Extensões de Medidas em Álgebras:

uma Abordagem Topológica

Gaspar Alfredo Salas Pacho

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Análise Matemática**
Orientadora: **Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Iracema Martin Bund**

*Durante a elaboração deste trabalho,
o autor recebeu apoio financeiro da CAPES*

-São Paulo, março de 1995-

Extensões de Medidas em Álgebras:

uma Abordagem Topológica

Este exemplar corresponde à redação final

da dissertação devidamente corrigida e

defendida por Gaspar Alfredo Salas Pacho

e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 4 maio de 1995.

Banca examinadora:

- Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Iracema Martin Bund (Orientadora) - IME - USP
- Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Carmem Silvia Cardassi - IME - USP
- Prof. Dr. Dicésar Lass Fernandes - IMECC - UNICAMP.

deo gratias optimo

Resumo

Neste trabalho, a extensão de Carathéodory de uma medida enumeravelmente aditiva μ definida numa álgebra de subconjuntos de um conjunto X, via a medida exterior μ^*, é abordada sob aspectos topológicos. Prova-se que a σ-álgebra dos conjuntos mensuráveis segundo Carathéodory pode ser descrita como fecho da álgebra dada numa topologia conveniente, definida no conjunto das partes de X.

Por outro lado, mostramos que restrita à σ-álgebra dos conjuntos mensuráveis segundo Carathéodory, μ^* é sempre a maior extensão σ-aditiva de μ.

Podem existir várias extensões, a menos que μ seja σ-finita, e possivelmente não exista uma mínima. Entretanto, se μ for regular com relação a conjuntos de medida finita, existirá também uma menor extensão σ-aditiva.

Abstract

In this work, the Carathéodory extension of a countable additive measure μ defined on an algebra of sets via the corresponding outer measure μ^* is investigated under topological aspects. It is shown that the σ-algebra of Carathéodory-measurable sets can also be described as the closure of the given algebra under a suitable topology on the power set.

On the other hand, it's proved that, restricted to the σ-algebra of Carathéodory-measurable sets, μ^* is always the largest σ-additive extension of μ.

There may be many different extensions, unless μ is σ-finite, and possibly no minimal one. However, if μ is regular with respect to sets of finite measure, there also exists a smallest σ-additive extension.

Agradecimentos

Concedei-me Senhor, a graça de colher o fruto dos meus esforços.

Este trabalho é parte de um ideal que não teria sido possível realiza-lo sem a ajuda, o incentivo e o companheirismo de amigos, colegas e professores. Estendo a todos a minha gratidão.

Sou grato em especial a minha orientadora e amiga Profª. Iracema, pela sugestão do tema, pelos conselhos, pela nossa amizade, pela paciência *ad infinitum* durante o curso de Mestrado e orientação desta dissertação.

Agradeço aos membros da comissão julgadora, em especial à Profª. Carmem Silvia Cardassi, pela observação de imprecisões e erros, na versão preliminar deste trabalho, e por suas valiosas sugestões.

Sou grato também à Profª. Elza Gomide, pelo apoio e atenção dispensados durante o período de Exames de Qualificação.

Aos amigos e colegas Rosa e Jorge Cieza, pela amizade e apoio incondicional durante os meus tempos de 'nuvens negras', sou profundamente grato. Aos colegas do Instituto, em particular, aos amigos Carlos H. dos Santos, Edson R. Alvares, Carlota C. Kuramochi, Cássio Y. Shimuta e José Flores Delgado, pela amizade e incentivo, obrigado.

Pela oportunidade de poder melhorar a minha formação acadêmica e pelas facilidades dispensadas, agradeço à Universidade de São Paulo.

Agradeço a hospitalidade dos brasileiros.

Agradeço aos meus pais.

Conteúdo

Introdução 1

A extensão de Carathéodory 3

1.1 Álgebra, σ-álgebra e medida 3

1.2 Completamento de uma medida 5

1.3 Medida exterior e medida induzida 6

1.4 Teorema de extensão de Carathéodory 9

1.5 Coberturas mensuráveis 13

2 A topologia $\mathcal{I}$ em $\mathcal{P}(X)$ 16

2.1 A topologia $\mathcal{I}$ em $\mathcal{P}(X)$ 16

2.2 Uma caracterização do fecho de $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ 19

2.3 Uma caracterização de $\overline{\mathcal{J}}$ 21

2.4 Conjuntos localmente nulos em $\mathcal{P}(X)$ 28

3 O fecho topológico da álgebra $\mathcal{J}$ 30

3.1 A álgebra $\overline{\mathcal{J}}$ 30

3.2 A σ-álgebra $\overline{\mathcal{J}}$ 33

3.3 A σ-aditividade de μ^* em $\overline{\mathcal{J}}$ 35

4 $\overline{\mathcal{J}}$ e a Extensão de Carathéodory 40

4.1 A completude da σ-álgebra $\overline{\mathcal{J}}$ 40

4.2 $\overline{\mathcal{J}}$ e a σ-álgebra de Carathéodory 42

5 Extensões de Medidas **45**

5.1 Extensões do espaço $(X, \overline{\mathcal{J}}, \lambda)$ 45

5.2 Comparação e unicidade de extensões de μ 54

6 Medidas regulares no sentido finito **56**

6.1 Medidas f-regulares 56

6.2 A topologia $\mathcal{I}_0$ gerada por ${\mu_0}^*$ 62

6.3 A topologia $\mathcal{I}_\infty$ gerada por μ^*_∞ 66

7 Extensão mínima de uma medida **68**

7.1 Propriedades de uma medida f-regular 68

7.2 Uma extensão de uma medida f-regular 75

7.3 A continuidade de μ em $\mathcal{J}$ 83

Apêndice **88**

A Propriedades das Operações de Conjuntos **88**

A.1 Propriedades Básicas 88

Bibliografia **92**

Introdução

A presente monografia está baseada no artigo de Dorothy Maharam *From Finite to Countable Additivity,* publicada na revista Portugaliae Mathematica. Vol. 44 Fasc. 3 - (1987), 265-282.

Uma medida enumeravelmente aditiva μ definida numa álgebra $\mathcal{J}$ de subconjuntos de X admite uma extensão à σ-álgebra $\mathcal{C}$ dos conjuntos mensuráveis segundo Carathéodory.

O método de Extensão de Carathéodory tem o inconveniente de ser um pouco artificial. Dorothy Maharam mune a família $\mathcal{P}(X)$ de uma topologia $\mathcal{I}$, de modo que $\mathcal{C}$ coincide com o fecho topológico $\overline{\mathcal{J}}$ da álgebra $\mathcal{J}$. Além disso faz um estudo da existência de outras extensões de μ a σ-álgebras contendo propriamente $\overline{\mathcal{J}}$; observando no entanto que μ^*, a medida exterior de Carathéodory, é a extensão máxima. Finalmente prova que, sendo μ " regular no sentido finito", existe uma extensão mínima de μ a $\overline{\mathcal{J}}$.

No Capítulo 1, apresentamos o método de extensão de Carathéodory e mostramos que se a medida μ for σ-finita na álgebra $\mathcal{A}$, então a extensão de μ para a σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$ é única.

No Capítulo 2, o objetivo é apresentar e justificar os conceitos teóricos utilizados ao longo deste trabalho. Todos os elementos apresentados aí permanecerão fixados ao longo do texto. Assim X é um conjunto arbitrário, denotaremos por $\mathcal{J}$ a álgebra de subconjuntos de X e $\mathcal{J}^< = \{F \in \mathcal{J} : \mu(F) < \infty\}$. A aplicação μ é uma medida enumeravelmente aditiva definida em $\mathcal{J}$ e μ^* é a medida exterior induzida pela μ definida em $\mathcal{P}(X)$. Portanto, μ^* é uma extensão de μ a $\mathcal{P}(X)$, isto é,

$$\mu^*(F) = \mu(F) \quad \text{se } F \in \mathcal{J}.$$

A seguir, muniremos $\mathcal{P}(X)$ e consequentemente $\mathcal{J}$, de uma topologia $\mathcal{I}$, induzida por uma família de pseudo-métricas. Provaremos que a família das partes $\mathcal{P}(X)$ com a topologia $\mathcal{I}$, junto com a operação de diferença simétrica de conjuntos é um grupo topológico.

A seguir, no Capítulo 3 mostraremos que o fecho $\overline{\mathcal{J}}$ da álgebra $\mathcal{J}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X e que a restrição da medida exterior μ^* a $\overline{\mathcal{J}}$ é uma medida.

No Capítulo 4, o objetivo principal é mostrar com argumentos topológicos que $\overline{\mathcal{J}}$ é a σ-álgebra dos conjuntos μ^*-mensuráveis segundo Carathéodory.

Prova-se que $\overline{\mathcal{J}}$ é completa em relação aos conjuntos de medida nula.

No Capítulo 5, mostraremos que se a σ-álgebra $\overline{\mathcal{J}}$ é diferente de $\mathcal{P}(X)$, então sempre é possível encontrar uma extensão de μ, definida numa σ-álgebra contendo propriamente $\overline{\mathcal{J}}$ e essa extensão não é necessariamente única. Provaremos ainda que se μ for σ-finita em $\mathcal{J}$ a extensão λ é única.

No Capítulo 6 estudamos o conceito de "regularidade no sentido finito" que é semelhante ao de regularidade no caso de medidas Borelianas. Mostramos que μ pode ser decomposta na soma de uma medida regular no sentido finito com uma medida que só assume os valores 0 e ∞.

Finalmente, no Capítulo 7 mostramos que se μ for regular no sentido finito, então admite uma extensão mínima de $\mathcal{J}$ a $\overline{\mathcal{J}}$.

Capítulo 1

A extensão de Carathéodory

Neste capítulo, fazemos uma apresentação da extensão de uma medida finitamente aditiva definida numa álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de um conjunto X, para a σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$, usando a técnica de Carathéodory. Mostramos também que se a medida for σ-finita esta extensão é única.

1.1 Álgebra, σ-álgebra e medida

Definição 1.1.1 *Sejam X um conjunto e $\mathcal{A}$ uma classe não-vazia de subconjuntos de X tal que:*

i) $A \in \mathcal{A}$ implica que $A^c \in \mathcal{A}$;

ii) $A, B \in \mathcal{A}$ implica que $A \cup B \in \mathcal{A}$.
Dizemos então que $\mathcal{A}$ é uma álgebra de subconjuntos de X.

Definição 1.1.2 *Seja $\mathcal{A}$ uma família não-vazia de subconjuntos de X tal que:*

i) $A \in \mathcal{A}$ implica que $A^c \in \mathcal{A}$;

ii) $A_n \in \mathcal{A}$ para todo $n \in I\!N$ implica que $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
Dizemos então que $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X.

Definição 1.1.3 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de subconjuntos de X. Uma aplicação μ definida em $\mathcal{A}$, com valores em $[0, \infty]$, é chamada medida finitamente aditiva se*

i) $\mu(\emptyset) = 0$;

ii) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, *se* $A, B \in \mathcal{A}$ *e* $A \cap B = \emptyset$.

Definição 1.1.4 *A aplicação* μ *definida em (1.1.3) é dita enumeravelmente aditiva se, sendo* $(A_n)_{n \in N}$ *uma sequência de elementos dois a dois disjuntos de* $\mathcal{A}$ *tal que* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ *temos que*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Observação 1.1.1 *Sendo* $\mathcal{A}$ *uma* σ*-álgebra de subconjuntos de* X *e* μ *como na definição anterior, neste caso, chamaremos a aplicação* μ *simplesmente de medida.*

Diremos que uma medida μ *definida numa* σ*-álgebra* $\mathcal{A}$ *é finita se* $\mu(X) < \infty$.

No caso de termos $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, *para alguma sequência* $(F_n)_{n \in N}$ *de elementos de* $\mathcal{A}$, *com* $\mu(F_n) < \infty$ *para cada* $n \in I\!N$, *diremos que* μ *é uma medida* σ*-finita.*

Lema 1.1.1 *Sejam* μ *uma medida finitamente aditiva definida em uma álgebra* $\mathcal{A}$ *de subconjuntos de* X *e sejam* $A, B \in \mathcal{A}$ *tais que* $A \subset B$. *Então* $\mu(A) \leq \mu(B)$ *e, além disso, se* $\mu(A) < \infty$, *tem-se*

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

Demonstração: É imediato que $A \subset B$ implica $B = A \cup (B \setminus A)$ e portanto

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A).$$

Se $\mu(A) < \infty$ temos que

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A). \blacksquare$$

Teorema 1.1.1 *Seja* μ *uma medida finitamente aditiva numa álgebra* $\mathcal{A}$ *de subconjuntos de* X *tal que para toda sequência de elementos de* $\mathcal{A}$ *com* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ *se tenha*

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Então μ *é enumeravelmente aditiva.*

Demonstração: Basta considerar uma sequência $(A_n)_{n\in N}$ de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{A}$ tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ e mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$.

Sejam $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e $C_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Como μ é finitamente aditiva, para cada $n \in I\!N$ e usando Lema(1.1.1) temos $\sum_{i=1}^{n} \mu(A_i) = \mu(C_n) \leq \mu(A)$, de onde concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n).\blacksquare$$

1.2 Completamento de uma medida

Definição 1.2.1 *Seja μ uma medida definida numa σ-álgebra $\mathcal{S}$ de subconjuntos de X. Diremos que μ é uma medida completa se, sendo $A \in \mathcal{S}$ com $\mu(A) = 0$ e $N \subset A$ então $N \in \mathcal{S}$. A terna $(X, \mathcal{S}, \mu)$ é chamada de espaço de medida completa. Diremos também que $\mathcal{S}$ é uma σ-álgebra completa.*

Teorema 1.2.1 *Sejam μ uma medida definida sobre uma σ-álgebra $\mathcal{S}$ e definamos o conjunto*

$$\mathcal{S}' = \{E : A \subset E \subset B, \text{ onde } A, B \in \mathcal{S} \text{ e } \mu(B \setminus A) = 0\}.$$

Então $\mathcal{S}'$ é uma σ-álgebra e a igualdade $\mu'(E) = \mu(A)$ define uma medida completa μ' em $\mathcal{S}'$ que é uma extensão de μ.

Demonstração: É evidente que $\mathcal{S}'$ contém $\mathcal{S}$. Mostraremos primeiramente que o conjunto $\mathcal{S}'$ é fechado por complementação. Se $E \in \mathcal{S}'$ existem $A, B \in \mathcal{S}$ tais que $A \subset E \subset B$, com $\mu(A \setminus B) = 0$. Mas $B^c \subset E^c \subset A^c$ e $A^c \setminus B^c = B \setminus A$; assim $E^c \in \mathcal{S}'$.

Para provar que $\mathcal{S}'$ é uma σ-álgebra, consideremos a sequência $(E_n)_{n\in N}$ em $\mathcal{S}'$ e sejam as sequências $(A_n)_{n\in N}, (B_n)_{n\in N}$ em $\mathcal{S}$ tais que para cada $n \in I\!N$, $A_n \subset E_n \subset B_n$ e $\mu(B_n \setminus A_n) = 0$. Como

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

da inclusão $(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus A_n)$, decorre que

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} (B_n \setminus A_n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n \setminus A_n) = 0.$$

Portanto, temos que o conjunto $\mathcal{S}'$ é fechado com relação à reunião enumerável, o que mostra que $\mathcal{S}'$ é uma σ-álgebra.

Mostremos agora, que a aplicação μ' está bem definida; suponhamos que $E \in \mathcal{S}'$ e que $A, B, C, D \in \mathcal{S}$ satisfaçam

$$A \subset E \subset B, \quad C \subset E \subset D \quad e \quad \mu(B \setminus A) = \mu(D \setminus C) = 0. \tag{1.1}$$

Vamos provar que $\mu(A) = \mu(C)$.

Como $B = A \cup (B \setminus A)$ e $D = C \cup (D \setminus C)$ usando (1.1) temos que $\mu(B) = \mu(A)$ e $\mu(D) = \mu(C)$. Mas, por outro lado, $A \setminus C \subset D \setminus C$, portanto, temos que $\mu(A \setminus C) \leq \mu(D \setminus C) = 0$ e $\mu(A) = \mu(A \setminus C) + \mu(A \cap C)$. Consequentemente, $\mu(A) = \mu(A \cap C)$.

Similarmente obtém-se que $\mu(C) = \mu(A \cap C)$. Assim

$$\mu(A) = \mu(C).$$

Concluímos que μ' está bem definida e é que $\mu'(E) = \mu(E)$ se $E \in \mathcal{S}$.

A σ-aditividade de μ' segue da σ-aditividade de μ. Com efeito, considerando sequências $(E_n)_{n\in N}$ em $\mathcal{S}'$ e $(A_n)_{n\in N}, (B_n)_{n\in N}$ em $\mathcal{S}$, sendo os A_n's dois a dois disjuntos, satisfazendo $A_n \subset E_n \subset B_n$, $\mu(B_n \setminus A_n) = 0$, como $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ segue que

$$\mu'(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu'(E_n).$$

Isso mostra que μ' é uma medida.

Finalmente, seja $E \in \mathcal{S}'$ tal que $\mu'(E) = 0$ e seja $F \subset E$. Sendo $A, B \in \mathcal{S}$ tais que $A \subset E \subset B$, temos $\mu(B) = \mu(A) = 0$. Portanto, $\emptyset \subset F \subset B$ com $\mu(B \setminus \emptyset) = \mu(B) = 0$ o que implica que $F \in \mathcal{S}'$. Em outras palavras, μ' é uma medida completa definida na σ-álgebra $\mathcal{S}'$. ∎

1.3 Medida exterior e medida induzida

Nesta seção, apresentamos alguns resultados sobre uma medida exterior. Mostraremos que a restrição da medida exterior μ^* à σ-álgebra dos conjuntos μ^*-mensuráveis é uma medida, denominada medida induzida pela medida exterior μ^*.

Definição 1.3.1 *Seja X um conjunto. Uma aplicação μ^* definida em $\mathcal{P}(X)$ e com valores em $[0,\infty]$ é chamada medida exterior, se as seguintes condições são verificadas*

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

ii) $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ *se* $A \subset B \subset X$;

iii) $\mu^*(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$ *se* $A_n \subset X$, *para todo* $n \in I\!N$.

Definição 1.3.2 (Carathéodory) *Seja μ^* uma medida exterior definida em $\mathcal{P}(X)$. Um conjunto $E \subset X$ é chamado μ^*-mensurável se, para todo $T \subset X$ temos que*

$$\mu^*(T) = \mu^*(T \cap E) + \mu^*(T \cap E^c).$$

Lema 1.3.1 *Sejam μ^* uma medida exterior definida em $\mathcal{P}(X)$ e $E_1, E_2, ..., E_n$ subconjuntos μ^*-mensuráveis de X, dois a dois disjuntos. Então, para todo $A \subset X$ temos*

$$\mu^*(A \bigcap (E_1 \cup ... \cup E_n)) = \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i).$$

Demonstração: A prova é feita por indução sobre n. Se $n = 1$, a igualdade é trivialmente válida. Assumindo válida a proposição para n elementos, consideremos $E_1, ..., E_n, E_{n+1}$ conjuntos μ^*-mensuráveis, dois a dois disjuntos e $A \subset X$. Valem as seguintes igualdades:

$$A \cap (\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i) \cap E_{n+1} = A \cap E_{n+1} \tag{1.2}$$

$$A \cap (\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i) \cap E_{n+1}^c = A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i). \tag{1.3}$$

Segue pela μ^*-mensurabilidade de E_{n+1}, usando (1.2) e (1.3) respectivamente, e fazendo $T = A \cap (\bigcup\limits_{i=1}^{n+1} E_i)$ que

$$\begin{aligned}
\mu^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i)) &= \mu^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i) \cap E_{n+1}) + \mu^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n+1} E_i) \cap E_{n+1}^c) \\
&= \mu^*(A \cap E_{n+1}) + \mu^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} E_i)) \\
&= \mu^*(A \cap E_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} \mu^*(A \cap E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \mu^*(A \cap E_i),
\end{aligned}$$

o que prova o lema. ∎

Teorema 1.3.1 *Sejam μ^* uma medida exterior em $\mathcal{P}(X)$ e $\mathcal{A}_{\mu^*}$ a coleção dos subconjuntos de X que são μ^*-mensuráveis. Então, $\mathcal{A}_{\mu^*}$ é uma σ-álgebra e $\bar{\mu} = \mu^* \mid \mathcal{A}_{\mu^*}$ é uma medida.*

Demonstração: Provaremos em primeiro lugar que $\mathcal{A}_{\mu^*}$ é uma álgebra. Como a definição de μ^*-mensurabilidade de E é simétrica em E e E^c, o conjunto E^c é mensurável desde que E o seja.

Sejam $E_1, E_2 \in \mathcal{A}_{\mu^*}$; mostraremos que $E = E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Com efeito, como $E = E_1 \cup E_2 = E_1 \cup (E_1^c \cap E_2)$, para todo $T \subset X$ temos

$$\begin{aligned}
\mu^*(T) &\leq \mu^*(T \cap E) + \mu^*(T \cap E^c) \\
&= \mu^*(T \cap (E_1 \cup (E_1^c \cap E_2))) + \mu^*(T \cap (E_1 \cup E_2)^c) \\
&= \mu^*((T \cap E_1) \cup (T \cap (E_1^c \cap E_2))) + \mu^*(T \cap E_1^c) \cap (T \cap E_2^c))) \\
&\leq \mu^*(T \cap E_1) + \mu^*((T \cap E_1^c) \cap E_2) + \mu^*((T \cap E_1^c) \cap E_2^c) \\
&= \mu^*(T \cap E_1) + \mu^*(T \cap E_1^c) \\
&= \mu^*(T).
\end{aligned}$$

Isso prova que $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ e portanto, $\mathcal{A}_{\mu^*}$ é uma álgebra de subconjuntos de X.

Para mostrar que $\mathcal{A}_{\mu^*}$ é uma σ-álgebra, consideremos uma sequência $(B_n)_{n \in N}$ de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{A}_{\mu^*}$ e seja $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$.

Seja $C_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i \quad (\forall\, n \geq 1)$. Logo, cada C_n é μ^*-mensurável e também

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = A.$$

Portanto, para cada C_n e para todo $T \subset X$, tem-se $\mu^*(T) = \mu^*(T \cap C_n) + \mu^*(T \cap C_n^c)$. Como $C_n \subset A$ implica $A^c \subset C_n^c$ e $T \cap A^c \subset T \cap C_n^c$, pelo Lema (1.3.1) temos

$$\begin{aligned}
\mu^*(T) &\geq \mu^*(T \cap C_n) + \mu^*(T \cap A^c) \\
&= \mu^*(T \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i)) + \mu^*(T \cap (T \cap A^c)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu^*(T \cap B_i) + \mu^*(T \cap A^c).
\end{aligned}$$

Sendo a desigualdade válida para cada n, segue que

$$\begin{aligned}
\mu^*(T) &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(T \cap B_n) + \mu^*(T \cap A^c) \\
&\geq \mu^*(T \cap A) + \mu^*(T \cap A^c). \\
&= \mu^*(T).
\end{aligned}$$

Isso mostra que $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ e, portanto, que $\mathcal{A}_{\mu^*}$ é uma σ-álgebra.

Resta mostrar que μ^* restrita a $\mathcal{A}_{\mu^*}$ é uma medida. De fato, seja $\bar{\mu} = \mu^* \mid \mathcal{A}_{\mu^*}$. Mostraremos que a aplicação $\bar{\mu}$ é σ-aditiva.

Sejam então $(A_n)_{n \in N}$ uma sequência em $\mathcal{A}_{\mu^*}$ de conjuntos dois a dois disjuntos, e $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$; então $B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ e por ser μ^* medida exterior vale $\bar{\mu}(B) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n)$. Por outro lado, pelo Lema (1.3.1) considerando $A = X$ temos que $\bar{\mu}$ é finitamente aditiva em $\mathcal{A}_{\mu^*}$ e, aplicando o Teorema (1.1.1) concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n) = \bar{\mu}(A),$$

o que prova que $\bar{\mu}$ é uma medida definida na σ-álgebra $\mathcal{A}_{\mu^*}$. ∎

1.4 Teorema de extensão de Carathéodory

Lema 1.4.1 *Seja μ uma medida enumeravelmente aditiva definida numa álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X. Sobre $\mathcal{P}(X)$ definamos*

$$(i) \quad \mu^*(B) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in \mathcal{A} \text{ e } B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\}.$$

Então μ^* é uma medida exterior em $\mathcal{P}(X)$ e a restrição de μ^* a $\mathcal{A}$ é μ.

Demonstração: Em primeiro lugar observamos que o conjunto que aparece no segundo membro de (i) é não-vazio pois X e $\emptyset$ pertencem a $\mathcal{A}$. Assim (i) define uma função de $\mathcal{P}(X)$ em $[0, \infty]$.

Para provar que μ^* é uma medida exterior é suficiente verificar a validade de (iii) da Definição (1.3.1) pois (i) e (ii) são claros.

Sendo $(A_n)_{n \in N}$ uma sequência de conjuntos em $\mathcal{P}(X)$, mostraremos que

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_n). \tag{1.4}$$

No caso de termos $\mu^*(A_{n_0}) = \infty$, para algum $n_0 \in I\!N$ o resultado é válido trivialmente. Assumindo então que $\mu^*(A_n) < \infty$, para todo n natural, dado $\epsilon > 0$, para cada $n \in I\!N$ existe uma sequência $(A_k^{(n)})_{k \in N}$ em $\mathcal{A}$ com $A_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^{(n)}$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k^{(n)}) < \mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}, \tag{1.5}$$

também temos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^{(n)}.$$

Como $\{(A_k^{(n)} : n \in I\!N, k \in I\!N\}$ é uma família enumerável de elementos de $\mathcal{A}$ decorre da definição de μ^* e usando a relação (1.5), que

$$\begin{aligned} \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k^{(n)}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\mu^*(A_n) + \tfrac{\epsilon}{2^n}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \epsilon. \end{aligned}$$

e sendo $\epsilon > 0$ arbitrário, concluímos que vale (1.4).

Mostraremos agora que, se $A \in \mathcal{A}$ então $\mu^*(A) = \mu(A)$. Com efeito, fazendo $B_1 = A$ e $B_n = \emptyset$, para cada $n \geq 2$ obtemos

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \quad \text{e} \quad \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n) = \mu(A).$$

Por outro lado, consideremos $(A_n)_{n \in N}$ uma sequência de conjuntos dois a dois disjuntos em $\mathcal{A}$, tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$; então $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n)$ e como por hipótese μ é enumeravelmente aditiva em $\mathcal{A}$, temos

$$\mu(A) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A \cap A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Pela definição de μ^*, isto implica que $\mu(A) \leq \mu^*(A)$, e mostra a igualdade

$$\mu(A) = \mu^*(A). \blacksquare$$

Teorema 1.4.1 *Seja μ uma medida enumeravelmente aditiva numa álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X. Então μ admite uma extensão à σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$ obtida a partir de μ^* definida como no Lema (1.4.1).*

Demonstração: Sejam $B \in \mathcal{A}$ e $T \subset X$ arbitrários e suponhamos primeiramente que $\mu^*(T) < \infty$. Então para $\epsilon > 0$ dado, existe uma sequência $(A_n)_{n \in N}$ em $\mathcal{A}$ tal que

$$T \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \mu^*(T) + \epsilon. \tag{1.6}$$

Tendo em vista as relações

$$T \cap B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B) \quad \text{e} \quad T \cap B^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n \cap B^c),$$

e como $A_n \cap B$ e $A_n \cap B^c$ são elementos de $\mathcal{A}$, decorre do Lema (1.4.1) e a relação (1.6), que

$$\begin{aligned}
\mu^*(T \cap B) + \mu^*(T \cap B^c) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n \cap B) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n \cap B^c) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} [\mu^*(A_n \cap B) + \mu^*(A_n \cap B^c)] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \\
&< \mu^*(T) + \epsilon,
\end{aligned}$$

e sendo $\epsilon > 0$ arbitrário, segue que

$$\mu^*(T \cap B) + \mu^*(T \cap B^c) \leq \mu^*(T).$$

No caso de termos $\mu^*(T) = \infty$, a desigualdade acima é evidente.

Da Definição (1.3.2) concluímos que o conjunto B é μ^*-mensurável. Portanto, mostramos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$ e $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$. Pelo Lema (1.4.1) μ^* restrita a $\mathcal{A}$ é μ, isto é, a restrição de μ^* a $\sigma(\mathcal{A})$ é uma extensão de μ. ■

Teorema 1.4.2 *Seja μ uma medida enumeravelmente aditiva, definida numa álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X. Então, μ pode ser estendida a uma medida definida na σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}$. Se μ for σ-finita, esta extensão é única.*

Demonstração: A existência de uma extensão $\bar{\mu}$ de μ a $\sigma(\mathcal{A})$ foi provada no Teorema (1.4.1).

Para mostrar a unicidade, seja ν uma medida definida em $\sigma(\mathcal{A})$ tal que

$$\mu = \nu \mid \mathcal{A}.$$

Sejam $E \in \sigma(\mathcal{A})$ e $(E_n)_{n \in N}$ uma sequência de conjuntos de $\mathcal{A}$ tal que $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Portanto,

$$\nu(E) \leq \nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n),$$

e pela definição de μ^* obtemos

$$\nu(E) \leq \mu^*(E) = \overline{\mu}(E), \text{ para todo } \quad E \in \sigma(\mathcal{A}). \tag{1.7}$$

Para mostrar a desigualdade contrária, suponhamos que $\nu(E) < \infty$ e, portanto, que μ é finita. Seja $A \in \mathcal{A}$ então usando a desigualdade (1.7) temos

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \nu(A) \\ &= \nu(A \cap E) + \nu(A \cap E^c) \\ &\leq \bar{\mu}(A \cap E) + \bar{\mu}(A \cap E^c) = \bar{\mu}(A). \end{aligned}$$

Portanto temos a igualdade

$$\bar{\mu}(A \cap E) + \bar{\mu}(A \cap E^c) = \nu(A \cap E) + \nu(A \cap E^c). \tag{1.8}$$

Mas em (1.8) observamos que $A \cap E \in \sigma(\mathcal{A})$ e $A \cap E \subset A \in \mathcal{A}$, logo, basta considerar o caso quando $E \in \sigma(\mathcal{A})$ de modo que E seja um subconjunto de B onde $B \in \mathcal{A}$. Portanto, lembrando que $\nu(E) < \infty$ e como $E \subset B$, usando a desigualdade (1.7) temos

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \nu(E \cup B) - \nu(B \cap E^c) \\ &= \nu(B) - \nu(B \cap E^c) \\ &\geq \bar{\mu}(B) - \bar{\mu}(B \cap E^c) \\ &= \bar{\mu}(E). \end{aligned}$$

Isso mostra a igualdade, isto é,

$$\nu(E) = \bar{\mu}(E), \text{ para cada } \quad E \in \sigma(\mathcal{A}). \tag{1.9}$$

Para o caso em que μ é σ-finita, seja $(A_n)_{n \in N}$ uma sequência de $\mathcal{A}$ de conjuntos dois a dois disjuntos tal que $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ com $\mu(A_n) < \infty$ para cada $n \in I\!N$ e seja $E \in \sigma(\mathcal{A})$. Como $E = E \cap X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (E \cap A_n)$; usando a igualdade (1.9) segue que

$$\begin{aligned} \overline{\mu}(E) &= \overline{\mu}[\bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap A_n)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(E \cap A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E \cap A_n) \\ &= \nu[\bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap A_n)] \\ &= \nu(E), \end{aligned}$$

isso mostra a unicidade da medida e prova o teorema. ■

1.5 Coberturas mensuráveis

Nesta seção, consideramos o espaço de medida $(X, \mathcal{B}, \mu)$ e a correspondente medida exterior μ^* definida em $\mathcal{P}(X)$, induzida pela μ.

Definição 1.5.1 *Seja $Y \subset X$. Dizemos que $H \in \mathcal{B}$ é uma cobertura mensurável de Y se $Y \subset H$ e para cada $G \in \mathcal{B}$ tal que $G \subset H \setminus Y$, tem-se $\mu(G) = 0$.*

Teorema 1.5.1 *Sejam $Y \subset H \subset X$ tais que $\mu^*(Y) < \infty$ e $H \in \mathcal{B}$. Então são equivalentes:*

i) $\mu^*(Y) = \mu(H)$.

ii) H é uma cobertura mensurável de Y;

Demonstração: Suponhamos em primeiro lugar que $\mu^*(Y) = \mu(H)$ e seja $G \in \mathcal{B}$ tal que $G \subset H \setminus Y$. Então $Y \subset H \setminus G$ e, portanto

$$\begin{aligned} \mu(H) &= \mu^*(Y) \leq \mu(H \setminus G) \\ &= \mu(H) - \mu(G) \leq \mu(H), \end{aligned}$$

de onde concluímos que $\mu(G) = 0$. Isto prova que i) implica ii).

Para provar que ii) implica i) observamos em primeiro lugar que $\mu^*(Y) \leq \mu(H)$.

Suponhamos que $\mu^*(Y) < \mu(H)$; pela definição de μ^* existe $F \in \mathcal{B}$ tal que $Y \subset F$ e $\mu(F) < \mu(H)$. Da relação $Y \subset F$ obtemos $H \cap F^c \subset H \cap Y^c$ e, por ser H uma cobertura mensurável de Y, $\mu(H \cap F^c) = 0$, de onde se conclui que $\mu(H) = \mu(H \cap F)$.

Assim, temos

$$\mu(H) = \mu(H \cap F) \leq \mu(F) < \mu(H),$$

o que é absurdo. ∎

Teorema 1.5.2 *Seja $Y \subset X$ tal que $\mu^*(Y) < \infty$. Então existe uma cobertura mensurável $H \in \mathcal{B}$ de Y, consequentemente, $Y \subset H$ e $\mu^*(Y) = \mu(H)$.*

Demonstração: Decorre da definição de $\mu^*(Y)$, para cada $n \in I\!N$ existe uma sequência de conjuntos $(F_k^{(n)})_{k \in N}$ em $\mathcal{B}$ tal que $Y \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^{(n)}$ e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k^{(n)}) < \mu^*(Y) + \frac{1}{n}. \tag{1.10}$$

Seja $H_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^{(n)}$, então $H_n \in \mathcal{B}$ e $Y \subset H_n$ para cada n. Da relação (1.10) segue que

$$\mu(H_n) < \mu^*(Y) + \frac{1}{n}.$$

O conjunto $H = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$ pertence a $\mathcal{B}$ e $H \subset H_n$ para cada $n \in I\!N$. Portanto

$$\mu(H) \leq \mu(H_n) \leq \mu^*(Y) + \frac{1}{n}.$$

Sendo n arbitrário tem-se $\mu(H) \leq \mu^*(Y)$. Como $Y \subset H$, vale a igualdade

$$\mu^*(Y) = \mu(H). \tag{1.11}$$

Lembrando o teorema anterior, concluímos de (1.11) que H é uma cobertura mensurável de Y. ■

Corolário 1.5.1 *Seja $Y \subset X$ tal que $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$ com $\mu^*(Y_n) < \infty$ para cada $n \in I\!N$. Então existe uma cobertura mensurável H em $\mathcal{B}$ de Y.*

Demonstração: Suponhamos que $(Y_n)_{n \in I\!N}$ seja uma sequência de subconjuntos de X dois a dois disjuntos com $\mu^*(Y_n) < \infty$ para todo $n \in I\!N$ e $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$. Pelo teorema acima para cada $n \in I\!N$ existe $F_n \in \mathcal{B}$ tal que $Y_n \subset F_n$ e $\mu^*(Y_n) = \mu(F_n)$ e podemos sem perda de generalidade, supor que $F_n \cap F_m = \emptyset$, se $n \neq m$.

Definindo $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, temos que $F \in \mathcal{B}$ e $Y \subset F$.

Seja G pertencente a $\mathcal{B}$ tal que $G \subset H \setminus Y$. Então $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, onde $G_n = G \cap (F_n \setminus Y_n)$, é claro que $\mu(G_n) = 0$ para cada $n \in I\!N$. Segue-se que $\mu(G) = 0$. ■

Corolário 1.5.2 *Suponha que $\mu(X) < \infty$ e sejam $Y \subset X$ e $H \in \mathcal{B}$ tais que H é uma cobertura mensurável de Y. Temos:*

i) se existe $K \in \mathcal{B}$ tal que $Y \subset K \subset H$, então $\mu(H \setminus K) = 0$;

ii) se $L \in \mathcal{B}$ então $H \cap L$ é uma cobertura mensurável de $L \cap Y$ e $\mu^*(Y \cap L) = \mu(H \cap L)$;

iii) se $K \in \mathcal{B}$ é uma cobertura mensurável de Y então $\mu(H \triangle K) = 0$.

Demonstração: Prova de i):

Observemos primeiramente que se $K \in \mathcal{B}$ é tal que $Y \subset K \subset H$ então $H \cap H^c \subset H \cap K^c \subset H \cap Y^c$. Portanto, como $H \cap K^c \in \mathcal{B}$, segue da definição de cobertura mensurável para Y que $\mu(H \setminus K) = 0$.

Prova de ii):

Para mostrar que $H \cap L \in \mathcal{B}$ é uma cobertura mensurável de $L \cap Y$, seja $G \in \mathcal{B}$ tal que $G \subset (H \cap L) \setminus (Y \cap L)$. Devemos provar que $\mu(G) = 0$. De fato, as relações

$$\begin{aligned} G &\subset (H \cap L) \setminus (Y \cap L) \\ &= (H \cap L) \cap (Y^c \cup L^c) = (H \cap L \cap Y^c) \cup (H \cap L \cap L^c). \\ &\subset H \cap Y^c \end{aligned}$$

implicam que $\mu(G) = 0$.

A igualdade $\mu^*(Y \cap L) = \mu(H \cap L)$ decorre do Teorema (1.5.1).

Prova de iii):

Se H e K são coberturas mensuráveis de Y, por ii) $H \cap K$ é uma cobertura mensurável de Y.

De $Y \subset H \cap K \subset H$ conclui-se que

$$H \setminus (H \cap K) \subset H \cap Y^c,$$

e, por ser H cobertura mensurável de Y, temos $\mu(H \setminus (H \cap K)) = 0$.

Analogamente, $\mu(K \setminus (H \cap K)) = 0$ e, portanto, $\mu(H \triangle K) = 0$. ∎

Capítulo 2

A topologia $\mathcal{I}$ em $\mathcal{P}(X)$

A partir deste capítulo estaremos tratando de uma álgebra $\mathcal{J}$ de subconjuntos de X e de uma medida enumeravelmente aditiva μ definida em $\mathcal{J}$, ambas arbitrárias porém fixadas.

Indicaremos por μ^* a medida exterior definida em $\mathcal{P}(X)$ como no Lema (1.4.1), e como mostrado no Teorema (1.4.1), μ^* é uma extensão de μ.

A seguir, muniremos a família $\mathcal{P}(X)$ de uma topologia $\mathcal{I}$, induzida por uma família de pseudo-métricas, definidas a partir de μ^* e da classe

$$\mathcal{J}^< = \{F \in \mathcal{J} : \mu(F) < \infty\}.$$

O conjunto $\mathcal{P}(X)$ com a topologia $\mathcal{I}$ e com a operação de diferença simétrica de conjuntos é um grupo topológico.

2.1 A topologia $\mathcal{I}$ em $\mathcal{P}(X)$

Proposição 2.1.1 *Dados $F \in \mathcal{J}^<$ e A, B subconjuntos de X, a igualdade*

$$d_F(A, B) = \mu^*[F \cap (A \triangle B)],$$

onde $\triangle$ denota a diferença simétrica de conjuntos, define uma pseudo-métrica em $\mathcal{P}(X)$.

Demonstração: Mostraremos que a aplicação $d_F : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida acima é uma pseudo-métrica. Com efeito as relações $d_F(A, B) \geq 0$ e $d_F(A, B) = d_F(B, A)$ verificam-se trivialmente, para cada $A, B \in \mathcal{P}(X)$.

Para mostrar a desigualdade triangular, lembramos que $A\triangle B \subset (A\triangle C)\cup(C\triangle B)$ (A.1.15); interceptando com F , segue que

$$d_F(A,B) \leq d_F(A,C) + d_F(C,B).$$

Observamos que, $d_F(A,B) = 0$ não implica que $A = B$. Com efeito, basta considerar, $F \in \mathcal{J}^<$, $F^c \neq \emptyset$. É imediato que $d_F(\emptyset, F^c) = 0$.

Portanto, d_F é uma pseudo-métrica em $\mathcal{P}(X)$. ■

Proposição 2.1.2 *Sejam A, B, F e d_F como na proposição anterior e seja $Y \subset X$. Então d_F é uma pseudo-métrica invariante, isto é,*

$$d_F(A\triangle Y, B\triangle Y) = d_F(A\triangle B)\ \forall\ Y \in \mathcal{P}(X).$$

Demonstração: Lembrando que $Y\triangle Y = \emptyset$, (A.1.13) temos

$$\begin{aligned} d_F(A\triangle Y, B\triangle Y) &= \mu^*[F\cap((A\triangle Y)\triangle(B\triangle Y))] \\ &= \mu^*[F\cap((A\triangle B)\triangle(Y\triangle Y))] \\ &= \mu^*[F\cap(A\triangle B)] \\ &= d_F(A,B). \ ■ \end{aligned}$$

Proposição 2.1.3 *Sejam F_1, F_2 e F_3 pertencentes a $\mathcal{J}^<$. Temos:*

i) se $F_1 \subset F_3$, então $d_{F_1} \leq d_{F_3}$;

ii) quaisquer que sejam F_1 e F_2 então $d_{F_k} \leq d_{F_1\cup F_2}$ para $k = 1, 2$.

Demonstração: Para a prova de i) consideremos A, B subconjuntos de X, então

$$\begin{aligned} d_{F_1}(A,B) &= \mu^*[F_1\cap(A\triangle B)] \leq \mu^*(F_3\cap(A\triangle B)) \\ &= d_{F_3}(A,B). \end{aligned}$$

Portanto, $d_{F_1} \leq d_{F_3}$.

A asserção ii), decorre imediatamente de i). ■

Corolário 2.1.1 *A família $\mathcal{D} = \{d_F : F \in \mathcal{J}^<\}$, com a ordem parcial habitual de funções, é uma família dirigida de pseudo-métricas.*

Demonstração: Consideremos $F_1, F_2 \in \mathcal{J}^<$; como $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{J}^<$ temos pela Proposição (2.1.3) que $d_{F_1\cup F_2} \geq d_{F_1}$ e $d_{F_1\cup F_2} \geq d_{F_2}$. Isso prova que $\mathcal{D}$ é uma família dirigida de pseudo-métricas. ■

Proposição 2.1.4 *A família $\mathcal{D} = \{d_F : F \in \mathcal{J}^<\}$ define uma topologia em $\mathcal{P}(X)$, tendo como base a família*

$$\mathcal{B}(\mathcal{D}) = \{\mathcal{U}_{F,\epsilon}(A) : \ A \subset X, F \in \mathcal{J}^<, \epsilon > 0\}$$

chamada a topologia induzida pela família $\mathcal{D}$ e denotada por $\mathcal{I}$.

Demonstração: É suficiente mostrar que $\mathcal{B}(\mathcal{D})$ satisfaz as hipóteses do Teorema (1.2.1) de [2].

De fato, dados $\mathcal{U}_{F_1,r_1}(A)$ e $\mathcal{U}_{F_2,r_2}(B)$, dois elementos de $\mathcal{B}(\mathcal{D})$ cuja intersecção seja não-vazia, seja C um elemento da intersecção e $r < \min\{r_1 - d_{F_1}(C,A), r_2 - d_{F_2}(C,B)\}$.

Provaremos que

$$\mathcal{U}_{F_1 \cup F_2, r}(C) \subset \mathcal{U}_{F_1,r_1}(A) \bigcap \mathcal{U}_{F_2,r_2}(B).$$

Com efeito, se $T \in \mathcal{U}_{F_1 \cup F_2, r}(C)$ então $d_{F_1 \cup F_2}(C,T) < r$. Pela Proposição (2.1.3) decorre que $d_{F_1}(C,T) < r$ e $d_{F_2}(C,T) < r$; portanto

$$\begin{aligned} d_{F_1}(T,A) &\leq d_{F_1}(T,C) + d_{F_1}(C,A) \\ &< r + d_{F_1}(C,A) < r_1, \end{aligned}$$

o que mostra que $T \in \mathcal{U}_{F_1,r_1}(A)$.

Analogamente, prova-se que $T \in \mathcal{U}_{F_2,r_2}(B)$.

Para cada $A \in \mathcal{P}(X)$ e cada $F \in \mathcal{J}^<$ temos que $A \in \mathcal{U}_{F,r}(A)$.

Isso prova que a família $\mathcal{B}(\mathcal{D})$ é base para uma topologia $\mathcal{I}$ em $\mathcal{P}(X)$. ■

Proposição 2.1.5 *Seja $F \in \mathcal{J}^<$ fixado. Dados A, B e C subconjuntos de X tais que*

$$C \in \mathcal{U}_{F,r_1}(A) \ \bigcap \ \mathcal{U}_{F,r_2}(B),$$

existe $r > 0$ tal que $\mathcal{U}_{F,r}(C) \subset \mathcal{U}_{F,r_1}(A) \bigcap \mathcal{U}_{F,r_2}(B)$.

Demonstração: Basta considerar $r = \min\{r_1 - d_F(A,C), r_2 - d_F(B,C)\}$, e a prova segue mostrando que $\mathcal{U}_{F,r}(C) \subset \mathcal{U}_{F,r_1}(A)$ e $\mathcal{U}_{F,r}(C) \subset \mathcal{U}_{F,r_2}(B)$. Com efeito, se $Y \in \mathcal{U}_{F,r}(C)$, então $d_F(Y,A) \leq d_F(Y,C) + d_F(C,A) < r + d_F(C,A) = r_1$. Logo $\mathcal{U}_{F,r}(C) \subset \mathcal{U}_{F,r_1}(A)$.

Similarmente prova-se que $\mathcal{U}_{F,r}(C) \subset \mathcal{U}_{F,r_2}(B)$. ■

Proposição 2.1.6 *Sejam $A \subset X$ e $\mu(X) < \infty$, isto é, $X \in \mathcal{J}^<$. A família $\{\mathcal{U}_{X,\epsilon}(A) : \epsilon > 0\}$ é uma base para a topologia $\mathcal{I}$ e, portanto, $\mathcal{I}$ é simplesmente a topologia induzida por d_X, logo é pseudo-metrizável.*

Demonstração: Observemos que $\mathcal{U}_{X,r}(A) = \{Y : d_X(A,Y) = \mu^*(A \triangle Y) < r\} \in \mathcal{I}$, pois $X \in \mathcal{J}^<$. Logo a topologia gerada por d_X está contida em $\mathcal{I}$.

Reciprocamente, dado $A \in \mathcal{P}(X)$ seja $\mathcal{U}_{F,r}(A)$ um aberto básico de $\mathcal{I}$; como $\mathcal{U}_{X,r}(A) \subset \mathcal{U}_{F,r}(A)$ então $\mathcal{U}_{F,r}(A)$ é um aberto básico de $\mathcal{P}(X)$, na topologia gerada por d_X. Isso mostra que $\mathcal{I}$ está contida na topologia gerada por d_X. ■

Teorema 2.1.1 *A topologia $\mathcal{I}$ faz do conjunto $\mathcal{P}(X)$, junto com a operação $\triangle$ um grupo topológico; portanto, a terna $(\mathcal{P}(X), \mathcal{I}, \triangle)$ é um grupo topológico.*

Demonstração: O conjunto das partes de X com a operação de diferença simétrica de conjuntos ou seja o par $(\mathcal{P}(X), \triangle)$ é um grupo abeliano, cujo elemento identidade é o $\emptyset$. Para $A \in \mathcal{P}(X)$ temos que $A \triangle A = \emptyset$; segue que o inverso de A é ele próprio, isto é, a aplicação i que leva A ao inverso de A é definida por $i(A) = A$. Logo, é uma aplicação contínua.

Para mostrar que a operação do grupo $\triangle$ é contínua observamos, em primeiro lugar, que para $A, B, Y, Z \in \mathcal{P}(X)$ e $F \in \mathcal{J}^<$ (A.1.13) temos

$$\begin{aligned} d_F(A \triangle B, Y \triangle Z) &= \mu^*[(F \cap (A \triangle Y)) \triangle (F \cap (B \triangle Z))] \\ &\leq \mu^*[(F \cap (A \triangle Y)) \cup (F \cap (B \triangle Z))] \\ &\leq \mu^*[F \cap (A \triangle Y)] + \mu^*[F \cap (B \triangle Z))] \\ &= d_F(A, Y) + d_F(B, Z). \end{aligned}$$

Portanto, dados $\epsilon > 0$ e $(A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$, se (Y, Z) for tal que $d_F(A, Y) < \epsilon/2$ e $d_F(B, Z) < \epsilon/2$, conclui-se que $d_F(A \triangle B, Y \triangle Z) < \epsilon$. Isto prova que $\triangle$ é contínua. Logo $(\mathcal{P}(X), \mathcal{I}, \triangle)$ é um grupo topológico. ■

2.2 Uma caracterização do fecho de $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$

Sendo $\mathcal{E}$ uma subclasse de $\mathcal{P}(X)$ e $A \subset X$, denotaremos

$$\mathcal{E}(A) = \{E \cap A : E \in \mathcal{E}\}.$$

Observação 2.2.1 *Se $\mathcal{E}$ é uma álgebra de conjuntos de X e $A \in \mathcal{E}$, vale a igualdade*

$$\mathcal{E}(A) = \{E \in \mathcal{E} : E \subset A\}.$$

Proposição 2.2.1 *Se $F \in \mathcal{J}^<$, então* *i) para A, B subconjuntos de X tem-se $d_F(A,B) = d_F|_{\mathcal{P}(F)}(F \cap A, F \cap B)$;*

ii) dados A e B elementos de $\mathcal{P}(X)$ e $\epsilon > 0$ tais que $d_F(A,B) < \epsilon$, então $d_F|_{\mathcal{P}(F)}(A \cap F, B \cap F) < \epsilon$.

Demonstração: A demonstração de i) é imediata, pois (ver (A.1.14))

$$\begin{aligned} d_F(A,B) &= \mu^*[F \cap (A \triangle B)] = \mu^*[(F \cap A) \triangle (F \cap B)] \\ &= \mu^*[F \cap ((A \cap F) \triangle (B \cap F))] \\ &= d_F(A \cap F, B \cap F). \end{aligned}$$

Para provar a asserção ii), observemos que $F \cap B \subset F$ implica $F \cap B \in \mathcal{P}(F)$; similarmente, tem-se $F \cap A \in \mathcal{P}(F)$. Logo

$$d_F|_{\mathcal{P}(F)}(F \cap A, F \cap B) = \mu^*[(F \cap A) \triangle (F \cap B)] = d_F(A,B) < \epsilon. \blacksquare$$

Teorema 2.2.1 *Seja $\mathcal{E}$ uma subfamília não-vazia de $\mathcal{P}(X)$. São equivalentes*

i) $A \in \overline{\mathcal{E}}$;

ii) para cada $F \in \mathcal{J}^<$ tem-se $A \cap F \in \overline{\mathcal{E}(F)}^{d_F|_{\mathcal{P}(F)}}$.

Demonstração: Mostremos em primeiro lugar a implicação i) $\longrightarrow$ ii).

Sejam $A \in \overline{\mathcal{E}}$ e $F \in \mathcal{J}^<$. Então dado $\epsilon > 0$, existe $B \in \mathcal{E}$ tal que $B \in \mathcal{U}_{F,\epsilon}(A)$, ou melhor, $d_F(A,B) < \epsilon$. Pela Proposição (2.2.1), temos que $d_F|_{\mathcal{P}(F)}(A \cap F, B \cap F) < \epsilon$ e, portanto

$$B \cap F \in \mathcal{E}(F) \bigcap \{Y \subset F : d_F|_{\mathcal{P}(F)}(A \cap F, Y) < \epsilon\}$$

ou, equivalentemente, $A \cap F \in \overline{\mathcal{E}(F)}^{d_F|_{\mathcal{P}(F)}}$.

Prova da implicação ii) $\longrightarrow$ i).

Para provar que $A \in \overline{\mathcal{E}}$, sejam $F \in \mathcal{J}^<$ e $\epsilon > 0$. Queremos provar que existe $B \in \mathcal{E}$ satisfazendo $d_F(A,B) < \epsilon$. Mas pela hipótese, para $F \in \mathcal{J}^<$ dado, temos que $A \cap F \in \overline{\mathcal{E}(F)}^{d_F|_{\mathcal{P}(F)}}$ e, portanto, existe um conjunto $H = B \cap F$ onde $B \in \mathcal{E}$ tal que $d_F|_{\mathcal{P}(F)}(A \cap F, B \cap F) < \epsilon$. Novamente, pela Proposição (2.2.1) temos que $d_F(A,B) < \epsilon$, como queríamos mostrar. $\blacksquare$

Corolário 2.2.1 *Seja A um elemento de $\mathcal{P}(X)$. Então $A \in \overline{\mathcal{J}^<}$ se, e somente se, para todo $F \in \mathcal{J}^<$ tem-se que $A \cap F \in \overline{\mathcal{J}^<(F)}^{d_F|_{\mathcal{P}(F)}}$.*

Demonstração: É suficiente substituir no Teorema (2.2.1), $\mathcal{J}^<$ no lugar de $\mathcal{E}$. ■

Proposição 2.2.2 *A álgebra $\mathcal{J}$ de subconjuntos de X está contida no fecho da família dos conjuntos $F \in \mathcal{J}$ tais que $\mu(F) < \infty$, isto é, $\mathcal{J} \subset \overline{\mathcal{J}^<}$*

Demonstração: Seja B um conjunto de $\mathcal{J}$. Queremos provar que para cada $F \in \mathcal{J}^<$, o conjunto $B \cap F \in \overline{\mathcal{J}(F)}^{d_F|\mathcal{P}(F)}$. Dado F em $\mathcal{J}^<$ então $B \bigcap F \in \mathcal{J}^<$, e como $B \cap F \subset F$, então $B \cap F \in \mathcal{J}^<(F)$.

Por outro lado, o conjunto $\mathcal{J}^<(F)$ está contido em $\overline{\mathcal{J}(F)}^{d_F|\mathcal{P}(F)}$. Portanto, $B \cap F \in \overline{\mathcal{J}(F)}^{d_F|\mathcal{P}(F)}$. Isso prova a proposição. ■

Corolário 2.2.2 *O fecho da álgebra $\mathcal{J}$ coincide com o fecho de $\mathcal{J}^<$, isto é, $\overline{\mathcal{J}^<} = \overline{\mathcal{J}}$.*

Demonstração: Pela Proposição (2.2.2) temos que $\mathcal{J} \subset \overline{\mathcal{J}^<}$, que implica $\overline{\mathcal{J}} \subset \overline{\mathcal{J}^<}$.

Por outro lado, a inclusão $\mathcal{J}^< \subset \mathcal{J}$ implica $\overline{\mathcal{J}^<} \subset \overline{\mathcal{J}}$. Isso mostra que $\overline{\mathcal{J}} = \overline{\mathcal{J}^<}$. ■

2.3 Uma caracterização de $\overline{\mathcal{J}}$

Dado $F \in \mathcal{J}^<$, estudaremos as relações que há entre o fecho da álgebra $\mathcal{J}$ relativo a $\mathcal{P}(F)$ e o fecho de $\mathcal{J}(F)$ relativo à topologia $\mathcal{I}$.

Proposição 2.3.1 *Sejam A, B pertencentes a $\mathcal{J}$ e F, F_0 elementos de $\mathcal{J}^<$. Então $d_F(A \cap F_0, B \cap F_0) \leq d_{F_0}(A, B)$.*

Demonstração: A prova é imediata, uma vez que para A, B, F e F_0 dados, temos que

$$\begin{aligned} d_F(A \cap F_0, B \cap F_0) &= \mu^*[F \cap ((A \cap F_0)\Delta(B \cap F_0))] \\ &\leq \mu^*[(A \cap F_0)\Delta(B \cap F_0)] \\ &= d_{F_0}(A, B). \end{aligned}$$

Isso mostra a proposição. ■

Proposição 2.3.2 *Seja F_0 um elemento de $\mathcal{J}^<$. Então $\overline{\mathcal{J}(F_0)}^{d_{F_0}|\mathcal{P}(F_0)} \subset \overline{\mathcal{J}}(F_0)$.*

Demonstração: Seja $A \in \overline{\mathcal{J}(F_0)}^{d_{F_0}|\mathcal{P}(F_0)} = \overline{\mathcal{J}(F_0)}^{d_{F_0}} \bigcap \mathcal{P}(F_0)$. Então $A \subset F_0$ e para $\epsilon > 0$ dado existe $H \in \mathcal{J}(F_0)$ tal que $d_{F_0}(A, H) < \epsilon$. Como H é um elemento de $\mathcal{J}(F_0)$, então $H = G \cap F_0$, para algum $G \in \mathcal{J}$. Portanto, pela Proposição (2.2.1), temos

$$d_{F_0}(A, G) = d_{F_0}(A \cap F_0, G \cap F_0) = d_{F_0}(A, H) < \epsilon. \tag{2.1}$$

Agora vamos provar que $A \in \overline{\mathcal{J}}(F_0)$; como $A \subset F_0$ é suficiente mostrar que $A \in \overline{\mathcal{J}}$.

Dados $F \in \mathcal{J}^<$ e $\epsilon > 0$ seja $G \in \mathcal{J}$ como acima. Usando a Proposição (2.3.1) e a relação (2.1) temos que:

$$d_F(A, G \cap F_0) = d_F(A \cap F_0, G \cap F_0) \leq d_{F_0}(A, G) < \epsilon.$$

Isto quer dizer que para todo $F \in \mathcal{J}^<$ e todo $\epsilon > 0$ temos que $\mathcal{U}_{F,\epsilon}(A) \bigcap \mathcal{J} \neq \emptyset$, isto é, $A \in \overline{\mathcal{J}}$, tal como queríamos provar. ■

Proposição 2.3.3 *Seja F_0 um elemento de $\mathcal{J}^<$. Então $\overline{\mathcal{J}}(F_0) \subset \overline{\mathcal{J}(F_0)}^{d_{F_0}|P(F_0)}$.*

Demonstração: Seja Z um elemento de $\overline{\mathcal{J}}(F_0)$; então $Z = Y \cap F_0$, onde $Y \in \overline{\mathcal{J}}$. Portanto, dado $\epsilon > 0$ existe $H \in \mathcal{J}$ tal que $d_{F_0}(Y, H) < \epsilon$ ou, equivalentemente, $d_{F_0}(Y \cap F_0, H \cap F_0) < \epsilon$.

Queremos provar que $Z \in \overline{\mathcal{J}(F_0)}^{d_{F_0}|\mathcal{P}(F_0)}$. Com efeito, observemos que $Z \subset F_0$. Portanto, para $\epsilon > 0$ escolhido, seja $H \in \mathcal{J}$ como acima, tal que $H \in \mathcal{U}_{F_0,\epsilon}(Z)$, ou $d_{F_0}(Z, H \cap F_0) < \epsilon$, então

$$H \cap F_0 \in \mathcal{J}(F_0) \bigcap \{T \cap F_0 : d_{F_0}(Z, T) < \epsilon\}.$$

Isto mostra que, para todo $\epsilon > 0$ o conjunto $\{T \cap F_0 : d_{F_0}(Z, T) < \epsilon\}$ encontra $\mathcal{J}(F_0)$ ou, equivalentemente, $Z \in \overline{\mathcal{J}(F_0)}^{d_{F_0}|\mathcal{P}(F_0)}$. ■

Teorema 2.3.1 *Se F é um elemento de $\mathcal{J}^<$, então $\overline{\mathcal{J}(F)}^{d_F|\mathcal{P}(F)} = \overline{\mathcal{J}}(F)$.*

Demonstração: A prova decorre das Proposições (2.3.2) e (2.3.3). ■

Teorema 2.3.2 *Sejam $\mathcal{J}$ e $A \in P(X)$. Então $A \in \overline{\mathcal{J}}$ se, e somente se, para cada $F \in \mathcal{J}^<$ tem-se $A \cap F \in \overline{\mathcal{J}}(F)$.*

Demonstração: A prova decorre do Teorema (2.2.1) onde basta tomar $\mathcal{E} = \mathcal{J}$, e do Teorema (2.3.1). ■

O exemplo a seguir mostra que não é válido se em lugar de $\overline{\mathcal{J}}$ tivermos uma família arbitrária $\mathcal{E} \subset P(X)$, mesmo se $\mu(X) < \infty$.

Exemplo 2.3.1 *Neste exemplo limitâmo-nos a subconjuntos de números irracionais; fica assim convencionada a notação*

$$[a,b[= \{x \in \mathbb{Q}^c : a \leq x < b\} \quad e \quad]a,b[= \{x \in Q^c : a < x < b\}.$$

Sendo $X =]0,2[$, a álgebra de subconjuntos de X, gerada pelos intervalos $[a,b[$ de $]0,1[$ e pelo intervalo $]1,2[$ será indicada por $\mathcal{J}$.

Em $]1,2[$ consideremos uma sequência $(a_n)_{n\in N}$ com $a_n \neq a_m$ para $n \neq m$. Para cada $n \in I\!N$ definimos

$$E_n =]0, \frac{n+1}{2n}[\cup \{a_n\} \quad e \quad \mathcal{E} = \{E_n : n \in I\!N\}.$$

Sejam μ a medida de Lebesgue restrita a $\mathcal{J}$ e μ^* medida exterior induzida por μ. Provaremos que sendo $F =]0,1[$ e $A =]0,1/2[$, então $A \in \overline{\mathcal{E}(F)}^{d_F|\mathcal{P}(F)}$, mas $A \notin \overline{\mathcal{E}}(F)$.

Começamos enumerando algumas relações simples

i) Se $Y \subset]1,2[$ e $B \in \mathcal{J}$ é tal que $Y \subset B$ então $]1,2[\subset B$. Segue da definição que $\mu^*(Y) = \mu(B) = 1$. Em particular

$$\mu^*(\{a_n\}) = 1 \quad \forall\, n \in I\!N. \tag{2.2}$$

ii) Para todo $n \in I\!N$, como $A \subset E_n$ temos

$$A \triangle E_n = E_n \setminus A =]\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}[\cup \{a_n\} \tag{2.3}$$

e, portanto, usando a relação (2.2)

$$d_X(A, E_n) > 1, \tag{2.4}$$

e

$$d_F(A, E_n) = \mu^*[A \triangle (E_n \cap F)] = \mu^*(]\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}[) = \frac{1}{2n}. \tag{2.5}$$

iii) Por outro lado, se m, n pertencem a $I\!N$ e $m < n$, então

$$E_m \cup E_n =]0, \frac{m+1}{2m}[\cup \{a_m, a_n\} \quad e \quad E_m \cap E_n =]0, \frac{n+1}{2n}[,$$

portanto

$$\begin{aligned} d_X(E_m, E_n) &= \mu^*(E_m \triangle E_n) = \mu^*[]\tfrac{n+1}{2n}, \tfrac{m+1}{2m}[\cup \{a_n, a_m\}] \\ &\geq \mu^*(\{a_n, a_m\}) \end{aligned}$$

Logo, segue da relação (2.2) que

$$d_X(E_m, E_n) = \mu^*(E_m \triangle E_n) \geq 1. \tag{2.6}$$

iv) Sendo $H \in \mathcal{P}(X)$ e $n \in I\!N$, é imediato que

$$\overline{\{E_n\}} = \{H \in \mathcal{P}(X) : \mu^*(H \triangle E_n) = 0\}. \tag{2.7}$$

É claro que $\bigcup_{n \in N} \overline{\{E_n\}} \subset \overline{\mathcal{E}}$. Em seguida mostraremos que

$$\overline{\mathcal{E}} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\{E_n\}}. \tag{2.8}$$

Sendo T pertencente a $\overline{\mathcal{E}}$ existe $k \in I\!N$ tal que

$$d_X(T, E_k) = \mu^*(T \triangle E_k) < 1/2. \tag{2.9}$$

Afirmamos que $\mu^*(T \triangle E_k) = 0$, o que pela relação (2.7), significa que $T \in \overline{\{E_k\}}$. De fato, se

$$\mu^*(T \triangle E_k) = \delta > 0.$$

então lembrando a relação (2.9), temos que $\delta < 1/2$. Como $T \in \overline{\mathcal{E}}$ existe $j \in I\!N$ tal que

$$d_X(T, E_j) = \mu^*(T \triangle E_j) < \delta/2. \tag{2.10}$$

Portanto

$$\begin{aligned} d_X(E_k, E_j) &\leq d_X(E_k, T) + d_X(T, E_j) \\ &< \delta + \delta/2 = 3\delta/2 < 1, \end{aligned}$$

e da relação (2.6) conclui-se que $k = j$, o que contraria (2.10). Isso prova a relação (2.8) e, portanto, que

$$\overline{\mathcal{E}} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{\{E_n\}}.$$

Em seguida provaremos que $A \notin \overline{\mathcal{E}}(F)$. Como $A \subset F$ é suficiente provar que $A \notin \overline{\mathcal{E}}$. Por (2.4) tem-se $d_X(A, E_n) > 1$ e assim para todo $n \in I\!N$, $A \notin \overline{\{E_n\}}$.

Por outro lado, temos

$$A \in \overline{\mathcal{E}(F)}^{d_F|\mathcal{P}(F)}.$$

De fato,

$$\mathcal{E}(F) = \{E_n \cap F : n \in I\!N\} = \{]0, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}[: n \in I\!N\},$$

e, da relação (2.5), temos

$$d_F(A \cap E_n, E_n \cap F) = d_F(A, E_n \cap F) = \frac{1}{2n}.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, se $k \in I\!N$ for tal que $\frac{1}{2k} < \epsilon$ temos $d_F(A, E_k \cap F) = \frac{1}{2k} < \epsilon$. ∎

Teorema 2.3.3 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) a topologia $\mathcal{I}$ satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade;

b) existe uma sequência $(F_n)_{n\in N}$ de elementos de $\mathcal{J}^<$ de maneira que, dados $F \in \mathcal{J}^<$ e $\epsilon > 0$, existe um $n \in I\!N$ tal que $\mu(F \setminus F_n) < \epsilon$;

c) existe uma sequência $(F_n)_{n\in N}$ de elementos de $\mathcal{J}^<$ tal que, para cada $F \in \mathcal{J}^<$, $\mu^*(F \setminus \bigcup_n^{\infty} F_n) = 0$.

d) $\mathcal{I}$ é pseudo-metrizável.

Demonstração: Prova da implicação a)$\longrightarrow$b):

Lembramos que pelo Teorema (2.1.1) que a terna $(\mathcal{P}(X), \mathcal{I}, \triangle)$ é um grupo topológico e, portanto, basta considerar vizinhanças básicas centradas no $\emptyset$.

Sejam $(F_n)_{n\in N}$ uma sequência de elementos de $\mathcal{J}^<$ e $(r_n)_{n\in N}$ uma sequência de números racionais tais que $\{\mathcal{U}_{F_n,r_n}(\emptyset) : n \in I\!N\}$ seja uma base de vizinhanças do $\emptyset$.

Então se $F \in \mathcal{J}^<$ e $\epsilon > 0$ são dados existe $k \in I\!N$ tal que

$$\mathcal{U}_{F_k,r_k}(\emptyset) \subset \mathcal{U}_{F,\epsilon}(\emptyset).$$

As igualdades
$$\begin{aligned} d_F(F_k^c, \emptyset) &= \mu^*(F_k \cap (F_k^c \cap \emptyset)) \\ &= \mu^*(F_k \cap F_k^c) = \mu^*(\emptyset) = 0 \end{aligned}$$
mostram que $F_k^c \in \mathcal{U}_{F_k, r_n}(\emptyset)$ e, portanto, também $F_k^c \in \mathcal{U}_{F,\epsilon}(\emptyset)$. Conclui-se que
$$\mu^*(F \setminus F_k) = \mu^*(F \cap F_k^c) = d_{F_k}(F_k^c, \emptyset) < \epsilon.$$

Prova da implicação b) $\longrightarrow$a):

Dados $F \in \mathcal{J}^<$ e $\epsilon > 0$ queremos mostrar que existem $n \in I\!N$ e $r \in \mathbb{Q}$ tais que
$$\mathcal{U}_{F_n,\epsilon}(\emptyset) \subset \mathcal{U}_{F,\epsilon}(\emptyset). \tag{2.11}$$

Seja $n \in I\!N$ tal que $\mu^*(F \cap F_n^c) < \epsilon/2$ e seja $r \in \mathbb{Q}$ tal que $0 \leq \; < r < \epsilon/2$. A igualdade
$$F \cap Y = (F \cap Y \cap F_n) \cup (F \cap Y \cap F_n^c)$$
implica que
$$\mu^*(F \cap Y) \leq \mu^*(F_n \cap Y) + \mu^*(F \cap F_n^c).$$

Se $Y \in \mathcal{U}_{F_n,r}(\emptyset)$ temos $\mu^*(F_n \cap Y) < r$ e, portanto,
$$d_F(Y \cap \emptyset) \leq r + \epsilon/2 < \epsilon,$$
o que mostra que $Y \in \mathcal{U}_{F,\epsilon}(\emptyset)$ e prova a relação (2.11).

Assim, a família
$$\{\mathcal{U}_{F_n,r}(\emptyset) : n \in I\!N, r \in \mathbb{Q}\}$$
é um sistema fundamental enumerável de vizinhanças do $\emptyset$.

Prova da implicação b) $\longrightarrow$c):

Para cada $j \in I\!N$, existe $n_j \in I\!N$ tal que $\mu(F \setminus F_{n_j}) < \frac{1}{j}$. Temos
$$F \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F_{n_j} \subset F \setminus F_{n_j},$$
e aplicando μ^* a esta expressão, segue que
$$0 \leq \mu^*(F \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F_{n_j}) \leq \mu(F \setminus F_{n_j}) < \frac{1}{j}, \; \forall\, j \in I\!N.$$
Mas isto implica que
$$\mu^*(F \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} F_{n_j}) = 0.$$

Prova da implicação c) $\longrightarrow$b):

Dada a sequência $(F_n)_{n\in N}$ em $\mathcal{J}^<$, definindo $G_n = \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ obtemos uma sequência de elementos de $\mathcal{J}^<$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Podemos portanto supor, sem perda de generalidade, que a sequência $(F_n)_{n\in N}$ seja crescente.

Dados $F \in \mathcal{J}^<$ e $\epsilon > 0$ observamos que $(F \cap F_n^c)_{n\in N}$ é uma sequência decrescente de elementos de $\mathcal{J}^<$. Segue-se

$$0 = \mu^*(\bigcap_{n=1}^{\infty}(F \cap F_n^c)) = \lim_{n\to\infty} \mu^*(F \cap F_n^c) = \lim_{n\to\infty} \mu(F \cap F_n^c).$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$, existe $n \in I\!N$ tal que $\mu(F \setminus F_n) < \epsilon$. ■

Prova da implicação a) $\longrightarrow$d):

Ver pag. 41 e 43 em [14].

Prova da implicação d) $\longrightarrow$a):

A prova é imediata. ■

Corolário 2.3.1 *Se μ for σ-finita em $\mathcal{J}$ então $\mathcal{I}$ satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade e, portanto, é pseudo-metrizável.*

Demonstração: Pela hipótese existe uma sequência crescente $(F_n)_{n\in N}$ de conjuntos de $\mathcal{J}$ tal que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \quad \text{e} \quad \mu(F_n) < \infty \quad \forall n \in I\!N.$$

Seja $F \in \mathcal{J}^<$, então $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F \cap F_n)$ e sendo $(F \cap F_n)_{n\in N}$ uma sequência crescente em $\mathcal{J}^<$, cuja reunião pertence a $\mathcal{J}^<$, temos

$$\lim_{n\to\infty} \mu(F \cap F_n) = \mu(F). \tag{2.12}$$

Por outro lado, como $F \cap F_n \subset F$ para cada $n \in I\!N$ e $\mu(F) < \infty$, tem-se

$$\mu(F \setminus F_n) = \mu(F \setminus (F \cap F_n)) = \mu(F) - \mu(F \cap F_n).$$

Segue-se da relação (2.12), que dado $\epsilon > 0$ existe $n \in I\!N$ tal que

$$\mu(F \setminus F_n) < \epsilon.$$

Portanto, a prova do corolário decorre do teorema anterior, pela implicação b) $\longrightarrow$a). Pela implicação a) $\longrightarrow$d), temos que $\mathcal{I}$ é pseudo-metrizável. ∎

2.4 Conjuntos localmente nulos em $\mathcal{P}(X)$

Nesta seção, usando o fato que $\overline{\mathcal{J}}$ é fechada e denotando-se por

$$\mathcal{A}_0 = \{Y \subset X : \mu^*(Y \cap F) = 0, \forall\ F \in \mathcal{J}^<\}$$

mostraremos que $\mathcal{A}_0$ é um conjunto fechado em $\mathcal{P}(X)$.

Definição 2.4.1 *Seja Y subconjunto de X. Diremos Y é localmente nulo se $Y \in \mathcal{A}_0$, isto é, para cada $F \in \mathcal{J}^<$, tem-se $\mu^*(Y \cap F) = 0$.*

Proposição 2.4.1 *A família $\mathcal{A}_0$ é fechada por reunião enumerável de conjuntos, isto é, se $A_n \in \mathcal{A}_0$ para cada n então $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_0$.*

Demonstração: Seja $(A_n)_{n\in N}$ uma sequência de conjuntos em $\mathcal{A}_0$; logo dado $F \in \mathcal{J}^<$, temos $\mu^*[F \cap (\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n)] \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(F \cap A_n) = 0$. ∎

Teorema 2.4.1 *Os conjuntos localmente nulos constituem o fecho, na topologia $\mathcal{I}$ do conjunto $\{\emptyset\}$. Consequentemente, $\mathcal{A}_0 \subset \overline{\mathcal{J}}$.*

Demonstração: A prova decorre da propriedade de fecho de um conjunto:

$$\begin{aligned}\overline{\{\emptyset\}} &= \{Y : d_F(Y,\emptyset) = 0, F \in \mathcal{J}^<\} = \{Y : \mu^*(F \cap (Y \triangle \emptyset)) = 0, F \in \mathcal{J}^<\} \\ &= \{Y : \mu^*(Y \cap F) = 0, F \in \mathcal{J}^<\} = \mathcal{A}_0.\end{aligned}$$

Por outro lado, como $\emptyset \in \mathcal{J}$ segue que $\{\emptyset\} \subset \mathcal{J}$ e, portanto,

$$\overline{\{\emptyset\}} \subset \overline{\mathcal{J}}.$$

Isso prova o teorema. ∎

Teorema 2.4.2 *Sejam os conjuntos $A \in \mathcal{P}(X)$ e $Y \in \mathcal{A}_0$. Então A e $A \triangle Y$ têm as mesmas vizinhanças, isto é, dados $F \in \mathcal{J}^<$ e $\epsilon > 0$ tem-se*

$$\mathcal{U}_{F,\epsilon}(A) = \mathcal{U}_{F,\epsilon}(A \triangle Y).$$

Demonstração: Lembrando que $\mu^*(Y \cap F) = 0$ para cada $F \in \mathcal{J}^<$, seja $G \in \mathcal{U}_{F,\epsilon}(A)$.Então

$$d_F(A,G) = \mu^*(F \cap (A \triangle G)) < \epsilon. \tag{2.13}$$

Considerando a igualdade $(A\triangle Y)\triangle G = (A\triangle G)\triangle Y$, é imediato que

$$\begin{aligned} F \cap [(A\triangle Y)\triangle G] &= [F \cap (A\triangle G)]\triangle[F \cap Y] \\ &\subset (F \cap (A\triangle G)) \cup (F \cap Y). \end{aligned}$$

Aplicando μ^* e usando (2.13) obtemos que

$$\begin{aligned} \mu^*[F \cap ((A\triangle Y)\triangle G)] &\leq \mu^*(F \cap (A\triangle G)) + \mu^*(F \cap Y) \\ &= \mu^*(F \cap (A\triangle G)) < \epsilon, \end{aligned}$$

ou, equivalentemente $d_F(A\triangle Y, G) < \epsilon$, ou seja, $G \in \mathcal{U}_{F,\epsilon}(A\triangle Y)$. Isso prova que

$$\mathcal{U}_{F,\epsilon}(A) \subset \mathcal{U}_{F,\epsilon}(A\triangle Y).$$

Reciprocamente, se $G \in \mathcal{U}_{F,\epsilon}(A\triangle Y)$ então $d_F((A\triangle Y), G) < \epsilon$. Pela Proposição (2.1.2) e usando a desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned} d_F(A,G) &= d_F(A\triangle G, G\triangle G) = d_F(A\triangle G, \emptyset) \\ &\leq d_F(A\triangle G, Y) + d_F(Y, \emptyset) < \epsilon, \end{aligned}$$

portanto, $G \in \mathcal{U}_{F,\epsilon}(A)$; e isso prova o teorema. ∎

Capítulo 3

O fecho topológico da álgebra $\mathcal{J}$

O objetivo deste capítulo, é mostrar que o fecho $\overline{\mathcal{J}}$ da álgebra $\mathcal{J}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X e que a restrição da medida exterior μ^* a $\overline{\mathcal{J}}$ é uma medida.

3.1 A álgebra $\overline{\mathcal{J}}$

Nesta seção, provaremos que $\overline{\mathcal{J}}$ é uma álgebra de subconjuntos de X, e que para cada $F \in \mathcal{J}^<$, μ^* restrita a $\overline{\mathcal{J}}(F)$ é uma medida finitamente aditiva.

Teorema 3.1.1 *O fecho $\overline{\mathcal{J}}$ de $\mathcal{J}$ é uma álgebra de subconjuntos de X.*

Demonstração: Bastará mostrar que se A e B são elementos de $\overline{\mathcal{J}}$ então, o complementar de A, e a reunião de A com B também são elementos de $\overline{\mathcal{J}}$.

Se $A \in \overline{\mathcal{J}}$, então $A^c \in \overline{\mathcal{J}}$. Com efeito, se $A \in \overline{\mathcal{J}}$, então dados $\epsilon > 0$ e $F \in \mathcal{J}^<$ tem-se $\mathcal{U}_{F,\epsilon}(A) \bigcap \mathcal{J} \neq \emptyset$, ou seja, existe $G \in \mathcal{J}$ tal que $d_F(A, G) < \epsilon$, ou equivalentemente, temos $\mu^*((F \bigcap (A \triangle G))) < \epsilon$. Usando a identidade $A^c \triangle G^c = A \triangle G$ (A.1.12), segue que

$$d_F(A^c, G^c) = \mu^*(F \cap (A^c \triangle G^c)) = \mu^*(F \cap (A \triangle G)) < \epsilon,$$

e como a família $\mathcal{J}$ é uma álgebra, $G^c \in \mathcal{J}$, portanto, temos que

$$\mathcal{U}_{F,\epsilon}(A^c) \bigcap \mathcal{J} \neq \emptyset,$$

logo, concluímos que $X \setminus A$ pertence a $\overline{\mathcal{J}}$.

Mostraremos que se A e B estão em $\overline{\mathcal{J}}$, então $A \cup B \in \overline{\mathcal{J}}$. De fato, dados $F \in \mathcal{J}^<$ e $\epsilon > 0$ arbitrários, existem G e H em $\mathcal{J}$ tais que

$$d_F(A, G) < \epsilon/2 \quad \text{e} \quad d_F(B, H) < \epsilon/2. \tag{3.1}$$

Por outro lado, pela inclusão (A.1.16)

$$(A \cup B)\Delta(G \cup H) \subset (A\Delta G) \cup (B\Delta H),$$

interceptando com $F \in \mathcal{J}^<$, temos

$$F \cap [(A \cup B)\Delta(G \cup H)] \subset [(F \cap (A\Delta G)) \cup (F \cap (B\Delta H))].$$

Aplicando-se μ^* segue que

$$\mu^*(F \cap [(A \cup B)\Delta(G \cup H)]) \leq \mu^*(F \cap (A\Delta G)) + \mu^*(F \cap (B\Delta H)),$$

assim, obtemos a desigualdade

$$d_F(A \cup B, G \cup H) \leq d_F(A, G) + d_F(B, H),$$

e, usando (3.1) tem-se que

$$d_F(A \cup B, G \cup H) < \epsilon.$$

Concluímos que o conjunto $A \cup B$ é centro de uma vizinhança $\mathcal{U}_{F,\epsilon}(A \cup B)$, cuja intersecção com $\mathcal{J}$ contém $G \cup H$; logo $A \cup B \in \overline{\mathcal{J}}$.

Portanto, $\overline{\mathcal{J}}$ é uma álgebra de subconjuntos de X. ∎

Teorema 3.1.2 *Para cada $F \in \mathcal{J}^<$, a aplicação μ^* é finitamente aditiva em $\overline{\mathcal{J}}(F)$. Isto é, para cada $A, B \in \overline{\mathcal{J}}(F)$ com $A \cap B = \emptyset$, temos*

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Demonstração: Como $\overline{\mathcal{J}}$ é uma álgebra, pela Observação (2.2.1) será suficiente mostrar que dados $F \in \mathcal{J}^<$, A e B em $\overline{\mathcal{J}}$, disjuntos, tais que $A \cup B \subset F$, tem-se que

$$\mu^*(A \cup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Dado $\epsilon > 0$, existem G e H em $\mathcal{J}$ tais que

$$d_F(A, G) < \epsilon/6 \quad \text{e} \quad d_F(B, H) < \epsilon/6. \tag{3.2}$$

Como $G \cap F$ e $H \cap F$ estão contidos em F e pertencem a $\mathcal{J}$, podemos assumir sem perda de generalidade que $G \cup H \subset F$. Assim, as inclusões (A.1.16) e (A.1.17)

$$(A \cup B)\triangle(G \cup H) \subset (A\triangle G) \cup (B\triangle H)$$

e

$$(A \cap B)\triangle(G \cap H) \subset (A\triangle G) \cup (B\triangle H)$$

junto com (3.2) implicam que

$$\mu^*((A \cup B)\triangle(G \cup H)) < \epsilon/3 \tag{3.3}$$

e

$$\mu^*((A \cap B)\triangle(G \cap H)) < \epsilon/3. \tag{3.4}$$

Em seguida, observamos que para quaisquer, $\alpha, \beta \in \mathcal{P}(X)$ tem-se

$$\beta = (\beta \setminus \alpha) \cup (\beta \cap \alpha) \subset (\beta\triangle\alpha) \cup \alpha$$

logo

$$\mu^*(\beta) \leq \mu^*(\beta\triangle\alpha) + \mu^*(\alpha).$$

Portanto, supondo $\mu^*(\alpha)$ finita, obtém-se

$$\mu^*(\beta) - \mu^*(\alpha) \leq \mu^*(\alpha\triangle\beta).$$

Fazendo na igualdade acima $G \cup H = \beta$ e $A \cup B = \alpha$, e usando (3.3), temos

$$\mu^*(G \cup H) - \mu^*(A \cup B) \leq \mu^*((A \cup B)\triangle(G \cup H)) < \epsilon/3. \tag{3.5}$$

Igualmente, se $\alpha = G$ e $\beta = A$ e por (3.2) temos

$$\mu^*(A) - \mu^*(G) \leq \mu^*(A\triangle G) < \epsilon/6 \text{ ou } \quad \mu(G) > \mu^*(A) - \epsilon/6. \tag{3.6}$$

Similarmente, considerando $\alpha = H$ e $\beta = B$ tem-se

$$\mu(H) > \mu^*(B) - \epsilon/6 \tag{3.7}$$

Por outro lado, como estamos assumindo $A \cap B = \emptyset$ então $(A \cap B)\triangle(G \cap H) = G \cap H$, e de (3.4) obtemos também que

$$\mu^*(G \cap H) < \epsilon/3. \tag{3.8}$$

Usando as relações (3.5), (3.8), (3.6) e (3.7) nessa ordem, temos

$$\begin{aligned}
\mu^*(A \cup B) &> \mu^*(G \cup H) - \epsilon/3 \\
&= \mu(G \cup H) - \epsilon/3 \\
&= \mu(G) + \mu(H) - \mu(G \cap H) - \epsilon/3 \\
&> \mu(G) + \mu(H) - 2\epsilon/3 \\
&> \mu^*(A) + \mu^*(B) - \epsilon.
\end{aligned}$$

Sendo $\epsilon > 0$ arbitrário, mostramos que

$$\mu^*(A \cup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B),$$

o que prova o teorema. ∎

3.2 A σ-álgebra $\overline{\mathcal{J}}$

Nesta seção, provaremos que $\overline{\mathcal{J}}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X.

Lema 3.2.1 *Sejam $(A_n)_{n \in N}$ uma sequência em $\overline{\mathcal{J}}$, de conjuntos dois a dois disjuntos, e $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Se B é tal que $B \subset F_0 \in \mathcal{J}^<$, então $B \in \overline{\mathcal{J}}$.*

Demonstração: Para cada $k \in I\!N$, definamos a sequência $(B_k)_{k \in N}$ como

$$B_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k.$$

Portanto, $(B_k)_{k \in N}$ é uma sequência não-decrescente de conjuntos em $\mathcal{P}(X)$ e pelo Teorema (3.1.1), temos que $B_k \in \overline{\mathcal{J}}$, para cada $k \in I\!N$.

Por outro lado, como $B_k \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = B$, então usando o Teorema (3.1.2) em $\overline{\mathcal{J}}(F_0)$ temos

$$\mu^*(B) \geq \mu^*(B_k) = \sum_{n=1}^{k} \mu^*(A_n),$$

que é válido para todo k pertencente a $I\!N$. Portanto, mostramos que

$$\mu^*(B) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n), \tag{3.9}$$

e, sendo μ^* uma medida exterior, vale a igualdade em (3.9). Agora, lembramos que $\mu^*(B) < \infty$ para concluir que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) < \infty. \tag{3.10}$$

Para mostrar que B é um elemento de $\overline{\mathcal{J}}$, lembremos que a sequência $(B_k)_{k\in N}$ é não-decrescente. Da igualdade

$$B \cap B_k^c = [\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n] \cap [A_1 \cup ... \cup A_k]^c = \bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n,$$

decorre que

$$\mu^*(B \cap B_k^c) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \mu^*(A_n). \tag{3.11}$$

Como $B_k \subset B$ e $B_k \cap B^c = \emptyset$, segue de (3.11) e (3.10) que

$$\mu^*(B \triangle B_k) = \mu^*(B \cap B_k^c) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(A_n) \longrightarrow 0, \text{ quando } k \longrightarrow \infty,$$

e, portanto,

$$d_F(B, B_k) = \mu^*(F \cap (B \triangle B_k)) \leq \mu^*(B \triangle B_k) \longrightarrow 0 \text{ se } k \longrightarrow \infty.$$

Como $B_k \in \overline{\mathcal{J}}$ para cada k, concluímos que

$$B \in \overline{\overline{\mathcal{J}}} = \overline{\mathcal{J}}. \quad \blacksquare$$

Teorema 3.2.1 *O fecho $\overline{\mathcal{J}}$ de $\mathcal{J}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X e, portanto, $\sigma(\mathcal{J})$ está contida em $\overline{\mathcal{J}}$*

Demonstração: Bastará considerar uma sequência $(A_n)_{n\in N}$ em $\overline{\mathcal{J}}$ de conjuntos dois a dois disjuntos e mostrar que $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ é também um elemento de $\overline{\mathcal{J}}$. Mostraremos isto usando o Teorema (2.3.2), isto é, sendo $F \in \mathcal{J}^<$ provaremos que $F \cap B \in \overline{\mathcal{J}}(F)$.

Mas $(A_n \cap F)_{n\in N}$ é uma sequência de elementos dois a dois disjuntos de $\overline{\mathcal{J}}$ e $F \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F \cap A_n) \subset F$. Pelo Lema (3.2.1) conclui-se que $B \cap F \in \overline{\mathcal{J}}$. Como $B \cap F \subset F$, então $B \cap F \in \overline{\mathcal{J}}(F)$. $\blacksquare$

3.3 A σ-aditividade de μ^* em $\overline{\mathcal{J}}$

Nesta seção, mostraremos que a medida exterior μ^* restrita a $\overline{\mathcal{J}}$ é uma medida.

Lema 3.3.1 *Seja $(F_n)_{n\in N}$ uma sequência de conjuntos em $\mathcal{J}$, dois a dois disjuntos; vale a seguinte igualdade*

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n).$$

Demonstração: Pela σ-subaditividade de μ^*, é imediato que $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n)$.

Para mostrar a desigualdade contrária , suponhamos por absurdo que

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n).$$

Pela definição da μ^*, existe uma sequência $(E_k)_{k\in N}$ de elementos de $\mathcal{J}$ dois a dois disjuntos, tais que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_k \tag{3.12}$$

e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n). \tag{3.13}$$

Para cada $k, n \in I\!N$, definamos os conjuntos

$$D_{k,n} = E_k \bigcap F_n,$$

então, $\{D_{k,n} : k, n \in I\!N\}$ é uma família de conjuntos de $\mathcal{J}$ dois a dois disjuntos, pois é imediato que

$$D_{k,n} \cap D_{l,s} = \emptyset \quad \text{se } k \neq l \text{ ou } n \neq s.$$

Da inclusão (3.12) para todo n natural, temos

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} D_{k,n} = (\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \cap F_n = F_n,$$

e como μ é enumeravelmente aditiva em $\mathcal{J}$, segue que

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_{k,n}) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_{k,n}) = \mu(F_n). \tag{3.14}$$

Por outro lado, para cada $k \in I\!N$ e para cada $s \in I\!N$ vale que

$$\bigcup_{n=1}^{s} D_{k,n} = \bigcup_{n=1}^{s}(E_k \cap F_n) = E_k \cap (\bigcup_{n=1}^{s} F_n) \subset E_k,$$

e, portanto

$$\mu(E_k) \geq \sum_{n=1}^{s} \mu(D_{k,n}).$$

Logo, para cada $k \in I\!N$, vale a desigualdade,

$$\mu(E_k) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_{k,n});$$

somando em k e usando (3.14) temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(D_{k,n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(D_{k,n}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n), \end{aligned}$$

o que contraria a relação (3.13). Esta contradição prova o lema. ■

Teorema 3.3.1 *A restrição de μ^* a $\overline{\mathcal{J}}$ é uma medida finitamente aditiva.*

Demonstração: Em primeiro lugar lembramos que pelo Teorema (3.1.1), $\overline{\mathcal{J}}$ é uma álgebra.

Será suficiente mostrar que dados $A, B \in \overline{\mathcal{J}}$ disjuntos, então

$$\mu^*(A \cup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Se $\mu^*(A \cup B) = \infty$, nada há provar. No caso em que $\mu^*(A \cup B) < \infty$, pela definição de μ^*, dado $\epsilon > 0$, existe uma sequência $(F_n)_{n \in N}$ de conjuntos dois a dois disjuntos de $\mathcal{J}$ tal que

$$A \cup B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \tag{3.15}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) < \mu^*(A \cup B) + \epsilon.$$

Desta última relação decorre que $F_n \in \mathcal{J}^<$ e que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n)$ é uma série convergente e assim, existe $k \in I\!N$ tal que

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(F_n) < \epsilon/2,$$

e pelo Lema (3.3.1) temos

$$\mu^*(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} F_n) < \epsilon/2. \tag{3.16}$$

Definindo $G_k = F_1 \cup ... \cup F_k$, temos que $G_k \in \mathcal{J}^<$ para todo k e usando (3.15), escrevemos

$$\begin{aligned} A &= A \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = A \cap (G_k \cup \bigcup_{n=k+1}^{\infty} F_n) \\ &\subset (A \cap G_k) \cup \bigcup_{n=k+1}^{\infty} F_n. \end{aligned}$$

Portanto

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap G_k) + \mu^*(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} F_n).$$

e, lembrando (3.16), tem-se

$$\mu^*(A) < \mu^*(A \cap G_k) + \epsilon/2$$

ou

$$\mu^*(A \cap G_k) > \mu^*(A) - \epsilon/2. \tag{3.17}$$

Do mesmo modo prova-se que

$$\mu^*(B \cap G_k) > \mu^*(B) - \epsilon/2. \tag{3.18}$$

Por outro lado, observamos que

$$A \cup B \supset (A \cup B) \cap G_k = (A \cap G_k) \cup (B \cap G_k)$$

e

$$\mu^*(A \cup B) \geq \mu^*(A \cap G_k) + \mu^*(B \cap G_k).$$

Utilizando as relações (3.17) e (3.18) obtemos

$$\mu^*(A \cup B) > \mu^*(A) + \mu^*(B) - \epsilon.$$

Sendo ϵ arbitrário concluímos que

$$\mu^*(A \cup B) \geq \mu^*(A) + \mu^*(B). \blacksquare$$

Teorema 3.3.2 *A restrição da aplicação μ^* à σ-álgebra $\overline{\mathcal{J}}$ é uma medida.*

Demonstração: A prova decorre do fato que a medida exterior μ^*, pelo Teorema (3.3.1), é finitamenta aditiva em $\overline{\mathcal{J}}$. Assim, aplica-se o Teorema (1.1.1). ∎

Como consequência do teorema acima temos o seguinte resultado que é uma generalização do Lema (3.3.1).

Teorema 3.3.3 *Se $(A_n)_{n\in N}$ é uma sequência em $\overline{\mathcal{J}}$ de conjuntos dois a dois disjuntos, e se $Y \subset X$ então*

$$\mu^*(Y \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Y \cap A_n).$$

Demonstração: Sendo μ^* uma medida exterior, é imediata a desigualdade

$$\mu^*(Y \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Y \cap A_n).$$

Para mostrar a desigualdade contrária, suponhamos por absurdo que

$$\mu^*(Y \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Y \cap A_n).$$

Logo, da definição de μ^*, decorre que existe uma sequência $(F_k)_{k\in N}$ em $\mathcal{J}$, de conjuntos dois a dois disjuntos, tal que

$$Y \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k \tag{3.19}$$

e

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(F_k) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Y \cap A_n). \tag{3.20}$$

Sendo $m \in I\!N$ fixado, decorre de (3.19) que

$$\begin{aligned} Y \cap A_m &= (Y \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap A_m \subset (\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k) \cap A_m \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} (F_k \cap A_m), \end{aligned}$$

e, portanto

$$\mu^*(Y \cap A_m) \leq \mu^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} (F_k \cap A_m)) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (F_k \cap A_m),$$

e daí

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(Y \cap A_m) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(F_k \cap A_m) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(F_k \cap A_m). \tag{3.21}$$

Observando que $(F_k \cap A_m)_{m \in N}$ é uma sequência de elementos dois a dois disjuntos de $\overline{\mathcal{J}}$, aplica-se o Teorema (3.3.2) para calcular

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(F_k \cap A_m) &= \mu^*(\bigcup_{m=1}^{\infty} (F_k \cap A_m)) \\ &= \mu^*(F_k \cap (\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m)). \end{aligned}$$

Substituindo em (3.21) obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \mu^*(Y \cap A_m) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(F_k \cap (\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m)) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(F_k); \end{aligned}$$

Como esta relação contradiz (3.20), o teorema está provado. ■

Capítulo 4

$\overline{\mathcal{J}}$ e a Extensão de Carathéodory

Neste capítulo começamos estabelecendo a completude da σ-álgebra $\overline{\mathcal{J}}$. A seguir mostraremos que $\overline{\mathcal{J}}$ é a σ-álgebra dos conjuntos μ^*-mensuráveis segundo Carathéodory.

A partir deste capítulo denotaremos por λ a restrição de μ^* a $\overline{\mathcal{J}}$.

4.1 A completude da σ-álgebra $\overline{\mathcal{J}}$

Denotando-se $\sigma(\mathcal{J})$ por $\mathcal{B}$ consideremos a família

$$\hat{\mathcal{B}} = \{E \in \mathcal{P}(X) : A \subset E \subset B;\ A, B \in \mathcal{B} \text{ e } \lambda(B \setminus A) = 0\},$$

que pelo Teorema (1.2.1) é uma σ-álgebra completa que contém $\mathcal{B}$. Do Teorema (3.2.1) temos que $\mathcal{B} \subset \overline{\mathcal{J}}$.

Mostraremos que $\overline{\mathcal{J}}$ é completa e contém $\hat{\mathcal{B}}$.

Teorema 4.1.1 *A σ-álgebra $\overline{\mathcal{J}}$ é completa.*

Demonstração: Lembrando a Definição (2.4.1); observemos que o conjunto $\{Y \in \mathcal{P}(X) : \mu^*(Y) = 0\} \subset \mathcal{A}_0$.

Queremos mostrar que a σ-álgebra $\overline{\mathcal{J}}$ é completa, isto é, se A pertencente a $\overline{\mathcal{J}}$ for tal que $\lambda(A) = 0$ e se $B \subset A$ então $B \in \overline{\mathcal{J}}$. De fato, se $B \subset A$ então $0 \leq \mu^*(B) \leq \lambda(A)$, logo $\mu^*(B) = 0$, daí $B \in \mathcal{A}_0$; decorre do Teorema (2.4.1) que $B \in \overline{\mathcal{J}}$. ∎

Teorema 4.1.2 *A σ-álgebra $\overline{\mathcal{J}}$ contém $\hat{\mathcal{B}}$.*

Demonstração: De fato, se $E \in \hat{\mathcal{B}}$ existem conjuntos A e B em $\mathcal{B}$ tais que $A \subset E \subset B$ e $\lambda(B \setminus A) = 0$. Então $\emptyset \subset E \setminus A \subset B \setminus A$ de onde $0 \leq \mu^*(E \setminus A) \leq \lambda(B \setminus A) = 0$ e, portanto, temos $E \setminus A \in \mathcal{A}_0 \subset \overline{\mathcal{J}}$ e como $A \in \mathcal{B}$, da igualdade $E = A \cup (E \setminus A)$, concluímos que $E \in \overline{\mathcal{J}}$.

Isso mostra que $\hat{\mathcal{B}} \subset \overline{\mathcal{J}}$. ■

Observação 4.1.1 *O diagrama mostra as relações de inclusão que existem entre as σ-álgebras obtidas a partir de $\mathcal{J}$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{J}) \arrow[rr] & & \hat{\mathcal{B}} \arrow[rr] & & \overline{\mathcal{J}} \\
& & \mathcal{J} \arrow[ull] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

Este exemplo mostra que no teorema acima podemos ter $\hat{\mathcal{B}} \neq \overline{\mathcal{J}}$.

Exemplo 4.1.1 *Consideremos X um conjunto não-enumerável; seja $\mathcal{J}$ a álgebra dos subconjuntos finitos ou cofinitos de X, isto é,*

$$\mathcal{J} = \{B \subset X : B \text{ é finito ou } B^c \text{ é finito }\},$$

com a medida de contagem, ou seja,

$$\mu(B) = \begin{cases} ||B|| & \text{se } B \text{ é finito,} \\ \infty & \text{se } B \text{ é infinito.} \end{cases}$$

Logo, a σ-álgebra gerada por $\mathcal{J}$ está dada por

$$\mathcal{B} = \{A \subset X : A \text{ é enumerável ou } A^c \text{ é enumerável}\}.$$

Claramente, o único conjunto nulo é o $\emptyset$ e, portanto, temos

$$\hat{\mathcal{B}} = \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{J}).$$

Por outro lado, temos que $\overline{\mathcal{J}} = \mathcal{P}(X)$. Para ver isso bastará mostrar a inclusão $\mathcal{P}(X) \subset \overline{\mathcal{J}}$. Seja $A \in \mathcal{P}(X)$. Para cada $F \in \mathcal{J}^{<}$, $A \cap F$ é finito, logo $A \cap F \in \mathcal{J} \subset \overline{\mathcal{J}}$; decorre do Teorema (2.3.2) que $A \in \overline{\mathcal{J}}$. Isso mostra que $\mathcal{P}(X) \subset \overline{\mathcal{J}}$.

Pelos Teoremas 2 e 8 ([7], pag. 15 e 25), e a menos de identificações, segue que se κ é um cardinal infinito, $\kappa > \aleph_0$ então $||X|| = \kappa = \kappa \times \kappa$ e, portanto, existe uma bijeção $f : X \longrightarrow \kappa \times \kappa$.

Seja $B = f^{-1}(\{0\} \times \kappa)$. Portanto, temos que $B \subset X$ e $||B|| = \kappa$. O complementar B^c também é não-enumerável, portanto B não está em $\sigma(\mathcal{J})$.

Isso prova que $\hat{\mathcal{B}} \neq \mathcal{P}(X)$. ■

4.2 $\overline{\mathcal{J}}$ e a σ-álgebra de Carathéodory

Nesta seção, finalmente mostramos o encontro do método da extensão de Carathéodory com a extensão, vista sob aspectos topológicos, desenvolvida nos Capítulos 2 e 3.

Denotando-se por $\mathcal{C}$ a família dos conjuntos mensuráveis segundo Carathéodory, como na Definição (1.3.2), lembramos que $H \in \mathcal{C}$ se, e somente se, para todo $G \in \mathcal{P}(X)$ tem-se

$$\mu^*(G) = \mu^*(G \cap H) + \mu^*(G \cap H^c).$$

Observação 4.2.1 *Ao considerar o espaço de medida $(X, \overline{\mathcal{J}}, \lambda)$ temos a respectiva medida exterior λ^*. Mas λ^* coincide com μ^* em $\mathcal{P}(X)$, assim, indicaremos simplesmente por μ^* a medida exterior associada a λ.*

Teorema 4.2.1 *A família dos conjuntos mensuráveis segundo Carathéodory coincide com o fecho da álgebra $\mathcal{J}$, isto é,*

$$\mathcal{C} = \overline{\mathcal{J}}.$$

Demonstração: Mostraremos a igualdade usando a dupla inclusão, isto é, provando que $\overline{\mathcal{J}} \subset \mathcal{C}$ e $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{J}}$.

Seja $H \in \overline{\mathcal{J}}$. Pelo Teorema (3.1.1), $\overline{\mathcal{J}}$ é uma álgebra de subconjuntos de X, então o complementar $X \setminus H \in \overline{\mathcal{J}}$.

Portanto, para cada $G \subset X$, como $G = (G \cap H) \cup (G \cap H^c)$, decorre do Teorema (3.3.3) que

$$\mu^*(G) = \mu^*(G \cap H) + \mu^*(G \cap H^c),$$

provando assim que H é μ^*-mensurável, isto é, $H \in \mathcal{C}$ e, portanto, $\overline{\mathcal{J}} \subset \mathcal{C}$.

Reciprocamente, suponhamos que $H \in \mathcal{C}$. Mostraremos que $H \in \overline{\mathcal{J}}$. Pelo Teorema (2.3.2), será suficiente provar que para todo $F \in \mathcal{J}^<$ tem-se $H \cap F \in \overline{\mathcal{J}}(F)$.

Sendo $F \in \mathcal{J}^{<}$, sabemos pelo Teorema (1.5.2) que $F \cap H$ admite uma cobertura mensurável, isto é, existe $L \in \overline{\mathcal{J}}$

$$F \cap H \subset L \quad \text{e} \quad \mu^*(F \cap H) = \lambda(L). \tag{4.1}$$

Como $F \cap H \subset F \cap L$ e $L \cap F \in \overline{\mathcal{J}}$; pelo Corolário (1.5.2) $F \cap L$ é uma cobertura mensurável de $F \cap H$ e, portanto, podemos supor que sem perda de generalidade, que $L \subset F$.

Similarmente, seja $M \in \overline{\mathcal{J}}$, $M \subset F$ uma cobertura mensurável para $F \setminus H$. Então

$$F \setminus H \subset M \quad \text{e} \quad \mu^*(F \setminus H) = \lambda(M). \tag{4.2}$$

Claramente, $L \cup M = F$, e usando a hipótese de que H é μ^*-mensurável e as relações (4.1) e (4.2) temos

$$\begin{aligned} \lambda(L \cup M) &= \mu(F) = \mu^*(F \cap H) + \mu^*(F \setminus H) \\ &= \lambda(L) + \lambda(M) \\ &= \lambda(L \cup M) + \lambda(L \cap M). \end{aligned}$$

Como $\mu(L \cup M) = \mu(F) < \infty$, concluímos que

$$\lambda(L \cap M) = 0. \tag{4.3}$$

Por outro lado, lembrando que $L \cap F^c = \emptyset$, segue que

$$\begin{aligned} L \setminus (F \cap H) &= L \cap (F \cap H)^c = L \cap (F^c \cup H^c) \\ &= (L \cap F^c) \cup (L \cap H^c) \\ &= \emptyset \cup (L \cap H^c) \subset F \setminus H \subset M \end{aligned}$$

e, portanto, $L \setminus (F \cap H) \subset L \cap M$. De (4.3) decorre que $\mu^*[L \setminus (F \cap H)] = 0$.

De acordo com o Teorema (2.4.1), $L \setminus (F \cap H)$ é localmente nulo e pertence a $\overline{\mathcal{J}}$.

Lembrando que $F \cap H \subset L \subset F$ e usando identidade

$$F \cap H = L \cap F \cap H = (L \setminus (F \cap H))^c \cap L,$$

conclui-se que o conjunto $F \cap H \in \overline{\mathcal{J}}(F)$. Isso mostra que $H \in \overline{\mathcal{J}}$.

Assim, provamos que $\mathcal{C} \subset \overline{\mathcal{J}}$. Isso prova a igualdade e o teorema. ∎

Observação 4.2.2 *Como corolário da demonstração do teorema acima, para mostrar que H é μ^*-mensurável, basta tomar $G \in \mathcal{P}(X)$ como sendo um elemento da álgebra $\mathcal{J}$ e, mais ainda, de medida finita, isto é, $G \in \mathcal{J}^{<}$, como veremos a seguir.*

Corolário 4.2.1 *Se $H \in \mathcal{P}(X)$ for tal que*

$$(i)\ \mu^*(G) = \mu^*(G \cap H) + \mu^*(G \cap H^c) \quad \textit{para todo} \quad G \in \mathcal{J}^<, \quad \textit{então} \quad H \in \mathcal{C}.$$

Demonstração: Como consequência da primeira parte da demonstração do teorema anterior temos que $\overline{\mathcal{J}} \subset \mathcal{C}$. Assim, para mostrar o resultado, bastará provar que $H \in \overline{\mathcal{J}}$.

Como H satisfaz a propriedade (i) podemos tomar $H \in \mathcal{P}(X)$ como na prova da segunda parte do teorema acima, tomando o cuidado de substituir a hipótese de ser H μ^*-mensurável pela propriedade (i). Com isso mostraremos que $H \in \overline{\mathcal{J}}$ e, portanto, $H \in \mathcal{C}$. ∎

Capítulo 5

Extensões de Medidas

Neste capítulo, mostraremos que se a σ-álgebra $\overline{\mathcal{J}}$ é diferente de $\mathcal{P}(X)$, então sempre é possível encontrar mais de uma extensão de λ, definida numa σ-álgebra contendo $\overline{\mathcal{J}}$.

A seguir, trataremos de extensões de μ à σ-álgebra $\overline{\mathcal{J}}$, provando que λ é a maior medida entre as extensões.

5.1 Extensões do espaço $(X, \overline{\mathcal{J}}, \lambda)$

O objetivo desta seção é estudar a existência de uma extensão para a medida λ, definida em $\overline{\mathcal{J}}$. Mostraremos que, a menos que esta σ-álgebra seja igual ao espaço $\mathcal{P}(X)$, existirá uma extensão, não necessariamente única, definida numa σ-álgebra contendo propriamente $\overline{\mathcal{J}}$.

Lembrando a Observação (4.2.1), temos

Lema 5.1.1 *Suponhamos que $\overline{\mathcal{J}} \neq \mathcal{P}(X)$. Existem conjuntos $F \in \mathcal{J}^<$, $L \in \overline{\mathcal{J}}(F)$ com $\lambda(L) > 0$, e $C \subset L$, $C \notin \overline{\mathcal{J}}$ tais que se $S \in \overline{\mathcal{J}}(L)$ e $S \cap C = \emptyset$ ou $S \cap C^c = \emptyset$ então $\lambda(S) = 0$.*

Demonstração: Por hipótese temos que existe $A \subset X$ tal que $A \notin \overline{\mathcal{J}}$; decorre do Teorema (2.3.2) que existe $F \in \mathcal{J}^<$ tal que $B = A \cap F \notin \overline{\mathcal{J}}$.

É claro que $\overline{\mathcal{J}}(F)$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de F; como a terna $(F, \overline{\mathcal{J}}(F), \lambda)$ é um espaço de medida finita, pelo Teorema (1.5.2), existe uma cobertura mensurável

$H \in \overline{\mathcal{J}}(F)$ de B; em outros termos, existe $H \in \overline{\mathcal{J}}(F)$ tal que

$$B \subset H \quad \text{e} \quad \mu^*(B) = \lambda(H). \tag{5.1}$$

De maneira análoga, para o complementar de B em F, dado por $B^c = A^c \cap F$, existe uma cobertura mensurável $K^c \in \overline{\mathcal{J}}(F)$ de B^c, isto é,

$$B^c \subset K^c \text{ e } \mu^*(B^c) = \lambda(K^c). \tag{5.2}$$

É claro que $K \subset B \subset H \subset F$.

Seja $L = H \cap K^c$. É óbvio que $\lambda(L) < \infty$, pois $L \subset F$; na realidade temos que $0 < \lambda(L) < \infty$. De fato, de (5.1) segue que $B \cap K^c \subset H \cap K^c = L$. Assumindo que $\lambda(L) = 0$ pelo Teorema (4.1.1) teríamos que $B \cap K^c \in \overline{\mathcal{J}}$, e como $B = K \cup (B \cap K^c)$, isso implicaria que $B \in \overline{\mathcal{J}}$, o que contraria a escolha de B.

Seja $C = B \cap L \notin \overline{\mathcal{J}}$. Mostraremos que se $S \in \overline{\mathcal{J}}(L)$ e $S \cap C = \emptyset$ então $\lambda(S) = 0$.

Lembrando que $B = B \cap H$ e $S = L \cap S$, temos

$$\begin{aligned} \emptyset &= C \cap S = (B \cap L) \cap S = B \cap (L \cap S) \\ &= B \cap S, \end{aligned}$$

logo, $B \subset S^c$ e, portanto, $B \subset H \cap S^c \subset H$. Como $S^c \in \overline{\mathcal{J}}$ e H é uma cobertura mensurável de B; pelo Corolário (1.5.2), parte i) tem-se

$$\lambda(H \setminus (H \cap S^c)) = 0.$$

Mas,

$$\begin{aligned} H \setminus (H \cap S^c) &= H \cap (H \cap S^c)^c = (H \cap H^c) \cup (H \cap S) \\ &= \emptyset \cup S = S \end{aligned}$$

e, consequentemente, $\lambda(S) = 0$.

Analogamente, no caso em que $S \cap C^c = \emptyset$, onde $C^c = B^c \cap L$, tem-se

$$\begin{aligned} \emptyset &= S \cap C^c = S \cap (B^c \cap L) \\ &= S \cap B^c. \end{aligned}$$

Portanto, $B^c \subset S^c$, logo $B^c \subset S^c \cap K^c \subset K^c$, como S^c pertence a $\overline{\mathcal{J}}$, sendo K^c uma cobertura de B^c e $S \subset K^c$, segue do Corolário (1.5.2), parte i), que

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda[K^c \setminus (S^c \cap K^c)] = \lambda(K^c \cap (S \cup K)) \\ &= \lambda(K^c \cap S) = \lambda(S). \end{aligned}$$

Isso prova o lema. ∎

Denotando-se por $a(\overline{\mathcal{J}} \cup \{C\})$ a álgebra gerada por $\overline{\mathcal{J}}$ e $\{C\}$ temos o seguinte resultado.

Lema 5.1.2 *Sejam $\overline{\mathcal{J}}$, F, L e C como no Lema (5.1.1), $D = C^c \cap L$ e seja $\mathcal{H}$ a família dos conjuntos da forma*

$$(1) \qquad E = G \cup (T \cap C) \cup (R \cap D)$$

onde $G \in \overline{\mathcal{J}}(L^c)$, T e R pertencem a $\overline{\mathcal{J}}(L)$, isto é, $G \subset L^c$, $T \subset L$ e $R \subset L$. Então,

i) $\mathcal{H}$ é uma álgebra de subconjuntos X;

ii) $\mathcal{H}$ é a álgebra gerada por $\overline{\mathcal{J}}$ e $\{C\}$;

iii) $\mathcal{H}$ é a σ-álgebra gerada por $\overline{\mathcal{J}}$ e $\{C\}$.

Demonstração: Prova de i):

É claro que $\emptyset \in \mathcal{H}$. Dado $E \in \mathcal{H}$ como em (1) o complementar de E está dado por

$$E^c = (G^c \cap L^c) \cup (T^c \cap C) \cup (R^c \cap D).$$

De fato, bastará verificar que $E \cap E^c = \emptyset$ e $E^c \cup E = X$. Ver (A.1.18).

Lembrando que $L = C \cup D$ implica que

$$L^c \cap C = L^c \cap D = C \cap D = \emptyset,$$

temos

$$\begin{aligned}
E \cap E^c &= [(G \cap L^c) \cup (T \cap C) \cup (R \cap D)] \cap [(G^c \cap L^c) \cup (T^c \cap C) \cup (R^c \cap D)] \\
&= \{[(G \cap L^c) \cup (T \cap C) \cup (R \cap D)] \cap (G^c \cap L^c)\} \\
&\cup \{[(G \cap L^c) \cup (T \cap C) \cup (R \cap D) \cap (T^c \cap C)]\} \\
&\cup \{[(G \cap L^c) \cup (T \cap C) \cup (R \cup D)] \cap (R^c \cap D)\} \\
&= \{[(G \cap L^c) \cap (G^c \cap L^c)] \cup [(T \cap C) \cap (G^c \cap L^c)] \cup [(R \cap D) \cap (G^c \cap L^c)]\} \\
&\cup \{[(G \cap L^c) \cap (T^c \cap C)] \cup [(T \cap C) \cap (T^c \cap C)] \cup [(R \cap D) \cap (T^c \cap C)]\} \\
&\cup \{[(G \cap L^c) \cap (R^c \cap D)] \cup [(T \cap C) \cap (R^c \cap D)] \cup [(R \cap D) \cap (R^c \cap D)]\} \\
&= [(G \cap G^c \cap L^c) \cup (T \cap G^c \cap C \cap L^c) \cup (R \cap G^c \cap D \cap L^c)] \\
&\cup [(G \cap T^c \cap C \cap L^c) \cup (T \cap T^c \cap C) \cup (R \cap T^c \cap C \cap D)] \\
&\cup [(G \cap R^c \cap L^c \cap D) \cup (T \cap R^c \cap C \cap D) \cup (R \cap R^c \cap D)] \\
&= \emptyset.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
E \cup E^c &= [(G \cap L^c) \cup (T \cap C) \cup (R \cap D)] \bigcup [(G^c \cap L^c) \cup (T^c \cap C) \cup (R^c \cap D)] \\
&= [(G \cup G^c) \cap L^c] \cup [(T \cup T^c) \cap C] \cup [(R \cup R^c) \cap D] \\
&= (X \cap L^c) \cup (X \cap C) \cup (X \cap D) \\
&= L^c \cup C \cup D = L^c \cup L \\
&= X,
\end{aligned}$$

o que mostra que dado $E \in \mathcal{H}$, $E^c \in \mathcal{H}$.

Sejam E_1, $E_2 \in \mathcal{H}$ tais que $E_i = G_i \cup (T_i \cap L) \cup (R_i \cap D)$, $i = 1, 2$. É imediato que $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{H}$.

Isso prova que $\mathcal{H}$ é uma álgebra de subconjuntos de X.

Prova de ii):

É claro que $\overline{\mathcal{J}} \cup \{C\} \subset \mathcal{H}$. De fato, considerando em (1), $G = R = \emptyset$ e $T = L$, temos que $C \in \mathcal{H}$. Por outro lado, dado $A \in \overline{\mathcal{J}}$, temos

$$\begin{aligned}
A &= (A \cap L^c) \cup (A \cap L) \\
&= (A \cap L^c) \cup [A \cap (C \cup D)] \\
&= [(A \cap L^c) \cap L^c] \cup [(A \cap L) \cap C] \cup [(A \cap L) \cap D];
\end{aligned}$$

isso mostra que $A \in \mathcal{H}$ e, portanto, que $\overline{\mathcal{J}} \cup \{C\} \subset \mathcal{H}$.

Sendo $\mathcal{H}$ uma álgebra, $\mathcal{H}$ contém a álgebra gerada por $\overline{\mathcal{J}}$ e $\{C\}$, isto é,

$$a(\overline{\mathcal{J}} \cup \{C\}) \subset \mathcal{H}. \tag{5.3}$$

Por outro lado, seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de subconjuntos de X tal que $\overline{\mathcal{J}} \subset \mathcal{A}$ e $C \in \mathcal{A}$. Como T, $R \in \overline{\mathcal{J}}(L)$ e $C^c \cap L = D \in \mathcal{A}$, dado $E \in \mathcal{H}$, tal como em (1) , temos

$$G \in \overline{\mathcal{J}} \subset \mathcal{A}, \; T \cap C \in \mathcal{A} \quad \text{e} \quad R \cap D \in \mathcal{A}.$$

Portanto, $E \in \mathcal{A}$ e, consequentemente, $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$. Logo, junto com (5.3), concluímos que

$$\mathcal{H} = a(\overline{\mathcal{J}} \cup \{C\}). \tag{5.4}$$

Prova de iii):

Sendo $\mathcal{H}$ uma álgebra, bastará provar que $\mathcal{H}$ é fechada por reunião enumerável de conjuntos.

Seja $(E_n)_{n \in I\!N}$ uma sequência de conjuntos de $\mathcal{H}$ onde $E_n = G_n \cup (T_n \cap C) \cup (R_n \cap D)$ para cada $n \in I\!N$, então

$$\begin{aligned}
\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n &= \bigcup_{n=1}^{\infty} [G_n \cup (T_n \cap C) \cup (R_n \cap D)] \\
&= (\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) \cup [(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n) \cap C] \cup [(\bigcup_{n=1}^{\infty} R_n) \cap D].
\end{aligned}$$

Pelo Teorema (3.2.1), $\overline{\mathcal{J}}$ é uma σ-álgebra; é imediato que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{H}$. Portanto, $\mathcal{H}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X.

Portanto, $\mathcal{H}$ contém a σ-álgebra gerada por $\overline{\mathcal{J}}$ e $\{C\}$, isto é, $\sigma(\overline{\mathcal{J}} \cup \{C\}) \subset \mathcal{H}$. Mas $\sigma(\overline{\mathcal{J}} \cup \{C\})$ contém a álgebra gerada por $\overline{\mathcal{J}} \cup \{C\}$. Segue de (5.4) que

$$\mathcal{H} = a(\overline{\mathcal{J}} \cup \{C\} \subset \sigma(\overline{\mathcal{J}} \cup \{C\}) \subset \mathcal{H}.$$

Prova-se assim que $\mathcal{H} = \sigma(\overline{\mathcal{J}} \cup \{C\})$. ■

Lema 5.1.3 *Mantendo as notações do Lema (5.1.2), sejam ν_1, ν_2 aplicações definidas em $\mathcal{H}$ pelas relações*

$$i) \quad \nu_1(E) = \lambda(G) + \mu^*(T \cap C);$$

$$ii) \quad \nu_2(E) = \lambda(G) + \mu^*(R \cap D).$$

Então, ν_1, ν_2 são medidas finitamente aditivas.

Demonstração: Observemos que se $E \in \mathcal{H}$, na representação $E = G \cup (T \cap C) \cup (R \cap D)$ os conjuntos G, $T \cap C$ e $R \cap D$ são univocamente determinados pois

$$E \cap L^c = G \tag{5.5}$$

$$E \cap C = T \cap C \tag{5.6}$$

$$E \cap D = R \cap D. \tag{5.7}$$

Pelas relações acima, é fácil concluir que o conjunto $E \in \mathcal{H}$ é uma reunião de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{H}$.

Portanto as aplicações ν_1, ν_2 em $\mathcal{H}$, com valores em $[0, \infty]$, estão bem definidas e podemos expressá-las pelas igualdades

$$\nu_1(E) = \lambda(G) + \mu^*(T \cap C) = \lambda(E \cap L^c) + \mu^*(E \cap C) \tag{5.8}$$

e

$$\nu_2(E) = \lambda(G) + \mu^*(R \cap D) = \lambda(E \cap L^c) + \mu^*(E \cap D). \tag{5.9}$$

Mostraremos que ν_1 é uma medida finitamente aditiva. É claro que $\nu_1(\emptyset) = 0$.

Sejam $E_1, E_2 \in \mathcal{H}$ disjuntos, logo,

$$E_1 \cup E_2 = (G_1 \cup G_2) \cup [(T_1 \cup T_2) \cap C] \cup [(R_1 \cup R_2) \cap D]$$

e

$$\nu_1(E_1 \cup E_2) = \lambda(G_1 \cup G_2) + \mu^*((T_1 \cup T_2) \cap C). \tag{5.10}$$

A relação $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, usando (5.5) implica

$$G_1 \cap G_2 = (E_1 \cap L^c) \cap (E_2 \cap L^c) \subset E_1 \cap E_2 = \emptyset. \tag{5.11}$$

e usando (5.6), segue que

$$(T_1 \cap T_2) \cap C = (T_1 \cap C) \cap (T_2 \cap C) = (E_1 \cap C) \cap (E_2 \cap C) \subset E_1 \cap E_2 = \emptyset. \tag{5.12}$$

Pelo Lema (5.1.1), concluímos que $\lambda(T_1 \cap T_2) = 0$.

Por outro lado, fazendo $Q_1 = T_1$ e $Q_2 = T_2 \cap T_1^c$, temos que $T_1 \cup T_2 = Q_1 \cup Q_2$ e, da identidade $T_2 = (T_2 \cap T_1) \cup (T_2 \cap T_1^c) = (T_2 \cap T_1) \cup Q_2$, interceptando com C temos que

$$T_2 \cap C = Q_2 \cap C \quad \text{e } T_1 \cap C = Q_1 \cap C$$

e, portanto,

$$\mu^*(T_2 \cap C) = \mu^*(Q_2 \cap C) \text{ e } \mu^*(T_1 \cap C) = \mu^*(Q_1 \cap T_1).$$

Finalmente, decorre do Teorema (3.3.3) que

$$\begin{aligned} \mu^*((T_1 \cup T_2) \cap C) &= \mu^*((Q_1 \cup Q_2) \cap C) \\ &= \mu^*(Q_1 \cap C) + \mu^*(Q_2 \cap C) \\ &= \mu^*(T_1 \cap C) + \mu^*(T_2 \cap C). \end{aligned}$$

Substituindo no segundo membro de (5.10) e usando (5.11), temos

$$\begin{aligned} \nu_1(E_1 \cup E_2) &= \lambda(G_1) + \lambda(G_2) + \mu^*(T_1 \cap C) + \mu^*(T_2 \cap C) \\ &= \nu_1(E_1) + \nu_1(E_2). \end{aligned}$$

Isso mostra que ν_1 é uma medida finitamente aditiva em $\mathcal{H}$.

Com uma repetição do argumento acima, prova-se que ν_2 é uma medida finitamente aditiva, bastando trocar C por D e T_i por R_i para $i = 1, 2$.■

Lema 5.1.4 *As aplicações ν_1, ν_2 como definidas no Lema (5.1.3) são medidas enumeravelmente aditivas em $\mathcal{H}$.*

Demonstração: Seja $(E_n)_{n\in N}$ uma sequência de conjuntos em $\mathcal{H}$ dois a dois disjuntos, onde para cada n tem-se $E_n = G_n \cup (T_n \cap C) \cup (R_n \cap D)$, sendo que $G_n \in \overline{\mathcal{J}}(X \setminus L)$ e $R_n, T_n \in \overline{\mathcal{J}}(L)$.

Segue das relações (5.5), (5.6) e (5.7) e, do mesmo argumento usado em (5.11) e (5.12), que os elementos de cada uma das sequências $(G_n)_{n\in N}$, $(T_n \cap C)_{n\in N}$ e $(R_n \cap D)$ são conjuntos dois a dois disjuntos. Com efeito, a relação $E_i \cap E_j = \emptyset$ para $i \neq j$, onde $i, j \in I\!N$, implica que

$$\begin{aligned} G_i \cap G_j &= (E_i \cap L^c) \cap (E_j \cap L^c) \\ &\subset E_i \cap E_j = \emptyset, \text{ para } \quad i \neq j. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Similarmente

$$\begin{aligned} (T_i \cap T_j) \cap C &= (E_i \cap C) \cap (E_j \cap C) \\ &\subset E_i \cap E_j = \emptyset, \text{ para } \quad i \neq j, \end{aligned} \tag{5.14}$$

e

$$\begin{aligned} (R_i \cap R_j) \cap D &= (E_i \cap D) \cap (E_j \cap D) \\ &\subset E_i \cap E_j = \emptyset, \text{ para } \quad i \neq j. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Portanto, sendo λ medida e por (5.13), temos que

$$\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(G_n). \tag{5.16}$$

Para mostrar a enumerabilidade de ν_1, bastará provar que vale a igualdade

$$\mu^*[C \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(C_n \cap T_n). \tag{5.17}$$

Vale a seguinte igualdade

$$[T_n \cap (T_1 \cup ... \cup T_{n-1})] \cap C = \emptyset. \tag{5.18}$$

Com efeito, de (5.14), temos

$$\begin{aligned} [T_n \cap (T_1 \cup ... \cup T_{n-1})] \cap C &= (T_n \cap C) \cap (T_1 \cup ... \cup T_{n-1}) \\ &= [(T_n \cap C) \cap T_1] \cup ... \cup [(T_n \cap C) \cap T_{n-1}] \\ &= [(T_n \cap C) \cap (T_1 \cap C)] \cup ... \cup [(T_n \cap C) \cap (T_{n-1} \cap C)] \\ &= [(E_n \cap C) \cap (E_1 \cap C)] \cup ... \cup [(E_n \cap C) \cap (E_{n-1} \cap C)] \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

Segue do Lema (5.1.1), considerando $S = T_n \cap (T_1 \cup ... \cup T_{n-1})$ que

$$\lambda[T_n \cap (T_1 \cup ... \cup T_{n-1})] = 0. \tag{5.19}$$

Seja $Q_1 = T_1$ e para cada n natural, $n > 1$, definamos

$$Q_n = T_n \cap (T_1 \cup ... \cup T_{n-1})^c. \tag{5.20}$$

Então, $(Q_n)_{n\in N}$, é uma sequência em $\mathcal{H}$ de conjuntos dois a dois disjuntos e

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n.$$

De (5.19) e (5.20) e como

$$T_n = [T_n \cap (T_1 \cup ... \cup T_{n-1})] \bigcup [T_n \cap (T_1 \cup ... \cup T_{n-1})^c] \tag{5.21}$$

temos

$$\lambda(T_n) = \lambda[T_n \cap (T_1 \cup ... \cup T_{n-1})^c] = \lambda(Q_n). \tag{5.22}$$

Portanto, pelo Teorema (3.3.3) tomando $Y = C$ temos

$$\mu^*[C \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n)] = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(C \cap Q_n).$$

Por outro lado, decorre de (5.21) que

$$T_n \cap C = Q_n \cap C,$$

e, portanto,

$$\mu^*(T_n \cap C) = \mu^*(Q_n \cap C).$$

Finalmente, tem-se

$$\begin{aligned}
\mu^*[\bigcup_{n=1}^{\infty}(T_n \cap C)] &= \mu^*[\bigcup_{n=1}^{\infty}(Q_n \cap C)] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n \cap C) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(T_n \cap C).
\end{aligned}$$

Similarmente, trocando C por D e T_n por R_n prova-se que ν_2 é uma medida enumeravelmente aditiva. ∎

Teorema 5.1.1 *Suponhamos que $\overline{\mathcal{J}} \neq \mathcal{P}(X)$ e mantendo as hipóteses do Lema (5.1.2), sejam B, H e K como no Lema (5.1.1). Então, existe uma σ-álgebra $\mathcal{H}$ de subconjuntos de X que contém $\overline{\mathcal{J}}$ estritamente, e duas medidas ν_1, ν_2, distintas, definidas em $\mathcal{H}$ que estendem λ.*

Demonstração: Pelo Lema (5.1.2) temos que $\mathcal{H}$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de X, e contém propriamente $\overline{\mathcal{J}}$.

Decorre do Lema (5.1.4) que as aplicações ν_1 e ν_2 definidas na σ-álgebra $\mathcal{H}$ são medidas.

Portanto, resta-nos mostrar que as aplicações ν_1 e ν_2 são extensões de λ.

Seja $E \in \overline{\mathcal{J}}$; decorre da demonstração do Lema (5.1.1) que H é uma cobertura mensurável de B, e sendo $L = H \cap K^c$, segue que $L \subset H$, e $L = L \cap H$ e, portanto, $B \cap (E \cap L) \subset H \cap (E \cap L)$. Segue do Corolário (1.5.2), parte i), que $(E \cap L) \cap H$ é uma cobertura mensurável para $(E \cap L) \cap B$. Portanto,

$$\lambda(E \cap L) = \lambda(E \cap L \cap H) = \mu^*(E \cap L \cap B) = \mu^*(E \cap C). \tag{5.23}$$

Segue das relações (5.5), (5.23) e (5.8) que

$$\begin{aligned} \lambda(E) &= \lambda(E \cap L^c) + \lambda(E \cap L) \\ &= \lambda(G) + \mu^*(E \cap C) \\ &= \nu_1(E). \end{aligned}$$

Isso mostra que a medida ν_1 é uma extensão de λ de $\overline{\mathcal{J}}$ a $\mathcal{H}$.

Com um argumento similar para ν_2, se $E \in \overline{\mathcal{J}}$, pelo Corolário (1.5.2), parte i), segue que $(E \cap L) \cap K^c$ é uma cobertura mensurável para $(E \cap L) \cap B$. Portanto

$$\lambda(E \cap L) = \lambda[(E \cap L) \cap H \cap K^c] = \mu^*[(E \cap L) \cap B^c] = \mu^*(E \cap D). \tag{5.24}$$

Logo, usando as relações (5.7), (5.24) e (5.9), temos

$$\begin{aligned} \lambda(E) &= \lambda(E \cap L^c) + \lambda(E \cap L) \\ &= \lambda(G) + \mu^*(E \cap D) \\ &= \nu_2(E). \end{aligned}$$

Assim, a medida ν_2 é também uma extensão de λ de $\overline{\mathcal{J}}$ para $\mathcal{H}$.

Finalmente, mostraremos que as extensões ν_1 e ν_2 acima são diferentes. De fato, tomando em particular, $E = X$ em (5.23) tem-se

$$\lambda(X \cap L) = \lambda(X \cap L \cap H) = \mu^*(X \cap \mathrm{L} \cap B) = \mu^*(X \cap C),$$

ou seja, $\lambda(L) = \mu^*(C)$.

Substituindo $E = C$ em (5.8) temos

$$\nu_1(C) = \lambda(G) + \mu^*(T \cap C) = \lambda(C \cap L^c) + \mu^*(C \cap C),$$

ou seja,

$$\nu_1(C) = 0 + \mu^*(C) = \lambda(L) > 0.$$

Por outro lado, considerando também $E = C$ em (5.9), obtemos que

$$\nu_2(C) = \lambda(G) + \mu^*(R \cap D) = \lambda(C \cap L^c) + \mu^*(C \cap D),$$

portanto, temos que

$$\nu_2(C) = 0.$$

Isso mostra que $\nu_1 \neq \nu_2$ em $\mathcal{H}$. ■

Observação 5.1.1 *Considerando a combinação linear $\nu = t\nu_1 + (1-t)\nu_2$, onde $t \in [0,1]$, podemos encontrar c diferentes medidas que estendem λ.*

5.2 Comparação e unicidade de extensões de μ

Nesta seção, mostraremos que a μ^* restrita a uma σ-álgebra $\mathcal{G}$ contendo $\mathcal{J}$ é a maior medida entre as extensões da μ de $\mathcal{J}$ a $\mathcal{G}$. Provaremos também que se μ for σ-finita em $\mathcal{J}$ a extensão de μ a $\overline{\mathcal{J}}$ é única.

Teorema 5.2.1 *Se ν é uma medida definida numa σ-álgebra $\mathcal{G}$ contendo $\mathcal{J}$, que é uma extensão de μ definida na álgebra $\mathcal{J}$, então para cada elemento $G \in \mathcal{G}$ temos que $\nu(G) \leq \mu^*(G)$. Em particular temos, $\nu(G) \leq \lambda(G)$ se $G \in \overline{\mathcal{J}}$.*

Demonstração: Seja $G \in \mathcal{G}$; se $\mu^*(G) = \infty$ nada há a provar.

Se $\mu^*(G) < \infty$, então dado $\epsilon > 0$ existe uma sequência $(F_n)_{n \in N}$ de conjuntos de $\mathcal{J}$, dois a dois disjuntos, tal que

$$G \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n, \tag{5.25}$$

e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) < \mu^*(G) + \epsilon. \tag{5.26}$$

Por outro lado, sendo ν uma extensão de μ, de (5.25) e (5.26) temos

$$\begin{aligned} \nu(G) &\leq \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(F_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \\ &< \mu^*(G) + \epsilon, \end{aligned}$$

e, sendo $\epsilon > 0$ arbitrário, concluímos

$$\nu(G) \leq \mu^*(G). \blacksquare$$

Corolário 5.2.1 *Suponha que a medida μ seja σ-finita em $\mathcal{J}$. Se ν é uma extensão de μ a $\overline{\mathcal{J}}$, então $\nu = \lambda$.*

Demonstração: Seja $G \in \overline{\mathcal{J}}$. Mostraremos em primeiro lugar que se $A \in \mathcal{J}$ for tal que $\mu(A) < \infty$, então

$$\nu(A \cap G) = \lambda(A \cap G). \tag{5.27}$$

Pelo Teorema (5.2.1) valem as desigualdades

$$\nu(A \cap G) \leq \lambda(A \cap G) \quad \text{e} \quad \nu(A \cap G^c) \leq \lambda(A \cap G^c).$$

Suponha que

$$\nu(A \cap G) < \lambda(A \cap G).$$

Lembrando que $\mu = \nu = \lambda$ em $\mathcal{J}$, temos

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \nu(A) = \nu(A \cap G) + \nu(A \cap G^c) \\ &< \lambda(A \cap G) + \lambda(A \cap G^c) \\ &= \lambda(A), \end{aligned}$$

o que contraria o fato que λ é uma extensão da μ de $\mathcal{J}$ a $\overline{\mathcal{J}}$. Isso prova (5.27)

Por outro lado, sendo μ σ-finita, existe uma sequência $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos dois a dois disjuntos em $\mathcal{J}$ tal que $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, com $\mu(F_n) < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} (G \cap F_n)$ usando a relação (5.27) com F_n em lugar de A, temos

$$\begin{aligned} \nu(G) &= \nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G \cap F_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(G \cap F_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(G \cap F_n) \\ &= \lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G \cap F_n)) = \lambda(G). \end{aligned}$$

Isso prova a unicidade da extensão. $\blacksquare$

Capítulo 6

Medidas regulares no sentido finito

Neste capítulo, nosso objetivo é obter através de μ uma medida regular em relação a conjuntos de medida finita e uma medida que assume somente os valores 0 e ∞. Estudaremos também as respectivas medidas exteriores e a relação entre estas aplicações.

6.1 Medidas f-regulares

Proposição 6.1.1 *Dado um conjunto $Y \subset X$, as seguintes afirmações são equivalentes*

a) $Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ *para alguma sequência* $(F_n)_{n \in N}$ *de* $\mathcal{J}^<$;

b) $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, *onde* $\mu^*(Y_n) < \infty$, *para cada* $n \in I\!N$.

Demonstração: Prova da implicação a) $\longrightarrow$b):

Se para alguma sequência $(F_n)_{n \in N}$ de $\mathcal{J}^<$ tem-se $Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, então $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (Y \cap F_n)$. Fazendo $Y_n = Y \cap F_n$, segue que $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, onde $\mu^*(Y_n) \leq \mu(F_n) < \infty$ para cada $n \in I\!N$.

Prova da implicação b) $\longrightarrow$a):

Sendo $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n$, com $\mu^*(Y_n) < \infty$, segue da definição de $\mu^*(Y_n)$ que, dado $\epsilon > 0$ existe uma sequência $(A_k^n)_{k\in N}$ de elementos de $\mathcal{J}$ tais que

$$Y_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^n \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k^n) < \mu^*(Y_n) + \epsilon. \tag{6.1}$$

Mas isto implica que $\mu(A_k^n) < \infty$ para cada k e para cada n. Logo, $A_k^n \in \mathcal{J}^<$. Portanto, de (6.1) tem-se

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^n.$$

Isso mostra a proposição. ■

Definição 6.1.1 *Se $Y \subset X$ for tal que a condição a) ou b), da proposição acima, é verificada diremos que Y é μ-σ-finito.*

Proposição 6.1.2 *Se $Y \in \mathcal{J}$ então Y é μ-σ-finito se, e somente se, existe uma sequência $(G_n)_{n\in N}$ de elementos de $\mathcal{J}^<$ tal que $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$.*

Demonstração: Suponhamos que $Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ onde $F_n \in \mathcal{J}^<$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F_n \cap Y)$ e $G_n = F_n \cap Y \in \mathcal{J}^<$.

A outra afirmação é clara. ■

Definição 6.1.2 *Para todo $E \in \mathcal{J}$, definimos*

$$\mu_0(E) = \sup\{\mu(F) : F \subset E,\ F \in \mathcal{J}^<\}.$$

Se $\mu_0 = \mu$ diremos que a aplicação μ é uma medida regular no sentido finito ou simplesmente f-regular.

Observação 6.1.1 *Se $F \in \mathcal{J}^<$ então $\mu_0(F) = \mu(F)$.*

Em geral, a medida μ não é f-regular, entretanto, sempre é possível decompô-la na soma de uma medida f-regular e uma medida que só assume valores 0 e ∞, como veremos no Teorema (6.1.3).

Definição 6.1.3 *Dado $E \in \mathcal{J}$, definimos*

$$\mu_\infty(E) = \begin{cases} 0, & \text{se } E \text{ for } \mu\text{-}\sigma\text{-finito;} \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Lema 6.1.1 *Sejam A e B conjuntos de $\mathcal{J}$ tais que $A \subset B$, então*

i) $\mu_0(A) \leq \mu_0(B)$;

ii) $\mu_\infty(A) \leq \mu_\infty(B)$.

Demonstração: Para a prova de i), pela definição de μ_0 temos

$$\begin{aligned} \mu_0(A) &= \sup\{\mu(F) : F \subset A,\ F \in \mathcal{J}^<\} \\ &\leq \sup\{\mu(F) : F \subset B,\ F \in \mathcal{J}^<\} = \mu_0(B). \end{aligned}$$

Para provar ii), consideremos os casos seguintes:

a) B é μ-σ-finito. Neste caso, pela Proposição (6.1.2) existe uma sequência $(F_n)_{n\in N}$ de conjuntos em $\mathcal{J}^<$ tal que $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Como $A = A \cap B = \bigcup_{n=1}^{\infty}(F_n \cap A)$, também A é σ-finito. Assim concluímos que $\mu_\infty(A) = \mu_\infty(B) = 0$.

b) B não é μ-σ-finito. Neste caso, $\mu_\infty(B) = \infty$. Logo, para qualquer $A \in \mathcal{J}$ verifica-se que $0 \leq \mu_\infty(A) \leq \mu_\infty(B) = \infty$. ∎

Lema 6.1.2 *A aplicação μ_0 definida em $\mathcal{J}$ é uma medida finitamente aditiva.*

Demonstração: Claramente, $\mu_0(\emptyset) = 0$. Sejam A e B conjuntos disjuntos em $\mathcal{J}$. Se $\mu_0(A) = \infty$, como $A \subset A \cup B$, pelo Lema (6.1.1), parte i) temos que

$$\mu_0(A \cup B) \geq \mu_0(A) = \infty.$$

Neste caso, vale trivialmente que

$$\mu_0(A \cup B) = \mu_0(A) + \mu_0(B). \tag{6.2}$$

Suponhamos então, que $\mu_0(A)$ e $\mu_0(B)$ sejam finitos. Segue da definição de μ_0 que, dado $\epsilon > 0$ existem F_1 e F_2 em $\mathcal{J}^<$ tais que $F_1 \subset A$, $F_2 \subset B$ e

$$\mu_0(A) - \epsilon/2 < \mu(F_1) \quad \text{e} \quad \mu_0(B) - \epsilon/2 < \mu(F_2),$$

e, observando que

$$F_1 \cap F_2 \subset A \cap B = \emptyset \text{ e } F_1 \cup F_2 \subset A \cup B,$$

temos

$$\begin{aligned} \mu_0(A) + \mu_0(B) - \epsilon &< \mu(F_1) + \mu(F_2) = \mu(F_1 \cup F_2) \\ &\leq \mu_0(A \cup B). \end{aligned}$$

Sendo $\epsilon > 0$ arbitrário, segue que, $\mu_0(A) + \mu_0(B) \leq \mu_0(A \cup B)$.

Mostremos a desigualdade contrária. Para cada $F \in \mathcal{J}^<$ tal que $F \subset A \cap B$ temos que $F = (F \cap A) \cup (F \cup B)$ e, portanto

$$\begin{aligned} \mu(F) &= \mu(F \cap A) + \mu(F \cap B) \\ &\leq \mu_0(A) + \mu_0(B). \end{aligned}$$

Segue de Definição (6.1.2) que

$$\mu_0(A \cup B) \leq \mu_0(A) + \mu_0(B).$$

Isso mostra (6.2) isto é, a aplicação μ_0 é finitamente aditiva. ∎

Teorema 6.1.1 *A aplicação μ_0 é uma medida enumeravelmente aditiva em $\mathcal{J}$.*

Demonstração: Bastará mostrar que dada uma sequência $(A_n)_{n \in N}$ em $\mathcal{J}$ de conjuntos dois a dois disjuntos, tem-se

$$\mu_0(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n). \tag{6.3}$$

Se $\mu_0(A_{n_0}) = \infty$ para algum n_0, pelo Lema (6.1.1), parte i), verifica-se trivialmente (6.3).

Suponhamos então, que $\mu_0(A_n) < \infty$ para cada $n \in I\!N$. Definamos $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ e seja $F \in \mathcal{J}^<$ tal que $F \subset A$.

Como $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} (F \cap A_n) \in \mathcal{J}$, pelo Lema (3.3.1) temos

$$\begin{aligned} \mu(F) &= \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} (F \cap A_n)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F \cap A_n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n). \end{aligned}$$

Segue da Definição (6.1.2) que

$$\mu_0(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(A_n).$$

Decorre do Teorema (1.1.1) que vale (6.3), o que prova o teorema. ■

Lema 6.1.3 *A aplicação μ_∞ definida em $\mathcal{J}$ é uma medida finitamente aditiva.*

Demonstração: É claro que $\mu_\infty(\emptyset) = 0$. Consideremos conjuntos A e B em $\mathcal{J}$ disjuntos. Se tivermos $\mu(A) = \infty$ como $A \subset A \cup B$, segue do Lema (6.1.1), parte ii), que $\mu_\infty(A \cup B) \geq \mu_\infty(A) = \infty$. Logo, para qualquer $B \in \mathcal{J}$ temos que

$$\mu_\infty(A \cup B) = \mu_\infty(A) + \mu_\infty(B). \tag{6.4}$$

No caso em que A e B são μ-σ-finitos, segue que $A \cup B$ é também μ-σ-finito, logo a igualdade (6.4) vale trivialmente. ■

Teorema 6.1.2 *A aplicação μ_∞ é uma medida enumeravelmente aditiva em $\mathcal{J}$.*

Demonstração: Será suficiente tomar uma sequência $(E_n)_{n\in N}$ em $\mathcal{J}$ de conjuntos dois a dois disjuntos e provar que

$$\mu_\infty(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\infty(E_n). \tag{6.5}$$

Se para algum E_{n_0} tem-se que $\mu_\infty(E_{n_0}) = \infty$, como $E_{n_0} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, pelo Lema (6.1.1), vê-se claramente que vale (6.5).

Assumamos agora que os conjuntos da sequência $(E_n)_{n\in N}$ sejam μ-σ-finitos, isto é, existem sequências $(A_j^n)_{j\in N}$ de conjuntos de $\mathcal{J}^<$ de maneira que

$$E_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^n, \ \forall\, n, j \in I\!N.$$

Então, por definição, para cada n temos que $\mu_\infty(E_n) = 0$.

Definamos os conjuntos $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ e B_n tais que $B_1 = A_1^1$, e para cada $n \geq 2$

$$B_n = A_n^1 \cup A_{n-1}^2 \cup \ldots \cup A_1^n.$$

Então, cada B_n é um elemento de $\mathcal{J}^<$, portanto o conjunto $\{B_n : n \in I\!N\}$ é uma família enumerável de conjuntos de $\mathcal{J}^<$ e

$$\begin{aligned} E &= \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j^n \\ &= \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k. \end{aligned}$$

Portanto, $\mu_\infty(E) = 0$. Isso prova a relação (6.5) e o teorema. ∎

Proposição 6.1.3 *Sejam μ_0 como na Definição 6.1.2) e $E \in \mathcal{J}$. Então*

i) $\mu_0(E) \leq \mu(E)$;

ii) se E for um elemento μ- σ-finito de $\mathcal{J}$ então $\mu_0(E) = \mu(E)$.

Demonstração: A prova de i) é direta. Dado $E \in \mathcal{J}$, seja $F \in \mathcal{J}^<$ tal que $F \subset E$. Como $\mu(F) \leq \mu(E)$, é imediato que

$$\sup\{\mu(F) : F \subset E, F \in \mathcal{J}^<\} = \mu_0(E) \leq \mu(E).$$

Para a prova de ii), seja $\mu(E) < \infty$; logo $E \in \mathcal{J}^<$, e como vimos na Observação(6.1.1), $\mu_0(E) = \mu(E)$.

Se E for μ-σ-finito, então existe uma sequência $(E_n)_{n\in N}$ em $\mathcal{J}^<$ de conjuntos dois a dois disjuntos tal que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Segue do Teorema (6.1.1) e da hipótese que μ é enumeravelmente aditiva em $\mathcal{J}$ que

$$\begin{aligned} \mu_0(E) &= \mu_0\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) \\ &= \mu(E). \end{aligned}$$

Isso prova a proposição. ∎

Teorema 6.1.3 *Para cada $E \in \mathcal{J}$ tem-se*

$$(i) \quad \mu(E) = \mu_0(E) + \mu_\infty(E).$$

Demonstração: Pela Proposição (6.1.3) temos que se $E \in \mathcal{J}$ for μ-σ-finito, então $\mu_0(E) = \mu(E)$ e como $\mu_\infty(E) = 0$, vale trivialmente a identidade (i).

Se E não for μ-σ-finito, então $\mu(E) = \infty$. Por outro lado, pela Definição (6.1.3) também $\mu_\infty(E) = \infty$ e, portanto, (i) é verdadeira qualquer que seja $\mu_0(E)$. ∎

Proposição 6.1.4 *A aplicação μ_0 é f-regular em $\mathcal{J}$, isto é, $(\mu_0)_0 = \mu_0$.*

Demonstração: Lembrando da Observação (6.1.1) que $\mu_0(F) = \mu(F)$ para $F \in \mathcal{J}^<$, temos

$$\begin{aligned}(\mu_0)_0(E) &= \sup\{\mu_0(F) : F \subset E, F \in \mathcal{J}^<\}\\ &= \sup\{\mu(F) : F \subset E, F \in \mathcal{J}^<\}\\ &= \mu_0(E). \blacksquare\end{aligned}$$

Proposição 6.1.5 *A aplicação μ_∞ definida em $\mathcal{J}$ satisfaz $(\mu_\infty)_\infty = \mu_\infty$.*

Demonstração: Por definição, temos que dado $E \in \mathcal{J}$,

$$(\mu_\infty)_\infty(E) = \begin{cases} 0, & \text{se } E \text{ for } \mu_\infty\text{-}\sigma\text{-finito;} \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Se E é μ_∞-σ-finito, então $\mu_\infty(E) = 0$ e também $(\mu_\infty)_\infty(E) = 0$.

Se E não é μ_∞-σ-finito, então $(\mu)_\infty(E) = \infty$ e também $(\mu_\infty)_\infty(E) = \infty$. $\blacksquare$

6.2 A topologia $\mathcal{I}_0$ gerada por ${\mu_0}^*$

Sendo μ_0 uma medida enumeravelmente aditiva em $\mathcal{J}$, ${\mu_0}^*$ é a medida exterior definida a partir de μ_0 como no Lema (1.4.1).

Mostraremos que a topologia $\mathcal{I}_0$, definida a partir da medida exterior ${\mu_0}^*$ como no Capítulo 2 torna esta aplicação uma medida, quando restrita a $\overline{\mathcal{J}}$.

Denotaremos por

$$\mathcal{J}_0^< = \{F \in \mathcal{J} : \mu_0(F) < \infty\}, \ \rho_F(A, B) = {\mu_0}^*(F \cap (A \triangle B)),$$

e os abertos básicos de $\mathcal{I}_0$ por

$$\mathcal{V}_{F,\epsilon}(A) = \{Y \in \mathcal{P}(X) : \rho_F(A, B) < \epsilon\},$$

para cada $F \in \mathcal{J}_0^<$, e $\epsilon > 0$.

Lema 6.2.1 *Sejam $Y \subset X$ tal que $\mu^*(Y) < \infty$ e μ_0 como na Definição (6.1.2). Então ${\mu_0}^*(Y) = \mu^*(Y)$.*

Demonstração: Decorre da Proposição (6.1.3), parte i), que ${\mu_0}^*(Y) \leq \mu^*(Y)$.

Suponha por absurdo que ${\mu_0}^*(Y) < \mu^*(Y)$. Então existe uma sequência $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{J}$ tal que $Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ e

$$ {\mu_0}^*(Y) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) < \mu^*(Y), \tag{6.6} $$

Sendo $\mu^*(Y) < \infty$, dado $\epsilon = 1$, existe uma sequência $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{J}$ tal que

$$ Y \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) + 1 $$

observemos que os $A_k's$ estão em $\mathcal{J}^<$. Portanto

$$ Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} E_n \cap A_k = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m. $$

Como $F_m \subset A_k$ para algum k, segue que $F_m \in \mathcal{J}^<$ para cada $m \in \mathbb{N}$. Assim, pela Proposição(6.1.3), parte ii), temos $\mu_0(F_m) = \mu(F_m)$ para todo $m \in \mathbb{N}$; lembrando que $F_m \subset E_n$ para algum n, segue da relação (6.6) que

$$ \begin{aligned} {\mu_0}^*(Y) &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \mu_0(F_m) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(F_m) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(E_n) < \mu^*(Y), \end{aligned} $$

o que contradiz a definição de $\mu^*(Y)$.

Isso prova que $\mu^*(Y) = {\mu_0}^*(Y)$. ■

Lembramos que, pela Observação (6.1.1) $\mathcal{J}^< \subset \mathcal{J}_0^<$. No entanto, podemos ter $\mathcal{J}^< \neq \mathcal{J}_0^<$.

O seguinte exemplo nos ilustra que podemos ter um conjunto μ_0-σ-finito embora não seja μ-σ-finito, como veremos a seguir.

Exemplo 6.2.1 *Consideremos X um conjunto não-vazio e a álgebra $\mathcal{J} = \{\emptyset, X\}$ e, seja a medida μ definida por*

$$ \mu(Y) = \begin{cases} 0, & se\ Y = \emptyset; \\ \infty, & se\ Y = X. \end{cases} $$

Neste caso, observamos que $\mathcal{J}^< = \{\emptyset\}$ e, portanto, segue da definição de μ_0 que

$$\mu_0(X) = \sup\{\mu(\emptyset) : \emptyset \subset X\} = 0.$$

Consequentemente, temos que X é um conjunto μ_0-σ-finito, mesmo que X não seja μ-σ-finito.

Observemos também que $\mathcal{J}_0^< = \{\emptyset, X\}$.

Isso mostra que $\mathcal{J}_0^< \neq \mathcal{J}^<$. ■

Teorema 6.2.1 *A topologia $\mathcal{I}_0$ obtida através de ${\mu_0}^*$ coincide com a topologia $\mathcal{I}$.*

Demonstração: Mostraremos o teorema provando que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0$.

Provemos que $\mathcal{I} \subset \mathcal{I}_0$. Seja U aberto na topologia $\mathcal{I}$, $U \neq \emptyset$. Se $Y \in U$, então existem $F \in \mathcal{J}^<, \epsilon > 0$ tais que

$$\mathcal{U}_{F,\epsilon}(Y) \subset U. \tag{6.7}$$

Queremos mostrar que existem $G \in \mathcal{J}_0^<$ e $\delta > 0$ tais que

$$\mathcal{V}_{G,\delta}(Y) \subset \mathcal{U}_{F,\epsilon}(Y). \tag{6.8}$$

Como $F \in \mathcal{J}_0^<$, basta considerar $G = F$ e $\delta = \epsilon$. De fato, se $T \in \mathcal{V}_{F,\epsilon}(Y)$ então $\rho_F(Y \triangle T) < \epsilon$ e usando o Lema (6.2.1), temos

$$\begin{aligned} \rho_F(Y \triangle T) &= {\mu_0}^*(F \cap (Y \triangle T)) = \mu^*(F \cap (Y \triangle T)) \\ &= d_F(Y, T) < \epsilon, \end{aligned}$$

o que implica que $T \in \mathcal{U}_{F,\epsilon}(Y)$. Usando (6.7) prova-se (6.8).

Reciprocamente, mostraremos que $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}$ provando que um aberto de $\mathcal{I}_0$ é também um aberto na topologia $\mathcal{I}$.

Seja U aberto não-vazio em $\mathcal{I}_0$. Se $Y \in U$, existem $G \in \mathcal{J}_0^<$ e $\epsilon > 0$ tais que

$$\mathcal{V}_{G,\epsilon}(Y) \subset U.$$

Mostraremos que existem $F \in \mathcal{J}^<$ e $\delta > 0$ tais que $\mathcal{U}_{F,\delta}(Y) \subset \mathcal{V}_{G,\epsilon}(Y)$.

Se $G \in \mathcal{J}^<$, bastará tomar $F = G$ e $\delta = \epsilon$, tal como acima.

Suponhamos, então que $G \notin \mathcal{J}^<$; sendo $\mu_0(G) < \infty$, segue da definição de μ_0 que dado $\epsilon > 0$ existe $F \in \mathcal{J}^<$ tal que $F \subset G$ e

$$\mu_0(G) - \epsilon/2 < \mu(F) \quad \text{ou} \quad \mu_0(G) - \mu(F) < \epsilon/2. \tag{6.9}$$

Queremos provar que

$$\mathcal{U}_{F,\epsilon/2}(Y) \subset \mathcal{V}_{G,\epsilon}(Y). \tag{6.10}$$

De fato, se $T \in \mathcal{U}_{F,\epsilon/2}(Y)$, segue que $d_F(Y,T) < \epsilon/2$, ou que

$$\mu^*(F \cap (Y \triangle T)) < \epsilon/2. \tag{6.11}$$

Por outro lado, da identidade $G = F \cup (G \cap F^c)$ e usando a relação (6.9), temos que $\mu_0(G) = \mu_0(F) + \mu_0(G \cap F^c)$ e

$$\begin{aligned} \mu_0(G \cap F^c) &= \mu_0(G) - \mu_0(F) \\ &= \mu_0(G) - \mu(F) < \epsilon/2. \end{aligned}$$

Usando esta desigualdade e (6.9) temos

$$\begin{aligned} \rho_G(Y,T) &= \mu_0{}^*(G \cap (Y \triangle T)) \\ &\leq \mu_0{}^*(F \cap (Y \triangle T)) + \mu_0{}^*((G \cap F^c) \cap (Y \triangle T)) \\ &\leq \mu^*(F \cap (Y \triangle T)) + \mu_0{}^*(G \cap F^c) \\ &= \mu^*(F \cap (Y \triangle T)) + \mu_0(G \cap F^c) \\ &< \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\rho_G(Y,T) < \epsilon$, significando que $T \in \mathcal{V}_{G,\epsilon}(Y)$. Isso prova a inclusão (6.10) e o teorema. ■

Como consequência deste teorema, enunciamos o teorema abaixo cuja prova é similar ao Teorema (3.3.2).

Teorema 6.2.2 *A aplicação $\mu_0{}^*$ definida em $\mathcal{P}(X)$ é enumeravelmente aditiva em $\overline{\mathcal{J}}$ e, portanto, é uma medida.*

Demonstração: Pelo teorema acima, aplica-se o Teorema (3.3.2) para a medida exterior μ_0. ■

Corolário 6.2.1 *Se Y é um subconjunto de X, μ-σ-finito, então $\mu_0{}^*(Y) = \mu^*(Y)$.*

Demonstração: Decorre da Proposição (6.1.3), parte i), que $\mu_0{}^*(Y) \leq \mu^*(Y)$ e pelo Lema (6.2.1) que $\mu^*(Y) = \mu_0{}^*(Y)$ se $\mu^*(Y) < \infty$.

Sendo Y μ-σ-finito, pela Proposição (6.1.1), existe uma sequência em $(F_n)_{n\in N}$ em $\mathcal{J}^<$ de conjuntos dois a dois disjuntos tal que $Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Usando o Teorema (3.3.3) tanto para μ^* como para $\mu_0{}^*$, temos

$$\begin{aligned}
\mu^*(Y) &= \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}(Y \cap F_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Y \cap F_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0{}^*(Y \cap F_n) = \mu_0{}^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}(Y \cap F_n)). \\
&= \mu_0{}^*(Y).
\end{aligned}$$

Isso prova o corolário. ■

6.3 A topologia $\mathcal{I}_\infty$ gerada por μ_∞^*

Nesta secção mostraremos que a topologia $\mathcal{I}_\infty$ definida a partir da medida exterior μ_∞^* torna esta aplicação uma medida em $\mathcal{P}(X)$.

Lema 6.3.1 *Dados $Y \in \mathcal{P}(X)$ e μ_∞^*, então*

$$\mu_\infty^*(Y) = \begin{cases} 0, & se\ Y\ for\ \mu\text{-}\sigma\text{-}finito; \\ \infty, & caso\ contrário. \end{cases}$$

Demonstração: Consideremos o caso em que Y é μ-σ-finito; neste caso existe uma sequência $(F_n)_{n\in N}$ de elementos de $\mathcal{J}^<$ tal que $Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\mu_\infty^*(Y) &\leq \mu_\infty^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\infty(F_n) = 0.
\end{aligned}$$

Resta provar que se Y não é μ-σ-finito, então $\mu_\infty^*(Y) = \infty$. Suponhamos que $\mu_\infty^*(Y) < \infty$; segue da definição de $\mu_\infty *$ que, dado $\epsilon > 0$ existe uma sequência $(E_n)_{n\in N}$ em $\mathcal{J}$ tal que

$$Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu_\infty(E_n) < \mu_\infty^*(Y) + \epsilon. \tag{6.12}$$

Então $\mu_\infty(E_n) < \infty$, e decorre da Definição (6.1.3) que $\mu_\infty(E_n) = 0$, para cada $n \in I\!N$. Portanto, pela Proposição (6.1.2), existe uma sequência $(F_k)_{k\in N}$ em $\mathcal{J}^<$ tal que

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^n$$

e

$$Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k^n.$$

Logo, Y seria μ-σ-finito e $\mu_\infty(Y) = 0$, o que contraria que Y não é μ-σ-finito. ∎

Observação 6.3.1 *A família $\mathcal{J}_\infty^<$ está constituída pelos conjuntos μ-σ finitos de $\mathcal{J}$.*

Teorema 6.3.1 *A topologia gerada por μ_∞^* em $\mathcal{P}(X)$ é indiscreta e, portanto, o fecho de $\mathcal{J}$ na topologia $\mathcal{I}_\infty$ é $\mathcal{P}(X)$, isto é,*

$$\overline{\mathcal{J}} = \mathcal{P}(X).$$

Demonstração: A prova decorre do fato que o espaço $\mathcal{P}(X)$ é o único conjunto aberto em $\mathcal{I}_\infty$. Com efeito, dados os conjuntos Y e Z em $\mathcal{P}(X)$ e $F \in \mathcal{J}_\infty^<$, temos que $\mu_\infty^*(F \cap (Y \Delta Z)) \leq \mu_\infty^*(F) = 0$. Portanto, o único aberto básico centrado em $B \in \mathcal{P}(X)$, esta dado por

$$\mathcal{V}_F(B) = \{Y \in \mathcal{P}(X) : d_F(B, Y) = 0 < \epsilon\} = \mathcal{P}(X),$$

para cada $F \in \mathcal{J}_\infty^<$ e cada $\epsilon > 0$. ∎

Teorema 6.3.2 *A aplicação μ_∞^* é uma medida em $\mathcal{P}(X)$.*

Demonstração: Lembrando os Teoremas (6.2.1) e (6.3.1) aplicamos o Teorema (3.3.2) a μ_∞^*. ∎

Teorema 6.3.3 *Dadas as aplicações μ^*, μ_0^* e μ_∞^*, vale a seguinte relação $\mu^* = \mu_0^* + \mu_\infty^*$.*

Demonstração: Queremos mostrar que

$$\mu^*(Y) = \mu_0^*(Y) + \mu_\infty^*(Y), \quad \forall \ Y \in \mathcal{P}(X). \tag{6.13}$$

Se $Y \subset X$ for μ-σ-finito, então pelo Lema (6.3.1) temos que $\mu^*(Y) = \mu_0^*(Y)$; como por definição $\mu_\infty^*(Y) = 0$, trivialmente vale (6.13).

Se $Y \subset X$ não for μ-σ-finito, pelo Lema (6.3.1) temos $\mu_\infty^*(Y) = \infty$. É claro que se $\mu^*(Y) < \infty$ então Y seria μ-σ-finito; logo $\mu^*(Y) = \infty$ e (6.13) vale também neste caso. ∎

Capítulo 7

Extensão mínima de uma medida

O objetivo deste capítulo é mostrar que uma medida regular no sentido finito admite uma extensão mínima de $\mathcal{J}$ a $\overline{\mathcal{J}}$.

7.1 Propriedades de uma medida f-regular

Nesta seção, mostraremos algumas propriedades da medida μ admitindo que ela seja f-regular, isto é, que $\mu_0 = \mu$. Com estes resultados mostraremos na próxima seção que existe uma extensão mínima para μ de $\mathcal{J}$ a $\overline{\mathcal{J}}$.

Definição 7.1.1 *Seja a aplicação* $\hat{\mu} : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ *definida por*

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(Y) &= \sup\{\mu^*(Y \cap F) : F \in \mathcal{J}^<\} \\ &= \sup\{\mu_0{}^*(Y \cap F) : F \in \mathcal{J}^<\} \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade decorre do Lema (6.2.1).

Proposição 7.1.1 *A aplicação* $\hat{\mu}$ *é uma medida exterior em* $\mathcal{P}(X)$.

Demonstração: Observemos que a expressão do lado direito da Definição (7.1.1) está bem definida, já que pelo menos existe $\emptyset \in \mathcal{J}^<$. Assim, $\hat{\mu}$ é uma aplicação definida em $\mathcal{P}(X)$ assumindo valores em $[0, \infty]$.

Para mostrar que $\hat{\mu}$ é uma medida exterior bastará mostrar as condições da Definição (1.3.1).

Claramente, $\hat{\mu}(\emptyset) = 0$. Se $A \subset B \subset X$ e se $F \in \mathcal{J}^{<}$, então $\mu^*(A \cap F) \leq \mu^*(B \cap F)$. Decorre da definição que $\hat{\mu}(A) \leq \hat{\mu}(B)$.

Para mostrar a σ-subaditividade de $\hat{\mu}$, consideremos $(A_n)_{n \in N}$ uma sequência de conjuntos de $\mathcal{P}(X)$. Mostraremos que

$$\hat{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}(A_n). \tag{7.1}$$

Se $F \in \mathcal{J}^{<}$ como $\mu^*(A_n \cap F) \leq \hat{\mu}(A_n)$, para cada $n \in I\!N$, então

$$\begin{aligned} \mu^*((\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap F)) &= \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap F)) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n \cap F) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}(A_n). \end{aligned}$$

Segue da definição de $\hat{\mu}$ que

$$\hat{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sup\{\mu^*((\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap F) : F \in \mathcal{J}^{<}\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}(A_n),$$

o que prova a relação (7.1). Isso prova a proposição. ■

Lema 7.1.1 *Temos:*

i) a restrição de $\hat{\mu}$ a $\mathcal{J}$ é μ_0, isto é, $\hat{\mu}(E) = \mu_0(E)$, se $E \in \mathcal{J}$;

ii) a restrição de $\hat{\mu}$ a $\mathcal{J}^{<}$ é μ, isto é, $\hat{\mu}(F) = \mu(F)$, se $F \in \mathcal{J}^{<}$.

Demonstração: Prova de i):

Seja $E \in \mathcal{J}$; fazendo $G = E \cap F$ e lembrando que $\mu^*(E) = \mu(E)$ temos

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(E) &= \sup\{\mu^*(E \cap F) : F \in \mathcal{J}^{<}\} = \sup\{\mu(E \cap F) : F \in \mathcal{J}^{<}\} \\ &= \sup\{\mu(G) : G \subset E,\ G \in \mathcal{J}^{<}\} \\ &= \mu_0(E). \end{aligned}$$

Prova de ii):

Por i) temos que $\hat{\mu}(E) = \mu_0(E)$, se $E \in \mathcal{J}$. Segue da Proposição (6.1.3), parte ii), que se $F \in \mathcal{J}^{<}$ então $\mu_0(F) = \mu(F)$. Portanto, provamos que $\hat{\mu}(F) = \mu(F)$ se $F \in \mathcal{J}^{<}$. ■

Proposição 7.1.2 *Dados $Y \in \mathcal{P}(X)$ e $F \in \mathcal{J}^{<}$, então*

$$\hat{\mu}(Y \cap F) = \mu^*(Y \cap F) = \mu_0^*(Y \cap F).$$

Demonstração: A igualdade da direita, decorre do Lema (6.2.1).

Para mostrar a primeira igualdade, pela definição de $\hat{\mu}$, temos $\hat{\mu}(Y \cap F) = \sup\{\mu^*((Y \cap F) \cap G) : G \in \mathcal{J}^<\}$; tomando-se $F = G$, é evidente que, $\mu^*(Y \cap F) \leq \hat{\mu}(Y \cap F)$.

Mostraremos a desigualdade contrária, isto é,

$$\hat{\mu}(Y \cap F) \leq \mu^*(Y \cap F). \tag{7.2}$$

Sendo $\mu^*(Y \cap F) < \infty$, seja $(F_n)_{n \in N}$ uma sequência em $\mathcal{J}$ tal que $Y \cap F \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$. Portanto, usando a Proposição (7.1.1), o Lema (7.1.1), parte i) e a Proposição (6.1.3), parte i), temos

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(Y \cap F) &\leq \hat{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}(F_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_0(F_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n). \end{aligned}$$

Por conseguinte, tomando o ínfimo de todas as somas das coberturas de $Y \cap F$, prova-se a relação (7.2). Isso prova a proposição. ■

Proposição 7.1.3 *Sejam $Y \in \mathcal{P}(X)$ e $(A_n)_{n \in N}$ uma sequência de conjuntos de $\mathcal{J}$, dois a dois disjuntos. Então*

$$\hat{\mu}(Y \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}(Y \cap A_n).$$

Demonstração: Pela Proposição (7.1.1) temos que $\hat{\mu}$ é uma medida exterior, logo, vale

$$\hat{\mu}(Y \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}(Y \cap A_n).$$

Para provar a desigualdade contrária, se $\hat{\mu}(Y \cap A_{n_0}) = \infty$ para algum n_0 o resultado é trivialmente válido. Suponhamos portanto que $\hat{\mu}(Y \cap A_n) < \infty$, para cada $n \in I\!N$.

Primeiramente consideremos o caso particular quando $n = 2$. Sejam A_1 e A_2 elementos de $\mathcal{J}$ disjuntos. Queremos mostrar que

$$\hat{\mu}(Y \cap A_1) + \hat{\mu}(Y \cap A_2) = \hat{\mu}(Y \cap (A_1 \cup A_2)). \tag{7.3}$$

Dado $\epsilon > 0$ existem F_1 e F_2 em $\mathcal{J}^<$ tais que

$$\hat{\mu}(Y \cap A_1) - \frac{\epsilon}{2} < \mu^*(Y \cap A_1 \cap F_1)$$

e

$$\hat{\mu}(Y \cap A_2) - \frac{\epsilon}{2} < \mu^*(Y \cap A_2 \cap F_2).$$

Portanto, da relação

$$Y \cap A_1 \cap (F_1 \cup F_2) \supset Y \cap A_1 \cap F_1$$

temos que

$$\hat{\mu}(Y \cap A_1) - \frac{\epsilon}{2} < \mu^*(Y \cap A_1 \cap (F_1 \cup F_2).$$

Similarmente

$$\hat{\mu}(Y \cap A_2) - \frac{\epsilon}{2} < \mu^*(Y \cap A_2 \cap (F_1 \cup F_2)).$$

Logo, usando o Teorema (3.3.3) e a definição de $\hat{\mu}$

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(Y \cap A_1) + \hat{\mu}(Y \cap A_2) - \epsilon &< \mu^*(Y \cap A_1 \cap (F_1 \cup F_2) + \mu^*(Y \cap A_2 \cap (F_1 \cup F_2)) \\ &= \mu^*[Y \cap (A_1 \cup A_2) \cap (F_1 \cup F_2)] \\ &\leq \hat{\mu}[Y \cap (A_1 \cup A_2)]. \end{aligned}$$

Fazendo ϵ tender a zero, obtemos

$$\hat{\mu}(Y \cap A_1) + \hat{\mu}(Y \cap A_2) \leq \hat{\mu}[Y \cap (A_1 \cup A_2)].$$

Decorre da Proposição (7.1.1) que vale a igualdade (7.3).

Para mostrar o caso geral, seja $(A_n)_{n \in N}$ uma sequência de conjuntos de $\mathcal{J}$, dois a dois disjuntos.

Para cada $k \in I\!N$ temos

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k} \hat{\mu}(Y \cap A_n) &= \hat{\mu}[Y \cap (\bigcup_{n=1}^{k} A_n)] \\ &\leq \hat{\mu}[Y \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)] \end{aligned}$$

e, portanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}(Y \cap A_n) \leq \hat{\mu}(Y \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)).$$

Decorre da Proposição (7.1.1) que vale a igualdade. Isso prova a proposição. ∎

Proposição 7.1.4 *Dado $Y \in \mathcal{P}(X)$ então*

i) $\hat{\mu}(Y) \leq \mu_0^*(Y) \leq \mu^*(Y)$, *para cada* $Y \subset X$;

ii) se $\mu^*(Y) < \infty$ *ou* Y *for* μ-σ-*finito então* $\hat{\mu}(Y) = \mu^*(Y)$.

Demonstração: Prova de i):

A primeira desigualdade decorre da definição de $\hat{\mu}$. A segunda desigualdade decorre da definição de μ^* e μ_0^* e usando a Proposição (6.1.3), parte i).

Prova de ii):

Em qualquer caso, pela Proposição (6.1.1), existe uma sequência $(F_n)_{n\in N}$ tal que $Y \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, então, usando o Teorema (3.3.3) e a Proposição (7.1.3), temos

$$\begin{aligned} \mu^*(Y) &= \mu^*(Y \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Y \cap F_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \hat{\mu}(Y \cap F_n) = \hat{\mu}(\bigcup_{n=1}^{\infty} (Y \cap F_n)) \\ &= \hat{\mu}(Y). \end{aligned}$$

Isso conclui a prova da proposição. ∎

Proposição 7.1.5 *Dado $Y \in \mathcal{P}(X)$, valem as igualdades*

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(Y) &= \sup\{\hat{\mu}(Z) : Z \subset Y, \hat{\mu}(Z) < \infty\} \\ &= \sup\{\hat{\mu}(T) : T \subset Y, \mu^*(T) < \infty\} \end{aligned}$$

Demonstração: Mostremos a primeira igualdade.

Como $Z \subset Y$ então $\hat{\mu}(Z) \leq \hat{\mu}(Y)$ e, portanto, é imediato que

$$\sup\{\hat{\mu}(Z) : Z \subset Y, \hat{\mu}(Z) < \infty\} \leq \hat{\mu}(Y).$$

Para a desigualdade contrária, suponhamos por absurdo que

$$\sup\{\hat{\mu}(Z) : Z \subset Y, \hat{\mu}(Z) < \infty\} < \hat{\mu}(Y). \tag{7.4}$$

Logo, existe $F_0 \in \mathcal{J}^<$ tal que

$$\sup\{\hat{\mu}(Z) : Z \subset Y, \hat{\mu}(Z) < \infty\} < \mu^*(Y \cap F_0). \tag{7.5}$$

Por outro lado, seja $Z_0 = Y \cap F_0$; portanto $Z_0 \subset Y$ e $\hat{\mu}(Z_0) < \infty$. Segue da definição de $\hat{\mu}$ e da Proposição (7.1.2), que

$$\begin{aligned} \sup\{\hat{\mu}(Z) : Z \subset Y, \hat{\mu}(Z) < \infty\} &\geq \hat{\mu}(Z_0) = \hat{\mu}(Y \cap F_0) \\ &= \mu^*(Y \cap F_0), \end{aligned}$$

o que contraria (7.5) assim, a suposição (7.4) é falsa. Isso prova a igualdade.

A segunda igualdade é imediata, bastando substituir T por Z, e lembrando que $\hat{\mu}(T) = \mu^*(Y)$ quando $\mu^*(Y) < \infty$. ∎

Proposição 7.1.6 *A aplicação $\hat{\mu}$ é tal que*

$$\hat{\mu}(\, X \setminus (\bigcup_{F \in \mathcal{J}^<} F)\,) = 0.$$

Demonstração: Seja $Y = X \setminus (\bigcup_{F \in \mathcal{J}^<} F)$, então

$$\begin{aligned} Y &= X \setminus (\bigcup_{F \in \mathcal{J}^<} F) = X \cap (\bigcup_{F \in \mathcal{J}^<} F)^c \\ &= X \cap (\bigcap_{F \in \mathcal{J}^<} F^c). \end{aligned}$$

Dado $G \in \mathcal{J}^<$, como $\bigcap_{F \in \mathcal{J}^<} F^c \subset G^c$, temos

$$\begin{aligned} \mu^*(Y \cap G) &= \mu^*[(X \cap (\bigcap_{F \in \mathcal{J}^<} F^c)) \cap G] \\ &\leq \mu^*(X \cap G^c \cap G) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, sendo G arbitrário, segue da definição que $\hat{\mu}(Y) = 0$. ∎

O resultado acima não implica que se $A \in \mathcal{P}(X)$ for tal que $\hat{\mu}(A) = 0$ se tenha que $A = \emptyset$, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 7.1.1 *Consideremos $X = \beta I\!N$, a compactificação de Stone-Čech do espaço discreto $I\!N = \{1, 2, 3...\}$ (ver em [2], pag.129), e $\mathcal{J}$ a família dos subconjuntos aberto-fechados de X, isto é,*

$$\mathcal{J} = \{E \subset \beta I\!N : E \;\; \textit{é aberto-fechado}\}$$

e, seja μ definida por

$$\mu(E) = ||E \cap I\!N||.$$

Então, $\mathcal{J}$ é uma álgebra de subconjuntos de X e μ é uma medida enumeravelmente aditiva em $\mathcal{J}$.

Em primeiro lugar, sabe-se que o conjunto $\beta I\!N \setminus I\!N$ contém uma família de conjuntos aberto-fechados não-vazios.

Afirmamos que $\beta I\!N \setminus I\!N$ não pertence a $\mathcal{J}$ e, portanto, $I\!N \notin \mathcal{J}$, como veremos a seguir

Decorre do Corolário(3.5.4) de ([2], pag.130), que $\{n\} = \overline{\{n\}}$, isto é, cada conjunto é aberto-fechado em $\beta I\!N$, para cada $n \in I\!N$. Sendo $I\!N = \bigcup_{n \in N} \{n\}$, segue-se que $I\!N$ é aberto, porém não é fechado (caso contrário teríamos $\overline{I\!N} = I\!N$). Assim, $I\!N \notin \mathcal{J}$ e, portanto, $\beta I\!N \setminus I\!N$ é fechado e não pertence a $\mathcal{J}$.

Decorre da definição de μ, que se $A \in \mathcal{J}$, $A \neq \emptyset$ e $A \subset \beta I\!N \setminus I\!N$ então $A \cap I\!N = \emptyset$, logo

$$\mu(A) = ||A \cap I\!N|| = 0.$$

Assim, para cada $A \in \mathcal{J}$, temos

$$A = (A \cap N) \cup [(A \cap (\beta I\!N \setminus I\!N))].$$

Portanto, $A \cap I\!N$ é enumerável e pela observação feita acima

$$\mu(A \cap I\!N) = ||A \cap I\!N \cap I\!N|| = \mu(A). \tag{7.6}$$

Mostraremos que $\mathcal{J}^{<}$ é a família constituída de todos os subconjuntos finitos de $I\!N$, isto é,

$$\mathcal{J}^{<} = \{F \in \mathcal{J} : F \subset I\!N, \quad F \text{ finito } \}.$$

Seja $F \in \mathcal{J}^{<}$, então $\mu(F) < \infty$, sendo $F \cap I\!N$ enumerável, pela relação (7.6), temos $||F \cap I\!N|| < \infty$, segue-se portanto $F \subset I\!N$ e F é um conjunto finito.

Isso mostra que

$$\bigcup_{F \in \mathcal{J}^{<}} F = I\!N \neq \beta I\!N.$$

Em particular, dado $A \in \mathcal{J}$, sendo $A \cap \mathbb{N}$ enumerável, temos

$$A \cap \mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \{n_i\}, \ n_i \in \mathbb{N}.$$

Lembrando que $\mu = \mu_0$ em $\mathcal{J}^<$, é evidente que μ é f-regular. ∎

7.2 Uma extensão de uma medida f-regular

Nesta seção mostraremos que a medida μ_0 admite uma extensão mínima ν de $\mathcal{J}$ a $\overline{\mathcal{J}}$.

Teorema 7.2.1 *A aplicação $\hat{\mu}$ definida em $\mathcal{P}(X)$ é finitamente aditiva em $\overline{\mathcal{J}}$.*

Demonstração: Sejam H_1 e H_2 conjuntos de $\overline{\mathcal{J}}$ disjuntos e seja $H = H_1 \cup H_2$. Queremos provar que

$$\hat{\mu}(H) = \hat{\mu}(H_1) + \hat{\mu}(H_2). \tag{7.7}$$

Sendo $\hat{\mu}$ uma medida exterior bastará provar que

$$\hat{\mu}(H) \geq \hat{\mu}(H_1) + \hat{\mu}(H_2). \tag{7.8}$$

Se $\hat{\mu}(H_i) = \infty$ para $i = 1, 2$ ou $\hat{\mu}(H) = \infty$, vale trivialmente (7.8).

Suponhamos que $\hat{\mu}(H) < \infty$, por conseguinte, $\hat{\mu}(H_i) < \infty$ para $i = 1, 2$. Segue da definição de $\hat{\mu}$ que dado $\epsilon > 0$ existem F_1 e F_2 em $\mathcal{J}^<$ tais que

$$\hat{\mu}(H_1) - \epsilon/2 < \mu^*(H_1 \cap F_1) \tag{7.9}$$

e

$$\hat{\mu}(H_2) - \epsilon/2 < \mu^*(H_2 \cap F_2). \tag{7.10}$$

Como $H_2 \cap (F_1 \cup F_2) = (H_2 \cap F_1) \cup (H_2 \cap F_2) \supset H_2 \cap F_2$, por (7.10), temos

$$\hat{\mu}(H_2 \cap (F_1 \cup F_2)) \geq \hat{\mu}(H_2 \cap F_2) = \mu^*(H_2 \cap F_2) > \hat{\mu}(H_2) - \epsilon/2. \tag{7.11}$$

Similarmente, para H_1, usando (7.9), obtemos

$$\hat{\mu}(H_1 \cap (F_1 \cup F_2)) \geq \hat{\mu}(H_1 \cap F_1) = \mu^*(H_1 \cap F_1) > \hat{\mu}(H_1) - \epsilon/2. \tag{7.12}$$

Portanto, segue da identidade

$$H \cap (F_1 \cup F_2) = (H_1 \cup H_2) \cap (F_1 \cup F_2) = (H_1 \cap (F_1 \cup F_2)) \cup (H_2 \cap (F_1 \cup F_2)),$$

da definição de $\hat{\mu}$, do Teorema (3.3.1) e das relações (7.12) e (7.10) que

$$\begin{aligned} \hat{\mu}(H) &\geq \mu^*(H \cap (F_1 \cup F_2)) \\ &= \mu^*(H_1 \cap (F_1 \cup F_2)) + \mu^*(H_2 \cap (F_1 \cup F_2)) \\ &> \hat{\mu}(H_1) + \hat{\mu}(H_2) - \epsilon. \end{aligned}$$

Sendo $\epsilon > 0$ arbitrário, vale (7.8) e, portanto, (7.7); isso prova o teorema. ■

Corolário 7.2.1 *A aplicação $\hat{\mu}$ é enumeravelmente aditiva em $\overline{\mathcal{J}}$, sendo uma extensão de μ_0 de $\mathcal{J}$ a $\overline{\mathcal{J}}$.*

Demonstração: Pela Proposição (7.1.1), $\hat{\mu}$ é uma medida exterior, pelo Teorema (7.2.1) é finitamente aditiva em $\overline{\mathcal{J}}$; aplicando o Teorema (1.1.1) temos que $\hat{\mu}$ é enumeravelmente aditiva em $\overline{\mathcal{J}}$.

Segue do Lema (7.1.1), parte i), que $\hat{\mu}$ é uma extensão de μ_0. ■

Lema 7.2.1 *Seja ν uma extensão de μ_0 de $\mathcal{J}$ a $\overline{\mathcal{J}}$. Se $F \in \mathcal{J}^<$ e $A \in \overline{\mathcal{J}}(F)$ então $\nu(A) = \lambda(A)$.*

Demonstração: Lembrando que $\lambda = \mu^*|\overline{\mathcal{J}}$ e o Teorema (2.3.2), temos que se $A \in \overline{\mathcal{J}}(F)$ então $A \subset F$, $A \in \overline{\mathcal{J}}$ e $\mu^*(A)=\lambda(A)$.

Fixado $\epsilon > 0$ seja $G \in \mathcal{J}$, $G \subset F$ tal que

$$d_F(A, G) = \mu^*((F \cap A)\triangle(F \cap G)) = \mu^*(A\triangle G) < \epsilon/2. \tag{7.13}$$

Como $G \in \mathcal{J}^<$, segue da Proposição (6.1.3), parte ii), que

$$\mu^*(G) = \mu(G) = \mu_0(G) = \nu(G).$$

Das igualdades $\nu(A) = \nu(A \cap G) + \nu(A \cap G^c)$ e $\nu(G) = \nu(G \cap A) + \nu(G \cap A^c)$, decorre que

$$\begin{aligned} |\nu(A) - \mu(G)| &= |\nu(A) - \nu(G)| = |\nu(A \cap G^c) - \nu(G \cap A^c)| \\ &\leq \nu(A \cap G^c) + \nu(G \cap A^c) = \nu(A\triangle G). \end{aligned}$$

Segue do Teorema (5.2.1) e da Proposição (7.1.4) parte i), que

$$\nu(A\Delta G) \leq \mu_0^*(A\Delta G) \leq \mu^*(A\Delta G)$$

e da relação (7.13) que

$$|\nu(A) - \mu(G)| \leq \epsilon/2. \tag{7.14}$$

Por outro lado, de (A.1.15) e (7.13), obtem-se

$$d_F(A, \emptyset) \leq d_F(A, G) + d_F(G, \emptyset),$$

e, por ser $\mu(G) < \infty$, obtém-se

$$\mu^*(A) - \mu(G) \leq \mu^*(A\Delta G) < \epsilon/2.$$

Analogamente, tem-se

$$\mu(G) - \mu^*(A) \leq \mu^*(A\Delta G) < \epsilon/2;$$

logo

$$|\lambda(A) - \mu(G)| = |\mu^*(A) - \mu^*(G)| \leq \mu^*(A\Delta G) < \epsilon/2.$$

Portanto, pela desigualdade acima e (7.14), temos

$$|\nu(A) - \lambda(A)| \leq |\nu(A) - \mu(G)| + |\mu(G) - \lambda(A)| < \epsilon,$$

sendo ϵ arbitrário, concluímos que $\nu(A) = \lambda(A)$. ∎

Teorema 7.2.2 *A medida $\hat{\mu}$ é a menor extensão de μ_0 de $\mathcal{J}$ a $\overline{\mathcal{J}}$*

Demonstração: Seja ν uma medida definida em $\overline{\mathcal{J}}$ tal que $\nu|\mathcal{J} = \mu_0$. Sendo $H \in \overline{\mathcal{J}}$, queremos mostrar que

$$\nu(H) \geq \hat{\mu}(H), \tag{7.15}$$

o que pela definição de $\hat{\mu}$ é equivalente a provar que se $F \in \mathcal{J}^<$, então

$$\nu(H) \geq \mu^*(H \cap F). \tag{7.16}$$

Portanto, dados $H \in \overline{\mathcal{J}}$ e $F \in \mathcal{J}^<$, como $H \cap F \in \overline{\mathcal{J}}(F)$, pelo Lema (7.2.1), temos

$$\nu(H) \geq \nu(H \cap F) = \mu^*(H \cap F).$$

Isso prova a relação (7.16); da definição de $\hat{\mu}$ prova-se a desigualdade (7.15), o que conclui a prova do teorema. ∎

Corolário 7.2.2 *A medida $\hat{\mu}$ é uma extensão de μ se, e somente se, μ é f- regular.*

Demonstração: Suponhamos que $\hat{\mu}$ seja uma extensão da μ de $\mathcal{J}$ a $\overline{\mathcal{J}}$; então $\hat{\mu}(E) = \mu(E)$ para $E \in \mathcal{J}$.

Pelo Lema (7.1.1), temos $\hat{\mu}(E) = \mu_0(E)$, para $E \in \mathcal{J}$.

Portanto, $\mu_0 = \mu$ em $\mathcal{J}$, logo μ é f-regular.

A recíproca é imediata, já que se μ é f-regular, então $\mu = \mu_0$, o que implica que $\hat{\mu}$ é uma extensão μ. ∎

Corolário 7.2.3 *Se μ é f-regular então $\hat{\mu}$ é a menor extensão de μ de $\mathcal{J}$ a $\overline{\mathcal{J}}$.*

Demonstração: A prova decorre do teorema e corolário acima. ∎

O exemplo a seguir nos mostra que se μ não é f-regular, pode não existir uma extensão mínima ν de μ a $\overline{\mathcal{J}}$.

Exemplo 7.2.1 *Consideremos um conjunto X de cardinalidade $\aleph_1$ e seja $\mathcal{J}$ a álgebra dos subconjuntos finitos ou cofinitos de X, isto é,*

$$\mathcal{J} = \{E \subset X : E \text{ é finito ou } E^c \text{ é finito } \},$$

e μ definida por

$$\mu(E) = \begin{cases} 0 \text{ se } E \text{ é finito,} \\ \infty \text{ se } E^c \text{ é finito.} \end{cases}$$

Então a aplicação μ é enumeravelmente aditiva. Observemos que μ restrita a $\mathcal{J}^<$ é identicamente nula, logo μ_0 é identicamente nula em $\mathcal{J}$. Portanto μ não é f-regular.

Afirmamos que $\overline{\mathcal{J}} = \mathcal{P}(X)$. De fato, bastará mostrar que $\mathcal{P}(X) \subset \overline{\mathcal{J}}$. Dado $A \in \mathcal{P}(X)$, para cada $F \in \mathcal{J}^<$ temos que $A \cap F \in \mathcal{A}_0 \subset \overline{\mathcal{J}}$; assim decorre do Teorema (2.3.2) que $A \in \overline{\mathcal{J}}$. Isso prova a afirmação.

É claro que a maior extensão de μ a $\mathcal{P}(X)$ é a medida μ^*, e para cada $Y \in \mathcal{P}(X)$ esta é dada por

$$\mu^*(Y) = \begin{cases} 0 \text{ se } Y \text{ é enumerável,} \\ \infty \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

Admitamos que a medida ν seja uma extensão mínima de μ a $\mathcal{P}(X)$. Neste caso podemos definir a partir de ν uma medida τ que só toma os valores 0 e 1, tornado assim $\aleph_1$ um cardinal mensurável o que contraria o Teorema de Ulam.

Os detalhes virão a seguir.

A). Algumas propriedades da medida ν são enumeradas a seguir.

i) Se $E \subset X$ é enumerável, então é claro que

$$\nu(E) = 0. \tag{7.17}$$

ii) Seja $A \subset X$ com $\nu(A) = \infty$. A aplicação η definida em $\mathcal{P}(X)$ por

$$\eta(E) = \nu(A \cap E) \quad \forall E \subset X,$$

é uma medida enumeravelmente aditiva que estende μ a $\mathcal{P}(X)$ e é tal que $\eta(E) \leq \nu(E)$, para cada $E \in \mathcal{P}(X)$.

É claro que $\eta \leq \nu$; resta provar que η é uma extensão de μ.

Seja $B \in \mathcal{J}$. Se B é finito, decorre da relação (7.17) que

$$0 \leq \eta(B) = \nu(A \cap B) \leq \nu(B) = \mu(B) = 0.$$

Se B é cofinito, isto é, B^c finito, então $A \cap B^c$ é finito e, novamente pela relação (7.17), temos $\nu(A \cap B^c) = 0$. Por hipótese $\nu(A) = \infty$ e a relação

$$\infty = \nu(A) = \nu(A \cap B) + \nu(A \cap B^c)$$

implica que

$$\eta(B) = \nu(A \cap B) = \infty = \nu(B) = \mu(B).$$

Isso prova que η é uma extensão de μ a $\mathcal{P}(X)$.

iii) Mostraremos que

$$\text{se } \; A \subset X \text{ e } \nu(A) = \infty \quad \text{então} \quad \nu(X \setminus A) = 0. \tag{7.18}$$

Suponhamos que se tenha $\nu(X \setminus A) > 0$. Então

$$\eta(X \setminus A) = \nu(A \cap (X \setminus A)) = \nu(\emptyset) = 0.$$

Logo

$$\eta(X \setminus A) = 0 < \nu(X \setminus A).$$

Como por ii), η é uma extensão de μ, isso contraria a hipótese de ν ser uma extensão mínima de μ.

iv) Reciprocamente, mostraremos que

$$\text{se } A \subset X \text{ e } \nu(X \setminus A) = 0, \text{ então } \nu(A) = \infty. \tag{7.19}$$

De fato, de $X = A \cup (X \setminus A)$, temos

$$\infty = \nu(X) = \nu(A) + \nu(X \setminus A) = \nu(A).$$

v) Finalmente, podemos concluir que

$$\text{se } E \subset X, \text{ então } \nu(E) = 0 \text{ ou } \nu(E) = \infty. \tag{7.20}$$

De fato, suponhamos que $\nu(E) < \infty$. A igualdade

$$\nu(X \setminus E) + \nu(E) = \nu(X) = \infty$$

implica que $\nu(X \setminus E) = \infty$. Por iii), da relação (7.18), concluímos que $\nu(E) = 0$.

B). A família

$$\mathcal{F} = \{E \subset X : \nu(E) = \infty\}$$

é um ultrafiltro livre em X.

Provemos que $\mathcal{F}$ é um filtro.

i) Observamos que $\emptyset \notin \mathcal{F}$ e $\mathcal{F} \neq \emptyset$, já que $X \in \mathcal{F}$, pois $\nu(X) = \infty$.

ii) Se $A, B \in \mathcal{F}$, então $\nu(A) = \nu(B) = \infty$. Como $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$, sendo $A \cap B^c \subset B^c$, pela relação (7.18), temos

$$\infty = \nu(A) = \nu(A \cap B) + \nu(A \cap B^c) = \nu(A \cap B),$$

logo, o conjunto $A \cap B \in \mathcal{F}$.

iii) Se $A \in \mathcal{F}$, e se $A \subset B$ então $\nu(B) = \infty$ e, portanto, $B \in \mathcal{F}$.

Para mostrar que $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro, bastará provar que dado $A \subset X$ então $A \in \mathcal{F}$ ou $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

iv) Segue da relação (7.20), que dado $A \subset X$, temos $\nu(A) = 0$ ou $\nu(X \setminus A) = \infty$.

Portanto, se $\nu(A) = 0$ então $\nu(X \setminus A) = \infty$, daí $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Se $\nu(A) = \infty$, $A \in \mathcal{F}$. Isso prova que $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro.

v) Mostrar que $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro livre, equivale a provar que

$$\bigcap_{E\in\mathcal{F}} E = \emptyset. \tag{7.21}$$

Lembremos que para cada $E \in \mathcal{F}$, o complementar $X \setminus E$ é um conjunto de medida nula. Suponhamos que existe $p \in X$ tal que $p \in \bigcap_{E\in\mathcal{F}} E$. Tomando em particular, $E_0 = X \setminus \{p\}$, temos que $E_0 \in \mathcal{F}$, mas como $p \notin E_0$, isso contradiz $p \in E$, para cada $E \in \mathcal{F}$. Logo vale (7.21). Portanto, $\mathcal{F}$ é um ultrafiltro livre.

vi) $\mathcal{F}$ é fechado por intersecções enumeráveis. De fato, seja $\{E_n : n \in I\!N\}$ uma família em $\mathcal{F}$. Como

$$X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus E_n)$$

logo

$$\nu(X \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \nu[\bigcup_{n=1}^{\infty} (X \setminus E_n)] \leq \sum_{n=1}^{\infty} \nu(X \setminus E_n) = 0.$$

Decorre da relação (7.19), que $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$.

C). A aplicação τ em $\mathcal{P}(X)$ definida por

$$\tau(B) = \begin{cases} 1 \text{ se } B \in \mathcal{F}, \\ 0 \text{ se } B \notin \mathcal{F}, \end{cases}$$

é uma medida enumeravelmente aditiva e, portanto, τ é uma medida.

Como $\emptyset \notin \mathcal{F}$, então $\tau(\emptyset) = 0$.

É imediato que para cada $A \subset B \subset X$ tem-se $\tau(A) \leq \tau(B)$.

Seja $(E_n)_{n\in I\!N}$ uma sequência de elementos dois a dois disjuntos de $\mathcal{P}(X)$. Provaremos que

$$\tau(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(E_n). \tag{7.22}$$

Temos os seguintes casos

1º Se $E_i \notin \mathcal{F}$ para todo $i \in I\!N$, então $E_i^c \in \mathcal{F}$ para cada $i \in I\!N$ e, por (B.vi) o conjunto $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i^c = (\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)^c$ pertence a $\mathcal{F}$. Logo $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \notin \mathcal{F}$. Portanto temos $\tau(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 0 = \tau(E_i)$, para cada $\in I\!N$ e vale trivialmente a igualdade (7.22).

2º Se $E_{i_0} \in \mathcal{F}$ para único $i_0 \in I\!N$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{F}$ e temos $\tau(E_{i_0}) = \tau(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = 1$, mas $\tau(E_i) = 0$ para $i \neq i_0$. É claro que vale (7.22).

Estes dois casos exaurem as possibilidades já que se E_i e E_j pertencem a $\mathcal{F}$ com $i \neq j$, então $\emptyset = E_i \cap E_j \in \mathcal{F}$, o que é uma contradição.

Isso prova que τ é uma medida enumeravelmente aditiva em $\mathcal{P}(X)$.

D). Lembramos a definição de cardinal mensurável ([12], pag. 230) " Um cardinal $\aleph$ é dito mensurável se existe um conjunto Ω com cardinalidade $\aleph$ e uma medida τ definida em $\mathcal{P}(\Omega)$ tal que $\tau(\Omega) = 1$ e $\tau(\{\alpha\}) = 0$ para cada $\alpha \in \Omega$ ".

Segue-se portanto que $\aleph_1$ é um cardinal mensurável contrariando o resultado contido nos teoremas a seguir:

Proposição (18.19) ([12], pag 231): O cardinal $\aleph_0$ não é mensurável. Teorema de Ulam (18.23) ([12], pag. 323) Se $\aleph$ é um cardinal não-mensurável, então o seu sucessor $\aleph^+$ é não-mensurável.

Isso prova que se a medida μ não é f-regular então pode não existir uma extensão mínima ν de $\mathcal{J}$ a $\overline{\mathcal{J}}$. ■

Entre todas as extensões de μ sabemos que λ é maior extensão e, se assumirmos μ f-regular $\hat{\mu}$ é a menor extensão. Em geral elas são diferentes e, mais ainda, podem existir infinitas extensões, todas diferentes, entre estas aplicações, como mostramos a seguir

Exemplo 7.2.2 *Consideremos o Exemplo (7.1.1). Seja μ^* medida exterior definida em $\mathcal{P}(X)$. Então decorre da definição de μ^* que*

$$\lambda(Y) = \begin{cases} ||Y|| & \text{se } Y \subset I\!N, \text{ finito}, \\ \infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Temos também que

$$\hat{\mu}(Y) = ||Y \cap I\!N|| \quad \forall\ Y \subset \beta I\!N.$$

Sabemos do Corolário (3.5.4) de [2], que $\{n\} = \overline{\{n\}}$, para cada $n \in I\!N$. Mas $I\!N = \bigcup\limits_{n \in I\!N} \{n\}$, e como observado no Exemplo (7.1.1), $I\!N$ é aberto e não fechado, assim $I\!N \notin \mathcal{J}$ e sendo reunião enumerável de elementos de $\mathcal{J}$, $I\!N \in \overline{\mathcal{J}}$ e, portanto, o complementar $\beta I\!N \setminus I\!N \in \overline{\mathcal{J}}$.

Mostremos que $\mathcal{J}$ é denso em $\mathcal{P}(X)$ na topologia $\mathcal{I}$, isto é, $\overline{\mathcal{J}} = \mathcal{P}(X)$. Bastará provar que $\mathcal{P}(X) \subset \overline{\mathcal{J}}$.

Seja $A \in \mathcal{P}(X)$, logo $A \subset \beta I\!N$ e $A \cap I\!N$ é enumerável. Em particular, para cada $F \in \mathcal{J}^{<}$, $A \cap F$ é finito e, portanto, pertence a $\overline{\mathcal{J}}$, decorre do Teorema (2.3.2) que $A \in \overline{\mathcal{J}}$. Isso prova a igualdade.

Como a cardinalidade de $\beta I\!N \setminus I\!N$ é 2^c, para cada $p \in \beta I\!N \setminus I\!N$, definamos a aplicação λ_p em $\mathcal{P}(X)$ dada por

$$\lambda_p(Y) = ||Y \cap (I\!N \cup \{p\})||.$$

Claramente, λ_p é uma medida enumeravelmente aditiva em $\mathcal{P}(X)$.

Lembramos que o espaço $\beta I\!N$ possui uma base de conjuntos aberto-fechados. Então, se $p \in \beta I\!N \setminus I\!N$, é claro que $\{p\}$ é um conjunto fechado; porém não é aberto, caso contrário, como $I\!N$ é denso em $\beta I\!N$ teríamos $\{p\} \cap I\!N \neq \emptyset$, mas $p \notin I\!N$ o que é absurdo. Portanto, concluímos que $\{p\} \notin \mathcal{J}$.

Assim, λ_p é uma extensão de μ a $\mathcal{P}(X)$. É imediato que $\lambda_p(A) = \mu(A)$, se $A \in \mathcal{J}$.

Desta maneira, para cada $p \in \beta I\!N \setminus I\!N$, obtemos 2^c extensões λ_p de μ a $\mathcal{P}(X)$.

Resta ver que estas extensões são diferentes. Sejam $p, q \in \beta I\!N \setminus I\!N$ tais que $p \neq q$. Provemos que $\lambda_p \neq \lambda_q$. De fato, pela definição temos

$$\lambda_p(\{p\}) = ||\{p\} \cap (I\!N \cup \{p\})|| = ||\{p\}|| = 1$$

e

$$\lambda_q(\{p\}) = ||\{p\} \cap (I\!N \cup \{q\})|| = ||\{p\} \cap \{q\}|| = ||\emptyset|| = 0.$$

Por outro lado, lembrando que $p \in \beta I\!N$, não é um número natural, pela definição de λ temos

$$\lambda(\{p\}) = \infty$$

e, pela definição de $\hat{\mu}$, temos

$$\hat{\mu}(\{p\}) = 0.$$

Isso prova que as extensões máxima λ e mínima $\hat{\mu}$ de μ, são diferentes e, entre elas existem infinitas extensões λ_p, que, como mostrado, também são diferentes. ■

7.3 A continuidade de μ em $\mathcal{J}$

Nesta seção, mostraremos que se tivermos $\mu(X) < \infty$, então μ é uma aplicação contínua em $\mathcal{J}$, vista como subgrupo topológico de $\mathcal{P}(X)$.

Teorema 7.3.1 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

a) a aplicação μ restrita à álgebra $\mathcal{J}$, com a topologia induzida $\mathcal{I}$, é contínua no $\emptyset$;

b) $\mu(X) < \infty$;

c) μ^* é uniformemente contínua em $\mathcal{P}(X)$.

Demonstração: Prova da implicação de a) para b):

Pela continuidade da μ no $\emptyset \in \mathcal{J}$, dado $1 \in I\!R$ existe uma vizinhança $\mathcal{U}_{F,\epsilon}(\emptyset) \bigcap \mathcal{J}$ do $\emptyset$ tal que, se $Y \in \mathcal{U}_{F,\epsilon}(\emptyset) \bigcap \mathcal{J}$, então $\mu(Y) < 1$.

Como $F^c \in \mathcal{U}_{F,\epsilon}(\emptyset)$ podemos tomar $Y = F^c$, e segue que $\mu(F^c) = \mu(X \setminus F) < 1$. Portanto,

$$\mu(X) = \mu(X \setminus F) + \mu(F) < 1 + \mu(F) < \infty.$$

Prova da implicação de b) para c):

Assumindo que $\mu(X) < \infty$, segue da Proposição (2.1.6) que a topologia $\mathcal{I}$ do espaço $\mathcal{P}(X)$ é a induzida pela pseudo-métrica d_X.

Para mostrar a continuidade de μ^* em $\mathcal{P}(X)$, dado $\epsilon > 0$ sejam A e B subconjuntos de X tais que $d_X(A, B) < \epsilon$. Bastará verificar que vale a desigualdade abaixo

$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| < \epsilon. \tag{7.23}$$

De fato, sendo $\mu^*(A) < \infty$, temos

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= d_X(A, \emptyset) \leq d_X(A, B) + d_X(B, \emptyset) \\ &= d_X(A, B) + \mu^*(B). \end{aligned}$$

Portanto, como $\mu^*(B) < \infty$, obtemos a desigualdade

$$\mu^*(A) - \mu^*(B) \leq d_X(A, B) < \epsilon.$$

Similarmente, verifica-se que vale $\mu^*(B) - \mu^*(A) < \epsilon$, o que prova (7.23).

Isso prova que μ^* é uma aplicação contínua em $\mathcal{P}(X)$.

Prova de c) para a):

A prova decorre do Lema (1.4.1) onde foi mostrado que $\mu = \mu^*|\mathcal{J}$ e, portanto, μ é a restrição a $\mathcal{J}$ de uma aplicação contínua. Conclui-se portanto, que μ é contínua em $\mathcal{J}$ com a topologia induzida $\mathcal{I}$.

Isso prova as equivalências e o teorema. ∎

Corolário 7.3.1 *Se $\mu(X) < \infty$, então $\lambda = \mu^*|\overline{\mathcal{J}} : \overline{\mathcal{J}} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma extensão contínua da aplicação μ definida em $\mathcal{J}$.*

Demonstração: Pelo Teorema (3.3.2) e o Lema (1.4.1) sabemos que μ^* é uma extensão de μ definida em $\mathcal{J}$ para $\overline{\mathcal{J}}$.

Decorre imediatamente do Teorema (7.3.1) que μ^* uma aplicação contínua em $\mathcal{P}(X)$, logo, λ é contínua em $\overline{\mathcal{J}}$. ■

Observação 7.3.1 *Se $\mu(X) < \infty$ e $A \in \overline{\mathcal{J}}$, decorre do Proposição (2.1.6) que existe uma sequência $(F_n)_{n\in N}$ de elementos de $\mathcal{J}$ tal que*

$$A = \lim_{n\to\infty} F_n$$

e, cada elemento de $\overline{\mathcal{J}}$ pode ser expresso como limite de uma sequência de elementos de $\mathcal{J}$. Pela continuidade de μ^* temos

$$\mu^*(A) = \mu^*(\lim_{n\to\infty} F_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(F_n).$$

O exemplo a seguir mostra que em geral não podemos obter uma extensão da medida μ por continuidade.

Exemplo 7.3.1 *Consideremos X um conjunto infinito e $\mathcal{J}$ a álgebra dos conjuntos que são finitos ou cofinitos, isto é,*

$$\mathcal{J} = \{A \subset X : A \text{ é finito ou } A^c \text{ é finito}\}$$

e, a medida μ definida por

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{se } A \text{ é finito,} \\ \infty, & \text{se } A^c \text{ é finito.} \end{cases}$$

e aplicação μ^* definida em $\mathcal{P}(X)$ é uma extensão de μ e esta é dada por

$$\mu^*(E) = \begin{cases} 0, & \text{se } E \text{ é enumerável,} \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostraremos que $\mathcal{J}$ é denso em $\mathcal{P}(X)$, na topologia $\mathcal{I}$, isto é, vale a igualdade

$$\overline{\mathcal{J}} = \mathcal{P}(X). \tag{7.24}$$

Bastará mostrar que $\overline{\mathcal{J}} \supset \mathcal{P}(X)$. *De fato, para cada* $Y \subset X$ *e para cada* $F \in \mathcal{J}^<$, *temos que*

$$Y \cap F \subset F \quad e \quad \mu^*(F \cap (Y \triangle \emptyset)) \leq \mu(F) = 0.$$

Portanto, dados $Y \in \mathcal{P}(X)$ *e* $F \in \mathcal{J}^<$, *temos que* $\mu^*(Y \cap F) = 0$, *para cada* $F \in \mathcal{J}^<$, *decorre do Teorema (4.1.1) que* $Y \cap F \in \overline{\mathcal{J}}$, *pelo Teorema (2.3.2) segue que* $Y \in \overline{\mathcal{J}}$; *isso mostra que* $\mathcal{P}(X) \subset \overline{\mathcal{J}}$ *e, portanto, vale a relação (7.24).*

Suponhamos que seja possível achar a extensão μ^* *de* μ *por continuidade de* $\mathcal{J}$ *a* $\mathcal{P}(X)$ *e assumamos* μ^* *contínua no* $\emptyset$. *Portanto dado* $1 \in I\!R$ *existe uma vizinhança básica* $\mathcal{U}_{F,\epsilon}(\emptyset) \in \mathcal{I}$ *tal que*

$$\forall\, A \in \mathcal{U}_{F,\epsilon}(\emptyset) \quad \text{tem-se} \quad \mu^*(A) < 1. \tag{7.25}$$

Em particular, tomando-se $A = F^c \in \mathcal{U}_{F,\epsilon}(\emptyset)$, *decorre da definição que* $\mu^*(F^c) = \mu(F^c) = \infty$, *o que contraria a relação (7.25).*

Isso mostra que a extensão μ^* *não pode ser obtida por continuidade.* ∎

Como sabemos pelo exemplo acima, em geral não é possível obter a medida λ por continuidade da μ, pois μ nem sempre será uma aplicação semi-contínua na topologia $\mathcal{I}$. Entretanto, temos que se μ for regular no sentido finito então vale o seguinte resultado.

Teorema 7.3.2 *A medida* $\hat{\mu}$ *definida em* $\mathcal{P}(X)$ *é uma aplicação semi-contínua superiormente.*

Demonstração: Sejam $Y \in \mathcal{P}(X)$ e $a \in I\!R$ positivo tal que $\hat{\mu}(Y) > a$; pela definição de $\hat{\mu}$ existe $F \in \mathcal{J}^<$ tal que $\mu^*(Y \cap F) > a$.

Queremos mostrar que existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $T \in \mathcal{P}(X)$ com

$$T \in \mathcal{U}_{F,\epsilon}(Y) \quad \text{se tenha} \quad \hat{\mu}(T) > a. \tag{7.26}$$

De fato, tomando-se $\epsilon = \mu^*(Y \cap F) - a$, se $T \in \mathcal{U}_{F,\epsilon}(Y)$ então $d_F(Y,T) < \epsilon$. Assim, pela a desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned} d_F(Y,\emptyset) &\leq d_F(Y,T) + d_F(T,\emptyset) \\ &< \epsilon + \mu^*(F \cap (T \triangle \emptyset)) = \epsilon + \mu^*(T \cap F). \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} \mu^*(T \cap F) &> d_F(Y, \emptyset) - \epsilon \\ &= \mu^*(Y \cap F) - \mu^*(Y \cap F) + a \\ &= a \end{aligned}$$

e, portanto, $\hat{\mu}(T) \geq \mu^*(T \cap F) > a$, o que prova (7.26) e o teorema. ■

Apêndice A

Propriedades das Operações de Conjuntos

A.1 Propriedades Básicas

Relacionamos algumas propriedades das operações de conjuntos utilizados nesta monografia. Consideramos X um conjunto arbitrário e A e B subconjuntos de X.

P A.1.1 $A \subset B \Longrightarrow A = A \cap B$ e $B = A \cup B$.

P A.1.2 $A = A \cap B$; $B = A \cup B \Longrightarrow A \subset B$.

P A.1.3 $A \subset B \Longleftrightarrow B^c \subset A^c$

P A.1.4 $\bigcap \{A : A \in \mathcal{P}(X)\} = \emptyset$.

P A.1.5 $A \cap B = \emptyset \Longleftrightarrow A \subset B^c \Longleftrightarrow B \subset A^c$

P A.1.6 $A \subset C$ e $B \subset D \Longrightarrow A \cup B \subset C \cup D$ e $A \cap B \subset C \cap D$.

P A.1.7 $\forall A, B \subset X$ *tem-se* $A = (A \cap B) \cup (B \setminus A)$ e $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$.

P A.1.8 $A \subset B \Longrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

P A.1.9 $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap (A \triangle B)$.

P A.1.10 $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$

Prova:

$$\begin{aligned}
A \triangle B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\
&= (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) \\
&= ((A \cap B^c) \cup B) \cap ((A \cap B^c) \cup A^c) \\
&= (A \cup B) \cap (B^c \cup B) \cap ((A \cup A^c) \cap (B^c \cup A^c)) \\
&= (A \cup B) \setminus (A \cap B).
\end{aligned}$$

P A.1.11 $A \triangle B = A \triangle C \Longrightarrow B = C$.

Prova:

$$\begin{aligned}
B &= (A \triangle A) \triangle B = A \triangle (A \triangle B) = A \triangle (A \triangle C) \\
&= (A \triangle A)\ C = C.
\end{aligned}$$

P A.1.12 $A^c \triangle B^c = A \triangle B$.

Prova:

$$\begin{aligned}
A^c \triangle B^c &= (A^c \setminus B^c) \cup (B^c \setminus A^c) = (A^c \cap B) \cup (B^c \cap A) \\
&= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \triangle B.
\end{aligned}$$

P A.1.13 $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.

P A.1.14 $F \cap (A \triangle B) = (F \cap A) \triangle (F \cap B)$.

Prova:

$$\begin{aligned}
(F \cap A) \triangle (F \cap B) &= [(F \cap A) \cap (F \cap B)^c] \cup [(F \cap B) \cap (F \cap A)^c] \\
&= [(F \cap A) \cap (F^c \cup B^c)] \cup [(F \cap B) \cap (F^c \cup A^c)] \\
&= [F \cap A \cap B^c] \cup [F \cap B \cap A^c] \\
&= F \cap [(A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)] = F \cap (A \triangle B).
\end{aligned}$$

P A.1.15 $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B)$.

Prova: Pelas relações

$$\begin{aligned} A \setminus B &= A \cap B^c \cap X = (A \cap B^c) \cap (C \cup C^c) \\ &= (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \\ &\subset (B^c \cap C) \cup (A \cap C^c), \end{aligned}$$

e

$$B \setminus A \subset (A^c \cap C) \cup (B \cap C^c);$$

e tomando-se a reunião membro a membro, decorre que

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B).$$

P A.1.16 $(A \cup B)\triangle(H \cup G) \subset (A\triangle H) \cup (B \triangle G)$.

Prova:

$$\begin{aligned} (A \cup B)\triangle(H \cup G) &= [(A \cup B) \cap (H \cup G)^c] \cup [(H \cup G) \cap (A \cup B)^c] \\ &= (A \cup B) \cap (H^c \cap G^c] \cup [(H \cup G) \cap (A^c \cap B^c] \\ &= [(A \cap H^c \cap G^c) \cup (B \cap H^c \cap G^c] \cup [(H \cap A^c \cap B^c) \cup (G \cap A^c \cap B^c] \\ &\subset [(A \cap H^c) \cup (B \cap G^c] \cup [(H \cap A^c) \cup (G \cap B^c] \\ &= [(A \cap H^c) \cup (H \cap A^c] \cup [(B \cap G^c) \cup (G \cap B^c] \\ &= (A \triangle H) \cup (B \triangle G). \end{aligned}$$

P A.1.17 $(A \cap B)\triangle(G \cap H) \subset (A \triangle G) \cup (B \triangle H)$.

Prova:

$$\begin{aligned} (A \cap B)\triangle(G \cap H) &= [(A \cap B) \cap (G \cap H)^c] \cup [(G \cap H) \cap (B \cap H)^c] \\ &= [(A \cap B) \cap (G^c \cup H^c] \cup [(G \cap H) \cap (B^c \cup A^c)] \\ &= [(A \cap B \cap G^c) \cup (A \cap B \cap H^c] \cup [(G \cap H \cap B^c) \cup (G \cap H \cap A^c)] \\ &\subset [(A \cap G^c) \cup (B \cap H^c] \cup [(H \cap B^c) \cup (G \cap A^c)] \\ &= [(A \cap G^c) \cup (B \cap H^c] \cup [(H \cap B^c) \cup (G \cap A^c)] \\ &= (A \triangle G) \cup (B \triangle H). \end{aligned}$$

P A.1.18 $A \cup Y = X$ e $A \cap Y = \emptyset \Longrightarrow Y = A^c$.

Prova:

$$\begin{aligned} Y &= Y \cap X = Y \cap (A \cup A^c) = (Y \cap A) \cup (Y \cap A^c) \\ &= \emptyset \cup (Y \cap A^c) \\ &= (A \cap A^c) \cup (Y \cap A^c) = (A \cup Y) \cap A^c \\ &= X \cap A^c = A^c. \end{aligned}$$

P A.1.19 $A_n \subset E_n \subset B_n \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

P A.1.20 $(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \setminus (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_n \setminus A_n)$.

P A.1.21 $Y \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(Y \cap A_n)$.

Bibliografia

[1] Dugundji, J. *Topology,* Allyn and Bacon, Boston, 1966.

[2] Engelking, R. *Outline of General Topology,* North-Holland Publishing Company-Amsterdam, 1968

[3] Fairchild, W. W. and Ionescutulcea, C. *Topology,* W. B. Saunders Company, Philadelphia, Pa. 1971.

[4] Halmos, P. R. *Measure Theory,* Van Nostrand Company, Inc., Princeton New York, 1950.

[5] Halmos, P. R. *Naive Set Theory,* Van Nostrand, New York, 1960

[6] Hewitt, E. and Stromberg, K. *Real and Abstract Analisys,* Springer Publishing Co., Inc., New York, 1965.

[7] Jech, T. *Set Theory,* Academic Press., New York, 1978.

[8] Kakutani,S. and Oxtoby, J.C. *Construction of a non-separable invariant Extension of the Lebesgue measure space,* Annals of Mathematics. 52 (1950), 580-590.

[9] Kelley, J. L. *General Topology,* Van Nostrand, New York, 1955.

[10] Maharam, D. *From Finite to Countable Additivity,* Portugaliae Mathematica. Vol. 44 Fasc. 3 - (1987), 265-282.

[11] Oxtoby, J. C. *Measure and Category,* Springer-Verlag, New York, 1971.

[12] Pfeffer, W. F. *Integrals and Measures,* Marcel Dekker, Inc. New York, 1977.

[13] Stone, M. H. *Notes on integration l, ll,* Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 34 (1948) 336-342, 447-455.

[14] Warner, S. *Topological Fields,* North-Holland Mathematics Studies 157. 1989