

**Álgebras de Hecke, Diagramas de Young
e Invariantes de 3-variedades**

Patrícia H. A. S. Nogueira

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: Topologia Algébrica
Orientador: Prof. Dr. Derek Hacon

Durante a elaboração deste trabalho a autora recebeu apoio financeiro do CNPq

-São Paulo, março de 1998-

Álgebras de Hecke, Diagramas de Young e Invariantes de 3-variedades

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Patricia H. A. S. Nogueira e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 13 de março de 1998.

- Prof. Dr. Derek Hacon (Orientador) - PUC - RJ
- Prof. Dr. Frank M. Forger - IME - USP
- Prof. Dr. George Svetlichny - PUC - RJ.

Abstract

This work intends to show the construction of an invariant of closed oriented 3-manifolds starting from an invariant of framed oriented links, $\chi(L)$, and the decoration of knot's diagrams. The main ideas involved come from the so-called "Skein Theory" and from the relations among the skein space generated by the elementary n -braids, the Hecke Algebra H_n and the Young diagrams.

Resumo

Este trabalho se propõe a apresentar a construção de um invariante de 3-variedades fechadas e orientáveis a partir de um invariante de links com *frame* orientados, $\chi(L)$, e decoração de diagramas de nós. Para isso, são usadas técnicas da chamada "Skein Theory" e as relações entre o "skein"-espaço gerado pelas n -tranças elementares, a Álgebra de Hecke H_n e os diagramas de Young.

Afinal, para que servem livros sem figuras?
Alice

Agradecimentos

À família maravilhosa que eu tenho, em especial aos meus pais Ana e Sylvio, aos meus avós Crizelídia e Mário, à minha tia Vera, ao meu irmão Sylvio e aos meus primos Beto e Ruth por todo apoio e carinho que recebi;

Aos amigos sempre pacientes com as minhas “crises pré-tese”: Major, Liane, Daniel, Ronaldo, Alexandre, Fábio e Rosa;

Aos meus grandes colegas e amigos de graduação e mestrado: Luís, Pedro e principalmente o Raul pelas consultas e conselhos “via-embratel”;

Aos professores que me passaram um pouco do seu amor pela Matemática, Zara Abud, Lucília Borsari, Hamilton Guidorizzi e Rubens Lintz;

Ao meu orientador Derek Hacon pelos toques sempre bem dados e pelo seu bom humor constante;

À Anna Aiston, da Universidade de Liverpool, pela atenção dispensada e por ter gentilmente cedido a mim os desenhos da sua tese, fazendo com que eu economizasse um tempo enorme;

E por final, ao maridão Mário por todo seu amor e companheirismo.

Índice

1	Conceitos Básicos	3
1.1	Introdução	3
1.2	Um breve estudo dos nós	6
1.2.1	Equivalência de nós	6
1.2.2	Diagramas de nós	6
1.3	Invariantes polinomiais de nós	10
1.3.1	O polinômio de Conway	10
1.3.2	O polinômio HOMFLY	11
1.4	Nós e Tranças	13
1.4.1	Nota: Movimentos de Markov	17
1.5	A álgebra de Hecke H_n	17
1.6	Caracterização de uma 3-variedade através dos nós	19
1.6.1	Cirurgia ao longo de nós	19
1.6.2	Cirurgia ao longo de fitas	22
1.7	Decoração de nós	24
2	“Skein” Espaços	26

2.1	Aplicações entre “Skein” Espaços	28
2.2	$S(\mathbb{R}^2)$	28
2.3	$S(\mathbb{R}_n^n)$	29
2.4	$S(S^1 \times I) = C$	30
3	Idempotentes de H_n	33
3.1	Diagramas de Young	33
3.2	Diagramas de Young e $\mathbb{C}S_n$	35
3.2.1	Representações de S_n	37
3.3	Construção dos idempotentes	40
3.4	Especializando H_n	54
3.5	Substituições no anel Λ	60
4	A Álgebra dos diagramas de Young	64
4.1	O produto no conjunto dos diagramas	64
4.2	Y e C^+ são álgebras isomorfas	65
4.2.1	Nota: Fórmula de Giambelli	66
4.3	Algumas relações entre os quase-idempotentes de H_n	72
5	Considerações finais: O invariante $T(L)$	103
5.1	O espaço R_N/\mathcal{I}	104
	Bibliografia	108

Capítulo 1

Conceitos Básicos

1.1 Introdução

O interesse na classificação dos nós nasce no século passado com a Teoria Atômica de Lord Kelvin, a qual associava cada tipo de nó a um elemento químico distinto. Na tentativa de obter uma tabela de elementos, P.G.Tait, em 1877, publicou o primeiro artigo contendo uma classificação empírica de nós.

Em 1928, J. Alexander descreve em seu trabalho um método que associa cada nó a um polinômio invariante por isotopia, o polinômio de Alexander, permanecendo este o único invariante polinomial por muitos anos.

A Teoria de Nós ganha maior fundamentação matemática com a publicação de “Knotentheorie” de K.Reidemeister em 1932, onde é mostrada a equivalência de nós através da equivalência de diagramas via certos movimentos chamados de movimentos de Reidemeister. A grande mudança só ocorre em 1970, quando Conway introduz novos métodos combinatórios, os quais deram origem ao que hoje chamamos de “Skein Theory”, produzindo o polinômio de Conway.

Em 1984, uma pequena “revolução” acontece com o trabalho do matemático neo-zelandês Vaughan Jones, o qual produz um novo invariante polinomial de nós via Álgebra de Operadores, provocando uma onda de trabalhos na área. Apenas quatro meses depois é anunciada a descoberta de um novo invariante polinomial, o polinômio HOMFLY (nome originado das iniciais de seus autores: Hoste, Ocneanu, Millet, Freyd, Lickorish e Yetter), obtido de forma independente por grupos distintos (meses

depois dois poloneses Prsytycki e Traczyk publicam trabalho em que apresentam o mesmo polinômio obtido independentemente dos outros grupos).

Vale observar que nenhum dos polinômios citados é um invariante completo de nós. Em particular, o HOMFLY é o mesmo para todo par de nós conhecidos como nós mutantes.

Também com o trabalho de Jones surge uma nova interação Matemática-Física, através, principalmente, do trabalho de Witten, no qual aparece uma interpretação do polinômio de Jones na Teoria Quântica de Campos, (a qual possui profundas ligações com a topologia de baixas dimensões [Atiyah]).

Em [RT2], Turaev e Reshetikhin deram um método para a construção de invariantes topológicos de 3-variedades a partir de Álgebras de Hopf modulares. Por outro lado, em [TW], Turaev e Wenzl provaram que a teoria de representações de $U_q(sl(N))$ (o chamado Grupo Quântico da álgebra de Lie $sl(N)$), quando consideradas em $q = r$ -ésima raiz primitiva da unidade, gera uma álgebra de Hopf Modular e por conseguinte invariantes topológicos de 3-variedades (os $sl(N)$ -invariantes quânticos).

Essa dissertação de mestrado é baseada no trabalho de Anna Aiston ([Anna]), onde é mostrada a construção de um invariante topológico de variedades de dimensão 3, sem bordo, compactas, conexas e orientáveis, $T(L)$, usando como base o Teorema de Kirby [Ki] e técnicas do que vem sendo chamada de “Skein Theory” (Teoria de “entrançamentos”) introduzida por Conway em [C] e detalhada no trabalho de Lickorish [Li]. A autora também mostra a equivalência de $T(L)$ e o $sl(N)$ -invariante quântico já citado.

Nosso objetivo é mostrar como se dá a construção do invariante $T(L)$ traçando *sempre que possível* um paralelo com o $sl(N)$ -invariante quântico (sem contudo entrarmos efetivamente na construção deste último).

Como ponto de partida usaremos o polinômio “framed” HOMFLY $\chi(L)$ que é um invariante (por isotopia regular) de links orientados, mas que “infelizmente” não é invariante sob os movimentos de Kirby. Sendo assim, “complicamos” o diagrama original usando um processo conhecido como **decoreção de nós**. A cada diagrama P no anel $S^1 \times I$, associamos um outro que é o resultado da decorção de L por P , chamado **satélite** de L e denotado por $L * P$. Esse processo tem a propriedade de que quando dois links L_1 e L_2 são equivalentes, os decorados com o mesmo padrão P também o são. Logo, o valor de $\chi(L * P)$ é também um invariante de links associado a L .

A idéia básica é que a partir de alguma escolha “esperta” de padrões no anel e após algumas correções, possamos encontrar um valor invariante pelos movimentos de Kirby e portanto um invariante topológico de 3-variedades.

Para isso, usaremos uma versão “diagramática” da álgebra de Hecke H_n e provaremos que todo elemento de C^+ é o fecho de um elemento de H_n para algum n . Além disso, mostraremos que C^+ é isomorfa como Λ -álgebra à Y , a álgebra dos diagramas de Young, que por sua vez aparecem na produção de idempotentes em H_n , cujos fechados irão gerar os padrões especiais que servirão de bloco para a construção do invariante $T(L)$.

A construção dos $sl(N)$ -invariantes quânticos baseia-se, por sua vez, na associação do diagrama L a certas representações de $U_q(sl(N))$, através de um processo denominado **coloração**.

Por outro lado, temos que o anel das representações $U_q(sl(N))$ (com a multiplicação dada pelo produto tensorial), é isomorfo à álgebra Y_N , dos diagramas de Young com menos de N linhas.

Lembrando que $C^+ \simeq Y$, temos que, a grosso modo, “colorir” um diagrama L com certas representações V_λ , onde $\lambda \in Y$, é o mesmo que “decorar” L com um diagrama de Young λ (resultado demonstrado em [Anna]), vindo portanto daí a relação entre o invariante $T(L)$ e o $sl(N)$ -invariante quântico.

Por fim, gostaríamos de ressaltar que a proposta inicial ao escolher esse tema foi mostrar que com técnicas mais elementares pode-se chegar aos mesmos resultados baseados na Teoria dos Grupos Quânticos, a qual exige maior embasamento matemático. Porém, no decorrer do trabalho, descobrimos que a abordagem feita em [Anna] contém alguns resultados cruciais (em especial a demonstração da invariância de $T(L)$ sob os movimentos de Fenn-Rourke) cujas demonstrações envolvem essa teoria, e que portanto, sua construção dos “skein”-invariantes não está completamente divorciada dos invariantes quânticos.

Observamos que existe um outro trabalho realizado por Yokota em [Y], não abordado por essa dissertação, que não faz uso direto dessa conexão e que chega basicamente aos mesmos resultados de Aiston.

1.2 Um breve estudo dos nós

1.2.1 Equivalência de nós

Definições 1.2.1 Dizemos que L é um **link** de k componentes se $L \subseteq \mathbb{R}^3$ ou S^3 é homeomorfo à união disjunta de k cópias de S^1 . Denotaremos $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_k$. L é dito **orientado** quando cada componente de L possui uma orientação. Quando $k = 1$, e portanto L possui apenas uma componente, L é chamado de **nó**.

Seja $I = [0, 1]$ e X um espaço topológico.

Definição 1.2.1 Uma homotopia $h : X \times I \rightarrow X$ é chamada uma **isotopia ambiente** se h_0 é a aplicação identidade e h_t é um homeomorfismo para todo $t \in I$.

Definições 1.2.2 Dois nós K_1 e K_2 são ditos **isotópicos** se existe uma isotopia ambiente (em $X = \mathbb{R}^3$) tal que $h_1(K_1) = K_2$. No caso de nós orientados, pede-se que a isotopia preserve a orientação. De forma análoga definimos **links isotópicos**.

A fim de evitarmos comportamentos patológicos (os chamados nós selvagens), vamos nos restringir nesse trabalho aos **nós poligonais** (em inglês, **tames**) que são os nós isotópicos a linhas poligonais simples e fechadas em \mathbb{R}^3 (ou S^3), ajustando assim as definições de isotopia ambiente para a categoria PL , ou “linear por partes”.

1.2.2 Diagramas de nós

Podemos recuperar a descrição de um nó K (ou link) apenas por uma projeção em um plano conveniente, $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow E$. Um ponto $P \in p(K) \subseteq E$ cuja pré-imagem sob a projeção contém mais de um ponto é chamado **ponto múltiplo**. Quando essa pré-imagem contém apenas dois pontos, este é chamado de **ponto duplo**.

Definição 1.2.2 Uma projeção $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow E$ de um nó K é dita **regular** se:

- (i) Existem finitos pontos múltiplos e todos estes são duplos;

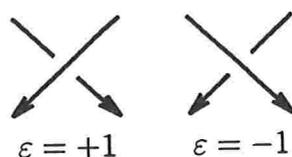
- (ii) Nenhum vértice de K (tomando-o como uma linha poligonal simples e fechada) é mapeado em um ponto duplo.

Novamente, observamos que a extensão aos links é imediata.

Proposição 1.2.1 ([BZ], pg.8) *O conjunto das projeções regulares é aberto e denso no espaço de todas as projeções.*

Isto significa que, dado um nó K (ou link), sempre podemos tomar uma projeção regular deste. Chamamos a imagem de K por uma projeção regular de **diagrama** do nó K . Novamente, se o nó é orientado, pedimos que a projeção “carregue” essa informação.

Nesse caso, definimos o sinal de um cruzamento c , $\varepsilon(c)$, pela regra:



Sejam dois nós K_1 e K_2 . Fixemos um diagrama de $K_1 \cup K_2$. Definimos $lk(K_1, K_2)$ como:

$$lk(K_1, K_2) = \sum_c \varepsilon(c)$$

onde a soma é tomada sobre todos os cruzamentos c de K_1 sobre K_2 e $\varepsilon(c) = \pm 1$ o sinal do cruzamento c .

Definição 1.2.3 Definimos o **número de enlaçamento** de K_1 e K_2 (em inglês **linking number**), como o número $lk(K_1, K_2)$.

OBS: Há várias outras definições (ver [Rol], pg.132) de número de enlaçamento, todas equivalentes a menos de um sinal.

É fácil ver que $lk(K_1, K_2)$ é inalterado se revertemos a orientação de ambas as componentes e que muda o sinal caso revertamos a orientação de apenas uma. Além disso, decorre da definição que quando $lk(K_1, K_2) \neq 0$ esses nós necessariamente são conectados (isto é, não existe uma isotopia ambiente que possibilite separá-los por dois abertos disjuntos).

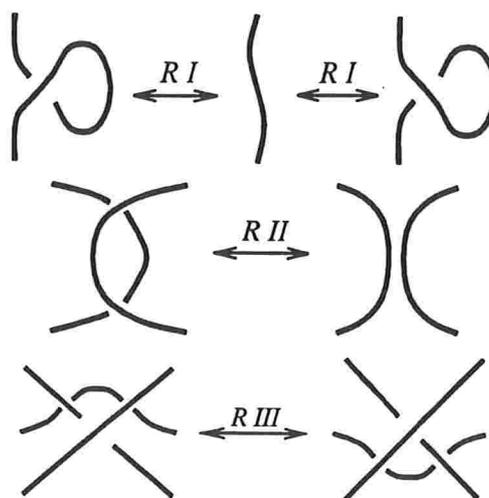
De forma análoga ao que fizemos, podemos definir o **número de auto-enlaçamento**, $w(L)$, (em inglês, **writhe**) de um link orientado L como:

$$w(L) = \sum_c \varepsilon(c)$$

onde c percorre todos os cruzamentos de um diagrama de L .

A princípio, esses números não estão bem definidos, pois não sabemos se independem do diagrama escolhido. Vamos agora dar condições (necessárias e suficientes) para que dois diagramas distintos representem nós equivalentes.

Definição 1.2.4 Os **movimentos de Reidemeister** são os movimentos de caráter local, realizados em diagramas, descritos abaixo:



Teorema 1.2.1 ([PS], pg.11) *Dois diagramas de links correspondem a links isotópicos se e somente se um pode ser obtido do outro através de uma sequência finita de movimentos de Reidemeister RI, RII e RIII.*

Através desse resultado mostramos, por exemplo, que o número de enlaçamento é invariante por isotopia ambiente de links orientados:

Proposição 1.2.2 *O número de enlaçamento mantém-se inalterado sob os movimentos de Reidemeister, isto é, independe do diagrama escolhido. Além disso, vale que $lk(K_1, K_2) = lk(K_2, K_1)$*

Demonstração:

O primeiro movimento, RI , envolve somente uma componente e portanto não afeta o número de enlaçamento. Sob $RIII$ o número e tipos de cruzamentos não mudam e portanto também não afeta lk .

Já com o movimento RII , dois cruzamentos são criados ou removidos, porém estes são sempre de sinais opostos, não afetando a soma final.

Para ver que $lk(K_1, K_2) = lk(K_2, K_1)$, basta observar que no segundo caso, existe uma projeção regular (um diagrama) onde todo cruzamento de K_1 sobre K_2 vira um cruzamento de K_2 sobre K_1 com o mesmo sinal. ■

Analogamente, escolhido um diagrama de um link orientado L , o número de auto-enlaçamento $w(L)$ é invariante pelos movimentos RII e $RIII$. Porém é claramente afetado por RI , pois um cruzamento é criado ou destruído, adicionado-se ou subtraindo-se 1. Observe que $w(L)$ não é afetado pelo movimento $R'I$ descrito abaixo:



Definição 1.2.5 Uma sequência finita de movimentos RII , $RIII$ e $R'I$ realizada sobre um diagrama é dita uma **isotopia regular**. Dizemos que dois diagramas são **regularmente isotópicos** se um pode ser obtido do outro através de isotopia regular.

Concluimos então que $w(L)$ é invariante sob isotopia regular.

1.3 Invariantes polinomiais de nós

Para esse trabalho, somente interessarão os polinômios **HOMFLY** e o de **Conway**, este podendo ser obtido (transgredindo a ordem de cronológica) do primeiro.

1.3.1 O polinômio de Conway

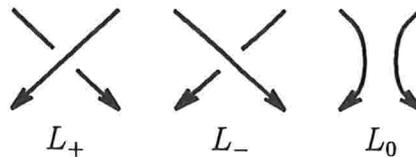
O polinômio de Conway é um invariante de links orientados que pode ser definido de forma axiomática da seguinte maneira:

(A1) Para cada diagrama de link L orientado, existe um polinômio $\nabla(L) \in \mathbb{C}[z]$, tal que:

$$L \text{ isotópico a } L' \Rightarrow \nabla(L) = \nabla(L').$$

(A2) L isotópico a $0 \Rightarrow \nabla(L) = 1$.

(A3) Se L_+ , L_- e L_0 são links que diferem apenas localmente pelos seguintes cruzamentos:



$$\text{então } \nabla(L_+) - \nabla(L_-) = z\nabla(L_0).$$

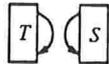
Chamamos a relação dada em (A3), da “**skein**”-relação do polinômio de Conway.

OBS: A existência e várias outras propriedades desse polinômio podem ser encontradas em [Kau1].

Definição 1.3.1 um link é chamado de **link desconexo**, (em inglês, **split link**) se é equivalente a dois sublinks não vazios os quais se encontram contidos em regiões disjuntas do plano.

Proposição 1.3.1 *Se L é um link desconexo, então $\nabla(L) = 0$.*

Demonstração:

Podemos assumir que L tem um diagrama da forma: 

Sejam portanto $L_+ =$  e $L_- =$  .

Fazendo uma rotação no espaço vemos que os links L_+ e L_- são ambiente isotópicos e portanto $\nabla(L_+) = \nabla(L_-)$, por (A1). Logo, pela “skein”-relação dada em (A3) temos $\nabla(L) = 0$. ■

Agora, citaremos mais uma propriedade do polinômio de Conway, que nos será útil posteriormente:

Proposição 1.3.2 ([Kau2], pg.82) *O polinômio de Conway de um nó é dado por:*

$$\nabla(K) = 1 + zD(z)$$

onde D é outro polinômio em z . Quando L é um link de mais de uma componente temos:

$$\nabla(L) = zD'(z)$$

onde D' é um polinômio em z .

1.3.2 O polinômio HOMFLY

O polinômio HOMFLY, $P(L) \in \mathbb{C}[v^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ pode ser definido, a menos de um escalar, pela “skein”-relação:

$$v^{-1}P(L_+) - vP(L_-) = zP(L_0)$$

onde L_+ , L_- e L_0 são os links que diferem localmente por um cruzamento segundo a regra descrita na subseção anterior.

Normalizamos P pedindo que o valor de P no diagrama vazio seja 1. Como uma consequência da “skein”-relação temos:

$$P(L \cup O) = \frac{v^{-1} - v}{z} P(L)$$

onde $L \cup O$ denota a **união distante**, isto é, união gerando um link desconexo, de L unido com uma curva simples fechada. Esse polinômio é invariante sob os três movimentos de Reidemeister, ainda que não saia diretamente da “skein”-relação e é multiplicativo quando calculado em uma união distante, isto é, se $L_1 \cup L_2$ é uma união distante, temos:

$$P(L_1 \cup L_2) = P(L_1)P(L_2).$$

Nota: Novamente, para maiores detalhes e demonstrações de propriedades desse polinômio, ver [Kau1].

No presente trabalho, nos interessará apenas links invariantes sob *isotopia regular* e portanto vamos modificar o polinômio P para esse fim. Chamaremos esse novo polinômio de “framed” HOMFLY e o definiremos da seguinte maneira:

$$\chi(L) = (xv^{-1})^{w(L)} P(L)$$

onde $w(L)$ é o número de auto-enlaçamento de L .

A relação abaixo passa a valer:

$$\chi \left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \right) = (xv^{-1}) \chi \left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array} \right)$$

E a “skein”-relação precisa ser ajustada para:

$$x^{-1} \chi(L_+) - x \chi(L_-) = z \chi(L_0).$$

Definição 1.3.2 Seja Λ o anel dado por:

$$\Lambda = \mathbb{C}[x^{\pm 1}, v^{\pm 1}, s^{\pm 1}, z, \delta] / \langle v^{-1} - v = \delta z \rangle$$

onde $z = s - s^{-1}$.

Observamos que $\chi(L)$ é um elemento desse anel. A variável δ é introduzida para posterior especialização de Λ , na qual será necessário “mandarmos” z para 0, enquanto que as variáveis s e s^{-1} são necessárias para descrição das relações em H_n , Λ -álgebra que definiremos no próximo capítulo. É imediato que ao fazermos $x=v=1$ recuperamos o valor do polinômio de Conway, fato que nos será útil posteriormente.

1.4 Nós e Tranças

Definição 1.4.1 Em \mathbb{R}^3 , considere os pontos $A_i = (i, 0, 0)$ e $B_i = (i, 0, 1)$, onde $i = 1, \dots, n$. Uma curva simples unindo A_i a B_j é dita uma linha ascendente se cada plano horizontal a corta em exatamente um ponto. Uma **n-trança**, ou trança de n linhas, é o conjunto de n linhas ascendentes unindo os pontos A_i 's aos B_j 's, duas a duas com interseção nula.

De forma análoga aos nós, definimos equivalência no conjunto das tranças via isotopia ambiente relativa à $\{A_i, B_j / i, j = 1, \dots, n\}$ e diagramas correspondentes a esses elementos, (sempre lembrando que estamos na categoria PL, ou linear por partes). Dois diagramas de tranças representam tranças equivalentes se forem obtidos um do outro por uma sequência finita de movimentos *RII* e *RIII* (e seus inversos), relativos aos pontos do bordo. Chamamos o conjunto das classes de equivalência de n -tranças de B_n , onde podemos definir um produto induzido pela operação geométrica “colar embaixo” tornando-o um grupo.

Teorema 1.4.1 ([A]) B_n é isomorfo ao grupo abstrado gerado por:

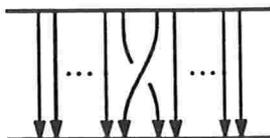
$$\langle \sigma_i, i = 1, \dots, n - 1 \rangle$$

com as relações:

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| > 1$$

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n - 2$$

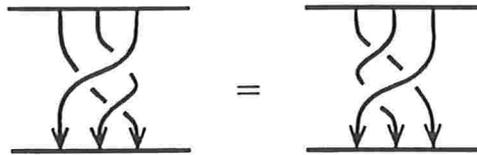
onde σ_i corresponde à n -trança elementar:



Obs: Gráficamente, a equivalência pelo *RIII* é dada pela relação

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$$

como podemos ver abaixo:



Nota:

- (1) Para maiores detalhes consultar [BZ] e [Birman].
- (2) Estaremos constantemente ao longo desse trabalho cometendo o abuso de hora tratar de uma trança como o objeto geométrico, hora como sua classe de equivalência.

Obs: Como o nosso interesse está focado em *links* orientados, vamos considerar a partir de agora tranças dotadas de orientação, a qual no nosso caso, por convenção será sempre “de cima para baixo”.

Definição 1.4.2 O fecho de uma n -trança $\beta \in B_n$ é definido de forma natural como o link $\widehat{\beta}$ obtido unindo cada pontos A_i com o ponto B_i através de uma curva simples sem interseção com β (excetuando-se obviamente os pontos A_i, B_i) e de tal forma que duas a duas possuam interseção vazia.

Assim como foi feito para nós, damos sinais a cada tipo de cruzamento. Numerando as linhas de uma n -trança de 1 a n , considere as i -ésima e j -ésima linhas tais que $i > j$. Quando a i -ésima linha cruza a j -ésima linha “por cima” dizemos que o cruzamento é positivo. Caso contrário, o cruzamento é considerado negativo.

Definição 1.4.3 Seja β uma n -trança. Definimos o número de auto-enlaçamento $w(\beta)$ de forma análoga ao que foi feito para diagramas de nós, isto é, fazendo-se a somatória dos sinais dos cruzamentos de β .

Observe que esse número, por termos uma estrutura de grupo, é dado pela soma dos expoentes da trança β escrita como uma palavra nas tranças geradoras σ'_i s. A cada trança $\beta \in B_n$ associamos naturalmente uma permutação $\pi \in S_n$, definida por $\pi(i) = j$, se β liga o ponto A_i ao ponto B_j . Essa aplicação gera, de forma imediata, um epimorfismo $B_n \rightarrow S_n$, onde cada trança elementar σ_i é levada na transposição $\phi_i = (i \ i+1)$. Lembramos que S_n é gerado por:

$$\{\phi_i / i = 1, \dots, n-1\}$$

com as relações:

- (i) $\phi_i^2 = 1$
- (ii) $\phi_i \phi_j = \phi_j \phi_i$, se $|i - j| > 1$
- (iii) $\phi_i \phi_{i+1} \phi_i = \phi_{i+1} \phi_i \phi_{i+1}$

S_n é, portanto, claramente obtido de B_n adicionando-se a relação $\sigma_i^2 = 1$. Essa associação mostra-se importante em vários aspectos, entre eles:

Proposição 1.4.1 *O fecho de uma n -trança é um nó se e somente se a permutação a ela associada é um n -ciclo.*

Demonstração:

Lembrando a definição geométrica de uma trança, observamos primeiramente que o fecho de uma trança tem uma única componente se e somente se “saindo” de A_i atingimos pelo fecho um outro ponto A_j , para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Isso significa portanto que a órbita do elemento i pela permutação associada à trança contém $\{1, \dots, n\}$, para qualquer i . Logo, essa permutação é um n -ciclo. ■

Definição 1.4.4 Para cada permutação $\pi \in S_n$, definimos uma n -trança ω_π chamada **trança de permutação positiva**, pelas seguintes propriedades:

- (i) Todas as linhas são orientadas de cima para baixo;
- (ii) Todos os cruzamentos são positivos;
- (iii) A permutação associada a ω_π é a permutação π ;

(iv) Cada par de linhas cruzam-se no máximo uma vez.

Definimos uma **trança de permutação negativa** de maneira análoga, porém pedindo que todos os cruzamentos sejam negativos. Denotaremos essa trança por $\bar{\omega}_\pi$ e observamos que:

$$\omega_\pi^{-1} = \bar{\omega}_{\pi^{-1}}.$$

Vemos a partir dessas propriedades, que dada uma permutação π existe uma trança de permutação positiva ω_π . Na verdade, essa relação é biunívoca:

Proposição 1.4.2 *As tranças de permutação positiva são unicamente determinadas pelas propriedades (i)-(iv).*

Demonstração:

Seja $\pi \in S_n$. Sejam ω_π e $\tilde{\omega}_\pi$ duas n -tranças de permutação positiva associadas a π (isto é, duas n -tranças que satisfazem as propriedades (i)-(iv)).

Nomeamos as linhas de ambas de 1 a n , de acordo com seu ponto inicial. Por construção, duas linhas distintas i e j (em ambas as tranças), têm no máximo um ponto de cruzamento, sendo que quando $i < j$, a j -linha passa à frente da i -linha (pois os cruzamentos são por hipótese positivos). Como consequência, podemos desenhar cada i -linha das duas tranças em planos distintos sucessivos.

Sendo assim, em cada plano, mantendo as extremidades fixas, pois por hipótese elas induzem a mesma permutação, podemos deformar a i -linha de ω_π na i -linha de $\tilde{\omega}_\pi$, e portanto as duas tranças são equivalentes. ■

Obs: (I) É imediato que o resultado vale para as tranças de permutação negativa, pois foi usado apenas que os cruzamentos eram todos de mesmo sinal.

(II) Note que se ω_π é trança de permutação positiva, temos $w(\beta) = l(\pi)$, onde $l(\pi)$ é o **tamanho da permutação** π (isto é, o tamanho da menor palavra nos geradores ϕ_i que representa π).

1.4.1 Nota: Movimentos de Markov

Vimos que o fecho de uma trança gera um *link*. O Teorema de Alexander ([PS], pg.55) nos diz que todo link provém do fecho de uma trança. Markov, por sua vez, obteve condições puramente algébricas que determinam quando duas tranças geram links equivalentes:

Teorema 1.4.2 *Os fechos de duas tranças são equivalentes se e só se uma trança pode ser obtida da outra através de uma sequência finita dos movimentos abaixo:*

$$M1: \quad \beta \longleftrightarrow \alpha\beta\alpha^{-1} \quad \alpha, \beta \in B_n$$

$$M2: \quad \beta \longleftrightarrow \beta\sigma_n^{\pm 1} \quad \beta \in B_n$$

onde a multiplicação $\beta\sigma_n$ faz sentido considerando a inclusão $B_n \subset B_{n+1}$ feita adicionando-se uma linha a cada n -trança β .

Esses movimentos são chamados **movimentos de Markov** e vê-se facilmente que eles não afetam o fecho de uma trança. Porém, a demonstração da outra implicação do teorema é extremamente complicada podendo ser encontrada em [Birman].

1.5 A álgebra de Hecke H_n

A \mathbb{C} -álgebra de Hecke $H_n(q)$ do tipo A é definida pelos geradores:

$$\{g_1, g_2, \dots, g_{n-1}\}$$

e relações :

$$(i) \quad g_i^2 = (q-1)g_i + q$$

$$(ii) \quad g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-2$$

$$(iii) \quad g_i g_j = g_j g_i, \quad |i-j| > 1$$

Observe que há uma representação imediata de B_n em $H_n(q)$ identificando σ_i com o gerador g_i , na verdade essa álgebra é um quociente da álgebra de grupo de B_n . Usaremos ao longo desse trabalho uma outra versão de $H_n(q)$, a qual chamaremos H_n , dada pelos geradores:

$$\{\sigma_i / i = 1, \dots, n-1\}$$

e relações:

$$(H1) \quad \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i, \quad |i - j| > 1$$

$$(H2) \quad \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-2$$

$$(H3) \quad x^{-1} \sigma_i - x \sigma_i^{-1} = z$$

sobre o anel Λ (ver 1.3.2), observando que podemos passar de uma para outra através da identificação: $x = s$ e $q = s^2$.

Observe que em Λ podemos escrever a relação (H3) na forma:

$$(\sigma_i - a)(\sigma_i - b) = 0$$

onde $a = -xs^{-1}$ e $b = xs$.

A aparente ambiguidade em usarmos o mesmo nome para as tranças elementares e para os geradores de H_n , desaparecerá no próximo capítulo onde veremos uma versão “geométrica” dessa álgebra através do que chamaremos “skein”-espaços.

Nota:

(1) Lembramos que a álgebra de grupo de S_n , $\mathbb{C}S_n$, é dada pelos geradores:

$$\{\phi_i = (i \ i+1) / i = 1, \dots, n-1\}$$

com as relações:

$$(i) \quad \phi_i^2 = 1$$

$$(ii) \quad \phi_i \phi_{i+1} \phi_i = \phi_{i+1} \phi_i \phi_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-2$$

$$(iii) \quad \phi_i \phi_j = \phi_j \phi_i, \quad |i - j| > 1$$

Logo, fazendo $q = 1$ em $H_n(q)$ recuperamos a álgebra $\mathbb{C}S_n$. Isto é, $H_n(q)$ pode ser vista como uma “deformação” de $\mathbb{C}S_n$. Wenzl, em [WZ], mostrou que quando $q \neq 0$ e q não é uma l -ésima raiz da unidade para $l = 2, \dots, n$, $H_n(q) \simeq \mathbb{C}S_n$ como módulos.

- (2) Pelo Teorema de Markov, vemos que, um funcional f definido em $H_n(q)$ tal que $f(h_1.h_2) = f(h_2.h_1)$ e que seja invariante sob os movimentos de Markov, gera portanto um invariante de *links*. Essa, pois, é a base da construção do **polinômio de Jones** (ver [Jones]), utilizando-se o traço de Ocneanu em $H_n(q)$ para criar o invariante que acabou por provocar grandes mudanças no cenário da Teoria de Nós, como citamos na Introdução .

1.6 Caracterização de uma 3-variedade através dos nós

O objetivo dessa seção é apenas dar uma idéia de como um *link* L pode caracterizar uma 3-variedade fechada (sem bordo e compacta), conexa e orientável M através de um processo o qual damos o nome de **cirurgia**, justificando assim o interesse nos invariantes de nós para a construção de um invariante topológico de M . Uma exposição detalhada sobre o assunto pode ser encontrada em [Rol] e [PS].

1.6.1 Cirurgia ao longo de nós

Definições 1.6.1 Um **toro sólido** $V \subseteq S^3$ é uma 3-variedade (isto é, uma variedade de dimensão 3) homeomorfa a $S^1 \times D^2$. Um homeomorfismo $h : S^1 \times D^2 \rightarrow V$ é chamado um **referencial** de V .

Uma curva simples fechada não trivialmente homotópica em ∂V é chamada **meridiano** de V se é homotopicamente trivial em V . Uma curva simples fechada em ∂V é chamada **longitude** de V se intercepta algum meridiano V transversalmente em um único ponto.

Proposição 1.6.1 ([Rol], pg.29)

- (i) J é um meridiano de V se e somente se J é da forma $h(1 \times \partial D^2)$ para algum referencial h .
- (ii) K é uma longitude de V se e somente se K é da forma $h(S^1 \times 1)$ para algum referencial h de V .

Proposição 1.6.2 ([Rol], pg.30) *Quaisquer dois meridianos são equivalentes em termos de isotopia ambiente em V . Por outro lado, existem infinitas classes de isotopia ambiente de longitudes em V .*

Logo, a definição de meridiano é intrínseca, sendo que a de longitude envolve uma escolha.

Proposição 1.6.3 ([Rol], pg.31) *A menos de isotopia ambiente em V , existe uma única longitude l que é homologicamente trivial em $S^3 \setminus V$, a qual chamaremos de longitude preferencial.*

Observamos que a classe de homotopia do meridiano, m e a classe da longitude preferencial, l são geradores do $\pi_1(\partial V)$.

Definição 1.6.1 Uma vizinhança tubular de um nó $K \subseteq S^3$ é uma imersão :

$$f : K \times D^2 \rightarrow S^3$$

onde $f(x, 0) = x, \forall x \in K$. Uma vizinhança tubular de um nó é portanto um toro sólido.

Proposição 1.6.4 ([Rol], pg.133) *Seja V uma vizinhança tubular de um nó orientado K . Uma longitude preferencial l de V é caracterizada por $lk(l, K) = 0$.*

Considere um link $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ e vizinhanças tubulares V_i para cada componente L_i , duas a duas sem interseção. Seja h a união dos homeomorfismos $h_i : \partial V_i \rightarrow \partial V_i$ para $i = 1, \dots, n$. Considere M o espaço obtido através da união:

$$S^3 \setminus (\text{int}(V_1) \cup \dots \cup \text{int}(V_n)) \bigcup_h (V_1 \cup \dots \cup V_n)$$

onde identificamos os bordos das vizinhanças V_i 's através do homeomorfismo h .

Proposição 1.6.5 ([Rol], pg.258) *M é uma 3-variedade sem bordo, compacta, conexa e orientável que depende somente a menos de homeomorfismo, da classe de homotopia de $h_i(m_i)$, onde m_i é meridiano de V_i , para todo $i = 1, \dots, n$.*

Dizemos que M assim definida é obtida por uma **cirurgia** em S^3 ao longo do *link* L . A fim de caracterizarmos melhor esse procedimento devemos caracterizar portanto, segundo o resultado acima, a classe de homotopia das curvas $h_i(m_i)$.

Seja V um toro sólido, m um meridiano de V e $h : \partial V \rightarrow \partial V$ um homeomorfismo. Temos que $J = h(m)$ é um curva fechada simples em ∂V que pode ser caracterizada como um elemento de $H_1(\partial V)$. Por outro lado, como $\pi_1(\partial V) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, e portanto abeliano, podemos caracterizar J como uma curva no grupo fundamental de ∂V . Logo, sendo $[J]$ a classe de J nesse grupo, temos que :

$$[J] = pm + ql$$

onde m e l são os geradores de $\pi_1(\partial V)$ e $p, q \in \mathbb{Z}$.

Proposição 1.6.6 ([PS], pg.45) *Seja J curva simples fechada em ∂V . Nessas condições uma das afirmativas abaixo é válida:*

- (i) $\text{mdc}(p, q) = 1$;
- (ii) $p = 0$ e $q = \pm 1$;
- (iii) $p = \pm 1$ e $q = 0$.

Voltemos à cirurgia ao longo de $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$ um *link* orientado, considerando para cada componente a vizinhança tubular V_i , para todo $i = 1, \dots, n$. Para cada componente de L existe, como já vimos, uma longitude preferencial l_i orientada da mesma maneira que L_i e um meridiano m_i tal que $lk(L_i, m_i) = \pm 1$. Tomando m_i e l_i como os geradores do grupo fundamental de ∂V_i , como $J_i = h_i(m_i)$ é uma curva fechada simples, pela Proposição anterior, podemos caracterizar a classe de J_i pela razão:

$$r_i = \frac{p_i}{q_i}$$

onde $[J_i] = p_i m_i + q_i l_i$.

Chamamos essa razão de **coeficiente de cirurgia** associado à componente L_i . Quando $q_i = 0$, e portanto $p_i = \pm 1$, escrevemos $r_i = \infty$. Observe que nesse caso a cirurgia é trivial, isto é, a variedade obtida é novamente S^3 .

Nota:

- (1) A escolha da orientação de L_i é irrelevante, pois invertendo-se a orientação deste, a orientação de $h_i(m_i)$ também é invertida.
- (2) Se K é o nó trivial, a cirurgia com coeficiente $r = 0$ resulta em $M \simeq S^2 \times S^1$. Quando $r = \pm 1, \pm 1/2, \dots, \pm 1/n, \dots, \infty$, temos $M \simeq S^3$.

Dizemos que a cirurgia é **inteira** quando os coeficientes r_i são números inteiros. Surpreendentemente, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.6.1 ([PS], pg.104) *Toda 3–variedade sem bordo, compacta, conexa e orientável pode ser obtida através de uma cirurgia inteira em S^3 ao longo de um link L .*

1.6.2 Cirurgia ao longo de fitas

Ao coeficiente de cirurgia associado a uma certa componente L_i de um *link* L damos o nome de *framing* de L_i . Vimos que, sob uma cirurgia inteira (a qual é sempre possível) ao longo de uma certa componente K com *framing* p , o meridiano é mapeado na curva J , onde:

$$[J] = pm + l.$$

Nessa situação, J e K determinam uma fita em S^3 (como componentes do bordo desta), onde a informação $r = p$ traduz-se em:

$$lk(J, K) = lk(pm + l, K) = p$$

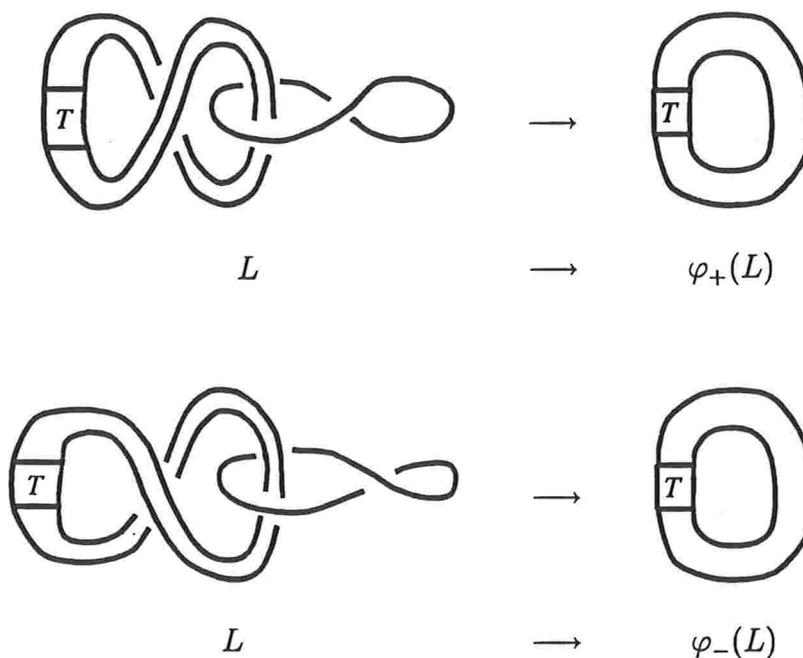
(o que decorre da escolha dos geradores m e l) e portanto em p “torcidas” na fita correspondente. Por sua vez, uma fita em S^3 pode ser transformada por isotopia em uma fita plana, usando-se o chamado “belt trick”.

A idéia portanto é trabalhar com diagramas no plano representando essa fita, olhando apenas para o diagrama de uma das componentes do bordo, o qual chamaremos de **diagrama de link com frame**. Prova-se ([PS]) que mudanças nesse diagrama efetuadas por isotopia regular não afetam a fita original e portanto a cirurgia correspondente em S^3 . Mais ainda, vale que:

Teorema 1.6.2 ([PS], pg.124) *Dois diagramas de links com frame correspondem a links isotópicos com mesmo framing (e portanto, produzem a mesma variedade) se e somente se esses diagramas podem ser obtidos um do outro via isotopia regular.*

Seja $M(L)$ a variedade obtida através de uma cirurgia em S^3 determinada pelo diagrama de *link* com *frame* L . O próximo resultado nos permite “decidir” quando duas cirurgias produzem, a menos de homeomorfismo, as mesmas variedades, olhando apenas para o diagrama L .

Teorema 1.6.3 [FR],[Ki], [Li1] *Existe um homeomorfismo preservando orientação entre $M(L)$ e $M(L')$ se e somente se os diagramas de links com frame L e L' podem ser obtidos um através do outro por isotopia regular (e isotopias do plano) e por uma sequência finita de movimentos de Fenn-Rourke, a saber:*



Este Teorema nos propicia, portanto, encontrar invariantes de 3-variedades fechadas, conexas e orientáveis produzindo invariantes de nós (por isotopia regular) que sejam também invariantes pelos movimentos de Fenn-Rourke.

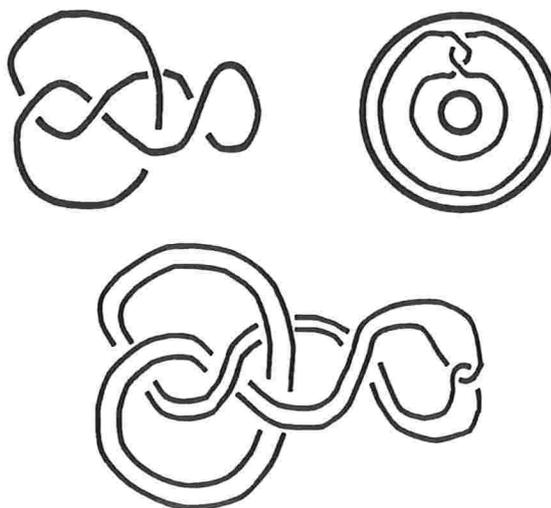
1.7 Decoração de nós

Suponha que ao calcularmos o polinômio HOMFLY de dois nós L_1 e L_2 , os quais suspeitamos serem distintos, a resposta tenha sido a mesma. Podemos então tentar “complicá-los” obtendo dois outros nós K_1 e K_2 de maneira que se L_1 e L_2 forem equivalentes, necessariamente eles também o sejam e que seja possível a obtenção de repostas distintas das anteriores. Logo, se calcularmos os polinômios HOMFLY de K_1 e K_2 e obtivermos respostas distintas, teremos uma prova de que L_1 e L_2 não são equivalentes.

Uma maneira de fazermos essa “complicação” de nós que satisfaça as propriedades acima é o que chamamos de **decoreção de nós**. Observamos novamente que um **diagrama de nó** nesse trabalho será **sempre** um diagrama orientado de nó com frame, e portanto a equivalência será em termos de isotopia regular. Seja K um diagrama de nó. Lembremos que um nó com *framing* implica na escolha de uma curva paralela à ele, ou melhor, uma fita que é uma imersão do anel em S^3 .

Definições 1.7.1 Seja P um diagrama no anel. Considere a imagem de P pela imersão do anel na fita definida por K e chame o seu diagrama no plano de $K * P$. Obtivemos então um diagrama de um nó \tilde{K} o qual chamaremos de **nó satélite**. Além disso, chamaremos K de **nó companheiro** e P de **padrão**.

Exemplo:



Satélite do nó figura-oito com framing -1.

Se K_1 e K_2 são equivalentes, então \widetilde{K}_1 e \widetilde{K}_2 também o são. Sendo assim, \widetilde{K} irá depender somente do nó K e do padrão P .

Nota: Em [MS] há a demonstração da existência de pares de nós com o mesmo polinômio HOMFLY e uma decoração específica resultando em polinômios distintos.

Capítulo 2

“Skein” Espaços

Introdução:

Observamos primeiramente que a partir de agora ao falarmos “links” estaremos nos referindo sempre ao diagrama orientado com frame deste. Estaremos também considerando a equivalência entre links dada por **isotopia regular**.

Vimos que a cada diagrama orientado L de um link podemos associar um elemento do anel Λ (def. 1.3.2) obtendo uma aplicação :

$$\chi : D \rightarrow \Lambda$$

onde D é o conjunto das classes de diagramas de links orientados em \mathbb{R}^2 e $\chi(L)$ é o polinômio HOMFLY do diagrama L . Podemos, porém, trabalhar com mais estrutura, considerando um Λ -módulo livre tendo como base o conjunto D e estendendo a aplicação χ para esse módulo, obtendo assim um funcional linear.

Vamos no entanto considerar D como o conjunto das classes de diagramas e quotientar o Λ -módulo dos diagramas pelas “skein”-relações do polinômio HOMFLY, obtendo o Λ -módulo $S(\mathbb{R}^2)$, de modo que dois diagramas com o mesmo polinômio, sejam o mesmo elemento nesse módulo.

Passaremos portanto a fazer “contas” com diagramas de links e a fim de obtermos resultados interessantes e que nos levarão ao invariante de 3-variedades, vamos ter que considerar diagramas em outros espaços, definindo o nosso Λ -módulo de maneira análoga.

Definições 2.0.2 Seja $F = \mathbb{R}^2$ ou $F \subseteq \mathbb{R}^2$, uma subvariedade compacta de dimensão dois equipada com um conjunto finito de pontos P em ∂F orientados como pontos de “entrada” P_E ou pontos de “saída” P_S .

Um **diagrama** em F é a interseção de F com um diagrama orientado L em \mathbb{R}^2 , onde $\partial F \cap L = P$ e tal que $\partial F \cap L = P$ não possua pontos de cruzamento de L . Além disso, a orientação de L em $\partial F \cap D = P$ coincide com a dada aos pontos destacados.

Dois diagramas em F são **equivalentes** quando um pode ser obtido do outro através de uma sequência finita de isotopias de F e de isotopia regular, relativas a ∂F (isto é, mantendo-o fixo). Seja D_F o conjunto dessas classes de equivalência.

Definimos o “**Skein**” Espaço de F , $S(F)$, como o Λ -módulo com base em D_F quocientado pelas relações locais:

$$(r1) \quad x^{-1} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} - x \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array} = z \begin{array}{c} \diagdown \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagup \end{array}$$

$$(r2) \quad \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \downarrow \end{array} = (xv^{-1}) \begin{array}{c} \downarrow \end{array}$$

$$(r3) \quad D \sqcup \begin{array}{c} \circlearrowleft \end{array} = \frac{(v^{-1} - v)}{z} D$$

Obs: A partir de agora não faremos distinção entre um diagrama e a sua classe.

2.1 Aplicações entre “Skein” Espaços

Definição 2.1.1 Uma instalação W de F em F' é uma inclusão de F em F' juntamente com um diagrama de curvas e arcos fixados em $F' \setminus F$, tal que a fronteira desse diagrama fixado consiste exatamente nos pontos destacados nas fronteiras de F e F' , respeitando as orientações respectivas.

Qualquer diagrama D em F pode ser então estendido ao diagrama $W(D)$ em F' .

Teorema 2.1.1 Uma instalação W de F em F' induz uma aplicação linear definida por:

$$S_W : S(F) \rightarrow S(F')$$

tal que $S_W(D) = W(D)$.

Demonstração:

Basta observar que como as relações são locais, uma coleção de diagramas em $S(F)$ que satisfazem determinadas relações continuarão a satisfazê-las em $S(F')$ quando for efetuada a instalação. ■

Corolário 2.1.1 Considere F_1, F_2, \dots, F_n com as respectivas instalações em F $S_{W_1}, S_{W_2}, \dots, S_{W_n}$. Então essas instalações induzem uma aplicação multilinear:

$$S_{W_1} \times S_{W_2} \times \dots \times S_{W_n} \rightarrow S(F)$$

Esse conceito será útil para transformarmos alguns espaços em álgebras, como veremos a seguir.

Exemplos:

2.2 $S(\mathbb{R}^2)$

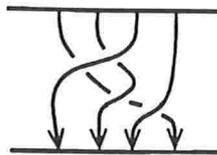
Pela Proposição anterior e pela existência e unicidade do polinômio HOMFLY, temos que a classe de qualquer diagrama D no plano pode ser representada pelo elemento $\chi(D) \cdot \phi \in S(\mathbb{R}^2)$ onde ϕ é a classe do diagrama vazio.

Esse fato estabelece uma bijeção entre $S(\mathbb{R}^2)$ e Λ , que na verdade é um isomorfismo de Λ -módulos.

2.3 $S(\mathbb{R}_n^n)$

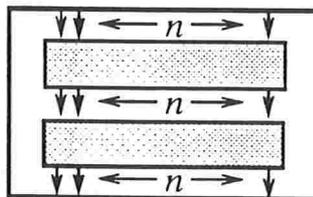
Definimos \mathbb{R}_n^n como o retângulo $[0, 1] \times [0, 1]$ onde $P_E = \{1\} \times \{\frac{1}{n+1}\}, \dots, \{1\} \times \{\frac{n}{n+1}\}$ e $P_S = \{0\} \times \{\frac{1}{n+1}\}, \dots, \{0\} \times \{\frac{n}{n+1}\}$.

Um exemplo de um elemento desse espaço é:



A instalação óbvia W de “identificar $\{1\} \times [0, 1]$ com $\{0\} \times [0, 1]$, nos fornece uma aplicação bilinear $S(\mathbb{R}_n^n) \times S(\mathbb{R}_n^n) \rightarrow S(\mathbb{R}_n^n)$ a qual define um produto em $S(\mathbb{R}_n^n)$ tornando esse espaço uma álgebra.

Exemplo:



É fácil ver que há um homomorfismo do grupo de tranças B_n nessa álgebra, pois as relações entre os elementos desse grupo se traduzem na álgebra $S(\mathbb{R}_n^n)$ pelas relações *RII* e *RIII*. Lembrando a conexão entre B_n e a álgebra de Hecke H_n (ver cap.1), temos o seguinte resultado:

Teorema 2.3.1 [MT] *A álgebra $S(\mathbb{R}_n^n)$ e a álgebra de Hecke H_n são isomorfas. Além disso, $S(\mathbb{R}_n^n)$ é gerada como álgebra pelas tranças elementares σ_i orientadas. Como módulo tem como base as tranças de permutação positiva ω_π orientadas.*

Vamos a partir de agora tratar da álgebra H_n na sua forma “pictórica” $S(\mathbb{R}_n^n)$. Considere portanto $h_n \in H_n$ e $h_m \in H_m$. Podemos “colar” esses dois elementos identificando as laterais dos retângulos \mathbb{R}_n^n e \mathbb{R}_m^m , obtendo desse modo um representante de um elemento de H_{n+m} . Essa operação geométrica induz um homomorfismo de álgebras:

$$\Theta : H_n \otimes_{\Lambda} H_m \rightarrow H_{n+m}.$$

Abusando da notação vamos representar o elemento:

$$\Theta(h_n \otimes h_m) \in H_{n+m}$$

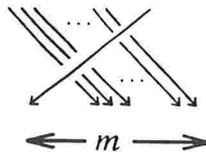
por $h_n \otimes h_m$. Observe que podemos incluir de forma homomórfica H_n (ou H_m) em H_{m+n} considerando os elementos $h_n \otimes 1^{\otimes m}$, onde $1^{\otimes m}$ é o elemento identidade de H_m e portanto a trança trivial de m linhas.

2.4 $S(S^1 \times I) = C$

Consideraremos $S^1 \times I$ sem pontos destacados no bordo. Nesse caso espaço C torna-se uma álgebra com a multiplicação induzida pela instalação “inserir dentro” que é claramente comutativa em função dos movimentos **RII** e **RIII** (basta “passar” um diagrama “por baixo” do outro).

Considere C^+ a sub-álgebra gerada pelos diagramas com orientação anti-horária. Sobre ela temos o seguinte resultado:

Teorema 2.4.1 [Turaev]: C^+ é livremente gerado como álgebra pelos elementos φ_m , $m \in \mathbb{N}$, onde φ_m é o fecho da trança $\sigma_{m-1}\sigma_{m-2}\dots\sigma_1$.



A trança $\sigma_{m-1}\sigma_{m-2}\dots\sigma_1$

Definição 2.4.1 Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma partição de n é uma k -upla $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ onde $\lambda_i \in \mathbb{N}$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$ e $\sum_{i=1}^k \lambda_i = n$. Incluímos formalmente (0) como uma partição de $n = 0$.

Corolário 2.4.1 Seja $C^{(n)}$ o submódulo de C^+ gerado pelos elementos do tipo:

$$(\varphi_{i_1}^{j_1})(\varphi_{i_2}^{j_2}) \dots (\varphi_{i_p}^{j_p})$$

onde $\sum_{k=0}^p i_k j_k = n$. Então:

(i) $C^+ = \bigoplus_{n=0}^{\infty} C^{(n)}$ e $c^{(n)}.c^{(m)} = c^{(n+m)}$, onde $c^{(i)} \in C^{(i)}$

(ii) A dimensão de $C^{(n)}$ como Λ -módulo é o número de partições de n .

Demonstração:

Pelo Teorema 2.4.1, todo elemento de C^+ é uma combinação Λ -linear de monômios em φ_m , $m \in \mathbb{N}$. Como esses elementos geram C^+ livremente como álgebra, os monômios irão gerar C^+ como Λ -módulo.

Seja $A_n = \{(\varphi_{i_1}^{j_1})(\varphi_{i_2}^{j_2}) \dots (\varphi_{i_p}^{j_p}) / \sum_{k=0}^p i_k j_k = n\}$. Como C^+ é álgebra livre, A_n é base de $C^{(n)}$. Observemos primeiramente, que pela comutatividade de C^+ , podemos sempre supor $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_p$. A cada $(\varphi_{i_1}^{j_1}) \dots (\varphi_{i_p}^{j_p})$ associamos a partição de n , $\lambda = (i_1, \dots, i_1, \dots, i_p, \dots, i_p)$ onde cada i_k aparece j_k vezes. Reciprocamente, a partir de uma partição de n (ordenada de forma decrescente) associamos de forma única um elemento de A_n . Logo, a dimensão de $C^{(n)}$ é o número de partições de n .

Resta verificarmos que a álgebra é graduada, observando que basta fazê-lo para os monômios. Sejam $c^{(n)} = (\varphi_{i_1}^{j_1})(\varphi_{i_2}^{j_2}) \dots (\varphi_{i_p}^{j_p})$ e $c^{(m)} = (\varphi_{k_1}^{l_1})(\varphi_{k_2}^{l_2}) \dots (\varphi_{k_q}^{l_q})$, tais que $\sum_{t=0}^p i_t j_t = n$ e $\sum_{t=0}^q k_t l_t = m$.

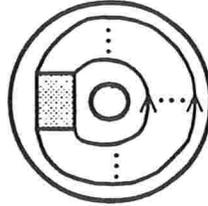
De fato,

$$c^{(n)}.c^{(m)} = (\varphi_{i_1}^{j_1})(\varphi_{i_2}^{j_2}) \dots (\varphi_{i_p}^{j_p})(\varphi_{k_1}^{l_1})(\varphi_{k_2}^{l_2}) \dots (\varphi_{k_q}^{l_q})$$

onde $\sum_{t=0}^p i_t j_t + \sum_{t=0}^q k_t l_t = n + m$ e portanto $c^{(n)}.c^{(m)} \in C^{(n+m)}$. ■

Obs: É fácil ver que $C^{(n)}$ é o espaço Λ -linear gerado pelo fecho das tranças de n linhas, porém podemos formalizar melhor essa afirmação usando o conceito de instalação. Definimos pois uma instalação de \mathbb{R}_n^n no anel, a qual denominamos operação

fecho, da seguinte maneira:



Essa operação induzirá portanto uma aplicação linear:

$$\hat{w} : S(\mathbb{R}_n^n) \rightarrow C^+$$

que é não injetora, pois basta considerar as imagens dos elementos α e $\beta\alpha\beta^{-1}$, onde α e β são tranças de n linhas. Observamos que, como as relações têm caráter local, $\hat{w}(H_n) = C^{(n)}$.

OBS: Denotaremos, no decorrer desse trabalho, o fecho de um elemento $T \in S(\mathbb{R}_n^n)$ tanto por $\hat{w}(T)$ como por \hat{T} .

Como já foi dito na introdução o nosso objetivo é definir $\Omega_r \in C^+$, que possa produzir um valor $\chi(L * \Omega_r)$ o qual nos permita gerar um invariante de 3-variedades. Logo, temos que estender a operação *decoreção* para combinações lineares de diagramas, gerando desse modo uma aplicação composta:

$$\chi(L * -) : C^+ \rightarrow \Omega$$

definida por $\chi(L * P) = \chi(L * \sum_{i=1}^n \gamma_i P_i) = \sum_{i=1}^n \gamma_i \chi(L * P_i)$ onde $\gamma_i \in \Lambda$ e P_i é um diagrama no anel.

É a partir dessa combinação de operações (*decoreção* + *polinômio HOMFLY*) que sairá o invariante procurado.

Capítulo 3

Idempotentes de H_n

Introdução: Trabalhando na estrutura da álgebra de Hecke H_n obteremos elementos (os idempotentes) cujos fechos serão a base da construção do nosso elemento especial Ω_r . Para isso usaremos a relação entre a álgebra de grupo de S_n , $\mathbb{C}S_n$ e a álgebra de Hecke H_n . Além disso, estaremos sempre fazendo a identificação de H_n com a álgebra $S(\mathbb{R}_n^n)$ dada pelo Teorema 2.3.1, tratando os elementos de H_n como combinações lineares de diagramas.

3.1 Diagramas de Young

Definição 3.1.1 A cada partição de n , $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$, ordenada de forma decrescente, podemos associar um diagrama formado por uma coleção de n células arranjadas em linhas, de tal modo que existam λ_i células na i -ésima linha. A esses diagramas damos o nome de **diagramas de Young**.

Exemplo:

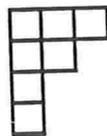


Diagrama de Young associado à partição $\mu = (3, 2, 1, 1)$.

Novamente, associamos a partição (0) ao diagrama vazio. Não faremos nesse trabalho distinção entre a partição e o diagrama associado.

Denotamos por $|\lambda| = \sum_{i=1}^k \lambda_i$ o **tamanho** da partição ou equivalentemente, o número de células do diagrama de Young associado.

Dado um diagrama de Young, o seu **diagrama conjugado** λ^v é o diagrama cujas linhas têm o mesmo número de células das colunas de λ .

A um diagrama de Young λ juntamente com uma numeração de 1 a n associada às suas células denominamos de **tableau de Young**. Quando essa numeração é crescente em cima das linhas, da esquerda para direita, e em cima das colunas, de cima para baixo, dizemos que o tableau é **padrão** (ou **standard**).

Exemplo:

1	5	7
2	6	
3		
4		

Tableau padrão associado ao diagrama $\mu = (3, 2, 1, 1)$.

Dado um diagrama de Young λ denotaremos cada célula por $\lambda_{i,j}$, onde i representa a linha e j a coluna onde a célula se encontra. Associaremos a cada $\lambda_{i,j}$ um número $hl(\lambda_{i,j})$ (do inglês “hook length”) que é que é definido como:

$$hl(\lambda_{i,j}) = c_A(\lambda_{i,j}) + c_D(\lambda_{i,j}) + 1 \quad (3.1)$$

onde $c_A(\lambda_{i,j})$ e $c_D(\lambda_{i,j})$ são o número de células abaixo e à direita de $\lambda_{i,j}$ respectivamente.

Exemplo:

6	4	2	1
3	1		
1			

Diagrama que associa $hl(\lambda_{i,j})$ à célula $\lambda_{i,j}$.

Proposição 3.1.1 [FRT] Dado um diagrama de Young λ , o número de tableaux padrões d_λ é dado pela seguinte fórmula:

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{i,j} h(\lambda_{i,j})}$$

onde n é o número de células de λ .

3.2 Diagramas de Young e $\mathbb{C}S_n$

Faremos agora um pequeno resumo de alguns resultados em Teoria de Representação de Grupos Finitos, sempre tomando \mathbb{C} como o corpo considerado (ou melhor, os resultados abaixo não são necessariamente válidos quando o corpo não é o dos complexos.)

Definições 3.2.1 Uma **representação** de um grupo finito G em um espaço vetorial complexo de dimensão finita V é um homomorfismo $\rho : G \rightarrow GL(V)$, onde $GL(V)$ é o grupo dos automorfismos de V . A dimensão de V é chamada de **grau da representação**.

Dizemos que duas representações ρ e ϕ são **equivalentes** quando existe $T \in GL(V)$ tal que:

$$\rho(g) = T^{-1}\phi(g)T, \quad \forall g \in G$$

Um G -**módulo** é um espaço vetorial V sobre \mathbb{C} onde cada $g \in G$ define uma aplicação linear $v \mapsto g.v$ em V satisfazendo:

$$\begin{aligned} (g_1g_2).v &= (g_1).g_2.v \\ e.v &= v \end{aligned}$$

$$\forall g_1, g_2 \in G, \quad \forall v \in V.$$

Naturalmente, um homomorfismo de G -módulos V e W é uma aplicação linear $T : V \rightarrow W$ que preserva a ação de G , isto é:

$$T(g.v) = g.T(v), \quad \forall v \in V, \quad \forall g \in G$$

Considerando a matriz da ação de G em um G -módulo V , estabelecemos uma relação entre V e uma representação de G . Reciprocamente, dada uma representação de G em um espaço vetorial V de dimensão finita, naturalmente podemos torná-lo um G -módulo. Na verdade, vale que:

Proposição 3.2.1 [Cohn] *Para todo grupo finito G existe uma bijeção natural entre as classes de equivalência de representações de G e classes de isomorfismo de G -módulos.*

Definições 3.2.2 Um G -submódulo W , de um G -módulo V é um subespaço vetorial de V que é fechado sob a ação de G . Dizemos que um G -módulo V é **irredutível** se é não nulo e se não possui submódulos além dos triviais. Caso contrário dizemos que V é **reduzível**.

Por sua vez, dizemos que uma **representação** é **irredutível** quando o G -módulo correspondente o for. Analogamente, definimos uma representação **reduzível**.

Um G -módulo é dito **completamente reduzível** se:

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_r$$

onde U_i é um G -submódulo irredutível de V para $i = 1, \dots, r$.

Teorema 3.2.1 ([JL], pg.74) *Seja G grupo finito. Então todo G -módulo sobre \mathbb{C} é completamente reduzível.*

Definição 3.2.1 Seja $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ grupo finito. Considere o espaço vetorial sobre \mathbb{C} com base $\{g_1, \dots, g_n\}$, isto é, o espaço formado por elementos do tipo:

$$\sum_{g \in G} \lambda_g g$$

onde $\lambda_g \in \mathbb{C}$, $\forall g \in G$. Denotaremos esse espaço de $\mathbb{C}G$.

Podemos definir um produto nesse espaço tornando-o uma álgebra de forma natural:

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) \left(\sum_{h \in G} \mu_h h \right) = \sum_{g, h \in G} \lambda_g \mu_h (gh).$$

Chamamos $\mathbb{C}G$ a **álgebra de grupo** de G sobre \mathbb{C} . $\mathbb{C}G$ visto como \mathbb{C} -espaço vetorial é em particular um G -módulo (sob a multiplicação à direita pelos elementos de G), o qual chamaremos de G -módulo **regular**. A representação obtida do G -módulo regular é dita **representação regular** de G . Observe que a dimensão de $\mathbb{C}G$ é o número de elementos desse grupo.

Pelo Teorema anterior, o G -módulo regular $\mathbb{C}G$ é completamente redutível. Na verdade vale que:

Teorema 3.2.2 ([JL], pg.91) *Seja $\mathbb{C}G = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$, onde cada U_i é um G -submódulo irredutível, então todo G -módulo irredutível U é isomorfo a U_i para algum i .*

Teorema 3.2.3 ([JL], pg.100) *Seja $\mathbb{C}G = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$, onde cada U_i é um G -submódulo irredutível e U um G -módulo irredutível. Então o número de U_i 's distintos tais que $U \simeq U_i$ é igual a dimensão de U .*

Estabelecemos portanto o vínculo entre as representações irredutíveis do grupo finito G e a decomposição de $\mathbb{C}G$. O próximo resultado vai nos possibilitar conectar estudo das representações de S_n aos diagramas de Young.

Teorema 3.2.4 [Cohn] *O número de representações irredutíveis não equivalentes é igual ao número de classes de conjugação de G .*

3.2.1 Representações de S_n

Veremos agora a relação entre a álgebra de grupo de S_n , $\mathbb{C}S_n$ e os diagramas de Young. Sabemos que cada permutação $p \in S_n$ pode ser escrita como produto de ciclos disjuntos. Como esses ciclos comutam, podemos rearranjá-los pela ordem de tamanho de forma decrescente.

Suponha $p = c_1 c_2 \dots c_k$, onde os c_i 's são ciclos disjuntos e $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ seus respectivos tamanhos. Logo $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k = n$ e $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_k$. Logo, à cada estrutura de ciclos de uma permutação podemos associar uma partição de n e portanto um **diagrama de Young**.

Quando duas permutações p e q possuem a mesma estrutura de ciclos é fácil definir um elemento $f \in S_n$ tal que $f^{-1}pf = q$. Por outro lado, se p e q são permutações conjugadas, então possuem a mesma estrutura de ciclos (basta observar que se c é um k -ciclo, $f^{-1}cf$ também é um k -ciclo). Sendo assim temos que:

Proposição 3.2.2 *Existe uma bijeção entre as classes de conjugação em S_n e os diagramas de Young de n -células.*

Reunindo os resultados anteriores, chegamos à seguinte conclusão :

Cada diagrama de Young corresponde a uma representação irredutível de S_n e portanto a um fator da decomposição de $\mathbb{C}S_n$.

Vamos mostrar agora a relação explícita entre um diagrama de Young e a representação irredutível associada.

Definições 3.2.3 Seja λ um diagrama de Young e D_λ um tableau associado a λ . Considere os seguintes subgrupos de S_n :

$$P_{D_\lambda} = \{p \in S_n / \text{as linhas de } D_\lambda \text{ são invariantes sob } p\}$$

$$Q_{D_\lambda} = \{q \in S_n / \text{as colunas de } D_\lambda \text{ são invariantes sob } q\}$$

Por exemplo, quando D_λ é o tableau:

1	2	3
4	5	
6		
7		

P_{D_λ} é gerado pelas transposições $\{(12), (23), (45)\}$ e Q_{D_λ} gerado pelas transposições $\{(14), (46), (67), (25)\}$.

Definições 3.2.4 Sejam $A_{D_\lambda} = \sum_{p \in P_{D_\lambda}} p$ e $B_{D_\lambda} = \sum_{q \in Q_{D_\lambda}} (-1)^{l(q)} q$ onde $l(q)$ é o tamanho da permutação q . O **simetrizador de Young** C_{D_λ} é o elemento de $\mathbb{C}S_n$ definido por $C_{D_\lambda} = A_{D_\lambda} B_{D_\lambda}$.

Obs: Estamos considerando a multiplicação em S_n , p, q , efetuando-se primeiro a permutação p e depois a permutação q .

Proposição 3.2.3 *Sejam D' e D tableaux associados ao mesmo diagrama λ de n células. Então:*

$$C_D = \tau C_{D'} \tau^{-1}$$

onde $\tau \in S_n$.

Demonstração:

Sejam $D(i, j)$ e $D'(i, j)$ os números associados à célula $\lambda_{i,j}$ em D e D' respectivamente. Seja $\tau \in S_n$ tal que $\tau(D(i, j)) = D'(i, j)$. Note que τ leva as linhas de D nas linhas de D' e as colunas de D nas colunas de D' .

Seja $p' \in P_{D'}$. Então $\tau p' \tau^{-1}$ é uma permutação que preserva as linhas de D , isto é, pertence a P_D . Por outro lado, para todo $p \in P_D$, $\tau(\tau^{-1} p \tau) \tau^{-1} = p$, onde $\tau^{-1} p \tau \in P_{D'}$. Logo:

$$P_D = \{\tau p' \tau^{-1} : p' \in P_{D'}\}.$$

Sendo assim, $A_D = \tau A_{D'} \tau^{-1}$. Analogamente, temos que $B_D = \tau B_{D'} \tau^{-1}$. Portanto:

$$C_D = A_D B_D = \tau A_{D'} B_{D'} \tau^{-1} = \tau C_{D'} \tau^{-1}.$$

■

Teorema 3.2.5 ([FH], pg.52)

- (i) $C_{D_\lambda}^2 = a_{D_\lambda} C_{D_\lambda}$, onde $a_{D_\lambda} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
- (ii) $V_{D_\lambda} = \mathbb{C} S_n C_{D_\lambda}$ é uma representação irredutível de S_n . Toda representação irredutível de S_n pode ser obtida desse modo para uma única partição μ .
- (iii) $a_{D_\lambda} = \frac{n!}{\dim V_\lambda}$.
- (iv) V_{D_λ} e V_{D_μ} são isomorfas se e somente se $\lambda = \mu$.
- (v) $\mathbb{C} S_n = \bigoplus_{|\lambda|=n} \mathbb{C} S_n C_{D_\lambda} \mathbb{C} S_n$.

Proposição 3.2.4 [FH] *A dimensão do sub-módulo $\mathbb{C}S_n C_\lambda$ é o número de tableaux padrões associados a λ , isto é:*

$$\dim \mathbb{C}S_n C_\lambda = d_\lambda$$

onde $d_\lambda = \frac{n!}{\prod hl(\lambda_{i,j})}$ (ver Prop. 3.1.1).

Corolário 3.2.1 *Seja a_{D_λ} tal que:*

$$C_{D_\lambda}^2 = a_{D_\lambda} C_{D_\lambda},$$

onde C_{D_λ} é o simetrizador de Young para algum tableau D_λ . Então:

$$a_{D_\lambda} = \prod hl(\lambda_{i,j}).$$

Definição 3.2.2 *Seja λ um diagrama de Young de n células e considere $T(\lambda)$ o tableau onde as células são numeradas de 1 a n sucessivamente ao longo das linhas de λ .*

Pelos resultados anteriores, a decomposição $\mathbb{C}S_n = \bigoplus_{|\lambda|=n} \mathbb{C}S_n C_{D_\lambda} \mathbb{C}S_n$ e o valor do escalar associado aos simetrizadores de um mesmo diagrama λ , não dependem do tableau escolhido. Vamos portanto considerar D_λ o tableau padrão $T(\lambda)$ definido acima. Denotaremos, nesse caso, $C_{T(\lambda)}$ por C_λ , bem como $a_{T(\lambda)}$ por a_λ . Nessa notação temos que:

$$\mathbb{C}S_n = \bigoplus_{|\lambda|=n} \mathbb{C}S_n C_\lambda \mathbb{C}S_n.$$

3.3 Construção dos idempotentes

Motivados pelo fato de que H_n é uma espécie de *deformação* de $\mathbb{C}S_n$, vamos decompor H_n em termos de idempotentes usando os diagramas de Young. Para isso, precisamos de mais alguns resultados e definições sobre esses diagramas.

Definição 3.3.1 *Seja $\pi_\lambda \in S_n$ tal que $\pi_\lambda(i) = j$ onde a célula numerada com i em $T(\lambda)$ é levada pela transposição na célula numerada com j em $T(\lambda^v)$. Observe que $\pi_\lambda^{-1} = \pi_{\lambda^v}$.*

Exemplo:

1	2	3	4
5	6		
7			

$$\nu = (4, 2, 1), \pi_\nu = (247365)$$

Seja $R(\lambda)$ o subgrupo de S_n que mantém as linhas de $T(\lambda)$ invariantes. É fácil ver que $R(\lambda)$ é gerado por transposições elementares do tipo $(i \ i+1)$. No exemplo acima temos $R(\nu) = \langle (12), (13), (34), (56) \rangle$.

Sejam λ e μ diagramas de Young tais que $|\lambda| = |\mu| = n$. Dizemos que $\pi \in S_n$ **separa λ de μ** se nenhum par de números na mesma linha de $T(\lambda)$ é levado por π na mesma linha de $T(\mu)$. Como exemplo, temos que π_λ separa λ e λ^ν .

Caso nenhuma permutação π separe λ e μ dizemos que são **inseparáveis**. Observe que se $\pi \in S_n$ separa λ e μ , então $\rho\pi\tau$ também o faz, quando $\tau \in R(\mu)$ e $\rho \in R(\lambda)$.

Vamos colocar uma **ordem** no conjunto dos diagramas de Young, a ordem lexicográfica, da seguinte maneira:

$$\lambda > \mu \Leftrightarrow \exists t \text{ com } \lambda_t > \mu_t \text{ e } \lambda_i = \mu_i \text{ para } i < t$$

onde λ_i é o número de células da i -ésima linha de λ .

Obs: Para podermos efetuar essa comparação quando o número de linhas de λ for menor que o de μ (por exemplo), completamos as linhas restantes do último colocando $\mu_i = 0$.

Lema 3.3.1 *Sejam λ e μ dois diagramas de Young tais que $|\lambda| = |\mu| = n$. Se $\lambda > \mu$ então λ e μ^ν são inseparáveis.*

Demonstração:

Vamos demonstrar usando indução no número de células. Para $n = 1$, $\lambda = \mu$ e portanto nada há a fazer. Da mesma forma, para $n = 2$, temos $\lambda = \mu^\nu$, e portanto claramente inseparáveis. Assumimos o resultado para ν tal que $|\nu| < n$ onde $n > 2$.

Sejam $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ e $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$ diagramas de Young com mais de n células. Observamos que μ_1 é o número de células da primeira coluna de μ^ν .

Se $\lambda_1 > \mu_1$, o número de células na primeira linha de λ é maior que o número de linhas de μ^ν e portanto, qualquer permutação deve levar pelo menos dois números da primeira linha de λ em uma mesma linha de μ^ν . Logo nesse caso, os diagramas são inseparáveis.

Se $\lambda_1 = \mu_1$, considere os diagramas $r(\lambda)$ e $r(\mu)$ obtidos removendo-se a primeira linha de λ e μ respectivamente. Sendo assim, $|r(\lambda)| = |r(\mu)^\nu| < n$ e como $\lambda > \mu$ temos $r(\lambda) > r(\mu)$. Pela hipótese de indução, $r(\lambda)$ e $r(\mu)^\nu$ são inseparáveis.

Basta mostrarmos portanto que se λ e μ^ν fossem separáveis, então $r(\lambda)$ e $r(\mu)^\nu$ também o seriam.

De fato, supondo λ e μ^ν separáveis, considere π uma permutação que separa esse diagramas. Como $\lambda_1 = \mu_1$, o número de células na primeira coluna de λ é igual ao número de linhas de μ^ν . Logo π deve mandar exatamente cada célula da primeira linha de λ para cada linha de μ^ν .

Seja $s \in R(\mu^\nu)$ a permutação tal que πs manda cada célula da primeira linha de λ para a primeira célula de cada linha de μ^ν , isto é manda a primeira linha de λ exatamente na primeira coluna de μ^ν .

Portanto, $\pi s \in S_n$ separa λ e μ^ν . Restringindo-a a $r(\lambda)$, temos que a imagem também se restringe a $r(\mu)^\nu$ e conseqüentemente separa $r(\lambda)$ e $r(\mu)^\nu$. ■

Corolário 3.3.1 *Dados λ e μ tais que $|\lambda| = |\mu| = n$, uma das afirmações abaixo é verdadeira:*

- (1) λ e μ^ν são inseparáveis;
- (2) λ^ν e μ são inseparáveis;
- (3) $\lambda = \mu$.

Vamos agora construir os elementos básicos que serão usados na construção dos idempotentes.

Definição 3.3.2 Seja $E_n = \sum_{\pi \in S_n} \omega_\pi$ onde ω_π é a trança de permutação positiva associada à permutação π (ver cap.1).

Teorema 3.3.1 Para cada $i \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq i \leq n-1$, podemos fatorar E_n em H_n como:

$$E_n = E_n^{(i)}(\sigma_i + 1) = (\sigma_i + 1)E_n^{(i)}$$

$$\text{onde } E_n^{(i)} = \sum_{\pi(i) < \pi(i+1)} \omega_\pi.$$

Demonstração:

Conseguimos escrever S_n como a união disjunta de dois conjuntos:

$$A_i = \{\pi \in S_n / \pi(i) < \pi(i+1)\}$$

e

$$B_i = \{\pi \in S_n / \pi(i+1) < \pi(i)\}.$$

Observe que existe uma bijeção entre esses dois conjuntos tomando para cada $\pi \in A_i$ o elemento $\pi' = (i \ i+1)\pi \in B_i$. Além disso, temos que $\sigma_i \omega_\pi$ só possui cruzamentos positivos e a informação $\pi(i) < \pi(i+1)$ nos garante que a i -ésima e a $(i+1)$ -ésima linhas só se cruzam uma vez.

Portanto, pelo Teorema 2.3.1 $\sigma_i \omega_\pi$ é a trança de permutação positiva associada à π' , isto é $\omega_{\pi'} = \sigma_i \omega_\pi$.

Sendo assim,

$$E_n = \sum_{\pi \in S_n} \omega_\pi = \sum_{\pi \in A_i} \omega_\pi + \sum_{\pi' \in B_i} \omega_{\pi'}$$

E devido à bijeção entre A_i e B_i temos que:

$$E_n = \sum_{\pi \in A_i} \omega_\pi + \sum_{\pi \in A_i} \sigma_i \omega_\pi = (1 + \sigma_i)E_n^{(i)}.$$

Afirmamos que

$$\sigma_i \omega_\pi = \omega_\pi \sigma_i$$

para todo $\pi \in A_i$. De fato, como ω_π é trança de permutação positiva e $\pi(i) < \pi(i+1)$, toda j -linha cruza acima ou abaixo de *ambas* as linhas i e $i+1$. Logo, podemos “passar para baixo” de ω_π o cruzamento realizado por σ_i nessas linhas fazendo uma isotopia ambiente no plano formado por elas, ou em termos de diagramas, efetuando uma sequência de movimentos *RII* e *RIII*. Logo, a outra igualdade também é válida. ■

Dado um escalar $\gamma \in \Lambda$, podemos substituir σ_i por $\gamma \sigma_i$ em ω_π que é na verdade um monômio nos σ_i 's. Logo:

$$\omega_\pi(\gamma \sigma_1, \dots, \gamma \sigma_{n-1}) = \gamma^{l(\pi)} \omega_\pi(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$$

onde $l(\pi)$ é tanto o tamanho da permutação π como o número de auto-enlaçamento de ω_π .

Definições 3.3.1 Lembremos (seção 1.5) que as tranças elementares geradoras de H_n satisfazem uma relação quadrática:

$$(\sigma_i - a)(\sigma_i - b) = 0$$

onde $a = -xs^{-1}$ e $b = xs$.

Definimos então:

$$a_n = E_n(-a^{-1}\sigma_1, \dots, -a^{-1}\sigma_{n-1})$$

$$b_n = E_n(-b^{-1}\sigma_1, \dots, -b^{-1}\sigma_{n-1})$$

e portanto

$$a_n = \sum_{\pi \in S_n} (-a)^{-l(\pi)} \omega_\pi$$

$$b_n = \sum_{\pi \in S_n} (-b)^{-l(\pi)} \omega_\pi.$$

Corolário 3.3.2 Para todo $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n - 1$, a_n e b_n fatoram-se em H_n da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} a_n &= (\sigma_i - a)a_n^{(i)} = a_n^{(i)}(\sigma_i - a) \\ b_n &= (\sigma_i - b)b_n^{(i)} = b_n^{(i)}(\sigma_i - b) \end{aligned}$$

Demonstração:

Basta aplicar o teorema anterior substituindo σ_i por $-a^{-1}\sigma_i$ e $-b^{-1}\sigma_i$ respectivamente. ■

Teorema 3.3.2 Sejam ϕ_a e ϕ_b homomorfismos lineares definidos por $\phi_a(\sigma_i) = a$ e $\phi_b(\sigma_i) = b$ para $i = 1, \dots, n - 1$. Então, para qualquer $h \in H_n$:

$$\begin{aligned} a_n h &= h a_n = \phi_b(h) a_n \\ b_n h &= h b_n = \phi_a(h) b_n \end{aligned}$$

Demonstração:

Como ϕ_a e ϕ_b são homomorfismos lineares basta mostrar as igualdades para as tranças elementares σ_i , isto é, temos que mostrar que:

$$\begin{aligned} a_n \sigma_i &= b a_n = \sigma_i a_n \\ b_n \sigma_i &= a b_n = \sigma_i b_n \end{aligned}$$

Usando o Corolário 3.3.2, temos:

$$a_n = a_n^{(i)}(\sigma_i - b)$$

Logo:

$$a_n(\sigma_i - b) = a_n^{(i)}(\sigma_i - a)(\sigma_i - b) = 0$$

E portanto $a_n \sigma_i = b a_n$. Analogamente, $b_n(\sigma_i - a) = 0 \Rightarrow b_n \sigma_i = a b_n$.

Usando as fatorações $a_n = (\sigma_i - a)a_n^{(i)}$ e $b_n = (\sigma_i - b)a_n^{(i)}$ provamos as igualdades restantes. ■

Obs: Note que podemos incluir H_k em H_n , quando $k \leq n$, usando a operação \otimes definida na seção 2.3. Logo o Lema anterior nos diz que, em particular, quando $k \leq n$ temos:

$$a_k a_n = a_n a_k = \phi_b(a_k) a_n$$

e

$$b_k b_n = b_n b_k = \phi_a(b_k) b_n.$$

Definição 3.3.3 Seja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ um diagrama de Young com $|\lambda| = n$. Lembrando que $\bar{\omega}_\tau$ é a trança de permutação negativa associada à permutação τ , seja:

$$e_\lambda = E_\lambda(a) \omega_{\pi_\lambda} E_{\lambda^v}(b) \bar{\omega}_{\pi_{\lambda^v}} \in H_n$$

onde $E_\lambda(a) = a_{\lambda_1} \otimes a_{\lambda_2} \otimes \dots \otimes a_{\lambda_k}$ e $E_\lambda(b) = b_{\lambda_1^v} \otimes b_{\lambda_2^v} \otimes \dots \otimes b_{\lambda_k^v}$.

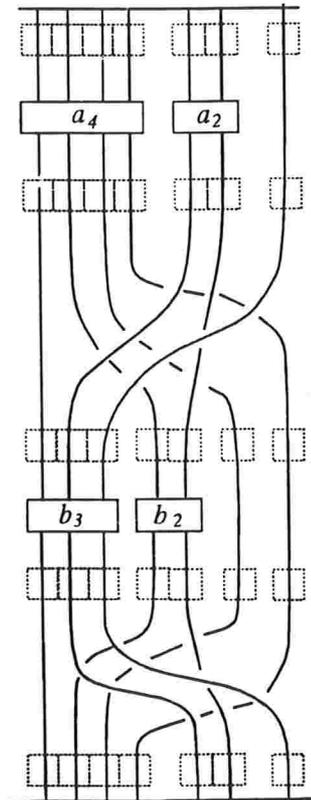
Obs: Lembramos que $\pi_\lambda^{-1} = \pi_{\lambda^v}$ e que portanto $\bar{\omega}_{\pi_{\lambda^v}}$ é o inverso de ω_{π_λ} .

Exemplos:

$$1) \quad a_2 = \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \downarrow \downarrow \end{array} + x^{-1} s \quad \begin{array}{c} \cup \\ \downarrow \downarrow \end{array}$$

$$b_2 = \begin{array}{c} \downarrow \downarrow \\ \downarrow \downarrow \end{array} - x^{-1} s^{-1} \quad \begin{array}{c} \cup \\ \downarrow \downarrow \end{array}$$

2) Para $\nu = (3, 2, 1, 1)$ temos e_ν igual a:



Faremos a partir de agora uma série de Lemas de natureza técnica a fim de provarmos um dos resultados importantes desse capítulo: os elementos e_λ são **quase-idempotentes** (isto é, são tais que $e_\lambda^2 = \alpha_\lambda e_\lambda$, para algum $\alpha_\lambda \in \Lambda$) e são **ortogonais** (isto é, se $\lambda \neq \mu$, então $e_\lambda e_\mu = 0$). Antes, porém, vamos estabelecer uma convenção a fim de evitarmos ambiguidades devido à linguagem envolvida nesses lemas que misturam “linhas de tranças” com “linhas de diagramas de Young”.

Convenção: Sejam ω uma n -trança e λ um diagrama de Young, tal que $|\lambda| = n$. Podemos agrupar as linhas de ω de maneira natural, fazendo com que correspondam às células de $T(\lambda)$ associando a i -linha de ω com a célula numerada com i no tableau $T(\lambda)$. Diremos nesse caso que essa i -linha é uma λ_j -linha, onde j significa que a célula numerada com i em $T(\lambda)$ encontra-se na j -ésima linha de λ .

Lema 3.3.2 *Seja $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ um diagrama de Young. Seja $H(\lambda) \subseteq H_{|\lambda|}$ a sub-álgebra gerada por $\{\omega_\rho/\rho \in R(\lambda)\}$. Então $E_\lambda(a), E_\lambda(b) \in H(\lambda)$ e valem as seguintes igualdades para todo $h \in H(\lambda)$:*

$$E_\lambda(a)h = hE_\lambda(a) = \phi_b(h)E_\lambda(a)$$

e

$$E_\lambda(b)h = hE_\lambda(b) = \phi_a(h)E_\lambda(b)$$

Demonstração:

Primeiramente observamos que todo elemento $h \in H(\lambda)$ só cruza linhas associadas à mesma linha de λ e portanto pode ser decomposto da seguinte forma:

$$h = h_{\lambda_1} \otimes h_{\lambda_2} \otimes \dots \otimes h_{\lambda_k}$$

onde cada h_{λ_i} só age nas λ_i -linhas. Logo, podemos escrever h na forma:

$$h = (h_{\lambda_1} \otimes 1^{\otimes \lambda_2} \otimes \dots \otimes 1^{\otimes \lambda_k}) \cdot (1^{\otimes \lambda_1} \otimes h_{\lambda_2} \otimes \dots \otimes 1^{\otimes \lambda_k}) \dots (1^{\otimes \lambda_1} \otimes \dots \otimes h_{\lambda_k})$$

E como ϕ_b é homomorfismo linear vale $\phi_b(h) = \phi_b(h_{\lambda_1})\phi_b(h_{\lambda_2}) \dots \phi_b(h_{\lambda_k})$, e portanto, pelo Teorema 3.3.2, temos que:

$$E_\lambda(a)h = \phi_b(h)E_\lambda(a).$$

As outras igualdades saem de forma completamente análoga. ■

Lema 3.3.3 *Se $\pi' = \rho\pi$, onde $\rho = (ij)$, então existe uma trança h tal que $\omega_{\pi'} = h\omega_\pi$. Analogamente, se $\pi' = \pi\rho$, então existe uma trança h' tal que $\omega_{\pi'} = \omega_\pi h'$.*

Demonstração:

Seja $\rho = (ij)$, com $i < j$ e considere $\pi' = \rho\pi$. Queremos uma trança h cuja permutação associada seja ρ e tal que $h\omega_\pi$ seja uma trança de permutação positiva. Pela Prop. 1.4.2 esse elemento tem que ser $\omega_{\pi'}$.

Podemos construir h de modo que:

- (1) as linhas de h são todas triviais, excetuando-se as linhas i e j .

- (2) as linhas i e j cruzam as linhas intermediárias apenas uma vez.
- (3) as linhas i e j não cruzam as demais linhas.
- (4) o sinal de cada cruzamento é definido pela regra:
 - (i) Considere o cruzamento efetuado por duas linhas em h .
 - (ii) Verifique se essas linhas se cruzam em ω_π .
 - (iii) Caso haja cruzamento em ω_π defina o cruzamento em h como *negativo*, caso contrário, defina como *positivo*.

Observamos que a operação além de ser realizada em um número finito de passos, está bem definida, pois em ω_π cada par de linhas se cruzam no máximo uma vez.

Com h assim definido, cada cruzamento negativo nesse elemento “anula” um cruzamento realizado em ω_π de tal modo que, efetuada uma isotopia regular, as mesmas linhas no produto $h\omega_\pi$ não se cruzam. Logo, $h\omega_\pi$ é uma trança de permutação positiva tendo $\rho\pi = \pi'$ como permutação associada, como queríamos, o outro caso obviamente análogo. ■

Lema 3.3.4 *Sejam λ e μ diagramas de Young tais que $|\lambda| = |\mu| = n$ e $\lambda \neq \mu$. Se $\pi \in S_n$ não separa λ e μ então:*

$$E_\lambda(a)\omega_\pi E_\mu(b) = 0$$

$$E_\mu(b)\omega_\pi E_\lambda(a) = 0$$

Demonstração:

Vamos mostrar que $E_\lambda(a)\omega_\pi E_\mu(b) = 0$ sendo análoga a prova da outra afirmação. Seja π que não separa λ e μ . Nesse caso devem existir duas células da mesma linha de λ , digamos a l -ésima, que são mandadas na mesma linha de μ , digamos a p -ésima.

Suponha que as duas células de λ citadas sejam adjacentes e sejam mandadas em células também adjacentes. Caso não sejam, considere ρ e σ duas transposições tais que $\pi' = \rho\pi\sigma$ manda as células i e $i + 1$ da l -ésima linha de λ para as células j , $j + 1$ da p -ésima linha de μ respectivamente. Pelo Lema 3.3.3, temos que

$$\omega_\pi = h\omega_{\pi'}h'$$

onde h e h' são n -tranças. Logo pelo Lema anterior:

$$E_\lambda(a)\omega_\pi E_\mu(b) = \phi_b(h)\phi_a(h')E_\lambda(a)\omega_{\pi'}E_\mu(b)$$

Temos que $\phi_b(h)$ e $\phi_a(h')$ são não nulos, pois h e h' são, nesse caso, monômios nas tranças geradoras e portanto esses escalares são potências de b e de a respectivamente. Sendo assim, podemos assumir que duas λ_l -linhas i e $i + 1$, são mandadas nas duas μ_p -linhas j e $j + 1$, respectivamente.

Como as linhas i e $i + 1$ terminam em pontos adjacentes e como estamos trabalhando com uma trança de permutação positiva, todas as demais linhas passam por baixo ou por cima **de ambas**. Logo, usando os movimentos *RII* e *RIII*, conseguimos “passar o cruzamento para baixo” de ω_π . Isto é, vale que:

$$\sigma_i\omega_\pi = \omega_\pi\sigma_j \tag{3.2}$$

Por outro lado, pelo Corolário 3.3.2, temos que:

$$\begin{aligned} a_{\lambda_l} &= a_{\lambda_l}^{(i)}(\sigma_i - a) \\ b_{\mu_p} &= (\sigma_j - b)b_{\mu_p}^{(j)} \end{aligned}$$

Observamos que:

$$E_\lambda(a)\omega_\pi = (a_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes 1^{\otimes|\lambda_l|} \otimes \cdots \otimes a_{\lambda_k})(1^{\otimes l_1} \otimes a_{\lambda_l} \otimes 1^{\otimes l_2})\omega_\pi = \widetilde{E}_\lambda(a)(\sigma_i - a)\omega_\pi$$

onde $l_1 + \lambda_l + l_2 = |\lambda|$.

E de forma análoga, concluímos que:

$$\omega_\pi E_\mu(b) = \omega_\pi(\sigma_j - b)\widetilde{E}_\mu(b).$$

Ou seja:

$$E_\lambda(a)\omega_\pi E_\mu(b) = \widetilde{E}_\lambda(a)(\sigma_i - a)\omega_\pi(\sigma_j - b)\widetilde{E}_\mu(b)$$

Pela equação 3.2 temos:

$$(\sigma_i - a)\omega_\pi = \omega_\pi(\sigma_j - a)$$

E portanto:

$$(\sigma_i - a)\omega_\pi(\sigma_j - b) = \omega_\pi(\sigma_j - a)(\sigma_j - b)$$

Por outro lado, temos que $(\sigma_j - a)(\sigma_j - b) = 0$ em H_n e portanto:

$$E_\lambda(a)\omega_\pi E_\mu(b) = 0$$

■

Corolário 3.3.3 *Sejam λ e μ diagramas de Young tais que $|\lambda| = |\mu| = n$ e $\lambda \neq \mu$. Se λ e μ são inseparáveis então:*

$$E_\lambda(a)H_n E_\mu(b) = 0$$

$$E_\mu(b)H_n E_\lambda(a) = 0$$

Demonstração:

Lembramos que H_n é gerada como Λ -módulo pelas tranças de permutação positiva $\{\omega_\pi/\pi \in S_n\}$ (Teorema 2.3.1). Logo basta aplicar o Lema 3.3.4. ■

Lema 3.3.5 *Seja $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ um diagrama de Young tal que $|\lambda| = n$. Seja $\tau \in S_n$ que separa λ e λ^ν . Então existem $\rho_1 \in R(\lambda)$ e $\rho_2 \in R(\lambda^\nu)$ tais que $\rho_1 \tau \rho_2 = \pi_\lambda$.*

Demonstração:

Observe primeiramente que λ^ν possui λ_1 linhas. Como τ separa λ e λ^ν , cada célula da primeira linha de λ tem que ser levada exatamente em cada linha de λ^ν , restando portanto nesse diagrama λ_2 linhas com mais de uma célula.

Logo a segunda linhas de λ tem que ser levada nas λ_2 primeiras linhas de λ^ν (novamente usando que τ separa os dois diagramas). Continuando o processo, concluímos que cada célula da j -ésima linha de λ é mandada obrigatoriamente por τ para uma célula de cada uma das primeiras λ_j linhas de λ^ν .

Seja $\rho_{1,j} \in R(\lambda)$ a permutação que reordena as células da j -ésima linha de λ , de modo que a célula $\lambda_{j,i}$ seja levada na i -ésima linha de λ^ν por $\rho_{1,j}$.

Considere $\rho_1 = \prod_{j=1}^k \rho_{1,j}$. Note que $\rho_{1,j}$ e $\rho_{1,j'}$ comutam quando $j \neq j'$ e portanto $\rho_1 \in R(\lambda)$.

De forma análoga, considere $\rho_{2,j} \in R(\lambda^v)$ a permutação que reordena as células das j -ésima linha de λ^v de tal modo que a célula $\lambda_{j,i}^v$ seja a imagem de uma célula da i -ésima linha de λ sob $\rho_1 \tau \rho_{2,j}$. Novamente temos que $\rho_2 = \prod_{j=1}^{\lambda_1} \rho_{2,j} \in R(\lambda^v)$. Sendo assim, temos uma permutação $\rho_1 \tau \rho_2$, onde $\rho_1 \in R(\lambda)$ e $\rho_2 \in R(\lambda^v)$, a qual manda a célula $\lambda_{i,j}$ na célula $\lambda_{j,i}^v$, isto é, $\rho_1 \tau \rho_2 = \pi_\lambda$.

■

Corolário 3.3.4 *Seja λ um diagrama de Young. Seja τ uma permutação que separa λ e λ^v . Então:*

$$\omega_\tau = \omega_{\rho_1^{-1}} \omega_{\pi_\lambda} \omega_{\rho_2^{-1}}$$

onde $\rho_1^{-1} \in R(\lambda)$ e $\rho_2^{-1} \in R(\lambda^v)$.

Demonstração:

Do Lema anterior, temos que $\tau = \rho_1^{-1} \pi_\lambda \rho_2^{-1}$, onde $\rho_1^{-1} \in R(\lambda)$ e $\rho_2^{-1} \in R(\lambda^v)$. Vamos mostrar que $\omega_\tau = \omega_{\rho_1^{-1}} \omega_{\pi_\lambda} \omega_{\rho_2^{-1}}$ é uma trança de permutação positiva e portanto é a trança ω_π . A chave da demonstração é simplesmente observar que ω_{π_λ} não cruza linhas associadas à mesma linha do diagrama λ .

Suponha que haja cruzamento na trança $\omega_{\rho_1^{-1}}$ das linhas k e j . Como $\rho_1^{-1} \in R(\lambda)$, ambas devem ser λ_i -linhas. Por sua vez, ω_{π_λ} , como observamos, não cruza linhas associadas à mesma linha do diagrama λ . Além disso, como π_λ separa λ e λ^v , as linhas consideradas irão acabar em linhas associadas a linhas distintas de λ^v . Por fim, como $\rho_2^{-1} \in R(\lambda^v)$, não pode haver cruzamento dessas linhas pela trança de permutação positiva associada.

Usando argumentos completamente análogos, mostramos que sempre que uma das tranças $\omega_{\rho_1^{-1}}$, ω_{π_λ} ou $\omega_{\rho_2^{-1}}$, efetuar o cruzamento de duas linhas distintas, as outras não o fazem.

Logo, como a trança $\omega_\tau = \omega_{\rho_1^{-1}} \omega_{\pi_\lambda} \omega_{\rho_2^{-1}}$ só possui cruzamentos positivos, nenhum par de linhas é cruzado mais de uma vez e está associada à permutação τ , pela Proposição 1.4.2 temos que:

$$\omega_\tau = \omega_{\rho_1^{-1}} \omega_{\pi_\lambda} \omega_{\rho_2^{-1}}.$$

■

Teorema 3.3.3 *Seja λ um diagrama de Young com $|\lambda| = n$. Então $e_\lambda^2 = \alpha_\lambda e_\lambda$ para algum escalar $\alpha_\lambda \in \Lambda$. Além disso, se $\lambda \neq \mu$, onde $|\mu| = n$, então $e_\lambda e_\mu = 0$.*

Demonstração:

Seja $e_\lambda = E_\lambda(a)\omega_{\pi_\lambda}E_{\lambda^v}(b)\bar{\omega}_{\pi_{\lambda^v}}$. Logo:

$$e_\lambda^2 = E_\lambda(a)hE_{\lambda^v}(b)\bar{\omega}_{\pi_{\lambda^v}}$$

onde $h = \omega_{\pi_\lambda}E_{\lambda^v}(b)\bar{\omega}_{\pi_{\lambda^v}}E_\lambda(a)\omega_{\pi_\lambda}$. Pelo Teorema 2.3.1, podemos expressar h como uma combinação linear das tranças de permutação positiva, logo:

$$h = \sum_{\tau \in S_n} \gamma_\tau \omega_\tau.$$

Sendo assim,

$$e_\lambda^2 = \sum_{\tau \in S_n} \gamma_\tau E_\lambda(a)\omega_\tau E_{\lambda^v}(b)\bar{\omega}_{\pi_{\lambda^v}}$$

Pelo Lema 3.3.4, se τ não separa λ e λ^v , temos $E_\lambda(a)\omega_\tau E_{\lambda^v}(b) = 0$.

Vamos portanto considerar somente $\tau \in S_n$ que não separa λ e λ^v . Nesse caso, pelo Corolário 3.3.4, $\omega_\tau = \omega_{\rho_1^{-1}}\omega_{\pi_\lambda}\omega_{\rho_2^{-1}}$, onde $\rho_1 \in R(\lambda)$ e $\rho_2 \in R(\lambda^v)$. Portanto, pelo Lema 3.3.2:

$$\begin{aligned} E_\lambda(a)\omega_{\rho_1^{-1}} &= \phi_b(\omega_{\rho_1^{-1}})E_\lambda(a) \\ &e \\ \omega_{\rho_2^{-1}}E_{\lambda^v}(b) &= \phi_a(\omega_{\rho_2^{-1}})E_{\lambda^v}(b). \end{aligned}$$

Seja $\alpha(\tau) = \phi_b(\omega_{\rho_1^{-1}})\phi_a(\omega_{\rho_2^{-1}})$. Logo, considerando $\alpha_\lambda = \sum_{\tau \in S_n} \alpha(\tau)\gamma_\tau$ temos:

$$e_\lambda^2 = \alpha_\lambda e_\lambda$$

como queríamos. Suponha agora $\lambda \neq \mu$. Logo:

$$e_\lambda e_\mu = E_\lambda(a)\omega_{\pi_\lambda}E_{\lambda^v}(b)\bar{\omega}_{\pi_{\lambda^v}}E_\mu(a)\omega_{\pi_\mu}E_{\mu^v}(b)\bar{\omega}_{\pi_{\mu^v}}$$

Pelo Corolário 3.3.1, como $\lambda \neq \mu$ temos que ou λ e μ^v são inseparáveis, ou λ^v e μ são inseparáveis. No primeiro caso, pelo Lema 3.3.4:

$$E_{\lambda^v}(b)(\bar{\omega}_{\pi_{\lambda^v}})E_\mu(a) = 0.$$

No segundo caso, pelo Corolário 3.3.3:

$$E_\lambda(a)(\omega_{\pi_\lambda}E_{\lambda^v}(b)\bar{\omega}_{\pi_{\lambda^v}}E_\mu(a)\omega_{\pi_\mu})E_{\mu^v}(b)\bar{\omega}_{\pi_{\mu^v}}.$$

Portanto, em qualquer um dos casos temos $e_\lambda e_\mu = 0$ quando $\lambda \neq \mu$. ■

3.4 Especializando H_n

Lembrando que:

$$\Lambda = \mathbb{C}[x, x^{-1}, v, v^{-1}, s, s^{-1}, z, \delta] / \langle v^{-1} - v = \delta z \rangle$$

onde $z = s - s^{-1}$, considere $g : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ um homomorfismo de anéis definido por:

$$g(x) = g(v) = g(s) = 1.$$

Observamos que o $g(\delta)$ pode ser a princípio qualquer valor (pois, em qualquer caso a relação é satisfeita). Posteriormente esse valor será definido.

Podemos considerar \mathbb{C} um Λ -módulo através da ação :

$$r.w = g(r).w, \forall r \in \Lambda, \forall w \in \mathbb{C}$$

Sendo assim, podemos considerar o Λ -módulo $H_n \otimes_{\Lambda} \mathbb{C}$. Por outro lado, $H_n \otimes_{\Lambda} \mathbb{C}$ tem uma estrutura de \mathbb{C} -álgebra dada pela ação :

$$w'(x \otimes w) = x \otimes w.w', \forall w, w' \in \mathbb{C}, \forall x \in H_n.$$

com o produto $(h \otimes w)(h' \otimes w') = h.h' \otimes w.w'$, onde $h, h' \in H_n$ e $w, w' \in \mathbb{C}$.

Lema 3.4.1 *A \mathbb{C} -álgebra $H_n \otimes_{\Lambda} \mathbb{C}$ é gerada pelo conjunto:*

$$\{\sigma_i \otimes 1 : i = 1, \dots, n-1\}$$

onde $\{\sigma_i : i = 1, \dots, n-1\}$ são as tranças elementares geradoras de H_n .

Demonstração:

Todo elemento da \mathbb{C} -álgebra $H_n \otimes_{\Lambda} \mathbb{C}$ pode ser escrito como uma soma finita de elementos do tipo $h \otimes w$, onde $h \in H_n$ e $w \in \mathbb{C}$.

Logo basta mostrarmos que todo elemento desse tipo pode ser escrito como um polinômio nos $\sigma'_i s$ e coeficientes em \mathbb{C} .

Temos que $h = \sum_{i=1}^k \lambda_i p_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$ onde λ_i é um escalar em Λ e p_i é um monômio nos $\sigma'_i s$.

Logo, pelas propriedades do produto tensorial e pela definição da ação de Λ em \mathbb{C} :

$$h \otimes w = \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i p_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \right) \otimes w \Leftrightarrow$$

$$h \otimes w = \sum_{i=1}^k \lambda_i p_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \otimes w \Leftrightarrow$$

$$h \otimes w = \sum_{i=1}^k p_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \otimes g(\lambda_i)w$$

Por outro lado, pela ação de \mathbb{C} em $H_n \otimes_{\Lambda} \mathbb{C}$ e pela definição do produto nessa álgebra, temos:

$$h \otimes w = \sum_{i=1}^k g(\lambda_i)w(p_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}) \otimes 1) \Leftrightarrow$$

$$h \otimes w = \sum_{i=1}^k g(\lambda_i)w(p_i(\sigma_1 \otimes 1, \dots, \sigma_{n-1} \otimes 1))$$

■

Lema 3.4.2 [Cohn] *Seja K um anel comutativo e sejam U e V K -módulos com bases $\{e_1, \dots, e_m\}$ e $\{f_1, \dots, f_k\}$, respectivamente, então:*

$$\{e_i \otimes f_j / i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, k\}$$

é uma base para o K -módulo $U \otimes V$.

Corolário 3.4.1 *O conjunto $\{\omega_{\pi} \otimes 1 / \pi \in S_n\}$ é uma base do Λ -módulo $H_n \otimes_{\Lambda} \mathbb{C}$.*

Proposição 3.4.1 *$H_n \otimes_{\Lambda} \mathbb{C}$ e $\mathbb{C}S_n$ são \mathbb{C} -álgebras isomorfas.*

Demonstração:

Lembremos primeiramente que a \mathbb{C} -álgebra $\mathbb{C}S_n$ é gerada por:

$$\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-1}\}$$

com as relações :

- (i) $\phi_i^2 = 1, i = 1, \dots, n - 1$
- (ii) $\phi_i \phi_j = \phi_j \phi_i, |i - j| > 1$
- (iii) $\phi_i \phi_{i+1} \phi_i = \phi_{i+1} \phi_i \phi_{i+1}, i = 1, \dots, n - 2.$

onde $\phi_i = (i \ i + 1).$

Além disso, como \mathbb{C} -módulo livre, tem base $\{\pi/\pi \in S_n\}$ e portanto dimensão $n!$. Pelo Lema 3.4.1, $H_n \otimes_{\Lambda} \mathbb{C}$ é gerada como \mathbb{C} -álgebra por $\{\sigma_i \otimes 1 : i = 1, \dots, n - 1\}$.

Usando as relações em H_n (cap.1) , quando $|i - j| \geq 2$ temos:

$$(\sigma_i \otimes 1)(\sigma_j \otimes 1) = \sigma_i \sigma_j \otimes 1 = \sigma_j \sigma_i \otimes 1 = (\sigma_j \otimes 1)(\sigma_i \otimes 1)$$

Analogamente, quando $i = 1, \dots, n - 2:$

$$\begin{aligned} (\sigma_{i+1} \otimes 1)(\sigma_i \otimes 1)(\sigma_{i+1} \otimes 1) &= (\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}) \otimes 1 \\ &= (\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i) \otimes 1 \\ &= (\sigma_i \otimes 1)(\sigma_{i+1} \otimes 1)(\sigma_i \otimes 1) \end{aligned}$$

Para $i = 1, \dots, n - 1:$

$$\begin{aligned} 0 \otimes 1 &= (x^{-1} \sigma_i - x \sigma_i^{-1} - (s - s^{-1}).1) \otimes 1 \\ &= \sigma_i \otimes g(x^{-1}) - \sigma_i^{-1} \otimes g(x) - 1 \otimes g(s - s^{-1}) \end{aligned}$$

Como g é homomorfismo de anéis e $g(x) = g(s) = 1$ temos:

$$0 \otimes 1 = \sigma_i \otimes 1 - \sigma_i^{-1} \otimes 1$$

E portanto, $(\sigma_i \otimes 1)^2 = 1.$

Logo mostramos que os geradores de $H_n \otimes_{\Lambda} \mathbb{C}$ obedecem às mesmas relações dos geradores de $\mathbb{C}S_n$. Vamos mostrar que não há nenhuma relação “a mais ” em $H_n \otimes_{\Lambda} \mathbb{C}$, provando que o homomorfismo de \mathbb{C} -álgebras $f : H_n \otimes_{\Lambda} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}S_n$ definido por:

$$f(\sigma_i \otimes 1) = (i \ i + 1)$$

é na verdade um isomorfismo.

Por construção f é sobrejetor. Vamos agora provar que é uma aplicação injetora, mostrando que como \mathbb{C} -módulos livres, ou melhor, espaços vetoriais sobre \mathbb{C} , $H_n \otimes_{\Lambda} \mathbb{C}$ e $\mathbb{C}S_n$ têm mesma dimensão .

Pelo Corolário anterior $\{\omega_{\pi} \otimes 1/\pi \in S_n\}$ é base de $H_n \otimes_{\Lambda} \mathbb{C}$. Utilizando argumentos semelhantes ao Lema 3.4.1, é fácil verificar que esse conjunto gera $H_n \otimes_{\Lambda} \mathbb{C}$ linearmente. Logo a sua dimensão é menor ou igual a $\pi!$. Por outro lado, como f é sobrejetora, temos que a dimensão de $H_n \otimes_{\Lambda} \mathbb{C}$ é maior ou igual a dimensão de $\mathbb{C}S_n$ que é $n!$ e portanto ambos têm a mesma dimensão , o que implica que f é injetora. ■

Considere a seguinte composta de aplicações Γ :

$$H_n \simeq H_n \otimes_{\Lambda} \Lambda \xrightarrow{1 \otimes g} H_n \otimes_{\Lambda} \mathbb{C} \xrightarrow{f} \mathbb{C}S_n$$

Proposição 3.4.2 Γ é um homomorfismo de anéis satisfazendo:

$$\Gamma(r\sigma_i) = g(r)(i i + 1) , \forall r \in \Lambda$$

Demonstração:

Γ é claramente um homomorfismo de anéis. Seja $r \in \Lambda$. Temos que $r\sigma_i \in H_n$ é mandado pelo isomorfismo $H_n \simeq H_n \otimes_{\Lambda} \mathbb{C}$ para o elemento $r.(\sigma_i \otimes 1) = \sigma_i \otimes r$, que por sua vez é mandado pela aplicação $1 \otimes g$ para $\sigma_i \otimes g(r)$.

Por outro lado, em $H_n \otimes_{\Lambda} \mathbb{C}$, temos $\sigma_i \otimes g(r) = g(r).(\sigma_i \otimes 1)$. Como f é isomorfismo de álgebras, $f(g(r)\sigma_i \otimes 1) = g(r)\phi_i$ como queríamos. ■

Dizemos que Γ **especializa** H_n em $\mathbb{C}S_n$.

Lema 3.4.3 $\Gamma(\omega_{\pi}) = \pi, \forall \pi \in S_n$.

Demonstração:

Basta lembrar que as tranças elementares σ_i geram o grupo de tranças e observar que Γ restrito a esse grupo (contido em H_n) é um homomorfismo de grupos. ■

Proposição 3.4.3 *Seja λ um diagrama de Young. Então $\Gamma(e_\lambda) = C_\lambda$, onde C_λ é o quase-idempotente associado ao tableau $T(\lambda)$.*

Demonstração:

Seja $D = T(\lambda)$. Lembramos que $C_\lambda = A_D B_D$, onde:

$$A_D = \sum_{p \in P_D} p \text{ e } B_D = \sum_{q \in Q_D} (-1)^{l(q)} q$$

sendo $l(q)$ tamanho da permutação q e P_D e Q_D os subgrupos de S_n que preservam as linhas e as colunas de D respectivamente. Lembramos também que:

$$e_\lambda = E_\lambda(a) \omega_{\pi_\lambda} E_{\lambda^v}(b) \bar{\omega}_{\pi_{\lambda^v}}$$

onde:

$$E_\lambda(a) = a_{\lambda_1} \otimes a_{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes a_{\lambda_k}$$

e também:

$$a_{\lambda_i} = \sum_{\pi \in S_{\lambda_i}} (-a)^{-l(\pi)} \omega_\pi$$

$$b_{\lambda_i} = \sum_{\pi \in S_{\lambda_i}} (-b)^{-l(\pi)} \omega_\pi.$$

Logo, $E_\lambda(a) = \sum_{\pi \in P_D} (-a)^{-l(\pi)} \omega_\pi$. Como, $a = -xs^{-1}$ e g é homomorfismo de anéis, pelas Proposições 3.4.2 e 3.4.3, temos que:

$$\Gamma(E_\lambda(a)) = \sum_{\pi \in P_D} (-g(a))^{-l(\pi)} \Gamma(\omega_\pi) = \sum_{\pi \in P_D} \pi.$$

Vamos analisar agora $\Gamma(\omega_{\pi_\lambda} E_{\lambda^v}(b) \bar{\omega}_{\pi_{\lambda^v}})$. Temos que:

$$\omega_{\pi_\lambda} E_{\lambda^v}(b) \bar{\omega}_{\pi_{\lambda^v}} = \sum_{\pi \in P_{D^v}} (-b)^{-l(\pi)} \omega_{\pi_\lambda} \omega_\pi \bar{\omega}_{\pi_{\lambda^v}}.$$

Lembrando que $b = xs$ (e portanto $g(b) = 1$) e que $\bar{\omega}_{\pi^v} = \omega_{\pi_\lambda}^{-1}$ temos:

$$\Gamma(\omega_{\pi_\lambda} E_{\lambda^v}(b) \bar{\omega}_{\pi_{\lambda^v}}) = \sum_{\pi \in P_{D^v}} (-1)^{-l(\pi)} \pi_\lambda \pi \pi_\lambda^{-1}$$

pelos Lemas 3.4.3 e 3.4.2.

Afirmamos que $Q_D = \{\pi_\lambda p \pi_\lambda^{-1} / p \in P_{D^v}\}$

De fato, considere $p \in P_{D^v}$. Temos que π_λ manda as colunas de D nas linhas de D^v , p preserva as linhas de D^v e π_λ^{-1} , por sua vez, leva as linhas de D^v nas colunas de D . Logo $\pi_\lambda p \pi_\lambda^{-1} \in Q_D$ preserva as colunas de D isto é, $\pi_\lambda p \pi_\lambda^{-1} \in Q_D$.

Considere agora $q \in Q_D$. Usando argumentos completamente análogos, temos que $\pi_\lambda^{-1} q \pi_\lambda \in P_{D^v}$.

Seja $\varphi_{\pi_\lambda} : S_n \rightarrow S_n$ definida por $\varphi_{\pi_\lambda}(\pi) = \pi_\lambda \pi \pi_\lambda^{-1}$. Logo φ_{π_λ} é um isomorfismo (conjugação por um elemento do grupo) tal que:

$$\varphi_{\pi_\lambda}(P_{D^v}) \subseteq Q_D$$

e

$$\varphi_{\pi_\lambda}^{-1}(Q_D) \subseteq P_{D^v}$$

e portanto $\varphi_{\pi_\lambda}(P_{D^v}) = Q_D$ o que prova a afirmação . Sendo assim:

$$\sum_{p \in P_{D^v}} (-1)^{-l(p)} \pi_\lambda p \pi_\lambda^{-1} = \sum_{p \in P_{D^v}} (-1)^{-l(\pi_\lambda^{-1} q \pi_\lambda)} q.$$

Como a conjugação não muda o sinal da permutação, temos:

$$(-1)^{-l(\pi_\lambda^{-1} q \pi_\lambda)} = (-1)^{-l(q)} = (-1)^{l(q)}$$

E portanto:

$$\Gamma(\omega_{\pi_\lambda} E_{\lambda^v}(b) \bar{\omega}_{\pi_\lambda^v}) = \sum_{q \in Q_D} (-1)^{l(q)} q = B_D$$

Consequentemente, $\Gamma(e_\lambda) = C_\lambda$. ■

3.5 Substituições no anel Λ

Vamos agora fazer substituições no nosso anel:

$$\Lambda = \mathbb{C}[x, x^{-1}, v, v^{-1}, s, s^{-1}, z, \delta] / \langle v^{-1} - v = \delta z \rangle$$

onde $z = s - s^{-1}$, as quais serão necessárias posteriormente. Seja N um natural não nulo fixado. Faremos as substituições:

$$x = s^{-1/N}, \quad v = s^{-N}, \quad \text{e} \quad \delta = s^{N-1} + s^{N-3} + \dots + s^{-N+1}$$

compatíveis com a relação $v - v^{-1} = \delta z$. Observamos que a partir de agora temos um valor definido para $g(\delta)$.

Para garantirmos a inversibilidade do escalar α_λ , e portanto obtermos genuínos idempotentes em H_n , faremos ainda a substituição $s = e^{h/2}$. Essas substituições induzem um homomorfismo de anéis, que não alteram os resultados até agora obtidos. Além disso, isso feito, todo elemento de Λ será representado por uma série formal de potências em h , isto é, $\Lambda = \mathbb{C}[[h]]$ e o homomorfismo $g : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ passa a ser definido por $g(h) = 0$.

A fim de tratarmos da inversibilidade nesse anel precisamos do seguinte resultado:

Proposição 3.5.1 *Em $\Lambda = \mathbb{C}[[h]]$, $f \in \Lambda$ é inversível se e somente se o fator constante em f é não nulo, isto é, $g(f) \neq 0$.*

Demonstração:

Seja $f \in \mathbb{C}[[h]]$. Pela definição do produto de duas séries formais é imediato que se f é inversível, então $g(f) \neq 0$. Para mostrar a outra implicação, considere:

$$f(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$$

tal que $g(f) = a_0 \neq 0$. Vamos construir um elemento:

$$g(X) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n$$

tal que $f.g = g.f = 1$.

Seja $f.g(X) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n X^n$, sendo $c_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k b_{n-k}$. Definimos $b_0 = a_0^{-1}$ e portanto $c_0 = 1$. Vamos agora “obrigar” os coeficientes c_n a se anularem, definindo indutivamente o valor de b_n :

$$0 = \sum_{k=0}^1 (-1)^k a_k b_{1-k} = a_0 b_1 - a_1 b_0 \Rightarrow b_1 = a_0^{-1}(a_1 b_0)$$

e portanto, se $b_1 = b_0(a_1 b_0)$ temos $c_1 = 0$.

Assumindo b_i definido para $i < m$, definimos b_m como:

$$b_m = -b_0 \left(\sum_{k=1}^m (-1)^k a_k b_{m-k} \right)$$

o que faz com que c_n seja nulo.

Por outro lado, como o anel dos coeficientes (no caso \mathbb{C}) é comutativo, observamos que se $g.f(X) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m X^m$, temos que:

$$d_m = (-1)^m c_m, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

e portanto, $g.f = f.g = 1$, como queríamos. ■

OBS: Essa proposição é claramente verdadeira se trocarmos \mathbb{C} por um anel comutativo com unidade e o termo $\neq 0$ por “invertível”.

Lema 3.5.1 *O escalar α_λ tal que $e_\lambda^2 = \alpha_\lambda e_\lambda$ é invertível em $\Lambda = \mathbb{C}[[h]]$.*

Demonstração:

Pelo Lema 3.4.2 e pela Proposição 3.4.3 temos:

$$\Gamma(e_\lambda^2) = g(\alpha_\lambda) C_\lambda$$

Por outro lado:

$$\Gamma(e_\lambda^2) = \Gamma(e_\lambda)^2 = C_\lambda^2$$

Como $C_\lambda^2 = a_\lambda C_\lambda$ temos:

$$g(\alpha_\lambda)C_\lambda = a_\lambda C_\lambda$$

e portanto, $g(\alpha_\lambda) = a_\lambda$ escalar não nulo pelo Teorema 3.2.5. Logo, pela Proposição anterior, α_λ é inversível. ■

Nota:

- (i) A partir desse momento, estaremos sempre considerando $\Lambda = \mathbb{C}[[h]]$, porém frequentemente, a fim de facilitarmos alguns cálculos, efetuaremos as substituições após estes.
- (ii) O Lema anterior nos permite considerar o elemento $(1/\alpha_\lambda)e_\lambda \in H_n$, que é um genuíno idempotente para todo λ , tal que $|\lambda| = n$. Chamaremos o fecho desse elemento em C^+ de Q_λ .

Usaremos agora a função Γ para mostrar que H_n uma decomposição útil da álgebra H_n , onde os elementos e_λ fazem papel semelhante ao dos elementos $C_\lambda \in \mathbb{C}S_n$ (lembrando que C_λ é o quase-idempotente definido a partir do tableau de Young $T(\lambda)$).

Teorema 3.5.1 $H_n = \sum_{|\lambda|=n} H_n e_\lambda H_n.$

Demonstração:

Lembremos que $\mathbb{C}S_n$ é gerado como \mathbb{C} -módulo por:

$$\{\pi_i / i = 1, \dots, n!\}$$

onde π_i são as transposições elementares e H_n é gerado como Λ -módulo livre por:

$$\{\omega_i / i = 1, \dots, n!\}$$

onde podemos supor que $\Gamma(\omega_i) = \pi_i$, pelo Lema 3.4.3.

Pela Proposição 3.4.3 e como Γ é um homomorfismo de anéis sobrejetor, temos:

$$\Gamma(H_n e_\lambda H_n) = \Gamma(H_n) \cdot C_\lambda \cdot \Gamma(H_n) = \mathbb{C}S_n C_\lambda \mathbb{C}S_n$$

E portanto, pela Proposição 3.2.5:

$$\Gamma\left(\sum_{|\lambda|=n} H_n e_\lambda H_n\right) = \bigoplus_{|\lambda|=n} \mathbb{C} S_n C_\lambda \mathbb{C} S_n = \mathbb{C} S_n.$$

Sendo assim, $\exists v_i \in \sum_{|\lambda|=n} H_n e_\lambda H_n$ tal que $\Gamma(v_i) = \pi_i$.

Como $\{\omega_j / j = 1, \dots, n!\}$ geram H_n linearmente, temos $v_i = \sum_{j=1}^{n!} b_{ij} \omega_j$, onde $b_{ij} \in \Lambda$.

Considere a matriz $B = (b_{ij})_{n! \times n!}$. Se mostrarmos que B é inversível, estaremos mostrando que podemos escrever cada ω_j como combinação Λ -linear dos v_j 's e portanto $\omega_j \in \sum_{|\lambda|=n} H_n e_\lambda H_n$ para todo $j = 1, \dots, n!$, isto é, $H_n = \sum_{|\lambda|=n} H_n e_\lambda H_n$.

De fato, pela Proposição 3.4.2:

$$\Gamma(v_i - \omega_i) = 0 \implies (g(b_{ii}) - 1)\pi_i + \sum_{i \neq j} g(b_{ij})\pi_j = 0.$$

Como $\{\pi_j / j = 1, \dots, n!\}$ é base do \mathbb{C} -módulo $\mathbb{C} S_n$, temos $g(b_{ij}) = 0$, se $i \neq j$ e $g(b_{ii}) = 1$.

Logo, b_{ij} tem termo constante não nulo (no caso igual a 1) se e somente se $i = j$, o que nos permite escrever a matriz B como:

$$B = I + hB'$$

Como $\det B$ é um polinômio em Λ e g é homomorfismo de anéis, temos que $g(\det B) = \det(g(B)) = \det I = 1$. Segue portanto que o $\det B$ tem termo constante igual a 1 sendo pela Proposição 3.5.1 inversível em Λ e conseqüentemente temos que B é uma matriz inversível. ■

Capítulo 4

A Álgebra dos diagramas de Young

Vamos agora dar uma estrutura de álgebra ao conjunto dos diagramas de Young e mostrar que obtemos dessa forma, uma outra caracterização de álgebra C^+ .

4.1 O produto no conjunto dos diagramas

Definição 4.1.1 Sejam μ e λ diagramas de Young, onde $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ e $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$. Uma μ -**expansão** de λ é obtida da seguinte maneira:

- (i) Adicione μ_1 células à λ , cada qual associada ao número 1, de tal forma que cada par dessas células sejam colocadas em colunas distintas do diagrama resultante e de que este seja um diagrama de Young.
- (ii) Repita o processo com as linhas $i = 1, 2, \dots, m$ sucessivamente, até que tenha adicionado ao diagrama μ_m células associadas ao número m .

Seja ν o diagrama final. Para cada célula de ν , seja n_i o número de células associadas a i acima e à direita da célula (incluindo a mesma). A u -expansão de λ é dita **estrita** se para qualquer célula de ν , $i < j$ implica $n_i \geq n_j$.

Considere Y o conjunto das combinações formais Λ -lineares dos diagramas de Young, ou melhor dizendo, o Λ -módulo com base no conjunto dos diagramas de Young. Podemos tornar Y uma Λ -álgebra definindo o produto de dois diagramas de Young quaisquer pela fórmula:

$$\lambda\mu = \sum_{|\nu|=|\lambda|+|\mu|} a_{\lambda\mu}^{\nu} \nu$$

onde os $a_{\lambda\mu}^{\nu}$ são chamados **coeficientes de Littlewood-Richardson** e são definidos pelo número de maneiras distintas que o diagrama ν pode ser obtido através de uma μ -expansão estrita de λ .

Exemplo: O diagrama $\nu = (3, 2, 1, 1)$, não pode ser obtido de $\lambda = (3, 2)$ e $\mu = (2)$ através de uma μ -expansão estrita (pois as duas células da mesma linha de μ teriam que serem colocadas ambas na mesma coluna de λ). Logo, o coeficiente de ν no produto $\lambda\mu$ é $a_{\lambda\mu}^{\nu} = 0$.

Obviamente o produto está bem definido e tem por identidade a partição nula, porém é através da Teoria de Representações da álgebra de Lie $sl(N)$, que esse produto se revela **associativo** e **comutativo**. Usaremos essas propriedades **sem demonstração**, mas detalhes sobre esses coeficientes na Teoria de Representações de $sl(N)$ podem ser vistos em [FH].

Nota: O produto assim definido vem da relação de Y com o anel das classes de representação de $sl(N)$ (cujo produto, por sua vez, é definido a partir do produto tensorial), relação essa que podemos ver no seguinte resultado:

Proposição 4.1.1 [FH] *Sejam V_{λ} e V_{μ} duas representações irredutíveis de $U(sl(N))$. Então $V_{\lambda} \otimes V_{\mu} = \sum_{|\nu|=|\lambda|+|\mu|} a_{\lambda\mu}^{\nu} V_{\nu}$, onde $a_{\lambda\mu}^{\nu}$ são os coeficientes de Littlewood-Richardson.*

4.2 Y e C^+ são álgebras isomorfas

Vamos agora detalhar mais um pouco a estrutura da álgebra Y . Observamos primeiramente que o produto definido, Y torna-se um anel graduado, isto é:

$$Y = \bigoplus_{n=0}^{\infty} Y^{(n)}$$

onde $Y^{(n)}$ é o espaço Λ -linear gerado pelos diagramas com exatamente n -células.

Proposição 4.2.1 *Y é gerado como anel polinomial pelos diagramas de Young com uma única coluna.*

Demonstração:

Indução no número de colunas e no número de células na última coluna. Para λ com uma única coluna e k células o resultado é imediato.

Assuma, portanto, que o resultado é válido para todos os diagramas de Young com no máximo m colunas e menos que k células na última coluna. Seja λ tal que $\lambda^v = (\lambda_1^v, \dots, \lambda_m^v)$ com $\lambda_m^v = k$. Seja μ o diagrama obtido removendo a última coluna de λ .

Como μ tem $m - 1$ colunas, pela hipótese de indução, existe uma expressão polinomial de μ em termos dos diagramas de uma única coluna. Temos que λ é uma das parcelas do produto μc_k , isto é:

$$\mu c_k = \sum_{|\nu|=|\mu|+|c_k|, \nu \neq \lambda} a_{\mu c_k}^\nu \nu + a_{\mu c_k}^\lambda \lambda$$

A única maneira de obtermos λ por uma c_k -expansão de μ é adicionando a única célula de cada linha i de c_k à linha i de μ . Logo, $a_{\mu c_k}^\lambda = 1$ e portanto:

$$\lambda = \mu c_k - \sum_{|\nu|=|\mu|+|c_k|, \nu \neq \lambda} a_{\mu c_k}^\nu \nu.$$

Segundo as regras da expansão estrita, as outras parcelas possíveis devem ter no máximo m colunas e no máximo $k - 1$ células na m -ésima coluna.

Sendo assim, pela hipótese de indução, cada ν que aparece na soma com $a_{\mu c_k}^\nu \neq 0$ é escrito como uma expressão polinomial de diagramas de uma só coluna, o que implica que o resultado é válido para λ . ■

4.2.1 Nota: Fórmula de Giambelli

Seja c_i o diagrama com uma única coluna de i células e $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ um diagrama de Young tal que $\lambda_1 = m$ (isto é, o seu conjugado λ^v possui m linhas). Há uma

fórmula, a chamada **fórmula de Giambelli**, que descreve λ como um polinômio nos diagramas c_i 's a qual é dada por:

$$\lambda = \begin{vmatrix} c_{\lambda_1^v} & c_{\lambda_1^v+1} & \cdots & c_{\lambda_1^v+m-1} \\ c_{\lambda_2^v-1} & c_{\lambda_2^v} & \cdots & c_{\lambda_2^v+m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{\lambda_m^v-m+1} & c_{\lambda_m^v-m+2} & \cdots & c_{\lambda_m^v} \end{vmatrix}$$

Observamos ainda que todo diagrama que aparece na expressão de λ por essa fórmula tem exatamente o mesmo número de células de λ (fato esse que decorre da própria expressão dada acima e da definição de produto em Y). Para maiores detalhes, consultar [FH].

Considere $R_\infty = \Lambda[C_1, C_2, \dots, C_i, \dots]$, o anel dos polinômios em uma quantidade infinita e enumerável de indeterminadas.

Proposição 4.2.2 R_∞ e C^+ são Λ -álgebras isomorfas.

Demonstração:

Basta observar que ambas são álgebras livres em um número infinito e enumerável de geradores. ■

Definição 4.2.1 Definimos o *peso* de um monômio em $r \in R_\infty$, $r = C_{i_1}^{j_1} C_{i_2}^{j_2} \dots C_{i_m}^{j_m}$ como $\sum_{k=1}^m i_k j_k$.

Lema 4.2.1 Seja $R_\infty^{(n)}$ o Λ -submódulo de R_∞ gerado pelos monômios de peso n . Então R_∞ é a soma direta desses espaços, isto é, $R_\infty = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_\infty^{(n)}$. Além disso, se $r^{(i)} \in R_\infty^{(i)}$ e $r^{(j)} \in R_\infty^{(j)}$, então $r^{(i)} r^{(j)} \in R_\infty^{(i+j)}$.

Demonstração:

Todo monômio de R_∞ está em $R_\infty^{(n)}$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e a soma desses espaços é direta pela própria definição destes. Logo claramente temos:

$$R_\infty = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R_\infty^{(n)}$$

A outra afirmação decorre de forma imediata da definição de peso de um monômio.

■

Finalmente, mostraremos que a álgebra dos diagramas de Young é isomorfa à álgebra C^+ dos diagramas no anel.

Lema 4.2.2 *Dado $n \in \mathbb{N}$, o número de monômios de peso n em R_∞ , isto é, a dimensão de $R_\infty^{(n)}$, é igual ao número de partições de n .*

Demonstração:

Basta mostrar que há uma bijeção entre o conjunto dos monômios de peso n em R_∞ e o conjunto dos diagramas de Young com n células. De fato, seja $C_{i_1}^{j_1} C_{i_2}^{j_2} \dots C_{i_m}^{j_m}$ tal que $\sum_{k=1}^m i_k j_k = n$. Podemos assumir, bastando efetuar uma reordenação dos C_i 's, que $i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_m$. Sendo assim, a cada monômio em $R_\infty^{(n)}$ podemos associar um diagrama de Young λ com j_k linhas de i_k células e portanto $|\lambda| = n$.

Reciprocamente, dado um diagrama de Young λ com n células, definimos unicamente, usando a mesma regra, um monômio de peso n . ■

Proposição 4.2.3 *R_∞ e Y são Λ -álgebras isomorfas.*

Demonstração:

Seja $f : R_\infty \rightarrow Y$ o homomorfismo de álgebras definido por:

$$f(C_i) = c_i.$$

A aplicação é sobrejetora pela Proposição 4.2.1. Além disso, temos:

$$f(R_\infty^{(n)}) = Y^{(n)},$$

decorrendo diretamente da definição do produto em Y . Essa igualdade implica que a imagem do conjunto dos monômios de peso n (base de $R_\infty^{(n)}$) gera $Y^{(n)}$.

Por sua vez, $Y^{(n)}$ é gerado como Λ -módulo pelos diagramas de n células e portanto sua dimensão é o número de partições de n , ou equivalentemente, o número de diagramas de Young com n células. Pelo Lema anterior, temos uma aplicação linear sobrejetora entre os Λ -módulos $Y^{(n)}$ e $R_\infty^{(n)}$ de mesma dimensão. Como Λ é anel comutativo, f é injetora em $R_\infty^{(n)}$. Pelo Lema 4.2.1, f é injetora em todo o espaço R_∞ . ■

Corolário 4.2.1 C^+ e Y são Λ -álgebras isomorfas.

Demonstração:

Decorre da Proposição 4.2.2. ■

Vamos posteriormente explicitar esse isomorfismo e verificar algumas propriedades as quais nos serão necessárias.

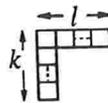
Definições 4.2.1 Seja N um natural não nulo. Considere R_N o anel quociente:

$$R_N = R_\infty / I$$

onde I é o ideal gerado por $\{c_k = 0, \forall k > N\}$. É imediato que $R_N \simeq \Lambda[C_1, \dots, C_N]$. Denotaremos o homomorfismo quociente por $p_N : R_\infty \rightarrow R_N$.

Vamos agora mostrar uma relação entre séries formais com coeficientes em Y , que serão úteis na obtenção de algumas igualdades. Antes porém, vamos examinar com detalhes o produto $c_k d_l$, onde c_k é o diagrama coluna de k células e d_l é o diagrama linha de l células.

Quais são os diagramas que podem ser obtidos desse dois diagramas, através de uma expansão estrita? Seja $\mu_{k,l}$ o diagrama:



É fácil ver que existem apenas duas possibilidades de uma d_l -expansão estrita de

c_k , quando l e k são não nulos, a saber os diagramas $\mu_{k,l+1}$ e $\mu_{k+1,l}$, ambos obtidos de uma única maneira.

Por outro lado, quando k ou l é nulo, obtemos o diagrama vazio que é o elemento identidade em Y . Sendo assim, o produto de $c_k d_l$ (ver seção 4.1) é dado por:

- (i) c_k , se $l=0$.
- (ii) d_l , se $k=0$.
- (iii) $\mu_{k+1,l} + \mu_{k,l+1}$, se $l, k > 0$.

Sejam $A(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^k$ e $B(X) = \sum_{l=0}^{\infty} b_l X^l$ séries formais com coeficientes em um anel comutativo K . Lembramos que o produto entre esses dois elementos é definido por:

$$A(X)B(X) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m X^m$$

onde $h_m = \sum_{k=0}^m (-1)^k a_k b_{m-k}$.

Considere $C(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k X^k$ e $D(X) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l d_l X^l$ duas séries formais com coeficientes em Y . Então vale:

Proposição 4.2.4 $C(X)D(X) = 1$.

Demonstração:

Seja $C(X)D(X) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m X^m$. Pela definição do produto entre $C(X)$ e $D(X)$, temos que :

$$a_0 = c_0 d_0 = 1.$$

Por outro lado, quando $m > 0$, temos:

$$\begin{aligned}
a_m &= \sum_{k=0}^m (-1)^k c_k d_{m-k} \\
&= d_m + \sum_{k=1}^{m-1} ((-1)^k (\mu_{k+1, m-k} + \mu_{k, m-k+1})) + (-1)^m c_m \\
&= d_m + \sum_{k=2}^m (-1)^{k-1} \mu_{k, m-k} + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} \mu_{k, m-k+1} + (-1)^m c_m \\
&= d_m + (-1)^{m-1} \mu_{m, 1} + (-1) \mu_{1, m} + (-1)^m c_m + \sum_{k=2}^{m-1} ((-1)^{k-1} (\mu_{k, m-k+1} - \mu_{k, m-k+1})) \\
&= d_m - d_m + (-1)^{m-1} (c_m - c_m) - 0 = 0 \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Nota: Vamos olhar essa relação no anel quociente R_N , considerando já o resultado $R_\infty \simeq Y$ e portanto, fazendo a identificação $C_i = c_i$.

Seja $C_N(X) = p_N(C(X))$. Logo $C_N(X) = 1 - c_1 X + \dots + (-1)^N c_N X^N$. Esse polinômio pode ser formalmente fatorado da seguinte forma:

$$C_N(X) = \prod_{i=1}^N (1 - x_i X)$$

considerando c_k a k -ésima função simétrica elementar nas variáveis $\{x_i\}_{i=1}^N$. Logo, o anel R_N pode ser pensado como o anel dos polinômios simétricos em $\{x_i\}_{i=1}^N$.

Definição 4.2.2 Seja Y_N o anel quociente Y/J , onde J é o ideal gerado por:

$$\{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) / k > N\}.$$

Proposição 4.2.5 R_N é isomorfo a Y_N .

Demonstração:

Lembramos que $R_N = R_\infty/I$, onde I é o ideal gerado por $\{c_k = 0, k > 0\}$ e $R_\infty \simeq Y$ (Proposição 4.2.3). Fazendo uso dessa identificação, vamos mostrar que os ideais I e J são os mesmos e portanto os anéis quocientes também o são.

Observamos primeiramente que c_i , quando $i > N$, possui mais que N linhas e portanto $I \subseteq J$. Considere agora $\lambda \in J$. Pela Observação 4.2.1, λ é expresso pela

fórmula de Giambelli:

$$\lambda = \begin{vmatrix} c_{\lambda_1^v} & c_{\lambda_1^v+1} & \cdots & c_{\lambda_1^v+m-1} \\ c_{\lambda_2^v-1} & c_{\lambda_2^v} & \cdots & c_{\lambda_2^v+m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{\lambda_m^v-m+1} & c_{\lambda_m^v-m+2} & \cdots & c_{\lambda_m^v} \end{vmatrix}$$

Observe que os elementos da primeira linha do determinante pertencem à I , quando λ tem mais de N linhas e portanto $\lambda_1^v > N$. Expandindo o determinante por essa linha, temos que $\lambda \in I$. ■

Queremos agora explicitar o isomorfismo entre C^+ e Y , mostrando que os elementos $\lambda \in Y$ correspondem aos elementos $Q_\lambda = (1/\alpha_\lambda)\widehat{e}_\lambda \in C^+$. Mas antes, vamos efetuar alguns cálculos envolvendo os elementos $e_\lambda \in H_{|\lambda|}$ e $Q_\lambda \in C^+$.

4.3 Algumas relações entre os quase-idempotentes de H_n

A fim de simplificarmos a notação, denotaremos o quase-idempotente associado ao diagrama $\mu_{k,l}$ por $e_{k,l}$, bem como o escalar associado por $\alpha_{k,l}$ e o fecho em C^+ por $Q_{k,l}$.

Definição 4.3.1 Seja $n \in \mathbb{N}$. Definimos $[n]$ o número quântico n por:

$$[n] = \frac{s^n - s^{-n}}{s - s^{-1}}$$

Definimos também o fatorial do número quântico n por:

$$[n]! = [n].[n-1].[n-2] \dots [1]$$

Observamos que $[n]$ a princípio não pertence ao anel Λ , por inexistirem nesse último potências negativas de $(s^i - s^{-i})$ para $i \geq 1$. Manipularemos esses elementos como se estivéssemos em um anel estendido e posteriormente mostraremos que os números quânticos pertencem à Λ e são inversíveis nesse anel.

Proposição 4.3.1 *Valem as seguintes relações:*

- (i) $e_{k',1} \cdot e_{k,1} = \phi_a(e_{k,1})e_{k',1}$, se $k' \geq k$.
- (ii) $e_{1,l'} \cdot e_{1,l} = \phi_b(e_{1,l})e_{1,l'}$, se $l' \geq l$.
- (iii) $\phi_a(e_{k,1}) = \alpha_{k,1}$ e $\phi_b(e_{1,l}) = \alpha_{1,l}$.

onde ϕ_a e ϕ_b são os homomorfismos lineares definidos no Teorema 3.3.2.

Demonstração:

Basta ver que $e_{k,1} = b_k$ e $e_{1,l} = a_l$ e aplicar diretamente o Teorema 3.3.2. De fato,

$$e_{1,l} = E_\lambda(a)\omega_{\pi_\lambda}E_{\lambda^v}(b)\bar{\omega}_{\pi_{\lambda^v}},$$

onde $\lambda = \mu_{1,l}$. Nesse caso temos π_λ a permutação identidade e como $\pi_{\lambda^v} = \pi_\lambda^{-1}$, temos que π_{λ^v} também o é. Logo, ω_{π_λ} e $\omega_{\pi_{\lambda^v}}$ são tranças triviais em l linhas. Sendo assim, temos que $e_{1,l} = E_{\mu_{1,l}}(a) = a_l$. Analogamente, concluímos que $e_{k,1} = b_k$. ■

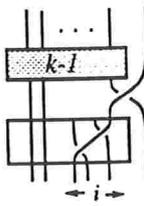
Convenção: Para simplificar a notação, vamos representar diagramaticamente o elemento a_k como um bloco branco com um k no centro. Para diferenciar, vamos representar b_k de maneira análoga, só que com um bloco escurecido, ao invés do branco.

Lema 4.3.1 *Seja ω_π uma k -trança de permutação positiva associada à permutação $\pi \in S_n$ tal que $\pi(k) = i$, para algum $1 \leq i \leq k$ fixo. Então, ω_π pode ser escrita como um produto de tranças de permutação positiva $\omega_\pi = \omega_{\pi'} \cdot \omega_{\pi_i}$, onde $\omega_{\pi'}$ é tal que $\pi'(k) = k$ e ω_{π_i} é uma trança com $k - i$ cruzamentos positivos.*

Demonstração:

Seja ω_π uma trança de permutação positiva tal que $\pi(k) = i$. Definimos $\pi' \in S_k$ como:

$$\pi'(j) = \begin{cases} \pi(j) & , \quad 1 \leq \pi(j) < i \\ k & , \quad j = k \\ \pi(j) - 1 & , \quad i < \pi(j) < k \end{cases}$$

$$(ii) e_{k,1} = e_{k-1,1} \otimes e_{1,1} + \sum_{i=0}^{l-2} (-x^{-1}s^{-1})^{i+1}$$


Demonstração:

Lembrando raciocínio já feito na Proposição 4.3.1, temos que $e_{1,l} = a_l$ e $e_{k,1} = b_k$. Vamos fazer os cálculos para o caso $e_{k,1}$, sendo estes totalmente análogos para o outro caso (mudando apenas as constantes envolvidas). Aplicando o Lema anterior para $e_{k,1}$ e lembrando que $b = xs$, temos:

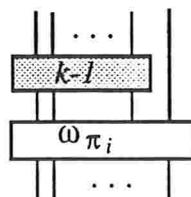
$$\begin{aligned}
 e_{k,1} = b_k &= \sum_{\pi \in S_k} (-b^{-1})^{l(\pi)} \omega_\pi \\
 &= \sum_{\pi \in S_k, \pi(k)=1} (-b^{-1})^{l(\pi)} \omega_\pi + \dots + \sum_{\pi \in S_k, \pi(k)=k} (-b^{-1})^{l(\pi)} \omega_\pi \\
 &= \sum_{\pi' \in S_{k-1}} (-b^{-1})^{l(\pi')} (\omega_{\pi'} \otimes 1) \cdot \omega_{\pi_1} + \dots + \sum_{\pi' \in S_{k-1}} (-b^{-1})^{l(\pi')} (\omega_{\pi'} \otimes 1) \cdot \omega_{\pi_k}
 \end{aligned}$$

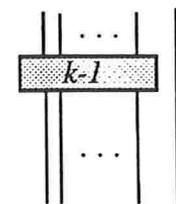
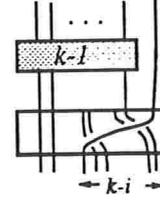
onde $\pi = \pi' \cdot \pi_i$.

Como cada ω_{π_i} tem $k - i$ cruzamentos positivos, lembrando que:

$$l(\pi) = \text{número de auto-enlaçamento de } \omega_\pi$$

temos $l(\pi') = l(\pi) - (k - i)$ e portanto, da última equação tiramos:

$$e_{k,1} = \sum_{i=1}^k (-b^{-1})^{k-i}$$


$$= \text{Diagram with box 'k-1'} + \sum_{i=1}^{k-1} (-b^{-1})^{k-i} \text{Diagram with box 'k-1' and crossing}$$



$$= \begin{array}{c} \dots \\ | \\ \boxed{k-1} \\ | \\ \dots \end{array} + \sum_{j=1}^{k-1} (-b^{-1})^j \begin{array}{c} \dots \\ | \\ \boxed{k-1} \\ | \\ \dots \\ \leftarrow j-1 \end{array}$$

$$= e_{k-1,1} \otimes e_{1,1} + \sum_{i=0}^{k-2} (-b^{-1})^{i+1} \begin{array}{c} \dots \\ | \\ \boxed{k-1} \\ | \\ \dots \\ \leftarrow i \end{array}$$

■

Proposição 4.3.2 *Os escalares associados aos quase-idempotentes $e_{k,1}$ e $e_{1,l}$ são dados por:*

$$\alpha_{k,1} = \frac{[k]!}{s^{k(k-1)/2}}$$

$$e$$

$$\alpha_{1,l} = \frac{[l]!}{s^{-l(l-1)/2}}$$

Demonstração:

Vamos demonstrar o resultado por indução em k para o caso $e_{k,1}$. Novamente, o outro caso sai de forma completamente análoga. Para $k = 1$, $\mu_{1,1}$ é a trança trivial e $\alpha_{1,1} = \frac{1}{s^0} = 1$ como esperávamos. Considere agora a proposição válida para $1 \leq k' < k$. Pelo Lema 4.3.2, temos:

$$e_{k,1}^2 = \begin{array}{c} \dots \\ | \\ \boxed{k} \\ | \\ \boxed{k} \\ | \\ \dots \end{array}$$

$$= \begin{array}{c} \dots \\ | \\ \boxed{k} \\ | \\ \boxed{k-1} \\ | \\ \dots \end{array} + \sum_{i=0}^{k-2} (-x^{-1}s^{-1})^{i+1} \begin{array}{c} \dots \\ | \\ \boxed{k} \\ | \\ \boxed{k-1} \\ | \\ \dots \end{array}$$

Como b_k é central em H_k e $a = (-xs^{-1})$, pelo Teorema 3.3.2, $\phi_a(\omega_i) = a^{i+1}$ (pois é produto de $i + 1$ tranças elementares) temos:

$$e_{k,1}^2 = \begin{array}{c} \dots \\ | \\ \boxed{k} \\ | \\ \boxed{k-1} \\ | \\ \dots \end{array} + \sum_{i=0}^{k-2} (-x^{-1}s^{-1})^{i+1} (-xs^{-1})^{i+1} \begin{array}{c} \dots \\ | \\ \boxed{k} \\ | \\ \boxed{k-1} \\ | \\ \dots \end{array}$$

Como $\phi_a(b_{k-1}) = \phi_a(e_{k-1,1}) = \alpha_{k-1,1}$, pelo Teorema 3.3.2 temos :

$$e_{k,1}^2 = \alpha_{k-1,1} \cdot e_{k,1} + \sum_{i=0}^{k-2} (-x^{-1}s^{-1})^{i+1} (-xs^{-1})^{i+1} \alpha_{k-1,1} e_{k,1}$$

Pela hipótese de indução :

$$e_{k,1} = \left(\frac{[k-1]!}{s^{(k^2-3k+2)/2}} + \frac{[k-1]!}{s^{(k^2-3k+2)}} \sum_{i=0}^{k-2} s^{-2i-2} \right) e_{k,1}$$

Observando que $\sum_{i=0}^{k-2} s^{-2i-2} = s^{-k} \left(\frac{s^{k-1} - s^{-k+1}}{s-s^{-1}} \right) = s^{-k} [k-1]$ temos:

$$\begin{aligned} e_{k,1}^2 &= \frac{[k-1]!}{s^{(k^2-k)/2}} \left(\frac{1+s^{-k}[k-1]}{s^{-k+1}} \right) e_{k,1} \\ &= \frac{[k-1]!}{s^{(k^2-k)/2}} \left(\frac{(s-s^{-1}) + s^{-k}(s^{k-1} - s^{-k+1})}{(s-s^{-1})s^{-k+1}} \right) e_{k,1} \\ &= \frac{[k]!}{s^{k(k-1)/2}} e_{k,1} \end{aligned}$$

Corolário 4.3.1 *Os números quânticos pertencem à Λ e são inversíveis nesse anel.*

Demonstração:

Faremos indução em k , usando o fato de que $\alpha_{k,1}$ é inversível em Λ . Para $k = 2$, temos pela Proposição anterior:

$$[2] = \alpha_{2,1} \cdot s$$

e portanto, $[2] \in \Lambda$ e possui inverso $[2]^{-1} = s^{-1} \alpha_{2,1}^{-1}$. Suponha que para todo $k < n$, $[k] \in \Lambda$ e seja inversível. Nesse caso, $[k]! \in \Lambda$ e também é inversível. Sendo assim, novamente pela Proposição anterior:

$$[k+1] = \frac{\alpha_{k+1,1} s^{(k+1)k/2}}{[k]!}$$

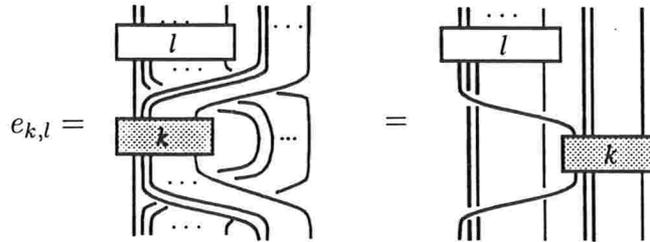
e portanto, $[k+1] \in \Lambda$ e é inversível nesse anel. ■

Proposição 4.3.3 O escalar associado ao quase-idempotente $e_{k,l}$ é dado por:

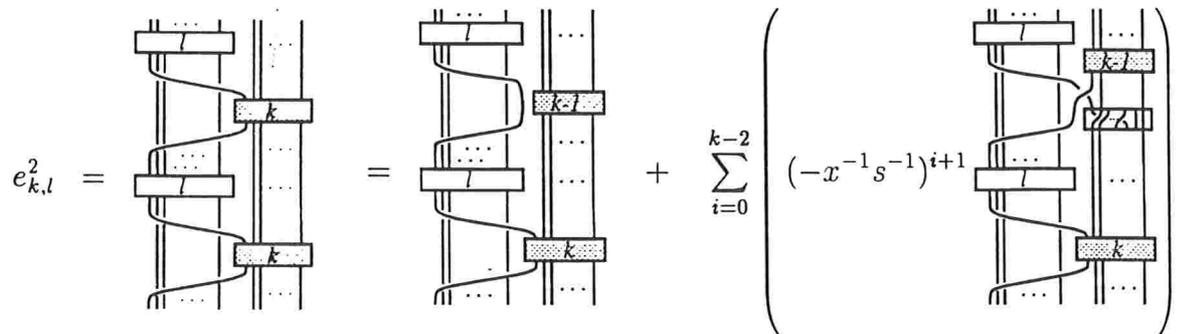
$$\alpha_{k,l} = \frac{[k+l-1][k-1]![l-1]!}{s^{(k(k-1)-l(l-1))/2}}$$

Demonstração:

Observamos primeiramente que:



Aplicando o Lema 4.3.2:



Aplicando agora o Teorema 3.3.2, temos:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{k-2} (-x^{-1}s^{-1})^{i+1} & \quad \begin{array}{c} \text{Diagram 1: A vertical stack of boxes with a single crossing between two boxes labeled } k-1 \text{ and } k. \end{array} \\
 & = \left(\sum_{i=0}^{k-2} (-x^{-1}s^{-1})^{i+1} (-xs^{-1})^i \right) \quad \begin{array}{c} \text{Diagram 2: A vertical stack of boxes with a crossing between two boxes labeled } k-1 \text{ and } k. \end{array} \\
 & = -x^{-1} \left(\sum_{i=0}^{k-2} s^{-2i-1} \right) (xs)^{l-1} (xs)^{-(l-1)} \quad \begin{array}{c} \text{Diagram 3: A vertical stack of boxes with a crossing between two boxes labeled } k-1 \text{ and } k. \end{array} \\
 & = -x^{-1} (s^{-1} + \dots + s^{-2k+3}) (xs)^{-(l-1)} \quad \begin{array}{c} \text{Diagram 4: A vertical stack of boxes with a crossing between two boxes labeled } k-1 \text{ and } k. \end{array}
 \end{aligned}$$

sendo que o coeficiente do último diagrama pode ser simplificado:

$$x^{-1}(s^{-1} + \dots + s^{-2k+3})(xs)^{-(l-1)} = x^{-1}s^{-k+1}(s^{k-2} + \dots + s^{-k+2})(xs)^{-(l-1)} = x^{-1}s^{-k+1}[k-1](x$$

Aplicando novamente o Lema 4.3.2 e usando o Teorema 3.3.2, temos que:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \sum_{j=0}^{l-2} (x^{-1}s)^{j+1} \text{Diagram 3} \\
 & = (-xs^{-1})\alpha_{1,l-1}\alpha_{k-1,1} \text{Diagram 4} + \left(\sum_{j=0}^{l-2} (x^{-1}s)^{j+1} (xs)^j \right) \text{Diagram 5}
 \end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{array}{c}
 \boxed{l} \quad \boxed{k-l} \\
 \vdots \quad \vdots \\
 \text{Diagram 6} \\
 \vdots \quad \vdots \\
 \boxed{l-1} \quad \boxed{k}
 \end{array} = 0.$$

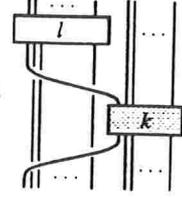
pois, como a $(l-1)$ linha e a l linha são também adjacentes em $e_{k,1}$, pelo Corolário 3.3.2, podemos fatorar $e_{1,l}$ e $e_{k,1}$ de maneira a obter o termo:

$$(\sigma_{l-1} - a)(\sigma_{l-1} - b)$$

que é nulo em H_{k+l-1} .

Sendo assim:

$$\begin{aligned}
e_{k,l}^2 &= \alpha_{k-1,1}\alpha_{1,l}e_{k,l} + s^{-k}[k-1](xs)^{-(l-1)}(xs)^{l-1}\alpha_{k-1,1}\alpha_{1,l-1} \\
&= (\alpha_{k-1,1}\alpha_{1,l} + s^{-k}[k-1]\alpha_{k-1,1}\alpha_{1,l-1})e_{k,l}
\end{aligned}$$



Aplicando a Proposição 4.3.2, temos:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{k-1,1}\alpha_{1,l} + s^{-k}[k-1]\alpha_{k-1,1}\alpha_{1,l-1} \\
&= \frac{[k-1]![l-1]!}{s^{(k-1)(k-2)/2}} \left(\frac{[l]}{s^{-l(l-1)/2}} + \frac{s^{-k}[k-1]}{s^{-(l-1)(l-2)/2}} \right) \\
&= \frac{[k-1]![l-1]!}{s^{(k-1)(k-2)/2}} \left(\frac{s^{l-1}[l] + s^{-k}[k-1]}{s^{-l(l-1)/2}s^{l-1}} \right) \\
&= \frac{[k-1]![l-1]!}{s^{(k-1)(k-2)/2}} \left(\frac{s^{l-k}(s^{l-k-1} - s^{-l-k-1} + s^{k-1-l} - s^{-k+1-l})}{s^{-l(l-1)/2}s^{l-1}(s-s^{-1})} \right) \\
&= \frac{[k-1]![l-1]!}{s^{(k-1)(k-2)/2}s^{-l(l-1)/2}} \left(s^{-k+1} \frac{(s^{l+k-1} - s^{-l-k+1})}{(s-s^{-1})} \right) \\
&= \frac{[k-1]![l-1]![k+l-1]}{s^{((k-1)(k-2)+2(k-1))/2}s^{-l(l-1)/2}} \\
&= \frac{[k-1]![l-1]![k+l-1]}{s^{k(k-1)/2-l(l-1)/2}}
\end{aligned}$$

■

Nota: Vemos claramente com esse resultado, que o coeficiente $\alpha_{k,l}$ é *especializado* pela aplicação:

$$\Gamma : H_{k+l-1} \rightarrow \mathbb{C}S_n$$

no escalar $a_{\mu_{k,l}}$ (ver Teorema 3.2.5). Basta observar que quando $s \rightarrow 1$, temos $[i] \rightarrow i$ e que $\prod hl(\mu_{k,l}(i, j)) = (k+l+1)(k-1)!(l-1)!$.

Convenção: Ao escrevermos $\chi(P)$, para $P \in C^+$, estamos nos referindo ao valor de $\chi(U * P)$, onde U é diagrama do nó trivial sem “framing” (observando que o nó trivial com qualquer orientação representa a mesma classe de isotopia).

Queremos agora calcular o valor de $\chi(Q_\lambda)$, lembrando que Q_λ é o fecho do idempotente $(1/\alpha_\lambda)e_\lambda$. Observamos novamente que, apesar de estarmos trabalhando no anel $\Lambda = \mathbb{C}[[h]]$, faremos frequentemente as devidas substituições após alguns cálculos. Além disso, vamos omitir, para “limparmos” a notação, a operação fecho nas equações deixando implícito que estamos calculando o HOMFLY do fecho do diagrama desenhado.

Proposição 4.3.4 Quando $k \neq 0$, vale que:

$$\chi(Q_{k,1}) = \prod_{i=1}^k \frac{v^{-1}s^{-(i-1)} - vs^{i-1}}{s^i - s^{-i}}$$

Demonstração:

Provaremos a igualdade fazendo indução em k . Para $k = 1$, $Q_{1,1} = U$ e portanto:

$$\chi(Q_{1,1}) = \delta = \frac{v^{-1} - v}{s - s^{-1}}$$

Assumindo o resultado para $i < k$, basta mostrar que:

$$\chi(Q_{k,1}) = \left(\frac{v^{-1}s^{-k+1} - vs^{k-1}}{s^k - s^{-k}} \right) \chi(Q_{k-1,1})$$

De fato, lembrando que a aplicação $\chi : S(\mathbb{R}^2) \rightarrow \Lambda$ e a aplicação fecho são Λ -lineares, segue que:

$$\chi(Q_{k,1}) = \frac{1}{\alpha_{k,1}} \chi(\widehat{e_{k,1}}) = (*)$$

Pelo Lema 4.3.2:

$$(*) = \frac{1}{\alpha_{k,1}} \chi \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1: } k-1 \text{ strands with a box labeled } k-1 \text{ on top} \\ \text{Diagram 2: } k-1 \text{ strands with a box labeled } k-1 \text{ on bottom and crossings} \end{array} \right) + \sum_{i=0}^{k-2} (-x^{-1}s^{-1})^{i+1} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 3: } k-1 \text{ strands with crossings and a box labeled } k-1 \end{array} \right)$$

Pela relações $r3, r2$ e pelo Teorema 3.3.2:

$$= \frac{1}{\alpha_{k,1}} \chi \left(\frac{v^{-1}-v}{s-s^{-1}} \begin{array}{c} \text{Diagram 4: } k-1 \text{ strands with a box labeled } k-1 \text{ on top} \\ \text{Diagram 5: } k-1 \text{ strands with a box labeled } k-1 \text{ on bottom and crossings} \end{array} \right) + \sum_{i=0}^{k-2} (-x^{-1}s^{-1})^{i+1} (xv^{-1})(xs^{-1})^i \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 6: } k-1 \text{ strands with a box labeled } k-1 \end{array} \right)$$

lembrando que $\omega_i b_{k-1} = \phi_a(\omega_i) b_{k-1} = a^i b_{k-1}$.

Finalmente, pela Proposição 4.3.2 e observando que $\sum_{i=0}^{k-2} s^{-2i-2} = s^{-k}[k-1]$ temos:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha_{k-1,1}}{\alpha_{k,1}} \left(\frac{v^{-1}-v}{s-s^{-1}} - v^{-1} \left(\sum_{i=0}^{k-2} s^{-2i-1} \right) \right) \chi(Q_{k-1,1}) \\
&= \frac{[k-1]!}{[k]!} \cdot \frac{s^{k(k-1)/2}}{s^{(k-1)(k-2)/2}} \left(\frac{v^{-1}-v}{s-s^{-1}} - v^{-1} s^{-k+1} [k-1] \right) \chi(Q_{k-1,1}) \\
&\frac{s^{k-1}}{[k]} \left(\frac{v^{-1}-v-v^{-1}s^{-k+1}(s^{k-1}-s^{-k+1})}{s^k-s^{-k}} \right) \chi(Q_{k-1,1}) \\
&= \left(\frac{v^{-1}s^{-k+1}-vs^{k-1}}{s^k-s^{-k}} \right) \chi(Q_{k-1,1}).
\end{aligned}$$

como queríamos. ■

Definição 4.3.2 Denotamos por $\chi_N(L)$ o polinômio $\chi(L)$ calculado em $v = s^{-N}$ e $x = s^{-1/N}$.

Corolário 4.3.2

$$\chi_N(Q_{k,1}) = \begin{cases} 1 & , \quad p/ k = N \\ 0 & , \quad p/ k > N \end{cases}$$

Demonstração:

Pela Proposição anterior temos:

$$\chi(Q_{k,1}) = \prod_{i=1}^k \frac{v^{-1}s^{-(i-1)} - vs^{i-1}}{s^i - s^{-i}}$$

Quando $i = N + 1$ e $v = s^{-N}$, temos:

$$\frac{v^{-1}s^{-(i-1)} - vs^{i-1}}{s^i - s^{-i}} = \frac{s^N s^{-N} - s^N s^N}{s^{N+1} - s^{-(N+1)}} = 0$$

Logo, para $k > N$, $\chi(Q_{k,1}) = 0$. Para $k = N$:

$$\chi_N(Q_{N,1}) = \frac{(v^{-1} - v)}{s - s^{-1}} \cdot \frac{(v^{-1}s^{-1} - vs)}{s^2 - s^{-2}} \cdots \frac{(v^{-1}s^{-N+1} - vs^{N-1})}{(s^N - s^{-N})}$$

Fazendo as substituições:

$$\chi_N(Q_{N,1}) = \frac{(s^N - s^{-N})}{(s - s^{-1})} \cdot \frac{(s^{N-1} - s^{-N+1})}{(s^2 - s^{-2})} \cdots \frac{(s - s^{-1})}{(s^N - s^{-N})} = 1$$

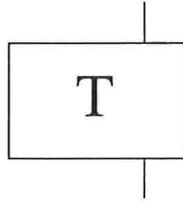
■

Começam agora a aparecer algumas propriedades interessantes nas decorações pelos elementos Q_λ que passam a justificar o interesse nesses elementos.

Proposição 4.3.5 *Seja $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$, um diagrama de link com k componentes. Seja L' o satélite de L obtido decorando L_i com Q_{λ_i} para $i < n$ e a n -ésima componente L_n por $Q_{k,1}$. Se $k > N$ então $\chi_N(L') = 0$.*

Demonstração:

L pode ser representado claramente como o fecho de um elemento em H_1 na n -ésima componente:



Logo L' pode ser visto como o fecho do elemento:

$$\frac{1}{\alpha_{k,1}}(T'.e_{k,1})$$

Observe que, pelo Teorema 3.3.2, temos:

$$\chi_N \left(\begin{array}{c} \boxed{N+1} \\ \vdots \\ \boxed{N} \end{array} \right) = \phi_a(b_N) \chi_N(\widehat{b_N})$$

$$= \phi_a(b_N) \alpha_{N+1,1} \chi_N(Q_{N+1,1}) = 0$$

pelo Lema 4.3.4.

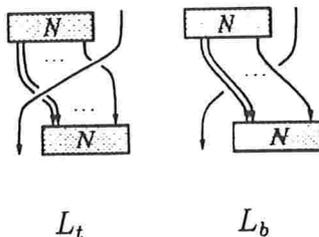
Logo, novamente pelo Teorema 3.3.2:

$$\chi_N \left(\begin{array}{c} \boxed{N} \\ \vdots \\ \boxed{N} \end{array} \middle| \right) = - \left(\sum_{i=0}^{n-1} (-x^{-1}s^{-1})^{i+1} (-xs^{-1})^i \chi_N \left(\begin{array}{c} \boxed{N} \\ \vdots \\ \boxed{N} \end{array} \right) \right)$$

$$= x^{-1} \left(\sum_{i=0}^{N-1} s^{-2i-1} \right) \chi_N \left(\begin{array}{c} \boxed{N} \\ \vdots \\ \boxed{N} \end{array} \right)$$

$$= x^{-1} s^{-N} [N] \chi_N \left(\begin{array}{c} \boxed{N} \\ \vdots \\ \boxed{N} \end{array} \right)$$

Lema 4.3.4 *Sejam L_t e L_b dois diagramas de links que diferem localmente somente por:*



respectivamente. Então $\chi_N(L_t) = \chi_N(L_b)$.

Demonstração:

Para simplificar a notação, sempre vamos considerar os diagramas abaixo como um “retrato local” de diagramas fechados. Pelo Lema anterior:

$$\chi_N \left(\begin{array}{c} \boxed{N} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \vdots \\ \boxed{N} \end{array} \right) = x^{-1} s^{-N} [N] \chi_N \left(\begin{array}{c} \boxed{N} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \vdots \\ \boxed{N} \end{array} \right)$$

Aplicando o Teorema 3.3.2:

$$= x^{-1} s^{-N} [N] (-x s^{-1})^{-N+1} \chi_N \left(\begin{array}{c} \boxed{N} \\ \vdots \\ \text{---} \\ \vdots \\ \boxed{N} \end{array} \right)$$

Pelo mesmo resultado temos:

$$= x^{-1} s^{-N} [N] (-x s^{-1})^{-2(N-1)} \chi_N \left(\begin{array}{c} \boxed{N} \\ \dots \\ \boxed{N} \end{array} \right)$$

E pela relação **r1**:

$$= x^{-1} s^{-N} [N] (-x s^{-1})^{-2(N-1)} \chi_N \left(x^{-2} \begin{array}{c} \boxed{N} \\ \dots \\ \boxed{N} \end{array} - x^{-1} (s - s^{-1}) \begin{array}{c} \boxed{N} \\ \dots \\ \boxed{N} \end{array} \right)$$

Pelo Lema anterior:

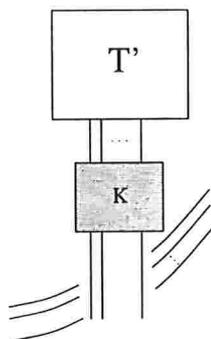
$$\begin{aligned} &= x^{-1} s^{-N} [N] a^{-2(N-1)} (x^{-2} x s^N [N]^{-1} - x^{-1} (s - s^{-1})) \chi_N(L_t) \\ &= \left(\frac{x^{-3} s^{-N} [N] \cdot (-x s^{-1})^{-2(N-1)}}{x^{-1} s^{-N} [N]} - x^{-2} s^{-N} [N] (-x s^{-1})^{-2(N-1)} (s - s^{-1}) \right) \chi_N(L_t) \\ &= (x^{-2N} s^{2N-2} - x^{-2N} s^{-N} (s^N - s^{-N}) s^{2N-2}) \chi_N(L_t) \\ &= (x^{-2N} s^{2N-2} - x^{-2N} s^{N-2} (s^N - s^{-N})) \chi_N(L_t) \\ &= x^{-2N} (s^{2N-2} - s^{2N-2} + s^{-2}) \chi_N(L_t) \\ &= x^{-2N} s^{-2} \chi_N(L_t) \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $x = s^{-1/N}$ temos a igualdade desejada. ■

Proposição 4.3.6 *Seja $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$ um diagrama de link com n componentes. Seja L' o diagrama obtido removendo-se a n -ésima componente L_n . Seja \tilde{L}' obtido decorando-se cada componente de L por Q_{λ_i} , e \tilde{L} obtido da mesma forma adicionando-se apenas a decoração $L_n * Q_{\lambda_{N,1}}$. Então $\chi_N(\tilde{L}) = \chi_N(\tilde{L}')$.*

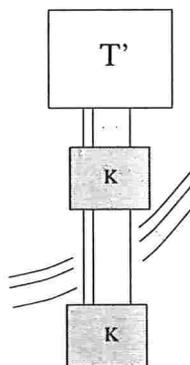
Demonstração:

Observamos primeiramente que $Q_{\lambda_{N,1}} = (1/\alpha_{N,1})\widehat{e_{N,1}}$, onde $e_{N,1} = b_N$, e portanto, **localmente**, podemos considerar cada cruzamento da componente $L_n * Q_{\lambda_{N,1}}$ com outra componente $L_i * Q_{\lambda_i}$ com seguinte forma:

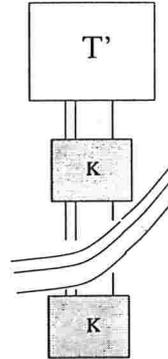


Suponha que ocorra o primeiro caso (o outro é completamente análogo). Vamos mostrar que podemos, para efeito de cálculo de χ_N , desconectar a n -ésima componente das outras.

De fato, lembrando que $b_N^2 = \phi_a(b_N)b_N$, onde $\phi_a(b_N) = \alpha_{N,1}$, escalar que já provamos ser inversível, o diagrama acima é o mesmo, a menos de um escalar que:



Pelo Lema anterior, o valor de χ_N desse diagrama é igual ao do diagrama:



Logo, continuando esse processo (o número de cruzamentos entre a n -ésima componente do nó decorado e as demais é obviamente finito), para efeito de cálculo de χ_N , podemos considerar a n -ésima componente desligada do resto do diagrama. Da mesma forma, podemos considerá-la como o nó trivial decorado por $Q_{N,1}$, usando os mesmos argumentos.

Obtemos portanto a seguinte igualdade:

$$\chi_N(\tilde{L}) = \chi_N(\tilde{L}' \cup Q_{N,1})$$

Pela propriedade multiplicativa do polinômio HOMFLY e pelo Corolário 4.3.4, temos:

$$\chi_N(\tilde{L}) = \chi_N(\tilde{L}') \cdot \chi_N(Q_{N,1}) = \chi_N(\tilde{L}')$$

como queríamos. ■

Fazendo demonstração análoga a da Proposição 4.3.3, temos o seguinte resultado:

Lema 4.3.5 ([Anna], pg.109) $s^l[l]e_{k+1,l} + s^{-k}[k]e_{k,l+1} = s^{l-k}[l+k]e_{1,l} \cdot e_{k,1}$

A proposição a seguir, mostra uma relação entre os elementos $Q_{k,l}$ a qual é extremamente semelhante com o produto dos diagramas de Young c_k e d_l . Veremos posteriormente que esse fato não é uma mera coincidência.

Proposição 4.3.7 $Q_{k+1,l} + Q_{k,l+1} = Q_{k,1}Q_{1,l}$

Demonstração:

Do Lema anterior temos:

$$s^l[l]\alpha_{k+1,l}Q_{k+1,l} + s^{-k}[k]\alpha_{k,l+1}Q_{k,l+1} = s^{l-k}[l+k]\alpha_{1,l}\alpha_{k,1}Q_{1,l}Q_{k,1}$$

Substituindo os valores encontrados na Proposição 4.3.3, temos:

$$\frac{s^l[l]\alpha_{k+1,l}}{s^{l-k}[l+k]\alpha_{k,1}\alpha_{1,l}} = \frac{s^l[l][k+l][k]![l-1]!s^{k(k-1)/2}s^{-l(l-1)/2}}{s^{l-k}[l+k]s^{k(k+1)/2}s^{-l(l-1)/2}[k]![l]!} = \frac{s^l}{s^{l-k}s^k} = 1$$

Analogamente:

$$\frac{s^{-k}\alpha_{k,l+1}}{s^{l-k}[l+k]\alpha_{k,1}\alpha_{1,l}} = \frac{s^{-k}[k][k+l][k-1]![l]!s^{k(k-1/2)}s^{-l(l-1)/2}}{s^{l-k}[l+k]s^{k(k-1)/2}s^{-l(l+1)/2}[k]![l]!} = \frac{s^{-k}}{s^{l-k}s^l} = 1$$

Logo vale que $Q_{k+1,l} + Q_{k,l+1} = Q_{k,1}Q_{1,l}$. ■

Novamente usaremos séries formais de potências (nesse caso com coeficientes em C^+) a fim de obtermos algumas igualdades úteis.

Proposição 4.3.8 *Sejam $Q_C(X)$ e $Q_D(X)$ séries formais de potências com coeficientes no anel C^+ dadas por:*

$$Q_C(X) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k Q_{k,1} X^k$$

$$Q_D(X) = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^k Q_{1,l} X^l$$

Então $Q_C X Q_D(X) = 1$.

Demonstração:

O coeficiente de X^0 na série produto é dado por $Q_{0,1} Q_{1,0}$, que é o diagrama vazio, o qual por sua vez representa a identidade em C^+ .

Logo basta mostrar que o coeficiente de X^m é zero para qualquer $m > 0$. Usando a Proposição anterior, temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^m (-1)^k Q_{k,1} Q_{1,m-k} &= Q_{1,m} + (-1)^m Q_{m,1} + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k (Q_{k+1,m-k} + Q_{k,m-k+1}) \\ &= Q_{1,m} + (-1)^m Q_{m,1} + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k Q_{k+1,m-k} + \sum_{k=0}^{m-2} (-1)^{k+1} Q_{k+1,m-k} \\ &= Q_{1,m} + (-1)^m Q_{m,1} + (-1)^{m-1} Q_{m,1} + (-1) Q_{1,m} + \sum_{k=1}^{m-2} (-1)^k (Q_{k+1,m-k} - Q_{k+1,m-k}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Lema 4.3.6 *Podemos expressar $\chi(Q_C(X))$ como um produto formal infinito de funções racionais em X com coeficientes no anel Λ :*

$$\chi(Q_C(X)) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1 - v s^{2k+1} X}{1 - v^{-1} s^{2k+1} X}$$

Demonstração:

Seja $P(X) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1 - v s^{2k+1} X}{1 - v^{-1} s^{2k+1} X}$. Como série formal de potências podemos escrever $P(X)$ na forma:

$$P(X) = \sum_{r=0}^{\infty} p_r X^r$$

Note que $P(X) = \frac{1-vsX}{1-v^{-1}sX}P(s^2X)$ e portanto:

$$(1 - v^{-1}sX)P(X) = (1 - vsX)P(s^2X)$$

Logo:

$$\sum_{r=0}^{\infty} (1 - v^{-1}sX)p_r X^r = \sum_{r=0}^{\infty} (1 - vsX)s^{2r} p_r X^r$$

De onde tiramos que:

$$p_{r+1} - v^{-1}sp_r = s^{2r+2}p_{r+1} - vs^{2r+1}p_r$$

E portanto:

$$p_{r+1} = \frac{v^{-1}s - vs^{2r+1}}{1 - s^{2r+2}}p_r = \frac{s^{r+1}(vs^r - v^{-1}s^{-r})}{s^{r+1}(s^{r+1} - s^{-r-1})}p_r = \frac{(vs^r - v^{-1}s^{-r})}{(s^{r+1} - s^{-(r+1)})}p_r$$

O valor de p_0 pode ser obtido fazendo $x = 0$, o que implica em $p_0 = P(0) = 1$. Por outro lado, para $r > 0$ temos:

$$p_r = \prod_{i=0}^r \frac{vs^{i-1} - v^{-1}s^{-(i-1)}}{s^i - s^{-i}} = \prod_{i=0}^r \frac{(-1)v^{-1}s^{-(i-1)-vs^{i-1}}}{s^i - s^{-i}} = (-1)^r \chi(Q_{r,1})$$

pela Proposição 4.3.4. ■

Proposição 4.3.9 $\chi(Q_{1,l}) = \prod_{i=1}^l \frac{v^{-1}s^{i-1} - vs^{-(i-1)}}{s^i - s^{-i}}$.

Demonstração:

Pela Proposição 4.3.8, temos que:

$$\chi(Q_C Q_D) = \chi(Q_C)\chi(Q_D) = 1$$

Logo, pelo Lema anterior:

$$\chi(Q_D) = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1 - v^{-1}s^{2k+1}X}{1 - vs^{2k+1}X}$$

Sendo assim, os coeficientes de $\chi(Q_D)$ como série formal são obtidos trocando-se v por v^{-1} (e vice versa) nos coeficientes de $\chi(Q_C)$. Logo,

$$\chi(Q_{1,l}) = \prod_{i=1}^l \frac{v^{-1}s^{i-1} - vs^{-(i-1)}}{s^i - s^{-i}}$$

■

Proposição 4.3.10 $\chi_N(Q_{k,1}) = \chi_N(Q_{N-k,1})$.

Demonstração:

Quando $k \neq 0$, pela Proposição 4.3.4, temos:

$$\chi(Q_{N-k,1}) = \prod_{j=1}^{N-k} \frac{v^{-1}s^{-(j-1)} - vs^{j-1}}{s^j - s^{-j}}$$

Fazendo $v = s^{-N}$, temos:

$$\begin{aligned} \chi_N(Q_{N-k,1}) &= \prod_{j=1}^{N-k} \frac{s^N s^{-j+1} - s^{-N} s^{j-1}}{s^j - s^{-j}} \\ &= \prod_{j=1}^{N-k} \frac{s^{N-j+1} - s^{-N+j-1}}{s^j - s^{-j}} \\ &= \frac{[N]}{[1]} \cdot \frac{[N-1]}{[2]} \cdots \frac{[K+1]}{[N-K]} \\ &= \frac{[N]!}{[k]![N-k]!} \\ &= \frac{[N]}{[1]} \cdot \frac{[N-1]}{[2]} \cdots \frac{[N-k+1]}{[k]} \end{aligned}$$

Por outro lado, novamente pela Proposição 4.3.4 e após fazermos a substituição $v = s^{-N}$:

$$\chi_N(Q_{k,1}) = \prod_{j=1}^k \frac{s^{N-j+1} - s^{-N+j-1}}{s^j - s^{-j}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(s^N - s^{-N})}{(s-s^{-1})} \frac{s^{N-1} - s^{-N+1}}{s^2 - s^{-2}} \cdots \frac{(s^{N-k+1} - s^{-N+k-1})}{(s^k - s^{-k})} \\
&= \frac{[N]}{[1]} \cdot \frac{[N-1]}{[2]} \cdots \frac{[N-k+1]}{[k]}
\end{aligned}$$

E portanto, temos que $\chi_N(Q_{k,1}) = \chi_N(Q_{N-k,1})$, quando $k \neq 0$.

Quando $k = 0$, $Q_{0,1}$ é o diagrama vazio e portanto $\chi_N(Q_{0,1}) = 1$. Por outro lado, $\chi_N(Q_{N,1}) = 1$ pelo Corolário 4.3.2 e portanto vale a igualdade para todo $k \geq 0$, como queríamos. ■

Provaremos agora, sempre visando o nosso principal objetivo desse capítulo que é explicitar o isomorfismo entre Y e C^+ , mais uma propriedade importante dos elementos Q_λ . Antes citaremos algumas proposições concernentes à teoria de módulos:

Proposição 4.3.11 [COHN] *Seja R um anel com unidade. Seja $M = \bigoplus_{j \in J} M_j$, soma direta de R -módulos livres M_j com base B_j para todo j . Então, M é R -módulo livre com base $\bigcup_{j \in J} B_j$.*

Proposição 4.3.12 [COHN] *Seja R anel comutativo e M um R -módulo livre. Então toda base de M tem a mesma cardinalidade.*

Corolário 4.3.3 *Sejam R anel comutativo, M um R -módulo e $B = \{m_1, \dots, m_k\}$ uma base de M . Seja $D \subseteq M$ um conjunto L.I. com k elementos. Então, D é base de M .*

Proposição 4.3.13 *O conjunto $\{Q_\lambda\}$, onde λ percorre o conjunto dos diagramas de Young, é uma base para o Λ -módulo livre C^+ .*

Demonstração:

Vamos mostrar que $\{Q_\lambda / |\lambda| = n\}$ é base do Λ -submódulo $C^{(n)}$, mostrando que todo $c \in C^+$ pode ser escrito como combinação linear desses elementos. Isso basta, pois a dimensão de $C^{(n)}$ é igual ao número de partições de n e portanto

igual ao número de diagramas de Young com n células. Pelo Corolário 4.3.3, temos que $\{Q_\lambda / |\lambda| = n\}$ é base do Λ -submódulo $C^{(n)}$. Isso feito, pela Proposição 4.3.11 teremos mostrado que $\{Q_\lambda\}$ é base de C^+ .

De fato, seja $c \in C^{(n)}$. Temos que existe um $h \in H_n$ tal que $\widehat{h} = c$. Pela Proposição 3.5.1:

$$H_n = \sum_{|\lambda|=n} H_n e_\lambda H_n$$

e portanto h pode ser escrito na forma $h = \sum_{|\lambda|=n} h_\lambda^1 e_\lambda h_\lambda^2$, onde $h_\lambda^i \in H_n$.

Por outro lado, como estamos trabalhando no anel e como $e_\lambda^2 = \alpha_\lambda e_\lambda$, onde α_λ é um escalar inversível temos que:

$$\widehat{h} = \sum_{|\lambda|=n} \frac{1}{\alpha_\lambda} h_\lambda^1 \widehat{e_\lambda^2} h_\lambda^2 = \sum_{|\lambda|=n} \frac{1}{\alpha_\lambda} e_\lambda \widehat{h_\lambda} e_\lambda$$

onde $h_\lambda = h_\lambda^2 h_\lambda^1$. Sendo assim:

$$c = \widehat{h} = \sum_{|\lambda|=n} \frac{1}{\alpha_\lambda} e_\lambda \widehat{h_\lambda} e_\lambda \quad (*)$$

Lembrando que $e_\lambda = E_\lambda(a) \omega_{\pi_\lambda} E_{\lambda^v}(b) \overline{\omega}_{\pi_{\lambda^v}}$, temos:

$$(*) = \sum_{|\lambda|=n} \frac{1}{\alpha_\lambda} E_\lambda(a) (\omega_{\pi_\lambda} E_{\lambda^v}(b) \overline{\omega}_{\pi_{\lambda^v}} h_\lambda E_\lambda(a) \omega_{\pi_\lambda}) E_{\lambda^v}(b) \overline{\omega}_{\pi_{\lambda^v}}$$

Vamos chamar o elemento $(\omega_{\pi_\lambda} E_{\lambda^v}(b) \overline{\omega}_{\pi_{\lambda^v}} h_\lambda E_\lambda(a) \omega_{\pi_\lambda})$ de $\overline{h_\lambda}$.

Lembrando que $\{\omega_\pi / \pi \in S_n\}$ é uma base de H_n visto como um Λ -módulo, temos que:

$$e_\lambda h e_\lambda = E_\lambda(a) \overline{h_\lambda} E_{\lambda^v}(b) \overline{\omega}_{\pi_{\lambda^v}} = E_\lambda(a) \left(\sum_{\tau \in S_n} \gamma_\tau \omega_\tau \right) E_{\lambda^v}(b) \overline{\omega}_{\pi_{\lambda^v}} \quad (**)$$

Pelo Lema 3.3.4, se τ não separa λ e λ^v então:

$$E_\lambda(a) \omega_\tau E_{\lambda^v}(b) = 0.$$

Seja $S_{sep} = \{\tau \in S_n / \tau \text{ separa } \lambda \text{ e } \lambda^v\}$ Quando $\rho \in S_{sep}$, pelo Lema 3.3.5, existem $\rho_1 \in R(\lambda)$ e $\rho_2 \in R(\lambda^v)$ tais que:

$$\omega_\rho = \omega_{\rho_1}^\tau \omega_{\pi_\lambda} \omega_{\rho_2}^\tau$$

Substituindo em (**):

$$e_\lambda h e_\lambda = \sum_{\tau \in S_{sep}} \gamma_\tau E_\lambda(a) \omega_{\rho_1}^\tau \omega_{\pi_\lambda} \omega_{\rho_2}^\tau E_{\lambda^v}(b) \bar{\omega}_{\pi_{\lambda^v}}.$$

E pelo Lema 3.3.2, como $\rho_1 \in R(\lambda)$ e $\rho_2 \in R(\lambda^v)$ temos:

$$e_\lambda h e_\lambda = \sum_{\tau \in S_{sep}} \beta(\tau) \gamma_\tau e_\lambda.$$

Sendo assim:

$$c = \sum_{|\lambda|=n} \frac{1}{\alpha_\lambda} \left(\sum_{\tau \in S_{sep}} \gamma_\tau \beta(\tau) \right) \widehat{e}_\lambda = \sum_{|\lambda|=n} \xi_\lambda Q_\lambda,$$

onde $\xi_\lambda = \sum_{\tau \in S_{sep}} \gamma_\tau \beta(\tau) \in \Lambda$ como queríamos. ■

Obs: A partir de agora não faremos mais distinção entre Y e R_∞ .

Para o próximo resultado, usaremos a relação (citada no cap.1) entre polinômio HOMFLY, $\chi(L)$ e o polinômio de Conway, $\nabla(L)$, como também de alguns resultados preliminares.

Proposição 4.3.14 *O homomorfismo de álgebras $\theta: R_\infty \rightarrow C^+$ definido por:*

$$\theta(c_i) = Q_{c_i}$$

é um isomorfismo de álgebras.

Demonstração:

Denotemos, por hora, $Q_{c_i} = Q_i$. Sabemos que R_∞ é uma álgebra livre gerada pelos $\{c_i/i = \mathbb{N}\}$. Vamos mostrar que os elementos Q_i 's geram C^+ , e portanto θ é sobrejetora, e de forma livre, o que implica que θ é injetora (basta ver que a existência de dois elementos distintos m_1 e m_2 tais que $\theta(m_1) = \theta(m_2)$, implica na existência de um polinômio com coeficientes não todos nulos nos Q_i 's, mas que é nulo na álgebra C^+).

Lembremos primeiramente que (Teorema 2.4.1) os elementos φ_m , $m \in \mathbb{N}$, onde φ_m é o fecho da trança $\sigma_{m-1}\sigma_{m-2}\cdots\sigma_1$, geram C^+ livremente como álgebra.

Por indução em n , vamos mostrar que φ_n pode ser escrito como uma expressão polinomial nos Q_i 's com coeficientes em Λ . Para $n = 1$, $Q_1 = \varphi_1$, e portanto nada temos a demonstrar.

Assumimos então que para todo φ_m , com $m < n$, temos uma expressão polinomial em termos dos Q_i 's, $i \leq m$.

Temos que $e_n \in H_n$ implica que $\frac{1}{\alpha_n}\widehat{e}_n \in C^{(n)}$. Logo, Q_n pode ser expresso linearmente pelos fechados dos monômios de peso n em φ_m , os quais são indexados pelas partições de n . Sendo assim:

$$Q_n = \beta_n \varphi_n + \sum_{\lambda=(\lambda_1, \dots, \lambda_n), |\lambda|=n} \beta_\lambda \varphi_{\lambda_1} \varphi_{\lambda_2} \cdots \varphi_{\lambda_k} \quad (*)$$

onde $\beta_n, \beta_\lambda \in \Lambda$.

Provaremos agora que β_n é inversível em Λ . Isso feito, usando a hipótese de indução, concluímos que φ_n pode ser escrito como um polinômio nos Q_i 's, para $i \leq n$.

Pela observação já feita no Capítulo 1, o polinômio de Conway $\nabla(L)$ pode ser calculado a partir do HOMFLY colocando-se $x = v = 1$. Pela Proposição 1.3.1, esse polinômio se anula quando L é um “split link”, ou melhor, um link que possui componentes desconectadas.

Note que todos os termos do lado direito da igualdade (*), exceto φ_n , são “split links”. Além disso, φ_n é equivalente (em termos de isotopia ambiente) ao nó trivial. Sendo assim, temos:

$$\nabla(Q_n) = \nabla(\beta_n \varphi_n) = \beta'_n$$

onde β'_n é o coeficiente β_n calculado em $x = v = 1$.

Lembrando que fizemos as substituições $x = s^{-1/N}$ e $v = s^{-N}$, esses elementos como séries formais de potências em h , possuem termo constante igual a 1. Logo o termo constante de β_n é igual ao de β'_n .

Pela Proposição 3.5.1, mostrando que termo constante de $\beta'_n = \nabla(Q_n)$ é não nulo, mostramos que β_n é inversível em Λ . Voltando a primeira expressão de Q_n , temos:

$$Q_n = \frac{1}{\alpha_n} \widehat{e}_n = \frac{1}{\alpha_n} \widehat{b}_n$$

onde $b_n = \sum_{\pi \in S_n} (-x^{-1}s^{-1})^{l(\pi)} \omega_\pi$. Queremos ver quais os termos da expressão de Q_n que contribuem ao termo constante de $\nabla(Q_n)$ como série de potências em h .

Pela Proposição 1.3.2, e como $z = e^{h/2} - e^{-h/2}$, os únicos termos em b_n que contribuem com o termo constante são as tranças ω_π cujos fechos são nós, as quais pela Proposição 1.4.1, são tais que π é n -ciclo.

O coeficiente de ω_π em Q_n é $(-x^{-1}s^{-1})^{l(\pi)}$. Por outro lado, como π é um n -ciclo, temos que:

$$l(\pi) \equiv (n-1) \pmod{2}$$

e portanto o termo constante de $(-x^{-1}s^{-1})^{l(\pi)}$ como série de potências em h é $(-1)^{n-1}$.

Pela Proposição 1.4.2 e por existirem $(n-1)!$ permutações que são n -ciclos em S_n , temos que o termo constante de Q_n como série de potências em h é:

$$g\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)(n-1)!(-1)^{n-1}$$

e portanto não nulo.

Provamos então que o conjunto $\{Q_i / i \in \mathbb{N}\}$ gera C^+ como Λ -álgebra e portanto os monômios nesses elementos geram C^+ como Λ -módulo. Vamos mostrar que na verdade eles formam uma base para esse espaço, provando assim que os Q_i 's geram a álgebra C^+ de forma livre.

Seja $\mathcal{A} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$, onde:

$$A_n = \{Q_{i_1}^{j_1} Q_{i_2}^{j_2} \dots Q_{i_p}^{j_p} / i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_p \text{ e } \sum_{k=0}^p i_k j_k = n \}.$$

Observamos que, pela comutatividade de C^+ , podemos supor $i_1 \geq \dots \geq i_p$ e usando o mesmo raciocínio feito no Corolário 2.4.1, concluímos que A_n é indexado pelos diagramas de Young.

Por outro lado, temos $A_n \subseteq C^{(n)}$ gerando-o como Λ -módulo. Como a dimensão de $C^{(n)}$ é o número de partições de n e portanto de diagramas de Young com n células, pelo Corolário 4.3.3, A_n é base desse espaço. Pela Corolário 2.4.1, como $C^+ = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} C^{(n)}$, \mathcal{A} é base de C^+ como Λ -módulo. ■

Proposição 4.3.15 *Para todo $l \geq 1$, vale que $\theta(d_l) = Q_{1,l}$.*

Demonstração:

Vamos demonstrar o resultado fazendo indução em l . Observe que para $l = 1$, $d_1 = c_1$ e portanto $\theta(d_1) = Q_{1,1}$. Assumiremos o resultado válido para todo d_l , tal que $l < m$.

Pela Proposição 4.2.4, $\sum_{k=0}^m (-1)^k c_k d_{m-k} = 0$, para todo $m \geq 1$. Como θ é isomorfismo de álgebras, temos:

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \theta(c_k) \theta(d_{m-k}) = 0 \quad (4.1)$$

Temos também pela Proposição 4.3.8 que:

$$\sum_{k=0}^m Q_{k,1} Q_{1,m-k} = 0 \quad (4.2)$$

Pela hipótese de indução, temos:

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k Q_{k,1} Q_{1,m-k} = Q_m + \sum_{k=1}^m (-1)^k \theta(c_k) \theta(d_{m-k})$$

De 4.1 e 4.2 obtemos:

$$0 = Q_m + \sum_{k=1}^m (-1)^k \theta(c_k) \theta(d_{m-k}) - \sum_{k=0}^m (-1)^k \theta(c_k) \theta(d_{m-k})$$

E portanto:

$$0 = Q_m - \theta(d_m) \implies \theta(d_m) = Q_m$$

■

Proposição 4.3.16 $\theta(\mu_{k,l}) = Q_{k,l} \quad \forall l, k > 0$.

Demonstração:

Vamos provar a afirmação fazendo indução no número de células e no número de linhas.

Para $k = 1$, temos $\mu_{1,l} = d_l$ e portanto, pela Proposição anterior, $\theta(\mu_{1,l}) = Q_{1,l}$. Assumimos portanto o resultado válido para todo diagrama $\mu_{i,j}$ tal que $i + j - 1 < m$

(isto é, tenha menos de m células) e também para todo diagrama $\mu_{i,j}$ com exatamente m células e tal que $i \leq k$ (isto é, com no máximo k linhas). Vamos mostrar então que o resultado vale para o diagrama $\mu_{k+1,m-k}$, que possui exatamente m células e $k+1$ linhas.

Considere o produto $c_k \cdot d_{m-k}$ em Y . Como já vimos, esse produto é dado por:

$$c_k \cdot d_{m-k} = \mu_{k+1, m-k} + \mu_{k, m-k+1}$$

O diagrama $\mu_{k, m-k+1}$, pela hipótese de indução é levado por θ em $Q_{k, m-k+1}$. Por outro lado, como θ é homomorfismo de álgebras, temos:

$$\theta(c_k \cdot d_{m-k}) = \theta(c_k) \cdot \theta(d_{m-k})$$

E, novamente pela hipótese de indução:

$$\theta(c_k \cdot d_{m-k}) = Q_{k,1} \cdot Q_{1, m-k}$$

Sendo assim:

$$\theta(\mu_{k+1, m-k}) = \theta(c_k \cdot d_{m-k}) - \theta(\mu_{k, m-k+1}) = Q_{k,1} \cdot Q_{1, m-k} - Q_{k, m-k+1}$$

Logo, pela Proposição 4.3.7, temos:

$$\theta(\mu_{k+1, m-k}) = Q_{k+1, m-k}.$$

■

Teorema 4.3.1 $\theta(\lambda) = Q_\lambda$, para todo diagrama de Young λ .

A demonstração por nós conhecida desse Teorema depende diretamente da relação entre o invariante χ_N e o $sl(N)$ -invariante quântico, dada pelo seguinte resultado:

Teorema 4.3.2 ([Anna], pg.89) *Seja $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_k$ link orientado de k componentes. Então:*

$$J(L; V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_k}) = \chi_N(L_1 * Q_{\lambda_1}, \dots)$$

onde $sl(N)$ -invariante quântico de L colorido pelas representações V_{λ_i} .

Mais especificamente, a prova depende da inversibilidade da matriz

$$M = (M_{\lambda,\mu})_{\lambda,\mu \in \text{Diag}_{N,r}}$$

onde:

- (i) $\text{Diag}_{N,r}$ é um subconjunto finito (a ser definido no próximo capítulo) de Y_N ;
- (ii) $M_{\lambda,\mu} = \chi_N(H; Q_\lambda, Q_\mu)$, sendo H o link de Hopf.

Sabemos que essa matriz é inversível, pois vale que:

Lema 4.3.7 ([TW]) *Seja $q = s^2$ uma r -ésima raiz primitiva da unidade e $N \in \mathbb{N}^*$ fixo. Sejam $\lambda, \mu \in \text{Diag}_{N,r}$. Seja $J(H; V_\lambda, V_\mu)$ o $sl(N)$ -invariante quântico do link de Hopf colorido pelas representações V_λ e V_μ . Considere M a matriz dada por $(M_{\lambda,\mu})_{\lambda,\mu \in \text{Diag}_{N,r}}$. Então M é inversível.*

Capítulo 5

Considerações finais: O invariante $T(L)$

Introdução:

Mostraremos nesse capítulo que a partir do invariante de links orientados χ_N , calculado em raízes primitivas da unidade, pode-se construir um invariante $T(L)$ topológico de variedades de dimensão 3 compactas, conexas e orientáveis, usando decorações por elementos especiais Ω_r . Ressaltamos que apenas daremos a definição de $T(L)$ não sendo dada a prova da sua invariância sob os movimentos de Fenn-Rourke (podendo ser encontrada em [Anna]). O motivo para isto, como já foi colocado na Introdução deste trabalho, é que a maioria dos resultados envolvem a Teoria de Representações da álgebra de Lie $sl(N)$ e propriedades do $sl(N)$ -invariante quântico.

Lembramos que as decorações são feitas com elementos de C^+ que mostramos ser isomorfo a R_∞ , o anel de polinômios em um número infinito e enumerável de indeterminadas e ao anel dos diagramas de Young Y . Explicitamos esse isomorfismo mostrando que cada diagrama de Young λ corresponde ao fecho do idempotente $\frac{1}{\alpha_\lambda} e_\lambda \in H_{|\lambda|}$, o elemento Q_λ .

Fixado um $N > 0$ e um $r > N$, definimos um novo parâmetro $q = e^h$. Fazendo q uma r -ésima raiz primitiva da unidade, nosso espaço de decoração passa a ser um \mathbb{C} -espaço vetorial (antes apenas um Λ -módulo). Porém, ainda estamos lidando com dimensão infinita. O objetivo é, portanto, restringir nosso “campo de atuação” ao um espaço de dimensão finita.

Obs: Não faremos distinção entre os espaços C^+ , R_∞ e Y , bem como subespaços correspondentes.

5.1 O espaço R_N/\mathcal{I}

Vamos primeiramente lembrar que começamos esse trabalho com o anel:

$$\Lambda = \mathbb{C}[x^{\pm 1}, v^{\pm 1}, s^{\pm 1}, z, \delta] / \langle v - v^{-1} = z\delta \rangle$$

com $z = s - s^{-1}$, e após algumas substituições o nosso anel Λ passou a ser o anel das séries formais $\mathbb{C}[[h]]$, onde $s = e^{h/2}$.

Seja $q = e^h$. Quando colocamos q uma r -ésima raiz primitiva da unidade, o nosso anel Λ passa a ser \mathbb{C} e portanto R_∞ passa a ser um espaço vetorial sobre esse corpo.

Definição 5.1.1 Fixemos então um $N > 0$ e $r \in \mathbb{N}$, $r > N$, substituindo q por uma r -ésima raiz primitiva da unidade. Definimos o **nível l** de q como $l = r - N$.

Dizemos que um diagrama é **q -admissível** se possui *menos* que N linhas e no máximo l colunas. Seja $Diag_{N,r}$ o conjunto de tais diagramas.

É imediato que $Diag_{N,r} \subseteq R_N = \Lambda[c_1, \dots, c_N]$. Seja \mathcal{I} o ideal em R_N gerado pelos diagramas de exatamente $l + 1$ colunas.

Teorema 5.1.1 ([Anna], pg.146) $Diag_{N,r}$ gera o espaço R_N/\mathcal{I} .

Considere agora o ideal $I \subseteq R_N$ gerado por $\{d_{r-1}, d_{r-2}, \dots, d_{r-N+1}\}$, onde d_i é o diagrama linha com i células.

Proposição 5.1.1 *Seja p tal que $l < p < r$. Então $\chi_N(Q_{1,p}) = 0$.*

Demonstração:

Pela Proposição 4.3.9, temos:

$$\chi_N(Q_{1,p}) = \prod_{i=1}^p \frac{s^N s^{i-1} - s^{-N} s^{-(i-1)}}{s - s^{-i}} = s^{-(N+1)p} \prod_{i=1}^p \frac{q^{N+i-1} - 1}{q - 1}$$

Quando $l < p < r$ e $1 \leq i \leq p$, lembrando que $l = r - N$, $(q^i - 1)$ não se anula e portanto $\chi_N(Q_{1,p})$ calculado em q raiz r -ésima primitiva da unidade, está bem definido. Por outro lado, quando $i = l + 1 = r - N + 1$, temos:

$$q^{N+r-N+1-1} - 1 = q^r - 1 = 0$$

e portanto $\chi_N(Q_{1,p}) = 0$. ■

Corolário 5.1.1 ([Anna], pg.150) *Seja L um link com uma componente decorada por d_p , com $l < p < r$ e as restantes por λ_i , para $\lambda_i \in R_N$. Então, quando q é uma raiz r -ésima primitiva da unidade, $\chi_N(L) = 0$.*

Proposição 5.1.2 ([Anna], pg.156) *$I = \mathcal{I}$. Além disso $\text{Diag}_{N,r}$ é base para o \mathbb{C} -espaço vetorial R_N/I .*

Obs: Os resultados acima justificam portanto a escolha do ideal I .

Definição 5.1.2 *Seja $N \in \mathbb{N}^*$ fixado. Seja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N)$ um diagrama de Young. Seja $r_i = \lambda_i - \lambda_{i+1}$, para $i < N$ e $r_N = \lambda_N$. Temos que:*

$$\lambda = \left(\sum_{i=2}^N r_i, \sum_{i=2}^N r_i, \dots, \sum_{i=N}^N r_i \right).$$

Definimos o diagrama **dual** de λ , denotado por λ^* , como:

$$\lambda^* = \left(\sum_{i=1}^{N-1} r_i, \sum_{i=1}^{N-2} r_i, \dots, r_1 \right).$$

Pictoricamente, λ^* é obtido ao removermos λ do diagrama $\lambda_1 \times N$ e rotacionarmos a figura restante em 180 graus.

Exemplo:

$$N = 3$$



$$\nu^* = (3, 2)$$

Observemos que, sendo λ_1 o número de colunas de λ , quando $\lambda \in \text{Diag}_{N,r}$, temos $\lambda_1 \leq l$. Logo:

$$\lambda_1^* = \sum_{i=1}^k a_i = \lambda_1 - \lambda_k < l$$

Por outro lado, se λ tem m linhas, a representação pictórica de λ^* nos diz que esse diagrama tem no máximo m linhas. Além disso, é fácil ver que $(\lambda^*)^* = \lambda$. Concluimos então que:

$$\lambda \in \text{Diag}_{N,r} \Leftrightarrow \lambda^* \in \text{Diag}_{N,r}$$

Nota: As representações de $sl(N)$ são indexadas pelos diagramas de Young, mais ainda, o anel das representações dessa álgebra é isomorfo à $Y_N / \langle c_N = 1 \rangle$. Dessa teoria obtemos o seguinte resultado:

Teorema 5.1.2 [FH] *Se V_λ é uma representação irredutível de $sl(N)$, então:*

$$(V_\lambda)^* \simeq V_{\lambda^*}.$$

Baseando-se nesse Teorema, é razoável que valha o seguinte fato (importante na prova de que $T(L)$ é um invariante sob os movimentos de Fenn-Rourke):

Proposição 5.1.3 ([Anna], pg.127) $\chi_N(Q_\lambda) = \chi_N(Q_{\lambda^*})$,

Vamos assumir agora χ_N sempre calculado em q raiz r -ésima primitiva da unidade. Seja:

$$\Omega_r = \sum_{\lambda \in \text{Diag}_{N,r}} \delta_{\lambda^*} \lambda$$

onde $\delta_{\lambda^*} = \chi_N(Q_{\lambda^*})$. Observemos que pela Proposição anterior, $\delta_\lambda = \delta_{\lambda^*}$.

Definição 5.1.3 Seja L um *link* com k componentes. Definimos a matriz $(l_{ij})_{k \times k}$ onde:

$$l_{ij} = \begin{cases} lk(L_i, L_j) & , \quad \text{para } j \neq i \\ \text{framing em } L_i & , \quad \text{para } i = j \end{cases}$$

Como $lk(L_i, L_j) = lk(L_j, L_i)$ (ver Capítulo 1), a matriz é simétrica e pode ser pensada como uma forma quadrática. Definimos $sig(L)$ como a *assinatura* dessa forma.

Seja $F_\lambda \in H_{|\lambda|}$ o elemento:



Proposição 5.1.4 ([AM], pg.17) *O elemento F_λ é central em $H_{|\lambda|}$ e além disso:*

$$e_\lambda F_\lambda = F_\lambda e_\lambda = f_\lambda e_\lambda$$

onde $f_\lambda \in \Lambda$ é inversível.

Nota: Observe que o elemento F_λ está diretamente relacionado com os movimentos de Fenn-Rourke, vindo daí portanto, a sua importância na definição do invariante $T(L)$.

Considere agora os seguinte escalares:

$$c_+ = \sum_{\nu \in \text{Diag}_{N,r}} f_\nu \delta_\nu^2$$

$$c_- = \sum_{\nu \in \text{Diag}_{N,r}} f_\nu^{-1} \delta_\nu^2$$

Observamos que c_+ (respectivamente, c_-) é o valor de χ_N no nó trivial com *framing* +1 (resp. -1) decorado por Ω_r . Como $c_+ \in \mathbb{C}$, podemos escrevê-lo como o produto de um número real positivo $\rho(r)$ e um número complexo de norma unitária $c(r)$, isto é $c_+ = \rho(r)c(r)$.

Finalmente, chegamos à definição do invariante de 3-variedades $T(L)$:

Teorema 5.1.3 ([Anna], pg.162) *O elemento:*

$$T(L) = \rho(r)^{-k} c(r)^{-\text{sig}(L)} \chi_N(L; \Omega_r, \dots, \Omega_r)$$

onde k é o número de componentes de L , é invariante sob os movimentos de Fenn-Rourke.

Bibliografia

- [A] Artin, E. "*Theory of braids.*" Ann.Math. 48 (1947) pp 1010-1026.
- [Anna] Aiston, A. "*Skein theoretic idempotents of Hecke algebras and quantum group invariants.*" Tese de Doutorado, Univ.Liverpool, 1986
- [AM] Aiston, A. e Morton, H.R. "*Idempotents of Hecke algebras of type A.*" (pre-print) Univ.de Liverpool, (1996).
- [Atiyah] Atiyah, M. "*The Geometry and Physics of Knots.*" Cambridge Univ.Press (1990).
- [Birman] Birman, J. "*Braids, links and mapping class groups.*" Annals of Math.Studies 82, Princeton Univ.Press (1975)
- [BZ] Burde, G. e Zieschang, H. "*Knots.*" Walter de Gruyter, (1997).
- [Cohn] Cohn, P.M. "*Algebra, vol.II*" John Wiley & Sons (1989)
- [C] Conway, J. "*An enumeration of knots and links.*" Computational problems in abstract algebra. Pergamon Press, New York (1970) pp 329-358.
- [FR] Fenn, R. e Rourke, C. "*On Kirby's calculus of links.*" Topology 18 (1979) pp 1-15.
- [FH] Fulton, W. e Harris, J. "*Representation theory - a first course.*" G.T.M. Springer Verlag (1991)
- [FRT] Frame, J.S.; Robinson, G.de B. e Thrall, R.M. "*The hook graphs of the symmetric group.*" Canad.J of Math. 6 (1954) pp 316-324.
- [Go] Goldschmidt, D.M. "*Group characters, symmetric functions and the Hecke algebra.*" Univ.Lecture Series, A.M.S. 4 (1993).

- [JL] James, G. e Liebeck, M. "*Representations and characters of groups.*" Cambridge Univ.Press (1993).
- [Jones] Jones, V.F.R. "*Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials.*" Ann.of Mathematics 126 (1987), pp 335-388.
- [Kau1] Kauffman, L.H. "*On knots.*" Ann.of Math.Studies, 115, Princeton Univ.Press (1987)
- [Kau2] Kauffman, L.H. "*Formal knot theory*" Mathematical Notes 30, Princeton Univ.Press (1983)
- [Ki] Kirby, R. "*A calculus of framed links in S^3 .*" Invent.Math. 45 (1978) pp 35-56.
- [Li1] Lickorish, W.B.R. "*A representation of orientable, combinatorial 3-manifolds.*" Ann.Math. 76 (1962) pp 531-540.
- [Li2] Lickorish, W.B.R. "*Linear Skein theory and link polynomials.*" Topology and its Applications 27 (1987) pp 265-274.
- [MS] Morton, H. e Short, H.B. "*The 2-variable polynomial of cable knots.*" Math.Proc.Camb.Philos.Soc. 101 (1987), pp 267-278.
- [MT] Morton, H. e Traczyk, P. "*Knots and algebras.*" Contribuciones Matematicas en homenaje al professor D.Antonio Plans Sanz de Bremond, Ed.E.Martin-Peinador e A.Rodez Usan. Univ.de Zaragoza (1990) pp 201-220.
- [PS] Prasolov, V.V. e Sossinsky, A.B. "*Knots, links, braids and 3-manifolds: An introduction to the new invariants in low-dimensional topology.*" Translations of Math.Monographs, A.M.S. 154 (1996).
- [RT2] Reshetikhin, N. Yu. e Turaev, V.G. "*Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups.*" Invent.Math. 103 (1991) pp 547-597.
- [Rol] Rolfsen, D. "*Knots and links.*" Publish or Perish Inc. (1976).
- [Turaev] Turaev, V.G. "*The Conway and the Kauffman modules of the solid torus with an appendix on the operator invariants of tangles.*" L.O.M.I. pre-prints E-6-88 (1988).
- [TW] Turaev, V.G. e Wenzl, H. "*Quantum invariants of 3-manifolds associated with classical semi-simple Lie algebras.*" Int.J.Math. 4 (1993) pp 323-358.
- [WZ] Wenzl, H. "*Hecke algebras of type A_n and sub-factors*" Invent.Math. 92 (1988), pp 349-383

- [Y] Yokota, Y. "*Skeins and quantum $SU(N)$ invariants of 3-manifolds.*" Math. Ann. 307 (1997), pp 109-138.

