mean curvature. To appear.

[6] Gilbarg, D. and Trudinger, N. Elliptic partial differential equations of second order. Springer (1983).

[7] Kapouleas, N. Complete constant mean curvature surfaces in euclidean three-space. *Ann. of Math.* (1990), 239–330.

[8] Korevaar, N.; Kusner, R. and Solomon, B. The structure of complete embedded surfaces with constant mean curvature. *J. Diff. Geometry* (1989), 465–503.

[9] Massey, W. Singular homology theory. Springer (1980).

[10] Meeks III, W. The topology and geometry of embedded surfaces with constant mean curvature. *J. Diff. Geometry* (1988), 539–552.

[11] Osserman, R. A survey of minimal surfaces. Van Nostrand Reinhold (1969). NY.

[12] Rolfsen, D. Knots and links. Publish or Perish (1976). Berkeley, CA.

[13] Schoen, R. Uniqueness, symmetry and embeddedness of minimal surfaces. *J. Diff. Geometry* (1983), **18**, 791–809.

[14] Simon, L. Lectures on geometric measure theory. *Proc. Ctr. Math. Anal.*, **3**, Australian National Univ. (1984), Camberra.

[15] ——— Isolated singularities of extrema of geometric variational problems. *Springer Lecture Notes*, vol. 1161 (1985), 206–277.

[16] Spivak, M. A comprehensive introduction to differential geometry. Publish or Perish (1979), Berkeley, CA.