

**Identidades Polinomiais
em
Álgebras de Bernstein**

Ivan Alejandro Correa Sierra

Tese apresentada
ao
Instituto de Matemática e Estatística
da
Universidade de São Paulo
para a obtenção do grau de Doutor
em
Matemática

Área de concentração: Álgebra
Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Peresi

Durante a elaboração deste trabalho, o autor
recebeu apoio financeiro do CNPq.

São Paulo, Maio de 1993

A Nicolasito

RESUMO

Neste trabalho estudamos as álgebras de Bernstein que satisfazem uma identidade polinomial. No primeiro capítulo, damos uma caracterização de alguns tipos de álgebras de Bernstein e estudamos álgebras de Bernstein que satisfazem uma identidade de grau quatro que não é consequência da comutatividade. Finalmente damos uma caracterização das álgebras de Bernstein de ordem n que são álgebras de Jordan. No segundo capítulo, construimos as identidades minimais para as álgebras de Bernstein nos casos normal, excepcional, nuclear e arbitrário. Usamos a técnica de processar identidades via representações do grupo simétrico. Finalmente, no terceiro capítulo, estudamos as álgebras comutativas que satisfazem uma das duas identidades de grau seis que foram obtidas no capítulo dois.

ABSTRACT

In this work we study Bernstein algebras that satisfy an identity. In the first chapter we give a characterization of some types of Bernstein algebras and study Bernstein algebras that satisfy an identity of degree four that is not consequence of the commutativity. Finally we give a characterization of n th-order Bernstein algebras that are Jordan algebras. In the second chapter, we construct the minimal identities for Bernstein algebras in the normal, exceptional, nuclear and arbitrary case. We use the technique of processing identities via the representations of the symmetric group. Finally, in the third chapter, we study the commutative algebras satisfying one of the two identities of degree six that were found in the second chapter.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO	1
0. PRELIMINARES.....	4
1. Identidades.....	4
2. Linearização.....	6
I. IDENTIDADES EM ÁLGEBRAS DE BERNSTEIN	8
1. Álgebras de Bernstein	8
2. A propriedade de Jordan	11
3. Nilpotência do núcleo	17
4. Álgebras de Bernstein normais.....	22
5. Álgebras de Bernstein excepcionais	25
6. Álgebras de Bernstein nucleares	30
7. Identidades de grau quatro	31
8. Álgebras de Bernstein de ordem n	39
II. IDENTIDADES MINIMAIS EM ÁLGEBRAS DE BERNSTEIN	42
1. A representação do grupo simétrico	43
2. Processamento de identidades	48
3. Identidades minimais em álgebras de Bernstein normais .	50
4. Identidades minimais em álgebras de Bernstein excepcionais	63
5. Identidades minimais em álgebras de Bernstein nucleares	68
6. Identidades minimais em álgebras de Bernstein	71
III. ÁLGEBRAS COMUTATIVAS QUE SATISFAZEM UMA IDENTIDADE DE GRAU SEIS	79

1. A identidade $(x^2x^2, y, x) - 2(x^2, y, x)x^2 = 0$	79
2. Álgebras de Jordan	85
3. Álgebras de Bernstein	97
4. A identidade $(x, yx^2, x^2) - (x, yx \cdot x, x^2)$ $-2(x^3, xy, x) + 2(x^2, xy, x)x = 0$	100
APÊNDICE	106
1. Diagramas de Young e tableaux standard. n=5	106
2. Diagramas de Young e tableaux standard. n=6	108
3. Representação de S_5	112
4. Representação de S_6	113
5. Forma escalonada das matrizes para o caso excepcional, grau quatro.....	117
6. (a) Identidades de grau cinco para o caso excepcional ..	118
(b) Forma escalonada das matrizes para o caso excepcional, grau cinco.....	119
7. (a) Identidades de grau quatro no caso nuclear	123
(b) Forma escalonada das matrizes para o caso nuclear, grau quatro.....	124
8. (a) Identidades de grau cinco no caso nuclear	126
(b) Forma escalonada das matrizes para o caso nuclear, grau cinco.....	127
9. (a) Identidades de grau cinco em álgebras de Bernstein .	132
(b) Forma escalonada das matrizes para as álgebras de Bernstein, grau cinco.....	133
10. (a) Identidades de grau seis em álgebras de Bernstein .	137
(b) Forma escalonada das matrizes para as álgebras de Bernstein, grau seis	138
REFERÊNCIAS	196

INTRODUÇÃO

Em 1923 Bernstein [B-1] propôs o problema da descrição explícita de todos os operadores evolução que atingem o equilíbrio na segunda geração. Este problema foi parcialmente resolvido por Lyubich [L-1, 2, 3]. Em 1975 Holgate em [H-8] forneceu uma formulação algébrica para o problema de Bernstein introduzindo o conceito de álgebra de Bernstein. O estudo e classificação destas álgebras tem-se mostrado um problema difícil. Apenas classificações parciais de alguns tipos de álgebras de Bernstein tem sido obtidas (ver por exemplo Holgate [H-2], Lyubich [L-3], Costa [C-9], Hentzel-Peresi [H-5]).

Na área das álgebras não-associativas o estudo das identidades tem-se mostrado uma importante ferramenta de trabalho. Nos artigos [O-2, 3, 4] de 1965-68, Osborn estudou as álgebras comutativas com elemento unidade que satisfazem alguma identidade de grau ≤ 4 que não é consequência da lei comutativa. Hentzel-Piacentini Cattaneo-Carini [H-6], usando uma técnica dada por Hentzel em [H-1], estenderam o resultado de Osborn encontrando todas as identidades que não são consequência da comutatividade em uma álgebra que não tem necessariamente unidade. Quando as álgebras tem unidade, estas identidades ficam reduzidas a lei associativa ou as identidades obtidas por Osborn.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos, o primeiro dos

quais (capítulo 0) contém elementos básicos que serão utilizados nos capítulos seguintes.

No capítulo I estudamos as identidades que são satisfeitas por alguns tipos de álgebras de Bernstein. No teorema 3 damos a classificação salvo isomorfismo das álgebras de Bernstein reais de dimensão 5 que também são álgebras de Jordan. Damos caracterizações para os casos normal e excepcional (teoremas 6 e 7). Usando o resultado de Hentzel-Piacentini Cattaneo-Carini (teorema 10) caracterizamos as álgebras de Bernstein que satisfazem uma identidade de grau ≤ 4 que não é consequência da lei comutativa (teorema 15). Finalmente damos uma generalização de um teorema de Walcher (teorema 2) que caracteriza aquelas álgebras de Bernstein de ordem n que são associativas nas potências (teorema 16).

Toda álgebra de Bernstein satisfaz a identidade de grau sete $(x^2x^2, y, x^2) = 0$. Assim, um problema natural é encontrar as identidades minimais, isto é, as identidades de menor grau, satisfeitas pelas álgebras de Bernstein. No capítulo II encontramos as identidades minimais satisfeitas por uma álgebra de Bernstein nos casos normal, excepcional e nuclear, e finalmente encontramos as identidades minimais satisfeitas por uma álgebra de Bernstein arbitrária (teoremas 5-8). Para este fim, utilizamos a técnica para processar identidades introduzida por Hentzel no artigo [H-1].

No Capítulo III estudamos as álgebras comutativas que satisfazem alguma das duas identidades minimais satisfeitas pelas álgebras de Bernstein (teoremas 5 e 11) e encontramos as condições necessárias

e suficientes para que uma álgebra satisfazendo uma destas identidades seja de Bernstein (teoremas 8 e 12).

Agradeço ao professor Luiz Antonio Peresi, que orientou este trabalho com muita dedicação. Agradeço também pela sua paciência e amizade. Agradeço ao professor Roberto Costa pelos seminários e sugestões que me foram muito úteis e ao professor Irvin Roy Hentzel (da Iowa State University) pela grande ajuda que me deu com seus programas computacionais. Finalmente, agradeço a minha companheira Cecilia por seu apoio e a meus grandes amigos Pilar, Juan, João e Hugo.

NOTAÇÃO

Usaremos a palavra álgebra para indicar uma álgebra não-associativa e comutativa. A menos de indicação explícita, vamos supor sempre as álgebras sobre corpos com característica diferente de dois no capítulo I e igual a zero nos capítulos II e III.

Escreveremos o produto de três elementos $(ab)c$ como $ab \cdot c$ e denotaremos por (a, b, c) (operador associação) a expressão $ab \cdot c - a \cdot bc$.

Alguns símbolos utilizados são:

$\delta_x^k(y)$ é o operador linearização.

L_a é o operador multiplicação à esquerda por a .

\tilde{T}_i é a função que leva uma n-upla de elementos na multiplicação deles associados de maneira T_i .

f_π denota uma identidade baseada na função f com os argumentos ordenados segundo a permutação π .

$x^{[n]}$ denota a n -ésima potência plena de um elemento x definida por $x^{[1]} = x$ e $x^{[n]} = x^{[n-1]}x^{[n-1]}$ para $n > 1$.

x^n denota a n -ésima potência principal de um elemento x definida por $x^1 = x$ e $x^n = x^{n-1}x$ para $n > 1$.

CAPÍTULO 0

PRELIMINARES

1. Identidades

Sejam A uma álgebra sobre um corpo F , S_n o grupo simétrico sobre n elementos e $\pi \in S_n$ uma permutação. Se $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \prod_{i=1}^n A$ denotaremos por $(a_1, a_2, \dots, a_n)_\pi$ a n -upla obtida ao permutarmos as posições dos argumentos a_i segundo π . Por exemplo, se $\pi = (123)$ então $(a_1, a_2, a_3)_\pi = (a_3, a_1, a_2)$. Observamos que $(a_1, a_2, a_3)_\pi \neq (a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, a_{\pi(3)}) = (a_2, a_3, a_1)$.

Dada uma função $f : \prod_{i=1}^n A \rightarrow A$ definimos a função

$$f_\pi : \prod_{i=1}^n A \rightarrow A$$

como $f_\pi(a_1, a_2, \dots, a_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n)_\pi$. Uma identidade em A baseada em f é uma soma

$$\sum_{\pi \in S_n} \alpha_\pi f_\pi,$$

onde os α_i são escalares em F e

$$\sum_{\pi \in S_n} \alpha_\pi f_\pi(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$$

para todo $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \prod_{i=1}^n A$.

Observamos que existe uma correspondência natural entre as identidades em A baseadas em f e os elementos da álgebra de grupo FS_n . O elemento

$$\phi = \sum_{\pi \in S_n} \alpha_\pi \pi$$

de FS_n é dito uma *identidade de A baseada na função f* se

$$f_\phi = \sum_{\pi \in S_n} \alpha_\pi f_\pi$$

é uma identidade em A . Este conceito pode ser generalizado a identidades que envolvem mais de uma função. Consideremos as funções

$$f_i : \prod_{i=1}^n A \rightarrow A, \quad (1 \leq i \leq r).$$

Um elemento $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) \in \prod_{i=1}^r FS_n$ é dito uma *identidade de A baseada em f_1, f_2, \dots, f_r* se $\sum_{i=1}^r (f_i)_{\phi_i}$ é uma identidade em A .

Observamos que $\prod_{i=1}^r FS_n$ é um FS_n -módulo à esquerda, e o conjunto de todas as identidades baseadas em f_1, f_2, \dots, f_r é um FS_n -submódulo. Uma identidade ϕ é consequência das identidades $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_s$ se e somente se ϕ pertence ao submódulo gerado por $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_s$.

Um tipo importante de identidades são as chamadas *identidades polinomiais*. Seja $F[X]$ a álgebra livre não-associativa sobre F dos polinômios nas indeterminadas do conjunto enumerável $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Um polinômio de grau l $f(x_1, \dots, x_n) \in F[X]$

é dito uma *identidade de grau l de A* se $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ para toda n-upla $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \prod_{i=1}^n A$.

Seja $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ um polinômio homogêneo de grau n, isto é, o grau da cada indeterminada x_i em cada um dos monômios que compõem o polinômio é um. Existem $c = \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$ maneiras diferentes T_i de associar o produto das n indeterminadas x_1, x_2, \dots, x_n .

Assim podemos escrever o polinômio como

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^c \sum_{\pi \in S_n} \alpha_\pi^i \tilde{T}_i(x_1, x_2, \dots, x_n)_\pi,$$

onde as \tilde{T}_i são funções que levam a n-upla (x_1, x_2, \dots, x_n) no produto $x_1 x_2 \dots x_n$ associado de maneira T_i .

Seja Γ um subconjunto de $F[X]$. A família de todas as álgebras sobre F , para as quais cada elemento de Γ é uma identidade, é dita a *variedade de álgebras determinada por Γ* .

2. Linearização

O processo de linearização é uma das ferramentas mais importantes no estudo das identidades em uma álgebra. Seja $f(x_1, \dots, x_n)$ uma identidade e seja y uma indeterminada diferente das x_i . Se substituirmos x_i por $x_i + y$, obtemos que

$$f(x_1, \dots, x_i + y, \dots, x_n) = \sum_{k \geq 0} f_{ik}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, y),$$

onde f_{ik} é a soma de todos os termos que tem grau k na indeterminada y . Definimos o operador $\delta_i^k(y)$ agindo sobre a identidade

f como

$$f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \delta_i^k(y) = f_{ik}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n, y).$$

Observamos que $\delta_i^0 = I$. Se $k > 0$, o operador δ_i^k age substituindo cada monômio pela soma dos monômios que podem ser obtidos dele substituindo k dos x_i por y . Observamos, além disto, que este operador satisfaz

$$(\alpha f + \beta g) \delta_i^k(y) = \alpha[f \delta_i^k(y)] + \beta[g \delta_i^k(y)],$$

para todo par de identidades f, g e $\alpha, \beta \in F$.

Se f é uma identidade, y é uma indeterminada diferente de x_1, x_2, \dots, x_n , $k \geq 1$, e o grau de $x_i \geq k$ em pelo menos um monômio de f , então $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \delta_i^k(y)$ é dita uma *linearização simples de f*. Uma identidade que pode ser obtida de f como uma sequência de uma ou mais linearizações simples de f é dita uma *linearização* de f . Uma linearização na qual em cada monômio não aparecem variáveis com grau > 1 é denominada uma *linearização completa*.

A propriedade mais importante do processo de linearização é que dada uma identidade, cada linearização dela é uma nova identidade.

Quando fazemos linearizações estamos sempre assumindo que o corpo tem um número suficiente de elementos.

Referência: [O-4].

CAPÍTULO I

IDENTIDADES

EM ÁLGEBRAS DE BERNSTEIN

1. Álgebras de Bernstein

Uma *álgebra ponderada* é um par (A, w) , onde A é uma álgebra sobre um corpo F e $w : A \rightarrow F$ é um homomorfismo não-nulo de álgebras.

Uma *álgebra de Bernstein* é uma álgebra ponderada que satisfaz a identidade

$$x^2x^2 = w(x)^2x^2. \quad (1)$$

Seja (A, w) uma álgebra de Bernstein. Todo elemento de A da forma $w(x)^{-2}x^2$ com $w(x) \neq 0$ é um elemento idempotente em A .

Seja $e \in A$ um elemento idempotente e seja $N = \text{Ker}(w)$. Então $A = F\epsilon \oplus N$.

O homomorfismo w é único. De fato, se w' é um outro homomorfismo não-nulo de A em F e $y \in \text{Ker}(w)$, então

$$w'(y)^4 = w'(y^2y^2) = w'(w(y)^2y^2) = 0.$$

Assim $w'(y) = 0$ e $y \in \text{Ker}(w')$, de onde $\text{Ker}(w) \subset \text{Ker}(w')$.

Como w' é não nulo, necessariamente $w'(e) = 1$ e então $w' = w$.

Assumindo este fato, no que segue escreveremos simplesmente A para indicarmos uma álgebra de Bernstein.

Seja $L_e : N \rightarrow N$ o operador definido por $x \mapsto ex$ (multiplicação à esquerda por e). Então L_e satisfaz

$$L_e(2L_e - I) = 0$$

e logo temos que $N = U \oplus Z$, onde $U = \text{Ker}(2L_e - I)$ e $Z = \text{Ker}(L_e)$. Obtemos assim a decomposição de Peirce de A

$$A = F\epsilon \oplus U \oplus Z. \quad (2)$$

Se I denota o conjunto dos elementos idempotentes em A , então

$$I = \{e + u + u^2 : u \in U\}.$$

Sejam $f = e + u_o + u_o^2 \in I$, U_f e Z_f os subespaços de A na decomposição (2) correspondentes ao idempotente f . Então

$$U_f = \{u + 2uu_0 : u \in U\}, \quad Z_f = \{-2(zu_0 + zu_0^2) + z : z \in Z\} \quad (3).$$

As dimensões dos espaços U e Z são invariantes da álgebra. O par $(\dim U + 1, \dim Z)$ é dito o *tipo da álgebra*. Lyubich [L-6, 7]

classificou as álgebras de Bernstein de dimensão arbitrária n sobre o corpo dos números complexos de tipos $(n, 0)$, $(n-1, 1)$, $(1, n-1)$ e $(2, n-2)$ e as de tipo $(3, n-3)$ tais que $U^2 \neq 0$. Observamos que de (3) é facil ver que $U^2 = 0$ independe da escolha do idempotente. Um outro invariante conhecido é $\dim(UZ \oplus Z^2)$.

O teorema a seguir caracteriza as álgebras ponderadas que são de Bernstein.

Teorema 1 (Lyubich [L-1]). Seja (A, w) uma álgebra ponderada. Suponhamos que $A = Fe \oplus U \oplus Z$, onde e é um idempotente e $Ker(w) = U \oplus Z$. Então, (A, w) é uma álgebra de Bernstein se e somente se, para todo $u \in U$, $z \in Z$ e $y \in Ker(w)$, temos que:

- | | |
|------------------------|-----------------------|
| a) $ez = 0$ | f) $uz^2 = 0$ |
| b) $eu = \frac{1}{2}u$ | g) $u^2 \cdot uz = 0$ |
| c) $y^2y^2 = 0$ | h) $uz \cdot z^2 = 0$ |
| d) $u^3 = 0$ | i) $(uz)^2 = 0$ |
| e) $uz \cdot u = 0$ | j) $u^2z^2 = 0$ |

e os subespaços U e Z satisfazem as relações

$$U^2 \subset Z, \quad Z^2 \subset U, \quad UZ \subset U. \quad (4)$$

Vamos terminar esta seção com algumas identidades que serão usadas nos cálculos que seguem.

Linearizando a identidade (1) obtemos

$$2x^2 \cdot xy - w(xy)x^2 - w(x)^2xy = 0 \quad (5)$$

e

$$\begin{aligned} 4xy \cdot xz + 2x^2 \cdot yz - w(yz)x^2 - 2w(xy)xz \\ - 2w(xz)xy - w(x)^2yz = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Fazendo $y = x^3$ e $z = x^2$ em (5) obtemos respectivamente

$$2x^2x^4 = w(x)^4x^2 + w(x)^2x^4 \quad (7)$$

e

$$2x^2x^3 = w(x)^3x^2 + w(x)^2x^3. \quad (8)$$

Referências: [B-1], [H-8], [L-1, 2, 3, 4, 5, 6, 7], [W-1, 2].

2. A propriedade de Jordan

Uma álgebra A é dita uma *álgebra de Jordan* se ela satisfaz a identidade

$$x^2y \cdot x = x^2 \cdot yx \quad (\forall x, y \in A).$$

Dizemos que uma álgebra não-associativa A é uma *álgebra com potência quarta associativa* quando verifica $x^2x^2 = x^3x$ para todo $x \in A$.

Em Walcher [W-1] encontramos a seguinte caracterização das álgebras de Bernstein que são de Jordan.

Teorema 2 (Walcher [W-1]). Seja (A, w) uma álgebra ponderada e de dimensão finita sobre um corpo de característica $\neq 2, 3$. Então são equivalentes as seguintes afirmações:

- a) A é uma álgebra de Bernstein-Jordan.
- b) A é uma álgebra de Bernstein com potência quarta associativa.
- c) A satisfaz a identidade

$$x^3 - w(x)x^2 = 0. \quad (9)$$

Também é conhecido o fato de que uma álgebra de Bernstein é de Jordan se e somente se $Z^2 = 0$ e $uz \cdot z = 0$ ($\forall u \in U, z \in Z$) ([A-2]). Esta última caracterização resulta também como consequência do teorema 1 do capítulo III.

Usando um teorema de Gerstenhaber-Myung [G-1] vamos classificar todas as álgebras de Bernstein-Jordan reais que tem dimensão 5. Esta classificação foi essencialmente obtida por Costa em [C-4, 5] por outro método.

Teorema 3. Existem 20 álgebras de Bernstein-Jordan de dimensão 5 não isomorfas sobre o corpo dos números reais. As tábuas de multiplicação são as seguintes:

I. $N^2 = 0$, $N = \langle u_i, z_j \rangle$, tipo: $(1+n, 4-n)$.
 $e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2}u_i$, onde $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $1 \leq i \leq n$ quando $n \geq 1$.

II. $\dim(N^2) = 1$, $N = \langle u_i, z_j \rangle$, $N^2 = \text{Rc}$.
II.1 $e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2}u_i, u_i^2 = \alpha_i c$ ($i = 1, 2, 3$).
onde $c \in Z$ e $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ é um elemento do conjunto:

$$\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, -1, 0), (1, 1, 1), (1, 1, -1)\}.$$

II.2. $e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2}u_i$, $u_i^2 = \alpha_i c$ ($i = 1, 2$),
onde $c \in Z$ e $(\alpha_1, \alpha_2) \in \{(1, 0), (1, 1), (1, -1)\}$.
II.3. $e^2 = e$, $eu_1 = \frac{1}{2}u_1$, $u_1^2 = c$.
II.4. $e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2}u_i$, ($i = 1, 2, 3$), $u_1 z_1 = u_3$.
II.5. $e^2 = e$, $eu_i = \frac{1}{2}u_i$, ($i = 1, 2$), $u_1 z_1 = u_2$.

III. $\dim(N^2) = 2$, $N = \langle x, y, x^2, xy \rangle$.
III.1. $e^2 = e$, $ex = \frac{1}{2}x$, $e \cdot xy = \frac{1}{2}xy$, $x \cdot x = x^2$, $x \cdot y = xy$.
III.2. $e^2 = e$, $ex = \frac{1}{2}x$, $ey = \frac{1}{2}y$, $x \cdot x = x^2$, $x \cdot y = xy$,
 $y^2 = \lambda x^2$ onde $\lambda \in \{0, 1, -1\}$.

Prova. Consideremos uma álgebra de Bernstein-Jordan A de dimensão cinco sobre um corpo arbitrário K . Então pelo teorema 2 temos que $N = \text{Ker}(w)$ é uma álgebra com potência quarta associativa de dimensão quatro que satisfaz a identidade $x^3 = 0$.

Se $N^2 = 0$ então existem 5 álgebras não isomórfas, uma para cada tipo. As tábuas de multiplicação são dadas pela tábua I.

Se $N^2 \neq 0$ então de Gerstenhaber-Myung [G-1] N é uma álgebra associativa, nilpotente de índice três, com $\dim(N^2)=1$ ou 2.

As álgebras de Bernstein-Jordan de dimensão arbitrária que satisfazem a condição $\dim(N^2) = 1$ foram classificadas por Hentzel-Peresi em [H-5]. Neste caso, se a dimensão é 5, existem 11 álgebras não isomorfas e as tábuas de multiplicação são as dadas pela tábua II.

Suponhamos então $\dim(N^2) = 2$. Separamos este caso em duas partes:

Se existem $x \in U$ e $y \in Z$ tais que $x^2 \neq 0$ e $xy \neq 0$ então de (4) segue que $x^2 \in Z$ e $xy \in U$. Assim $\{x^2, xy\}$ é uma base de N^2 . Se $\alpha x + \beta y \in N^2$ então $\alpha x^2 + \beta xy \in N^3 = 0$ e, como x^2 e xy são linearmente independentes, temos que $\alpha = \beta = 0$. Logo x e y são linearmente independentes módulo N^2 . Então se $\alpha x + \beta y + \gamma xy + \delta x^2 = 0$ temos que $\alpha x + \beta y \in N^2$ e $\alpha = \beta = 0$. Como $\{x^2, xy\}$ é linearmente independente, temos que $\gamma = \delta = 0$ e assim $\{x, y, xy, x^2\}$ é base de N . Como A é de Jordan temos que $Z^2 = 0$, de onde $y^2 = 0$. A tábua de multiplicação neste caso está em III.1.

Vejamos agora a parte complementar, isto é, suponhamos que $uZ = 0$ para todo $u \in U$ tal que $u^2 \neq 0$, e que se existe $z \in Z$ tal que $uz \neq 0$ então $u^2 = 0$. Temos três casos possíveis, a saber:

1. $U^2 = 0$.

Se $U^2 = 0$ então $N^2 = UZ$ e, como $\dim(N^2) = 2$, existem

$u_1, u_2 \in U$ e $z_1, z_2 \in Z$ tais que o conjunto $\{u_1z_1, u_2z_2\}$ é uma base de N^2 . Se z_1 e z_2 são linearmente independentes então $\dim(Z) \geq 2$. Suponhamos que $u_1 = \alpha u_1 z_1 + \beta u_2 z_2$. Então

$$u_1 z_1 = \alpha u_1 z_1 \cdot z_1 + u_2 z_2 \cdot z_1 = 0,$$

o que é absurdo. Logo $u_1, u_1 z_1, u_2 z_2$ são linearmente independentes e $\dim(U) \geq 3$. Neste caso $\dim(N) \geq 5$, o que também é absurdo.

Se $z_1 = \alpha z_2$ então $u_1, u_2, u_1 z_1, u_2 z_1$ são linearmente independentes. Com efeito, se

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_1 z_1 + \delta u_2 z_1 = 0$$

então

$$\alpha u_1 z_1 + \beta u_2 z_1 = 0,$$

de onde $\alpha = \beta = 0$. Assim $\dim(U) \geq 4$ e $Z = 0$ o que é absurdo. Então o caso $U^2 = 0$ não pode acontecer.

2. $UZ = 0$.

Suponhamos agora que $UZ = 0$. Como $Z^2 = 0$ temos que $N^2 = U^2$. Sejam $x_1, y_1 \in N$ tais que $y_1^2 = \lambda x_1^2$ ($\lambda \in K$) e $\{x_1, y_1, x_1^2, x_1 y_1\}$ é uma base de N (ver Gerstenhaber-Myung [G-1]).

Como $N = U \oplus Z$ existem $x, y \in U$ e $z, z' \in Z$ tais que $x_1 = x + z$ e $y_1 = y + z'$. Como $UZ = 0$ e $Z^2 = 0$, temos que $x^2 = x_1^2$, $xy = x_1 y_1$ e $y^2 = \lambda x^2$. Logo $\{x^2, xy\}$ é uma base de N^2 . Como $\{x, y\}$ é linearmente independente módulo N^2 , obtemos que $\{x, y, x^2, xy\}$ é uma base de N . A tábua de multiplicação é dada por:

$$e^2 = e, \quad ex = \frac{1}{2}x, \quad ey = \frac{1}{2}y, \quad x \cdot x = x^2, \quad x \cdot y = xy, \quad y^2 = \lambda y^2.$$

Outra escolha do par (x_1, y_1) troca a constante λ por $\lambda\alpha^2$, onde $\alpha \in K$ e $\alpha \neq 0$ (Gerstenhaber-Myung [G-1]). Assim neste caso as álgebras de Bernstein-Jordan estão parametrizadas por 0 e os elementos do quociente $K^*/(K^*)^2$, onde K^* representa o grupo multiplicativo do corpo K . Em particular, se $K = R$, o corpo dos números reais, então os valores de λ são 0, 1 e -1. Obtemos assim a tábua de multiplicação III.2.

3. $U^2 \neq 0, UZ \neq 0$.

Assumamos agora que $U^2 \neq 0$ e $UZ \neq 0$. Existem então $u_1, u_2 \in U$ e $z_2 \in Z$ tais que $u_1^2 \neq 0$ e $u_2 z_2 \neq 0$. Se $u_1^2 = -2u_1 u_2$ fazemos $x = u_1 + u_2$ e $y = z_2$. Se $u_1^2 = -2u_1 u_2$ fazemos $x = u_1 + 2u_2$ e $y = z_2$. Em qualquer caso $x^2 \in U^2 \subset Z$. Segue que $\{x^2, xy\}$ é uma base de N^2 e assim $\{x, y, x^2, xy\}$ é uma base de N . A tábua de multiplicação é dada pela tábua III.1.

Observamos agora que uma álgebra com tábua de multiplicação III.1 não pode ser isomorfa a uma álgebra com tábua de multiplicação III.2. Se $\lambda \neq 0$ isto é claro. Assumamos então que $\lambda = 0$. Seja e' um outro elemento idempotente da álgebra III.2, e seja $N = U' \oplus Z'$ a correspondente decomposição de N . Seja $u_1 \in U$ tal que $e' = e + u_1 + u_1^2$. Então, como $U' = \{u + 2u_1 u : u \in U\}$, $Z' = \{-2(u_1 z + u_1^2 z) + z : z \in Z\}$ e $UZ = Z^2 = 0$, temos que $Z' = Z$. Segue que $U'Z' = U'Z \subset (U + Z)Z = 0$. Assim, a propriedade $UZ = 0$ independe da escolha do idempotente. A

álgebra dada pela tábua III.2 não pode ser isomorfa à álgebra com tábua III.1, porque esta álgebra tem subespaços com $UZ \neq 0$, concluindo-se com isto a prova do teorema.

Referências: [A-2], [C-4, 5], [G-1], [H-5], [W-1], [Z].

3. Nilpotência do núcleo

Uma álgebra não-associativa A é denominada *nilpotente* se existe um inteiro $n \geq 0$ tal que o produto de quaisquer n elementos de A , com qualquer distribuição de parênteses, é igual a zero.

Uma álgebra não-associativa A é denominada *solúvel* se existe um inteiro $n > 0$ tal que $A^{(n)} = 0$, onde as potências plenas de A são definidas por $A^{(0)} = A$, $A^{(l+1)} = A^{(l)}A^{(l)}$.

Uma álgebra é chamada *associativa nas potências* se toda subálgebra gerada por um único elemento é associativa.

Seja A uma álgebra associativa nas potências. Um elemento $x \in A$ é denominado *nilpotente* se existe um inteiro $n > 0$ tal que $x^n = 0$. A álgebra A é denominada *nilálgebra* se todo elemento de A é nilpotente.

Uma álgebra ponderada (A, w) é chamada *t-álgebra especial* se $N = Ker(w)$ é nilpotente e as potências principais $N^k, k = 1, 2, \dots$ são ideais da álgebra (ver Worz-Busekros [W-2, p.55]). As potências principais N^k são definidas por $N^1 = N$, $N^{l+1} = N^lN$.

Se $A = Ke \oplus N$ é uma álgebra de Bernstein, então as potências $N^k, k = 1, 2, \dots$ são ideais. Assim, A é uma t-álgebra especial se e somente se N é nilpotente (ver Walcher [W-1]). A é dita uma *álgebra de Bernstein nuclear* se satisfaz a condição $A^2 = A$. Grishkov [G-2] e Odoni-Stratton [O-1] provaram que se A é nuclear de dimensão finita então N é nilpotente. Este resultado foi melhorado por Peresi [P-2], trocando a hipótese dimensão finita por finitamente gerada. Se A é uma álgebra de Bernstein-Jordan, então do teorema 2 temos que N é nilálgebra de índice 3. Uma nilálgebra de Jordan de índice finito e dimensão finita é nilpotente [Z, p.22]. Usando a mesma argumentação que aparece em [P-2], é possível substituir neste caso a hipótese dimensão finita por finitamente gerada.

Proposição 4. Se $A = Ke \oplus N$ é uma álgebra de Bernstein-Jordan finitamente gerada, então N é nilpotente.

Prova. Seja E a álgebra associativa dos endomorfismos de N . Definindo em E a operação $*$ dada por $f * g = fg + gf$ (onde fg é a composição das funções f e g), obtemos a álgebra de Jordan E^+ associada a E . Do teorema 2 temos que $x^3 = 0$ para todo $x \in N$ e então $[x^3]\delta_x^1(y)\delta_x^1(z) = 0$, isto é

$$-xy \cdot z = y \cdot xz + x \cdot yz$$

para todo $x, y, z \in N$. Disto segue que, se L_x denota o operador

multiplicação à esquerda por um elemento $x \in N$, então

$$L_{xy} = (-L_x)(-L_y) + (-L_y)(-L_x) = L_x * L_y.$$

Logo, a aplicação $x \in N \mapsto L_x \in E$ é um homomorfismo. O núcleo deste homomorfismo é o conjunto $An(N) = \{n \in N : nN = 0\}$, chamado o *anulador de N*. Assim temos que $N/An(N)$ é isomorfo a uma subálgebra de E^+ . Além disso $N/An(N)$ é finitamente gerado e nil de índice 3. Nestas condições $N/An(N)$ é nilpotente (ver Zevlakov [Z, p.114]). Existe então um inteiro r tal que $(N/An(N))^r = 0$. Logo $N^r \subset An(N)$ e temos $N^{r+1} \subset An(N)N = 0$. Portanto N é nilpotente.

A seguir vamos construir duas álgebras, a primeira das quais mostra a necessidade da hipótese finitamente gerada. A construção é feita a partir de um exemplo dado por Zhevlakov de uma álgebra N que é nil de índice 3 e satisfaz $N^2N^2 = 0$ mas não é nilpotente ([Z, p.82]).

Exemplo 1. Consideremos o conjunto enumerável de indeterminadas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m, \dots\}$. Definimos uma *palavra regular* como uma expressão formal do tipo

$$u = x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_s},$$

onde $s \geq 1$ e $i_1 < i_2 < \dots < i_s$. Sejam P o conjunto das palavras regulares e N o espaço vetorial gerado por P sobre um corpo K de característica $\neq 2, 3$. Para definir uma multiplicação comutativa

em N consideramos x_i, x_j em X e u, v em P e fazemos:

1. $x_i * x_j = x_i x_j$ para $i < j$.
2. $u * v = 0$ se ambas u e v tem pelo menos duas letras.
3. $u * x_i = 0$ se $s \geq 2$ e $i < i_1$ ou x_i aparece em u .
4. $u * x_i = (-1)^\sigma x_{i_1} x_{i_2} \dots x_i \dots x_{i_s}$ se $s \geq 2$ e $i > i_1$,

onde σ é a permutação nos subíndices que faz com que ux_i seja uma palavra regular.

A álgebra N tem dimensão infinita, satisfaz a identidade de Jacobi

$$(u * v) * w + (v * w) * u + (w * u) * v = 0$$

e a condição $N^2 N^2 = 0$. Mas não é nilpotente, pois para todo $n \geq 1$ temos

$$(\dots((x_1 * x_2) * x_3) * \dots) * x_n = x_1 x_2 \dots x_n \neq 0.$$

Construimos duas álgebras de Bernstein não isomórfas a partir desta álgebra N . Para fazê-lo introduzimos uma nova letra e que será um elemento idempotente da álgebra. Seja Ke o espaço vetorial gerado por e sobre K e consideremos o conjunto $A = Ke \oplus N$. Decomponemos N como a soma direta de espaços vetoriais $N = U \oplus Z$ e estendemos a multiplicação $*$ ao conjunto A pondo

$$e * e = e, \quad e * u = \frac{1}{2}u \quad (\forall u \in U), \quad e * z = 0 \quad (\forall z \in Z).$$

Fazemos a decomposição $N = U \oplus Z$ definindo U e Z de duas maneiras:

1. $U = \langle \{u \in P : u \text{ tem comprimento ímpar}\} \rangle_K$,

$Z = \langle \{u \in P : u \text{ tem comprimento par}\} \rangle_K$.

2. $U = \langle \{u \in P : u \text{ tem comprimento } \geq 2\} \rangle_K$, $Z = \langle X \rangle_K$.

Se definimos em ambos os casos o operador $w : A \rightarrow K$ fazendo $w(\lambda e + n) = \lambda$ obtemos que w é um homomorfismo de álgebras.

Vamos indicar a multiplicação em A usando simplesmente justaposição.

Por construção é claro que U e Z satisfazem as relações (4).

Sejam $y \in N$, $u \in U$ e $z \in Z$. Como $N^2N^2 = 0$ temos

$$y^2y^2 = 0, u^2 \cdot uz = 0, uz \cdot z^2 = 0, (uz)^2 = 0, u^2z^2 = 0.$$

Para a primeira álgebra $Z^2 = 0$ e para a segunda $U^2 = 0$. Em qualquer caso segue então que

$$u^2z = 0, uz^2 = 0$$

por (4). Usando a identidade de Jacobi obtemos agora

$$u^3 = 0, uz \cdot u = -\frac{1}{2}u^2z = 0.$$

Portanto, todas as condições do teorema 1 estão preenchidas e podemos concluir que as álgebras construídas são de Bernstein.

A primeira álgebra é de Jordan (pois $Z^2 = 0$ e $uz \cdot z = -\frac{1}{2}uz^2 = 0$ para todo $u \in U$, $z \in Z$), não é finitamente gerada e o seu núcleo não é nilpotente.

Para a primeira álgebra temos $U^2 \neq 0$ e para a segunda $U^2 = 0$.

Como foi observado na seção 1, o fato de que $U^2 = 0$ independe

da escolha do idempotente. Portanto, estas duas álgebras não são isomórfas.

Observação. Hentzel-Peresi [H-3] observaram que em geral o núcleo de uma álgebra de Bernstein não é nilpotente mas é sempre solúvel quando a álgebra é finitamente gerada. Recentemente Hentzel-Jacobs-Peresi-Sverchkov [H-7] mostraram que para qualquer álgebra de Bernstein o núcleo é solúvel de índice ≤ 5 e N^2 é nilpotente de índice ≤ 9 .

Referências: [G-2], [H-3, 7], [O-1], [P-2], [Z].

4. Álgebras de Bernstein normais

Uma álgebra de Bernstein $A = Fe \oplus U \oplus Z$ é dita *normal* se satisfaz a identidade

$$x^2y = w(x)xy. \quad (10)$$

Esta condição é equivalente a ter $Z^2 = UZ = 0$ (ver por exemplo [W-2]).

Proposição 5. Seja A uma álgebra de Bernstein normal sobre um corpo de característica $\neq 2, 3$. Então A satisfaz as seguintes identidades:

$$x^3x = x^2x^2 \quad (\text{potência quarta associativa}), \quad (11)$$

$$x^2y \cdot x = x^2 \cdot yx \quad (\text{identidade de Jordan}), \quad (12)$$

$$2(yx \cdot x)x + yx^3 - 3yx^2 \cdot x = 0 \quad (\text{quase-Jordan}), \quad (13)$$

$$H(x, y) = 2(xy)^2 - x^2y \cdot y - y^2x \cdot x = 0, \quad (14)$$

$$P(x, y) = (xy)^2 - x^2y^2 + (xy \cdot x)y + (xy \cdot y)x - y^2x \cdot x - x^2y \cdot y = 0, \quad (15)$$

$$(x, yz, t) + (z, yt, x) + (t, xy, z) = 0. \quad (16)$$

Prova. Da hipótese temos que A satisfaz (10). Fazendo $x = y$ em (10) obtemos que A satisfaz (9) e então A satisfaz (12) pelo teorema 2. Fazendo $x = y$ em (12) obtemos (11). A identidade (13) é consequência de uma linearização de (12). Expandindo (16) podemos ver que esta identidade é uma consequência direta da forma linearizada da identidade (10). Provaremos (14) e (15) no próximo teorema.

Observação. Quando a característica do corpo é zero, as identidades (13), (14) e (16) geram (veja a seção 2 do capítulo II) todas as identidades de grau minimal satisfeitas por uma álgebra de Bernstein normal que não envolvem o homomorfismo w e que não são consequência da comutatividade. Provaremos este fato na seção 3 do capítulo II.

Teorema 6. Seja A uma álgebra de Bernstein sobre um corpo de característica $\neq 2, 3$. Então são equivalentes:

- a) A é normal.
- b) A satisfaz a identidade

$$x^2y^2 = w(xy)xy. \quad (17)$$

c) A satisfaz a identidade

$$(w(x)y + w(y)x)^2 = (2xy)^2. \quad (18)$$

d) A satisfaz a identidade (14).

e) A satisfaz a identidade (15).

Prova. a) \Rightarrow b): Pela definição A satisfaz (10). Se fazemos $y = y^2$ em (10) obtemos $x^2y^2 = w(x)xy^2$. Como $xy^2 = w(y)xy$ obtemos então (17).

b) \Leftrightarrow c): Fazendo $z = y$ em (6) obtemos

$$4(xy)^2 + 2x^2y^2 - w(y)^2x^2 - 4w(xy)xy - w(x)^2y^2 = 0. \quad (19)$$

Desta identidade b) \Leftrightarrow c) é imediato.

b) \Rightarrow a): Fazemos $y = z \in Z$ e $x = e$ em (17) para obter que $Z^2 = 0$. Linearizando agora (17) em x obtemos

$$2xz \cdot y^2 = w(yz)xy + w(xy)yz.$$

Fazendo $x = u \in U$, $y = e$ e assumindo $z \in Z$ obtemos desta última identidade que $UZ = 0$. Assim temos que A é normal.

a) \Rightarrow d): Linearizando a equação (9) temos

$$2x \cdot xy + x^2y - w(y)x^2 - 2w(x)xy = 0.$$

Agora trocamos x e y para obter

$$2y \cdot yx + y^2x - w(x)y^2 - 2w(y)xy = 0.$$

Fazemos agora $y = y^2$ na primeira e $x = x^2$ na segunda identidade e somamos as duas identidades para obter

$$2x \cdot xy^2 + 2y \cdot yx^2 - 2x^2y^2 = w(x)^2y^2 + w(y)^2x^2. \quad (20)$$

De (17) e (19) temos

$$w(x)^2y^2 + w(y)^2x^2 = 4(xy)^2 - 2x^2y^2.$$

Desta identidade e (20) obtemos (14).

Pelo mesmo argumento usado em b) \Rightarrow a) podemos ver que d) e e) separadamente implicam $UZ = Z^2 = 0$. Assim, só falta provar que d) \Rightarrow e).

Uma álgebra de Bernstein que é normal satisfaz a identidade (11).

Linearizando esta identidade obtemos

$$G(x, y) = x \cdot xy^2 + 2x(y \cdot xy) + y \cdot x^2y + 2y(x \cdot xy) - 4(xy)^2 - 2x^2y^2 = 0.$$

Como $G = 2P - 3H$ temos finalmente que d) \Leftrightarrow e).

Referências: [W-1], [W-2].

5. Álgebras de Bernstein excepcionais

Uma álgebra de Bernstein $A = F\epsilon \oplus U \oplus Z$ é dita *excepcional* se satisfaz a condição $U^2 = 0$.

Temos a seguinte caracterização destas álgebras:

Teorema 7. Para uma álgebra de Bernstein A são equivalentes as seguintes afirmações:

- a) A é excepcional.
- b) A satisfaz a identidade

$$(xy)^2 - w(xy)xy = 0. \quad (21)$$

- c) A satisfaz a identidade

$$y^2y^2 \cdot x^2z^2 = x^2y^2 \cdot y^2z^2. \quad (22)$$

- d) A satisfaz a identidade

$$2xz \cdot yt = w(yt)xz + w(xz)yt. \quad (23)$$

Prova. a) \Rightarrow b): Se $A = Ke \oplus U \oplus Z$ e $x = \alpha\epsilon + u_1 + z_1$, $y = \beta\epsilon + u_2 + z_2$ são elementos de A com $u_i \in U$ e $z_i \in Z$, temos que

$$xy = \alpha\beta\epsilon + \frac{\alpha}{2}u_2 + \frac{\beta}{2}u_1 + u_1z_2 + u_2z_1 + z_1z_2$$

e

$$(xy)^2 = (\alpha\beta)^2\epsilon + \frac{\alpha^2\beta}{2}u_2 + \frac{\alpha\beta^2}{2}u_1 + \alpha\beta u_1z_2 + \alpha\beta u_2z_1 + \alpha\beta z_1z_2.$$

Disto obtemos que $w(xy)xy = \alpha\beta xy = (xy)^2$.

b) \Rightarrow c): Como sabemos que A satisfaz (21) segue de (19) que

$$2x^2y^2 = w(y)^2x^2 + w(x)^2y^2 \quad (\forall x, y \in A). \quad (24)$$

Por outro lado, linearizando a identidade (21) em x obtemos

$$w(zy)xy + w(xy)zy = 2xy \cdot zy.$$

Se fazemos agora $x = x^2, y = y^2$ e $z = z^2$ nesta identidade obtemos

$$w(y)^2y^2(w(z)^2x^2 + w(x)^2z^2) = 2x^2y^2 \cdot y^2z^2.$$

Segue agora das identidades (1) e (24) que (22) é satisfeita por A .

b) \Rightarrow d): Linearizando (24) em x e y obtemos (23).

d) \Rightarrow a): Se fazemos $x = z = u \in U$ e $y = t = e$ em (23) obtemos que $u^2 = 0$ ($\forall u \in U$). Como assumimos que a característica de A é diferente de 2, segue que $U^2 = 0$ e A é excepcional.

c) \Rightarrow a): Linearizando a identidade (22) em y obtemos

$$\begin{aligned} (4ay \cdot ty + 2y^2 \cdot ta) \cdot x^2 z^2 &= (x^2 \cdot at) \cdot z^2 y^2 + 2(x^2 \cdot yt)(z^2 \cdot ay) \\ &\quad + 2(x^2 \cdot ay)(z^2 \cdot yt) + x^2 y^2 \cdot (z^2 \cdot at). \end{aligned}$$

Fazendo $a = t = u \in U$, $x = y = z = e$ e usando (4) obtemos $u^2 = 0$ ($\forall u \in U$). Logo $U^2 = 0$ e A é excepcional.

Corolário. Se A é uma álgebra de Bernstein excepcional então $N^2 N^2 = 0$.

Prova. O corolário é uma consequência imediata de (23).

Exemplo 2. Consideremos um corpo K e um conjunto enumerável de indeterminadas $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m, \dots\}$. Seja $K[X]$ o espaço vetorial gerado sobre K pelo conjunto dos monômios comutativos e associativos nas variáveis x_i , $i \geq 1$.

Definimos a forma linear $w : K[X] \rightarrow K$ pondo $w(x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_s}) = 1$ para todo monômio $x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_s}$. Construïmos uma estrutura de álgebra comutativa em $K[X]$ definindo a multiplicação como segue:

1. $x_i * x_j = x_i x_j$,
2. $x_i * m = mx_i$ para todo monômio m com pelo menos duas letras,
3. $m * n = \frac{1}{2}(m + n)$ para dois monômios m e n com duas ou mais letras cada um.

Então w é um homomorfismo de álgebras com respeito a $*$. Com efeito, se $\sum \alpha_i x_i + p$ e $\sum \beta_j x_j + q$ são dois elementos em $K[X]$, onde p e q são polinômios de grau ≥ 2 , então

$$\begin{aligned} w([\sum \alpha_i x_i + p] * [\sum \beta_j x_j + q]) \\ &= w(\sum \alpha_i \beta_j x_i x_j + \sum \alpha_i x_i q + \sum \beta_j x_j p + p * q) \\ &= \sum \alpha_i \beta_j + \sum \alpha_i w(q) + \sum \beta_j w(p) + w(p)w(q) \\ &= [\sum \alpha_i + w(p)][\sum \beta_j + w(q)] = w(\sum \alpha_i x_i + p)w(\sum \beta_j x_j + q). \end{aligned}$$

Se $x = \sum \alpha_i x_i + p \in K[X]$ e $x^2 = q$, onde p e q são polinômios de grau ≥ 2 , então $x^2 * x^2 = q^2 = w(q)q = w(x)^2 x^2$. Assim $K[X]$ é uma álgebra de Bernstein. Além disso, se $x, y \in K[X]$ então $x * y = s$, onde s é um polinômio de grau ≥ 2 . Logo, temos

$$(x * y) * (x * y) = s^2 = w(s)s = w(x * y)x * y$$

e portanto $K[X]$ é excepcional pelo teorema 7.

Proposição 8. Seja A uma álgebra de Bernstein. Se A é excepcional então satisfaz a identidade

$$\begin{aligned}
 & (xa, yb, z) + (ya, zb, x) + (za, xb, y) \\
 & + (x, yb, za) + (y, zb, xa) + (z, xb, ya) \\
 & + (x, a, y) \cdot zb + (y, a, z) \cdot xb + (z, a, x) \cdot yb = 0. \tag{25}
 \end{aligned}$$

Prova. Usando (23) obtemos

$$2(xa, yb, z) = w(yb)xa \cdot z - w(ybz)xa,$$

$$2(x, a, y) \cdot zb = w(zb)xa \cdot y - w(zb)ay \cdot x.$$

Agora, expandimos cada um dos termos de (25) usando estas duas identidades e somamos para verificar que (25) é uma identidade de A .

Observação. Na seção 4 do capítulo II mostraremos que a identidade (25) gera (veja a seção 2 do capítulo II) todas as identidades de grau minimal (que não envolvem o homomorfismo w e não são consequência da lei comutativa) satisfeitas por toda álgebra de Bernstein excepcional, quando a característica do corpo é zero.

Referência: [L-6].

6. Álgebras de Bernstein nucleares

Como já mencionamos na seção 3 deste capítulo, uma álgebra de Bernstein A é chamada *nuclear* se $A^2 = A$. Micali-Ouattara [M] demonstraram que toda álgebra nuclear satisfaz a identidade

$$2x^4 - 3w(x)x^3 + w(x)^2x^2 = 0. \quad (26)$$

Teorema 9. Seja A uma álgebra de Bernstein nuclear. Então A satisfaz a identidade

$$2x^5 + 3x^2x^3 - 5x^2x^2 \cdot x = 0. \quad (27)$$

Prova. De (1) e (26) temos que A satisfaz

$$2x^4 + x^2x^2 = 3w(x)x^3, \quad (28)$$

logo satisfaz

$$2x^5 + x^2x^2 \cdot x = 3w(x)x^4. \quad (29)$$

De (1) e (8) obtemos

$$2x^2x^3 - x^2x^2 \cdot x = w(x)x^2x^2. \quad (30)$$

Multiplicando (28) por $w(x)$ e usando (1) e (30) obtemos

$$2x^2x^2 \cdot x - x^2x^3 = w(x)x^4.$$

Desta identidade e (29) o resultado segue.

Observação. Obteremos mais informações sobre a identidade (27) na seção 5 do capítulo II.

Referências: [G-2], [M].

7. Identidades de grau quatro

Nesta seção estudamos as álgebras de Bernstein que satisfazem uma identidade de grau quatro que não é consequência da comutatividade. Nossa estudo é baseado no seguinte resultado:

Teorema 10 (Hentzel-Piacentini Cattaneo-Carini [H-6]). Seja A uma álgebra comutativa sobre um corpo de característica $\neq 2, 3$, e suponhamos que A satisfaz uma identidade de grau quatro não implicada pela lei comutativa. Então A satisfaz pelo menos uma identidade de uma das seguintes famílias de identidades onde α, β e δ são escalares:

$$\alpha x^2 x^2 + \beta x^3 x = 0, \quad (31)$$

$$\beta \{yx^2 \cdot x - (yx \cdot x)x\} + \delta \{yx^3 - (yx \cdot x)x\} = 0, \quad (32)$$

$$\alpha \{(xy)^2 - x^2 y^2\} + \beta \{(xy \cdot x)y + (xy \cdot y)x - y^2 x \cdot x - x^2 y \cdot y\} = 0, \quad (33)$$

$$(xy \cdot z)t - (xy \cdot t)z + (yt \cdot x)z - (yt \cdot z)x + (yz \cdot t)x - (yz \cdot x)t = 0. \quad (34)$$

Observamos que a identidade (34) é a identidade (16) da proposição

5.

O seguinte lema permite que os resultados estabelecidos nos próximos teoremas independam da dimensão da álgebra podendo esta dimensão ser eventualmente infinita.

Lema 11. Sejam A uma álgebra sobre um corpo K , m, n inteiros não-negativos, $n > 1$, $\beta \in K$ e $T : A \rightarrow K$ uma forma linear não-nula. Se $T(x)^m(x^n + \beta T(x)x^{n-1}) = 0$ ($\forall x \in A$) então

$$x^n + \beta T(x)x^{n-1} = 0 \quad (\forall x \in A).$$

Prova. Suponhamos que existe $b \in A$ tal que $b^n + \beta T(b)b^{n-1} \neq 0$. Assim $T(b) = 0$ e $b^n \neq 0$. Como $T \neq 0$ existe $a \in A$ tal que $T(a) \neq 0$. Se $\lambda \in K$ temos

$$T(x + \lambda y)^m((x + \lambda y)^n + \beta T(x + \lambda y)(x + \lambda y)^{n-1}) = 0$$

para todo $x, y \in A$. Expandindo esta expressão vemos que o coeficiente de λ^m é

$$T(y)^m\{x^n + \beta T(x)x^{n-1}\} + T(x)\{\text{um fator eventualmente zero}\}.$$

Se fazemos $x = b$ e $y = a$ obtemos $T(a)^m b^n = 0$. Como $T(a) \neq 0$ e $b^n \neq 0$ isto leva a uma contradição.

Seja A uma álgebra de Bernstein que satisfaz as condições do teorema 10. Então A satisfaz pelo menos uma identidade de uma das famílias de identidades (31) - (34). Em cada caso obtemos

primeiro condições sobre os coeficientes da identidade. No que segue,

$$A = Fe \oplus U \oplus Z \text{ como em (2).}$$

Se A satisfaz (31) fazendo $x = e$ e aplicando o homomorfismo w à identidade obtida vemos que $\alpha = -\beta \neq 0$. Assim a identidade é equivalente a identidade $x^2x^2 = x^3x$. Neste caso, a álgebra A é de Jordan pelo teorema 2.

Suponhamos agora que A satisfaz (32). Fazemos $x = e$ e $y = u \in U$ para obter $(\beta + 3\delta)u = 0$. Quando $\beta + 3\delta \neq 0$ temos $U = 0$ e então por (4) A tem multiplicação trivial, isto é, $N^2 = 0$. Se $\beta + 3\delta = 0$ obtemos a identidade (13). É conhecido o fato de que toda álgebra de Jordan sobre um corpo de característica $\neq 2, 3$ satisfaz (13) mas a recíproca é falsa em geral (veja Osborn [O-3], Hentzel-Peresi [H-2]). Para álgebras de Bernstein a recíproca vale:

Teorema 12. Seja A uma álgebra de Bernstein. Então A é uma álgebra de Jordan se e somente se A satisfaz

$$2(yx \cdot x)x + yx^3 - 3yx^2 \cdot x = 0. \quad (13)$$

Prova. Linearizando a identidade (13) em x obtemos

$$2(yx \cdot x)z + 2(yx \cdot z)x + 2(yz \cdot x)x + 2(xz \cdot x)y + x^2z \cdot y - 6(xz \cdot y)x - 3x^2y \cdot z = 0.$$

Pondo $z = y = x^2$ obtemos

$$2x^4x^2 - 2x^3x^2 \cdot x - x^2x^2 \cdot x^2 + (x^2x^2 \cdot x)x = 0.$$

Agora usamos as identidades (1), (7) e (8) para obter

$$w(x)^2(x^4 - w(x)x^3) = 0.$$

Pelo lema 11 segue que A satisfaz a identidade

$$x^4 - w(x)x^3 = 0. \quad (35)$$

Fazemos agora $y = x^2$ em (13) para obter

$$2x^5 + x^2x^3 - 3x^2x^2 \cdot x = 0.$$

Usando esta última identidade, as identidades (1), (8), (35) e o lema 11 obtemos $x^3 - w(x)x^2 = 0$ ($\forall x \in A$), o que prova que A é uma álgebra de Jordan pelo teorema 2.

Suponhamos agora que A satisfaz uma identidade da família (33). Fazemos primeiro $x = e$ e assumimos que $y \in U$ em (33) para obter $(\alpha - \beta)y^2 = 0$, isto é, $\alpha \neq \beta$ implica $U^2 = 0$. Se fazemos $x = e$ e assumimos $y \in Z$, obtemos $(2\alpha + \beta)y^2 = 0$, isto é, $2\alpha + \beta \neq 0$ implica $Z^2 = 0$. Finalmente, linearizando (33) em x temos

$$\begin{aligned} & 2\alpha\{xy \cdot zy - xz \cdot y^2\} + \beta\{(zy \cdot x)y + (xy \cdot z)y + (zy \cdot y)x \\ & + (xy \cdot y)z - y^2z \cdot x - y^2x \cdot z - 2(xz \cdot y)y\} = 0. \end{aligned}$$

Se fazemos aqui $y = e$ e assumimos que $x \in U$ e $z \in Z$ obtemos $(2\alpha + \beta)xz = 0$, isto é, $2\alpha + \beta \neq 0$ implica $UZ = 0$. Assim se A satisfaz (33) com $2\alpha + \beta \neq 0$ e $\alpha \neq \beta$ então $U^2 = Z^2 = UZ = 0$ e A é uma álgebra de Bernstein com multiplicação trivial. Se

$\alpha = \beta$ obtemos que $P(x, y) = 0$ e A é normal pelo teorema 6. Se $2\alpha + \beta = 0$ a identidade (33) é a identidade (36) abaixo e temos o seguinte resultado:

Teorema 13. Para uma álgebra de Bernstein A as seguintes afirmações são equivalentes:

a) $U^2 = 0$, $uz_1 \cdot z_2 = uz_2 \cdot z_1$ e $z_1^2 z_2 = z_1 \cdot z_1 z_2$ ($\forall u \in U, z_i \in Z$).

b) A satisfaz a identidade

$$2y^2x \cdot x + 2x^2y \cdot y + (xy)^2 - x^2y^2 - 2(xy \cdot x)y - 2(xy \cdot y)x = 0. \quad (36)$$

Prova. a) \Rightarrow b): Tomando elementos $x = \alpha e + u_1 + z_1$, $y = \beta e + u_2 + z_2$ em A com $u_i \in U$, $z_i \in Z$ e usando as hipóteses vemos que estes elementos satisfazem (36).

b) \Rightarrow a): Linearizando (36) em y obtemos

$$\begin{aligned} & 2(yz \cdot x)x + x^2z \cdot y + x^2y \cdot z + xy \cdot xz - x^2 \cdot yz \\ & - (xz \cdot x)y - (xy \cdot x)z - (xz \cdot y)x - (xy \cdot z)x = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

e

$$\begin{aligned} & 2(yz \cdot w)x + 2(yz \cdot x)w + 2(xw \cdot z)y + 2(xw \cdot y)z + xy \cdot wz - wy \cdot xz \\ & - 2xw \cdot yz - (wz \cdot x)y - (xz \cdot w)y - (xy \cdot w)z - (wy \cdot x)z - (wz \cdot y)x \\ & - (xz \cdot y)w - (wy \cdot z)x - (xy \cdot z)w = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Fazendo agora $x = z_1 \in Z$, $z = z_2 \in Z$ e $y = e$ em (37) obtemos $z_1^2 z_2 = z_1 \cdot z_1 z_2$ ($\forall z_1, z_2 \in Z$). Como $\alpha \neq \beta$ temos que $U^2 = 0$.

Então se fazemos $y = e$, $x = z_1 \in Z$, $z = z_2 \in Z$ e $w = u \in U$ em (38) obtemos $uz_2 \cdot z_1 = uz_1 \cdot z_2$ ($\forall u \in U$ e $z_i \in Z$).

Finalmente, para álgebras de Bernstein satisfazendo a identidade (34) temos:

Teorema 14. Para uma álgebra de Bernstein A as seguintes afirmações são equivalentes:

a) $Ker(w)$ é nilpotente de índice ≤ 3 e $UZ = 0$.

b) A satisfaz a identidade (34).

Prova. a) \Rightarrow b): É suficiente tomar elementos $x, y, z, t \in A$ e ver diretamente que com as hipóteses estes elementos satisfazem (34).

b) \Rightarrow a): Se agora supomos que $x \in U, z \in Z$ e $y = t = e$ obtemos de (34) que $UZ = 0$. Se agora tomamos $y = t \in U, z \in Z$ e $x = e$ obtemos de (34) que $U^2Z = 0$. Disto e das relações (4) temos

$$(U + Z)^2 = U^2 + Z^2,$$

$$(U + Z)^3 = (U^2 + Z^2)(U + Z) = U^3 + U^2Z + UZ^2 + Z^3 = 0.$$

Assim, $Ker(w) = U \oplus Z$ é nilpotente com índice ≤ 3 .

É fácil ver que uma álgebra de Bernstein tal que $U \neq 0$ não satisfaz nenhuma identidade homogênea de grau 3. De fato, con-

sideremos a identidade

$$\alpha xy \cdot z + \beta yz \cdot x + \gamma zx \cdot y = 0.$$

Fazendo $x = y = z = e$ e aplicando o homomorfismo w à identidade (34) obtemos que $\alpha + \beta + \gamma = 0$. Se agora fazemos $x = y = e$ e $z = u \in U$ obtemos $2\alpha + \beta + \gamma = 0$. Logo $\alpha = 0$. Analogamente obtemos que $\beta = \gamma = 0$. Como não existem identidades de grau ≤ 2 não implicadas pela comutatividade exceto a própria comutatividade, podemos resumir nossos resultados no seguinte

Teorema 15. Seja A uma álgebra de Bernstein sobre um corpo de característica $\neq 2, 3$. Então A satisfaz uma identidade de grau ≤ 4 que não é implicada pela comutatividade se e somente se A satisfaz pelo menos uma das seguintes afirmações:

- a) A é uma álgebra de Jordan.
- b) $Ker(w)$ é nilpotente de índice ≤ 3 e $UZ = 0$.
- c) $U^2 = 0$, $uz_1 \cdot z_2 = uz_2 \cdot z_1$, $z_1^2 z_2 = z_1 \cdot z_1 z_2$, $\forall u \in U$ e $z_1, z_2 \in Z$.

Exemplo 3.(Lyubich [L-7]). Seja $A_{T,g}$ uma álgebra de Bernstein definida da seguinte maneira. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K e seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear que satisfaz a condição $T = T^2$ e uma função linear não-nula $g : V \rightarrow K$

que verifica a condição $goT = g$. Definimos a multiplicação em V por

$$xy = \frac{1}{2}\{g(y)T(x) + g(x)T(y)\}.$$

Esta álgebra satisfaz a identidade (14). Assim $A_{T,g}$ é uma álgebra de Bernstein normal pelo teorema 6. Além disso podemos observar que a normalidade implica a) e b) do teorema 15, como segue da proposição 5 e do teorema 14.

Exemplo 4. Consideremos a álgebra de Bernstein A com base e, u_1, u_2, z e multiplicação dada por $e^2 = e, eu_i = 1/2u_i, u_1z = u_2$, demais produtos iguais a zero. Esta álgebra satisfaz a identidade (13). Assim é uma álgebra de Jordan pelo teorema 12, mas não é normal já que $UZ \neq 0$. Além disso, A satisfaz c) e não satisfaz b) do teorema 15.

Exemplo 5. Seja A a álgebra de Bernstein com base c_0, c_1, c_2 e multiplicação dada por $c_0^2 = c_0, c_0c_1 = 1/2c_1, c_2^2 = c_1, c_0c_2 = c_1^2 = c_1c_2 = 0$, demais produtos iguais a zero. Podemos ver que A satisfaz b) e c) do teorema 15, mas não é uma álgebra de Jordan já que $(c_0 + c_1)^2c_2 \cdot (c_0 + c_2) - (c_0 + c_1)^2 \cdot c_2(c_0 + c_2) = -1/2c_1 \neq 0$.

Referências: [H-2, 6], [L-7], [O-3].

8. Álgebras de Bernstein de ordem n

Uma álgebra ponderada (A, w) é uma *álgebra de Bernstein de ordem n* se ela satisfaz

$$x^{[n+2]} = w(x)^{2^n} x^{[n+1]} \quad (\forall x \in A), \quad (39)$$

onde a potência $x^{[n]}$ é a n -ésima potência plena de x definida por $x^{[1]} = x$ e $x^{[n]} = x^{[n-1]}x^{[n-1]}$ para $n > 1$. O caso $n = 1$ corresponde às álgebras de Bernstein já definidas. Esta generalização do conceito de álgebra de Bernstein foi dada por Abraham em [A-1].

Se A é uma álgebra de Bernstein de ordem n então todo elemento da forma $e = w(x)^{-2^n} x^{[n+1]}$ com $w(x) \neq 0$ é um elemento idempotente da álgebra. O homomorfismo w é únicamente determinado e se $N = \text{Ker}(w)$ então $N = U \oplus Z_n$ onde $U = \text{Ker}(2I - L_e)$ e $Z_n = \text{Ker}(L_e^n)$. Além disso, temos que $U^2 \subset Z_n$ e o operador L_e satisfaz $2L_e^{n+1} = L_e^n$. Toda álgebra de Bernstein de ordem n satisfaz a identidade

$$(x^{[n+2]}, y, x^{[n+1]}) = 0$$

de grau $3 \cdot 2^n + 1$.

O seguinte teorema é uma generalização do teorema 2.

Teorema 16. Seja (A, w) uma álgebra ponderada associativa nas potências (não necessariamente de dimensão finita) sobre um corpo de característica $\neq 2$. As seguintes afirmações são equivalentes:

a) A é uma álgebra de Bernstein de ordem n .

b) $x^{2^n+1} - w(x)x^{2^n} = 0 \quad (\forall x \in A).$

c) $x^{2^{n+1}} = w(x)^k x^{2^{n+1}-k} \quad (\forall k, \quad 1 \leq k \leq 2^n).$

Prova. a) \Rightarrow b): Como A é associativa nas potências, de (39) temos

$$x^{2^{n+1}} = w(x)^{2^n} x^{2^n} \quad (\forall x \in A). \quad (40)$$

Linearizando parcialmente (40) obtemos

$$[x^{2^{n+1}}] \delta_x^1(y) = [w(x)^{2^n}] \delta_x^1(y) x^{2^n} + w(x)^{2^n} [x^{2^n}] \delta_x^1(y),$$

i.e.

$$[x^{2^{n+1}}] \delta_x^1(y) = 2^n w(x)^{2^n-1} w(y) x^{2^n} + w(x)^{2^n} [x^{2^n}] \delta_x^1(y).$$

Se fazemos $y = x^2$ obtemos

$$2^{n+1} x^{2^{n+1}+1} = 2^n w(x)^{2^n+1} x^{2^n} + 2^n w(x)^{2^n} x^{2^n+1}. \quad (41)$$

Multiplicando (40) por $2^{n+1}x$ obtemos

$$2^{n+1} x^{2^{n+1}+1} = 2^{n+1} w(x)^{2^n} x^{2^n+1}. \quad (42)$$

Subtraindo (41) de (42) e dividindo por 2^n obtemos

$$w(x)^{2^n} (x^{2^n+1} - w(x)x^{2^n}) = 0.$$

Assim, pelo lema 11, obtemos $x^{2^n+1} - w(x)x^{2^n} = 0 \quad (\forall x \in A).$

b) \Rightarrow c): Temos que

$$x^{2^{n+1}} = x^{2^n+1}x^{2^n-1} = w(x)x^{2^{n+1}-1}$$

e então

$$x^{2^{n+1}} = w(x)x^{2^{n+1}-1} = w(x)x^{2^n+1} \cdot x^{2^n-2} = w(x)^2 x^{2^{n+1}-2}.$$

Se continuamos este processo obtemos que

$$x^{2^{n+1}} = w(x)^k x^{2^{n+1}-k} \quad (\forall k, \quad 1 \leq k \leq 2^n).$$

c) \Rightarrow a): Para $k = 2^n$ na identidade anterior obtemos (39).

Observação. É conhecido o fato de que para característica $\neq 2, 3, 5$ a identidade (11) é equivalente a associatividade nas potências [S, p.130]. É claro que a identidade de Jordan implica esta identidade. Assim, para característica $\neq 2, 3, 5$ toda álgebra de Jordan é associativa nas potências. Neste caso, o teorema anterior pode ser aplicado às álgebras ponderadas que são de Jordan.

Referências: [A-1], [H-4], [S], [W-1].

CAPÍTULO II

IDENTIDADES MINIMAS EM ÁLGEBRAS DE BERNSTEIN

A classe das álgebras de Bernstein não é uma variedade de álgebras, pois nem toda subálgebra de uma álgebra de Bernstein é uma álgebra de Bernstein. Um problema natural é, portanto, encontrar a menor variedade que contém as álgebras de Bernstein. Em outras palavras, o problema consiste em determinar as identidades minimais, isto é, as identidades de menor grau que são satisfeitas por toda álgebra de Bernstein mas não são consequência da lei comutativa e não envolvem o homomorfismo w . Este problema foi proposto pelo professor Roberto Costa. Dedicamos este capítulo à obtenção de identidades minimais nos casos das álgebras de Bernstein normais, excepcionais, nucleares e finalmente em uma álgebra de Bernstein arbitrária. As ferramentas fundamentais para este trabalho são a construção explícita de uma representação do grupo simétrico S_n dada por Boerner em [B-2] e melhorada por Clifton em [C-1], e

um método computacional introduzido por Hentzel em [H-1], que permite representar identidades por meio de matrizes.

Os resultados deste capítulo, com exceção daqueles apresentados na seção 4, foram obtidos em colaboração com os professores Irvin Roy Hentzel e Luiz Antonio Peresi conforme [C-3].

1. A representação do grupo simétrico

Um *diagrama de Young* é um diagrama composto por n quadrados ordenados de cima para baixo de maneira decrescente por linhas e colunas. Um *tableau* é um ordenamento arbitrário dos números de 1 a n nos quadrados de um diagrama de Young. Um tableau é dito *tableau standard* quando a ordem dos números é crescente por linhas e colunas. Para $n = 4$ os diagramas de Young com seus tableaux standard respectivos são os seguintes:

[]	[]	[]	[]	1	2	3	4
[]	[]	[]		1	2	3	
[]			1	2	4		3
[]			4		3		2
[]	[]			1	2	1	3
[]	[]			3	4	2	4
[]	[]			1	2	1	3
[]			1	2	3	1	4
[]			3		2		2
[]			4		4		3

[]	1
[]	2
[]	3
[]	4

A cada diagrama de Young corresponde uma representação $S_n \rightarrow L_t(F)$, onde $L_t(F)$ é o grupo linear das matrizes inversíveis $t \times t$ sobre F e o número t é dado pelo número total de tableaux standard que possue o respectivo diagrama. Obtemos assim uma representação natural de S_n em uma soma de grupos lineares, onde a quantidade de somandos é igual ao número total de diagramas de Young para n . Por exemplo, no caso $n = 4$, temos um total de cinco representações de graus 1, 3, 2, 3 e 1 respectivamente, e um homomorfismo que leva S_4 em uma soma de 5 grupos lineares, a saber

$$S_4 \rightarrow L_1(F) \oplus L_3(F) \oplus L_2(F) \oplus L_3(F) \oplus L_1(F).$$

Fixado um diagrama de Young, a construção do homomorfismo respectivo é feita como segue. Sejam $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$ os correspondentes tableaux standard e seja π uma permutação em S_n . Definimos o tableau $\pi\tau_i$ como o tableau obtido ao aplicarmos a permutação π aos números em τ_i . Por exemplo, se $\pi = (12)(34)$ então

$$\pi \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & & \end{pmatrix}.$$

Construimos a matriz $A_\pi = (a_{ij})$ da seguinte maneira: Se

existem dois números (distintos) na interseção como conjuntos de uma coluna de τ_i e uma linha de $\pi\tau_j$ então $a_{ij} = 0$. Em caso contrário $a_{ij} = sgn(\sigma)$, onde σ é a permutação que deixa fixas as colunas de τ_i como conjuntos, mas leva os números de τ_i nas linhas em que eles aparecem em $\pi\tau_j$. A matriz associada a π é a matriz $A_I^{-1}A_\pi$, onde I é a permutação identidade. Devemos observar que A_I é a matriz identidade quando $n \leq 4$ e é diferente da matriz identidade para $n \geq 5$ como veremos na seção 5. Do exemplo anterior temos que a imagem dos geradores (12) e (1234) de S_4 é:

$$(12) \mapsto [1] \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \oplus [-1],$$

$$(1234) \mapsto [1] \oplus \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus [-1].$$

Toda representação σ de FS_n induz uma representação $\hat{\sigma} = \sigma|_{S_n}$ de S_n e reciprocamente. Esta correspondência é únicamente determinada. Assim podemos usar uma representação natural de S_n para obter uma representação de FS_n . Obtemos que FS_n é isomorfo a uma soma direta de álgebras de matrizes. Do exemplo anterior temos que

$$FS_4 \cong M_1(F) \oplus M_3(F) \oplus M_2(F) \oplus M_3(F) \oplus M_1(F).$$

Observação. No que segue vamos usar a aplicação $\pi \mapsto A_\pi$ que não é uma representação pois $A_{\pi\sigma} = A_\pi A_I^\dagger A_\sigma$, mas estabelece uma correspondência entre permutações e matrizes suficiente para os nossos propósitos. Cometeremos o abuso de chamar a aplicação $\pi \rightarrow A_\pi$ de representação (irreduzível).

Para nosso propósito de encontrar novas identidades em uma álgebra, é necessário conhecer a aplicação inversa de uma representação. Para isto fixemos um diagrama de Young e sejam τ_1, \dots, τ_s os tableaux standard determinados por este diagrama. Seja S_{ij} a permutação definida por $S_{ij}\tau_j = \tau_i$ e seja P o conjunto das permutações que deixam fixas as linhas de τ_i e Q o conjunto de todas as permutações que deixam fixas as colunas de τ_i (como conjuntos). Definimos o elemento e_i de FS_n como

$$e_i = \frac{s}{n!} \sum_{p \in P, q \in Q} sgn(q)pq$$

Os elementos $e_i S_{ij}$ são ditos as *unidades* de FS_n .

Teorema 1. Em FS_n o produto

$$(\sum a_{ij} S_{ij} e_j) (\sum b_{ij} S_{ij} e_j)$$

pode ser escrito na forma

$$\sum c_{ij} S_{ij} e_j$$

onde os coeficientes c_{ij} são dados pelo produto de matrizes

$$(c_{ij}) = (a_{ij}) A_I (b_{ij}).$$

Prova. Veja [R, p. 22].

Teorema 2. A representação $\pi \rightarrow A_\pi$ leva $S_{ij}e_j$ em $A_I E_{ij} A_I$.

Prova. Clifton [C-1, p. 249] mostrou que se $A_\pi = (p_{ij})$ então

$$e_k \pi e_l = p_{kl} S_{kl} e_l.$$

Aplicando este resultado a $\pi = S_{ij}e_j$ temos

$$e_k (S_{ij}e_j) e_l = p_{kl} S_{kl} e_l.$$

Por outro lado, usando o teorema 1, obtemos

$$e_k (S_{ij}e_j) e_l = (S_{kk}e_k) (S_{ij}e_j) (S_{ll}e_l) = c_{kl} S_{kl} e_l,$$

onde $c_{kl} = E_{kk} A_I E_{ij} A_I E_{ll}$. Portanto, $(p_{kl}) = A_I E_{ij} A_I$ e o resultado segue.

Como consequência imediata do teorema 2 temos o

Teorema 3. Se $B = (b_{ij})$ então a matriz associada a $\sum b_{ij} S_{ij} e_j$ é a matriz $A_I B A_I$.

Do teorema 3 segue o

Teorema 4. Seja M uma matriz $t \times t$, onde t é o grau da representação. Seja

$$C = (c_{ij}) = A_I^{-1} M A_I^{-1}.$$

Então a representação leva o elemento $\sum c_{ij} S_{ij} e_j$ em M .

A aplicação inversa de uma representação é dada pelo teorema 4.

Referências: [B-2], [C-1], [C-3], [H-1], [P-1], [R].

2. Processamento de identidades

Seja A uma álgebra sobre um corpo F e

$$P : FS_n \rightarrow M_r[F]$$

uma representação de grau r . Se $\phi \in \prod_{i=1}^c FS_n$, $c \geq 1$, é uma identidade de A então ela pode ser representada como soma de c matrizes de ordem r pelo homomorfismo

$$\hat{P} : \prod_{i=1}^c FS_n \rightarrow \bigoplus_{i=1}^c M_r[F]$$

induzido por P .

Sejam $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n \in \prod_{i=1}^c FS_n$ identidades de A e consideremos o FS_n -módulo L gerado por elas. Então uma identidade ϕ_{n+1} é consequência de $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ se e somente se $\phi_{n+1} \in L$. Neste caso, dizemos também que as identidades $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ geram a identidade ϕ_{n+1} . Isto é equivalente a ter que $\hat{P}(\phi_{n+1}) \in \hat{P}(L)$ para todos os homomorfismos \hat{P} induzidos por todas as representações irreduutíveis P de FS_n . Então para que a identidade ϕ_{n+1} não seja uma consequência das outras identidades, é suficiente

que exista uma representação para a qual isto não ocorre. Fixada uma representação P , podemos formar uma matriz de blocos com as matrizes $\hat{P}(\phi_1), \hat{P}(\phi_2), \dots, \hat{P}(\phi_{n+1})$. Calculamos o posto desta matriz com e sem as linhas provenientes da identidade ϕ_{n+1} . Se o posto é o mesmo, então $\phi_{n+1} \in L$. Se o posto aumenta, então ϕ_{n+1} não pertence a L e não é consequência de $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ no que diz respeito a esta representação.

O professor Irvin Roy Hentzel escreveu um programa denominado CRUNCH que calcula a matriz de blocos e a reduz a sua forma canônica de linhas (isto é, forma escalonada). O input é um conjunto de identidades e o output é uma matriz escalonada para cada aplicação $\pi \mapsto A_\pi$. O input é obtido linearizando a ou as identidades a estudar e fazendo um arquivo em forma de coluna, e o output é obtido em forma de blocos de matrizes separados por tipos de associação (ver seção 3). Devemos observar finalmente que faremos os cálculos no processo de escalonamento módulo 103, para facilitar as contas.

Observação. O programa CRUNCH utiliza a aplicação $\pi \rightarrow (A_\pi)^t$. Logo, para aplicarmos o teorema 4 a uma matriz que aparece no output temos que considerar a transposta desta matriz.

Referências: [B-2], [C-1], [C-3], [P-1].

3. Identidades minimais em álgebras de Bernstein normais

Nosso primeiro propósito é encontrar todas as identidades minimais satisfeitas por uma álgebra de Bernstein normal. Na seção 7 do capítulo I vimos que se uma identidade é satisfeita por uma álgebra de Bernstein então tem grau ≥ 4 . Pela definição uma álgebra de Bernstein normal A satisfaz a identidade

$$a^2c - w(a)ac = 0 \quad (\forall a, b, c \in A).$$

Linearizando esta identidade obtemos

$$f(a, b, c) = 2ab \cdot c - w(a)bc - w(b)ac = 0.$$

Esta identidade fornece quatro identidades de grau quatro, a saber

$$\begin{aligned} f(a, b, c)d &= 0, & f(ad, b, c) &= 0, \\ f(a, b, cd) &= 0, & f(a, b, c)w(d) &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Estas identidades envolvem quatro funções $\hat{T}_i : \prod_{i=1}^4 A \rightarrow A$ que são

$$\begin{aligned} \hat{T}_1(a, b, c, d) &= w(a)bc \cdot d, & \hat{T}_3(a, b, c, d) &= (ab \cdot c)d, \\ \hat{T}_2(a, b, c, d) &= w(ab)cd, & \hat{T}_4(a, b, c, d) &= ab \cdot cd. \end{aligned}$$

A função \hat{T}_i corresponde ao tipo de associação T_i , onde

$$\begin{aligned} T_1 &= W(A)AA \cdot A, & T_3 &= (AA \cdot A)A, \\ T_2 &= W(AA)AA, & T_4 &= AA \cdot AA. \end{aligned}$$

A lei comutativa induz seis identidades a partir dos tipos de associação, que são:

$$\begin{array}{ccc}
 T_1 & & T_3 \\
 \hline
 w(a)bc \cdot d - w(a)cb \cdot d = 0, & - (ab \cdot c)d - (ba \cdot c)d = 0, & \\
 \\
 T_2 & & T_4 \\
 \hline
 w(ab)cd - w(ba)cd = 0, & ab \cdot cd - ba \cdot cd = 0, & (2) \\
 w(ab)cd - w(ab)dc = 0, & ab \cdot cd - cd \cdot ab = 0. &
 \end{array}$$

Temos assim um total de dez identidades de grau quatro que são satisfeitas por uma álgebra de Bernstein normal. Observamos do teorema 2 do capítulo I, que toda álgebra ponderada que satisfaz a identidade (9) do capítulo I é de Bernstein. Assim, não é necessário considerar aqui a identidade (1) do capítulo I, que define as álgebras ponderadas que são de Bernstein. Escrevemos cada uma das dez identidades como uma soma de elementos em FS_4 , separando os termos por tipos de associação. Para este processo escrevemos as identidades na tábua I. A primeira coluna indica o número da identidade, a segunda indica o tipo de associação, a terceira indica a ordem em que aparecem os elementos na identidade assumindo que a ordem inicial é $abcd$ e, por último, a quarta coluna indica o coeficiente que leva cada termo da identidade. Na tábua I, as identidades 1 a 6 correspondem às identidades (2) provenientes da comutatividade e as identidades 7 a 10 correspondem às identidades (1).

tábuas I

1 1 abcd 1
1 1 acbd -1
2 2 abcd 1
2 2 bacd -1
3 2 abcd 1
3 2 abdc -1
4 3 abcd 1
4 3 bacd -1
5 4 abcd 1
5 4 bacd -1
6 4 abcd 1
6 4 cdab -1
7 3 abcd 2
7 1 abcd -1
7 1 bacd -1
8 3 adbc 2
8 2 adbc -1
8 1 badc -1
9 4 abcd 2
9 1 acdb -1
9 1 bcda -1
10 1 dabc 2
10 2 adbc -1
10 2 bdac -1

Para cada representação P de S_4 obtemos as formas escalonadas das matrizes de blocos. Fazemos isto primeiro só para as identidades (2), provenientes da comutatividade, e depois para as identidades (1) e (2) juntas. Para a primeira representação, correspondente ao diagrama [][][][], a matriz escalonada das identidades (2) é a matriz nula, e quando consideramos as identidades (1) e (2) a matriz correspondente é

$$\begin{vmatrix} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

Estamos procurando identidades que envolvem os tipos de associação sem o homomorfismo w . Do teorema 4 vemos que a última linha representa a identidade

$$(AA \cdot A)A \quad AA \cdot AA \\ e_1 \quad -e_1$$

com

$$\epsilon_1 = \sum_{p \in P, q \in Q} sgn(q)pq,$$

onde P é o conjunto de permutações que deixam fixas as linhas e Q é o conjunto de permutações que fixam as colunas do tableau

$$1 \ 2 \ 3 \ 4$$

que é único para este diagrama. Assim $P = S_4$ e $Q = \{I\}$. Desta

forma a identidade é dada por

$$(AA \cdot A)A - AA \cdot AA \\ \sum_{\pi \in S_4} \pi - \sum_{\pi \in S_4} \pi$$

A forma polinomial desta identidade é

$$\begin{aligned} & \sum_{\pi \in S_4} (\hat{T}_3)_\pi(a, b, c, d) - \sum_{\pi \in S_4} (\hat{T}_4)_\pi(a, b, c, d) \\ &= 2(bc \cdot a)d + 2(bc \cdot d)a + 2(bd \cdot c)a + 2(ab \cdot c)d + 2(bd \cdot a)c \\ &+ 2(ab \cdot d)c + 2(cd \cdot b)a + 2(ac \cdot b)d + 2(ad \cdot b)c + 2(cd \cdot a)b \\ &+ 2(ac \cdot d)b + 2(ad \cdot c)b - 8bc \cdot ad - 8bd \cdot ac - 8ab \cdot cd \\ &= [a^3a - a^2a^2]\delta_a^1(b)\delta_a^1(c)\delta_a^1(d). \end{aligned}$$

Assim temos que A satisfaz a identidade

$$a^3a - a^2a^2 = 0.$$

Note agora que esta identidade pode ser lida diretamente de

$$\begin{matrix} T_3 & T_4 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

Estudamos agora a representação associada ao segundo diagrama:

$$\begin{matrix} [] & [] & [] & \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ & & & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 4 & 1 & 3 & 4 \\ & & & & 4 & & & 3 & & & 2 \end{matrix}$$

A matriz escalonada considerando só as identidades (2) é:

T_1	T_2	T_3	T_4
0 1 -1	0 0 0	0 0 0	0 0 0
0 0 0	1 0 1	0 0 0	0 0 0
0 0 0	0 1 1	0 0 0	0 0 0
0 0 0	0 0 0	1 1 2	0 0 0
0 0 0	0 0 0	0 0 0	1 0 0
0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 1 0
0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 1

A matriz escalonada quando consideramos as identidades (1) e (2) é:

T_1	T_2	T_3	T_4
1 0 0	0 0 0	0 0 2	0 0 0
0 1 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
0 0 1	0 0 0	0 0 0	0 0 0
0 0 0	1 0 0	0 0 2	0 0 0
0 0 0	0 1 0	0 0 2	0 0 0
0 0 0	0 0 1	0 0 -2	0 0 0
0 0 0	0 0 0	1 0 2	0 0 0
0 0 0	0 0 0	0 1 0	0 0 0
0 0 0	0 0 0	0 0 0	1 0 0
0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 1 0
0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 1

Observamos que um novo degrau aparece para o tipo T_3 na linha

$$0 \ 1 \ 0$$

A matriz correspondente é

$$\begin{vmatrix} & T_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Pelo teorema 4, a identidade é dada por

$$(AA \cdot A)A \\ S_{23}\epsilon_3$$

onde $S_{23}(\tau_2) = \tau_3$. Aqui, S_{23} é a permutação (23). Os conjuntos P e Q são

$$P = \{I, (13), (14), (34), (134), (143)\}, \quad Q = \{I, (12)\}.$$

Assim temos que a identidade como elemento de FS_4 é

$$\phi = (23)\{I + (13) + (14) + (34) + (134) + (143)\}\{I - (12)\}.$$

A forma polinomial da identidade é dada por

$$(\hat{T}_3)_\phi(a, b, c, d)$$

$$= 2(ac \cdot b)d - 2(bc \cdot a)d + 2(ad \cdot b)c - 2(bd \cdot a)c + 2(cd \cdot b)a - 2(cd \cdot a)b$$

que é equivalente à identidade

$$2(ba - a)a - 3a^2b - a + a^3b = 0.$$

Estudamos agora a representação correspondente ao terceiro diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & \tau_1 & & \tau_2 \\ \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} & & 1 & & 1 \\ & & 2 & & 3 \\ \begin{bmatrix} & & & & \\ & & & & \end{bmatrix} & & 3 & & 2 \\ & & 4 & & 4 \end{array}$$

Consideramos primeiro somente as identidades correspondentes à comutatividade obtendo a matriz escalonada

$$\left| \begin{array}{cc|cc|cc} T_1 & & T_2 & & T_3 & & T_4 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & & & & & & 2 \end{array} \right|$$

Consideramos agora todas as identidades obtendo a matriz

$$\left| \begin{array}{cc|cc|cc} T_1 & & T_2 & & T_3 & & T_4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 99 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right|$$

Observamos que aqui aparece um novo degrau (envolvendo os tipos T_3 e T_4) na sexta linha. Lembramos que esta linha está escrita módulo 103. Temos então que considerar a matriz

$$\begin{matrix} & T_3 & & T_4 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 2 & 0 & 1 \end{matrix}$$

A identidade correspondente é

$$(AA \cdot A)A \quad AA \cdot AA \\ 2S_{22}\epsilon_2 \quad + \quad S_{22}\epsilon_2$$

onde $S_{22} = I$. Os conjuntos P e Q correspondentes são

$$P = \{I, (13), (24), (13)(24)\}, Q = \{I, (12), (34), (12)(34)\}.$$

Assim, a parte correspondente ao tipo de associação T_3 é

$$\phi_3 = 2\{I + (13) + (24) + (13)(24)\}\{I - (12) - (34) + (12)(34)\}$$

e a correspondente a T_4 é dada por

$$\phi_4 = \{I + (13) + (24) + (13)(24)\}\{I - (12) - (34) + (12)(34)\}.$$

Obtemos assim que a forma polinomial da identidade é:

$$\begin{aligned}
 I(a, b, c, d) &= (\hat{T}_3)_{\phi_3}(a, b, c, d) + (\hat{T}_4)_{\phi_4}(a, b, c, d) \\
 &= 2(cb \cdot a)d - 2(ca \cdot b)d - 2(db \cdot a)c + 2(da \cdot b)c + 2(ad \cdot c)b - 2(bd \cdot c)a \\
 &\quad - 2(ac \cdot d)b + 2(bc \cdot d)a + 2(cd \cdot a)b - 2(cd \cdot b)a - 2(dc \cdot a)b + 2(dc \cdot b)a \\
 &\quad + 4ad \cdot bc - 4ac \cdot bd.
 \end{aligned}$$

A identidade

$$H(x, y) = 2(xy)^2 - x^2y \cdot y - y^2x \cdot x = 0$$

implica a identidade $I(a, b, c, d) = 0$. Por outro lado, a identidade $I(a, b, c, d) = 0$ implica

$$P(x, y) = (xy)^2 - x^2y^2 + (xy \cdot x)y + (xy \cdot y)x - y^2x \cdot x - x^2y \cdot y = 0.$$

Como vimos na prova do teorema 6 do capítulo I, as identidades $H(x, y) = 0$ e $P(x, y) = 0$ são equivalentes módulo $x^2x^2 = x^3x$. Portanto, as identidades $I(a, b, c, d) = 0$ e $H(x, y) = 0$ são equivalentes módulo $x^2x^2 = x^3x$.

Estudamos agora a representação dada pelo diagrama

		τ_1	τ_2	τ_3
[]	[]	1 2	1 3	1 4
[]		3	2	2
[]		4	4	3

Considerando só comutatividade obtemos a matriz escalonada

T_1	T_2	T_3	T_4
1 -1 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
0 0 1	0 0 0	0 0 0	0 0 0
0 0 0	1 0 0	0 0 0	0 0 0
0 0 0	0 1 0	0 0 0	0 0 0
0 0 0	0 0 1	0 0 0	0 0 0
0 0 1	0 0 0	1 0 -2	0 0 0
0 0 0	0 0 0	0 1 1	0 0 0
0 0 0	0 0 0	0 0 0	1 0 0
0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 1 0
0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 1

Considerando agora todas as identidades obtemos

T_1	T_2	T_3	T_3
1 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
0 1 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
0 0 1	0 0 0	0 0 0	0 0 0
0 0 0	1 0 0	0 0 0	0 0 0
0 0 0	0 1 0	0 0 0	0 0 0
0 0 0	0 0 1	0 0 0	0 0 0
0 0 0	0 0 0	1 0 0	0 0 0
0 0 0	0 0 0	0 1 0	0 0 0
0 0 0	0 0 0	0 0 1	0 0 0
0 0 0	0 0 0	0 0 0	1 0 0
0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 1 0
0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 1

O único novo degrau (que não envolve o homomorfismo w) corresponde ao tipo de associação T_3 na linha

$$0 \quad 0 \quad 1.$$

Consideramos então a matriz

$$\begin{matrix} T_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

A identidade é dada por

$$(AA \cdot A)A \\ S_{33}\epsilon_3$$

onde $S_{33} = I$. Os conjuntos P e Q são aqui

$$P = \{I, (14)\}, Q = \{I, (12), (13), (23), (123), (132)\}.$$

A identidade é dada então por

$$\phi = \{I + (14)\}\{I - (12) - (13) - (23) + (123) + (132)\}.$$

A forma polinomial da identidade é

$$(\dot{T}_3)_\phi(a, b, c, d) \\ = (bd \cdot c)a - (ad \cdot c)b - (db \cdot a)c - (cd \cdot b)a + (ad \cdot b)c + (cd \cdot a)b$$

$$= (a, cd, b) + (c, bd, a) + (b, ad, c) = 0.$$

A representação correspondente ao último diagrama (ver seção 1) não fornece novos degraus. Obtemos assim o seguinte teorema:

Teorema 5. As identidades minimais satisfeitas por uma álgebra de Bernstein normal tem grau quatro e são:

$$x^2x^2 = x^4, \quad (3)$$

$$3yx^2 \cdot x = 2(yx \cdot x)x + yx^3, \quad (4)$$

$$2(xy)^2 = x^2y \cdot y + y^2x \cdot x, \quad (5)$$

$$(x, yz, t) + (z, yt, x) + (t, yx, z) = 0. \quad (6)$$

Observação. A identidade (3) é uma consequência imediata de (5). As identidades (4), (5) e (6) são independentes no sentido de que duas delas não implicam a terceira. Qualquer outra identidade de grau quatro satisfeita por todas as álgebras de Bernstein normais pode ser obtida a partir de (4), (5) e (6).

Referências: [C-3], [H-1], [W-2].

4. Identidades minimais em álgebras de Bernstein excepcionais

Na seção 5 do capítulo I provamos que uma álgebra de Bernstein A é excepcional se e somente se satisfaz a identidade

$$(ab)^2 = w(ab)ab \quad (\forall a, b \in A).$$

Observamos aqui que fazendo $a = b$ nesta identidade obtemos a identidade (1) do capítulo I, que define as álgebras ponderadas que são de Bernstein. Linearizando totalmente esta identidade obtemos

$$\begin{aligned} h(a, b, c, d) &= 2ab \cdot cd + 2ad \cdot cb - w(ab)cd - w(ad)cb \\ &\quad - w(cb)ad - w(cd)ab = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Os tipos de associação envolvidos nesta identidade são dois, a saber:

$$T_1 = W(AA)AA, \quad T_2 = AA \cdot AA.$$

Usando a lei comutativa estes tipos induzem quatro identidades que são:

$$\begin{array}{lll} T_1 & & T_2 \\ w(ab)cd - w(ba)cd = 0, & ab \cdot cd - ba \cdot cd = 0, & (8) \\ w(ab)cd - w(ab)dc = 0, & ab \cdot cd - cd \cdot ab = 0. & \end{array}$$

Temos assim um total de cinco identidades de grau quatro satisfeitas por qualquer álgebra de Bernstein excepcional. As identidades (7) e (8) correspondem às identidades 5 e 1 a 4 da tábua II.

tábuas II

1	1	abcd	1
1	1	bacd	-1
2	1	abcd	1
2	1	abdc	-1
3	2	abcd	1
3	2	bacd	-1
4	2	abcd	1
4	2	cdab	-1
5	2	abcd	2
5	2	adcb	2
5	1	abcd	-1
5	1	adcb	-1
5	1	bcad	-1
5	1	cdab	-1

Quando consideramos somente as identidades (8) provenientes da comutatividade e em seguida todas as identidades, isto é, (7) e (8), nenhuma representação apresenta novos degraus nas colunas correspondentes aos tipos de associação que não envolvem w (tábua 5 do apêndice). Logo, não existem identidades de grau quatro. Estudamos agora as identidades de grau cinco. A partir da identidade (7) obtemos três identidades de grau cinco:

$$\begin{aligned} h(a\epsilon, b, c, d) &= 0, & h(a, b, c, d)\epsilon &= 0, \\ h(a, b, c, d)w(\epsilon) &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Os tipos de associação envolvidos nestas identidades são cinco:

$$\begin{aligned} T_1 &= W(A)AA \cdot AA, & T_4 &= (AA \cdot AA)A, \\ T_2 &= W(AA)AA \cdot A, & T_5 &= (AA \cdot A) \cdot AA. \\ T_3 &= W(AAA)AA, \end{aligned}$$

Encontramos agora as identidades implicadas pela comutatividade para cada um destes tipos de associação. Temos:

$$\begin{array}{ll} T_1 & T_4 \\ w(a)bc \cdot de - w(a)cb \cdot de = 0, & (ab \cdot cd)e - (ba \cdot cd)e = 0, \\ w(a)bc \cdot d\epsilon - w(a)de \cdot bc = 0, & (ab \cdot cd)e - (cd \cdot ab)e = 0, \\ \\ T_2 & T_5 \\ w(ab)cd \cdot \epsilon - w(ba)cd \cdot \epsilon = 0, & (ab \cdot c) \cdot de - (ba \cdot c) \cdot de = 0, \\ w(ab)cd \cdot \epsilon - w(ab)dc \cdot \epsilon = 0, & (ab \cdot c) \cdot de - (ab \cdot c) \cdot ed = 0, \\ \\ T_3 & \\ w(ab \cdot c)d\epsilon - w(ba \cdot c)d\epsilon = 0, & \\ w(ab \cdot c)d\epsilon - w(ab \cdot c)\epsilon d = 0, & \\ w(abc)d\epsilon - w(acb)d\epsilon. & \end{array} \tag{10}$$

Usando a representação de S_5 (seção 1 do apêndice), para cada representação encontramos a matriz escalonada considerando só as identidades (10) e em seguida, todas as identidades, isto é, (9) e (10). A única representação que fornece novos degraus é a dada

pelo diagrama

$$\begin{array}{cc|cccccc} & & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 4 \\ \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} & \end{bmatrix} & 3 & 4 & 2 & 4 & 3 & 5 & 2 & 5 & 2 & 5 \\ & & 5 & & 5 & & 4 & & 4 & & 3 \end{array}$$

O novo degrau é dado pela matriz

$$\begin{array}{cc} T_4 & T_5 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

De acordo com o teorema 4, para escrever a identidade temos que encontrar as matrizes $A_I^{-1}E_{55}A_I^{-1}$ e $A_I^{-1}E_{45}A_I^{-1}$. Temos que

$$A_I^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$A_I^{-1}E_{55}A_I^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_I^{-1}E_{45}A_I^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim temos que a identidade é dada por

$$\begin{array}{ll} (AA \cdot AA)A & (AA \cdot A) \cdot AA \\ -S_{15}\epsilon_5 + \epsilon_5 & 6S_{45}\epsilon_5 \end{array}$$

Se $H = \{I + (14)\}\{I + (25)\}\{I - (12)\}\{I + (123) + (132)\}\{I - (45)\}$
então a identidade é dada por

$$\begin{array}{ll} (AA \cdot AA)A & (AA \cdot A) \cdot AA \\ \{I - (2354)\}H & 6(34)H \end{array}$$

Portanto, se

$$\phi_1 = \{I - (2354)\}H$$

e

$$\phi_2 = 6(34)H,$$

então a forma polinomial da identidade é dada por

$$(\hat{T}_4)_{\phi_1}(a, b, c, d, e) + (\hat{T}_5)_{\phi_2}(a, b, c, d, e) = 0.$$

A forma simplificada desta identidade é

$$\begin{aligned} & (ac, bd, \epsilon) + (ad, be, c) + (a\epsilon, bc, d) \\ & + (c, bd, a\epsilon) + (d, be, ac) + (\epsilon, bc, ad) \\ & + (c, a, d) \cdot bc + (d, a, \epsilon) \cdot bc + (\epsilon, a, c) \cdot bd = 0. \end{aligned}$$

Temos assim o seguinte

Teorema 6. A identidade minimal satisfeita pelas álgebras de Bernstein excepcionais é

$$(ac, bd, \epsilon) + (ad, be, c) + (a\epsilon, bc, d)$$

$$\begin{aligned}
& + (c, bd, ac) + (d, b\epsilon, ac) + (\epsilon, bc, ad) \\
& + (c, a, d) \cdot b\epsilon + (d, a, \epsilon) \cdot bc + (\epsilon, a, c) \cdot bd = 0.
\end{aligned}$$

Observação. Qualquer outra identidade de grau 5 satisfeita pelas álgebras de Bernstein excepcionais pode ser obtida a partir desta identidade.

Referências: [C-3], [H-1], [W-2].

5. Identidades minimais em álgebras de Bernstein nucleares

No capítulo I vimos que toda álgebra de Bernstein nuclear satisfaz a identidade (26). Linearizando completamente esta identidade obtemos

$$\begin{aligned}
h(a, b, c, d) = & 4(bc \cdot d)a + 4(bc \cdot a)d + 4(bd \cdot c)a + 4(ab \cdot c)d \\
& + 4(bd \cdot a)c + 4(ab \cdot d)c + 4(cd \cdot b)a + 4(ac \cdot b)d + 4(ad \cdot b)c \\
& + 4(dc \cdot a)b + 4(ac \cdot d)b + 4(ad \cdot c)b - 6w(b)cd \cdot a - 6w(b)ac \cdot d \\
& - 6w(b)ad \cdot c - 6w(c)bd \cdot a - 6w(c)ab \cdot d - 6w(d)bc \cdot a - 6w(a)bc \cdot d \\
& - 6w(d)ab \cdot c - 6w(a)bd \cdot c - 6w(a)cd \cdot b - 6w(d)ac \cdot b - 6w(a)cd \cdot b \\
& + 4w(bc)ad + 4w(bd)ac + 4w(ab)cd + 4w(cd)ab + 4w(ac)bd + 4w(ad)bc = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Devemos considerar agora a identidade (1) do capítulo I, que define as álgebras ponderadas que são de Bernstein. A linearização desta identidade é

$$g(a, b, c, d) = 2ab \cdot cd + 2ac \cdot bd + 2ad \cdot bc - w(ab)cd$$

$$-w(cd)ab - w(ac)bd - w(bd)ac - w(ad)bc - w(bc)ad = 0. \quad (12)$$

Os tipos de associação envolvidos nas identidades (11) e (12) são os seguintes:

$$T_1 = W(A)AA \cdot A, \quad T_3 = (AA \cdot A)A,$$

$$T_2 = W(AA)AA, \quad T_4 = AA \cdot AA.$$

As identidades induzidas pela comutatividade para estes tipos de associação são as identidades 1 a 6 da tábua 7-a) do apêndice. As identidades (11) e (12) correspondem às identidades 7 e 8 dessa tábua. Se consideramos somente estas seis identidades e em seguida as oito identidades, para cada representação, as matrizes não apresentam novos degraus que não envolvam o homomorfismo w (tábua 7-b) do apêndice). Portanto não existem identidades de grau quatro para a classe de álgebras definida por (26) e pela identidade (1) do capítulo I. Vejamos então as identidades de grau cinco. A identidade (11) fornece três identidades de grau cinco, a saber

$$h(a, b, c, d) \cdot \epsilon = 0, \quad h(a, b, c, d) \cdot w(\epsilon) = 0, \quad h(a, b, c, d\epsilon) = 0. \quad (13)$$

Estas identidades correspondem as identidades 15, 16 e 17 da tábua 8-a) do apêndice. Por outro lado a identidade (12) induz três identidades de grau cinco que são:

$$g(a, b, c, d)\epsilon = 0, \quad g(a, b, c, d\epsilon) = 0, \quad g(a, b, c, d)w(\epsilon) = 0. \quad (14)$$

Estas identidades correspondem às identidades 18 a 20 da tábua 8-a) do apêndice. As identidades (13) e (14) envolvem sete tipos de associação:

$$\begin{aligned} T_1 &= W(A)(AA \cdot A)A, & T_5 &= ((AA \cdot A)A)A, \\ T_2 &= W(AA)AA \cdot A, & T_6 &= (A \cdot A)(AA), \\ T_3 &= W(A)AA \cdot AA, & T_7 &= (AA \cdot AA)A. \\ T_4 &= W(AAA)AA, \end{aligned} \tag{15}$$

Da lei comutativa, estes tipos de associação induzem as identidades 1 a 14 da tábua 8-a) do apêndice. Se considerarmos primeiro as identidades 1 a 14 e depois todas as identidades (vinte no total), vemos da tábua 8-b) do apêndice que o único degrau novo é dado pela representação correspondente ao diagrama [][][][]. A matriz correspondente às identidades provenientes da comutatividade é a matriz nula. No entanto, quando considerarmos todas as identidades a matriz escalonada é

$$\begin{array}{ccccccc} T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 & T_7 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-5}{2} \end{array}$$

O único degrau novo que não contém os tipos que envolvem o homomorfismo w corresponde à última linha. A identidade fornecida por esta linha é

$$2a^5 + 3a^2a^3 - 5a^2a^2 \cdot a = 0.$$

Usando o teorema 9 do capítulo I podemos então enunciar o

Teorema 7. A variedade definida pela identidade

$$2x^5 + 3x^2x^3 - 5x^2x^2 \cdot x = 0$$

é a menor variedade de álgebras que contém a classe das álgebras de Bernstein que satisfazem

$$2x^4 - 3w(x)x^3 + w(x)^2x^2 = 0.$$

A classe das álgebras de Bernstein nucleares está contida nesta variedade.

Referências: [C-3], [G-2], [H-1], [M], [P-1].

6. Identidades minimais em álgebras de Bernstein

Seja A uma álgebra de Bernstein arbitrária. A identidade minimal das álgebras de Bernstein no caso excepcional tem grau 5. Por outro lado, toda álgebra de Bernstein satisfaz a identidade $(x^2x^2, y, x^2) = 0$. Logo o grau das identidades minimais de A deve ser 5, 6 ou 7. Para uma álgebra de Bernstein arbitrária as identidades de grau 5 devem ser consequência da comutatividade e as identidades (14). Os tipos de associação envolvidos nestas identidades são T_3, T_2, T_4, T_7 e T_6 de (15). As identidades induzidas pela comutatividade para estes tipos correspondem às identidades

4 a 14 da tábua 9-a) do apêndice. As matrizes correspondentes a estas identidades e a todas as identidades estão na tábua 9-b) do apêndice. Observamos que o posto dos dois blocos de matrizes é o mesmo para todas as representações no que diz respeito aos tipos de associação que não envolvem w . Portanto não existem identidades de grau 5 satisfeitas por todas as álgebras de Bernstein. As identidades de grau seis induzidas pela identidade (12) são:

$$\begin{aligned} g(a, b, c, d)\epsilon \cdot f &= 0, & g(a, b, ce, df) &= 0, \\ g(a, b, c, d) \cdot ef &= 0, & g(a, b, c, de)f &= 0, \\ g(a, b, c, de \cdot f) &= 0, & w(f)g(a, b, c, de) &= 0 \\ w(f)g(a, b, c, d)\epsilon &= 0, & w(\epsilon f)g(a, b, c, d) &= 0. \end{aligned}$$

Estas identidades correspondem às identidades 27 a 34 da tábua 10-a) do apêndice. Os tipos de associação envolvidos são:

$$\begin{aligned} T_1 &= W(A)(AA \cdot AA)A, & T_2 &= W(A)(AA \cdot A)(AA), \\ T_3 &= W(AA)(AA \cdot A)A, & T_4 &= W(AA)AA \cdot AA, \\ T_5 &= W(AAA)AA \cdot A, & T_6 &= W(AAAA)AA, \\ T_7 &= (AA \cdot AA)A \cdot A, & T_8 &= (AA \cdot AA) \cdot AA, \\ T_9 &= (AA \cdot A)A \cdot AA, & T_{10} &= (AA \cdot A)(AA \cdot A), \\ T_{11} &= ((AA \cdot A) \cdot AA)A. \end{aligned}$$

As identidades induzidas pela comutatividade para estes tipos correspondem às identidades 1 a 26 da tábua 10-a) do apêndice. Temos assim um total de 34 identidades. Se considerarmos somente as identidades fornecidas pela comutatividade, para a primeira representação correspondente ao diagrama $[] [] [] [] []$ obtemos a matriz nula. Considerando agora todas as identidades e somente as

colunas correspondentes aos tipos que não envolvem w temos a matriz

$$\begin{array}{ccccc} T_7 & T_8 & T_9 & T_{10} & T_{11} \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \end{array}$$

Como nos casos anteriores, estas identidades podem ser escritas diretamente da matriz. Obtemos então as identidades

$$(x^2 x^2 \cdot x) x + x^3 x^3 - 2x^3 x^2 \cdot x = 0$$

e

$$x^2 x^2 \cdot x^2 - 2x^4 x^2 - x^3 x^3 + 2x^3 x^2 \cdot x = 0.$$

Podemos escrever a primeira identidade de maneira mais abreviada como

$$(x^2, x^2, x)x - (x^3, x^2, x) = 0. \quad (16)$$

Somando as duas identidades temos

$$(x^2, x^2, x)x + (x^2, x^3, x) - (x^2, x, x)x^2 = 0. \quad (17)$$

Além da primeira, a única representação que fornece novas identidades é a segunda como pode ser visto nas tábuas 10-b) do apêndice. A segunda representação corresponde ao diagrama

$$\begin{array}{cccccc} [] & [] & [] & [] & [] \\ & [] \end{array}$$

A matriz escalonada correspondente a esta representação tem quatro degraus novos. Usando o teorema 4 podemos obter uma identidade a partir de sua representação matricial. Aqui, no entanto, vamos

usar um argumento mais eficiente. O número de variáveis que tem cada identidade corresponde ao número de linhas que tem o tableau correspondente. Assim as identidades que estamos procurando são do tipo [5,1]. Estas identidades devem ser consequência do conjunto de todas as identidades de grau seis que contém cinco variáveis iguais e uma diferente, e que podem ser obtidas a partir da comutatividade e da identidade (1) do capítulo I, isto é, a identidade

$$B(x) = x^2x^2 - w(x)^2x^2 = 0.$$

Multiplicando por $x, y, w(x), w(y), xy$ e $w(xy)$ obtemos seis identidades, a saber

$$\begin{aligned} B(x)x \cdot y &= 0, & B(x)y \cdot x &= 0, \\ B(x) \cdot xy &= 0, & B(x)w(y)x &= 0, \\ B(x)w(x)y &= 0, & B(x)w(x)w(y) &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Usando agora linearizações obtemos mais quatorze identidades:

$$\begin{aligned} B(x)\delta_x^1(x^2)y &= 0, & B(x)\delta_x^1(x^2)w(y) &= 0, \\ B(x)\delta_x^1(y)x \cdot x &= 0, & B(x)\delta_x^1(y)x^2 &= 0, \\ B(x)\delta_x^1(y)w(x)x &= 0, & B(x)\delta_x^1(y)w(x)^2 &= 0, \\ B(x)\delta_x^1(y)\delta_x^1(x^2)x &= 0, & B(x)\delta_x^1(y)\delta_x^1(x^2)w(x) &= 0, \\ B(x)\delta_x^1(y)\delta_x^2(x^2) &= 0, & B(x)\delta_x^1(y)\delta_x^1(x^3) &= 0, \\ B(x)\delta_x^1(xy)x &= 0, & B(x)\delta_x^1(xy)w(x) &= 0, \\ B(x)\delta_x^1(y)\delta_x^1(x^2)\delta_y^1(xy) &= 0, & B(x)\delta_x^1(yx \cdot x) &= 0, \\ B(x)\delta_x^1(yx^2) &= 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Usando a comutatividade quando necessário, podemos verificar que estas identidades envolvem termos dos seguintes tipos:

$$t_1 = w(y)x^2x^2 \cdot x, \quad t_2 = w(x)(yx \cdot x^2)x,$$

$$t_3 = w(x)x^2x^2 \cdot y, \quad t_4 = w(y)x^3x^2,$$

$$t_5 = w(x)(yx \cdot x)x^2, \quad t_6 = w(x)x^2y \cdot x^2,$$

$$t_7 = w(x)x^3 \cdot yx, \quad t_8 = w(yx)x^4,$$

$$t_9 = w(x)^2(yx \cdot x)x, \quad t_{10} = w(x)^2x^2y \cdot x,$$

$$t_{11} = w(x)^2x^3y, \quad t_{12} = w(yx)x^2x^2,$$

$$t_{13} = w(x)^2yx \cdot x^2, \quad t_{14} = w(yx^2)x^3,$$

$$t_{15} = w(x)^3yx \cdot x, \quad t_{16} = w(x)^3x^2y,$$

$$t_{17} = w(yx^3)x^2, \quad t_{18} = w(x)^4yx,$$

$$t_{19} = (yx \cdot x^2)x \cdot x, \quad t_{20} = (x^2x^2 \cdot y)x,$$

$$t_{21} = (x^2x^2 \cdot x)y, \quad t_{22} = (yx \cdot x^2)x^2,$$

$$t_{23} = x^2x^2 \cdot yx, \quad t_{24} = (yx \cdot x)x \cdot x^2,$$

$$t_{25} = (x^2y \cdot x)x^2, \quad t_{26} = x^3y \cdot x^2,$$

$$t_{27} = x^4 \cdot yx, \quad t_{28} = (yx \cdot x)x^3,$$

$$t_{29} = x^2y \cdot x^3, \quad t_{30} = (yx \cdot x)x^2 \cdot x,$$

$$t_{31} = (x^2y \cdot x^2)x, \quad t_{32} = (x^3 \cdot yx)x,$$

$$t_{33} = x^3x^2 \cdot y.$$

Agora, consideramos as identidades (18) e (19) como um sistema de equações lineares nas indeterminadas t_1, \dots, t_{33} . Escalonando a matriz deste sistema obtemos:

t_{19}	t_{20}	t_{21}	t_{22}	t_{23}	t_{24}	t_{25}	t_{26}	t_{27}	t_{28}	t_{29}	t_{30}	t_{31}	t_{32}	t_{33}
0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	2	0	-1	-1	-2	-2	-1	0	1	2	1
0	0	0	0	-2	0	1	1	2	0	1	0	-1	-2	-1
0	0	0	0	-2	0	1	1	2	2	-1	0	-1	-2	-1
0	0	0	0	2	-2	-1	-1	-2	-2	-1	2	1	2	1
0	0	0	0	99	2	1	1	2	2	1	-2	-1	-2	-1
1	0	0	0	0	51	52	0	0	1	0	51	51	-1	0
0	1	0	0	-2	2	-1	1	2	2	1	-2	-1	-2	-1
0	0	1	0	2	0	-1	-1	-2	-2	1	0	1	2	-1
0	0	0	1	52	-1	51	51	-1	-1	51	1	52	1	52

(consideramos somente as colunas correspondentes aos tipos que não envolvem o homomorfismo w e as últimas dez linhas da matriz). Observamos que aparecem quatro degraus. Estes degraus são determinados pelas identidades

$$(x^2 \cdot yx)x \cdot x - \frac{1}{2}(yx \cdot x)x \cdot x^2 + \frac{1}{2}(yx^2 \cdot x)x^2 + (yx \cdot x)x^3 - \frac{1}{2}(yx \cdot x)x^2 \cdot x \\ - \frac{1}{2}(yx^2 \cdot x^2)x - (yx \cdot x^3)x = 0, \quad (20)$$

$$(x^2x^2)y \cdot x - 2x^2x^2 \cdot yx + 2(yx \cdot x)x \cdot x^2 - (yx^2 \cdot x)x^2 + yx^3 \cdot x^2 \\ + 2x^4 \cdot yx + 2(yx \cdot x)x^3 + yx^2 \cdot x^3 - 2(yx \cdot x)x^2 \cdot x - (yx^2 \cdot x^2)x \\ - 2(yx \cdot x^3)x - x^3x^2 \cdot y = 0. \quad (21)$$

$$(x^2x^2 \cdot x)y + 2x^2x^2 \cdot yx - (yx^2 \cdot x)x^2 - yx^3 \cdot x^2 - 2yx \cdot x^4 \\ - 2(yx \cdot x)x^3 + yx^2 \cdot x^3 + (yx^2 \cdot x^2)x + 2(yx \cdot x^3)x - x^3x^2 \cdot y = 0, \quad (22)$$

$$(yx \cdot x^2)x^2 + \frac{1}{2}x^2x^2 \cdot yx - (yx \cdot x)x \cdot x^2 - \frac{1}{2}(yx^2 \cdot x)x^2 - \frac{1}{2}yx^3 \cdot x^2$$

$$\begin{aligned}
& -yx \cdot x^4 - (yx \cdot x)x^3 - \frac{1}{2}yx^2 \cdot x^3 + (yx \cdot x)x^2 \cdot x + \frac{1}{2}(yx^2 \cdot x^2)x + (yx \cdot x^3)x \\
& + \frac{1}{2}x^3x^2 \cdot y = 0.
\end{aligned} \tag{23}$$

Se fazemos a soma das identidades (21) e (22) obtemos a identidade

$$H(x, y) = (y, x^2x^2, x) - 2(yx^2, x, x^2) + 2y(x^2, x^2, x) + 2(x, yx \cdot x, x^2) = 0. \tag{24}$$

Se multiplicamos (23) por 2 e somamos isto com a identidade (21) obtemos a identidade

$$(x^2x^2, y, x) - 2(x^2, y, x)x^2 = 0. \tag{25}$$

Multiplicando a identidade (20) por 2 obtemos a identidade

$$G(x, y) = (x, yx^2, x^2) - (x, yx \cdot x, x^2) - 2(x^3, yx, x) + 2(x^2, yx, x)x = 0. \tag{26}$$

Se fazemos $x = y$ em (26) obtemos a identidade (16). Por outro lado linearizando (17) obtemos

$$\begin{aligned}
& 2(yx, x^2, x)x + 2(x^2, yx, x)x + (x^2, x^2, y)x + (x^2, x^2, x)y \\
& + 2(yx, x^3, x) + 2(x^2, yx \cdot x, x) + (x^2, yx^2, x) + (x^2, x^3, y) \\
& - 2(yx \cdot x, x)x^2 - (x^2, y, x)x^2 - (x^2, x, y)x^2 - 2(x^2, x, x) \cdot yx = 0.
\end{aligned}$$

Esta identidade é igual à soma das identidades (21), (22), (23) e (24). Assim as identidades (16) e (17) são consequência das outras identidades encontradas. Veremos agora que as identidades (24) e (26) são equivalentes. Linearizando (24) obtemos

$$H(x, y)\delta_x^1(z)\delta_y^1(x)$$

$$\begin{aligned}
&= 4(x, zx \cdot x^2, x) + (x, x^2 x^2, z) - 4(zx \cdot x, x, x^2) - 2(x^3, z, x^2) \\
&\quad - 4(x^3, x, xz) + 4x(xz, x^2, x) + 4x(x^2, xz, x) + 2x(x^2, x^2, z) \\
&\quad + 2(z, x^3, x^2) + 2(x, zx \cdot x, x^2) + 2(x, x^2 z, x^2) + 4(x, x^3, xz) = 0. \quad (27)
\end{aligned}$$

e segue então que

$$H(x, y)\delta_x^1(z)\delta_y^1(x) - H(x, z) = 4G(x, z) \quad (\forall x, z \in A).$$

Analogamente obtemos que

$$G(x, y)\delta_x^1(z)\delta_y^1(x) - 3G(x, z) = 2H(x, z) \quad (\forall x, z \in A).$$

Assim as identidades (24) e (26) são equivalentes. Temos portanto o seguinte teorema:

Teorema 8. As identidades minimais satisfeitas por todas as álgebras de Bernstein são:

$$\begin{aligned}
&(x^2 x^2, y, x) - 2(x^2, y, x)x^2 = 0, \\
&(x, yx^2, x^2) - (x, yx \cdot x, x^2) - 2(x^3, yx, x) + 2(x^2, yx, x)x = 0.
\end{aligned}$$

Observação. Qualquer outra identidade de grau seis satisfeita por todas as álgebras de Bernstein pode ser obtida a partir destas duas identidades. Outra prova de que toda álgebra de Bernstein satisfaz as identidades do teorema 8 pode ser obtida usando a fórmula generalizada das identidades (7) e (8) do capítulo I, a saber, que para todo $i, j \geq 2$ temos

$$2x^i x^j = w(x)^i x^j + w(x)^j x^i.$$

Referências: [C-3], [H-1].

CAPÍTULO III

ÁLGEBRAS COMUTATIVAS QUE SATISFAZEM UMA IDENTIDADE DE GRAU 6

Neste capítulo estudaremos as álgebras comutativas que satisfazem uma das identidades (25) ou (26) do capítulo II. Vamos supor sempre as álgebras sobre um corpo F de característica zero. Vamos assumir ainda que as álgebras contêm um elemento idempotente não-trivial ϵ . Denotaremos por L_ϵ o operador multiplicação à esquerda por ϵ .

1. A Identidade $(x^2x^2, y, x) - 2(x^2, y, x)x^2 = 0$

Seja A uma álgebra comutativa (não necessariamente de dimensão finita) sobre um corpo F de característica zero, que satisfaz

a identidade

$$(x^2x^2, y, x) - 2(x^2, y, x)x^2 = 0. \quad (1)$$

Linearizando esta identidade obtemos

$$\begin{aligned} 4(xz \cdot x^2, y, x) + (x^2x^2, y, z) - 4(xz, y, x)x^2 \\ - 2(x^2, y, z)x^2 - 4(x^2, y, x) \cdot xz = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

e

$$\begin{aligned} 4(wz \cdot x^2, y, x) + 8(xz \cdot xw, y, x) + 4(xz \cdot x^2, y, w) \\ + 4(xw \cdot x^2, y, z) - 4(wz, y, x)x^2 - 4(xz, y, w)x^2 - 8(xz, y, x) \cdot xw \\ - 4(xw, y, z)x^2 - 4(x^2, y, z) \cdot xw - 8(xw, y, x) \cdot xz - 4(x^2, y, w) \cdot xz \\ - 4(x^2, y, x) \cdot wz. \end{aligned} \quad (3)$$

Suponhamos que A contem um idempotente não-trivial ϵ . Fazendo $x = y = \epsilon$ em (2) obtemos

$$4(\epsilon \cdot \epsilon z, \epsilon, \epsilon) + (\epsilon, \epsilon, z) - 4(\epsilon z, \epsilon, \epsilon)\epsilon - 2(\epsilon, \epsilon, z)\epsilon = 0.$$

Logo o operador $L_\epsilon : A \rightarrow A$, satisfaz

$$2L_\epsilon^3 - 3L_\epsilon^2 + L_\epsilon = 0$$

e portanto

$$L_\epsilon(L_\epsilon - I)(L_\epsilon - \frac{1}{2}I) = 0.$$

Assim, temos a decomposição de Peirce de A relativa ao idempotente ϵ :

$$A = A_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0,$$

onde $A_\lambda = \{x \in A : L_\epsilon(x) = \lambda x\}$.

Lema 1. Os subespaços A_λ verificam as seguintes relações:

$$\begin{aligned} A_1^2 &\subset A_1, & A_{\frac{1}{2}}^2 &\subset A_1 \oplus A_0, & A_0^2 &\subset A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0, \\ A_1 A_{\frac{1}{2}} &\subset A_{\frac{1}{2}}, & A_1 A_0 &= 0, & A_{\frac{1}{2}} A_0 &\subset A_{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Prova. Fazendo $x = e$ em (2) obtemos

$$4(L_\epsilon^2(z), y, e) + (e, y, z) - 4(L_\epsilon(z), y, e)e - 2(e, y, z)e = 0.$$

Suponhamos que $z \in A_{\lambda_z}$ e $y \in A_{\lambda_y}$. Então podemos escrever a expressão anterior como

$$\{2(1 - 2\lambda_z)L_\epsilon^2 + 2(2\lambda_z - 1)(\lambda_z + \lambda_y + \frac{1}{2})L_\epsilon + \lambda_y(1 - 4\lambda_z^2)\}(yz) = 0.$$

Fazendo λ_z e λ_y igual a 1, $\frac{1}{2}$ e 0 de todas as formas possíveis e usando a comutatividade de A , temos o resultado para $\lambda_y, \lambda_z \neq \frac{1}{2}$. Para obter que $A_{\frac{1}{2}}^2 \subset A_1 \oplus A_0$ fazemos $x = y = e$ e supomos que $w, z \in A_{\frac{1}{2}}$ em (3) para obter que

$$L_\epsilon(I - L_\epsilon)(wz) = 0$$

de onde o resultado segue.

O seguinte lema fornece relações envolvendo produtos de elementos dos diferentes subespaços A_λ . Denotaremos o produto de dois elementos $k, t \in A$ como $kt = [kt]_1 + [kt]_{\frac{1}{2}} + [kt]_0$, onde $[kt]_\lambda$ é a componente em A_λ do produto kt e denotaremos por $h(y; x, z, u, v, w)$ a linearização completa da identidade (1).

Lema 2. Se $a, b \in A_1$, $h, i, j \in A_{\frac{1}{2}}$, $x, y \in A_0$ então:

$$h \cdot ab = ha \cdot b + hb \cdot a, \quad (4)$$

$$a \cdot ij = [i \cdot aj]_1 + [j \cdot ai]_1, \quad (5)$$

$$[x \cdot ij]_0 = [xi \cdot j]_0 + [xj \cdot i]_0, \quad (6)$$

$$[j \cdot ix]_1 = [i \cdot jx]_1, \quad (7)$$

$$[i \cdot aj]_0 = [j \cdot ai]_0, \quad (8)$$

$$a \cdot hx = ah \cdot x, \quad (9)$$

$$h[ij]_0 + i[hj]_0 + j[hi]_0 = h[ij]_1 + i[hj]_1 + j[hi]_1, \quad (10)$$

$$a^2 \cdot ba = a^2 b \cdot a, \quad (11)$$

$$h[xy]_{\frac{1}{2}} = 0. \quad (12)$$

Prova. Usando o lema 1 obtemos que

$$h(i; a, j, \epsilon, \epsilon, \epsilon) = -a[ij]_1 + [i \cdot aj]_1 + [j \cdot ai]_1 - 2[i \cdot aj]_0 + 3[j \cdot ai]_0 = 0.$$

Usando agora o fato de que a soma dos subespaços A_λ é direta, obtemos

$$[i \cdot aj]_0 - [j \cdot ai]_0 = 0, \quad [i \cdot aj]_1 + [j \cdot ai]_1 - a[ij]_1 = 0.$$

Como $ij = [ij]_1 + [ij]_0$ e $A_0 A_1 = 0$, temos que $a \cdot ij = a[ij]_1$.

Assim,

$$a \cdot ij = [i \cdot aj]_1 + [j \cdot ai]_1.$$

Temos então as identidades (5) e (8). Por outro lado,

$$h(a; h, b, \epsilon, \epsilon, \epsilon) = h \cdot ab - ha \cdot b - hb \cdot a = 0,$$

de onde obtemos (4). Para obter (6) e (7) calculamos $h(i; x, j, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$ obtendo que

$$[j \cdot ix]_1 - [j \cdot ix]_0 + [x[ij]_0]_0 - [i \cdot jx]_1 - [i \cdot jx]_0 = 0.$$

Como $x \cdot ij = x[ij]_1 + x[ij]_0$ e $A_0 A_1 = 0$, temos que

$$x \cdot ij = x[ij]_0$$

e o resultado segue. Para obter (10) calculamos

$$\begin{aligned} h(\epsilon; h, i, j, \epsilon, \epsilon) &= -h \cdot ij - i \cdot hj - j \cdot hi - 2\epsilon(h \cdot ij) - 2\epsilon(i \cdot hj) \\ &\quad - 2\epsilon(j \cdot hi) + 4h(e \cdot ij) + 4i(e \cdot hj) + 4j(e \cdot hi) + 4e(e(h \cdot ij)) \\ &\quad + 4e(e(i \cdot hj)) + 4e(e(j \cdot hi)) - 4e(h(e \cdot ij)) - 4e(i(e \cdot hj)) - 4e(j(e \cdot hi)) \\ &= -h[ij]_0 - h[ij]_1 - i[hj]_1 - i[hj]_0 - j[hi]_1 - j[hi]_0 - h[ij]_1 \\ &\quad - h[ij]_0 - i[hj]_1 - i[hj]_0 - j[hi]_1 - j[hi]_0 + 4h[ij]_1 + 4[hj]_1 \\ &\quad + 4j[hi]_1 + 4[ij]_1 + h[ij]_0 + i[hj]_1 + i[hj]_0 + j[hi]_1 + j[hi]_0 \\ &\quad - 2h[ij]_1 - 2i[hj]_1 - 2j[hi]_1 \\ &= -h[ij]_0 + h[ij]_1 + i[hj]_1 - i[hj]_0 + j[hi]_1 - j[hi]_0 = 0, \end{aligned}$$

de onde segue (10). Para obter (12) calculamos $h(h; x, y, \epsilon, \epsilon, \epsilon)$ para obter

$$\begin{aligned} e(h \cdot xy) - h(e \cdot xy) - 2e(e(h \cdot xy)) + 2(e(h(e \cdot xy))) \\ = e(h[xy]_0) + e([h[xy]_{\frac{1}{2}}]) - \frac{1}{2}h[xy]_{\frac{1}{2}} - 2e(e \cdot h[xy]_0) \\ - 2e(e \cdot h[xy]_{\frac{1}{2}}) + e(h[xy]_{\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}h[xy]_0 + [h[xy]_{\frac{1}{2}}]_1 - \frac{1}{2}[h[xy]_{\frac{1}{2}}]_1 - \frac{1}{2}[h[xy]_{\frac{1}{2}}]_0 \\
&\quad - \frac{1}{2}h[xy]_0 - 2[h[xy]_{\frac{1}{2}}]_1 + [h[xy]_{\frac{1}{2}}]_1 \\
&= \frac{1}{2}[h[xy]_{\frac{1}{2}}]_1 - \frac{1}{2}[h[xy]_{\frac{1}{2}}]_0 = 0.
\end{aligned}$$

Da relação $A_{\frac{1}{2}}A_{\frac{1}{2}} \subset A_1 \oplus A_0$, como

$$[h[xy]_{\frac{1}{2}}]_1 = 0, \quad [h[xy]_{\frac{1}{2}}]_0 = 0$$

temos que $h[xy]_{\frac{1}{2}} = 0$ e obtemos a identidade (12).

As relações (9) e (11) são obtidas respectivamente ao calcularmos $h(h; a, x, e, \epsilon, \epsilon) = 0$ e $h(b; a, a, a, e, e) = 0$.

Proposição 3. Seja A uma álgebra comutativa (não necessariamente de dimensão finita) sobre um corpo F de característica zero, que satisfaz a identidade (1) e contém um idempotente não-trivial e . Seja $A = A_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ a decomposição de Peirce relativa a e . Então o conjunto $L = \{u \in A_{\frac{1}{2}} : uA_{\frac{1}{2}} = 0\}$ é um ideal de A .

Prova. Sejam $u \in L$, $a \in A_1$, $j \in A_{\frac{1}{2}}$, $x \in A_0$. Usando as identidades (5)-(8) temos

$$ua \cdot j = [ua \cdot j]_1 + [ua \cdot j]_0 = uj \cdot a - [u \cdot aj]_1 + [u \cdot aj]_0 = 0$$

e

$$ux \cdot j = [ux \cdot j]_1 + [ux \cdot j]_0 = [u \cdot xj]_1 + [uj \cdot x]_0 - [u \cdot jx]_0 = 0.$$

Logo $ua, ux \in L$ e L é um ideal de A .

Uma álgebra é dita *semiprima* se o único ideal I que satisfaz $I^2 = 0$ é o ideal nulo.

Corolário. Seja A uma álgebra comutativa (não necessariamente de dimensão finita) sobre um corpo F de característica zero.

Se A é semiprima e satisfaz a identidade (1) então $A_0^2 \subset A_0$.

Prova. De (12) temos que $[A_0^2]_{\frac{1}{2}} \subset L$. Por outro lado, como A é semiprima e $L^2 = 0$, temos que $L = 0$. O resultado segue agora do lema 1.

Referências: [C-3], [O-3].

2. Álgebras de Jordan

Proposição 4. Seja A uma álgebra comutativa com unidade (não necessariamente de dimensão finita) sobre um corpo F de característica zero e que satisfaz a identidade (1). Então A é de Jordan.

Prova. Fazendo $w = z = 1$ em (3) obtemos a identidade de Jordan.

Definamos as funções:

$$H(x; y, z, w) = (x \cdot yz)w + (x \cdot yw)z + (x \cdot wz)y$$

e

$$K(x, y, z, w) = xy \cdot zw + xz \cdot yw + xw \cdot yz.$$

Linearizando completamente a identidade de Jordan obtemos a igualdade

$$H(x; y, z, w) = K(x, y, z, w) \quad (\forall x, y, z, w \in A). \quad (13)$$

Assim, A é uma álgebra de Jordan se e somente se A satisfaz (13). Em nosso caso $A = A_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$, logo, A é de Jordan se e somente se A satisfaz (13) para todas as possíveis escolhas de elementos $x, y, z, w \in A_1, A_{\frac{1}{2}}, A_0$.

Para as álgebras satisfazendo a identidade (1) temos o seguinte resultado:

Teorema 5. Seja A uma álgebra comutativa (não necessariamente de dimensão finita) sobre um corpo F de característica zero, que satisfaz a identidade (1) e contém um elemento idempotente não-trivial e . Seja $A = A_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ a decomposição de Peirce relativa a e . Então A é uma álgebra de Jordan se e somente se A_0 é uma subálgebra de Jordan e

$$j \cdot xy = jx \cdot y + jy \cdot x \quad (\forall x, y \in A_0, j \in A_{\frac{1}{2}}). \quad (14)$$

Prova. Se A é uma álgebra de Jordan então A_0 é uma

subálgebra. Da linearização da identidade de Jordan temos que

$$(x \cdot yz)w + (x \cdot yw)z + (x \cdot wz)y = xy \cdot zw + xz \cdot yw + xw \cdot yz \quad (\forall x, y, z, w \in A).$$

Fazendo aqui $z = e$, supondo que $x, y \in A_0$, $w \in A_{\frac{1}{2}}$ e usando as relações do lema 1, obtemos (14).

Reciprocamente, seja A uma álgebra tal que A_0 é uma subálgebra de Jordan e A satisfaz a condição (14). A idéia é provar que com as hipóteses do teorema a igualdade (13) é satisfeita por A . Vamos supor os elementos $a, b, c \in A_1$, $h, i, j, l \in A_{\frac{1}{2}}$ e $x, y \in A_0$.

Da identidade (11) do lema 2 segue que A_1 é uma álgebra de Jordan. Assim, vamos analizar quatro casos:

I. O caso em que os elementos pertencem todos ao subespaço $A_{\frac{1}{2}}$.

De (5), (10) e (7) temos que:

$$\begin{aligned} & hi \cdot [jl]_1 + hj \cdot [il]_1 + hl \cdot [ij]_1 \\ &= [h[jl]_1 \cdot i + i[jl]_1 \cdot h]_1 + [h[il]_1 \cdot j + j[il]_1 \cdot h]_1 + [h[ij]_1 \cdot l + l[ij]_1 \cdot h]_1 \\ &= [h[jl]_1 \cdot i + i[jl]_0 \cdot h]_1 + [h[il]_1 \cdot j + j[il]_0 \cdot h]_1 + [h[ij]_1 \cdot l + l[ij]_0 \cdot h]_1 \\ &= [h[jl]_1 \cdot i + h[jl]_0 \cdot i]_1 + [h[il]_1 \cdot j + h[il]_0 \cdot j]_1 + [h[ij]_1 \cdot l + h[ij]_0 \cdot l]_1 \\ &= [(h \cdot jl)i + (h \cdot il)j + (h \cdot ij)l]_1. \end{aligned}$$

Analogamente pela simetria das igualdades (7) e (8) temos que

$$hi \cdot [jl]_0 + hj \cdot [il]_0 + hl \cdot [ij]_0 = [(h \cdot jl)i + (h \cdot il)j + (h \cdot ij)l]_0$$

de onde

$$H(h; i, j, l) = K(h, i, j, l), \quad (\forall h, i, j, l \in A_{\frac{1}{2}}).$$

II. O caso que envolve somente elementos de A_1 e $A_{\frac{1}{2}}$.

Usando (4) temos que

$$\begin{aligned} K(h, a, b, c) &= ha \cdot bc + hb \cdot ac + hc \cdot ab \\ &= (b \cdot ha)c + (c \cdot ah)b + (a \cdot hb)c + (c \cdot hb)a + (a \cdot hc)b + (b \cdot hc)a \\ &= (c \cdot hb + b \cdot hc)a + (c \cdot ha + a \cdot hc)b + (b \cdot ha + a \cdot hb)c \\ &= (h \cdot bc)a + (h \cdot ac)b + (h \cdot ab)c = H(h; a, b, c). \end{aligned}$$

Pela simetria do operador K nas quatro variáveis e a simetria de H nas últimas três variáveis, só falta estudar o caso $H(a; h, b, c)$.

Usando (4) novamente temos que

$$\begin{aligned} H(a; h, b, c) &= (a \cdot hb)c + (a \cdot bc)h + (a \cdot ch)b \\ &= (h \cdot ab - b \cdot ah)c + (a \cdot bc)h + (h \cdot ac)b - (c \cdot ah)b \\ &= (h \cdot ab)c + (h \cdot ac)b - (b \cdot ha)c - (c \cdot ah)b + (a \cdot bc)h \\ &= (h \cdot ab)c + (h \cdot ac)b - cb \cdot ha + ah \cdot bc + a(h \cdot bc) = H(h; a, b, c) \end{aligned}$$

e agora é claro que

$$H(a; h, b, c) = K(a, h, b, c).$$

Vejamos agora o caso que envolve dois elementos de $A_{\frac{1}{2}}$ e dois elementos em A_1 . Temos

$$K(i, j, a, b) = ij \cdot ab + ia \cdot jb + ib \cdot aj$$

$$\begin{aligned}
&= \{ij \cdot ab - [(b \cdot aj)i]_1 - [(a \cdot bj)i]_1 + [ib \cdot aj + ai \cdot jb]_0\} \\
&\quad + \{[ib \cdot ja]_1 + [(b \cdot aj)i]_1\} + \{[ia \cdot jb]_1 + [(a \cdot bj)i]_1\}.
\end{aligned}$$

Usando (8), (4) e (5) temos que

$$\begin{aligned}
&\{ij \cdot ab - [(b \cdot aj)i]_1 - [(a \cdot bj)i]_1 + [ib \cdot aj + ai \cdot jb]_0\} \\
&= ij \cdot ab - [(b \cdot aj)i + (a \cdot bj)i]_1 + [(b \cdot aj)i + (a \cdot bj)i]_0 \\
&= ij \cdot ab + [(j \cdot ab)i]_1 + [(j \cdot ab)i]_0 \\
&= [(i \cdot ab)j]_1 + [(j \cdot ab)i]_1 + [(j \cdot ab)i]_1 + [(i \cdot ab)j]_0 = (i \cdot ab)j.
\end{aligned}$$

Usando (4) temos

$$\{[ib \cdot aj]_1 + [(b \cdot aj)i]_1\} = (i \cdot aj)b$$

e

$$\{[ia \cdot bj]_1 + [(a \cdot bj)i]_1\} = (i \cdot bj)a.$$

Assim,

$$K(i, j, a, b) = H(i; j, a, b).$$

Usando agora (4), (5) e (8) mais o fato de que $A_0 A_1 = 0$ temos que

$$\begin{aligned}
H(i; j, a, b) &= (i \cdot ja)b + (i \cdot jb)a + (a \cdot ib)j + [(b \cdot ia)j]_1 + [(b \cdot ia)j]_0 \\
&= (i \cdot ja)b + (i \cdot jb)a + (a \cdot ib)j + [(a \cdot jb)i]_0 + (j \cdot ia)b - [bj \cdot ia]_1 \\
&= (i \cdot aj + j \cdot ai)b + (i \cdot jb)a + (a \cdot bi)j + [(a \cdot jb)i]_0 - [bj \cdot ia]_1 \\
&= [i \cdot aj + j \cdot ai]_0 b + [i \cdot aj + j \cdot ai]_1 b + (i \cdot jb)a + (a \cdot bi)j + [(a \cdot jb)i]_0 - [bj \cdot ia]_1 \\
&= (a \cdot ij)b + (a \cdot ib)j + (i \cdot jb)a + [(a \cdot jb)i]_0 - [bj \cdot ia]_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (a \cdot ij)b + (a \cdot ib)j + [ai \cdot jb]_1 + [(a \cdot jb)i]_1 + [(a \cdot jb)i]_0 - [bj \cdot ia]_1 \\
&= (a \cdot ij)b + (a \cdot ib)j + (a \cdot jb)i = H(a; i, j, b),
\end{aligned}$$

e logo

$$H(a; i, j, b) = K(a, i, j, b).$$

Para terminar este caso devemos ver o que sucede se temos um elemento em A_1 e três elementos em $A_{\frac{1}{2}}$. Temos que

$$\begin{aligned}
K(a, i, j, h) &= ai \cdot jh + aj \cdot hi + ah \cdot ij \\
&= ai \cdot [jh]_1 + ai \cdot [jh]_0 + aj \cdot [hi]_1 + aj \cdot [hi]_0 + ah \cdot [ij]_1 + ah \cdot [ij]_0.
\end{aligned}$$

Usando (9) temos que isto é igual a

$$ai \cdot [jh]_1 + [jh]_0 i \cdot a + aj \cdot [hi]_1 + [hi]_0 j \cdot a + ah \cdot [ij]_1 + [ij]_0 h \cdot a.$$

De (10), (4) e usando $A_0 A_1 = 0$ temos então que $K(a, i, j, h)$ é igual a

$$\begin{aligned}
&ai \cdot [jh]_1 + [jh]_1 i \cdot a + aj \cdot [hi]_1 + [hi]_1 j \cdot a + ah \cdot [ij]_1 + [ij]_1 h \cdot a \\
&= a[jh]_1 \cdot i + a[hi]_1 \cdot j + a[ij]_1 \cdot h \\
&= (a \cdot jh)i + (a \cdot ih)i + (a \cdot ij)h = H(a; i, j, h).
\end{aligned}$$

Portanto

$$K(a, i, j, h) = H(a; i, j, h).$$

Por outro lado vemos que

$$\begin{aligned}
H(i; a, j, h) &= (i \cdot aj)h + (i \cdot jh)a + (i \cdot ah)j \\
&= [i \cdot aj]_1 h + [i \cdot aj]_0 h + i[jh]_1 \cdot a + i[jh]_0 \cdot a + [i \cdot ah]_1 j + [i \cdot ah]_0 j
\end{aligned}$$

por (5), (8) e (9), isto é,

$$\begin{aligned} &= (a \cdot ij)h - [j \cdot ai]_1 h + [j \cdot ai]_0 h + ai \cdot [jh]_0 + i \cdot [jh]_1 a \\ &\quad - [jh]_1 \cdot ai + (a \cdot hi)j - [h \cdot ai]_1 j + [h \cdot ai]_0 j. \end{aligned}$$

De (10) temos que

$$[j \cdot ai]_0 h - [j \cdot ai]_1 h + [jh]_0 \cdot ai - [jh]_1 \cdot ai + [h \cdot ai]_0 j - [h \cdot ai]_1 j = 0,$$

e logo

$$\begin{aligned} H(i; a, j, h) &= (a \cdot ij)h + [jh]_1 a \cdot i + (a \cdot hi)j \\ &= (a \cdot ij)h + (a \cdot jh)i + (a \cdot hi)j = H(a; i, j, h). \end{aligned}$$

Logo

$$H(i; a, j, h) = K(i, a, j, h).$$

Com isto completamos este caso.

III. O caso que envolve elementos de A_1 e A_0 .

Como $A_0 A_1 = 0$, da hipótese $A_0^2 \subset A_0$ todos os produtos envolvendo elementos de A_0 e A_1 são nulos.

IV. O caso que envolve elementos de A_0 e $A_{\frac{1}{2}}$.

Para este caso observamos que $[A_0^2]_{\frac{1}{2}} = 0$ implica $[x \cdot ij]_{\frac{1}{2}} = 0$ e portanto $x \cdot ij = [x \cdot ij]_0$. Obtemos assim de (6) que

$$x \cdot ij = [xi \cdot j]_0 + [xj \cdot i]_0. \quad (15)$$

Assim, todas as identidades que envolvem elementos de A_0 e $A_{\frac{1}{2}}$ são semelhantes às identidades que envolvem elementos de A_1 e $A_{\frac{1}{2}}$. Portanto, este caso é análogo ao caso II.

V. Caso que envolve elementos de $A_1, A_{\frac{1}{2}}$ e A_0 .

Para isto consideremos primeiramente o caso em que dois elementos estão em A_1 , um elemento está em $A_{\frac{1}{2}}$ e um elemento está em A_0 . Usando $A_0 A_1 = 0$ e (9) temos que

$$\begin{aligned} K(h, x, a, b) &= hx \cdot ab + ha \cdot bx + hb \cdot ax = hx \cdot ab \\ &= (h \cdot ab)x = H(h; x, a, b). \end{aligned}$$

Usando (9) novamente temos que

$$K(h, x, a, b) = H(a; x, h, b) = H(x; h, a, b).$$

Vejamos agora o caso em que dois elementos pertencem a A_0 , um a A_1 e outro a $A_{\frac{1}{2}}$. Por um lado,

$$K(x, y, a, h) = xy \cdot ah + xa \cdot yh + ay \cdot xh = xy \cdot ah.$$

Por outro lado, usando (9) temos que

$$\begin{aligned} H(x; y, a, h) &= (x \cdot yh)a + (x \cdot ya)h + (x \cdot ah)y \\ &= (a \cdot yh)x + (x \cdot ah)y = (y \cdot ah)x + (x \cdot ah)y \end{aligned}$$

Disto, usando (14), temos que

$$H(x; y, a, h) = xy \cdot ah = K(x, y, a, h).$$

Sabemos também que

$$\begin{aligned} (a \cdot xy)h &= a[xy]_{\frac{1}{2}} \cdot h = [a[xy]_{\frac{1}{2}} \cdot h]_1 + [a[xy]_{\frac{1}{2}} \cdot h]_0 \\ &= a \cdot h[xy]_{\frac{1}{2}} - [ah \cdot [xy]_{\frac{1}{2}}]_1 + [ah \cdot [xy]_{\frac{1}{2}}]_0. \end{aligned}$$

De (12) e (14) temos que

$$h[xy]_{\frac{1}{2}} = ah \cdot [xy]_{\frac{1}{2}} = 0.$$

Assim, de (9)

$$(a \cdot xy)h = 0$$

e portanto

$$H(a; h, x, y) = (a \cdot xh)y + (a \cdot yh)x.$$

Assim, de (9) e (14) obtemos que

$$\begin{aligned} H(a; h, x, y) &= (x \cdot ah)y + (y \cdot ah)x \\ &= xy \cdot ah = H(x; y, a, h). \end{aligned}$$

Finalmente como $ah \cdot xy = ah \cdot [xy]_0$, temos que

$$H(h; a, x, y) = (h \cdot xy)a = h[xy]_0 \cdot a = ah \cdot [xy]_0 = ah \cdot xy.$$

Logo,

$$H(h; a, x, y) = H(x; y, a, h) = H(a; h, x, y).$$

Vejamos por último o caso em que dois elementos estão em $A_{\frac{1}{2}}$, um elemento está em A_0 e o outro em A_1 . Temos

$$\begin{aligned} K(i, j, a, x) &= ij \cdot ax + ai \cdot jx + ix \cdot aj \\ &= [ia \cdot jx]_0 + [ia \cdot jx]_1 + [ix \cdot aj]_0 + [ix \cdot aj]_1 \\ &= [(a \cdot jx)i]_0 + [ix \cdot ja]_0 + [ia \cdot jx]_1 + [(x \cdot aj)i]_1. \end{aligned}$$

Segue de (9), (15) e (5) que

$$K(i, j, a, x) = [(x \cdot aj)i]_0 + [ix \cdot aj]_0 + [ia \cdot jx]_1 + [(a \cdot xj)i]_1$$

$\neq A$. Da simplicidade de A , segue então que A_0 é isomorfa a uma subálgebra de E^+ . Assim, Do teorema 5 segue que A é de Jordan.

Seja A uma álgebra de Jordan (não necessariamente finita) sobre um corpo de característica zero. A satisfaz a identidade (1) e que contém um elemento não-trivial e tal que $\dim(A_1) = 1$. Então o

$$H = \{a \in A : a(A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0) = 0\}$$

$n = \alpha e + j_0 + x_0 \in H$. Só devemos provar que sejam $i \in A_{\frac{1}{2}}$, $x \in A_0$. Então:

$$) = (\alpha e + \frac{1}{2}j_0)(i + x) = \frac{\alpha}{2}i + \frac{1}{2}ij_0 + \frac{1}{2}j_0x.$$

$nx = 0$, temos que

$$\frac{\alpha}{2}i + ij_0 + ix_0 = 0$$

$$j_0x + x_0x = 0.$$

$A_{\frac{1}{2}}A_0 \subset A_{\frac{1}{2}}$ e $A_{\frac{1}{2}}^2 \subset A_1 \oplus A_0$, temos que

$$, = 0, xx_0 = 0 \text{ e } j_0x = 0 \quad (\forall i \in A_{\frac{1}{2}}, x \in A_0).$$

$$en \cdot (i + x) = \frac{\alpha}{2}i.$$

$$: H(i; j, a, x).$$

$$i \cdot jx)i$$

$$; a, i, j).$$

$$x \cdot ai]_1 + [(a \cdot xj)i]_1$$

$$j]_1 + [(a \cdot xj)i]_1$$

$$; i, j, x).$$

$$r)i = H(x; a, i, j).$$

os casos possíveis exceptuem ao subespaço

de Jordan que satisfaz suficiente considerar o linensão finita que é de

Se $\alpha = 0$ o resultado é imediato. Suponhamos então que $\alpha \neq 0$.

Como $\frac{\alpha}{2}i + ix_0 = 0$ temos que

$$\frac{\alpha}{2}ix_0 + ix_0 \cdot x_0 = 0.$$

Como $x_0^2 = 0$, de (14) segue que

$$2ix_0 \cdot x_0 = -ix_0^2 = 0.$$

Logo $ix_0 = 0$ e portanto $\frac{\alpha}{2}i = 0$. Segue que $\epsilon n \in H$, como queríamos provar.

3. Álgebras de Bernstein

No capítulo II mostramos que toda álgebra de Bernstein satisfaz a identidade (1). O seguinte teorema fornece condições necessárias e suficientes para que uma álgebra que satisfaz a identidade (1) seja de Bernstein. Para isto usaremos o teorema 1 do capítulo I.

Teorema 8. Seja A uma álgebra comutativa (não necessariamente de dimensão finita) sobre um corpo F de característica zero, que satisfaz a identidade (1) e contém um elemento idempotente não-trivial ϵ . Seja $A = A_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ a decomposição de Peirce relativa a ϵ . Então A é de Bernstein se e somente se $\dim A_1 = 1$, $A_{\frac{1}{2}}^2 \subset A_0$ e $A_0^2 \subset A_{\frac{1}{2}}$.

Prova. É claro que as condições são necessárias para que A seja uma álgebra de Bernstein. Para verificar que as condições são

suficientes a idéia é provar que A satisfaz as hipóteses do teorema 1 do capítulo I.

Como a dimensão de $A_1 = 1$, então $A_1 = Fe$. Definimos a forma linear $w : A \rightarrow F$ como $w(\lambda e + t) = \lambda$ para todo $\lambda \in F$ e $t \in A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$. Então w é um homomorfismo de álgebras e portanto (A, w) é uma álgebra ponderada.

Das hipóteses e do lema 1 temos que A satisfaz as relações (4) do capítulo I.

Sejam $h, i, j \in A_{\frac{1}{2}}$ e $x, y \in A_0$. Como $xi \cdot j + xj \cdot i \in A_0$ e $x \cdot ij \in A_{\frac{1}{2}}$, da identidade (6) temos que

$$xi \cdot j + xj \cdot i = [xi \cdot j + xj \cdot i]_0 = [x \cdot ij]_0 = 0,$$

assim

$$xi \cdot i = 0. \quad (16)$$

Como $x^2 \in A_{\frac{1}{2}}$, de (12) obtemos que

$$ix^2 = 0. \quad (17)$$

Como $A_{\frac{1}{2}}^2 \subset A_0$, uma consequência de (10) é

$$h \cdot ij + i \cdot hj + j \cdot hi = 0, \quad (18)$$

logo

$$i^3 = 0. \quad (19)$$

De (17), (18) e a hipótese $A_0^2 \subset A_{\frac{1}{2}}$, segue também que

$$i^2 x^2 = -2i \cdot ix^2 = 0. \quad (20)$$

Como $i^2 \in A_0$, usando (16) e (19) temos que

$$\begin{aligned} h(\epsilon; x, i, i, i, e) &= -i(i \cdot ix) + 2ix \cdot ei^2 - 2e(i^2 \cdot ix) \\ &+ 2i(\epsilon(i \cdot ix)) - i(x \cdot \epsilon i^2) + x \cdot \epsilon i^3 - 2(ix)(\epsilon \cdot \epsilon i^2) \\ &+ 2\epsilon(\epsilon(i^2 \cdot ix)) = -\frac{1}{2}i^2 \cdot ix. \end{aligned}$$

Logo

$$i^2 \cdot ix = 0. \quad (21)$$

Agora vemos que

$$\begin{aligned} h(e; i, i, i, i, i, e) &= 2i^2 \cdot ei^2 - e \cdot i^2 i^2 + 2i \cdot ei^3 \\ &- 2i(i \cdot ei^2) - 2i^2(e \cdot ei^2) + e(e \cdot i^2 i^2) = -\frac{1}{4}i^2 i^2, \end{aligned}$$

Isto é,

$$i^2 i^2 = 0. \quad (22)$$

Também temos que

$$\begin{aligned} h(e; x, x, x, x, x, e) &= 2x^2 \cdot ex^2 - e \cdot x^2 x^2 - 2x^2(e \cdot ex^2) \\ &+ e(e \cdot x^2 x^2) = \frac{1}{2}x^2 x^2, \end{aligned}$$

Isto é,

$$x^2 x^2 = 0. \quad (23)$$

Usando agora (16), (17) e (20) temos que

$$\begin{aligned} h(i; i, x, x, \epsilon, \epsilon) &= -2(ix)^2 + 2x(i \cdot ix) - 2i^2 \cdot ex^2 \\ &+ 2\epsilon \cdot i^2 x^2 + 4e(ix)^2 - 4e(x(i \cdot ix)) - 2i \cdot ex^2 + 2i(i \cdot ex^2) \\ &= -2(ix)^2, \end{aligned}$$

logo

$$(ix)^2 = 0. \quad (24)$$

Assim, se $t = i + x$ então de (17), (20), (21), (22), (23) e (24) temos

$$t^2 t^2 = i^2 i^2 + 4(ix)^2 + x^2 x^2 + 4i^2 \cdot ix + 2i^2 x^2 + 4ix \cdot x^2 = 0,$$

isto é,

$$t^2 t^2 = 0 \quad (\forall t \in A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0). \quad (25)$$

As relações (16) a (25) preenchem as condições do teorema 1 do capítulo I, e portanto A é uma álgebra de Bernstein.

Exemplo 2. Consideremos a álgebra comutativa A com base $\{e, u, z\}$ e multiplicação dada por $e^2 = e$, $eu = \frac{1}{2}u$, $z^2 = z$, $ez = uz = u^2 = 0$. Esta álgebra satisfaz as identidades $(x^2 x^2, y, x) = 0$ e $(x^2, y, x) = 0$, logo, satisfaz a identidade (1). Assim, é de Jordan mas não é de Bernstein pois $0 \neq A_0^2 \subset A_0$.

4. A identidade

$$(x, yx^2, x^2) - (x, yx \cdot x, x^2) - 2(x^3, xy, x) + 2(x^2, xy, x)x = 0$$

Seja A uma álgebra comutativa (não necessariamente de di-

mensão finita) sobre um corpo F de característica zero e que satisfaçõa a identidade

$$(x, yx^2, x^2) - (x, yx \cdot x, x^2) - 2(x^3, xy, x) + 2(x^2, xy, x)x = 0. \quad (26)$$

Linearizando esta identidade obtemos

$$\begin{aligned} & (z, yx^2, x^2) + 2(x, xz \cdot y, x^2) + 2(x, yx^2, xz) - (z, yx \cdot x, x^2) \\ & - (x, yz \cdot x, x^2) - (x, xy \cdot z, x^2) - 2(x, yx \cdot x, xz) - 4(xz \cdot x, xy, x) \\ & - 2(x^2 z, xy, x) - 2(x^3, yz, x) - 2(x^3, xy, z) + 4(xz, xy, x)x \\ & + 2(x^2, yz, x)x + 2(x^2, xy, z)x + 2(x^2, xy, x)z = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Suponhamos que A contém um elemento idempotente não-trivial e . Se fazemos $y = x = e$ em (27) obtemos que o operador L_e satisfaz a equação

$$L_e(L_e - I)(L_e - \frac{1}{2}I) = 0.$$

Temos então que A decompõe-se em subespaços como

$$A = A_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0.$$

Lema 9. Os espaços A_λ verificam as seguintes relações:

$$\begin{aligned} A_1^2 &\subset A_1, \quad A_{\frac{1}{2}}^2 \subset A_1 \oplus A_0, \quad A_1 A_{\frac{1}{2}} \subset A_{\frac{1}{2}}, \\ A_1 A_0 &= 0, \quad A_{\frac{1}{2}} A_0 \subset A_{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Prova. A prova deste lema é análoga à prova do lema 1.

Observação. O seguinte exemplo mostra que existem álgebras que satisfazem a identidade (26) e tais que $0 \neq A_0^2 \subset A_1$. Além disso, o exemplo mostra que as identidades (1) e (26) não são equivalentes.

Exemplo 3. Consideremos a álgebra com base $\{e, z\}$ e multiplicação dada por $e^2 = e$, $z^2 = e$, $ez = 0$. Esta álgebra satisfaz a identidade (26) mas não satisfaz a identidade (1).

Observação. As relações envolvendo produtos de elementos dos subespaços A_λ são as mesmas que obtivemos no lema 2 para a identidade 1, e a técnica para obter estas relações é a mesma empregada na prova do lema 2. Portanto, a prova do lema que segue será apresentada de maneira resumida.

Denotaremos por $g(y; x, z, u, w, v)$ a linearização completa da identidade (26).

Lema 10. Se $a, b \in A_1$, $h, i, j \in A_{\frac{1}{2}}$, $x, y, z \in A_0$ então:

$$h \cdot ab = ha \cdot b + hb \cdot a, \quad (28)$$

$$a \cdot ij = [i \cdot aj]_1 + [j \cdot ai]_1, \quad (29)$$

$$[x \cdot ij]_0 = [xi \cdot j]_0 + [xj \cdot i]_0, \quad (30)$$

$$[j \cdot ix]_1 = [i \cdot jx]_1, \quad (31)$$

$$[i \cdot aj]_0 = [j \cdot ai]_0, \quad (32)$$

$$a \cdot hx = ah \cdot x, \quad (33)$$

$$h[ij]_0 + i[hj]_0 + j[hi]_0 = h[ij]_1 + i[hj]_1 + j[hi]_1, \quad (34)$$

$$a^2 \cdot ba = a^2 b \cdot a. \quad (35)$$

$$i[x y]_{\frac{1}{2}} = 0. \quad (36)$$

Prova. Usando as relações obtidas no lema 9 temos que

$$g(a; h, b, e, \epsilon, \epsilon) = 18bh \cdot a + 18ah \cdot b - 18h \cdot ab,$$

de onde obtemos (28). Para obter (29) e (32) calculamos $g(j; a, i, e, e, e)$ para obter

$$\begin{aligned} & \frac{15}{2}a \cdot ij - \frac{15}{2}i \cdot aj - \frac{15}{2}j \cdot ai + 27a(\epsilon \cdot ij) - 33\epsilon(a \cdot ij) + 6\epsilon(i \cdot aj) \\ & - 33\epsilon(j \cdot ai) - 6a(\epsilon(e \cdot ij)) - 6\epsilon(a(e \cdot ij)) + 12\epsilon(e(a \cdot ij)) + 12\epsilon(e(j \cdot ai)) = 0. \end{aligned}$$

Das relações do lema 9 obtemos que isto é igual a

$$\begin{aligned} & \frac{15}{2}a \cdot ij - \frac{15}{2}[i \cdot aj]_1 - \frac{15}{2}[i \cdot aj]_0 + \frac{15}{2}[j \cdot ai]_1 + 27a[ij]_1 - 33a[ij]_1 \\ & + 6[i \cdot aj]_1 - 33[j \cdot ai]_1 - 12[a \cdot ij]_1 + 12[a \cdot ij]_1 + 12[j \cdot ai]_1 = 0. \end{aligned}$$

Disto seguem as relações

$$\frac{9}{2}a \cdot ij - \frac{9}{2}[i \cdot aj]_0 - \frac{9}{2}[j \cdot ai]_0 = 0$$

e

$$\frac{15}{2}[i \cdot aj]_0 = \frac{15}{2}[j \cdot ai]_0.$$

Para obter (30) e (31) calculamos

$$g(e; h, x, i, \epsilon, \epsilon) = 3h \cdot ix + 3j \cdot hx - 3x \cdot hi + e(h \cdot ix) + e(i \cdot hx)$$

$$\begin{aligned}
& +10e(x \cdot hi) - 14x(e \cdot hi) - 4e(e(h \cdot ix)) - 4e(e(i \cdot hx)) - 8e(e(x \cdot hi)) \\
& +12e(x(e \cdot hi)) - 4x(e(e \cdot hi)) + 3h \cdot ix + 3i \cdot hx - 3x \cdot hi \\
& +[h \cdot ix]_1 + [i \cdot hx]_1 + 10e(x \cdot hi) - 4[h \cdot ix]_1 - 4[i \cdot hx]_1 \\
& -8e(e(x \cdot hi)) + 3[h \cdot ix]_0 + 3[i \cdot hx]_0 - 3[x \cdot hi]_0 - 3[x \cdot hi]_{\frac{1}{2}} \\
& -3[x \cdot hi]_1 + 10[x \cdot hi]_1 + 5[x \cdot hi]_{\frac{1}{2}} - 2[x \cdot hi]_{\frac{1}{2}} - 8[x \cdot hi]_1 = 0.
\end{aligned}$$

Disto segue $[h \cdot ix]_1 = 0$ e obtemos assim as igualdades (30) e (31).

Da mesma maneira obtemos (33) calculando $g(h; a, x, e, e, e)$, (34) calculando $g(e; i, j, k, e, e)$, (35) calculando $g(b; a, a, a, e, e)$ e (36) calculando $g(e; x, y, h, e, e)$.

Para terminar esta seção enunciaremos dois teoremas:

Teorema 11. Seja A uma álgebra comutativa (não necessariamente de dimensão finita) sobre um corpo F de característica zero, que satisfaz a identidade (26) e contém um elemento idempotente não-trivial e . Seja $A = A_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ a decomposição de Peirce relativa a e . Então A é uma álgebra de Jordan se e somente se $A_0^2 \subset A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$, A_0 é uma subálgebra de Jordan e

$$j \cdot xy = jx \cdot y + jy \cdot x \quad (\forall x, y \in A_0, j \in A_{\frac{1}{2}}). \quad (14)$$

Teorema 12. Seja A uma álgebra comutativa (não necessariamente de dimensão finita) sobre um corpo F de característica zero que satisfaz a identidade (26) e contém um elemento idempotente não trivial e . Seja $A = A_1 \oplus A_{\frac{1}{2}} \oplus A_0$ a decomposição

de Peirce relativa a ϵ . Então A é de Bernstein se e somente se $\dim A_1 = 1$, $A_{\frac{1}{2}}^2 \subset A_0$ e $A_0^2 \subset A_{\frac{1}{2}}$.

Observação. A prova destes dois teoremas é essencialmente a mesma dos teoremas 5 e 8.

As álgebras dos exemplos 1, 2 e 3 satisfazem a identidade (26) mas não são álgebras de Bernstein.

Referências: [C-3], [O-3].

APÊNDICE

1. Diagramas de Young e tableaux standard. n=5

[] [] [] [] [] 1 2 3 4 5

[] [] [] [] 1 2 3 4 1 2 3 5 1 2 4 5 1 3 4 5
[] 5 4 3 2

[] [] [] 1 2 3 1 2 4 1 3 4 1 2 5 1 3 5
[] [] 4 5 3 5 2 5 3 4 2 4

[] [] [] 1 2 3 1 2 4 1 3 4 1 2 5 1 3 5
[] 4 3 2 3 2
[] 5 5 5 4 4

1 4 5
2
3

1. Diagramas de Young e tableaux standard. n=5 (continuação)

[]	[]	1	2	1	3	1	2	1	3	1	4
[]	[]	3	4	2	4	3	5	2	5	2	5
[]		5		5		4		4		3	

[]	[]	1	2	1	3	1	4	1	5
[]		3		2		2		2	
[]		4		4		3		3	
[]		5		5		5		4	

[]	1
[]	2
[]	3
[]	4
[]	5

2. Diagramas de Young e tableaux standard. n=6

[] [] [] [] [] [] 1 2 3 4 5 6

[] [] [] [] [] 1 2 3 4 5 1 2 3 4 6 1 2 3 5 6
[] 6 5 4

1 2 4 5 6 1 3 4 5 6
3 2

[] [] [] [] 1 2 3 4 1 2 3 5 1 2 4 5 1 3 4 5
[] [] 5 6 4 6 3 6 2 6

1 2 3 6 1 2 4 6 1 3 4 6 1 2 5 6 1 3 5 6
4 5 3 5 2 5 3 4 2 4

[] [] [] [] 1 2 3 4 1 2 3 5
[] 5 4
[] 6 6

1 2 4 5 1 3 4 5 1 2 3 6 1 2 4 6
3 2 4 3
6 6 5 5

2. Diagramas de Young e tableaux standard. n=6 (continuação)

1	3	4	6	1	2	5	6	1	3	5	6	1	4	5	6
2				3				2				2			
5				4				4				3			

[]	[]	[]	1	2	3	1	2	4	1	3	4
[]	[]	[]	4	5	6	3	5	6	2	5	6
			1	2	5	1	3	5			
			3	4	6	2	4	6			

[]	[]	[]	1	2	3	1	2	4	1	3	4	1	2	5
[]	[]		4	5		3	5		2	5		3	4	
[]			6			6			6			6		
			1	3	5	1	2	3	1	2	4	1	3	4
			2	4		4	6		3	6		2	6	
			6			5			5			5		
			1	2	5	1	3	5	1	4	5	1	2	6
			3	6		2	6		2	6		3	4	
			4			4			3			5		
			1	3	6	1	2	6	1	3	6	1	4	6
			2	4		3	5		2	5		2	5	
			5			4			4			3		

2. Diagramas de Young e tableaux standard. n=6 (continuação)

[]	[]	[]	1	2	3	1	2	4	1	3	4	1	2	5	1	3	5	1	4	5
[]				4		3			2			3			2			2		
[]					5		5			5			4			4			3	
[]						6		6			6			6			6			6

1	2	6	1	3	6	1	4	6	1	5	6
3			2			2			2		
4			4			3			3		
5			5			5			4		

[]	[]	1	2	1	3	1	2	1	3	1	4
[]	[]	3	4	2	4	3	5	2	5	2	5
[]	[]	5	6	5	6	4	6	4	6	3	6

[]	[]	1	2	1	3	1	2	1	3	1	4	1	2
[]	[]	3	4	2	4	3	5	2	5	2	5	3	6
[]		5		5		4		4		3		4	
[]		6		6		6		6		6		5	

1	3	1	4	1	5
2	6	2	6	2	6
4		3		3	
5		5		4	

2. Diagramas de Young e tableaux standard. n=6 (continuação)

[]	[]	1	2	1	3	1	4	1	5	1	6
[]		3		2		2		2		2	
[]		4		4		3		3		3	
[]		5		5		5		4		4	
[]		6		6		6		6		5	

[]	1
[]	2
[]	3
[]	4
[]	5
[]	6

3. Representação de S_5

$(12) \mapsto$

$$[1] \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\oplus \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \oplus [-1]$$

$(23451) \mapsto$

$$[1] \oplus \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} [-1]$$

4. Representação de S_6

$(12) \rightarrow$

$$\begin{aligned}
 & [1] \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
 & \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

4. Representação de S_6 (continuação)

$(234561) \rightarrow$

$$\begin{aligned}
 & [1] \oplus \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \oplus \left[\begin{array}{ccccccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\
 & \oplus \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \oplus \left[\begin{array}{ccccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] \\
 & \oplus \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

4. Representação de S_6 (continuação)

$$\begin{aligned}
 & \oplus \left[\begin{array}{cccccccccc} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \oplus \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \\
 & \oplus \left[\begin{array}{cccccc} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \oplus \left[\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \oplus [-1]
 \end{aligned}$$

5. Forma escalonada das matrizes para o caso excepcional, grau quatro

Rep. 1, excepcional, comutativa, grau 4

Rep. 2, excepcional, comutativa, grau 4

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

Rep. 3, excepcional, comutativa, grau 4

$$\left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right|$$

Rep. 4, excepcional, comutativa, grau 4

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

Rep. 5, excepcional, comutativa, grau 4

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

Rep. 1, excepcional, todas as identidades, grau 4

1-1

Rep. 2, excepcional, todas as identidades, grau 4

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

Rep. 3, excepcional, todas as identidades, grau 4

$$\left| \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right|$$

Rep. 4, excepcional, todas as identidades, grau 4

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

Rep. 5, excepcional, todas as identidades, grau 4

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

6-a) Identidades de grau cinco no caso excepcional

1 1 abcde 1	11 5 abcde 1
1 1 acbde -1	11 5 abced -1
2 1 abcde 1	12 4 abcde 2
2 1 adebc -1	12 4 adcbe 2
3 2 abcde 1	12 2 abcde -1
3 2 bacde -1	12 2 adcbe -1
4 2 abcde 1	12 2 cbade -1
4 2 abdce -1	12 2 cdabe -1
5 3 abcde 1	13 1 eabcd 2
5 3 bacde -1	13 1 eadcb 2
6 3 abcde 1	13 3 eabcd -1
6 3 acbde -1	13 3 eadcb -1
7 3 abcde 1	13 3 ecbad -1
7 3 abced -1	13 3 ecdab -1
8 4 abcde 1	14 5 aebcd 2
8 4 bacde -1	14 5 aedcb 2
9 4 abcde 1	14 3 aebcd -1
9 4 cdabe -1	14 3 aedcb -1
10 5 abcde 1	14 2 cbaed -1
10 5 bacde -1	14 2 cdaeb -1

6-b) Forma escalonada das matrizes para o caso excepcional, grau cinco

Rep. 2, excepcional comutativa, grau 5

Rep. 3, excepcional comutativa, grau 5

1	0	0	0	-2		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0
0	1	0	0	1		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0
0	0	1	0	1		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0
0	0	0	1	1		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0
0	0	0	0	0		1	0	0	-1	-2		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0
0	0	0	0	0		0	1	0	-1	-2		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0
0	0	0	0	0		0	0	1	1	2		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		1	0	0	0	50		0	0	0	0	0
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	1	0	0	52		0	0	0	0	0
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	1	0	52		0	0	0	0	0
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	152		0	0	0	0	0
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		1	0	0	0	0
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	1	0	0	0
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	1	0	0
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	1	2
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	1
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	1	0	1	0
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	1	1

Rep. 4, excepcional comutativa, grau 5

6.b) Forma escalonada das matrizes para o caso excepcional, grau cinco (continuação)

Rep. 5, excepcional comutativa, grau 5

1 0 0 -1 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 1 0 -1 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 1 -1 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 1	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	1 0 0 0 070	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 1 0 068	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 1 068	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 169	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	1 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 1 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 1 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 1	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	1 0 0 0 070	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 1 0 0 068	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 1 0 068	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 169	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	1 0 0 2 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 1 0 -1 0	0 0 1 2 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 1

Rep. 6, excepcional comutativa, grau 5

1 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 1 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 1 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 1	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	1 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 1 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 1 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 1	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	1 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 1 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 1 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 1	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	1 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 1 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 1 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 1	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	1 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 1 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 1 0	0 0 0 1

Rep. 7 excepcional comutativa, grau 5

```

1 0 0 0 0
0 1 0 0 0
0 0 1 0 0
0 0 0 1 0
0 0 0 0 1

```

Rep. 1, excepcional todas as identidades

```

1 0 0 1 -2
0 1 0 -1 0
0 0 1 1 -2

```

6.b) Forma escalonada das matrizes para o caso excepcional, grau cinco (continuação)

Rep. 2, excepcional todas as identidades

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	52	0	
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	52	0	
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	52	0	
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	52	0	
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	4	0	0	2	-2	
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	4	0	0	2	-2	
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	97	0	0	-2	2	
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	6	0	0	3	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	6	0	0	3	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	2	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	99	0	0	-2	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	99	0	0	-2	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	-1	0	0	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	052	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	152	1

Rep. 3, excepcional todas as identidades

Rep. 4, excepcional todas as identidades

Rep. 5, excepcional todas as identidades

Rep. 6, excepcional todas as identidades

Rep. 7, excepcional todas as identidades

1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	1

7-a) Identidades de grau quatro no caso nuclear

1	1	abcd	1		7	3	cbda	2
1	1	acbd	-1		7	3	cbad	2
2	3	abcd	1		7	3	dbca	2
2	3	bacd	-1		7	3	abcd	2
3	4	abcd	1		7	3	dbac	2
3	4	bacd	-1		7	3	abdc	2
4	4	abcd	1		7	3	dcba	2
4	4	cdab	-1		7	3	acbd	2
5	2	abcd	1		7	3	adbc	2
5	2	bacd	-1		7	3	dcab	2
6	2	abcd	1		7	3	acdb	2
6	2	abdc	-1		7	3	adcb	2
7	1	adcb	-3		7	4	dcab	4
7	1	dacb	-3		7	4	acdb	4
7	1	cadb	-3		7	4	adcb	4
7	1	adbc	-3		8	4	cbad	2
7	1	dabc	-3		8	4	dbac	2
7	1	acbd	-3		8	4	abdc	2
7	1	dcba	-3		8	2	cbad	-1
7	1	cabd	-3		8	2	dbac	-1
7	1	cdba	-3		8	2	abdc	-1
7	1	bdac	-3		8	2	dcab	-1
7	1	bacd	-3		8	2	acdb	-1
7	1	bdca	-3		8	2	adcb	-1

7-b) Forma escalonada das matrizes para o caso nuclear,
grau quatro

Rep. 2, nuclear, comutativa, grau 4

$$\left| \begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

Rep. 3, nuclear, comutativa, grau 4

$$\left| \begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

Rep. 4, nuclear, comutativa, grau 4

$$\left| \begin{array}{cc|cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right|$$

Rep. 5, nuclear, comutativa, grau 4

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Rep. 1, nuclear, todas as identidades, grau 4

1 06834
0 1 0-1

Rep. 2, nuclear, todas as identidades, grau 4

0	1-1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Rep. 3, nuclear, todas as identidades, grau 4

1-1	0	0	0	0	0
0	0	1	2	0	0
0	0	0	0	1	2
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	2

Rep. 4, nuclear, todas as identidades, grau 4

1-1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0

Rep. 5, nuclear, todas as identidades, grau 4

1 0 0 0
0 1 0 0
0 0 1 0
0 0 0 1

8-a) Identidades de grau cinco no caso nuclear

1	1	abcde	1	15	2	eacbd	-3	17	3	bacde	-3
1	1	acbde	-1	15	2	edabc	-3	17	3	cabde	-3
2	2	abcde	1	15	2	eadbc	-3	17	3	acbde	-3
2	2	abdce	-1	15	2	ecadb	-3	17	5	debca	2
3	2	abcde	1	15	2	edacb	-3	17	5	debac	2
3	2	bacde	-1	15	2	eadcb	-3	17	5	decba	2
4	3	abcde	1	15	3	edcab	4	17	5	deabc	2
4	3	adebc	-1	15	3	eacdb	4	17	5	decab	2
5	3	abcde	1	15	3	eadcb	4	17	5	deacb	2
5	3	acbde	-1	16	1	bdcae	-3	17	6	cbade	2
6	5	abcde	1	16	1	bacde	-3	17	6	abcde	2
6	5	bacde	-1	16	1	bdace	-3	17	6	acbde	2
7	6	abcde	1	16	1	cdbae	-3	17	6	decab	4
7	6	bacde	-1	16	1	cabde	-3	17	6	debac	4
8	6	abcde	1	16	1	dcbae	-3	17	6	deacb	4
8	6	abcd	-1	16	1	acbde	-3	17	7	cbeda	2
9	7	abcde	1	16	1	dabce	-3	17	7	abdec	2
9	7	bacde	-1	16	1	adbce	-3	17	7	acdeb	2
10	7	abcde	1	16	1	cadbe	-3	18	2	cbade	-1
10	7	cdabe	-1	15	1	dacbe	-3	18	2	dbace	-1
11	7	abcde	1	16	1	adcbe	-3	18	2	abdce	-1
11	7	abdce	-1	16	7	dcabe	4	18	2	dcabe	-1
12	4	abcde	1	16	7	acdbe	4	18	2	acdbe	-1
12	4	abcd	-1	16	7	adcbe	4	18	2	adcbe	-1
13	4	abcde	1	16	5	cbdae	2	18	7	cbade	2
13	4	acbde	-1	16	5	cbade	2	18	7	dbace	2
14	4	abcde	1	16	5	dbcae	2	18	7	abdce	2
14	4	bacde	-1	16	5	abcde	2	19	3	ecbad	2
15	1	ecbda	2	16	5	dbace	2	19	3	edbac	2
15	1	ecbad	2	16	5	abdce	2	19	3	eabdc	2
15	1	edbca	2	16	5	dcbae	2	19	4	ecbad	-1
15	1	eabcd	2	16	5	acbde	2	19	4	edbac	-1
15	1	edbac	2	16	5	adbce	2	19	4	eabdc	-1
15	1	eabdc	2	16	5	dcabe	2	19	4	edcab	-1
15	1	edcba	2	16	5	acdbe	2	19	4	eacdb	-1
15	1	eacbd	2	16	5	adcbe	2	19	4	eadcb	-1
15	1	eadbc	2	17	1	bdeca	-3	20	2	cbdea	-1
15	1	edcab	2	17	1	bdeac	-3	20	2	abdec	-1
15	1	eacdb	2	17	1	cdeba	-3	20	2	acdeb	-1
15	1	eadcb	2	17	1	adebc	-3	20	6	deacb	2
15	2	ebdca	-3	17	1	cdeab	-3	20	6	debac	2
15	2	ebacd	-3	17	1	adecb	-3	20	6	decab	2
15	2	ebdac	-3	17	2	decba	-3	20	4	debac	-1
15	2	ecdba	-3	17	2	deabc	-3	20	4	decab	-1
15	2	ecabd	-3	17	2	deacb	-3	20	4	deacb	-1
15	2	edcba	-3								

8-b) Forma escalonada das matrizes para o caso nuclear,
grau cinco

Rep. 2, nuclear, comutativa, grau 5

Rep. 3, nuclear, comutativa, grau 5

Rep. 4, nuclear, comutativa, grau 5

Rep. 5, nuclear, comutativa, grau 5

Rep. 6. nuclear, comutativa, grau 5

Rep. 7, nuclear, comutativa, grau 5

```

1 0 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 1 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 1 0
0 0 0 0 0 0 1
0 0 0 0 0 0 1

```

Rep. 1, nuclear, todas as identidades, grau 5

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0-1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}$$

Rep. 2, nuclear, todas as identidades, grau 5

Rep. 3, nuclear, todas as identidades, grau 5

Rep. 4, nuclear, todas as identidades, grau 5

Rep. 5, nuclear, todas as identidades, grau 5

Rep. 6, nuclear, todas as identidades, grau 5

Rep. 7, nuclear, todas as identidades, grau 5

```

1 0 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 1 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 1 0
0 0 0 0 0 0 1

```

9-a) Identidades de grau cinco em álgebras de Bernstein

1	4	abcde	2		3	3	adebc	-1
1	4	acbde	2		3	3	bcead	-1
1	4	adbce	2		4	1	abcde	1
1	2	abcde	-1		4	1	acbde	-1
1	2	cdabe	-1		5	1	abcde	1
1	2	acbde	-1		5	1	adebc	-1
1	2	bdace	-1		6	2	abcde	1
1	2	adbce	-1		6	2	bacde	-1
1	2	bcade	-1		7	2	abcde	1
2	5	decab	2		7	2	abdce	-1
2	5	debac	2		8	3	abcde	1
2	5	deabc	2		8	3	bacde	-1
2	2	abdec	-1		9	3	abcde	1
2	3	cdeab	-1		9	3	acbde	-1
2	2	acdeb	-1		10	3	abcde	1
2	3	bdeac	-1		10	3	abcd	-1
2	3	adebc	-1		11	4	abcde	1
2	2	bcdea	-1		11	4	bacde	-1
3	1	eabcd	2		12	4	abcde	1
3	1	eacbd	2		12	4	cdabe	-1
3	1	eadbc	2		13	5	abcde	1
3	3	abecd	-1		13	5	bacde	-1
3	3	cdeab	-1		14	5	abcde	1
3	3	acebd	-1		14	5	abcd	-1
3	3	bdeac	-1					

9-b) Forma escalonada das matrizes para as álgebras de Bernstein, grau cinco

Rep. 2, Bernstein comutativa, grau 5

Rep. 3, Bernstein comutativa, grau 5

Rep. 4, Bernstein comutativa, grau 5

Rep. 5, Bernstein comutativa, grau 5

1 0 0 -1 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 1 0 -1 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 1 -1 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 1	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	1 0 0 0 070	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 1 0 0 068	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 1 0 068	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 1 169	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	1 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 1 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 1 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 1 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 1	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	1 0 0 0 070	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 1 0 0 068	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 1 0 068	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 169	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	1 0 0 0 20	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 1 0 -1 0	0 0 1 2 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 1

Rep. 6, Bernstein comutativa, grau 5

1 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 1 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 1 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 1	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	1 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 1 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 1 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 1	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	1 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 1 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 1 0	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 1	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	1 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 1 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 1 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 1	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	1 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 1 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 1 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 1

Rep. 7, Bernstein comutativa, grau 5

```

1 0 0 0 0
0 1 0 0 0
0 0 1 0 0
0 0 0 1 0
0 0 0 0 1

```

Rep. 1, Bernstein todas as identidades, grau 5

```

1 0 0 1-2
0 1 0 -1 0
0 0 1 1-2

```

Rep. 2, Bernstein todas as identidades, grau 5

1 0 0 0	0 0 0 0	0 0 026	0 0 0 0	0 0 0 0
0 1 0 0	0 0 0 0	0 0 026	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 1 0	0 0 0 0	0 0 026	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 1	0 0 0 0	0 0 026	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	1 0 0 0	0 0 0 01	0 0 0 4	0 0 0 0
0 0 0 0	0 1 0 0	0 0 0 1	0 0 0 0	0 0 0 -2
0 0 0 0	0 0 1 0	0 0 0 1	0 0 0 0	0 0 0 -2
0 0 0 0	0 0 0 1	0 0 0 -1	0 0 0 -2	0 0 0 2
0 0 0 0	0 0 0 0	1 0 0 53	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 1 0 53	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 1 -1	0 0 0 0	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 2 0	1 0 0 4	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 1 0 -1	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 1 -1	0 0 0 0
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	1 0 52 1
0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 1 52 1

Rep. 3, Bernstein todas as identidades, grau 5

Rep. 4, Bernstein todas as identidades, grau 5

Rep. 5, Bernstein todas as identidades, grau 5

1	0	0	-1	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0
0	1	0	-1	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0
0	0	1	-1	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0
0	0	0	0	1		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0
0	0	0	0	0		1	0	0	0	0		0	0	0	0	0
0	0	0	0	0		0	1	0	0	0		0	0	0	0	0
0	0	0	0	0		0	0	1	0	0		0	0	0	0	0
0	0	0	0	0		0	0	0	1	0		0	0	0	0	0
0	0	0	0	0		0	0	0	0	1		0	0	0	0	0
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		1	0	0	0	0
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	1	0	0	0
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	1	0	0
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	1	0
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	1

Rep. 6, Bernstein todas as identidades, grau 5

1 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 1 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 1 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 1 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 1	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	1 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 1 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 1 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 1 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 1	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	1 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 1 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 1 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 1 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 1	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	1 0 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 1 0 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 1 0 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 1 0	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 1	0 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	1 0 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 1 0 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 1 0 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 1 0
0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	0 0 0 0 1

Rep. 7, Bernstein todas as identidades, grau 5

1 0 0 0 0
0 1 0 0 0
0 0 1 0 0
0 0 0 1 0
0 0 0 0 1

10-a) Identidades de grau seis em álgebras de Bernstein

1	1	abcdef 1	22	9	abcdef 1	30	5	acedfb -1
1	1	acbdef -1	22	9	abcdfe -1	30	5	bdfcea -1
2	1	abcdef 1	23	10	abcdef 1	30	5	adfceb -1
2	1	adebcaf -1	23	10	bacdef -1	30	5	bcdfa -1
3	2	abcdef 1	24	10	abcdef 1	31	11	decabf 2
3	2	acbdef -1	24	10	defabc -1	31	11	debacf 2
4	2	abcdef 1	25	11	abcdef 1	31	11	deabcf 2
4	2	abcdfe -1	25	11	bacdef -1	31	3	abdecf -1
5	3	abcdef 1	26	11	abcdef 1	31	5	cdeabf -1
5	3	bacdef -1	26	11	abcedf -1	31	3	acdebf -1
6	3	abcdef 1	27	7	abcdef 2	31	5	bdeacf -1
6	3	abdcef -1	27	7	acbdef 2	31	5	adebcf -1
7	4	abcdef 1	27	7	adbcef 2	31	3	bcdeaf -1
7	4	bacdef -1	27	3	abcdef -1	32	4	efabcd 2
8	4	abcdef 1	27	3	cdabef -1	32	4	efacbd 2
8	4	abdcef -1	27	3	acbdef -1	32	4	efadbc 2
9	4	abcdef 1	27	3	bdacef -1	32	6	abefcd -1
9	4	abefcd -1	27	3	adbcef -1	32	6	cdefab -1
10	5	abcdef 1	27	3	bcadef -1	32	6	acefbd -1
10	5	bacdef -1	28	8	abcdef 2	32	6	bdefac -1
11	5	abcdef 1	28	8	acbdef 2	32	6	adefbc -1
11	5	acbdef -1	28	8	adbcef 2	32	6	bcefad -1
12	5	abcdef 1	28	4	abcdef -1	33	1	fabcde 2
12	5	abcdf -1	28	4	cdabef -1	33	1	facbde 2
13	6	abcdef 1	28	4	acbdef -1	33	1	fadbce 2
13	6	bacdef -1	28	4	bdacef -1	33	5	abfcde -1
14	6	abcdef 1	28	4	adbcef -1	33	5	cdfabe -1
14	6	bcdaef -1	28	4	bcadef -1	33	5	acfbde -1
15	6	abcdef 1	29	9	defcab 2	33	5	bdface -1
15	6	abcdfe -1	29	9	defbac 2	33	5	adfbce -1
16	7	abcdef 1	29	9	defabc 2	33	5	bcfade -1
16	7	bacdef -1	29	3	abdefc -1	34	2	fdecab 2
17	7	abcdef 1	29	6	cdefab -1	34	2	fdebac 2
17	7	cdabef -1	29	3	acdefb -1	34	2	fdeabc 2
18	8	abcdef 1	29	6	bdefac -1	34	5	abfdec -1
18	8	bacdef -1	29	6	adefbc -1	34	6	cdefab -1
19	8	abcdef 1	29	3	bcdefa -1	34	5	acfdeb -1
19	8	cdabef -1	30	8	cedfab 2	34	6	bdefac -1
20	8	abcdef 1	30	10	ceadfb 2	34	6	adefbc -1
20	8	abcdfe -1	30	10	dfaceb 2	34	5	bcfdea -1
21	9	abcdef 1	30	4	abcedf -1			
21	9	bacdef -1	30	6	cedfab -1			

10-b) Forma escalonada das matrizes para as álgebras de Bernstein, grau seis

Rep. 2, Bernstein, comutativa, grau 6

Rep. 3, Bernstein comutativa, grau 6

Rep. 4, Bernstein comutativa, grau 6

Rep. 5, Bernstein comutativa, grau 6

1	0	0	0	-2		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0
0	1	0	0	1		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0
0	0	1	0	1		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0
0	0	0	1	1		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0
0	0	0	0	0		1	0	0	1	-1		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0
0	0	0	0	0		0	1	0	1	1		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0
0	0	0	0	0		0	0	1	1	1		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		1	0	0	-1	-2		0	0	0	0	0
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	1	0	-1	-2		0	0	0	0	0
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	1	1	2		0	0	0	0	0
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		1	0	0	0	0
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	1	0	0	0
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	1	0
0	0	0	0	0		0	0	0	0	0		0	0	0	1	0		0	0	0	0	0

Rep. 6, Bernstein comutativa, grau 6

A large grid of black dots on a white background, divided into three vertical columns by thick black lines. The dots are arranged in a regular pattern, creating a sense of depth and perspective. The grid is composed of approximately 100 rows and 100 columns of dots.

Rep. 7, Bernstein comutativa, grau 6

Rep. 8, Bernstein, comutativa, grau 6

Rep. 9, Bernstein, comutativa, grau 6

Rep. 10, Bernstein, comutativa, grau 6

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Rep. 11, Bernstein comutativa, grau 6

```

1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1

```

Rep. 1, Bernstein todas as identidades, grau 6

```

1 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 0
0 1 0 0 0 0 0 0 -1 -1 1
0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 -2
0 0 0 1 0 0 0 0 -2 -1 2
0 0 0 0 1 0 0 0 0 -1 0
0 0 0 0 0 1 0 0 -2 -1 2
0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 -2
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 2

```

Rep. 2, Bernstein, todas as identidades, grau 6

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Rep. 3, Bernstein, todas as identidades, grau 6

Rep.4, Bernstein todas as identidades, grau 6

The image consists of a large grid of small black dots arranged in a regular pattern. The grid is divided into four equal quadrants by two thick, dark gray lines that intersect at the center of the grid. The top-left quadrant contains approximately 18 rows and 18 columns of dots. The top-right quadrant contains approximately 18 rows and 17 columns of dots. The bottom-left quadrant contains approximately 17 rows and 18 columns of dots. The bottom-right quadrant contains approximately 17 rows and 17 columns of dots. The dots are evenly spaced and form a continuous pattern across all four quadrants.

Rep. 5, Bernstein, todas as identidades, grau 6

Rep. 6, Bernstein todas as identidades, grau 6

A large grid of black dots on a white background, divided into three vertical columns by thick black lines. The dots are arranged in a regular pattern, creating a sense of depth and perspective. The grid spans the entire width of the image, with the central column being slightly taller than the two outer columns.

The image displays a 100x100 grid of binary digits, specifically zeros (0) and ones (1). The grid is divided into three vertical columns by thick black lines. The first column contains approximately 60 zeros and 40 ones. The second column contains approximately 50 zeros and 50 ones. The third column contains approximately 40 zeros and 60 ones. The digits are represented by small black circles on a white background.

Rep. 7, Bernstein todas as identidades, grau 6

Rep. 8, Bernstein, todas as identidades, grau 6

Rep. 9, Bernstein, todas as identidades, grau 6

Rep. 10, Bernstein, todas as identidades, grau 6

Rep. 11, Bernstein todas as identidades, grau 6

```

1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0

```

REFERÊNCIAS

- [A-1] V. M. Abraham, *Linearizing quadratic transformations in genetic algebras*, Proc. London Math. Soc. (3) 40:346-363 (1980).
- [A-2] M. T. Alcalde, R. Baeza, C. Burgueño, *Autour des algèbres de Bernstein*, Arch. Math. 53:134-140 (1989).
- [B-1] S. N. Bernstein, *Principe de stationarité et généralization de la loi de Mendel*, C. R. Acad. Sci. Paris 177:581-584 (1923).
- [B-2] H. Boerner, *Representations of groups with special considerations for the needs of modern physics*, North-Holland (1963).
- [C-1] J. M. Clifton, *A simplification of the computation of the natural representation of the symmetric group S_n* , Proc. Amer. Math. Soc. 83:248-250 (1981).
- [C-2] I. Correa, *Identities in Bernstein algebras*, por aparecer.
- [C-3] I. Correa, I. R. Hentzel, L. A. Peresi, *Minimal Identities of Bernstein algebras*, por aparecer.
- [C-4] R. Costa, *A note on Bernstein algebras*, Linear Alg. Appl. 112:195-205 (1989).
- [C-5] R. Costa, *Principal train algebras of rank 3 and dimension ≤ 5* . Proc. Edinburgh Math. Soc., 33:61-70 (1990).
- [G-1] M. Gerstenhaber, H. C. Myung, *On commutative power-associative nilalgebras of lower dimension*, Proc. Amer. Math. Soc. 48:29-32 (1975).
- [G-2] A. N. Grishkov, *On the genetic property of Bernstein algebras*, Sov. Math. Dokl. 35:489-492 (1987).
- [H-1] I. R. Hentzel, *Processing identities by groups representations*, Computers in nonassociative rings and algebras, R. E. Beck, B. Kolman (editors), Academic Press (1977).

- [H-2] I. R. Hentzel, L. A. Peresi, *Almost Jordan rings*, Proc. Amer. Math. Soc. 104:343-348 (1988).
- [H-3] I. R. Hentzel, L. A. Peresi, *Semiprime Bernstein algebras*, Arch. Math. 52:539-543 (1989).
- [H-4] I. R. Hentzel, L. A. Peresi, P. Holgate, *On kth order Bernstein algebras and stability at the k+1 generation in polyploids*, IMA J. Math. Appl. Med. Biol. 7:33-40 (1990).
-
- [H-5] I. R. Hentzel, L. A. Peresi, *Bernstein algebras given by symmetric bilinear forms*, Linear Alg. Appl. 145:213-219 (1991).
- [H-6] I. R. Hentzel, J. M. Piacentini Cattaneo, L. Carini, *Degree four identities not implied by commutativity*, Comm. Alg. 16:339-356 (1988).
- [H-7] I. R. Hentzel, D. P. Jacobs, L. A. Peresi, S. R. Sverchkov, *Solvability of the ideal of all weight zero elements in Bernstein algebras*, por aparecer.
- [H-8] P. Holgate, *Genetic algebras satisfying Bernstein stationarity principle*, J. London Math. Soc. (2) 9:613-623 (1975).
- [K] R. L. Kruse and D. T. Price, *Nilpotent rings*, Gordon and Breach, New York (1969).
- [L-1] Lyubich, Y.I., *Basic concepts and theorems of the evolutionary genetics of free populations*, Russian Math. Surveys, 26:51-123 (1971).
- [L-2] Lyubich, Y.I., *On the mathematical theory of heredity*, Sov. Math. Dokl., 14:579-581 (1973).
- [L-3] Lyubich, Y.I., *Analogues of the Hardy-Weinberg principle*, Genetika, 9:139-144 (1973).
- [L-4] Lyubich, Y.I., *Algebraic methods in evolutionary Genetics*, Biom. J., 20:511-529 (1978).
- [L-5] Lyubich, Y.I., *Two-Level Bernsteinian populations*, Math. USSR-Sb., 24:575-591 (1974).

- [L-6] Lyubich, Y. I., *A classification of nonexceptional Bernstein algebras of type (3,n-3)* (in Russian), Vestnik Harkov. 254, Meh. Mat. 84:36-42 (1984).
- [L-7] Lyubich, Y. I., *A classification of some types of Bernstein algebras*, Selecta Math. Sov. 6:1-14 (1987).
- [M] A. Micali, M. Ouattara, *Dupliquée d une algèbre et le théorème d Etherington*, Linear Alg. Appl. 153:193-207 (1991).
- [O-1] R. W. K. Odoni, A. E. Stratton, *Structure of Bernstein algebras*, *Algèbres Génétiques*, Cahiers Math. Montpellier, 38:117-125 (1989).
- [O-2] J. M. Osborn, *Identities of nonassociative algebras*, Canad. J. Math. 17:78-92 (1965).
- [O-3] J. M. Osborn, *Commutative algebras satisfying an identiy of degree four*, Proc. Amer. Math. Soc. 16:1114-1120 (1965).
- [O-4] J. M. Osborn, *Commutative nonassociative algebras and identities of degree four*, Canad. J. Math. 20:769-794 (1968).
- [O-5] J. M. Osborn, *Varieties of algebras*, Adv. Math. 8:163-369 (1970).
- [P-1] L. A. Peresi, *Álgebras comutativas satisfazendo uma identidade de grau quatro*, Tese de Livre-Docência, Universidade de São Paulo (1991).
- [P-2] L. A. Peresi, *Nilpotency in Bernstein algebras*, Arch. Math. 56:437-439 (1991).
- [R] D. Rutherford, *Substitutional analysis*, The Edinb. Univ. Press, Edinburgh (1948).
- [S] R. D. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras*, Academic Press (1966).
- [W-1] S. Walcher, *Bernstein algebras which are Jordan algebras*, Arch. Math. 50: 218-222 (1988).
- [W-2] A. Worz-Busekros, *Algebras in Genetics*, Lectures Notes in Biomath. 36, Springer-Verlag, New York (1980).

[Z] K. A. Zevlakov et al, *Rings that are nearly associative*, Academic Press (1982).
