PRIMEIRA VARIAÇÃO DA ENERGIA E GEODÉSICAS NA GEOMETRIA SUB-RIEMANNIANA

José Carlos Simon de Miranda

DISSERTAÇÃO APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA

OBTENÇÃO DO GRAU

DE

MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Geometria**

Orientador: **Prof. Dr. José Antonio Verderesi**

– São Paulo, maio de 1998 –

PRIMEIRA VARIAÇÃO DA ENERGIA E GEODÉSICAS
NA GEOMETRIA SUB-RIEMANNIANA

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação apresentada por José Carlos Simon de Miranda, devidamente corrigida e aprovada pela Comissão Julgadora

São Paulo, 15 de maio de 1998.

Comissão Julgadora

- Prof. Dr. José Antonio Verderesi - IME-USP
- Prof. Dr. Francisco Mercuri - IMECC-UNICAMP
- Prof. Dr. Nicolai Gusevskii - UFMG

Resumo

Neste trabalho demonstramos a fórmula da primeira variação da energia para variedades sub-riemannianas de contato e deduzimos desta a equação das geodésicas para tais variedades.

No primeiro capítulo definimos variedade sub-riemanniana de contato e apresentamos um teorema sobre a existência e unicidade de uma derivada covariante associada à estrutura sub-riemanniana.

No segundo capítulo estudamos os pontos críticos do funcional energia definido no espaço das curvas de contato e demonstramos um teorema que caracteriza as geodésicas sub-riemannianas.

Finalmente, no terceiro capítulo, apresentamos o cálculo das geodésicas no espaço de Heisemberg, na esfera S^3 e na quádrica $\mathbb{Q}^3$.

Abstract

In this work we derive the formula of the first variation of energy for contact sub-riemannian manifolds and from it we deduce the equation of geodesics for such manifolds.

First chapter is devoted to define contact sub-riemannian manifold and to present a theorem about the existence and uniqueness of a covariant derivative associated to the sub-riemannian structure.

In chapter two we study the critical points of the energy functional defined on the space of contact curves. A characterization theorem for sub-riemannian geodesics is also shown.

Finally, in chapter three, we derive the equations of geodesics in H^3, S^3 and $\mathbb{Q}^3$.

"São lindos
Seus olhos verdes são lindos
Muito, muito mesmo!
É impressionante!"
Lindos quando iluminados pelos teus.

E era verdade. A única no momento.

O céu brilhante da montanha
Imita seus olhos.
A mais branca e jovem rosa
Inveja sua pele.
Os campos de trigo seu cabelo.
A lua crescente seu sorriso.

Moça dos olhos brilhantes de luz do fogo
Quando encontrar sorrindo seus pingos de céu
Vou transformar o momento em vida
De fogo da terra e azul do mar.

Agradecimentos

Agradeço ao Prof. Dr. José Antônio Verderesi pela ótima orientação.

Ao amigo Verderesi. Este trabalho não existiria sem sua ajuda.

Aos meus pais pelo amor, carinho e dedicação.

Aos amigos Marcelo e Yamin pelo companheirismo.

À Zara e ao Daciberg pela ajuda e incentivo.

Para meu pai.
De quem recebi a honestidade
a coragem, o amor e a bondade.

Conteúdo

Introdução

Uma variedade sub-riemanniana de contato é uma variedade na qual temos uma distribuição de contato e uma métrica definida na distribuição.

Utilizamos o Capítulo 1 para apresentar as definições de distribuições de contato, variedade sub-riemanniana de contato e forma de contato; e enunciar proposições relacionadas a estes conceitos. Ainda no Capítulo 1, demonstramos um teorema de existência e unicidade de uma derivada covariante associada à estrutura sub-riemanniana e apresentamos também a primeira equação de estrutura.

No segundo capítulo apresentamos o funcional energia e deduzimos a fórmula da primeira variação da energia. Com base na primeira variação da energia, deduzimos um teorema que caracteriza as geodésicas em variedades sub-riemannianas de contato.

Em [11] Strichartz deduz as equações das geodésicas para variedades sub-riemannianas não necessariamente de contato e enuncia um teorema de caracterização de geodésicas através destas equações. Entretanto, Montgomery [9] mostrou que tal resultado era falso, apresentando contra exemplos de curvas extremais do funcional energia que não satisfazem às equações das geodésicas propostas por Strichartz. Posteriormente, Rumin [10] caracterizou, através de equações, as geodésicas em variedades pseudo hermitianas de contato. Entretanto, o resultado por ele apresentado está incompleto pois depende da existência de variações de contato com extremos fixos cujas variações infinitesimais são por ele utilizadas. Demonstramos a existência de tais variações, na Proposição 2.7, e deduzimos o teorema de caracterização de geodésicas para variedades sub-riemannianas de contato. Terminamos o segundo capítulo demonstrando que as geodésicas em variedades sub-riemannianas de contato são suaves.

O último capítulo é dedicado à aplicação destes teoremas a três exemplos de variedades sub-riemannianas de contato de dimensão três, o espaço de Heisenberg, a esfera S^3 e a quádrica $\mathbb{Q}^3$ que, na geometria riemanniana, correspondem aos espaços de curvatura constante nula, positiva e negativa. Nestes três exemplos também determinamos a aplicação exponencial em pontos particulares. Nestes exemplos fazemos uso dos conceitos do primeiro capítulo, sendo que nos segundo e terceiro exemplos utilizamos variáveis complexas para obtermos os resultados de uma maneira mais direta.

Boa leitura!

Capítulo 1

Variedades sub-riemannianas de contato

Neste capítulo definiremos variedades sub-riemannianas de contato e estudaremos uma derivada covariante a elas associada.

Os objetos estudados, quando aplicável, serão todos de classe C^∞ a menos de menção contrária.

Seja M uma variedade e TM o fibrado tangente.

Uma distribuição D é um subfibrado de TM e a ela associaremos uma métrica que chamaremos de g.

Serão consideradas distribuições de codimensão 1 transversalmente orientáveis.

Proposição 1.1 *Se M é uma variedade e D uma distribuição tranversalmente orientável de codimensão 1, então existe um campo transverso U definido em M que não se anula.*

Tomemos em M uma métrica g_1.

Seja $\{V_i\}$, $i \in I$, uma cobertura por abertos de M. Como D é transversalmente orientável, existe um campo de retas orientável sobre M. Assim, em cada aberto V_i temos um campo de vetores U_i que não se anula de tal forma que na intersecção de dois abertos $V_i \cap V_j$ os campos U_i e U_j são da forma $U_i = \alpha U_j$, onde $\alpha : U_i \cap U_j \to \mathbb{R}^*_+$.

Seja N_i o campo definido em V_i por $N_i = \dfrac{U_i}{\|U_i\|}$.

Se $p \in V_i \cap V_j$, então

$$N_i(p) = \frac{U_i(p)}{\|U_i(p)\|} = \frac{\alpha U_j(p)}{\|\alpha U_j(p)\|} = \frac{U_j(p)}{\|U_j(p)\|} = N_j(p).$$

Definimos U sobre M por $U(p) = N_k(p)$, onde $k \in \{i \in I | p \in V_i\}$.

Proposição 1.2 *Se M é uma variedade e D uma distribuição transversalmente orientável de codimensão 1, então existe uma 1-forma η definida em M tal que* $\ker \eta = D$.

Seja U o campo transverso da Proposição 1.1.

$$T_pM = [U(p)] \oplus D_p.$$

Sendo V um vetor de T_pM ele é escrito de maneira única como

$$V = v_t U_t(p) + v_d, \quad v_t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad v_d \in D_p.$$

Definimos η por $\eta_p(V) = v_t$.

Utilizando as notações das proposições anteriores, podemos montar o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{\eta} & \mathbb{R} \\ \downarrow \pi_1 & & \uparrow \pi_2 \\ TM/D & \xrightarrow{\phi} & M \times \mathbb{R} \end{array}$$

$(p, V) \in TM$

$\pi_1(p, V) = (p, v_t U(p) \text{mod} D_p)$

$\phi(p, v_t U(p) \text{mod} D_p) = (p, v_t)$

$\pi_2(p, v_t) = v_t$

$\eta(p, V) = v_t$

Assim temos as identificações $TM/D \cong M \times \mathbb{R}$ e $(TM/D)_p \cong \mathbb{R}$.

Definição 1.1 *Uma variedade sub-riemanniana de codimensão 1 é uma variedade M munida de uma distribuição D, de codimensão 1 e de uma métrica g em D.*

Indicaremos esta variedade pela terna (M, D, g) ou mais diretamente por M.

Vamos denotar campos tangentes à distribuição D pelas letras X, Y e Z e campos tangentes a M por U, V e W. Utilizamos a notação $X \in D$ e $U \in TM$.

Consideremos agora a aplicação bilinear anti-simétrica definida por

$$\begin{aligned} L : D \times D &\longrightarrow TM/D \\ (X, Y) &\longrightarrow L(X, Y) = [X, Y] \mathrm{mod} D \end{aligned}$$

Sejam $p \in M$, U um aberto de M com $p \in U$ e $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} [fX, Y]g &= fX(Yg) - Y(fX)g = fXYg - fYXg - (Yf)Xg \\ &= f[X, Y]g - (Yf)Xg = (f[X, Y] - (Yf)X)g, \end{aligned}$$

$(Yf)X \in D$. Assim,

$$\begin{aligned} &L(fX, Y) = fL(X, Y), \\ &X = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial X_i}, \quad Y = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial X_j} \\ &L(X, Y) = \sum_{i,j} X^i Y^j L\left(\frac{\partial}{\partial X_i}, \frac{\partial}{\partial X_j}\right). \end{aligned}$$

Sendo X_1, X_2, Y_1, $Y_2 \in D$, com $X_1(p) = X_2(p)$ e $Y_1(p) = Y_2(p)$, temos

$$\begin{aligned} L_p(X_1, Y_1) &= \sum_{i,j} X_1^i(p) Y_1^j(p) L_p\left(\frac{\partial}{\partial X_i}, \frac{\partial}{\partial X_j}\right) \\ &= \sum_{i,j} X_2^i(p) Y_2^j(p) L_p\left(\frac{\partial}{\partial X_i}, \frac{\partial}{\partial X_j}\right) = L_p(X_2, Y_2)\ . \end{aligned}$$

Portanto, o valor de L só depende do valor dos campos no ponto p e assim para cada $p \in M$, $L_p : D_p \times D_p \longrightarrow (TM/D)_p$ está bem definida.

Definição 1.2 *Uma distribuição de contato sobre M é uma distribuição D de codimensão 1 tal que L é não degenerada.*

Definição 1.3 *Uma variedade sub-riemanniana M se diz de contato se D é de contato.*

Proposição 1.3 *A dimensão de uma variedade sub-riemanniana de contato é ímpar.*

Seja A a representação matricial da aplicação L e k a dimensão de D.

Como L é não degenerada, $\det A \neq 0$.

Como L é anti-simétrica, temos

$$A + A^t = 0$$

$$A = -A^t \to \det A = (-1)^k \det A^t = (-1)^k \det A \to k = 2n.$$

Portanto, $\dim D = 2n$ e $\dim M = 2n + 1$.

Seja $\{e_i\}$, $1 \leq i \leq 2n$, uma base local ortonormal de D, $\{e_i, f\}$ uma base local de TM e $\{\theta^i, \varphi\}$ sua base dual.

Definição 1.4 *A $2n$-forma sobre M que assume valor 1 quando calculada em qualquer base ortonormal positiva de D é chamada de elemento de volume em D.*

Utilizamos a notação $\mathrm{d}V$ para a forma elemento de volume em D. Localmente podemos escrever $\mathrm{d}V = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^{2n} = \bigwedge_{i=1}^{2n} \theta^i$.

Proposição 1.4 *Existe uma única 1-forma ω sobre M, a menos de sinal, tal que $\ker \omega = D$ e $\mathrm{d}\omega|_D^n = 2^n n! \mathrm{d}V$.*

Seja η uma 1-forma sobre M com $\ker \eta = D$ (Proposição 1.2).

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\eta(X,Y) &= X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y]) \\
X, Y \in D &\to \eta(X) = \eta(Y) = 0 \\
\mathrm{d}\eta(X,Y) &= -\eta([X,Y]).
\end{aligned}$$

Como $L(X,Y) = [X,Y]\mathrm{mod}D$ é não degenerada, $\mathrm{d}\eta|_D$ é não degenerada.

Sendo $\mathrm{d}\eta|_D$ não degenerada, existe uma base $\{b_i\}$, $1 \leq i \leq 2n$, local de D com base dual $\{\eta_i\}$, $1 \leq i \leq 2n$, onde escrevemos

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\eta|_D &= \sum_{i=1}^{n} \eta_{2i-1} \wedge \eta_{2i} \\ \mathrm{d}\eta|_D^n &= \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_{2i-1} \wedge \eta_{2i} \right)^n = n! \bigwedge_{i=1}^{2n} \eta_i \end{aligned}$$

Logo, $\mathrm{d}\eta|_D^n$ é não degenerada.

Portanto existe $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ $\displaystyle\bigwedge_{i=1}^{2n} \eta_i = f.\mathrm{d}V$, onde $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ser escolhida positiva.

Consideremos a forma $g\eta$, onde $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(g\eta) &= \mathrm{d}g \wedge \eta + g\mathrm{d}\eta \\ \mathrm{d}(g\eta)|_D &= (\mathrm{d}g \wedge \eta + g\mathrm{d}\eta)|_D = g\mathrm{d}\eta|_D, \text{ pois } \ker\eta = D \\ \mathrm{d}(g\eta)|_D^n &= g^n(\mathrm{d}\eta|_D^n) = g^n n! f\mathrm{d}V \\ g^n f n!\mathrm{d}V &= 2^n n!\mathrm{d}V \leftrightarrow g^n f = 2^n \leftrightarrow g = 2f^{(-1/n)}. \end{aligned}$$

Portanto, a forma procurada é $\omega = 2f^{(-1/n)}\eta$.

Definição 1.5 *A forma ω da proposição anterior é chamada de forma de contato da variedade sub-riemanniana.*

Proposição 1.5 *Existe um único campo ξ sobre M com as propriedades $\omega(\xi) = 1$ e $i_\xi \mathrm{d}\omega = 0$.*

Seja U tal que $\omega(U) = 1$.

$i_U\mathrm{d}\omega(W) = \mathrm{d}\omega(U,W)$ é uma 1-forma em M. Tomemos sua restrição a D, $i_U\mathrm{d}\omega|_D$, que é uma forma linear sobre D

$$i_U\mathrm{d}\omega|_D(Y) = \mathrm{d}\omega(U,Y).$$

Como $d\omega$ é não degenerada sobre D, existe um único Z campo em D tal que

$$\forall Y \in D,\ i_U d\omega|_D(Y) = d\omega(Z, Y),$$

ou seja,

$$\forall Y \in D,\ d\omega(U, Y) = d\omega(Z, Y).$$

Seja $\xi = U - Z$,

$$\omega(\xi) = \omega(U) - \omega(Z) = 1.$$

Se W é um campo em M, podemos escrevê-lo

$$\begin{aligned}
W &= \alpha\xi + Y \\
i_\xi d\omega(W) &= d\omega(\xi, W) = d\omega(\xi, \alpha\xi + Y) \\
&= d\omega(\xi, \alpha\xi) + d\omega(\xi, Y) = 0 + d\omega(\xi, Y) = d\omega(U - Z, Y) \\
&= d\omega(U, Y) - d\omega(Z, Y) = 0,
\end{aligned}$$

o que nos mostra a existência de tal campo.

Vamos mostrar a unicidade.

Seja ξ_1 um campo com as propriedades da proposição. Então,

$$i_{\xi_1} d\omega = i_\xi d\omega = 0 \qquad \text{e} \qquad \omega(\xi_1) = \omega(\xi) = 1,$$

$$\omega(\xi_1 - \xi) = 0 \to \xi_1 - \xi \in D,$$

$$\forall X \in D,\ d\omega(\xi, X) = d\omega(\xi_1, X) = 0,$$

$$\forall X \in D,\ d\omega(\xi_1 - \xi, X) = 0.$$

Como $d\omega$ é não degenerada em D, temos $\xi_1 - \xi = 0$, o que mostra a unicidade.

No teorema que segue definiremos uma derivada covariante que será associada à variedade sub-riemanniana de contato.

Teorema 1.1 *Existe uma única derivada covariante*

$$\nabla : TM \times TM \to TM$$

que satisfaz as propriedades

i) $\forall X \in D$, $\forall U \in TM$, $\nabla_U X \in D$;

ii) $\forall U \in TM$, $\nabla_U \xi = 0$;

iii) $\forall U \in TM$, $\forall X, Y \in D$, $U\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_U X, Y\rangle + \langle X, \nabla_U Y\rangle$;

iv) se T_{or} *é o tensor de torção de* ∇, *então* $\forall X, Y \in D$,

$T_{or}(X, Y) = \mathrm{d}\omega(X, Y)\xi$ *e*

$T_{or}(\xi, X) = \tau(X)$, *onde* $\tau(X)$ *é um tensor simétrico e*

$i_\xi \tau = 0$.

Na demonstração deste teorema explicitaremos os coeficientes da derivada covariante para um referencial ortonormal local em M assim determinando a existência e unicidade da derivada covariante para abertos de M. Para uma cobertura por abertos de M teremos a derivada covariante definida para cada aberto. Essa derivada covariante será independente do referencial adotado pois para dois referenciais sobre os abertos U_1 e U_2 teremos duas derivadas covariantes ∇_1 e ∇_2 únicas em U_1 e U_2. Na intersecção destes abertos a existência de uma derivada covariante já está garantida por ∇_1 e ∇_2. Como se ela existir será única, então ∇_1 e ∇_2 coincidem em $U_1 \cap U_2$. Tomando então uma cobertura por abertos de M garantimos a existência e unicidade de ∇.

Demonstração: Seja $\{e_i, \xi\}$ um referencial local ortonormal sobre M. Coloquemos

$$[e_i, e_j] = \sum_k c_{ij}^k e_k + a_{ij}\xi \qquad \text{e} \qquad [\xi, e_j] = \sum_k c_j^k e_k + c_j \xi \ ,$$

$$\mathrm{d}\omega(e_i, e_j) \ = \ e_i(\omega(e_j)) - e_j(\omega(e_i)) - \omega([e_i, e_j]) = -\omega([e_i, e_j])$$

$$
\begin{aligned}
&= -\omega\left(\sum_k c_{ij}^k e_k + a_{ij}\xi\right) = -\sum_k c_{ij}^k \omega(e_k) - a_{ij}\omega(\xi) \\
&= -a_{ij}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d\omega(\xi, e_j) &= \xi(\omega(e_j)) - e_j(\omega(\xi)) - \omega([\xi, e_j]) \\
&= \xi(0) - e_j(1) - \omega([\xi, e_j]) = -\omega([\xi, e_j]) \\
&= -\omega\left(\sum_k c_j^k e_k + c_j\xi\right) = -\sum_k c_j^k \omega(e_k) - c_j\omega(\xi) = -c_j \,.
\end{aligned}
$$

Como $i_\xi d\omega(e_j) = 0$, temos $d\omega(\xi, e_j) = 0$. Logo, $c_j = 0$. Se ∇ satisfaz a condição i, temos

$$
\nabla_{e_i} e_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k \qquad \text{e} \qquad \nabla_\xi e_j = \sum_k \Gamma_j^k e_k \,.
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
T_{or}(e_i, e_j) &= \nabla_{e_i} e_j - \nabla_{e_j} e_i - [e_i, e_j] \\
&= \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k - \sum_k \Gamma_{ji}^k e_k - \sum_k c_{ij}^k e_k - a_{ij}\xi \\
&= \sum_k (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k - c_{ij}^k) e_k - a_{ij}\xi \,.
\end{aligned}
$$

Se ∇ satisfaz a condição iv, então

$$
T_{or}(e_i, e_j) = d\omega(e_i, e_j)\xi
$$

e, portanto,

$$
\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k - c_{ij}^k = 0 \,. \tag{I}
$$

Se ∇ satisfaz a condição iii, então

$$
0 = e_i\langle e_j, e_k\rangle = \langle \nabla_{e_i} e_j, e_k\rangle + \langle e_j, \nabla_{e_i} e_k\rangle = \Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ki}^j
$$

ou seja,

$$
\Gamma_{ij}^k = -\Gamma_{ik}^j. \tag{II}
$$

Permutando os índices em (I), temos

$$
\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = c_{ij}^k
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj} &= c^i_{jk} \\
\Gamma^j_{ki} - \Gamma^j_{ik} &= c^j_{ki} \, .
\end{aligned}
$$

Somando a primeira e a terceira igualdades e subtraindo a segunda, obtemos

$$\Gamma^k_{ij} - \Gamma^j_{ik} - \Gamma^k_{ji} - \Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj} + \Gamma^j_{ki} = c^k_{ij} - c^i_{jk} + c^j_{ki} \, .$$

Utilizando (II), temos

$$
\begin{aligned}
2\Gamma^k_{ij} &= c^k_{ij} - c^i_{jk} + c^j_{ki} \\
\Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2}(c^k_{ij} - c^i_{jk} + c^j_{ki}) \\
T_{or}(\xi, e_j) &= \nabla_\xi e_j - \nabla_{e_j}\xi - [\xi, e_j], \text{ pela propriedade ii,} \\
T_{or}(\xi, e_j) &= \nabla_\xi e_j - [\xi, e_j] = \sum_k \Gamma^k_j e_k - \sum_k c^k_j e_k \\
&= \sum_k (\Gamma^k_j - c^k_j) e_k \, .
\end{aligned}
$$

Se ∇ satisfaz iv, temos

$$T_{or}(\xi, e_j) = \sum_k \tau^k(e_j) e_k \qquad \text{e} \qquad \tau^k(e_j) = \Gamma^k_j - c^k_j \, . \tag{III}$$

Sendo o tensor τ simétrico, temos

$$
\begin{aligned}
\langle \tau(e_i), e_j \rangle = \langle e_i, \tau(e_j) \rangle &\rightarrow \langle \sum_k \tau^k(e_i) e_k, e_j \rangle = \langle e_i, \sum_k \tau^k(e_j) e_k \rangle \\
&\rightarrow \tau^j(e_i) = \tau^i(e_j). \qquad (IV)
\end{aligned}
$$

De iii, temos

$$0 = \xi\langle e_i, e_j \rangle = \langle \nabla_\xi e_i, e_j \rangle + \langle e_i, \nabla_\xi e_j \rangle = \langle \sum_k \Gamma^k_i e_k, e_j \rangle + \langle e_i, \sum_k \Gamma^k_j e_k \rangle = \Gamma^j_i + \Gamma^i_j \, . \tag{V}$$

Permutando os índices em (III), temos

$$
\begin{aligned}
\tau^k(e_j) &= \Gamma^k_j - c^k_j \, , \\
\tau^j(e_k) &= \Gamma^j_k - c^j_k \, .
\end{aligned}
$$

Subtraindo as duas igualdades, vem

$$
\begin{aligned}
0 &= \Gamma^k_j - \Gamma^j_k - c^k_j + c^j_k \rightarrow 2\Gamma^k_j = c^k_j - c^j_k \ , \\
\Gamma^k_j &= \frac{1}{2}(c^k_j - c^j_k).
\end{aligned}
$$

Assim, determinamos os coeficientes Γ^k_{ij} e Γ^k_j para a derivada covariante garantindo a sua existência e unicidade.

Da demonstração do Teorema 1, podemos observar que o tensor simétrico τ tem a forma $\tau^k_j = -(c^k_j + c^j_k)/2$, pois

$$
\begin{aligned}
\tau^k_j &= \tau^k(e_j) = \Gamma^k_j - c^k_j \ , \\
\tau^j_k &= \tau^j(e_k) = \Gamma^j_k - c^j_k \ .
\end{aligned}
$$

Somando as duas igualdades e utilizando $\tau^k_j = \tau^j_k$ e $\Gamma^k_j + \Gamma^j_k = 0$, temos $2\tau^k_j = -c^k_j - c^j_k$. Logo, $\tau^k_j = -(c^k_j + c^j_k)/2$.

Proposição 1.6 *O tensor de torção pode ser escrito na forma*

$$T_{or} = \omega \wedge \tau + \mathrm{d}\omega \otimes \xi \ .$$

Seja $U = u^1\xi + X$, $V = v^1\xi + Y$,

$$
\begin{aligned}
T_{or}(U, V) &= T_{or}(u^1\xi + X, v^1\xi + Y) = T_{or}(u^1\xi, v^1\xi) + T_{or}(u^1\xi, Y) \\
&\quad + T_{or}(X, v^1\xi) + T_{or}(X, Y) = u^1 v^1 T_{or}(\xi, \xi) + u^1 T(\xi, Y) \\
&\quad + v^1 T_{or}(X, \xi) + T_{or}(X, Y) = u^1\tau(Y) - v^1\tau(X) + \mathrm{d}\omega(X, Y)\xi \ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(\omega \wedge \tau + \mathrm{d}\omega \otimes \xi)(U, V) = (\omega \wedge \tau)(U, V) + \mathrm{d}\omega(U, V)\xi \\
&= \omega(u^1\xi + X)\tau(v^1\xi + Y) - \omega(v^1\xi + Y)\tau(u^1\xi + X) + \mathrm{d}\omega(u^1\xi + X, v^1\xi + Y)\xi \\
&= (u^1\omega(\xi) + \omega(X))\tau(v^1\xi + Y) - (v^1\omega(\xi) + \omega(Y))\tau(u^1\xi + X)
\end{aligned}
$$

$$+u^1v^1\mathrm{d}\omega(\xi,\xi)\xi + v^1\mathrm{d}\omega(X,\xi)\xi + u^1\mathrm{d}\omega(\xi,Y)\xi + \mathrm{d}\omega(X,Y)\xi$$

$$= u^1\tau(v^1\xi + Y) - v^1\tau(u^1\xi + X) + \mathrm{d}\omega(X,Y)\xi$$

$$= u^1\tau(Y) - v^1\tau(X) + \mathrm{d}\omega(X,Y)\xi + u^1v^1\tau(\xi) - v^1u^1\tau(\xi)$$

$$= u^1\tau(Y) - v^1\tau(X) + \mathrm{d}\omega(X,Y)\xi\ .$$

Assim, $T_{or}(U,V) = (\omega \wedge \tau + \mathrm{d}\omega \otimes \xi)(U,V)$.

Lembrando a definição da derivada covariante de uma 1-forma,

$$\nabla_U\eta(V) = U(\eta(V)) - \eta(\nabla_U V),$$

temos as seguintes proposições.

Proposição 1.7 *Para a forma de contato da variedade sub-riemanniana vale a relação* $\nabla\omega = 0$.

De fato,

$$\begin{aligned}
\nabla_U\omega(V) &= U(\omega(V)) - \omega(\nabla_U V)\\
\nabla_U\omega(v^1\xi + Y) &= U(\omega(v^1\xi + Y)) - \omega(\nabla_U(v^1\xi + Y))\\
&= U(v^1\omega(\xi) + \omega(Y)) - \omega(\nabla_U(v^1\xi) + \nabla_U Y)\\
&= U(v^1) - \omega(\nabla_U(v^1\xi)) - \omega(\nabla_U Y)\\
&= U(v^1) - \omega(U(v^1)\xi + v^1\nabla_U\xi) = U(v^1) - \omega(U(v^1)\xi)\\
&= U(v^1) - U(v^1) = 0\ .
\end{aligned}$$

Vamos utilizar a seguinte notação:

$$\widehat{\nabla}\eta(U,V) = (\nabla_U\eta)(V) - (\nabla_V\eta)(U).$$

Proposição 1.8 *Sendo* η *uma 1-forma, vale a relação*

$$\mathrm{d}\eta = \widehat{\nabla}\eta + \eta \circ T_{or}.$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
d\eta(U,V) &= U(\eta(V)) - V(\eta(U)) - \eta([U,V]) \\
\widehat{\nabla}\eta(U,V) &= U(\eta(V)) - \eta(\nabla_U V) - V(\eta(U)) + \eta(\nabla_V U) \\
&= U(\eta(V)) - V(\eta(U)) - \eta(\nabla_U V - \nabla_V U) \\
&= U(\eta(V)) - V(\eta(U)) - \eta(T_{or}(UV) + [U,V]) \\
&= U(\eta(V)) - V(\eta(U)) - \eta([U,V]) - \eta(T_{or}(U,V)) \\
&= d\eta(U,V) - \eta(T(U,V)) \,.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$d\eta(U,V) = \widehat{\nabla}\eta(U,V) + \eta(T_{or}(U,V)).$$

Em particular, para a forma de contato temos

$$d\omega = \widehat{\nabla}\omega + \omega \circ T_{or}.$$

Seja $\{e_i\}$, $1 \leq i \leq 2n+1$, uma base local ortonormal de campos e seja $\{\theta^i\}$, $1 \leq i \leq 2n+1$, sua base dual.

Podemos escrever a derivada covariante destes campos na forma $\nabla e_i = \sum_j \omega_i^j e_j$, onde ω_i^j são 1-formas.

As formas ω_i^j são chamadas de formas de conexão.

Proposição 1.9 *Sendo ∇ compatível com a métrica, vale a relação $\omega_i^j = -\omega_j^i$ para as formas de conexão.*

De fato,

$$
\begin{aligned}
0 &= \nabla\langle e_i, e_j\rangle = \langle \nabla e_i, e_j\rangle + \langle e_i, \nabla e_j\rangle \\
&= \langle \sum_k \omega_i^k e_k, e_j\rangle + \langle e_i, \sum_k \omega_j^k e_k\rangle = \omega_i^j + \omega_j^i.
\end{aligned}
$$

Proposição 1.10 *Valem as igualdades*

$$\mathrm{d}\theta^i = -\sum_j \omega_j^i \wedge \theta^j + T_{or}^i,$$

para $1 \leq i \leq 2n+1$.

De fato,

$$\nabla_U \theta^i(e_j) = U(\theta^i(e_j)) - \theta^i(\nabla_U e_j) = U\delta_{ij} - \theta^i(\nabla_U e_j) = -\theta^i(\nabla_U).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla\theta^i(e_j) &= -\theta^i(\nabla e_j) = -\theta^i\left(\sum_k \omega_j^k e_k\right) = -\omega_j^i \\
\nabla\theta^i(e_j) &= -\omega_j^i \to \nabla\theta^i = -\sum_j \omega_j^i \otimes \theta^j \\
\widehat{\nabla}\theta^i(U,V) &= (\nabla_U\theta^i)(V) - (\nabla_V\theta^i)(U) \\
&= -\sum_j \omega_j^i \otimes \theta^j(U,V) + \sum_j \omega_j^i \otimes \theta^j(U,V) = -\sum_j (\omega_j^i \wedge \theta^j)(U,V).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\widehat{\nabla}\theta^i = -\sum_j \omega_j^i \wedge \theta^j.$$

Pela Proposição 1.8, temos

$$\mathrm{d}\theta^i = \widehat{\nabla}\theta^i + \theta^i \circ T_{or} = -\sum_j \omega_j^i \wedge \theta^j + T_{or}^i\,.$$

A equação $\mathrm{d}\theta^i = -\sum_j \omega_j^i \wedge \theta^i + T^i$ é chamada de primeira equação de estrutura.

Vamos escrever a primeira equação de estrutura para a derivada covariante da geometria sub-riemanniana.

Seja $\{e_i\}$, $1 \leq i \leq 2n$, uma base local de D ortonormal e $\{e_i, \xi\}$ base local de M com base dual $\{\theta^i, \omega\}$.

Pelas propriedades i e ii da conexão, temos

$$\nabla e_i = \sum_j \omega_i^j e_j \qquad \text{e} \qquad \nabla\xi = 0$$

$$
\begin{aligned}
\widehat{\nabla}\theta^i &= -\sum_j \omega^i_j \wedge \theta^j \qquad \text{e} \qquad \widehat{\nabla}\omega = 0 \\
\mathrm{d}\theta^i &= -\sum_j \omega^i_j \wedge \theta^j + \theta^i \circ T_{or} \\
\mathrm{d}\omega &= \widehat{\nabla}\omega + \omega \circ T = \omega \circ T_{or}
\end{aligned}
$$

Como $T_{or} = \omega \wedge \tau + \mathrm{d}\omega \otimes \xi$, temos

$$\theta^i \circ T_{or} = \theta^i(\omega \wedge \tau + \mathrm{d}\omega \otimes \xi) = \theta^i(\omega \wedge \tau).$$

Sendo $\tau = \sum_j \tau^j \otimes e_j$, temos

$$
\begin{aligned}
\theta^i \circ T_{or} &= \theta^i(\omega \wedge \sum_j \tau^j \otimes e_j) = \omega \wedge \tau^i \\
\omega \circ T_{or} &= \omega(\omega \wedge \tau + \mathrm{d}\omega \otimes \xi) = \omega(\omega \wedge \tau) + \omega(\mathrm{d}\omega \otimes \xi) = \mathrm{d}\omega.
\end{aligned}
$$

Assim, a primeira equação de estrutura para a derivada covariante da geometria sub-riemanniana é escrita

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\theta^i + \sum_j \omega^i_j \wedge \theta^j = \omega \wedge \tau^i \ , \\
&\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\omega \ .
\end{aligned}
$$

Proposição 1.11 *Sendo X um campo tangente à distribuição D, vale a relação $[\xi, X] \in D$.*

De fato,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega(\xi, X) &= \xi\omega(X) - X\omega(\xi) - \omega[\xi, X] = \xi.0 - X.1 - \omega[\xi, X] \\
\mathrm{d}\omega(\xi, X) &= i_\xi \mathrm{d}\omega(X) = 0.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\omega[\xi, X] = 0 \ .$$

Assim, $[\xi, X] \in D$.

Capítulo 2

Variação da energia

Serão consideradas variedades conexas. Todas as curvas são contínuas.

Seja (M, D, g) uma variedade sub-riemanniana de contato.

Definição 2.1 *Uma curva $c : [a, b] \to M$, suave por partes na partição $P = \{a = t_0, \ldots, t_l = b\}$ é chamada tangente a D se*

$$\forall t \in [a, b] - P, \quad \dot{c}(t) \in D_{c(t)}$$

$$\forall t \in P - \{a, b\}, \quad \dot{c}(t^+), \dot{c}(t^-) \in D_{c(t)}$$

$$\dot{c}(a^+) \in D_{c(a)}, \quad \dot{c}(b^-) \in D_{c(b)},$$

onde

$$\dot{c}(t_i^+) = \lim_{t \to t_i^+} \dot{c}(t) \qquad e \qquad \dot{c}(t_i^-) = \lim_{t \to t_i^-} \dot{c}(t_i).$$

O conjunto das curvas suaves por partes definidas em $[a, b]$ e tangentes a D será denotada por $\Omega(D)$.

Utilizaremos a notação $\dot{c} \in D$ para indicar que c é tangente a D.

Assim, $\Omega(D) = \{c : [a, b] \to M | \dot{c} \in D\}$.

Sejam $p, q \in M$. Denotaremos por $\Omega_{pq}(D)$ o subconjunto de $\Omega(D)$

$$\begin{aligned} \Omega_{pq}(D) &= \{c : [a, b] \to M | \dot{c} \in D, c(a) = p, c(b) = q\} \\ &= \{c \in \Omega(D) | c(a) = p, c(b) = q\} \end{aligned}$$

e por $\Omega_p(D)$ o subconjunto

$$\Omega_p(D) = \{c \in \Omega(D) | c(a) = p\}.$$

Em $\Omega(D)$ definimos o funcional comprimento de arco $L : \Omega(D) \to \mathbb{R}$ por

$$L(c) = \int_a^b \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle^{1/2} \mathrm{d}t,$$

onde $\langle X, Y \rangle = g(X, Y)$.

Teorema 2.1 (Chow) $\forall p, q \in M$, $\Omega_{pq}(D) \neq \emptyset$.

Demonstração: De fato, pelo teorema de Darboux (ref. Godbillon), $\forall p \in M \exists (V_p, \varphi_p)$, $\varphi_p = (x_1, \ldots, x_{2n}, z)$, $\varphi_p(p) = 0$, sistema de coordenadas onde a forma de contato ω é escrita

$$\omega = \mathrm{d}z - \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{d}x_{i+n}.$$

Tomemos $U_p^1 \subset \varphi_p(V_p)$ da forma $U_p^1 = \left[\prod_1^{2n}(-a, a)\right] \times (-a^2, a^2)$.

Seja $V_p^1 = \varphi_p^{-1}(U_p^1)$. Vamos mostrar que $\forall q \in V_p^1$ podemos construir uma curva tangente à distribuição com extremos em p e q e cuja imagem está contida em V_p^1.

Seja $\varphi_p(q) = (b_1, \ldots, b_{2n+1})$.

O segmento de reta

$$\begin{aligned} r_1 : [0,1] &\to U_p^1 \\ t &\to (b_1 t, \ldots, b_n t, b_{n+1}, \ldots, b_{2n+1}) \end{aligned}$$

tem extremos em $(b_1, \ldots, b_{2n+1})$ e $(0, \ldots, 0, b_{n+1}, \ldots, b_{2n+1})$ e é tangente à distribuição pois

$$\omega(\dot{r}_1) = (\mathrm{d}z - \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{d}x_{i+n})(b_1, \ldots, b_n, 0, \ldots, 0) = 0.$$

O segmento de reta

$$\begin{aligned} r_2 : [0,1] &\to U_p^1 \\ t &\to (0, \ldots, 0, b_{n+1} t, \ldots, b_{2n} t, b_{2n+1}) \end{aligned}$$

tem extremos em $(0,\ldots,0,b_{n+1},\ldots,b_{2n+1})$ e $(0,\ldots,0,b_{2n+1})$ e é tangente à distribuição pois

$$\omega(\dot{r}_2) = (\mathrm{d}z - \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{d}x_{i+n})(0,\ldots,0,b_{n+1},\ldots,b_{2n},0) = 0.$$

Vamos assumir o caso em que $b_{2n+1} > 0$. O segmento de reta

$$\begin{aligned} r_3 : [0,1] &\rightarrow U_p^1 \\ t &\rightarrow (0,\ldots,0,\sqrt{b_{2n+1}}t,0,\ldots,0,b_{2n+1}) = \sqrt{b_{2n+1}}te_n + b_{2n+1}e_{2n+1} \end{aligned}$$

tem extremos em $(0,\ldots,b_{2n+1})$ e $(0,\ldots,0,\sqrt{b_{2n+1}},0,\ldots,b_{2n+1})$ e é tangente à distribuição pois

$$\omega(\dot{r}_3) = \omega(0,\ldots,0,\sqrt{b_{2n+1}},0,\ldots,0) = 0.$$

O segmento de reta

$$\begin{aligned} r_4 : [0,1] &\rightarrow U_p^1 \\ t &\rightarrow (\sqrt{b_{2n+1}}t,0,\ldots,0,\sqrt{b_{2n+1}},0,\ldots,b_{2n+1}) \end{aligned}$$

tem extremos em $(0,\ldots,0,\sqrt{b_{2n+1}},0,\ldots,0,b_{2n+1})$ e $(\sqrt{b_{2n+1}},0,\ldots,0,\sqrt{b_{2n+1}},0,\ldots,b_{2n+1})$ e é tangente à distribuição pois

$$\omega(\dot{r}_4) = \omega(\sqrt{b_{2n+1}},0,\ldots,0) = 0.$$

O segmento de reta

$$\begin{aligned} r_5 : [0,1] &\rightarrow U_p^1 \\ t &\rightarrow (\sqrt{b_{2n+1}},0,\ldots,0,\sqrt{b_{2n+1}}(1-t),0,\ldots,0,b_{2n+1}(1-t)) \end{aligned}$$

tem extremos em $(\sqrt{b_{2n+1}},0,\ldots,0,\sqrt{b_{2n+1}},0,\ldots,0,b_{2n+1})$ e $(\sqrt{b_{2n+1}},0,\ldots,0)$ e é tangente à distribuição pois

$$\begin{aligned} \omega(\dot{r}_5) &= (\mathrm{d}z - \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{d}x_{i+n})(0,\ldots,0,-\sqrt{b_{2n+1}},0,\ldots,0,-b_{2n+1}) \\ &= -b_{2n+1} - (\sqrt{b_{2n+1}})(-\sqrt{b_{2n+1}}) = 0. \end{aligned}$$

O segmento de reta

$$\begin{aligned} r_6 : [0,1] &\rightarrow U_p^1 \\ t &\rightarrow (\sqrt{b_{2n+1}}(1-t), 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

tem extremos em $(\sqrt{b_{2n+1}}, 0, \ldots, 0)$ e 0 e é tangente à distribuição pois

$$\omega(\dot{r}_6) = \omega(-\sqrt{b_{2n+1}}, 0, \ldots, 0) = 0.$$

Assim, temos uma curva suave por partes tangente à distribuição obtida pela imagem inversa através de φ_p da curva suave por partes formada pelos segmentos de reta r_1 a r_6. Esta curva tem extremos em p e q e sua imagem está contida em V_p^1.

O caso $b_{2n+1} < 0$ é análogo e se $b_{2n+1} = 0$ bastará utilizarmos os segmentos de reta r_1 e r_2.

Seja $N = \{q \in M | \exists c : [a,b] \rightarrow M,\ c \in \Omega_p(D),\ c(b) = q\}$.

Seja $r \in N$. Como vimos anteriormente, existe um aberto V_r^1 para o qual cada ponto pode ser ligado a r por uma curva suave por partes tangente à distribuição. Assim, estes pontos também podem ser ligados a p, o que mostra que $V_r^1 \subset N$ e, portanto, N é aberto.

Se $r \notin N$, então nenhum ponto de V_r^1 pode pertencer a N, caso contrário, poderíamos ligar r a p por uma curva suave por partes tangente à distribuição, o que mostra que N é fechado.

Como M é conexa, temos $N = M$, o que termina a demonstração.

Utilizando o funcional comprimento de arco definimos a distância de dois pontos p e q de M por

$$d(p,q) = \inf\{L(c) | c \in \Omega_{pq}(D)\}.$$

Mostremos que d é uma distância. Para tanto, seja g_1 uma métrica que estende g de forma que $g_1(\xi, \xi) = 1$ e $\xi \perp D$.

Sendo $c \in \Omega_{pq}(D)$, temos

$$L(c) = \int_a^b g(\dot{c}, \dot{c})^{1/2} dt = \int_a^b g_1(\dot{c}, \dot{c})^{1/2} dt = L_1(c).$$

Sejam $p, q \in M$, $p \neq q$, e $\Omega_{pq} = \{c : [a, b] \to M | c(a) = p, c(b) = q\}$.

$d_1(p, q) = \inf\{L_1(c) | c \in \Omega_{pq}\}$ é a distância associada a g_1.

Como $\Omega_{pq}(D) \subset \Omega_{pq}$ e $L_1|_{\Omega_{pq}(D)} = L$, temos

$$0 < d_1(p, q) = \inf\{L_1(c) | c \in \Omega_{pq}\} \leq \inf\{L_1(c) | c \in \Omega_{pq}(D)\} = d(p, q).$$

Sejam $p, q, r \in M$. Como $\Omega_{pr}(D)$ contém o conjunto das curvas suaves por partes que têm o ponto q em sua imagem, temos

$$d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r).$$

Finalmente, $d(p, q) = d(q, p)$, já que o comprimento de arco independe da parametrização da curva.

Definição 2.2 *Uma curva $c \in \Omega_{pq}(D)$ é chamada minimizante se*

$$\forall \gamma \in \Omega_{pq}(D), \quad L(c) \leq L(\gamma).$$

Caso exista uma curva minimizante, temos $d(p, q) = L(c)$ e a curva minimizante é um extremo do funcional L.

Estamos interessados em conhecer as curvas extremais do funcional L. Isto pode ser feito com o auxílio do funcional energia definido por

$$E : \Omega_{pq}(D) \to \mathbb{R}$$
$$E(c) = \frac{1}{2} \int_a^b \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle dt$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\left(\int_a^b f.g dt \right)^2 \leq \int_a^b f^2 dt. \int_a^b g^2 dt.$$

Tomemos g a função constante igual a 1. A igualdade vale se e somente se f for constante. Aplicando ao caso $f = \|\dot{c}\|$, temos

$$L(c)^2 \leq 2E(c)(b-a)$$

e a igualdade é válida se e somente se $\|\dot{c}\|$ é constante.

Assim, se c minimiza L e tem velocidade constante, temos

$$2E(c)(b-a) = L(c)^2 \leq L(\gamma)^2 \leq 2E(\gamma)(b-a) \rightarrow E(c) \leq E(\gamma)$$

e c minimiza E.

Sejam M e N variedades e $f : N \rightarrow M$.

Definição 2.3 *Um campo ao longo de f é uma secção $\widehat{V} : N \rightarrow TM$ tal que*

$$\widehat{V}(p) \in T_{f(p)}M.$$

Seja $c : [a,b] \rightarrow M$ uma curva suave por partes na partição $P = \{a = t_0, \ldots, t_l = b\}$.

Definição 2.4 *Uma variação de c é uma função contínua*

$$\begin{aligned} \Gamma : [a,b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) &\rightarrow M \\ (t,s) &\rightarrow \Gamma(t,s) \end{aligned}$$

diferenciável em s e suave por partes em t, isto é,

$$\forall t \in [a,b], \quad \Gamma|_{\{t\}\times(-\varepsilon,\varepsilon)}$$

é diferenciável em s e

$$\forall s \in [-\varepsilon,\varepsilon], \quad \Gamma|_{[a,b]\times\{s\}}$$

é diferenciável por partes na partição P. $\Gamma|_{[a,b]\times\{0\}} = c$

Definição 2.5 *A variação infinitesimal de Γ é o campo ao longo de c dado por* $V(t) = \dfrac{\partial \Gamma}{\partial s}(t,0)$.

Notações: Seja $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, então c_s é a curva

$$
\begin{aligned}
& c_s : [a,b] \to M, \quad c_s(t) = \Gamma(t,s) \\
& T(t,s) = \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t,s), \quad T(t_i^+, s) = \lim_{t \to t_i^+} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t,s), \\
& T(t_i^-, s) = \lim_{t \to t_i^-} \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t,s), \quad V(t,s) = \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t,s).
\end{aligned}
$$

Definição 2.6 *Γ é uma variação de contato de c se e somente se*

$$\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon), \quad c_s \in \Omega(D).$$

Definição 2.7 $V(t) = \dfrac{\partial \Gamma}{\partial s}(t,0)$ *é uma variação infinitesimal de contato se e somente se Γ é uma variação de contato.*

A aplicação $\begin{array}{rcl} \tilde{c} : (-\varepsilon, \varepsilon) & \to & \Omega(D) \\ s & \to & \tilde{c}(s) = c_s \end{array}$ é uma curva em $\Omega(D)$ e nos motiva as seguintes definições.

Definição 2.8 *Um vetor tangente a $\Omega(D)$ é uma variação infinitesimal de contato.*

Definição 2.9 *O espaço tangente a $\Omega(D)$ em c é o conjunto das variações infinitesimais de contato de c.*

Denotamos este espaço por $T_c\Omega(D)$. Deste modo, $V \in T_c\Omega(D)$ se e somente se $V = \partial\Gamma/\partial s$, onde Γ é variação de contato de c.

Definição 2.10 *Γ é uma variação com extremos fixos de c se e somente se*

$$\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon), \quad \Gamma(a,s) = c(a) \qquad e \qquad \Gamma(b,s) = c(b).$$

Para variações de contato com extremos fixos, se $c(a) = p$ e $c(b) = q$, temos $\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $c_s \in \Omega_{pq}(D)$.

Definição 2.11 *$V(t) = \dfrac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, 0)$ é uma variação infinitesimal de contato com extremos fixos se e somente se Γ é uma variação de contato com extremos fixos.*

Definição 2.12 *O espaço tangente a $\Omega_{pq}(D)$ em c, denotado por $T_c\Omega_{pq}(D)$ é o conjunto das variações infinitesimais de contato com extremos fixos de c.*

Utilizando as notações acima,

$$V \in T_c\Omega_{pq}(D) \leftrightarrow V = \frac{\partial \Gamma}{\partial s}, \quad \forall s \ c_s \in \Omega_{pq}(D).$$

Se $V \in T_c\Omega_{pq}(D)$, então $V(a) = \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a, 0) = \frac{d}{ds}c_s(0) = 0$ e analogamente $V(b) = 0$.

Definição 2.13 *A diferencial de um funcional $E : \Omega(D) \to \mathbb{R}$ em c é a aplicação $\mathrm{d}E_c : T_c\Omega(D) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$dE_c(V) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}E(c_s)|_{s=0}.$$

Definição 2.14 *Uma curva $c \in \Omega(D)$ é um ponto crítico de um funcional E se e somente se $\mathrm{d}E_c = 0$.*

Seja $c \in \Omega_{pq}(D)$ minimizante e Γ uma variação de contato com extremos fixos e V a variação infinitesimal de contato a ela associada.

$\forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $E(c) \leq E(c_s)$. Logo,

$$\mathrm{d}E_c(V) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}E(c_s)|_{s=0} = 0,$$

ou seja, se c é minimizante, então $\forall V \in T_c\Omega_{pq}(D)$ $\mathrm{d}E_c(V) = 0$ e c é um ponto crítico de $E|_{\Omega_{pq}(D)}$.

Nosso objetivo agora é estudar as variações infinitesimais de contato. Para tanto faremos uso de operadores sobre o espaço das variações infinitesimais.

No que segue, consideramos curvas $c : [a, b] \to M$ de classe C^∞.

O espaço das variações infinitesimais de c é o conjunto dos campos C^∞ ao longo de c ou, de maneira equivalente, o espaço das secções C^∞ de $c^*(TM)$ que denotaremos por $C^\infty(c^*(TM))$.

Este espaço tem estrutura de módulo sobre o espaço das funções $C^\infty([a, b], \mathbb{R})$, onde a multiplicação é dada por

$$(f.V)(t) = f(t)V(t), \quad f \in C^\infty([a, b], \mathbb{R}), \ V \in C^\infty(c^*(TM)).$$

Definição 2.15 *Seja $f : N \to M$. Um campo tangente ao longo de f é um campo $\widehat{V}$ ao longo de f tal que $\widehat{V} = \mathrm{d}f(V)$, onde V é um campo em N.*

Sejam $\widehat{V}$, $\widehat{T}$ campos tangentes ao longo de f.

Definição 2.16 $[\widehat{V}, \widehat{T}] = \mathrm{d}f[V, T]$.

Proposição 2.1 *Sejam $f : N \to M$, $\widehat{V} = \mathrm{d}f(V)$ e $\widehat{T} = \mathrm{d}f(T)$ campos tangentes ao longo de f e $\omega : TM \to \mathbb{R}$ uma 1-forma sobre M. Então vale a igualdade*

$$\mathrm{d}\omega(\widehat{V}, \widehat{T}) = V\omega(\widehat{T}) - T\omega(\widehat{V}) - \omega[\widehat{V}, \widehat{T}].$$

De fato, por linearidade, basta verificar a igualdade para $\omega = g.\mathrm{d}h$, onde $g, h : M \to \mathbb{R}$.

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}h$$

$$\mathrm{d}\omega(\widehat{V}, \widehat{T}) = (\mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}h)(\widehat{V}, \widehat{T}) = \mathrm{d}g(\widehat{V})\mathrm{d}h(\widehat{T}) - \mathrm{d}g(\widehat{T})\mathrm{d}h(\widehat{V})$$

$$= \mathrm{d}g(\mathrm{d}f(V))\mathrm{d}h(\mathrm{d}f(T)) - \mathrm{d}g(\mathrm{d}f(T))\mathrm{d}h(\mathrm{d}f(V))$$

$$= (\mathrm{d}g \circ \mathrm{d}f)(V)(\mathrm{d}h \circ \mathrm{d}f)(T) - (\mathrm{d}g \circ \mathrm{d}f)(T)(\mathrm{d}h \circ \mathrm{d}f)(V)$$

$$= \mathrm{d}(g \circ f)(V)\mathrm{d}(h \circ f)(T) - \mathrm{d}(g \circ f)(T)\mathrm{d}(h \circ f)(V)$$

$$V\omega(\widehat{T}) = V(\omega(\mathrm{d}f(T))) = V((g\circ f)\mathrm{d}h(\mathrm{d}f(T))) = V((g\circ f)\mathrm{d}(h\circ f)(T))$$
$$= V(g\circ f)\mathrm{d}(h\circ f)(T) + (g\circ f)V(\mathrm{d}(h\circ f)(T))$$
$$= \mathrm{d}(g\circ f)(V)\mathrm{d}(h\circ f)(T) + (g\circ f)V(\mathrm{d}(h\circ f)(T))$$
$$T\omega(\widehat{V}) = \mathrm{d}(g\circ f)(T)\mathrm{d}(h\circ f)(V) + (g\circ f)T(\mathrm{d}(h\circ f)(V))$$

$$V\omega(\widehat{T}) - T\omega(\widehat{V}) = \mathrm{d}\omega(\widehat{V},\widehat{T}) + (g\circ f)(V(\mathrm{d}(h\circ f)(T)) - T(\mathrm{d}(h\circ f)(V)))$$
$$\omega[\widehat{V},\widehat{T}] = \omega(\mathrm{d}f[V,T]) = (g\circ f)\mathrm{d}h(\mathrm{d}f[V,T]) = (g\circ f)\mathrm{d}(h\circ f)([V,T])$$
$$= (g\circ f)[V,T](h\circ f) = (g\circ f)(V(T(h\circ f)) - T(V(h\circ f)))$$
$$= (g\circ f)(V(\mathrm{d}(h\circ f)(T)) - T(\mathrm{d}(h\circ f)(V))).$$

Logo, $V\omega(\widehat{T}) - T\omega(\widehat{V}) = \mathrm{d}\omega(\widehat{V},\widehat{T}) + \omega[\widehat{V},\widehat{T}]$, o que mostra a igualdade.

A seguir enunciamos uma condição necessária para que uma variação infinitesimal seja de contato. Esta condição nos motivará a definir um operador diferencial.

Proposição 2.2 *Seja* $V = \dfrac{\partial\Gamma}{\partial s} \in T_c\Omega(D)$ *uma variação infinitesimal de contato. Então,* $i_V\mathrm{d}\omega(\dot{c}) + \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_V\omega = 0$.

De fato, utilizando a proposição anterior, temos

$$\mathrm{d}\omega(V,T) = \frac{\partial}{\partial s}\omega(T) - \frac{\partial}{\partial t}\omega(V) - \omega[V,T]$$
$$[V,T] = \mathrm{d}\Gamma\left[\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial t}\right] = \mathrm{d}\Gamma(0) = 0$$
$$V\in T_c\Omega(D) \to \forall t\in[a,b]\ \ \forall s\in(-\varepsilon,\varepsilon)\ \ \omega(\dot{c}_s(t)) = 0$$
$$\dot{c}_s(t) = T(t,s)$$
$$\omega(T(t,s)) = 0 \to \frac{\partial}{\partial s}\omega(T(t,s)) = 0$$

Assim,

$$\mathrm{d}\omega(V,T) = -\frac{\partial}{\partial t}\omega(V).$$

Em particular, para $s = 0$, temos

$$\mathrm{d}\omega(V(t),\dot{c}(t)) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega(V(t)) = 0,$$

ou seja,

$$i_V\mathrm{d}\omega(\dot{c}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_V\omega = 0.$$

Definição 2.17 *Seja D_c o operador*

$$\begin{aligned} D_c : C^\infty(c^*(TM)) &\rightarrow C^\infty([a,b],\mathbb{R}) \\ V &\rightarrow D_c(V) = (i_V\mathrm{d}\omega)(\dot{c}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_V\omega \end{aligned}$$

Em termos deste operador podemos enunciar a proposição anterior como

$$V \in T_c\Omega(D) \rightarrow V \in \ker D_c\,.$$

Proposição 2.3 *O operador D_c é um operador diferencial de primeira ordem.*

De fato, D_c é $\mathbb{R}$-linear e

$$\begin{aligned} D_c(fV) &= (i_{fV}\mathrm{d}\omega)(\dot{c}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_{fV}\omega = \mathrm{d}\omega(fV,\dot{c}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega(fV) \\ &= f\mathrm{d}\omega(V,\dot{c}) + f\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega(V) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\omega(V) = f\left(\mathrm{d}\omega(V,\dot{c}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega(V)\right) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\omega(V) \\ &= fD_c(V) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\omega(V). \end{aligned}$$

Para escrever este operador em coordenadas tomemos uma vizinhança tubular de c e um referencial ortonormal $\{e_i\}$, $1 \leq i \leq 2n$, de $c^*(D)$. Consideremos em M a métrica tal que $\|\xi\| = 1$ e $\xi \perp D$. Assim, $\{e_i, \xi\}$ é um referencial ortonormal ao longo de c. Sua base dual é $\{\theta^i, \omega\}$.

Sendo $V \in C^\infty(c^*(TM))$, temos $V = \sum_i v^i e_i + u\xi$, onde $v^i, u \in C^\infty([a,b], \mathbb{R})$. Escrevemos $\dot{c} \in D$ como $\dot{c} = \sum_i a^i e_i$.

$$
\begin{aligned}
&\omega(V) = u \\
&\mathrm{d}\omega = \sum_{i<k} h_{ij}\theta^i \wedge \theta^j \\
&\mathrm{d}\omega(V, \dot{c}) = \sum_{i<j} h_{ij}\theta^i \wedge \theta^j(V, \dot{c}) = \sum_{i<j} h_{ij}(\theta^i(V)\theta^j(\dot{c}) - \theta^j(V)\theta^i(\dot{c})) \\
&= \sum_{i<j} h_{ij}(v^i a^j - v^j a^i) = \sum_{i<j} h_{ij}a^j v^i - \sum_{i<j} h_{ij}a^i v^j \\
&= -\sum_{i<j} h_{ji}a^j v^i - \sum_{i<j} h_{ij}a^i v^j = -\sum_{i>j} h_{ij}a^i v^j - \sum_{i<j} h_{ij}a^i v^j \\
&= -\sum_{i,j} h_{ij}a^i v^j\ .
\end{aligned}
$$

Sendo $A^j = \sum_i h_{ij}a^i$, temos $\mathrm{d}\omega(V, \dot{c}) = -\sum_j A^j v^j$ e, portanto,

$$
D_c(V) = \mathrm{d}\omega(V, \dot{c}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\omega(V) = -\sum_j A^j v^j + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},
$$

que é a expressão do operador D_c em coordenadas.

Sendo V uma variação infinitesimal de contato temos $V \in \ker(D_c)$, ou seja,

$$
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{2n} A^j v^j
$$

e portanto

$$
u(t) = \sum_{j=1}^{2n} \int_a^t A^j(x) v^j(x)\mathrm{d}x + u(a).
$$

Para V uma variação infinitesimal de contato com extremos fixos a condição $V(a) = V(b) = 0$ deve ser satisfeita. Como $V(a) = 0$, temos a condição inicial $u(a) = 0$ para a equação diferencial acima e assim o valor de $u(b)$ está determinado. Portanto, para V ser uma variação infinitesimal de contato de extremos fixos, $u(b) = 0$ é uma condição que V deve satisfazer. Este fato motiva a definição de um operador.

Um campo V ao longo de c é um elemento de $C^\infty(c^*(D)) \oplus [\xi]$ e assim podemos escrevê-lo como $V = V^H + u\xi$, onde V^H é um campo ao longo de c com $V^H(t) \in D_{c(t)}$ e $u \in C^\infty([a,b], \mathbb{R})$.

Sendo V uma variação infinitesimal de contato escrevemos a condição $V \in \ker(D_c)$ como

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = A(t)V^H(t).$$

Para termos extremos fixos é necessário que $u(a) = 0$ e $V^H(a) = V^H(b) = 0$.

Seja $C_0^\infty(c^*(D))$ o conjunto dos campos de vetores ao longo de c tangentes a D que se anulam em a e b.

Definição 2.18 *Seja H_c o operador*

$$\begin{aligned} H_c : C_0^\infty(c^*(D)) &\rightarrow \mathbb{R} \\ V^H &\rightarrow H_c(V^H) = \int_a^b A(t)V^H(t)\mathrm{d}t\ . \end{aligned}$$

Notemos que $H_c(V^H) = u(b)$, onde $u(b)$ é determinado pela equação diferencial $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = A(t)V^H(t)$ com condição inicial $u(a) = 0$.

Proposição 2.4 *O operador H_c é $\mathbb{R}$-linear.*

De fato. Seja u_1 solução da equação diferencial $\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = A(t)V_1^H(t)$ com condição inicial $u_1(a) = 0$.

Seja u_2 solução da equação diferencial $\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = A(t)V_2^H(t)$ com condição inicial $u_2(a) = 0$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda u_1 + u_2) &= \lambda\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = \lambda A(t)V_1^H(t) + A(t)V_2^H(t) \\ &= A(t)(\lambda V_1^H(t) + V_2^H(t)) \end{aligned}$$

e portanto $\lambda u_1 + u_2$ é solução da equação diferencial $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = A(t)(\lambda V_1^H(t) + V_2^H(t))$ com condição inicial $u(0) = (\lambda u_1 + u_2)(0) = \lambda u_1(0) + u_2(0) = 0$. Assim,

$$H_c(\lambda V_1^H + V_2^H) = u(b) = \lambda u_1(b) + u_2(b) = \lambda H_c(V_1^H) + H_c(V_2^H).$$

Definição 2.19 *Dizemos que uma curva c é regular se $H_c : C_0^\infty(c^*(D)) \rightarrow \mathbb{R}$ é sobrejetor.*

Proposição 2.5 *Seja* $c : [a, b] \to M$ *uma curva não constante,* $c \in \Omega(D)$*, onde* D *é uma distribuição de contato. Então* c *é regular.*

Basta mostrar que existe um campo V^H para o qual $H_c(V^H) \neq 0$, isto é, que a equação diferencial $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = A(t)V^H(t)$ com condição inicial $u(a) = 0$ admite solução com $u(b) \neq 0$.

Vamos construir tal campo.

Existe $t_0 \in (a, b)$ tal que $\dot{c}(t_0) \neq 0$, pois c não é constante.

$\mathrm{d}\omega$ é não degenerada, assim

$$
\begin{aligned}
& i_V \mathrm{d}\omega = 0 \to V = 0 \\
& \mathrm{d}\omega = \sum_{i<j} h_{ij}\theta^i \wedge \theta^j = \sum_{i,j} h_{ij}\theta^i \otimes \theta^j \\
& i_{\dot{c}}\mathrm{d}\omega = \sum_{i,j} h_{ij}\theta^i(\dot{c})\theta^j = \sum_j A^j\theta^j \neq 0, \text{ pois } \dot{c} \neq 0 \text{ já que } \dot{c}(t_0) \neq 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\exists k\ A^k \neq 0$.

Seja $\overline{V}^H = A^k e_k$. Calculemos $H_c(\overline{V}^H)$.

$$
u(a) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \sum_j A^j v^j = (A^k)^2
$$

$$
H_c(\overline{V}^H) = u(b) = u(a) + \int_a^b (A^k(t))^2 \mathrm{d}t > 0.
$$

Decorre, imediatamente, a existência de V^H.

Proposição 2.6 $c \in \Omega_{pq}(D)$, $p \neq q \to c$ *é regular.*

Definição 2.20 $\ker_0(D_c)$ *é o conjunto das variações infinitesimais* V *tais que* $D_c(V) = 0$ *e* $V(a) = V(b) = 0$.

Lema 2.1 *Dada uma vizinhança tubular de* c *e* $\{e_i\}$, $1 \leq i \leq 2n+1$, *um referencial ortonormal ao longo de* c *de forma que* $c(x_1) = (x_1, 0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ *e* $\dot{c}(x_1) = e_1 = \partial/\partial x_1$, *existe um difeomorfismo* g *tal que* $g \circ c(x_1) = (x_1, 0)$ *e* $\mathrm{d}g(e_i) = \partial/\partial x_i$, $1 \leq i \leq 2n+1$.

Seja

$$
\begin{aligned}
e_i(x_1) &= \sum_{j=1}^{2n+1} a_{ij}(x_1)\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad 2 \leq i \leq 2n+1, \\
e_1(x_1) &= \frac{\partial}{\partial x_1}.
\end{aligned}
$$

Seja

$$f(x_1,\dots,x_{2n+1}) = \sum_{i=2}^{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1} a_{ij}(x_1)x_i\frac{\partial}{\partial x_j} + x_1\frac{\partial}{\partial x_1}.$$

Para $2 \le i \le 2n+1$,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)(x_1,0) &= \sum_{j=1}^{2n+1} a_{ij}(x_1)\frac{\partial}{\partial x_j} = e_i, \\ \mathrm{d}f\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)(x_1,0) &= \sum_{i=2}^{2n+1}\sum_{j=1}^{2n+1}\frac{\mathrm{d}a_{ij}}{\mathrm{d}x_1}.0.\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

Basta tomar $g = f^{-1}$.

Proposição 2.7 *Sejam $p, q \in M$, $p \neq q$, $c \in \Omega_{pq}(D)$. Então valem as implicações*

$$V \in \ker(D_c),\ V(a) \in D_{c(a)},\ V(b) \in D_{c(b)} \to V \in T_c\Omega(D)$$

$$V \in \ker_0(D_c) \to V \in T_c\Omega_{pq}(D).$$

Vamos construir uma variação de contato cuja variação infinitesimal é V.

Tomemos uma vizinhança tubular de c difeomorfa ao espaço euclidiano onde $M = \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ de forma que a curva c é dada por $c(t) = (t, 0)$, $t \in [a, b]$ e $c^*(D) = [a, b] \times \mathbb{R}^{2n}$ e $\omega|_c = \mathrm{d}z$, onde $x_1, \dots, x_{2n}, z$ são as coordenadas de $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$

$$V = V^H + u\xi = V^H + u\frac{\partial}{\partial z}$$

$$V^H(a) = V(a),\ V^H(b) = V(b),\ u(a) = u(b) = 0.$$

Como c é regular, podemos escolher $W^H \in C_0^\infty(c^*(D))$ tal que $H_c(W^H) \neq 0$.

Seja $W \in \ker(D_c)$, $W = W^H + w\partial/\partial z$. Seja Γ dada por:

$$\Gamma(t, s, \mu) = c(t) + sV^H(t) + \mu W^H(t).$$

Fixando s e μ temos a curva em $\mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$\begin{aligned} \gamma_{(s,\mu)}(t) &= \Gamma(t, s, \mu) \\ \gamma_{(s,\mu)}(a) &= \Gamma(a, s, \mu) = c(a) + sV^H(a) + \mu W^H(a) = c(a) + sV^H(a) \\ \gamma_{(s,\mu)}(b) &= \Gamma(b, s, \mu) = c(b) + sV^H(b) + \mu W^H(b) = c(b) + sV^H(b) \end{aligned}$$

Seja $c_{(s,\mu)} : [a,b] \to \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}$ o levantamento de $\gamma_{(s,\mu)}$ onde

$$c_{(s,\mu)}(a) = c(a) + sV^H(a) \qquad \text{e} \qquad \omega(\dot{c}_{(s,\mu)}(t)) = 0.$$

Coloquemos $\mathbf{C}(t,s,\mu) = c_{(s,\mu)}(t)$. $\mathbf{C}(t,s,\mu)$ é uma variação de c, pois $\mathbf{C}(t,0,0) = c_{(0,0)}(t)$. $c_{(0,0)}(t)$ é o levantamento de $\gamma_{(0,0)}(t)$, $\gamma_{(0,0)}(t) = \Gamma(t,0,0) = c(t)$. Assim, $\omega(\dot{\gamma}_{(0,0)}(t)) = \omega(\dot{c}(t)) = 0$ e $\gamma_{(0,0)}(a) = c(a)$ e portanto o levantamento de $\gamma_{(0,0)}(t)$ é a própria $\gamma_{(0,0)}(t)$, ou seja, $c_{(0,0)}(t) = \gamma_{(0,0)}(t)$. Assim,

$$\mathbf{C}(t,0,0) = c_{(0,0)}(t) = \gamma_{(0,0)}(t) = c(t).$$

Podemos escrever $c_{(s,\mu)}$ na forma $(\gamma_{(s,\mu)}, z)$ e ω na forma $\omega = \mathrm{d}z - \sum_i a_i \mathrm{d}x_i$, onde a_i, $1 \le i \le 2n$, são funções C^∞ de $x_1, \ldots, x_{2n}, z$ e $a_i(x_1, 0) = 0$.

A condição $c_{(s,\mu)}(a) = c(a) + sV^H(a)$ é então expressa por $z(a) = 0$ e $\omega(\dot{c}_{(s,\mu)}) = 0$ por

$$\omega(\dot{\gamma}_{(s,\mu)}, \dot{z}) = 0,$$

ou seja,

$$\dot{z} = \sum a_i \mathrm{d}x_i(\dot{\gamma}_{(s,\mu)}).$$

Assim, existem ε_1 e ε_2 positivos para os quais a equação diferencial acima com condição inicial $z(a) = 0$ tem solução suave para $s, \mu \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \times (-\varepsilon_2, \varepsilon_2)$. Isto mostra a existência do levantamento $c_{(s,\mu)}$ (referência A.N. Tikonov, cap.II, §5).

Podemos escrever $\mathbf{C}(t,s,\mu)$ na forma

$$\mathbf{C}(t,s,\mu) = (\Gamma(t,s,\mu), \alpha(t,s,\mu)).$$

Por construção, $\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial s}(t,0,0)$ é uma variação infinitesimal de c que pertence a $\ker(D_c)$.

Como $\mathbf{C}(a,s,\mu) = c_{(s,\mu)}(a) = c(a) + sV^H(a) = c(a) + sV(a)$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial s}(a,0,0) &= V^H(a) = V(a) \in \mathbb{R}^{2n} \to \frac{\partial \alpha}{\partial s}(a,0,0) = 0 \\
\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial s}(t,0,0) &= \frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t,0,0) + \frac{\partial \alpha}{\partial s}(t,0,0)\frac{\partial}{\partial z} = V^H(t) + \frac{\partial \alpha}{\partial s}(t,0,0)\frac{\partial}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Assim, $\frac{\partial\alpha}{\partial s}(t,0,0)$ é solução da equação diferencial $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = A(t)V^H(t)$ com condição inicial $u(a)=0$. Pela unicidade da solução temos

$$\frac{\partial\alpha}{\partial s}(t,0,0) = u(t).$$

Analogamente, temos

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}(t,0,0) = w(t).$$

Seja $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\pi(s,\mu) = \alpha(b,s,\mu)$. Como $\alpha(t,0,0) = \mathrm{C}(t,0,0) - \Gamma(t,0,0) = c(t) - c(t) = 0$, temos

$$\begin{aligned}
\pi(0,0) &= \alpha(b,0,0) = 0\\
\frac{\partial\pi}{\partial s}(0,0) &= \frac{\partial\alpha}{\partial s}(b,0,0) = u(b) = 0\\
\frac{\partial\pi}{\partial\mu}(0,0) &= \frac{\partial\alpha}{\partial\mu}(b,0,0) = w(b) \neq 0.
\end{aligned}$$

Pelo teorema da função implícita, a relação $\pi(s,\mu)=0$ determina μ como função de s numa vizinhança de 0.

Temos então $\mu=\mu(s)$ com $\mu(0)=0$ e $\pi(s,\mu(s))=0$,

$$\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\pi(s,\mu(s)) = \frac{\partial\pi}{\partial s}(s,\mu(s)) + \frac{\partial\pi}{\partial\mu}(s,\mu(s))\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}s}(s) = 0,\\
\frac{\partial\pi}{\partial s}(0,0) + \frac{\partial\pi}{\partial\mu}(0,0)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}s}(0) = 0 \to u(b) + w(b)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}s}(0) = 0.
\end{gathered}$$

$u(b)=0$ e $w(b)\neq 0$, logo $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}s}(0)=0$.

Seja

$$\begin{aligned}
\Gamma_1(t,s) &= \mathrm{C}(t,s,\mu(s)),\\
\Gamma_1(t,0) &= \mathrm{C}(t,0,\mu(0)) = \mathrm{C}(t,0,0) = c(t).
\end{aligned}$$

Por construção, $\Gamma_1(t,s)$ é uma variação de contato de $c(t)$,

$$\Gamma_1(a,s) = \mathrm{C}(a,s,\mu(s)) = c_{(s,\mu(s))}(a) = c(a) + sV^H(a) = c(a) + sV(a),$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1(b,s) &= \mathrm{C}(b,s,\mu(s)) = \Gamma(b,s,\mu(s)) + \alpha(b,s,\mu(s))\frac{\partial}{\partial z} \\
&= c(b) + sV^H(b) + \mu(s)W^H(b) + \alpha(b,s,\mu(s))\frac{\partial}{\partial z} \\
&= c(b) + sV(b) + \alpha(b,s,\mu(s))\frac{\partial}{\partial z} = c(b) + sV(b) + \pi(s,\mu(s))\frac{\partial}{\partial z} \\
&= c(b) + sV(b).
\end{aligned}
$$

Se $V(a) = V(b) = 0$, então $\Gamma_1(a,s) = c(a)$ e $\Gamma_1(b,s) = c(b)$ e Γ_1 será uma variação de contato de c com extremos fixos. Em geral,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\Gamma_1}{\partial s}(a,0) &= \frac{\partial}{\partial s}(c(a) + sV(a))\Big|_{s=0} = V(a), \\
\frac{\partial\Gamma_1}{\partial s}(b,0) &= \frac{\partial}{\partial s}(c(b) + sV(b))\Big|_{s=0} = V(b), \\
\frac{\partial\Gamma_1}{\partial s}(t,0) &= \frac{\partial\mathrm{C}}{\partial s}(t,0,0) + \frac{\partial\mathrm{C}}{\partial\mu}(t,0,0)\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}s}(0) = \frac{\partial\mathrm{C}}{\partial s}(t,0,0) \\
&= V^H(t) + \frac{\partial\alpha}{\partial s}(t,0,0)\frac{\partial}{\partial z} = V^H(t) + u(t)\frac{\partial}{\partial z} = V(t).
\end{aligned}
$$

Assim, a variação infinitesimal associada a Γ_1, variação de contato de c é $V(t)$, o que termina a demonstração.

Das proposições anteriores podemos caracterizar as variações infinitesimais de contato com extremos fixos no que segue.

Proposição 2.8 *Seja $c \in \Omega_{pq}(D)$, $p \neq q$. Então*

$$V \in T_c\Omega_{pq}(D) \leftrightarrow V \in \ker_0(D_c).$$

Lema 2.2 *A aplicação* $\begin{aligned} I : F &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow \textstyle\int_a^b A(t)f(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$ *onde $F = \{f \in C^\infty([a,b],\mathbb{R}) | f(a) = K_1,\ f(b) = K_2\}$, $A \in C([a,b],\mathbb{R})$, $A \neq 0$, é sobrejetora.*

Seja $\ell : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ afim, $\ell(a) = K_1$ e $\ell(b) = K_2$.

Seja $h = f - \ell$, $H = \{h \in C^\infty([a,b],\mathbb{R}) | h(a) = h(b) = 0\}$ e I_1 o funcional linear definido por

$$\begin{aligned} I_1 : H &\to \mathbb{R} \\ h &\to \int_a^b A(t)h(t)\mathrm{d}t\,. \end{aligned}$$

Como

$$I(f) = \int_a^b Af\mathrm{d}t = \int_a^b A(\ell + h)\mathrm{d}t = \int_a^b A\ell\mathrm{d}t + I_1(h),$$

basta mostrar que I_1 é sobrejetor.

$A \neq 0$. Assim, $\exists J = [a_1, b_1] \subset [a,b]\ \forall x\ \forall y\ x, y \in J\ A(x)A(y) > 0$. Podemos assumir $\forall x \in J$, $A(x) > 0$.

Seja $\tau \in C^\infty([a,b],\mathbb{R})$ tal que

$$\begin{aligned} &\forall x \in [a,b],\ \tau(x) \geq 0, \\ &\forall x \in [a,b] - J,\ \tau(x) = 0, \\ &\tau(a_1) = \tau(b_1) = 0, \\ &\forall x \in \left[\frac{3a_1 + b_1}{4}, \frac{a_1 + 3b_1}{4}\right],\quad \tau(x) = 1. \end{aligned}$$

Seja $m = \min\{A(x) | x \in J\}$,

$$\begin{aligned} I_1(\tau) &= \int_a^b A\tau\mathrm{d}t = \int_{a_1}^{b_1} A\tau\mathrm{d}t = \int_{a_1}^{\frac{3a_1+b_1}{4}} A\tau\mathrm{d}t + \int_{\frac{3a_1+b_1}{4}}^{\frac{a_1+3b_1}{4}} A\tau\mathrm{d}t + \int_{\frac{a_1+3b_1}{4}}^{b_1} A\tau\mathrm{d}t \\ &\geq \int_{\frac{3a_1+b_1}{4}}^{\frac{a_1+3b_1}{4}} A\tau\mathrm{d}t \geq m\frac{(b_1 - a_1)}{2} > 0. \end{aligned}$$

Como $I_1(\tau) > 0$, I_1 é sobrejetor, o que demonstra o lema.

Proposição 2.9 *Seja $c \in \Omega_{pq}(D)$, $p \neq q$, e $V_1 \in D_p$, $V_2 \in D_q$. Então existe uma variação infinitesimal de contato $V \in T_c\Omega(D)$ tal que $V(a) = V_1$ e $V(b) = V_2$.*

Pela Proposição 2.7 basta mostrar que existe uma variação infinitesimal V tal que $V(a) = V_1$, $V(b) = V_2$ e $V \in \ker(D_c)$.

Utilizando a expressão do operador D_c em coordenadas a condição $V \in \ker D_c$ é dada por

$$u(t) = \sum_{j=1}^{2n} \int_a^t A^j(x)v^j(x)\mathrm{d}x + u(a)$$

e temos as condições $u(a) = u(b) = 0$ para a variação infinitesimal V.

Assim, as condições sobre V são dadas por

$$\sum_{j=1}^{2n} \int_a^b A^j(t)v^j(t)\mathrm{d}t = 0.$$

Como c é regular existe k, $A^k \neq 0$.

Escrevamos a igualdade anterior como

$$\int_a^b A^k(t)v^k(t)\mathrm{d}t = \sum_{j\neq k} \int_a^b A^j(t)v^j(t)\mathrm{d}t.$$

Escolhamos arbitrariamente funções w^j satisfazendo $w^j(a) = v_1^j$, $w^j(b) = v_2^j$, para $1 \leq j \leq 2n$, $j \neq k$. Seja

$$m = \sum_{j\neq k} \int_a^b A^j(t)w^j(t)\mathrm{d}t \qquad \text{e} \qquad F = \{f \in C^\infty([a,b], \mathrm{I\!R}) | f(a) = v_1^k, f(b) = v_2^k\}.$$

Seja I a aplicação $\begin{array}{rcl} I : F & \longrightarrow & \mathrm{I\!R} \\ f & \longrightarrow & \int_a^b A^k(t)f(t)\mathrm{d}t \end{array}$

Como I é sobrejetora existe $w^k \in F$, $I(w^k) = m$. Assim, a variação infinitesimal

$$V(t) = \sum_{j=1}^{2n} w^j(t)e_j(t) + u(t)\xi(t),$$

onde $u(t) = \sum_{j=1}^{2n} \int_a^t A^j(x)w^j(x)\mathrm{d}x$ satisfaz $V(a) = V_1$, $V(b) = V_2$ e $V \in \ker(D_c)$, o que termina a demonstração.

Nosso objetivo agora é estudar o funcional energia de modo a determinar as suas curvas extremais as quais serão chamadas de geodésicas.

Teorema 2.2 (Primeira Variação da Energia) *Seja $c \in \Omega_{pq}(D)$, $p \neq q$, suave por partes na partição $P = \{a = t_0, \dots, t_l = b\}$ e Γ uma variação de contato de c cuja variação infinitesimal é V. Então, $\mathrm{d}E_c : T_c\Omega(D) \to \mathbb{R}$ é dada por*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E_c(V) &= \langle V(b), \dot{c}(b)\rangle - \langle V(a), \dot{c}(a)\rangle - \sum_{i=1}^{l-1} \langle V(t_i), \dot{c}(t_i^+) - \dot{c}(t_i^-)\rangle \\ &\quad - \int_a^b \langle \nabla_{\dot{c}}\dot{c} - \langle \tau(\dot{c}), \dot{c}\rangle \xi, V\rangle \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

onde $\dot{c}(a) = \dot{c}(t_0^+)$ e $\dot{c}(b) = c(t_l^-)$.

De fato,

$$E(c) = \frac{1}{2}\int_a^b g(\dot{c}, \dot{c})\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_a^b \langle \dot{c}, \dot{c}\rangle \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}E_c(V) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}E(c_s)\Big|_{s=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{2}\int_a^b \langle \dot{c}_s, \dot{c}_s\rangle \mathrm{d}t\right)\Big|_{s=0}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{1}{2}\int_a^b \langle T, T\rangle \mathrm{d}t\right)\Big|_{s=0} = \frac{1}{2}\int_a^b V\langle T, T\rangle \mathrm{d}t\Big|_{s=0}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{l-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} V\langle T, T\rangle \mathrm{d}t\Big|_{s=0}$$

$$V\langle T, T\rangle = 2\langle \nabla_V T, T\rangle$$

$$\nabla_V T - \nabla_T V - [V, T] = T_{or}(V, T), \quad [V, T] = 0$$

$$\nabla_V T = T_{or}(V, T) + \nabla_T V$$

$$V\langle T, T\rangle = 2\langle \nabla_T V + T_{or}(V, T), T\rangle = 2(\langle \nabla_T V, T\rangle + \langle T_{or}(V, T), T\rangle)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V, T\rangle = T\langle V, T\rangle = \langle \nabla_T V, T\rangle + \langle V, \nabla_T T\rangle$$

$$V\langle T, T\rangle = 2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V, T\rangle - \langle V, \nabla_T T\rangle + \langle T_{or}(V, T), T\rangle\right)$$

$$\mathrm{d}E_c(V) = \sum_{i=0}^{l-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle V, T\rangle - \langle V, \nabla_T T\rangle + \langle T_{or}(V, T), T\rangle \mathrm{d}t\Big|_{s=0}$$

$$= \sum_{i=1}^{l-1}\langle V, T\rangle\Big|_{t_i}^{t_{i+1}}\Big|_{s=0} - \sum_{i=0}^{l-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle V, \nabla_T T\rangle - \langle T_{or}(V, T), T\rangle \mathrm{d}t\Big|_{s=0}$$

$$= \sum_{i=0}^{l-1}\langle V, \dot{c}\rangle\Big|_{t_i}^{t_{i+1}} - \int_a^b \langle V, \nabla_{\dot{c}}\dot{c}\rangle - \langle T_{or}(V, \dot{c}), \dot{c}\rangle \mathrm{d}t$$

$$\sum_{i=0}^{l-1}\langle V,\dot c\rangle\Big|_{t_i}^{t_{i+1}} = \langle V(t_l),\dot c(t_l^-)\rangle - \langle V(t_0),\dot c(t_0^+)\rangle - \sum_{i=1}^{l-1}\langle V(t_i),\dot c(t_i^+) - \dot c(t_i^-)\rangle$$

$$= \langle V(b),\dot c(b)\rangle - \langle V(a),\dot c(a)\rangle - \sum_{i=1}^{l-1}\langle V(t_i),\dot c(t_i^+) - \dot c(t_i^-)\rangle$$

$$T_{or}(V,\dot c) = (\omega\wedge\tau + \mathrm{d}\omega\otimes\xi)(V,\dot c) = \omega(V)\tau(\dot c) - \omega(\dot c)\tau(V) + \mathrm{d}\omega(V,\dot c)\xi$$

$$\langle T_{or}(V,\dot c),\dot c\rangle = \omega(V)\langle\tau(\dot c),\dot c\rangle - \omega(\dot c)\langle\tau(V),\dot c\rangle + \mathrm{d}\omega(V,\dot c)\langle\xi,\dot c\rangle$$

$$= \omega(V)\langle\tau(\dot c),\dot c\rangle - \omega(\dot c)\langle\tau(V),\dot c\rangle + \omega(\dot c)\mathrm{d}\omega(V,\dot c)$$

$$= \langle\tau(\dot c),\dot c\rangle\langle\xi,V\rangle - \omega(\dot c)(\langle\tau(V),\dot c\rangle - \mathrm{d}\omega(V,\dot c)).$$

Como $c\in\Omega(D)$, $\omega(\dot c)=0$, portanto

$$\langle T_{or}(V,\dot c),\dot c\rangle = \langle\langle\tau(c),\dot c\rangle\xi,V\rangle.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E_c(V) &= \langle V(b),\dot c(b)\rangle - \langle V(a),\dot c(a)\rangle - \sum_{i=1}^{l-1}\langle V(t_i),\dot c(t_i^+) - \dot c(t_i^-)\rangle \\ &\quad - \int_a^b\langle\nabla_{\dot c}\dot c - \langle\tau(\dot c),\dot c\rangle\xi, V\rangle\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Proposição 2.10 *Seja $c\in\Omega_{pq}(D)$, $p\neq q$, suave por partes na partição $\{a=t_0,\dots,t_l=b\}$ e V uma variação infinitesimal de contato de extremos fixos. Então*

$$\mathrm{d}E_c : T_c\Omega_{pq}(D)\to\mathbb{R}$$

é dada por

$$\mathrm{d}E_c(V) = -\sum_{i=1}^{l-1}\langle V(t_i),\dot c(t_i^+) - \dot c(t_i^-)\rangle - \int_a^b\langle\nabla_{\dot c}\dot c - \langle\tau(\dot c),\dot c\rangle\xi, V\rangle\mathrm{d}t.$$

De fato, basta fazer $V(a)=V(b)=0$ no Teorema 2.2.

A seguir vamos demonstrar um teorema que caracteriza as curvas suaves que são extremos do funcional energia. Para tanto faremos uso do seguinte lema.

Lema 2.3 *Sejam* $A : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *e* $\Lambda : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *suaves tal que a aplicação*

$$\begin{aligned} H : C_0^\infty([a,b], \mathbb{R}^n) &\to \mathbb{R} \\ H(w) &= \int_a^b A(t)w(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

é sobrejetora. Então

$$\left(H(w) = 0 \to \int_a^b \Lambda(t)w(t)\mathrm{d}t = 0 \right) \to \exists k \in \mathbb{R}\ \Lambda = kA.$$

De fato, como H é sobrejetora, temos $A \neq 0$. Portanto $\int_a^b \|A(t)\|^2 \mathrm{d}t > 0$.

Seja $k \in \mathbb{R}$ solução da equação

$$\int_a^b A(t)\Lambda(t)\mathrm{d}t - k \int_a^b \|A(t)\|^2 \mathrm{d}t = 0.$$

Assim,

$$\int_a^b A(t)(\Lambda(t) - kA(t))\mathrm{d}t = 0.$$

Seja $w(t) = \Lambda(t) - kA(t)$.

A igualdade acima é então escrita como $H(w) = 0$.

Calculemos agora $\int_a^b \|\Lambda(t) - kA(t)\|^2 \mathrm{d}t$.

$$\begin{aligned} &\int_a^b \|\Lambda(t) - kA(t)\|^2 \mathrm{d}t = \int_a^b (\Lambda(t) - kA(t))w(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \Lambda(t)w(t)\mathrm{d}t - k\int_a^b A(t)w(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \Lambda(t)w(t)\mathrm{d}t - kH(w). \end{aligned}$$

$H(w) = 0$ por construção e por hipótese $H(w) = 0 \to \int_a^b \Lambda(t)w(t)\mathrm{d}t = 0$. Assim,

$$\int_a^b \|\Lambda(t) - kA(t)\|^2 \mathrm{d}t = 0.$$

Logo, $\Lambda = kA$.

Para o teorema que segue, lembramos que h é definido por $\mathrm{d}w(X,Y) = \langle h(X), Y\rangle$.

Teorema 2.3 *Uma curva suave* $c \in \Omega_{pq}(D)$, $p \neq q$, *é extremo de* E *se e somente se*

$$\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = -\left(\int_a^t \langle \tau(\dot{c}), \dot{c}\rangle \mathrm{d}x - k \right) h(\dot{c}).$$

Demonstração: Se $\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = -\left(\int_a^t \langle\tau(\dot{c}), \dot{c}\rangle \mathrm{d}x - k\right) h(\dot{c})$ e $\omega(\dot{c}) = 0$, então

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E_c(V) &= \int_a^b \langle\langle\tau(\dot{c}), \dot{c}\rangle\xi - \nabla_{\dot{c}}\dot{c}, V\rangle \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \langle\langle\tau(\dot{c}), \dot{c}\rangle\xi + \left(\int_a^t \langle\tau(\dot{c}), \dot{c}\rangle \mathrm{d}x - k\right) h(\dot{c}), V\rangle \mathrm{d}t\ . \end{aligned}$$

$h(\dot{c}) = \sum_k A^k e_k = A$, $V = \sum_k v^k e_k + u\xi$. Assim,

$$\langle h(\dot{c}), V\rangle = \sum_k A^k v^k.$$

O integrando da expressão de $\mathrm{d}E_c(V)$ fica

$$u\langle\tau(\dot{c}), \dot{c}\rangle + \left(\int_a^t \langle\tau(\dot{c}), \dot{c}\rangle \mathrm{d}x - k\right) \sum_k A^k v^k\ .$$

Se $V \in \ker_0(D_c)$, então $u(t) = \int_a^t \sum_k A^k v^k \mathrm{d}x$ e $u(b) = u(a) = 0$.

Chamemos

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_a^t \langle\tau(\dot{c}), \dot{c}\rangle \mathrm{d}x - k\ , \\ f'(t) &= \langle\tau(\dot{c}), \dot{c}\rangle. \end{aligned}$$

Assim, o integrando será escrito $u(t)f'(t) + f(t)u'(t)$ e

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E_c(V) &= \int_a^b u(t)f'(t) + f(t)u'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u.f)\mathrm{d}t \\ &= uf|_a^b = u(b)f(b) - u(a)f(a) = 0.f(b) - 0.f(a) = 0 \end{aligned}$$

e portanto c é extremo de E.

Se c é extremo de E, temos

$$\forall V \in T_c\Omega_{pq}(D) = \ker_0(D_c),\quad \mathrm{d}E_c(V) = \int_a^b \langle -\nabla_{\dot{c}}\dot{c} + \langle\tau(\dot{c}), \dot{c}\rangle\xi, V\rangle \mathrm{d}t = 0$$
$$\mathrm{d}E_c(V) = \int_a^b \langle -\nabla_{\dot{c}}\dot{c}, V^H\rangle + u\langle\tau(\dot{c}), \dot{c}\rangle \mathrm{d}t.$$

Coloquemos $f'(t) = \langle\tau(\dot{c}), \dot{c}\rangle$, $f(t) = \int_a^t \langle\tau(\dot{c}), \dot{c}\rangle \mathrm{d}x + k_1$,

$$\int_a^b u\langle\tau(\dot{c}), \dot{c}\rangle \mathrm{d}t = uf|_a^b - \int_a^b f\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = uf|_a^b - \int_a^b fAV^H \mathrm{d}t\ .$$

Logo,

$$\mathrm{d}E_c(V) = \int_a^b -\langle \nabla_{\dot c}\dot c + fA, V^H\rangle \mathrm{d}t + uf|_a^b\,,$$

$$u(a) = 0 \qquad \text{e} \qquad u(b) = \int_a^b AV^H \mathrm{d}t = H_c(V^H)\,.$$

Assim,

$$\forall V \in T_c\Omega_{pq}(D),\ \ \mathrm{d}E_c(V) = \int_a^b -\langle \nabla_{\dot c}\dot c + fA, V^H\rangle \mathrm{d}t + f(b)H_c(V^H) = 0.$$

Como c é regular, H_c é sobrejetor.

Pela igualdade acima, se $H_c(V^H) = 0$, então $\int_a^b -\langle \nabla_{\dot c}\dot c + fA, V^H\rangle \mathrm{d}t = 0$.

Se $L \in C_0^\infty([a,b], \mathbb{R}^{2n})$, $H_c(L) = 0$, então $W = L + l\xi$, onde $l = \int_a^t AL\mathrm{d}t$ pertence a $T_c\Omega_{pq}(D) = \ker_0(D_c)$.

Como

$$\forall V \in T_c\Omega_{pq}(D)\ \ H_c(V^H) = u(b) = 0,$$

estamos nas condições do lema anterior e portanto existe $k_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$-(\nabla_{\dot c}\dot c + fA) = k_2 A$$

$$\nabla_{\dot c}\dot c = -(f + k_2)A, \quad \text{ou seja,}$$

$$\nabla_{\dot c}\dot c = -(f(t) + k_2)h(\dot c) \qquad \text{e}$$

$$\nabla_{\dot c}\dot c = -\left(\int_a^t \langle \tau(\dot c), \dot c\rangle \mathrm{d}x - k\right) h(\dot c), \quad \text{onde } k = -(k_1 + k_2).$$

Corolário 2.1 *Seja $c \in \Omega_{pq}(D)$ uma curva suave tal que*

$$\nabla_{\dot c}\dot c = -\left(\int_a^t \langle \tau(\dot c), \dot c\rangle \mathrm{d}x - k\right) h(\dot c).$$

Então $\int_a^b \langle \langle \tau(\dot c), \dot c\rangle \xi - \nabla_{\dot c}\dot c, V\rangle \mathrm{d}t = 0$ para todo $V \in \ker(D_c)$ tal que $V(a) \in D_{c(a)}$ e $V(b) \in D_c(b)$.

De fato, basta notar que na primeira parte da demonstração do Teorema 2.3 só utilizamos as condições $u(a) = u(b) = 0$ e $\frac{du}{dt} = \sum_k A^k v^k$ para concluirmos que $\int_a^b \langle \langle \tau(\dot{c}), \dot{c} \rangle \xi - \nabla_{\dot{c}} \dot{c}, V \rangle dt = 0$ e estas condições são satisfeitas por V.

Corolário 2.2 *Seja $c \in \Omega_{pq}(D)$ nas condições do Corolário 2.1 e $V \in T_c\Omega(D)$ tal que $V(a) \in D_{c(a)}$ e $V(b) \in D_c(b)$. Então*

$$dE_c(V) = \langle V(b), \dot{c}(b) \rangle - \langle V(a), \dot{c}(a) \rangle.$$

Demonstração: Imediata do Teorema 2.2 e Corolário 2.1.

Teorema 2.4 *Seja $c \in \Omega_{pq}(D)$, $p \neq q$, suave por partes na partição $P = \{a = t_0, \ldots, t_l = b\}$ um extremo de E. Então c é suave.*

Demonstração: Seja $c_i = c|_{[t_i, t_{i+1}]}$, $0 \leq i \leq l - 1$.

Seja $V_i \in T_{c_i}\Omega_{c(t_i)\ c(t_{i+1})}(D)$ e $\overline{V}_i \in T_c\Omega_{pq}(D)$ tal que $\overline{V}_i(t) = 0$ para $t \in [a, b] - (t_i, t_{i+1})$ e $\overline{V}_i(t) = V(t)$ para $t \in (t_i, t_{i+1})$.

Do Teorema 2.2 temos $dE_{c_i}(V_i) = dE_c(\overline{V}_i)$.

Como c é extremo de E, temos $dE_c(\overline{V}_i) = 0$. Logo, $dE_{c_i}(V_i) = 0$ e portanto c_i é uma curva suave extremo de E.

Pelo Teorema 2.3, c_i satisfaz a equação

$$\nabla_{\dot{c}_i} \dot{c}_i = -\left(\int_{t_i}^t \langle \tau(\dot{c}_i), \dot{c}_i \rangle dx - k_i \right) h(\dot{c}_i).$$

Tomemos agora W uma variação infinitesimal de contato de c tal que $W(a) = W(b) = 0$ e $W(t_i) = \dot{c}(t_i^+) - \dot{c}(t_i^-)$ para $1 \leq i \leq l - 1$. A existência de tal variação é garantida pela Proposição 2.9.

Como c é extremo de E, temos

$$dE_c(W) = -\sum_{i=1}^{l-1} |\dot{c}(t_i^+) - \dot{c}(t_i^-)|^2 - \int_a^b \nabla_{\dot{c}} \dot{c} - \langle \tau(\dot{c}), \dot{c} \rangle \xi, W \rangle dt = 0.$$

Seja $W_i = W|_{[t_i, t_{i+1}]}$.

As condições do Corolário 2.1 são satisfeitas por c_i e W_i e portanto

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} \langle \nabla_{\dot{c}_i} \dot{c}_i - \langle \tau(\dot{c}_i), \dot{c}_i \rangle \xi, W_i \rangle \mathrm{d}t = 0.$$

Assim, $\int_a^b \langle \nabla_{\dot{c}} \dot{c} - \langle \tau(\dot{c}), \dot{c} \rangle \xi, W \rangle \mathrm{d}t = 0$.

Logo, $\mathrm{d}E_c(W) = -\sum_{i=1}^{l-1} |\dot{c}(t_i^+) - \dot{c}(t_i^-)|^2 = 0$.

Da igualdade acima, temos $\dot{c}(t_i^+) = \dot{c}(t_i^-)$ e portanto c é diferenciável em t_i, $1 \leq i \leq l-1$.

$$\nabla_{\dot{c}(t_i^-)} \dot{c}(t_i^-) = \nabla_{\dot{c}(t_i^+)} \dot{c}(t_i^+) \rightarrow \nabla_{\dot{c}_{i-1}(t_i)} \dot{c}_{i-1}(t_i) = \nabla_{\dot{c}_i(t_i)} \dot{c}_i(t_i).$$

Da expressão de $\nabla_{\dot{c}_i} \dot{c}_i$, temos

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \langle \tau(\dot{c}), \dot{c} \rangle \mathrm{d}x - k_{i-1} = \int_{t_i}^{t_i} \langle \tau(\dot{c}), \dot{c} \rangle \mathrm{d}x - k_i = -k_i.$$

Assim, para $t \in [t_i, t_{i+1}]$,

$$\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = -\left(\int_{t_i}^{t} \langle \tau(\dot{c}), \dot{c} \rangle \mathrm{d}x - k_i \right) h(\dot{c}) = -\left(\int_{t_{i-1}}^{t} \langle \tau(\dot{c}), \dot{c} \rangle \mathrm{d}x - k_{i-1} \right) h(\dot{c})$$

e, repetindo o argumento, diminuímos o índice i de forma a obtermos

$$\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = -\left(\int_{t_0=a}^{t} \langle \tau(\dot{c}), \dot{c} \rangle \mathrm{d}x - k_0 \right) h(\dot{c}).$$

Como c satisfaz à equação acima, ela é suave.

Capítulo 3

Exemplos

Neste capítulo vamos apresentar três exemplos de variedades sub-riemannianas de contato. Estudaremos as geodésicas e a aplicação exponencial nestas variedades.

Exemplo 1: Espaço de Heisenberg

Seja D a distribuição gerada pelos campos e_1 e e_2 no $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial z}, \\ e_2 &= \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Como $[e_1, e_2] = 2\frac{\partial}{\partial z}$, a matriz da aplicação

$$\begin{aligned} L : D \times D &\rightarrow T\mathbb{R}^3/D \\ (X, Y) &\rightarrow [X, Y]\mathrm{mod}D \end{aligned}$$

na base $\{e_1, e_2, \partial/\partial z\}$ é $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ e portanto L é não degenerada.

Assim, já que $\dim D = 2$, a distribuição D é de contato.

Em D vamos definir uma métrica de forma que a projeção

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\rightarrow (x, y) \end{aligned}$$

seja uma isometria sobre D.

Como $\mathrm{d}\pi(e_1) = \frac{\partial}{\partial x}$ e $\mathrm{d}\pi(e_2) = \frac{\partial}{\partial y}$, a métrica em D fica definida impondo que $\{e_1, e_2\}$ seja uma base ortonormal.

Observamos que $\mathrm{d}x(e_1) = 1$, $\mathrm{d}x(e_2) = 0$, $\mathrm{d}y(e_1) = 0$ e $\mathrm{d}y(e_2) = 1$ e portanto a restrição das diferenciais $\mathrm{d}x$ e $\mathrm{d}y$ a D formam uma base dual de $\{e_1, e_2\}$. Assim, podemos escrever a métrica em D na forma $g = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$.

A variedade sub-riemanniana de contato $(\mathbb{R}^3, D, g)$ é chamada de espaço de Heisemberg de dimensão 3.

O elemento de área em D é a forma $\mathrm{d}A = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ sobre D, pois $\mathrm{d}A(e_1, e_2) = 1$.

Vamos determinar a forma de contato ω.

Como $\dim M = 3$, temos as condições

$$\ker \omega = D \qquad \text{e} \qquad \mathrm{d}\omega|_D = 2\mathrm{d}A.$$

Assim, $\omega(e_1) = \omega(e_2) = 0$ e $\mathrm{d}\omega|_D = 2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$.

Seja $\omega = a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y + c\mathrm{d}z$,

$$\begin{aligned} \omega(e_1) &= \omega\left(\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial z}\right) = a - cy = 0, \\ \omega(e_2) &= \omega\left(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}\right) = b + cx = 0\ . \end{aligned}$$

Logo,

$$\omega = c(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y + \mathrm{d}z).$$

Seja $\eta = y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y + \mathrm{d}z$. Temos $\omega = c\eta$ e $\eta|_D = 0$,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}c \wedge \eta + c\mathrm{d}\eta, \\ \mathrm{d}\omega|_D &= (\mathrm{d}c \wedge \eta)|_D + (c\mathrm{d}\eta)|_D = c(-2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y). \end{aligned}$$

Como $\mathrm{d}\omega|_D = 2\mathrm{d}A$, temos $c = -1$ e $\omega = -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y - \mathrm{d}z$.

Determinemos o campo ξ associado a ω.

Lembremos que este é o único campo que satisfaz às condições $\omega(\xi) = 1$ e $i_\xi \mathrm{d}\omega = 0$.

Como $\omega(-\frac{\partial}{\partial z}) = 1$ e, $\forall X \in D$, $\mathrm{d}\omega(-\frac{\partial}{\partial z}, X) = 2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y(-\frac{\partial}{\partial z}, X) = 0$, temos $\xi = -\frac{\partial}{\partial z}$.

Na notação do Capítulo 1 temos os referenciais duais $\{e_1, e_2, \xi\}$ e $\{\theta^1, \theta^2, \omega\}$, onde $\theta^1 = \mathrm{d}x$ e $\theta^2 = \mathrm{d}y$.

A métrica é escrita como $g = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2$ e $\mathrm{d}\omega = 2\theta^1 \wedge \theta^2$.

A derivada covariante associada a $(\mathbb{R}^3, D, g)$, ∇, para os campos e_1, e_2 e ξ é escrita como

$$\nabla e_i = \sum_j \omega_i^j e_j, \quad 1 \leq i, j \leq 2, \qquad \text{e} \qquad \nabla \xi = 0.$$

A primeira equação de estrutura é escrita na forma

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}\theta^i + \sum_j \omega_j^i \wedge \theta^j = \omega \wedge \tau^i, \ 1 \leq i, j \leq 2, \\ &\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\omega. \end{aligned}$$

Como $\theta^1 = \mathrm{d}x$ e $\theta^2 = \mathrm{d}y$, temos $\mathrm{d}\theta^1 = \mathrm{d}\theta^2 = 0$. Assim, a primeira equação de estrutura é

$$\sum_j \omega_j^i \wedge \theta^j = \omega \wedge \tau^i, \ 1 \leq i, j \leq 2.$$

Pela unicidade de ω_j^i e τ^i, temos $\omega_j^i = 0$, $\tau^i = 0$, $1 \leq i$, $j \leq 2$.

Desta maneira, $\nabla e_i = 0$, $1 \leq i, j \leq 2$ e $\nabla \xi = 0$.

Determinemos agora as geodésicas para o espaço de Heisemberg.

A primeira condição para uma curva

$$\begin{aligned} c : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\rightarrow (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

ser uma geodésica é que ela seja uma curva tangente à distribuição D.

$$\omega(\dot{c}) = (-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y - \mathrm{d}z)(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = -y\dot{x} + x\dot{y} - \dot{z} = 0.$$

Através do Teorema 2.3, observando que $\tau = 0$, temos $\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = kh(\dot{c})$.

A transformação h é definida por $\langle h(X), Y\rangle = \mathrm{d}\omega(X, Y)$. Assim,

$$\langle h(e_1), e_1\rangle = \mathrm{d}\omega(e_1, e_1) = 0 \to h(e_1) = \alpha e_2,$$

$$\langle h(e_2), e_2\rangle = \mathrm{d}\omega(e_2, e_2) = 0 \to h(e_2) = \beta e_1,$$

$$\langle \alpha e_2, e_2\rangle = \mathrm{d}\omega(e_1, e_2) = 2 \to \alpha = 2,$$

$$\langle \beta e_1, e_1\rangle = \mathrm{d}\omega(e_2, e_1) = -2 \to \beta = -2.$$

Portanto, $h(e_1) = 2e_2$ e $h(e_2) = -2e_1$.

$$\begin{aligned}
\dot{c} &= \dot{x}\frac{\partial}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial}{\partial z} = \dot{x}e_1 + \dot{y}e_2 + (\dot{x}y - x\dot{y} + \dot{z})\frac{\partial}{\partial z} \\
&= \dot{x}e_1 + \dot{y}e_2 - \omega(\dot{c})\xi = \dot{x}e_1 + \dot{y}e_2, \\
h(\dot{c}) &= -2\dot{y}e_1 + 2\dot{x}e_2, \\
\nabla_{\dot{c}}\dot{c} &= \nabla_{\dot{c}}(\dot{x}e_1 + \dot{y}e_2) = \ddot{x}e_1 + \dot{x}\nabla_{\dot{c}}e_1 + \ddot{y}e_2 + \dot{y}\nabla_{\dot{c}}e_2 = \ddot{x}e_1 + \ddot{y}e_2.
\end{aligned}$$

Substituindo em $\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = kh(\dot{c})$, temos o sistema

$$\begin{cases} \ddot{x} = -2k\dot{y} \\ \ddot{y} = 2k\dot{x}\ . \end{cases}$$

Seja $\lambda = 2k$ e assumamos $|\dot{c}| = 1$.

$$\dddot{x} = -\lambda\ddot{y} = -\lambda^2\dot{x}, \quad \dddot{x} + \lambda^2\dot{x} = 0.$$

Se $\lambda \neq 0$, então

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = A\cos(\lambda t + \varphi), \quad A \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi \in \mathbb{R}, \\
&\dot{y} = \frac{\ddot{x}}{-\lambda} = A\mathrm{sen}(\lambda t + \varphi), \\
&\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1 \to A = 1.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\dot{x} = \cos(\lambda t + \varphi), \quad \dot{y} = \mathrm{sen}(\lambda t + \varphi),$$

$$
\begin{aligned}
&x = \frac{1}{\lambda}\text{sen}(\lambda t + \varphi) + x_0, \\
&y = -\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda t + \varphi) + y_0, \\
&\dot{z} = x\dot{y} - y\dot{x} = \left(\frac{1}{\lambda}\text{sen}(\lambda t + \varphi) + x_0\right)\text{sen}(\lambda t + \varphi) + \left(\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda t + \varphi) - y_0\right)\cos(\lambda t + \varphi) \\
&\quad = \frac{1}{\lambda} + x_0\text{sen}(\lambda t + \varphi) - y_0\cos(\lambda t + \varphi) \\
&z = \frac{1}{\lambda}(t - x_0\cos(\lambda t + \varphi) - y_0\text{sen}(\lambda t + \varphi)) + z_0.
\end{aligned}
$$

Assim, se $\lambda \neq 0$, as geodésicas parametrizadas pelo comprimento de arco são escritas como

$$
\begin{aligned}
c_\lambda(t) &= (x(t), y(t), z(t)), \quad \text{onde} \\
x(t) &= \frac{1}{\lambda}\text{sen}(\lambda t + \varphi) + x_0, \\
y(t) &= -\frac{1}{\lambda}\cos(\lambda t + \varphi) + y_0, \\
z(t) &= \frac{1}{\lambda}(t - x_0\cos(\lambda t + \varphi) - y_0\text{sen}(\lambda t + \varphi)) + z_0.
\end{aligned}
$$

Se $\lambda = 0$, temos $\ddot{x} = \ddot{y} = 0$ e $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$. Logo,

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = \cos\varphi, \quad \dot{y} = \text{sen}\varphi, \\
&x = t\cos\varphi + x_0, \\
&y = t\text{sen}\varphi + y_0, \\
&\dot{z} = x\dot{y} - y\dot{x} = (t\cos\varphi + x_0)\text{sen}\varphi - (t\text{sen}\varphi + y_0)\cos\varphi = x_0\text{sen}\varphi - y_0\cos\varphi, \\
&z = (x_0\text{sen}\varphi - y_0\cos\varphi)t + z_0.
\end{aligned}
$$

Portanto, se $\lambda = 0$, as geodésicas parametrizadas pelo comprimento de arco são escritas na forma $c_0(t) = (x(t), y(t), z(t))$, onde

$$
\begin{aligned}
x(t) &= t\cos\varphi + x_0, \\
y(t) &= t\text{sen}\varphi + y_0, \\
z(t) &= (x_0\text{sen}\varphi - y_0\cos\varphi)t + z_0.
\end{aligned}
$$

A função

$$\begin{aligned} \exp_p : D_p \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (V, \lambda) &\rightarrow \exp_p(V, \lambda) = c_\lambda(|V|), \end{aligned}$$

onde c_λ é a geodésica parametrizada pelo comprimento de arco com $c_\lambda(0) = p$ e $\dot{c}_\lambda(0) = \frac{V}{|V|}$ é chamada aplicação exponencial em p.

Vamos determinar a aplicação exponencial na origem, isto é, para $p = 0$.

Utilizando coordenadas polares em D, escrevemos $V \in D$ como $V = (r, \theta)$.

Para $\lambda \neq 0$, temos

$$\begin{aligned} &\dot{c}_\lambda(t) = \cos(\lambda t + \varphi)e_1 + \text{sen}(\lambda t + \varphi)e_2, \\ &\dot{c}_\lambda(0) = \cos\varphi e_1 + \text{sen}\varphi e_2 = (1, \varphi), \\ &\frac{V}{|V|} = (1, \theta). \end{aligned}$$

Assim, $\varphi = \theta$.

$c_\lambda(0) = 0$, logo

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{1}{\lambda}\text{sen}\theta + x_0 = 0 \rightarrow x_0 = -\frac{1}{\lambda}\text{sen}\theta, \\ y(0) &= -\frac{1}{\lambda}\cos\theta + y_0 = 0 \rightarrow y_0 = \frac{1}{\lambda}\cos\theta, \\ z(0) &= \frac{1}{\lambda}(-x_0\cos\theta - y_0\text{sen}\theta) + z_0 = 0 \rightarrow z_0 = 0. \end{aligned}$$

Para $\lambda = 0$, temos

$$\begin{aligned} &\dot{c}_0(0) = \cos\varphi e_1 + \text{sen}\varphi e_2 = (1, \varphi) = (1, \theta) \rightarrow \varphi = \theta \\ &c_0(0) = 0 \rightarrow x_0 = y_0 = z_0 = 0. \end{aligned}$$

Assim, a expressão para a aplicação exponencial será

$$\exp_0(r, \theta, 0) \quad = \quad (r\cos\theta, r\text{sen}\theta, 0),$$

$$
\begin{aligned}
\exp_0(r,\theta,\lambda) &= \frac{1}{\lambda}(\operatorname{sen}(\lambda r+\theta)-\operatorname{sen}\theta, -\cos(\lambda r+\theta)+\cos\theta,\\
&\quad r+\frac{1}{\lambda}(\operatorname{sen}\theta\cos(\lambda r+\theta)-\cos\theta\operatorname{sen}(\lambda r+\theta)))\\
&= \frac{1}{\lambda}\left(\operatorname{sen}(\lambda r+\theta)-\operatorname{sen}\theta, -\cos(\lambda r+\theta)+\cos\theta, r-\frac{1}{\lambda}\operatorname{sen}(\lambda r)\right).
\end{aligned}
$$

Exemplo 2: a esfera S^3

Neste exemplo vamos utilizar uma identificação do $\mathbb{R}^4$ com o $\mathbb{C}^2$ de modo que o vetor (x_1, x_2, x_3, x_4) do $\mathbb{R}^4$ corresponda ao par $(x_1 + ix_2, x_3 + ix_4)$ do $\mathbb{C}^2$.

Em $\mathbb{C}^2$ o produto hermitiano canônico $\langle\ ,\ \rangle$ é definido por $\langle z, w\rangle = z_1\overline{w}_1 + z_2\overline{w}_2$, onde $z = (z_1, z_2)$ e $w = (w_1, w_2)$. Seja $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = x_3 + ix_4$, $w_1 = y_1 + iy_2$ e $w_2 = y_3 + iy_4$,

$$\begin{aligned}
\langle z, w\rangle &= (x_1 + ix_2)(y_1 - iy_2) + (x_3 + ix_4)(y_3 - iy_4) \\
&= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 + i(x_2y_1 - x_1y_2 + x_4y_3 - x_3y_4) \\
&= ((z, w)) + i\eta(z, w),
\end{aligned}$$

onde $((\ ,\ ))$ é o produto interno do $\mathbb{R}^4$ e η uma forma bilinear anti-simétrica.

Com este produto escalar podemos escrever

$$\begin{aligned}
S^3 &= \{z \in \mathbb{C}^2 | \langle z, z\rangle = 1\}, \\
T_zS^3 &= \{u \in \mathbb{C}^2 | ((z, u)) = 0\}.
\end{aligned}$$

A distribuição num ponto $z \in S^3$ é definida por

$$D_z = \{u \in \mathbb{C}^2 | \langle z, u\rangle = 0\}.$$

Seja $z^\perp = (-\overline{z}_2, \overline{z}_1)$, onde $z = (z_1, z_2) \in S^3$. Assim, $\langle z, z^\perp\rangle = 0$ e $D_z = [z^\perp]_{\mathbb{C}}$.

$iz \in T_zS^3$, pois $((z, iz)) = 0$.

O espaço tangente em z é escrito

$$T_zS^3 = [iz]_{\mathbb{R}} \oplus D_z = [iz]_{\mathbb{R}} \oplus [z^\perp]_{\mathbb{C}}.$$

Nosso objetivo agora é obter a primeira equação de estrutura para S^3.

Notamos que $\{z, z^\perp\}$ é um referencial unitário pois

$$\langle z, z\rangle = \langle z^\perp, z^\perp\rangle = 1 \qquad \text{e} \qquad \langle z, z^\perp\rangle = 0.$$

Vamos escrever o referencial canônico $\{f_1, f_2\}$ de $\mathbb{C}^2$ em função de z e $z^\perp$.

$$\begin{aligned} z &= z_1 f_1 + z_2 f_2, \\ z^\perp &= -\overline{z}_2 f_1 + \overline{z}_1 f_2. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema para f_1 e f_2, temos

$$\begin{aligned} f_1 &= \overline{z}_1 z - z_2 z^\perp, \\ f_2 &= \overline{z}_2 z + z_1 z^\perp, \\ \mathrm{d}z &= \mathrm{d}z_1 f_1 + \mathrm{d}z_2 f_2, \\ &= \mathrm{d}z_1(\overline{z}_1 z - z_2 z^\perp) + \mathrm{d}z_2(\overline{z}_2 z + z_1 z^\perp), \\ &= (\overline{z}_1 \mathrm{d}z_1 + \overline{z}_2 \mathrm{d}z_2) z + (-z_2 \mathrm{d}z_1 + z_1 \mathrm{d}z_2) z^\perp, \\ &= -i(\overline{z}_1 \mathrm{d}z_1 + \overline{z}_2 \mathrm{d}z_2)(iz) + (-z_2 \mathrm{d}z_1 + z_1 \mathrm{d}z_2) z^\perp, \\ \mathrm{d}z^\perp &= -\mathrm{d}\overline{z}_2 f_1 + \mathrm{d}\overline{z}_1 f_2 \\ &= -\mathrm{d}\overline{z}_2(\overline{z}_1 z - z_2 z^\perp) + \mathrm{d}\overline{z}_1(\overline{z}_2 z + z_1 z^\perp) \\ &= (\overline{z}_2 \mathrm{d}\overline{z}_1 - \overline{z}_1 \mathrm{d}\overline{z}_2) z + (z_1 \mathrm{d}\overline{z}_1 + z_2 \mathrm{d}\overline{z}_2) z^\perp \\ &= i(\overline{z}_1 \mathrm{d}\overline{z}_2 - \overline{z}_2 \mathrm{d}\overline{z}_1)(iz) - i(i(z_1 \mathrm{d}\overline{z}_1 + z_2 \mathrm{d}\overline{z}_2)) z^\perp. \end{aligned}$$

Seja $\omega = -i(\overline{z}_1 \mathrm{d}z_1 + \overline{z}_2 \mathrm{d}z_2)$ e $\varphi = -z_2 \mathrm{d}z_1 + z_1 \mathrm{d}z_2$,

$$z_1 \overline{z}_1 + z_2 \overline{z}_2 = 1 \to z_1 \mathrm{d}\overline{z}_1 + z_2 \mathrm{d}\overline{z}_2 + \overline{z}_1 \mathrm{d}z_1 + \overline{z}_2 \mathrm{d}z_2 = 0,$$

$$i(z_1 \mathrm{d}\overline{z}_1 + z_2 \mathrm{d}\overline{z}_2) = -i(\overline{z}_1 \mathrm{d}z_1 + \overline{z}_2 \mathrm{d}z_2).$$

Portanto, $\omega = \overline{\omega}$ e podemos escrever

$$\mathrm{d}z = \omega(iz) + \varphi z^\perp,$$

$$\mathrm{d}z^\perp = i\overline{\varphi}(iz) - i\omega z^\perp,$$

$$0 = \mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}\omega(iz) - \omega \wedge \mathrm{d}(iz) + \mathrm{d}\varphi z^\perp - \varphi \wedge \mathrm{d}z^\perp$$

$$= i\mathrm{d}\omega z - i\omega \wedge (\omega(iz) + \varphi z^\perp) + \mathrm{d}\varphi z^\perp - \varphi \wedge (i\overline{\varphi}(iz) - i\omega z^\perp)$$

$$= (i\mathrm{d}\omega + \varphi \wedge \overline{\varphi}) z + (-i\omega \wedge \varphi + \mathrm{d}\varphi + i\varphi \wedge \omega) z^\perp.$$

Da igualdade acima, obtemos

$$\mathrm{d}\varphi - 2i\omega \wedge \varphi = 0,$$

$$\mathrm{d}\omega - i\varphi \wedge \overline{\varphi} = 0.$$

Seja $\theta^1 = \frac{\varphi+\overline{\varphi}}{2}$ e $\theta^2 = \frac{\varphi-\overline{\varphi}}{2i}$, $\varphi = \theta^1 + i\theta^2$. Assim,

$$\mathrm{d}\theta^1 + i\mathrm{d}\theta^2 - 2i\omega \wedge (\theta^1 + i\theta^2) = 0,$$

$$\mathrm{d}\theta^1 + 2\omega \wedge \theta^2 = 0,$$

$$\mathrm{d}\theta^2 - 2\omega \wedge \theta^1 = 0,$$

$$\mathrm{d}\omega - i(\theta^1 + i\theta^2) \wedge (\theta^1 - i\theta^2) = 0,$$

$$\mathrm{d}\omega - 2\theta^1 \wedge \theta^2 = 0.$$

Notamos que $\mathrm{d}z|_{T_zS^3}$ é a identidade. Assim, sendo $V \in T_zS^3$, temos

$$V = \mathrm{d}z(V) = \omega(V)(iz) + \varphi(V)z^{\perp} = \omega(V)(iz) + \theta^1(V)z^{\perp} + \theta^2(V)(iz^{\perp})$$

e $\{iz, z^{\perp}, iz^{\perp}\}$ é uma base real de T_zS^3 cuja base dual é $\{\omega, \theta^1, \theta^2\}$.

A métrica sobre S^3 induzida do $\mathbb{R}^4$ é $g_1 = (\omega)^2 + (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2$, pois os vetores iz, $z^{\perp}$ e $iz^{\perp}$ são ortonormais em $\mathbb{R}^4$.

Em D temos a métrica $g = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2$.

(S^3, D, g) é uma variedade sub-riemanniana de contato onde, utilizando a notação do Capítulo 1, temos $e_1 = z^{\perp}$, $e_2 = iz^{\perp}$, $\xi = iz$ e ω é a forma de contato.

A primeira equação de estrutura é

$$\mathrm{d}\theta^1 + 2\omega \wedge \theta^2 = 0,$$

$$\mathrm{d}\theta^2 - 2\omega \wedge \theta^1 = 0,$$

$$\mathrm{d}\omega - 2\theta^1 \wedge \theta^2 = 0.$$

Da terceira igualdade, $\mathrm{d}\omega = 2\mathrm{d}A$.

A derivada covariante associada à estrutura sub-riemanniana é escrita

$$\begin{aligned}
\nabla e_1 &= -2\omega e_2, \\
\nabla e_2 &= 2\omega e_1, \\
\nabla \xi &= 0.
\end{aligned}$$

Observamos que ∇ é compatível com a estrutura complexa de D_z, pois

$$i\nabla z^{\perp} = i(-2\omega e_2) = -2i\omega(iz^{\perp}) = 2\omega e_1 = \nabla iz^{\perp}$$

e, por linearidade, $\forall \alpha \in \mathbf{C}$, $\nabla \alpha z^{\perp} = \alpha \nabla z^{\perp}$.

Conhecendo a derivada covariante, vamos determinar as geodésicas de S^3.

Seja $\begin{array}{rcl} c : [a_1, b_1] & \rightarrow & S^3 \\ t & \rightarrow & c(t) = z(t) = (z_1(t), z_2(t)) \end{array}$

Um campo ao longo de c é escrito

$$X(t) = a(t)z^{\perp} + b(t)(iz),$$

onde $a : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbf{C}$ e $b : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\nabla_{\dot{c}} X &= \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} z^{\perp} + a \nabla_{\dot{c}} z^{\perp} + \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}(iz) + b \nabla_{\dot{c}}(iz) \\
&= \left(\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} - 2ia\omega(\dot{c}) \right) z^{\perp} + \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t}(iz), \\
\dot{c} &= \dot{z}_1 f_1 + \dot{z}_2 f_2 = \omega(\dot{c})(iz) + \varphi(\dot{c}) z^{\perp}.
\end{aligned}$$

A curva c é uma geodésica se e somente se $\dot{c} \in D$ e $\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = \lambda h(\dot{c})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\dot{c} \in D \leftrightarrow \omega(\dot{c}) = 0,$$

$$\dot{c} = \varphi(\dot{c}) z^{\perp} = (-z_2 \mathrm{d}z_1 + z_1 \mathrm{d}z_2)(\dot{z}_1, \dot{z}_2) z^{\perp}$$

$$= (-z_2 \dot{z}_1 + z_1 \dot{z}_2) z^{\perp} = a z^{\perp}.$$

Assim, fazendo $X = \dot{c}$ na expressão de $\nabla_{\dot{c}} X$, temos

$$\nabla_{\dot{c}} \dot{c} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} z^{\perp} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-z_2 \dot{z}_1 + z_1 \dot{z}_2) z^{\perp} = (-z_2 \ddot{z}_1 + z_1 \ddot{z}_2) z^{\perp}.$$

Pelo mesmo argumento utilizado no espaço de Heisemberg, temos $h(e_1) = 2e_2$ e $h(e_2) = -2e_1$. Assim, $\forall V \in D_z$, $h(V) = 2iV$.

$$\nabla_{\dot c}\dot c = \lambda h(\dot c) = 2i\lambda \dot c = 2i\lambda a z^{\perp},$$
$$\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} z^{\perp} = 2i\lambda a z^{\perp} \to a(t) = Ke^{2i\lambda t},\ K \in \mathbf{C}.$$

Como $\dot c = a z^{\perp}$, temos $(\dot z_1, \dot z_2) = a(-z_2, z_1)$.

$$\begin{cases} \dot z_1 = -a\overline{z}_2, \\ \dot z_2 = a\overline{z}_1, \end{cases}$$
$$\ddot z_1 = -\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\overline{z}_2 - a\dot{\overline{z}}_2 = -\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot z_1}{-a}\right) - a\overline{a}z_1 = 2i\lambda \dot z_1 - |a|^2 z_1,$$
$$\ddot z_1 - 2i\lambda \dot z_1 + |a|^2 z_1 = 0.$$

Vamos considerar geodésicas parametrizadas pelo comprimento de arco.

$$\langle \dot z, \dot z\rangle = a\overline{a}\langle z^{\perp}, z^{\perp}\rangle = |a|^2 = |K|^2 = 1,$$
$$\ddot z_1 - 2i\lambda \dot z_1 + z_1 = 0,$$
$$z_1 = K_1 e^{i\beta_1 t} + K_2 e^{i\beta_2 t},$$

onde $\beta_1 = \lambda + \sqrt{1+\lambda^2}$, $\beta_2 = \lambda - \sqrt{1+\lambda^2}$ e $K_1, K_2 \in \mathbf{C}$.

$$\dot z_1 = i\beta_1 K_1 e^{i\beta_1 t} + i\beta_2 K_2 e^{i\beta_2 t},$$
$$K.\overline{K} = 1,\quad 1/\overline{K} = K,$$
$$\begin{aligned} z_2 = \frac{\dot{\overline{z}}_1}{-\overline{a}} &= \frac{-i\beta_1\overline{K}_1 e^{-i\beta_1 t} - i\beta_2 \overline{K}_2 e^{-i\beta_2 t}}{-\overline{K}e^{-2i\lambda t}} \\ &= iK(\beta_1\overline{K}_1 e^{i(2\lambda-\beta_1)t} + \beta_2\overline{K}_2 e^{i(2\lambda-\beta_2)t}) \\ &= iK(\beta_1\overline{K}_1 e^{i\beta_2 t} + \beta_2\overline{K}_2 e^{i\beta_1 t}). \end{aligned}$$

As constantes K_1, K_2 e K são determinadas a partir dos valores $z(0) = (z_1(0), z_2(0))$ e $\dot z(0) = (\dot z_1(0), \dot z_2(0))$.

Como $Ke^{2i\lambda t} = -z_2\dot z_1 + z_1\dot z_2 = \langle \dot z, z^{\perp}\rangle$, temos $K = \langle \dot z(0), z^{\perp}(0)\rangle$.

$$\begin{aligned} z_1(0) &= K_1 + K_2, \\ z_2(0) &= iK\beta_1\overline{K}_1 + iK\beta_2\overline{K}_2. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema para K_1 e K_2, obtemos

$$K_1 = \frac{\beta_2 z_1(0) - iK\overline{z_2(0)}}{\beta_2 - \beta_1}, \quad K_2 = \frac{\beta_1 z_1(0) - iK\overline{z_2(0)}}{\beta_1 - \beta_2}.$$

Como $\dot{z} \in D$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle z(t), z(t)\rangle = \langle \dot{z}(t), z(t)\rangle + \langle z(t), \dot{z}(t)\rangle = 0$, assim $\langle z(t), z(t)\rangle = \langle z(0), z(0)\rangle = 1$ e $c(t) \in S^3$.

As geodésicas em S^3 parametrizadas pelo comprimento de arco, com condições iniciais $z(0) = (z_1(0), z_2(0))$ e $\dot{z}(0) = (\dot{z}_1(0), \dot{z}_2(0))$ são escritas

$$\begin{aligned} c_\lambda : [a_1, b_1] &\rightarrow S^3 \\ t &\rightarrow c(t) = (z_1(t), z_2(t)) \end{aligned}$$

$$z_1(t) = K_1 e^{i\beta_1 t} + K_2 e^{i\beta_2 t}$$

$$z_2(t) = iK(\beta_1 \overline{K}_1 e^{i\beta_2 t} + \beta_2 \overline{K}_2 e^{i\beta_1 t}),$$

onde

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \lambda + \sqrt{1+\lambda^2}, \quad \beta_2 = \lambda - \sqrt{1+\lambda^2}, \\ K &= \langle \dot{z}(0), z^{\perp}(0)\rangle, \\ K_1 &= \frac{\beta_2 z_1(0) - iK\overline{z_2(0)}}{\beta_2 - \beta_1} \quad \text{e} \quad K_2 = \frac{\beta_1 z_1(0) - iK\overline{z_2(0)}}{\beta_1 - \beta_2}. \end{aligned}$$

Vamos determinar a aplicação exponencial no ponto $(0, i)$.

$$D_{(0,i)} = [(i, 0)]_{\mathbf{C}},$$

$$V \in D_{(0,i)} \leftrightarrow V = v(i, 0), \; v \in \mathbf{C},$$

$$\|V\| = \|v(i,0)\| = |v|,$$

$$\frac{V}{\|V\|} = \frac{v(i,0)}{|v|},$$

$$z(0) = (0, i), \quad \dot{z}(0) = \frac{V}{\|V\|} = \frac{v}{|v|}(i, 0),$$

$$K = \langle \dot{z}(0), z^{\perp}(0)\rangle = \langle \frac{v}{|v|}(i,0), (i,0)\rangle = \frac{v}{|v|},$$

$$K_1 = \frac{-i(\frac{v}{|v|})(-i)}{\beta_2 - \beta_1} = \frac{v}{2|v|\sqrt{1+\lambda^2}},$$

$$K_2 = \frac{-v}{2|v|\sqrt{1+\lambda^2}} = -K_1.$$

A aplicação exponencial em $(0,i)$ é escrita

$$\begin{array}{rcl}\exp_{(0,i)} D_{(0,i)} \times \mathbb{R} & \rightarrow & S^3 \\ (v(i,0),\lambda) & \rightarrow & \exp_{(0,i)}(v(i,0),\lambda) = c_\lambda(|v|)\end{array}$$

$\exp_{(0,i)}(v(i,0),\lambda) = (z_1, z_2)$, onde

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{v}{2|v|\sqrt{1+\lambda^2}}\left(e^{i(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})|v|} - e^{i(\lambda-\sqrt{1+\lambda^2})|v|}\right) \qquad \text{e} \\ z_2 &= i\frac{v}{|v|}\frac{\overline{v}}{2|v|\sqrt{1+\lambda^2}}\left(\beta_1 e^{i\beta_2|v|} - \beta_2 e^{i\beta_1|v|}\right) \\ &= \frac{i}{2\sqrt{1+\lambda^2}}\left((\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})e^{i(\lambda-\sqrt{1+\lambda^2})|v|} - (\lambda-\sqrt{1+\lambda^2})e^{i(\lambda+\sqrt{1+\lambda^2})|v|}\right). \end{aligned}$$

Exemplo 3: a quádrica $\mathbb{Q}^3$

Como no exemplo anterior, identificamos o $\mathbb{R}^4$ com o $\mathbb{C}^2$. Em $\mathbb{C}^2$ definimos $\langle\ ,\ \rangle$ por

$$\langle z, w\rangle = z_1\overline{w}_1 - z_2\overline{w}_2,$$

onde $z = (z_1, z_2)$, $w = (w_1, w_2)$.

Seja $z_1 = x_1 + ix_2$, $z_2 = x_3 + ix_4$, $w_1 = y_1 + iy_2$ e $w_2 = y_3 + iy_4$.

$$\begin{aligned}
\langle z, w\rangle &= (x_1 + ix_2)(y_1 - iy_2) - (x_3 + ix_4)(y_3 - iy_4) \\
&= x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4 + i(x_2y_1 - x_1y_2 - x_4y_3 + x_3y_4) \\
&= ((z, w)) + i\eta(z, w), \\
\mathbb{Q}^3 &= \{z \in \mathbb{C}^2 | \langle z, z\rangle = -1\}, \\
T_z\mathbb{Q}^3 &= \{u \in \mathbb{C}^2 | ((z, u)) = 0\}.
\end{aligned}$$

A distribuição num ponto $z \in \mathbb{Q}^3$ é definida por

$$D_z = \{u \in \mathbb{C}^2 | \langle z, u\rangle = 0\}.$$

Seja $z^\perp = (\overline{z}_2, \overline{z}_1)$, onde $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{Q}^3$. Assim, $\langle z, z^\perp\rangle = 0$ e $D_z = [z^\perp]_{\mathbb{C}}$.

$-iz \in T_zS^3$, pois $((z, iz)) = 0$.

O espaço tangente em z é escrito $T_z\mathbb{Q}^3 = [-iz]_{\mathbb{R}} \oplus [z^\perp]_{\mathbb{C}}$.

Nosso objetivo agora é obter a primeira equação de estrutura para $\mathbb{Q}^3$.

Vamos escrever o referencial canônico $\{f_1, f_2\}$ de $\mathbb{C}^2$ em função de z e $z^\perp$.

$$\begin{aligned}
z &= z_1f_1 + z_2f_2, \\
z^\perp &= \overline{z}_2f_1 + \overline{z}_1f_2.
\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema para f_1 e f_2, temos

$$f_1 = -\overline{z}_1z + z_2z^\perp,$$

$$
\begin{aligned}
f_2 &= \overline{z}_2 z - z_1 z^{\perp}, \\
\mathrm{d}z &= \mathrm{d}z_1 f_1 + \mathrm{d}z_2 f_2 \\
&= \mathrm{d}z_1(-\overline{z}_1 z + z_2 z^{\perp}) + \mathrm{d}z_2(\overline{z}_2 z - z_1 z^{\perp}) \\
&= (-\overline{z}_1 \mathrm{d}z_1 + \overline{z}_2 \mathrm{d}z_2) z + (z_2 \mathrm{d}z_1 - z_1 \mathrm{d}z_2) z^{\perp} \\
&= i(-\overline{z}_1 \mathrm{d}z_1 + \overline{z}_2 \mathrm{d}z_2)(-iz) + (z_2 \mathrm{d}z_1 - z_1 \mathrm{d}z_2) z^{\perp}, \\
\mathrm{d}z^{\perp} &= \mathrm{d}\overline{z}_2 f_1 + \mathrm{d}\overline{z}_1 f_2 \\
&= \mathrm{d}\overline{z}_2(-\overline{z}_1 z + z_2 z^{\perp}) + \mathrm{d}\overline{z}_1(\overline{z}_2 z - z_1 z^{\perp}) \\
&= (-\overline{z}_1 \mathrm{d}\overline{z}_2 + \overline{z}_2 \mathrm{d}\overline{z}_1) z + (z_2 \mathrm{d}\overline{z}_2 - z_1 \mathrm{d}\overline{z}_1) z^{\perp} \\
&= i(-\overline{z}_1 \mathrm{d}\overline{z}_2 + \overline{z}_2 \mathrm{d}\overline{z}_1)(-iz) + i(-i(z_2 \mathrm{d}\overline{z}_2 - z_1 \mathrm{d}\overline{z}_1)) z^{\perp}.
\end{aligned}
$$

Seja $\omega = i(-\overline{z}_1 \mathrm{d}z_1 + \overline{z}_2 \mathrm{d}z_2)$ e $\varphi = z_2 \mathrm{d}z_1 - z_1 \mathrm{d}z_2$,

$$
\begin{aligned}
& z_1\overline{z}_1 - z_2\overline{z}_2 = -1 \to z_1 \mathrm{d}\overline{z}_1 - z_2 \mathrm{d}\overline{z}_2 + \overline{z}_1 \mathrm{d}z_1 - \overline{z}_2 \mathrm{d}z_2 = 0, \\
& i(-\overline{z}_1 \mathrm{d}z_1 + \overline{z}_2 \mathrm{d}z_2) = -i(-z_1 \mathrm{d}\overline{z}_1 + z_2 \mathrm{d}\overline{z}_2).
\end{aligned}
$$

Portanto, $\omega = \overline{\omega}$ e podemos escrever

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{d}z = \omega(-iz) + \varphi z^{\perp}, \\
& \mathrm{d}z^{\perp} = i\overline{\varphi}(-iz) + i\omega z^{\perp}, \\
& 0 = \mathrm{d}^2 z = \mathrm{d}\omega(-iz) - \omega \wedge \mathrm{d}(-iz) + \mathrm{d}\varphi z^{\perp} - \varphi \wedge \mathrm{d}z^{\perp} \\
& = -i\mathrm{d}\omega z + i\omega \wedge (\omega(-iz) + \varphi z^{\perp}) + \mathrm{d}\varphi z^{\perp} - \varphi \wedge (i\overline{\varphi}(iz) + i\omega z^{\perp}) \\
& = (-i\mathrm{d}\omega - \varphi \wedge \overline{\varphi}) z + (i\omega \wedge \varphi + \mathrm{d}\varphi - i\varphi \wedge \omega) z^{\perp}.
\end{aligned}
$$

Da igualdade acima, obtemos

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{d}\varphi + 2i\omega \wedge \varphi = 0, \\
& \mathrm{d}\omega - i\varphi \wedge \overline{\varphi} = 0.
\end{aligned}
$$

Seja $\theta^1 = \frac{\varphi+\overline{\varphi}}{2}$ e $\theta^2 = \frac{\varphi-\overline{\varphi}}{2i}$, $\varphi = \theta^1 + i\theta^2$. Assim,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\theta^1 + i\mathrm{d}\theta^2 + 2i\omega \wedge (\theta^1 + i\theta^2) = 0,\\
&\mathrm{d}\theta^1 - 2\omega \wedge \theta^2 = 0,\\
&\mathrm{d}\theta^2 + 2\omega \wedge \theta^1 = 0,\\
&\mathrm{d}\omega - i(\theta^1 + i\theta^2) \wedge (\theta^1 - i\theta^2) = 0,\\
&\mathrm{d}\omega - 2\theta^1 \wedge \theta^2 = 0.
\end{aligned}$$

$\forall V \in T_z\mathbb{Q}^3$, $\mathrm{d}z(V) = V = \omega(V)(-iz) + \varphi(V)z^\perp = \omega(V)(-iz) + \theta^1(V)z^\perp + \theta^2(V)(iz^\perp)$.

Em D_z temos a base ortonormal $\{z^\perp, iz^\perp\}$ com base dual $\{\theta^1, \theta^2\}$. A métrica em D é $g = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2$.

$(\mathbb{Q}^3, D, g)$ é uma variedade sub-riemanniana de contato onde, utilizando a notação do Capítulo 1, temos $e_1 = z^\perp$, $e_2 = iz^\perp$, $\xi = -iz$ e ω é a forma de contato.

A primeira equação de estrutura é

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\theta^1 - 2\omega \wedge \theta^2 = 0,\\
&\mathrm{d}\theta^2 + 2\omega \wedge \theta^1 = 0,\\
&\mathrm{d}\omega - 2\theta^1 \wedge \theta^2 = 0 \quad (\mathrm{d}\omega = 2\mathrm{d}A).
\end{aligned}$$

A derivada covariante associada à estrutura sub-riemanniana é escrita

$$\begin{aligned}
\nabla e_1 &= 2\omega e_2,\\
\nabla e_2 &= -2\omega e_1,\\
\nabla \xi &= 0.
\end{aligned}$$

∇ é compatível com a estrutura complexa de D_z, pois

$$i\nabla z^\perp = i(2\omega e_2) = -2\omega e_1 = \nabla e_2 = \nabla i z^\perp$$

e, por linearidade, $\forall \alpha \in \mathbf{C}$, $\nabla \alpha z^\perp = \alpha \nabla z^\perp$.

Vamos determinar as geodésicas em $\mathbb{Q}^3$.

Seja

$$\begin{aligned} c : [a_1, b_1] &\longrightarrow \mathbb{Q}^3 \\ t &\longrightarrow c(t) = z(t) = (z_1(t), z_2(t)) \end{aligned}$$

$$\dot{c} = \dot{z}_1 f_1 + \dot{z}_2 f_2 = \omega(\dot{c})(-iz) + \varphi(\dot{c}) z^{\perp}.$$

A curva c é uma geodésica se e somente se $\dot{c} \in D$ e $\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = \lambda h(\dot{c})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
&\dot{c} = \varphi(\dot{c}) z^{\perp} = a z^{\perp}, \\
&\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} z^{\perp} + a \nabla_{\dot{c}} z^{\perp} = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} z^{\perp} + 2a\omega(\dot{c})(iz) = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} z^{\perp}, \\
&\nabla_{\dot{c}}\dot{c} = \lambda h(\dot{c}) = 2i\lambda \dot{c} = 2i\lambda a z^{\perp}, \\
&\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = 2i\lambda a \rightarrow a = K e^{2i\lambda t}, \; K \in \mathbf{C}, \\
&\dot{c} = a z^{\perp} \rightarrow (\dot{z}_1, \dot{z}_2) = a(\overline{z}_2, \overline{z}_1), \\
&\begin{cases} \dot{z}_1 = a\overline{z}_2, \\ \dot{z}_2 = a\overline{z}_1, \end{cases} \\
&\ddot{z}_1 = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\overline{z}_2 + a\dot{\overline{z}}_2 = \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\dot{z}_1}{a}\right) + a\overline{a} z_1 = 2i\lambda \dot{z}_1 + |a|^2 z, \\
&\ddot{z}_1 - 2i\lambda \dot{z}_1 - |a|^2 z = 0.
\end{aligned}$$

Vamos considerar geodésicas parametrizadas pelo comprimento de arco.

$$g(\dot{c}, \dot{c}) = \langle \dot{z}, \dot{z} \rangle = a\overline{a}\langle z^{\perp}, z^{\perp} \rangle = |a|^2 = |K|^2 = 1,$$

$$\ddot{z}_1 - 2i\lambda \dot{z}_1 - z = 0,$$

$z_1 = K_1 e^{i\beta_1 t} + K_2 e^{i\beta_2 t}$, onde $\beta_1 = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}$, $\beta_2 = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}$

e $K_1, K_2 \in \mathbf{C}$, se $\lambda \neq \pm 1$,

$z_1 = K_1 e^{it} + t K_2 e^{it}$, onde $K_1, K_2 \in \mathbf{C}$, se $\lambda = 1$,

$z_1 = K_1 e^{-it} + t K_2 e^{-it}$, onde $K_1, K_2 \in \mathbf{C}$, se $\lambda = -1$,

$\dot{z}_1 = i\beta_1 K_1 e^{i\beta_1 t} + i\beta_2 K_2 e^{i\beta_2 t}$, se $\lambda \neq \pm 1$,

$$\dot{z}_1 = iK_1e^{it} + K_2e^{it} + itK_2e^{it}, \quad \text{se } \lambda = 1,$$

$$\dot{z}_1 = -iK_1e^{-it} + K_2e^{-it} - itK_2e^{-it}, \quad \text{se } \lambda = -1,$$

$$z_2 = \frac{\overline{\dot{z}_1}}{\overline{a}}$$

$$z_2 = \frac{-i\overline{\beta}_1\overline{K}_1e^{-i\overline{\beta}_1t} - i\overline{\beta}_2\overline{K}_2e^{-i\overline{\beta}_2t}}{\overline{K}e^{-2i\lambda t}}$$

$$z_2 = -iK(\overline{\beta}_1\overline{K}_1e^{i\overline{\beta}_2t} + \overline{\beta}_2\overline{K}_2e^{i\overline{\beta}_1t}), \quad \text{se } \lambda \neq \pm 1,$$

$$z_2 = K((-i\overline{K}_1 + \overline{K}_2)e^{it} - it\overline{K}_2e^{it}), \quad \text{se } \lambda = 1,$$

$$z_2 = K((i\overline{K}_1 + \overline{K}_2)e^{-it} + it\overline{K}_2e^{-it}), \quad \text{se } \lambda = -1.$$

As constantes K_1, K_2 e K são determinadas a partir dos valores $z(0) = (z_1(0), z_2(0))$ e $\dot{z}(0) = (\dot{z}_1(0), \dot{z}_2(0))$,

$$\begin{aligned} Ke^{2i\lambda t} &= \varphi(\dot{c}) = z_2\dot{z}_1 - z_1\dot{z}_2 = \langle \dot{z}, z^{\perp}\rangle, \\ K &= \langle \dot{z}(0), z^{\perp}(0)\rangle. \end{aligned}$$

Se $\lambda \neq \pm 1$,

$$\begin{aligned} z_1(0) &= K_1 + K_2, \\ z_2(0) &= -iK(\overline{\beta}_1\overline{K}_1 + \overline{\beta}_2\overline{K}_2). \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema para K_1 e K_2, temos

$$K_1 = \frac{\beta_2 z_1(0) + iK\overline{z_2(0)}}{\beta_2 - \beta_1}, \quad K_2 = \frac{\beta_1 z_1(0) + iK\overline{z_2(0)}}{\beta_1 - \beta_2}.$$

Se $\lambda = 1$,

$$\begin{aligned} z_1(0) &= K_1, \\ z_2(0) &= K(-i\overline{K}_1 + \overline{K}_2). \end{aligned}$$

Portanto, $K_1 = z_1(0)$, $K_2 = K\overline{z_2(0)} - iz_1(0)$.

Se $\lambda = -1$,

$$\begin{aligned} z_1(0) &= K_1, \\ z_2(0) &= K(i\overline{K}_1 + \overline{K}_2). \end{aligned}$$

Portanto, $K_1 = z_1(0)$, $K_2 = K\overline{z_2(0)} + iz_1(0)$.

Como $\dot{z} \in D$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle z(t), z(t)\rangle = \langle \dot{z}(t), z(t)\rangle + \langle z(t), \dot{z}(t)\rangle = 0$. Assim $\langle z(t), z(t)\rangle = \langle z(0), z(0)\rangle = -1$ e $c(t) \in \mathbb{Q}^3$.

As geodésicas em Q^3 parametrizadas pelo comprimento de arco, com condições iniciais $z(0) = (z_1(0), z_2(0))$ e $\dot{z}(0) = (\dot{z}_1(0), \dot{z}_2(0))$ são escritas

$$\begin{aligned} c_\lambda : [a_1, b_1] &\rightarrow \mathbb{Q}^3 \\ t &\rightarrow c(t) = (z_1(t), z_2(t)) \end{aligned}$$

$$z_1(t) = K_1 e^{i\beta_1 t} + K_2 e^{i\beta_2 t}$$

$$z_2(t) = -iK(\overline{\beta}_1 \overline{K}_1 e^{i\overline{\beta}_2 t} + \overline{\beta}_2 \overline{K}_2 e^{i\overline{\beta}_1 t}),$$

onde

$$\beta_1 = \lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}, \quad \beta_2 = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1},$$

$$K = \langle \dot{z}(0), z^\perp(0)\rangle,$$

$$K_1 = \frac{\beta_2 z_1(0) + iK\overline{z_2(0)}}{\beta_2 - \beta_1} \quad \text{e} \quad K_2 = \frac{\beta_1 z_1(0) + iK\overline{z_2(0)}}{\beta_1 - \beta_2}, \quad \text{se } \lambda \neq \pm 1,$$

$$z_1(t) = (K_1 + tK_2)e^{it},$$

$$z_2(t) = K(-i\overline{K}_1 + \overline{K}_2(1 - it))e^{it},$$

onde $K = \langle \dot{z}(0), z^\perp(0)\rangle$, $K_1 = z_1(0)$ e $K_2 = K\overline{z_2(0)} - iz_1(0)$, se $\lambda = 1$,

$$z_1(t) = (K_1 + tK_2)e^{-it},$$

$$z_2(t) = K(i\overline{K}_1 + \overline{K}_2(1 + it))e^{-it},$$

onde $K = \langle \dot{z}(0), z^\perp(0)\rangle$, $K_1 = z_1(0)$ e $K_2 = K\overline{z_2(0)} + iz_1(0)$, se $\lambda = -1$.

Vamos determinar a aplicação exponencial no ponto $(0,i)$.

$$V \in D_{(0,i)} \leftrightarrow V = v(-i,0),\ v \in \mathbf{C},$$

$$\|V\| = \|v(-i,0)\| = |v|,$$
$$\frac{V}{\|V\|} = \frac{v(-i,0)}{|v|},$$
$$z(0) = (0,i),\ \dot{z}(0) = \frac{V}{\|V\|} = \frac{v}{|v|}(-i,0),$$
$$K = \langle \dot{z}(0), z^{\perp}(0)\rangle = \langle \frac{v}{|v|}(-i,0),(-i,0)\rangle = \frac{v}{|v|}.$$

Se $\lambda \neq \pm 1$,

$$K_1 = \frac{iK(-i)}{\beta_2-\beta_1} = \frac{-v}{2|v|\sqrt{\lambda^2-1}} = -K_2.$$

Se $\lambda = 1$,

$$K_1 = 0,\ K_2 = K(-i) = \frac{-iv}{|v|}.$$

Se $\lambda = -1$,

$$K_1 = 0,\ K_2 = K(-i) = \frac{-iv}{|v|}.$$

A aplicação exponencial em $(0,i)$ é escrita

$$\begin{array}{rcl} \exp_{(0,i)} : D_{(0,i)} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{Q}^3 \\ (v(-i,0),\lambda) & \longrightarrow & \exp_{(0,i)}(v(-i,0),\lambda) = c_\lambda(|v|) \end{array}$$

$\exp_{(0,i)}(v(-i,0),\lambda) = (z_1,z_2)$, onde

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{v}{2|v|\sqrt{\lambda^2-1}}\left(-e^{i(\lambda+\sqrt{\lambda^2-1})|v|} + e^{i(\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})|v|}\right), \\ z_2 &= \frac{i}{2\sqrt{\lambda^2-1}}\left(\overline{(\lambda+\sqrt{\lambda^2-1})e^{i(\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})|v|}} - \overline{(\lambda-\sqrt{\lambda^2-1})e^{i(\lambda+\sqrt{\lambda^2+1})|v|}}\right), \\ &\quad \text{se } \lambda \neq \pm 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= -ive^{i|v|}, \\ z_2 &= (i+|v|)e^{i|v|},\ \text{se } \lambda = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= -ive^{-i|v|}, \\ z_2 &= (i-|v|)e^{-i|v|},\ \text{se } \lambda = -1. \end{aligned}$$

Referências

[1] CAMACHO, C. & LINS NETO. *Teoria geométrica de folheações.* Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro.

[2] CARMO, M.P. DO *Differential geometry of curves and surfaces.* Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1976.

[3] CARMO, M.P. DO *Geometria Riemanniana.* Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1988.

[4] CHERN, S.S. & HAMILTON, R.S. On Riemannian metrics adapted to three-dim. contact manifolds. *Lec. Notes in Math.*, **1111**, 279–305.

[5] DINIZ, M.M. *Variedades sub-riemannianas de contato de dim. 3.* Mestrado IME-USP, 1996.

[6] GODBILLON, C. *Geometrie différentielle et mécanique analytique.* Herman, Paris, 1969.

[7] HSU, L. Calculus of variations via the Griffiths formalism. *J. Diff. Geom.*, **36** (1992) 551–589.

[8] KOBAYASHI, S. & NOMIZU, K. *Foundations of differential geometry.* v.1. Interscience (Wiley), New York, 1963.

[9] MONTGOMERY, R. A survey of singular curves in sub-riemannian geometry. *J. Dyn. Contr. Sys.*, 1 (1995) 49–90.

[10] RUMIN, M. Formes differentielles sur les variétés de contact. *J. Diff. Geom.*, **39(2)** (1994) 281–330.

[11] STRICHARTS, R.S. Sub-riemannian geometry. *J. Diff. Geom.*, **24** (1986) 221–263.

[12] TIKHONOV, A.N.; VASIL'EVA, A.B. & SVESHNIKOV, A.G. *Differential equations.* Springer-Verlag.

[13] VERSHIK, A.M.; GERSHKOVICH, V.Ya. Nonholonomic dynamical systems, geometry of distributions and variational problems. In: ARNOLD, V.I.; NOVIKOV, S.P. (Eds.). *Dynamical systems VII:* Integrable systems nonholonomic dynamical systems. Berlin: Springer-Verlag, 1994, p.4–81. 138p. (Encyclopaedia of Mathematical Sciences, v.16)

[14] WARNER, F.W. *Foundations of differential manifolds and Lie groups.* Scott, Foresman, Genview, 1971.