# ANÉIS QUADRÁTICOS GENERALIZADOS E

ÁLGEBRAS DE POSTO 3

Osmar Francisco Giuliani

TESE APRESENTADA

AO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

DA

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

PARA

OBTENÇÃO DO GRAU

DE

DOUTOR EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: Álgebra

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Peresi

– São Paulo, junho de 1998 –

Este trabalho teve suporte financeiro da CAPES.

### Anéis Quadráticos Generalizados

e

# Álgebras de Posto 3

Este exemplar corresponde à redação final da tese apresentada por **Osmar Francisco Giuliani**, aprovada pela Banca Examinadora.

#### Banca Examinadora:

Prof. Dr. Luiz Antonio Peresi (Presidente)

**IME-USP** 

Prof. Dr. Roberto Celso Fabricio Costa

**IME-USP** 

Prof. Dr. Antonio Paques

IMECC-UNICAMP

Profa. Dra. Consuelo Martinez Lopez

Universidade de Oviedo

Prof. Dr. Ivan P. Shestakov

Universidade de Novosibirsk

Para Lurdinha, Caio e Emília.

# Agradecimentos

A realização deste trabalho foi possível graças a ajuda, ao apoio e a paciência de muitas pessoas: os colegas professores do Departamento de Matemática da UFSM; os meus professores do IME-USP; os meus colegas da pós-graduação no IME-USP. A todas estas pessoas devo um sincero muito obrigado.

Agradeço de modo particular ao Prof. Dr. Luiz Antonio Peresi que propôs e orientou de modo decisivo este trabalho. Devo dizer que sem o seu incentivo, sua disponibilidade e sem a sua efetiva ajuda, certamente não teria sido possível chegar ao término do mesmo. Muito obrigado, Peresi.

Agradeço também ao Prof. Dr. Irvin Roy Hentzel, da Iowa State University (Estados Unidos), pela colaboração no Capítulo 3 deste trabalho.

Quero agradecer a Lurdinha pelo seu companheirismo e apoio dados durante este tempo de convivência.

Finalmente, devo agradecer a CAPES pelo suporte financeiro durante o curso.

## Resumo

Neste trabalho estudamos uma classe de anéis, os anéis quadráticos generalizados, definidos por identidades polinomiais que valem para todas as álgebras quadráticas. Inicialmente, apresentamos uma seqüência de implicações, de exemplos e contra-exemplos relacionando diversas classes de álgebras: alternativas, alternativas generalizadas, de Jordan não comutativas e quadráticas generalizadas. Em seguida, obtemos condições para que um anel quadrático generalizado seja alternativo, ou de Jordan não comutativo ou associativo. Finalmente, verificamos que um anel quadrático generalizado satisfaz uma condição quadrática. E como conseqüência disto obtemos uma caracterização dos anéis quadráticos generalizados simples, primos ou semiprimos.

Consideramos também as álgebras de posto 3 e as álgebras com pseudo-composição. Usando a representação matricial do grupo simétrico, obtivemos para estas classes de álgebras as identidades polinomiais minimais, isto é, de menor grau.

## Abstract

In this work we study a class of nonassociative rings, the generalized quadratic rings, defined by polynomial identities which are satisfied by all quadratic algebras. First, we present a sequence of implications, examples and counterexamples relating some class of algebras: alternative, generalized alternative, non-commutative Jordan and generalized quadratic. Next, we obtain conditions under which a quadratic generalized ring is alternative, or non-commutative Jordan or associative. Finally, we verify that a generalized quadratic ring satisfies a quadratic condition. As a consequence we obtain a characterization for the generalized quadratic rings which are simple, prime or semiprime.

We consider also the algebras of rank 3 and pseudo-composition algebras. Using the matrix representation of the symmetric group, we obtain for these classes of algebras the polynomial identities of lower degree.

# Conteúdo

In	trod	ução	1					
1	Imp	olicações e exemplos	3					
	1.1	Álgebras alternativas	3					
	1.2	Álgebras alternativas generalizadas	6					
	1.3	Álgebras quadráticas generalizadas	12					
	1.4	Associatividade nas potências	17					
2	And	éis quadráticos simétricos generalizados	22					
	2.1	Decomposição de Peirce	22					
	2.2	O caso em que os flexitores estão no centro	28					
3	A v	ariedade determinada pelas álgebras quadráticas simétricas	37					
	3.1	Introdução	37					
	3.2	Anéis quadráticos generalizados	39					
	3.3	Anéis primos	48					
	3.4	Anéis semiprimos	49					
4	Álg	Álgebras de posto 3						
	4.1	Introdução	50					
	4.2	Representação de equações por matrizes	50					
	4.3	Álgebras com pseudo-composição	52					
	4.4	Identidades polinomiais para álgebras						
		de posto 3	62					

# Introdução

Os anéis alternativos constituem uma das classes de anéis não associativos. Estes anéis foram estudados dentre outros por A. A. Albert, R. H. Bruck e E. Kleinfeld (veja Zhevlakov et al [15]).

Em 1971, Kleinfeld [4, 5] estudou generalizações dos anéis alternativos: os anéis alternativos generalizados I e II. Neste trabalho o autor estabeleceu condições para que um anel alternativo generalizado I (e II) seja alternativo. Em 1974, Smith [6] mostrou que estes anéis são associativos nas potências, que as noções de solubilidade e nilpotência são equivalentes e também mostrou que vale o teorema (principal) de Wedderburn para as álgebras alternativas generalizadas I. Em 1975-76, Hentzel e Piacentini Cattaneo [7, 8, 9] melhoraram alguns dos resultados de Kleinfeld. Generalizações dos anéis alternativos foram estudados também por Pokrass e Rodabaugh [10] e vários outros autores.

As álgebras quadráticas foram estudadas por Osborn [2] em 1966 e as álgebras alternativas quadráticas por Elduque [17] em 1990. Recentemente, Hentzel e Peresi [24] obtiveram as identidades polinomiais de grau 3, 4 e 5 que valem para todas as álgebras quadráticas.

As álgebras quadráticas têm intersecção com as álgebras alternativas (veja Zhevlakov e al [15]). Então é uma questão natural investigarmos que tipo de relações há entre uma generalização das álgebras quadráticas e uma álgebra alternativa, ou uma álgebra de Jordan não comutativa ou uma álgebra quadrática.

No Capítulo 1, apresentamos uma seqüência de implicações, de exemplos e contraexemplos relacionando diversas classes de álgebras. Também mostramos que uma álgebra quadrática generalizada contém as álgebras alternativas generalizadas I e II e, além disso, aquela é associativa nas potências.

No Capítulo 2, investigamos quando um anel quadrático simétrico generalizado com um idempotente é alternativo, ou de Jordan não comutativo ou associativo.

No Capítulo 3, estudamos quando é que um anel quadrático generalizado satisfaz uma condição quadrática. E como consequência disto obtemos uma caracterização dos anéis quadráticos generalizados simples, primos e semiprimos.

E, finalmente, no Capítulo 4, consideramos as álgebras de posto 3 e álgebras com pseudo-composição. Em 1993, Meyberg e Osborn [21] estudaram as álgebras com pseudo-composição e, em 1994, Walcher [22] trabalhou com álgebras de posto 3. É claro que as álgebras quadráticas comutativas estão contidas nas álgebras de posto 3. E as álgebras com pseudo-composição são um caso particular das álgebras de posto 3. Neste capítulo obtemos as identidades polinomiais minimais para as álgebras com pseudo-composição e para as álgebras de posto 3, usando o método descrito por Hentzel e Peresi em 1994 no artigo [24].

#### Notação

A palavra anel (álgebra) indica um anel (álgebra) não necessariamente associativo. Nos Capítulos 1, 2 e 3, os anéis (álgebras) não são necessariamente comutativos. No Capítulo 4, as álgebras são comutativas.

Indicamos por (x, y, z) o associador definido por

$$(x,y,z) = (xy)z - x(yz).$$

Indicamos por [x, y] o comutador definido por

$$[x,y] = xy - yx.$$

# Capítulo 1

# Implicações e exemplos

Neste capítulo apresentamos uma sequência de implicações entre diversas variedades de álgebras sobre um corpo K. Algumas destas implicações já são conhecidas e outras não. Além disso, são apresentados exemplos e contra-exemplos para ilustrar tais implicações. E também mostramos que os anéis quadráticos generalizados são associativos nas potências.

# 1.1 Álgebras alternativas

Dizemos que uma álgebra A é alternativa à direita se (x,y,y)=0 e A é alternativa à esquerda se (x,x,y)=0, para todo x,y em A. A álgebra A é alternativa se ela for alternativa à direita e à esquerda. E dizemos que uma álgebra é flexível se (x,y,x)=0.

**Exemplo 1.1.1** Consideremos a álgebra com base  $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  sobre um corpo K, com a seguinte tábua de multiplicação:

A álgebra do Exemplo 1.1.1 satisfaz a lei alternativa à esquerda. Para provar este fato, verificamos antes que a lei alternativa à esquerda é satisfeita pelos elementos da base:

$$(e_i, e_i, e_j) = e_i^2 e_j - e_i(e_i e_j) = 0$$
, para todo  $i, j = 1, \dots, 4$ .

Escrevemos

$$(x, x, y) = \left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^{4} \beta_i e_i\right).$$

Pela tábua de multiplicação, todos os associadores onde aparece  $e_4$  são nulos. Além disso, podemos ignorar os escalares que aparecem em cada parcela da soma acima. Então, para vermos que (x, x, y) = 0, basta calcular a soma:

$$(e_1, e_1, e_1) + (e_1, e_1, e_2) + (e_1, e_1, e_3)$$

$$+(e_1, e_2, e_1) + (e_1, e_2, e_2) + (e_1, e_2, e_3)$$

$$+(e_1, e_3, e_1) + (e_1, e_3, e_2) + (e_1, e_3, e_3)$$

$$+(e_2, e_1, e_1) + (e_2, e_1, e_2) + (e_2, e_1, e_3)$$

$$+(e_2, e_2, e_1) + (e_2, e_2, e_2) + (e_2, e_2, e_3)$$

$$+(e_2, e_3, e_1) + (e_2, e_3, e_2) + (e_2, e_3, e_3)$$

$$+(e_3, e_1, e_1) + (e_3, e_1, e_2) + (e_3, e_1, e_3)$$

$$+(e_3, e_2, e_1) + (e_3, e_2, e_2) + (e_3, e_2, e_3)$$

$$+(e_3, e_3, e_1) + (e_3, e_3, e_2) + (e_3, e_3, e_3).$$

Nesta soma vemos que

$$(e_i, e_i, e_j) = 0, \quad (e_i, e_j, e_k) + (e_j, e_i, e_k) = 0,$$

para todo i, j, k = 1, 2, 3.

Portanto, (x, x, y) = 0, para todo x, y desta álgebra.

Mas, esta álgebra não é alternativa à direita, pois

$$(e_2, e_1, e_1) = (e_2 e_1)e_1 - e_2 e_1^2 = -e_4 \neq 0.$$

Exemplo 1.1.2 Seja A a álgebra com base  $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$  sobre um corpo K e com a seguinte tábua de multiplicação:

İ	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$
$e_1$	$e_3$	$e_4$			
$egin{array}{c} e_1 \ e_2 \end{array}$				}	
$e_3$		$-e_5$			
$e_4$	$e_5$				
$e_5$					

A álgebra A não é alternativa à esquerda, pois  $(e_1, e_1, e_2) = -e_5 \neq 0$ . E A é alternativa à direita, pois  $(e_i, e_j, e_j) = 0$ , para todo i, j = 1, ..., 5, assim como todos os associadores onde aparece  $e_5$  são nulos. Além disso,

$$(e_i, e_j, e_k) + (e_i, e_k, e_j) = 0,$$

para todo  $i, j, k = 1, \dots, 4$ . Logo,

$$(x, y, y) = \left(\sum_{i=1}^{5} \alpha_i e_i, \sum_{i=1}^{5} \beta_i e_i, \sum_{i=1}^{5} \beta_i e_i\right) = 0.$$

É um fato conhecido que se uma álgebra alternativa à direita (à esquerda) é flexível e  $car(K) \neq 2$ , então ela é alternativa.

Para provar isto, consideremos as identidades (x, y, y) = 0 e (y, x, y) = 0 na sua forma linearizada:

$$p(x, y, z) = (x, y, z) + (x, z, y) = 0,$$

$$q(x, z, y) = (x, z, y) + (y, z, x) = 0.$$

Subtraindo q(x, y, z) de p(x, z, y), temos

$$(x, y, z) - (y, z, x) = 0.$$

E isto é equivalente a

$$(x, y, z) + (y, x, z) = 0.$$

E, portanto, (x, x, y) = 0.

# 1.2 Álgebras alternativas generalizadas

Uma álgebra A é denominada alternativa generalizada à direita se satisfaz a identidade

$$g(w, x, y, z) = (wx, y, z) + (w, x, [y, z]) - w(x, y, z) - (w, y, z)x = 0,$$

para todo w, x, y, z em A. E uma álgebra A é chamada alternativa generalizada à esquerda se ela satisfaz a identidade

$$h(w, x, y, z) = ([w, x], y, z) + (w, x, yz) - y(w, x, z) - (w, x, y)z = 0,$$

para todo w, x, y, z em A.

Consideremos os Exemplos 1.2.1 e 1.2.2 com as respectivas tábuas de multiplicação:

#### Exemplo 1.2.1

#### Exemplo 1.2.2

A álgebra do Exemplo 1.2.1 é alternativa generalizada à esquerda.

Cada elemento da álgebra do Exemplo 1.2.1 é da forma  $\sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i$ . Observamos imediatamente que todos os associadores onde ocorre o  $e_4$  são nulos. Além disso, um cálculo direto mostra que  $h(e_i, e_j, e_k, e_l) = 0$ , onde i, j, k, l = 1, 2, 3. Assim,

$$h(w, x, y, z) = h\left(\sum \alpha_i e_i, \sum \beta_i e_i, \sum \gamma_i e_i, \sum \delta_i e_i\right) = 0.$$

Mas, por outro lado,

$$(e_1^2, e_1, e_1) + (e_1, e_1, [e_1, e_1]) - e_1(e_1, e_1, e_1) - (e_1, e_1, e_1)e_2 = (e_1^2, e_1, e_1) = e_4 \neq 0.$$

Ou seja, a álgebra do Exemplo 1.2.1 não satisfaz a lei alternativa generalizada à direita.

De modo semelhante, a álgebra do Exemplo 1.2.2 satisfaz a lei alternativa generalizada à direita. Mas,  $h(e_1, e_1, e_1, e_1) = -e_4 \neq 0$ .

Afirmamos que se uma álgebra A satisfaz as identidades (x, y, x) = 0 e g(w, x, y, z) = 0 e  $car(K) \neq 2$ , então satisfaz também h(w, x, y, z) = 0.

Vamos mostrar isto. Linearizando (x, y, x) = 0, temos (x, y, z) + (z, y, x) = 0. Assim, podemos reescrever g(w, x, y, z) = 0 na seguinte forma:

$$-(z,y,wx) - ([y,z],x,w) + w(z,y,x) + (z,y,w)x = 0.$$

Trocando o sinal e substituindo z por w, y por x, w por y, x por z, temos

$$-([w,x],z,y) + (w,x,yz) - y(w,x,z) - (w,x,y)z = 0.$$

Portanto, para que tenhamos h(w,x,y,z)=0, devemos mostrar que ([w,x],y,z)=-([w,x],z,y). Mas, ([w,x],y,z)+([w,x],z,y)=0 é a forma linearizada de

$$([w,x],y,y)=0.$$

Assim, basta mostrar que esta identidade vale para a variedade das álgebras que satisfazem (x, y, x) = 0 e g(w, x, y, z) = 0. Se

$$q(x, y, z) = (x, y, z) + (z, y, x),$$

por cálculo direto, temos que

$$\begin{split} 2([w,x],y,y) &= xq(w,y,y) + q(xw,y,y) - 2q(wx,y,y) \\ &+ yq(x,w,y) + 2q(x,w,y)y + q(x,y,w)y \\ &- q(xy,y,w) - q(y^2,w,x) - q(xy,w,y) \\ &- q(yx,w,y) - q(wy,x,y) + q(w,yx,y) \\ &+ q(x,wy,y) + g(y,y,w,x) - g(y,y,x,w) \\ &- g(y,w,x,y) + g(x,y,y,w) + g(x,y,w,y) \\ &- g(y,w,y,x) + (y,wx,y) + (y,xw,y) \\ &+ (y,w,y)x + w(y,x,y) \\ &= 0. \end{split}$$

Assim, se A é uma álgebra satisfazendo (x, y, x) = 0 e g(w, x, y, z) = 0 sobre um corpo K, de característica diferente de 2, então ([w, x], y, y) = 0.

Por uma questão de simetria, também pode ser provado que se A é uma álgebra que satisfaz as identidades (x, y, x) = 0 e h(w, x, y, z) = 0, então A também satisfaz g(w, x, y, z) = 0.

Uma álgebra A é denominada uma álgebra alternativa generalizada I (Kleinfeld [4]) se ela satisfaz as identidades

$$(a, a, a) = 0,$$
  
 $g(a, b, c, d) = 0,$   
 $h(a, b, c, d) = 0.$ 

E A é chamada de álgebra alternativa generalizada II (Kleinfeld [5]) se ela satisfaz as identidades

$$(a,b,a) = 0,$$
  
$$g(a,b,c,d) = 0.$$

Portanto, provamos a seguinte proposição:

Proposição 1.2.3 A classe das álgebras alternativas generalizadas II, sobre um corpo K de característica diferente de 2, está contida na classe das álgebras alternativas generalizadas I.

A recíproca não é verdadeira. Isto pode ser verificado com o Exemplo 1.3.2 (pg 14), onde temos uma álgebra alternativa generalizada I, que não é flexível, pois  $(e_2, e_1, e_2) = -2e_7 \neq 0$ . Logo, ela não é uma álgebra alternativa generalizada II.

A lei alternativa à direita generalizada g(w, x, y, z) = 0 é consequência da lei alternativa à direita. Uma demonstração deste fato foi dada por Kleinfeld [4] e é reproduzida abaixo.

A identidade de Teichmüller vale para qualquer álgebra:

$$T(w, x, y, z) = (wx, y, z) - (w, xy, z) + (w, x, yz) - w(x, y, z) - (w, x, y)z = 0.$$

Calculando

$$T(x, y, y, z) - T(x, z, y, y) + T(x, y, z, y) = 0,$$

obtemos a identidade

$$(x, y, yz) - (x, y, z)y = 0.$$

Linearizando esta última identidade, temos

$$k(x, w, y, z) = (x, w, yz) + (x, y, wz) - (x, w, z)y - (x, y, z)w = 0.$$

Usando a lei alternativa à direita e calculando, temos

$$0 = T(w, x, y, z) - k(w, z, x, y) = g(w, x, y, z).$$

De modo semelhante, mostramos que a lei alternativa à esquerda implica a lei alternativa à esquerda generalizada. A recíproca destes dois fatos não é verdadeira como se pode ver no Exemplo 1.2.4 abaixo.

#### Exemplo 1.2.4

	$ e_1 $	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$	$e_{10}$
$e_1$	$e_3$	$e_4$	$e_6$		$e_8$		$e_{10}$		$-e_{10}$	
$e_2$	$e_5$		$e_7 + e_9$							
$e_3$	$e_6$	$e_7$		$e_{10}$	$e_{10}$					
$e_4$	$e_8$									
$e_5$	$e_9$		$-2e_{10}$							
$e_6$		$3e_{10}$								
$e_7$	$e_{10}$									
$e_8$	$-e_{10}$									
$e_9$	$-e_{10} -3e_{10}$									
$e_{10}$										

Neste exemplo temos uma álgebra que satisfaz as identidades g(w, x, y, z) = 0 e h(w, x, y, z) = 0, mas ela não satisfaz nenhuma das leis alternativas, pois

$$(e_1, e_1, e_2) = -(e_2, e_1, e_1) = e_7 \neq 0.$$

Assim, vemos que se A é uma álgebra alternativa, então A é alternativa generalizada I, mas não vale a recíproca. E também, a álgebra do Exemplo 1.2.4 é flexível. Logo, é uma álgebra alternativa generalizada II. Mas, como vimos, ela não é alternativa nem à direita e nem à esquerda.

O problema de determinar condições necessárias para que um anel alternativo generalizado I ou II seja alternativo foi estudado por Kleinfeld [4, 5], Hentzel e Piacentini Cattaneo [7, 8, 9], Smith [6]. O melhor resultado nesta direção é o seguinte teorema:

Teorema 1.2.5 (Hentzel, Piacentini Cattaneo [8]) Se A é um anel semiprimo de característica diferente de 2 e 3 e satisfaz

$$(a,a,a)=0,$$

$$g(a, b, c, d) = 0,$$

então A é alternativo à direita.

Um anel é chamado semiprimo se o único ideal I tal que  $I^2=0$  é I=0.

Vamos mostrar que toda álgebra alternativa generalizada à direita satisfaz a identidade  $(b, a, a^2) - (b, a^2, a) = 0$ . De fato,

$$0 = T(a, b, c, d) - g(a, b, c, d) = (a, b, dc) - (a, bc, d) + (a, c, d)b - (a, b, c)d.$$

Substituindo a por b e b, c, d por a, temos  $(b, a, a^2) - (b, a^2, a) = 0$ .

De modo semelhante podemos mostrar que toda álgebra alternativa generalizada à esquerda satisfaz a identidade  $(a^2, a, b) - (a, a^2, b) = 0$ .

Na álgebra do Exemplo 1.2.6 a seguir valem as identidades (a, a, a) = 0 e h(a, b, c, d) = 0. Mas nesta álgebra não vale a identidade  $(b, a, a^2) - (b, a^2, a) = 0$ . Assim, temos uma álgebra alternativa generalizada à esquerda que não satisfaz  $(b, a, a^2) - (b, a^2, a) = 0$ . Esta álgebra também não satisfaz [(a, b, a), a] = 0.

#### Exemplo 1.2.6

$$(e_2, e_1^2, e_1) - (e_2, e_1, e_1^2) = [(e_1, e_2, e_1), e_1] = e_6 \neq 0.$$

E a álgebra do Exemplo 1.2.7, abaixo, satisfaz as identidades (a, a, a) = 0 e g(a, b, c, d) = 0. Mas

$$(e_1^2, e_1, e_2) - (e_1, e_1^2, e_2) = [(e_1, e_2, e_1), e_1] = -e_6 \neq 0.$$

#### Exemplo 1.2.7

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$
$e_1$	$e_3$	$e_4$		$e_5$		
$e_2$	$-e_4$					
$e_3$				$e_6$		
$e_4$						
$e_4 \ e_5 \ e_6$	$-e_6$					
$e_6$						

Logo, esta álgebra é alternativa generalizada à direita mas, não satisfaz as identidades  $(a^2, a, b) - (a, a^2, b) = 0$  e [(a, b, a), a] = 0.

#### Exemplo 1.2.8

A álgebra deste exemplo é tal que satisfaz as identidades g(a,b,c,d)=0 e h(a,b,c,d)=0. E, portanto, ela satisfaz também  $(a^2,a,b)-(a,a^2,b)=0$  e  $(b,a,a^2)-(b,a^2,a)=0$ . No entanto, não vale a identidade [(a,b,a),a]=0, pois  $[(e_1,e_1,e_1),e_1]=e_4\neq 0$ .

# 1.3 Álgebras quadráticas generalizadas

Conforme Hentzel e Peresi [24], Teoremas 1 e 3, toda álgebra quadrática satisfaz as seguintes identidades:

(i) 
$$(a, a, a) = 0$$
;

(ii) 
$$(a^2, a, b) - (a, a^2, b) = 0$$
;

(iii) 
$$(b, a, a^2) - (b, a^2, a) = 0$$
;

(iv) 
$$[(a, b, a), a] = 0$$
.

Dizemos que uma álgebra A sobre um corpo K é uma álgebra quadrática generalizada se A satisfaz as identidades (i)-(iv).

Afirmamos que uma álgebra alternativa generalizada I sobre um corpo K de característica diferente de 3 é uma álgebra quadrática generalizada. Pelo que foi feito até aqui, a afirmação fica demonstrada se verificarmos a identidade (iv). Linearizando (i), temos

$$p(x, y, z) = (x, y, z) + (x, z, y) + (y, x, z) + (y, z, x) + (z, x, y) + (z, y, x) = 0.$$

Por cálculo direto temos que

$$0 = 3g(b, a, a, a) + 5g(a, b, a, a) + 3g(a, a, b, a) + 2g(a, a, a, b)$$

$$+2h(b, a, a, a) + h(a, b, a, a) + h(a, a, b, a) + 5h(a, a, a, b)$$

$$-2p(ab, a, a) - p(b, a^{2}, a) + p(b, a, a)a + 5ap(b, a, a)$$

$$= -3[(a, b, a), a].$$

Portanto, [(a,b,a),a]=0. Mas a recíproca não é verdadeira, isto é, uma álgebra quadrática generalizada não é necessariamente uma álgebra alternativa generalizada I. E o Exemplo 1.3.1 abaixo comprova isto, pois esta é uma álgebra quadrática generalizada, mas não é uma álgebra alternativa generalizada I.

#### Exemplo 1.3.1

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$e_1$	$e_3$		$e_5$				
$e_2$	$e_4$		$-e_6$				
$e_3$	$e_5$	$e_6$		$e_7$			
$e_4$	$-2e_{6}$		$-e_7$				
$e_5$		$e_7$					
$e_6$	$e_7$						
$e_7$							

$$g(e_1, e_1, e_1, e_2) = h(e_2, e_1, e_1, e_1) = -e_7 \neq 0.$$

Uma álgebra A que satisfaz as identidades (i), (ii), (iii) e a identidade

(v) 
$$[(a,b,a),c] = 0$$

é chamada de álgebra quadrática simétrica generalizada. A álgebra do Exemplo 1.3.2 abaixo mostra que uma álgebra alternativa generalizada I nem sempre é uma álgebra quadrática simétrica generalizada, pois

Exemplo 1.3.2  $car(K) \neq 2$ 

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$e_8$	$e_9$
$e_1$	$e_3$	$e_4$		$e_8$	$e_8$	$-2e_{7}$			
$e_2$	$e_5$	$e_6$	$-2e_{8}$	$e_7$	$e_7$				
$e_3$		$2e_8$				$e_9$			
$e_4$	$-e_8$	$-e_7$		$e_9$	$-2e_{9}$				
$e_5$	$-e_8$	$-e_7$		$-2e_{9}$	$e_9$				
$e_6$	$2e_7$		$e_9$						
$e_7$	$e_9$								
$e_8$		$e_9$							
$e_9$									

satisfaz as identidades (i), (ii), (iii) e (iv), mas não satisfaz (v). Basta ver que  $[e_1, e_2, e_1]$ ,  $e_2$  =  $-2e_9 \neq 0$ . E também podemos ver que o Exemplo 1.3.2 não é uma álgebra alternativa generalizada II, pois  $(e_1, e_2, e_1) = -2e_8 \neq 0$ .

Uma álgebra A é denominada álgebra de Jordan não comutativa se satisfaz (a, b, a) = 0 e  $(a, b, a^2) = 0$ , para todo a, b em A.

Sabemos que toda álgebra alternativa generalizada II é uma álgebra de Jordan não comutativa (Kleinfeld [5]). E se A é uma álgebra de Jordan não comutativa, então ela é uma álgebra quadrática generalizada (simétrica ou não), conforme Schafer [3], p.161.

Na verdade, vale a seguinte equivalência:

$$\begin{cases} (a, b, a) = 0 \\ (b, a, a^2) - (b, a^2, a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, a) = 0 \\ (a, b, a^2) = 0 \end{cases}$$

Para provar a primeira implicação ( $\Rightarrow$ ), observemos que  $(b, a, a^2) - (b, a^2, a) = 0$  é equivalente a  $ba.a^2 = ba^2.a$ , que por sua vez é equivalente a (ba, a, a) = (b, a, a)a. E pela flexibilidade, (a, a, ba) = (a, a, b)a. Usando a identidade de Teichmüler, temos

$$(a^2, b, a) - (a, ab, a) + (a, a, ba) - a(a, b, a) - (a, a, b)a = 0.$$

Vemos que os quatro últimos associadores desta igualdade se anulam, pela hipótese. Assim,  $(a^2, b, a) = 0$ , ou seja,  $(a, b, a^2) = 0$ .

Usando novamente a identidade de Teichmüler e trocando entre si a hipótese e a tese obtemos a outra implicação (⇐).

Portanto, vale a equivalência.

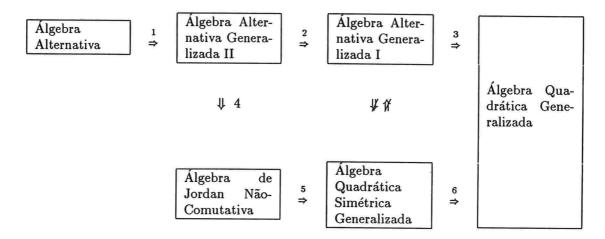
A álgebra do Exemplo 1.3.3 abaixo mostra que uma álgebra quadrática simétrica generalizada nem sempre é uma álgebra de Jordan não-comutativa.

#### Exemplo 1.3.3

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$e_1$	$e_3$	$e_4$		$e_6$			
$e_2$	$e_5$		$-e_6$				
$e_3$		$e_6$					
$e_4$			$-e_7$				
$e_5$	$-e_6$		$e_7$				
$e_6$	$-e_7$						
$e_7$							

$$(e_1, e_4, e_1) = -e_7 \neq 0.$$

Pelo que foi feito até aqui, podemos escrever a seguinte cadeia de implicações:



A recíproca da primeira implicação não vale pelo Exemplo 1.2.4.

A recíproca da segunda implicação é falsa pelo Exemplo 1.3.2.

A recíproca da terceira implicação é falsa pelo Exemplo 1.3.1.

A recíproca da quarta implicação é falsa pelo Exemplo 1.3.4.

A recíproca da quinta implicação é falsa pelo Exemplo 1.3.3.

A recíproca da sexta implicação é falsa pelo Exemplo 1.3.2.

A álgebra do Exemplo 1.3.4, abaixo, foi dada por Schafer [3], na página 147.

#### Exemplo 1.3.4

	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$
$e_1$	$e_1$	$e_2$	$e_5$		
$e_2$			$e_1$	$e_2$	
$e_3$	$e_3 - e_5$	$e_4$		$e_5$	
$e_4$			$e_3 - e_5$	$e_4$	$e_5$
$e_5$	$e_5$				

Esta é uma álgebra de Jordan não comutativa, mas não é uma álgebra alternativa generalizada II, pois

$$g(e_1, e_4, e_3, e_4) = e_5 \neq 0.$$

Os exemplos dados (exceto o Exemplo 1.3.4) foram construídos usando o método descrito por Hentzel e Peresi [16].

Observamos que as implicações continuam válidas quando trocamos álgebra por anel.

## 1.4 Associatividade nas potências

Um anel é denominado associativo nas potências se cada elemento do anel gera um subanel associativo.

Vimos que todo anel alternativo generalizado I é um anel quadrático generalizado. Smith [6] provou que os anéis alternativos generalizados I são associativos nas potências. Então, uma questão natural é saber se um anel quadrático generalizado ainda é associativo nas potências. Vamos mostrar que esta questão tem resposta afirmativa, mesmo quando (assumimos que) temos um anel satisfazendo (i), (ii) e (iii).

Teorema 1.4.1 Um anel de característica diferente de 2 satisfazendo as identidades

(i) 
$$(a, a, a) = 0$$
, (ii)  $(a^2, a, b) - (a, a^2, b) = 0$ , (iii)  $(b, a, a^2) - (b, a^2, a) = 0$ ,

é associativo nas potências.

**Prova.** Definimos  $x^n = x^{n-1}x$ . Queremos mostrar que  $x^{i+j} = x^ix^j$ , para todo  $x \in A$  e i, j > 0, inteiros.

De (i), temos  $x^3 = x^2x = xx^2$ .

Fazendo a = b = x em (ii) e (iii), temos, respectivamente,

$$0 = (x^2, x, x) - (x, x^2, x) = -x^2x^2 + xx^3,$$

$$0 = (x, x, x^2) - (x, x^2, x) = x^2 x^2 - x^3 x.$$

Assim, para n = 4 é verdade que  $x^4 = x^3x = x^2x^2 = xx^3$ .

Novamente, usando (ii) e (iii), com a=x e  $b=x^2$ , temos que  $xx^4=x^2x^3$  e  $x^4x=x^3x^2$ . A linearização de (i) é

$$(a,b,c) + (a,c,b) + (b,a,c) + (b,c,a) + (c,a,b) + (c,b,a) = 0$$

e fazendo  $a = b = x^2$  e c = x, temos

$$(x^2, x^2, x) + (x^2, x, x^2) + (x, x^2, x^2) = 0.$$

Desenvolvendo os associadores e usando o que anteriormente foi feito, obtemos  $x^2x^3 = x^3x^2$ . Portanto, para n = 5, vale

$$x^5 = x^4 x = x^3 x^2 = x^2 x^3 = x x^4$$
.

Por indução, suponhamos que  $x^ix^j=x^{i+j},\ i,j>0$  inteiros, i+j< n e n>5. Mostremos que vale para i+j=n.

Por (ii) e (iii), com  $a = x^i$ ,  $b = x^{n-3i}$  (3i < n) e usando a hipótese de indução, temos, respectivamente,

$$0 = (x^{2i}, x^i, x^{n-3i}) - (x^i, x^{2i}, x^{n-3i}) = -x^{2i}x^{n-2i} + x^ix^{n-i},$$

$$0 = (x^{n-3i}, x^i, x^{2i}) - (x^{n-3i}, x^{2i}, x^i) = x^{n-2i}x^{2i} - x^{n-i}x^i.$$

Ou seja,

$$x^{i}x^{n-i} = x^{2i}x^{n-2i}, \qquad x^{n-i}x^{i} = x^{n-2i}x^{2i},$$
 (1.4.1)

para i > 0 tal que 3i < n. Quando 3i = n, por (i) e pela hipótese de indução, temos

$$0 = (x^{i}, x^{i}, x^{i}) = x^{2i}x^{i} - x^{i}x^{2i}.$$

Assim, as igualdades anteriores valem também para i>0 tal que  $3i\le n$ . Em (i), fazendo  $a=x^{n-2i},\,b=c=x^i,$  obtemos

$$(x^{n-2i}, x^i, x^i) + (x^i, x^i, x^{n-2i}) + (x^i, x^{n-2i}, x^i) = 0.$$

E disto segue que  $x^{n-i}x^i=x^ix^{n-i}$ , para todo i>0 tal que  $3i\leq n$ . Assim, para i>0 e tal que  $3i\leq n$ , valem as igualdades

$$x^{n-i}x^i = x^i x^{n-i}. (1.4.2)$$

Linearizando (ii), temos

$$(ab, c, d) + (ba, c, d) + (ac, b, d) + (ca, b, d) + (bc, a, d) + (cb, a, d)$$
$$-(a, bc, d) - (a, cb, d) - (b, ac, d) - (b, ca, d) - (c, ba, d) - (c, ab, d) = 0.$$

Substituímos  $a = x^i$ ,  $b = x^j$ , c = x e  $d = x^{n-(i+j+1)}$  (i + j < n - 1) e usamos a hipótese de indução para obter

$$\begin{split} &2(x^{i+j},x,x^{n-i-j-1})+2(x^{i+1},x^{j},x^{n-i-j-1})+2(x^{j+1},x^{i},x^{n-i-j-1})\\ &-2(x^{i},x^{j+1},x^{n-i-j-1})-2(x^{j},x^{i+1},x^{n-i-j-1})-2(x,x^{i+j},x^{n-i-j-1})=0. \end{split}$$

Desenvolvendo os associadores, obtemos

$$xx^{n-1} + x^{i}x^{n-i} + x^{j}x^{n-j} = x^{i+1}x^{n-i-1} + x^{j+1}x^{n-j-1} + x^{i+j}x^{n-i-j},$$
(1.4.3)

para todos i, j > 0 tais que i + j < n - 1. E de modo semelhante, da linearização de (iii), obtemos

$$x^{n-1}x + x^{n-i}x^{i} + x^{n-j}x^{j} = x^{n-i-1}x^{i+1} + x^{n-j-1}x^{j+1} + x^{n-i-j}x^{i+j}.$$
 (1.4.4)

Quando i = j nas igualdades (1.4.3) e (1.4.4), temos

$$xx^{n-1} + 2x^{i}x^{n-i} = 2x^{i+1}x^{n-i-1} + x^{2i}x^{n-2i},$$
  
$$x^{n-1}x + 2x^{n-i}x^{i} = 2x^{n-i-1}x^{i+1} + x^{n-2i}x^{2i},$$

para todo i > 0 tal que 2i + 1 < n.

E, para i > 0 tal que  $3i \le n$ , temos então (por (1.4.1)) que

$$xx^{n-1} + x^ix^{n-i} = 2x^{i+1}x^{n-(i+1)},$$
 (1.4.5)

$$x^{n-1}x + x^{n-i}x^{i} = 2x^{n-(i+1)}x^{i+1}. (1.4.6)$$

Da identidade (i) linearizada, onde  $a = x^i$ , b = x e  $c = x^{n-i-1}$ , obtemos

$$x^{i+1}x^{n-i-1} + x^{n-1}x + x^{n-i}x^{i} = xx^{n-1} + x^{i}x^{n-i} + x^{n-i-1}x^{i+1},$$

isto é,

$$x^{i+1}x^{n-i-1} + x^{n-i}x^i = x^ix^{n-i} + x^{n-i-1}x^{i+1};$$

e quando  $3i \leq n$ , obtemos (por (1.4.2)

$$x^{i+1}x^{n-(i+1)} = x^{n-(i+1)}x^{i+1}$$

Voltando para a igualdade (1.4.6), com i=1, temos  $x^{n-1}x+x^{n-1}x=2x^{n-2}x^2$ , ou seja,  $x^n=x^{n-2}x^2$ . E tomando i=2, obtemos  $x^n=x^{n-3}x^3$ . Por indução sobre i, temos que  $x^n=x^{n-i}x^i=x^{n-(i+1)}x^{i+1}$ , para i>0, tal que  $3i\leq n$ . E de modo análogo, da igualdade (1.4.5), obtemos  $x^n=x^ix^{n-i}=x^{i+1}x^{n-(i+1)}$ . Portanto, podemos escrever

$$x^{n} = x^{i}x^{n-i} = x^{n-i}x^{i} = x^{n-(i+1)}x^{i+1} = x^{i+1}x^{n-(i+1)},$$
(1.4.7)

com i > 0 tal que  $3i \le n$ .

Para obtermos os casos que faltam, vamos escrever n na forma n=3k+r, com r=0,1,2. Por (1.4.7), temos que

$$x^n = x^i x^{n-i} = x^{n-i} x^i$$
, para  $i = 1, \dots, k+1$  e  $i > 0$  tal que  $3i \le n$ .

Devemos então obter os casos em que  $i=k+2,\ldots,s$ , onde  $s=\left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right]$  é o maior inteiro menor ou igual a  $\frac{n}{2}$ ). Tomando i=1 em (1.4.3), temos

$$xx^{n-1} + xx^{n-1} + x^{j}x^{n-j} = x^{2}x^{n-2} + x^{j+1}x^{n-(j+1)} + x^{j+1}x^{n-(j+1)}$$

ou seja,

$$x^{n} + x^{j}x^{n-j} = 2x^{j+1}x^{n-(j+1)}$$
, para  $j > 0$  e  $j < n-2$ .

De modo análogo, com (1.4.4), obtemos

$$x^n + x^{n-j} x^j = 2x^{n-(j+1)} x^{j+1}, \quad \text{para } j > 0 \qquad \text{e} \qquad j < n-2.$$

Assim, se j = k + 1, temos

$$x^{n} + \underbrace{x^{n-(k+1)}x^{k+1}}_{x^{n}} = 2x^{n-(k+2)}x^{k+2}$$

e também

$$x^{n} + \underbrace{x^{k+1}x^{n-(k+1)}}_{x^{n}} = 2x^{k+2}x^{n-(k+2)}$$

e, portanto,

$$x^{n} = x^{n-(k+2)}x^{k+2} = x^{k+2}x^{n-k+2}.$$

Suponhamos que isto vale para j = s - 1. Ou seja,

$$x^{n} = x^{n-(s-1)}x^{s-1} = x^{s-1}x^{n-(s-1)},$$

onde  $s = [\frac{n}{2}]$ . Observamos que  $[\frac{n}{2}] < n-2$  para todo número inteiro  $n \ge 5$ . Assim, se  $j = s \le [\frac{n}{2}]$ , temos j < n-2. Logo,

$$x^{n} + x^{n-(s-1)}x^{s-1} = 2x^{n-s}x^{s}, \quad x^{n} + x^{s-1}x^{n-(s-1)} = 2x^{s}x^{n-s}.$$

Portanto,

$$x^n = x^{n-s}x^s = x^sx^{n-s}.$$

Portanto, para todo i, j inteiros positivos,  $x^i x^j = x^{i+j}$ , o que demonstra o teorema.

Corolário 1.4.2 Todo anel quadrático generalizado é associativo nas potências.

# Capítulo 2

# Anéis quadráticos simétricos generalizados

Nos artigos [4, 5], Kleinfeld faz um estudo dos anéis alternativos generalizados I e II assumindo a existência de um idempotente. Neste capítulo, vamos fazer um estudo semelhante para os anéis quadráticos simétricos generalizados.

Seja A um anel quadrático simétrico generalizado de característica  $\neq 2$ . Suponhamos que A contém um idempotente  $principal\ e \neq 0,1$ . Queremos saber que condições devem ser acrescentadas para que A seja uma anel de Jordan não comutativo ou alternativo ou associativo.

## 2.1 Decomposição de Peirce

Seja A um anel não-associativo qualquer, com um idempotente  $e \neq 0,1$ . Suponhamos que o idempotente e satisfaz a seguinte condição:

$$(A, e, e) = (e, A, e) = (e, e, A) = 0.$$

Neste caso, sabemos que A tem uma decomposição de Peirce com relação a e. Mais precisamente, A pode ser escrito como a soma direta

$$A = A_{11} \oplus A_{10} \oplus A_{01} \oplus A_{00}$$

onde

$$A_{ij} = \{x_{ij} \in A \mid ex_{ij} = ix_{ij}, x_{ij}e = jx_{ij}\}, i, j = 0, 1.$$

Veja Albert [1].

Proposição 2.1.1 Seja A um anel quadrático simétrico generalizado de característica  $\neq 2$ . Suponhamos que A tem um idempotente  $e \neq 0,1$  satisfazendo

$$(e, e, A) = (e, A, e) = (A, e, e) = 0.$$

Então os  $A_{ij}$  satisfazem as seguintes relações:

$$A_{11}^2 \subseteq A_{11},$$
  $A_{00}^2 \subseteq A_{00},$   $A_{11}A_{00} = 0,$   $A_{00}A_{11} = 0,$   $A_{11}A_{10} \subseteq A_{10},$   $A_{11}A_{01} = 0,$   $A_{00}A_{01} \subseteq A_{01},$   $A_{00}A_{10} = 0,$   $A_{10}A_{11} = 0,$   $A_{01}A_{11} \subseteq A_{01},$   $A_{01}A_{00} = 0,$   $A_{10}A_{00} \subseteq A_{10}.$ 

**Prova.** As identidades que definem A, nas suas formas linearizadas são:

$$(1) (a,bc+cb,d) + (b,ac+ca,d) + (c,ab+ba,d)$$
$$= (ab+ba,c,d) + (ac+ca,b,d) + (bc+cb,a,d);$$

(2) 
$$(a, bc + cb, d) + (a, bd + db, c) + (a, cd + dc, b)$$
  
=  $(a, b, cd + dc) + (a, c, bd + db) + (a, d, bc + cb);$ 

(3) 
$$(a,b,c) + (a,c,b) + (b,a,c) + (b,c,a) + (c,a,b) + (c,b,a) = 0;$$

(4) 
$$[(a,b,c)+(c,b,a),d]=0.$$

Em (1) e (2), tomando a, d em  $A_{11}$  e b = c = e, temos, respectivamente,

$$(a, 2e, d) + (e, 2a, d) + (e, 2a, d) = (2a, e, d) + (2a, e, d) + (2e, a, d),$$

$$(a, 2e, d) + (a, 2d, e) + (a, 2d, e) = (a, e, 2d) + (a, e, 2d) + (a, d, 2e),$$

isto é,

$$2(e, a, d) = 2(a, e, d),$$
  $2(a, d, e) = 2(a, e, d).$ 

Como a característica de  $A \neq 2$ , obtemos então que

$$(e, a, d) = (a, e, d) = 0, \quad (a, d, e) = (a, e, d) = 0.$$

E isto implica que e(ad) = ad, (ad)e = ad. Portanto,  $ad \in A_{11}$ , para todo  $a, d \in A_{11}$ . Isto é,

$$A_{11}^2 \subseteq A_{11}$$
.

De modo semelhante, tomando a, d em  $A_{00}$  e b = c = e em (1) e (2), temos, respectivamente,

$$0 = (a, e, d) = (e, a, d),$$

$$0 = (a, e, d) = (a, d, e).$$

E disto segue que e(ad) = (ad)e = 0. Portanto, para todo a, d em  $A_{00}$ , ad está em  $A_{00}$ . Ou seja,

$$A_{00}^2 \subseteq A_{00}.$$

Vemos assim que  $A_{11}$  e  $A_{00}$  são subanéis de A. Vamos mostrar que eles são ortogonais.

Em (1) e (2), tomando a em  $A_{00}$ , d em  $A_{11}$  e b=c=e, temos

$$(a, e, d) = (e, a, d),$$

$$(a,d,e) = (a,e,d).$$

Calculando estes associadores, temos que e(ad)=ad e (ad)e=0. Assim, para todo  $a\in A_{00}$  e  $d\in A_{11}, ad\in A_{10}$ , ou seja,

$$A_{00}A_{11} \subseteq A_{10}$$
.

Agora, tomando a em  $A_{11}$ , d em  $A_{00}$  e b=c=e, temos por (1) e (2), respectivamente:

$$(e,a,d) = (a,e,d),$$

$$(a,e,d) = (a,d,e).$$

Disto segue que e(ad) = 0 e (ad)e = 0. Isto é, para todo  $a \in A_{11}$  e  $d \in A_{00}$ ,  $ad \in A_{01}$ . Ou seja,

$$A_{11}A_{00} \subseteq A_{01}$$
.

Na identidade (4), tomando a em  $A_{11}$  e c em  $A_{00}$  e b=d=e, temos

$$0 = [(a, e, c) + (c, e, a), e] = [ac - ca, e]$$
$$= ac + ca.$$

Assim,  $ac = -ca \in A_{10} \cap A_{01}$ , para todo  $a \in A_{11}$  e  $c \in A_{00}$ . Logo,

$$A_{11}A_{00} = 0, \quad A_{00}A_{11} = 0.$$

Em (1), tomando  $a = c = e, b_{11} \in A_{11} \in A_{01} \in A_{01}$ , temos

$$(eb_{11})d_{01} - e(b_{11}d_{01}) = (b_{11}e)d_{01} - b_{11}(ed_{01}),$$

isto é,

$$b_{11}d_{01} - e(b_{11}d_{01}) = b_{11}d_{01}.$$

Assim,

$$e(b_{11}d_{01})=0.$$

Novamente, em (1), tomando  $a = d = e, b_{11} \in A_{11}, c_{01} \in A_{01}$ , temos

$$(c_{01}, b_{11}, e) = (b_{11}, c_{01}, e).$$

E daí,

$$(c_{01}b_{11})e - c_{01}b_{11} = (b_{11}c_{01})e - b_{11}c_{01}.$$
(\*)

Por outro lado, em (2), tomando  $a_{01} \in A_{01}$ ,  $d_{11} \in A_{11}$  e b = c = e, temos

$$(a_{01}, d_{11}, e) = (a_{01}, e, d_{11}) = 0.$$

Assim,

$$(a_{01}d_{11})e = a_{01}d_{11}.$$

Voltando para (\*), obtemos  $(b_{11}c_{01})e = b_{11}c_{01}$ . Logo, para todo  $a_{11} \in A_{11}$  e  $c_{01} \in A_{01}$ ,  $a_{11}c_{01} \in A_{01}$ . Mas, por (4), podemos escrever

$$[(a_{11}, e, c_{01}) + (c_{01}, e, a_{11}), e] = 0,$$

isto é,

$$[a_{11}c_{01},e]=0.$$

E disto segue que

$$a_{11}c_{01} = (a_{11}c_{01})e = e(a_{11}c_{01}) = 0.$$

Portanto,

$$A_{11}A_{01}=0.$$

Em (2), tomando  $a = c = e, b_{11} \in A_{11} \in d_{01} \in A_{01}$ , temos

$$(e, b_{11}, d_{01}) = (e, d_{01}, b_{11}).$$

O primeiro associador é nulo. Assim,  $e(d_{01}b_{11})=0$ . E anteriormente vimos que  $(a_{01}d_{11})e=a_{01}d_{11}$ . Portanto, para todo  $a_{01} \in A_{01}$  e  $b_{11} \in A_{11}$ , temos que  $a_{01}b_{11} \in A_{01}$ . Ou seja,

$$A_{01}A_{11}\subseteq A_{01}.$$

Em (1), tomando  $a_{11} \in A_{11}$ ,  $d_{10} \in A_{10}$  e b = c = e e em (2),  $b_{11} \in A_{11}$ ,  $d_{10} \in A_{10}$  e a = c = e, temos, respectivamente,

$$(e, a_{11}, d_{10}) = (a_{11}, e, d_{10}) = 0,$$

$$(e, b_{11}, d_{10}) = (e, d_{10}, b_{11}).$$

Disto segue que

$$e(a_{11}d_{10}) = a_{11}d_{10},$$

$$e(d_{10}b_{11}) = d_{10}b_{11}.$$

Por outro lado, em (2), se  $a_{10} \in A_{10}$ ,  $d_{11} \in A_{11}$  e b = c = e, temos:

$$(a_{10}, d_{11}, e) = (a_{10}, e, d_{11}).$$

Ou seja,

$$(a_{10}d_{11})e = 0.$$

Agora, por (4), podemos escrever

$$[(a_{10},e,b_{11})+(b_{11},e,a_{10}),e]=0,$$

isto é,

$$[a_{10}b_{11}, e] = 0.$$

E disto temos

$$0 = (a_{10}b_{11})e = e(a_{10}b_{11}) = a_{10}b_{11},$$

para todo  $a_{10} \in A_{10}$ e  $b_{11} \in A_{10}.$  Logo,

$$A_{10}A_{11}=0.$$

Em (1), tomando  $b_{11} \in A_{11}$ ,  $c_{10} \in A_{10}$  e a = d = e, temos  $(c_{10}, b_{11}, e) = (b_{11}, c_{10}, e)$ . E pelo que já foi feito isto implica

$$(b_{11}c_{10})e=0.$$

Assim, para todo  $a_{11} \in A_{11}$  e  $b_{10} \in A_{10}$ ,  $a_{11}b_{10} \in A_{10}$ . Portanto,

$$A_{11}A_{10} \subseteq A_{10}$$
.

De modo semelhante, obtemos também que

$$A_{00}A_{10} = 0$$
,  $A_{01}A_{00} = 0$ ,  $A_{00}A_{01} \subseteq A_{01}$  e  $A_{10}A_{00} \subseteq A_{10}$ .

E isto prova a Proposição 2.1.1.

## 2.2 O caso em que os flexitores estão no centro

Em toda esta seção A é um anel quadrático simétrico generalizado.

No que segue vamos assumir que o anel A satisfaz também as identidades

(5) 
$$((a,b,a),c,d)=0$$
,

(6) 
$$(c, (a, b, a), d) = 0$$
,

$$(7) (c,d,(a,b,a)) = 0.$$

Neste caso, qualquer flexitor (a, b, a) está no centro de A.

Suponhamos que A é simples. Indiquemos o centro de A por Z(A), que é definido por

$$Z(A) = \{u \in A \mid (u, A, A) = (A, u, A) = (A, A, u) = [A, u] = 0\}.$$

Como A é simples, temos que Z(A) ou é zero ou é corpo (Zhevlakov et al [15], p.137).

Suponhamos que  $Z(A) \neq 0$ . Neste caso, o anel A tem elemento 1. Escrevamos  $1 = \alpha_{11} + \alpha_{10} + \alpha_{01} + \alpha_{00}$ . Daí,

$$e = 1e = \alpha_{11} + \alpha_{01}$$

$$e = e1 = \alpha_{11} + \alpha_{10}$$
.

Isto implica que  $\alpha_{10} = \alpha_{01} = 0$ . Assim,  $e = \alpha_{11}$  e  $1 = e + \alpha_{00}$ . E  $\alpha_{00}$  é um idempotente ortogonal a e. Como e é principal, então  $\alpha_{00} = 0$  e e = 1. Mas isto não pode ocorrer, pois  $e \neq 0,1$ . Logo, Z(A) = 0 e portanto (a,b,a) = 0, para todo a,b em A. Desta forma, A é um anel de Jordan não comutativo. Podemos então enunciar a proposição abaixo:

Proposição 2.2.1 Seja A um anel quadrático simétrico generalizado simples de característica  $\neq 2$ . Suponhamos que A tem um idempotente principal  $e \neq 0,1$  tal que (A,e,e)=(e,A,e)=(e,e,A)=0. Se para todo a,b em A o flexitor (a,b,a) está no centro de A, então A é flexível e portanto A é um anel de Jordan não comutativo.

Agora, a questão é saber quando o anel A é alternativo.

Como A é flexível, dado  $a_{10} \in A_{10}$ , temos  $-(a_{10}, e, a_{10}) = a_{10}^2 = 0$ . E portanto para todo  $a_{10}, b_{10} \in A_{10}$ ,

$$a_{10}b_{10} + b_{10}a_{10} = 0.$$

De modo semelhante, para todo  $a_{01},b_{01}\in A_{01},$ temos que  $a_{01}^2=0$ e logo

$$a_{01}b_{01} + b_{01}a_{01} = 0.$$

Da flexibilidade de A, para todo  $a_{10}, b_{10} \in A_{10}$  temos

$$(a_{10}, b_{10}, e) + (e, b_{10}, a_{10}) = 0.$$

Equivalentemente,

$$(a_{10}b_{10})e + e(a_{10}b_{10}) = a_{10}b_{10}.$$

Donde podemos concluir que  $a_{10}b_{10} \in A_{10} + A_{01}$ , ou seja,

$$A_{10}^2 \subseteq A_{10} + A_{01}$$
.

De modo semelhante, obtemos que

$$A_{01}^2 \subseteq A_{10} + A_{01}$$
.

E se tomarmos  $a_{10} \in A_{10}$ ,  $b_{01} \in A_{01}$ , temos

$$(a_{10}, b_{01}, e) + (e, b_{01}, a_{10}) = 0,$$

$$(b_{01}, a_{10}, e) + (e, a_{10}, b_{01}) = 0.$$

Disto segue que

$$(a_{10}b_{01})e - e(b_{01}a_{10}) = a_{10}b_{01},$$

$$e(a_{10}b_{01}) - (b_{01}a_{10})e = a_{10}b_{01}.$$

E portanto temos que

$$a_{10}b_{01} \in A_{11} + A_{10} + A_{01},$$

$$b_{01}a_{10} \in A_{10} + A_{01} + A_{00},$$

ou seja,

$$A_{10}A_{01} \subseteq A_{11} + A_{10} + A_{01},$$

$$A_{01}A_{10} \subseteq A_{10} + A_{01} + A_{00}.$$

Por outro lado, para que A seja alternativo, devemos ter que

$$(e, a_{10}, b_{10}) + (a_{10}, e, b_{10}) = 0.$$

Então,

$$a_{10}b_{10} - e(a_{10}b_{10}) - a_{10}b_{10} = 0.$$

E isto implica que  $a_{10}b_{10} \in A_{01}$ . Assim, precisamos ter

$$A_{10}^2 \subseteq A_{01}$$
.

De modo semelhante,  $a_{01}b_{01} \in A_{10}$  e portanto devemos ter

$$A_{01}^2 \subseteq A_{10}$$
.

E também devemos ter

$$0 = (e, a_{10}, b_{01}) + (a_{10}, e, b_{01}) = a_{10}b_{01} - e(a_{10}b_{01}),$$

$$0 = (e, b_{01}, a_{10}) + (b_{01}, e, a_{10}) = -e(b_{01}a_{10}),$$

$$0 = (b_{01}, a_{10}, e) + (b_{01}, e, a_{10}) = (b_{01}a_{10})e,$$

$$0 = (a_{10}, b_{01}, e) + (a_{10}, e, b_{01}) = (a_{10}b_{01})e - a_{10}b_{01}.$$

Disto decorre que  $a_{10}b_{01} \in A_{11}$  e  $b_{01}a_{10} \in A_{00}$ . Assim, temos que

$$A_{10}A_{01} \subseteq A_{11}$$
 e  $A_{01}A_{10} \subseteq A_{00}$ .

Portanto,

$$A_{10}^2 \subseteq A_{01}, \quad A_{01}^2 \subseteq A_{10}, \quad A_{10}A_{01} \subseteq A_{11}, \quad A_{01}A_{10} \subseteq A_{00}.$$

são condições necessárias para que A seja alternativo. No que segue vamos assumir que os  $A_{ij}$  satisfazem estas condições e verificar se elas são suficientes para concluir que A é alternativo.

Dados a, b em A podemos escrever

$$a = a_{11} + a_{10} + a_{01} + a_{00}$$
 e  $b = b_{11} + b_{10} + b_{01} + b_{00}$ .

Devemos calcular

$$(a, a, b) = \sum (a_{ij}, a_{kl}, b_{rs}),$$
  
 $(a, b, b) = \sum (a_{ij}, b_{kl}, b_{rs}),$ 

com os índices i, j, k, l, r, s tomando os valores 0 e 1. Aqui cada somatório é constituído de 64 parcelas de associadores. Basta calcular (a, a, b) pois A é flexível. É imediato, a partir da tábua de multiplicação dos  $A_{ij}$ , que 34 destes associadores são nulos, como por exemplo,  $(a_{11}, a_{11}, b_{01}) = 0$ . Vamos, portanto, considerar aqui os outros 30 associadores.

Usando a lei flexível temos

$$(a_{11}, a_{11}, b_{10}) + (b_{10}, a_{11}, a_{11}) = 0.$$

Como já sabemos que o segundo associador é zero pela tábua, temos

$$(a_{11}, a_{11}, b_{10}) = 0.$$

De modo análogo, temos:

$$(a_{11}, a_{10}, b_{01}) = 0,$$
  $(a_{11}, a_{10}, b_{00}) = 0,$   $(a_{00}, a_{00}, b_{01}) = 0,$   $(a_{00}, a_{01}, b_{10}) = 0,$   $(a_{00}, a_{01}, b_{11}) = 0,$   $(a_{10}, a_{01}, b_{11}) = 0,$ 

$$(a_{10}, a_{00}, b_{01}) = 0,$$
  $(a_{10}, a_{10}, b_{00}) = 0,$   
 $(a_{10}, a_{00}, b_{00}) = 0,$   $(a_{01}, a_{01}, b_{11}) = 0,$   
 $(a_{01}, a_{10}, b_{00}) = 0,$   $(a_{01}, a_{11}, b_{10}) = 0,$   
 $(a_{01}, a_{11}, b_{11}) = 0.$ 

Como A é flexível e  $a_{10}^2 = 0$  temos que

$$(a_{10}, a_{10}, b_{10}) + (b_{10}, a_{10}, a_{10}) = 0.$$

E disto segue que  $a_{10}(a_{10}b_{10})=(b_{10}a_{10})a_{10}$ . Pela tábua de multiplicação dos  $A_{ij}$ , o termo da esquerda está em  $A_{11}$  e o da direita, em  $A_{00}$ . Logo ambos são nulos. Portanto

$$(a_{10}, a_{10}, b_{10}) = 0$$

De modo análogo, temos

$$(a_{01}, a_{01}, b_{01}) = 0.$$

Um anel A é chamado primo se dados I e J ideais de A tais que IJ=0, então ou I=0 ou J=0.

Afirmamos que se A é um anel primo então  $A_{11}$  e  $A_{00}$  são subanéis associativos de A. De fato, sejam

$$N_1 = \{n_{11} \in A_{11} \mid n_{11}A_{10} = 0, A_{01}n_{11} = 0\},\$$

$$N_0 = \{ n_{00} \in A_{00} \mid n_{00}A_{01} = 0, A_{10}n_{00} = 0 \}.$$

Vamos mostrar que  $N_1$  é um ideal de A. Se  $x=x_{11}+x_{10}+x_{01}+x_{00}$  então  $xn_{11}=x_{11}n_{11}$  e  $n_{11}x=n_{11}x_{11}$ . Pela flexibilidade de A temos que

$$(x_{11}, n_{11}, a_{10}) + (a_{10}, n_{11}, x_{11}) = 0,$$

$$(n_{11}, x_{11}, a_{10}) + (a_{10}, x_{11}, n_{11}) = 0.$$

Expandindo os associadores temos então que  $(x_{11}n_{11})a_{10} = 0$  e  $(n_{11}x_{11})a_{10} = 0$ . De modo análogo, obtemos  $a_{01}(x_{11}n_{11}) = 0$  e  $a_{01}(n_{11}x_{11}) = 0$ . Portanto,  $x_{11}n_{11}$ ,  $n_{11}x_{11} \in N_1$ . Assim,  $N_1$  é um ideal de A. De modo semelhante obtemos que  $N_0$  também é um ideal de A.

Seja B o ideal de A gerado pelo grupo aditivo  $A_{10} \oplus A_{01}$ . Temos que

$$B = A_{10}A_{01} + A_{10} + A_{01} + A_{01}A_{10}.$$

Suponhamos que B=0. Então  $A_{10}=0$  e  $A_{01}=0$  e logo  $A=A_{11}\oplus A_{00}$ . Neste caso,  $A_{11}$  e  $A_{00}$  são ideais de A tais que  $A_{11}A_{00}=0$ . Como  $e\in A_{11},\ A_{11}\neq 0$  e pela hipótese de A ser primo segue então que  $A_{00}=0$ . Portanto,  $A=A_{11}$  e temos que e=1, contradizendo o fato de  $e\neq 0,1$ . Assim,  $B\neq 0$ . Se  $n_{11}\in N_1$  então  $n_{11}(a_{10}b_{01}+c_{10}+d_{01}+x_{01}y_{10})=n_{11}(a_{10}b_{01})$ . Mas, como vimos acima,  $(n_{11},a_{10},b_{01})=0$ . Donde segue então que  $n_{11}(a_{10}b_{01})=0$ , ou seja,  $N_1B=0$ . Como A é primo e  $B\neq 0$  isto implica que  $N_1=0$ . De modo semelhante obtemos também que  $N_0B=0$  e portanto  $N_0=0$ .

Agora, pela identidade de Teichmüller, podemos escrever

$$(a_{11}b_{11}, c_{11}, d_{10}) - (a_{11}, b_{11}c_{11}, d_{10}) + (a_{11}, b_{11}, c_{11}d_{10}) - a_{11}(b_{11}, c_{11}, d_{10}) - (a_{11}, b_{11}, c_{11})d_{10} = 0.$$

Usando, nesta identidade, que A é flexível, podemos escrever

$$(d_{10},c_{11},a_{11}b_{11})-(d_{10},b_{11}c_{11},a_{11})+(c_{11}d_{10},b_{11},a_{11})-a_{11}(d_{10},c_{11},b_{11})=(c_{11},b_{11},a_{11})d_{10}.$$

Como o primeiro membro desta igualdade é zero, temos  $(c_{11}, b_{11}, a_{11})d_{10} = 0$ , isto é,  $(a_{11}, b_{11}, c_{11})d_{10} = 0$ .

De modo análogo temos  $d_{01}(a_{11},b_{11},c_{11})=0$ . Portanto,  $(a_{11},b_{11},c_{11})\in N_1$  e como  $N_1=0$  temos

$$(a_{11}, b_{11}, c_{11}) = 0,$$

para todo  $a_{11}, b_{11}, c_{11} \in A_{11}$ . Logo  $A_{11}$  é associativo.

De modo semelhante, podemos mostrar que

$$(a_{00}, b_{00}, c_{00}) = 0,$$

para todo  $a_{00}$ ,  $b_{00}$ ,  $c_{00} \in A_{00}$  e logo  $A_{00}$  é associativo.

Em (1), tomando  $a_{10}$ ,  $d_{10} \in A_{10}$ ,  $b_{00} \in A_{00}$  e c = e, temos, após calcular os associadores,

$$(a_{10}b_{00})d_{10} = b_{00}(a_{10}d_{10}).$$

E isto é equivalente a

$$(a_{10}, b_{00}, d_{10}) + (b_{00}, a_{10}, d_{10}) = 0,$$

que é a identidade alternativa à esquerda linearizada. Do mesmo modo, em (1), com  $a_{11} \in A_{11}, b_{10}, d_{10} \in A_{10}, c = e$ , temos

$$(a_{11}b_{10})d_{10} = b_{10}(a_{11}d_{10}),$$

ou seja,

$$(a_{11}, b_{10}, d_{10}) + (b_{10}, a_{11}, d_{10}) = 0.$$

E se, em (1),  $a_{01}, d_{01} \in A_{01}, b_{11} \in A_{11}, c = e$ , temos

$$(a_{01}b_{11})d_{01} = b_{11}(a_{01}d_{01}),$$

isto é,

$$(a_{01}, b_{11}, d_{01}) + (b_{11}, a_{01}, d_{01}) = 0.$$

De modo análogo, em (1), tomando  $a_{00} \in A_{00}, \, b_{01} \in A_{01}, \, c = e$  e  $d_{01} \in A_{01},$  temos

$$b_{01}(a_{00}d_{01}) = (a_{00}b_{01})d_{01}.$$

E isto é equivalente a

$$(a_{00}, b_{01}, d_{01}) + (b_{01}, a_{00}, d_{01}) = 0.$$

Para termos (a, a, b) = 0 e, consequentemente, (a, b, b) = 0, para todo a, b em A, falta ainda zerar a soma

$$(a_{10}, a_{01}, b_{10}) + (a_{01}, a_{10}, b_{10}) + (a_{10}, a_{01}, b_{01}) + (a_{01}, a_{10}, b_{01}).$$

E isto é possível se fizermos

$$(a_{10}, a_{01}, b_{10}) + (a_{01}, a_{10}, b_{10}) = 0,$$
  
 $(a_{10}, a_{01}, b_{01}) + (a_{01}, a_{10}, b_{01}) = 0.$ 

Assim, podemos enunciar os seguintes resultados:

**Teorema 2.2.2** Seja A um anel não comutativo de Jordan primo de característica  $\neq 2$ , com idempotente  $e \neq 0,1$  tal que

$$(A, e, e) = (e, A, e) = (e, e, A) = 0.$$

Então A é alternativo se e somente se

$$A_{10}^2 \subseteq A_{01}, \quad A_{01}^2 \subseteq A_{10}, \quad A_{10}A_{01} \subseteq A_{11}, \quad A_{01}A_{10} \subseteq A_{00},$$

$$(a_{10}, b_{01}, c_{10}) + (b_{01}, a_{10}, c_{10}) = 0,$$

$$(a_{01}, b_{10}, c_{01}) + (b_{10}, a_{01}, c_{01}) = 0,$$

para todo  $a_{10}, b_{10}, c_{10} \in A_{10}$  e  $a_{01}, b_{01}, c_{01} \in A_{01}$ .

Corolário 2.2.3 Seja A um anel quadrático simétrico generalizado simples de característica  $\neq 2$ , com idempotente principal  $e \neq 0,1$  tal que

$$(A, e, e) = (e, A, e) = (e, e, A) = 0.$$

Suponhamos que para todo a, b em A o flexitor (a, b, a) está no centro de A. Então A é alternativo se e somente se

$$A_{10}^2 \subseteq A_{01}, \quad A_{01}^2 \subseteq A_{10}, \quad A_{10}A_{01} \subseteq A_{11}, \quad A_{01}A_{10} \subseteq A_{00},$$
  
 $(a_{10}, b_{01}, c_{10}) + (b_{01}, a_{10}, c_{10}) = 0,$   
 $(a_{01}, b_{10}, c_{01}) + (b_{10}, a_{01}, c_{01}) = 0,$ 

para todo  $a_{10}, b_{10}, c_{10} \in A_{10}$  e  $a_{01}, b_{01}, c_{01} \in A_{01}$ .

Seja A um anel alternativo generalizado I de característica  $\neq 2$ , 3. Como vimos no Capítulo 1, A é um anel quadrático simétrico generalizado. Como foi mostrado por Kleinfeld [4], se A é simples então satisfaz as outras hipóteses do Corolário 2.2.3 e portanto A é alternativo.

Se no lugar de termos  $A_{10}^2 \subseteq A_{01}$  e  $A_{01}^2 \subseteq A_{10}$  exigimos que  $A_{10}^2 = 0$  e  $A_{01}^2 = 0$ , então o idempotente e satisfaz a condição

$$(e, A, A) = (A, e, A) = (A, A, e) = 0,$$

ou seja, e é um elemento que associa com todos os elementos de A. Neste caso, usando a tábua de multiplicação entre os  $A_{ij}$  e as identidades (1), (2), (3) e (4), vemos que os associadores que aparecem na soma  $(a,b,c) = \sum (a_{ij},b_{kl},c_{rs})$  são todos nulos, com exceção de  $(a_{10},b_{01},c_{10})$  e de  $(a_{01},b_{10},c_{01})$ . Assim, se juntarmos às hipóteses sobre A mais a condição abaixo

$$(a_{10}, b_{01}, c_{10}) = 0, \quad (a_{01}, b_{10}, c_{01}) = 0,$$

temos que A é um anel associativo.

# Capítulo 3

# A variedade determinada pelas álgebras quadráticas simétricas

### 3.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é estudar os "anéis quadráticos generalizados", isto é, os anéis satisfazendo algumas identidades polinomiais de grau menor ou igual a 5, identidades estas que são satisfeitas pelas álgebras quadráticas simétricas. Vamos mostrar que se A é um anel quadrático generalizado simples, então A está na variedade gerada por todas as álgebras quadráticas simétricas sobre o centro de A, o qual é um corpo. Se A é um anel quadrático generalizado primo, vamos mostrar que ou A é flexível e portanto é um anel de Jordan não comutativo, ou A está na variedade gerada por todas as álgebras quadráticas simétricas sobre o corpo de frações do centro de A. Se A é um anel quadrático generalizado flexível, vamos mostrar que A é um anel de Jordan não comutativo que satisfaz uma condição quadrática sobre o seu centro comutativo. Finalmente, vamos mostrar que se A é um anel quadrático semiprimo então A é uma soma subdireta de um anel de Jordan não-comutativo (que satisfaz uma condição quadrática sobre seu centro comutativo) e um anel não flexível (que é quadrático simétrico sobre o seu centro).

Uma álgebra A é chamada de álgebra quadrática sobre um corpo K se A é uma álgebra sobre K, A tem elemento 1 e, para todo x em A, existem elementos t(x) e n(x) em K tais

que  $x^2 - t(x)x + n(x) = 0$ . Observamos que  $t: A \to K$  é uma forma linear e  $n: A \to K$  é uma forma quadrática (ver Zhevlakov et al [15], p. 37). Dizemos que um anel A satisfaz uma condição quadrática sobre um subanel U se para cada x em A existem elementos u(x), v(x), w(x) em U tais que

$$u(x)x^{2} - v(x)x + w(x) = 0.$$

Se para todo  $x \in A$  ao menos um dentre os termos u(x), v(x), w(x) é não nulo e  $v: A \to U$  é linear, dizemos que A é um anel quadrático sobre U. Neste capítulo U será ou o centro de A definido por

$$Z(A) = \{u \in A \mid (u, A, A) = (A, u, A) = (A, A, u) = [A, u] = 0\}$$

ou U será o centro comutativo de A definido por

$$N(A) = \{u \in A \mid [A, u] = 0\}.$$

A maior parte do capítulo consiste em estabelecer condições quadráticas e então analisar o coeficiente líder u(x) para aqueles casos em que ele é um elemento não nulo de U.

A álgebra A é chamada de álgebra quadrática simétrica sobre K se A é uma álgebra quadrática sobre K e t(xy) = t(yx), isto é, t([x,y]) = 0 para todo x e y em A. Quando A é um anel quadrático sobre U e v([x,y]) = 0 para todo x e y em A, dizemos que A é um anel quadrático simétrico sobre U.

Para um corpo fixado K definimos a variedade gerada por todas as álgebras quadráticas simétricas sobre K. As identidades de grau menor ou igual a 5 desta variedade são conhecidas com exceção para corpos de característica 2 e 3 (ver Hentzel e Peresi [24]). Os coeficientes destas identidades são números inteiros e não dependem do corpo K. Todas estas identidades de grau menor ou igual a 5 são satisfeitas por todas as álgebras que satisfazem uma identidade do tipo  $x^2 - t(x)x + n(x) = 0$ , mesmo aquelas em que t(x) e n(x) estão contidos apenas no centro de A e que este centro não seja necessariamente um corpo.

#### 3.2 Anéis quadráticos generalizados

Denotamos por  $a \circ b$  o produto de Jordan ab + ba, por  $\langle a, b, c \rangle$  o associador de Jordan  $(a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c)$  e por  $R_a$  o operador linear definido por  $R_a(b) = a \circ b$ . Seja  $S_n$  o grupo simétrico das permutações de n elementos. Definimos o operador linear  $\overline{S}_3$  por

$$\overline{S}_3 = \sum (-1)^{\sigma} R_{a_{\sigma}(1)} R_{a_{\sigma}(2)} R_{a_{\sigma}(3)},$$

onde  $(-1)^{\sigma}$  é o sinal da permutação  $\sigma$ .

Hentzel e Peresi [24] (Teoremas 1, 4 e 7) provaram que toda álgebra quadrática simétrica sobre um corpo K de característia diferente de 2 e de 3 satisfaz as seguintes identidades:

$$(a, a, a) = 0, (3.2.1)$$

$$(a^2, a, b) - (a, a^2, b) = 0, (3.2.2)$$

$$(b, a, a2) - (b, a2, a) = 0, (3.2.3)$$

$$[(a,b,a),c] = 0,$$
 (3.2.4)

$$((a,b,a),c,d) = 0,$$
 (3.2.5)

$$(c, (a, b, a), d) = 0,$$
 (3.2.6)

$$(c, d, (a, b, a)) = 0,$$
 (3.2.7)

$$[[a,b] \circ [c,d], e] = 0,$$
 (3.2.8)

$$([a,b] \circ c, c, d) - ([a,b], c^2, d) = 0, \tag{3.2.9}$$

$$([a,b] \circ c, d, c) - ([a,b], d, c^2) = 0, \tag{3.2.10}$$

$$[2a(a,b,b)-2(a,b,ab)+2b(b,a,a)-2(b,a,ba)$$

$$+a \circ (b, a, b) + b \circ (a, b, a), c] = 0,$$
 (3.2.11)

$$[2a^{2} \circ b^{2} - (a \circ b)^{2} + 2a\langle a, b, b \rangle + 2b\langle b, a, a \rangle, c] = 0, \tag{3.2.12}$$

$$\overline{S}_3(a^2) - \overline{S}_3(a) \circ a = 0, \tag{3.2.13}$$

$$-(a^{2} \circ c, d, e) + (a^{2} \circ e, d, c) - (e, d, a^{2} \circ c) + (e, d, (a \circ c) \circ a)$$

$$-(c, d, (a \circ e) \circ a) + (a \circ c, d, a \circ e) - (a \circ e, d, a \circ c)$$

$$-((a \circ c) \circ e, d, a) + (c, d, a^{2} \circ e) + ((a \circ e) \circ c, d, a) = 0,$$

$$\sum_{b \in e} \{(a, \langle c, d, e \rangle, b) + (a, b, \langle c, d, e \rangle)\} = 0,$$
(3.2.14)

onde  $\sum_{b,c,e}$  denota a soma alternada nas variáveis b,c,e. Além disso, estes autores mostraram que todas as identidades polinomiais de grau menor ou igual a 5 que são satisfeitas por uma álgebra quadrática simétrica são conseqüências destas identidades acima.

Os anéis que satisfazem as identidades (3.2.1) - (3.2.12) são chamados anéis quadráticos generalizados. O termo anel quadrático generalizado está sendo usado aqui num sentido mais restrito do que aquele usado nos Capítulos 1 e 2. Observamos que todo anel quadrático generalizado flexível é um anel de Jordan não comutativo (veja a Seção 1.3). Se A é um anel quadrático generalizado, então A satisfaz as identidades (3.2.4), (3.2.5), (3.2.6) e (3.2.7) e portanto todos os flexitores (x, y, x), com  $x, y \in A$ , estão no centro Z(A) de A.

**Exemplo 3.2.1** Seja K um corpo. Consideremos a álgebra A sobre K com base  $\{1, e_1, \ldots, e_7\}$  e com a seguinte tábua de multiplicação:

	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
1	1	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$e_1$	$e_1$	$e_3$	$e_4$		$e_6$			
$e_2$	$e_2$	$e_5$		$-e_6$				
$e_3$	$e_3$		$e_6$					
$e_4$	$e_4$			$-e_7$				
$e_5$	$e_5$	$-e_6$		$e_7$				
$e_6$	$e_6$	$-e_7$						
$e_7$	$e_7$							

Um cálculo direto mostra que A satisfaz as identidades (3.2.1) - (3.2.4) e como todos os produtos com cinco elementos são zero, A também satisfaz as identidades (3.2.5) - (3.2.12). Assim, A é um anel quadrático generalizado. Mas A não é uma álgebra quadrática sobre K, pois  $1, e_1, e_1^2$  são linearmente independentes sobre K. E A não é uma álgebra flexível (assim ela não é Jordan não comutativa), pois  $(e_1, e_4, e_1) = -e_7 \neq 0$ . O centro de A é  $Z(A) = \{\alpha 1 + \beta e_7 \mid \alpha, \beta \in K\}$ . A álgebra A é um anel quadrático sobre Z(A), pois se  $x = \alpha 1 + \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_7 e_7$  e  $c(x) = \alpha$ ,

$$e_7x^2 - e_7c(x)x = 0$$
, para todo  $x \in A$ .

A identidade seguinte serve como uma chave, a qual mostra que as identidades que definem os anéis quadráticos generalizados introduzem uma dependência quadrática sobre o centro de um anel não flexível.

Teorema 3.2.2 Se A é um anel quadrático generalizado de característica diferente de 2, então A satisfaz a seguinte condição quadrática sobre o centro de A:

$$(x,y,x)a^{2} - \{(a,x^{2},y) + (y,x^{2},a) - (a \circ x,x,y) - (y,x,a \circ x)\}a$$

$$- (a,(x,x,a),y) - (y,(x,x,a),a) + ((a,a,x),x,y) + (y,x,(a,a,x))$$

$$+ (a,x(ax),y) + (y,x(ax),a) - (a(xa),x,y) - (y,x,a(xa)) + (xy,x,a^{2})$$

$$+ (a^{2},x,xy) - (xy,a \circ x,a) - (a,a \circ x,xy) - (a,x^{2}y,a) = 0.$$
 (3.2.16)

**Prova.** Os coeficientes da identidade (3.2.16) são somas de flexitores e portanto estão no centro de A.

Agora, vamos provar (3.2.16). Seja p(x, y, z) = 0 a linearização de (3.2.1) e sejam

$$p_1 = \frac{1}{2}p(x, x, a) = 0,$$
  $p_2 = \frac{1}{2}p(a, a, x) = 0,$   $p_3 = \frac{1}{2}p(x, x, y) = 0.$ 

Então as identidades que seguem são conseqüência de (3.2.1):

$$8y(ap_1) + 6a(yp_1) + 2a(p_1y) - 4(p_1y)a + 4(p_1a)y = 0,$$

$$4(yx)p_{2} + 4(xp_{2})y + 4y(p_{2}x) + 4p_{2}(xy) = 0,$$

$$2(ap_{3})a + 4a(p_{3}a) - 2(p_{3}a)a = 0,$$

$$4[a, p(a, x, y)x] + 4[p(xa, x, y), a] - 2p((y, x, x), a, a)$$

$$+2[p(x^{2}, a, y), a] = 0,$$

$$6[p(ax, x, y), a] + 2[p(yx, a, x), a] - 4yp(ax, a, x) - 2p(x^{2}y, a, a) = 0,$$

$$4p(xy, x, a^{2}) - 4p(a^{2}, xy, x) - 4p(xa, a, x)y = 0.$$

As identidades que seguem são consequência de (3.2.2):

$$4[(a \circ x, y, x) - (y, a \circ x, x) + (a \circ y, x, x) - (x, a \circ y, x) + (x \circ y, a, x) - (a, x \circ y, x), a] = 0,$$

$$4y\{-(a^2, x, x) + (x, a^2, x) - (a \circ x, a, x) + (a, a \circ x, x)\} = 0,$$

$$4\{-(a \circ x, x, a) + (x, a \circ x, a) - (x^2, a, a) + (a, x^2, a)\}y = 0.$$

Como consequência de (3.2.3) seguem as identidades:

$$4y\{(a, a \circ x, x) - (a, x, a \circ x) + (a, x^2, a) - (a, a, x^2)\} = 0,$$
  
$$4\{(x, a^2, x) - (x, x, a^2) + (x, a \circ x, a) - (x, a, a \circ x)\}y = 0.$$

Usando (3.2.4) obtemos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} &[-4\{(a\circ x,y,x)+(x,y,a\circ x)\}-2\{(a,x\circ y,x)+(x,x\circ y,a)\}\\ &-6\{(x,a\circ x,y)+(y,a\circ x,x)\},a]=0,\\ &4a[(a,x,x)+(x,x,a),y]+2[(a,x,x)+(x,x,a),y]a\\ &+4y[(a,x,x)+(x,x,a),a]=0,\\ &-2a[\{(x,x,y)+(y,x,x)\},a]+[4\{(yx,x,a)+(a,x,yx)\}\\ &-8\{(a,x^2,y)+(y,x^2,a)\},a]=0,\\ &-4[[(a,x,a),x],y]+4[(x,a,x),a]y-6a[(x,y,x),a]=0,\\ &6[(x,a,x),y]a+8[(x,y,x),a]a=0. \end{aligned}$$

As identidades que seguem são consequências de (3.2.5) e (3.2.7):

$$4\{((a, a, x) + (x, a, a), x, y\} + 4\{((x, x, y) + (y, x, x), a, a)\}$$

$$+4((a, x, a), x, y) - 8((x, y, x), a, a) = 0,$$

$$4(a, a, (x, x, y)) + (y, x, x)) = 0.$$

Usando (3.2.8), (3.2.9) e (3.2.10), obtemos:

$$\begin{split} &3[[a,x]\circ[x,y],a]=0,\\ &4\{([x,y]\circ a,x,a)+([x,y]\circ x,a,a)-([x,y],a\circ x,a)\}=0,\\ &-4\{([x,y]\circ a,x,a)-([x,y],x,a^2)\}=0. \end{split}$$

Uma linearização de (3.2.11) é:

$$-2[2a(y,x,x) + 2y(a,x,x) - 2(a,x,yx) - 2(y,x,ax) + 2x(x,a,y) + 2x(x,y,a)$$
$$-2(x,a,xy) - 2(x,y,xa) + a \circ (x,y,x) + y \circ (x,a,x) + x \circ (a,x,y)$$
$$+x \circ (y,x,a), a] = 0.$$

E uma linearização de (3.2.12) é:

$$-[(a \circ x) \circ (x \circ y) - 2(a \circ y) \circ x^{2}$$

$$+2a\langle x, x, y \rangle + 2a\langle x, y, x \rangle + 2x\langle a, x, y \rangle + 2x\langle a, y, x \rangle + 2x\langle y, a, x \rangle$$

$$+2y\langle x, a, x \rangle + 2x\langle y, x, a \rangle + 2y\langle x, x, a \rangle, a] = 0.$$

Agora, somamos todas as identidades que são consequências de (3.2.1)-(3.2.12) e foram destacadas acima. Todos os termos são cancelados com exceção dos termos que compõem a identidade (3.2.16), multiplicados por quatro. E assim o teorema vale se a característica do anel A é diferente de 2.

Vamos provar que o coeficiente de a na identidade (3.2.16) satisfaz uma condição simétrica, isto é, que este coeficiente é zero quando substituímos a por [a, b].

Lema 3.2.3 Se A é um anel quadrático generalizado, então A satisfaz a seguinte identidade:

$$([a,b], x^2, y) + (y, x^2, [a,b]) - ([a,b] \circ x, x, y) - (y, x, [a,b] \circ x) = 0.$$
(3.2.17)

Prova. Temos as seguintes identidades:

$$-(ba) \circ q(y, x, x) + 2q(y, x, x)(ab) = 0,$$

$$p([a, b], x, y) \circ x - p(x[a, b], x, y) - p([a, b], xy, x) + q(ab, x, x) \circ y - 2q(ba, x, x)y = 0,$$
onde  $q(y, x, x) = (y, x, x) + (x, y, x) + (x, x, y)$ , por (3.2.1);
$$-([a, b] \circ x, x, y) - (x^2, [a, b], y) + (x, [a, b] \circ x, y) + ([a, b], x^2, y] = 0,$$

$$-(x^2, y, [a, b]) - (x \circ y, x, [a, b]) + (y, x^2, [a, b]) + (x, x \circ y, [a, b]) = 0,$$

por (3.2.2);

$$\begin{split} (y,[a,b]\circ x,x) + (y,x^2,[a,b]) - (y,x,[a,b]\circ x) - (y,[a,b],x^2) &= 0,\\ (x,[a,b]\circ x,y) + (x,[a,b]\circ y,x) + (x,x\circ y,[a,b]) - (x,y,[a,b]\circ x)\\ - (x,x,[a,b]\circ y) - (x,[a,b],x\circ y) &= 0, \end{split}$$

por (3.2.3);

$$-[([a,b],x,y) + (y,x,[a,b]),x] + [(ba,x,x) + (x,x,ba),y] = 0,$$
$$[(x,ab,x),y] - [(x,y,x),ba] - [(x,x,y) + (y,x,x),ab] = 0,$$

por (3.2.4);

$$-([a,b] \circ x, x, y) + ([a,b], x^2, y) = 0,$$
  
$$-([a,b] \circ x, y, x) - ([a,b] \circ y, x, x) + ([a,b], x \circ y, x) = 0,$$

por (3.2.9);

$$([a,b] \circ x, y, x) - ([a,b], y, x^2) = 0,$$

por (3.2.10). Agora somamos todas estas identidades para obter (3.2.17).

Vamos provar agora uma identidade que mostra que as identidades que definem os anéis quadráticos generalizados flexíveis introduzem uma dependência quadrática sobre o centro comutativo em um anel não comutativo.

Teorema 3.2.4 Se A é um anel quadrático generalizado flexível, então A satisfaz a seguinte condição quadrática sobre seu centro comutativo:

$$-6 ( [a,b] \circ [a,b] ) c^{2}$$

$$+6 ( -[a \circ b,b] \circ [a,c] + [a \circ c,b] \circ [a,b] + 2 [ba,c] \circ [a,b] ) c$$

$$+ [ab,b] \circ [4ac + 2ca,c] + 3 [ab,c] \circ [ab,c] + 9 [ba,c] \circ [ba,c]$$

$$+6 [ac,c] \circ [ba,b] - 6 [[a,b],c] \circ [ca,b] - 12 [ab,c] \circ [ba,c]$$

$$+4 [[a,b],bc] \circ [a,c] + [[a,c],bc - 3cb] \circ [a,b] + 12 [ba,c^{2}] \circ [a,b]$$

$$-4 [c[a,b],b] \circ [a,c] + [-4c.ac + 6c^{2}a - 8c.ca,b] \circ [a,b]$$

$$+[-18ba.c - 8ca.b - 6c.ab - 4ac.b,c] \circ [a,b] = 0.$$
(3.2.18)

**Prova.** A forma linearizada da lei flexível é f(x, y, z) = (x, y, z) + (z, y, x) = 0. Listamos as seguintes consequências da lei flexível:

$$-2 [f(ac, b, [a, b]), c] = 0, 2 [f([a, b], b, ca), c] = 0,$$

$$8 f([a, b], cb, [a, c]) = 0, 4 f([[a, b], c], b, ca) = 0,$$

$$f(2c.ca - 8ca.c + 2ac.c + 4c.ac, b, [a, b]) = 0,$$

$$f(-6c.ba + 6ca.b - 2b.ca + 24ba.c - 4b.ac - 18ab.c, c, [a, b]) = 0,$$

$$f(4b.ba - 6ba.b + 6b.ab - 4ab.b, c, [a, c]) = 0,$$

$$-6f(c^{2}, a, b) \circ [a, b] = 0, 6\{bf(a, c, c)\} \circ [a, b] = 0,$$

$$12 \{-f(b, a, c) \circ [a, b] + ([a, b], c, [a, b])\} c = 0,$$

$$-4 f([[a,b],c],b,ac) = 0, \qquad 6 \{f(b,a,c)c\} \circ [a,b] = 0,$$

$$6 [a,b]\{f(b,a,c) \circ c\} = 0, \qquad 4 [a,c]f(b,[a,b],c) = 0,$$

$$-6 (c,a,c)\{[ba,b] + ab.b\} = 0, \qquad 6 (c,a,c) \circ (b.ba) = 0,$$

$$12 \{(b,a,b)[a,c]\} \circ c = 0, \qquad 12 (b,a,b)\{c.ca - ac.c\} = 0,$$

$$f(-2ab.b + 2b.ba,[a,c],c) = 0, \qquad -2 f(b[a,c],[a,b],c) = 0,$$

$$-2 [a,b]f([a,c],b,c) = 0, \qquad 18 \{[a,b](c,ab,c) + (c,ba,c)[a,b]\} = 0,$$

$$6 f(b,a \circ c,c)[a,b] = 0, \qquad 10 f([a,c],(b,a,b),c) = 0,$$

$$-2 f([a,c],c,b)[a,b] = 0, \qquad 4 f([a,b],c,b)[a,c] = 0,$$

$$4 [a,c]f([a,b],b,c) = 0, \qquad 2 f([a,b],[a,c]b,c) = 0,$$

$$8 [a,b]f(b,ca,c) = 0, \qquad -6 (c[a,b])f(b,a,c) = 0,$$

$$6 f(ab,c,c)[a,b] = 0, \qquad 6 [a,b]f(ba,c,c) = 0,$$

$$4 [a,b]f(b,ac,c) = 0, \qquad 6 f(b,a,c)([a,b]c) = 0,$$

$$-6 (b(ab)) (c,a,c) = 0, \qquad 6 f(b,a,c)([a,b]c) = 0,$$

$$10 [(b,a,b),c] \circ [a,c] = 0, \qquad 6 \{(c,a,c) \circ b\}[a,b] = 0.$$

Listamos agora as seguintes consequências da lei de Jordan  $(x^2, y, x) = 0$ :

$$-12 \{([a,b] \circ c, [a,b], c) + (c^2, [a,b], [a,b])\} = 0,$$

$$-4 \{([a,b] \circ [a,c], b, c) + ([a,b] \circ c, b, [a,c]) + ([a,c] \circ c, b, [a,b])\} = 0.$$

Em seguida, listamos as seguintes consequências da identidade (3.2.8):

$$6\ [[a,b]\circ [a,b],c^2]=0,\quad 2\ [[ab,b]\circ [a,c],c]=0,\quad 3\ [[a,c]\circ [b,c],[a,b]]=0.$$

Finalmente, listamos as seguintes consequencias da identidade (3.2.9):

$$4 \left\{ ([a,b] \circ b, c, [a,c]) + ([a,b] \circ c, b, [a,c]) - ([a,b], b \circ c, [a,c]) \right\} = 0,$$

$$12 \{([a,b] \circ c, c, [a,b]) - ([a,b], c^2, [a,b])\} = 0,$$

$$8 \{([a,b] \circ [a,c], b, c) + ([a,b] \circ b, [a,c], c) - ([a,b], [a,c] \circ b, c)\} = 0,$$

$$4 \{([a,c] \circ b, c, [a,b]) + ([a,c] \circ c, b, [a,b]) - ([a,c], b \circ c, [a,b])\} = 0,$$

$$-4 \{([a,c] \circ [a,b], b, c) + ([a,c] \circ b, [a,b], c) - ([a,c], [a,b] \circ b, c)\} = 0.$$

Somando todas estas identidades listadas acima e simplificando, obtemos -1 vezes (3.2.18). De (3.2.8) temos que  $[a,b] \circ [c,d]$  está no centro comutativo para todo  $a,b,c,d \in A$ . Portanto todos os coeficientes de (3.2.18) estão no centro comutativo e o teorema está provado.

Observação. Usando o método descrito por Hentzel e Jacobs [18] e sua implementação, o programa Albert (veja Jacobs et al [19, 20]), verificamos que todo anel generalizado satisfaz a condição quadrática mais curta

$$(x,y,x) a^{2} - \{(a,x^{2},y) + (y,x^{2},a) - (a \circ x,x,y) - (y,x,a \circ x)\} a$$
$$-(x,a^{2}y,x) + (ay,a,x^{2}) + (x^{2},a,ay) - (ay,a \circ x,x) - (x,a \circ x,ay) = 0$$

sobre o seu centro. Também verificamos que se o anel quadrático generalizado flexível satisfaz as identidades (3.2.13) e (3.2.15) então ele satisfaz a condição quadrática mais curta

$$([a,b] \circ [a,b]) c^2 - 2 ( -[ab,a] \circ [b,c] - [bc,a] \circ [a,b] + [ba,c] \circ [b,a] ) c$$

$$+ [a^2,bc] \circ [b,c] + [bc^2,a] \circ [a,b] - [ac,b] \circ [bc,a] - [ca,b] \circ [bc,a] = 0,$$

sobre o seu centro comutativo. Entretando, não daremos as provas destas condições aqui pois estas provas são ainda mais longas do que aquelas apresentadas nos Teoremas 3.2.2 e 3.2.4.

#### 3.3 Anéis primos

O centro Z(A) de um anel primo A com 1 não tem divisores de zero. Se Z(A) não é zero, seja  $\tilde{Z}(A)$  o corpo de frações de Z(A). Consideremos  $A^* = \tilde{Z}(A) \otimes_{Z(A)} A$ . Temos que  $A^*$  é uma álgebra sobre  $\tilde{Z}(A)$  e ela contém uma cópia isomorfa de A. Como as identidades que definem um anel quadrático generalizado são homogêneas,  $A^*$  é também um anel quadrático generalizado, quando A é um anel quadrático generalizado.

Teorema 3.3.1 Se A é um anel quadrático generalizado primo com 1, de característica diferente de 2 e não flexível, então  $A^*$  é uma álgebra quadrática simétrica. Portanto, A está na variedade determinada por todas as álgebras quadráticas simétricas sobre  $\tilde{Z}(A)$ .

**Prova.** Como A não é flexível, então existem x e y em A tais que  $(x,y,x) \neq 0$ . E (x,y,x) está em Z(A). Como  $(x,y,x) \neq 0$ , ele é invertível em  $\tilde{Z}(A)$  e segue do Teorema 3.2.2 que A satisfaz uma identidade quadrática sobre o corpo  $\tilde{Z}(A)$  com coeficiente (x,y,x). Assim,  $A^*$  é uma álgebra quadrática sobre  $\tilde{Z}(A)$ . Pelo Lema 3.2.3,  $A^*$  é uma álgebra quadrática simétrica.

Como A é uma subálgebra de uma álgebra quadrática simétrica sobre  $\tilde{Z}(A)$ , ela satisfaz todas as identidades que valem para todas as álgebras simétricas sobre  $\tilde{Z}(A)$ , e assim A está na variedade determinada por todas as álgebras quadráticas simétricas sobre  $\tilde{Z}(A)$ .

Se o centro de uma álgebra simples não é zero, então ele é um corpo (ver Zhevlakov et al [15], p. 137). Assim temos:

Corolário 3.3.2 Se A é um anel quadrático generalizado simples de característica diferente de 2 e não flexível, então A está na variedade determinada por todas as álgebras quadráticas simétricas sobre o centro de A.

#### 3.4 Anéis semiprimos

Nesta seção abordamos o caso em que o anel A é um anel quadrático generalizado semiprimo de característica diferente de 2. Seja F o grupo aditivo gerado por todos os flexitores (x,y,x), x e y em A, e seja  $I=\{a\in A\mid Fa=0\}$ . Como  $F\subset Z(A)$ , temos que F+FA e I são ideais de A. Assim,  $I\cap (F+FA)$  também é um ideal de A e seu quadrado é zero. Portanto, concluímos que  $I\cap (F+FA)=0$ , pois A é anel semiprimo. Segue então que A é soma subdireta de A/I e A/(F+FA). O anel quociente A/(F+FA) é flexível e portanto é anel de Jordan não comutativo. E ele satisfaz a condição quadrática sobre o seu centro comutativo mencionado no Teorema 3.2.4. E segue do Teorema 3.2.2 e Lema 3.2.3 que o anel quociente A/I é um anel quadrático simétrico sobre Z(A/I).

Provamos assim o teorema:

Teorema 3.4.1 Um anel quadrático generalizado semiprimo A, de característica diferente de 2, é uma soma subdireta de um anel de Jordan não comutativo que satisfaz uma condição quadrática sobre o seu centro comutativo e de um anel quadrático simétrico sobre o seu centro.

Os resultados deste capítulo foram obtidos em conjunto com os professores L. A. Peresi e I. R. Hentzel.

## Capítulo 4

# Álgebras de posto 3

#### 4.1 Introdução

Uma álgebra comutativa A sobre um corpo K é denominada álgebra de posto 3 se

$$x^{3} - t(x)x^{2} + n(x)x = 0, (4.1.1)$$

para todo  $x \in A$ , onde  $t: A \to K$  é uma forma linear e  $n: A \to K$  é uma forma quadrática. Quando t(x) = 0 para todo  $x \in A$ , dizemos que A é uma álgebra com pseudo-composição. Estas álgebras foram estudadas por Walcher [22], Meyberg e Osborn [21].

O objetivo deste capítulo é determinar as identidades polinomiais minimais (isto é, de menor grau), que não são consequências da comutatividade, para as álgebras de posto 3. O processo para obter estas identidades é computacional e usa a "representação" natural do grupo simétrico  $S_n$  das permutações de n elementos. Este método foi concebido por Hentzel [11, 12] e levemente modificado por Correa, Hentzel e Peresi [23]. Na seção que segue vamos descrever este método de forma resumida.

## 4.2 Representação de equações por matrizes

A álgebra de grupo  $KS_n$  é isomorfa a uma soma de álgebras de matrizes quando car(K) = 0 ou car(K) = p > n. Uma função bijetora que leva  $KS_n$  num destes somandos é uma representação irredutível de  $KS_n$ , a qual pode ser obtida através de um processo

dado por Clifton [14]. O processo associa cada  $\pi \in S_n$  a uma matriz  $A_{\pi}$  e a representação irredutível é dada por  $\pi \mapsto A_I^{-1}A_{\pi}$ , onde I denota a permutação identidade. No que segue usamos os isomorfismos de módulo  $KS_n \to K_t$  dados por  $\pi \to A_{\pi}$  e chamamos isto de uma representação de  $KS_n$ , embora estes isomorfismos não sejam representações no sentido usual.

Seja  $f = f(x_1, ..., x_n) = 0$  uma equação onde cada variável aparece uma vez em cada termo. Suponhamos que os termos nesta equação possam ser classificados em k tipos denotados por  $T_1, ..., T_k$ . Assim,  $f = f_1 \oplus \cdots \oplus f_k$ , onde na expressão  $f_i$  aparecem somente os termos do tipo  $T_i$ . Considerando como as posições das variáveis  $x_1, ..., x_n$  são mudadas, identificamos  $f_i$  com um elemento de  $KS_n$ . Usando esta identificação, consideramos f = 0 como um elemento de  $KS_n \oplus \cdots \oplus KS_n$  (aqui temos k somandos correspondentes aos k tipos). Cada representação induz uma nova representação

$$P: KS_n \oplus \cdots \oplus KS_n \to K_t \oplus \cdots \oplus K_t$$
.

Usando esta representação P, identificamos a equação f=0 com uma soma direta de k matrizes em  $K_t$ . Chamamos esta soma direta de matrizes uma representação matricial da equação f=0. O espaço linha de f=0 é o espaço linha determinado pela sua representação matricial. Agora, seja

$$f^{(i)} = f^{(i)}(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, s,$$

um conjunto de tais equações. Considerando todas as representações matriciais de  $f^{(1)} = 0$ , ...,  $f^{(s)} = 0$ , dadas pela representação P, obtemos uma matriz de blocos. A equação f = 0 é uma consequência destas equações se e só se o espaço linha de f = 0 está contido no espaço linha desta matriz de blocos, e isto ocorre para todas as representações P.

## 4.3 Álgebras com pseudo-composição

Nesta seção vamos procurar identidades polinomiais minimais para as álgebras com pseudo-composição, ou seja, as álgebras que satisfazem a equação

$$x^3 - q(x, x)x = 0, (4.3.1)$$

para todo x e onde q(x,y) é uma forma bilinear. Observamos que toda álgebra com pseudo-composição satisfaz a identidade de grau 5

$$(x^3, y, x) = 0. (4.3.2)$$

De fato, usando (4.3.1) e a comutatividade, temos

$$(x^3, y, x) = q(x, x)(x, y, x) = 0.$$

**Teorema 4.3.1** Seja A uma álgebra com pseudo-composição sobre um corpo K de característica  $\neq 2,3$ . Então temos

- (i) as identidades de graus  $\leq$  4 são consequências de xy=yx;
- (ii) as identidades de grau 5 são consequências de xy = yx e  $(x^3, y, x) = 0$ .

**Prova.** Vamos provar que não existem identidades polinomiais de grau 4 e portanto também que não existem aquelas de grau < 4, a não ser as decorrentes da comutatividade. De fato, se existisse uma identidade de grau 3, por exemplo, f(x, y, z) = 0, teríamos que f(x, y, z)w = 0. Esta seria uma identidade de grau 4.

Identidades de grau 4. Dados a, b, c, d em A, temos as seguintes equações que provêm da comutatividade:

- (1) q(a,b)cd q(b,a)cd = 0;
- (2) q(a,b)cd q(a,b)dc = 0;

(3) 
$$q(a,bc)d - q(a,cb)d = 0;$$

(4) 
$$q(ab.c, d) - q(ba.c, d) = 0;$$

(5) 
$$q(a,b)q(c,d) - q(b,a)q(c,d) = 0$$
;

(6) 
$$q(a,b)q(c,d) - q(c,d)q(a,b) = 0;$$

(7) 
$$(ab.c)d - (ba.c)d = 0$$
;

(8) 
$$(ab)(cd) - (ba)(cd) = 0;$$

(9) 
$$(ab)(cd) - (cd)(ab) = 0.$$

A equação (4.3.1) linearizada é

$$p(x, y, z) = xy.z + xz.y + yz.x - q(x, y)z - q(x, z)y - q(y, z)x = 0$$

e dela obtemos as seguintes equações:

(10) 
$$p(a,b,c)d = 0;$$

(11) 
$$p(ab, c, d) = 0;$$

(12) 
$$q(p(a,b,c),d) = 0.$$

Destas equações temos os seguintes tipos de associação envolvendo quatro elementos arbitrários da álgebra A:

$$T_1. q(R,R)RR,$$

$$T_2$$
.  $q(R,RR)R$ ,

$$T_3. q(RR.R, R),$$

$$T_4$$
.  $q(R,R)q(R,R)$ ,

$$T_5$$
.  $(RR.R)R$ ,

$$T_6$$
.  $RR.RR$ 

Dentre estes,  $T_5$  e  $T_6$  são tipos polinomiais, isto é, não envolvem a forma bilinear q(x, y) de (4.3.1).

Para cada representação P de  $S_4$ , obtemos as formas escalonadas das matrizes de blocos. Fazemos isto primeiro para as identidades (1) – (9), que provêm da cumutatividade. Depois para as identidades (1) – (12).

Para as identidades (1) – (9) temos que a matriz escalonada relativa à primeira representação é a matriz nula; a matriz escalonada relativa à segunda representação de  $S_4$  é

		$T_1$				$T_2$	2			$T_3$				$T_4$				$T_5$				$T_6$	
ì	1	0	1	1	0	0	0	ŀ	0	0	0	1				1	0	0	0	į.	0	0	0
i	0	1	1	1	0	0	0	ŀ	0	0	0	1	0	0	0	ł	0	0	0	ł	0	0	0
1	0	0	0	1	0	1	-1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0		0	ł	0	0	0
1	0	0	0	l l	0	0	0	1	1	1	$^{2}$	ŀ	0	0	0	1					0	0	0
1	0	0	0	I	0	0	0	1	0	0	0	ł	1	0	0	1	0		0		0	0	0
I	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	ł	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	ļ	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	l I	0	0	0	I I	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	ì	0	0	0	1	1	0	0		1	1	2	1	0	0	0
ļ	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0
I.	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0		0		0	0	0	1	0	1	0
ł	0	0	0	1	0	0	0	l	0	0	0	l	0	0	0				0		0	0	1

A matriz escalonada relativa à terceira representação de  $S_4$  é

A matriz escalonada relativa à quarta representação de  $S_4$  é

E a matriz escalonada relativa à quinta representação de  $S_4$  é

Abaixo apresentamos as matrizes escalonadas para as identidades (1) – (12), relativas às representações 1 a 5 do  $S_4$ .

#### Representação 1

## Representação 2

		$T_1$ $T_2$								$T_3$				$T_4$				$T_5$				$T_6$	
ļ	1	0	0	ľ	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	2	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	I.	0	1	2	1	0	0	0
ł	0	0	1	ľ	0	0	0	ŀ	0	0	0	l	0	0	0	ļ	0	-1	-2	1	0	0	0
1	0	0	0	ŀ	0	2	0	I	0	0	0	l	0	0	0	ŀ	0	-1	-4	1	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	2	ŀ	0	0	0	ļ	0	0	0	ł	0	-1	-4	ŀ	0	0	0
1	0	0	0	ł	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	!	0	0	0	ł	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	ŀ	0	1	2	1	0	0	0	ł	0	0	0	ŀ	0	0	0
l	0	0	0	ł	0	0	0	1	0	0	0	ï	1	0	0	ł	0	0	0	I.	0	0	0
ļ	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	i	0	1	0	ł	0	0	0	}	0	0	0
ì	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	Ì	0	0	0
Ē	0	0	0	Ĭ	0	0	0	ļ	0	0	0	I I	0	0	0		1	1	2	ì	0	0	0
l	0	0	0	ŀ	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0		0	0	0	I	1	0	0
ľ	0	0	0	Ĭ	0	0	0	ŀ	0	0	0	1	0	0	0		0	0	0	1	0	1	0
4	0	0	0	ľ	0	0	0	ļ	0	0	0	1	0	0	0		0	0	0	ł	0	0	1

## Representação 3

	T	1	$ \begin{array}{cccc}  & T_2 \\ 0 & 0 & -4 \end{array} $				I	3		I	4			$T_5$			$T_6$
ľ	1	0	1	0	-4	1	0	0	1	0	0	ŀ	0	4	1	0	2
I	0	1	ì	0	2	1	0	0	1	0	0	ł	0	-2	I	0	-1
1	0	0	1	1	-1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0
I	0	0	I	0	0	ľ	1	2	1	0	0	1	0	0	ŀ	0	0
ı	0	0	1	0	0	ľ	0	0	ŀ	1	2	ì	0	0	ł	0	0
1	0	0	1	0	0	ì	0	0	1	0	0	Γ	1	2	ŀ	0	0
1	0	0	1	0	0	į	0	0	1	0	0		0	0	1	1	2
												-					

#### Representação 4

		$T_1$				$T_2$				$T_3$	3			$T_4$				$T_5$	;			$T_6$	
1	1	0	0	ł	0	0	0	l	0	0	0	1	0	0	0	ŀ	0	0	0	ł	0	0	0
İ	0	1	0	Ī	0	0	0	ł	0	0	0	I	0	0	0	ŀ	0	0	0	Ĭ.	0	0	0
Ī	0	0	1	ŧ	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
Î.	0	0	0	Ĺ	1	-1	0	ŀ	0	0	0	1	0	0	0	i	0	0	0	1	0	0	0
Ĭ	0	0	0	ŧ	0	0	1	ŀ	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
l	0	0	0	ľ	0	0	0	}	1	0	-2	I	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
ŀ	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	Ī	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	ĺ	0	0	0	}	0	0	0	ŀ	1	0	0	ł	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	ŀ	0	0	0	1	0	0	0	ŀ	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
ĺ	0	0	0	1	0	0	0	ł	0	0	0	ŀ	0	0	1	ł	0	0	0	1	0	0	0
1	0	0	0	Ţ	0	0	0	1	0	0	0	ľ	0	0	0	Γ	1	0	-2	1	0	0	0
l l	0	0	0	i.	0 _	0	0	Ì	0	0	0	ŀ	0	0	0		0	1	1	1	0	0	0
i	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	ł	0	0	0		0	0	0	Ì	1	0	0
ŀ	0	0	0	ł	0	0	0	ł	0	0	0	ŧ	0	0	0		0	0	0	1	0	1	0
ŀ	0	0	0	1	0	0	0	ł	0	0	0	i	0	0	0		0	0	0	į	0	0	1

#### Representação 5

Comparando as duas sequências de matrizes, observamos que as colunas que envolvem os tipos polinomiais  $T_5$  e  $T_6$  são iguais para cada representação. Isto significa que qualquer identidade polinomial de grau 4 é consequência das identidades (1) – (9) (vindas da comutatividade). Assim, provamos o item (i) do Teorema 4.3.1.

Identidades de grau 5. Para provar o item (ii) do Teorema 4.3.1, vamos listar as identidades de grau 5 que provêm da comutatividade e logo em seguida as identidades (de

grau 5) que provêm de (4.3.2). Depois disto, de modo semelhante ao que foi feito no item

(i), vamos listar as matrizes escalonadas e comparar as mesmas para cada representação.

Dados a, b, c, d, e elementos arbitrários em A, as equações (1) – (21) abaixo decorrem da comutatividade de A.

(1) 
$$q(a,b)cd.e - q(b,a)cd.e = 0;$$

(3) 
$$q(a,bc)de - q(a,cb)de = 0;$$

(5) 
$$q(a,bc.d)e - q(a,cb.d)e = 0;$$

(7) 
$$q(ab, cd)e - q(cd, ab)e = 0;$$

(9) 
$$q(a,b)q(c,d)e - q(c,d)q(a,b)e = 0;$$

(11) 
$$q(ab.cd, e) - q(ba.cd, e) = 0;$$

(13) 
$$q(a,b)q(c,de) - q(b,a)q(c,de) = 0;$$
 (14)  $q(a,b)q(c,de) - q(a,b)q(c,ed) = 0;$ 

(15) 
$$q(ab.c, de) - q(ba.c, de) = 0;$$

(17) 
$$((ab.c)d)e - ((ba.c)d)e = 0;$$

(19) 
$$(ab.cd)e - (cd.ab)e = 0;$$

(21) 
$$(ab.c).de - (ab.c).ed = 0.$$

$$(2) \quad q(a,b)cd.e - q(a,b)dc.e = 0;$$

(4) 
$$q(a,bc)de - q(a,bc)ed = 0$$
;

(6) 
$$q(ab, cd)e - q(ba, cd)e = 0$$
;

(8) 
$$q(a,b)q(c,d)e - q(b,a)q(c,d)e = 0;$$

(10) 
$$q((ab.c)d, e) - q((ba.c)d, e) = 0;$$

(12) 
$$q(ab.cd, e) - q(cd.ab, e) = 0;$$

(14) 
$$q(a,b)q(c,de) - q(a,b)q(c,ed) = 0;$$

(16) 
$$q(ab.c, de) - q(ab.c, ed) = 0;$$

(18) 
$$(ab.cd)e - (ba.cd)e = 0;$$

(20) 
$$(ab.c).de - (ba.c).de = 0;$$

As equações (22) - (30) provêm de (4.3.1).

(22) 
$$p(a, b, c)d.e = 0;$$

(24) 
$$p(a,b,c)q(d,e) = 0;$$

(26) 
$$p(ab.c, d, e) = 0;$$

(28) 
$$q(p(ab, c, d), e) = 0;$$

(30) 
$$q(p(a,b,c),de) = 0;$$

(23) 
$$p(a,b,c).de = 0;$$

(25) 
$$p(ab, c, d)e = 0;$$

(27) 
$$p(ab, cd, e) = 0;$$

(29) 
$$q(p(a,b,c)d,e) = 0;$$

Os termos que aparecem nestas equações podem ser classificados quanto à forma de associação, em doze tipos:

$$T_1. \ q(R,R)RR.R$$
  $T_2. \ q(R,RR)RR$   $T_3. \ q(R,RR.R)R$   $T_4. \ q(RR,RR)R$   $T_5. \ q(R,R)q(R,R)R$   $T_6. \ q((RR.R)R,R)$   $T_7. \ q(RR.RR,R)$   $T_8. \ q(R,R)q(R,RR)$   $T_9. \ q(RR.R,RR)$   $T_{10}. \ ((RR.R)R)R$   $T_{11}. \ (RR.RR)R$   $T_{12}. \ (RR.R)(RR)$ 

Dentre estes, os tipos polinomiais são  $T_{10}$ ,  $T_{11}$  e  $T_{12}$ . Os demais tipos envolvem a forma bilinear q(x,y) de (4.3.1). De modo análogo ao que foi feito no item (i), obtivemos primeiro as matrizes escalonadas de cada representação do  $S_5$  envolvendo as equações (1) a (21) que provêm da comutatividade da álgebra e depois as matrizes que envolvem as equações (1) a (30). Não exibimos as matrizes completas mas tão somente uma parte das colunas referentes aos tipos polinomiais  $T_{10}$ ,  $T_{11}$  e  $T_{12}$ .

Para a primeira representação do  $S_5$  a matriz que envolve as equações (1) – (21) é a matriz nula

$$\begin{array}{cccc} T_{10} & T_{11} & T_{12} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

E quando envolve as equações (1) - (30), temos a matriz

$$\begin{array}{cccc} T_{10} & T_{11} & T_{12} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}$$

A última linha desta matriz indica que a álgebra satisfaz uma identidade de grau 5 com os tipos  $T_{10}$  e  $T_{12}$ :  $(x^3.x)x - x^3x^2 = 0$ , ou seja,

$$(x^3, x, x) = 0.$$

Para a segunda representação do  $S_5$ , a matriz que envolve as equações (1) – (21) é a matriz

E a matriz que envolve as equações (1) - (30) é

		T	10				′	$\Gamma_{11}$					$T_{12}$	
i	2	0	2	4	1	0	0	0	0	ì	0	0	-1	-2
Ī	0	2	0	0	i	0	0	0	0	1	0	0	1	$^2$
ŀ	0	0	0	0	1	1	0	0	4	1	0	0	0	0
l	0	0	0	0	I	0	1	0	-1	į	0	0	0	0
ł	0	0	0	0	Ī	0	0	1	-1	l	0	0	0	0
1	0	0	0	0	l	0	0	0	0	l	2	0	1	2
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	ł	0	2	1	2

Comparando estas duas matrizes, temos uma nova identidade de grau 5:

$$(x^3, y, x) = 0.$$

Para as demais representações de  $S_5$ , as matrizes que provêm da comutatividade (equações (1) a (21)) e as matrizes que provêm das equações (1) – (30) são iguais (em cada representação). E estão listadas abaixo.

#### Representação 3

			T	10					$T_{11}$						7	12	
1	1	0	0	-1	-2	ł	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
ł	0	1	$^{2}$	1	2	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	Ò	0	0	0	0	ļ	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	Ì	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	ì	0	0	0	1	2	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	ŀ	1	0	0	-1	-2
1	0	0	0	0	0	I	0	0	0	0	0	I I	0	1	0	-1	0
1	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	ŀ	0	0	1	1	1

## Representação 4

				$T_{10}$						T	11						′	$\Gamma_{12}$		
1	1	0	0	-1	-2	0	I.	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
ł	0	1	0	1	0	-2	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
I	0	0	0	0	0	0	ł	0	1	0	0	0	0	Î	0	0	0	0	0	0
Ī	0	0	0	0	0	0	i	0	0	1	0	0	0	l	0	0	0	0	0	0
ì	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	Ī	0	0	0	0	0	0
ŀ	0	0	0	0	0	0	Î	0	0	0	0	1	0	l	0	0	0	0	0	0
ļ	0	0	0	0	0	0	ŀ	0	0	0	0	0	1	l	0	0	0	0	0	0
ŀ	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	0	ł	1	0	0	0	0	0
ţ	0	0	0	0	0	0	f	0	0	0	0	0	0	ł	0	1	0	0	0	-1
ļ	0	0	0	0	0	0	Į	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	0	0	1
ł	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	-1
1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	2	1

#### Representação $5\,$

			I	10					$T_1$	1					$T_1$	2	
ŧ	1	0	0	2	2	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	-1	-1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
ł	0	0	1	$^{2}$	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	I	3	0	0	0	4	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	3	1	0	-2	ŀ	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	3	0	-2	Í	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	ľ	0	0	0	3	1	l	0	0	0	0	0
ŀ	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	0	İ	1	0	0	2	0
1	0	0	0	0	0	ŀ	0	0	0	0	0	ì	0	1	0	-1	0
1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	ŀ	0	0	1	2	0
ŀ	0	0	0	0	0	ļ	0	0	0	0	0	t I	0	0	0	0	1

#### Representação 6

		1	$T_{10}$				T	11				T	12	
į	1	0	0	2	1	0	0	0	0	ļ	0	0	0	0
ł	0	1	0	-1	1	0	0	0	0	ì	0	0	0	0
ŀ	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0
ŀ	0	0	0	0	ł	1	0	0	0	I	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
ŀ	0	0	0	0	ł	0	0	1	0	Î	0	0	0	0
ŀ	0	0	0	0	ł	0	0	0	1	ł	0	0	0	0
1	0	0	0	0	I	0	0	0	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	Ĭ	0	0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	0	ŧ	0	0	0	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	Ĭ	0	0	0	0	1	0	0	0	1

#### Representação 7

$$\begin{array}{cccc} T_{10} & T_{11} & T_{12} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

A identidade que aparece na representação 1 é um caso particular daquela que vem da representação 2. E nenhuma outra identidade de grau 5 é satisfeita pelas álgebras com pseudo-composição, a não ser aquelas que decorrem das identidades

$$xy - yx = 0,$$
  $(x^3, y, x) = 0.$ 

Isto conclui a prova do item (ii) do Teorema 4.3.1.

# 4.4 Identidades polinomiais para álgebras de posto 3

Nesta seção vamos denotar por p(x,y,z) a forma linearizada de (4.1.1). Assim,

$$p(x, y, z) = xy.z + xz.y + yz.x - t(x)yz - t(y)xz - t(z)xy + q(x, y)z + q(x, z)y + q(y, z)x = 0.$$

Vamos inicialmente provar que as álgebras de posto 3 satisfazem identidades polinomiais de grau 6.

Proposição 4.4.1 Toda álgebra de posto 3 satisfaz as seguintes identidades de grau 6:

$$(x^{3}, y, x^{2}) - (x^{3}, y, x)x + (yx, x, x)x.x - ((y, x, x)x.x)x = 0;$$

$$(x^{2}, x^{2}, y)x + (yx, x^{2}, x^{2}) + (x^{2}, y, x)x^{2} + 2(x^{2}, x, x)(yx)$$

$$+2(yx, x, x^{2})x - (y, x^{3}, x^{2}) - (x^{2}x^{2}, x, y) - 2(yx, x, x)x^{2} = 0.$$

$$(4.4.2)$$

**Prova.** Se  $h(x) = x^3 - t(x)x^2 + q(x,x)x$ , então a seguinte soma é zero:

$$(p(y,x,x)x.x)x - p(y,x,x)x^3 - p(yx,x,x)x.x + t(x)p(yx,x,x)x - t(x)p(x^2y,x,x)$$

$$-(p(x,x,x)y.x)x + (h(x)yx)x + 2h(x)(yx.x) - t(yx)h(x)x + 2q(yx,x)h(x)$$

$$+t(h(x)y)x^2 - 2q(h(x)y,x)x + p(x^3y,x,x) + t(x)p(y,x,x)x^2 - t(x)p(y,x,x)x.x$$

$$-t(y)h(x)x^2 + t(y)h(x)x.x - 2t(x)h(x).yx + 2t(x)h(x)y.x = 0.$$

Nesta soma, agrupamos os termos segundo os tipos de associação envolvendo um y e cinco x. Após os cancelamentos possíveis, sobra a soma

$$((x^2y.x)x)x + x^3y.x^2 + (x^3.yx)x - x^2y.x^3 - ((x^2.yx)x)x - (x^3y.x)x = 0,$$

que pode ser reescrita como soma dos associadores

$$(x^3, y, x^2) - (x^3, y, x)x + ((yx, x, x)x)x - ((y, x, x)x \cdot x)x = 0.$$

Temos que a soma abaixo é zero:

$$-4(p(x,x,x)x.y)x + 4(p(x,x,x)x.x)y - p(y,x,x)x.x^{2} - 3p(x,x,x)y.x^{2}$$

$$+6p(x,x,x)x.yx + (p(y,x,x)x^{2})x - 2(p(x,x,x).yx)x - (p(x,x,x)x^{2})y - p(y,x,x)x^{3}$$

$$+2p(x,x,x)(yx.x) + p(x,x,x)(x^{2}y) + 2p(x^{2},x,x)y.x - 2(p(x^{2},x,x)x)y - p(x^{2},x^{2},y)x$$

$$+p(x^{2},x^{2},x)y + 2p(x^{2},y,x)x^{2} - 2p(x^{2},x,x).yx = 0.$$

Agrupando os termos de mesmo tipo de associação, os termos que não se cancelam são:

$$2(yx.x)x^{2}.x - (x^{2}y.x^{2})x - 2(x^{3}.yx)x + x^{3}x^{2}.y - 2(yx.x)x.x^{2} + (x^{2}y.x)x^{2}$$
$$-x^{3}y.x^{2} + 2(x^{3}x.yx) + 2(yx.x^{2})x + (x^{2}x^{2}.y)x - (x^{2}x^{2}.x)y - 2(x^{2}x^{2}.yx) = 0.$$

Podemos reescrever esta soma como uma soma de associadores

$$(x^{2}, x^{2}, y)x + (yx, x^{2}, x^{2}) + (x^{2}, y, x)x^{2} + 2(x^{2}, x, x)(yx) + 2(yx, x, x^{2})x$$
$$-(y, x^{3}, x^{2}) - (x^{2}x^{2}, x, y) - 2(yx, x, x)x^{2} = 0.$$

Assim, mostramos que (4.4.1) e (4.4.2) são identidades polinomiais de grau 6 para as álgebras de posto 3.

Identidades de grau 5. Vamos mostrar que para as álgebras de posto 3 não existem identidades polinomiais de grau  $\leq 5$ , além daquelas que decorrem da comutatividade. Isto é feito repetindo o processo usado anteriormente para as álgebras com pseudo-composição. Ou seja, dados a, b, c, d, e, elementos quaisquer de A, temos as seguintes equações de grau 5 que decorrem da comutatividade:

(1) 
$$q(a,b)cd.e - q(b,a)cd.e = 0$$
;

(3) 
$$q(ab, c)de - q(ba, c)de = 0;$$

(5) 
$$q(ab, cd)e - q(ba, cd)e = 0;$$

(7) 
$$q(ab.c, d)e - q(ba.c, d)e = 0;$$

(9) 
$$q(a,b)q(c,d)e - q(c,d)q(a,b)e = 0$$
;

(11) 
$$q(a,b)t(c)de - q(a,b)t(c)ed = 0$$
;

(13) 
$$q(a,b)t(cd)e - q(b,a)t(cd)e = 0;$$

(15) 
$$q(a,b)t(c)t(d)e - q(b,a)t(c)t(d)e = 0;$$

(17) 
$$t(a)(bc.d)e - t(a)(cb.d)e = 0;$$

$$(19) t(a)bc.de - t(a)de.bc = 0;$$

(21) 
$$t(ab)cd.e - t(ab)dc.e = 0$$
;

(2) 
$$q(a,b)cd.e - q(a,b)dc.e = 0;$$

(4) 
$$q(ab, c)de - q(ab, c)ed = 0$$
;

(6) 
$$q(ab, cd)e - q(cd, ab)e = 0;$$

(8) 
$$q(a,b)q(c,d)e - q(b,a)q(c,d)e = 0$$
;

(10) 
$$q(a,b)t(c)de - q(b,a)t(c)de = 0;$$

(12) 
$$q(ab, c)t(d)e - q(ba, c)t(d)e = 0;$$

(14) 
$$q(a,b)t(cd)e - q(a,b)t(dc)e = 0$$
;

(16) 
$$q(a,b)t(c)t(d)e - q(a,b)t(d)t(c)e = 0;$$

$$(18) t(a)bc.de - t(a)cb.de = 0;$$

$$(20) t(ab)cd.e - t(ba)cd.e = 0;$$

$$(22) t(a)t(b)cd.e - t(b)t(a)cd.e = 0;$$

(23) 
$$t(a)t(b)cd.e - t(a)t(b)dc.e = 0;$$

(25) 
$$t(ab.c)de - t(ab.c)ed = 0$$
;

(27) 
$$t(ab)t(c)de - t(ab)t(c)ed = 0;$$

(29) 
$$t(ab)t(cd)e - t(ba)t(cd)e = 0;$$

(31) 
$$t((ab.c)d)e - t((ba.c)d)e = 0;$$

(33) 
$$t(ab.cd)e - t(cd.ab)e = 0;$$

(35) 
$$t(a)t(b)t(c)de - t(c)t(a)t(b)de = 0;$$

(37) 
$$t(ab)t(c)t(d)e - t(ba)t(c)t(d)e = 0;$$

(39) 
$$q((ab.c)d, e) - q((ba.c)d, e) = 0;$$

(41) 
$$q(ab.cd, e) - q(cd.ab, e) = 0;$$

(43) 
$$q(ab.c, de) - q(ab.c, ed) = 0;$$

(45) 
$$q(ab,c)q(d,e) - q(ab,c)q(e,d) = 0;$$

(47) 
$$q(ab, cd)t(e) - q(ba, cd)t(e) = 0;$$

(49) 
$$q(ab, c)t(de) - q(ba, c)t(de) = 0;$$

(51) 
$$q(a,b)t(cd.e) - q(b,a)t(cd.e) = 0;$$

(53) 
$$q(ab, c)t(d)t(e) - q(ba, c)t(d)t(e) = 0;$$

(55) 
$$q(a,b)t(cd)t(e) - q(b,a)t(cd)t(e) = 0;$$

(57) 
$$q(a,b)t(c)t(d)t(e) - q(b,a)t(c)t(d)t(e) = 0$$

(61) 
$$q(a,b)q(c,d)t(e) - q(c,d)q(a,b)t(e) = 0;$$

(63) 
$$t((ab.cd)e) - t((ba.cd)e) = 0;$$

(65) 
$$t((ab.c).de) - t((ba.c).de) = 0;$$

(67) 
$$t((ab.c)d)t(e) - t((ba.c)d)t(e) = 0;$$

(69) 
$$t(ab.cd)t(e) - t(cd.ab)t(e) = 0;$$

(71) 
$$t(ab.c)t(de) - t(ab.c)t(ed) = 0;$$

(73) 
$$t(ab.c)t(d)t(e) - t(ab.c)t(e)t(d) = 0;$$

(24) 
$$t(ab.c)de - t(ba.c)de = 0$$
;

(26) 
$$t(ab)t(c)de - t(ba)t(c)de = 0$$
;

(28) 
$$t(ab.c)t(d)e - t(ba.c)t(d)e = 0;$$

(30) 
$$t(ab)t(cd)e - t(cd)t(ab)e = 0;$$

(32) 
$$t(ab.cd)e - t(ba.cd)e = 0$$
;

(34) 
$$t(a)t(b)t(c)de - t(b)t(a)t(c)de = 0;$$

(36) 
$$t(a)t(b)t(c)de - t(a)t(b)t(c)ed = 0$$
;

(38) 
$$t(ab)t(c)t(d)e - t(ab)t(d)t(c)e = 0;$$

(40) 
$$q(ab.cd, e) - q(ba.cd, e) = 0;$$

(42) 
$$q(ab.c, de) - q(ba.c, de) = 0;$$

(44) 
$$q(ab, c)q(d, e) - q(ba, c)q(d, e) = 0;$$

(46) 
$$q(ab.c, d)t(e) - q(ba.c, d)t(e) = 0;$$

(48) 
$$q(ab, cd)t(e) - q(cd, ab)t(e) = 0;$$

(50) 
$$q(ab, c)t(de) - q(ab, c)t(ed) = 0;$$

(52) 
$$q(a,b)t(cd.e) - q(a,b)t(dc.e) = 0;$$

(54) 
$$q(ab, c)t(d)t(e) - q(ab, c)t(e)t(d) = 0;$$

(56) 
$$q(a,b)t(cd)t(e) - q(a,b)t(dc)t(e) = 0;$$

$$(57) \quad q(a,b)t(c)t(d)t(e) - q(b,a)t(c)t(d)t(e) = 0; \quad (58) \quad q(a,b)t(c)t(d)t(e) - q(a,b)t(d)t(c)t(e) = 0;$$

$$(59) \quad q(a,b)t(c)t(d)t(e) - q(a,b)t(e)t(c)t(d) = 0; \quad (60) \quad q(a,b)q(c,d)t(e) - q(b,a)q(c,d)t(e) = 0;$$

(62) 
$$t(((ab.c)d)e) - t(((ba.c)d)e) = 0;$$

(64) 
$$t((ab.cd)e) - t((cd.ab)e) = 0;$$

(66) 
$$t((ab.c).de) - t((ab.c).ed) = 0;$$

(68) 
$$t(ab.cd)t(e) - t(ba.cd)t(e) = 0;$$

(70) 
$$t(ab.c)t(de) - t(ba.c)t(de) = 0;$$

(72) 
$$t(ab.c)t(d)t(e) - t(ba.c)t(d)t(e) = 0;$$

(74) 
$$t(ab)t(cd)t(e) - t(ba)t(cd)t(e) = 0;$$

(75) 
$$t(ab)t(cd)t(e) - t(cd)t(ab)t(e) = 0;$$

(76) 
$$t(ab)t(c)t(d)t(e) - t(ba)t(c)t(d)t(e) = 0;$$

(77) 
$$t(ab)t(c)t(d)t(e) - t(ab)t(d)t(c)t(e) = 0;$$

(78) 
$$t(ab)t(c)t(d)t(e) - t(ab)t(e)t(c)t(d) = 0;$$

(79) 
$$((ab.c)d)e - ((ba.c)d)e) = 0;$$

(80) 
$$(ab.cd)e - (ba.cd)e = 0;$$

(81) 
$$(ab.cd)e - (cd.ab)e = 0;$$

(82) 
$$(ab.c).de - (ba.c).de = 0;$$

(83) 
$$(ab.c).de - (ab.c).ed = 0.$$

As equações (84) a (112) decorrem da linearização de (4.1.1):

(84) 
$$p(a, b, c).de = 0;$$

(85) 
$$(p(a,b,c)d)e = 0;$$

(86) 
$$p(a,b,c)q(d,e) = 0;$$

(87) 
$$p(a,b,c)t(d)t(e) = 0;$$

(88) 
$$p(a,b,c)t(de) = 0;$$

(89) 
$$(p(a,b,c)d)t(e) = 0;$$

(90) 
$$q(p(a,b,c),d)e = 0;$$

(91) 
$$q(p(a,b,c),de) = 0;$$

(92) 
$$q(p(a,b,c),d,e) = 0;$$

(93) 
$$q(p(a,b,c),d)t(e) = 0;$$

(94) 
$$t(p(a,b,c)d)e = 0;$$

(95) 
$$t(p(a,b,c).de) = 0;$$

(96) 
$$t(p(a,b,c)d.e) = 0;$$

(97) 
$$t(p(a, b, c))dt(e) = 0;$$

(98) 
$$t(p(a,b,c)d)t(e) = 0;$$

(99) 
$$t(p(a, b, c))de = 0;$$

(100) 
$$t(p(a,b,c))t(de) = 0;$$

(101) 
$$t(p(a,b,c))t(d)t(e) = 0;$$

(102) 
$$t(p(a,b,c))q(d,e) = 0;$$

(103) 
$$p(ab, c, d)e = 0;$$

(104) 
$$p(ab, c, d)t(e) = 0;$$

(105) 
$$q(p(ab, c, d), e) = 0;$$

(106) 
$$p(ab, cd, e) = 0;$$

(107) 
$$t(p(ab, cd, e)) = 0;$$

(108) 
$$t(p(ab, c, d)e) = 0;$$

(109) 
$$t(p(ab, c, d))e = 0;$$

(110) 
$$t(p(ab, c, d)t(e) = 0;$$

(111) 
$$p(ab.c, d, e) = 0;$$

(112) 
$$t(p(ab.c, d, e)) = 0.$$

Destas equações podemos identificar 45 tipos de produtos envolvendo cinco variáveis:

$T_1$ .	q(R,R)RR.R	$T_2$ . $q(RR,R)RR$	$T_3$ . $q(RR,RR)R$
$T_4$ .	q(RR.R,R)R	$T_5. q(R,R)q(R,R)R$	$T_6. \ q(R,R)t(R)RR$
$T_7$ .	q(RR,R)t(R)R	$T_8. \ q(R,R)t(RR)R$	$T_9. \ q(R,R)t(R)t(R)R$
$T_{10}$ .	t(R)(RR.R)R	$T_{11}.\ t(R)RR.RR$	$T_{12}$ . $t(RR)RR.R$
$T_{13}$ .	t(R)t(R)RR.R	$T_{14}$ . $t(RR.R)RR$	$T_{15}$ . $t(RR)t(R)RR$
$T_{16}$ .	t(RR.R)t(R)R	$T_{17}$ . $t(RR)t(RR)R$	$T_{18}$ . $t((RR.R)R)R$
$T_{19}$ .	t(RR.RR)R	$T_{20}.\ t(R)t(R)t(R)RR$	$T_{21}$ . $t(RR)t(R)t(R)R$
$T_{22}$ .	q((RR.R)R,R)	$T_{23}$ . $q(RR.RR,R)$	$T_{24}$ . $q(RR.R,RR)$
$T_{25}$ .	q(RR,R)q(R,R)	$T_{26}$ . $q(RR.R,R)t(R)$	$T_{27}$ . $q(RR,RR)t(R)$
$T_{28}$ .	q(RR,R)t(RR)	$T_{29}. \ q(R,R)t(RR.R)$	$T_{30}$ . $q(RR,R)t(R)t(R)$
$T_{31}$ .	q(R,R)t(RR)t(R)	$T_{32}$ . $q(R,R)t(R)t(R)t(R)$	$T_{33}$ . $q(R,R)q(R,R)t(R)$
$T_{34}$ .	t(((RR.R)R)R)	$T_{35}.\ t((RR.RR)R)$	$T_{36}$ . $t((RR.R).RR)$
$T_{37}$ .	t((RR.R)R)t(R)	$T_{38}.\ t(RR.RR)t(R)$	$T_{39}$ . $t(RR.R)t(RR)$
$T_{40}$ .	t(RR.R)t(R)t(R)	$T_{41}.\ t(RR)t(RR)t(R)$	$T_{42}$ . $t(RR)t(R)t(R)t(R)$
$T_{43}$ .	((RR.R)R)R	$T_{44}$ . $(RR.RR)R$	$T_{45}$ . $(RR.R)$ . $RR$

Apenas os tipos  $T_{43}$ ,  $T_{44}$  e  $T_{45}$  são polinomiais. Os demais dependem da forma linear e/ou da forma bilinear da equação (4.1.1) que definem as álgebras de posto 3.

As matrizes escalonadas que obtemos das representações do  $S_5$ , envolvendo as equações (1) – (83) ou (1) – (112) são idênticas. Isto permite concluir que uma álgebra de posto 3 não satisfaz nenhuma identidade polinomial de grau 5 a não ser aquelas que são consequências da comutatividade. E, portanto, também não há identidades polinomiais de grau < 5. Apresentamos apenas os blocos das matrizes que correspondem aos tipos  $T_{43}$ ,  $T_{44}$  e  $T_{45}$ .

Para a primeira representação do  $S_5$ , as duas matrizes são nulas. Para a segunda representação, ambas as matrizes são iguais a

	$\boldsymbol{T}$	43				$\boldsymbol{I}$	44		$T_{45}$							
1	1	1	1	2	ŀ	0	0	0	0	ŀ	0	0	0	0	I	
ł	0	0	0	0	1	1	0	0	4	i	0	0	0	0	1	
ł	0	0	0	0	1	0	1	0	-1	I	0	0	0	0	i	
ł	0	0	0	0	1	0	0	1	-1	1	0	0	0	0	1	
1	0	0	0	0	T.	0	0	0	0	1	2	0	1	2	1	
!	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	2	1	2	ļ	

Na representação 3 do  $S_5$ , as matrizes obtidas são iguais a

			I	43		$T_{44}$						$T_{45}$						
ì	1	0	0	-1	-2	1	0	0	0	0	0	ł	0	0	0	0	0	ŀ
1	0	1	2	1	<b>2</b>	1	0	0	0	0	0	ł	0	0	0	0	0	1
i	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	ŀ
1	0	0	0	0	0	Ì	0	1	0	0	0	Į	0	0	0	0	0	T
l	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	Ē	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	Ī	0	0	0	1	2	Ī	0	0	0	0	0	1
I	0	0	0	0	0	I	0	0	0	0	0	ł	1	0	0	-1	-2	Ì
ŀ	0	0	0	0	0	ŀ	0	0	0	0	0	ł	0	1	0	-1	0	1
ŀ	0	0	0	0	0	ł	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	1	ì

Na representação 4, as duas matrizes são iguais a

				$T_{43}$						T	44						1	$T_{45}$			
l	1	0	0	-1	-2	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	Ì
i	0	1	0	1	0	-2	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	ł	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
i.	0	0	0	0	0	0	ł	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	Ì
I	0	0	0	0	0	0	i I	0	1	0	0	0	0	ŀ	0	0	0	0	0	0	i
1	0	0	0	0	0	0	ř	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	Į
1	0	0	0	0	0	0	l	0	0	0	1	0	0	i i	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	i	0	0	0	0	1	0	ļ	0	0	0	0	0	0	ļ
I	0	0	0	0	0	0	Ì	0	0	0	0	0	1	i	0	0	0	0	0	0	1
l	0	0	0	0	0	0	ł	0	0	0	0	0	0	ļ	1	0	0	0	0	0	ł
ľ	0	0	0	0	0	0	ŀ	0	0	0	0	0	0	ľ	0	1	0	0	0	-1	1
ŀ	0	0	0	0	0	0	ŀ	0	0	0	0	0	0	ł	0	0	$^{2}$	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	ł	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	-1	1
1	0	0	0	0	0	0	ł	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	<b>2</b>	1	ŀ

Para a representação 5, as duas matrizes obtidas são iguais a

			$\boldsymbol{I}$	43					$T_4$	4					$T_{48}$	5		
i	1	0	0	2	2	Ì	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	0	-1	-1	i	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
ł	0	0	1	2	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1	3	0	0	0	4	1	0	0	0	0	0	Ì
ŀ	0	0	0	0	0	-	0	3	0	0	-2	1	0	0	0	0	0	H
ŀ	0	0	0	0	0	1	0	0	3	0	-2	1	0	0	0	0	0	!
ł	0	0	0	0	0	1	0	0	0	3	1	i	0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	ŀ	0	0	0	0	0	ŀ	1	0	0	2	0	. }
1	0	0	0	0	0	ł	0	0	0	0	0	ļ	0	1	0	-1	0	1
ŀ	0	0	0	0	0	l	0	0	0	0	0	ŀ	0	0	1	2	0	. {
ľ	0	0	0	0	0	ł	0	0	0	0	0	}	0	0	0	0	1	i

Relativo à representação 6, ambas as matrizes encontradas são iguais a

		2	$\Gamma_{43}$		$T_{44}$						$T_{45}$				
1	1	0	0	2	t	0	0	0	0	ł	0	0	0	0	ł
ŀ	0	1	0	-1	I	0	0	0	0	i	0	0	0	0	ł
ľ	0	0	1	1	į.	0	0	0	0	ľ	0	0	0	0	ì
ł	0	0	0	0	Ĭ	1	0	0	0	1	0	0	0	0	i
ŀ	0	0	0	0	1	0	1	0	0	I I	0	0	0	0	1
ł	0	0	0	0	1	0	0	1	0	ŀ	0	0	0	0	1
ł	0	0	0	0	i	0	0	0	1	ł	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	ŀ	0	0	0	0	j	1	0	0	0	1
ŀ	0	0	0	0	I į	0	0	0	0	ŀ	0	1	0	0	1
Ĭ	0	0	0	0	1	0	0	0	0	ļ	0	0	1	0	I L
Ī	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	ļ

E na representação 7, as duas matrizes obtidas são iguais à matriz

$$egin{array}{ccccc} T_{43} & T_{44} & T_{45} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \end{array}$$

Identidades de grau 6. Sabemos pela Proposição 4.4.1 que as álgebras de posto 3 satisfazem pelo menos duas identidades polinomiais de grau 6. A seguir investigamos a existência ou não de outras identidades polinomiais de grau 6 para estas álgebras. Dados a, b, c, d, e, f, elementos quaisquer de uma álgebra A de posto 3, sobre um corpo K, obtemos as seguintes equações (de grau 6) que decorrem da comutatividade de A:

(1) 
$$t(a)((bc.d)e)f - t(a)((cb.d)e)f = 0;$$

(3) 
$$t(a)(bc.de)f - t(a)(de.bc)f = 0;$$

(5) 
$$t(a)(bc.d)(ef) - t(a)(bc.d)(fe) = 0;$$

(7) 
$$t(a)t(b)(cd.ef) - t(a)t(b)(dc.ef) = 0;$$

(9) 
$$t(a)t(b)(cd.e)f - t(b)t(a)(cd.e)f = 0;$$

(11) 
$$t(ab)(cd.ef) - t(ba)(cd.ef) = 0;$$

(13) 
$$t(ab)(cd.ef) - t(ab)(ef.cd) = 0;$$

(15) 
$$t(ab)(cd.e)f - t(ab)(dc.e)f = 0;$$

(17) 
$$t(ab.c)de.f - t(ab.c)ed.f = 0;$$

(19) 
$$t(ab)t(c)de.f - t(ab)t(c)ed.f = 0;$$

(21) 
$$t(a)t(b)t(a)da f t(a)t(a)t(b) J_a f$$

$$(21) \quad \iota(a)\iota(b)\iota(c)ac.j - \iota(c)\iota(a)\iota(b)ac.j = 0$$

(23) 
$$t(ab.c)t(d)ef - t(ba.c)t(d)ef = 0;$$

$$(25) t(ab)t(cd)ef - t(ba)t(cd)ef = 0;$$

(27) 
$$t(ab)t(cd)ef - t(ab)t(cd)fe = 0;$$

(29) 
$$t(ab)t(c)t(d)ef - t(ab)t(d)t(c)ef = 0;$$
 (30)  $t(ab)t(c)t(d)ef - t(ab)t(d)t(c)fe = 0;$ 

(31) 
$$t(a)t(b)t(c)t(d)ef - t(b)t(a)t(c)t(d)ef = 0;$$

(32) 
$$t(a)t(b)t(c)t(d)ef - t(d)t(a)t(b)t(c)ef = 0;$$
  
(33)  $t(a)t(b)t(c)t(d)ef - t(a)t(b)t(c)t(d)fe = 0;$ 

(34) 
$$t((ab.c)d)ef - t((ba.c)d)ef = 0;$$

(35) 
$$t((ab.c)d)ef - t((ab.c)d)fe = 0;$$

(37) 
$$t(ab.cd)ef - t(cd.ab)ef = 0;$$

(39) 
$$t((ab.cd)e)f - t((ba.cd)e)f = 0;$$

$$(41) t((ab.c)de)f - t((ba.c)de)f = 0;$$

(43) 
$$t(((ab.c)d)e)f - t(((ba.c)d)e)f = 0;$$

(45) 
$$t((ab.cd)t(e)f - t(ba.cd)t(e)f = 0;$$

$$(47) t(ab.c)t(de)f - t(ba.c)t(de)f = 0;$$

(2) 
$$t(a)(bc.de)f - t(a)(cb.de)f = 0;$$

(4) 
$$t(a)(bc.d)(ef) - t(a)(cb.d)(ef) = 0;$$

(6) 
$$t(a)t(b)(cd.ef) - t(b)t(a)(cd.ef) = 0;$$

(8) 
$$t(a)t(b)(cd.ef) - t(a)t(b)(ef.cd) = 0;$$

(10) 
$$t(a)t(b)(cd.e)f - t(a)t(b)(dc.e)f = 0;$$

(12) 
$$t(ab)(cd.ef) - t(ab)(dc.ef) = 0;$$

(14) 
$$t(ab)(cd.e)f - t(ba)(cd.e)f = 0;$$

(16) 
$$t(ab.c)de.f - t(ba.c)de.f = 0;$$

(18) 
$$t(ab)t(c)de.f - t(ba)t(c)de.f = 0;$$

(20) 
$$t(a)t(b)t(c)de.f - t(b)t(a)t(c)de.f = 0;$$

$$(21) \ \ t(a)t(b)t(c)de.f - t(c)t(a)t(b)de.f = 0; \ (22) \ \ t(a)t(b)t(c)de.f - t(a)t(b)t(c)ed.f = 0;$$

(24) 
$$t(ab.c)t(d)ef - t(ab.c)t(d)fe = 0;$$

(26) 
$$t(ab)t(cd)ef - t(cd)t(ab)ef = 0;$$

(28) 
$$t(ab)t(c)t(d)ef - t(ba)t(c)t(d)ef = 0;$$

(30) 
$$t(ab)t(c)t(d)ef - t(ab)t(d)t(c)fe = 0;$$

$$(36) t(ab.cd)ef - t(ba.cd)ef = 0;$$

(38) 
$$t(ab.cd)ef - t(ab.cd)fe = 0;$$

(40) 
$$t((ab.cd)e)f - t((cd.ab)e)f = 0;$$

(42) 
$$t((ab.c)de)f - t((ab.c)ed)f = 0;$$

(44) 
$$t((ab.c)d)t(e)f - t((ba.c)d)t(e)f = 0;$$

$$(46) t(ab.cd)t(e)f - t(cd.ab)t(e)f = 0;$$

(48) 
$$t(ab.c)t(de)f - t(ba.c)t(ed)f = 0;$$

```
(49) t(ab.c)t(d)t(e)f - t(ba.c)t(d)t(e)f = 0; (50) t(ab.c)t(d)t(e)f - t(ab.c)t(e)t(d)f = 0;
```

(51) 
$$t(ab)t(cd)t(e)f - t(ba)t(cd)t(e)f = 0;$$
 (52)  $t(ab)t(cd)t(e)f - t(cd)t(ab)t(e)f = 0;$ 

(53) 
$$t(ab)t(c)t(d)t(e)f - t(ba)t(c)t(d)t(e)f = 0;$$

(54) 
$$t(ab)t(c)t(d)t(e)f - t(ab)t(d)t(c)t(e)f = 0;$$

$$(55) t(ab)t(c)t(d)t(e)f - t(ab)t(e)t(c)t(d)f = 0;$$

(56) 
$$q(a,b)(cd.e)f - q(b,a)(cd.e)f = 0;$$

(57) 
$$q(a,b)(cd.e)f - q(a,b)(dc.e)f = 0;$$
 (58)  $q(a,b)(cd.ef) - q(b,a)(cd.ef) = 0;$ 

(59) 
$$q(a,b)(cd.ef) - q(a,b)(dc.ef) = 0;$$
 (60)  $q(a,b)(cd.ef) - q(a,b)(ef.cd) = 0;$ 

(61) 
$$q(ab, c)de.f - q(ba, c)de.f = 0;$$
 (62)  $q(ab, c)de.f - q(ab, c)ed.f = 0;$ 

(63) 
$$q(ab.c, d)ef - q(ba.c, d)ef = 0;$$
 (64)  $q(ab.c, d)ef - q(ab.c, d)fe = 0;$ 

(65) 
$$q(ab, cd)ef - q(ba, cd)ef = 0;$$
 (66)  $q(ab, cd)ef - q(cd, ab)ef = 0;$ 

(67) 
$$q(ab, cd)ef - q(ab, cd)fe = 0;$$
 (68)  $q(ab, cd)f - q(ba, cd)f = 0;$ 

(69) 
$$q(ab.c, de)f - q(ab.c, ed)f = 0;$$
 (70)  $q((ab.c)d, e)f - q((ba.c)d, e)f = 0;$ 

(71) 
$$q(ab.cd, e)f - q(ba.cd, e)f = 0;$$
 (72)  $q(ab.cd, e)f - q(cd.ab, e)f = 0;$ 

(73) 
$$q(a,b)q(c,d)ef - q(b,a)q(c,d)ef = 0;$$
 (74)  $q(a,b)q(c,d)ef - q(c,d)q(a,b)ef = 0;$ 

(75) 
$$q(a,b)q(c,d)ef - q(a,b)q(c,d)fe = 0;$$
 (76)  $q(ab,c)q(d,e)f - q(ba,c)q(d,e)f = 0;$ 

$$(77) \quad q(ab,c)q(d,e)f - q(ab,c)q(e,d)f = 0; \quad (78) \quad q(a,b)q(c,d)t(e)f - q(b,a)q(c,d)t(e)f = 0;$$

(79) 
$$q(a,b)q(c,d)t(e)f - q(c,d)q(a,b)t(e)f = 0;$$

(80) 
$$q(a,b)t(c)t(d)ef - q(b,a)t(c)t(d)ef = 0;$$

(81) 
$$q(a,b)t(c)t(d)ef - q(a,b)t(d)t(c)ef = 0;$$

(82) 
$$q(a,b)t(c)t(d)ef - q(a,b)t(c)t(d)fe = 0;$$

(83) 
$$q(a,b)t(cd)ef - q(b,a)t(cd)ef = 0;$$
 (84)  $q(a,b)t(cd)ef - q(a,b)t(dc)ef = 0;$ 

(85) 
$$q(a,b)t(cd)ef - q(a,b)t(cd)fe = 0;$$
 (86)  $q(a,b)t(cd)t(e)f - q(b,a)t(cd)t(e)f = 0;$ 

(87) 
$$q(a,b)t(cd)t(e)f - q(a,b)t(dc)t(e)f = 0;$$

(88) 
$$q(a,b)t(cd.e)f - q(b,a)t(cd.e)f = 0;$$
 (89)  $q(a,b)t(cd.e)f - q(a,b)t(dc.e)f = 0;$ 

(90) 
$$q(a,b)t(c)t(d)t(e)f - q(b,a)t(c)t(d)t(e)f = 0;$$

```
(91) q(a,b)t(c)t(d)t(e)f - q(a,b)t(d)t(c)t(e)f = 0:
(92) q(a,b)t(c)t(d)t(e)f - q(a,b)t(e)t(c)t(d)f = 0;
(93) q(a,b)t(c)de.f - q(b,a)t(c)de.f = 0;
                                              (94) q(a,b)t(c)de.f - q(a,b)t(c)ed.f = 0;
(95) q(ab, c)t(d)ef - q(ba, c)t(d)ef = 0;
```

(97) 
$$q(ab,c)t(de)f - q(ba,c)t(de)f = 0;$$
 (98)  $q(ab,c)t(de)f - q(ab,c)t(ed)f = 0;$ 

(96) q(ab, c)t(d)ef - q(ab, c)t(d)fe = 0;

(99) 
$$q(ab, c)t(d)t(e)f - q(ba, c)t(d)t(e)f = 0;$$

(100) 
$$q(ab, c)t(d)t(e)f - q(ab, c)t(e)t(d)f = 0;$$

(101) 
$$q(ab, cd)t(e)f - q(ba, cd)t(e)f = 0;$$
 (102)  $q(ab, cd)t(e)f - q(cd, ab)t(e)f = 0;$ 

$$(103) \quad q(ab.c,d)t(e)f - q(ba.c,d)t(e)f = 0; \quad (104) \quad t((((ab.c)d)e)f) - t((((ba.c)d)e)f) = 0;$$

$$(105) \ t(((ab.c)d)ef) - t(((ba.c)d)ef) = 0; \ (106) \ t(((ab.c)d)ef) - t(((ab.c)d)fe) = 0;$$

$$(107) \ t(((ab.c)de)f) - t(((ba.c)de)f) = 0; \ (108) \ t(((ab.c)de)f) - t(((ab.c)ed)f) = 0;$$

$$(109) \ t((ab.c)(de.f)) - t((ba.c)(de.f)) = 0; \ (110) \ t((ab.c)(de.f)) - t(ab.c)(ed.f) = 0;$$

$$(111) \ t((ab.cd)ef) - t((ba.cd)ef) = 0; \ (112) \ t((ab.cd)ef) - t((cd.ab)ef) = 0;$$

(113) 
$$t((ab.cd)ef) - t((ab.cd)fe) = 0;$$
 (114)  $t(((ab.cd)e)f) - t(((ba.cd)e)f) = 0;$ 

$$(115) \ t(((ab.cd)e)f) - t(((cd.ab)e)f) = 0; \ (116) \ t(((ab.c)d)e)t(f) - t(((ba.c)d)e)t(f) = 0;$$

$$(117) \ \ t((ab.cd)e)t(f) - t((ba.cd)e)t(f) = 0; \ \ (118) \ \ t((ab.cd)e)t(f) - t((cd.ab)e)t(f) = 0;$$

(119) 
$$t((ab.c)de)t(f) - t((ba.c)de)t(f) = 0;$$
 (120)  $t((ab.c)de)t(f) - t((ab.c)ed)t(f) = 0;$ 

$$(121) \ t((ab.c)d)t(ef) - t((ba.c)d)t(ef) = 0; \ (122) \ t((ab.c)d)t(ef) - t((ab.c)d)t(fe) = 0;$$

(123) 
$$t(ab.cd)t(ef) - t(ba.cd)t(ef) = 0;$$
 (124)  $t(ab.cd)t(ef) - t(cd.ab)t(ef) = 0;$ 

(125) 
$$t(ab.cd)t(ef) - t(ab.cd)t(fe) = 0;$$
 (126)  $t(ab.cd)t(e)t(f) - t(ba.cd)t(e)t(f) = 0;$ 

(127) 
$$t(ab.cd)t(e)t(f) - t(cd.ab)t(e)t(f) = 0;$$

(128) 
$$t(ab.cd)t(e)t(f) - t(ab.cd)t(f)t(e) = 0;$$

(129) 
$$t((ab.c)d)t(e)t(f) - t(ba.c)d)t(e)t(f) = 0;$$

(130) 
$$t((ab.c)d)t(e)t(f) - t(ab.c)d)t(f)t(e) = 0;$$

(131) 
$$t(ab.c)t(de.f) - t(ba.c)t(de.f) = 0;$$
 (132)  $t(ab.c)t(de.f) - t(de.f)t(ab.c) = 0;$ 

(133) 
$$t(ab.c)t(de)t(f) - t(ba.c)t(de)t(f) = 0;$$

(134) 
$$t(ab.c)t(de)t(f) - t(ab.c)t(ed)t(f) = 0;$$

(135) 
$$t(ab.c)t(d)t(e)t(f) - t(ba.c)t(d)t(e)t(f) = 0;$$

(136) 
$$t(ab.c)t(d)t(e)t(f) - t(ab.c)t(e)t(d)t(f) = 0;$$

(137) 
$$t(ab.c)t(d)t(e)t(f) - t(ab.c)t(f)t(d)t(e) = 0;$$

$$(138) \quad t(ab)t(cd)t(ef) - t(ba)t(cd)t(ef) = 0;$$

$$(139) \quad t(ab)t(cd)t(ef) - t(cd)t(ab)t(ef) = 0;$$

(140) 
$$t(ab)t(cd)t(ef) - t(ef)t(ab)t(cd) = 0;$$

(141) 
$$t(ab)t(cd)t(e)t(f) - t(ba)t(cd)t(e)t(f) = 0;$$

(142) 
$$t(ab)t(cd)t(e)t(f) - t(cd)t(ab)t(e)t(f) = 0;$$

(143) 
$$t(ab)t(cd)t(e)t(f) - t(ab)t(cd)t(f)t(e) = 0;$$

(144) 
$$t(ab)t(c)t(d)t(e)t(f) - t(ba)t(c)t(d)t(e)t(f) = 0;$$

(145) 
$$t(ab)t(c)t(d)t(e)t(f) - t(ab)t(d)t(c)t(e)t(f) = 0;$$

(146) 
$$t(ab)t(c)t(d)t(e)t(f) - t(ab)t(f)t(c)t(d)t(e) = 0;$$

(147) 
$$q((ab.c)de, f) - q((ba.c).de, f) = 0;$$
 (148)  $q((ab.c)de, f) - q((ab.c).ed, f) = 0;$ 

(149) 
$$q((ab.cd)e, f) - q((ba.cd)e, f) = 0;$$
 (150)  $q((ab.cd)e, f) - q((cd.ab)e, f) = 0;$ 

$$(151) \quad q(((ab.c)d)e,f) - q(((ba.c)d)e,f) = 0; \ (152) \quad q(ab.cd,ef) - q(ba.cd,ef) = 0;$$

(153) 
$$q(ab.cd, ef) - q(cd.ab, ef) = 0;$$
 (154)  $q(ab.cd, ef) - q(ab.cd, fe) = 0;$ 

(155) 
$$q((ab.c)d, ef) - q((ba.c)d, ef) = 0;$$
 (156)  $q((ab.c)d, ef) - q((ab.c)d, fe) = 0;$ 

(157) 
$$q(ab.c, de.f) - q(ba.c, de.f) = 0;$$
 (158)  $q(ab.c, de.f) - q(de.f, ab.c) = 0;$ 

(159) 
$$q(ab, cd)q(e, f) - q(ba, ed)q(e, f) = 0;$$
 (160)  $q(ab, cd)q(e, f) - q(cd, ab)q(e, f) = 0;$ 

$$(161) \quad q(ab.cd)q(e,f) - q(ab,cd)q(f,e) = 0; \quad (162) \quad q(ab.c,d)q(e,f) - q(ba.c,d)q(e,f) = 0;$$

$$(163) \ \ q(ab.c,d)q(e,f) - q(ab.c,d)q(f,e) = 0;$$

(164) 
$$q(ab, c)q(de, f) - q(ba, c)q(de, f) = 0;$$

(165) 
$$q(ab, c)q(de, f) - q(de, f)q(ab, c) = 0;$$

(166) 
$$q(a,b)q(c,d)q(e,f) - q(b,a)q(c,d)q(e,f) = 0;$$

(167) 
$$q(a,b)q(c,d)q(e,f) - q(c,d)q(a,b)q(e,f) = 0;$$

(168) 
$$q(a,b)q(c,d)q(e,f) - q(e,f)q(a,b)q(c,d) = 0;$$

(169) 
$$q(a,b)t((cd.e)f) - q(b,a)t((cd.e)f) = 0;$$

(170) 
$$q(a,b)t((cd.e)f) - q(a,b)t((dc.e)f) = 0;$$

$$(171) \quad q(a,b)t(cd.ef) - q(b,a)t(cd.ef) = 0; \quad (172) \quad q(a,b)t(cd.ef) - q(a,b)t(dc.ef) = 0;$$

$$(173) \quad q(a,b)t(cd.ef) - q(a,b)t(ef.cd) = 0; \quad (174) \quad q(ab,c)t(de.f) - q(ba,c)t(de.f) = 0;$$

$$(175) \quad q(ab,c)t(de.f) - q(ab,c)t(ed.f) = 0; \quad (176) \quad q(ab,cd)t(ef) - q(ba,cd)t(ef) = 0;$$

(177) 
$$q(ab, cd)t(ef) - q(cd, ab)t(ef) = 0;$$
 (178)  $q(ab, cd)t(ef) - q(ab, cd)t(fe) = 0;$ 

$$(179) \quad q(ab.c,d)t(ef) - q(ba.c,d)t(ef) = 0; \quad (180) \quad q(ab.c,d)t(ef) - q(ab.c,d)t(fe) = 0;$$

(181) 
$$q(ab, cd)t(e)t(f) - q(ba, cd)t(e)t(f) = 0;$$

(182) 
$$q(ab, cd)t(e)t(f) - q(cd, ab)t(e)t(f) = 0;$$

(183) 
$$q(ab, cd)t(e)t(f) - q(ab, cd)t(f)t(e) = 0;$$

(184) 
$$q(ab.c, d)t(e)t(f) - q(ba.c, d)t(e)t(f) = 0;$$

(185) 
$$q(ab.c, d)t(e)t(f) - q(ab.c, d)t(f)t(e) = 0;$$

(186) 
$$q(a,b)t(cd.e)t(f) - q(b,a)t(cd.e)t(f) = 0;$$

(187) 
$$q(a,b)t(cd.e)t(f) - q(a,b)t(dc.e)t(f) = 0;$$

(188) 
$$q(ab.c, de)t(f) - q(ba.c, de)t(f) = 0;$$

(189) 
$$q(ab.c, de)t(f) - q(ab.c, ed)t(f) = 0;$$
 (190)  $q((ab.c)d, e)t(f) - q((ba.c)d, e)t(f) = 0;$ 

(191) 
$$q((ab.cd, e)t(f) - q(ba.cd, e)t(f) = 0;$$
 (192)  $q((ab.cd, e)t(f) - q(cd.ab, e)t(f) = 0;$ 

$$(193) \quad q(ab,c)t(de)t(f)-q(ba,c)t(de)t(f)=0;$$

(194) 
$$q(ab, c)t(de)t(f) - q(ab, c)t(ed)t(f) = 0;$$

(195) 
$$q(ab, c)t(d)t(e)t(f) - q(ba, c)t(d)t(e)t(f) = 0;$$

(196) 
$$q(ab, c)t(d)t(e)t(f) - q(ab, c)t(e)t(d)t(f) = 0;$$

(197) 
$$q(ab,c)t(d)t(e)t(f) - q(ab,c)t(f)t(d)t(e) = 0;$$

$$(198) \quad q(a,b)t(cd)t(ef)-q(b,a)t(cd)t(ef)=0;$$

(199) 
$$q(a,b)t(cd)t(ef) - q(a,b)t(dc)t(ef) = 0;$$

(200) 
$$q(a,b)t(cd)t(ef) - q(a,b)t(ef)t(cd) = 0;$$

(201) 
$$q(a,b)t(cd)t(e)t(f) - q(b,a)t(cd)t(e)t(f) = 0;$$

(202) 
$$q(a,b)t(cd)t(e)t(f) - q(a,b)t(dc)t(e)t(f) = 0;$$

(203) 
$$q(a,b)t(cd)t(e)t(f) - q(a,b)t(cd)t(f)t(e) = 0;$$

(204) 
$$q(a,b)t(c)t(d)t(e)t(f) - q(b,a)t(c)t(d)t(e)t(f) = 0;$$

(205) 
$$q(a,b)t(c)t(d)t(e)t(f) - q(a,b)t(d)t(c)t(e)t(f) = 0;$$

(206) 
$$q(a,b)t(c)t(d)t(e)t(f) - q(a,b)t(f)t(c)t(d)t(e) = 0;$$

(207) 
$$q(a,b)q(c,d)t(ef) - q(b,a)q(c,d)t(ef) = 0;$$

(208) 
$$q(a,b)q(c,d)t(ef) - q(c,d)q(a,b)t(ef) = 0;$$

(209) 
$$q(a,b)q(c,d)t(ef) - q(a,b)q(c,d)t(fe) = 0;$$

(210) 
$$q(a,b)q(c,d)t(e)t(f) - q(b,a)q(c,d)t(e)t(f) = 0;$$

(211) 
$$q(a,b)q(c,d)t(e)t(f) - q(c,d)q(a,b)t(e)t(f) = 0;$$

(212) 
$$q(a,b)q(c,d)t(e)t(f) - q(a,b)q(c,d)t(f)t(e) = 0;$$

(213) 
$$q(ab, c)q(d, e)t(f) - q(ba, c)q(d, e)t(f) = 0;$$

(214) 
$$q(ab, c)q(d, e)t(f) - q(ab, c)q(e, d)t(f) = 0;$$

$$(215) \quad (((ab.c)d)e)f - (((ba.c)d)e)f = 0; \qquad (216) \quad ((ab.c)d)f - ((ba.c)d)f = 0;$$

$$(217) \quad ((ab.c)de)f - ((ab.c)ed)f = 0; \qquad (218) \quad ((ab.c)d)(ef) - ((ba.c)d)(ef) = 0;$$

$$(219) \quad ((ab.c)d)(ef) - ((ab.c)d)(fe) = 0; \qquad (220) \quad (ab.c)(de.f) - (ba.c)(de.f) = 0;$$

$$(221) (ab.c)(de.f) - (de.f)(ab.c) = 0; (222) ((ab.cd)e)f - ((ba.cd)e)f = 0;$$

$$(223) \quad ((ab.cd)e)f - ((cd.ab)e)f = 0; \qquad (224) \quad (ab.cd)(ef) - (ba.cd)(ef) = 0;$$

$$(225) (ab.cd)(ef) - (cd.ab)(ef) = 0; (226) (ab.cd)(ef) - (ab.cd)(fe) = 0;$$

As equações abaixo provêm da linearização de (4.1.1):

$$p(a,b,c) = ab.c + ac.b + bc.a - t(a)bc - t(b)ac - t(c)ab + q(a,b)c + q(a,c)b + q(b,c)a = 0.$$

(227) 
$$(p(a,b,c)d)e)f = 0;$$
 (228)  $(p(a,b,c)d)(ef) = 0;$ 

(229) 
$$(p(a,b,c).de)f = 0;$$
 (230)  $p(a,b,c)(de.f) = 0;$ 

(231) 
$$t(d)p(a,b,c)(ef) = 0;$$

(233) 
$$p(a,b,c)t(d)t(e)f = 0;$$

(235) 
$$p(a,b,c)t(de)f = 0;$$

(237) 
$$p(a,b,c)t(de.f) = 0;$$

(239) 
$$p(a,b,c)q(de,f) = 0;$$

(241) 
$$t(((p(a,b,c)d)e)f) = 0;$$

(243) 
$$t((p(a,b,c).de)f) = 0;$$

(245) 
$$t(p(a,b,c))(de.f) = 0;$$

(247) 
$$t(p(a,b,c).de)f = 0;$$

(249) 
$$t(p(a,b,c)t(de.f) = 0;$$

(251) 
$$t(p(a,b,c)t(d)ef = 0;$$

(253) 
$$t(p(a,b,c)t(d)t(e)t(f) = 0;$$

(255) 
$$t(p(a,b,c))q(de,f) = 0;$$

(257) 
$$q(p(a,b,c),d)t(ef) = 0;$$

(259) 
$$q(p(a,b,c),d)t(e)f = 0;$$

(261) 
$$q(p(a,b,c),de)f = 0$$
;

(263) 
$$q(p(a,b,c), de.f) = 0;$$

(265) 
$$q(p(a,b,c)de,f) = 0;$$

(267) 
$$q(p(a,b,c)d,e)f = 0;$$

(269) 
$$p((ab, c, d)e)f = 0;$$

(271) 
$$p(ab, c, d)t(e)f = 0;$$

(273) 
$$p(ab, c, d)t(e)t(f) = 0;$$

(275) 
$$t(p(ab, c, d))t(ef) = 0;$$

(277) 
$$t(p(ab, c, d))q(e, f) = 0$$
;

(279) 
$$q(p(ab, c, d), ef) = 0;$$

(281) 
$$p(ab, cd, e)f = 0;$$

(232) 
$$t(d)(p(a,b,c)e)f = 0$$
;

(234) 
$$p(a,b,c)t(d)t(e)t(f) = 0$$
;

(236) 
$$p(a,b,c)t(de)t(f) = 0$$
;

(238) 
$$p(a,b,c)q(d,e)f = 0$$
;

(240) 
$$p(a,b,c)q(d,e)t(f) = 0$$
;

(242) 
$$t((p(a,b,c)d)ef) = 0$$
;

(244) 
$$t(p(a,b,c)(de.f)) = 0$$
;

(246) 
$$t((p(a,b,c)d)e)f = 0$$
;

(248) 
$$t(p(a,b,c)d)(ef) = 0$$
;

(250) 
$$t(p(a,b,c))t(de)f = 0$$
;

(252) 
$$t(p(a,b,c))t(d)t(e)f = 0$$
;

(254) 
$$t(p(a,b,c))q(d,e)f = 0$$
;

(256) 
$$q(p(a,b,c),d)(ef) = 0$$
;

(258) 
$$q(p(a,b,c),d)t(e)t(f) = 0$$
;

(260) 
$$q(p(a,b,c),d)q(e,f)=0$$
;

(262) 
$$q(p(a,b,c),de)t(f) = 0$$
;

(264) 
$$q(p(a,b,c)d,e)t(f) = 0$$
;

(266) 
$$q(p(a,b,c)d,ef) = 0$$
;

(268) 
$$q((p(a,b,c)d)e, f) = 0$$
;

(270) 
$$p(ab, c, d)(ef) = 0$$
;

(272) 
$$p(ab, c, d)t(ef) = 0$$
;

(274) 
$$t(p(ab, c, d))(ef) = 0$$
;

(276) 
$$t(p(ab, c, d))t(e)f = 0$$
;

(278) 
$$q(p(ab, c, d), e)f = 0$$
;

(280) 
$$q(p(ab, c, d), e)t(f) = 0$$
;

(282) 
$$p(ab, cd, ef) = 0$$
;

$$(283) \ p(ab,cd,e)t(f)=0; \qquad (284) \ t(p(ab,cd,ef))=0 \ ; \\ (285) \ t(p(ab,cd,e))f=0; \qquad (286) \ t(p(ab,cd,e))t(f)=0 \ ; \\ (287) \ p(ab.c,d,e)f=0; \qquad (288) \ p(ab.c,d,e))t(f)=0 \ ; \\ (289) \ p(ab.c,de,f)=0; \qquad (290) \ t(p(ab.c,d,e))f=0 \ ; \\ (291) \ t(p(ab.c,d,e))t(f)=0; \qquad (292) \ t(p(ab.c,d,e)f)=0 \ ; \\ (293) \ q(p(ab.c,d,e),f)=0; \qquad (294) \ q(p(ab,cd,e),f)=0 \ ; \\ (295) \ t(p(a,b,c)d)t(e)f=0; \qquad (296) \ t(p(a,b,c)d)t(e)t(f)=0 \ ; \\ (297) \ t(p(a,b,c)d)t(ef)=0; \qquad (298) \ t((p(a,b,c)d)e)t(f)=0 \ ; \\ (299) \ t(p(ab,c,d)e)t(f)=0; \qquad (300) \ t(p(ab,c,d)e)f=0 \ ; \\ (301) \ t(p(ab,c,d)e)t(f)=0; \qquad (302) \ t((p(ab,c,d)e)f)=0 \ ; \\ (303) \ t(p(ab,c,d)e)f=0; \qquad (304) \ t(p(ab,cd,e)f)=0 \ ; \\ (305) \ t(p(a,b,c)t(de)t(f)=0; \qquad (306) \ p((ab.c)d,e,f)=0 \ ; \\ \end{cases}$$

Quando desenvolvemos as equações (227) – (314) surgem 101 tipos distintos. Dentre eles, apenas 6 não estão ligados à forma linear e/ou à forma bilinear de (4.1.1). Os tipos são:

(308) q(p(ab, c, d)e, f) = 0;

(312) t(p(ab.cd, e, f)) = 0;

(314) p(ab, c, d)q(e, f) = 0

(310) t(p(a,b,c))q(d,e)t(f) = 0;

$$T_1. \ \ t(R)((RR.R)R)R$$
  $T_2. \ \ t(R)(RR.RR)R$   $T_3. \ \ t(R)((RR.R)(RR)$   $T_4. \ \ t(R)t(R)RR.RR$   $T_5. \ \ t(R)(t(R)(RR.R)R)$   $T_6. \ \ t(RR)RR.RR$   $T_7. \ \ t(RR)(RR.R)R$   $T_8. \ \ t(RR.R)RR.R$   $T_9. \ \ t(RR)t(R)RR.R$   $T_{10}. \ \ t(R)t(R)t(R)RR.R$   $T_{11}. \ \ t(RR.R)t(R)RR$   $T_{12}. \ \ t(RR)t(RR)RR$ 

(307) p(ab.cd, e, f) = 0;

(309) t(p(ab.c,d))t(e)t(f) = 0;

(311) t(p(ab.c)d, e, f) = 0;

(313) t(p(ab.c, de, f)) = 0;

$T_{13}$ .	t(RR)t(R)t(R)RR	$T_{14}$ .	t(R)t(R)t(R)RR
$T_{15}$ .	t((RR.R)R)RR	$T_{16}$ .	t(RR.RR)RR
$T_{17}$ .	t((RR.RR)R)R	$T_{18}$ .	t((RR.R)RR)R
$T_{19}$ .	t((RR.R)R)R)R	$T_{20}$ .	t((RR.R)R)t(R)R
$T_{21}$ .	t((RR.RR))t(R)R	$T_{22}$ .	t(RR.R)t(RR)R
$T_{23}$ .	t(RR.R)t(R)t(R)R	$T_{24}$ .	t(RR)t(RR)t(R)R
$T_{25}$ .	t(RR)t(R)t(R)t(R)R	$T_{26}$ .	q(R,R)(RR.R)R
$T_{27}$ .	q(R,R)RR.RR	$T_{28}$ .	q(RR,R)RR.R
$T_{29}$ .	q(RR.R,R)RR	$T_{30}$ .	q(RR,RR)RR
$T_{31}$ .	q(RR.R,RR)R	$T_{32}$ .	q((RR.R)R,R)R
$T_{33}$ .	q(RR.RR,R)R	$T_{34}$ .	q(R,R)q(R,R)RR
$T_{35}$ .	q(RR,R)q(R,R)R	$T_{36}$ .	q(R,R)q(R,R)t(R)R
$T_{37}$ .	q(R,R)t(R)t(R)RR	$T_{38}$ .	q(R,R)t(RR)RR
$T_{39}$ .	q(R,R)t(RR)t(R)R	$T_{40}$ .	q(R,R)t(RR.R)R
$T_{41}$ .	q(R,R)t(R)t(R)t(R)R	$T_{42}$ .	q(R,R)t(R)RR.R
$T_{43}$ .	q(RR,R)t(R)RR	$T_{44}$ .	q(RR,R)t(RR)R
$T_{45}$ .	q(RR,R)t(R)t(R)R	$T_{46}$ .	q(RR,RR)t(R)R
$T_{47}$ .	q(RR.R,R)t(R)R		
$T_{48}$ .	t(((((RR.R)R)R)R)R)	$T_{49}$ .	t(((RR.R)R).RR)
$T_{50}$ .	t(((RR.R)RR)R)	$T_{51}$ .	t((RR.R)(RR.R))
$T_{52}$ .	t((RR.RR)RR)	$T_{53}$ .	t(((RR.RR)R)R)
$T_{54}$ .	t(((RR.R)R)R)t(R)	$T_{55}$ .	t((RR.RR)R)t(R)
$T_{56}$ .	t((RR.R).RR)t(R)	$T_{57}$ .	t((RR.R)R)t(RR)
$T_{58}$ .	t(RR.RR)t(RR)	$T_{59}$ .	t(RR.RR)t(R)t(R)
$T_{60}$ .	t((RR.R)R)t(R)t(R)	$T_{61}$ .	t(RR.R)t(RR.R)
$T_{62}$ .	t(RR.R)t(RR)t(R)	$T_{63}$ .	t(RR.R)t(R)t(R)t(R)

$T_{64}$ .	t(RR)t(RR)t(RR)	$T_{65}$ .	t(RR)t(RR)t(R)t(R)
$T_{66}$ .	t(RR)t(R)t(R)t(R)t(R)	$T_{67}$ .	q((RR.R).RR,R)
$T_{68}$ .	q((RR.RR)R,R)	$T_{69}$ .	q(((RR.R)R)R,R)
$T_{70}$ .	q(RR.RR,RR)	$T_{71}$ .	q((RR.R)R,RR)
$T_{72}$ .	q(RR.R,RR.R)	$T_{73}$ .	q(RR,RR)q(R,R)
$T_{74}$ .	q(RR.R,R)q(R,R)	$T_{75}$ .	q(RR,R)q(RR,R)
$T_{76}$ .	q(R,R)q(R,R)q(R,R)	$T_{77}$ .	q(R,R)t((RR.R)R)
$T_{78}$ .	q(R,R)t(RR.RR)	$T_{79}$ .	q(RR,R)t((RR.R)
$T_{80}$ .	q(RR,RR)t(RR)	$T_{81}$ .	q(RR.R,R)t(RR)
$T_{82}$ .	q(RR,RR)t(R)t(R)	$T_{83}$ .	q(RR.R,R)t(R)t(R)
$T_{84}$ .	q(R,R)t(RR.R)t(R)	$T_{85}$ .	q(RR.R,RR)t(R)
$T_{86}$ .	q((RR.R)R,R)t(R)	$T_{87}$ .	q(RR.RR,R)t(R)
$T_{88}$ .	q(RR,R)t(RR)t(R)	$T_{89}$ .	q(RR,R)t(R)t(R)t(R)
$T_{90}$ .	q(R,R)t(RR)t(RR)	$T_{91}$ .	q(R,R)t(RR)t(R)t(R)
$T_{92}$ .	q(R,R)t(R)t(R)t(R)t(R)	$T_{93}$ .	q(R,R)q(R,R)t(RR)
$T_{94}$ .	q(R,R)q(R,R)t(R)t(R)	$T_{95}$ .	q(RR,R)q(R,R)t(R)
$T_{96}$ .	(((RR.R)R)R)R	$T_{97}$ .	((RR.R)RR)R
$T_{98}$ .	((RR.R)R)(RR)	$T_{99}$ .	(RR.R)(RR.R)
$T_{100}$ .	((RR.RR)R)R	$T_{101}$ .	(RR.RR)(RR)

Para cada representação P de  $S_6$ , obtemos as formas escalonadas das matrizes de blocos referentes as identidades (1-226) e as identidades (1-314). Para as representações de 3 a 11, estas formas escalonadas coincidem para os tipos polinomiais  $T_{96}$ ,  $T_{97}$ ,  $T_{98}$ ,  $T_{99}$ ,  $T_{100}$ ,  $T_{101}$ . Para as identidades (1-226) e as representações 1 e 2 temos as seguintes matrizes (os coeficientes estão escritos módulo 103) referentes aos tipos polinomiais:

## Representação 1

000000

### Representação 2

00000|10212|00 0 00|00000|00000|00000 00000101-100100 0 00100000100000100000 0 0 0 0 0 | 0 0 0 0 0 1 1 0 52 52 1 | 0 0 0 0 0 | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 | 0 0 0 0 0 0 1 0 1 52 52 1 | 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 00000100000100 00 | 01 00-1 | 00 00 0 | 00 00 0 0 00000100000100 00 | 00 10-1 | 00 00 00 | 00 00 0 00000100000100 00 | 00 0 1 2 | 00 00 0 0 | 00 00 0 00000100000100 00 | 00 00 0 0 | 1 1 0 0 4 | 0 0 0 0 0 00000100000100 00 | 00 00 0 0 | 00 1 0-1 | 00 00 0 0 00000100000100 00 | 00 00 0 | 00 0 1-1 | 00 00 0 00000100000100 0 00 | 00 00 0 | 00 00 0 0 | 10 00 2 00000100000100 00 | 00 00 0 0 | 00 00 0 0 | 01 00 2 000001000001000 00 | 00 00 0 | 00 00 0 | 00 10-1 00000100000100 0 0010000010000010001-1

Para as identidades (1-314) e as representações 1 e 2 temos as seguintes matrizes (os coeficientes estão escritos módulo 103) referentes aos tipos polinomiais:

## Representação 1

#### 0 1 1-1-1 0

## Representação 2

1 1 0 2 2 | 0 0 0 51 0 | 0 0 52 0-1 | 0 0 0 0 2 | 0 52 0 0 0 | 0 0 0 0 53 0 0 1-1 0 | 0 0 0 52 0 | 0 0 51 0 1 | 0 0 0 0-2 | 0 51 0 0 0 | 0 0 0 0 50 0 0 0 0 0 | 1 0 0 0 2 | 0 0 -1 0-2 | 0 0 0 0 0 | 0 1 0 0 2 | 0 0 0 0 0 0 0 0 0 | 0 1 0 52 0 | 0 0 52 0 1 | 0 0 0 0 0 | 0 51 0 0-1 | 0 0 0 0 50 0 0 0 0 0 | 0 0 1 52 0 | 0 0 52 0 1 | 0 0 0 0 0 0 0 51 0 0-1 | 0 0 0 0 50 0 0 0 0 0 | 0 0 0 0 0 | 1 0 52 52 1 | 0 0 0 0 0 | 0 0 0 0 0 0 0 0 000001000 0 0 | 0 1 52 52 1 | 0 0 0 0 0 | 0 0 0 0 0 0 0 0 00000 | 000 00 | 00 0 00 | 10002 | 0 0000 | 0000 000001000 0 0 0 | 0 1 0 0 -1 | 0 0 0 0 0 | 0 0 0 0 00 | 00 0 000001000 00 | 00 0 00 | 00 10-1 | 0 0000 | 0000 0 000001000 00 | 00 0 00 | 00012 | 0 0000 | 0000 000001000 00 | 00 00 | 000000 | 1 1004 | 0000 000001000 00100 0 00 | 00 00 0 0 0 10 -1 | 00 0 0 000001000 00100 0 00 | 00 00 0 | 0 00 1-1 | 00 00 000001000 00 | 00 00 | 00 00 0 | 0 00 00 0 | 10 00 2 000001000 00 | 00 00 | 00 00 0 | 0 00 00 | 0 10 0 0 2 000001000 00100 0 00 | 00000 | 00000 | 0010 -1 000001000 00100 0 0010000010 000010001-1

Comparando estas matrizes verificamos que aparecem um novo degrau na representação 1 e dois novos degraus na representação 2. Estes novos degraus correspondem as identidades (4.4.1) e (4.4.2).

Portanto podemos enunciar o

**Teorema 4.4.2** Seja A uma álgebra de posto 3 sobre um corpo K de característica diferente de 2, 3, 5. Então temos:

- (i) as identidades de grau  $\leq 5$  são consequências de xy = yx;
- (ii) as identidades de grau 6 são consequências de xy = yx, (4.4.1) e (4.4.2).

# Bibliografia

- [1] A. A. Albert, Power-associative rings, Trans. Amer. Math. Soc. 64:552-593 (1948).
- [2] J. M. Osborn, Quadratic division algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 105:202-221 (1962).
- [3] R. D. Schafer, "An introduction to nonassociative algebras", Academic Press, New York and London, 1966.
- [4] E. Kleinfeld, Generalization of alternative rings I, J. Algebra 18:304-325 (1971).
- [5] E. Kleinfeld, Generalization of alternative rings II, J. Algebra 18:326-339 (1971).
- [6] H. F. Smith, The Wedderburn principal theorem for a generalization of alternative algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 198:139-154 (1974).
- [7] I. R. Hentzel, G. M. Piacentini Cattaneo, Generalization of right alternative rings, Trans. Amer. Math. Soc. 207:143-161 (1975).
- [8] I. R. Hentzel, G. M. Piacentini Cattaneo, Semi-prime generalized alternative rings, J. Algebra 43:14-27 (1976).
- [9] I. R. Hentzel, G. M. Piacentini Cattaneo, A note on generalizing alternative rings, Proc. Amer. Math. Soc. 55:6-8 (1976).
- [10] D. Pokrass, D. J. Rodabaugh, On the nilpotency of generalized alternative algebras,J. Algebra 49:191-205 (1977).

- [11] I. R. Hentzel, Processing identities by group representation, in "Computers in Nonassociative Rings and Algebras", R. E. Beck, B. Kolman (editors), Academic Press, New York, 1977.
- [12] I. R. Hentzel, Alternators of a right alternative algebra, Trans. Amer. Math. Soc. 242:141-156 (1978).
- [13] D. P. Jacobs, Solvability and nilpotency in generalized alternative rings, Comm. Alg. 7:225-239 (1979).
- [14] J. M. Clifton, A simplification of the computation of the natural representation of the symmetric group  $S_n$ , Proc. Amer. Math. Soc. 83:248-250 (1981).
- [15] K. A. Zhevlakov, A. M. Slin'ko, I. P. Shestakov, A. I. Shirshov, "Rings That Are Nearly Associative", Academic Press, New York, 1982.
- [16] I. R. Hentzel, L. A. Peresi, Counterexamples in nonassociative algebras. Alg. Groups Geom. 5:109:128 (1988).
- [17] A. Elduque, Quadratic alternative algebras, J. Math. Phys. 31:1-5 (1990).
- [18] D. P. Jacobs, I. R. Hentzel, A dynamic programming method for building free algebras, Computers Math. Appl. 22:61-66 (1991).
- [19] D. P. Jacobs, S. V. Muddana, A. J. Offutt, A computer algebra system for nonassociative identities, in *Proceedings of The Fifth International Conference On Hadronic Mechanics and Nonpotential Interactions*, H. C. Myung (editor), Nova Science Publishers, Inc., New York, 1993.
- [20] D. P. Jacobs, D. Lee, S. V. Muddana, A. J. Offutt, K. Prabhu, T. Whiteley, Albert's user guide, Department of Computer Science, Clemson University, 1993.

- [21] K. Mayberg, J. M. Osborn, Pseudo-composition algebras, Math. Z. 214:67-77 (1993).
- [22] S. Walcher, Algebras of rank three, in "Non-Associative Algebra and Its Applications" (S. Gonzalez, editor), Mathematics And Its Applications vol. 303, p. 400-404, Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [23] I. Correa, I. R. Hentzel, L. A. Peresi, Minimal identities of Bernstein algebras, Alg. Groups Geom. 11:181-199 (1994).
- [24] I. R. Hentzel, L. A. Peresi, Degree three, four and five identities of quadratic algebras.
  J. Algebra (aceito para publicação).