CONEXÕES E O PROBLEMA DE EQUIVALÊNCIA EM VARIEDADES SUB-RIEMANNIANAS DE CODIMENSÃO UM

Juaci Picanço da Silva

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Geometria**
Orientador: **Prof. Dr. José Miguel Martins Veloso**

- São Paulo, setembro de 1994 -

CONEXÕES E O PROBLEMA DE EQUIVALÊNCIA EM VARIEDADES SUB-RIEMANNIANAS DE CODIMENSÃO UM

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e apresentada/defendida por Juaci Picanço da Silva e aprovada
pela Comissão Julgadora

São Paulo, 16 novembro de 1994

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. José Miguel Martins Veloso (Orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Elisha Falbel - IME-USP
- Prof. Dr. Alcibíades Rigas - IMECC-UNICAMP

Resumo

Estudamos o problema de equivalência entre duas variedades sub-riemannianas não degeneradas de codimensão 1, e algumas técnicas usadas para tal estudo, que são as formas de conexão no fibrado de referenciais e o método do referencial móvel de Cartan na geometria sub-riemanniana. Provamos um teorema de classificação para variedades sub-riemannianas com curvatura seccional constante e torção nula. Apresentamos três modelos nos quais a curvatura seccional é, no primeiro caso, positiva, no segundo, negativa e, no terceiro, nula.

Abstract

We study the equivalence problem between two non-degenerate sub-riemannian manifolds of codimension 1, and some techniques used for such study, namely the connection forms in the bundle of frames and the Cartan's method of moving frame in sub-riemannian geometry. We prove a classification theorem for sub-riemannian manifolds with constant sectional curvature and null torsion. We present three models in which the sectional curvature is positive in the first one, negative in the second and null in the third.

Agradecimentos

Agradeço ao Professor José Miguel Martins Veloso pela sugestão do tema, pela orientação, paciência e, sobretudo, pelo incentivo desde a graduação; aos Professores Elisha Falbel e J.A. Verderesi pela decisiva ajuda em várias dúvidas; aos Professores Plínio A.Q. Simões, Vera Carrara e Elza Gomide pela colaboração em vários momentos do programa de mestrado; ao Walter pelo trabalho de digitação. Finalmente, agradeço de modo especial à minha esposa Ana Lúcia, por seu grande apoio, paciência e dedicação.

À memória de meu pai

Índice

Introdução

Estudamos aqui as **variedades sub-riemannianas** de codimensão 1 não degeneradas (M, D, g). O nosso principal objetivo é estabelecer invariantes que nos permitam dizer quando existe um difeomorfismo f entre (M, D, g) e (M', D', g'), tal que $f_*D = D'$ e $f^*g' = g$. O difeomorfismo f é chamado de equivalência entre as variedades, e estas são ditas equivalentes. Neste sentido, provamos um teorema de classificação para variedades sub-riemanninas de codimensão 1, não degenerada com curvatura seccional constante e torção nula.

Desenvolvemos a teoria necessária para este estudo, constituída da noção de conexão em **fibrado de referenciais** e da construção de uma **derivada covariante** em (M, D, g).

No Capítulo 1, apresentamos o conceito de fibrado de referenciais B de uma variedade M e definimos uma **conexão** H neste fibrado; esta é uma distribuição em B com duas propriedades especiais. Introduzimos duas 1-formas θ e ω em B a valores em $\mathbb{R}^n$ e $gl(n, \mathbb{R})$, respectivamente. A forma θ é definida de uma maneira intrínseca e ω é determinada por H de forma única; mostramos também que uma tal ω determina H. As componentes de θ na base canônica do $\mathbb{R}^n$ são chamadas de **formas tautológicas** e ω é chamada de forma de conexão. Expressamos a diferencial covariante de θ e ω em função das próprias formas θ e ω, através de duas equações chamadas de **equações de estrutura**.

Mostramos que está associada à conexão H uma derivada covariante em M. Portanto para introduzir em M os conceitos de transporte paralelo, geodésica, torção e curvatura basta estar definida uma conexão no fibrado de referenciais de M. Em seguida calculamos a torção e a curvatura da derivada covariante de M determinada por H.

Após isto, é dada uma maneira de construir uma conexão em B a partir de uma dada derivada covariante sobre M.

No final do capítulo, apresentamos o conceito de G-**estrutura**.

No Capítulo 2, introduzimos a noção de variedades sub-riemannianas (M, D, g) e passamos a estudar aquelas de codimensão 1 que são não degeneradas. Construímos a G-estrutura dos referenciais que contém uma base ortonormal de D, segundo g, e após algumas reduções desta G-estrutura, conseguimos fixar uma 1-forma que pertence ao anulador de D e é tal que uma das formas tautólogicas é o pull back, pela projeção canônica, desta 1-forma, motivo pelo qual estas formas são denotadas pela mesma letra θ. Com a utilização de θ, provamos a existência de um campo ξ sobre M e não pertencente a D, chamado de campo transversal, que satisfaz $\theta(\xi) = 1$ e $i_\xi \mathrm{d}\theta = 0$. Utilizando ξ e a forma de conexão definimos uma derivada covariante em (M, D, g) por $\nabla\xi = 0$ e $\nabla X_i = \omega_i^j X_j$ onde (ξ, X_i) é um referencial pertencente à última redução da G-estrutura mencionada acima. A derivada covariante ∇ é chamada de **derivada covariante sub-riemanniana** e satisfaz $\nabla g = 0$ e $\nabla_U : \mathfrak{X}(D) \to \mathfrak{X}(D)$ para todo $U \in \mathfrak{X}(M)$ e, ao contrário da derivada covariante de Levi-Civita, sua torção não é nula. Estabelecemos, então, a relação entre derivada covariante sub-riemanniana e a derivada covariante de Levi-Civita. A partir daí é possível dar a noção de **curvatura seccional** de (M, D, g) e provar o teorema de classificação. Por fim, apresentamos exemplos que satisfazem as hipóteses deste teorema. São eles: a esfera $S^{2n+1}(r)$, que possui curvatura seccional positiva, a quádrica $Q^{2n+1}(r)$, que possui curvatura seccional negativa, e o grupo de Heisenberg H^{2n+1}, que tem curvatura seccional nula.

Expressões que aparecem com um índice repetido indicam uma soma correspondente a este índice, onde o símbolo de somatório é omitido e o índice varia de acordo com a conveniência. Assim,

$$x_r^i e_i$$

indica

$$\sum_i x_r^i e_i$$

para cada r fixo.

Sempre que não for feita a demonstração de que uma função, uma aplicação, uma curva ou um campo de vetores é de classe C^∞ é porque isto está sendo subentendido.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, introduzimos a definição de **derivada covariante** em uma variedade diferencial M e as definições decorrentes desta, que são as noções de **transporte paralelo, geodésica, torção** e **curvatura**. É também feito um pequeno esboço do **método do referencial móvel de Cartan**, onde são demonstradas as primeira e segunda equações de estrutura. Entretanto, concentramos nossa atenção na noção de **fibrado de referenciais** e obtemos os resultados sobre este assunto que utilizaremos no Capítulo 2.

1.1 Derivada Covariante

Em todo este capítulo M denotará uma variedade diferencial n-dimensional, $C^\infty(M)$ o anel das funções de classe C^∞ definidas em M, $C^\infty(A)$ o anel das funções de classe C^∞ definida em um subconjunto aberto A de M, $\mathfrak{X}(M)$ o $C^\infty(M)$-módulo dos campos de vetores de M, $\mathfrak{X}(A)$ o $C^\infty(A)$-módulo dos campos de vetores de M restritos a um subconjunto A de M, $\mathfrak{X}(T^*M \otimes TM)$ o conjunto das seções de $T^*M \otimes TM$ e $\mathfrak{X}(\Lambda^2 T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$ o conjunto das seções de $\Lambda^2 T^*M \otimes T^*M \otimes TM$.

Definição 1.1.1 *Uma* **derivada covariante** *em M é um operador ∇ que a cada par (X, Y) de campos de vetores com domínio em um conjunto $A \subset M$ associa um campo $\nabla_X Y$ com domínio em A, satisfazendo, para cada $f \in C^\infty(A)$ e cada campo Z definido em A, as condições:*

(1) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$;

(2) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$;

(3) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$;

(4) $\nabla_X(fY) = (Xf)Y + f\nabla_X Y$.

Se $M = I\!R^n$, então $\nabla_X Y = XY$, onde $X, Y \in \mathfrak{X}(I\!R^n)$, é um exemplo de derivada covariante.

Proposição 1.1.1 *Seja $m \in M$. Para calcular $(\nabla_X Y)_m$ basta conhecer X_m e o valor de Y sobre o traço de uma curva tangente a X_m.*

Demonstração:

Sejam A uma vizinhança aberta de m e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base de campos sobre A. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(A)$, escrevemos

$$X = x^i e_i \quad \text{e} \quad Y = y^j e_j \; .$$

Segue da definição de ∇, que

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= x^i \nabla_{e_i}(y^j e_j) \\ &= x^i (e_i y^j) e_j + x^i y^j \nabla_{e_i} e_j \\ &= (X y^j) e_j + x^i y^j \nabla_{e_i} e_j \; . \end{aligned}$$

Portanto,

$$(\nabla_X Y)_m = (X_m y^j)(e_j)_m + x^i(m) y^j(m) (\nabla_{e_i} e_j)_m \; .$$

Para conhecer $X_m y^j$, basta tomar uma curva $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ tal que

$$\sigma(0) = m \quad \text{e} \quad \sigma'(0) = X_m \ .$$

Temos,

$$X_m y^j = (y^j \circ \sigma)'(0) \ ,$$

isto é, basta conhecer y^j, e portanto Y, ao longo do traço de σ. $\square$

Definição 1.1.2 *Seja σ uma curva em M. Um campo Y sobre M é* **paralelo** *ao longo de σ se $\nabla_{\sigma'} Y = 0$. A curva σ é uma* **geodésica** *se $\nabla_{\sigma'}\sigma' = 0$.*

Teorema 1.1.1 *Seja $\sigma : [a,b] \to M$ uma curva. Para cada vetor $v \in T_{\sigma(a)}M$ existe um único campo $Y(t)$ ao longo de σ tal que $Y(a) = v$ e $Y(t)$ é paralelo ao longo de σ. Para cada $t \in [a,b]$, a função $P_{a,t} : T_{\sigma(a)}M \to T_{\sigma(t)}M$ dada por $P_{a,t}(Y) = Y(t)$ é um isomorfismo linear chamado de transporte paralelo ao longo de σ de $\sigma(0)$ para $\sigma(t)$.*

Demonstração:

Sejam $(x^1, \ldots, x^n)$ um sistema de coordenadas em torno de $\sigma(a)$ com domínio em um aberto conexo U,

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i} \ , \quad 1 \le i \le n \ ,$$

os campos coordenados, e $w^i_{jk} : U \to I\!R$ dadas por

$$\nabla_{X_k} X_i = w^i_{jk} X_j \ .$$

Seja $Y(t)$ um campo ao longo de σ. Escrevamos

$$Y(t) = a_i(t)(X_i)_{\sigma(t)} \ .$$

Seja $g_i = x^i \circ \sigma$.

$$\sigma'(t) = g_i'(t)(X_i)_{\sigma(t)} \ .$$

Se $Y(t)$ é paralelo ao longo de σ, então

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_{\sigma'} Y) = \sigma'(t)(a_k(t))(X_k)_{\sigma(t)} + g_i'(t)a_j(t)w_{kj}^i(\sigma(t))(X_k)_{\sigma(t)} \\ &= \left(a_k'(t) + g_i'(t)w_{kj}^i(\sigma(t))a_j(t)\right)(X_k)_{\sigma(t)} . \end{aligned}$$

Logo, para cada $k = 1, \ldots, n$, temos

$$a_k'(t) + g_i' w_{kj}^i(\sigma(t))a_j(t) = 0 . \tag{1.1}$$

Obtemos assim um sistema linear de equações diferenciais ordinárias. Um tal sistema tem uma única solução $(a_1, \ldots, a_n)$ com valores iniciais $a_1(0), \ldots, a_n(0)$ fixados. Desta forma existe um único campo paralelo $Y(t)$ ao longo de $\sigma|_{[a,c]}$ para algum $c \in (a,b]$ tal que $\sigma(c) \in U$.

Como $\sigma([a,b])$ é compacto, existe um número finito de sistema de coordenadas com domínios em abertos conexos $U_1, \ldots, U_r$ que cobrem $\sigma([a,b])$ com $U = U_1$ e existe uma partição

$$a = c_1 < c_2 < \cdots < c_{r+1} = b$$

tal que

$$\begin{aligned} &\sigma(c_1) \in U_1 \\ &\sigma(c_j) \in U_{j-1} \cap U_j \quad \text{para } 1 < j \leq r \\ &\sigma(c_{r+1}) \in U_r . \end{aligned}$$

Suponhamos que o campo paralelo $Y(t)$ já foi construído ao longo de $\sigma|_{[a,c_k]}$ para $1 \leq k < r$. Procedendo como acima e observando que $\sigma(c_{k+1}) \in U_k \cap U_{k+1}$, construímos um campo paralelo $Z(t)$ ao longo de $\sigma|_{[c_{k+1},c_{k+2}]}$ tal que $Z(c_{k+1}) = Y(c_{k+1})$. Segue da unicidade destes campos que

$$Z|_{U_k \cap U_{k+1}} = Y|_{U_k \cap U_{k+1}} .$$

Concluímos que podemos construir um único campo paralelo ao longo de σ.

A linearidade de $P_{a,t}$ segue da linearidade do sistema (1.1), e o fato de $P_{a,t}$ ser um isomorfismo é consequência da unicidade das soluções de (1.1). □

Com a mesma notação da demonstração do teorema acima, observemos que se σ é uma geodésica, então

$$g_k''(t) + w_{kj}^i(\sigma(t))g_i'(t)g_j'(t) = 0$$

que é um sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem que tem uma única solução com valores iniciais $\sigma(0)$ e $\sigma'(0)$. Isto demonstra o seguinte:

Teorema 1.1.2 *Dado $m \in M$ e $X \in T_m M$, existe $\varepsilon > 0$ e uma única curva $\sigma : [-\varepsilon, \varepsilon] \to M$ tal que*

$$\sigma(0) = m \ ,$$
$$\sigma'(0) = X$$

e σ é uma geodésica.

Definição 1.1.3 *Chama-se* **torção** *T de uma derivada covariante o tensor definido por*

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(A)$ com $A \subset M$.

A torção T satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $T(X, Y) = -T(Y, X)$;

(2) $T(fX, Y) = fT(X, Y) \quad (\forall f \in C^\infty(A))$;

(3) T é bilinear sobre o $C^\infty(A)$-módulo $\mathfrak{X}(A)$.

De fato,

(1) $T(X, Y) = -\nabla_Y X + \nabla_X Y + [Y, X] = -T(Y, X)$.

(2)
$$\begin{aligned} T(fX, Y) &= \nabla_{fX} Y - \nabla_Y(fX) - [fX, Y] \\ &= f\nabla_X Y - (Yf)X - f\nabla_Y X - f[X, Y] + (Yf)X \\ &= fT(X, Y) . \end{aligned}$$

(3) Segue das propriedades anteriores que para provar (3), basta mostrar que $T(X+Y,Z) = T(X,Z)+T(Y,Z)$.

$$\begin{aligned} T(X+Y,Z) &= \nabla_{X+Y}Z - \nabla_Z(X+Y) - [X+Y,Z] \\ &= T(X,Z)+T(Y,Z)\,. \end{aligned}$$

Definição 1.1.4 *A curvatura R de uma derivada covariante ∇ é o tensor definido por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

onde $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(A)$ com $A \subset M$.

A curvatura satisfaz as seguintes propriedades:

(1) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$;

(2) $R(fX,Y)Z = fR(X,Y)Z \quad (\forall f \in C^\infty(A))$;

(3) $R(X,Y)(fZ) = fR(X,Y)Z$;

(4) R é 3-linear sobre o $C^\infty(A)$-módulo $\mathfrak{X}(A)$.

De fato,

(1) $$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= -\nabla_Y\nabla_X Z + \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_{[Y,X]}Z \\ &= -R(Y,X)Z\,. \end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned} R(fX,Y)Z &= f\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y(fD_X Z) - \nabla_{(f[X,Y]-(Yf)X)}Z \\ &= f\nabla_X\nabla_Y Z - (Yf)\nabla_X Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]}Z + (Yf)\nabla_X Z \\ &= fR(X,Y)Z\,. \end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned} R(X,Y)(fZ) &= \nabla_X((Yf)Z + f\nabla_Y Z) - \nabla_Y((Xf)Z + f\nabla_X Z) - [X,Y](f)Z - f\nabla_{[X,Y]}Z \\ &= X(Yf)Z + (Yf)\nabla_X Z + (Xf)\nabla_Y Z + f\nabla_X\nabla_Y Z - Y(Xf)Z - (Xf)\nabla_Y Z \\ &\quad -(Yf)\nabla_X Z - f\nabla_Y\nabla_X Z - X(Yf)Z + Y(Xf)Z + f\nabla_{[X,Y]}Z \\ &= fR(X,Y)Z\,. \end{aligned}$$

(4) Resta mostrar que

$$\begin{aligned} & R(X+Y,Z)W = R(X,Z)W + R(Y,Z)W \\ \text{e} \quad & R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W \ . \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} R(X+Y,Z)W &= \nabla_X\nabla_Z W + \nabla_Y\nabla_Z W - \nabla_Z\nabla_X W - \nabla_Z\nabla_Y W - \nabla_{[X,Y]}W - \nabla_{[Y,Z]}W \\ &= R(X,Z)W + R(Y,Z)W \ . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(X,Y)(Z+W) &= \nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_X\nabla_Y W - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_Y D_X W - \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[X,Y]}W \\ &= R(X,Y)Z + R(X,Y)W \ . \end{aligned}$$

Se $M = \mathbb{R}^n$ e $\nabla_X Y = XY$, então $T = 0$ e $R = 0$.

1.2 O Método do Referencial Móvel de Cartan

Sejam $\{e_1, \ldots, e_n\}$ um referencial móvel em um aberto de M e $\{\theta^1, \ldots, \theta^n\}$ o seu coreferencial dual. Temos que

$$\nabla_X e_j = w_{ij}(X)e_i \quad (\forall X \in \mathfrak{X}(M))$$

onde w_{ij} são 1-formas chamadas de **formas de conexão**.

Quaisquer que sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$T(X,Y) = T_i(X,Y)e_i$$
$$R(X,Y)e_j = R_{ij}(X,Y)e_i$$

onde T_i e R_{ij} são 2-formas.

Proposição 1.2.1

$$\begin{aligned} T_i &= \mathrm{d}\theta^i + w_{ij} \wedge \theta^j \\ R_{ij} &= \mathrm{d}w_{ij} + w_{ik} \wedge w_{kj} \end{aligned}$$

Demonstração:

$$
\begin{aligned}
T_i(X,Y)e_i &= \nabla_X(\theta^j(Y)e_j) - \nabla_Y(\theta^j(X)e_j) - \theta^j([X,Y])e_j \\
&= X(\theta^j(Y))e_j + \nabla_Y\theta^j(X)e_j - \theta^j([X,Y])e_i \\
&= X(\theta^j(Y))e_j + \theta^j(Y)\nabla_X e_j - Y(\theta^j(X))e_j - \theta^j(X)\nabla_Y e_j - \theta^j([X,Y])e_j \\
&= d\theta^j(X,Y)e_j + \theta^j(Y)w_{ij}(X)e_i - \theta^j(X)w_{ij}(Y)e_i \\
&= (d\theta^i + w_{ij}\wedge\theta^j)(X,Y)e_i\ .
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
T_i = d\theta^i + \omega_{ij}\wedge\theta^j
$$

$$
\begin{aligned}
R_{ij}(X,Y)e_i &= \nabla_X w_{ij}(Y)e_i) - \nabla_Y w_{ij}((X)e_i) - w_{ij}([X,Y])e_i \\
&= X(w_{ij}(Y))e_i + w_{ij}(Y)\nabla_X e_i - Y(w_{ij}(X))e_i - w_{ij}(X)\nabla_Y e_i - w_{ij}([X,Y])e_i \\
&= (dw_{ij} + w_{ik}\wedge w_{kj})(X,Y)e_i\ .
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
R_{ij}(X,Y) = dw_{ij} + w_{ik}\wedge w_{kj}\ .
$$

□

As equações da proposição anterior são chamadas, respectivamente, de primeira e segunda **equações de estrutura**.

1.3 Conexão em Fibrados de Referenciais

Sejam M uma variedade diferenciável n-dimensional, $m \in M$ e $b = (m, e_1..., e_n)$ um referencial em T_mM, isto é, $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base ordenada de T_mM. A cada referencial b em T_mM está associada uma única transformação linear inversível $L_b : I\!R^n \longrightarrow T_mM$ definida por $L_b(f_i) = e_i$, onde $\{f_i\}$ é a base canônica do $I\!R^n$. Reciprocamente a cada aplicação linear inversível $T : I\!R^n \longrightarrow T_mM$ está associado um único referencial $b = (m, e_1, ..., e_n)$ de T_mM, tal que $L_b = T$; basta tomar $e_i = Tf_i$.

Denotaremos por B_m o conjunto de todos os referenciais em T_mM. Segue do que foi dito acima, que existe uma correspondência biunívoca entre B_m e o conjunto das transformações lineares inversíveis de $I\!R^n$ em T_mM. Chamamos de **fibrado de referenciais** ao conjunto

$$B = \bigcup_{m \in M} B_m$$

e B_m é chamado de **fibra** de B sobre m.

Construamos agora uma estrutura diferenciável para B. Seja $\pi : B \longrightarrow M$ definida por $\pi(m, e_1 ..., e_n) = m$; π **é chamada de projeção de** B **em** M. Seja $\varphi_\nu : U_\nu \longrightarrow I\!R^n$, $\varphi_\nu = (x^1, ..., x^n)$, um sistema de coordenadas de M. Os campos $\frac{\partial}{\partial x^1}, ..., \frac{\partial}{\partial x^n}$ determinam uma seção em $\pi^{-1}(U_\nu)$ dada por $\sigma(m) = \left(m, \left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_m, ..., \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_m\right)$. Existem funções $a^i_j : \pi^{-1}(U_\nu) \longrightarrow I\!R$ tais que, se $b = (\pi(b), v_1, ..., v_n) \in \pi^{-1}(U_\nu)$, então

$$v_j = a^i_j(b)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\pi(b)} .$$

Considerando $GL(n, I\!R)$ como sendo um aberto de $I\!R^{2n}$, definamos $\psi_\nu : \pi^{-1}(U_\nu) \longrightarrow I\!R^n \times GL(n, I\!R)$ por

$$\psi_\nu = (x^1 \circ \pi, ..., x^n \circ \pi, a^1_1, ..., a^1_n, ..., a^n_1, ..., a^n_n) .$$

Tomando em B a topologia gerada pelas imagens inversas de abertos de $I\!R^n \times GL(n, I\!R)$ pelas aplicações ψ_ν, temos que $(\pi^{-1}(U_\nu), \psi_\nu)$ é uma estrutura diferencivel de B. Desta forma B é uma variedade diferenciável de dimensão $n + n^2$.

Dados $b \in B$ e $g \in GL(n, I\!R)$ fixos e denotando a transformação linear de $I\!R^n$ em $I\!R^n$ cuja matriz em relação a base canônica é g pela mesma letra g, temos que está associado a L_bg um único ponto de $B_{\pi(b)}$ que indicaremos por bg. Logo $L_{bg} = L_bg$. Escrevendo $b = (\pi(b), e_1, ..., e_n)$, $g = (g^i_j)$ e sendo $\{f_i\}$ a base canônica do $I\!R^n$, temos

$$L_bg(f_j) = L_b(g^i_j f_i) = g^i_j e_i .$$

Sendo $bg = (\pi(b), L_bg(f_1), ..., L_bg(f_n))$, segue que bg é o refencial obtido de b fazendo-se combinações lineares dos elementos de b tomando-se como coeficientes os números das colunas de g. Temos também que, fixados $m \in M$ e $b \in B_m$, bg percorre todos os elementos de B_m quando g percorre $GL(n, I\!R)$. Além disso, $(bg_1)g_2 = b(g_1g_2)$ pois $(L_bg_1)g_2 = L_b(g_1g_2)$.

Para cada $g \in GL(n, I\!R)$, a aplicação $R_g : B \longrightarrow B$ definida por $R_g(b) = bg$ é um difeomorfismo. Com efeito, seja $\varphi = (x^1, ..., x^n)$ uma carta de M e $\psi = (x^1, ..., x^n, a^i_j)$ a carta de B induzida por φ. Seja (p, a^i_j) na imagem de ψ,

$$\psi^{-1}(p, a^i_j) = \left(\varphi^{-1}(p), a^i_j \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)}\right) ,$$

$$R_g \circ \psi^{-1}(p, a^i_j) = \left(\varphi(p), ..., a^i_k g^k_j \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\varphi(p)}\right) .$$

$F = \psi \circ R_g \circ \psi^{-1}$ é dada por $F(p, a^i_j) = \big(p, (a^i_j)g\big)$. Portanto F é C^∞. Além disso, $F^{-1}(q, c^i_j) = \big(q, (c^i_j g^{-1})\big)$. Portanto, F é um difeomorfismo. De onde segue que R_g é um difeomorfismo.

Se $g_1, g_2 \in GL(n, I\!R)$, então $R_{g_1 g_2}(b) = bg_1 g_2 = R_{g_2} \circ R_{g_1}(b)$. Logo, a aplicação R_g é uma ação à direita do grupo $GL(n, I\!R)$ em B.

O subespaço $V_b = ker(\Pi_*)_b$ de $T_b B$ é chamado **espaço dos vetores verticais de** $T_b B$. Temo que,

$$(\pi_*)_b \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_b = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\pi(b)} ,$$

$$(\pi_*)_b \left(\frac{\partial}{\partial a^i_j}\right)_b = 0 .$$

De onde segue que V_b é gerado pelos vetores $\left(\frac{\partial}{\partial a^i_j}\right)_b$. Logo, $V : b \in B \longmapsto V_b$ é uma distribuição de dimensão n^2 em B.

Sejam $b \in B$ fixo e $H : GL(n, I\!R) \longrightarrow B$ definida por $H(Y) = bY$. Escrevendo $b = \left(\pi(b), a^i_j \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\pi(b)}\right)$ e $A = (a^i_j)$, obtemos $(\psi \circ H)(Y) = \psi(bY) = (\varphi(\pi(b)), AY)$. Logo H é C^∞. Para cada $X \in gl(n, I\!R)$, seja a curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow B$ definida por $\alpha(t) = be^{tX}$. Temos que $\alpha = H \circ \sigma$ onde $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow GL(n, I\!R)$ é curva de classe C^∞ definida por $\sigma(t) = e^{tX}$. Logo, α é de classe C^∞. Usamos a notação $X^*_b = \alpha'(0)$.

Procedendo como antes observemos que $\psi(\alpha(t)) = (\varphi(\pi(b)), Ae^{tX})$. Logo $\frac{d}{dt}\psi(\alpha(t)) = (0, AX)$. De onde segue $X^*_b = (AX)^i_j \left(\frac{\partial}{\partial a^i_j}\right)_b$. Concluímos que cada $X \in gl(n, I\!R)$ determina um campo de vetores verticais $X^* : b \in B \longmapsto X_b \in TB$ de classe C^∞. Tais campos são chamados de **campos fundamentais**.

Temos que $(\lambda X + Y)^* = \lambda X^* + Y^*$ quaisquer que sejam $\lambda \in I\!R$ e $X, Y \in gl(n, I\!R)$. Com efeito,

$$(\lambda X + Y)^* = [A(\lambda X + Y)]^i_j \left(\frac{\partial}{\partial a^i_j}\right)_b = \lambda (AX)^i_j \left(\frac{\partial}{\partial a^i_j}\right)_b + (AY)^i_j \left(\frac{\partial}{\partial a^i_j}\right)_b = \lambda X^*_b + Y^*_b \ .$$

Dada uma base de $\{X_{ij}\}$ de $gl(n, I\!R)$, $\{(X^*_{ij})_b\}$ é uma base de V_b. De fato, se $\lambda_{kl}(X^*_{kl})_b = 0$ então

$$0 = \sum_{kl}\sum_{ij} \lambda_{kl}(AX_{kl})^i_j \left(\frac{\partial}{\partial a^i_j}\right)_b = \sum_{ij}\left(\sum_{kl} \lambda_{kl}(AX_{kl})^i_j\right)\left(\frac{\partial}{\partial a^i_j}\right)_b \ .$$

Logo, $\sum_{kl} \lambda_{kl}(AX_{kl})^i_j = 0$ para todo i, j, isto é, a matriz $\sum_{kl} \lambda_{kl}(AX_{kl})$ é nula. Portanto, $A \sum_{kl} \lambda_{kl} X_{kl} = 0$. Sendo A inversível, temos que $\lambda_{kl} = 0$. Portanto os n^2 vetores $(X^*_{ij})_b$ são linearmente independentes e portanto formam uma base de V_b.

1.4 Formas de Conexão

Vamos tratar aqui de dois tipos de p-formas em B a valores vetoriais: as que tomam valores em $gl(n, I\!R)$ e as que tomam valores em $I\!R^n$. Se α e β são p-formas em B que tomam valores, respectivamente, em $gl(n, I\!R)$ e $I\!R^n$ e se $\{X_{ij}\}$ é uma base de $gl(n, I\!R)$ e $\{e_i\}$ é uma base de $I\!R^n$, então existem p-formas α^i_j e β^j a valores em $I\!R$ tais que

$$\begin{aligned} \alpha_b(v_1, ..., v_p) &= (\alpha^i_j)_b(v_1, ..., v_p) X_{ij} \ , \\ \beta_b(v_1, ..., v_p) &= \beta^j_b(v_1, ..., v_p) e_j \end{aligned}$$

quaisquer que sejam $b \in B$ e $v_1, ..., v_p \in T_b B$. Escrevemos de forma simplificada

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha^i_j X_{ij} \ , \\ \beta &= \beta^j e_j \ . \end{aligned}$$

O produto exterior de uma p-forma α a valores em $gl(n, I\!R)$ por uma q-forma β a valores em $I\!R^n$ é definido como sendo a $(p+q)$-forma a valores em $I\!R^n$ dada por

$$\alpha \wedge \beta = \alpha^j_i \wedge \beta^k X_{ij} e_k \ .$$

Sejam agora α uma p-forma em B e γ uma q-forma em B, ambas tomando valores em $gl(n, I\!\!R)$. O produto exterior de α por γ é a $(p+q)$-forma a valores em $gl(n, I\!\!R)$ definida por

$$\alpha \wedge \gamma = \alpha^i_j \wedge \gamma^k_l \; X_{ij} \; X_{kl}$$

Em particular, se estivermos usando as bases canônicas $\{E_{ij}\}$ e $\{f_j\}$ de $gl(n, I\!\!R)$ e $I\!\!R^n$, respectivamente, isto é, se $\alpha = \alpha^i_j E_{ij}$, $\gamma = \gamma^i_j E_{ij}$ e $\beta = \beta^j f_j$ então

$$\begin{aligned} \alpha \wedge \beta &= \alpha^i_j \wedge \beta^j f_i \;, \\ \alpha \wedge \gamma &= \alpha^i_k \wedge \gamma^k_j E_{ij} \;. \end{aligned}$$

Em virtude das fórmulas $E_{ij}E_{kl} = \delta^j_k E_{il}$ e $E_{ij} f_k = \delta^j_k f_i$.

Definição 1.4.1 *Uma* **conexão** *em B é uma distribuição H em B tal que*

(i) $H_b \oplus V_b = T_b B$;

(ii) $(R_g)_*(H_b) = H_{bg}$.

Os vetores de H_b são chamados de **vetores horizontais** de $T_b B$.

Proposição 1.4.1 *Para cada conexão H em B existe uma única 1-forma ω em B a valores em $gl(n, I\!\!R)$ que satisfaz*

(i) $\omega(A^*) = A$;

(ii) $\omega_b(H_b) = \{0\}$.

A forma ω é chamada de **forma de conexão.**

Para todo $b \in B$ e todo $g \in GL(n, I\!\!R)$, temos

$$(R_g)_*(X^*_b) = (g^{-1} X g)^*_{bg} \;.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
(R_g)_*(X_b^*) &= (R_g)_*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(be^{tX}\right)_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(be^{tX}g\right)_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(bgg^{-1}e^{tX}g\right)_{t=0} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(bge^{tg^{-1}Xg}\right)_{t=0} \\
&= (g^{-1}Xg)_{bg}^* \ .
\end{aligned}$$

Proposição 1.4.2 *$R_g^*\omega = g^{-1}\omega g$ para todo $g \in GL(n, I\!R)$.*

Demonstração:

Como $\omega(H_b) = \{0\}$ e $(Rg)_* H_b = H_{bg}$ basta mostrar que $(R_g^*\omega)(X_b^*) = (g^{-1}\omega_b g)(X_b^*)$ para todo $b \in B$.

$$(R_g^*\omega)(X_b^*) = \omega_{bg}((g^{-1}Xg)_{bg}^*) = g^{-1}Xg = g^{-1}\omega_b(X_b^*)g = (g^{-1}\omega_b g)(X_b^*) \ .$$

□

Vimos acima que dada uma conexão H em B existe uma 1-forma ω em B a valores em $gl(n, I\!R)$ que satisfaz $\omega(A^*) = A$ e $Rg^*\omega = g^{-1}\omega g$.

A proposição abaixo diz que a recíproca disto é verdadeira.

Proposição 1.4.3 *Seja ω uma 1-forma em B a valores em $gl(n, I\!R)$ satisfazendo $\omega(A^*) = A$ e $Rg^*\omega = g^{-1}\omega g$. Se H é uma distribuição em B definida por $H_b = Ker(\omega_b)$, então H é uma conexão em B.*

Demonstração:

Tomemos uma base $\{X_{ij}\}$ de $gl(n, I\!R)$. Como $\omega((X_{ij}^*)_b) = X_{ij}$, temos que $dim(Im\omega_b) = n^2$. Logo $dim H_b = n$. Agora, seja $v \in H_b \cap V_b$. Segue que $\omega_b(v) = 0$ e $v = \lambda_{ij}(X_{ij}^*)_b$ para certos $\lambda_{ij} \in I\!R$. Portanto,

$$0 = \omega_b(v) = \lambda_{ij}\omega_b((X_{ij}^*)_b) = \lambda_{ij}X_{ij} \ .$$

Concluímos que $\lambda_{ij} = 0$, logo, $v = 0$ e $H_b \cap V_b = \{0\}$. Isto implica que

$$dim(H_b + V_b) = n + n^2 = dim T_b B$$

de onde segue que $H_b \oplus V_b = T_b B$.

Seja $v \in (R_g)_*(H_b)$. Logo $v = (R_g)_* u$ para algum $u \in H_b$. Portanto,

$$\omega_{bg}(v) = \omega_{R_g(b)}((R_g)_* u) = \left(R_g^* \omega_b\right) u = g^{-1} \omega_b(u) g = 0$$

o que implica que $v \in Ker(\omega_{bg}) = H_{bg}$. Logo, $(R_g)_*(H_b) \subset H_{bg}$. Como $dim H_c = n$ para todo $c \in B$ e como $(Rg)_*$ é um isomorfismo, temos $dim(Rg)_*(H_b) = dim H_{bg}$. Portanto, $(R_g)_*(H_b) = H_{bg}$. □

Seja a 1-forma θ em B a valores em $I\!R^n$ definida por

$$\theta_b(v) = L_b^{-1} (\pi_{*b}\, v) \quad .$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
(R_g^*\theta)_b(v) &= \theta_{bg}((R_g)_*\, v) \\
&= L_{bg}^{-1} (\pi_{*bg} (R_g)_{*b}\, v) \\
&= g^{-1} L_b^{-1} ((\pi \circ R_g)_{*b}\, v) \\
&= g^{-1} L_b^{-1} ((\pi_{*b}\, v) \\
&= g^{-1} \theta_b(v) \quad .
\end{aligned}$$

Portanto $R_g^*\theta = g^{-1}\theta$.

As 1-formas θ^i definidas por $\theta = \theta^i f_i$, onde $\{f_i\}$ é a base canônica do $I\!R^n$, são chamadas de **formas tautológicas** .

Proposição 1.4.4 *Seja $(X_1, ..., X_n)$ um referencial móvel de M definido em um aberto U e seja $(\alpha^1, ..., \alpha^n)$ o seu coreferencial dual. Existe $f : \pi^{-1}(U) \longrightarrow GL(n, I\!R)$ tal que*

- $\theta^i = f^i_j \pi^* \alpha^j$, *onde* $f = (f^i_j)$;

- $f(bg) = g^{-1}f(b)$.

Demonstração:

O referencial móvel $(X_1, ..., X_n)$ determina uma seção $\sigma : U \longrightarrow B$ em $\pi^{-1}(U)$ dada por

$$\sigma(m) = (m, (X_1)_m, ..., (X_n)_m) \ .$$

Seja $f : \pi(U) \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$ definida como segue: dado $b \in \pi^{-1}(U)$ existe um único $h \in GL(n, \mathbb{R})$ tal que $bh \in \sigma(U) \cap B_{\pi(b)}$; definimos $f(b) = h$. Portanto, $bf(b)$ é o ponto da fibra $B_{\pi(b)}$ que está na seção $\sigma(M)$, isto é,

$$bf(b) = (m, X_1, ..., X_n) \ .$$

Logo, se $g \in GL(n, \mathbb{R})$ então $bf(b) = bgf(bg)$. De onde segue que

$$f(bg) = g^{-1}f(b) \ .$$

Além disso, se $b = (\pi(b), v_1, ..., v_n)$, então $(X_i)_{\pi(b)} = f_i^j(b)v_j$ onde $f = (f_j^i)$. Se $u \in T_bM$, então

$$\begin{aligned} \theta_b^i(u)f_i &= \theta_b(u) \\ &= L_b^{-1}(\pi_{*b}u) \\ &= L_b^{-1}\left(\alpha_{\pi(b)}^j(\pi_{*b}u)(X_j)_{\pi(b)}\right) \\ &= (\pi^*\alpha^j)_b(u)L_b^{-1}\left(f_j^i(b)v_i\right) \\ &= f_j^i(b)(\pi^*\alpha^j)_b(u)f_i \ . \end{aligned}$$

Portanto $\theta^i = f_j^i\pi^*\alpha^j$. □

Corolário 1 *Se $b = (\pi(b), e_1, \ldots, e_n) \in B$ e $v \in T_bB$ então*

$$\pi_{*b}v = \theta_b^i(v)e_i \ .$$

Demonstração:

Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ um referencial móvel de M definido em um aberto U que contém b tal que

$$b = (\pi(b), (X_1)_{\pi(b)}, \ldots, (X_n)_{\pi(b)}) \ ,$$

isto é,

$$(X_i)_{\pi(b)} = e_i \ .$$

Usando a mesma notação da proposição anterior temos que $f^i_j(b) = \delta^i_j$ e

$$\begin{aligned}
\pi_{*b}v &= \alpha^i_{\pi(b)}(\pi_{*b}v)(X_i)_{\pi(b)} \\
&= (\pi^*\alpha^i)_{\pi(b)}(v)e_i \\
&= f^i_j(b)(\pi^*\alpha^j)_{\pi(b)}e_i \\
&= \theta^i_b(v)e_i
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.4.5 *Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ um referencial móvel de M definido em um aberto U. Se $\sigma : U \to B$ é a seção definida por*

$$\sigma(m) = (m, (X_1)_m, \ldots, (X_n)_m) \ ,$$

então $(\sigma^*\theta^1, \ldots, \sigma^*\theta^n)$ é o coreferencial dual de $(X_1, \ldots, X_n)$, onde θ^i são as formas tautológicas.

Demonstração:

Observemos que

$$\theta_{\sigma(m)}(\sigma_{*m}(X_j)_m) = f_j \ ,$$

para todo $m \in U$. De fato,

$$\begin{aligned}
\theta_{\sigma(m)}(\sigma_{*m}(X_j)_m)f_j &= L^{-1}_{\sigma(m)}(\pi_*)_{\sigma(m)}(\sigma_{*m}(X_j)_m) \\
&= L^{-1}_{\sigma(m)}((\pi\circ\sigma)_{*m}(X_j)_m) \\
&= L^{-1}_{\sigma(m)}((X_j)_m) \\
&= f_j \ .
\end{aligned}$$

Logo, segue de

$$\theta_m(v) = \theta^i_m(v)e_i \quad (\forall v \in T_mM)$$

que

$$
\begin{aligned}
f_j &= \theta^i_m((\sigma_*)_m(X_j)_m)f_i \\
&= (\sigma^*\theta^i)_m((X_j)_m)f_i \ .
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$(\sigma^*\theta^i)_m((X_j)_m) = \delta^i_j$$

□

Proposição 1.4.6 *Para cada vetor $\xi \in I\!\!R^n$, existe um único campo de vetores horizontais $A(\xi)$ em B tal que $\theta(A(\xi)) = \xi$.*

Demonstração:

Para $b \in B$ temos $L_b\xi \in T_{\pi(b)}M$. Sendo π uma submersão, existe $v \in T_bB$ tal que $(\pi_*)_bv = L_b\xi$. Observemos que todos os vetores T_bB que satisfazem esta igualdade têm a mesma componente horizontal. Com efeito, sejam $u, v \in T_bB$ tais que $\pi_{*b}u = \pi_{*b}v = L_b\xi$; escrevamos

$$
\begin{aligned}
u &= u_H + u_V \ , \\
v &= v_H + v_V \ ,
\end{aligned}
$$

onde $u_H, v_H \in H_b$ e $u_V, v_V \in V_b$. Segue que $\pi_*(u_H - v_H) = \pi_*(u - v) = 0$. Logo, $u_H - v_H \in H_b \cap V_b$. De onde segue que $u_H = v_H$. Definimos $A(\xi)$ como sendo a componente horizontal de todos os vetores $v \in T_bB$ tais que $\pi_*v = L_b\xi$.

Logo, $A(\xi)$ é o único campo horizontal que satisfaz $\theta_bA(\xi)_b = \xi$. □

Observemos que $\pi_*A(\xi)_b = L_b\xi$.

Se $\{\xi_i\}$ é uma base do $I\!\!R^n$, então $\{A(\xi_i)_b\}$ é uma base de H_b. De fato, se $\lambda_iA(\xi_i) = 0$, então

$$0 = \theta_b(\lambda_iA(\xi_i)) = \lambda_i\xi_i \ .$$

Logo $\lambda_i = 0$. De onde segue que $\{A(\xi_i)_b\}$ é linearmente independente e, portanto, é base de H_b .

Do que foi visto acima temos que, escolhendo uma base $\{\xi_i\}$ do $\mathbb{R}^n$ e uma base $\{X_{ij}\}$ de $gl(n, \mathbb{R})$, obtemos uma base de T_bB dada por $\{A(\xi_i)_b, (X^*_{ij})_b\}$.

Proposição 1.4.7 *Os campos $A(\xi)$ satisfazem as propriedades*

(i) $(R_g)_*A(\xi)_b = A(g^{-1}\xi)_{bg}$;

(ii) $[X^*, A(\xi)] = A(X\xi)$.

Demonstração:

(i) Observemos que $(R_g)_*(H_b) = H_{bg}$ implica que $(R_g)_*A(\xi)_b \in H_{bg}$.

$$\theta_{bg}\left(A(g^{-1}\xi)_{bg}\right) = g^{-1}\xi = g^{-1}\theta_b\left(A(\xi)_b\right) = (R^*_g\theta)_b\left(A(\xi)_b\right) = \theta_{bg}\left((R_g)_*A(\xi)_b\right) \quad .$$

Logo,

$$0 = \theta_{bg}\left(A(g^{-1}\xi)_{bg} - (R_g)_*A(\xi)_b\right) = L^{-1}_{bg}\left((\pi_*)_{bg}\left(A(g^{-1}\xi)_{bg} - (R_g)_*A(\xi)_b\right)\right)$$

de onde segue

$$(\pi_*)_{bg}\left(A(g^{-1}\xi)_{bg} - (R_g)_*A(\xi)_b\right) = 0 \quad .$$

Logo, $A(g^{-1}\xi)_{bg} - (R_g)_*A(\xi)_b \in H_b \cap V_b$. Portanto, $A(g^{-1}\xi)_{bg} = (R_g)_*A(\xi)_b$.

(ii) Para cada $X \in gl(n, \mathbb{R})$, temos $R_{e^{tX}} = exp(tX^*)$. Com efeito, seja $X \in gl(n, \mathbb{R})$. Para cada $t \in \mathbb{R}$, $R_{e^{tX}}$ é um difeomorfismo de B. Se $s, t \in \mathbb{R}$ então $R_{e^{sX}} \circ R_{e^{tX}} = R_{e^{tX}e^{sX}} = R_{e^{(s+t)X}}$. A aplicação $(t, b) \in \mathbb{R} \times B \longmapsto R_{e^{tX}}(b) = be^{tX} \in B$ é diferenciável, e além disso, para toda $f \in C^\infty(B)$, temos

$$X^*_b f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(be^{tX})\right)_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(R_{e^{tX}}(b))\right)_{t=0} \quad .$$

Notemos também que a aplicação $A : \xi \in \mathbb{R}^n \longmapsto A(\xi) \in TM$ é linear

$$[X^*, A(\xi)]_b = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left\{A(\xi)_b - (R_{e^{tX}})_* A(\xi)_{R_{(e^{-tX})}(b)}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left\{A(\xi)_b - A(e^{-tX}\xi)_b\right\} \\
&= A\left\{\left(\lim_{t\to 0}\frac{I - e^{-tX}}{t}\right)\xi\right\}_b \\
&= -A((-X)\xi)_b \\
&= A(X\xi)_b \ .
\end{aligned}
$$

□

Sejam $P, Q \in gl(n, \mathbb{R})$, definimos

$$[P, Q] = PQ - QP \ .$$

Mostremos que $[P^*, Q^*] = [P, Q]^*$.

$$
\begin{aligned}
[P^*, Q^*] &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\{Q^* - (R_{e^{tP}})_* Q^*_{be^{-tP}}\} \\
&= \left\{\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(Q - e^{-tP}Qe^{tP})\right\}^*_b \\
&= \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-e^{-tP}Qe^{tP})\mid_{t=0}\right\}^*_b \\
&= \{PQ - QP\}^*_b \\
&= [P, Q]^*_b \ .
\end{aligned}
$$

Seja α uma p-forma diferenciável a valores reais sobre B. Definimos $D\alpha$, a **diferencial covariante** de α, por

$$D\alpha(v_1, ..., v_p) = d\alpha((v_1)_H, ..., (v_n)_H) \quad \text{com} \quad v_j \in TB \ .$$

Chama-se **forma de torção** a 2-forma Θ definida por

$$\Theta = D\theta \ .$$

Mostremos a equação

$$\Theta = \mathrm{d}\theta + \omega \wedge \theta$$

chamada de **primeira equação de estrutura**.

Basta mostrar que a equação é verdadeira nos seguinte casos:

(i) $X = A(\xi_1)$, $\quad Y = A(\xi_2)$;

(ii) $X = P^*$, $\quad Y = A(\xi)$;

(iii) $X = P^*$, $\quad Y = Q^*$.

(i) Como $\omega((A(\xi_1)) = \omega((A(\xi_2)) = 0$ temos que $\omega \wedge \theta(A(\xi_1), A(\xi_2)) = 0$. Logo, $(\mathrm{d}\theta + \omega \wedge \theta)(A(\xi_1), A(\xi_2)) = \mathrm{d}\theta(A(\xi_1), A(\xi_2)) = \Theta(A(\xi_1), A(\xi_2))$.

(ii)
$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{d}\theta + \omega \wedge \theta)(P^*, A(\xi)) = \\
&\quad P^*(\theta(A(\xi)) - A(\xi)(\theta(P^*)) - \theta([P^*, A(\xi)]) + \omega(P^*)\theta(A(\xi)) - \omega(A(\xi))\theta(P^*) \\
&\quad = -P\xi + P\xi \\
&\quad 0 = \Theta(P^*, A(\xi)) \ .
\end{aligned}
$$

(iii) $(\mathrm{d}\theta + \omega \wedge \theta)(P^*, Q^*) = -\theta[P^*, Q^*] = \theta([P, Q]^*) = 0 = \Theta(P^*, Q^*)$.

□

Chama-se **curvatura da conexão** a 2-forma Ω sobre B definida por

$$\Omega = D\omega \ .$$

Mostremos a equação

$$\Pi = \mathrm{d}\omega + \omega \wedge \omega \ ,$$

chamada de **segunda equação de estrutura** .

Novamente basta mostrar que a equação é verdadeira nos três casos da demonstração anterior.

(i) Como $\omega \wedge \omega(A(\xi_1), A(\xi_2)) = 0$, temos
$\Pi\,(A(\xi_1), A(\xi_2)) = \mathrm{d}\omega\,(A(\xi_1), A(\xi_2)) = (\mathrm{d}\omega + \omega \wedge \omega)\,(A(\xi_1), A(\xi_2))$.

(ii)
$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\omega + \omega \wedge \omega)(P^*, A(\xi)) &= -A(\xi)(\omega(P^*)) - \omega([P^*, A(\xi)]) \\ &= 0 = \Pi(P^*, A(\xi)) \ .\end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\omega + \omega \wedge \omega)(P^*, Q^*) &= \omega([P^*, Q^*]) + (\omega(P^*)\omega(Q^*) - \omega(Q^*)\omega(P^*)) \\ &= [P, Q] - (PQ - QP) \\ &= 0 = \Pi(P^*, Q^*) \ .\end{aligned}$$

□

Proposição 1.4.8 *(identidade de Bianchi)*

$$\mathrm{d}\Theta = \Pi \wedge \theta - \omega \wedge \Theta \ ;$$

$$\mathrm{d}\Pi = \Pi \wedge \omega - \omega \wedge \Pi \ .$$

Demonstração:

Segue das equações de estrutura que

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Theta &= \mathrm{d}\omega \wedge \theta - \omega \wedge \mathrm{d}\theta \\ &= (\Pi - \omega \wedge \omega) \wedge \theta - \omega \wedge (\Theta - \omega \wedge \theta) \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Pi &= \mathrm{d}\omega \wedge \omega - \omega \wedge \mathrm{d}\omega \\ &= (\Pi - \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (\Pi - \omega \wedge \omega) \\ &= \Pi \wedge \omega - \omega \wedge \Pi \ .\end{aligned}$$

□

Corolário 2 $D\Theta = \Pi \wedge \theta$ e $D\Pi = 0$.

Demonstração:

Quaisquer que sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(B)$, temos

$$D\Theta(X,Y,Z) = d\Theta(X_H, Y_H, Z_H) = \Pi \wedge \theta\,(X,Y,Z)$$

pois $\theta(X) = \theta(X_H)$ e $\Pi(X_H, Y_H) = \Pi(X,Y)$. Também

$$\begin{aligned} D\Pi(X,Y,Z) &= d\Pi(X_H, Y_H, Z_H) \\ &= (\Pi \wedge \omega - \omega \wedge \Pi)(X_H, Y_H, Z_H) = 0 \ . \end{aligned}$$

□

1.5 Definição de uma Derivada Covariante em M a partir da Conexão no Fibrado de Referenciais

Seja uma curva $\tau : [0,1] \longrightarrow M$. Definimos um campo horizontal v sobre $\pi^{-1}(\tau([0,1]))$ por

$$v_b = A(L_b^{-1}\ \tau'_{\pi(b)})_b \quad \text{para todo} \quad b \in \pi^{-1}(\tau([0,1])) \ .$$

Temos que $\pi_* v_b = \tau'_{\pi(b)}$. Segue de sua definição que v é o único campo horizontal sobre $\pi^{-1}(\tau([0,1]))$ com esta propriedade.

Para cada ponto b_o da fibra $B_{\tau(0)}$ existe uma única curva $\tilde{\tau}_{b_o} : [0,1] \longrightarrow B$ que satifaz

$$\begin{aligned} \pi(\tilde{\tau}_{b_o}(t)) &= \tau(t) \ ; \\ \tilde{\tau}_{b_o}(0) &= b_o \ ; \\ \tilde{\tau}'_{b_o}(t) &= v_{\tilde{\tau}_{b_o}(t)} \ . \end{aligned}$$

Estas curvas são precisamente as curvas integrais do campo v.

Temos que

$$\tilde{\tau}_{b_o g}(t) = \tilde{\tau}_{b_o}(t) g = R_g(\tilde{\tau}_{b_o}(t)) \ .$$

Com efeito, se $\sigma : [0,1] \longrightarrow B$ é a curva definida por

$$\sigma(t) = \tilde{\tau}_{b_o}(t)g = R_g(\tilde{\tau}_{b_o}(t)) \ ,$$

então,

$$\begin{aligned}
\pi(\sigma(t)) &= \pi(\tilde{\tau}_{b_o}(t)) = \tau(t) \ , \\
\sigma(0) &= \tilde{\tau}_{b_o}(0)g = b_o g \quad \text{e} \\
\sigma'(t) &= (R_g)_* \left(A \left(L^{-1}_{\tilde{\tau}_{b_o}(t)} \ \tau'_{\pi(\tilde{\tau}_{b_o}(t))} \right)_{\tilde{\tau}_{b_o}(t)} \right) \\
&= A \left(g^{-1} L^{-1}_{\tilde{\tau}_{b_o}(t)} \ \tau'_{\pi(\tilde{\tau}_{b_o}(t))} \right)_{\tilde{\tau}_{b_o}(t)g} \\
&= A \left(L^{-1}_{\tilde{\tau}_{b_o}(t)g} \ \tau'_{\pi(\tilde{\tau}_{b_o}(t)g)} \right)_{\tilde{\tau}_{b_o}(t)g} \\
&= v_{\tilde{\tau}_{b_o}(t)g} \\
&= v_{\sigma(t)} \ .
\end{aligned}$$

Logo σ é a curva integral de v que passa por $b_o g$. Portanto,

$$\tilde{\tau}_{b_o g} = \sigma = \tilde{\tau}_{b_o} g \ .$$

Como $\tilde{\tau}_{b_o}(t) = (\tau(t), (e_1)_{\tau(t)}, ..., (e_n)_{\tau(t)}) \in B$, cada curva $\tilde{\tau}_{b_o}$ pode ser pensada como uma escolha de um referencial em cada ponto do traço de τ. Isto nos permite definir o transporte paralelo ao longo de τ de um vetor $u \in T_{\tau(0)}M$ para $T_{\tau(t)}M$, da seguinte maneira: escolhe-se $b_o \in B_{\tau(0)}$ e considera-se a curva $\tilde{\tau}_{b_o}$.

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}_{b_o}(0) &= b_o = (\tau(0), (e_1)_{\tau(0)}, ..., (e_n)_{\tau(0)}) \ , \\
\tilde{\tau}_{b_o}(t) &= (\tau(t), (e_1)_{\tau(t)}, ..., (e_n)_{\tau(t)}) \ .
\end{aligned}$$

Se $u = c_i(e_i)_{\tau(0)}$, então o transporte paralelo ao longo de τ do vetor u para $T_{\tau(t)}M$, que denotaremos provisoriamente por $u^{b_o}_{\tau(t)}$, é dado por

$$u^{b_o}_{\tau(t)} = c_i(e_i)_{\tau(t)} \ .$$

Observemos que,

$$u^{b_o}_{\tau(t)} = L_{\tilde{\tau}_{b_o}(t)}\, L^{-1}_{b_o}(u)\ .$$

De fato, se $\{f_i\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$ então

$$\begin{aligned} L_{\tilde{\tau}_{b_o}(t)}\, L^{-1}_{b_o} &= L_{\tilde{\tau}_{b_o}(t)}\left(c_i L^{-1}_{b_o}(e_i)_{\tau(0)}\right) \\ &= c_i L_{\tilde{\tau}_{b_o}(t)} f_i \\ &= c_i (e_i)_{\tau(t)} \\ &= u^{b_o}_{\tau(t)}\ . \end{aligned}$$

O transporte paralelo de u não depende da escolha do ponto b_o, isto é,

$$u^{b_o}_{\tau(t)} = u^{b_o g}_{\tau(t)}$$

para todo $g \in GL(n, \mathbb{R})$. Com efeito,

$$u^{b_o g}_{\tau(t)} = L_{\tilde{\tau}_{b_o g}(t)}\, L^{-1}_{b_o g}(u) = L_{\tilde{\tau}_{b_o}(t)} g g^{-1} L^{-1}_{b_o}(u) = u^{b_o}_{\tau(t)}\ .$$

De agora em diante pode-se denotar o transporte paralelo de $u \in T_{\tau(0)}M$ para $T_{\tau(t)}M$ apenas por $u_{\tau(t)}$.

Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $m \in M$ e $\tau : [0,1] \longrightarrow M$ uma curva integral de Y pelo ponto m, isto é,

$$\tau'(t) = Y_{\tau(t)} \quad \text{e} \quad \tau(0) = m\ .$$

Definimos

$$(\nabla_Y X)_m = L_{b_o}\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L^{-1}_{\tilde{\tau}_{b_o}(t)} X_{\tau(t)}\right)_{t=0}\right]$$

onde b_o é algum elemento de B_m .

A definição de $(\nabla_Y X)_m$ não depende da escolha de b_o. Com efeito,

$$\begin{aligned} L_{\tilde{\tau}_{b_o g}(0)}\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ L^{-1}_{\tilde{\tau}_{b_o g}(t)} X_{\tau(t)}\right)_{t=0}\right] &= L_{\tilde{\tau}_{b_o}(0) g}\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ L^{-1}_{\tilde{\tau}_{b_o}(t) g} X_{\tau(t)}\right)_{t=0}\right] \\ &= L_{\tilde{\tau}_{b_o}(0) g}\left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g^{-1} L^{-1}_{\tilde{\tau}_{b_o}(t)} X_{\tau(t)}\right)\right)_{t=0}\right] \end{aligned}$$

$$= L_{\widetilde{\tau}_{b_o}(0)} g \left[g^{-1} \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L^{-1}_{\widetilde{\tau}_{b_o}(t)} X_{\tau(t)} \right)_{t=0} \right]$$
$$= L_{\widetilde{\tau}_{b_o}(0)} \left[\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} L^{-1}_{\widetilde{\tau}_{b_o}(t)} X_{\tau(t)} \right)_{t=0} \right] .$$

Temos que $(\nabla_Y X) : m \in M \longmapsto (\nabla_Y X)_m \in T_m M$ é um campo sobre M.

Dado um campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ o único campo horizontal $\widetilde{Y}$ que satisfaz

$$Y_{\pi(b)} = \pi_*(\widetilde{Y}_b)$$

é chamado de **levantamento horizontal** de Y.

Segue de

$$(\pi_*)_b \left(A \left(L_b^{-1} Y_{\pi(b)} \right)_b \right) = Y_{\pi(b)}$$

que

$$\widetilde{Y}_b = A \left(L_b^{-1} Y_{\pi(b)} \right)_b .$$

Temos que

$$\widetilde{fY} = (f \circ \pi) \widetilde{Y} \quad \text{para toda} \quad f \in C^\infty(M)$$

pois

$$\widetilde{fY} = A \left(L_b^{-1} (fY)_{\pi(b)} \right)_b$$

Como $(R_g)_* \widetilde{Y}_b \in H_{bg}$ e $(\pi_*)_{bg} \left((R_g)_* \widetilde{Y}_b \right) = Y_{\pi(b)}$, temos $(R_g)_* \widetilde{Y}_b = \widetilde{Y}_{bg}$.

A função $\theta(\widetilde{Y})$ de B em $\mathbb{R}^n$ é dada por

$$\theta(\widetilde{Y})(b) = L_b^{-1}(\pi_* \widetilde{Y}_b) = L_b^{-1}(Y_{\pi(b)})$$

e satifaz

$$\theta(\widetilde{Y})(bg) = g^{-1} \theta(\widetilde{Y})(b) .$$

De fato,

$$\theta(\widetilde{Y})(bg) = g^{-1} L_b^{-1}(Y_{\pi(b)}) = g^{-1} \theta(\widetilde{Y})(b) .$$

Inversamente, se é dada uma função $f : B \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $f(bg) = g^{-1}f(b)$, podemos definir um campo Y_f sobre M pela fórmula

$$(Y_f)_m = L_b(f(b))$$

onde b é algum elemento da fibra B_m. O campo Y_f está bem definido pois

$$L_{bg}(f(bg)) = L_b g(g^{-1}f(b)) = L_b(f(b)) \ .$$

Além disso, $\theta(\widetilde{Y_f}) = f$, pois, para todo $b \in B$, tem-se

$$\theta(\widetilde{Y_f})(b) = L_b^{-1}((Y_f)_{\pi(b)}) = L_b^{-1}(L_b(f(b))) = f(b) \ .$$

Denotamos por $\mathcal{F}(B)$ o conjunto de todas as funções $f : B \longrightarrow \mathbb{R}^n$ com a propriedade $f(bg) = g^{-1}f(b)$. Segue do que foi dito acima que existe uma correspondência biunívoca entre $\mathfrak{X}(M)$ e $\mathcal{F}(B)$.

Proposição 1.5.1 *Se $f \in \mathcal{F}(B)$ e $Y \in \mathfrak{X}(M)$, então $\widetilde{Y}f \in \mathcal{F}$.*

Demonstração:

$$\begin{aligned}
(\widetilde{Y}f)(bg) &= (\widetilde{Y}_{bg})f \\
&= (f \circ R_g)_{*b}\widetilde{Y}_b \\
&= (g^{-1}f)_{*b}\widetilde{Y}_b \\
&= g^{-1}f_{*b}\widetilde{Y}_b \\
&= g^{-1}(\widetilde{Y}f)(b) \ .
\end{aligned}$$

□

Teorema 1.5.1 *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ então*

$$(\nabla_Y X)_m = L_b\left(\widetilde{Y}_b(\theta(\widetilde{X}))\right) \ .$$

onde $b \in B$ é tal que $\pi(b) = m$.

Demonstração:

Se τ é uma curva integral de Y por $\pi(b)$, então

$$\tau_b'(t) = Y_{\tilde{\tau}_b(t)} \quad \text{e} \quad \tau(0) = \pi(b) = m \ .$$

Segue da unicidade do levantamento horizontal, que

$$\tilde{\tau}_b'(t) = \widetilde{Y}_{\tilde{\tau}_b(t)} \ .$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(\nabla_Y X)_{\pi(b)} &= L_b\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta(\widetilde{X})(\tilde{\tau}_b(t))\right)_{t=0} \\
&= L_b\left((\theta(\widetilde{X}))_{*b}(\tilde{\tau}_b'(0))\right) \\
&= L_b\left((\theta(\widetilde{X}))_{*b}(\widetilde{Y}_b)\right) \\
&= L_b\left(\widetilde{Y}_b(\theta(\widetilde{X}))\right) \ .
\end{aligned}$$

□

Segue imediatamente do teorema acima que quaisquer que sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$,

$$\nabla_Y(X + Z) = \nabla_Y X + \nabla_Y Z$$
$$\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$
$$\nabla_{fY} X = f\nabla_Y X \ .$$

Temos também

$$\begin{aligned}
(\nabla_Y(fX))_{\pi(b)} &= L_b(\widetilde{Y}_b(\theta((f\circ\pi)\widetilde{X}))) \\
&= f(\pi(b))L_b(\widetilde{Y}_b(\theta(\widetilde{X}))) + \widetilde{Y}_b(f\circ\pi)L_b(\theta_b(\widetilde{X}_b)) \\
&= f(\pi(b))(\nabla_Y X)_{\pi(b)} + Y_{\pi(b)}(f)X_b \ .
\end{aligned}$$

Portanto, ∇ é uma derivada covariante em M.

Se $A \in gl(n, \mathbb{R})$ e $f \in \mathcal{F}(B)$, então

$$A^* f = -Af \ .$$

De fato,

$$A_b^* f = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(be^{tA})|_{b=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{-tA} f(b)) = -Af(b) \ .$$

Em particular $A^*\theta(\widetilde{Y}) = -A\theta(\widetilde{Y})$.

Uma p-forma α sobre B a valores vetoriais é dita **horizontal** se $\alpha_b|_{V_b} = 0$ para todo $b \in B$.

Proposição 1.5.2 *Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto das 1-formas horizontais α sobre B com valores em $I\!R^n$ satisfazendo $R_g^*\alpha = g^{-1}\alpha$ e o conjunto $\mathfrak{X}(T^*M \otimes TM)$.*

Demonstração:

A condição $(R_g^*\alpha)_b = g^{-1}\alpha_b$ é equivalente a $\alpha_{bg}(Y_{bg}) = g^{-1}\alpha_b(Y_b)$ $(\forall Y \in \mathfrak{X}(B))$. De fato, se $X \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$(R_g^*\alpha)_b(\widetilde{X}_b) = \alpha_{bg}((R_g)_{*b}\widetilde{X}_b) = \alpha_{bg}(\widetilde{X}_{bg})$$

e, como α é uma forma horizontal, segue que

$$(R_g^*\alpha)_b(Y_b) = \alpha_{bg}(Y_{bg}) \quad (\forall Y \in \mathfrak{X}(B)) \ .$$

Dado um tensor $K \in \mathfrak{X}(T^*M \otimes TM)$, definamos uma 1-forma α sobre B com valores em $I\!R^n$ por

$$\alpha_b(Y_b) = L_b^{-1} K_{\pi(b)}(\pi_*(Y_b)) \ .$$

Se Y é um campo vertical, tem-se $\pi_*(Y) = 0$, logo $\alpha(Y) = 0$, de onde segue que α é uma forma horizontal; além disso,

$$\begin{aligned} \alpha_{bg}(\widetilde{X}_{bg}) &= L_{bg}^{-1} K_{\pi(bg)}(\pi_*(\widetilde{X}_{bg})) \\ &= g^{-1} L_b^{-1} K_{\pi(b)}(\pi_*\widetilde{X}_b) \\ &= g^{-1}\alpha_b(\widetilde{X}_b) \ . \end{aligned}$$

Logo,

$$\alpha_{bg}(Y_{bg}) = g^{-1}\alpha_b(Y_b) \quad (\forall Y \in \mathfrak{X}(B)) \ .$$

Suponhamos agora que seja dada uma 1-forma horizontal α com valores em $\mathbb{R}^n$ satisfazendo $\alpha_{bg}(Y_{bg}) = g^{-1}\alpha_b(Y_b)$. Definamos $K \in T^*M \otimes TM$ por

$$K_{\pi(b)}(X) = L_b(\alpha_b(\widetilde{X}_b)) .$$

K está bem definido, pois

$$L_{bg}(\alpha_{bg}(\widetilde{X}_{bg})) = L_b g(g^{-1}\alpha_b(\widetilde{X}_b)) = L_b(\alpha_b(\widetilde{X}_b)) .$$

□

Observemos que se $X \in \mathfrak{X}(M)$, então $\widetilde{X}$ e X são π-relacionados. Logo,

$$\pi_*[\widetilde{X}, \widetilde{Y}] = [\pi_*\widetilde{X}, \pi_*\widetilde{Y}] = [X, Y]$$

quaisquer que sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Segue que $\widetilde{[X, Y]} = [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]_H$.

Teorema 1.5.2 *A torção da derivada covariante ∇ é dada por*

$$T_{\pi(b)}(X, Y) = L_b(\Theta_b(\widetilde{X}, \widetilde{Y})) .$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\Theta_b(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) &= (\mathrm{d}\theta)(\widetilde{X}, \widetilde{Y})(b) = \widetilde{X}_b(\theta(\widetilde{Y})) - \widetilde{Y}_b(\theta(\widetilde{X})) - \theta_b([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]_b) \\
&= L_b^{-1}(\nabla_X Y)_{\pi(b)} - L_b^{-1}(\nabla_Y X)_{\pi(b)} - L_b^{-1}\pi_*[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]_b \\
&= L_b^{-1}\left((\nabla_X Y)_{\pi(b)} - (\nabla_Y X)_{\pi(b)} - [X, Y]_{\pi(b)}\right) \\
&= L_b^{-1} T_{\pi(b)}(X, Y) .
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.5.3 *Existe uma correspondência biunívoca entre as 2-formas horizontais α com valores em $gl(n, \mathbb{R})$ tais que*

$$R_g^*\alpha = g^{-1}\alpha g$$

e os tensores $K \in \mathfrak{X}(\Lambda^2 T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$.

Demonstração:

Dado $K \in \mathfrak{X}(\Lambda^2 T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$, definamos uma 2-forma α sobre B tomando valores em $gl(n, I\!R)$ por

$$\alpha_b(X, Y)(v) = L_b^{-1}\left(K_{\pi(b)}(\pi_* X, \pi_* Y)(L_b v)\right)$$

onde $b \in B$, $X, Y \in \mathfrak{X}(B)$ e $v \in I\!R^n$.

Pela sua definição α é horizontal. Portanto,

$$(R_g^*\alpha)_b(X, Y) = \alpha_{bg}(X, Y) .$$

Temos que

$$\begin{aligned}
\alpha_{bg}(X, Y)(v) &= L_{bg}^{-1}\left(K_{\pi(bg)}(\pi_* X, \pi_* Y)(L_{bg} v)\right) \\
&= g^{-1} L_b\left(K_{\pi(b)}(\pi_* X, \pi_* Y)(L_b(gv))\right) \\
&= g^{-1}\alpha_b(X, Y)(gv) \\
&= (g^{-1}\alpha_b(X, Y)g)(v) .
\end{aligned}$$

Logo,

$$R_g^*\alpha = g^{-1}\alpha g .$$

Agora, seja α uma 2-forma horizontal sobre B a valores em $gl(n, I\!R)$ satisfazendo

$$\alpha_{bg}(X, Y) = g^{-1}\alpha_b(X, Y)g ;$$

definimos $K \in \mathfrak{X}(\Lambda^2 T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$ por

$$K_{\pi(b)}(X, Y)Z = L_b(\alpha_b(\widetilde{X}, \widetilde{Y})(L_b^{-1}(Z_{\pi(b)})))$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. K está bem definida pois

$$\begin{aligned}
L_{bg}(\alpha_{bg}(\widetilde{X}, \widetilde{Y})L_{bg}^{-1}(Z_{\pi(bg)})) &= L_b g(g^{-1}\alpha_b(\widetilde{X}, \widetilde{Y})gg^{-1}L_b(Z_{\pi(b)})) \\
&= L_b(\alpha_b(\widetilde{X}, \widetilde{Y})L_b^{-1}(Z_{\pi(b)})) .
\end{aligned}$$

$\square$

Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$, definimos uma função $g : B \rightarrow I\!R^n$ por

$$g(b) = L_b^{-1}(X_{\pi(b)}) \ .$$

Usaremos a notação $g = L^{-1}X$. Com isto temos

$$L^{-1}\nabla_Y X = \widetilde{Y}(\theta(\widetilde{X})) \ .$$

Proposição 1.5.4 *O tensor de curvatura R da derivada covariante ∇ é dado por*

$$R_{\pi(b)}(X, Y)Z = L_b(\Omega_b(\widetilde{X}, \widetilde{Y})(L_b^{-1} Z_{\pi(b)}))$$

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Demonstração:

Seja $\{X_{ij}\}$ uma base de $gl(n, I\!R)$. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, existem funções $a_{ij} : B \rightarrow I\!R$, tais que

$$[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]_V = \sum \alpha_{ij} X_{ij}^* \ .$$

Seja $A : B \rightarrow gl(n, I\!R)$ definida por

$$A = \sum a_{ij} X_{ij} \ .$$

Logo,

$$([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]_V)_b = a_{ij}(b)(X_{ij}^*)_b = (a_{ij}(b)X_{ij})_b^* = (A(b))_b^* \ .$$

Usamos a notação $A_b^* = (A(b))_b^*$. Portanto,

$$([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]_V)_b = A_b^* \ .$$

Para todo $b \in B$ e quaisquer que sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned} L_b\left(\Omega_b(\widetilde{X}, \widetilde{Y})(L_b^{-1} Z_{\pi(b)})\right) &= L_b\left(\mathrm{d}\omega(\widetilde{X}, \widetilde{Y})(b)(\theta_b(\widetilde{Z}_b))\right) \\ &= L_b\left(-\omega_b(([\widetilde{X}, \widetilde{Y}]_V)_b)\theta_b(\widetilde{Z}_b)\right) \\ &= L_b\left(-\omega_b(A_b^*)\theta_b(\widetilde{Z}_b)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= L_b\left(-A(b)\theta_b(\tilde{Z}_b)\right) \\
&= L_b\left(A_b^*(\theta(\tilde{Z}))\right) \\
&= L_b\left(([\widetilde{X},\widetilde{Y}]_b - ([\widetilde{X},\widetilde{Y}]_H)_b)(\theta(\tilde{Z}))\right) \\
&= L_b\left(\widetilde{X}_b(L^{-1}(\nabla_Y Z) - \widetilde{Y}_b\left(L^{-1}(\nabla_X Z)\right) - [\widetilde{X,Y}]_b(\theta(\tilde{Z}))\right) \\
&= L_b\left(\widetilde{X}_b(\theta(\widetilde{\nabla_Y Z})) - \widetilde{Y}_b(\theta(\widetilde{\nabla_X Z})) - L_b^{-1}(\nabla_{[X,Y]}Z)_{\pi(b)}\right) \\
&= (\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z)_{\pi(b)} \\
&= R_{\pi(b)}(X,Y)Z\ .
\end{aligned}
$$

□

1.6 Definição de Conexão no Fibrado de Referenciais a Partir de uma Derivada Covariante em M

Vimos acima que dada uma conexão em B obtemos uma derivada covariante em M. Veremos agora a recíproca disto. Suponhamos que seja dada uma derivada covariante D em M, e desejamos, a partir daí, definir uma conexão H em B.

Seja U um aberto coordenado de M e sejam $(X_1,\ldots,X_n)$ um referencial móvel de M definido em U, f a função de $\pi^{-1}(U)$ em $GL(n,\mathbb{R})$ definida na demonstração da Proposição 1.5.4, w_j^i as 1-formas definidas em U por $DX_i = w_i^j \otimes X_j$ e $w = (w_j^i)$. Definimos ω em $\pi^{-1}(U)$ por

$$\omega = f\mathrm{d}f^{-1} + f\pi^* w f^{-1}$$

onde f^{-1} é a função de $\pi^{-1}(U)$ em $GL(n,\mathbb{R})$ definida por $f^{-1}(b) = (f(b))^{-1}$. A forma ω não depende das escolhas de U e de $(X_1,\ldots,X_n)$. Com efeito, seja V outro aberto coordenado de M e sejam $(Y_1,\ldots,Y_n)$ um referencial móvel de M definido em V, f', $w_j'^i$ e w' definidas como antes. Se $U\cap V \neq \emptyset$, então existem funções $a_j^i : U\cap V \to \mathbb{R}$ tais que $Y_j = a_j^i X_i$.

Seja $A = (a_j^i)$ e $A^{-1} = (b_j^i)$. Logo,

$$X_k = b_k^i Y_i\ .$$

Temos que

$$\begin{aligned} w_i'^l \otimes Y_l &= DY_i = D(a_i^k X_k) \\ &= \mathrm{d}a_i^j \otimes X_j + a_i^k w_k^j \otimes X_j \\ &= (b_j^l \mathrm{d}a_i^j + b_j^l w_k^j a_i^k) \otimes Y_l \ . \end{aligned}$$

Portanto, $w_i'^l = b_j^l \mathrm{d}a_i^j + b_j^l w_k^j a_i^k$. De onde segue que

$$w' = A^{-1}\mathrm{d}A + A^{-1}wA \ .$$

Para todo $b \in \pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)$, temos

$$\begin{aligned} bf'(b) &= (\pi(b), (Y_1)_{\pi(b)}, \ldots, (Y_n)_{\pi(b)}) \\ &= (\pi(b), a_1^i(\pi(b))(X_i)_{\pi(b)}, \ldots, a_n^i(\pi(b))(X_i)_{\pi(b)}) \\ &= bf(b)A(\pi(b)) \ . \end{aligned}$$

Logo, $f' = f(A \circ \pi)$.

Se ω' é a 1-forma em B, a valores em $gl(n, \mathbb{R})$, que restrita a $\pi^{-1}(V)$ é definida por

$$\omega' = f'\mathrm{d}(f')^{-1} + f'\pi^* w'(f')^{-1} \ ,$$

então, em $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)$, ω' é dada por

$$\begin{aligned} \omega' &= f(A\circ\pi)\mathrm{d}(f(A\circ\pi))^{-1} + f(A\circ\pi)\pi^*(A^{-1}\mathrm{d}A + A^{-1}wA)(f(A\circ\pi))^{-1} \\ &= f\left((A\circ\pi)\mathrm{d}(A^{-1}\circ\pi) + \mathrm{d}(A\circ\pi)(A^{-1}\circ\pi)\right) f^{-1} + f\mathrm{d}f^{-1} + fwf^{-1} \\ &= \omega \end{aligned}$$

pois

$$(A\circ\pi)\mathrm{d}(A^{-1}\circ\pi) + \mathrm{d}(A\circ\pi)(A^{-1}\circ\pi) = \mathrm{d}((A\circ\pi)(A^{-1}\circ\pi)) = \mathrm{d}I = 0 \ .$$

Desta forma ω está bem definida globalmente sobre B.

Mostremos que

$$\begin{aligned} \omega(X^*) = X & \quad \text{para todo } X \in gl(n, \mathbb{R}) \\ R_g^*\omega = g^{-1}\omega g & \quad \text{para todo } g \in GL(n, \mathbb{R}) \ . \end{aligned}$$

Com efeito, temos que $f^{-1}(bg) = f^{-1}(b)g$. Logo,

$$\begin{aligned}
\omega(X_b^*) &= f(b)(\mathrm{d}f^{-1})_b(X_b^*) + f(b)(\pi^* w)_b(X_b^*)f^{-1}(b) \\
&= f(b)(\mathrm{d}f^{-1})_b\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}be^{tX}\right)_{t=0} + f^{-1}(b)w_{\pi(b)}(\pi_* X_b^*)f(b) \\
&= f(b)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f^{-1}(be^{tX}))_{t=0} \\
&= f(b)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f^{-1}(b)e^{tX}) \\
&= X \, .
\end{aligned}$$

Para todo $v \in T_bB$, temos

$$\begin{aligned}
(R_g^*\omega)_b(v) &= (f\mathrm{d}f^{-1})_{bg}((R_g)_{*b}v) + (f\pi^* wf^{-1})_{bg}((R_g)_{*b}v) \\
&= g^{-1}f(b)\mathrm{d}(f^{-1}\circ R_g)_b(v) + g^{-1}f(b)w_{\pi(b)}(\pi_{*bg}(R_g)_{*b}v)f^{-1}(b)g \\
&= g^{-1}f(b)(\mathrm{d}f^{-1})_b(v)g + g^{-1}f(b)(\pi^* w)_b(v)f^{-1}(b)g \\
&= [g^{-1}\omega g]_b(v) \, .
\end{aligned}$$

Portanto, $R_g^*\omega = g^{-1}\omega g$.

Portanto, pelo Proposição 1.5.3 a distribuição $H = \ker\omega$ é uma conexão em B.

1.7 G-estrutura

Seja G um subgrupo de Lie de $GL(n, I\!R)$. Uma G-estrutura P sobre M é uma subvariedade regular de B tal que:

(i) $\pi : P \longrightarrow M$ é uma submersão;

(ii) para todo $g \in G$ tem-se que $R_g|_P : P \longrightarrow P$;

(iii) para todo $x \in M$, existe um aberto coordenado U_α de M com $x \in U_\alpha$ tal que o sistema de coordenadas

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \subset B \longrightarrow U_\alpha \times GL(n, I\!R) \, , \quad \text{é tal que}$$
$$\psi_\alpha|_{P\cap\pi^{-1}(U_\alpha)} : P \cap \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G \, .$$

Todos os conceitos e resultados desenvolvidos para o fibrado de referenciais B pode ser adaptados para uma G-estrutura devendo-se ter o cuidado de tomar $g \in G$ e observar que ω toma valores na álgebra de Lie do grupo G.

Capítulo 2

O Problema de Equivalência na Geometria Sub-Riemanniana

Neste capítulo iniciamos o estudo das **variedades sub-riemannianas** de codimensão 1 não-degeneradas. Construímos uma G-estrutura sobre tais variedades, fazemos algumas reduções desta G-estrutura e, após complexificarmos o fibrado tangente, mostramos a existência de uma especial derivada covariante sobre tais variedades. Utilizando invariantes fornecidos pelas reduções da G-estrutura, a curvatura e a torção da referida derivada covariante, provamos um teorema de classificação para uma classe de variedades sub-riemannianas.

2.1 Redução da G-estrutura

Definição 2.1.1 *Uma* **variedade sub-riemanniana** *é uma terna* (M, D, g) *onde* M *é uma variedade,* D *é uma distribuição* C^∞ *sobre* M *e* g *é uma métrica sobre* D*. Se* D *é de codimensão* k*, diremos que* M *é uma variedade sub-riemanniana de codimensão* k*.*

Aqui vamos somente considerar variedades sub-riemannianas de codimensão 1. Seja M uma variedade de dimensão $m+1$ e (M, D, g) uma variedade sub-riemanniana de codimensão 1. Consideremos o subfibrado P de B formado por todos os referenciais $(X, X_1, \ldots, X_m)$ onde $\{X_1, \ldots, X_m\}$ é base ortonormal de D. Denotaremos por P^* o conjunto de todos os coreferenciais $(\theta, \theta^1, \ldots, \theta^m)$ que são duais de algum elemento de P. Portanto,

$$\theta(X_i) = 0 \; ;$$
$$\theta^j(X_i) = \delta^i_j \; , \quad \text{para } 1 \leq i, \; j \leq m \; ,$$

para alguma base ortonormal $\{X_1, \ldots, X_m\}$ de D.

Dados (θ, θ^i) e (θ', θ'^i) em P^*, temos

$$\begin{cases} \theta' = \lambda\theta & \text{com } \lambda \neq 0 \\ \theta'^i = a^i_j\theta^j + v^i\theta & \text{onde } (a^i_j) \in O(m) \end{cases} \tag{2.1}$$

A primeira equação decorre do fato de θ e θ' pertencerem ao anulador de D. Agora, se X_i e X'_i são as bases ortonormais de D tais que

$$\theta^j(X_i) = \theta'^j(X'_i) = \delta^j_i$$

com $X_i = c^i_j X'_j$, então

$$c^i_j = \theta'^j(X_i) = a^j_k\theta^k(X_i) + v^i\theta(X_i) = a^j_i \; .$$

Logo, $(a^i_j) = (c^i_j)^t$. De onde segue que $(a^i_j) \in O(m)$.

Portanto P é uma G-estrutura onde G é o grupo das $(m+1) \times (m+1)$ matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ v & a^i_j \end{bmatrix} \quad \text{com } (a^i_j) \in O(m) \; , \quad v = (v^i) \in I\!R^m \quad \text{e} \quad \lambda \neq 0 \; .$$

Para cada secção (θ, θ^i) de P^*, sejam a matriz anti-simétrica (h_{ij}) e as funções h_i tais que

$$\mathrm{d}\theta = h_{ij}\theta^i \wedge \theta^j + h_i\theta^i \wedge \theta \; .$$

Definição 2.1.2 *Dizemos que (M, D, g) é não-degenerada se* $\det(h_{ij}) \neq 0$.

Esta definição não depende de uma particular escolha de seção em P^*. De fato, sejam (θ, θ^i) e (θ', θ'^i) seções em P^*. Segue de (2.1) que

$$\mathrm{d}\theta = \frac{1}{\lambda}\mathrm{d}\theta' + \mathrm{d}\left(\frac{1}{\lambda}\right) \wedge \theta' .$$

Escrevendo

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\theta' &= h'_{ij}\theta'^i \wedge \theta'^j + h_i\theta'^i \wedge \theta' \\ &\text{e} \\ \mathrm{d}\lambda &= \lambda_k\theta^k + \beta\theta \end{aligned}$$

temos

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = -\frac{\lambda_k}{\lambda^2}\theta^k - \frac{\beta}{\lambda^2}\theta$$

e

$$\begin{aligned} & h_{kl}\theta^k \wedge \theta^l + h_k\theta^k \wedge \theta = \mathrm{d}\theta \\ & \quad = \frac{1}{\lambda}h'_{ij}a^i_k a^j_l \theta^k \wedge \theta^l + \left(\frac{2}{\lambda}h'_{ij}a^i_k v^j + h'_i a^i_k - \frac{\lambda_k}{\lambda}\right)\theta^k \wedge \theta \end{aligned}$$

de onde segue que

$$\begin{aligned} h_{kl} &= \frac{1}{\lambda}h'_{ij}a^i_k a^j_l \\ h_k &= \frac{1}{\lambda}\left(2h'_{ij}v^j + \lambda h'_i\right)a^i_k - \frac{\lambda_k}{\lambda} . \end{aligned} \tag{2.2}$$

A primeira equação é equivalente a $H = \frac{1}{\lambda}A^t H' A$ onde $H = (h_{ij})$, $H' = (h'_{ij})$ e $A = (a^i_j)$. Logo,

$$\det H' = \det(\lambda A H A^t) = \lambda^m \det H .$$

Segue que $\det H \neq 0$ se, e somente se, $\det H' \neq 0$.

De agora em diante iremos somente considerar o caso em que (M, D, g) é não-degenerada.

Como H é anti-simétrica, temos que

$$\det H = \det H^t = \det(-H) = (-1)^m \det H ;$$

sendo $\det H \neq 0$, segue que m é par. Escrevamos $m = 2n$.

Proposição 2.1.1 *A G-estrutura P pode ser reduzida, no caso não-degenerado, a uma $\mathbb{Z}_2 \times O(2n)$-estrutura.*

Demonstração:

Seja P_1^* o subconjunto P^* formado por todas as seções tais que $\det(h_{ij}) = 1$. Em P_1^* a forma θ está fixada a menos de sinal. Com efeito, se (θ, θ^i) e (θ', θ'^i) são duas seções em P_1^*, então $\lambda^m = 1$. Como $m = 2n$, segue que $\lambda = \pm 1$.

Segue de $\lambda = \pm 1$ que $\lambda_k = 0$ e a segunda equação de (2.2) torna-se

$$h_k = \pm 2h'_{ij}a^i_k v^j + h'_i a^i_k \ .$$

Segue desta equação que existem v^j tais que $h_k = 0$. Dados (θ', θ'^i) em P_1^* e $(a^i_j) \in O(2n)$, utilizando v^j adequados em (2.1) obtemos uma seção (θ, θ^i) para a qual $h_k = 0$.

Seja P_2^* o conjunto de todas as seções de P_1^* tais que $h_k = 0$. Se (θ, θ^i) e (θ', θ'^i) são duas seções de P_2^*, então a segunda equação de (2.2) se reduz a

$$2h'_{ij}a^i_k v^j = 0 \ .$$

Logo $v^j = 0$. Portanto P_2, o conjunto dos referenciais que são duais dos elementos de P_2^*, é uma G-estrutura onde G é o grupo das matrizes

$$\begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & a^i_j \end{bmatrix} \quad \text{onde } (a^i_j) \in O(2n) \ .$$

Tal grupo é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times O(2n)$.

□

De agora em diante iremos supor que M é orientável e que a distribuição D também é orientada. Desta forma é possível fazer uma escolha de referenciais $(X, X_1, \ldots, X_{2n})$ em P_2 tal que $\lambda = 1$ e o determinante da matriz acima é igual a 1. Denotamos por P_3 o conjunto destes referenciais e por P_3^* o conjunto dos coreferenciais duais. Assim, P_3 é uma G-estrutura onde G é o grupo das matrizes abaixo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^i_j \end{bmatrix} \quad \text{onde } (a^i_j) \in SO(2n) \ ,$$

isto é, P_3 é uma $SO(2n)$-estrutura, onde $SO(2n)$ é o grupo das $2n \times 2n$ matrizes ortogonais com determinante igual a 1.

Se (θ, θ^i), (θ', θ'^i) são seções de P_3^*, então

$$\begin{cases} \theta' = \theta \\ \theta'^i = a^i_j \theta^j & \text{onde } (a^i_j) \in SO(2n) \\ d\theta = h_{ij}\theta^i \wedge \theta^j & \text{com } (h_{ij} = -h_{ji} \text{ e } \det(h_{ij}) = 1) \end{cases}$$

2.2 Formas de Conexão Sub-Riemanniana

Consideremos a G-estrutura P_3 definida sobre a variedade sub-riemanniana (M, D, g). Construiremos formas de conexão e formas de torção que resolvem o problema de equivalência. Começaremos considerando as formas tautológicas definidas intrinsecamente sobre P_3 que serão denotadas pelas mesmas letras θ e θ^i.

Teorema 2.2.1 *Existem únicas formas ω^i_j e τ^i sobre P_3 satisfazendo a equação*

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \omega^i_j + \theta \wedge \tau^i \tag{2.3}$$

e as condições

(i) $\omega^i_j = -\omega^j_i$

(ii) $\sum \tau^i \wedge \theta^i = 0$

Demonstração:

Mostremos inicialmente que existe um par de formas ω^i_j e τ^i que satisfazem (2.3).

Seja $(X, X_1, \ldots, X_{2n})$ um referencial móvel de M pertencente a P_3 e seja $(\alpha, \alpha^1, \ldots, \alpha^{2n})$ o seu coreferencial dual. Segue da Proposição 1.4.4 que existem funções $f^i_j : P_3 \to I\!R$ tais que

$$(X_i)_{\pi(b)} = f^j_i(b)(Y_j)_{\pi(b)}$$

onde $0 \leq i,j \leq 2n$ e $X_o = Y_o = X$, qualquer que seja $(Y, Y_1, \ldots, Y_{2n})$ referencial móvel de M pertencente a P_3 e $b = (\pi(b), (Y)_{\pi(b)}, (Y_1)_{\pi(b)}, \ldots, (Y_{2n})_{\pi(b)})$. Logo,

$$
\begin{aligned}
&f_o^o = 1 \\
&f_o^s = f_s^o = 0 \ , \quad 1 \leq s \leq 2n \\
&f = (f_j^i) \in SO(2n+1) \ .
\end{aligned}
$$

Então, $f_l^i f_l^j = \delta_j^i$.

As formas tautológicas são dadas por $\theta^i = f_k^i \pi^* \alpha^k$, onde $\theta^o = \theta$ e $\alpha^o = \alpha$. Assim, $\pi^* \alpha^l = f_l^j \theta^j$.

Existem formas ψ_j^i e t^i sobre M, com

$$
\mathrm{d}\alpha^i = \alpha^j \wedge \psi_j^i + \alpha \wedge t^i \ .
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\theta^i &= \mathrm{d}(f_k^i \pi^* \alpha^k) \\
&= \mathrm{d}f_k^i \wedge (f_k^j \theta^j) + f_k \pi^*(\alpha^l \wedge \psi_l^k + \alpha \wedge t^k) \\
&= \theta^j \wedge (-f_k^j \mathrm{d}f_k^i) + f_k^i f_l^j \theta^j \wedge \pi^* \psi_l^k + \theta \wedge (f_k^i \pi^* t^k) \\
&= \theta^j \wedge (-f_k^j \mathrm{d}f_k^i + f_k^i f_l^j \pi^* \psi_l^k) + \theta \wedge (f_k^i \pi^* t^k)
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
\mathrm{d}\theta^i = \theta^j \wedge \omega_j^i + \theta \wedge \tau^i
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\omega_j^i &= -f_k^j \mathrm{d}f_k^i + f_k^i f_l^j \pi^* \psi_l^k \\
\tau_1^i &= f_k^i \pi^* t^k \ .
\end{aligned}
$$

Os termos $f_k^i f_l^j \pi^* \psi_l^k$ e $f_k^i \pi^* t^k$ são combinações lineares de pull-backs por π de formas sobre M, logo podem ser escritas como combinações lineares das formas θ^i e θ com coeficientes funções sobre P_3. Logo,

$$
\omega_j^i = -f_l^j \mathrm{d}f_l^i + \omega_{jk}^i \theta^k + \omega_{jo}^i \theta \ .
$$

De forma análoga,

$$\tau_1^i = \tau_k^i \theta^k + c^i \theta \ .$$

Podemos considerar $c^i = 0$ pois a forma $\tau^i = \tau_k^i \theta^k$ também, juntamente com ω_j^i, satisfaz (2.3).

Sejam agora $\tilde{\omega}_j^i$ e $\tilde{\tau}^i$ duas formas genéricas satisfazendo (2.3). Segue do lema de Cartan que

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_j^i &= \omega_j^i + a_{jk}^i \theta^k + b_j^i \theta \\
\tilde{\tau}^i &= \tau^i + b_k^i \theta^k + b^i \theta
\end{aligned}$$

com $a_{jk}^i = a_{kj}^i$ e novamente podemos supor $b^i = 0$.

Mostramos então que todo par de formas que satisfazem (2.3) são dadas pelas equações acima. Vamos agora determinar as funções a_{jk}^i e b_j^i de forma única de modo que (i) e (ii) fiquem também satisfeitas.

Da equação (i) vem

$$\begin{aligned}
0 &= \tilde{\omega}_j^i + \tilde{\omega}_i^j \\
&= -(f_l^j \mathrm{d} f_l^i + f_l^i \mathrm{d} f_l^j) + (\omega_{jk}^i + \omega_{ik}^j + a_{jk}^i + a_{ik}^j)\theta^k \\
&\quad +(\omega_{jo}^i + \omega_{io}^j + b_j^i + b_i^j)\theta
\end{aligned}$$

e da equação (ii)

$$0 = \tilde{\tau}^i \wedge \theta^i = (\tau_k^i + b_k^i)\theta^k \wedge \theta^i .$$

Como $0 = \mathrm{d}(\delta_j^i) = \mathrm{d}(f_l^i f_l^j) = f_l^j \mathrm{d} f_l^i + f_l^i \mathrm{d} f_l^j$, segue destas equações que

$$\begin{aligned}
a_{jk}^i + a_{ik}^j + \omega_{jk}^i + \omega_{ik}^j = 0 \\
b_j^i + b_i^j + \omega_{jo}^i + \omega_{io}^j = 0 \\
b_j^i - b_i^j + \tau_j^i - \tau_i^j = 0 \ .
\end{aligned}$$

Da segunda e da terceira equações obtemos

$$b_j^i = \frac{1}{2}(-\omega_{jo}^i - \omega_{io}^j - \tau_j^i + \tau_i^j) \ .$$

Da primeira equação e de $a^i_{jk} = a^i_{kj}$ vem

$$\begin{aligned}
a^i_{jk} &= -a^j_{ik} - \omega^i_{jk} - \omega^j_{ik} \\
&= -a^j_{ki} - \omega^i_{jk} - \omega^j_{ik} \\
&= a^k_{ji} + \omega^j_{ki} + \omega^k_{ji} - \omega^i_{jk} - \omega^j_{ik} \\
&= -a^i_{kj} - \omega^k_{ij} - \omega^i_{kj} + \omega^j_{ki} + \omega^k_{ji} - \omega^i_{jk} - \omega^j_{ik} \ .
\end{aligned}$$

Logo,

$$a^i_{jk} = \frac{1}{2}\left(-\omega^k_{ij} - \omega^i_{kj} + \omega^j_{ki} + \omega^k_{ji} - \omega^i_{jk} - \omega^j_{ik}\right)$$

o que prova a proposição.

$\square$

Escrevendo $\Theta^t = (\theta^1, \ldots, \theta^{2n})$, $\tau^t = (\tau^1, \ldots, \tau^{2n})$ e $\omega = (\omega^i_j)$, temos

$$\mathrm{d}\Theta = -\omega \wedge \Theta - \tau \wedge \theta \ .$$

Se $\Theta' = g\Theta$ é um outro coreferencial, então

$$\begin{aligned}
\omega' &= g\mathrm{d}g^{-1} + g\omega g^{-1} \ , \\
\tau' &= g\tau \ .
\end{aligned}$$

2.3 Redução da $SO(2n)$-estrutura

Observemos que toda $2n \times 2n$ matriz que comuta com a $2n \times 2n$ matriz

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} ,$$

onde I é a $n \times n$ matriz unidade, é da forma

$$\begin{bmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} ,$$

onde A_1 e A_2 são blocos de ordem $n \times n$.

Usaremos a notação

$$\begin{aligned} U_R(n) &= \{A \in O(2n) \; ; \;\; AJ = JA\} \\ u_R(n) &= \{A \in o(2n) \; ; \;\; AJ = JA\} \; . \end{aligned}$$

Agora vamos reduzir a G-estrutura P_3 para uma U_R-estrutura. Para isto, mostremos antes o lema seguinte.

Lema 2.3.1 *Seja V um espaço vetorial real de dimensão $2n$ com produto interno g e seja $H : V \to V$ um operador anti-simétrico sobre V. Existe uma base ortonormal $\mathcal{B}$ de V tal que*

$$[H]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} & & & -\lambda_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -\lambda_n \\ \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_n & & & \end{bmatrix}$$

com $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$. Além disso, se $\mathcal{B}'$ é uma base ortonormal de V tal que $[H]_{\mathcal{B}'}J = J[H]_{\mathcal{B}'}$ e $[H]_{\mathcal{B}'}J$ definida negativa, então $\lambda_\alpha > 0$ e a matriz mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$ pertence a $U_R(n)$.

Demonstração:

Seja $V_{\mathbb{C}}$ o complexificado de V e estendamos g para $V_{\mathbb{C}}$ por bilinealidade. Seja o produto hermitiano sobre $V_{\mathbb{C}}$ definido por

$$\langle v, w\rangle = g(v, \overline{w})$$

com relação a este novo produto H é ainda anti-simétrico. Com efeito,

$$\langle Hv, w\rangle = g(Hv, \overline{w}) = -g(v, H\overline{w}) = -g(v, \overline{Hw}) = -\langle v, Hw\rangle \; .$$

Os autovalores de H são da forma $i\lambda$ com $\lambda \in \mathbb{R}$, pois se $Hv = \mu v$, então

$$\begin{aligned} \mu\langle v, v\rangle &= \langle \mu v, v\rangle = \langle Hv, v\rangle = -\langle v, Hv\rangle = -\langle v, \mu v\rangle \\ &= -\overline{\mu}\langle v, v\rangle \; . \end{aligned}$$

Logo, $\mu + \overline{\mu} = 0$.

Se $\mu = i\lambda$ é autovalor de H associado ao autovetor v, então $\overline{\mu} = -i\lambda$ é autovalor associado ao autovetor $\overline{v}$. De fato,

$$H\overline{v} = \overline{Hv} = \overline{\mu v} = \overline{\mu}\,\overline{v} \ .$$

Se W é um subespaço de V invariante por H, então $W^{\perp}$ também o é, pois dado $w_1 \in W$ e $w_2 \in W^{\perp}$, temos

$$0 = \langle H w_1, w_2 \rangle = -\langle w_1, H w_2 \rangle \ ,$$

logo, $Hw_2 \in W^{\perp}$. Desta forma podemos obter uma base ortonormal $\mathcal{B}$ tal que $[H]_{\mathcal{B}}$ é a matriz desejada.

Escrevamos $\mathcal{B}' = \{u_1, \ldots, u_{2n}\}$. Definimos o operador linear J sobre V por

$$Ju_\alpha = u_{\alpha+n} \ , \quad Ju_{\alpha+n} = -u_\alpha \ .$$

Logo, $[J]_{\mathcal{B}'}$ é a matriz J acima e $HJ = JH$. Os autovalores de J são i e $-i$, pois seu polinômio característico é dado por $P(x) = [(x-i)(x+i)]^{2n}$. Assim,

$$V_{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$$

onde

$$\begin{aligned} V^{1,0} &= \{v \in V_{\mathbb{C}} \ ; \ \ Jv = iv\} \\ V^{0,1} &= \{w \in V_{\mathbb{C}} \ ; \ \ Jw = -iw\} = \{\overline{v} \in V_{\mathbb{C}} \ ; \ \ v \in V^{1,0}\} \end{aligned}$$

e, portanto, $\dim V^{1,0} = \dim V^{0,1} = n$.

Se $v \in V^{1,0}$ então

$$J(Hv) = H(Jv) = H(iv) = iHv \ ,$$

isto é, $Hv \in V^{1,0}$. Portanto, $V^{1,0}$ é invariante por H. Desta forma, podemos obter uma base ortonormal $\{w_1, \ldots, w_n\}$ de $V^{1,0}$ formada por autovetores de H,

$$\begin{aligned} Hw_\alpha &= i\lambda_\alpha w_\alpha \\ \lambda_1 &\leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n \ . \end{aligned}$$

Segue daí que $\{\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_n\}$ é base ortonormal de $V^{0,1}$ com

$$H\overline{w}_j = -i\lambda_j \overline{w}_j \ .$$

Portanto, $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n, \overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_n\}$ é base de $V_{\mathbb{C}}$ formada por autovalores de H.

Mostremos que $\lambda_\alpha > 0$ para todo α. Com efeito, como HJ é definida negativa, temos

$$\langle HJw, w\rangle = g(HJw, \overline{w}) = g(HJ(\operatorname{Re} w), \operatorname{Re} w) + g(HJ(\operatorname{Im} w), \operatorname{Im} w) \leq 0$$

pois HJ é simétrico. Assim

$$-\lambda_\alpha \langle w_\alpha, w_\alpha\rangle = \langle -\lambda_\alpha w_\alpha, w_\alpha\rangle = \langle HJw_\alpha, w_\alpha\rangle \leq 0 \ .$$

Portanto, $\lambda_\alpha > 0$.

Sejam $v_1, \ldots, v_{2n} \in V$ dados por

$$\begin{aligned} v_\alpha &= \frac{w_\alpha + \overline{w}_\alpha}{\sqrt{2}} \\ v_{\alpha+n} &= \frac{i(w_\alpha - \overline{w}_\alpha)}{\sqrt{2}} \ . \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} Hv_\alpha &= \frac{i\lambda_\alpha w_\alpha - i\lambda_\alpha \overline{w}_\alpha}{\sqrt{2}} = \lambda_\alpha v_{\alpha+n} \\ Hv_{\alpha+n} &= i\frac{i\lambda_\alpha w_\alpha + i\lambda_\alpha w_\alpha}{\sqrt{2}} = -\lambda_\alpha v_\alpha \ . \end{aligned}$$

Mostremos agora que $\{v_1, \ldots, v_{2n}\}$ é ortogonal segundo g. De fato,

$$\begin{aligned} g(v_\alpha, v_\beta) &= \frac{1}{2}\left(\langle w_\alpha, \overline{w}_\beta\rangle + \langle w_\alpha, w_\beta\rangle + \langle w_\beta, w_\alpha\rangle + \langle \overline{w}_\alpha, w_\beta\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta}) \\ &= \delta_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(v_\alpha, v_{\beta+n}) &= -\frac{i}{2}\left(\langle w_\alpha, \overline{w}_\beta\rangle - \langle w_\alpha, w_\beta\rangle + \langle w_\beta, w_\alpha\rangle + \langle \overline{w}_\alpha, w_\beta\rangle\right) \\ &= -\frac{i}{2}(-\delta_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta}) \end{aligned}$$

$$= \quad 0$$

$$\begin{aligned}
g(v_{\alpha+n}, v_{\beta+n}) &= -\frac{1}{2}\left(\langle w_\alpha, \overline{w}_\beta\rangle - \langle w_\alpha, w_\beta\rangle - \langle w_\beta, w_\alpha\rangle + \langle \overline{w}_\alpha, w_\beta\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}(\delta_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta}) \\
&= \delta_{\alpha\beta}\ .
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_{2n}\}$ é uma base ortonormal de V tal que

$$[H]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} & & & -\lambda_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & -\lambda_n \\ \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_n & & & \end{bmatrix}$$

com $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$.

Temos que,

$$\begin{aligned}
Jv_\alpha &= \frac{iw_\alpha - i\overline{w}_\alpha}{\sqrt{2}} = v_{\alpha+n} \\
Jv_{\alpha+n} &= i\frac{iw_\alpha + i\overline{w}_\alpha}{\sqrt{2}} = -v_\alpha\ .
\end{aligned}$$

Seja A o operador linear sobre V definido por $Au_j = v_j$. Logo,

$$\begin{aligned}
JAu_\alpha &= Jv_\alpha = v_{\alpha+u} = Au_{\alpha+n} = AJu_\alpha \\
JAu_{\alpha+n} &= Jv_{\alpha+n} = -v_\alpha = -Au_\alpha = AJu_{\alpha+n}\ .
\end{aligned}$$

Portanto, $JA = AJ$. Segue daí que a matriz mudança de base de $\mathcal{B}$ para $\mathcal{B}'$ pertence a $U_R(n)$.

$\square$

Consideremos o subfibrado P_4^* de todos os coreferenciais de P_3^* tal que $(h_{ij}) \in u_R(n)$, isto é,

$$h_{\alpha\beta} = h_{\alpha+n,\beta+n} \quad \text{e} \quad h_{\alpha+n,\beta} = -h_{\alpha,\beta+n} \quad \text{onde } 1 \leq \alpha, \beta \leq n\ .$$

e $(h_{ij})J$ é definida negativa.

Se $(\theta, \theta^1, \ldots, \theta^{2n})$ e $(\theta, \theta'^1, \ldots, \theta'^{2n})$ são coferenciais em P_4^* com

$$\theta'^i = a^i_j \theta^j$$

então, pelo lema anterior, temos

$$a^\alpha_\beta = a^{\alpha+n}_{\beta+n} \quad \text{e} \quad a^{\alpha+n}_\beta = -a^\alpha_{\beta+n} \ .$$

isto é, $(a^i_j) \in U_R(n)$. Portanto P_4, o conjunto dos referenciais dos quais os elementos de P_4^* são duais, é uma $U_R(n)$-estrutura.

Seja $J : D \to D$ o operador linear definido como segue: seja $(e, e_1, \ldots, e_n)$ um referencial de P_4, definimos

$$Je_\alpha = e_{\alpha+n} \quad \text{e} \quad Je_{\alpha+n} = -e_\alpha \ .$$

Logo, a matriz de J em relação a qualquer referencial de P4 é sempre a mesma.

$$\begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix} .$$

De fato, se $(e, e'_1, \ldots, e'_n)$ é outro referencial de P_4 com $e'_j = a^i_j a_i$, onde $(a^i_j) \in U_R(n)$, então

$$\begin{aligned} Je'_\alpha &= J(a^i_j e_i) \\ &= J(a^\beta_\alpha e_\beta + a^{\beta+n}_\alpha e_{\beta+n}) \\ &= a^{\beta+n}_{\alpha+n} e_{\beta+n} + a^\beta_{\alpha+n} e_\beta \\ &= e'_{\alpha+n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Je'_{\alpha+n} &= J(a^i_{\alpha+n} e_i) \\ &= J(a^\beta_{\alpha+n} e_\beta + a^{\beta+n}_{\alpha+n} e_{\beta+n}) \\ &= -a^{\beta+n}_\alpha e_{\beta+n} - a^\beta_\alpha e_\beta \\ &= e'_\alpha \end{aligned}$$

Observemos que $J^2 = -I$.

Lema 2.3.2 *Considerando $\langle A, B\rangle = -\mathrm{tr}(AB)$ como sendo o produto interno em $o(2n)$, temos*

$$u_R(n)^\perp = \{B \in o(2n) \colon\ JB + BJ = 0\}\ .$$

Demonstração:

Notemos que $u_R(n) = \{A \in o(2n);\ AJ = JA\}$.

O subespaço $W = \{B \in o(2n);\ JB + BJ = 0\}$ está contido em $u_R(n)^\perp$ pois se $B \in W$ e A é um elemento genérico de $u_R(n)$, temos

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\langle AJ^2B\rangle = -\mathrm{tr}(JABJ) = -\langle A, B\rangle\ ,$$

logo $\langle A, B\rangle = 0$.

Se $X \in o(2n)$, $A = \dfrac{X - JXJ}{2}$ e $B = \dfrac{X + JXJ}{2}$, então $X = A + B$, $A \in u(n)$ e $B \in W$. Segue que $o(2n) = u_R(n) \oplus W$. Portanto, $W = u_R(n)^\perp$.

□

Observemos que se $H \in u_R(n)^\perp$ então

$$H = \begin{bmatrix} -H_1 & H_2 \\ H_2 & H_1 \end{bmatrix}$$

onde H_1 e H_2 são $n \times n$ matrizes.

Teorema 2.3.1 *Existem únicas 1-formas ω^i_{1j}, τ^i_{1j} e τ^i_o satisfazendo a equação*

$$d\theta^i = \theta^j \wedge \omega^i_{1j} + \theta^j \wedge \tau^i_{1j} + \theta \wedge \tau^i_o$$

e as condições

- $\omega^i_{1j} = -\omega^j_{1i}$, $\omega^{\alpha+n}_{1,\beta+n} = \omega^\alpha_{1\beta}$, $\omega^{\alpha+n}_{1\beta} = -\omega^\alpha_{1,\beta+n}$
- $\tau^i_{1j} = -\tau^j_{1i}$, $\tau^{\alpha+n}_{1,\beta+n} = -\tau^\alpha_{1\beta}$, $\tau^{\alpha+n}_{1\beta} = -\tau^\alpha_{1,\beta+n}$
- $\tau^i_o \wedge \theta^i = 0$

Demonstração:

Sejam ω^i_j e τ^i_o como no Teorema ??. A decomposição $\omega^i_j = \omega^i_{1j} + \tau^i_{1j}$ com $(\omega^i_{1j}) \in u(n)$ e $(\tau^i_{1j}) \in u(n)^\perp$, nos fornece as formas ω^i_{1j} e τ^i_{1j} que satisfazem a equação e as condições acima. A unicidade de ω^i_{1j} e τ^i_{1j} segue da unicidade de ω^i_j.

□

Introduziremos agora as formas complexas

$$
\begin{aligned}
\zeta^\alpha &= \theta^\alpha + i\theta^{\alpha+n} \\
\eta^\alpha_{1\beta} &= \omega^\alpha_{1\beta} + i\omega^{\alpha+n}_{1\beta} \\
\gamma^\alpha_{1\overline{\beta}} &= \tau^\alpha_{1\beta} + i\tau^{\alpha+n}_{1\beta} \\
\gamma^\alpha_o &= \tau^\alpha_o + i\tau^{\alpha+n}_o \,.
\end{aligned}
$$

Usamos a notação

$$\zeta^{\overline{\alpha}} = \overline{\zeta^\alpha} \,, \quad \eta^{\overline{\alpha}}_{1\overline{\beta}} = \overline{\eta^\alpha_{1\beta}} \,, \quad \gamma^{\overline{\alpha}}_{1\beta} = \overline{\gamma^\alpha_{1\overline{\beta}}} \quad \text{e} \quad \gamma^{\overline{\alpha}}_0 = \overline{\gamma^\alpha_0} \,.$$

Seja $ig_{\alpha\overline{\beta}} = h_{\alpha\beta} + ih_{\alpha,\beta+n}$. Temos que $g_{\alpha\overline{\beta}} = \overline{g_{\beta\overline{\alpha}}}$ e

$$\mathrm{d}\theta = ig_{\alpha\overline{\beta}}\zeta^\alpha \wedge \zeta^{\overline{\beta}} \,.$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\theta &= h_{ij}\theta^i \wedge \theta^j \\
&= h_{\alpha\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta + h_{\alpha,\beta+n}\theta^\alpha \wedge \theta^{\beta+n} + h_{\alpha+n,\beta}\theta^{\alpha+n} \wedge \theta^\beta + h_{\alpha+n,\beta+n}\theta^{\alpha+n} \wedge \theta^{\beta+n} \\
&= h_{\alpha\beta}\mathrm{Re}(\zeta^\alpha \wedge \zeta^{\overline{\beta}}) - h_{\alpha,\beta+n}\mathrm{Im}(\zeta^\alpha \wedge \zeta^{\overline{\beta}}) \\
&= ig_{\alpha\overline{\beta}}\zeta^\alpha \wedge \zeta^{\overline{\beta}} \,.
\end{aligned}
$$

uma vez que $ig_{\alpha\overline{\beta}}\zeta^\alpha \wedge \zeta^{\overline{\beta}}$ é uma 2-forma real, pois

$$\overline{ig_{\alpha\overline{\beta}}\zeta^\alpha \wedge \zeta^{\overline{\beta}}} = ig_{\alpha\overline{\beta}}\zeta^\alpha \wedge \zeta^{\overline{\beta}} \,.$$

Procedendo de forma análoga, vemos que podemos escrever o Teorema ?? da seguinte maneira:

Teorema 2.3.2 *Existem únicas formas* $\eta^\alpha_{1\beta}$, $\gamma^\alpha_{1\overline{\beta}}$ *e* γ^α_0 *tais que*

$$\mathrm{d}\zeta^\alpha = \zeta^\beta \wedge \eta^\alpha_{1\beta} + \zeta^{\overline{\beta}} \wedge \gamma^\alpha_{1\overline{\beta}} + \theta \wedge \gamma^\alpha_0$$

satisfazendo

- $\eta^{\alpha}_{1\beta} = -\eta^{\overline{\beta}}_{1\overline{\alpha}}$
- $\gamma^{\alpha}_{1\overline{\beta}} = -\gamma^{\beta}_{1\overline{\alpha}}$
- $\gamma^{\alpha}_{0} \wedge \zeta^{\overline{\alpha}} + \gamma^{\overline{\alpha}}_{0} \wedge \zeta^{\alpha} = 0$.

Observemos agora que $(g_{\alpha\overline{\beta}})$ é uma matriz hermitiana, logo ela pode ser diagonalizada usando o grupo $U(n)$. Estes autovalores são invariantes da estrutura sub-riemanniana e são funções a valores reais definidas na variedade. Suponhamos que a diagonalização de $(g_{\alpha\overline{\beta}})$ produz precisamente r autovalores distintos λ_i com multiplicidade constante d_i. Esta hipótese será suficiente para reduzir o fibrado $U(n)$ para o fibrado $U(d_1) \times \cdots \times U(d_r)$.

Diagonalizando $g_{\alpha\overline{\beta}}$ obtemos coreferenciais $\zeta^1, \ldots, \zeta^n$ tais que

$$g_{\alpha\overline{\beta}} = \delta^{\beta}_{\alpha}\lambda_{\beta}$$

e

$$\lambda_{d_1+\cdots+d_{k-1}+1} = \cdots = \lambda_{d_1+\cdots+d_k} = \nu_k \quad \text{para } 1 \leq k \leq r$$

com $d_1 + \cdots + d_r = n$ e $\nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_r$, onde ν_k são funções a valores reais definidas em M.

Denotamos por P_5^* o conjunto dos coreferenciais $\theta, \zeta^1, \ldots, \zeta^n$ onde $(g_{\alpha\overline{\beta}})$ é diagonal. Nas seções de P_5^* temos

$$\mathrm{d}\theta = i\lambda_{\alpha}\zeta^{\alpha} \wedge \zeta^{\overline{\alpha}} .$$

Se $(\theta, \zeta^1, \ldots, \zeta^n)$ e $(\theta, \zeta'^1, \ldots, \zeta'^n)$ são duas seções de P_5^* com

$$\zeta'^{\alpha} = a^{\alpha}_{\beta}\zeta^{\beta} ,$$

então

$$(a^{\alpha}_{\beta}) \in U(d_1) \times \cdots \times U(d_r) .$$

Com efeito,

$$i\delta^{\beta}_{\gamma}\lambda_{\beta}\zeta^{\beta} \wedge \zeta^{\overline{\gamma}} = \mathrm{d}\theta$$

$$
\begin{aligned}
&= i\lambda_\alpha \zeta'^\alpha \wedge \zeta'^{\overline{\alpha}} \\
&= i\lambda_\alpha (a^\alpha_\beta \zeta^\beta) \wedge (a^{\overline{\alpha}}_{\overline{\gamma}} \zeta^{\overline{\gamma}}) \\
&= i a^{\overline{\alpha}}_{\overline{\gamma}} \lambda_\alpha a^\alpha_\beta \zeta^\beta \wedge \zeta^{\overline{\gamma}}
\end{aligned}
$$

de onde segue que $D = \overline{A}^t DA$ onde $A = (a^\alpha_\beta)$ e $D = (\delta^\beta_\alpha \lambda_\beta)$. Logo, $AD = DA$, isto é,

$$a^\alpha_\beta \delta^\beta_\gamma \lambda_\beta = \delta^\alpha_\beta \lambda_\beta a^\beta_\gamma \, .$$

Portanto,

$$a^\alpha_\gamma (\lambda_\alpha - \lambda_\gamma) = 0 \, ,$$

ou seja, $a^\alpha_\gamma = 0$ se $\lambda_\alpha \neq \lambda_\beta$. Concluímos que

$$(a^\alpha_\beta) \in U(d_1) \times \cdots \times U(d_r) \, .$$

Portanto o subfibrado P_5, dos referenciais dos quais os elementos de P_5^* são duais, é uma $U(d_1) \times \cdots \times U(d_r)$-estrutura.

Usaremos a notação $h = u(d_1) \times \cdots \times u(d_r)$. O produto interno de $o(2n)$, restrito a $u(n)$ pode ser escrito na forma complexa como

$$\langle A, B \rangle = 2 \mathrm{Re}\, \mathrm{tr}(A \overline{B}^t) \, .$$

Denotaremos por $h^\perp$ o espaço perpendicular a h com respeito a este produto interno. Se $A \in u(n)$, podemos escrever $A = (A_{ij})_{r \times r}$ onde A_{ij} é uma $d_i \times d_j$ matriz com $\overline{A}^t_{ij} = -A_{ji}$. Analogamente, podemos escrever $g_{\alpha\overline{\beta}} = (G_{ij})_{r \times r}$ com $G_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $G_{ij} = \nu_i I_{d_i}$. Com esta notação $A \in h$ se, e somente se, $A_{ij} = 0$, para $i \neq j$, e $A_{ii} \in u(d_i)$. O lema seguinte caracteriza os elementos de $h^\perp$.

Lema 2.3.3 *A matriz $B \in h^\perp$ se, e somente se, $B_{ii} = 0$ para $1 \leq i \leq r$.*

Demonstração:

Se $A \in h$, então

$$\langle A, B \rangle = -2 \mathrm{Re}\, \mathrm{tr}(A_{ii} B_{ii}) \, .$$

Como A_{ii} pode ser qualquer elemento de $u(d_i)$ e $B_{ii} \in u(d_i)$, temos que $\langle A, B\rangle = 0$ se, e somente se, $B_{ii} = 0$, $1 \leq i \leq r$.

□

Fazendo a decomposição de $\eta_1 = (\eta^{\alpha}_{1\beta})$, obtida no Teorema ??, por $\eta_1 = \eta + \gamma_2$ onde η toma valores em h e γ_2 em $h^{\perp}$, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 2.3.3 *Existem únicas formas* $\eta^{\alpha_i}_{\beta_i}$, $\gamma^{\alpha_i}_{2\beta_j}$, $\gamma^{\alpha}_{1\overline{\beta}}$, γ^{α}_{o} *com* $1 \leq i, j \leq r$, $d_1 + \cdots + d_{i-1} + 1 \leq \alpha_i, \beta_i \leq d_1 + \cdots + d_i$ *tal que*

$$d\zeta^{\alpha_i} = \zeta^{\beta_i} \wedge \eta^{\alpha_i}_{\beta_i} + \zeta^{\beta_j} \wedge \gamma^{\alpha_i}_{2\beta_j} + \zeta^{\overline{\beta}} \wedge \gamma^{\alpha_i}_{1\overline{\beta}} + \theta \wedge \gamma^{\alpha_i}_{0}$$

satisfazendo

- $\eta^{\alpha_i}_{\beta_i} = -\overline{\eta^{\beta_i}_{\alpha_i}}$, $\eta^{\alpha_i}_{\beta_j} = 0$ *se* $i \neq j$;
- $\gamma^{\alpha_i}_{2\beta_j} = -\overline{\gamma^{\beta_j}_{2\alpha_i}}$ *se* $i \neq j$, $\gamma^{\alpha_i}_{2\beta_i} = 0$;
- $\gamma^{\alpha}_{1\overline{\beta}} = -\gamma^{\beta}_{1\overline{\alpha}}$;
- $\gamma^{\alpha}_{o} \wedge \zeta^{\overline{\alpha}} + \gamma^{\overline{\alpha}}_{o} \wedge \zeta^{\alpha} = 0$.

2.4 Curvatura

As formas de curvatura são definidas por

$$\Pi^i_k = d\omega^i_k + \omega^i_j \wedge \omega^j_k \, .$$

Teorema 2.4.1 *As formas de curvatura são dadas por*

$$\Pi^i_k = \frac{1}{2} R^i_{krs} \theta^r \wedge \theta^s + W^i_{ks} \theta^s \wedge \theta + h_{kl} \theta^l \wedge \tau^i - h_{il} \theta^l \wedge \tau^k$$

com as condições $R^i_{krs} = -R^k_{irs}$, $R^i_{krs} = -R^i_{ksr}$, $R^i_{ksr} + R^i_{rks} + R^i_{srk} = 0$, $W^i_{ks} = -W^k_{is}$, $W^i_{ks} + W^s_{ik} + W^k_{si} = 0$.

Demonstração:

Sejam

$$\begin{aligned}
\Omega^i_k &= \mathrm{d}\omega^i_k - \omega^j_k \wedge \omega^i_j - h_{kl}\theta^l \wedge \tau^i + h_{il}\theta^l \wedge \tau^k \, . \\
\Omega^i &= \mathrm{d}\tau^i - \tau^j \wedge \omega^i_j \, .
\end{aligned}$$

Diferenciando $\mathrm{d}\theta^i = \theta^k \wedge \omega^i_k + \theta \wedge \tau^i$, temos

$$\begin{aligned}
0 &= (\theta^l \wedge \omega^k_l + \theta \wedge \tau^k) \wedge \omega^i_k - \theta^k \wedge (\Omega^i_k + \omega^j_k \wedge \omega^i_j + h_{kl}\theta^l \wedge \tau^i - h_{il}\theta^l \wedge \tau^k) \\
&\quad + h_{kl}\theta^k \wedge \theta^l \wedge \tau^i - \theta \wedge (\Omega^i + \tau^j \wedge \omega^i_j) \\
&= -(\theta^k \wedge \Omega^i_k + \theta \wedge \Omega^i) + (h_{il}\theta^l) \wedge (\theta^k \wedge \tau^k) \\
&= -(\theta^k \wedge \Omega^i_k + \theta \wedge \Omega^i) \, .
\end{aligned}$$

Portanto, vale a igualdade

$$\theta^k \wedge \Omega^i_k + \theta \wedge \Omega^i = 0 \, ,$$

conhecida como identidade de Bianchi.

Temos que $\Omega^i_k = -\Omega^k_i$. De fato,

$$\begin{aligned}
\Omega^k_i &= \mathrm{d}\omega^k_i - \omega^j_i \wedge \omega^k_j - h_{il}\theta^l \wedge \tau^k + h_{kl}\theta^l \wedge \tau^i \\
&= -\mathrm{d}\omega^i_k + \omega^j_k \wedge \omega^i_j + h_{kl}\theta^l \wedge \tau^i - h_{il}\theta^l \wedge \tau^k \\
&= -\Omega^i_k \, .
\end{aligned}$$

Segue do lema de Cartan que

$$\Omega^i_k = \frac{1}{2} R^i_{krs}\theta^r \wedge \theta^s + W^i_{ks}\theta^s \wedge \theta$$

onde $R^i_{krs} = -R^i_{ksr}$. Segue de $\Omega^i_k = -\Omega^k_i$ que

$$R^i_{krs} = -R^k_{irs} \quad \text{e} \quad W^i_{ks} = -W^k_{is} \, .$$

Segue da identidade de Bianchi que

$$\begin{aligned}
0 &= \theta^k \wedge \left(\frac{1}{2} R^i_{krs}\theta^r \wedge \theta^s + W^i_{ks}\theta^s \wedge \theta\right) + \theta \wedge \Omega^i \\
&= \frac{1}{2} R^i_{krs}\theta^k \wedge \theta^r \wedge \theta^s + W^i_{ks}\theta^k \wedge \theta^s \wedge \theta + \theta \wedge \Omega^i \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k<r<s} (R^i_{krs} + R^i_{skr} + R^i_{rsk})\theta^k \wedge \theta^r \wedge \theta^s + \theta \wedge (W^i_{ks}\theta^k \wedge \theta^s + \Omega^i) \, .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$R^i_{krs} + R^i_{skr} + R^i_{rsk} = 0 \quad \text{e}$$
$$W^i_{ks}\theta^k \wedge \theta^s + \Omega^i = c^i_j\theta^j \wedge \theta \ ,$$

para certos c^i_j.

Diferenciando $\theta^i \wedge \tau^i = 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= (\theta^j \wedge \omega^i_j + \theta \wedge \tau^i) \wedge \tau^i - \theta^i \wedge (\Omega^i + \tau^j \wedge \omega^i_j) \\ &= \theta^j \wedge \omega^i_j \wedge \tau^i - \theta^i \wedge \tau^j \wedge \omega^i_j - \theta^i \wedge (-W^i_{ks}\theta^k \wedge \theta^s + c^i_j\theta^j \wedge \theta) \\ &= \sum_{i<k<s} (W^i_{ks} + W^s_{ik} + W^k_{si})\theta^i \wedge \theta^k \wedge \theta^s - c^i_j\theta^i \wedge \theta^j \wedge \theta \ . \end{aligned}$$

Logo,

$$W^i_{ks} + W^s_{ik} + W^k_{si} = 0$$

e

$$c^i_j = -c^j_i \ .$$

Segue da definição de Ω^i_k que

$$\begin{aligned} \Pi^i_k &= \Omega^i_k + h_{kl}\theta^l \wedge \tau^i + h_{il}\theta^l \wedge \tau^k \\ &= \frac{1}{2}R^i_{krs}\theta^r \wedge \theta^s + W^i_{ks}\theta^s \wedge \theta + h_{kl}\theta^l \wedge \tau^i - h_{il}\theta \wedge \tau^k \ . \end{aligned}$$

□

Temos que $\Pi^i_k = -\Pi^k_i$. Portanto, segue do Lema 2.4.1, que existem únicas formas Π^i_{1k} e T^i_{1k} tais que $\Pi^i_k = \Pi^i_{1k} + T^i_{1k}$ com

$$\Pi_1 = (\Pi^i_{1k}) \in u_R(n) \ , \quad T_1 = (T^i_{1k}) \in u_R(n)^\perp \ .$$

Segue da demonstração do Lema 2.4.1 que

$$\Pi_1 = \frac{1}{2}(\Pi - J\Pi J) \quad T_1 = \frac{1}{2}(\Pi + J\Pi J) \ .$$

Escrevendo

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi^\alpha_\beta & \Pi^\alpha_{\beta+n} \\ \Pi^{\alpha+n}_\beta & \Pi^{\alpha+n}_{\beta+n} \end{bmatrix} \ ,$$

temos

$$JΠJ = \begin{bmatrix} -\Pi^{\alpha+n}_{\beta+n} & \Pi^{\alpha+n}_{\beta} \\ \Pi^{\alpha}_{\beta+n} & -\Pi^{\alpha}_{\beta} \end{bmatrix} .$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Pi_1 &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \Pi^{\alpha}_{\beta} + \Pi^{\alpha+n}_{\beta+n} & \Pi^{\alpha}_{\beta+n} - \Pi^{\alpha+n}_{\beta} \\ \Pi^{\alpha+n}_{\beta} - \Pi^{\alpha}_{\beta+n} & \Pi^{\alpha+n}_{\beta+n} + \Pi^{\alpha}_{\beta} \end{bmatrix} \\
T_1 &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \Pi^{\alpha}_{\beta} - \Pi^{\alpha+n}_{\beta+n} & \Pi^{\alpha}_{\beta+n} + \Pi^{\alpha+n}_{\beta} \\ \Pi^{\alpha+n}_{\beta} + \Pi^{\alpha}_{\beta+n} & \Pi^{\alpha+n}_{\beta+n} - \Pi^{\alpha}_{\beta} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Consideremos as formas complexas

$$\begin{aligned}
\Psi^{\alpha}_{1\beta} &= \Pi^{\alpha}_{1\beta} + i\Pi^{\alpha+n}_{1\beta} \\
\Phi^{\alpha}_{1\beta} &= T^{\alpha}_{1\beta} + iT^{\alpha+n}_{1\beta} ,
\end{aligned}$$

vamos escrever $\Psi^{\alpha}_{1\beta}$ e $\Phi^{\alpha}_{1\beta}$ como funções de $R^{\alpha}_{\beta rs}$, $W^{\alpha}_{\beta rs}$, γ^{α}_{o} e ζ^{α}. Temos que

$$\begin{aligned}
\Psi^{\alpha}_{1\beta} &= \frac{1}{2}\left[\Pi^{\alpha}_{\beta} + \Pi^{\alpha+n}_{\beta+n} + i\left(\Pi^{\alpha+n}_{\beta} - \Pi^{\alpha}_{\beta+n}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\left(R^{\alpha}_{\beta rs} + R^{\alpha+n}_{\beta+n,rs} + iR^{\alpha+n}_{\beta rs} - iR^{\alpha}_{\beta+n,rs}\right)\theta^{r} \wedge \theta^{s} \\
&\quad + \left(W^{\alpha}_{\beta s} + W^{\alpha+n}_{\beta+n,s} + iW^{\alpha+n}_{\beta s} - iW^{\alpha}_{\beta+n,s}\right)\theta^{s} \wedge \theta \\
&\quad + (h_{\beta l} - ih_{\beta+n,l})\,\theta^{l} \wedge \tau^{\alpha} + (h_{\beta+n,l} + ih_{\beta l})\,\theta^{l} \wedge \tau^{\alpha+n} \\
&\quad - (h_{\alpha l} + ih_{\alpha+n,l})\,\theta^{l} \wedge \tau^{\beta} + (-h_{\alpha+n,l} + ih_{\alpha l})\,\theta^{l} \wedge \tau^{\beta+n}\Big] .
\end{aligned}$$

Calculando cada termo separadamente (observar que $1 \leq \delta, \sigma \leq n$), obtemos para o primeiro:

$$\frac{1}{2}\left(R^{\alpha}_{\beta rs} + R^{\alpha+n}_{\beta+n,rs} + iR^{\alpha+n}_{\beta rs} - iR^{\alpha}_{\beta+n,rs}\right)\theta^{r} \wedge \theta^{s}$$

$$\begin{aligned}
= \frac{1}{2}\Big[&\left(R^{\alpha}_{\beta\delta\sigma} + R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta\sigma} + iR^{\alpha+n}_{\beta\delta\sigma} - iR^{\alpha}_{\beta+n,\delta\sigma}\right)\theta^{\delta} \wedge \theta^{\sigma} \\
&+ \left(R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma} + R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n,\sigma} + iR^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n,\sigma} - iR^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma}\right)\theta^{\delta+n} \wedge \theta^{\sigma} \\
&+ \left(R^{\alpha}_{\beta,\delta,\sigma+n} + R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta,\sigma+n} + iR^{\alpha+n}_{\beta,\delta,\sigma+n} - iR^{\alpha}_{\beta+n,\delta,\sigma+n}\right)\theta^{\delta} \wedge \theta^{\sigma+n} \\
&+ \left(R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma+n} + R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n,\sigma+n} + iR^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n,\sigma+n} - iR^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma+n}\right)\theta^{\delta+n} \wedge \theta^{\sigma+n}\Big]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \; & \frac{1}{8}\Big[\Big(R^{\alpha}_{\beta\delta\sigma} + R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta\sigma} + i\,R^{\alpha+n}_{\beta\delta\sigma} - i\,R^{\alpha}_{\beta+n,\delta\sigma}\Big)\Big(\zeta^{\delta}\wedge\zeta^{\sigma} + \zeta^{\delta}\wedge\zeta^{\overline{\sigma}} + \zeta^{\overline{\delta}}\wedge\zeta^{\sigma} + \zeta^{\overline{\delta}}\wedge\zeta^{\overline{\sigma}}\Big) \\
& + \Big(-i\,R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma} - i\,R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n,\sigma} + R^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n,\sigma} - R^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma}\Big)\Big(\zeta^{\delta}\wedge\zeta^{\sigma} + \zeta^{\delta}\wedge\zeta^{\overline{\sigma}} - \zeta^{\overline{\delta}}\wedge\zeta^{\sigma} - \zeta^{\overline{\delta}}\wedge\zeta^{\overline{\sigma}}\Big) \\
& + \Big(-i\,R^{\alpha}_{\beta\delta,\sigma+n} - i\,R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta,\sigma+n} + R^{\alpha+n}_{\beta\delta,\sigma+n} - R^{\alpha}_{\beta+n,\delta,\sigma+n}\Big)\Big(\zeta^{\delta}\wedge\zeta^{\sigma} - \zeta^{\delta}\wedge\zeta^{\overline{\sigma}} + \zeta^{\overline{\delta}}\wedge\zeta^{\sigma} - \zeta^{\overline{\delta}}\wedge\zeta^{\overline{\sigma}}\Big) \\
& + \Big(-R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma+n} - R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n,\sigma+n} - i\,R^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n,\sigma+n} + i\,R^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma+n}\Big)\Big(\zeta^{\delta}\wedge\zeta^{\sigma} - \zeta^{\delta}\wedge\zeta^{\overline{\sigma}} - \zeta^{\overline{\delta}}\wedge\zeta^{\sigma} + \zeta^{\overline{\delta}}\wedge\zeta^{\sigma}\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
= \widetilde{R}^{\alpha}_{\beta\delta\sigma}\zeta^{\delta}\wedge\zeta^{\sigma} + \widetilde{R}^{\alpha}_{\beta\delta\overline{\sigma}}\zeta^{\delta}\wedge\zeta^{\overline{\sigma}} + \widetilde{R}^{\alpha}_{\beta\overline{\delta}\sigma}\zeta^{\overline{\delta}}\wedge\zeta^{\delta} + \widetilde{R}^{\alpha}_{\beta\overline{\delta}\overline{\sigma}}\zeta^{\overline{\delta}}\wedge\zeta^{\overline{\sigma}}\ ,
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}^{\alpha}_{\beta\delta\sigma} = \; & \frac{1}{8}\Big[R^{\alpha}_{\beta\delta\sigma} + R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta\sigma} + R^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n,\sigma} - R^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma} + R^{\alpha+n}_{\beta\delta,\sigma+n} - R^{\alpha}_{\beta+n,\delta,\sigma+n} - R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma+n} - R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n,\sigma+n} \\
& + i\Big(R^{\alpha}_{\beta\delta\sigma} - R^{\alpha}_{\beta+n,\delta\sigma} - R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma} - R^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma} - R^{\alpha}_{\beta\delta,\sigma+n} - R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta,\sigma+n} - R^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n,\sigma+n} + R^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma+n}\Big)\Big]\ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}^{\alpha}_{\beta\delta\overline{\sigma}} = \; & \frac{1}{8}\Big[R^{\alpha}_{\beta\delta\sigma} + R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta\sigma} + R^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n,\sigma} - R^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma} - R^{\alpha+n}_{\beta\delta,\sigma+n} + R^{\alpha}_{\beta+n,\delta,\sigma+n} + R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma+n} + R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n,\sigma+n} \\
& + i\Big(R^{\alpha+n}_{\beta\delta\sigma} - R^{\alpha}_{\beta+n,\delta\sigma} - R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma} - R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n,\sigma} + R^{\alpha}_{\beta\delta,\sigma+n} + R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta,\sigma+n} + R^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n,\sigma+n} + R^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma+n}\Big)\Big]\ .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}^{\alpha}_{\beta\overline{\delta}\sigma} = \; & \frac{1}{8}\Big[R^{\alpha}_{\beta\delta\sigma} + R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta\sigma} - R^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n,\sigma} + R^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma} + R^{\alpha+n}_{\beta\delta,\sigma+n} - R^{\alpha}_{\beta+n,\delta,\sigma+n} + R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma} + R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n,\sigma+n} \\
& + i\Big(R^{\alpha+n}_{\beta\delta\sigma} - R^{\alpha}_{\beta+n,\delta\sigma} + R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma} + R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n,\sigma} - R^{\alpha}_{\beta\delta,\sigma+n} - R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta,\sigma+n} + R^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n,\sigma+n} - R^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma+n}\Big)\Big]\ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}^{\alpha}_{\beta\overline{\delta}\overline{\sigma}} = \; & \frac{1}{8}\Big[R^{\alpha}_{\beta\delta\sigma} + R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta\sigma} - R^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n,\sigma} - R^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma} - R^{\alpha+n}_{\beta\delta,\sigma+n} + R^{\alpha}_{\beta+n,\delta,\sigma+n} - R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma+n} - R^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n,\sigma+n} \\
& + i\Big(R^{\alpha+n}_{\beta\delta\sigma} - R^{\alpha}_{\beta+n,\delta\sigma} + R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma} + R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n,\sigma} + R^{\alpha}_{\beta\delta,\sigma+n} + R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta,\sigma+n} - R^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n,\sigma+n} + R^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma+n}\Big)\Big]\ .
\end{aligned}
$$

Para o segundo temos:

$$
\Big(W^{\alpha}_{\beta s} + W^{\alpha+n}_{\beta+n,s} + iW^{\alpha+n}_{\beta s} - iW^{\alpha}_{\beta+n,s}\Big)\,\theta^{s}\wedge\theta
$$

$$
= \Big(W^{\alpha}_{\beta\delta} + W^{\alpha}_{\beta+n,\delta} + iW^{\alpha+n}_{\beta\delta} - iW^{\alpha}_{\beta+n,\delta}\Big)\,\theta^{\delta}\wedge\theta + \Big(W^{\alpha}_{\beta,\delta+n} + W^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n} + iW^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n} - iW^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n}\Big)\,\theta^{\delta+n}\wedge\theta
$$

$$
\begin{aligned}
= \; & \frac{1}{2}\Big[\Big(W^{\alpha}_{\beta,\delta} + W^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta} + iW^{\alpha+n}_{\beta\delta} - iW^{\alpha}_{\beta+n,\delta}\Big)\Big(\zeta^{\delta}\wedge\theta + \zeta^{\overline{\delta}}\wedge\theta\Big) \\
& + \Big(-iW^{\alpha}_{\beta,\delta+n} - iW^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n} + W^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n} - W^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n}\Big)\Big(\zeta^{\delta}\wedge\theta - \zeta^{\delta}\wedge\theta\Big)\Big]
\end{aligned}
$$

$$
= \widetilde{W}^{\alpha}_{\beta\delta}\zeta^{\delta}\wedge\theta + \widetilde{W}^{\alpha}_{\beta\overline{\delta}}\zeta^{\overline{\delta}}\wedge\theta\ .
$$

onde

$$\widetilde{W}^{\alpha}_{\beta\delta} = \frac{1}{2}\left[W'^{\alpha}_{\beta\delta} + W'^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta} + W'^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n} - W'^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n} + i\left(W'^{\alpha+n}_{\beta\delta} - W'^{\alpha}_{\beta+n,\delta} - W'^{\alpha}_{\beta,\delta+n} - W'^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n}\right)\right] .$$

$$\widetilde{W}^{\alpha}_{\beta\bar{\delta}} = \frac{1}{2}\left[W'^{\alpha}_{\beta\delta} + W'^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta} - W'^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n} - W'^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n} + i\left(W'^{\alpha+n}_{\beta\delta} - W'^{\alpha}_{\beta+n,\delta} + W'^{\alpha}_{\beta,\delta+n} + W'^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n}\right)\right] ,$$

Para o terceiro obtemos:

$$
\begin{aligned}
&(h_{\beta l} + i h_{\beta+n,l})\,\theta^l \wedge \tau^\alpha + (h_{\alpha+n,l} + i h_{\beta l})\,\theta^l \wedge \tau^{\alpha+n} \\
&= (h_{\beta\delta} - i h_{\beta+n,\delta})\,\theta^\delta \wedge \tau^\alpha + (h_{\beta,\delta+n} - i h_{\beta+n,\delta+n})\,\theta^{\delta+n} \wedge \tau^\alpha \\
&\quad + (h_{\beta+n,\delta} + i h_{\beta\delta})\,\theta^\delta \wedge \tau^{\alpha+n} + (h_{\beta+n,\delta+n} + i h_{\beta,\delta+n})\,\theta^{\delta+n} \wedge \tau^{\alpha+n} \\
&= i g_{\beta\bar{\delta}} - \left[\theta^\delta \wedge (\tau^\alpha + i\tau^{\alpha+n}) - i\theta^{\delta+n}\,(\tau^\alpha + i\tau^{\alpha+n})\right] \\
&= i g_{\beta\bar{\delta}} \zeta^{\bar{\delta}} \wedge \gamma^\alpha_o .
\end{aligned}
$$

Analogamente para o quarto:

$$
\begin{aligned}
&-(h_{\alpha l} + i h_{\alpha+n,l})\,\theta^l \wedge \tau^\beta + (-h_{\alpha+n,l} + i h_{\alpha l})\,\theta^l \wedge \tau^{\beta+n} \\
&= -\left[\overline{(h_{\alpha l} + i h_{\alpha+n,l})\,\theta^l \wedge \tau^\beta + (-h_{\alpha+n,l} + i h_{\alpha l})\,\theta^l \wedge \tau^{\beta+n}}\right] \\
&= i g_{\delta\bar{\alpha}} \zeta^\delta \wedge \gamma^{\bar{\beta}}_o .
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\Psi^\alpha_{1\beta} &= \widetilde{R}^\alpha_{\beta\delta\sigma}\zeta^\delta \wedge \zeta^\sigma + \widetilde{R}^\alpha_{\beta\delta\bar{\sigma}}\zeta^\delta \wedge \zeta^{\bar{\sigma}} + \widetilde{R}^\alpha_{\beta\bar{\delta}\sigma}\zeta^{\bar{\delta}} \wedge \zeta^\sigma + R^\alpha_{\beta\bar{\delta}\bar{\sigma}}\zeta^{\bar{\delta}} \wedge \zeta^{\bar{\sigma}} \\
&\quad + i g_{\beta\bar{\delta}}\zeta^{\bar{\delta}} \wedge \gamma^\alpha_o + i g_{\delta\bar{\alpha}}\zeta^\delta \wedge \zeta^{\bar{\alpha}} .
\end{aligned}
$$

Deteminemos agora $\Phi^\alpha_{1\beta}$.

$$\Phi^\alpha_{1\beta} = \frac{1}{2}\left[\Pi^\alpha_\beta - \Pi^{\alpha+n}_{\beta+n} + i\left(\Pi^{\alpha+n}_\beta + \Pi^\alpha_{\beta+n}\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
= \; & \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\left(R^{\alpha}_{\beta rs} - R^{\alpha+n}_{\beta+n,rs} + i R^{\alpha+n}_{\beta rs} + i R^{\alpha}_{\beta+n,rs}\right)\theta^{r}\wedge\theta^{s} \\
& + \left(W^{\alpha}_{\beta s} - W^{\alpha+n}_{\beta+n,s} + iW^{\alpha+n}_{\beta s} + iW^{\alpha}_{\beta+n,s}\right)\theta^{s}\wedge\theta \\
& + \left(h_{\beta l} + i h_{\beta+n,l}\right)\theta^{l}\wedge\tau^{\alpha} + \left(i h_{\beta l} - h_{\beta+n,l}\right)\theta^{l}\wedge\tau^{\alpha+n} \\
& - \left(h_{\alpha l} + i h_{\alpha+n,l}\right)\theta^{l}\wedge\tau^{\beta} + \left(-i h_{\alpha l} + h_{\alpha+n,l}\right)\theta^{l}\wedge\tau^{\beta+n}\Big] \,.
\end{aligned}
$$

Calculando cada termo separadamente, obtemos para o primeiro:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left(R^{\alpha}_{\beta rs} - R^{\alpha+n}_{\beta+n,rs} + i R^{\alpha+n}_{\beta rs} + i R^{\alpha}_{\beta+n,rs}\right)\theta^{r}\wedge\theta^{s} \\
= \; & \frac{1}{2}\Big[\left(R^{\alpha}_{\beta\delta\sigma} - R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta\sigma} + i R^{\alpha+n}_{\beta\delta\sigma} + i R^{\alpha}_{\beta+n,\delta\sigma}\right)\theta^{\delta}\wedge\theta^{\sigma} \\
& + \left(R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma} - R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n,\sigma} + i R^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n,\sigma} + i R^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma}\right)\theta^{\delta+n}\wedge\theta^{\sigma} \\
& + \left(R^{\alpha}_{\beta,\delta,\sigma+n} - R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta,\sigma+n} + i R^{\alpha+n}_{\beta\delta,\sigma+n} + i R^{\alpha}_{\beta+n,\delta,\sigma+n}\right)\theta^{\delta}\wedge\theta^{\sigma+n} \\
& + \left(R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma+n} - R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n,\sigma+n} + i R^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n,\sigma+n} + i R^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma+n}\right)\theta^{\delta+n}\wedge\theta^{\sigma+n}\Big] \\
= \; & \frac{1}{8}\Big[\left(R^{\alpha}_{\beta\delta\sigma} + R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta\sigma} + i R^{\alpha+n}_{\beta\delta\sigma} + i R^{\alpha}_{\beta+n,\delta\sigma}\right)\left(\zeta^{\delta}\wedge\zeta^{\sigma} + \zeta^{\delta}\wedge\zeta^{\bar\sigma} + \zeta^{\bar\delta}\wedge\zeta^{\sigma} + \zeta^{\bar\delta}\wedge\zeta^{\bar\sigma}\right) \\
& + \left(-i R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma} + i R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n,\sigma} + R^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n,\sigma} + R^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma}\right)\left(\zeta^{\delta}\wedge\zeta^{\sigma} + \zeta^{\delta}\wedge\zeta^{\bar\sigma} - \zeta^{\bar\delta}\wedge\zeta^{\sigma} - \zeta^{\bar\delta}\wedge\zeta^{\bar\sigma}\right) \\
& + \left(-i R^{\alpha}_{\beta\delta,\sigma+n} + i R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta,\sigma+n} + R^{\alpha+n}_{\beta\delta,\sigma+n} + R^{\alpha}_{\beta+n,\delta,\sigma+n}\right)\left(\zeta^{\delta}\wedge\zeta^{\sigma} - \zeta^{\delta}\wedge\zeta^{\bar\sigma} + \zeta^{\bar\delta}\wedge\zeta^{\sigma} - \zeta^{\bar\delta}\wedge\zeta^{\bar\sigma}\right) \\
& + \left(-R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma+n} + R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n,\sigma+n} - i R^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n,\sigma+n} - i R^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma+n}\right)\left(\zeta^{\delta}\wedge\zeta^{\sigma} - \zeta^{\delta}\wedge\zeta^{\bar\sigma} - \zeta^{\bar\delta}\wedge\zeta^{\sigma} + \zeta^{\bar\delta}\wedge\zeta^{\bar\sigma}\right)\Big] \\
= \; & \widetilde{R}^{\perp\alpha}_{\beta\delta\sigma}\zeta^{\delta}\wedge\zeta^{\sigma} + \widetilde{R}^{\perp\alpha}_{\beta\delta\bar\sigma}\zeta^{\delta}\wedge\zeta^{\bar\sigma} + \widetilde{R}^{\perp\alpha}_{\beta\bar\delta\sigma}\zeta^{\bar\delta}\wedge\zeta^{\delta} + \widetilde{R}^{\perp\alpha}_{\beta\bar\delta\bar\sigma}\zeta^{\bar\delta}\wedge\zeta^{\bar\sigma} \,,
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}^{\perp\alpha}_{\beta\delta\sigma} = \; & \frac{1}{8}\Big[R^{\alpha}_{\beta\delta\sigma} - R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta\sigma} + R^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n,\sigma} + R^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma} + R^{\alpha+n}_{\beta\delta,\sigma+n} + R^{\alpha}_{\beta+n,\delta,\sigma+n} - R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma+n} + R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n,\sigma+n} \\
& + i\left(R^{\alpha+n}_{\beta\delta\sigma} + R^{\alpha}_{\beta+n,\delta\sigma} - R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma} + R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n,\sigma} - R^{\alpha}_{\beta\delta,\sigma+n} + R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta,\sigma+n} - R^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n,\sigma+n} - R^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma+n}\right)\Big] \,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}^{\perp\alpha}_{\beta\delta\bar\sigma} = \; & \frac{1}{8}\Big[R^{\alpha}_{\beta\delta\sigma} - R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta\sigma} + R^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n,\sigma} + R^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma} - R^{\alpha+n}_{\beta\delta,\sigma+n} - R^{\alpha}_{\beta+n,\delta,\sigma+n} + R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma+n} - R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n,\sigma+n} \\
& + i\left(R^{\alpha+n}_{\beta\delta\sigma} + R^{\alpha}_{\beta+n,\delta\sigma} - R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma} + R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n,\sigma} + R^{\alpha}_{\beta\delta,\sigma+n} - R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta,\sigma+n} + R^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n,\sigma+n} + R^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma+n}\right)\Big] \,.
\end{aligned}
$$

$$
\widetilde{R}^{\perp\alpha}_{\beta\bar\delta\sigma} = \frac{1}{8}\Big[R^{\alpha}_{\beta\delta\sigma} - R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta\sigma} - R^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n,\sigma} - R^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma} + R^{\alpha+n}_{\beta\delta,\sigma+n} + R^{\alpha}_{\beta+n,\delta,\sigma+n} + R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma+n} - R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n,\sigma+n}
$$

$$+i\left(R^{\alpha+n}_{\beta\delta\sigma}+R^{\alpha}_{\beta+n,\delta\sigma}+R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma}-R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n,\sigma}-R^{\alpha}_{\beta\delta,\sigma+n}+R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta,\sigma+n}+R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma+n}+R^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma+n}\right)\Big] .$$

$$\begin{aligned}\widetilde{R}^{\perp\alpha}_{\beta\bar{\delta}\bar{\sigma}} &= \frac{1}{8}\Big[R^{\alpha}_{\beta\delta\sigma}-R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta\sigma}-R^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n,\sigma}-R^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma}-R^{\alpha+n}_{\beta\delta,\sigma+n}-R^{\alpha}_{\beta+n,\delta,\sigma+n}-R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma+n}+R^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n,\sigma+n}\\ &\quad +i\left(R^{\alpha+n}_{\beta\delta\sigma}+R^{\alpha}_{\beta+n,\delta\sigma}+R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma}-R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n,\sigma}+R^{\alpha}_{\beta\delta,\sigma+n}-R^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta,\sigma+n}-R^{\alpha}_{\beta,\delta+n,\sigma+n}-R^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n,\sigma+n}\right)\Big] .\end{aligned}$$

Para o segundo:

$$\begin{aligned}&\left(W^{\alpha}_{\beta s}-W^{\alpha+n}_{\beta+n,s}+iW^{\alpha+n}_{\beta s}+iW^{\alpha}_{\beta+n,s}\right)\theta^{s}\wedge\theta\\ &= \left(W^{\alpha}_{\beta\delta}-W^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta}+iW^{\alpha+n}_{\beta\delta}+iW^{\alpha}_{\beta+n,\delta}\right)\theta^{\delta}\wedge\theta\\ &\quad+\left(W^{\alpha}_{\beta,\delta+n}-W^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta+n}+iW^{\alpha+n}_{\beta,\delta+n}+iW^{\alpha}_{\beta+n,\delta+n}\right)\theta^{\delta+n}\wedge\theta\\ &= \frac{1}{2}\Big[\left(W^{\alpha}_{\beta,\delta}-W^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta}+iW^{\alpha+n}_{\beta,\delta}+iW^{\alpha}_{\beta+n,\delta}\right)\left(\zeta^{\delta}\wedge\theta+\zeta^{\bar{\delta}}\wedge\theta\right)\\ &\quad+\left(-iW^{\alpha}_{\beta\delta}+iW^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta}+W^{\alpha+n}_{\beta\delta}+W^{\alpha}_{\beta+n,\delta}\right)\left(\zeta^{\delta}\wedge\theta-\zeta^{\bar{\delta}}\wedge\theta\right)\Big]\\ &= \widetilde{W}^{\perp\alpha}_{\beta\delta}\zeta^{\delta}\wedge\theta+\widetilde{W}^{\perp\alpha}_{\beta\bar{\delta}}\zeta^{\bar{\delta}}\wedge\theta ,\end{aligned}$$

onde

$$\widetilde{W}^{\perp\alpha}_{\beta\delta} = \frac{1}{2}\Big[W^{\alpha}_{\beta\delta}-W^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta}+W^{\alpha+n}_{\beta\delta}+W^{\alpha}_{\beta+n,\delta}+i\left(W^{\alpha+n}_{\beta\delta}+W^{\alpha}_{\beta+n,\delta}-W^{\alpha}_{\beta\delta}+W^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta}\right)\Big] ,$$

$$\widetilde{W}^{\perp\alpha}_{\beta\bar{\delta}} = \frac{1}{2}\Big[W^{\alpha}_{\beta\delta}-W^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta}-W^{\alpha+n}_{\beta\delta}-W^{\alpha}_{\beta+n,\delta}+i\left(W^{\alpha+n}_{\beta\delta}+W^{\alpha}_{\beta+n,\delta}+W^{\alpha}_{\beta\delta}-W^{\alpha+n}_{\beta+n,\delta}\right)\Big] ,$$

Para o terceiro:

$$\begin{aligned}&(h_{\beta l}+ih_{\beta+n,l})\,\theta^{l}\wedge\tau^{\alpha}+(ih_{\beta l}-h_{\beta+n,l})\,\theta^{l}\wedge\tau^{\alpha+n}\\ &= (h_{\beta\delta}+ih_{\beta+n,\delta})\,\theta^{\delta}\wedge\tau^{\alpha}+(h_{\beta,\delta+n}+ih_{\beta+n,\delta+n})\,\theta^{\delta+n}\wedge\tau^{\alpha}\\ &\quad+(ih_{\beta\delta}-h_{\beta+n,\delta})\,\theta^{\delta}\wedge\tau^{\alpha+n}+i\,(h_{\beta,\delta+n}-h_{\beta+n,\delta+n})\,\theta^{\delta+n}\wedge\tau^{\alpha+n}\\ &= \overline{ig_{\beta\bar{\delta}}}\left[\theta^{\delta}\wedge\tau^{\alpha}+i\theta^{\alpha+n}\wedge\tau^{\alpha}+i\theta^{\delta}\wedge\tau^{\alpha+n}-\theta^{\delta+n}\wedge\tau^{\alpha+n}\right]\\ &= ig_{\delta\bar{\beta}}\zeta^{\delta}\wedge\gamma^{\alpha}_{o} .\end{aligned}$$

Por último:

$$
\begin{aligned}
& -(h_{\alpha l}+ih_{\alpha+n,l})\,\theta^l\wedge\tau^{\beta}+(-ih_{\alpha l}+h_{\alpha+n,l})\,\theta^l\wedge\tau^{\beta+n} \\
= & -\left[(h_{\alpha l}+ih_{\alpha+n,l})\,\theta^l\wedge\tau^{\beta}+(ih_{\alpha l}-h_{\alpha+n,l})\,\theta^l\wedge\tau^{\beta+n}\right] \\
= & \ ig_{\delta\overline{\alpha}}\zeta^{\delta}\wedge\gamma_0^{\beta}\ .
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\Phi_{1\beta}^{\alpha} = & \ \widetilde{R}_{\beta\delta\sigma}^{\perp\alpha}\zeta^{\delta}\wedge\zeta^{\sigma}+\widetilde{R}_{\beta\delta\sigma}^{\perp\alpha}\zeta^{\delta}\wedge\zeta^{\overline{\sigma}}+\widetilde{R}_{\beta\overline{\delta}\sigma}^{\perp\alpha}\zeta^{\overline{\delta}}\wedge\zeta^{\sigma}+R_{\beta\overline{\delta}\overline{\sigma}}^{\perp\alpha}\zeta^{\overline{\delta}}\wedge\zeta^{\overline{\sigma}} \\
& +\widetilde{W}_{\beta\delta}^{\perp\alpha}\zeta^{\delta}\wedge\theta+\widetilde{W}_{\beta\overline{\delta}}^{\perp\alpha}\zeta^{\overline{\delta}}\wedge\theta-ig_{\delta\overline{\beta}}\zeta^{\delta}\wedge\gamma_0^{\alpha}+ig_{\delta\overline{\alpha}}\zeta^{\delta}\wedge\gamma_0^{\beta}\ .
\end{aligned}
$$

Lembremos que se $\omega=(\omega_j^i)_{k\times k}$ é uma p-forma e $\gamma=(\gamma_j^i)_{k\times k}$ é uma q-forma então $[\omega,\gamma]$ é a $(p+q)$-forma definida por

$$[\omega,\gamma]=\omega\wedge\gamma-(-1)^{pq}\gamma\wedge\omega\ .$$

Logo,

$$\mathrm{d}[\omega,\gamma]=[\mathrm{d}\omega,\gamma]+(-1)^p[\omega,\mathrm{d}\gamma]\ .$$

Com efeito,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}[\omega,\gamma] &= \mathrm{d}\omega\wedge\gamma-(-1)^{(p+1)q}\gamma\wedge\mathrm{d}\omega+(-1)^p\omega\wedge\mathrm{d}\gamma-(-1)^{pq}\mathrm{d}\gamma\wedge\omega \\
&= \mathrm{d}\omega\wedge\gamma-(-1)^{(p+1)q}\gamma\wedge\mathrm{d}\omega+(-1)^p(\omega\wedge\mathrm{d}\gamma-(-1)^{p(q+1)}\mathrm{d}\gamma\wedge\omega) \\
&= [\mathrm{d}\omega,\gamma]+(-1)^p[\omega,\mathrm{d}\gamma]\ .
\end{aligned}
$$

Se ω,γ são 1-formas, temos

$$[\omega,\gamma]=\omega\wedge\gamma+\gamma\wedge\omega\ .$$

Portanto,

$$[\omega,\gamma]=[\gamma,\omega]\quad\text{e}\quad\omega\wedge\omega=\frac{1}{2}[\omega,\omega]$$

e se A e B são 0-formas, isto é, $k \times k$ matrizes de funções, então

$$[A, B] = AB - BA \ .$$

Observemos que se $A, B \in o(2n)$, então $[A, B] \in o(2n)$. De fato, segue de $A^t = -A$ e $B^t = -B$ que

$$[A, B]^t = B^t A^t - A^t B^t = BA - AB = -[A, B] \ .$$

Lema 2.4.1 *Sejam $A, B, C \in o(2n)$ e $\langle \ , \ \rangle$ o produto interno usual de $o(2n)$. Então*

$$\langle [A, B], C\rangle = \langle A, [B, C]\rangle \ .$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \langle [A, B], C\rangle &= -\mathrm{tr}([A, B]C) \\ &= -\mathrm{tr}(BCA - CBA) \\ &= -\mathrm{tr}([B, C]A) \\ &= -\mathrm{tr}(A[B, C]) \\ &= \langle A, [B, C]\rangle \ . \end{aligned}$$

Sejam W_1 e W_2 subespaços de $o(2n)$, usamos a notação

$$[W_1, W_2] = \{[A, B] \in o(2n);\ A \in W_1 \text{ e } B \in W_2\} \ .$$

Lema 2.4.2 *(a)* $[u_R(n), u_R(n)] \subset u_R(n)$;

(b) $[u_R(n), u_R(n)^\perp] \subset u_R(n)^\perp$;

(c) $[u_R(n)^\perp, u_R(n)^\perp] \subset u_R(n)$.

Demonstração:

(a) Seja $[A, B]$ um elemento genérico de $[u_R(n), u_R(n)]$. Portanto,

$$[A, B]J = ABJ - BAJ = JAB - JBA = J[A, B] \ .$$

Logo,

$$[A, B] \in u_R(n) \ .$$

(b) Seja C um elemento genérico de $u_R(n)$ e $[A, B]$ um elemento genérico de $[u_R(n), u_R(n)^\perp]$. Temos

$$\langle [A, B], C \rangle = -\langle [B, A], C \rangle = -\langle B, [A, C] \rangle = 0 \ .$$

Logo,

$$[A, B] \in u_R(n)^\perp \ .$$

(c) Seja $[A, B]$ um elemento genérico de $[u_R(n)^\perp, u_R(n)^\perp]$. Temos,

$$[A, B]J = ABJ - BAJ = JAB - JBA = J[A, B] \ .$$

Portanto,

$$[A, B] \in u_R(n) \ .$$

□

Lema 2.4.3 *Seja ω uma p-forma.*

(a) Se $\omega \in u(n)$, então $\mathrm{d}\omega \in u(n)$;

(b) Se $\omega \in u(n)^\perp$, então $\mathrm{d}\omega \in u(n)^\perp$.

Demonstração:

(a) Se $\omega \in u(n)$, então $[\omega, J] = 0$. Portanto,

$$0 = \mathrm{d}[\omega, J] = [\mathrm{d}\omega, J] = \mathrm{d}\omega J - J\mathrm{d}\omega \ .$$

Logo,

$$\mathrm{d}\omega J = J\mathrm{d}\omega \ .$$

Concluímos que

$$\mathrm{d}\omega \in u(n) \ .$$

(b) Se $\omega \in u(n)^{\perp}$, então $\omega.J + J\omega = 0$. Portanto,

$$\mathrm{d}\omega.J + J\mathrm{d}\omega = 0 \ .$$

O que implica que

$$\mathrm{d}\omega \in u(n)^{\perp} \ .$$

□

Segue de

$$\Pi^i_k = \mathrm{d}\omega^i_k + \omega^i_j \wedge \omega^j_k$$

que

$$\Pi = \mathrm{d}\omega + \omega \wedge \omega = \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] \ ,$$

onde $\omega = (\omega^i_k)_{2n\times 2n}$.

Segue do Teorema 2.4.1 que se $\omega_1 = (\omega^i_{1k}) \in u(n)$ e $\tau_1 = (\tau^i_{1k}) \in u(n)^{\perp}$, então $\omega = \omega_1 + \tau_1$.

Temos que

$$\begin{aligned} \Pi &= \mathrm{d}(\omega_1 + \tau_1) + \frac{1}{2}[\omega_1 + \tau_1, \omega_1 + \tau_1] \\ &= \underbrace{\mathrm{d}\omega_1 + \frac{1}{2}\left([\omega, \omega_1] + [\tau_1, \tau_1]\right)}_{\in u(n)} + \underbrace{\mathrm{d}\tau_1 + [\omega_1, \tau_1]}_{\in u(n)^{\perp}} \ . \end{aligned}$$

Como $\Pi = \Pi_1 + T_1$, com $\Pi_1 \in u(n)$ e $T_1 \in u(n)^{\perp}$, obtemos

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \mathrm{d}\omega_1 + \frac{1}{2}\left([\omega_1, \omega_1] + [\tau_1, \tau_1]\right) \ , \\ T_1 &= \mathrm{d}\tau_1 + [\omega_1, \tau_1] \ . \end{aligned}$$

De onde segue que

$$\Pi^i_{1k} = \mathrm{d}\omega^i_{1k} + \omega^i_{1j} \wedge \omega^j_{1k} + \tau^i_{1j} \wedge \tau^j_{1k}$$

$$T^i_{1k} = \mathrm{d}\tau^i_{1k} + \omega^i_{1j} \wedge \tau^j_{1k} + \tau^i_{1j} \wedge \omega^j_{1k} \ .$$

Proposição 2.4.1 *$\Psi^\alpha_{1\beta}$, $\Phi^\alpha_{1\beta}$ são dados em função de $\eta^\alpha_{1\beta}$ e $\gamma^\alpha_{1\bar\beta}$ por*

$$\begin{aligned}
\Psi^\alpha_{1\beta} &= \mathrm{d}\eta^\alpha_{1\beta} + \eta^\alpha_{1\delta}\wedge\eta^\delta_{1\beta} + \gamma^\alpha_{1\bar\delta}\wedge\gamma^{\bar\delta}_{1\beta} \\
\Phi^\alpha_{1\bar\beta} &= \mathrm{d}\gamma^\alpha_{1\bar\beta} + \eta^\alpha_{1\delta}\wedge\gamma^\delta_{1\bar\beta} + \gamma^\alpha_{1\bar\delta}\wedge\eta^{\bar\delta}_{1\bar\beta}\ .
\end{aligned}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
\Psi^\alpha_{1\beta} &= \Pi^\alpha_{1\beta} + i\Pi^{\alpha+n}_{1\beta} \\
&= \mathrm{d}\omega^\alpha_\beta + \omega^\alpha_{1\delta}\wedge\omega^\delta_{1\beta} + \tau^\alpha_{1\delta}\wedge\tau^\delta_{1\beta} + \omega^\alpha_{1,\delta+n}\wedge\omega^{\delta+n}_{1\beta} + \tau^\alpha_{1,\delta+n}\wedge\tau^{\delta+n}_{1\beta} \\
&\quad +i\left(\mathrm{d}\omega^{\alpha+n}_\beta + \omega^{\alpha+n}_{1\delta}\wedge\omega^\delta_{1\beta} + \tau^{\alpha+n}_{1\delta}\wedge\tau^\delta_{1\beta} + \omega^{\alpha+n}_{1,\delta+n}\wedge\omega^{\delta+n}_{1\beta} + \tau^{\alpha+n}_{1,\delta+n}\wedge\tau^{\delta+n}_{1\beta}\right) \\
&= \mathrm{d}\eta^\alpha_{1\beta} + \left(\omega^\alpha_{1\delta} + i\omega^{\alpha+n}_{1\delta}\right)\wedge\left(\omega^\delta_{1\beta} + i\omega^{\delta+n}_{1\beta}\right) + \left(\tau^\alpha_{1\delta} + i\tau^{\alpha+n}_{1\delta}\right)\wedge\left(\tau^\delta_{1\beta} - i\tau^{\delta+n}_{1\beta}\right) \\
&= \mathrm{d}\eta^\alpha_{1\beta} + \eta^\alpha_{1\delta}\wedge\eta^\delta_{1\beta} + \gamma^\alpha_{1\bar\delta}\wedge\gamma^{\bar\delta}_{1\beta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi^\alpha_{1\beta} &= T^\alpha_{1\beta} + iT^{\alpha+n}_{1\beta} \\
&= \mathrm{d}\left(\tau^\alpha_{1\beta} + i\tau^{\alpha+n}_{1\beta}\right) + \omega^\alpha_{1\delta}\wedge\tau^\delta_{1\beta} + \tau^\alpha_{1\delta}\wedge\omega^\delta_{1\beta} + \omega^\alpha_{1\delta+n}\wedge\tau^{\delta+n}_{1\beta} + \tau^\alpha_{1\delta+n}\wedge\omega^{\delta+n}_{1\beta} \\
&\quad +i\left(\omega^{\alpha+n}_{1\delta}\wedge\tau^\delta_{1\beta} + \tau^{\alpha+n}_{1\delta}\wedge\omega^\delta_{1\beta} + \omega^{\alpha+n}_{1,\delta+n}\wedge\tau^{\delta+n}_{1\beta} + \tau^{\alpha+n}_{1,\delta+n}\wedge\omega^{\delta+n}_{1\beta}\right) \\
&= \mathrm{d}\gamma^\alpha_{1\bar\beta} + \left(\omega^\alpha_{1\delta} + i\omega^{\alpha+n}_{1\delta}\right)\wedge\tau^\delta_{1\beta} + \left(-\omega^{\alpha+n}_{1\delta} + i\omega^\alpha_\delta\right)\wedge\tau^{\delta+n}_{1\beta} \\
&\quad + \left(\tau^\alpha_{1\delta} + i\tau^{\alpha+n}_{1\delta}\right)\wedge\omega^\delta_{1\beta} + \left(\tau^{\alpha+n}_{1\delta} - i\tau^\alpha_{1\delta}\right)\wedge\omega^{\delta+n}_{1\beta} \\
&= \mathrm{d}\gamma^\alpha_{1\bar\beta} + \left(\omega^\alpha_{1\delta} + i\omega^{\alpha+n}_{1\delta}\right)\wedge\left(\tau^\delta_{1\beta} + i\tau^{\delta+n}_{1\beta}\right) + \left(\tau^\alpha_{1\delta} + i\tau^{\alpha+n}_{1\delta}\right)\wedge\left(\omega^\delta_{1\beta} + i\omega^{\delta+n}_{1\beta}\right) \\
&= \mathrm{d}\gamma^\alpha_{1\bar\beta} + \eta^\alpha_{1\delta}\wedge\gamma^\delta_{1\bar\beta} + \gamma^\alpha_{1\bar\delta}\wedge\eta^{\bar\delta}_{1\bar\beta}\ .
\end{aligned}$$

$\square$

Escrevendo $\eta^{\alpha_i}_{1\beta_j} = \eta^{\alpha_i}_{\beta_j} + \gamma^{\alpha_i}_{2\beta_j}$ onde

$$\begin{aligned}
&(\eta^{\alpha_i}_{\beta_j}) \in h\ ,\quad (\gamma^{\alpha_i}_{2\beta_j}) \in h^\perp \quad \text{e} \\
&d_1 + \cdots + d_{i-1} + 1 \le \alpha_i\ ,\quad \beta_j \le d_1 + \cdots + d_i\ ,
\end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned}
\Psi^{\alpha_i}_{1\beta_i} &= \mathrm{d}\eta^{\alpha_i}_{\beta_i} + \eta^{\alpha_i}_{\delta_i}\wedge\eta^{\delta_i}_{\beta_i} + \gamma^{\alpha_i}_{2\delta_j}\wedge\gamma^{\delta_j}_{2\beta_i} + \gamma^{\alpha_i}_{1\bar\delta}\wedge\gamma^{\bar\delta}_{1\beta_i} \\
\Psi^{\alpha_i}_{1\beta_j} &= \mathrm{d}\gamma^{\alpha_i}_{2\beta_j} + \eta^{\alpha_i}_{\delta_i}\wedge\gamma^{\delta_i}_{2\beta_j} + \gamma^{\alpha_i}_{2\delta_j}\wedge\eta^{\delta_j}_{\beta_j} + \gamma^{\alpha_i}_{2\delta_k}\wedge\gamma^{\delta_k}_{2\beta_j} + \gamma^{\alpha_i}_{1\bar\delta}\wedge\gamma^{\bar\delta}_{1\beta_j} \\
\Phi^{\alpha_i}_{1\bar\beta_j} &= \mathrm{d}\gamma^{\alpha_i}_{1\bar\beta_j} + \eta^{\alpha_i}_{\delta_i}\wedge\gamma^{\delta_i}_{1\bar\beta_j} + \gamma^{\alpha_i}_{2\delta_k}\wedge\gamma^{\delta_k}_{1\bar\beta_j} + \gamma^{\alpha_i}_{1\bar\delta_j}\wedge\eta^{\bar\delta_j}_{\bar\beta_j} + \gamma^{\alpha_i}_{1\bar\delta_k}\wedge\gamma^{\bar\delta_k}_{2\bar\beta_j}
\end{aligned}$$

2.5 Interpretações Geométricas

Mostremos que existe um único campo ξ em M tal que

$$\theta(\xi) = 1$$
$$i_\xi \mathrm{d}\theta = 0 \ .$$

Com efeito, seja (X, X_k) um referencial na G-estrutura P_3 e (θ, θ^k) o seu coreferencial dual. Sabemos que X está fixado em P_3. Tomemos

$$\xi = X \ .$$

Temos que

$$\begin{aligned} \theta(\xi) &= 1 \qquad \text{e} \\ i_\xi \mathrm{d}\theta(\xi) &= \mathrm{d}\theta(\xi, \xi) = 0 \ , \\ i_\xi \mathrm{d}\theta(X_k) &= \mathrm{d}\theta(\xi, X_k) \\ &= h_{rs}(\theta^r(\xi)\theta^s(X_k) - \theta^r(X_k)\theta^s(\xi)) \\ &= 0 \ , \end{aligned}$$

logo, $i_\xi \mathrm{d}\theta = 0$.

Se existe outro campo ξ' tal que

$$\theta(\xi') = 1$$
$$i_{\xi'} \mathrm{d}\theta = 0 \ ,$$

então

$$\begin{aligned} 0 &= i_{\xi'} \mathrm{d}\theta(X_k) \\ &= h_{rs}(\theta^r(\xi')\theta^s(X_k) - \theta^r(X_s)\theta^s(\xi')) \\ &= 2h_{rk}\theta^r(\xi') \ . \end{aligned}$$

Segue de $\det(h_{rk}) = 1$ que

$$\theta^r(\xi') = 0 \ .$$

Portanto, (ξ', X_i) também é base dual de (θ, θ^l). Logo, $\xi' = \xi$.

O campo ξ é chamado de **campo transversal** de (M, D, g).

Para cada $X \in \mathfrak{X}(D)$ fixo definimos a forma $f_X : D \longrightarrow I\!R$ por

$$f_X(Y) = d\theta(X, Y) .$$

Existe um único campo $h(X) \in \mathfrak{X}(D)$ tal que

$$f_X(Y) = g(h(X), Y) .$$

Portanto,

$$d\theta(X, Y) = g(h(X), Y) .$$

O operador $h : D \longrightarrow D$ que associa a cada $X \in \mathfrak{X}(D)$ o campo $h(X)$ é uma forma antisimétrica. De fato, h é linear e

$$\begin{aligned} g(h(X), Y) &= d\theta(X, Y) \\ &= -d\theta(Y, X) \\ &= -g(h(Y), X) \\ &= g(X, -h(Y)) , \end{aligned}$$

logo, $h^* = -h$.

Seja $(\xi, X_1, \ldots, X_{2n})$ um referencial fixo que define uma seção $\sigma : M \longrightarrow P_3$. Definimos uma derivada covariante em M por

$$\begin{aligned} \nabla\xi &= 0 \\ \nabla X_i &= \omega_i^j X_j \end{aligned}$$

onde, por abuso de notação, escrevemos ω_i^j em vez de $\sigma^*\omega_i^j$. Esta derivada covariante independe da particular escolha do referencial em M.

Para todo campo $U \in \mathfrak{X}(M)$, ∇_U toma valores em D, isto é, $\nabla_U : \mathfrak{X}(D) \longrightarrow \mathfrak{X}(D)$. De fato, seja $X \in \mathfrak{X}(D)$, escrevamos $X = a_k X_k$.

$$\begin{aligned} \nabla_U X &= \nabla_U(a_k X_k) \\ &= U(a_k)X_k + a_k \nabla_U X_k \\ &= U(a_k)X_k + a_k \omega_k^j(U) X_j \in D . \end{aligned}$$

Chamaremos ∇ de **derivada covariante sub-riemanniana.**

Mostremos agora que $\nabla g = 0$. Como

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = X(g(Y, Z)) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$$

quaisquer que sejam $X, Y, Z \in D$, então

$$\begin{aligned}(\nabla_{X_i} g)(X_j, X_k) &= X(\delta^j_k) - g(\omega^l_j(X_i)X_l, X_k) - g(e_j, \omega^l_k(X_i)X_l) \\ &= -\omega^l_j(X_i)\delta^l_k - \omega^l_k(X_i)\delta^j_l \\ &= 0\,.\end{aligned}$$

Portanto, $\nabla g = 0$.

Segue do Teorema 2.3.1 e da Proposição 1.2.1 que o tensor torção de ∇ é dado por

$$T = \theta \wedge \tau + \mathrm{d}\theta \odot X_i$$

onde $\tau = \tau^i \odot X_i$.

Segue desta fórmula que se $X, Y \in D$, então

$$\begin{aligned}T(X, Y) &= \mathrm{d}\theta(X, Y)\xi\,, \\ T(\xi, X) &= \theta(\xi)\tau(X) - \theta(X)\tau(\xi) + (h_{ij}\theta^i \wedge \theta^j)(\xi, X)\xi \\ &= \tau(X)\,.\end{aligned}$$

Observemos que τ é um tensor simétrico que satisfaz $i_\xi \tau = 0$. De fato,

$$0 = (\tau^i \wedge \theta^i)(\xi, X_k) = \tau^k(\xi)\,.$$

Logo,

$$i_\xi \tau = \tau(\xi) = \tau^i(\xi)X_i = 0\,.$$

A mesma fórmula nos diz que

$$0 = \tau^i \wedge \theta^i(X_k, X_l) = \tau^i(X_k)\delta^i_l - \tau^i(X_l)\delta^i_k\,.$$

Logo, $\tau^l(X_k) = \tau^k(X_l)$, e

$$\begin{aligned} g(X_l, \tau(X_k)) &= g(X_l, \tau^i(X_k)X_i) = \tau^l(X_k) \\ g(\tau(X_l), X_k) &= g(\tau^i(X_l)X_i, X_k) = \tau^l(X_k) \ . \end{aligned}$$

Portanto, $g(X_l, \tau(X_k)) = g(\tau(X_l), X_k)$. Logo, τ é simétrico.

A proposição abaixo reune os principais resultados demonstrados nesta seção.

Proposição 2.5.1 *Existe uma única derivada covariante ∇ sobre M com as seguintes propriedades:*

- $\nabla_U : D \to D$;
- $\nabla\xi = 0$;
- $\nabla g = 0$;
- $T = \theta \wedge \tau + \mathrm{d}\theta \otimes \xi$;
- $T(X, Y) = \mathrm{d}\theta(X, Y)\xi = g(h(X), Y)\xi$;
- $T(\xi, X) = \tau(X)$, *onde τ é um tensor simétrico que satisfaz $i_\xi\tau = 0$,*

onde T é a torção de ∇, X e Y são campos em D e U um campo qualquer em M e ξ é o campo transversal.

Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Substituindo a fórmula

$$(\nabla_X\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$$

em

$$\mathrm{d}\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$$

obtemos

$$d\omega(X,Y) = (\nabla_X\omega)(Y) - (\nabla_Y\omega)(X) + \omega(T(X,Y)) .$$

Observemos que $\theta([\xi, X]) = 0$, pois

$$0 = h_{ij}\theta^i \wedge \theta^j(\xi, X) = d\theta(\xi, X) = -\theta([\xi, X]) .$$

para $X \in \mathfrak{X}(D)$. Portanto,

$$L_\xi X = \theta^i([\xi, X])X_i .$$

Logo, L_ξ toma valores em $\mathfrak{X}(D)$, isto é, $L_\xi : \mathfrak{X}(D) \to \mathfrak{X}(D)$.

No que segue $X, Y \in \mathfrak{X}(D)$.

Temos que

$$L_\xi X = \nabla_\xi X - \tau(X)$$

pois

$$\tau(X) = T(\xi, X) = \nabla_\xi X - L_\xi X .$$

Observemos que

$$g(\tau(X), Y) = \frac{1}{2}(L_\xi g)(X, Y)$$

pois

$$\begin{aligned}
(L_\xi g)(X, Y) &= \xi(g(X, Y)) - g(L_\xi X, Y) - g(X, L_\xi Y) \\
&= \xi(g(X, Y)) - g(\nabla_\xi X, Y) + g(\tau(X), Y) - g(X, \nabla_\xi Y) + g(X, \tau(Y)) \\
&= 2g(\tau(X), Y) + (\nabla_\xi g)(X, Y) \\
&= 2g(\tau(X), Y) .
\end{aligned}$$

Segue de $L_\xi = i_\xi d + di_\xi$ que

$$L_\xi d\theta = i_\xi d(d\theta) + d(i_\xi d\theta) = 0$$

e segue de $d\theta(X, Y) = g(h(X), Y)$ que

$$0 = L_\xi(d\theta(X, Y) - g(h(X), Y))$$

$$
\begin{aligned}
&= (L_\xi d\theta)(X,Y) + d\theta(L_\xi X, Y) + d\theta(X, L_\xi Y) - (L_\xi g)(h(X),Y) \\
&\quad -g(L_\xi(h(X)),Y) - g(h(X), L_\xi Y) \\
&= d\theta(L_\xi X, Y) + d\theta(X, L_\xi Y) - 2g(\tau(h(X)),Y) \\
&\quad -g((L_\xi h)(X) + h(L_\xi X), Y) - d\theta(X, L_\xi Y) \\
&= d\theta(L_\xi X, Y) - 2g(\tau(h(X)),Y) - g((L_\xi h)(X),Y) - d\theta(L_\xi X, Y) \\
&= -g(2\tau(h(X)) + (L_\xi h)(X), Y) .
\end{aligned}
$$

Como esta igualdade vale para todo $Y \in \mathfrak{X}(D)$, temos

$$2\tau(h(X)) + L_\xi h(X) = 0 \quad (\forall X \in D) .$$

Portanto,

$$L_\xi h = -2\tau \circ h .$$

Mostremos agora que

$$\nabla_\xi h = -(\tau \circ h + h \circ \tau) .$$

Com efeito,

$$
\begin{aligned}
(\nabla_\xi h)(X) &= \nabla_\xi(h(X)) - h(\nabla_\xi X) \\
&= L_\xi(h(X)) + \tau(h(X)) - h(L_\xi X + \tau(X)) \\
&= \tau(h(X)) - h(\tau(X)) + (L_\xi h)(X) \\
&= \tau(h(X)) - h(\tau(X)) - 2\tau(h(X)) \\
&= -\tau(h(X)) - h(\tau(X)) .
\end{aligned}
$$

A proposição abaixo resume os últimos resultados que demonstramos nesta seção.

Proposição 2.5.2 *A conexão ∇ tem as seguintes propriedades*

- $g(\tau(X), Y) = \frac{1}{2}(L_\xi g)(X,Y)$;
- $L_\xi h = -2\tau \circ h$;

- $\nabla_\xi h = -(h \circ \tau + \tau \circ h)$

onde $X, Y \in \mathfrak{X}(D)$ *e* ξ *é o campo transversal.*

Mostraremos agora que uma variedade pseudo-hermitiana não-degenerada e integrável (M, θ) descrita no Teorema 1.1 de [2] corresponde a uma variedade sub-riemanniana de codimensão 1 não-degenerada (M, D, g) tal que $[D^{1,0}, D^{1,0}] \subset D^{1,0}$ e $g_{\alpha\bar{\beta}} = \delta^\alpha_\beta$.

Seja ζ^α, $\zeta^{\bar{\alpha}}$ o correferencial dual de X_α, $X_{\bar{\alpha}}$. Segue de $[D^{1,0}, D^{1,0}] \subset D^{1,0}$ que

$$\begin{aligned} d\zeta^{\bar{\alpha}}(X_\beta, X_\gamma) &= X_\beta(\zeta^{\bar{\alpha}}(X_\gamma)) - X_\gamma(\zeta^{\bar{\alpha}}(X_\beta)) - \zeta^{\bar{\alpha}}([X_\beta, X_\gamma]) \\ &= -\zeta^{\bar{\alpha}}([X_\beta, X_\gamma]) = 0 \ . \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} d\zeta^{\bar{\alpha}}(X_\beta, X_\gamma) &= (\zeta^{\bar{\delta}} \wedge \eta^{\bar{\alpha}}_{1\bar{\delta}} + \zeta^\delta \wedge \gamma^{\bar{\alpha}}_{1\delta} + \theta \wedge \gamma^{\bar{\alpha}}_o)(X_\beta, X_\gamma) \\ &= \gamma^{\bar{\alpha}}_{1\beta}(X_\gamma) - \gamma^{\bar{\alpha}}_{1\gamma}(X_\beta) \ . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\gamma^{\bar{\alpha}}_{1\beta}(X_\gamma) - \gamma^{\bar{\alpha}}_{1\gamma}(X_\beta) = 0 \ .$$

Assim, escrevendo $\gamma^{\bar{\alpha}}_{1\beta} = A^{\bar{\alpha}}_{\beta\delta}\zeta^\delta$, obtemos

$$A^{\bar{\alpha}}_{\beta\gamma} = A^{\bar{\alpha}}_{\gamma\beta} \ ,$$

e segue de $\gamma^{\bar{\alpha}}_{1\beta} = -\gamma^{\bar{\beta}}_{1\alpha}$ que

$$A^{\bar{\alpha}}_{\beta\gamma} = -A^{\bar{\beta}}_{\alpha\gamma} \ .$$

Assim, $A^{\bar{\alpha}}_{\gamma\beta} = -A^{\bar{\beta}}_{\alpha\gamma}$. Logo,

$$A^{\bar{\alpha}}_{\gamma\beta} = -A^{\bar{\beta}}_{\alpha\gamma} = A^{\bar{\gamma}}_{\beta\alpha} = -A^{\bar{\alpha}}_{\gamma\beta} \ .$$

Portanto, $A^{\bar{\alpha}}_{\gamma\beta} = 0$ e, segue que, $\gamma^{\bar{\alpha}}_{1\beta} = 0$. Assim, obtemos a equação 1.15 de [2]:

$$d\zeta^\alpha = \zeta^\beta \wedge \eta^\alpha_{1\beta} + \theta \wedge \gamma^\alpha_o$$

onde

$$\begin{aligned} \eta^\alpha_{1\beta} + \eta^{\bar{\beta}}_{1\bar{\alpha}} &= 0 \\ \gamma^{\bar{\alpha}}_o \wedge \zeta^\alpha &= 0 \ . \end{aligned}$$

A primeira destas equações corresponde à equação (1.24) de [2] quando $g_{\alpha\overline{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\beta}$. Da segunda equação obtemos que $\gamma^{\alpha}_{0} = c^{\alpha}_{\beta}\zeta^{\overline{\beta}}$ com $A^{\alpha}_{\beta} = A^{\beta}_{\alpha}$, o que corresponde à condição (1.18) de [2].

Diferenciando $d\theta = i\zeta^{\alpha} \wedge \zeta^{\overline{\alpha}}$ que corresponde à equação (1.7) de [2], obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= d\zeta^{\alpha} \wedge \zeta^{\overline{\alpha}} - \zeta^{\alpha} \wedge d\zeta^{\overline{\alpha}} \\ &= (\zeta^{\beta} \wedge \eta^{\alpha}_{1\beta} + \theta \wedge \gamma^{\alpha}_{o}) \wedge \zeta^{\overline{\alpha}} - \zeta^{\alpha} \wedge (\zeta^{\overline{\beta}} \wedge \eta^{\overline{\alpha}}_{1\beta} + \theta \wedge \gamma^{\overline{\alpha}}_{o}) \\ &= -\zeta^{\beta} \wedge \zeta^{\overline{\alpha}} \wedge \eta^{\alpha}_{1\beta} - \zeta^{\alpha} \wedge \zeta^{\overline{\beta}} \wedge \eta^{\overline{\alpha}}_{1\beta} + \theta \wedge (\gamma^{\alpha}_{o} \wedge \zeta^{\overline{\alpha}} + \zeta^{\alpha} \wedge \gamma^{\overline{\alpha}}_{o}) \\ &= \theta \wedge (2\gamma^{\alpha}_{o} \wedge \zeta^{\overline{\alpha}}) \,. \end{aligned}$$

De onde segue que $2\gamma^{\alpha}_{o} \wedge \zeta^{\overline{\alpha}} = 0$, isto é, $\gamma^{\overline{\alpha}}_{o} \wedge \zeta^{\alpha} = 0$ que corresponde à equação (1.23) de [2].

Portanto, nossa construção, supondo $[D^{1,0}, D^{1,0}] \subset [D^{1,0}$ corresponde à construção do Teorema 1.1 de [2].

Sabemos que se ∇ é uma derivada covariante qualquer, então vale a identidade de Bianchi:

$$PR(X,Y)Z = PT(T(X,Y),Z) + P(\nabla_X T)(Y,Z)$$

onde P é a soma cíclica, R é a curvatura de ∇ e $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Para o caso particular da derivada covariante sub-riemanniana, obtemos as fórmulas da proposição abaixo.

Proposição 2.5.3 *Se $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(D)$ e ξ é o campo transversal, então*

- $PR(X,Y)Z = Pg(h(X),Y)\tau(Z)$;
- $Pg((\nabla_X h)(Y),Z) = 0$;
- $R(\xi,Y)Z - R(\xi,Z)(Y) = (\nabla_Z\tau)(Y) - (\nabla_Y\tau)(Z)$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} PT(T(X,Y),Z) &= T(g(h(X),Y)\xi, Z) + T(g(h(Y),Z)\xi, X) + T(g(h(Z),X)\xi, Y) \\ &= g(h(X),Y)\tau(Z) + g(h(Y),Z)\tau(X) + g(h(Z),X)\tau(Y) \,. \end{aligned}$$

Logo,

$$PT(T(X,Y),Z) = Pg(h(X),Y)\tau(Z) \ .$$

Segue de $T(X,Y) = \mathrm{d}\theta(X,Y)\xi$ que

$$(\nabla_X T)(Y,Z) = (\nabla_X \mathrm{d}\theta)(Y,Z)\xi \ .$$

Portanto,

$$P(\nabla_X T)(Y,Z) = P(\nabla_X \mathrm{d}\theta(Y,Z))\xi \ .$$

Temos que

$$\begin{aligned}
P(\nabla_X \mathrm{d}\theta)(Y,Z) &= (\nabla_X \mathrm{d}\theta)(Y,Z) + (\nabla_Y \mathrm{d}\theta)(Z,X) + (\nabla_Z \mathrm{d}\theta)(X,Y) \\
&= X(\mathrm{d}\theta(Y,Z)) - \mathrm{d}\theta(\nabla_X Y, Z) - \mathrm{d}\theta(Y, \nabla_X Z) \\
&\quad + Y(\mathrm{d}\theta(Z,X)) - \mathrm{d}\theta(\nabla_Y Z, X) - \mathrm{d}\theta(Z, \nabla_Y X) \\
&\quad + Z(\mathrm{d}\theta(X,Y)) - \mathrm{d}\theta(\nabla_Z X, Y) - \mathrm{d}\theta(X, \nabla_Z Y) \ .
\end{aligned}$$

Observemos que se α é uma 2-forma sobre M, então

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\alpha(X,Y,Z) &= X(\alpha(Y,Z)) - Y(\alpha(X,Z)) + Z(\alpha(X,Y)) \\
&\quad - \alpha([X,Y],Z) + \alpha([X,Z],Y) - \alpha([Y,Z],X) \ .
\end{aligned}$$

Fazendo $\alpha = \mathrm{d}\theta$, obtemos

$$X(\mathrm{d}\theta(Y,Z)) - Y(\mathrm{d}\theta(X,Z)) + Z(\mathrm{d}\theta(X,Y)) = \mathrm{d}\theta([X,Y],Z) - \mathrm{d}\theta([X,Z],Y) + \mathrm{d}\theta([Y,Z],X) \ .$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
P(\nabla_X \mathrm{d}\theta)(Y,Z) &= \mathrm{d}\theta([X,Y],Z) - \mathrm{d}\theta([X,Z],Y) + \mathrm{d}\theta([Y,Z],X) \\
&\quad - \mathrm{d}\theta(\nabla_X Y, Z) + \mathrm{d}\theta(\nabla_Y X, Z) + \mathrm{d}\theta(\nabla_X Z, Y) \\
&\quad - \mathrm{d}\theta(\nabla_Z X, Y) - \mathrm{d}\theta(\nabla_Y Z, X) + \mathrm{d}\theta(\nabla_Z Y, X) \\
&= -\mathrm{d}\theta(T(X,Y),Z) + \mathrm{d}\theta(T(X,Z),Y) - \mathrm{d}\theta(T(Y,Z),X) \\
&= -\mathrm{d}\theta(\mathrm{d}\theta(X,Y)\xi, Z) + \mathrm{d}\theta(\mathrm{d}\theta(X,Z)\xi, Y) - \mathrm{d}\theta(\mathrm{d}\theta(Y,Z)\xi, Y) \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

Concluímos que

$$PR(X,Y)Z = Pg(h(X),Y)\tau(Z) \; .$$

Mostremos que $Pg((\nabla_X h)(Y),Z) = 0$.

$$\begin{aligned} X(g(Y,Z)) &= (\nabla_X g)(Y,Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\ &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \; . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} &(\nabla_X T)(Y,Z) = \nabla_X(T(Y,Z)) - T(\nabla_X Y, Z) - T(Y, \nabla_X Z) \\ &= \nabla_X(g(h(Y),Z)\xi) - g(h(\nabla_X Y),Z)\xi - g(h(Y),\nabla_X Z)\xi \\ &= g((\nabla_X h)(Y),Z)\xi + g(h(\nabla_X Y),Z)\xi + g(h(Y),\nabla_X Z)\xi - g(h(\nabla_X Y),Z)\xi - g(h(Y),\nabla_X Z)\xi \\ &= g((\nabla_X h)(Y),Z)\xi \; . \end{aligned}$$

Logo,

$$Pg((\nabla_X h)(Y),Z)\xi = P(\nabla_X T)(Y,Z) = 0 \; .$$

Mostremos agora que

$$R(\xi,Y)Z - R(\xi,Z)Y = (\nabla_Z \tau)(Y) - (\nabla_Y \tau)(Z) \; .$$

Observemos inicialmente que $R(X,Y)\xi = 0$ pois

$$R(X,Y)\xi = \nabla_Y \nabla_Z \xi - \nabla_Z \nabla_Y \xi - \nabla_{[Y,Z]}\xi = 0 \; .$$

Logo,

$$PR(\xi,Y)Z = R(\xi,Y)Z - R(\xi,Z)Y \; .$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} &PT(T(\xi,Y),Z) + P((\nabla_\xi T)(Y,Z)) = T(T(\xi,Y),Z) + T(T(Y,Z),\xi) + T(T(Z,\xi),Y) \\ &\quad + (\nabla_\xi T)(Y,Z) + (\nabla_Y T)(Z,\xi) + (\nabla_Z T)(\xi,Y) \\ &= T(\tau(Y),Z) + T(\mathrm{d}\theta(Y,Z)\xi,\xi) - T(\tau(Z),Y) + \nabla_\xi(T(Y,Z)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-T(\nabla_\xi Y, Z) - T(Y, \nabla_\xi Z) + \nabla_Y(T(Z,\xi)) - T(\nabla_Y Z, \xi) - T(Z, \nabla_Y \xi) \\
&+Z(T(\xi, Y)) - T(\nabla_Z \xi, Y) - T(\xi, \nabla_Z Y) \\
&= T(\tau(Y), Z) - T(\tau(Z), Y) + \tau(T(Y,Z)) + L_\xi(T(Y,Z)) - T(\tau(Y), Z) \\
&-T(L_\xi Y, Z) - T(Y, \tau(Z)) - T(Y, L_\xi Z) - \nabla_Y(\tau(Z)) + \tau(\nabla_Y Z) + Z(\tau(Y)) - \tau(\nabla_Z Y) \\
&= (\nabla_Z \tau)(Y) - (\nabla_Y \tau)(Z) + (L_\xi T)(Y, Z)\,.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$PT(T(\xi, Y), Z) + P((\nabla_\xi T)(Y, Z)) = (\nabla_Z \tau)(Y) - (\nabla_Y \tau)(Z)$$

pois $(L_\xi T)(Y, Z) = 0$. Com efeito, segue de $T(Y, Z) = \mathrm{d}\theta(Y, Z)\xi$ que

$$
\begin{aligned}
0 &= L_\xi(T(Y,Z) - \mathrm{d}\theta(Y,Z)\xi) \\
&= (L_\xi T)(Y,Z) + T(L_\xi Y, Z) + T(Y, L_\xi Z) - (L_\xi \mathrm{d}\theta)(Y,Z)\xi - \mathrm{d}\theta(L_\xi Y, Z)\xi - \mathrm{d}\theta(Y, L_\xi Z)\xi \\
&= (L_\xi T)(Y,Z) + \mathrm{d}\theta(L_\xi Y, Z) + \mathrm{d}\theta(Y, L_\xi Z) - \mathrm{d}\theta(L_\xi Y, Z) - \mathrm{d}\theta(Y, L_\xi Z)\xi \\
&= L_\xi T(Y,Z)\,.
\end{aligned}
$$

Logo, segue da identidade de Bianchi que

$$R(\xi, Y)Z - R(\xi, Z)Y = (\nabla_Z \tau)(Y) - (\nabla_Y \tau)(Z)\,.$$

Definição 2.5.1 *Duas variedades subriemannianas de codimensão 1, (M, D, g) e (M', D', g'), são equivalentes se existe um difeomorfismo $f : M \to M'$ tal que $f_* D = D'$ e $g'(f_* X, f_* Y) = g(X, Y)$ quaisquer que sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(D)$. O difeomorfismo f é dita uma equivalência entre M e M'.*

Um campo sobre M é chamado de equivalência infinitesimal se cada elemento do seu grupo a um-parâmetro é uma equivalência de M.

A proposição abaixo fornece uma interpretação geométrica para o caso em que (M, D, g) tem torção τ nula.

Proposição 2.5.4 *O campo transversal ξ é uma equivalência infinitesimal se, e somente se, $\tau^i = 0$.*

Demonstração:

Seja $\{\varphi_t\}$ o grupo a um-parâmetro de ξ. Segue de $(\varphi_t^* g)(X,Y) = g((\varphi_t)_* X, (\varphi_t)_* Y)$ que ξ é uma equivalência infinitesimal se, e somente se,

$$\varphi_t^* g = g \ .$$

Logo,

$$L_\xi g = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(\varphi_t^* g - g) = 0 \ .$$

isto implica que

$$g(\tau(X), Y) = \frac{1}{2}(L_\xi g)(X, Y) = 0$$

quaisquer que sejam $X, Y \in D$. De onde segue que $\tau = 0$.

Portanto, ξ é uma equivalência infinitesimal se, e somente se, $\tau^i = 0$.

□

No caso em que ξ é uma equivalência infinitesimal obtemos

$$\Omega^i = \mathrm{d}\tau^i - \tau^j \wedge \omega_j^i = 0 \ .$$

Logo,

$$-W_{rs}^i \theta^r \wedge \theta^s + \mu^i \wedge \theta = 0 \ .$$

Portanto,

$$\sum_{r<s} (W_{rs}^i - W_{sr}^i) \theta^r \wedge \theta^s = 0 \ .$$

de onde $W_{rs}^i = W_{sr}^i$.

Segue de $W_{rs}^i = -W_{is}^r$ e $W_{rs}^i + W_{ir}^s + W_{si}^r = 0$ que

$$W_{rs}^i - W_{sr}^i = -W_{si}^r \ ,$$

e implica que $W_{si}^r = 0$.

Assim, obtemos que a curvatura é dada por

$$\Pi_j^i = \frac{1}{2} R_{jrs}^i \theta^r \wedge \theta^s \ .$$

Definimos uma métrica em M da seguinte maneira

$$\begin{aligned}
&\langle\ .\ \rangle\Big|_D = g\\
&\langle \xi, \xi\rangle = 1\\
&\langle \xi, X\rangle = 0 \quad (\forall X \in D)\ .
\end{aligned}$$

Consideremos a conexão de Levi-Civita $\tilde{\omega}^i_j, \tilde{\omega}^i, \tilde{\omega}_i$ satisfazendo a equação de estrutura

$$\begin{aligned}
&d\theta^i = \theta^j \wedge \tilde{\omega}^i_j + \theta \wedge \tilde{\omega}^i\\
&d\theta = \theta^j \wedge \tilde{\omega}_j
\end{aligned}$$

com as condições $\tilde{\omega}^i_j = -\tilde{\omega}^j_i$ e $\tilde{\omega}^i = -\tilde{\omega}_i$.

Seja

$$\tilde{\omega} = (h^i_j + a^i_j)\theta^j$$

onde

$$h^i_j = -h_{ij}\ .$$

De

$$d\theta = h_{ij}\theta^i \wedge \theta^j = \theta^i \wedge (-h^i_j - a^i_j)\theta^j$$

obtemos

$$a^i_j\theta^i \wedge \theta^j = 0\ ,$$

ou

$$a^i_j = a^j_i\ .$$

De

$$\begin{aligned}
d\theta^i &= \theta^j \wedge \tilde{\omega}^i_j + \theta \wedge \tilde{\omega}^i\\
&= \theta^j \wedge (\tilde{\omega}^i_j - h^i_j\theta) + \theta \wedge a^i_j\theta^j\ .
\end{aligned}$$

Como $\tilde{\omega}^i_j - h^i_j\theta$ é antisimétrico e i e j, e a^i_j é simétrico, obtemos que:

Proposição 2.5.5 *A conexão sub-riemanniana e as formas de torção são dadas por*

$$\begin{aligned}
\omega^i_j &= \tilde{\omega}^i_j - h^i_j\theta\\
\tau^i &= a^i_j\theta^j\ .
\end{aligned}$$

2.6 Modelos de Curvatura Constante

Consideraremos a $U(d_1)\times\cdots\times U(d_r)$ - redução do Teorema 2.4.3 para estabelecer a equivalência entre duas variedades subriemannianas de codimensão 1, com λ_α constantes e torção $\gamma^{\alpha_1}_{2\beta_j}=\gamma^{\alpha_1}_{1\bar\beta}=\gamma^{\alpha_1}_{0}=0$. Usando a notação do Teorema 2.4.3 vemos que as equações de estrutura, neste caso, ficam reduzidas a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\theta &= i\lambda_{\alpha_j}\zeta^{\alpha_j}\wedge\zeta^{\bar\alpha_j}\\
\mathrm{d}\zeta^{\alpha_j} &= \zeta^{\beta_j}\wedge\eta^{\alpha_j}_{\beta_j}
\end{aligned}
$$

com $1\le j\le r$, $d_1+\cdots+d_{j-1}+1\le\alpha_j,\beta_j\le d_1+\cdots+d_j$ e $\eta^{\alpha_j}_{\beta_j}=-\overline{\eta^{\beta_j}_{\alpha_j}}$.

A curvatura na forma complexa fica reduzida a

$$\Psi^{\alpha_j}_{1\beta_j}=\mathrm{d}\eta^{\alpha_j}_{\beta_j}+\eta^{\alpha_j}_{\gamma_j}\wedge\eta^{\gamma_j}_{\beta_j}\ .$$

Definição 2.6.1 *Uma variedade sub-riemanniana tem curvatura seccional constante se*

$$\Psi^{\alpha_j}_{1\beta_j}=C_j\left(\zeta^{\alpha_j}\wedge\zeta^{\bar\beta_j}+\delta^{\alpha_j}_{\beta_j}\sum\zeta^{\gamma_j}\wedge\zeta^{\bar\gamma_j}\right)$$

onde C_j é constante para cada $1\le j\le r$.

Provemos agora o teorema de classificação local.

Teorema 2.6.1 *Sejam (M,D,g) e (M',D',g') duas variedades sub-riemannianas satisfazendo as condições*

(i) $r=r'$, $d_i=d'_i$ e $\lambda_{\alpha_i}=\lambda'_{\alpha_i}$ constantes;

(ii) (M,D,g) e (M',D',g') têm torção nula e a mesma curvatura seccional constante, $C_i=C'_i$.

Então existe uma equivalência local entre (M,D,g) e (M',D',g').

Demonstração:

Seja $P_5 \times P'_5$ o produto das H-estruturas construídas acima. Consideremos sobre esta variedade o pull-back das formas θ, θ', ζ^{α_i}, ζ'^{α_i}, $\eta^{\alpha_i}_{\beta_i}$ e $\eta'^{\alpha_i}_{\beta_i}$ sobre P_5 e P'_5 pelas projeções canônicas π_1 e π'_1 e denotemos este pull-back pelas mesmas letras

Consideremos as formas

$$
\begin{aligned}
\omega^{\alpha_j} &= \zeta^{\alpha_j} - \zeta'^{\alpha_j} \\
\omega &= \theta - \theta' \\
\omega^{\alpha_j}_{\beta_j} &= \eta^{\alpha_j}_{\beta_j} - \eta'^{\alpha_j}_{\beta_j} .
\end{aligned}
$$

Mostremos, usando (i) e (ii), que o ideal $\mathcal{J}$ gerado por $\{\omega^{\alpha_j}, \omega^{\overline{\alpha}_j}, \omega, \omega^{\alpha_j}_{\beta_j}, \omega^{\overline{\alpha}_j}_{\overline{\beta}_j}\}$ é diferencial. De fato,

$$
\begin{aligned}
d\omega^{\alpha_j} &= \zeta^{\beta_j} \wedge \eta^{\alpha_j}_{\beta_j} - \zeta'^{\beta_j} \wedge \eta'^{\alpha_j}_{\beta_j} \\
&= \zeta^{\beta_j} \wedge \eta^{\alpha_j}_{\beta_j} - \zeta'^{\beta_j} \wedge \eta^{\alpha_j}_{\beta_j} + \zeta'^{\beta_j} \wedge \eta^{\alpha_j}_{\beta_j} - \zeta'^{\beta_j} \wedge \eta'^{\alpha_j}_{\beta_j} \\
&= (\zeta^{\beta_j} - \zeta'^{\beta_j}) \wedge \eta^{\alpha_j}_{\beta_j} + \zeta'^{\beta_j} \wedge (\eta^{\alpha_j}_{\beta_j} - \eta'^{\alpha_j}_{\beta_j}) \\
&= \omega^{\beta_j} \wedge \eta^{\alpha_j}_{\beta_j} + \zeta'^{\beta_j} \wedge \omega^{\alpha_j}_{\beta_j} ;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\omega &= i\lambda_{\alpha_j} \zeta^{\alpha_j} \wedge \zeta^{\overline{\alpha}_j} - i\lambda_{\alpha_j} \zeta'^{\alpha_j} \wedge \zeta'^{\overline{\alpha}_j} \\
&= i\lambda_{\alpha_j} (\zeta^{\alpha_j} \wedge \zeta^{\overline{\alpha}_j} - \zeta'^{\alpha_j} \wedge \zeta^{\overline{\alpha}_j} + \zeta'^{\alpha_j} \wedge \zeta^{\overline{\alpha}_j} - \zeta'^{\alpha_j} \wedge \zeta'^{\overline{\alpha}_j}) \\
&= i\lambda_{\alpha_j} \Big((\zeta^{\alpha_j} - \zeta'^{\alpha_j}) \wedge \zeta^{\overline{\alpha}_j} + \zeta'^{\alpha_j} \wedge (\zeta^{\overline{\alpha}_j} - \zeta'^{\overline{\alpha}_j}) \Big) \\
&= i\lambda_{\alpha_j} (\omega^{\alpha_j} \wedge \zeta^{\overline{\alpha}_j} + \zeta'^{\alpha_j} \wedge \omega^{\overline{\alpha}_j}) ;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\omega^{\alpha_j}_{\beta_j} &= \Psi^{\alpha_j}_{1\gamma_j} - \eta^{\alpha_j}_{\gamma_j} \wedge \eta^{\gamma_j}_{\beta_j} - \Psi'^{\alpha_j}_{1\beta_j} + \eta'^{\alpha_j}_{\gamma_j} \wedge \eta'^{\gamma_j}_{\beta_j} \\
&= C_j \Big(\zeta^{\alpha_j} \wedge \zeta^{\overline{\beta}_j} + \delta^{\alpha_j}_{\beta_j} \sum \zeta^{\gamma_j} \wedge \zeta^{\overline{\gamma}_j} \Big) - \eta^{\alpha_j}_{\gamma_j} \wedge \eta^{\gamma_j}_{\beta_j} \\
&\quad - C_j \Big(\zeta'^{\alpha_j} \wedge \zeta'^{\overline{\beta}_j} + \delta^{\alpha_j}_{\beta_j} \sum \zeta'^{\gamma_j} \wedge \zeta'^{\overline{\gamma}_j} \Big) + \eta'^{\alpha_j}_{\gamma_j} \wedge \eta'^{\gamma_j}_{\beta_j} \\
&= C_j \Big[\zeta^{\alpha_j} \wedge \zeta^{\overline{\beta}_j} - \zeta'^{\alpha_j} \wedge \zeta'^{\overline{\beta}_j} + \delta^{\alpha_j}_{\beta_j} \sum (\zeta^{\gamma_j} \wedge \zeta^{\overline{\gamma}_j} - \zeta'^{\gamma_j} \wedge \zeta'^{\overline{\gamma}_j}) \Big] \\
&\quad - \eta^{\alpha_j}_{\gamma_j} \wedge \eta^{\gamma_j}_{\beta_j} + \eta'^{\alpha_j}_{\gamma_j} \wedge \eta'^{\alpha_j}_{\beta_j} \\
&= C_j \Big[\zeta^{\alpha_j} \wedge \zeta^{\overline{\beta}_j} - \zeta^{\alpha_j} \wedge \zeta'^{\overline{\beta}_j} + \zeta^{\alpha_j} \wedge \zeta'^{\overline{\beta}_j} - \zeta'^{\alpha_j} \wedge \zeta'^{\overline{\beta}_j}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& +\delta^{\alpha_j}_{\beta_j} \sum (\zeta^{\gamma_j} \wedge \zeta^{\bar{\gamma}_j} - \zeta^{\gamma_j} \wedge \zeta'^{\bar{\gamma}_j} + \zeta^{\gamma_j} \wedge \zeta'^{\bar{\gamma}_j} - \zeta'^{\gamma_j} \wedge \zeta'^{\bar{\gamma}_j})\Big] \\
& -\eta^{\alpha_j}_{\gamma_j} \wedge \eta^{\gamma_j}_{\beta_j} + \eta^{\alpha_j}_{\gamma_j} \wedge \eta'^{\gamma_j}_{\beta_j} - \eta^{\alpha_j}_{\gamma_j} \wedge \eta'^{\gamma_j}_{\beta_j} + \eta'^{\alpha_j}_{\gamma_j} \wedge \eta'^{\gamma_j}_{\beta_j} \\
= \; & C_j\Big[\zeta^{\alpha_j} \wedge (\zeta^{\bar{\beta}_j} - \zeta'^{\beta_j}) + (\zeta^{\alpha_j} - \zeta'^{\alpha_j}) \wedge \zeta'^{\bar{\beta}_j} \\
& +\delta^{\alpha_j}_{\beta_j} \sum (\zeta^{\gamma_j} \wedge (\zeta^{\bar{\gamma}_j} - \zeta'^{\gamma_j}) + (\zeta^{\gamma_j} - \zeta'^{\gamma_j}) \wedge \zeta'^{\bar{\gamma}_j})\Big] \\
& -\eta^{\alpha_j}_{\gamma_j} \wedge (\eta^{\gamma_j}_{\beta_j} - \eta'^{\gamma_j}_{\beta_j}) - (\eta^{\alpha_j}_{\gamma_j} - \eta'^{\alpha_j}_{\beta_j}) \wedge \eta'^{\gamma_j}_{\beta_j} \\
= \; & C_j\Big[\zeta^{\alpha_j} \wedge \omega^{\bar{\beta}_j} + \omega^{\alpha_j} \wedge \zeta'^{\beta_j} + \delta^{\alpha_j}_{\beta_j} \sum (\zeta^{\gamma_j} \wedge \omega^{\bar{\gamma}_j} + \omega^{\gamma_j} \wedge \zeta'^{\bar{\gamma}_j})\Big] \\
& -\eta^{\alpha_j}_{\beta_j} \wedge \omega^{\gamma_j}_{\beta_j} - \omega^{\alpha_j}_{\gamma_j} \wedge \eta'^{\gamma_j}_{\beta_j} \; .
\end{aligned}
$$

Fixando referenciais $b_o \in P_5$ e $b'_o \in P'_5$, pelo Teorema 2.34 de [4], existe uma vizinhança U de b_o e uma aplicação $F : U \to P'_5$ tal que $F(b_o) = b'_o$. O gráfico de F é uma subvariedade integral do ideal diferencial $\mathcal{J}$ passando por (b_o, b'_o) e

$$
\begin{aligned}
F^*(\theta') &= \theta \\
F^*(\zeta'^{\alpha_i}) &= \zeta^{\alpha_i} \\
F^*(\eta'^{\alpha_j}_{\beta_j}) &= \eta^{\alpha_j}_{\beta_j} \; .
\end{aligned}
$$

Como antes, denotemos por π e π' as projeções de P_5 e P'_5 sobre M e M', respectivamente.

Sejam $b = (\pi(b), e, e_{\alpha_j}) \in P_5$ e $F(b) = (\pi(F(b)), e', e'_{\alpha_j})$.

Mostremos que $\pi' \circ F$ é constante sobre as fibras de P_5. Para isto, basta mostrar que $(\pi' \circ F)_{*b}(v) = 0$ para todo $v \in V_b$.

$$
\begin{aligned}
(\pi' \circ F)_{*b}(v) &= \pi'_{*F(b)}(F_{*b}(v)) \\
&= \theta'_{F(b)}(F_{*b}(v))e' + \zeta'^{\alpha_j}_{F(b)}(F_{*b}(v))e'_{\alpha_j} \\
&= (F^*\theta')_b(v)e' + (F^*\zeta'^{\alpha_j})_b(v)e'_{\alpha_j} \\
&= \theta_b(v)e' + \zeta^{\alpha_j}_b(v)e'_{\alpha_j} \\
&= 0 \; .
\end{aligned}
$$

Definimos $f : \pi(U) \to M'$ por $f(\pi(b)) = \pi'(F(b))$. Do que foi dito acima, segue que f está bem definida e

$$
f \circ \pi = \pi' \circ F \; .
$$

Para todo $u \in T_b P_5$, temos

$$\begin{aligned} f_{*\pi(b)}(\pi_{*b}(u)) &= f_{*\pi(b)}(\theta_b(u)e + \zeta_b^{\alpha_j}(u)e_{\alpha_j}) \\ &= \theta_b(u) f_{*\pi(b)}(e) + \zeta_b^{\alpha_j}(u) f_{*\pi(b)}(e_{\alpha_j}) \ . \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \pi'_{*F(b)}(F_{*b}u) &= \theta'_{F(b)}(F_* u)e' + \zeta'^{\alpha_j}_{F(b)}(F_{*b}u)e'_{\alpha_j} \\ &= (F^*\theta')_b(u)e' + (F^*\zeta'^{\alpha_j})_b(u)e'_{\alpha_j} \\ &= \theta_b(u)e' + \zeta_b^{\alpha_j}(u)e'_{\alpha_j} \ . \end{aligned}$$

Portanto, segue de

$$f_{*\pi(b)}(\pi_{*b}(u)) = \pi'_{*F(b)}(F_{*b}u)$$

que

$$\theta_b(u)(f_{*\pi(b)}(e) - e') + \zeta_b'^{\alpha_j}(u)(f_{*\pi(b)}(e_{\alpha_j}) - e'_{\alpha_j}) = 0 \ .$$

Substituindo, sucessivamente, nesta equação, u por u_o e u_{α_i}, pertencentes à base de $T_b B$, da qual a base $\{\theta, \zeta^{\alpha_j}, \eta^{\alpha_j}_{\beta_j}\}$ é dual, isto é, vetores satisfazendo

$$\begin{aligned} &\theta_b(u_0) = 1 \quad \text{e} \quad \zeta_b^{\alpha_j}(u_0) = 0 \\ &\zeta_b^{\alpha_j}(u_{\alpha_i}) = \delta^{\alpha_j}_{\alpha_i} \end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned} &f_{*\pi(b)}(e) = e' \\ &f_{*\pi(b)}(e_{\alpha_j}) = e'_{\alpha_j} \ . \end{aligned}$$

Portanto, $f_* D = D'$, como a imagem de uma base ortonomal de D por $f_{*\pi(b)}$ é uma base ortonormal de D', segue que f_* preserva métrica. Assim, f é uma equivalência local entre (M, D, g) e (M', D', g').

□

Exemplos. *Daremos abaixo alguns exemplos de modelos que se adequam à situação descrita pelo Teorema 2.7.1. Em tais exemplos* $r = 1$, $d_1 = n$ *e* $\lambda_{\alpha_1} = \lambda$ *constante.*

(1) *Consideremos* $\mathbb{C}^{n+1}$ *com o produto hermitiano*

$$\langle z, w\rangle = \sum_{\sigma=0}^{n} z^{\sigma}\overline{w^{\sigma}} \ .$$

Seja a esfera $S^{2n+1}(r) \subset \mathbb{C}^{n+1}$ *dada por*

$$S^{2n+1}(r) = \{ z \ ; \quad \langle z, z\rangle = r^2 \} \ .$$

Seja $(b_o, b_1, \ldots, b_n)$ *os referenciais ortonormais de* $\mathbb{C}^{n+1}$ *segundo o produto hermitiano acima, isto é,*

$$\langle b_\sigma, b_\delta\rangle = \delta^\sigma_\delta \ , \quad 0 \leq \sigma, \delta \leq n \ .$$

Portanto, $z = rb_0 \in S^{2n+1}(r)$. *Assim, podemos identificar* ib_o, b_α *e* ib_α *com vetores tangentes a* $S^{2n+1}(r)$ *em* rb_o. *Os campos* b_α *e* ib_α *geram uma distribuição de codimensão 1 em* $S^{2n+1}(r)$. *A parte real de* $\langle \ , \ \rangle$ *restrita a* D *produz uma métrica* g *em* D *na qual* $\{b_\alpha, ib_\alpha\}$ *é uma base ortonormal. Desta forma,* $(S^{2n+1}(r), D, g)$ *é uma variedade sub-riemanniana de codimensão 1 e* $(rb_o, ib_o, b_\alpha, ib_\alpha)$ *são seções do fibrado de referenciais de* $S^{2n+1}(r)$.

Definimos as formas ω^σ_δ *por* $\mathrm{d}b_\delta = \omega^\sigma_\delta b_\sigma$. *Segue de* $\langle b_\delta, b_\sigma\rangle = \delta^\sigma_\delta$ *que*

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathrm{d}b_\delta, b_\sigma\rangle + \langle b_\delta, \mathrm{d}b_\sigma\rangle \\ &= \omega^\sigma_\delta + \overline{\omega^\delta_\sigma} \ . \end{aligned}$$

Portanto, $\omega^\sigma_\delta = -\overline{\omega^\delta_\sigma}$. *Segue daí que* ω^o_o *é uma forma real, que designaremos por* $\frac{1}{r^2}\theta$, *multiplicada por* i.

Seja $z : S^{2n+1}(r) \to S^{2n+1}(r)$ *definida por* $z(x) = x$ *onde* $x = rb_o$. *Temos que*

$$id = \mathrm{d}z = r\mathrm{d}b_o = r\omega^o_o b_o + r\omega^\alpha_o b_\alpha \ .$$

Logo,

$$\begin{aligned} \omega^o_o &= \frac{i}{r^2}\theta \\ \omega^\alpha_o &= \frac{\zeta^\alpha}{r} \\ \mathrm{d}z &= \frac{1}{r}\theta i b_o + \zeta^\alpha b_\alpha \\ D &= Ker\theta \ . \end{aligned}$$

A conexão sub-riemanniana é definida por

$$\nabla(ib_o) = 0$$
$$\nabla b_\alpha = \omega_\alpha^\beta b_\beta \ , \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq n \ .$$

Diferenciando $\mathrm{d}z = \frac{1}{r}\theta i b_o + \zeta^\alpha b_\alpha$, *obtemos*

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{i}{r}\mathrm{d}\theta b_o - \frac{i}{r}\theta \wedge \mathrm{d}b_o + \mathrm{d}\zeta^\alpha b_\alpha - \zeta^\alpha \mathrm{d}\zeta^\alpha \\
&= \frac{i}{r}\mathrm{d}\theta b_o - \frac{i}{r}\theta \wedge \omega_o^o b_o - \frac{i}{r}\theta \wedge \omega_o^\alpha b_\alpha + \mathrm{d}\zeta^\alpha b_\alpha - \zeta^\alpha \wedge \omega_\alpha^o b_o - \zeta^\alpha \omega_\alpha^\beta b_\beta \\
&= \frac{1}{r}(i\mathrm{d}\theta + \zeta^\alpha \wedge r\overline{\omega_o^\alpha})b_o + \left(\mathrm{d}\zeta^\alpha - \frac{i}{r}\theta \wedge \omega_0^\alpha - \zeta^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha\right) b_\alpha \\
&= \frac{1}{r}(i\mathrm{d}\theta + \zeta^\alpha \wedge \zeta^{\overline{\alpha}})b_o + \left(\mathrm{d}\zeta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \frac{i}{r^2}\theta \wedge \zeta^\beta - \zeta^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha\right) b_\alpha \\
&= \frac{1}{r}(i\mathrm{d}\theta + \zeta^\alpha \wedge \zeta^{\overline{\alpha}})b_o + \left(\mathrm{d}\zeta^\alpha - \zeta^\beta \wedge (\omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \frac{i}{r^2}\theta)\right) b_\alpha \ .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\theta &= i\zeta^\alpha \wedge \zeta^{\overline{\alpha}} \\
\mathrm{d}\zeta^\alpha &= \zeta^\beta \wedge \left(\omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \frac{i}{r^2}\theta\right) \ .
\end{aligned}$$

Segue da primeira equação que $(S^{2n+1}(r), D, g)$ *é não-degenerada, que o coreferencial* $(\theta, \zeta^1, \ldots, \zeta^n)$ *pertence a* P_5^* *e que*

$$r = 1 \ , \quad d_1 = n \quad \text{e} \quad \lambda_{\alpha_1} = 1 \ .$$

Da segunda equação segue que

$$\begin{aligned}
\gamma_o^\alpha &= \gamma_{1\overline{\beta}}^\alpha = \gamma_{2\beta}^\alpha = 0 \\
\eta_\beta^\alpha &= \omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \frac{i}{r^2}\theta \ ,
\end{aligned}$$

com $\eta_\beta^\alpha = -\overline{\eta_\alpha^\beta}$, *pois*

$$\begin{aligned}
\eta_\alpha^\beta &= \omega_\alpha^\beta - \delta_\beta^\alpha \frac{i}{r^2}\theta \\
&= -\overline{\left(\omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \frac{i}{r^2}\theta\right)} \\
&= -\overline{\eta_\beta^\alpha} \ .
\end{aligned}$$

Da diferenciação de $\mathrm{d}b_\alpha = \omega_\alpha^o b_o + \omega_\alpha^\beta b_\beta$ *vem*

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{r}\mathrm{d}\zeta^{\overline{\alpha}} b_o + \frac{1}{r}\zeta^{\overline{\alpha}} \wedge \mathrm{d}b_o + \mathrm{d}\omega_\alpha^\beta b_\beta - \omega_\alpha^\beta \mathrm{d}b_\beta \\
&= -\frac{1}{r}\zeta^{\overline{\beta}} \wedge \left(-\omega_\alpha^\beta + \delta_\beta^\alpha \frac{i}{r^2}\theta\right) b_o + \frac{1}{r}\zeta^{\overline{\alpha}} \wedge \omega_o^\sigma b_\sigma + \mathrm{d}\omega_\alpha^\beta b_\beta - \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^\sigma b_\sigma \\
&= \frac{1}{r}\zeta^{\overline{\beta}} \wedge \left(\omega_\alpha^\beta + \delta_\beta^\alpha \frac{i}{r^2}\theta\right) b_o + \frac{1}{r}\zeta^{\overline{\alpha}} \wedge \omega_o^o b_o + \frac{1}{r}\zeta^{\overline{\alpha}} \wedge \omega_o^\beta b_\beta + \mathrm{d}\omega_\alpha^\beta b_\beta \\
&\quad -\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^o b_o - \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^\gamma b_\gamma \\
&= \left(\frac{1}{r^2}\zeta^{\overline{\alpha}} \wedge \zeta^\beta + \mathrm{d}\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta\right) b_\beta
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathrm{d}\omega_\alpha^\beta = \frac{1}{r^2}\zeta^\beta \wedge \zeta^{\overline{\alpha}} + \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \ .$$

Determinemos agora a expressão de $\Psi_{1\beta}^\alpha$.

$$\begin{aligned}
\Psi_{1\beta}^\alpha &= \mathrm{d}\eta_\beta^\alpha + \eta_\gamma^\alpha \wedge \eta_\beta^\gamma \\
&= \mathrm{d}\omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \frac{i}{r^2}\mathrm{d}\theta + \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma - \delta_\beta^\gamma \frac{i}{r^2}\omega_\gamma^\alpha \wedge \theta - \delta_\gamma^\alpha \frac{i}{r^2}\theta \wedge \omega_\beta^\gamma \\
&= \frac{1}{r^2}\zeta^\alpha \wedge \zeta^{\overline{\beta}} + \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \delta_\beta^\alpha \frac{1}{r^2} \sum \zeta^\gamma \wedge \zeta^{\overline{\gamma}} + \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma \ .
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Psi_{1\beta}^\alpha = \frac{1}{r^2}\left(\zeta^\alpha \wedge \zeta^{\overline{\beta}} + \delta_\beta^\alpha \sum \zeta^\gamma \wedge \zeta^{\overline{\gamma}}\right) \ .$$

Logo,

$$C_1 = \frac{1}{r^2}$$

(2) Este exemplo e o seguinte são construídos de forma análoga ao primeiro. Seja $\mathbb{C}^{n+1}$ *com o produto hermitiano*

$$\langle z, w\rangle = -z_o\overline{w_o} + \sum_{\sigma=1}^{n} z^\sigma \overline{w^\sigma} \ .$$

Definimos

$$Q^{2n+1}(r) = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \ ; \ \langle z, z\rangle = -r^2 \quad e \quad \mathrm{Re}(z^o) > 0\} \ .$$

A condição $\mathrm{Re}(z^o)$ *nos diz que* $Q^{2n+1}(r)$ *é conexa.*

Observemos que se $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to Q^{2n+1}(r)$ *é uma curva, então segue de* $\langle \gamma(t), \gamma(t) \rangle = -r^2$, *que* $\mathrm{Re}\left(\langle \gamma'(0), \gamma(0) \rangle\right) = 0$.

Seja $(b_o, b_1, \ldots, b_n)$ *os referenciais ortonormais com respeito ao produto hermitiano acima, isto é,*

$$\langle b_o, b_o \rangle = -1$$

$$\langle b_o, b_\alpha \rangle = 0$$

$$\langle b_\alpha, b_\beta \rangle = \delta^\alpha_\beta \ .$$

Consideraremos $z = rb_o \in Q^{2n+1}(r)$. *Logo,* ib_o, b_α *e* ib_α *podem ser identificados com vetores tangentes a* $Q^{2n+1}(r)$ *em* rb_o. *Os campos* b_α *e* ib_α *geram uma distribuição* D *de codimensão 1 em* $Q^{2n+1}(r)$. *A parte real de* $\langle \ , \ \rangle$ *restrita a* D *produz uma métrica* g *em* D *na qual* $\{b_\alpha, ib_\alpha\}$ *é uma base ortonormal. Assim,* $(Q^{2n+1}(r), D, g)$ *é uma variedade sub-riemanniana de codimensão 1 e* $(rb_o, ib_o, b_\alpha, ib_\alpha)$ *são seções de fibrado de referenciais de* $Q^{2n+1}(r)$.

Definimos as formas ω^σ_δ, $0 \le \sigma, \delta \le n$, *por* $\mathrm{d}b_\delta = \omega^\sigma_\delta b_\sigma$. *Segue da diferenciação de* $\langle b_o, b_o \rangle = -1$ *que* $\omega^o_o = \frac{i}{r^2}\theta$, *para alguma 1-forma real* θ *e diferenciando* $\langle b_o, b_\alpha \rangle = 0$ *e* $\langle b_\alpha, b_\beta \rangle = \delta^\alpha_\beta$, *obtemos*

$$\begin{aligned} \omega^\alpha_o &= \overline{\omega^o_\alpha} \\ \omega^\beta_\alpha &= -\overline{\omega^\alpha_\beta} \ . \end{aligned}$$

Segue de $id = \mathrm{d}z = r\mathrm{d}b_o = r\omega^o_o b_o + r\omega^\alpha_o b_\alpha$ *que*

$$\mathrm{d}z = \frac{1}{r}\theta i b_o + \zeta^\alpha b_\alpha$$

Diferenciando esta última equação obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{i}{r}\mathrm{d}\theta b_o - \frac{i}{r}\theta \wedge \omega^\sigma_o b_\sigma + \mathrm{d}\zeta^\alpha b_\alpha - \zeta^\alpha \mathrm{d}b_\alpha \\ &= \frac{i}{r}\mathrm{d}\theta b_o - \frac{i}{r}\theta \wedge \omega^o_o b_o - \frac{i}{r}\theta \wedge \omega^\beta_o b_\beta + \mathrm{d}\zeta^\alpha \wedge b_\alpha - \zeta^\alpha \wedge \omega^o_\alpha b_o - \zeta^\alpha \wedge \omega^\beta_\alpha b_\beta \\ &= \frac{1}{r}(i\mathrm{d}\theta - \zeta^\alpha \wedge \zeta^{\overline{\alpha}})b_o + \left(\mathrm{d}\zeta^\alpha - \frac{i}{r^2}\theta \wedge \zeta^\alpha - \zeta^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta\right) b_\alpha \ . \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} d\theta &= -i\zeta^\alpha \wedge \zeta^{\overline{\alpha}} \\ d\zeta^\alpha &= \zeta^\beta \wedge \left(\omega_\beta^\alpha - \frac{i}{r^2}\delta_\beta^\alpha \theta\right) . \end{aligned}$$

Segue da segunda equação que

$$\eta_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \frac{i}{r^2}\theta ,$$

com $\eta_\beta^\alpha = -\overline{\eta_\alpha^\beta}$

Da equação $db_\alpha = \omega_\alpha^o b_o + \omega_\alpha^\beta b_\beta$ *vem*

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{r}d\zeta^{\overline{\alpha}} b_o - \frac{1}{r}\zeta^{\overline{\alpha}} \wedge db_o + d\omega_\alpha^\beta b_\beta - \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^\sigma b_\sigma \\ &= \frac{1}{r}\zeta^{\overline{\beta}} \wedge \overline{\eta_\beta^\alpha} b_o - \frac{1}{r}\zeta^{\overline{\alpha}} \wedge \omega_o^o b_o - \frac{1}{r}\zeta^{\overline{\alpha}} \wedge \omega_o^\beta b_\beta + d\omega_\alpha^\beta b_\beta - \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^o b_o - \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^\gamma b_\gamma \\ &= \left(\frac{1}{r}\zeta^{\overline{\beta}} \wedge \overline{\eta_\beta^\alpha} - \frac{1}{r}\zeta^{\overline{\alpha}} \wedge \frac{i}{r^2}\theta - \omega_\alpha^\beta \wedge \frac{\zeta^\alpha}{r}\right) b_o + \left(d\omega_\alpha^\beta - \frac{1}{r^2}\zeta^{\overline{\alpha}} \wedge \zeta^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta\right) b_\beta \\ &= (d\omega_\alpha^\beta - \frac{1}{r^2}\zeta^{\overline{\alpha}} \wedge \zeta^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta) b_\beta . \end{aligned}$$

Logo,

$$d\omega_\alpha^\beta = -\frac{1}{r^2}\zeta^\beta \wedge \zeta^{\overline{\alpha}} + \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta .$$

Determinemos $\Psi_{1\beta}^\alpha$.

$$\begin{aligned} \Psi_{1\beta}^\alpha &= d\eta_\beta^\alpha + \eta_\gamma^\alpha \wedge \eta_\beta^\gamma \\ &= d\omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \frac{i}{r^2} d\theta + \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma - \delta_\beta^\gamma \frac{i}{r^2}\omega_\gamma^\alpha \wedge \theta - \delta_\gamma^\alpha \frac{i}{r^2}\theta \wedge \omega_\beta^\gamma \\ &= -\frac{1}{r^2}\zeta^\alpha \wedge \zeta^{\overline{\beta}} + \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha - \delta_\beta^\alpha \frac{1}{r^2}\sum \zeta^\gamma \wedge \zeta^{\overline{\gamma}} + \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Psi_{1\beta}^\alpha = -\tfrac{1}{r^2}\left(\zeta^\alpha \wedge \zeta^{\overline{\beta}} + \delta_\beta^\alpha \sum \zeta^\gamma \wedge \zeta^{\overline{\gamma}}\right)$$

$$C_1 = -\tfrac{1}{r^2}$$

(3) Neste exemplo temos $1 \leq \alpha, \beta \leq n$ *e* $0 \leq \sigma, \delta \leq 2n$. *Consideremos no* $\mathbb{C}^{n+2}$ *o seguinte produto hermitiano*

$$\langle z, w\rangle = \sum_{\alpha=1}^{n} z^\alpha \overline{w^\alpha} + i(z^{n+1}\overline{w^o} - z^o\overline{w^{n+1}})$$

onde $z = (z^o, z^1, \ldots, z^{n+1})$ *e* $w = (w^o, w^1, \ldots, w^{n+1})$.

Seja o grupo de Heisenberg em $\mathbb{C}^{n+2}$ *definido por*

$$H^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+2} : \quad \langle z, z\rangle = 0 \quad e \quad z^o = 1\}$$

e seja $(b_o, b_1, \ldots, b_{n+1})$ *os referenciais do* $\mathbb{C}^{n+2}$ *ortonormais segundo o produto hermitiano acima, isto é,*

$$\begin{aligned}
&\langle b_o, b_o\rangle = \langle b_o, b_\alpha\rangle = \langle b_\alpha, b_{n+1}\rangle = \langle b_{n+1}, b_{n+1}\rangle = 0\\
&\langle b_o, b_{n+1}\rangle = -i\\
&\langle b_\alpha, b_\beta\rangle = \delta^\alpha_\beta
\end{aligned}$$

tais que $z = b_o \in H^{2n+1}$.

Se $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to H^{2n+1}$ *é uma curva, então* $\mathrm{Re}(\langle\gamma'(0), \gamma(0)\rangle) = 0$. *Assim,* b_α, ib_α *e* b_{n+1} *podem ser identificados com vetores tangentes a* H^{2n+1} *em* b_o. *Com esta identificação* $(b_o, b_\alpha, ib_\alpha, b_{n+1})$ *são seções do fibrado de referenciais de* H^{2n+1}. *Os campos* b_α *e* ib_α *geram uma distribuição* D *de codimensão 1 em* H^{2n+1} *e a parte real de* $\langle\ ,\ \rangle$ *restrita a* D *produz uma métrica em* D *na qual* $\{b_\alpha, ib_\alpha\}$ *é uma base ortonormal. Assim,* (H^{2n+1}, D, g) *é uma variedade subriemanniana de codimensão 1.*

Definimos as formas ζ^σ *por* $\mathrm{d}b_o = \zeta^\sigma b_\sigma$. *Segue de* $\langle b_o, b_o\rangle = 0$ *que*

$$\begin{aligned}
0 &= \langle\zeta^o b_o + \zeta^\alpha b_\alpha + \zeta^{n+1} b_{n+1}, b_o\rangle + \langle b_o, \zeta^o b_o + \zeta^\alpha b_\alpha + \zeta^{n+1} b_{n+1}\rangle\\
&= i\zeta^{n+1} - i\overline{\zeta^{n+1}}\ .
\end{aligned}$$

Logo, $\zeta^{n+1} = \theta$ *onde* θ *é uma 1-forma real.*

De $id = z = \mathrm{d}b_o$ *concluímos que* ζ^o, ζ^α, θ *é o coreferencial dual de* b_o, b_α, b_{n+1}.

Definimos as formas ω^σ_α *e* ω^{n+1}_α *por*

$$\mathrm{d}b_\alpha = \omega^\sigma_\alpha b_\sigma + \omega^{n+1}_\alpha b_{n+1}\ .$$

Segue de $\langle b_o, b_\alpha\rangle = 0$ *que*

$$\begin{aligned}
0 &= \langle\mathrm{d}\zeta^o b_o + \zeta^\beta b_\beta + \theta b_{n+1}, b_\alpha\rangle + \langle b_o, \omega^o_\alpha b_o + \omega^\beta_\alpha b_\beta + \omega^{n+1}_\alpha b_{n+1}\rangle\\
&= \zeta^\alpha - i\overline{\omega^{n+1}_\alpha}\ .
\end{aligned}$$

Logo, $\omega_\alpha^{n+1} = i\zeta^{\overline{\alpha}}$.

Além disso, b_{n+1} *é constante. Logo,* $\mathrm{d}b_{n+1} = 0$. *Assim, diferenciando* $\langle b_0, b_{n+1}\rangle = 0$ *e* $\langle b_\alpha, b_{n+1}\rangle = 0$, *obtemos*

$$\langle \omega_0^0 b_0 + \zeta^\alpha b_\alpha + \theta b_{n+1}, b_{n+1}\rangle = 0$$
$$\langle \omega_\alpha^0 b_0 + \omega_\alpha^\beta b_\beta + i\zeta^{\overline{\alpha}} b_{n+1}, b_{n+1}\rangle = 0$$

Segue daíque $\omega_0^0 = \omega_\alpha^0 = 0$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}b_0 &= \zeta^\alpha b_\alpha + \theta b_{n+1} \\ \mathrm{d}b_\alpha &= \omega_\alpha^\beta b_\beta + i\zeta^{\overline{\alpha}} b_{n+1} \\ \mathrm{d}b_{n+1} &= 0\ . \end{aligned}$$

Segue da diferenciação da primeira equação que

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}\zeta^\alpha b_\alpha - \zeta^\alpha \wedge (\omega_\alpha^\beta b_\beta + i\zeta^{\overline{\alpha}} b_{n+1}) + \mathrm{d}\theta b_{n+1} \\ &= (\mathrm{d}\zeta^\alpha - \zeta^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha) b_\alpha + (\mathrm{d}\theta - i\zeta^\alpha \wedge \zeta^{\overline{\alpha}}) b_{n+1}\ . \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\theta &= i\zeta^\alpha \wedge \zeta^{\overline{\alpha}} \\ \mathrm{d}\zeta^\alpha &= \zeta^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha\ . \end{aligned}$$

Logo, $\eta_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha$, *com* $\omega_\beta^\alpha = -\overline{\omega_\alpha^\beta}$.

Da diferenciação de $\mathrm{d}b_\alpha = \omega_\alpha^\beta b_\beta + i\zeta^{\overline{\alpha}} b_{n+1}$, *obtemos*

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}\omega_\alpha^\beta b_\beta - \omega_\alpha^\beta \wedge (\omega_\beta^\gamma b_\gamma + i\zeta^{\overline{\beta}} b_{n+1}) - i\zeta^{\overline{\beta}} \wedge \omega_\alpha^\beta b_{n+1} \\ &= (\mathrm{d}\omega_\alpha^\beta - \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta) b_\beta\ . \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathrm{d}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta$$

de onde segue que $\Psi^\alpha_{1\beta} = 0$, *pois*

$$\begin{aligned}
\Psi^\alpha_{1\beta} &= d\omega^\alpha_\beta + \omega^\alpha_\gamma \wedge \omega^\gamma_\beta \\
&= d\omega^\alpha_\beta - d\omega^\alpha_\beta \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

Referências

[1] Falbel, E.; Veloso, J.M.; Verderesi, J.A. *The equivalence problem in sub-Riemannian geometry.* Preprint, IMEUSP, 1993.

[2] Webster, S.M. Pseudo-Hermitian structures on a real hypersurface. *J. Differential Geometry*, 13:25-41,1978.

[3] Runin, M. Formes differentielles sur les variétés de contact. *J. Differential Geometry*, (1994), 281–342.

[[DA4] Warner, F.W. *Foundations of differentiable manifolds and Lie Groups.* Scott, Foresman and Company, 1971.

[5] Matsushima, Y. *Differentiable manifolds.* Marcel Dekker Inc., 1972.

[6] Carmo, M.P. *Geometria riemanniana.* Projeto Euclides, IMPA-CNPq, 1979.

[7] Cartan, H. *Formes différentielles.* Hermann, 1967.

Índice de Símbolos