Sobre os Espaços H-fechados e de Katětov

Marcelo Dias Passos

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Topologia Geral**
Orientadora: **Profª Drª Ofélia Teresa Alas**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq

-São Paulo, janeiro de 1996-

Sobre os Espaços H-fechados e de Katětov

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Marcelo Dias Passos
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 8 de março de 1996.

- Profª Drª Ofélia Teresa Alas (orientadora) - IME-USP
- Profª Drª Maria Stella Amorim Coutinho Castilla - IME-USP
- Prof. Dr. Newton Carneiro Affonso da Costa - FFLCH-USP

Aos meus pais Manoel e Ivone,
às minhas irmãs Milena e Sílvia
e ao meu irmão Flávio.

Ninguém tem o direito
de aprisionar um pensamento,
por mais vadio que ele seja.

Sérgio Vaz

Agradecimentos

Agradeço muitíssimo à minha orientadora a dedicação e a atenção dispensadas. Sua competência sempre me inspira, alimentando meu entusiasmo pelo estudo de Topologia e Teoria dos Conjuntos.

Aos meus pais, Manoel e Ivone, pelo incentivo e pela grande paciência. Não posso deixar de dizer que tudo foi possível graças ao enorme apoio que me deram. Às minhas irmãs, Milena e Silvinha, que sempre estiveram torcendo, mesmo de longe. Ao meu irmãozinho, Flavinho, 1.90m, que foi quem mais me chateou. Aqui está, Zebinho! Acabei!

Não posso deixar de fora a grande amiga Isamara, minha "cunhadinha" Isa, que se tornou grande torcedora e incentivadora, como também a incrivelmente paciente amiga Elisinha pela atenção aos choramingos.

Agradeço à minha amiga Patrícia Helena Araújo da Silva Nogueira, a Pazinha, que nunca duvidou de minha capacidade e, sempre presente, teve ouvidos para minhas "tempestades mentais". Aos meus companheiros e amigos, Vitor de Oliveira Ferreira, Ayumi Kato e Lucia Satie Ikemoto, pela ajuda de todos esses anos e pela torcida. Devo a Lucia a iniciação no LaTeX. Ao Jair Donadelli Júnior por todos os toques e ajuda com o Emacs e o BibTex. Ao colega de orientação Antônio de Pádua Franco Filho, pelos toques quanto à Teoria da Dimensão que resolveram grandes problemas.

Abstract

This work intends to expose some results about Katětov Spaces. For that, we need to familiarize with certains objects. They are: the H-closed Spaces, minimal Hausdorff Spaces, Stone Space and extremally disconnected spaces, the Katětov extension, the Fomin extension, as well as the Iliadis Absolute. Besides to define them, we expose some useful results for this first understanding of the Katětov Spaces. We present equivalences and some sufficient conditions for a space to be a member of such class.

Resumo

Este trabalho se propõe a apresentar alguns resultados sobre os espaços de Katětov. Para tanto, precisamos nos familiarizar com certos objetos. São eles: os espaços H-fechados, H-minimais, de Stone e extremamente desconexos; e ainda as extensões de Katětov e Fomin, bem como o Absoluto de Iliadis. Além de defini-los, expomos alguns resultados úteis para este primeiro entendimento dos espaços de Katětov. Apresentamos equivalências e algumas condições suficientes para um espaço estar em tal classe.

Conteúdo

Introdução iii

1 Background Topológico 1

1.1 Algumas Convenções 1

1.2 Um pouco de Reticulados e Filtros 2

1.3 O Teorema da Representação de Stone 5

1.4 Extensões de Espaços 7

2 Espaços H-fechados e H-minimais 12

2.1 Relembrando os Compactos 12

2.2 Os H-fechados e a Extensão de Katětov 13

2.3 Espaços H-minimais 21

2.4 Extensões Estritas e Simples 23

Notas 29

3 O Absoluto de Iliadis 30

3.1 Espaços Extremamente Desconexos 30

3.2 Um pouquinho sobre funções perfeitas 33

3.3 Um pouco sobre funções irredutíveis 33

3.4 O Absoluto de Iliadis 34

3.5 A Unicidade do Absoluto 39

3.6 A Extensão de Fomin 43

Notas 45

4 Os Espaços de Katětov 46

4.1 Partições em compactos de $\sigma X \setminus X$ 48

4.2 Extensões H-fechadas com resto enumerável 50
4.3 Comparando X, X_s e EX 58
4.4 Katětov e extensões de discretos 60
4.5 Métricos versus Katětov 67
4.6 Resultados Adicionais 78
Notas 80

Bibliografia **81**

Índice **83**

Introdução

Este trabalho é conseqüência de uma série de seminários apresentados durante todo o ano de 1995. Tais exposições tinham como objetivos o estudo e o entendimento dos resultados do artigo de Jack R. Porter e Johannes Vermeer, "Spaces with Coaser Minimal Hausdorff Topologies",[PV85], sobre os **Espaços de Katětov**. Mas que propriedades tem uma topologia de Hausdorff **minimal**? Ao buscarmos a resposta a esta pergunta, deparávamos invariavelmente com os **Espaços H-fechados**. O "H" é abreviação de Hausdorff. Ainda na investigação, conhecemos o **Absoluto de Iliadis**. Todos estes objetos eram sempre citados e suas propriedades amplamente usadas. Tivemos, então, que nos familiarizar com estes conceitos.

Os espaços H-minimais são os espaços de Hausdorff que não admitem subtopologia própria de Hausdorff. A classe destes espaços está "contida" na dos H-fechados e mostramos que é exatamente a "sub-classe"' dos H-fechados semi-regulares. Os espaços H-fechados formam uma classe "maior" que a dos compactos de Hausdorff: são espaços de Hausdorff que satisfazem a propriedade de ser fechado em qualquer espaço de Hausdorff que os contenha como subespaço. Perdem dos compactos pela regularidade. Dedicamos o capítulo 2 à exposição dos principais resultados sobre estas duas classes que nos serão úteis. Entre eles construímos a **Extensão de Katětov** e, ainda, apresentamos os objetos: função θ-contínua, θ-fecho e θ-fechados. A θ-continuidade nos dará uma hereditariedade "funcional": a imagem de um H-fechado por uma função θ-contínua também é H-fechado. Um claro paralelo com: a imagem contínua de compacto é compacto. A continuidade é enfraquecida a θ-continuidade e pode ser "recuperada" com a regularidade do espaço de chegada da função. O θ-fecho de um conjunto é maior que seu fecho e igual a ele quando temos, novamente, a regularidade. A extensão de Katětov é construtível para todo espaço

de Hausdorff. Já um espaço tem extensão compacta se, e só se, é de Tychonoff. Na última seção apresentamos duas maneiras de "criar" novas extensões, a **estrita** e a **simples**, a partir de uma dada, que mantêm a propriedade de ser H-fechado.

O uso de filtros e ultrafiltros, em reticulados e em álgebras booleanas, vai ser intenso e no capítulo 1 colocamos estes conceitos e resultados básicos. O Espaço de Stone é apresentado para que possamos chegar ao Absoluto de Iliados de um espaço. Na última seção convencionamos alguns objetos ligados às extensões de espaços e de funções contínuas.

Antes de chegar ao Absoluto de Iliadis, no capítulo 3, colocamos a maioria dos fatos sobre espaços extremamente desconexos e funções perfeitas e irredutíveis que precisamos. O absoluto de um espaço de Hausdorff X, será um par (EX, π), constituído de um espaço de Hausdorff EX, extremamente desconexo e zero-dimensional, e de uma função $\pi : EX \to X$, que é θ-contínua, perfeita, irredutível e sobrejetora. Esta função do absoluto tem muitas propriedades que estão no longo teorema 3.3. Na seção seguinte a da construção, mostramos que o par é único a menos de um homeomorfismo que comuta com as aplicação dos pares. Logo em seguida chegamos a outra extensão H-fechada, a **Extensão de Fomin**, que será como chamaremos a extensão estrita da extensão de Katětov. Algumas propriedades suas são trabalhadas e colocamos talvez a mais importante: $\sigma X \setminus X$ é homeomorfo a $\beta EX \setminus EX$, para qualquer espaço de Hausdorff X.

O último capítulo finalmente apresenta os espaços de Katětov. Logo colocamos condições equivalentes ao fato se ser Katětov e as usamos até o fim do trabalho. Um corolário nos motiva a estudar a cardinalidade do resto da extensão de Fomin e chegamos que toda extensão H-fechada de um espaço X induz uma partição em compactos de $\sigma X \setminus X$. A recíproca também é verdadeira, ou seja, toda partição em compactos do resto $\sigma X \setminus X$, é induzida por uma extensão H-fechada de X. A seção 4 é toda dedicada a um resultado obtido por Alan Dow e Jack R. Porter: os espaços de Katětov "são" os restos de extensões H-fechadas de espaços discretos. Os espaços metrizáveis são também estudados e chegamos que os completamente metrizáveis são espaços de Katětov.

Capítulo 1

Background Topológico

Neste primeiro capítulo vamos colocar a maioria dos conceitos usados ao longo do trabalho. Quase todos eles são conhecidos e, mesmo assim, estarão aqui para que possamos fixar terminologia e notação.

1.1 Algumas Convenções

Freqüentemente abreviaremos um espaço topológico (X, τ), por X. Assim, quando X for um espaço topológico, $\tau(X)$ será o conjunto dos abertos de X. Abusaremos muito da linguagem, referindo-se a X ora como espaço, ora como o suporte de um espaço. E, como acabamos de ver, espaço estará sendo sempre espaço topológico.

Para dois espaços X e Y, $\mathcal{C}(X, Y)$ é o conjunto das funções contínuas de X em Y. Ainda, $\mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ e $\mathcal{C}^*(X) = \{f \in \mathcal{C}(X) : f \text{ é limitada}\}$. E, quando f for uma função qualquer de X em Y, não necessariamente contínua, $f^{-1}(x)$ denotará o conjunto $f^{-1}[\{x\}]$.

Dado um conjunto A, qualquer, $\mathcal{P}(A)$ é o conjunto das partes de A.

Para um espaço X chamaremos:

- $\mathcal{B}(X)$ é o conjunto dos abertos-fechados de X;
- $\mathcal{Z}(X)$ é o conjunto dos subconjuntos funcionalmente fechados de X, os "zero-sets" de X, ou seja, $A \in \mathcal{Z}(X)$, se $A = f^{-1}(0)$, para alguma função $f \in \mathcal{C}(X)$;
- $\mathcal{R}(X)$ é o conjunto dos fechados-regulares de X. Relembrando, F é fechado-regular

de X, se $F = \overline{\overset{\circ}{F}}^X$;

- $\mathcal{RO}(X)$ é o conjunto dos abertos-regulares de X. Então $A \in \tau(X)$ é aberto-regular, se, $A = \overline{\overset{\circ}{A}}^X$.

É fácil ver que $A \subseteq X$ é aberto-regular se, e só se, $X \setminus A \in \mathcal{R}(X)$.

Os conceitos que envolvem funções cardinais terão a conotação usual que pode ser encontrada tanto em [JUH80] como em [ENG89]. Ou seja, para uma espaço X: $c(X)$ é a celularidade de X, $d(X)$ a densidade, $L(X)$ o grau de Lindelöf, $\omega(X)$ o peso e $\chi(X)$ o caráter. Faremos uma ressalva: quando falarmos em σ-compacto , significará que o espaço é união enumerável de compactos; enquanto X será dito λ-compacto quando todo recobrimento aberto de X admitir um subrecobrimento de cardinalidade estritamente menor que λ, para λ cardinal.

Um subespaço A será G_δ em X quando for intersecção enumerável de abertos de X. E para λ, cardinal, B será G_λ quando for intersecção de λ abertos.

1.2 Um pouco de Reticulados e Filtros

Para uma ordem parcial $\leq$ em um conjunto A, as noções de supremo, ínfimo, máximo, mínimo, limitantes superior e inferior serão as usuais. Para $S \subseteq A$, $\bigvee S$ é o supremo de S, e $\bigwedge S$, o ínfimo. Se $S = \{s_i : i \in I\} \subseteq A$, poderemos escrever $\bigvee_{i \in I} s_i$ no lugar de $\bigvee\{s_i : i \in I\}$ (analogamente para o ínfimo). Quando existirem $\bigvee A$ e $\bigwedge A$, chamaremos $(A, \leq)$ de **limitado**. Diremos que $(A, \leq)$ é um **semi-reticulado superior** se existir o supremo de $\{x, y\}$, para quaisquer $x, y \in A$ ($\bigvee\{x, y\}$ será denotado por $x \vee y$). Analogamente, falaremos de **semi-reticulados inferiores** e $x \wedge y$ será o ínfimo de $\{x, y\}$. $(A, \leq)$ será um **reticulado** se for semi-reticulado superior e inferior. Teremos que $(A, \leq)$ é um **semi-reticulado superior completo** se existir o supremo de qualquer subconjunto não-vazio de A. Por analogia, $(A, \leq)$ será dito um **semi-reticulado inferior completo**. É claro quando $(A, \leq)$ será dito um **reticulado completo**.

Quando $(A, \leq)$ é um reticulado, é comum tratar $\vee$ e $\wedge$ como operações em A que são comutativas, associativas e que ainda satisfazem: para quaisquer $a, b \in A$,

- $a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b \Leftrightarrow a \wedge b = a$,

- $a = a \vee a = a \wedge a$, e,
- $a \wedge (a \vee b) = a = a \vee (a \wedge b)$.

Assim, freqüentemente, falaremos também em reticulado nos referindo a $(A, \vee, \wedge)$, onde $\vee$ e $\wedge$ são operações com as propriedades citadas. Quando $(A, \vee, \wedge)$ for reticulado limitado, chamaremos o máximo de A de 1, e o mínimo de 0. Temos, assim, a propriedade: $a = a \vee 0 = a \wedge 1, 0 = a \wedge 0$, e $1 = a \vee 1$, para qualquer $a \in A$. E, novamente, também nos referiremos a $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ como reticulado limitado, onde $(A, \vee, \wedge)$ é reticulado, e, 0 e 1 têm a propriedade colocada na frase anterior.

Exemplo 1.1 *(1) Dado um conjunto B, temos que $(\mathcal{P}(B), \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado. Ainda, se $\emptyset \neq C \subseteq \mathcal{P}(B)$, $\bigvee C = \bigcup C$ e $\bigwedge C = \bigcap C$. Logo $(\mathcal{P}(B), \subseteq)$ é um reticulado completo;*

(2) Dado um espaço X, temos que $\mathcal{B}(X), \mathcal{Z}(X), \tau(X), \mathcal{R}(X)$ e $\mathcal{RO}(X)$ são todos reticulados limitados por inclusão:

- *O máximo de todos eles é X e o mínimo é o vazio;*
- *$A \wedge B = A \cap B$ e $A \vee B = A \cup B$, para $A, B \in \mathcal{B}(X) \cup \mathcal{Z}(X) \cup \tau(X)$ (é fácil ver que $f^{-1}(0) \cup g^{-1}(0) = (fg)^{-1}(0)$ e $f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) = (f^2 + g^2)^{-1}(0)$, para quaisquer $f, g \in \mathcal{C}(X)$);*
- *$A \wedge B = \overline{\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}}^X$ e $A \vee B = A \cup B$, para $A, B \in \mathcal{R}(X)$;*
- *$A \wedge B = A \cap B$ e $A \vee B = \overline{A}^X \overset{\circ}{\cup} \overline{B}^X$, para $A, B \in \mathcal{RO}(X)$.*

Ainda, $\mathcal{RO}(X), \mathcal{R}(X)$ e $\tau(X)$ são completos:

- *Dado $\emptyset \neq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{RO}(X)$, temos que $\bigvee \mathcal{S} = \overline{\overset{\circ}{\bigcup \mathcal{S}}}^X$ e $\bigwedge \mathcal{S} = \overset{\circ}{\bigcap_{S \in \mathcal{S}}} \overline{S}^X$,*
- *Para $\emptyset \neq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{R}(X)$, $\bigvee \mathcal{T} = \overline{\overset{\circ}{\bigcup_{T \in \mathcal{T}}} T}^X$ e $\bigwedge \mathcal{T} = \overline{\overset{\circ}{\bigcap \mathcal{T}}}^X$,*
- *Se $\emptyset \neq \mathcal{Q} \subseteq \tau(X)$, $\bigvee \mathcal{Q} = \bigcup \mathcal{Q}$ e $\bigwedge \mathcal{Q} = \overset{\circ}{\bigcap} \mathcal{Q}$.*

Quando R for um reticulado limitado, falaremos que $\mathcal{F} \subset R$ é um **filtro** em R (ou R-filtro), se,

- $\mathcal{F}$ for não-vazio e $0 \notin \mathcal{F}$;

- $a \wedge b \in \mathcal{F}$, sempre que $a, b \in \mathcal{F}$; e,
- $c \in \mathcal{F}$, sempre que $c \in R$, $a \in \mathcal{F}$ e $a \leq c$.

Chamaremos um filtro $\mathcal{U}$, em R, de **ultrafiltro** em R (ou R-ultrafiltro), se $\mathcal{U}$ for maximal por inclusão, ou seja, se não existir um R-filtro que o contenha propriamente. Dados $a \in R$ e $B \subseteq A$, diremos que a **encontra** B, se $a \wedge b \neq 0$, para qualquer $b \in B$.

Resultado conhecido por todos que trabalharam, alguma vez na vida, com filtros é a proposição seguinte:

Proposição 1.1 *Para um reticulado R limitado, temos:*

(1) Todo R-filtro está contido em algum R-ultrafiltro,

(2) $\mathcal{U}$ é um R-ultrafiltro se, e somente se, todo elemento de R que encontra $\mathcal{U}$ pertence a $\mathcal{U}$. ■

Chamaremos um reticulado $(A, \vee, \wedge)$ de **distributivo**, se, para quaisquer $a, b, c \in A$, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, e, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$. $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$, um reticulado limitado, será dito **complementado**, se, para todo $a \in A$, existir algum $b \in A$, tal que $a \vee b = 1$ e $a \wedge b = 0$. Não estamos falando nenhuma novidade, e é fato conhecidíssimo que, se $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ for distributivo e complementado, cada a terá somente um único elemento, que chamaremos a', nas condições citadas. A partir daí, chegamos a definição de **álgebra booleana**: $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ é álgebra booleana se for reticulado limitado, complementado e distributivo.

Diremos que um R-filtro $\mathcal{F}$ será **primo**, se $a \in \mathcal{F}$ ou $b \in \mathcal{F}$, sempre que $a, b \in R$ e $a \vee b \in \mathcal{F}$. Facilmente temos que, quando R for um reticulado limitado distributivo, todo R-ultrafiltro será primo.

Exemplo 1.2 *Temos que $\mathcal{R}(X), \mathcal{RO}(X)$ e $\mathcal{B}(X)$ são todas álgebras booleanas (com as operações já vistas):*

- *Para $A \in \mathcal{R}(X)$, $A' = \overline{X \setminus A}^X$,*
- *Para $A \in \mathcal{RO}(X)$, $A' = X \setminus \overline{A}^X$, e,*
- *Para $A \in \mathcal{B}(X)$, $A' = X \setminus A$.*

Proposição 1.2 *Para B, uma álgebra booleana, e, $\mathcal{U}$, um filtro em B, são equivalentes:*

(1) $\mathcal{U}$ *é um ultrafiltro,*

(2) $\mathcal{U}$ *é um filtro primo,*

(3) para qualquer $a \in B$, $a \in \mathcal{U}$ *ou* $a' \in \mathcal{U}$. ■

Para um espaço X e um reticulado $R = (A, \vee, \wedge, 0, 1)$, tal que $A \subseteq \mathcal{P}(X)$, chamaremos, para um R-filtro $\mathcal{F}$, de **aderência de** $\mathcal{F}$ a intersecção $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}^X$, e a denotaremos por $ad_X(\mathcal{F})$. Diremos que $\mathcal{F}$ **converge (em X) para** x, se $\Omega \in \mathcal{F}$, sempre que $x \in \overset{\circ}{\Omega}^X$ e $\Omega \in A$. Sendo assim x será um **limite de** $\mathcal{F}$. Denotaremos o conjunto dos limites de $\mathcal{F}$ por $c_X(\mathcal{F})$. Quando $ad_X(\mathcal{F}) \neq \emptyset$, diremos que o filtro $\mathcal{F}$ é **fixo**. Caso contrário, $\mathcal{F}$ será **livre**.

Muitas vezes abusaremos da linguagem referindo-se a um "filtro em D", onde D é um conjunto, abreviando "filtro em $\mathcal{P}(D)$". Ainda diremos "filtro de abertos de X", para X um espaço, no lugar de "filtro em $\tau(X)$". Aliás, quando for claro, deixaremos de dizer em qual reticulado um filtro se "suporta".

Logo na próxima seção falaremos em "morfismos" entre reticulados ou álgebras booleanas: usaremos a noção natural.

1.3 O Teorema da Representação de Stone

Aqui mostraremos uma ferramenta que cria um espaço topológico compacto e zero-dimensional a partir de uma álgebra booleana.

Definição 1.1 *Seja* B *uma álgebra booleana. Definimos* $S(B) = \{\mathcal{U} : \mathcal{U}$ *é um ultrafiltro em* $B\}$, *e, para cada* $a \in B$, $\lambda(a) = \{\mathcal{U} \in S(B) : a \in \mathcal{U}\}$.

Proposição 1.3 *Para uma álgebra booleana* B *e* $a, b \in B$, *valem:*

(1) $\lambda(1) = S(B)$,

(2) $\lambda(a) = \emptyset \Leftrightarrow a = 0$,

(3) $\lambda(a \vee b) = \lambda(a) \cup \lambda(b)$,

(4) $\lambda(a \wedge b) = \lambda(a) \cap \lambda(b)$,

(5) $\lambda(a') = S(B) \setminus \lambda(a)$,

(6) Para $B' \subseteq B$, *não-vazio, temos* $\bigcap_{a \in B'} \lambda(a) = \{\mathcal{U} \in S(B) : B' \subseteq \mathcal{U}\}$.

Demonstração O item (1) é trivial, já que os elementos de $S(B)$ são filtros e 1 é o máximo de B. O item (5) é conseqüência imediata de (3) e (4). (4) é trivial, já que estamos trabalhando com filtros. (3) é conseqüência imediata da proposição 1.2. (6) é trivial pela definição dos objetos em uso.

(2) Sempre temos $0 \notin \mathcal{F}$, para qualquer filtro $\mathcal{F}$ em B. Agora supondo $a \neq 0$, construímos o filtro $\mathcal{G} = \{b \in B : a \leq b\}$ em B. Como existe $\mathcal{U} \in S(B)$ que contém $\mathcal{G}$, pela proposição 1.1, temos que $\lambda(a) \neq \emptyset$. ■

Podemos definir em $S(B)$ uma topologia com base $\{\lambda(a) : a \in B\}$. Assim $S(B)$ equipado com esta topologia é chamado de **Espaço de Stone de** B. Observamos que $\{\lambda(a) : a \in B\} \subseteq \mathcal{B}(S(B))$, e que, a aplicação $a \in B \mapsto \lambda(a)$ é injetora.

Lembramos que um espaço é **zero-dimensional** se tiver uma base constituída de abertos-fechados.

Teorema 1.1 (Teorema da Representação de Stone) *Para B uma álgebra booleana temos:*

(1) $S(B)$ é um espaço de Hausdorff compacto e zero-dimensional,

(2) $\{\lambda(a) : a \in B\} = \mathcal{B}(S(B))$,

(3) a aplicação $a \in B \mapsto \lambda(a)$ é um isomorfismo "booleano" de B sobre $\mathcal{B}(S(B))$.

Demonstração (1) Claramente $S(B)$ é zero-dimensional.

Dados $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in S(B)$, distintos, temos que existem $u \in \mathcal{U}$ e $u \in \mathcal{V}$ tais que $u \wedge v = 0$, pela proposição 1.1. Assim separamos $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ por $\lambda(u)$ e $\lambda(v)$, respectivamente.

Seja $\mathcal{F}$ um filtro de fechados de $S(B)$. Queremos mostrar que $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Podemos construir o filtro $\mathcal{G} = \{a \in B : \lambda(a) \in \mathcal{F}\}$ em B, já que $\mathcal{F}$ é filtro e $\{\lambda(a) : a \in B\}$ também é base de fechados de $S(B)$. Seja $\mathcal{U} \in S(B)$ que contém $\mathcal{G}$. Suponha $F \in \mathcal{F}$ e temos que $F = \bigcap_{a \in A} \lambda(a)$, para algum $A \subseteq B$. Assim $A \subseteq \mathcal{G}$, visto que $\lambda(a)$ é fechado para qualquer $a \in A$. Logo $A \subseteq \mathcal{G} \subseteq \mathcal{U}$ e $\mathcal{U} \in \bigcap_{a \in A} \lambda(a) = F$. Daí $\mathcal{U} \in \bigcap \mathcal{F}$.

(2) Falta-nos mostrar uma continência. Seja Ω um aberto-fechado de $S(B)$ e seja $A \subseteq B$ tal que $\Omega = \bigcup_{a \in A} \lambda(a)$. Como Ω é fechado e $S(B)$ é compacto, Ω é compacto, e existe $A' \subseteq A$, finito, tal que $\Omega \subseteq \bigcup_{a \in A'} \lambda(a)$. Logo $\Omega = \lambda(\bigvee A')$, lembrando que $\bigvee A'$ existe pois que A' é finito.

(3) O item anterior nos deu a sobrejetividade. A proposição 1.3 completa a demonstração que a citada aplicação é isomorfismo de álgebra booleana. ■

Proposição 1.4 *Seja B uma álgebra booleana. Para $\emptyset \neq T \subseteq S(B)$, definimos $\mathcal{F}(T) = \{a \in B : T \subseteq \lambda(a)\}$. Então $\mathcal{F}(T)$ é um filtro em B, e, $\overline{T}^{S(B)} = \bigcap_{a \in \mathcal{F}(T)} \lambda(a) = \{\mathcal{U} \in S(B) : \mathcal{F}(T) \subseteq \mathcal{U}\}$.*

Demonstração Claramente é filtro em B. Vejamos as igualdades.

Seja $\mathcal{U} \in \overline{T}^{S(B)}$ e $a \in \mathcal{F}(T)$. Dado $b \in \mathcal{U}$, temos que $\emptyset \neq \lambda(b) \cap T \subseteq \lambda(b) \cap \lambda(a) = \lambda(b \wedge a)$, ou seja, $a \wedge b \neq 0$. Como a encontra $\mathcal{U}$ que é ultrafiltro em B, $a \in \mathcal{U}$ e $\mathcal{U} \in \lambda(a)$. Agora suponha $\mathcal{U} \in \bigcap_{a \in \mathcal{F}(T)} \lambda(a) \setminus \overline{T}^{S(B)}$. Assim, existe $b \in \mathcal{U}$ tal que $T \cap \lambda(b) = \emptyset$. Logo $T \subseteq S(B) \setminus \lambda(b) = \lambda(b')$ e $b' \in \mathcal{F}(T)$. Mas $\mathcal{U} \in \lambda(b')$ e $b' \in \mathcal{U}$, e chegamos a um absurdo.

A última igualdade é conseqüência do item (6) da proposição 1.3. ■

1.4 Extensões de Espaços

Ao longo do trabalho usaremos muitos resultados acerca das extensões de um espaço dado. Alguns deles até triviais mas faz-se necessário enunciá-los para que possamos convencionar notação. O que veremos aqui está melhor discutido e mais completamente enunciado no capítulo 4 de [PW87].

Diremos que Y é uma **extensão** de X se X é subespaço denso de Y. Neste caso, chamaremos $Y \setminus X$ de **resto** de X em Y.

Resultado conhecido e freqüente exercício de provas de topologia é a proposição seguinte:

Proposição 1.5 *Sejam Y uma extensão de X, Z um espaço de Hausdorff e $f \in C(X, Z)$. Então f tem no máximo uma extensão contínua de Y em Z.* ■

Não fugindo à regra, queremos trabalhar com as extensões de um espaço mas sem nos preocuparmos com o fato que temos uma classe e não um conjunto. Sem contar que queremos identificar as que são homemomorfas por funções contínuas que estendam as "inclusões".

Proposição 1.6 *Se Y é uma extensão de Hausdorff de X, então $|Y| \leq 2^{2^{|X|}}$.*

Demonstração Para cada $p \in Y$, definimos $O^p = \{U \cap X : U \in \tau(Y) \text{ e } p \in U\}$ (mostraremos em outro instante que O^p é um filtro de abertos de X). Se $p, q \in Y$ e $p \neq q$ temos que existem $U_1, U_2 \in \tau(Y)$, tais que $p \in U_1$, $q \in U_2$ e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Se $O^p = O^q$, existe $V \in \tau(Y)$ tal que $q \in V$ e $V \cap X = U_1 \cap X$. Assim $q \in V \cap U_2$, e, como X é denso em Y, $V \cap U_2 \cap X \neq \emptyset$. Mas $V \cap U_2 \cap X = U_1 \cap U_2 \cap X$ e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Logo $O^p \neq O^q$. Assim, $p \in Y \mapsto O^p \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ é uma aplicação injetora. ■

Definição 1.2 *(1) Duas extensões Y_1 e Y_2 de X serão ditas* **equivalentes** *se existe um homeomorfismo $h : Y_1 \to Y_2$ tal que $h(x) = x$, para todo $x \in X$. O fato de Y_1 ser equivalente a Y_2 será denotado por $Y_1 \equiv_X Y_2$.*

(2) Dado X um espaço, seja $\mathcal{E}(X)$ a classe das extensões de Hausdorff de X tal que dois elementos distintos de $\mathcal{E}(X)$ não são equivalentes e qualquer extensão de X é equivalente a algum membro de $\mathcal{E}(X)$. Se Y é uma extensão de X e $Y \equiv_X Z$, onde $Z \in \mathcal{E}(X)$, identificaremos Y e Z, e escreveremos $Y \in \mathcal{E}(X)$ para denotar esta identificação.

Sempre identificaremos as extensões de um espaço dado considerando-as iguais. Daí chegamos ao corolário seguinte, resultado imediato da proposição 1.6.

Corolário Para um espaço X, $\mathcal{E}(X)$ é um "conjunto". ■

Definição 1.3 *Para um espaço X e $Y, Z \in \mathcal{E}(X)$ definimos que Y* **será maior projetivamente que** *Z, e escreveremos $Z \leq Y$ (ou $Y \geq Z$), se existe uma função contínua $f : Y \to Z$ tal que $f|_X = id_X$.*

Esta relação define uma ordem em $\mathcal{E}(X)$.

Proposição 1.7 *Para um espaço X, $(\mathcal{E}(X), \leq)$ é um semi-reticulado superior completo.*

Demonstração Primeiramente $\geq$, da maneira como foi definida, é claramente reflexiva e transitiva. Suponha $Y \geq Z$ e $Z \geq Y$, onde $Y, Z \in \mathcal{E}(X)$. Então existem $f \in \mathcal{C}(Y, Z)$ e $g \in \mathcal{C}(Z, Y)$ tais que $f|_X = g|_X = id_X$. Assim $f \circ g \in \mathcal{C}(Z, Z)$, e $(f \circ g)|_X = id_Z|_X$. Logo, pela proposição 1.5, $f \circ g = id_Z$ e $Y \equiv_X Z$.

Para mostrarmos que é semi-reticulado superior completo, basta vermos que dado $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{E}(X)$, não-vazio, $\overline{e[X]}^{\prod S}$ é o supremo de S, onde $e : X \to \prod S$ (lembrando que $\prod S = \prod_{T \in S} T$) é a função contínua definida por $e(x) = (x)_{T \in S}$ (não nos ateremos com os

detalhes deste fato já que estão feitos em muitos livros e estes não serem os principais objetos de estudo deste trabalho). ■

Definição 1.4 *Seja $\emptyset \neq Q \subseteq \mathcal{E}(X)$ para um espaço X. Um extensão $Y \in \mathcal{E}(X)$ é um* **máximo projetivo** *em (ou de) Q, se $Y \in Q$ e $Y \geq Z$ para qualquer $Z \in Q$ (note que $Y \geq \bigvee Q$, e já que $Y \in Q$, segue que $\bigvee Q \geq Y$, então $Y \equiv_X \bigvee Q$).*

Corolário Para um espaço X, o máximo projetivo de $\mathcal{E}(X)$ é X. ■

Definição 1.5 *(1) Seja $\mathcal{P}$ uma classe de espaços fechada por homeomorfismos, i.e., se $X \in \mathcal{P}$ e X é homeomorfo a Y, então $Y \in \mathcal{P}$. Estas classes são chamadas de* **repletas**.

*(2) Para um espaço X, seja $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}(X) = \{Y \in \mathcal{E}(X) : Y \in \mathcal{P}\}$. O conjunto $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}(X)$ é chamado de conjunto das $\mathcal{P}$-***extensões de*** X.

Chamaremos uma classe $\mathcal{P}$ de **hereditariamente fechada** ou **hereditária nos fechados** se $A \in \mathcal{P}$, sempre que A for fechado de X e $X \in \mathcal{P}$. E diremos que $\mathcal{P}$ é **hereditariamente produtiva** ou **hereditária por produtos** se $\prod A \in \mathcal{P}$ toda vez que $A \subseteq \mathcal{P}$ e A for conjunto.

Proposição 1.8 *Sejam X um espaço e $\mathcal{P}$ uma classe repleta hereditariamente fechada e produtiva. Se $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}(X) \neq \emptyset$ então $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}(X)$ é um semi-reticulado superior completo de $\mathcal{E}(X)$; em particular, $\mathcal{E}_{\mathcal{P}}(X)$ tem um máximo projetivo.*

Demonstração Dado $\emptyset \neq S \subseteq \mathcal{E}_{\mathcal{P}}(X)$ temos que $Z = \bigvee S$ existe em $\mathcal{E}(X)$. Assim $Z \geq Y$ para todo $Y \in S$, e nos basta mostrar que $Z \in \mathcal{E}_{\mathcal{P}}(X)$. Pela demonstração da proposição 1.7, temos que $Z \equiv_X \overline{e[X]}^{\prod S}$ onde $e : X \to \prod S$ é mesma definida naquela proposição. Já que $\mathcal{P}$ é hereditariamente produtiva temos que $\prod S \in \mathcal{E}_{\mathcal{P}}(X)$. E, por $\mathcal{P}$ ser hereditariamente fechada, $\overline{e[X]}^{\prod S} \in \mathcal{E}_{\mathcal{P}}(X)$. Assim $Z \in \mathcal{E}_{\mathcal{P}}(X)$. ■

Esta proposição (muito interessante) logo nos motiva a perguntar se as condições são necessárias. O fato da classe $\mathcal{P}$ ser repleta é essencial visto que estamos identificando as extensões equivalentes. Quanto ao fato de ser hereditariamente fechada, este não será essencial. Usaremos para contra-exemplo a classe dos espaços H-fechados que estudaremos mais a frente.

Agora apresentaremos dois resultados que dão condições necessárias e suficientes para que possamos estender uma função contínua.

Proposição 1.9 *Seja $Y \in \mathcal{E}(X)$ para um espaço X, e sejam Z um espaço regular e uma função $f \in \mathcal{C}(X, Z)$. São equivalentes:*

(1) existe uma função $F \in \mathcal{C}(Y, Z)$ que estende f,

(2) para todo $y \in Y$, o filtro $\mathcal{F}_y = \{A \subseteq Z : f[U] \subseteq A$, para algum $U \in O^y\}$ converge (lembrando que $O^y = \{W \cap X : y \in W \in \tau(Y)\}$). ■

Não queremos nos aprofundar em discussões aqui - não é o objetivo deste trabalho - mas, vale observar que, a regularidade de Z não pode ser omitida.

Logo mais estaremos falando nas extensões compactas de um espaço, sendo assim, enunciamos um resultado também referente a extensões de funções contínuas, com alguns objetos compactos.

Proposição 1.10 *Para um espaço $X, Y \in \mathcal{E}(X)$, Z um espaço compacto e de Hausdorff, e $f \in \mathcal{C}(X, Z)$. Então f tem uma extensão $F \in \mathcal{C}(Y, Z)$ se, e somente se, $\overline{f^{-1}[B]}^Y \cap \overline{f^{-1}[C]}^Y = \emptyset$, para quaisquer B e C fechados em Z e disjuntos.* ■

Passemos agora a discutir as **compactificações** de um espaço, que será como chamaremos as extensões compactas (de Hausdorff). Denotaremos a classe dos espaços compactos por $\mathcal{K}$, e, para X um espaço, chamaremos $\mathcal{E}_{\mathcal{K}}(X)$ de $\mathcal{K}(X)$. Lembremos que $\mathcal{K}(X)$ é não-vazio se, e somente se, X é de Tychonoff (ou completamente regular), ou seja, quando $\mathcal{Z}(X)$ for base para os fechados de X. É fato conhecido que um subespaço fechado de uma compacto sempre será compacto. E ainda, pelo famoso teorema de Tychonoff, o produto topológico de espaços compactos é compacto. Sendo assim, $\mathcal{K}$ é repleta e hereditariamente fechada e produtiva, e, pela proposição 1.8, para um espaço de Tychonoff X, $\mathcal{K}(X)$ tem um máximo produtivo.

Definição 1.6 *Para um espaço de Tychonoff X, denotamos o máximo projetivo de $\mathcal{K}(X)$ por βX e o chamamos de* **compactificado de Stone-Čech de X.**

Temos várias demonstrações do fato: se X é de Tychonoff, então $\mathcal{K}(X) \neq \emptyset$. Nas mais comuns, sempre explicitamos βX e sempre obtemos algumas propriedades desse espaço. O teorema seguinte mostra que, de fato, essas propriedades definem o compactificado

de Stone-Čech. Novamente omitiremos sua demonstração que é comum nos livros de topologia, por exemplo, em [ENG89], seção 3.6.

Teorema 1.2 *O compactificado de Stone-Čech βX de um espaço de Tychonoff X é único (a menos da identificação feita na definição 1.2), por entre as compactificações de X, com respeito a cada uma das propriedades abaixo:*

(1) βX é o máximo projetivo de $\mathcal{K}(X)$,

(2) toda função $f \in C(X, K)$, para K um espaço compacto, tem uma extensão contínua $F \in C(\beta X, K)$,

(3) $\overline{Z_1}^{\beta X} \cap \overline{Z_2}^{\beta X} = \overline{Z_1 \cap Z_2}^{\beta X}$, para quaisquer $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}(X)$,

(4) todo ponto de βX é o limite de um único $\mathcal{Z}(X)$-ultrafiltro. ■

Corolário Se $B \in \mathcal{B}(X)$, para um espaço de Tychonoff X, então $\overline{B}^{\beta X} \in \mathcal{B}(\beta X)$. ■

Capítulo 2

Espaços H-fechados e H-minimais

É fato conhecido que todo subespaço compacto de um espaço de Hausdorff será sempre um subconjunto fechado deste. A recíproca não é verdadeira. Aos espaços que tiverem esta propriedade daremos o nome de H-fechados. Curiosamente (será mesmo?) algumas equivalências com esta propriedade se assemelham em muito às caracterizações para um espaço compacto.

Embora nem todo espaço possa ser imerso densamente em um espaço compacto (somente os de Tychonoff), veremos que qualquer espaço terá extensão H-fechada. De certa maneira, os espaços compactos estão para os de Tychonoff, assim como os H-fechados estão para os de Hausdorff.

2.1 Relembrando os Compactos

Não é nenhuma novidade a definição de espaço compacto. Também serão as usuais as noções de recobrimento, subrecobrimento e "família com a p.i.f." (propriedade da intersecção finita). As proposições abaixo só estão aqui para refrescar a memória e para que possamos ver um claro paralelo entre a compacidade e o fato de ser H-fechado.

Proposição 2.1 *Para um espaço X, não necessariamente de Hausdorff, são equivalentes:*

(1) X é compacto,

(2) toda família de fechados com a p.i.f. tem intersecção não-vazia,

(3) todo filtro em X tem aderência não-vazia,

(4) todo ultrafiltro em X converge. ■

Proposição 2.2 *Se X é compacto, Y é espaço , e $f \in C(X,Y)$ é sobrejetora, então Y é compacto.* ■

Como já citamos a compacidade é hereditamente fechada e produtiva.

2.2 Os H-fechados e a Extensão de Katětov

Definição 2.1 *Um espaço X, de Hausdorff, é* **H-fechado** *se X é fechado em todo espaço de Hausdorff que contenha X como um subespaço.*

Aqui estão propriedades que se assemelham às dos compactos.

Teorema 2.1 *Para um espaço X, de Hausdorff, são equivalentes:*

(1) X é H-fechado,

(2) para todo recobrimento aberto de X, existe uma subfamília finita cuja união é densa em X,

(3) todo filtro de abertos de X tem aderência não-vazia,

(4) todo ultrafiltro de abertos de X converge.

Demonstração

(1) $\Rightarrow$ (3) Seja $\mathcal{F}$ um filtro em $\tau(X)$ com aderência vazia. Definimos $Y = X \cup \{\infty\}$, onde $\infty \notin X$, com seguinte topologia: $\Omega \subseteq Y$ é aberto se, e só se,

- $\Omega \cap X \in \tau(X)$,
- $\infty \in \Omega \Rightarrow \bigcap \mathcal{F}' \subseteq \Omega \cap X$, para alguma subfamília finita não-vazia $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$.

Como $\mathcal{F}$ é filtro, X é subespaço denso de Y e $X \in \tau(Y)$. Assim, para chegarmos a uma contradição, basta vermos que Y é de Hausdorff, já que X é H-fechado.

Sejam $x, y \in Y$, $x \neq y$. Se $x, y \in X$ podemos separá-los por abertos de Y, visto que X é de Hausdorff e $\tau(X) \subset \tau(Y)$. Supondo $x = \infty$ temos que existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $y \notin \overline{F}^X$ e assim separamos x e y com os abertos disjuntos de Y, $F \cup \{\infty\}$ e $X \setminus \overline{F}^X$, respectivamente.

(3) $\Rightarrow$ (4) Dado um $\mathcal{U}$ ultrafiltro em $\tau(X)$, $ad_X(\mathcal{U}) = c_X(\mathcal{U})$, pela proposição 1.1. Por hipótese, $ad_X(\mathcal{U}) \neq \emptyset$ e $\mathcal{U}$ converge.

(4) $\Rightarrow$ (2) Seja $\mathcal{D}$ um recobrimento aberto de X tal que nenhuma subfamília finita sua seja densa em X. Definimos o filtro $\mathcal{F}$ em $\tau(X)$ por:

$$\Omega \in \mathcal{F} \Leftrightarrow X \setminus \overline{\bigcup \mathcal{D}'}^X \subseteq \Omega, \text{ para alguma subfamília finita } \mathcal{D}' \text{ de } \mathcal{D}.$$

Pela proposição 1.1, existe $\mathcal{U}$ ultrafiltro em $\tau(X)$ que contém $\mathcal{F}$. Seja $x \in c_X(\mathcal{U})$. Como $\mathcal{D}$ é recobrimento de X existe $D \in \mathcal{D}$ tal que $x \in D$. Assim $D \in \mathcal{U}$. Como $X \setminus \overline{D}^X \in \mathcal{F}$ temos que $D, X \setminus \overline{D}^X \in \mathcal{U}$. Logo $\emptyset = D \setminus \overline{D}^X = D \cap (X \setminus \overline{D}^X) \in \mathcal{U}$, o que que é um absurdo.

(2) $\Rightarrow$ (1) Seja Y um espaço de Hausdorff que contenha X como subespaço e suponha que exista $y \in \overline{X}^Y \setminus X$. Para cada $x \in X$ temos que existe $D_x \in \tau(Y)$ tal que $x \in D_x$ e $y \notin \overline{D_x}^Y$. Assim $\{D_x \cap X : x \in X\}$ é um recobrimento por abertos de X e, por hipótese, existe $X' \subseteq X$, finito, tal que

$$X = \bigcup_{x \in X'} \overline{D_x \cap X}^X = \bigcup_{x \in X'} \overline{D_x \cap X}^Y \cap Y \subseteq \bigcup_{x \in X'} \overline{D_x}^Y.$$

Logo $y \in \overline{X}^Y \setminus \bigcup_{x \in X'} \overline{D_x}^Y$, e, por conseqüência, $X \setminus \bigcup_{x \in X'} \overline{D_x}^Y \neq \emptyset$, chegando a uma contradição com a continência exposta acima. ■

Corolário Um espaço X, de Hausdorff, é compacto se, e somente se, é H-fechado e regular.

Demonstração ($\Rightarrow$) Imediato da definição de H-fechado.

($\Leftarrow$) Seja $\mathcal{D}$ um recobrimento aberto de X. Para cada x em X existe D_x em $\mathcal{D}$ ao qual x pertence. Como X é regular existe V_x, vizinhança aberta de x, tal que $\overline{V_x}^X \subseteq D_x$. Assim $\{V_x : x \in X\}$ é recobrimento aberto de X e, pelo item (2) da proposição 2.1, existe X', subconjunto finito de X, tal que $X = \overline{\bigcup_{x \in X'} V_x}^X$.

Logo, $X = \bigcup_{x \in X'} \overline{V_x}^X \subseteq \bigcup_{x \in X'} D_x = \bigcup\{D_x : x \in X'\}$, e $\mathcal{D}$ admite subrecobrimento finito para X. ■

Nos espaços H-fechados não temos a hereditariedade nos fechados. Temos a hereditariedade nos fechados-regulares. Lembramos que $F \subseteq X$ é fechado-regular, se $\overline{\overset{\circ}{F}}^X = F$. Assim os fechados-regulares são os fechos dos abertos de X.

Proposição 2.3 *Se X é H-fechado e $U \in \tau(X)$, então $\overline{U}^X$ é H-fechado.*

Demonstração Usaremos o item (3) do teorema 2.1.

Seja $\mathcal{F}$ um filtro de abertos de $\overline{U}^X$. Se $\Omega \in \tau(X)$ e $\Omega \cap \overline{U}^X \neq \emptyset$, $\Omega \cap U$ é aberto não-vazio de X. Assim fica bem definido o filtro $\mathcal{D} = \{W \in \tau(X) : \Omega \cap U \subseteq W$, para algum $\Omega \in \tau(X)$ tal que $\Omega \cap \overline{U}^X \in \mathcal{F}\}$ de abertos de X.

Por hipótese existe $x \in ad_X(\mathcal{D})$. Como $U \in \mathcal{D}$, $x \in \overline{U}^X$. Vejamos que $x \in ad_{\overline{U}^X}(\mathcal{F})$. Suponha $A \in \mathcal{F}$ e $x \in B \in \tau(\overline{U}^X)$. Sendo assim existem $\Omega, W \in \tau(X)$ tais que $A = \Omega \cap \overline{U}^X$ e $B = W \cap \overline{U}^X$. Logo $\Omega \cap U \in \mathcal{D}$ e $x \in \overline{\Omega \cap U}^X \cap W$. Portanto $W \cap \Omega \cap U \neq \emptyset$, $A \cap B = \Omega \cap W \cap \overline{U}^X \neq \emptyset$ e $x \in \overline{A}^{\overline{U}^X}$. ■

Lembremos que um espaço X é dito **de Urysohn**, se, para quaisquer $x, y \in X$, existem $U_1, U_2 \in \tau(X)$, tais que $x \in U_1, y \in U_2$ e $\overline{U_1}^X \cap \overline{U_2}^X = \emptyset$.

Para cada espaço X, chamamos o espaço topológico com o mesmo suporte de X e a topologia gerada pelos abertos-regulares de **semi-regularização** de X. Denotaremos este espaço por X_s. É fato conhecido que X será de Hausdorff se, e só se, X_s o for. Diremos que X será **semi-regular**, se $X_s = X$. Com simplíssima álgebra de conjuntos provamos que X_s é sempre semi-regular, $\mathcal{RO}(X) = \mathcal{RO}(X_s)$, e $\overline{U}^X = \overline{U}^{X_s}$, para qualquer U aberto de X.

Depois do Corolário seguinte colocaremos um exemplo de um espaço que será H-fechado e não-compacto, e, ainda, semi-regular e não-regular.

Corolário Um espaço X, de Hausdorff, é compacto se, e somente se, é H-fechado, semi-regular e de Urysohn.

Demonstração Claramente temos uma das implicações. Para chegarmos a equivalência, usaremos o primeiro corolário do teorema 2.1: vejamos que X é regular, ou seja, mostremos que todo ponto de X tem sistema fundamental de vizinhanças fechadas.

Suponha $x \in U \in \tau(X)$. Dada a semi-regularidade, existe $V \in \mathcal{RO}(X)$, ou seja, um aberto-regular de X, tal que $x \in V \subseteq U$. Assim $F = X \setminus V$ é fechado-regular. Para cada $y \in F$ existem $A_y, B_y \in \tau(X)$ tais que $x \in A_y$, $y \in B_y$ e $\overline{A_y}^X \cap \overline{B_y}^X = \emptyset$, pois X é de Urysohn. Assim $\{B_y \cap F : y \in F\}$ é recobrimento aberto de F que é H-fechado pela proposição anterior. Então existe $C \subseteq F$, finito, tal que

$$F = \bigcup_{z \in C} \overline{B_z \cap F}^F \subseteq \bigcup_{z \in C} \overline{B_z}^X.$$

Logo $x \in W \in \tau(X)$ e $\overline{W}^X \subseteq V \subseteq U$, onde $W = \bigcap_{z \in C} A_z$. ■

Exemplo 2.1 *Seja X o subespaço $]0,1] \times [-1,1]$ de $\mathbb{R}^2$. Escolhamos p^+ e p^- dois pontos quaisquer que não estejam em X, e consideremos $Y = X \cup \{p^+, p^-\}$. Definamos uma topologia em Y: $U \subseteq Y$ é aberto em Y se*

- *$U \cap X \in \tau(X)$,*
- *se $p^+ \in U$, então existe $r > 0$ tal que $]0, r[\times]0,1] \subset U$, e,*
- *se $p^- \in U$, então existe $s > 0$ tal que $]0, s[\times[-1,0[\subset U$.*

Vejamos que Y é H-fechado. Dado $\mathcal{C}$ um recobrimento aberto de Y, temos que existem U^+ e U^- em $\mathcal{C}$ tais que $p^+ \in U^+$ e $p^- \in U^-$. Assim existe $r > 0$ tal que $]0, r[\times]0,1] \subset U^+$ e $]0, r[\times[-1,0[\subset U^-$. Como $[r,1] \times [-1,1]$ é compacto, existe $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, finito, tal que $[r,1] \times [-1,1] \subseteq \bigcup \mathcal{C}'$. Assim $Y = \overline{U^+}^Y \cup \overline{U^-}^Y \cup (\bigcup \mathcal{C}')$.

É fácil ver que p^+ nem p^- têm sistema fundamental de vizinhanças fechadas. Logo Y não é compacto. Mas, ainda assim, Y é semi-regular.

Definição 2.2 *Sejam X e Y espaços, f uma função de X em Y, e $x_0 \in X$.*

*(1) f é θ-**contínua em** x_0 se para cada vizinhança aberta V de $f(x_0)$, existe uma vizinhança aberta U de x_0 tal que $f[\overline{U}^X] \subseteq \overline{V}^Y$.*

*(2) f é θ-**contínua** em X se f é θ-contínua em todo ponto de X.*

(3) O conjunto das funções θ-contínuas de X em Y é denotado por $\theta\mathcal{C}(X,Y)$.

*(4) f é θ-**homeomorfismo** se f é bijeção e ambas f e f^{-1} são θ-contínuas.*

Junto com as funções θ-contínuas sempre aparece a noção de θ-fecho:

Definição 2.3 *Dados um espaço X e $U \subseteq X$, chamaremos de θ-**fecho** de U, e o denotaremos por $\overline{U}^{X_\theta}$, o conjunto $\{x \in X : \overline{V}^X \cap U \neq \emptyset$, para qualquer V, vizinhança aberta de $x\}$. Diremos, ainda, que U é θ-**fechado**, se $\overline{U}^{X_\theta} = U$.*

Conhecemos bem a equivalência para funções de X em Y (X e Y espaços),

$$f \in \mathcal{C}(X,Y) \Leftrightarrow f[\overline{U}^X] \subseteq \overline{f[U]}^Y, \text{ para qualquer } U \subseteq X.$$

Vejamos um resultado θ-análogo:

Proposição 2.4 *Para os espaços X e Y, e $f : X \to Y$, f é θ-contínua se, e somente se, $f[\overline{U}^{X_\theta}] \subseteq \overline{f[U]}^{Y_\theta}$, para qualquer $U \subseteq X$.*

Demonstração Suponha, primeiramente, $f \in \theta\mathcal{C}(X,Y)$ e $U \subseteq X$. Dados $x \in \overline{U}^{X_\theta}$ e $V \in \tau(Y)$, tais $f(x) \in V$, temos que existe $W \in \tau(X)$, tal que $x \in W$ e $f[\overline{W}^X] \subseteq \overline{V}^Y$. Como $\overline{W}^X \cap U \neq \emptyset$ temos que $\emptyset \neq f[U] \cap f[\overline{W}^X] \subseteq f[U] \cap \overline{V}^Y$. Assim $f(x) \in \overline{f[U]}^{Y_\theta}$.

Agora suponhamos existir $x \in X$ tal que f não é θ-contínua em x. Então existe $Q \in \tau(Y)$ tal que $f(x) \in Q$ e $f[\overline{P}^X] \not\subseteq \overline{Q}^Y$, ou ainda, $\overline{P}^X \cap (X \setminus f^{-1}[\overline{Q}^Y]) \neq \emptyset$, para qualquer $P \in \tau(X)$, vizinhança de x. Sendo assim, $x \in \overline{X \setminus f^{-1}[\overline{Q}^Y]}^{X_\theta}$. Logo $f(x) \in \overline{f[X \setminus f^{-1}[\overline{Q}^Y]]}^{Y_\theta}$. Mas $f(x) \in Q \in \tau(Y)$, e daí, $\overline{Q}^Y \cap f[X \setminus f^{-1}[\overline{Q}^Y]] \neq \emptyset$, o que é um absurdo. ■

Vejamos algumas θ-propriedades importantes:

Proposição 2.5 *Para um espaço X, valem:*

(1) Se $A, B \in \mathcal{P}(X)$, $\overline{A \cup B}^{X_\theta} = \overline{A}^{X_\theta} \cup \overline{B}^{X_\theta}$,

(2) Se $U \in \tau(X)$, $\overline{U}^{X_\theta} = \overline{U}^X$,

(3) Para $A \subseteq X$, $A \subseteq \overline{A}^X \subseteq \overline{A}^{X_s} \subseteq \overline{A}^{X_\theta}$,

(4) Para $A \subseteq X$, $\overline{A}^{X_\theta}$ é um fechado de X,

(5) Se D é denso em X e $A \subseteq D$, então $\overline{A}^{D_\theta} = \overline{A}^{X_\theta} \cap D$,

(6) X é regular se, e só se, $\overline{U}^{X_\theta} = \overline{U}^X$, para qualquer $U \subseteq X$,

(7) X é de Hausdorff se, e só se, $\overline{\{x\}}^{X_\theta} = \{x\}$, para qualquer $x \in X$.

Demonstração As demonstrações de (1), (2), (3) e (4) são triviais a partir da definição.

(5) Seja $x \in \overline{A}^{D_\theta}$ e suponha $x \in U \in \tau(X)$. Então $x \in U \cap D \in \tau(D)$ e $\overline{U \cap D}^D \cap A \neq \emptyset$. Como $\overline{U \cap D}^D = \overline{U \cap D}^X \cap D \subseteq \overline{U}^X$, $x \in \overline{A}^{X_\theta} \cap D$. Agora suponha $x \in D \cap \overline{A}^{X_\theta}$ e $x \in V \in \tau(D)$. Então $V = U \cap D$, para algum $U \in \tau(X)$, e, daí, $\overline{U}^X \cap A \neq \emptyset$. Já que D é denso em X, $\overline{U}^X = \overline{U \cap D}^X = \overline{V}^X$ e $\overline{V}^D \cap A = \overline{V}^X \cap D \cap A = \overline{V}^X \cap A = \overline{U}^X \cap A$. Logo $x \in \overline{A}^{D_\theta}$.

(6) Suponha X regular e $U \subseteq X$. Dados $x \in \overline{U}^{X_\theta}$ e W uma vizinhança aberta de x, existe $V \in \tau(X)$ tal que $x \in V \subseteq \overline{V}^X \subseteq W$, já que x tem sistema fundamental de vizinhanças fechadas. Daí $\overline{V}^X \cap U \neq \emptyset$ e $W \cap U \neq \emptyset$. Assim $x \in \overline{U}^X$.

Agora suponha $\overline{U}^X = \overline{U}^{X_\theta}$, para qualquer $U \subseteq X$. Dados $x \in \Omega \in \tau(X)$, temos que $x \notin X \setminus \Omega = \overline{X \setminus \Omega}^X = \overline{X \setminus \Omega}^{X_\theta}$. Assim existe $O \in \tau(X)$ tal que $x \in O$ e $\overline{O}^X \cap (X \setminus \Omega) = \emptyset$.

Sendo assim todo ponto de X tem sistema fundamental de vizinhanças fechadas.

(7) Suponha X de Hausdorff. Dados $y \neq x$, temos que existem $U_1, U_2 \in \tau(X)$, tais que $x \in U_1, y \in U_2$ e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Assim $y \notin \overline{U_1}^X = \overline{U_1}^{X_\theta}$ e $y \notin \overline{\{x\}}^{X_\theta}$. A volta é trivial pela definição de θ-fecho. ■

Dado um filtro $\mathcal{F}$, em X, podemos falar em **θ-aderência** de $\mathcal{F}$, que é a intersecção $ad_X^\theta(\mathcal{F}) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}^{X_\theta}$. Podemos, então, conseguir uma propriedade para os H-fechados muito parecida com a do item (3) da proposição 2.1:

Proposição 2.6 *Para um espaço X, de Hausdorff, são equivalentes:*

(1) X é H-fechado, e,

(2) todo filtro em X tem θ-aderência não-vazia.

Demonstração ($\Rightarrow$) Seja $\mathcal{F}$ um filtro em X. Consideremos $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cap \tau(X)$ e temos um filtro de abertos de X. Por hipótese, existe $x \in ad_X(\mathcal{F}')$. Suponha que exista $F \in \mathcal{F}$ tal que $x \notin \overline{F}^{X_\theta}$. Então existe U, vizinhança aberta de x, tal que $\overline{U}^X \cap F = \emptyset$. Assim $F \subseteq X \setminus \overline{U}^X$ e $X \setminus \overline{U}^X \in \mathcal{F}$. Sendo assim $X \setminus \overline{U}^X \in \mathcal{F}'$ e $x \in \overline{X \setminus \overline{U}^X}^X$. Mas $x \in U \in \tau(X)$ e $U \setminus \overline{U}^X \neq \emptyset$, o que é um absurdo.

($\Leftarrow$) Seja $\mathcal{G}$ um filtro de abertos de X. Consideremos $\mathcal{G}' = \{A \subseteq X : U \subseteq A$, para algum $U \in \mathcal{G}\}$ que será um filtro em X. Sendo assim $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}'$. Logo $\emptyset \neq ad_X^\theta(\mathcal{G}') \subseteq ad_X^\theta(\mathcal{G})$. Pelo item (2) da proposição 2.5, temos que $ad_X(\mathcal{G}) = ad_X^\theta(\mathcal{G})$, e, assim, $\mathcal{G}$ é fixo. ■

Proposição 2.7 *Se X, Y e Z são espaços e $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$. Então:*

(1) Se f é θ-contínua em $x_0 \in X$ e g é θ-contínua em $f(x_0)$, então $g \circ f$ é θ-contínua em x_0,

(2) $\mathcal{C}(X,Y) \subseteq \theta\mathcal{C}(X,Y)$,

(3) Se Y é regular, então $\mathcal{C}(X,Y) = \theta\mathcal{C}(X,Y)$,

(4) Se $A \subseteq X$, e $f \in \theta\mathcal{C}(X,Y)$, então $f|_A \in \theta\mathcal{C}(A,Y)$,

(5) Se D é denso em Y, $f \in \theta\mathcal{C}(X,Y)$, e $f[X] \subseteq D$, então $f \in \theta\mathcal{C}(X,D)$,

(6) Se $f \in \theta\mathcal{C}(X,Y)$ é sobrejeção e X é H-fechado, então Y é H-fechado,

(7) A identidade $id_X : X_s \to X$ é um θ-homeomorfismo,

(8) X é H-fechado se, e só se, X_s é H-fechado.

Demonstração (1) e (4) são imediatos da definição de θ-continuidade. (2) é conseqüência imediata de que f é função contínua de X em Y se, e só se, $f[\overline{A}^X] \subseteq \overline{f[A]}^Y$, para qualquer

$A \subseteq X$.

(3) Basta lembrarmos que todo ponto de Y tem sistema fundamental de vizinhanças fechadas.

(5) Seja $U \subseteq X$. Temos que $f[\overline{U}^{X_\theta}] \subseteq \overline{f[U]}^{Y_\theta} \cap D$. Pelo item (5) da proposição 2.5, $\overline{f[U]}^{D_\theta} = \overline{f[U]}^{Y_\theta} \cap D$. Assim $f \in \theta\mathcal{C}(X, D)$.

(6) Seja $\mathcal{F}$ um filtro em Y. Definimos $\mathcal{G} = \{U \subseteq X : f^{-1}[F] \subseteq U$, para algum $F \in \mathcal{F}\}$ e temos um filtro em X. Pela proposição 2.6, a θ-aderência de $\mathcal{G}$ é não-vazia. Seja $x \in ad_X^\theta(\mathcal{G})$. Dado $F \in \mathcal{F}$ temos que $f^{-1}[F] \in \mathcal{G}$ e, daí, $x \in \overline{f^{-1}[F]}^{X_\theta}$. Como f é θ-contínua, $f(x) \in \overline{f[f^{-1}[F]]}^{Y_\theta} = \overline{F}^{Y_\theta}$, pela proposição 2.4.

(7) Claramente $id_X : X \to X_s$ é contínua, e portanto θ-contínua, pois $\tau(X_s) \subseteq \tau(X)$. Vejamos que sua inversa (ela própria!) é θ-contínua. Sejam $x \in X$, U uma vizinhança aberta em X de x, e $V = \overset{\circ}{\overline{U}}^X$. Assim $x \in V \in \tau(X_s)$ e $\overline{V}^{X_s} = \overline{V}^X = \overline{U}^X$.

(8) Imediato dos dois últimos itens. ■

Definição 2.4 *Seja $\mathcal{H}$ a classe de todas os espaços H-fechados. Para um espaço X, chamaremos $\mathcal{E}_\mathcal{H}(X)$ de $\mathcal{H}(X)$.*

Como já observamos no parágrafo anterior à proposição 2.3 não temos que a classe $\mathcal{H}$ é hereditariamente fechada. Mas ainda assim ela é hereditariamente produtiva.

Proposição 2.8 *Sejam $\{X_a : a \in A\}$ uma família de espaços não-vazios. Então $\prod_{a\in A} X_a$ é H-fechado se, e somente se, X_a é H-fechado para todo $a \in A$.*

Demonstração Chamemos $\prod_{a\in A} X_a$ de Y e seja p_a a projeção de Y em X_a para $a \in A$.
($\Rightarrow$) Como p_a é contínua e sobrejetora, temos que X_a é H-fechado sempre que Y é H-fechado, para todo $a \in A$, pelo item (6) da proposição 2.7.
($\Leftarrow$) Usaremos o teorema 2.1. Seja $\mathcal{U}$ um ultrafiltro em $\tau(Y)$. Para cada $a \in A$ definimos $\mathcal{U}_a = \{\Omega \in \tau(X_a) : p_a^{-1}[\Omega] \in \mathcal{U}\}$ que é ultrafiltro em $\tau(X_a)$. Por hipótese, existe $x_a \in c_{X_a}(\mathcal{U}_a)$. Seja $x = (x_a)_{a\in A}$ e vejamos que $\mathcal{U}$ converge para x. Suponha W um "aberto básico" que seja vizinhança de x. Então $W = \bigcap_{a\in A'} p_a^{-1}[p_a[W]]$ para algum A' subconjunto finito de A. Então $p_a[W] \in \mathcal{U}_a$, para qualquer $a \in A$. Sendo assim $W \in \mathcal{U}$, visto que A' é finito. ■

Como $\mathcal{H}$ é uma classe que não é hereditariamente fechada não podemos aplicar a proposição 1.8. E como foi dito, $\mathcal{H}$ será um contra-exemplo para este resultado. Para um espaço de Hausdorff X, mostraremos que sempre $\mathcal{H}(X) \neq \emptyset$ e ainda explicitaremos o máximo projetivo de $\mathcal{H}(X)$ por construção. Este será chamado de **extensão de Katětov** de X e denotado por κX. Usaremos o mesmo método usado por Katětov.

Definimos $\kappa X = X \cup \{\mathcal{U} : \mathcal{U} \text{ é } \tau(X)\text{-ultrafiltro livre}\}$. É facilmente verificado que $\tau(X) \cup \{U \cup \{\mathcal{U}\} : U \in \mathcal{U} \in \kappa X \setminus X\}$ é uma base de abertos para uma topologia em κX. Agora nos referiremos a κX tanto como conjunto quanto espaço topológico munido com a referida topologia.

Teorema 2.2 *Seja X um espaço de Hausdorff. Então:*

(1) κX é uma extensão H-fechada de X e X é aberto em κX,

(2) Se $Y \in \mathcal{H}(X)$, então existe uma única função contínua $f : \kappa X \to Y$ tal que $f|_X = id_X$, i.e., $\kappa X \geq Y$,

(3) $\kappa X = \bigvee \mathcal{H}(X)$, ou seja, κX é o máximo projetivo de $\mathcal{H}(X)$.

Demonstração (1) Claramente temos que κX é extensão de X e que $X \in \tau(\kappa X)$. Vejamos que esta extensão é de Hausdorff e H-fechada.

Dados dois elementos de X podemos separá-los por abertos de X e, portanto, de κX. Sejam $x \in X$ e $\mathcal{U} \in \kappa X \setminus X$. Como $\mathcal{U}$ é ultrafiltro livre, temos que existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \notin \overline{U}^X$. Assim $X \setminus \overline{U}^X$ e $U \cup \{\mathcal{U}\}$ são abertos disjuntos de κX que separam x e $\mathcal{U}$. Agora suponha $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \kappa X \setminus X$, distintos. Como são ultrafiltros, existem $U \in \mathcal{U}$ e $V \in \mathcal{V}$, disjuntos. Logo $U \cup \{\mathcal{U}\}, V \cup \{\mathcal{V}\} \in \tau(\kappa X)$, são disjuntos e separam $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$.

Suponha $\mathcal{F}$ um ultrafiltro de abertos de κX. Como X é denso em κX, X encontra $\mathcal{F}$, e, como é aberto em κX, $X \in \mathcal{F}$. Logo um aberto Ω de κX pertence a $\mathcal{F}$ se, e só se, $\Omega \cap X \in \mathcal{F}$. Seja $\mathcal{G} = \{\Omega \cap X : \Omega \in \mathcal{F}\}$, e $\mathcal{G}$ é ultrafiltro de abertos de X. Observamos que $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Se $x \in c_X(\mathcal{G})$, temos que $\mathcal{F}$ converge para x. Caso $\mathcal{G}$ seja livre temos que $\mathcal{G} \in \kappa X \setminus X$ e $\mathcal{F}$ converge para $\mathcal{G}$.

(2) Queremos estender a função id_X a κX continuamente. Para cada $\mathcal{U} \in \kappa X \setminus X$, definimos $\mathcal{U}' = \{W \in \tau(Y) : W \cap X \in \mathcal{U}\}$. É fácil ver que $\mathcal{U}'$ é ultrafiltro de abertos de Y e assim converge para um único ponto em Y. Definimos $f(\mathcal{U})$ como sendo este ponto. E $f|_X = id_X$.

Claramente f é contínua em qualquer $x \in X$. Agora seja $\mathcal{U} \in \kappa X \setminus X$ e $\Omega \in \tau(Y)$, vizinhança de $f(\mathcal{U})$. Dado que $\mathcal{U}'$ converge para $f(\mathcal{U})$ temos que $\Omega \in \mathcal{U}'$ e portanto

$\Omega \cap X \in \mathcal{U}$. Sendo assim $(\Omega \cap X) \cup \{\mathcal{U}\}$ é vizinhança aberta de $\mathcal{U}$ e $f[(\Omega \cap X) \cup \{\mathcal{U}\}] \subseteq \Omega$.

Pela proposição 1.5 temos que f é única.

(3) Imediato dos dois itens anteriores. ■

Vejamos mais algumas propriedades da extensão de Katětov.

Proposição 2.9 *Para um espaço X temos:*

(1) $\kappa X \setminus X$ é um subespaço fechado e discreto de κX,

(2) Se $U \subseteq X$ é aberto, então $\overline{U}^{\kappa X} = \overline{U}^{X} \cup \{\mathcal{U} \in \kappa X \setminus X : U \in \mathcal{U}\}$,

(3) Se $U, V \subseteq X$ são abertos disjuntos de X , então $(\overline{U}^{\kappa X} \cap \overline{V}^{\kappa X}) \setminus X = \emptyset$,

(4) Se U e V são abertos de X tais que $\overline{U}^{X} \cap \overline{V}^{X} = \emptyset$,então $\overline{U}^{\kappa X} \cap \overline{V}^{\kappa X} = \emptyset$; em particular, se U é aberto-fechado de X, então $\overline{U}^{\kappa X}$ é aberto em κX.

Demonstração (1) Pelo teorema 2.2, $\kappa X \setminus X$ é fechado. Dado $\mathcal{U} \in \kappa X \setminus X$, seja $\Omega = X \cup \{\mathcal{U}\}$. Assim $\Omega \in \tau(\kappa X)$, $\{\mathcal{U}\} = \Omega \cap (\kappa X \setminus X)$ e $\kappa X \setminus X$ é subespaço discreto de κX.

(2) Basta vermos que $\overline{U}^{\kappa X} \setminus X = \{\mathcal{U} \in \kappa X \setminus X : U \in \mathcal{U}\}$. Dado $\mathcal{U} \in \kappa X \setminus X$, temos que $U \in \mathcal{U}$ se, e só se, U encontra $\mathcal{U}$. Assim, se $V \in \mathcal{U} \in \overline{U}^{\kappa X} \setminus X$, temos que $V \cap U = (V \cup \{\mathcal{U}\}) \cap U \neq \emptyset$, já que $V \cup \{\mathcal{U}\} \in \tau(\kappa X)$. E se $U \in \mathcal{U}$, temos $U \cap \Omega \neq \emptyset$ para qualquer Ω vizinhança aberta de $\mathcal{U}$, devido à definição de $\tau(\kappa X)$.

(3) Pelo item anterior, se $\mathcal{U} \in \overline{U}^{\kappa X} \cap \overline{V}^{\kappa X} \setminus X$, tem-se $U, V \in \mathcal{U}$. Mas $U \cap V = \emptyset$ e $\emptyset \notin \mathcal{U}$.

(4) Imediato dos dois itens anteriores. ■

2.3 Espaços H-minimais

Trataremos aqui de uma classe de espaços, sub-classe dos H-fechados, que está intimamente ligada aos espaços de Katětov, outro objeto de estudo deste trabalho.

Definição 2.5 *Um espaço de Hausdorff X é* **H-minimal** *se não existe subtopologia de $\tau(X)$ própria e de Hausdorff.*

Como já dito, os H-minimais serão também H-fechados. Terá algumas outras propriedades que serão equivalentes a esta condição.

Teorema 2.3 *Para um espaço X, de Hausdorff, são equivalentes:*

(1) X é H-minimal,

(2) Se Y é de Hausdorff e $f : X \to Y$ é contínua e bijetora, então f é homeomorfismo,

(3) X é H-fechado e semi-regular,

(4) Se $\mathcal{F}$ é um filtro em $\tau(X)$ tal que $ad_X(\mathcal{F})$ é unitário, então $\mathcal{F}$ converge.

Demonstração Provaremos (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) e (1) $\Leftrightarrow$ (4).

(1) $\Rightarrow$ (3) Temos que $\tau(X_s)$ é subtopologia de Hausdorff de $\tau(X)$, assim, pela definição, $X = X_s$. Agora suponha $\mathcal{F}$ um filtro de abertos de X com aderência vazia. Fixemos $x_0 \in X$ e consideremos a subtopologia de $\tau(X)$:

$$\tau^* = \mathcal{F} \cup \{U \in \tau(X) : x_0 \notin U\}.$$

Vejamos que $\tau^* \neq \tau(X)$ e que (X, τ^*) é de Hausdorff.

Como $x_0 \notin ad_X(\mathcal{F})$ temos que existem $U \in \tau(X)$ e $F \in \mathcal{F}$ tais que $x_0 \in U$ e $F \cap U = \emptyset$. Assim $U \in \tau(X) \setminus \tau^*$.

Agora suponha $x, y \in X$, distintos. Caso $x, y \in X \setminus \{x_0\}$ temos que existem $U_1, U_2 \in \tau(X)$ tais que $x \in U_1, y \in U_2$ e $x_0 \notin U_1 \cup U_2$. Assim $U_1, U_2 \in \tau^*$. Supondo, sem perda de generalidade, $y = x_0$, temos que existe $F_0 \in \mathcal{F}$ e $U_0 \in \tau(X)$ tais que $x_0 \in U_0$ e $U_0 \cap F_0 = \emptyset$. Também $x \notin ad_X(\mathcal{F})$ e existem $U_1 \in \tau(X)$ e $F_1 \in \mathcal{F}$ tais que $x \in U_1$ e $U_1 \cap F_1 = \emptyset$. Como X é de Hausdorff, achamos $V_0, V_1 \in \tau(X)$ tais que $x_0 \in V_0 \subseteq U_0, x \in V_1 \subseteq U_1$ e $V_0 \cap V_1 = \emptyset$. Assim $x_0 \in V_0 \cup (F_0 \cap F_1) \in \mathcal{F}$ e $x \in V_1 \in \tau^*$.

(3) $\Rightarrow$ (2) Dado $F \in \mathcal{R}(X)$ temos que F é H-fechado, pela proposição 2.3. Assim $f[F]$ é subespaço H-fechado de Y, pelos itens (2) e (6) da proposição 2.7, e, por isso, é fechado de Y. Então as imagens dos fechados-regulares de X são fechados em Y. Como X é semi-regular, temos que, se F' é fechado de X, então $F' = \bigcap \mathcal{D}$, para algum $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{R}(X)$. Logo, por f ser injetora, $f[F'] = \bigcap_{F \in \mathcal{D}} f[F]$ e é fechado de Y.

(2) $\Rightarrow$ (1) Suponha $\tau' \subseteq \tau(X)$ tal que o espaço $X' = (X, \tau')$ seja de Hausdorff. Temos que $id_X : X \to X'$ é contínua e bijetora. Assim id_X é homeomorfismo, por hipótese, e $X = X'$. Logo X é H-minimal.

(1) $\Rightarrow$ (4) Seja $\mathcal{F}$ um filtro de abertos de X tal que $ad_X(\mathcal{F}) = \{x\}$, para algum $x \in X$. Consideremos $\tau' = \{U \in \tau(X) : x \notin U\} \cup \mathcal{F}$ e vejamos que (X, τ') é de Hausdorff. Dados $a, b \in X \setminus \{x\}$, distintos, temos que existem $U_1, U_2 \in \tau(X)$ tais $a \in U_1, b \in U_2, x \notin U_1 \cup U_2$ e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Assim $U_1, U_2 \in \tau'$. Caso $y \in X$ e $x \neq y$, temos que existem $U \in \tau(X)$ e $F \in \mathcal{F}$ tais que $y \in U$ e $U \cap F = \emptyset$, já que $y \notin ad_X(\mathcal{F})$. Como X é de Hausdorff temos que existem $U_1, U_2 \in \tau(X)$ tais que $x \in U_1, y \in U_2 \subseteq U$ e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Logo $U_2 \in \tau', x \in U_1 \cup F \in \mathcal{F}$ e $U_2 \cap (U_1 \cup F) = \emptyset$. Sendo assim $\tau' = \tau(X)$. Se $x \in V \in \tau(X)$ temos que $V \in \tau'$ e $V \in \mathcal{F}$, ou seja, $\mathcal{F}$ converge para x.

(4) $\Rightarrow$ (1) Seja $\tau' \subseteq \tau(X)$ tal que (X, τ') seja de Hausdorff. Para cada $x \in X$ consideremos $\mathcal{F}_x = \{U \in \tau(X) : x \in V \subseteq U$, para algum $V \in \tau'\}$. Temos que $\mathcal{F}_x$ é filtro de abertos de X com $ad_X(\mathcal{F}_x) = \{x\}$, já que (X, τ') é de Hausdorff. Por hipótese, $\mathcal{F}_x$ converge para x. Então dado $U \in \tau(X)$ temos que para cada $x \in U$ existe $V_x \in \tau'$ tal que $x \in V_x \subseteq U$. Logo $U = \bigcup_{x \in U} V_x$ e, assim, $U \in \tau'$. Logo $\tau(X) = \tau'$ e X é H-minimal. ■

Corolário direto do teorema anterior associado ao corolário da proposição 2.3 é o resultado seguinte:

Corolário Um espaço de Hausdorff é compacto se, e somente se, é H-minimal e de Urysohn. ■

Ainda conseguimos um resultado deste teorema, conseqüência do item (8) da proposição 2.7:

Corolário Um espaço X é H-fechado se, e somente se, X_s é H-minimal. ■

2.4 Extensões Estritas e Simples

Logo estaremos falando da extensão de Fomin de um espaço. Ela será uma extensão dita "estrita". Daremos, então, um espaço aqui para falarmos deste tipo de extensão e aproveitaremos o embalo para falarmos também das "simples".

Definição 2.6 *(1) Dados $Y \in \mathcal{E}(X)$, para um espaço X, e $p \in Y$, denotaremos o conjunto $\{U \cap X : U \in \tau(Y)$ e $p \in U\}$ por O^p (ou O^p_Y, quando houver ambigüidade quanto a extensão de X com a qual estivermos trabalhando). Notemos que, se $x \in X$, temos que O^x é o filtro das vizinhanças abertas de x em X,*

(2) Se $U \in \tau(X)$, seja $oU = \{p \in Y : U \in O^p\}$ (quando houver ambigüidade, notaremos por $o_Y U$).

Lembrando da proposição 1.6, vejamos, finalmente, que O^p é filtro de abertos de X:

Lema 2.1 *Para $Y \in \mathcal{E}(X)$, X um espaço, O^p é $\tau(X)$-filtro para qualquer $p \in Y$.*

Demonstração Como X é denso temos que $\emptyset \notin O^p$. Ainda $X \in O^p$ e O^p é fechada por intersecção finita. Agora suponha $U \cap X \subseteq V \in \tau(X)$, para U vizinhança aberta de p. Consideremos $\mathcal{D} = \{W \in \tau(Y) : W \cap X \subseteq V\}$. Assim $T = \bigcup \mathcal{D} \in \tau(Y), T \cap X = V$ e $U \subseteq T$. Assim $V \in O^p$. ■

Definiremos uma subtopologia de Y, ou seja, uma nova topologia sobre o mesmo suporte de Y contida em $\tau(Y)$. Vejamos para isso a proposição seguinte:

Proposição 2.10 *Se $Y \in \mathcal{E}(X)$, U e V são abertos de X, então:*

(1) $oX = Y$ e $o(\emptyset) = \emptyset$,

(2) $(oU) \cap X = U$,

(3) $oU \cap oV = o(U \cap V)$,

(4) $oU = \bigcup\{W \in \tau(Y) : W \cap X \subseteq U\}$,

(5) $\{oT : T \in \tau(X)\}$ é uma base de abertos para uma topologia de Hausdorff $\tau^\#$ em Y que está contida em $\tau(Y)$,

(6) $(Y, \tau^\#)$ é uma extensão de X, e,

(7) $oU = Y \setminus \overline{X \setminus U}^Y$.

Demonstração Facilmente temos os itens (1),(2),(3), e (4) pelas definições dos objetos em questão e usando sempre que O^p é um $\tau(X)$-filtro.

(5) Pelo item (3) temos que o conjunto citado é base para uma topologia sobre o suporte de Y. Pelo item (4) temos que $\tau^\# \subseteq \tau(Y)$. Vejamos que $(Y, \tau^\#)$ é de Hausdorff.

Dados $p, q \in Y$, distintos temos que existem $V_1, V_2 \in \tau(Y)$, disjuntos, tais que $p \in V_1$ e $q \in V_2$. Sendo assim, $U_i = V_i \cap X \in \tau(X)$, para $i = 1, 2$. Pelo item (4), $V_i \subseteq o(U_i)$, para

$i = 1, 2$. Ainda, por (3), $o(U_1) \cap o(U_2) = \emptyset$. E assim, $o(U_1)$ e $o(U_2)$ são os abertos em $\tau^{\#}$ que procuramos.

(6) Claramente X é subespaço de $(Y, \tau^{\#})$. Como $oU = \emptyset$ se, e só se, $U = \emptyset$, para $U \in \tau(X)$. Temos que X é denso em $(Y, \tau^{\#})$.

(7) Como $(Y \setminus \overline{X \setminus U}^{Y}) \cap X = X \setminus (\overline{X \setminus U}^{Y} \cap X) = X \setminus \overline{X \setminus U}^{X} = U$, pelo item (4), $Y \setminus \overline{X \setminus U}^{Y} \subseteq oU$. Ainda, $oU \cap (X \setminus U) = (oU \cap X) \setminus U = U \setminus U = \emptyset$. Logo $\overline{X \setminus U}^{Y} \subseteq Y \setminus oU$, e, daí, $oU \subseteq Y \setminus \overline{X \setminus U}^{Y}$. ■

Observando melhor o item (4) da proposição anterior, o que estamos fazendo é escolhendo, em $\tau(Y)$, somente os "maiores abertos" tais que interceptados com X dão um aberto de X.

Definição 2.7 *O espaço $(Y, \tau^{\#})$ descrito no procedimento anterior é denotado por $Y^{\#}$. Assim $\tau^{\#} = \tau(Y^{\#})$. Nós diremos que Y é uma* **extensão estrita** *de X, se $Y = Y^{\#}$ (i.e., $\tau(Y) = \tau(Y^{\#})$).*

Vejamos uma condição suficiente para uma extensão ser estrita.

Proposição 2.11 *Seja $Y \in \mathcal{E}(X)$, para um espaço X. Então:*

(1) $\overset{\circ_Y}{\overline{U \cap X}}^{Y} = o(\overset{\circ_X}{\overline{U \cap X}}^{X})$, para todo $U \in \tau(Y)$,

(2) $\tau(Y_s) \subseteq \tau(Y^{\#})$, e,

(3) Se Y é semi-regular, então Y é uma extensão estrita.

Demonstração Claramente (2) e (3) são conseqüência de (1).

(1) Dado $U \in \tau(Y)$, sejam $W = \overset{\circ_Y}{\overline{U \cap X}}^{Y}$ e $V = \overset{\circ_X}{\overline{U \cap X}}^{X}$. Então

$$W \cap X \subseteq \overline{U \cap X}^{Y} \cap X = \overline{U \cap X}^{X}, \text{ e,}$$
$$W \cap X \subseteq V,$$

e, pelo item (4) da proposição 2.10, $W \subseteq oV$.

Ainda,

$$V \subseteq \overline{U \cap X}^{X} \subseteq \overline{U \cap X}^{Y}, \text{ e,}$$
$$\overline{V}^{Y} \subseteq \overline{U \cap X}^{Y}.$$

Logo $oV \subseteq \overline{oV}^Y = \overline{V}^Y \subseteq \overline{U \cap X}^Y$, por X ser denso em Y; e, $oV \subseteq W$. ■

Com este "processo", construímos uma topologia menos fina e ainda mantemos uma extensão. Agora veremos outra mameira de obter mais uma extensão.

Proposição 2.12 *Seja $Y \in \mathcal{E}(X)$, para um espaço X. Seja $\mathcal{B} = \{U \cup \{p\} : U \in O^p$ e $p \in Y\}$. Então:*

(1) $\mathcal{B}$ é uma base de abertos para uma topologia τ^+ em Y que contém $\tau(Y)$,

(2) (Y, τ^+) é uma extensão de X, e,

(3) $Y \setminus X$ é um subespaço fechado e discreto de (Y, τ^+).

Demonstração (1) Temos que $Y = \bigcup_{y \in Y} X \cup \{y\}$ logo $Y \in \tau^+$. E facilmente temos que $\mathcal{B}$ é fechado por intersecções finitas. Sendo assim, $\mathcal{B}$ é base para uma topologia em Y. Dado $\Omega \in \tau(Y)$, temos que $\Omega = \bigcup_{s \in \Omega} (\Omega \cap X) \cup \{s\}$ e assim $\Omega \in \tau^+$. Logo $\tau(Y) \subseteq \tau^+$.

(2) Como τ^+ contém $\tau(Y)$, X é subespaço de (Y, τ^+). Como O^p é $\tau(X)$-filtro, X é ainda denso.

(3) Como $X = X \cup \{s\}$, para $s \in X$, temos que $X \in \tau^+$. Dado $y \in Y \setminus X$, $X \cup \{y\} \in \tau^+$. Daí $(X \cup \{y\}) \cap (Y \setminus X) = \{y\}$ e $Y \setminus X$ é subespaço fechado e discreto. ■

Definição 2.8 *O espaço (Y, τ^+) descrito no procedimento da proposição é denotado por Y^+. Diremos que Y é* **extensão simples** *de Y se $Y = Y^+$.*

Embora não pareça, já lidamos com uma extensão simples: a extensão de Katětov.

Lema 2.2 *Dado um espaço de Hausdorff X, temos que, para $\mathcal{U} \in \kappa X \setminus X$, $O^{\mathcal{U}}_{\kappa X} = \mathcal{U}$.*

Demonstração Lembremos que $\mathcal{U} \in \kappa X \setminus X$ é um $\tau(X)$-ultrafiltro livre. Basta-nos mostrar que $\mathcal{U} \subseteq O^{\mathcal{U}}_{\kappa X}$.

Seja $U \in \mathcal{U}$. Então $U \cup \{\mathcal{U}\}$ é aberto de κX e vizinhança de $\mathcal{U}$ e, assim, $U = (U \cup \{\mathcal{U}\}) \cap X \in O^{\mathcal{U}}_{\kappa X}$. ■

Proposição 2.13 *Para X, de Hausdorff, κX é extensão simples.*

Demonstração Seja $\Omega \in \tau((\kappa X)^+)$. Para cada $p \in \Omega \setminus X$, existe $U_p \in O^{\mathcal{U}}_{\kappa X}$ tal que $U_p \cup \{p\} \subseteq \Omega$. Sendo assim

$$\Omega = (\Omega \cap X) \cup \bigcup_{p \in \Omega \setminus X} (U_p \cup \{p\})$$

e $\Omega \in \tau(\kappa X)$, pelo lema anterior. ■

Vejamos agora algumas relações entre $Y^{\#}, Y^{+}$ e outras extensões de X que se "suportam" em Y.

Proposição 2.14 *Seja $Y \in \mathcal{E}(X)$ para um espaço X. Então:*

(1) $O^p_{Y\#} = O^p_Y = O^p_{Y+}$ para qualquer $p \in Y$,

(2) Seja $Z \in \mathcal{E}(X)$ tal que Z e Y tenham mesmo suporte. Então $\tau(Y^{\#}) \subseteq \tau(Z) \subseteq \tau(Y^{+})$ se, e somente se, $O^p_Z = O^p_Y$ para qualquer $p \in Y$. Nesta caso, $\tau(Z^{\#}) = \tau(Y^{\#})$ e $\tau(Z^{+}) = \tau(Y^{+})$, e,

(3) $\tau(Y^{+}) = \tau((Y^{+})^{+})$ e $\tau(Y^{\#}) = \tau((Y^{\#})^{\#})$, ou seja, Y^{+} é extensão simples e $Y^{\#}$ é estrita.

Demonstração (1) Como $\tau(Y^{\#}) \subseteq \tau(Y) \subseteq \tau(Y^{+})$ temos, facilmente, que $O^p_{Y\#} \subseteq O^p_Y \subseteq O^p_{Y+}$. Vejamos que $O^p_{Y+} \subseteq O^p_{Y\#}$. Seja $W \in \tau(Y)$ para $p \in W$. Pelo item (4) da proposição 2.10, $W \subseteq o(W \cap Y)$, assim, pelo item (2) desta mesma proposição, $W \cap X = o(W \cap X) \cap X$.Como $p \in o(W \cap X)$ temos que $W \cap X \in O^p_{Y\#}$.

(2) Supondo $\tau(Y^{\#}) \subseteq \tau(Z) \subseteq \tau(Y^{+})$ temos $O^p_{Y\#} \subseteq O^p_Z \subseteq O^p_{Y+}$, e, pelo item anterior, $O^p_Y = O^p_Z$, para qualquer $p \in Y$.

Seja $U \in \tau(X)$. Temos

$$o_Y U = \{p \in Y : U \in O^p_Y\} = \{p \in Z : U \in O^p_Z\} = o_Z U.$$

Assim, $\tau(Y^{\#}) = \tau(Z^{\#}) \subseteq \tau(Y)$.

Seja $\mathcal{B}_Y = \{U \cup \{p\} : p \in Y \text{ e } U \in O^p_Y\}$ que é base dos abertos de Y^{+} e seja $\mathcal{B}_Z$, definida analogamente, base dos abertos de Z^{+}. Já que $O^p_Y = O^p_Z$, é imediato que $\mathcal{B}_Z = \mathcal{B}_Y$. Assim $\tau(Y^{+}) = \tau(Z^{+})$. Logo $\tau(Z) \subseteq \tau(Y^{+})$.

E valem as igualdades, por conseqüência.

(3) Dado $U \in \tau(X)$, temos

$$o_Y U = \{p \in Y : U \in O^p_Y\} = \{p \in Y^{\#} : U \in O^p_{Y\#}\} = o_{Y\#} U.$$

Logo $\tau((Y^{\#})^{\#}) = \tau(Y^{\#})$.

Analogamente, ao item (2):

$$\mathcal{B}_{Y+} = \{U \cup \{p\} : p \in Y^{+} \text{ e } U \in O^p_{Y+}\} = \{U \cup \{p\} : p \in Y \text{ e } U \in O^p_Y\} = \mathcal{B}_Y.$$

Sendo assim, $\tau(Y^{\#}) = \tau((Y^{\#})^{\#})$. ■

Dados dois filtros $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$, em um reticulado R, dizemos que $\mathcal{F}$ **encontra** $\mathcal{G}$, se todo elemento de $\mathcal{F}$ encontra $\mathcal{G}$, ou seja, se $a \wedge b \neq 0$, para quaisquer $a \in \mathcal{F}$ e $b \in \mathcal{G}$.

Proposição 2.15 *Seja $Y \in \mathcal{E}(X)$ para um espaço X. As afirmações seguintes são equivalentes:*

(1) Y é H-fechado,

(2) todo filtro de abertos de X encontra O^p para algum $p \in Y$, e,

(3) todo ultrafiltro em $\tau(X)$ contém O^p para algum $p \in Y$.

Demonstração (1) $\Rightarrow$ (2) Seja $\mathcal{F}$ um filtro de abertos de X. Consideremos $\mathcal{G} = \{U \in \tau(Y) : U \cap X \in \mathcal{F}\}$ e $\mathcal{G}$ é filtro de abertos de Y. Como Y é H-fechado temos que existe $p \in ad_Y(\mathcal{G})$. Vejamos que O^p encontra $\mathcal{F}$. Dados $U \in \tau(Y)$, vizinhança de p, e $V \in \mathcal{F}$, temos que $oV \in \mathcal{G}$ já que $oV \cap X = V \in \mathcal{F}$. Assim $p \in \overline{oV}^Y \cap U$. Logo $oV \cap U \neq \emptyset$. Como X é denso em Y, $oV \cap U \cap X \neq \emptyset$, ou seja, $(U \cap X) \cap V \neq \emptyset$. Então $U \cap X$ encontra $\mathcal{F}$, para qualquer U, vizinhança aberta de p em Y, ou seja, O^p encontra $\mathcal{F}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Seja $\mathcal{U}$ um ultrafiltro de abertos de X. Por hipótese, O^p encontra $\mathcal{U}$, para algum $p \in Y$. Pela proposição 1.1 (todo elemento que encontra um ultrafiltro pertence a ele), $O^p \subseteq \mathcal{U}$.

(3) $\Rightarrow$ (1) Seja $\mathcal{U}$ um ultrafiltro de abertos de Y. Facilmente temos que $\mathcal{V} = \{U \cap X : U \in \mathcal{U}\}$ é ultrafiltro de abertos de X. Por hipótese, existe $p \in Y$ tal que $O^p \subseteq \mathcal{V}$. Vejamos que $p \in c_Y(\mathcal{U})$. Dado $V \in \tau(Y)$, vizinhança de p, temos que $V \cap X \in O^p$. Assim $V \cap X \in \mathcal{V}$ e V encontra $\mathcal{U}$. Logo $\mathcal{U}$ converge para p. ■

Corolário Para X um espaço e $Y \in \mathcal{E}(X)$. São equivalentes:

(1) Y é H-fechado,

(2) Y^+ é H-fechado, e,

(3) $Y^{\#}$ é H-fechado. ■

Notas

Quase todas as demonstrações expostas aqui podem ser encontradas em [PW87] e, em sua maioria, são de "domínio público". Os resultados enunciados aparecem em vários artigos que tratam de H-fechados. Em algumas delas o que fizemos foi "enxugar" os fatos, simplificando argumentos e adequando-os às nossas necessidades. A demonstração escolhida para o teorema 2.1, por exemplo, foi a de "formato cíclico", pois ilustra alguns argumentos para a construção de extensões, filtros e ultrafiltros, que são utilizados várias vezes neste trabalho. Isso acontece também ao teorema 2.3. Algumas proposições surgiram de coleta de comentários na literatura e da vontade de traçar mais paralelos entre os compactos e os H-fechados, como, por exemplo as proposições 2.4 e 2.5.

Capítulo 3

O Absoluto de Iliadis

Quando chegarmos, de fato, aos espaços de Katětov, precisaremos de espaços que se "projetem" em X por funções θ-contínuas e com muitas propriedades. Os espaços também deverão ser "bons". Aí aparece o absoluto de Iliadis.

O Absoluto de Iliadis de um espaço de Hausdorff X, que denotaremos (EX, π), será um espaço de Hausdorff EX zero-dimensional e extremamente desconexo, e uma função $\pi : EX \to X$, θ-contínua, sobrejetora, irredutível e perfeita. Como já feito no primeiro capítulo, temos uma maneira de construir espaços zero-dimensionais (e compactos) a partir de álgebras booleanas. Usando esta seção chegaremos facilmente a um espaço extremamente desconexo e a π de maneira natural. Ainda mostraremos que o par (EX, π) é único a menos de homeomorfismo que satisfaz a "comutatividade" de um certo diagrama.

3.1 Espaços Extremamente Desconexos

Vejamos um pouco sobre espaços extremamente desconexos.

Definição 3.1 *Um espaço X é dito* **extremamente desconexo** *se o fecho de todo aberto de X é também aberto.*

Os espaços discretos são o exemplo de extremamente desconexo talvez mais simples que podemos lembrar.

Teorema 3.1 *Para um espaço X, as afirmações seguintes são equivalentes:*

(1) X é extremamente desconexo,

(2) todo denso de X é extremamente desconexo,

(3) todo aberto de X é extremamente desconexo,

(4) se U e V são abertos de X, então $\overline{U \cap V}^X = \overline{U}^X \cap \overline{V}^X$,

(5) se U e V são abertos disjuntos de X, então $\overline{U}^X \cap \overline{V}^X = \emptyset$,

(6) $\mathcal{B}(X) = \mathcal{R}(X) = \mathcal{RO}(X)$.

Demonstração Provemos (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5) $\Rightarrow$ (6) $\Rightarrow$ (1). Claramente (3) $\Rightarrow$ (1) e (4) $\Rightarrow$ (5) valem.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sejam D um denso em X, e $U \in \tau(D)$. Temos que existe $V \in \tau(X)$ tal que $U = V \cap D$. Como D é denso em X, temos que $\overline{V}^X = \overline{V \cap D}^X = \overline{U}^X$. Assim $\overline{V}^X \in \tau(X)$ e, como $\overline{U}^D = D \cap \overline{U}^X$, $\overline{U}^D \in \tau(D)$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Seja $V \in \tau(X)$. Então $S = V \cup (X \setminus \overline{V}^X)$ é aberto denso de X. Dado $W \in \tau(V)$, W é aberto em X, já que $V \in \tau(X)$. Assim $W \in \tau(S)$, e $\overline{W}^S \in \tau(S)$, já que S é extremamente desconexo por hipótese. Como $\overline{W}^V = V \cap \overline{W}^S$, $\overline{W}^V \in \tau(V)$.

(1) $\Rightarrow$ (4) Basta mostrarmos que $\overline{U}^X \cap \overline{V}^X \subseteq \overline{U \cap V}^X$. Seja $x \in \Omega \cap \overline{U}^X \cap \overline{V}^X$ para $\Omega \in \tau(X)$. Como X é extremamente desconexo, $\overline{V}^X \in \tau(X)$. Assim, pela definição de fecho, $U \cap \overline{V}^X \cap \Omega \neq \emptyset$, e $U \cap V \cap \Omega \neq \emptyset$. Portanto $x \in \overline{U \cap V}^X$.

(5) $\Rightarrow$ (6) Já temos $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{RO}(X)$. Seja $U \in \mathcal{RO}(X)$. Assim U e $X \setminus \overline{U}^X$ são abertos disjuntos de X. Logo, $\overline{U}^X \cap \overline{X \setminus \overline{U}^X}^X = \emptyset$. Como $\overline{U}^X \cup \overline{X \setminus \overline{U}^X}^X = X$, temos que $\overline{U}^X = X \setminus \overline{X \setminus \overline{U}^X}^X$. Mas como $U \in \mathcal{RO}(X)$, $\overline{X \setminus \overline{U}^X}^X = X \setminus \overset{\circ}{\overline{U}}^X = X \setminus U$. Portanto, $\overline{U}^X = U$ e $U \in \mathcal{B}(X)$.

Ainda, $\mathcal{R}(X) = \{X \setminus U : U \in \mathcal{RO}(X)\} = \{X \setminus U : U \in \mathcal{B}(X)\} = \mathcal{B}(X)$.

(6) $\Rightarrow$ (1) Se $U \in \tau(X)$, temos que $\overline{U}^X \in \mathcal{R}(X)$ e, assim, será aberto, por hipótese. ■

Corolário Um espaço de Hausdorff X é extremamente desconexo se, e somente se, κX também é.

Demonstração A volta é imediato pelo fato de X ser denso em κX. Para provarmos a ida usaremos a equivalência (5) do teorema anterior. Dados U e V dois abertos disjuntos

de κX, temos que $U' = U \cap X$ e $V' = V \cap X$ são dois abertos disjuntos de X. Como supomos X extremamente desconexo, $\overline{U'}^X \cap \overline{V'}^X = \emptyset$. Pelo item (4) da proposição 2.9 temos que $\overline{U'}^{\kappa X} \cap \overline{V'}^{\kappa X} = \emptyset$. Daí, já que X é denso, $\overline{U}^{\kappa X} \cap \overline{V}^{\kappa X} = \emptyset$. ■

Corolário Um espaço de Tychonoff X é extremamente desconexo se, e só se, βX o é.

Demonstração Novamente a volta é resultado imediato do item (2) do teorema. Agora seja U um aberto de βX e consideremos $U' = U \cap X$. Como X é extremamente desconexo temos que $\overline{U'}^X \in \mathcal{B}(X)$. Pelo corolário do teorema 1.2, temos que $\overline{\overline{U'}^X}^{\beta X} \in \mathcal{B}(\beta X)$. Assim,

$$\overline{U'}^{\beta X} \subseteq \overline{\overline{U'}^X}^{\beta X} = \overline{\overline{U'}^{\beta X} \cap X}^{\beta X} \subseteq \overline{U'}^{\beta X}.$$

Logo $\overline{U}^{\beta X} = \overline{U'}^{\beta X} = \overline{\overline{U'}^X}^{\beta X} \in \tau(\beta X)$. ■

Agora vejamos quando um espaço de Stone é extremamente desconexo. Este resultado é importantíssimo para a construção do espaço ao qual queremos chegar.

Teorema 3.2 *Seja B uma álgebra booleana. As seguintes condições são equivalentes:*

(1) B é completa (como reticulado), e,

(2) $S(B)$ é extremamente desconexo.

Demonstração (1) $\Rightarrow$ (2) Dado $U \in \tau(S(B))$, existe $B' \subseteq B$, não-vazio, tal que $U = \bigcup_{b \in B'} \lambda(b)$. Como B é completa temos que existe $c = \bigvee B'$. Vejamos que $\overline{U}^{S(B)} = \lambda(c)$. Para cada $b \in B'$, temos que $b \leq c$, logo $\lambda(b) \subseteq \lambda(c)$. Daí, $U \subseteq \lambda(c)$ e $\overline{U}^{S(B)} \subseteq \overline{\lambda(c)}^{S(B)} = \lambda(c)$. Sejam $\mathcal{U} \in \lambda(c)$ e $d \in B$ tais que $\mathcal{U} \in \lambda(d)$. Então $\mathcal{U} \in \lambda(c) \cap \lambda(d) = \lambda(c \wedge d)$. Como

$$d \wedge c = d \wedge (\bigvee B') = \bigvee \{d \wedge b : b \in B'\},$$

e $d \wedge c \neq 0$, temos que existe $b \in B'$ tal que $d \wedge b \neq 0$, e, portanto, $\lambda(d) \cap \lambda(b) \neq \emptyset$ e $\mathcal{U} \in \overline{U}^{S(B)}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Lembremos que B é isomorfa a $\mathcal{B}(S(B))$, como álgebra booleana, pelo teorema 1.1. Como $\mathcal{B}(S(B)) = \mathcal{RO}(S(B))$, visto que $S(B)$ é extremamente desconexo, temos que B é completa, já que $\mathcal{RO}(T)$ é sempre completa para qualquer espaço T. ■

3.2 Um pouquinho sobre funções perfeitas

Vamos colocar aqui alguns resulados referentes a funções perfeitas que usaremos ainda neste capítulo.

Definição 3.2 *(1) Quando X for um espaço, e Y um conjunto, diremos que $f : X \to Y$ é* **compacta** *se $f^{-1}(y)$ for compacto para qualquer $y \in Y$;*

(2) Se Y também for espaço, diremos que f é **perfeita** *se f for compacta e fechada (imagem de fechado é fechado).*

Vejamos algumas propriedades.

Proposição 3.1 *Sejam X e Y, espaços, e $f : X \to Y$ uma função perfeita.*

(1) Se K é um subespaço compacto de Y, então $f^{-1}[K]$ é um compacto de X, e,

(2) Se L é um subespaço de Lindelöf de Y, então $f^{-1}[L]$ também é de Lindelöf. ■

Proposição 3.2 *(1) A composição de funções perfeitas é perfeita.*

(2) A imagem contínua e perfeita de um espaço regular é regular. ■

Proposição 3.3 *Seja $f : X \to Y$ uma função perfeita. Então, para qualquer $A \subseteq Y$, temos que $f|_B : B \to A$ é perfeita, onde $B = f^{-1}[A]$.* ■

3.3 Um pouco sobre funções irredutíveis

Falemos agora das irredutíveis.

Definição 3.3 *Dados X, um espaço e Y, um conjunto, $f : X \to Y$ será dita* **irredutível** *se $f[A] \neq Y$ sempre que A for fechado próprio de X.*

Precisaremos das seguintes propriedades destas funções.

Proposição 3.4 *Dados dois espaços X e Y, e $f : X \to Y$ perfeita e sobrejetora, sempre existe um fechado C tal que $f[C] = Y$ e $f|_C$ é um sobrejeção perfeita e irredutível de C em Y.* ■

Proposição 3.5 *Se $f : X \to Y$ é fechada, irredutível, sobrejetora e θ-contínua, temos que a função $A \in \mathcal{R}(X) \mapsto f[A] \in \mathcal{R}(Y)$ é um isomorfismo de álgebra booleana.* ■

3.4 O Absoluto de Iliadis

Finalmente chegamos a seção principal deste capítulo.

Definição 3.4 *Seja X um espaço. O* **espaço de Gleason** *de X é o espaço de Stone da álgebra booleana $\mathcal{R}(X)$, e é denotado por θX.*

Desta forma os elementos de θX são os ultrafiltros em $\mathcal{R}(X)$. Pelo teorema 1.1, θX é compacto e zero-dimensional. Pelo teorema 3.2, θX é extremamente desconexo. Já estamos bem próximo do Absoluto de Iliadis.

Definição 3.5 *Dado um espaço de Hausdorff X, o espaço $\{\mathcal{U} \in \theta X : \bigcap \mathcal{U} \neq \emptyset\}$, equipado com a topologia induzida por θX, é chamado de* **Absoluto de Iliadis** *do espaço X e é denotado por EX.*

Queremos ainda uma função $\pi : EX \to X$. A definição desta vai ficar clara a partir do proximo lema.

Lema 3.1 *Para um espaço X, de Hausdorff, e $\mathcal{U} \in \theta X$, $|\bigcap \mathcal{U}| \leq 1$.*

Demonstração Suponha $x, y \in \bigcap \mathcal{U}$, com $x \neq y$. Como X é de Hausdorff, temos que existem Ue V, abertos disjuntos de X, tais que $x \in U$ e $y \in V$. Sendo assim $\overline{U}^X$ encontra $\mathcal{U}$, e, por $\mathcal{U}$ ser ultrafiltro em $\mathcal{R}(X)$, $\overline{U}^X \in \mathcal{U}$. Analogamente, $\overline{V}^X \in \mathcal{U}$. Sendo assim, $\overline{U}^X \wedge \overline{V}^X \in \mathcal{U}$. Mas $\overline{U}^X \wedge \overline{V}^X = \overline{U \cap V}^X$ e $\emptyset \notin \mathcal{U}$. ■

Então, para cada $\mathcal{U} \in EX$, definiremos $\pi(\mathcal{U})$ como o ponto que está na aderência de $\mathcal{U}$. Agora vejamos que o par (EX, π) caracteriza completamente o absoluto do espaço X.

Teorema 3.3 *Seja X um espaço, e para cada $x \in X$, denotaremos $\mathcal{F}_x = \{A \in \mathcal{R}(X) : x \in \overset{\circ}{A}^X\}$. Então:*

(1) EX é um subespaço denso de θX e $\theta X \equiv_{EX} \beta EX$,

(2) EX é extremamente desconexo e zero-dimensional, ainda, $\mathcal{B}(EX) = \mathcal{R}(EX) = \{\lambda(A) \cap EX : A \in \mathcal{R}(X)\}$,

(3) $\mathcal{F}_x$ é um filtro em $\mathcal{R}(X)$. Dado $\mathcal{U} \in \theta X$, temos que $\mathcal{U} \in EX$ e $\pi(\mathcal{U}) = x$, se, e somente se, $\mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{U}$. Portanto, $\pi^{-1}(x) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}_x} \lambda(A) = \{\mathcal{U} \in \theta X : \mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{U}\}$, e, π é uma função sobrejetora e compacta,

(4) Se $A \in \mathcal{R}(X)$, então $\pi[EX \cap \lambda(A)] = A$. Logo π é θ-contínua,

(5) Se F é um fechado não-vazio de EX definimos $\mathcal{F}(F) = \{A \in \mathcal{R}(X) : F \subseteq \lambda(A)\}$. Então $\mathcal{F}(F)$ é um filtro em $\mathcal{R}(X)$ e $\pi[F] = \bigcap \mathcal{F}(F)$. Portanto π é uma função fechada e irredutível,

(6) Se $A \in \mathcal{R}(X)$, então $\pi^{-1}(x) \subseteq \lambda(A)$ se, e só se, $x \in \overset{\circ}{A}^X$. Curiosamente, para F, um fechado de EX, $\mathcal{F}(F) = \mathcal{F}_x$ se, e só se, $F = \pi^{-1}(x)$,

(7) Para $C \subseteq X$, $\pi^{-1}[C]$ é fechado, se, e só se, C é θ-fechado.

Demonstração (1) Sejam A um fechado-regular de X e $x \in \overset{\circ}{A}^X$. Então $A \in \mathcal{F}_x$. Como todo filtro tem ultrafiltro que o contém, existe $\mathcal{U} \in \theta X$ que contém $\mathcal{F}_x$ e, pelo item (3) deste mesmo teorema, $\mathcal{U} \in EX$. Assim $EX \cap \lambda(A) \neq \emptyset$.

Seja $f \in \mathcal{C}(EX, K)$, para um espaço compacto e de Hausdorff K. Quero estendê-la a θX. Usemos a proposição 1.10. Sejam B e C dois fechados disjuntos de K. Como K é normal existem $U_1, U_2 \in \tau(K)$, disjuntos, tais que $B \subseteq U_1$ e $C \subseteq U_2$. Assim $f^{-1}[U_1], f^{-1}[U_2] \in \tau(EX)$ e existem $V_1, V_2 \in \tau(\theta X)$ tais que $f^{-1}[U_i] = V_i \cap EX$, para $i = 1, 2$. Como EX é denso em θX temos que V_1 e V_2 são disjuntos. Assim, por θX ser extremamente desconexo,

$$\overline{f^{-1}[B]}^{\theta X} \cap \overline{f^{-1}[C]}^{\theta X} \subseteq \overline{f^{-1}[U_1]}^{\theta X} \cap \overline{f^{-1}[U_2]}^{\theta X} = \overline{V_1 \cap EX}^{\theta X} \cap \overline{V_2 \cap EX}^{\theta X} = \overline{V_1}^{\theta X} \cap \overline{V_2}^{\theta X} = \overline{V_1 \cap V_2}^{\theta X} = \emptyset.$$

Logo f tem extensão contínua a θX e, pelo teorema 1.2, $\beta EX \equiv_{EX} \theta X$.

(2) Pelo teorema 3.1, EX é extremamente desconexo. Claramente é zero-dimensional.

Já temos que $\{\lambda(A) \cap EX : A \in \mathcal{R}(X)\} \subseteq \mathcal{B}(EX)$. Agora seja $T \in \mathcal{B}(EX)$. Como $\theta X \equiv_{EX} \beta EX$, temos que $\overline{T}^{\theta X} \in \mathcal{B}(\theta X)$ (corolário do teorema 1.2). Pelo teorema 1.1, $\overline{T}^{\theta X} = \lambda(A)$, para algum $A \in \mathcal{R}(X)$. Assim, $T = \overline{T}^{EX} = \overline{T}^{\theta X} \cap EX = \lambda(A) \cap EX$.

(3) Facilmente tem-se que $\mathcal{F}_x$ é filtro em $\mathcal{R}(X)$, lembrando que $A \overset{\circ}{\wedge}^X B = \overset{\circ}{A}^X \cap \overset{\circ}{B}^X$ para quaisquer $A, B \in \mathcal{R}(X)$.

Suponha $\mathcal{U} \in EX$, com $\bigcap \mathcal{U} = \{x\}$. Dado $A \in \mathcal{F}_x$, temos que $x \in \overset{\circ}{A}^X \cap U$, para qualquer $U \in \mathcal{U}$. Como $U = \overline{\overset{\circ}{U}^X}^X$, temos que $\overset{\circ}{A}^X \cap \overset{\circ}{U}^X \neq \emptyset$, e assim, $A \wedge U \neq \emptyset$, $\forall U \in \mathcal{U}$, ou seja, A encontra $\mathcal{U}$. Logo $A \in \mathcal{U}$. Agora seja $\mathcal{U} \in \theta X$ que contenha $\mathcal{F}_x$. Dados $U \in \mathcal{U}$ e $\Omega \in \tau(X)$, vizinhança de x, temos que $x \in \overline{\overset{\circ}{\Omega}^X}^X$ e daí $\overline{\Omega}^X \in \mathcal{F}_x$. Logo $U \wedge \overline{\Omega}^X \neq \emptyset$. Como $\overline{\Omega}^X \wedge U = \overline{\overset{\circ}{\Omega}^X \cap \overset{\circ}{U}^X}^X$, tem-se $\emptyset \neq \overline{\Omega}^X \cap \overset{\circ}{U}^X \subseteq \overline{\Omega}^X \cap \overset{\circ}{U}^X$, e daí, $\Omega \cap \overset{\circ}{U}^X \neq \emptyset$. Conclui-se que $x \in \overline{\overset{\circ}{U}^X}^X = U$. Portanto, $x \in \bigcap \mathcal{U}$, e, pelo lema 3.1, $\bigcap \mathcal{U} = \{x\}$.

Sendo assim, $\pi^{-1}(x) = \bigcap_{A\in\mathcal{F}_x} \lambda(A)$, e a outra igualdade vale pelo item (6) da proposição 1.3.

π será compacta pois a imagem inversa de um ponto de X será sempre um fechado de θX e, portanto, um compacto. Ainda teremos a sobrejeção devido a todo filtro ter um ultrafiltro que o contém.

(4) Seja $\mathcal{U} \in \lambda(A) \cap EX$. Temos que $\pi(\mathcal{U}) \in \bigcap \mathcal{U}$ e, como $A \in \mathcal{U}$, $\pi(\mathcal{U}) \in A$. Agora suponha $x \in A$. Dado $B \in \mathcal{F}_x$ temos que $x \in \overset{\circ}{\overline{A}}^X \cap \overset{\circ}{B}^X$, já que $A \in \mathcal{R}(X)$. Assim $\overset{\circ}{A}^X \cap \overset{\circ}{B}^X \neq \emptyset$ e, portanto, $A \wedge B \neq \emptyset$. Seja $\mathcal{V} = \{C \in \mathcal{R}(X) : A \wedge B \subseteq C$, para algum $B \in \mathcal{F}_x\}$ e $\mathcal{V}$ é filtro em $\mathcal{R}(X)$ que contém $\{A\} \cup \mathcal{F}_x$. Como existe $\mathcal{U} \in \theta X$ que contém $\mathcal{V}$, temos que $\mathcal{U} \in EX$ e $\pi(\mathcal{U}) = x$, pelo item anterior. Ainda, $A \in \mathcal{U}$ e daí, $\mathcal{U} \in \lambda(A) \cap EX$.

Vejamos que π é θ-contínua. Seja $\mathcal{U} \in EX$ e suponha $x = \pi(\mathcal{U}) \in U \in \tau(X)$. Temos que $x \in \overset{\circ}{\overline{U}}^X$. Pelo item anterior, $\overline{U}^X \in \mathcal{U}$. Assim $\mathcal{U} \in EX \cap \lambda(\overline{U}^X)$ e $\pi[EX \cap \lambda(\overline{U}^X)] = \overline{U}^X$.

(5) Claramente $F = EX \cap \bigcap_{A\in\mathcal{F}(F)} \lambda(A)$ e $\mathcal{F}(F)$ é filtro em $\mathcal{R}(X)$. Portanto, pelo item anterior, $\pi[F] \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{F}(F)} A = \bigcap \mathcal{F}(F)$.

Agora seja $x \in \bigcap \mathcal{F}(F)$. Dados $A \in \mathcal{F}(F)$ e $B \in \mathcal{F}_x$, temos $x \in \overset{\circ}{B}^X \cap \overset{\circ}{\overline{A}}^X$, e assim, $\overset{\circ}{B}^X \cap \overset{\circ}{A}^X \neq \emptyset$, e, $B \wedge A \neq \emptyset$. Consideremos, então, $\mathcal{V} = \{C \in \mathcal{R}(X) : A \wedge B \subseteq C$, para algum $A \in \mathcal{F}(F)$ e $B \in \mathcal{F}_x\}$. $\mathcal{V}$ é filtro em $\mathcal{R}(X)$ e está contindo em algum $\mathcal{U} \in \theta X$. Ainda $\mathcal{F}(F) \cup \mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{V}$. Pelo item (3), $\mathcal{U} \in EX$ e $\pi(\mathcal{U}) = x$. Como $\mathcal{F}(F) \subseteq \mathcal{U}$, $\mathcal{U} \in \bigcap_{A\in\mathcal{F}(F)} \lambda(A)$, assim $\mathcal{U} \in F$.

Claramente π é fechada. Agora seja F um fechado de EX tal que $\pi[F] = X$. Assim $X = \bigcap \mathcal{F}(F)$, donde conclui-se que $\mathcal{F}(F) = \{X\}$. Assim $F = \lambda(X) \cap EX = EX$. Portanto, π é irredutível.

(6) Suponha $\pi^{-1}(x) \subseteq \lambda(A)$ e $x \notin \overset{\circ}{A}^X$. Então $x \in \overline{X \setminus A}^X = A'$ e, pelo item (4), existe $\mathcal{U} \in \lambda(A') \cap EX$, tal que $\pi(\mathcal{U}) = x$. Daí, $\mathcal{U} \in \lambda(A) \cap \lambda(A') = \lambda(A \wedge A') = \emptyset$. Agora suponha $x \in \overset{\circ}{A}^X$ e $\mathcal{U} \in \pi^{-1}(x)$. Pelo item (3), $A \in \mathcal{F}_x \subseteq \mathcal{U}$ e $\mathcal{U} \in \lambda(A)$.

Supondo $F = \pi^{-1}(x)$ e $A \in \mathcal{R}(X)$. Temos,

$$A \in \mathcal{F}(F) \Leftrightarrow F \subseteq \lambda(A) \Leftrightarrow \pi^{-1}(x) \subseteq \lambda(A) \Leftrightarrow x \in \overset{\circ}{A}^X \Leftrightarrow A \in \mathcal{F}_x.$$

Agora suponha $\mathcal{F}(F) = \mathcal{F}_x$. Então, pelo item (3),

$$F = EX \cap \bigcap_{A\in\mathcal{F}(F)} \lambda(A) = EX \cap \bigcap_{A\in\mathcal{F}_x} \lambda(A) = \pi^{-1}(x).$$

(7) Suponhamos $\pi^{-1}[C]$ um fechado de EX, e $x \in \overline{C}^{X_\theta} \setminus C$. Então $\pi^{-1}(x) \cap \pi^{-1}[C] = \emptyset$, e $\pi^{-1}(x)$ é compacto. Sendo assim, existem $A, B \in \mathcal{R}(X)$, tais que, $\pi^{-1}(x) \subseteq \lambda(A), \pi^{-1}[C] \subseteq \lambda(B)$ e $A \wedge B = \emptyset$. Sendo assim, $C \subseteq \overset{\circ}{B}{}^X$ e $x \in \overset{\circ}{A}{}^X$, pelo item anterior. Como $x \in \overline{C}^{X_\theta}$, temos que $\emptyset \neq \overline{\overset{\circ}{A}{}^X}^X \cap C \subseteq \overline{\overset{\circ}{A}{}^X}^X \cap \overset{\circ}{B}{}^X$. Assim, $\overset{\circ}{A}{}^X \cap \overset{\circ}{B}{}^X \neq \emptyset$, e $A \wedge B \neq \emptyset$. Logo C é θ-fechado.

Agora suponha C um conjunto θ-fechado. Seja $\mathcal{U} \in \overline{\pi^{-1}[C]}^{EX}$. Quero mostrar que $x = \pi(\mathcal{U}) \in C = \overline{C}^{X_\theta}$. Seja U uma vizinhança aberta de x. Então $x \in \overline{\overset{\circ}{U}{}^X}^X$ e, daí, $\mathcal{U} \in \lambda(\overline{U}^X) \cap EX$. Temos, então, que $\lambda(\overline{U}^X) \cap EX \cap \pi^{-1}[C] \neq \emptyset$. Então, pelo item (4) deste mesmo teorema, $\overline{U}^X \cap C \neq \emptyset$. ■

Proposição 3.6 *Para um espaço X, de Hausdorff, temos que EX é compacto se, e somente se, X é H-fechado.*

Demonstração Se EX é compacto, é H-fechado e X o será também por π ser θ-contínua.

Agora suponhamos X H-fechado e mostremos que $\theta X = EX$. Seja $\mathcal{U} \in \theta X$. Consideremos $\mathcal{G} = \{U \in \tau(X) : \overline{U}^X \in \mathcal{U}\}$ e temos que $\mathcal{G}$ é um filtro de abertos de X. Usando que $\{\overset{\circ}{U}{}^X : U \in \mathcal{U}\} \subseteq \mathcal{G}$, prova-se que $ad_X(\mathcal{G}) = \bigcap \mathcal{U}$. Sendo assim $\mathcal{U}$ é fixo pois X é H-fechado. ■

Observação 3.1 *Vale dizer que, usando uma completa analogia da demonstração que $\beta EX \equiv_{EX} \theta X$, temos $\theta X \equiv_T \beta T$, para qualquer T denso em θX. Podemos até enunciar melhor isto: um compacto extremamente desconexo K é equivalente ao compactificado de Stone-Čech de T, para qualquer T denso em K.*

Inspirados no paralelismo entre os H-fechados e os compactos, ficamos instigados a investigar uma relação entre os H-fechados e o **Axioma de Martin**, já que este axioma tem equivalência com condições sobre os compactos. Não nos interessa, aqui, ter conhecimento completo sobre o enunciado deste axioma (que pode ser encontrado em, por exemplo, [KUN80]), mas esta equivalência.

Teorema 3.4 *Para qualquer cardinal infinito κ, $\kappa < 2^\omega$, são equivalentes:*

(1) $MA(\kappa)$, e,

(2) Se X é um espaço de Hausdorff compacto e $c(X) = \omega$, X não é união de κ raros fechados. ■

Já que o absoluto de um espaço H-fechado, é compacto, podemos facilmente demonstrar o teorema a seguir.

Teorema 3.5 ([DJP75],3.7) *Para qualquer cardinal infinito κ, $\kappa < 2^{\omega}$, são equivalentes:*

(1) $MA(\kappa)$, e,

(2) Se X é um espaço H-fechado e $c(X) = \omega$, X não é união de κ raros θ-fechados.

Demonstração A implicação (2) $\Rightarrow$ (1) é muito simples já que todo compacto é H-fechado e, pela regularidade, que todo fechado é θ-fechado.

(1) $\Rightarrow$ (2) Suponha, por absurdo, que X é H-fechado e $X = \bigcup_{n<\omega} A_n$, onde cada A_n é θ-fechado e raro. Sendo assim, $\overset{\circ}{A}{}_n^X = \emptyset$. Para cada $n < \omega$, seja $B_n = \pi^{-1}[A_n]$. Pelo item (7) do teorema 3.3, B_n é fechado, para qualquer $n < \omega$. Temos que $EX = \bigcup_{n<\omega} B_n$ e é compacto.

Seja $V \in \tau(EX)$, contido em B_n. Assim, $\pi[EX \setminus B_n] \subseteq \pi[EX \setminus V]$ e $X \setminus \pi[EX \setminus V] \subseteq X \setminus \pi[EX \setminus B_n] = A_n$. Como A_n tem interior vazio e π é fechada, temos que $\pi[EX \setminus V] = X$ e, por ser irredutível, $V = \emptyset$. Logo B_n tem interior vazio, ou seja, é fechado raro.

Agora vejamos que $c(EX) = \omega$. Seja $\mathcal{C}$ uma família de abertos não-vazios de EX celular. Claramente $\mathcal{D} = \{X \setminus \pi[EX \setminus C] : C \in \mathcal{C}\}$ é celular constituída de abertos não-vazios de X. Ainda, $|\mathcal{C}| = |\mathcal{D}| \leq c(X) = \omega$. Assim, $c(EX) = \omega$, e chegamos a um absurdo. ■

Independentemente da celularidade do espaço podemos enunciar:

Proposição 3.7 ([DJP75],3.6) *Um espaço H-fechado não é união enumerável de θ-fechados raros.*

Demonstração Seja X um espaço H-fechado e suponha, por absurdo, que $X = \bigcup_{n<\omega} A_n$, onde cada A_n é θ-fechado de interior vazio.

Seja $r_1 \in X \setminus A_1$. Como A_1 é θ-fechado, temos que existe $U_1 \in \tau(X)$, tais que $r_1 \in U_1$ e $\overline{U_1}^X \cap A_1 = \emptyset$. Como $\overline{X \setminus A_2}^X = X$, temos que $U_1 \setminus A_2 \neq \emptyset$ e, assim, existe $U_2 \subseteq U_1$, não-vazio, tal que $\overline{U_2}^X \cap A_2 = \emptyset$. Continuando assim, ou seja, usando indução em n, temos que existe uma seqüência de abertos de X, não-vazios, tais que $U_n \supseteq U_{n+1}$ e $\overline{U_n}^X \cap A_n = \emptyset$, para todo $n < \omega$. Podemos então construir $\mathcal{F} = \{V \in \tau(X) : U_n \subseteq V,$

para algum $n < \omega\}$ que é filtro de abertos de X que contém $\{U_n : n < \omega\}$. Como X é H-fechado, seja $x \in ad_X(\mathcal{F})$. E chegamos a um absurdo, já que $x \in A_n$, para algum $n < \omega$. ■

3.5 A Unicidade do Absoluto

Até agora apresentamos um par (EX, π), associado a cada espaço X. Veremos que este par é único a menos de um homeomorfismo que comuta com as funções que projetam os espaços extremamente desconexos e zero-dimensionais em X.

Teorema 3.6 *Dado um espaço X, suponha Y um espaço de Hausdorff zero-dimensional e extremamente desconexo, e $p : Y \to X$, uma sobrejeção perfeita, irredutível e θ-contínua. Então existe $h : EX \to Y$, homeomorfismo, tal que $p \circ h = \pi$, ou seja, que torna o diagrama da figura 3.1 comutativo.*

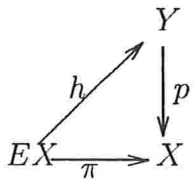

Figura 3.1: Sobre a unicidade do Absoluto

Demonstração Já que Y é extremamente desconexo, lembremos que $\mathcal{R}(Y) = \mathcal{B}(Y)$. Sendo assim, $A \wedge B = A \cap B$, para quaisquer $A, B \in \mathcal{R}(Y)$. Pela proposição 3.5 temos que a aplicação $B \in \mathcal{B}(Y) \mapsto p[B] \in \mathcal{R}(X)$ é um isomorfismo de álgebra booleana. Sendo assim os fechados-regulares de Y e X são praticamentes "os mesmos". Construíremos o homeomorfismo entre EX e Y de maneira natural.

Seja $\mathcal{U} \in EX$ e definamos $\mathcal{U}' = \{B \in \mathcal{B}(Y) : p[B] \in \mathcal{U}\}$. Já que $\mathcal{U}$ é ultrafiltro em $\mathcal{R}(X)$, $\mathcal{U}' \in \theta Y$. Como Y é de Hausdorff, $|\bigcap \mathcal{U}'| \leq 1$, pelo lema 3.1. Vejamos que $\bigcap \mathcal{U}'$ é unitário. Dado $B \in \mathcal{U}'$, temos que $x = \pi(\mathcal{U}) \in p[B]$, sendo assim $B \cap p^{-1}(x) \neq \emptyset$. Fica então bem definida a família $\{B \cap p^{-1}(x) : B \in \mathcal{U}'\}$ de fechados de $p^{-1}(x)$, com a p.i.f. Como $p^{-1}(x)$ é compacto temos que $\bigcap \mathcal{U}' \cap p^{-1}(x) \neq \emptyset$. Definimos $h(\mathcal{U})$ como o ponto na aderência de $\mathcal{U}'$. Portanto já fica claro que $p \circ h = \pi$.

Se $y \in Y$, definimos $\mathcal{U}_y = \{p[B] : B \in \mathcal{B}(Y) \text{ e } y \in B\}$. Facilmente temos que $\mathcal{U}_y$ é $\mathcal{R}(X)$-ultrafiltro, $\bigcap \mathcal{U}_y = \{p(y)\}$, e a aplicação $y \in Y \mapsto \mathcal{U}_y \in EX$ é a inversa de h.

Vejamos que h é contínua. Seja $\mathcal{U} \in EX$ e suponha $h(\mathcal{U}) \in B \in \mathcal{B}(Y)$ (lembrando que Y é zero-dimensional). Então B encontra $\mathcal{U}'$ e $B \in \mathcal{U}'$. Assim, $p[B] \in \mathcal{U}$, e $\mathcal{U} \in \lambda(p[B])$. Com uma pequena álgebra de conjuntos mostramos que $h[\lambda(p[B]) \cap EX] = B$, usando a inversa de h, citada no parágrafo anterior.

Agora seja F um fechado de EX. Então $F = \bigcap_{i \in I} \lambda(A_i) \cap EX$, para alguma família $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{R}(X)$. Para cada $i \in I$, temos que existe $B_i \in \mathcal{R}(Y)$ tal que $p[B_i] = A_i$. Facilmente temos que $h[F] = \bigcap_{i \in I} B_i$. ■

Depois que discutimos esta "unicidade" podemos achar mais facilmente os absolutos de alguns espaços.

Proposição 3.8 ([PW87],6.9(a)) *Seja T um subespaço denso de um espaço de Hausdorff X. Então o par $(S, \pi|_S)$, onde $S = \pi^{-1}[T]$, é o absoluto de T.*

Demonstração Mostremos primeiro que S é denso em EX. Dado $U \in \tau(EX) \setminus \{\emptyset\}$, temos que $F = EX \setminus U$ é um fechado próprio de EX e, por π ser irredutível e fechada, $\pi[F]$ é um fechado próprio de X. Logo $T \setminus \pi[F] \neq \emptyset$. Como $\pi^{-1}[T \setminus \pi[F]] \subseteq S \cap U$ e π é sobrejetora, $S \cap U$ é não-vazio. Sendo assim S é denso em EX. Pelo item (2) do teorema 3.1, S é extremamente desconexo e zero-dimensional.

Claramente $\pi|_S$ é sobrejetora e compacta.

Dado F, um fechado de S, $F = S \cap \overline{F}^{EX}$. Têm-se logo $\pi[F] \subseteq T \cap \pi[\overline{F}^{EX}]$ e, de fato, vale a igualdade. Se $t \in T \cap \pi[\overline{F}^{EX}]$ e $\pi^{-1}(t) \cap \overline{F}^{EX} = \emptyset$. temos, pela compacidade de $\pi^{-1}(t)$, que existe $A \in \mathcal{R}(X)$ tal que $\pi^{-1}(t) \subseteq \lambda(A) \cap EX \subseteq EX \setminus \overline{F}^{EX}$. Pelo item (6) do teorema 3.1, $t \in \overset{\circ}{A}^X$. Como $\overline{F}^{EX} \subseteq EX \cap \lambda(A')$, pelo item (4) do mesmo teorema, $\pi[\overline{F}^{EX}] \subseteq A'$. Daí, $t \in \overset{\circ}{A}^X \cap A' = \overset{\circ}{A}^X \cap \overline{X \setminus A}^X$, assim, $\overset{\circ}{A}^X \setminus A \neq \emptyset$, o que é um absurdo. Sendo assim, $\pi|_S[F]$ é um fechado de T. Se F é um fechado de S tal que $\pi[F] = T$, temos $T \subseteq \pi[\overline{F}^{EX}]$, e,

$$X = \overline{T}^X \subseteq \overline{\pi[\overline{F}^{EX}]}^X = \pi[\overline{F}^{EX}].$$

Portanto, $\pi[\overline{F}^{EX}] = X$ e $\overline{F}^{EX} = EX$, já que π é irredutível. Daí, $F = \overline{F}^S = \overline{F}^{EX} \cap S = S$. Concluímos que $\pi|_S$ é também irredutível.

Vejamos agora que é θ-contínua usando a proposição 2.4 e o item (5) da proposição 2.5. Dado $U \subseteq S$,

$$\pi[\overline{U}^{S_\theta}] = \pi[\overline{U}^{EX_\theta} \cap S] \subseteq \pi[\overline{U}^{EX_\theta}] \cap T \subseteq \overline{\pi[U]}^{X_\theta} \cap T = \overline{\pi[U]}^{T_\theta}.$$

■

Dado um espaço X, de Tychonoff, temos que a aplicação de absoluto, $\pi : EX \to X$, é contínua. Considerando-se i_X a imersão de X em βX, e usando o item (2) do teorema 1.2, temos que $i_X \circ \pi$ tem extensão contínua - única, que chamaremos $\beta\pi$, definida em θX.

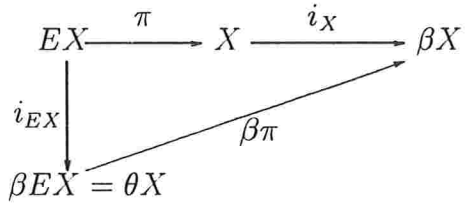

Figura 3.2: Como βX e βEX "conversam"

Ficamos tentados a comparar βX e βEX.

Proposição 3.9 *Para um espaço X, de Tychonoff, valem:*

(1) $\beta\pi[\lambda(A)] = \overline{A}^{\beta X}$, *para* $A \in \mathcal{R}(X)$,

(2) $\beta\pi$ *é uma sobrejeção perfeita e irredutível,*

(3) $\beta\pi^{-1}[X] = EX$,

(4) $\beta\pi^{-1}[\beta X \setminus X] = \beta EX \setminus EX$, *e,*

(5) $(\beta EX, \beta\pi)$ *é o absoluto de* βX.

Demonstração (1) Seja $A \in \mathcal{R}(X)$. Lembrando que $\lambda(A) \in \mathcal{B}(\theta X)$, EX é denso em θX, e $\beta\pi$ é contínua, temos

$$\beta\pi[\lambda(A)] = \beta\pi[\overline{\lambda(A)}^{\theta X}] = \beta\pi[\overline{\lambda(A) \cap EX}^{\theta X}] \subseteq \overline{\beta\pi[\lambda(A) \cap EX]}^{\beta X} = \overline{\pi[\lambda(A) \cap EX]}^{\beta X} = \overline{A}^{\beta X},$$

pelo item (4) do teorema 3.3.

Supondo $\overline{A}^{\beta X} \not\subset \beta\pi[\lambda(A)]$, temos que existe $u \in A \setminus \beta\pi[\lambda(A)]$. Assim $\beta\pi^{-1}(u) \cap \lambda(A) = \emptyset$, e, $\beta\pi^{-1}(u) \subseteq \lambda(A')$. Daí,

$$\pi^{-1}(u) = \beta\pi^{-1}(u) \cap EX \subseteq \lambda(A') \cap EX,$$

e $u \in \overset{\circ X}{A'}$, pelo item (6) do teorema 3.3. Mas $\overset{\circ X}{A} = X \setminus A$, e $u \in A$.

(2) Do item anterior, temos logo que $\beta\pi$ é sobrejetora e perfeita. Vejamos que é também irredutível.

Seja F um fechado de θX tal que $\beta\pi[F] = \beta X$. Então $F = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \lambda(A)$, para alguma família $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{R}(X)$. Do item anterior temos que $\beta X = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A}^{\beta X}$. Daí temos que, para $A \in \mathcal{F}$,

$$X = X \cap \beta X \subseteq X \cap \overline{A}^{\beta X} = \overline{A}^{X} = A,$$

e concluímos que $\mathcal{F} = \{X\}$. Logo $F = \lambda(X) = \theta X$, e $\beta\pi$ é irredutível.

(3) Claramente temos $EX \subseteq \beta\pi^{-1}[X]$. Sejam $\mathcal{U} \in \beta\pi^{-1}[X] \setminus EX$ e $t = \beta\pi(\mathcal{U})$. Como $t \in X$, $\pi^{-1}(x)$ é um compacto contido em EX (item (3) do teorema 3.3). Assim $\mathcal{U} \notin \pi^{-1}(x)$, e, pela definição dos abertos de θX, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\lambda(U) \cap \pi^{-1}(x) = \emptyset$. Assim,

$$\pi^{-1}(x) \subseteq \theta X \setminus \lambda(U) = \lambda(U'),$$

e daí, $x \in \overset{\circ X}{U'} = \overline{\overset{\circ X}{X \setminus U}}^{X} = X \setminus U \in \tau(X)$. Logo existe $V \in \tau(\beta X)$, tal que $X \setminus U = V \cap X$. Como $\beta\pi$ é contínua, $\mathcal{U} \in \beta\pi^{-1}[V] \in \tau(\theta X)$. Como EX é denso em θX, $\beta\pi^{-1}[V] \cap \lambda(U) \cap EX \neq \emptyset$. Mas,

$$\beta\pi[\beta\pi^{-1}[V] \cap \lambda(U) \cap EX] \subseteq V \cap \pi[\lambda(U) \cap EX] = V \cap U,$$

o que é um absurdo.

(4) É conseqüência direta dos dois itens anteriores.

(5) Este item vale por lembrarmos que βEX é zero-dimensional e extremamente desconexo. ■

O item (5) pode ser melhorado lembrando-se da proposição 3.6: o absoluto de um H-fechado é compacto.

Proposição 3.10 *Sejam X um espaço de Hausdorff e $hX \in \mathcal{H}(X)$. Então $EhX \equiv_{EX} \beta EX$.*

Demonstração Chamemos π_{hX} a aplicação do absoluto de hX. Da proposição 3.8 temos que EX é um subespaço denso de EhX e que $\pi_{hX}|_{EX}$ é aplicação do absoluto de X. Como EhX é compacto é equivalente a βEX, pela observação 3.1. ■

3.6 A Extensão de Fomin

A **Extensão de Fomin** de um espaço X (de Hausdorff) nada mais é que $(\kappa X)^{\#}$, e a denotaremos por σX. Pelo último corolário da última seção do capítulo anterior temos que σX é H-fechado. Sendo assim para um espaço X, temos duas extensões H-fechadas bem definidas: uma simples, a de Katětov, e outra estrita, a de Fomin. Lembremos que $\{o_{\kappa X}U : U \text{ é aberto de } X\}$ é base para os abertos de σX. Pelos lema 2.2 e proposição 2.14, $O^{\mathcal{U}}_{\kappa X} = O^{\mathcal{U}}_{\sigma X} = \mathcal{U}$, para qualquer $\mathcal{U} \in \kappa X \setminus X = \sigma X \setminus X$.

O objetivo principal desta seção é estudar o resto $\sigma X \setminus X$, para um espaço X. Vejamos algumas propriedades da extensão de Fomin.

Proposição 3.11 *Seja X um espaço e suponha $Y \in \{\sigma X, \kappa X\}$. Para U, aberto de X, valem:*

(1) $\overline{U}^{Y} \setminus X = oU \setminus X$,

(2) $\overline{U}^{Y} = \overline{U}^{X} \cup oU$,

(3) a identidade $id_{\kappa X}$ é um θ-homeomorfismo de κX em σX, e,

(4) $(Y \setminus X) \setminus oU = o(X \setminus \overline{U}^{X}) \setminus X$.

Demonstração (1) Do item (2) da proposição 2.9, temos $\overline{U}^{\kappa X} = \{\mathcal{U} \in \kappa X \setminus X : U \in \mathcal{U}\}$. Assim,

$$oU \setminus X = \{\mathcal{U} \in \kappa X \setminus X : U \in O^{\mathcal{U}}_{\kappa X}\} = \{\mathcal{U} \in \kappa X \setminus X : U \in \mathcal{U}\} = \overline{U}^{\kappa X} \setminus X,$$

pelo lema 2.2.

Vejamos agora para $Y = \sigma X$. Como $\overline{U}^{\kappa X} \subseteq \overline{U}^{Y}$, basta mostrarmos que $\overline{U}^{Y} \setminus X \subseteq oU \setminus X$. Dados $V \in \mathcal{U} \in \overline{U}^{Y} \setminus X$, $\mathcal{U} \in oV$. Assim $oV \cap U = V \cap U \neq \emptyset$. Ou seja, U encontra $\mathcal{U}$. Daí $U \in \mathcal{U}$ e $\mathcal{U} \in oU \setminus X$.

(2) Imediato do item anterior.

(3) A identidade $id_{\kappa X} : \kappa X \to \sigma X$ é claramente contínua. Agora suponha i a identidade de σX em κX. Dados $p \in \sigma X$ e $V \in \tau(\kappa X)$, vizinhança de p, temos que $V \subseteq o(V \cap X) \in \tau(\sigma X)$. Assim, por κX e σX serem extensões de X,

$$i[\overline{o(V \cap X)}^{\sigma X}] = \overline{o(V \cap X)}^{\sigma X} = \overline{o(V \cap X) \cap X}^{\sigma X} = \overline{V \cap X}^{\sigma X} = \overline{V \cap X}^{\kappa X} = \overline{V}^{\kappa X},$$

usando também os dois itens anteriores. Logo i é θ-contínua.

(4) Já temos que $(oU \cap o(X \setminus \overline{U}^X)) = \emptyset$. Assim só falta mostrar que $Y \setminus X = (oU \cup o(X \setminus \overline{U}^X)) \setminus X$. Seja $\mathcal{U}$ um filtro em $\tau(X)$ livre tal que $U \notin \mathcal{U}$. Então existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $U \cap V = \emptyset$. Daí, $V \subseteq X \setminus \overline{U}^X$ e $X \setminus \overline{U}^X \in \mathcal{U}$. Logo $\mathcal{U} \in o(X \setminus \overline{U}^X) \setminus X$. ■

κX e σX relacionam-se de várias maneiras mas há diferenças: $\sigma X \setminus X$ é zero-dimensional mas não-necessariamente discreto e, ainda, X pode não ser aberto de σX. Um dos resultados mais forte ao qual queremos chegar é o teorema abaixo:

Teorema 3.7 *Para X, um espaço de Hausdorff, valem:*

(1) $\sigma X \setminus X$ é homeomorfo a $\beta EX \setminus EX$, e,

(2) para $A \subseteq \sigma X \setminus X$, A é compacto se, e somente se, A é fechado.

Demonstração (1) Lembrando que $\beta EX \equiv_{EX} \theta X$, consideraremos $\beta EX \setminus EX = \{\mathcal{U} : \mathcal{U}$ é $\mathcal{R}(X)$-ultrafiltro livre$\} = \theta X \setminus EX$. Vamos construir o homeomorfismo.

Dado $\mathcal{U} \in \theta X \setminus EX$, definimos $h(\mathcal{U}) = \{U \in \tau(X) : \overline{U}^X \in \mathcal{U}\}$. Como $\mathcal{U}$ é filtro em $\mathcal{R}(X)$, $\emptyset \notin h(\mathcal{U})$ e $\overset{\circ}{U}{}^X \in h(\mathcal{U})$, para qualquer $U \in \mathcal{U}$. Lembrando que $\overline{\overline{V_1}^{\overset{\circ}{X}} \cap \overline{V_2}^{\overset{\circ}{X}}}^X = \overline{V_1 \cap V_2}^X$, para quaisquer $V_1, V_2 \in \tau(X)$, temos que $h(\mathcal{U})$ é fechado por intersecções finitas. Mostramos também que se um aberto V encontra $h(\mathcal{U})$, $\overline{V}^X$ encontra $\mathcal{U}$, logo está em $\mathcal{U}$, e, daí, V estará em $h(\mathcal{U})$. Facilmente mostramos que $\bigcap \mathcal{U} = ad_X(h(\mathcal{U}))$, assim, $h(\mathcal{U}) \in \sigma X \setminus X$. Então $h : \theta X \setminus EX \to \sigma X \setminus X$ está bem definida.

Para mostrarmos que h é bijetora construíremos sua inversa. Definamos, para $g(\mathcal{V}) = \{\overline{V}^X : V \in \mathcal{V}\}$, para $\mathcal{V} \in \sigma X \setminus X$. Usando os mesmos argumentos do parágrafo anterior, mostra-se que $g(\mathcal{V}) \in \theta X$. Ainda, $\bigcap g(\mathcal{V}) = ad_X(\mathcal{V})$, e, $g(\mathcal{V}) \in \beta EX \setminus EX$. Assim g está bem definida.

Para vermos que g é a inversa de h, basta-nos observar que

$$\mathcal{V} \subseteq h(g(\mathcal{V})), \text{ e, } \mathcal{U} \subseteq g(h(\mathcal{U})),$$

para quaisquer $\mathcal{V} \in \sigma X \setminus X$ e $\mathcal{U} \in \beta EX \setminus EX$. De fato, temos as igualdades já que todos os objetos são ultrafiltros.

A continuidade da funções é conseqüência de

- $h[\lambda(A) \setminus EX] \subseteq o(\overset{\circ}{A}{}^X) \setminus X$, para $A \in \mathcal{R}(X)$,
- $g[o(U) \setminus X] \subseteq \lambda(\overline{U}^X) \setminus EX$, para $U \in \tau(X)$, e,

- valem as igualdades nos itens anteriores.

Dado $\mathcal{U} \in \lambda(A) \setminus EX$ temos $A \in \mathcal{U}$ e, portanto, $\overset{\circ X}{A} \in h(\mathcal{U})$ e $h(\mathcal{U}) \in o(\overset{\circ X}{A}) \setminus X$. Caso $\mathcal{V} \in o(U) \setminus X$ tem-se $\overline{U}^X \in g(\mathcal{V})$ e $g(\mathcal{V}) \in \lambda(\overline{U}^X) \setminus EX$.

(2) Dado A compacto temos que A é fechado de σX.

Suponhamos A um fechado de σX e vejamos que $g[A] = h^{-1}[A]$ é um fechado de θX.

Dado $p \in EX$ temos que $\pi(p) \in X \subseteq \sigma X \setminus A \in \tau(\sigma X)$ e existe $U \in \tau(X)$ tal que $\pi(p) \in oU \subseteq \sigma X \setminus A$. Como $U = oU \cap X$, temos que $\pi(p) \in U \subseteq \overset{\circ X}{\overline{U}^X}$ e pelo item (6) do teorema 3.3, $p \in \lambda(\overline{U}^X)$. Dado $\mathcal{V} \in (\theta X \setminus EX) \setminus h^{-1}[A]$, $h(\mathcal{V}) \notin A$ e existe $V \in \tau(X)$ tal que $h(\mathcal{V}) \in oV \subseteq \sigma X \setminus A$. Assim $V \in h(\mathcal{V})$, e $\overline{V}^X \in \mathcal{V}$, pelas definições de h e de $g = h^{-1}$. Logo $\mathcal{V} \in \lambda(\overline{V}^X)$. Então para qualquer $q \in \theta X \setminus h^{-1}[A]$, existe $W \in \tau(X)$, tal que $q \in \lambda(\overline{W}^X)$ e $h(q) \in oW \subseteq \sigma X \setminus A$. Assim

$$A \subseteq (\sigma X \setminus X) \setminus oW = o(X \setminus \overline{W}^X) \setminus X,$$

pelo item (4) da proposição 3.11. Logo

$$h^{-1}[A] \subseteq g[o(X \setminus F) \setminus X] = \lambda(\overline{X \setminus F}^X) \setminus EX = \lambda(F') \setminus EX \subseteq \lambda(F'), \text{ e,}$$
$$q \in \lambda(F) = \theta X \setminus \lambda(F') \subseteq \theta X \setminus h^{-1}[A],$$

onde $F = \overline{W}^X$. Assim $\theta X \setminus h^{-1}[A]$ é aberto. ■

Notas

Muito dos resultados aqui enunciados são uma reunião de colocações feitas nos artigos lidos. Os da seção sobre os espaços extremamente desconexos são achados em [PW87]. A construção e unicidade do Absoluto de Iliadis também é encontrada neste livro, bem como sobre a Extensão de Fomin. A demonstração do teorema 3.3 basea-se muito na achada em [PW87] mas traz nosso "tempero" no que se refere aos filtros. O teorema 3.5 está também enunciado neste livro como exercício. Já a proposição 3.7 tem a demonstração baseada no lema 5.4 do artigo [VER85], cujo enunciado trata sobre racionais. A proposição 3.9 traz mais resultados acerca do Absoluto de um compactificado de Stone-Čech dos que os comumente achados. E as demonstrações sobre a Extensão de Fomin são modificações das encontradas em [PW87].

Capítulo 4

Os Espaços de Katětov

Chegamos, finalmente, aos Espaços de Katětov! Queremos apresentar alguns dos resultados acerca desses espaços. Vejamos logo a definição:

Definição 4.1 *Um espaço X, de Hausdorff, é dito um* **Espaço de Katětov**, *se tiver uma subtopologia H-minimal.*

Pelo segundo corolário do teorema 2.3, a definição é equivalente a ter alguma subtopologia H-fechada. Este fato justifica nosso primeiro resultado que "gera" uma subtopologia H-minimal e que será usado muitas vezes a partir de agora.

Teorema 4.1 ([PV85],1.1;[VW81]) *Sejam Y um espaço compacto de Hausdorff, X um conjunto, e $f : Y \to X$ uma sobrejeção compacta e irredutível. Existe uma topologia de Hausdorff em X, τ, tal que $f : Y \to (X, \tau)$ é θ-contínua e perfeita, e (X, τ) é H-minimal.*

Demonstração Seja τ a topologia cujos fechados sejam gerados por $\{f[A] : A$ é fechado de $Y\}$. Imediatamente temos que $f : Y \to (X, \tau)$ é perfeita.

Vejamos que (X, τ) é de Hausdorff. Dados x e y dois elementos distintos de X. Temos que $f^{-1}(x)$ e $f^{-1}(y)$ são dois compactos disjuntos. Assim existem $U, V \in \tau(Y)$, disjuntos, tais que $f^{-1}(x) \subseteq U$ e $f^{-1}(y) \subseteq V$. Como f é sobrejeção $X \setminus f[Y \setminus U]$ e $X \setminus f[Y \setminus V]$ são abertos em τ, disjuntos, que separam x e y.

Agora suponhamos $y \in Y$ e $f(y) \in X \setminus f[A]$, para algum A, fechado em Y. Então $f^{-1}(y)$ é um compacto que não encontra A. Como Y é normal, existem $U, V \in \tau(Y)$, disjuntos, tais que $f^{-1}(y) \subseteq U$ e $A \subseteq V$. Mostremos que $f[\overline{U}^Y] \subseteq \overline{X \setminus f[A]}^X$. Sejam $t \in \overline{U}^Y$ e B um fechado de Y, tais que $f(t) \in X \setminus f[B]$. Como $\overline{U}^Y \cap V = \emptyset$, temos que

$t \in Y \setminus (A \cup B)$. Logo $A \cup B$ é um fechado próprio de Y, e, por f ser irredutível, $f[A \cup B]$ é um fechado próprio de X. Assim $(X \setminus f[A]) \cap (X \setminus f[B]) \neq \emptyset$. Sendo assim, f é θ-contínua.

Pelo item (6) da proposição 2.7, temos que (X, τ) é H-fechado. Vejamos que (X, τ) é semi-regular e teremos completado que (X, τ) é H-minimal.

Sejam A um fechado de Y e $x \in X \setminus f[A]$. Assim $f^{-1}(x) \cap A = \emptyset$ e novamente separamos $f^{-1}(x)$ e A por abertos disjuntos U e V, respectivamente. Temos que $A \subseteq F$, onde $F = \overline{Y \setminus \overline{U}^{Y}}^{Y} \in \mathcal{R}(Y)$. Assim $f[A] \subseteq f[F]$ e $f[F] \in \mathcal{R}(X)$, pela proposição 3.5. Como $F \subseteq Y \setminus U$, temos que $x \in X \setminus f[F] \in \mathcal{RO}(X)$. ■

O próximo resultado dá condições equivalentes ao fato de um espaço ser de Katětov.

Teorema 4.2 ([PV85],1.1) *Para um espaço X, de Hausdorff, são equivalentes:*

(1) X é de Katětov,

(2) X é a imagem perfeita de um espaço compacto,

(3) X é a imagem perfeita de um espaço H-fechado, e,

(4) Existe um espaço H-fechado Y e uma sobrejeção fechada $f : Y \to X$ tal que $f^{-1}(x)$ é θ-fechado para todo $x \in X$.

Demonstração Claramente (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4). Vejamos as outras implicações:

(1) $\Rightarrow$ (2) Seja $\tau' \subseteq \tau(X)$, tal que $X' = (X, \tau')$ seja H-fechado. Temos que EX' é compacto, pela proposição 3.6. Dado que $\pi_{X'} : EX' \to X'$ e $id_X : X' \to X$ são sobrejeções perfeitas temos que X é imagem perfeita do compacto EX', pelo item (1) da proposição 3.2.

(4) $\Rightarrow$ (1) Sejam Y e f nas condições da hipótese. Como já argumentado aqui, EY é compacto. Pelo item (7) do teorema 3.3, $\pi_Y^{-1}[f^{-1}(x)]$ é compacto para qualquer $x \in X$, e, assim, $f \circ \pi_Y : EY \to X$ é sobrejeção perfeita. Pela proposição 3.4, existe um fechado $D \subseteq EY$, fechado, tal que $(f \circ \pi_Y)|_D$ é sobrejeção perfeita e irredutível. Como D é compacto, e existe uma topologia τ sobre X tal que (X, τ) é H-minimal, pelo teorema 4.1. Como $(f \circ \pi_Y)|_D$ é perfeita, $\tau \subseteq \tau(X)$, e X é de Katětov. ■

Corolário A imagem perfeita de um espaço de Katětov é um espaço de Katětov.

Demonstração Imediato do teorema anterior e da proposição 3.2. ■

Corolário Se um espaço X tem uma extensão H-fechada hX e um fechado discreto A tais que $|hX \setminus X| \leq |A|$, então X é de Katětov.

Demonstração Seja $f : hX \setminus X \to A$ uma função injetora. Definamos $g : hX \to X$ por $g(x) = x$ para $x \in X$ e $g|_{hX \setminus X} = f$. Como $|g^{-1}(x)| \leq 2$, para todo $x \in X$, g é compacta. Dado F, fechado de hX, temos que $g[F] = (F \cap X) \cup f[B \setminus X]$, e, como todo subconjunto de A é fechado, $g[F]$ é fechado. Assim chegamos às hipóteses do item (3) do teorema 4.2. ■

Este último corolário toca em um ponto muito interessante sobre as extensões H-fechadas: o tamanho, aliás, a cardinalidade, do resto de uma extensão H-fechada de um espaço. Abriremos uma seção aqui para enunciar um resultado que lida com este ponto.

4.1 Partições em compactos de $\sigma X \setminus X$

Mostraremos aqui que toda extensão H-fechada de um espaço X induz uma partição em compactos de $\sigma X \setminus X$; e, ainda, que toda partição é induzida por alguma extensão H-fechada.

Lembremos que σX e κX têm o mesmo suporte, $\kappa X \setminus X$ é fechado discreto e $\sigma X \setminus X$ é zero-dimensional. Dado $Y \in \mathcal{H}(X)$ temos que existe $f : \kappa X \to Y$, contínua, que estende id_X. Assim podemos considerar $f^{-1}(p)$ como subconjunto de $\sigma X \setminus X$, para todo $p \in Y \setminus X$. Definamos $P(Y) = \{f^{-1}(p) : p \in Y \setminus X\}$.

Teorema 4.3 ([PW87],7.4(a)) *Usando os objetos definidos acima, temos:*

(1) $P(Y)$ é uma partição em compactos de $\sigma X \setminus X$, e,

(2) Se P' é uma partição em compactos de $\sigma X \setminus X$, existe $Y \in \mathcal{H}(X)$, máxima (no sentido dado na definição 1.3), tal que $P(Y) = P'$.

Demonstração (1) Pelo item (2) do teorema 3.7, basta-nos mostrar que $A = f^{-1}(p)$ é fechado de σX, para todo $p \in Y \setminus X$.

Seja $q \in \sigma X \setminus A$. Temos que $f(q) \neq p$ e assim existem $U_1, U_2 \in \tau(Y)$, disjuntos, que separam $f(q)$ e p, respectivamente. Como f é contínua, $V_i = f^{-1}[U_i] \in \tau(\kappa X)$, para $i = 1, 2$. Ainda, $q \in V_1$, $A \subseteq V_2$, e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Assim $\overline{V_1}^{\circ_{\kappa X}{}^{\kappa X}} \cap \overline{V_2}^{\circ_{\kappa X}{}^{\kappa X}} = \emptyset$, e, pelo item (1) da proposição 2.11, $q \in \overline{V_1}^{\circ_{\kappa X}{}^{\kappa X}} \subseteq \sigma X \setminus A$ e $\overline{V_1}^{\circ_{\kappa X}{}^{\kappa X}} = o(\overline{V_1 \cap X}^{\circ_X{}^X}) \in \tau(\sigma X)$. Logo $\sigma X \setminus A \in \tau(\sigma X)$.

(2) Dada P', uma partição em compactos de $\sigma X \setminus X$, temos que $P' \cup \{\{x\} : x \in X\}$ é uma partição de κX que induz um relação de equivalência R. Consideremos $Y(P')$ o espaço quociente $\kappa X/R$ e $f : \kappa X \to Y(P')$, a função quociente induzida. Já que $f^{-1}[f[A]] = A$, para qualquer $A \subseteq X$, temos que $f[X]$ é aberto em $Y(P')$ e $f|_X : X \to Y(P')$ é uma imersão. Facilmente temos que $f[X]$ é denso em $Y(P')$.

Vejamos que $Y(P')$ é espaço de Hausdorff. Sejam $p, q \in Y(P')$, distintos. Temos que $f^{-1}(p)$ e $f^{-1}(q)$ são compactos disjuntos, e existem $U, V \in \tau(\kappa X)$, disjuntos, que separam $f^{-1}(p)$ e $f^{-1}(q)$, respectivamente. Vale observar que um subespaço compacto de σX é também compacto de κX, pois para um $W \in \tau(\kappa X)$, temos $W \subseteq o(W \cap X)$, pelo item (4) da proposição 2.10. Mostremos que $U' = f^{-1}(p) \cup (U \cap X) \in \tau(\kappa X)$ e que $f^{-1}[f[U']] = U'$. Imediatamente temos $U' \cap X = U \cap X$. Seja $\mathcal{U} \in f^{-1}(p) \setminus X$. Dado $W \in \mathcal{U}$ temos que $\mathcal{U} \in \overline{W}^{\kappa X}$, pelo item (2) da proposição 2.9. Assim $U \cap X \cap W = U \cap W \neq \emptyset$. Ou seja, $U \cap X$ encontra $\mathcal{U}$ e pertence a $\mathcal{U}$. Agora vejamos que $f^{-1}[f[U']] = U'$. Dado $t \in f^{-1}[f[U']]$, temos que $f(t) = f(u)$, para algum $u \in U'$. Se $u \in f^{-1}(p)$, temos que $f(t) = f(u) = p$, e $t \in f^{-1}(p)$. Caso $u \in U \cap X$, $t \in f(t) = f(u) = \{u\}$, e $t = u$. Analagomente temos $V' = f^{-1}(q) \cup (V \cap X) \in \tau(\kappa X)$ e que $f^{-1}[f[V']] = V'$. Assim p e q são separados pelos abertos disjuntos $f[U']$ e $f[V']$, respectivamente, de $Y(P')$.

Já que $Y(P')$ é a imagem contínua do espaço H-fechado κX, temos que $Y(P')$ é H-fechado. Observamos que f "fixa"os pontos de X, assim $P' = P(Y(P'))$.

Agora seja $Z \in \mathcal{H}(X)$ tal que $P(Z) = P'$. Considere $g : \kappa X \to Z$ a função contínua que fixa os pontos de X. Definamos $h : Y(P') \to Z$ por $h(\{x\}) = x$, para $x \in X$, e $h(p) = t$, para $p \in P'$ e $t \in Z \setminus X$, tal que $p = g^{-1}(t)$. Facilmente temos que $h \circ f = g$ e que h é contínua. Assim $Y(P') \geq Z$. ■

Daremos, agora, outra caracterização para os compactos de $\sigma X \setminus X$.

Proposição 4.1 ([PW87],7.4(c)) *Seja $A \subseteq \sigma X \setminus X$. São equivalentes:*

(1) A é compacto, e,

(2) $\bigcap A$ é um $\tau(X)$-filtro livre e $A = \{\mathcal{U} \in \sigma X \setminus X : \bigcap A \subseteq \mathcal{U}\}$.

Demonstração (1) $\Rightarrow$ (2) Claramente, $\bigcap A$ é $\tau(X)$-filtro. Vejamos, porém, que é livre. Suponha $x \in ad_X(\bigcap A)$. Para cada $p \in A$, existe $U_p \in p$, tal que $x \notin \overline{U_p}^X$, já que p é ultrafiltro livre. Sendo assim,

$$A \subseteq \bigcup_{p \in A} o(U_p)$$

Como A é compacto, existe $A' \subseteq A$, finito, tal que $A \subseteq o(V)$, onde $V = \bigcup_{p \in A'} U_p$. Ainda temos $x \in W = X \setminus \overline{V}^X$. Mas $V \in \bigcap A$, e x deveria pertencer a $\overline{V}^X$. Logo $ad_X(\bigcap A) = \emptyset$.

Consideremos $S = \{\mathcal{U} \in \sigma X \setminus X : \bigcap A \subseteq \mathcal{U}\}$. Facilmente tem-se que $A \subseteq S$. Suponha $\mathcal{U} \in (\sigma X \setminus X) \setminus A$, e, existem $U, V \in \tau(\sigma X)$, disjuntos, tais que $A \subseteq U$ e $\mathcal{U} \in V$. Como,

$$A \subseteq \overline{U}^{\sigma X} \setminus X = \overline{U \cap X}^{\sigma X} \setminus X = o(U \cap X) \setminus X,$$

$U \cap X \in \bigcap A$. Analogamente, temos $\mathcal{U} \in o(V \cap X) \setminus X$ e $V \cap X \in \mathcal{U}$. Sendo $U \cap X \notin \mathcal{U}$, $\bigcap A \not\subset \mathcal{U}$, e, $\mathcal{U} \notin S$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Vejamos que A é fechado em σX.

Dado $x \in X$, existe $U \in \bigcap A$, tal que $x \notin \overline{U}^X$, já que $\bigcap A$ é filtro livre. Assim $A \in oU$ e $x \in o(X \setminus \overline{U}^X)$, que são abertos disjuntos. Dado $\mathcal{U} \in (\sigma X \setminus X) \setminus A$, existe $V \in \bigcap A \setminus \mathcal{U}$, e, ainda, $W \in \mathcal{U}$, tal que $V \cap W = \emptyset$. Logo $A \subseteq oV$, $\mathcal{U} \in oW$, e $oV \cap oW = \emptyset$. ■

4.2 Extensões H-fechadas com resto enumerável

Pelo segundo corolário do teorema 4.2, e, usando os fatos colocados na seção anterior, uma condição suficiente para um espaço ser de Katětov é ter um subconjunto fechado dicreto infinito e ter uma extensão H-fechada com resto enumerável. Para um espaço de Hausdorff, ter um fechado discreto infinito é equivalente a não ser enumeravelmente compacto ([ENG89],3.10.3).

Já que $\sigma X \setminus X$ é homeomorfo a $\beta EX \setminus EX$, devemos procurar condições para $\beta EX \setminus EX$ ter uma partição enumerável em compactos. Como $\beta EX \setminus EX$ é zero-dimensional a próxima proposição nos será muito útil.

Proposição 4.2 ([PV85],3.1) *Um espaço zero-dimensional Y tem partição enumerável em compactos se, e somente se, Y é a união enumerável de compactos G_δ.*

Demonstração Se Y tem uma partição naquelas condições, claramente é união enumerável de compactos G_δ.

Suponha $Y = \bigcup_{n<\omega} A_n$, onde cada A_n é compacto e G_δ. Podemos supor ainda que $A_n \subseteq A_{n+1}$, para todo $n < \omega$.

Seja A um compacto tal que $A = \bigcap_{n<\omega} U_n$, com cada $U_n \in \tau(Y)$. Fixemos $n < \omega$, e temos que para cada $a \in A$, existe $C_a \in \mathcal{B}(Y)$, tal que $a \in C_a \subseteq U_n$. Como A é compacto, existe $C_n \in \mathcal{B}(Y)$, tal que $A \subseteq C_n \subseteq U_n$. Assim $A = \bigcap_{n<\omega} C_n$. Sendo assim para cada $n < \omega$, $A_n = \bigcap_{m<\omega} B_m^n$, onde cada $B_m^n \in \mathcal{B}(Y)$. Posso, ainda, supor $B_{m+1}^n \subseteq B_m^n$ e $B_1^n = Y$.

Definimos $D_n^m = A_{n+1} \cap (B_m^n \setminus B_{m+1}^n)$, para cada $n, m \in \omega$. Temos, logo, que D_n^m é sempre compacto. Como

$$\bigcup_{m<\omega} D_n^m = A_{n+1} \setminus A_n,$$

$P = \{A_1\} \cup \{D_n^m : n, m \in \omega\} \setminus \{\emptyset\}$ é, de fato, uma partição em compactos de Y. ■

Esta proposição nos aponta um caminho muito interessante: EX deve um G_δ de βEX, ou seja, EX deve ser **Čech-completo**. Pelo teorema 3.9.1 em [ENG89], um espaço ser G_δ de seu compactificado de Stone-Čech, é equivalente a ser G_δ de qualquer outra compactificação.

Antes das próximas proposições vejamos um novo conceito.

Definição 4.2 *(1) Para um espaço X, de Tychonoff, damos o nome de* **resíduo** *de X, e o denotamos por $R(X)$, ao conjunto $X \cap \overline{\beta X \setminus X}^{\beta X}$, e,*

(2) Diremos que X é **nunca localmente compacto(nowhere locally compact)**, *se $R(X) = X$.*

Brinquemos um pouco com o resíduo para ver o que ele de fato nos diz.

Proposição 4.3 *Para um espaço X, de Tychonoff, são válidas:*

(1) $X \setminus R(X) = \{x \in X : x$ tem vizinhança em X compacta$\}$,

(2) $R(X) = X \cap \overline{Y \setminus X}^{Y}$, para qualquer $Y \in \mathcal{K}(X)$,

(3) $\pi[R(EX)] = R(X)$,

(4) $R(EX)$ é um fechado de $\pi^{-1}[R(X)]$, e,

(5) X é nunca localmente compacto se, e só se, $\beta X \setminus X$ é denso em βX.

Demonstração (1) Seja $x \in X \setminus R(X)$. Então existe $V \in \tau(\beta X)$ tal que $x \in V$ e $V \subseteq X$. Como x tem sistema fundamental de vizinhanças fechadas, existe $U \in \tau(\beta X)$, tal que $x \in U \subseteq \overline{U}^{\beta X} \subseteq V$. Assim $\overline{U}^{\beta X}$ é compacto contido em X. Daí, $x \in U \cap X = U$ e, como $\overline{U}^{\beta X} \subseteq V \subseteq X$,

$$\overline{U}^X = \overline{U}^{\beta X} \cap X = \overline{U}^{\beta X}.$$

Logo $\overline{U}^X$ é vizinhança compacta de x.

Agora sejam $x \in V \in \tau(X)$ tais que $\overline{V}^X$ é compacto. Assim $\overline{V}^X$ é um fechado de βX. Seja $U \in \tau(\beta X)$, tal que $V = U \cap X$. Sendo assim,

$$x \in U \subseteq \overline{U}^{\beta X} = \overline{V}^{\beta X} \subseteq \overline{\overline{V}^X}^{\beta X} = \overline{V}^X \subseteq X,$$

e, $x \notin \overline{\beta X \setminus X}^{\beta X}$.

(2) Sejam $Y \in \mathcal{K}(X)$ e $f : \beta X \to Y$, contínua, extensão de id_X. Temos facilmente que f é sobrejetora, $f^{-1}[X] = X$ e $f^{-1}[Y \setminus X] = \beta X \setminus X$.

Dados $x \in R(X)$ e $U \in \tau(Y)$, vizinhança de x, temos que $x \in f^{-1}[U] \in \tau(\beta X)$. Daí, $f^{-1}[U] \setminus X \neq \emptyset$. Logo $U \setminus X \neq \emptyset$.

Agora seja $x \in X \cap \overline{Y \setminus X}^Y \setminus R(X)$. Pelo item anterior, existe $V \in \tau(X)$, tal que $x \in V$ e $\overline{V}^X$ é compacto. Como Y é extensão de X, existe $W \in \tau(Y)$, tal que $W \cap X = V$. Analogamente ao item anterior, temos que $\overline{W}^Y \subseteq X$, e chegamos a um absurdo.

(3) Como $\beta\pi$ é contínua e extensão de $i_X \circ \pi$ temos

$$\pi[R(EX)] = \beta\pi[EX \cap \overline{\beta EX \setminus EX}^{\beta EX}] \subseteq \beta\pi[EX] \cap \beta\pi[\overline{\beta EX \setminus EX}^{\beta EX}] \subseteq$$
$$X \cap \overline{\beta\pi[\beta EX \setminus EX]}^{\beta X} = X \cap \overline{\beta X \setminus X}^{\beta X} = R(X).$$

Seja $x \in R(X) \setminus \pi[R(EX)]$. Então $\pi^{-1}(x) \cap R(EX) = \emptyset$, ou ainda,

$$\pi^{-1}(x) \cap \overline{\beta EX \setminus EX}^{\beta EX} = \emptyset.$$

Como βEX é zero-dimensional e lembrando os abertos-fechados de θX, temos que $A \in \mathcal{R}(X)$ tal que

$$\pi^{-1}(x) \subseteq \lambda(A) \quad \text{e} \quad \overline{\beta EX \setminus EX}^{\beta EX} \subseteq \lambda(A'),$$

já que $\pi^{-1}(x)$ é compacto. Assim $x \in \overset{\circ}{A}^X$, pelo item (6) do teorema 3.3. Seja $\Omega \in \tau(\beta X)$, tal que $\overset{\circ}{A}^X = \Omega \cap X$. Como $x \in R(X)$, temos que $\Omega \cap \beta X \setminus X \neq \emptyset$ e, pelo item (2) da proposição 3.9, $\beta EX \setminus EX \cap \beta\pi^{-1}[\Omega] \neq \emptyset$. Dado que $\beta EX \setminus EX \subseteq \lambda(A')$, $\beta\pi^{-1}[\Omega] \cap \lambda(A')$ é um aberto não-vazio de βEX, e, assim,

$$EX \cap \beta\pi^{-1}[\Omega] \cap \lambda(A') \neq \emptyset.$$

Já que $\pi[EX \cap \beta\pi^{-1}[\Omega] \cap \lambda(A')] = A' \cap \Omega = A' \cap X \cap \Omega = A' \cap \overset{\circ}{A}^X$, e, $A' = \overline{X \setminus A}^X$, chegamos que $\overset{\circ}{A}^X \setminus A \neq \emptyset$, ou seja, um absurdo.

(4) Como $R(EX)$ e $\pi^{-1}[R(X)]$ são fechados de EX, pois π é contínua, temos que $R(EX) = EX \cap F_1$ e $\pi^{-1}[R(EX)] = EX \cap F_2$, para F_1 e F_2 fechados de βEX. Assim $R(EX) = \pi^{-1}[R(X)] \cap F_1$ e é um fechado de $\pi^{-1}[R(X)]$.

(5) Como $\overline{R(X)}^{\beta X} \subseteq \overline{\beta X \setminus X}^{\beta X}$, temos facilmente que X será nunca localmente compacto se, e somente se, $\overline{\beta X \setminus X}^{\beta X} = \beta X$. ■

Proposição 4.4 ([PV85],3.2) *Se $cX \in \mathcal{K}(X)$, para um espaço X Čech-completo, tal que $R(X)$ é de Lindelöf, e cX é zero-dimensional, então $cX \setminus X$ tem uma partição enumerável em compactos.*

Demonstração Já que $cX \setminus X$ é σ-compacto, $cX \setminus X = \bigcup_{n<\omega} A_n$, onde cada A_n é compacto. Seja $Y = \overline{cX \setminus X}^{cX}$.

Fixemos $n < \omega$. Para cada $p \in R(X)$, existe $U_p \in \mathcal{B}(Y)$ tal que $p \in U_p \subseteq Y \setminus A_n$, já que cX é zero-dimensional. Assim

$$R(X) \subseteq \bigcup_{p \in R(X)} U_p,$$

e, por ser de Lindelöf, existe $F \subseteq R(X)$, enumerável, tal que $R(X) \subseteq \bigcup_{p \in F} U_p = U_n$. Logo $B_n = Y \setminus U_n$ é fechado de Y, e, portanto, compacto.

Claramente, $A_n \subseteq B_n$. Vejamos que $B_n \subseteq cX \setminus X$. Suponha que exista $x \in B_n \cap X$. Como $B_n \subseteq Y$ temos que $x \in R(X) \subseteq U_n$, o que é um absurdo.

Assim, $\bigcup_{n<\omega} B_n = cX \setminus X$, e, ainda $B_n = \bigcap_{p \in F} [(cX \setminus X) \cap (Y \setminus U_p)]$, e, cada, $(cX \setminus X) \cap (Y \setminus U_p) \in \tau(cX \setminus X)$. Pela proposição anterior, concluímos a demonstração. ■

Chequemos mais algumas condições suficientes para um espaço ser de Katětov.

Corolário ([PV85],3.3) Seja X um espaço.

(1) Se X não é enumeravelmente compacto, EX é Čech-completo, e $R(EX)$ é de Lindelöf, então X tem uma extensão H-fechado com resto enumerável e é de Katětov.

(2) Se X é de Tychonoff e Čech-completo e $R(X)$ é de Lindelöf, então X tem extensão H-fechada com resto enumerável.

Demonstração (1) βEX é zero-dimensional, EX é Čech-completo e $R(EX)$ é de Lindelöf, logo, pela proposição anterior, $\beta EX \setminus EX$ tem partição enumerável em compactos.

Como $\sigma X \setminus X$ é homeomorfo a $\beta EX \setminus EX$ (item (1) do teorema 3.11), X tem extensão H-fechada com resto enumerável, do teorema 4.3. Como estamos supondo X não enumeravelmente compacto, X tem um subespaço fechado discreto que é infinito. Usando o segundo corolário do teorema 4.2, X é de Katětov.

(2) Usando a proposição 3.1, item (2), temos que $R(EX)$ é um fechado no espaço de Lindelöf $\pi^{-1}[R(X)]$, logo também é de Lindelöf. Da proposição 3.9, item (3), temos que $R(EX)$ é Čech-completo. Chegamos a algumas das condições do item anterior e temos que X tem extensão H-fechada com resto enumerável. ■

Proposição 4.5 ([PV85],3.4) *Seja X um espaço que satisfaça:*

(1) X é regular, de Lindelöf e Čech-completo, ou

(2) X é paracompacto, Čech-completo e $R(X)$ é de Lindelöf.

Então X é de Katětov e tem uma extensão H-fechada com resto enumerável.

Demonstração Valendo (1) ou (2) temos que X é normal e de Tychonoff. Caso valha (1), $R(X)$ é de Lindelöf, já que é fechado em X. Assim, valendo (1) ou (2), X é um espaço de Tychonoff e Čech-completo, e $R(X)$ é de Lindelöf. Pelo item (2) do corolário anterior, X tem extensão H-fechada com resto enumerável.

Se X não é enumeravelmente compacto temos que é de Katětov. Caso seja enumeravelemente compacto e de Lindelöf, é compacto. Se for enumeravelmente compacto e paracompacto, também será compacto. ■

No próximo teorema precisaremos checar que um espaço é de Lindelöf. Uma maneira de verificar isto é calcular seu grau de Lindelöf.

Lema 4.1 *Seja X um subespaço de um espaço λ-compacto Z, tal que existe uma família de fechados de Z, $\{F_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$, com a seguinte propriedade: para cada $x \in X$ e $z \in Z \setminus X$, existe $\alpha < \kappa$ tal que*

$$x \in F_\alpha \quad e \quad z \notin F_\alpha,$$

onde λ e κ são cardinais.

Então $L(X) \leq \kappa^{<\lambda} \cdot \lambda$

Demonstração Seja $\{V_s\}_{s\in S}$ uma família de abertos de Z que recobre X. Assim, $X \subseteq V$, onde $V = \bigcup_{s\in S} V_s$. Sejam $\mathcal{I} = [\kappa]^{<\lambda} = \{J \subseteq \kappa : |J| < \lambda\}$ e $\mathcal{F} = \{\bigcap_{\alpha\in J} F_\alpha : J \in \mathcal{I} \text{ e } \bigcap_{\alpha\in J} F_\alpha \subseteq V\}$. Assim, $|\mathcal{F}| \leq \kappa^{<\lambda}$.

Vejamos que $X \subseteq \bigcup \mathcal{F}$. Fixemos $x \in X$. Para cada $y \in Z \setminus V$, seja $\alpha_y < \kappa$ tal que $x \in F_{\alpha_y}$ e $y \notin F_{\alpha_y}$. Daí

$$Z \setminus V \subseteq \bigcup_{y\in Z\setminus V} Z \setminus F_{\alpha_y},$$

e, por ser λ-compacto, existe $T \subseteq Z \setminus V$, tal que $|T| < \lambda$ e $Z \setminus V \subseteq \bigcup_{y\in T} Z \setminus F_{\alpha_y}$. Logo $x \in \bigcap_{y\in T} F_{\alpha_y} \in \mathcal{F}$.

Por outro lado, se $F \in \mathcal{F}$, existe $S_F \subseteq S$, tal que $|S_F| < \lambda$ e

$$F \subseteq \bigcap_{s\in S_F} V_s,$$

já que F é λ-compacto.

Seja $R = \bigcup_{F\in\mathcal{F}} S_F$ e claramente temos que $X \subseteq \bigcup_{s\in R} V_s$.

Assim concluímos que $L(X) \leq \kappa^{<\lambda} \cdot \lambda$. ■

Observação 4.1 *Observando a demonstração vemos que podemos melhorar mais a estimativa do grau de Lindelöf de X. Se μ é um cardinal tal que todo F_α é μ-compacto, pode-se dizer que*

$$L(X) \leq \kappa^{<\lambda} \cdot \mu.$$

Proposição 4.6 *Seja $\{X_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ uma família de espaços de Tychonoff tais que cada X_α é união de κ compactos, para κ e λ cardinais infinitos. Então $L(\prod_{\alpha<\lambda} X_\alpha) \leq \lambda \cdot \kappa$.*

Demonstração Para cada $\alpha < \lambda$, $X_\alpha = \bigcup_{\beta<\kappa} A^\alpha_\beta$, onde A^α_β é um compacto.

Consideremos $Y = \prod_{\alpha<\lambda} X_\alpha$ e $Z = \prod_{\alpha<\lambda} \beta X_\alpha$. Para cada $\alpha < \lambda$ e $\beta < \kappa$, seja $F_{\alpha,\beta} = \prod_{\gamma<\lambda} W_\gamma$, onde $W_\gamma = \beta X_\gamma$, para $\gamma \neq \alpha$, e, $W_\alpha = A^\alpha_\beta$.

Assim, $\{F_{\alpha,\beta}\}_{\alpha<\lambda,\beta<\kappa}$ é uma família de fechados nas condições do lema anterior. Daí

$$L(Y) \leq (\lambda \cdot \kappa)^{<\omega} \cdot \omega = \lambda \cdot \kappa.$$

■

Proposição 4.7 ([PV85],3.5) *A intersecção enumerável de subespaços σ-compactos em um espaço regular de Hausdorff é de Lindelöf.*

Demonstração Sejam X um espaço de Hausdorff regular, B_n subespaço σ-compacto para cada $n < \omega$, e $A = \bigcap_{n<\omega} B_n$. Pela proposição anterior, $Y = \prod_{n<\omega} B_n$ é de Lindelöf. A função $e : A \to Y$, onde $e(x)$ é a seqüência constante igual a x, é uma imersão. Como X é de Hausdorff, $\Delta = \{\text{seqüências constantes de } Y\}$ é um fechado. Claramente $\Delta = e[A]$. Assim $e[A]$ é de Lindelöf. ■

Vamos chegar ao, talvez melhor, teorema desta seção - uma condição equivalente para um espaço de Tychonoff ter extensão H-fechada com resto enumerável.

Teorema 4.4 ([PV85],3.6) *Para um espaço X, de Tychonoff, são equivalentes:*

(1) X é de Lindelöf e Čech-completo,

(2) $\beta X \setminus X$ é uma união enumerável de compactos G_δ em βX, e,

(3) $\beta EX \setminus EX$ pode ser particionado em enumeráveis compactos que são G_δ em βEX.

Demonstração (1) $\Rightarrow$ (2) Suponhamos $X = \bigcap_{n<\omega} \Omega_n$, onde cada $\Omega_n \in \tau(\beta X)$. Fixemos $n < \omega$. Para cada $x \in X$, existe $f_x : \beta X \to [0,1]$, contínua, tal que $x \in f_x^{-1}[(0,1]] \subseteq \Omega_n$. Assim

$$X \subseteq \bigcup_{x\in X} f_x^{-1}[(0,1]],$$

e, por ser de Lindelöf, $X \subseteq \bigcup_{x\in A} f_x^{-1}[(0,1]]$, para algum $A \subseteq X$, enumerável. Como $\mathcal{Z}(X)$ é fechado por intersecções enumeráveis, $\bigcap_{x\in A} f_x^{-1}(0) = g_n^{-1}(0)$, para alguma $g_n : \beta X \to [0,1]$, contínua. Logo

$$X \subseteq \bigcap_{n<\omega} g_n^{-1}[(0,1]].$$

Assim, $\beta X \setminus X = \bigcup_{n<\omega} g_n^{-1}(0)$, e, cada $g_n^{-1}(0)$ é compacto e G_δ.

(2) $\Rightarrow$ (3) Basta lembrarmos que $\beta EX \setminus EX = \beta\pi^{-1}[\beta X \setminus X]$, para $\beta\pi$ discutida no paragráfo anterior a proposição 3.9.

(3) $\Rightarrow$ (1) Suponhamos $\{A_n\}_{n<\omega}$ uma partição de $\beta EX \setminus EX$, onde cada A_n é compacto e G_δ. Assim $\beta EX \setminus A_n$ é σ-compacto para cada $n < \omega$. Pela proposição anterior, $EX = \bigcap_{n<\omega} (\beta EX \setminus A_n)$ é de Lindelöf. Como $X = \pi[EX]$, e π é contínua, temos que X é de Lindelöf.

Ainda, $\beta X \setminus X = \beta\pi[\beta EX \setminus EX] = \bigcup_{n<\omega} \beta\pi[A_n]$. Como cada $\beta\pi[A_n]$ é compacto, X é Čech-completo. ■

Proposição 4.8 ([PV85],3.7) *Seja X um espaço de Tychonoff nunca localmente compacto. Se X tem uma extensão H-fechada com resto enumerável, então X tem um subespaço denso que é de Lindelöf.*

Demonstração Como $\pi[R(EX)] = R(X)$ (item (3) da proposição 4.3) e π é irredutível, temos que X é nunca localmente compacto se, e só se, EX o for. Supondo que X tenha extensão H-fechada com resto enumerável, $\beta EX \setminus EX$ tem partição enumerável em compactos. Assim, basta mostrarmos que EX tem um denso de Lindelöf e sua imagem será o que estamos procurando em X.

Como X tem extensão H-fechada com resto enumerável, $\beta EX \setminus EX$ tem uma partição enumerável em compactos, pela proposição 4.3. Seja, então, $\{A_n\}_{n<\omega}$ uma família de compactos tais que $\beta EX \setminus EX = \bigcup_{n<\omega} A_n$. Fixemos $n < \omega$. Para cada $m < \omega$, temos que $A_n \subseteq \beta EX \setminus A_m$, e, por βEX ser normal, existe $U_m \in \tau(\beta EX)$, tal que $A_n \subseteq U_m \subseteq \overline{U_m}^{\beta EX} \subseteq \beta EX \setminus A_m$. Lembrando que βEX é extremamente desconexo (teorema 3.3), temos que $B_n = \bigcap_{m<\omega} \overline{U_m}^{\beta EX}$ é compacto e $\beta EX \setminus B_n$ é aberto e σ-compacto. Ainda, temos que $B_n \setminus EX = A_n$.

Seja V um aberto de βEX contido em B_n. Como EX é nunca localmente denso, $\beta EX \setminus EX$ é denso em βEX, pela proposição 4.3, item (5), e, assim, $\overline{V}^{\beta EX} = \overline{V \setminus EX}^{\beta EX}$. Portanto,

$$V \subseteq \overline{V}^{\beta EX} \subseteq \overline{B_n \setminus EX}^{\beta EX} \subseteq \overline{A_n}^{\beta EX} \subseteq A_n \subseteq \beta EX \setminus EX.$$

Logo $V = \emptyset$, já que $\beta EX \setminus EX = \emptyset$. Sendo assim, $\beta EX \setminus B_n$ é denso em βEX, e pelo teorema de Baire ([ENG89],3.9.3), $D = \bigcap_{n<\omega} \beta EX \setminus B_n$ é denso em βEX, pois EX é Čech-completo. Pela proposição 4.7, D é de Lindelöf. Ainda,

$$D \subseteq \bigcap_{n<\omega} \beta EX \setminus A_n = \beta EX \setminus \bigcup_{n<\omega} A_n = EX,$$

e será denso em EX. ■

4.3 Comparando X, X_s e EX

Nesta seção queremos investigar que relações existem entre as subtopologias de um espaço X, da sua semi-regularização X_s, e do seu absoluto EX.

Caso X_s tenha subtopologia compacta temos que X também terá. Vejamos que vale a recíproca:

Proposição 4.9 ([PV85],2.1) *Uma subtopologia regular de X é uma subtopologia de X_s.*

Demonstração Seja τ uma subtopologia de X tal que $X' = (X, \tau)$ seja espaço regular. Dado $V \in \tau$ e $p \in V$, temos que existe $U \in \tau$ tal que $p \in U \subseteq \overline{U}^{X'} \subseteq V$. Como τ é subtopologia temos que $\overline{U}^{X} \subseteq \overline{U}^{X'}$. Pelo mesmo motivo, temos

$$p \in U \subseteq \overset{\circ_X}{\overline{U}}^{X} \subseteq \overline{U}^{X} \subseteq \overline{U}^{X'} \subseteq V.$$

Ou seja, $\mathcal{RO}(X)$ é base dos abertos de X'. Assim $\tau \subseteq \tau(X_s)$. ■

Corolário Um espaço X tem uma subtopologia compacta se, e somente se, X_s também tem uma. ■

Temos facilmente que, se X_s é de Katětov, X também o será. Para provarmos que a recíproca não é válida precisaremos dos resultados a seguir.

Proposição 4.10 ([PV85],2.3) *Seja $hX \in \mathcal{H}(X)$, para um espaço X, tal que $hX \setminus X$ é fechado e discreto. Então $X \times hX$ é de Katětov.*

Demonstração Fixemos $p \in X$. Definamos $f : hX \times hX \to X \times hX$, por

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,y) & \text{se } x \in X \\ (p,x) & \text{se } x \in hX \setminus X \end{cases}.$$

Dado F um fechado de $hX \times hX$ temos que $F \cap X \times hX$ é fechado de $X \times hX$. Como qualquer subconjunto de um discreto fechado é um fechado, temos que

$$f[F] = f[F \cap X \times hX] \cup f[F \cap (hX \setminus X) \times hX] = (F \cap X \times hX) \cup f[F \cap (hX \setminus X) \times hX]$$

é um fechado de $X \times hX$. Caso $x \neq p$ ou $y \in X$, temos que $f^{-1}(x,y) = \{(x,y)\}$, que é θ-fechado. Caso $y \in hX \setminus X$, temos que $f^{-1}(p,y) = \{(p,y)\} \cup \{y\} \times hX$, que é união de dois θ-fechados, e, portanto, é θ-fechado. Pelo item (4) do teorema 4.2, temos que $X \times hX$ é de Katětov. ■

Proposição 4.11 *Um espaço de Katětov não é união enumerável de compactos que são raros.*

Demonstração Suponha, por absurdo, que X é um espaço de Katětov e que $X = \bigcup_{n<\omega} A_n$, onde cada A_n é compacto e raro de X, ou seja, $\overset{\circ}{A}{}^{X}_{n} = \emptyset$.

Seja τ uma subtopologia tal que $X' = (X, \tau)$ é um espaço H-fechado. Temos que cada A_n, como subespaço de X', será também compacto, e, como $\overset{\circ}{A}{}^{X'}_{n} \subseteq \overset{\circ}{A}{}^{X}_{n}$, A_n será raro de X'. Assim X' é união enumerável de θ-fechados raros, e chegamos a uma contradição com a proposição 3.7. ■

Corolário O espaço dos racionais $\mathbb{Q}$ não é de Katětov. ■

Vejamos agora um espaço que é de Katětov cuja semi-regularização não é de Katětov.

Exemplo 4.1 *Seja $\mathbb{R}^*$ a compactificação de Alexandroff de $\mathbb{R}$. Temos, também, que $\mathbb{R}^* \in \mathcal{K}(\mathbb{Q})$. Seja $h\mathbb{Q}$ a extensão simples $(\mathbb{R}^*)^+$ e $h\mathbb{Q} \in \mathcal{H}(\mathbb{Q})$. Ainda, $h\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q}$ é fechado e discreto, pela proposição 2.12, item (3). Pela proposição 4.10, $X = \mathbb{Q} \times h\mathbb{Q}$ é de Katětov. Como $(h\mathbb{Q})_s = \mathbb{R}^*$, $X_s = (\mathbb{Q} \times h\mathbb{Q})_s = \mathbb{Q}_s \times (h\mathbb{Q})_s = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}^*$. E X_s não é de Katětov, pela proposição anterior, pois*

$$X_s = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{q\} \times \mathbb{R}^*.$$

Observação 4.2 ([PV85],2.5) *O espaço descrito no exemplo anterior é contra-exemplo para vários dos resultados que já expomos até aqui:*

(1) A "regularidade" da subtopologia não pode ser substituída pela "semi-regularidade" na proposição 4.9. X tem uma subtopologia τ, tal que $X' = (X, \tau)$ é H-minimal. Sendo assim, X' é semi-regular e $\tau \not\subset \tau(X_s)$.

(2) Temos que $X = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{r\} \times h\mathbb{Q}$, ou seja, X é união enumerável de "nowhere denses" H-fechados e θ-fechados. Ainda, X é de Urysohn. Não podemos enfraquecer a proposição anterior, colocando "H-fechados e θ-fechados" no lugar de compactos, mesmo quando o espaço for de Urysohn.

(3) Já que a identidade $id_X : X_s \to X$ é bijetora, θ-contínua, perfeita e irredutível, não podemos substituir "imagem" por "imagem inversa", no primeiro corolário do teorema 4.2.

Proposição 4.12 *Para um espaço X, se EX é de Katětov, X também o será.* ■

Vemos que, novamente, o espaço X, definido no exemplo anterior, é contra-exemplo para uma proposição. Como $EX = EX_s$, temos que EX_s não é de Katětov.

Ainda, podemos enunciar um resultado bem simples mas útil.

Proposição 4.13 ([PV85],2.7) *Se X é um espaço que é localmente compacto exceto por no máximo um ponto, X tem uma subtopologia compacta.*

Demonstração Seja $p \in X$, tal que todo ponto $x \neq p$ tem sistema fundamental de vizinhanças compactas.

Definimos $\tau \subseteq \tau(X)$, por: $U \in \tau$, se, e só se,

$$p \in U \Rightarrow X \setminus U \text{ é compacto.}$$

Facilmente temos que (X, τ) é compacto. ■

4.4 Katětov e extensões de discretos

Em [DP82], Alan Dow e Jack R. Porter mostram um interessante fato sobre os espaços H-fechados infinitos: são homeomorfos ao resto de alguma extensão H-fechada de um espaço discreto infinito . Em [VER85], Johannes Vermeer completa esta curiosa caracterização desmonstrando que o resto de uma extensão H-fechada de um espaço discreto infinito é um espaço de Katětov. Vamos, aqui, expor estes belíssimos resultados.

Em toda esta seção consideraremos sempre a topologia discreta sobre um cardinal, e, a priori, os cardinais sempre serão infinitos.

Suponhamos que $\{F_i\}_{i \in I}$ seja uma partição de $\beta\kappa \setminus \kappa$ em fechados. Vamos definir uma topologia sobre $Y = \kappa \cup \{F_i : i \in I\}$, por: $U \in \tau(Y)$ se,e só se,

$$F_i \in U \Rightarrow F_i \subseteq \overline{U \cap \kappa}^{\beta\kappa}, \text{ para todo } i \in I.$$

Ou seja, o conjunto $\tau(\kappa) \cup \{V \cup \{F_i\} : \text{para algum } i \in I \text{ e } V \subseteq \kappa \text{ tais que } F_i \subseteq \overline{V}^{\beta\kappa}\}$ é uma base para os abertos de Y. Facilmente temos que Y é extensão de κ. A próxima proposição já caminha na proposta descrita acima:

Teorema 4.5 ([DP82],1.1) *Seja $\{F_i\}_{i\in I}$ uma família de fechados de $\beta\kappa \setminus \kappa$. O espaço Y, acima descrito, é de Hausdorff se, e só se, os F_i's são dois a dois disjuntos. Ainda, Y é H-fechado se, e só se, $\{F_i\}_{i\in I}$ é uma partição de $\beta\kappa \setminus \kappa$.*

Demonstração Vejamos a primeira equivalência.

Suponha $\{F_i\}_{i\in I}$ uma família com elementos 2 a 2 disjuntos. Como $\tau(\kappa) \subseteq \tau(Y)$, separar dois elementos distintos de κ por abertos de Y não é problema. Agora sejam $x \in Y$ e $i \in I$, tais que $x \neq F_i$. Caso $x \in \kappa$, temos que $x \notin F_i$, e existe $U \in \tau(\beta\kappa)$ tal que $x \notin \overline{U}^{\beta\kappa}$ e $F_i \subseteq U$. Sendo assim $(U \cap \kappa) \cup \{F_i\}$ é vizinhança de F_i em Y, e também $\{x\} \in \tau(Y)$. Se $x = F_j$, para $j \in I \setminus \{i\}$, temos que existem $U, V \in \tau(\beta\kappa)$, tais que $F_i \subseteq U$, $F_j \subseteq V$, e, $\overline{U}^{\beta\kappa} \cap \overline{V}^{\beta\kappa} = \emptyset$. Assim $(U \cap \kappa) \cup \{F_i\}, (V \cap \kappa) \cup \{F_j\}$ são abertos de Y que separam F_i e F_j. Agora sejam $i, j \in I$, distintos. Se Y é de Hausdorff, existem $U, V \in \tau(Y)$, disjuntos, tais que $F_i \in U$ e $F_j \in V$. Assim $F_i \subseteq \overline{U \cap \kappa}^{\beta\kappa}$ e $F_j \subseteq \overline{V \cap \kappa}^{\beta\kappa}$. Do item (3) do teorema 1.2, temos que $\overline{U \cap \kappa}^{\beta\kappa} \cap \overline{V \cap \kappa}^{\beta\kappa} = \overline{U \cap V \cap \kappa}^{\beta\kappa} = \emptyset$. E, assim, $F_i \cap F_j = \emptyset$.

Agora suponhamos que $\{F_i\}_{i\in I}$ é partição de $\beta\kappa \setminus \kappa$. Seja $\mathcal{C}$ um recobrimento aberto de Y. Para cada $\alpha < \kappa$, seja $C_\alpha \in \mathcal{C}$, tal que $\alpha \in C_\alpha$. Para cada $i \in I$, seja $C_i \in \mathcal{C}$, tal que $F_i \subseteq \overline{C_i \cap \kappa}^{\beta\kappa}$. Assim,

$$\beta\kappa = \bigcup_{\alpha<\kappa} (C_\alpha \cap \kappa) \cup \bigcup_{i\in I} \overline{C_i \cap \kappa}^{\beta\kappa}.$$

Pelo corolário do teorema 1.2, $\overline{C_i \cap \kappa}^{\beta\kappa} \in \mathcal{B}(\beta\kappa)$, para qualquer $i \in I$. Como $\beta\kappa$ é compacto, existem $A \subseteq \kappa$ e $J \subseteq I$, finitos, tais que $\beta\kappa = \bigcup_{\alpha\in A} (C_\alpha \cap \kappa) \cup \bigcup_{i\in J} \overline{C_i \cap \kappa}^{\beta\kappa}$. Temos, então, que

$$\kappa = (\bigcup_{\alpha\in A} C_\alpha \cup \bigcup_{i\in J} C_i) \cap \kappa,$$

e, portanto,

$$Y = \overline{\kappa}^Y = \overline{(\bigcup_{\alpha\in A} C_\alpha \cup \bigcup_{i\in J} C_i) \cap \kappa}^Y = \overline{(\bigcup_{\alpha\in A} C_\alpha \cup \bigcup_{i\in J} C_i)}^Y = \bigcup_{\alpha\in A} \overline{C_\alpha}^Y \cup \bigcup_{i\in J} \overline{C_i}^Y.$$

Consideremos Y H-fechado e mostremos que $\{F_i\}_{i\in I}$ é uma partição de $\beta\kappa \setminus \kappa$. Seja $p \in \beta\kappa \setminus \kappa$. Lembrando do lema 2.1, temos que $\mathcal{F} = \{U \in \tau(Y) : U \cap \kappa \in O^p_{\beta\kappa}\}$ é um $\tau(Y)$-filtro, e, por Y ser H-fechado, tem aderência não-vazia. Seja $x \in ad_Y(\mathcal{F})$. Caso $x \in \kappa$, temos que existe $V \in \tau(\beta\kappa)$, tal que $p \in V$ e $x \notin V$. Sendo assim, $V \cap \kappa \in \mathcal{F}$ e $x \notin \overline{V \cap \kappa}^Y$, pois $\{x\} \in \tau(Y)$. Logo $x = F_i$, para algum $i \in I$. Suponhamos, por absurdo,

que $p \notin F_i$. Logo existem $W, T \in \tau(\beta\kappa)$, disjuntos, tais que $p \in W$ e $F_i \subseteq T$. Como $T \subseteq \overline{T}^{\beta\kappa} = \overline{T \cap \kappa}^{\beta\kappa}$, temos que $(T \cap \kappa) \cup \{F_i\}$ é uma vizinhança de aberta em Y de F_i. Como $W \cap \kappa \in \mathcal{F}$, temos que $F_i \in \overline{T \cap \kappa}^{Y}$. Logo $W \cap \kappa \cap T \neq \emptyset$, um absurdo. ■

Um pouco mais podemos falar sobre o espaço Y: sobre seu caráter.

Proposição 4.14 ([DP82],1.2) *Usando os mesmos objetos do teorema anterior e nas mesmas condições, suponha que λ é o menor cardinal tal que cada F_i possa ser escrito com a intersecção de λ abertos-fechados de $\beta\kappa$. Então $\chi(Y) = \lambda$.*

Demonstração Seja $i \in I$. Então, cada $F_i = \bigcap_{\alpha<\lambda} W_\alpha$, onde cada $W_\alpha \in \mathcal{B}(\beta\kappa)$. Sendo assim, $W_\alpha = \overline{W_\alpha \cap \kappa}^{\beta\kappa}$. E podemos dizer que $F_i = \bigcap_{\alpha<\lambda} \overline{A_\alpha}^{\beta\kappa}$, com cada $A_\alpha \subseteq \kappa$. Estamos tentados a dizer que

$$\{\{F_i\} \cup U : U \supseteq \bigcap \mathcal{A}, \text{ onde } \mathcal{A} \text{ é uma subfamília finita de } \{A_\alpha : \alpha < \lambda\}\}$$

é um sistema fundamental de vizinhanças abertas de F_i em Y. De fato, se $F_i \subseteq \overline{V}^{\beta\kappa}$, para algum $V \subseteq \kappa$, temos que

$$\beta\kappa \setminus \overline{V}^{\beta\kappa} \subseteq \bigcup_{\alpha<\kappa} (\beta\kappa \setminus \overline{A}^{\beta\kappa}),$$

e, como é compacto, achamos uma subfamília finita, $\mathcal{A}$, de $\{A_\alpha : \alpha < \lambda\}$, tal que $\overline{\bigcap \mathcal{A}}^{\beta\kappa} \subseteq \overline{V}^{\beta\kappa}$. Logo $\chi(Y) \leq \lambda$.

Caso $\mathcal{V}$ seja um sistema fundamental de vizinhanças abertas de F_i em Y, temos facilmente que $F_i = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} \overline{V \cap \kappa}^{\beta\kappa}$. Sendo assim, $\chi(Y) = \lambda$. ■

Vejamos uma condição suficiente para que $\beta\kappa \setminus \kappa$ tenha partição em fechados.

Proposição 4.15 ([DP82],1.4) *Seja X um compacto que pode ser particionado em κ fechados não-vazios que são G_λ. Então $\beta\kappa \setminus \kappa$ pode ser particionado em κ fechados não-vazios e G_λ de $\beta\kappa$.*

Demonstração Seja $\{A_\alpha : \alpha < \kappa\}$ uma partição de X tal que cada A_α é fechado G_λ. Fixemos x_α um ponto de X_α, para cada $\alpha < \kappa$. Definimos $g : \kappa \times \omega \to X$, por $g(\alpha, n) = x_\alpha$, para $\alpha < \kappa$ e $n < \omega$. Como $\kappa = |\kappa \times \omega|$, temos que existe uma função $f : \kappa \to X$, tal que $|f^{-1}[A_\alpha]| = \omega$. Como f é contínua temos que existe $\beta f \in \mathcal{C}(\beta\kappa, X)$ que estende f

(item (2) do teorema 1.2). Para cada $\alpha < \kappa$, consideremos $Z_\alpha = \beta f^{-1}[A_\alpha] \setminus \kappa$. Vejamos que Z_α é não-vazio. Se $\beta f^{-1}[A_\alpha]$ estivesse contido em κ, teríamos que seria finito, já que os unitários dos pontos de κ são abertos em $\beta\kappa$ e $\beta f^{-1}[A_\alpha]$ é um compacto. Logo $\beta f^{-1}[A_\alpha] \not\subset \kappa$. Como cada A_α é fechado e G_λ e βf é contínua temos que $\{Z_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ é uma partição nas condições que queremos. ■

A existência de um compacto nas condições da proposição acima é garantida por esta seguinte:

Proposição 4.16 ([DP82],1.3) *Seja X um espaço de Hausdorff com caráter λ. Então EX pode ser particionado em compactos G_λ.*

Demonstração Vejamos que $\{\pi^{-1}(x) : x \in X\}$ é uma partição no jeito que queremos. Dado $x \in X$, seja $\mathcal{V}_x$ um sistema fundamental de vizinhaças abertas tal que $|\mathcal{V}_x| \leq \lambda$. Vejamos que $\pi^{-1}(x) = \bigcap_{V\in\mathcal{V}_x} \lambda(\overline{V}^X) \cap EX$. Usando o item (6) do teorema 3.3, $\pi^{-1}(x) \subseteq \bigcap_{V\in\mathcal{V}_x} \lambda(\overline{V}^X) \cap EX$. Agora seja $t \in \bigcap_{V\in\mathcal{V}_x} \lambda(\overline{V}^X) \cap EX \setminus \pi^{-1}(x)$. Como X é de Hausdorff, temos que existem $V \in \mathcal{V}_x$ e $U \in \tau(X)$, disjuntos, tais que $x \in V$ e $\pi(t) \in U$. Mas, pelo item (4) do mesmo teorema 3.3, $\pi(t) \in \overline{V}^X$, logo $V \cap U \neq \emptyset$, um absurdo. ■

Se X é H-fechado e tem caráter λ, $\{\pi^{-1}(x) : x \in X\}$ é uma partição em fechados G_λ do compacto EX.

Antes de chegar onde queremos precisaremos deste pequeno lema:

Lema 4.2 ([DP82],0.1) *Seja $Y \in \mathcal{H}(X)$, para um espaço X, e suponha que existam Z, um espaço, e uma bijeção contínua $g : Z \to Y \setminus X$. Então existe $T \in \mathcal{H}(X)$, tal que $T \setminus X$ é homeomorfo a Z.*

Demonstração Pelo corolário da proposição 2.15, temos que a extensão simples Y^+ é H-fechada. Consideremos τ^*, definido por: $U \in \tau^*$ se, e só se,

$$U \in \tau(Y^+) \quad \text{e} \quad g^{-1}[U \setminus X] \in \tau(Z).$$

Seja $T = (Y, \tau^*)$. Claramente, $\tau(Y) \subseteq \tau(T) \subseteq \tau(Y^+)$, e, por isso, $T \in \mathcal{H}(X)$, ou seja, T é extensão H-fechada de X. Aliás, $X \in \tau(T)$. Observamos que qualquer subconjunto de Y^+ que contenha X é um aberto de Y^+. Sendo assim, $g[W] = (g[W] \cup X) \setminus X$, e

$g[W] \cup X \in \tau(T)$, para qualquer $W \in \tau(Z)$. Logo $g : Z \to T \setminus X$ é um homeomorfismo e $T \setminus X$ é homeomorfo a Z. ■

Usando todos estes resultados enunciados até agora, vejamos o talvez melhor e mais interessante teorema desta seção.

Teorema 4.6 ([DP82],1.7;[VER85],5.1) *Para um espaço X, infinito, são equivalentes:*

(1) X é de Katětov, e,

(2) X é homeomorfo a $h\kappa \setminus \kappa$, para algum cardinal infinito κ e algum $h\kappa \in \mathcal{H}(\kappa)$.

Demonstração (1) $\Rightarrow$ (2) Seja $\tau \subseteq \tau(X)$, tal que $X' = (X, \tau)$ é H-fechado. Seja, ainda, $\kappa = |X'|$. Consideremos $X' = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Assim, $\{\pi^{-1}(x_\alpha) : \alpha < \kappa\}$ é uma partição em κ fechados não-vazios do compacto EX'. Usando a discussão feita (e também os objetos usados) na proposição 4.15, temos que $\{Z_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ é uma partição em fechados não-vazios de $\beta\kappa \setminus \kappa$, onde $Z_\alpha = (\pi \circ \beta f)^{-1}(x_\alpha) \setminus \kappa$, para cada $\alpha < \kappa$. Assim, pela proposição 4.5, $Y = \kappa \cup \{Z_\alpha : \alpha < \kappa\}$ é extensão H-fechada de κ. Sejam $T = \beta\kappa \setminus \kappa$ e $g = \pi \circ (\beta f)|_T$,

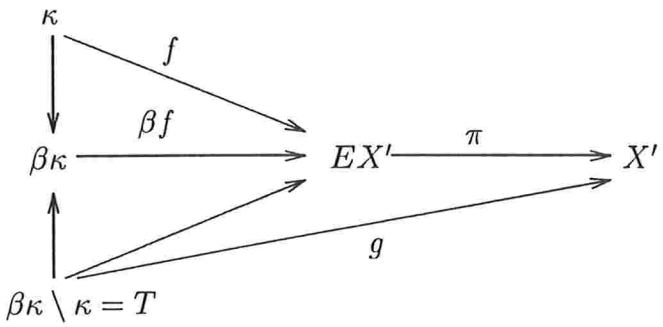

Figura 4.1:

já mostrados na figura 4.1. É fácil ver que $Z_\alpha = g^{-1}(x_\alpha)$ e, assim, g é sobrejetora. Pela continuidade de βf, por $\beta\kappa \setminus \kappa$ ser fechado de $\beta\kappa$ e por π ser uma função fechada temos que g será também fechada.

Fica naturalmente definida uma função bijetora φ de X' em $Y \setminus \kappa$, por $\varphi(x) = g^{-1}(x)$. Infelizmente não podemos garantir a continuidade desta função e como queremos usar o lema 4.2, mas ainda mantendo uma extensão H-fechada, vamos verificar que φ de X' em $Y^\#$ é contínua. Pelo corolário da proposição 2.15, temos que $Y^\# \in \mathcal{H}(\kappa)$. Vamos

analizar quem é $o_Y U \setminus \kappa$, para $U \subseteq \kappa$. Suponhamos $Z_\alpha \in o_Y U \setminus \kappa$. Pela definição de $o_Y U$ (definição 2.6), temos que $U = W \cap \kappa$, para $W \in \tau(Y)$ e $Z_\alpha \in W$. Sendo assim, $Z_\alpha \subseteq \overline{W \cap \kappa}^{\beta\kappa} = \overline{U}^{\beta\kappa}$. Por outro lado, se Z_α está contido em $\overline{U}^{\beta\kappa}$, $U \cup \{Z_\alpha\}$ é vizinhança aberta em Y de Z_α. Concluímos que $o_Y U \setminus \kappa = \{Z_\alpha : Z_\alpha \subseteq \overline{U}^{\beta\kappa}\}$.

Seja $U \subseteq \kappa$. Consideremos $A = \overline{U}^{\beta\kappa} \setminus \kappa$ e $A \in \mathcal{B}(T)$. Vejamos que $\varphi^{-1}[o_Y U \setminus \kappa] = X' \setminus g[T \setminus A]$. Claramente $X' \setminus g[T \setminus A] \subseteq \varphi^{-1}[o_Y U \setminus \kappa]$. Ainda, se $g^{-1}(t) \in o_Y U$, temos $g^{-1}(t) \subseteq A$, logo

$$T \setminus A \subseteq T \setminus g^{-1}(t), \text{ e,}$$
$$g[T \setminus A] \subseteq g[T \setminus g^{-1}(t)] = X' \setminus \{t\},$$

e, $t \in X' \setminus g[T \setminus A]$. Como g é fechada, $\varphi : X' \to Y^{\#} \setminus \kappa$ é contínua.

Considerando $id_X : X \to X'$ a identidade, temos que $\varphi \circ id_X$ é bijeção contínua. Pelo lema 4.2, κ tem extensão H-fechada $h\kappa$ tal que o resto $h\kappa \setminus \kappa$ é homeomorfo a X.

(2) $\Rightarrow$ (1) Suponha X homeomorfo a $h\kappa \setminus \kappa$, para κ, cardinal infinito, e $h\kappa \in \mathcal{H}(\kappa)$. Seja $\pi : Eh\kappa \to h\kappa$ a aplicação do absoluto de $h\kappa$. Pelo proposição 3.8 podemos considerar $E\kappa = \pi^{-1}[\kappa]$ e $\pi|_{E\kappa}$ a aplicação do absoluto de κ. Mas κ é extremamente desconexo, já que é discreto, e $E\kappa = \kappa$. Assim podemos considerar $\pi|_\kappa = id_\kappa$. Ainda, por κ ser discreto, κ é um aberto de $Eh\kappa$. Logo $\pi[Eh\kappa \setminus \kappa] = h\kappa \setminus \kappa$. Consideremos $X = h\kappa \setminus \kappa$ e temos que $\pi : Eh\kappa \setminus \kappa \to X$ é uma sobrejeção perfeita. Pela proposição 3.4, temos que existe C um compacto em $Eh\kappa$, tal que $\pi|_C : C \to X$ é sobrejetora, perfeita e irredutível. Pelo teorema 4.1, temos que existe τ, uma topologia sobre X, tal que $X' = (X, \tau)$ é H-minimal e $\pi|_C : C \to X'$ é θ-contínua. Dado $A \in \mathcal{R}(X')$, temos, pela proposição 3.5, que $A = \pi[F]$, para algum $F \in \mathcal{R}(C)$. Como $\pi : C \to X$ é fechada, A é fechado de X. Assim como X' é semi-regular, $\tau \subseteq \tau(X)$. Logo X é de Katětov. ■

Observação 4.3 *Neste teorema definimos φ de X' em $Y^{\#} \setminus \kappa$ que é bijetora e contínua. Vejamos que φ^{-1} é θ-contínua, provando que $\varphi[\overline{A}^{X'}] = \overline{o_Y B}^{Y^{\#}} \setminus \kappa$, para qualquer $A \subseteq X'$ e $B = (\pi \circ f)^{-1}[A] = f^{-1}[\pi^{-1}[A]]$. Seja $x \in \overline{A}^{X'}$ e suponha $g^{-1}(x) \in o_Y U$, para algum $U \subseteq \kappa$. Assim, $g^{-1}(x) \subseteq C$, onde $C = \overline{U}^{\beta\kappa} \setminus \kappa$. Daí, $T \setminus C \subseteq T \setminus g^{-1}(x)$ e $g[T \setminus C] \subseteq g[T \setminus g^{-1}(x)] = X' \setminus \{x\}$. Assim, $x \in X' \setminus g[T \setminus C] \in \tau(X')$ e $A \setminus g[T \setminus C] \neq \emptyset$. Seja $u \in A \setminus g[T \setminus C]$. Temos que*

$$g^{-1}(u) \subseteq g^{-1}[A] = (\pi \circ \beta f)^{-1}[A] \setminus \kappa \subseteq \overline{\beta f^{-1}[\pi^{-1}[A]]}^{\beta\kappa} = \overline{\beta f^{-1}[\pi^{-1}[A]] \cap \kappa}^{\beta\kappa} = \overline{f^{-1}[\pi^{-1}[A]]}^{\beta\kappa}$$

e, portanto, $g^{-1}(u) \in o_Y B$. *Como* $g^{-1}[X' \setminus g[T \setminus C]] \subseteq C \subseteq \overline{U}^{\beta\kappa}$, *temos que* $g^{-1}(u) \in o_Y B \cap o_Y C$ *e, assim,* $g^{-1}(x) \in \overline{o_Y B}^{Y^\#}$. *Agora, dado* $g^{-1}(t) \in \overline{o_Y B}^{Y^\#} \setminus \kappa$, *suponhamos* $t \in U \in \tau(X')$. *Analogamente ao visto logo acima,* $g^{-1}(t) \subseteq \overline{V}^{\beta\kappa}$, *onde* $V = f^{-1}[\pi^{-1}[U]]$. *Logo* $o_Y B \cap o_Y V \neq \emptyset$. *Como* κ *é denso em* $Y^\#$, $B \cap V = o_Y B \cap \kappa \cap o_Y V \neq \emptyset$ *e, assim,* $U \cap A \neq \emptyset$.

Portanto, dados $t \in X'$ *e* $W \in \tau(X')$, *vizinhança de* t, $g^{-1}(t) \in o_Y \Omega$, *onde* $\Omega = f^{-1}[\pi^{-1}[W]]$. *Como* $\varphi[\overline{W}^{X'}] = \overline{o_Y \Omega}^{Y^\#} \setminus \kappa$, *a inversa de* φ *é* θ*-contínua.*

Vermeer em [VER85], acrescenta um resultado análogo para espaço com subtopologia compacta.

Teorema 4.7 ([VER85],5.2) *Para um espaço* X, *infinito, são equivalentes:*

(1) X *tem subtopologia compacta, e,*

(2) X *é homeomorfo a* $h\kappa \setminus \kappa$, *para algum cardinal infinito e algum* $h\kappa \in \mathcal{H}(\kappa)$ *que é de Urysohn.*

Demonstração (2) $\Rightarrow$ (1) Sejam κ, um cardinal infinito, e $h\kappa$, uma extensão H-fechada e de Urysohn, tal que $X = h\kappa \setminus \kappa$. Pelo primeiro corolário do teorema 2.3, temos que $h'\kappa = (h\kappa)_s$ é compacto. É fácil ver que $\kappa \in \tau(h'\kappa)$, e, assim, $h'\kappa \setminus \kappa$ é compacto. Logo $id_X : X \to h'\kappa \setminus \kappa$ é uma bijeção contínua e X admite uma subtopologia compacta.

(1) $\Rightarrow$ (2) Seja $\tau \subseteq \tau(X)$, tal que $X' = (X, \tau)$ é compacto. Análogo ao teorema 4.6, seja $\kappa = |X'|$ e consideremos $X' = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Novamente usamos a discussão e os objetos definidos na proposição 4.15, temos que $\beta\kappa \setminus \kappa$ tem partição $\{Z_\alpha : \alpha < \kappa\}$, onde $Z_\alpha = \beta f^{-1}(x_\alpha) \setminus \kappa$ é um fechado não-vazio para cada $\alpha < \kappa$. Pela proposição 4.5, $Y = \kappa \cup \{Z_\alpha : \alpha < \kappa\}$ com a topologia definida no parágrafo anterior a mesma é extensão H-fechada de κ. Conseguimos, ainda, a figura 4.2, similar a 4.1. Usando dos mesmos argumentos provamos que $\varphi : X' \to Y^\# \setminus \kappa$, definida por $\varphi(x) = g^{-1}(x)$ é contínua. Vejamos que, por X' ser compacto, $Y^\#$ é de Urysohn. Dados $x, y \in X'$, distintos, temos que existem $A, B \in \tau(X')$, tais que $x \in A$, $y \in B$, e $\overline{A}^{X'} \cap \overline{B}^{X'} = \emptyset$. Logo,

$$g^{-1}(x) \subseteq g^{-1}[A] = \beta f^{-1}[A] \setminus \kappa \subseteq \overline{\beta f^{-1}[A]}^{\beta\kappa} = \overline{\beta f^{-1}[A] \cap \kappa}^{\beta\kappa} = \overline{f^{-1}[A]}^{\beta\kappa},$$

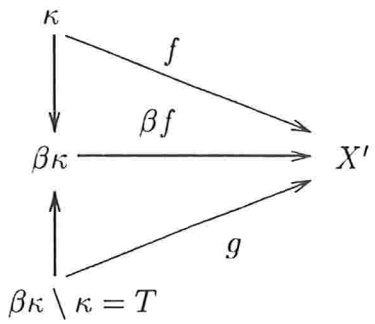

Figura 4.2:

e, $g^{-1}(y) \subseteq \overline{f^{-1}[B]}^{\beta\kappa}$. Daí, $o_Y U$ e $o_Y V$ são abertos de $Y^{\#}$ vizinhanças de $g^{-1}(x)$ e $g^{-1}(y)$, respectivamente, onde $U = f^{-1}[A]$ e $V = f^{-1}[B]$. Como $Y^{\#}$ é extensão de κ, temos que $\overline{o_Y U}^{Y^{\#}} \cap \overline{o_Y V}^{Y^{\#}} = \overline{U}^{Y^{\#}} \cap \overline{V}^{Y^{\#}}$. Ainda, $\overline{U}^{Y^{\#}} \cap \overline{V}^{Y^{\#}} \cap \kappa = \emptyset$, já que $\overline{U}^{Y^{\#}} \cap \kappa = \overline{U}^{\kappa} = U$ e $\overline{V}^{Y^{\#}} \cap \kappa = \overline{V}^{\kappa} = V$. Pela mesmas contas feitas na observação 4.3, temos que $\overline{o_Y U}^{Y^{\#}} \setminus \kappa = \varphi[\overline{A}^{X'}]$. Sendo assim,

$$\overline{o_Y U}^{Y^{\#}} \cap \overline{o_Y V}^{Y^{\#}} \setminus \kappa = \varphi[\overline{A}^{X'}] \cap \varphi[\overline{B}^{X'}] = \varphi[\overline{A}^{X'} \cap \overline{B}^{X'}] = \emptyset.$$

Logo $Y^{\#}$ é de Urysohn.

Usando o lema 4.2 acrescido com a hipótese que a extensão H-fechada é espaço de Urysohn conseguimos do mesmo jeito uma extensão H-fechada e de Urysohn cujo resto é homeomorfo a X. ■

4.5 Métricos versus Katětov

Nesta seção vamos ver o que temos a dizer sobre os espaços métricos. Já mostramos que um espaço regular, de Lindelöf e Čech-completo é sempre de Katětov. Como um espaço metrizável é Čech-completo se, e somente se, for completamente metrizável (teorema [ENG89],4.3.26), estaremos com nossa atenção particularmente voltada para os métricos completos.

As noções de famílias localmente finita, discreta, σ-localmente finita e σ-discreta serão as usuais. Como em [ENG89], refinamento será sempre um recobrimento. Ainda estaremos seguindo [ENG89] quando falarmos em **ordem**, *ord*, de uma família de subconjuntos de

um espaço e quando estivermos falando em **dimensão de Brouwer-Čech**, Ind, de um espaço normal; e, em **dimensão de Čech-Lebesgue**, dim, de um espaço de Tychonoff. Um espaço de Tychonoff X será dito **fortemente zero-dimensional**, se βX for zero-dimensional, ou equivalentemente, se para quaisquer A e B, fechados disjuntos de X, existir $C \in \mathcal{B}(X)$, tal que $A \subseteq C \subseteq X \setminus B$. É fato conhecido que para um espaço normal X, $IndX = Ind\beta X$ ([ENG89],7.1.15), e, assim, um espaço ser fortemente zero-dimensional é equivalente a ter dimensão de Brouwer-Čech nula.

Vamos enunciar alguns grandes teoremas que são fatos bem conhecidos e estão todos demonstrados em [ENG89] e em outros livros que trabalham com Teoria da Dimensão.

Teorema 4.8 ([ENG89],7.2.4; Teorema de Dowker) *Para um espaço normal X e um natural n, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) O espaço X satisfaz $dimX \leq n$, e,

(2) Todo recobrimento aberto localmente finito do espaço X tem um refinamento aberto de ordem $\leq n$. ■

Vamos citar agora alguns teoremas mais ligados aos metrizáveis.

Teorema 4.9 ([ENG89],7.3.2; Teorema de Katětov-Morita) *Para um espaço metrizável X temos $dimX = IndX$.* ■

Teorema 4.10 ([ENG89],4.4.1; Teorema de Stone) *Todo recobrimento aberto de um espaço metrizável tem um refinamento que é localmente finito e σ-discreto.* ■

Corolário Todo metrizável tem uma base σ-discreta. ■

Corolário Todo espaço metrizável é paracompacto. ■

Para um cardinal infinito κ, chamaremos de $B(\kappa)$ o espaço $\prod_{n<\omega} D_n$, onde D_n é o espaço discreto κ, para todo $n < \omega$. Ou seja, o suporte de $B(\kappa)$ é ${}^{\omega}\kappa$. Este espaço é chamado de **espaço de Baire de peso** κ. Claramente

$$\rho((x_n)_n, (y_n)_n) = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{onde } k = min\{n : x_n \neq y_n\} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

é uma métrica em $B(\kappa)$ e estaremos sempre pensando nela. Facilmente provamos que uma seqüência de pontos de $B(\kappa)$, $(x_n^1)_n, (x_n^2)_n, (x_n^3)_n, \ldots$, converge para um ponto $(x_n)_n$,

se, e somente se, para cada $i < \omega$, existe $k(i) < \omega$, tal que $x_i^j = x_i$, para todo $j \geq k(i)$. Facilmente mostramos que $B(\kappa)$ é completamente metrizável. Introduzimos este espaço aqui para que possamos enunciar os próximos resultados. Vejamos primeiramente que $IndB(\kappa) = 0$.

Proposição 4.17 *O espaço $B(\kappa)$ é fortemente zero-dimensional.*

Demonstração Para cada $n < \omega$, consideremos $\mathcal{B}_n$ o conjunto dos abertos-elementares da forma $\prod_{m<\omega} V_m$, tais que V_m é unitário, para $m \leq n$ e $V_m = \kappa$, para $m > n$. Facilmente temos que $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}(B(\kappa))$ tem ordem nula, é um recobrimento localmente finito, e $\delta(V) < \frac{1}{n+1}$ (lembrando da distância ρ definida acima), para todo $V \in \mathcal{B}_n$. Facilmente temos que $\mathcal{B} = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{B}_n$ é uma base para os abertos de $B(\kappa)$.

Seja F um fechado de $B(\kappa)$ contido em um aberto Ω. Para cada $n < \omega$, seja $\Omega_n = \bigcup\{B \in \mathcal{B}_n : B \subseteq \Omega \text{ e } B \cap F \neq \emptyset\}$. Como $\mathcal{B}_n$ é localmente finito temos que $\Omega_n \in \mathcal{B}(B(\kappa))$. Como $\mathcal{B}$ é base temos que $F \subseteq U \subseteq \Omega$, onde $U = \bigcup_{n<\omega} \Omega_n$. Vejamos que $U \in \mathcal{B}(B(\kappa))$, supondo, por absurdo, que exista $x \in \overline{U}^{B(\kappa)} \setminus U$. Para cada $n < \omega$, temos que $x \notin \bigcup_{k=0}^{n} \Omega_k$, e, assim, existe $r \in \mathbb{R}$, tal que $0 < r < \frac{1}{n+1}$ e $B(x,r) \subseteq B(\kappa) \setminus \bigcup_{k=0}^{n} \Omega_k$. Assim $B(x,r) \cap \bigcup_{k>n+1} \Omega_k \neq \emptyset$ e existe $k > n+1$, tal que $B(x,r) \cap \Omega_k \neq \emptyset$. Sendo assim, existe $B \in \mathcal{B}_k$ tal que $B \subseteq \Omega$, $B \cap F \neq \emptyset$ e $B \cap B(x,r) \neq \emptyset$. Sejam $y_n \in B \cap F$ e $z \in B \cap B(x,r)$. Logo

$$\rho(x, y_n) \leq \rho(x,z) + \rho(z, y_n) < r + \delta(B) < \tfrac{2}{n+1}.$$

Costruímos assim uma seqüência $(y_n)_n$ de elementos de F tal que $\lim_{n\to\infty} y_n = x$. Assim $x \in \overline{F}^{B(\kappa)}$ e, por ser fechado, $x \in F$, o que é um absurdo. ■

Corolário Qualquer subespaço de $B(\kappa)$ é metrizável e fortemente zero-dimensional.

Demonstração Seja Y um subespaço de $B(\kappa)$. Claramente Y é metrizável. Considerando $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}_n$ da proposição anterior temos que $\mathcal{B}' = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}\}$ é base para os abertos de Y, e $\mathcal{B}'_n = \{B \cap Y : B \in \mathcal{B}_n\}$, para cada $n < \omega$, é família de abertos-fechados de Y com ordem nula e localmente finita e tem elementos com diâmetro estritamente menor que $\frac{1}{n+1}$. Usando do mesmo raciocínio chegamos que $IndY = 0$. ■

Ainda precisaremos do lema a seguir.

Lema 4.3 *Seja X um espaço com uma métrica d e suponha ainda $IndX = 0$. Então X tem uma seqüência de recobrimentos $\{\mathcal{V}_n\}_{n<\omega}$ em abertos-fechados 2 a 2 disjuntos, tais que, para qualquer $n < \omega$, $\mathcal{V}_{n+1}$ refina $\mathcal{V}_n$ e $\delta(V) < \frac{1}{n+1}$, para qualquer $V \in \mathcal{V}_n$.*

Demonstração Consideremos $\mathcal{B}_0 = \{B(x, 1/4) : x \in X\}$ e temos que $\mathcal{B}_0$ é um recobrimento aberto de X. Pelo segundo corolário do teorema 4.10, temos que $\mathcal{B}_0$ tem refinamento aberto $\mathcal{U}_0$ que é localmente finito. Pelo teorema de Dowker (teorema 4.8) temos que $\mathcal{U}_0$ admite um refinamento aberto $\mathcal{V}_0$ tal que $ord(\mathcal{V}_0) = 0$. Sendo assim os elemntos de $\mathcal{V}_0$ são 2 a 2 disjuntos e serão todos abertos-fechados. Como $\mathcal{V}_0$ refina $\mathcal{B}_0$ temos que $\delta(V) < 1$ para qualquer $V \in \mathcal{V}_0$.

Construamos os outros refinamentos por indução em n. Suponha construído refinamento $\mathcal{V}_n$. Para cada $x \in X$, existem $V_x \in \mathcal{V}_n$ e r_x, tais que $0 < r_x < \frac{1}{4(n+1)}$ e $B(x, r_x) \subseteq V_x$. Assim, seguindo a mesma linha de raciocínio do parágrafo acima, temos que existe $\mathcal{V}_{n+1}$, refinamento em abertos-fechados 2 a 2 disjuntos. Por construção, temos que $\delta(V) < \frac{1}{n+1}$, para todo $V \in \mathcal{V}_{n+1}$. ■

Teorema 4.11 ([ENG89],7.3.15) *Todo espaço metrizável fortemente zero-dimensional de peso κ (infinito) pode ser imerso em $B(\kappa)$.*

Demonstração Seja d uma métrica no espaço X de peso κ. Pelo lema 4.3, existe uma seqüência de recobrimentos em abertos não-vazios 2 a 2 disjuntos de X, $\{\mathcal{V}_n\}_{n<\omega}$, tais que para quaisquer $n < \omega$ e $V \in \mathcal{V}_n$, $\delta(V) < \frac{1}{n+1}$. Facilmente temos que $\mathcal{V} = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{V}_n$ é uma base para os abertos de X.

Como $d(X) = \omega(X)$ e $\mathcal{V}_n$ é celular temos que $|\mathcal{V}_n| \leq \kappa$, para cada $n < \omega$. Consideremos, então, $\mathcal{V}_n = \{V_\alpha^n\}_{\alpha<|\mathcal{V}_n|}$, para cada $n < \omega$. Definamos $e : X \to B(\kappa)$, por

$$e(x) = (\alpha_n)_{n<\omega}, \text{ onde } x \in V_{\alpha_n}^n, \text{ para cada } n < \omega.$$

Vejamos que e é a imersão que procuramos.

Suponha $\{W_n\}_{n<\omega}$ uma seqüência de abertos de κ, tais que $I = \{n < \omega : W_n \neq \kappa\}$ é finito. Temos facilmente que $e^{-1}[\prod_{n<\omega} W_n] = \bigcap_{n\in I}(\bigcup_{\alpha\in W_n} V_\alpha^n)$. Ou seja, a imagem inversa dos "abertos-elementares" de $B(m)$ são abertos em X, e, por isso, e é contínua.

Suponha $x, y \in X$, tais que $e(x) = (\alpha_n)_n = e(y)$. Dado $n < \omega$, temos que $x, y \in V_{\alpha_n}^n$. Logo $d(x, y) < \frac{1}{n+1}$, para qualquer $n < \omega$. Assim, $d(x, y) = 0$, e, $x = y$. Concluímos daqui que e é injetora.

Como $\mathcal{V}$ é base de X, vejamos que $e[V]$ é aberto de $e[X]$, para qualquer $V \in \mathcal{V}$. Dado $n < \omega$ e $\alpha < \kappa$, temos que $e[V_\alpha^n] = \prod_{m<\omega} U_m \cap e[X]$, onde $U_n = \{\alpha\}$ e $U_m = \kappa$, para $m \neq n$. Assim, e é imersão. ■

Corolário Qualquer subespaço de um espaço metrizável e fortemente zero-dimensional será também metrizável e fortemente zero-dimensional. ■

Pelo corolário da proposição 4.17, temos que vale a recíproca. Também vale a recíproca do próximo resultado, já que um fechado de um completamente metrizável é também completamente metrizável.

Proposição 4.18 ([ENG89],7.3.H; Stone (1962)) *Todo espaço completamente metrizável fortemente zero-dimensional e de peso κ é homeomorfo a um subespaço fechado de $B(\kappa)$.*

Demonstração Seja X metrizável tal que $\omega(X) = \kappa$ e $IndX = 0$. Usando os mesmos objetos já definidos no teorema anterior temos que X é homeomorfo ao subespaço $e[X]$ de $B(\kappa)$. Falta-nos mostrar que $e[X]$ é fechado de $B(\kappa)$.

Seja $(a_m)_m$ uma seqüência de elementos de X tais que $\lim_{m\to\infty} e(a_m) = (\alpha_n)_n \in B(\kappa)$. Para cada $i < \omega$, existe $k(i) < \omega$ tal que $(e(a_m))_i = \alpha_i$, para todo $m > k(i)$. Sendo assim, para $m, l > k(i)$, temos $(e(a_m))_i = \alpha_i = (e(a_l))_i$, e, pela definição de e, $a_m, a_l \in V_{\alpha_i}^i$, e, $\rho(a_m, a_l) < \frac{1}{i+1}$. Logo $(a_m)_m$ é de Cauchy em X, e, converge para um elemento $a \in X$. Como e é contínua, $e(a) = x$. Portanto $e[X]$ é fechado. ■

No "embalo" destas imersões vejamos que a propriedade de ser fortemente zero-dimensional é também hereditária por produtos enumeráveis.

Proposição 4.19 *Seja $\{X_n\}_{n<\omega}$ uma família de espaços fortemente zero-dimensionais. Então $\prod_{n<\omega} X_n$ é fortemente zero-dimensional.*

Demonstração Para cada $n < \omega$, seja e_n uma imersão de X_n em $B(\kappa_n)$, onde $\kappa_n = \omega(X_n)$. Seja $\kappa = sup\{\kappa_n : n < \omega\}$ e podemos considerar $e_n : X_n \to B(\kappa)$, que ainda será imersão. Sendo assim $E : \prod_{n<\omega} X_n \to {}^\omega B(\kappa)$ definida por $E((x_n)_n) = (e_n(x_n))_n$ é uma imersão. Como $\omega \cdot \omega = \omega$, temos que ${}^\omega B(\kappa) = {}^\omega({}^\omega\kappa)$ é homeomorfo a $B(\kappa) = {}^\omega\kappa$. ■

Para o próximo teorema precisaremos da noção de seqüência inversa. Os conceitos que colocaremos são uma síntese do que pode ser encontrado nas seções 2.5 de [ENG89] e 2.14 de [HY61]. Uma **seqüência inversa** é uma família $\{X_n, f_n\}_{n<\omega}$, onde para cada $n < \omega$, X_n é um espaço e $f_n \in \mathcal{C}(X_{n+1}, X_n)$, ou seja, uma f_n é uma função contínua de X_{n+1} em X_n. Podemos, então, representar um seqüência inversa na forma de um diagrama:

$$\cdots \xrightarrow{f_n} X_n \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-2}} \cdots \xrightarrow{f_2} X_2 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_0} X_0.$$

Seja $S = \{X_n, f_n\}_{n<\omega}$ uma seqüência inversa. Uma **linha** ou **caminho** de S, é uma seqüência $(x_n)_n \in \prod_{n<\omega} X_n$ tal que $x_n = f_n(x_{n+1})$ para todo $n < \omega$. O subespaço constituído por todas as linhas de S é chamado de **limite de** S e será denotado por $\varprojlim S$, por X_∞, ou, ainda, por $\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n<\omega}$.

Quando todos os espaços de uma seqüência inversa S são de Hausdorff, temos que $\varprojlim S$ é um fechado de $\prod_{n<\omega} X_n$. E, se, além de serem de Hausdorff, forem compactos, o limite de S será um compacto.

No toerema 4.11 usamos a família dos recobrimentos "criada" no lema 4.3 mas não usamos que um recobrimento refinava o outro. Este fato vai ser importantíssimo agora! Queremos achar uma subtopologia compacta para um espaço X completamente metrizável e fortemente zero-dimensional. A partir do lema 4.3, definiremos uma seqüência inversa com espaços discretos e mostraremos que X é homeomorfo ao limite desta seqüência. Acharemos uma subtopologia compacta para o espaço produto que ainda matenha "o subespaço X" como fechado e assim X terá uma subtopologia compacta.

Seja X um espaço com uma métrica d, tal que $IndX = 0$. Pelo lema 4.3, temos que existe uma família $\{\mathcal{V}_n\}_{n<\omega}$ de recobrimentos em abertos-fechados não-vazios tal que, para cada $n < \omega$, $ord(\mathcal{V}_n) = 0$, $\mathcal{V}_{n+1}$ refina $\mathcal{V}_n$ e $\delta(V) < \frac{1}{n+1}$, para todo $V \in \mathcal{V}_n$. Modificando a demonstração do teorema 4.11, seja $\kappa_n = |\mathcal{V}_n|$, para cada natural n. Consideramos $e : X \to \prod_{n<\omega} \kappa_n$, definida da mesma maneira no teorema citado. Temos que e é imersão, e, se d é completa, $e[X]$ é fechado de $\prod_{n<\omega} \kappa_n$. Definimos, naturalmente, para cada $n < \omega$, $f_n : \kappa_{n+1} \to \kappa_n$, por

$$\alpha < \kappa_{n+1} \longmapsto \alpha', \text{ onde } \alpha' < \kappa_n \text{ é único tal que } V^{n+1}_\alpha \subseteq V^n_{\alpha'}.$$

Observemos que f_n é sempre contínua, já que κ_{n+1} é discreto. Ainda f_n é sobrejetora, por cada $\mathcal{V}_n$ ser recobrimento com elementos não-vazios.

Para cada $n < \omega$ e $x \in X$, se $e(x) = (\alpha_n)_n$, temos que

$$x \in V^{n+1}_{\alpha_{n+1}} \subseteq V^n_{f_n(\alpha_{n+1})},$$

assim, $\alpha_n = f_n(\alpha_{n+1})$. Logo $e[X] \subseteq \lim_{\leftarrow} S$, onde $S = \{\kappa_n, f_n\}_{n<\omega}$. Vejamos que $\overline{e[X]}^{\prod \kappa_n} = \lim_{\leftarrow} S$. Já temos que $\overline{e[X]}^{\prod \kappa_n} \subseteq \lim_{\leftarrow} S$. Seja $W = \prod_{n<\omega} \Omega_n$, tal que $\Omega_n \in \tau(\kappa_n)$, para todo natural n e tal que $I = \{n : \Omega_n \neq \kappa_n\}$ é finito, vizinhança de um ponto $(\alpha_n)_n \in \lim_{\leftarrow} S$. Suponha $I \neq \emptyset$ e $j = max\ I$. Seja $x \in V^j_{\alpha_j}$ e $e(x) = (\beta_n)_n$. Facilmente mostramos que $\alpha_i = \beta_i$, para todo $i \leq j$. Assim $e(x) \in W$. Se d for completa temos que X é homeomorfo a $\lim_{\leftarrow} S$.

Para chegar ao teorema seguinte precisaremos ainda da proposição a seguir.

Proposição 4.20 *Seja $f : A \to B$ uma função sobrejetora. Se B admite uma topologia compacta de Hausdorff, A admite uma, também compacta de Hausdorff, tal que f é contínua.*

Demonstração Seja σ uma topologia sobre B tal que (Y, σ) é um espaço de Hausdorff compacto.

Para cada $b \in B$, fixemos $p^b \in f^{-1}(b)$. Seja $P = \{p^b : b \in B\}$.

Seja $\tau \subseteq \mathcal{P}(A)$, definida por: $\Omega \in \tau$ se, e só se,

$$\forall p \in P\Big(p \in \Omega \Rightarrow f^{-1}[U] \setminus V \subseteq \Omega, \text{ para algum } U \in \sigma, \text{ vizinhança de } f(p), \text{ e algum } V \subseteq f^{-1}(f(p)), \text{ finito }\Big).$$

Facilmente temos que τ é topologia sobre A e claramente $f : (A, \tau) \to (B, \sigma)$ é contínua. Ainda, $\{a\} \in \tau$, para qualquer $a \notin P$.

Vejamos que (A, τ) é de Hausdorff. Sejam $x, y \in A$, distintos. Podemos estudar três casos:

1. Se $f(a) = f(b)$ e $a \in P$, $X \setminus \{b\} \in \tau$ é vizinhança de a, e $\{b\} \in \tau$,

2. Se $f(a) = f(b)$ e $a, b \in A \setminus P$, $\{a\}, \{b\} \in \tau$, e,

3. Se $f(a) \neq f(b)$, existem $U, V \in \sigma$, disjuntos tais que $f(a) \in U$ e $f(b) \in V$, e, $f^{-1}[U], f^{-1}[V] \in \tau$, são disjuntos.

Vejamos agora que (A,τ) é compacto. Seja $\mathcal{C}$ um recobrimento aberto de A. Para cada $b \in B$, existe $C_b \in \mathcal{C}$, tal que $p^b \in C_b$. Pela definição de τ, existem $U_b \in \sigma$, vizinhança de b, e $A_b \subseteq f^{-1}(b)$, finito, tais que $f^{-1}[U_b] \setminus A_b \subseteq C_b$. Sendo assim, $B \subseteq \bigcup_{b\in B} U_b$, e existe $B' \subseteq B$, finito, tal que $B \subseteq \bigcup_{b\in B'} U_b$. Temos que $\bigcup_{b\in B'} A_b$ é finito e existe $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$, finito, tal que $\bigcup_{b\in B'} A_b \subseteq \bigcup \mathcal{C}'$. Vejamos que $\mathcal{C}^* = \{C_b : b \in B'\} \cup \mathcal{C}'$ recobre A. Dado $a \in A$, temos que $f(a) \in U_b$, para algum $b \in B'$. Caso $a \notin A_b$, temos que $a \in f^{-1}[U_b] \setminus A_b \subseteq C_b$. ■

Como κ_0 admite uma subtopologia compacta de Hausdorff, aplicamos indução em n e temos que cada κ_n admite uma subtopologia compacta de Hausdorff, τ_n', que mantém a continuidade de cada f_n. Seja $\kappa_n' = (\kappa_n, \tau_n')$ e consideremos agora $f_n : \kappa_{n+1}' \to \kappa_n'$. Temos $\prod_{n<\omega} \kappa_n'$ compacto, e $\overline{e[X]}^{\prod \kappa_n} = \lim_{\leftarrow}\{\kappa_n', f_n\}_n$ que é fechado de $\prod_{n<\omega} \kappa_n'$. Assim, se d é completa, $e[X]$ admite uma subtopologia compacta. Provamos, então, com esta discussão o próximo teorema.

Teorema 4.12 ([KUL76]) *Todo espaço completamente metrizável e fortemente zero-dimensional admite uma subtopologia compacta.* ■

Nossa intenção é mostrar que todo espaço completamente metrizável é de Katětov. Nosso esforço, até agora, serviu-nos para mostrar as hereditariedades para espaços fortemente zero-dimensionais. Para mostrarmos que um completamente metrizável é de Katětov, teremos que achar um compacto e uma sobrejeção perfeita do compacto no metrizável (teorema 4.2). Para isso vamos precisar ainda mostrar que os métricos são imersíveis nos espaços chamados de Ouriços.

Para uma cardinal κ, infinito, chamaremos de $J(\kappa)$, **ouriço de κ espinhos (hedgehog of spininess κ)**, o espaço de suporte $\{\infty\} \cup]0,1] \times \kappa$, com a topologia gerada por $\tau(]0,1] \times \kappa) \cup \{\{\infty\} \cup \Omega \times \kappa : \Omega \in \tau(]0,1])\}$. Podemos definir uma métrica ϱ em $J(\kappa)$ por

$$\varrho((x,\alpha),(y,\beta)) = \begin{cases} |x-y| & \text{se } \alpha = \beta \\ x+y & \text{se } \alpha \neq \beta \end{cases}$$
$$\varrho((x,\alpha),\infty) = x$$

que é completa. Assim, $J(\kappa)$ é completamente metrizável.

Podemos então enunciar a próxima proposição.

Proposição 4.21 ([ENG89],4.4.9) *Todo espaço metrizável de peso κ pode ser imerso no produto cartesiano de ω ouriços de κ espinhos, ou seja, ${}^{\omega}J(\kappa)$.*

Demonstração Seja X um espaço metrizável tal que $\omega(X) = \kappa$.

Pelo primeiro corolário do teorema 4.10, temos que X admite uma base $\mathcal{B} = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{B}_n$, onde cada cada $\mathcal{B}_n$ é uma família discreta. Como $\omega(X) = \kappa$, podemos supor que $|\mathcal{B}| \leq \kappa$. Assim, $|\mathcal{B}_n| = \kappa_n \leq \kappa$, e, suporemos $\mathcal{B}_n = \{U^n_\alpha\}_{\alpha<\kappa_n}$, para cada $n < \omega$.

Como X é metrizável temos que, para cada $n < \omega$ e cada $\alpha < \kappa_n$, existe $f^n_\alpha \in \mathcal{C}(X, [0,1])$, tal que $U^n_\alpha = (f^n_\alpha)^{-1}[(0,1]]$.

Como cada $\mathcal{B}_n$ é localmente finita, temos que $\overline{\bigcup \mathcal{B}_n}^X = \bigcup_{B\in\mathcal{B}_n} \overline{B}^X$. Assim, quando um ponto $x \in \overline{\bigcup \mathcal{B}_n}^X$, x pertencerá a um $\overline{B}^X$, para um único $B \in \mathcal{B}_n$.

Definimos então $f_n : X \to J(\kappa)$ por

$$f_n(x) = \begin{cases} (f^n_\alpha(x), \alpha) & \text{se } x \in U^n_\alpha, \text{ para algum } \alpha < \kappa_n \\ \infty & \text{se } x \notin \bigcup \mathcal{B}_n \end{cases}$$

e f_n estará bem definida já que $\mathcal{B}_n$ é discreta. Observemos que se $x \in \partial(U^n_\alpha) = \overline{U^n_\alpha}^X \setminus U^n_\alpha$, para algum $\alpha < \kappa_n$, temos que $f^n_\alpha(x) = 0$. Estudando se x está ou não em $\overline{\mathcal{B}_n}^X$ provamos facilmente que f_n é contínua.

Fica bem definida a função contínua $e : X \to {}^{\omega}J(\kappa)$, $e(x) = (f_n(x))_n$. Usando que $\mathcal{B}$ é base vemos que e é injetora e para cada $n < \omega$, e $\alpha < \kappa_n$, temos

$$e[U^n_\alpha] = \prod_{m<\omega} \Omega_m \cap e[X],$$

onde $\Omega_n = (0,1] \times \{\alpha\}$ e $\Omega_m = J(\kappa)$, para qualquer $m \neq n$. ■

Observação 4.4 *Em [ENG89], encontramos o exercício 4.4.B, que afirma: todo completamente metrizável é homeomorfo a um fechado de um ouriço.*

Como não temos ainda um espaço completamente metrizável e fortemente zero-dimensional, vamos usar no mesmo tipo da mesmo raciocínio de "construção" de $J(\kappa)$ para conseguirmos um.

Seja C o conjunto de **Cantor** constituído pelo reais de $[0,1]$, que têm extensão triádica sem ocorrências de 1. É conhecido existe uma função ϕ contínua e sobrejetora de C em $[0,1]$ tal que $\phi^{-1}(0) = \{0\}$. Claramente ϕ é perfeita e C é zero-dimensional. Como C é

compacto temos que C será fortemente zero-dimensional. Consideremos $C^* = C \setminus \{0\}$ e construamos o espaço $C(\kappa) = \{\infty\} \cup C^* \times \kappa$, com a topologia induzida por $J(\kappa)$. Também $C(\kappa)$ será fortemente zero-dimensional. Fica bem definida uma função $\Phi : C(\kappa) \to J(\kappa)$, por $\Phi(\infty) = \infty$ e $\Phi(x, \alpha) = (\phi(x), \alpha)$, que também será sobrejetora, perfeita e contínua.

Podemos agora ver o próximo teorema.

Teorema 4.13 ([PV85],4.3) *Todo espaço metrizável X é a imagem contínua, perfeita e irredutível de um metrizável fortemente zero-dimensional Y tal que $\omega(X) = \omega(Y)$. E X é completo se, e só se, Y o for.*

Demonstração Pela proposição anterior, X é imersível em $J(\kappa)$, para $\kappa = d(X) = \omega(X)$. Consideraremos $X \subseteq {}^{\omega}J(\kappa)$. Já que produto de funções perfeitas é perfeita, temos que $\prod \Phi : {}^{\omega}C(\kappa) \to {}^{\omega}J(\kappa)$, dada por $\prod \Phi((x_n)_n) = (\Phi(x_n))_n$, é contínua, sobrejetora e perfeita. Seja $Z = (\prod \Phi)^{-1}[X]$ e consideremos $H = \prod \Phi|_Z$. Assim, $H : Z \to X$ é contínua, sobrejetora e perfeita, pela proposição 3.3. Fazendo uso da proposição 3.4, seja Y um fechado de Z tal que $H|_Y : Y \to X$ é sobrejetora, contínua, perfeita e irredutível. Como $H|_Y$ é contínua, temos que $d(Y) \leq d(X)$. Ainda, $d(X) \leq d(Y)$, já que $H|_Y$ é fechada, irredutível e sobrejetora. Como $C(\kappa)$ é fortemente zero-dimensional, ${}^{\omega}C(\kappa)$ é, também fortemente zero-dimensional. Assim, Y é metrizável e fortemente zero-dimensional.

Claramente $EX = EY$. Como X é completamente metrizável se, e só se, X é Čech-completo, que é equivalente a EX ser Čech-completo, temos que X é completamente metrizável se, e somente se, Y o for. ■

Podemos, finalmente, "aumentar" a classe dos espaços de Katětov.

Teorema 4.14 ([PV85],4.4) *Todo espaço completamente metrizável é de Katětov.*

Demonstração Seja X um espaço completamente metrizável. Pelo teorema anterior, existem Y, completamente metrizável e fortemente zero-dimensional, e $f : X \to Y$, sobrejetora, contínua, perfeita e irredutível. Como Y é de Katětov, pois tem subtopologia compacta (teorema 4.12), temos que X é imagem perfeita de um compacto e é de Katětov, pelo teorema 4.2. ■

Para as próximas proposições precisaremos ainda do resultado a seguir.

Proposição 4.22 ([PV85],4.5) *Se D é um espaço discreto, então ${}^{\omega}D$ tem uma compactificação cujo resto tem cardinalidade $|D|$.* ■

Diremos que dois espaços X e Y são **co-absolutos**, ou que X é co-absoluto a Y, se $EX = EY$.

Proposição 4.23 ([PV85],4.6) *(1) Todo espaço completamente metrizável e fortemente zero-dimensional X tem uma compactificação cujo resto tem cardinalidade $\leq d(X)$, e,*

(2) Um espaço co-absoluto a um completamente metrizável X tem uma extensão H-fechada cujo resto tem cardinalidade $\leq d(X)$.

Demonstração (1) Pela observação 4.4, X é um "fechado" de ${}^{\omega}D$, onde D é um discreto de cardinalidade $d(X)$. Pela proposição anterior, ${}^{\omega}D = Y$ tem extensão compacta Z, tal que $|Z \setminus Y| = d(X)$. Seja $F = \overline{X}^{Z}$ e temos que $F \cap Y = \overline{X}^{Y} = X$. Logo

$$F \setminus X \subseteq Z \setminus Y$$

e, $|F \setminus X| \leq |Z \setminus X| = d(X)$. Ainda,

$$\overline{X}^{F} = \overline{X}^{Z} \cap F = F,$$

ou seja, F é compactificação de X.

(2) Seja X um espaço completamente metrizável. Pelo teorema 4.13, temos que X é a imagem perfeita de Y completamente metrizável e fortemente zero-dimensional, com $d(X) = d(Y)$. Em particular, $EX = EY$. Logo Y tem compactificação com resto de cardinalidade $\leq d(Y) = d(X)$, pelo item anterior. Assim $\beta EY \setminus EY = \beta EX \setminus EX$ tem partição P em compactos tal que $|P| \leq d(X)$, pelo teorema 4.3. Assim, se algum espaço Z tem mesmo absoluto que X, $\beta EZ \setminus EZ$ tem partição em no máximo $d(X)$ compactos. Novamente usamos o teorema 4.3, Z tem extensão H-fechada cujo resto tem cardinalidade no máximo $d(X)$. ■

Ainda podemos enunciar:

Proposição 4.24 ([PV85],4.7) *Se Y é co-absoluto a um completamente metrizável X tal que $cf(d(X)) > \omega$, então Y é um espaço de Katětov.*

Demonstração Já que $EX = EY$, basta mostrarmos que EX é de Katětov, pelo primeiro corolário do teorema 4.2. Pelo item (b) da proposição anterior, temos que EX

tem compactificação como resto de cardinalidade no máximo $d(X)$. Pelo segundo corolário do mesmo teorema 4.2, basta acharmos um subespaço discreto e fechado de EX com cardinalidade $d(X)$. Como X é metrizável de peso $\omega(X) = d(X)$, temos que X tem base σ-discreta $\mathcal{B} = \bigcup_{n<\omega} \mathcal{B}_n$ com $|\mathcal{B}| = d(X)$ e cada família $\mathcal{B}_n$ discreta. Já que $cf(d(X)) > \omega$, temos que $|\mathcal{B}_n| = d(X)$, para algum $n < \omega$ (propriedade de cofinalidade). Para cada $A \in \mathcal{B}_n$, escolhamos $x_A \in A$. Assim $T = \{x_A : A \in \mathcal{B}_n\}$ é um fechado discreto de X e $|T| = d(X)$. Já que $\pi : EX \to X$ é contínua, temos que EX tem subespaço discreto e fechado de cardinalidade $d(X)$. ■

4.6 Resultados Adicionais

Vamos colocar aqui mais dois resultados interessantes.

Teorema 4.15 ([PV85],5.1) *Seja A um retrato de um espaço de Tychonoff X tal que $X \setminus A$ é localmente compacto, e A tenha uma subtopologia compacta. Então X tem uma subtopologia compacta.*

Demonstração Seja $f : X \to A$, uma retração. Lembremos que A é um fechado, já que todo retrato é fechado. Seja τ, uma subtopologia de A tal que $A' = (A, \tau)$ é compacto. Já que $f : X \to A'$ é contínua, tem extensão contínua $\beta f : \beta X \to A'$. Definamos $g : \beta X \to X$ por

$$g(p) = \begin{cases} p & \text{para } p \in (X \setminus A) \\ \beta f(p) & \text{para } p \in \beta X \setminus (X \setminus A) \end{cases},$$

e, $g|_X = id_X$, já que $f|_A = id_A$.

Vejamos que $B = X \setminus A \in \tau(\beta X)$. Como $B \in \tau(X)$, temos que $B = W \cap X$, para algum $W \in \tau(\beta X)$. Seja $x \in B$. Como B é localmente compacto, temos que existe $\Omega \in \tau(\beta X)$, tal que $x \in \Omega \cap B$ e $\overline{\Omega \cap B}^B$ é compacto. Sendo assim,

$$x \in \Omega \cap W \subseteq \overline{\Omega \cap W}^{\beta X} = \overline{\Omega \cap W \cap X}^{\beta X} = \overline{\Omega \cap B}^{\beta X} \subseteq \overline{\overline{\Omega \cap B}^B}^{\beta X} = \overline{\Omega \cap B}^B \subseteq B.$$

Logo, $\beta X \setminus B = (\beta X \setminus X) \cup A$ é compacto e g é compacta, já que

$$g^{-1}(p) = \begin{cases} \{p\} & \text{se } p \in B \\ (\beta f)^{-1}(p) \cap (\beta X \setminus B) & \text{para } p \in A \end{cases}.$$

Seja $\sigma = \{U \in \mathcal{P}(X) : g^{-1}[U] \in \tau(\beta X)\}$ e temos que $g : \beta X \to (X, \sigma)$ é contínua e, assim, (X, σ) é compacto. Dado F fechado de (X, σ), temos que $g^{-1}[F]$ é fechado de βX, e, daí, $g^{-1}[F] \cap X$ é fechado de X. Como $F = g^{-1}[F] \cap X$, temos que F é fechado de X. Daí, $\sigma \subseteq \tau(X)$.

Vejamos que (X, σ) é espaço de Hausdorff. Seja $p, q \in X$, distintos. Se $p, q \in B$, temos que existem $U, V \in \tau(\beta X)$, disjuntos e contidos em B, tais que $p \in U$ e $q \in V$. Facilmente temos que $U, V \in \sigma$, já que $g^{-1}[U] = U$ e $g^{-1}[V] = V$. Caso $p \in B$ e $q \in A$, temos que existe $U \in \tau(X)$, tal que $p \in U \subseteq \overline{U}^X \subseteq B$, $\overline{U}^X$ é compacto e $q \notin \overline{U}^X$. Como $g^{-1}[U] = U$ e $g^{-1}[\overline{U}^X] = \overline{U}^X$ é compacto, segue que U e $X \setminus \overline{U}^X$ são abertos em (X, σ). Suponhamos, agora, que $p, q \in A$. Então existem $U, V \in \tau$, disjuntos, que separam p e q, respectivamente. Sejam $U_0 = (\beta f)^{-1}[U] \cap X$ e $V_0 = (\beta f)^{-1}[V] \cap X$ que são abertos de βX. Já que $g^{-1}[U_0] = (\beta f)^{-1}[U]$ e $g^{-1}[V_0] = (\beta f)^{-1}[V]$, temos que $U_0, V_0 \in \sigma$. ■

Pela proposição 4.3, uma "maneira" de procurar uma subtopologia compacta para um espaço de Tychonoff é saber se $R(X)$ é retrato de X e se $R(X)$ tem subtopologia compacta.

Lembremos da noção usual de espaço disperso: X será dito **disperso (scattered)**, se todo subespaço não-vazio tem ponto algum ponto isolado. Desde já temos que, se X é H-fechado e enumerável, X tem algum ponto isolado, já que $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$, e usando a proposição 3.7.

Teorema 4.16 ([PV85],5.2) *Um espaço de Katětov enumerável é disperso.*

Demonstração Seja Y um espaço enumerável e de Katětov. Então existe um bijeção contínua $f : Y \to X$, onde X é H-minimal. Se $A \subseteq Y$ e $f[A]$ tem ponto isolado, A também terá. Então é suficiente mostrarmos que X é disperso.

Mostraremos, indutivamente que existe uma família $\{A_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ de compactos de EX e uma família $\{X_\alpha\}_{\alpha < \omega_1}$ de subconjuntos de X, ambas decrescentes, tais que

1. $\pi_\alpha : A_\alpha \to X_\alpha$ é uma sobrejeção irredutível e perfeita, onde $\pi_\alpha = \pi|_{A_\alpha}$
2. $X_\alpha \setminus X_{\alpha+1}$ é o subconjunto dos pontos isolados de X_α
3. $X_\alpha \setminus X_{\alpha+1} \neq \emptyset$ se $X_\alpha \neq \emptyset$, e,

4. $X_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} X_\alpha$, para α limite.

Seja $X_0 = X$ e $A_0 = EX$.

Suponha construídos até β e construamos para $\alpha = \beta + 1$. Temos que π_β é sobrejeção irredutível e perfeita. Pelo teorema 4.1, X_β admite uma subtopologia τ' tal que $X'_\beta = (X_\beta, \tau')$ é H-minimal e $\pi_\beta : A_\beta \to X'_\beta$ é θ-contínua. Seja D_β o conjunto dos pontos isolados de X_β. Se $X_\beta \neq \emptyset$ temos que $D_\beta \neq \emptyset$, pela discussão feita anteriormente. Definimos $X_\alpha = X_\beta \setminus D_\beta$ e $B_\alpha = \pi^{-1}[X_\alpha]$. Como X_α é θ-fechado, B_α é fechado e compacto. Ainda $\pi|_{B_\alpha} : B_\alpha \to X_\alpha$ é perfeita e sobrejetora. Pela proposição 3.4, existe $A_\alpha \subseteq B_\alpha$ tal que $\pi|_{A_\alpha}$ é irredutível, perfeita e irredutível. Chamamos $\pi|_\alpha = \pi|_{A_\alpha}$.

Caso α seja limite. Temos que $\pi[\bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta] = \bigcap_{\beta<\alpha} X_\beta$, pelas propriedades de π. Assim, seja $X_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} X_\beta$ e A_α contido em $\bigcap_{\beta<\alpha} A_\beta$ tal que $\pi|_{A_\alpha} : A_\alpha \to X_\alpha$ seja perjeita, irredutível e sobrejetora.

Como X é enumerável, e $\{D_\alpha\}_{\alpha<\omega_1}$ tem ordem nula, ou seja, seus elementos são 2 a 2 disjuntos, $X_\alpha = \emptyset$ para algum α.

Dado $A \subseteq X$, podemos definir $\gamma = min\{\alpha : A \not\subset X_\alpha\}$. Temos que γ não pode ser limite e como $X_0 = X$, $\gamma = \delta + 1$. Seja $t \in A \setminus X_\gamma$. Como $A \subseteq X_\delta$, temos que t é isolado de X_δ. Assim A tem ponto isolado. ■

Notas

A demonstração do terema 4.1 é baseada na feita por Hans Vermeer e Evert Wattel. Jack Porter e Johannes Vermeer acrescetaram a condição que a topologia gerada era, além de H-fechada, semi-regular. A proposição 4.3 é uma reunião de fatos citados por Porter e Vermeer. O lema 4.1 e a proposição 4.6 são enunciados modificados (generalizados) dos exercícios 3.8.F e 3.8.G em [ENG89], cujos originais só tratavam de enumerabilidade. A seção que trata dos métricos tem suas demonstrações baseadas em [ENG89]. A demonstração do teorema 4.12 é na verdade uma grande simplicação da feita por W. Kulpa em seu artigo [KUL76]. Neste trabalho de simplificação surgiu a proposição 4.20 que generaliza uma construção de W. Kulpa.

Bibliografia

[DJP75] R.F. DICKMAN Jr. and Jack R. PORTER. θ-Closed Subsets of Hausdorff Spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 59(2):407–415, August 1975.

[DP82] Alan DOW and Jack R. PORTER. Cardinalities of H-closed Spaces. *Topology Proceedings*, 7:25–50, 1982.

[ENG89] Ryszard ENGELKING. *General Topology*, volume 6 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[HY61] John G. HOCKING and Gail S. YOUNG. *Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, 1961.

[JUH80] István JUHÁSZ. *Cardinal Functions - Ten Years Later*. Number 123 in Mathematical Centre Tracts. Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980.

[KUL76] W. KULPA. A Minimalization of 0-dimensional Metric Spaces. *Colloquium Mathematicum*, 36(2):215–216, 1976.

[KUN80] Kenneth KUNEN. *Set Theory - an introduction to the independence proofs*, volume 102 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1980.

[PV85] Jack R. PORTER and Johannes VERMEER. Spaces with Coaser Minimal Hausdorff Topologies. *Transactions of the American Mathematical Society*, 289(1):59–71, May 1985.

[PW87] Jack R. PORTER and R. Grant WOODS. *Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces*. Springer-Verlag, New York, 1987.

[VER85] Johannes VERMEER. Closed Subspaces of H-closed Spaces. *Pacific Journal of Mathematics*, 118(1):229–247, May 1985.

[VW81] Hans VERMEER and Evert WATTEL. Projective Elements in Categories with Perfect θ-continuous Maps. *Canadian Journal of Mathematics*, 33(4):872–884, August 1981.

Índice

(EX, π), 34
$B(\kappa)$, 68
$C(\kappa)$, 76
EX, 34
G_δ, 2
G_λ, 2
$J(\kappa)$, 74
$L(X)$, 2
$MA(\kappa)$, 37
O^p, 24
O^p_Y, 24
R-filtro, 3
R-ultrafiltro, 4
$R(X)$, 51
$S(B)$, 5
X_s, 15
Y^+, 26
$Y^\#$, 25
$Y_1 \equiv_X Y_2$, 8
$\bigvee S$, 2
$\bigwedge S$, 2
$\mathcal{F}$ encontra $\mathcal{G}$, 28
$\mathcal{H}$, 19
$\mathcal{H}(X)$, 19
$\mathcal{B}(X)$, 1
$\mathcal{C}(X)$, 1
$\mathcal{C}(X, Y)$, 1
$\mathcal{E}(X)$, 8
$\mathcal{E}_\mathcal{K}(X)$, 10
$\mathcal{E}_\mathcal{P}(X)$, 9
$\mathcal{K}$, 10
$\mathcal{P}$-extensão, 9
$\mathcal{P}(A)$, 1
$\mathcal{RO}(X)$, 2
$\mathcal{R}(X)$, 1
$\mathcal{Z}(X)$, 1
$\chi(X)$, 2
σX, 43
θX, 34
κX, 20
λ-compacto, 2
$\lambda(a)$, 5
$\varprojlim S$, 72
$\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n<\omega}$, 72
$\omega(X)$, 2
π, 34
σ-compacto, 2
βX, 10
$\overline{U}^{X_\theta}$, 16
θ-aderência, 18
θ-fechado, 16
θ-fecho, 16

θ-homeomorfismo, 16
$\theta\mathcal{C}(X,Y)$, 16
$\tau(X)$, 1
$\{X_n, f_n\}_{n<\omega}$, 72
a encontra B, 4
$ad_X(\mathcal{F})$, 5
$ad^{\theta}_X(\mathcal{F})$, 18
$c(X)$, 2
$c_X(\mathcal{F})$, 5
$d(X)$, 2
oU, 24
$o_Y U$, 24
$x \vee y$, 2
$x \wedge y$, 2
álgebra booleana, 4

Absoluto de Iliadis, 34
aderência, 5
Axioma de Martin, 37

classe repleta, 9
compactificação, 10
compactificado de Stone-Čech, 10

espaço
    Čech-completo, 51
    de Gleason, 34
    de Katětov, 46
    de Stone, 6
    de Urysohn, 15
    disperso, 79
    extremamente desconexo, 30
    fortemente zero-dimensional, 68
    H-fechado, 13
    H-minimal, 21
    nunca localmente compacto, 51
    semi-regular, 15
    zero-dimensional, 6
espaços
    co-absolutos, 77
extensão, 7
    de Fomin, 43
    de Katětov, 20
    estrita, 25
    simples, 26

filtro, 3
    fixo, 5
    livre, 5
função
    θ-contínua, 16
    compacta, 33
    irredutível, 33
    perfeita, 33

hereditária
    nos fechados, 9
    por produtos, 9

limite
    de filtro, 5
    de seqüência inversa, 72

máximo projetivo, 9

ouriço de κ espinhos, 74

resto, 7
resíduo, 51

semi-regularização, 15
seqüência inversa, 72

Teorema
    da Representação de Stone, 6
    de Dowker, 68
    de Katětov-Morita, 68
    de Stone, 68

ultrafiltro, 4