Multimedidas vetoriais: extensão e integração

Adriana Luiza do Prado

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Teoria da medida e Análise Funcional**
Orientadora: **Profa. Dra. Carmen Silvia Cardassi**

Durante a elaboração deste trabalho a autora recebeu apoio financeiro da CAPES

-São Paulo, dezembro de 1998-

MULTIMEDIDAS VETORIAIS: EXTENSÃO E INTEGRAÇÃO

Este exemplar corresponde
à redação da dissertação corrigida e
defendida por Adriana Luiza do Prado
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 17 de dezembro de 1998.

Comissão Julgadora

- Profa. Dra. Carmen Sílvia Cardassi (Orientadora) - IME - USP
- Prof. Dr. Alfredo Jorge Aragona Vallejo - IME - USP
- Prof. Dr. Dicesar Lass Fernandez -IMECC-UNICAMP.

À minha mãe D. Maria Luiza
e aos meus amigos ,
por cada etapa

A gente é o que é ,
(fazer o quê ?)
mas também a gente é o que vier a ser
(então há tanto por fazer)

Agradecimentos

Agradeço a atenção, a disponibilidade, a paciência e a orientação da Professora Carmen Silvia .

Agradeço a todas as pessoas que de uma maneira ou de outra contribuiram para este trabalho, meus sinceros agradecimentos. Peço desculpas aos que foram involutária e injustamente omitidos.

Quero agradecer especialmente à Adriana Junko (Elita), ao Valério, ao Fernando, colegas do IME, à Luciene e Rosa (colegas de morada) e tantos outros que seria impossível citá-los aqui. Também aos colegas do departamento de matemática da UFPR, em particular, ao Aurélio e à Marelin, professores e grandes incentivadores, ao Yuan e ao Trovon, pelas sugestões.

Sumário

Resumo

Este trabalho tem por objetivo estudar multimedidas definidas de álgebras em subconjuntos de um espaço de Banach real X. A primeira pergunta é como podemos estender multimedida de uma álgebra para uma multimedida numa σ-álgebra. A segunda pergunta é qual a relação entre a multimedida e medida vetorial. Mostramos aqui vários resultados apresentados por D.Kandilakis ([9]), assumindo no último caso que X é reflexivo. Finalmente, nós estudamos as funções de conjuntos obtidas pela integração de uma função limitada mensurável com respeito a uma multimedida.

Abstract

The main purpose of this work is to study the multimeasure defined on a field in the subsets of the real Banach space X. The first question is how we can extend multimeasure on a field to one on a σ-field . The second one is what the relation between multimeasure and vectorial measure is. We show several results presented by D.Kandilakis ([9]), in the last case of which we assume that X is reflexive. Finally, we study the set functions obtained by integrating a bounded measurable function with respect to a multimeasure.

Introdução

Esta dissertação trata de extensão e integração de multimedidas vetoriais. Foi feito um estudo com medidas vetoriais e como estender algumas das propriedades destas medidas para as multimedidas.

O estudo de multimedidas foi motivado primeiramente pela necessidade da economia matemática e em particular na procura de equiíbrio em trocas econômicas. Os primeiros trabalhos sobre isto, segundo Papageorgiou ([14]),são de K.Vind e Debreu-Schmeidler, a partir de então o assunto de multimedidas tem sido desenvolvido extensivamente,

Baseamo-nos nos trabalhos de Dimitrios A. Kandilakis ([9]), de C. Godet-Thobie, ([5] e [6]) e de R.Pallu de La Barriere ([12] e [13]).

O trabalho foi dividido em 4 capítulos. O capítulo 1 apresenta definições, notações e teoremas utilizados ao longo do texto. No capítulo 2 estudamos medida e multimedida. O capítulo 3 trata da extensão de uma multimedida e o capítulo 4, da integração com respeito a uma multimedida.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar definições, notações e teoremas utilizados neste trabalho. Enunciaremos apenas os principais resultados, uma vez que estamos considerando que o leitor tem algum conhecimento de Análise Funcional e de medidas escalares.

1.1 Alguns resultados

Vamos relembrar algumas propriedades dos espaços com os quais estaremos trabalhando.

Definição 1.1 Um `espaço vetorial topológico` é um espaço vetorial X sobre um corpo $\mathbb{K}$ com uma topologia em relação à qual

1. a aplicação de $X \times X \to X$ definida por $(x, y) \to x + y$ é contínua;
2. a aplicação de $\mathbb{K} \times X \to X$ definida por $(a, x) \to a.x$ é contínua.

Definição 1.2 Um `espaço localmente convexo` é um espaço vetorial topológico cuja topologia $\mathcal{T}$ é definida por uma família de seminormas $\mathcal{P}$ tal que $\bigcap_{p \in \mathcal{P}} \{x : p(x) = 0\} = \{0\}$, na qual as sub-bases são os conjuntos $\{x \in X : p(x - y) < \varepsilon\}$, onde $p \in \mathcal{P}$, $y \in X$ e $\varepsilon > 0$. Desta forma um subconjunto U de X é aberto se, e só se, para cada $w \in$ U, existem $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}$ e $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ tais que $\bigcap_{j=1}^{n} \{x \in \mathrm{X} : p_j(x - w) < \varepsilon_j\} \subset \mathrm{U}$.

Exemplo 1.3 Seja X um espaço normado. Então X é um espaço vetorial topológico e também um espaço localmente convexo. Se X for completo diremos que X é um espaço de Banach. Denotaremos por X^* o espaço dos funcionais lineares contínuos sobre X. A inclusão canônica de X em X^{**} será indicada por $J : X \longrightarrow X^{**}$, onde $J(x) = \widehat{x}$, $\widehat{x}(x^*) = x^*(x)$, para todo $x^* \in X^*$. Usaremos também $\widehat{X}$ para $J(X)$.

Exemplo 1.4 Seja X um espaço normado. Para cada $x^* \in X^*$, definimos $p_{x^*} : X \to \mathbb{R}_+$ por $p_{x^*}(x) = |x^*(x)|$, que é uma seminorma sobre X. A família $\mathcal{P}=\{p_{x^*} : x^* \in X^*\}$ torna X um espaço localmente convexo. A topologia definida sobre X por estas seminormas é chamada de topologia fraca, freqüentemente denotada por $\sigma(X, X^*)$ ou ω . Denotaremos (X,ω) o espaço X com a topologia ω .

Exemplo 1.5 Seja X um espaço normado. Para cada $x \in X$ definimos $p_x : X^* \to \mathbb{R}_+$ por $p_x(x^*) = |x^*(x)|$, que é uma seminorma sobre X^*. A família $\mathcal{P}=\{p_x : x \in X\}$ torna X^* um espaço localmente convexo. A topologia definida por estas seminormas é chamada de topologia fraca-estrela (ou fraca-$*$) sobre X^*, normalmente denotada por $\sigma(X^*, X)$ ou ω^*. Denotaremos (X^*, ω^*) o espaço X^* com a topologia ω^*. Definimos $B_{X^*} = \{x^* \in X^* : \|x^*\| = 1\}$.

Teorema 1.6 (Teorema de Hahn-Banach, forma geométrica ([3],p417)) Sejam K_1 e K_2 subconjuntos não vazios, convexos e disjuntos de um espaço localmente convexo real X. Se K_1 é compacto e K_2 é fechado, então existem constantes reais c e a, e $x^* \in X^*$ tais que

$$x^*(x) < c < a < x^*(y), \text{ para todo } x \in K_1 \text{ e } y \in K_2.$$

Teorema 1.7 (Corolário do teorema de Hahn-Banach,forma analítica ([3],p65)) Seja X um espaço normado. Dado $x \in X$ não nulo existe $x^* \in X^*$ tal que $\|x^*\| = 1$ e $x^*(x) = \|x\|$.

Teorema 1.8 (Teorema de Krein-Smulian ([3],p429)) Sejam X um espaço de Banach e K um subconjunto convexo de X^*. O conjunto K é fraco-$*$ fechado se, e somente se, $K \cap rB_{X^*}$ é fraco-$*$ fechado para todo $r \geq 0$.

Teorema 1.9 (Teorema de Eberlein-Smulian ([3],p431)) Seja A um subconjunto de um espaço de Banach X. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. A é relativamente fraco sequencialmente compacto (ié, para toda seqüência $\{x_n\}$ em A, existe $\{x_{n_k}\}$ ω-convergente em X.)
2. $\overline{A}^w$ é fraco-compacto.
3. Todo subconjunto infinito de A tem um ponto limite fraco em X.

Definição 1.10 Sejam X um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $F \subset X$. Um subconjunto de X não vazio A é um `subconjunto extremal` de F se, dados $x, y \in F$ com $tx + (1-t)y \in A$ para algum $t \in (0,1)$, então $x, y \in A$. Um subconjunto extremal de F que só contenha um ponto é chamado de `ponto extremal` de F. Ao conjunto de pontos extremais de F denotaremos $ext\ F$.

Exemplo 1.11 Os lados de um triângulo em $\mathbb{R}^2$ são subconjuntos extremais do mesmo, e seus vértices são pontos extremais dele.

Teorema 1.12 (Teorema de Krein-Milman, ([3],p440)) Sejam X um espaço localmente convexo e K um subconjunto compacto de X. O conjunto dos pontos extremais de K é não vazio e $K \subset \overline{co}(ext\ K)$. Se K for convexo, então $\overline{co}(ext\ K) = K$.

Teorema 1.13 (Teorema de James ([8],p157)) Seja A um subconjunto limitado e fraco-fechado de um espaço de Banach real X. Se cada funcional contínuo em X assume seu supremo em A então A é fraco-compacto.

Teorema 1.14 (Teorema de Orlicz-Pettis ([4],p22)) Sejam X espaço de Banach e $\{x_n\}$ seqüência em X. Se toda subsérie $\sum\limits_k x_{n_k}$ for ω-convergente, então toda subsérie $\sum\limits_k x_{n_k}$ é convergente (em norma).

Teorema 1.15 (([10],p218)) Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções de um conjunto Z em um espaço topológico X. Para que $\mathcal{F}$ seja compacto relativo na topologia da convergência pontual de X^Z é suficiente que:

1. $\mathcal{F}$ seja pontualmente fechada em X^Z,
2. para cada ponto z de Z o conjunto $\mathcal{F}[\{z\}]= \{f(z)/f \in \mathcal{F}\}$ tenha fecho compacto.

Se X é um espaço de Hausdorff as condições acima também são necessárias.

1.2 Funções convexas e funções semicontínuas inferiormente

Seja X um espaço localmente convexo sobre $\mathbb{R}$.

Definição 1.16 A função $g : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é **própria** se existe $x \in X$ tal que $g(x) < +\infty$. Denotaremos por $g \not\equiv +\infty$.

Exemplo 1.17 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$.

Definição 1.18 Seja X um espaço normado. Dada uma função própria $g : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, chamamos de **função conjugada** de g a função $g^* : X^* \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dada por

$$g^*(x^*) = \sup_{x \in X}\{x^*(x) - g(x)\},\ x^* \in X^*.$$

Exemplo 1.19 Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$. Por definição temos

$$f^*(y^*) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{ax - e^x\} \text{ onde } y^*(x) = ax \text{ para algum } a \in \mathbb{R}.$$

Analisemos o sinal de a. Se $a < 0$, $ax - e^x$ pode ser arbitrariamente grande quando tomamos x negativo, logo seu supremo é $+\infty$. Quando $a = 0$, o supremo é trivialmente zero. Para $a > 0$, um cálculo elementar pode ser usado para determinar o supremo, que resulta $a.log(a) - a$.

Portanto a função conjugada da função exponencial é:

$$f^*(y^*) = \begin{cases} a.log(a) - a & \text{se } a > 0 \\ 0 & \text{se } a = 0 \\ +\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}, \text{ onde } y^*(x) = ax.$$

Definição 1.20 A função $g : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é `convexa` se para $x, y \in X$ ocorrer que

$$g(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y), \text{ qualquer que seja } t \in (0, 1).$$

Exemplo 1.21 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$.

Para uma função $g : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ designaremos por *epi* g e $[g \leq \lambda]$ os seguintes conjuntos

$$epi\ g = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} / \mathrm{g(x)} \leq \lambda\}$$
$$[g \leq \lambda] = \{x \in X / g(x) \leq \lambda\}.$$

Proposição 1.22 (Propriedades de funções convexas,[2],p9) Consideramos que todas as funções abaixo estão definidas em X a valores em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

1. Se g é uma função convexa então *epi* g é um conjunto convexo de $X \times \mathbb{R}$, e vale a recíproca.
2. Se g é uma função convexa então para todo λ em $\mathbb{R}$, o conjunto $[g \leq \lambda]$ é convexo, mas a recíproca é falsa.
3. Se g_1 e g_2 são convexas então $g_1 + g_2$ é convexa.
4. Se $(g_i)_{i \in I}$ é uma família de funções convexas então as funções $f(x) = \sup_{i \in I} g_i(x)$ e $g(x) = \sup_{h(x) \leq g_i(x)} h(x)$ são convexas.

Exemplo 1.23 Toda função g^* é convexa.

Definição 1.24 Uma função $g : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é `semicontínua inferiormente` se para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ o conjunto $[g \leq \lambda] = \{x \in X / g(x) \leq \lambda\}$ for fechado em X.

Exemplo 1.25 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = |x|$, $\mathbb{R}$ com a topologia usual.

Exemplo 1.26 Sejam X espaço normado e $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \|x\|$. Então g é uma função ω-semicontínua inferiormente.

Definição 1.27 Uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é indicadora de um conjunto $G \subset X$ quando

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \in G \\ +\infty, \text{ se } x \notin G. \end{cases}$$

Exemplo 1.28 Seja $K \subset X$, K fechado. A função indicadora de K, denotada por I_K, é semicontínua inferiormente.

Proposição 1.29 (Propriedades de funções semicontínuas inferiormente,[2],p8) Consideramos todas as funções abaixo definidas em X a valores em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$

1. Se g é semicontínua inferiormente então *epi* g é fechado em $X \times \mathbb{R}$ e vale a recíproca.
2. A função g é semicontínua inferiormente se, e somente se, para todo $x \in X$ com $g(x) \in \mathbb{R}$ e todo $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança V de x tal que $g(y) \geq g(x) - \varepsilon$, para todo $y \in$ V, e para $x \in X$ com $g(x) = +\infty$, dado $M \in \mathbb{R}$, existe uma vizinhança V de x tal que $g(y) > M$, para todo $y \in$ V.
3. Se g é semicontínua inferiormente e $\{x_\alpha\}$ é um net convergente para x então ocorre que $\liminf g(x_\alpha) \leq g(x)$
4. Se g_1 e g_2 são semicontínuas inferiormente então $g_1 + g_2$ é semicontínua inferiormente.
5. Se $(g_i)_{i \in I}$ é uma família de funções semicontínuas inferiormente então as funções $f(x) = \sup\limits_{i \in I} g_i(x)$ e $g(x) = \sup\limits_{h(x) \leq g_i(x)} h(x)$ são semicontínuas inferiormente.

Observação 1.30 Sejam X espaço normado e $g : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ função própria. A aplicação $x^* \in X^* \mapsto x^*(x) - g(x) \in \mathbb{R}$ é $\|\cdot\|$-contínua, ω-contínua e ω^*-contínua para cada $x \in X$ com $g(x) \in \mathbb{R}$.

Proposição 1.31 Sejam X espaço normado e $g : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Se $g \not\equiv +\infty$ então a função $g^* : X^* \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dada por $g^*(x^*) = \sup\limits_{x \in X}\{x^*(x) - g(x)\}$ é ω^*-semicontínua inferiormente e convexa.

prova:

Resulta do exemplo 1.23, da proposição 1.29 e da observação 1.30.

Definição 1.32 Uma função $g : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é `positivamente homogênea` se ocorre $g(\lambda.x) = \lambda g(x)$ para todo $\lambda > 0$ e todo $x \in X$.

Proposição 1.33 Sejam X espaço normado real e $g : X^* \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ convexa, própria, ω^*-semicontínua inferiormente e positivamente homogênea. Então g^* é indicadora de um conjunto $R \subset X^{**}$ não vazio, convexo e ω^*-fechado. Se $K \subset X$ for tal que $\widehat{K} = R \cap \widehat{X}$, K é não vazio, convexo e ω-fechado.

prova:

Sejam $x_0^* \in X^*$ e $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ com $g(x_0^*) \neq \infty$ e $g(x_0^*) > \lambda_0$. Consideremos (X^*, ω^*), $\mathbb{R}$ com a topologia usual e $X^* \times \mathbb{R}$ com a topologia produto, que é localmente convexa.

Sendo $K_1 = \{(x_0^*, \lambda_0)\}$ e $K_2 = epi\ g$, podemos aplicar o teorema 1.6, pois ambos são convexos, não vazios, K_1 é compacto e K_2 é fechado em $X^* \times \mathbb{R}$.

Logo existem $f : X^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ linear contínua e $\alpha \in \mathbb{R}$ com

$$f(x_0^*, \lambda_0) < \alpha < f(x^*, \lambda) \tag{I}$$

para qualquer $(x^*, \lambda) \in K_2$.

Como a aplicação $x^* \in X^* \mapsto f(x^*, 0) \in \mathbb{R}$ é uma forma linear ω^*-contínua sobre X^* então $f(x^*, 0) = x^*(x_0)$ para um certo $x_0 \in X$.

Além disso, cada (x^*, λ) pode ser escrito como $(x^*, \lambda) = (x^*, 0) + \lambda(0, 1)$ e, colocando $f(0, 1) = k$, temos $f(x^*, \lambda) = x^*(x_0) + \lambda k$, qualquer que seja $(x^*, \lambda) \in X^* \times \mathbb{R}$. y De (I) temos

$$x_0^*(x_0) + k\lambda_0 < \alpha \leq x^*(x_0) + k\lambda \tag{II}$$

para todo $(x^*, \lambda) \in K_2$.

Como $(x_0^*, g(x_0^*)) \in K_2$, temos $x_0^*(x_0) + k\lambda_0 < \alpha \leq x_0^*(x_0) + kg(x_0^*)$.

Assim, $k.g(x_0^*) - k.\lambda_0 > 0$. Mas $g(x_0^*) > \lambda_0$ e portanto $k > 0$.

Pela definição $g^*(\widehat{\frac{-x_0}{k}}) = \sup\limits_{x^* \in X^*} \{\widehat{\frac{-x_0}{k}}(x^*) - g(x^*)\} = \frac{1}{k} \sup\limits_{x^* \in X^*} \{x^*(-x_0) - kg(x^*)\}$.

Usando que $x^*(-x_0) - kg(x^*) = -(x^*(x_0) + kg(x^*)) \overset{(II)}{\leq} -\alpha$ pois $(x^*, g(x^*)) \in K_2$ para todo $x^* \in X^*$, temos $\sup\limits_{x^* \in X^*} \{-x^*(x_0) - kg(x^*)\} \leq -\alpha$. Daí $g^*(\widehat{\frac{-x_0}{k}}) \leq \frac{-\alpha}{k} < \infty$, donde $g^*|_{\widehat{X}} \not\equiv +\infty$.

Como g é positivamente homogênea, vale que $g(x^*) = \lambda g(\lambda^{-1}.x^*)$ para todo $\lambda > 0$. Então

$$\begin{aligned} g^*(x^{**}) &= \sup_{x^* \in X^*} \{x^{**}(x^*) - g(x^*)\} \\ &= \lambda. \sup_{x^* \in X^*} \{\lambda^{-1}.x^{**}(x^*) - g(\lambda^{-1}.x^*)\} \\ &= \lambda g^*(x^{**}) \text{ , para todo } \lambda > 0. \end{aligned}$$

Logo g^* só assume os valores 0 e $+\infty$, ou seja, g^* é indicadora de um conjunto $R \subset X^{**}$.

Podemos escrever $R = \{x^{**} \in X^{**}/g^*(x^{**}) \leq 0\}$ e, sendo g^* convexa e ω^*-semicontínua inferiormente, R é ω^*-fechado e convexo, bem como não vazio pois mostramos acima que existe $\widehat{x_0} \in \widehat{X}$ tal que $g^*(\widehat{\frac{-x_0}{k}}) \in \mathbb{R}$ e então $g^*(\widehat{\frac{-x_0}{k}}) = 0$.

Seja $K \subset X$ tal que $\widehat{K} = R \cap \widehat{X}$, ou seja, $K = J^{-1}(R \cap \widehat{X})$. Então $K \neq \emptyset$ pois $\frac{-x_0}{k} \in K$.

Também K é convexo por que R e $\widehat{X}$ o são.

Ainda temos que K é ω-fechado pois se $\{y_\alpha\}$ em K é ω-convergente para $y_0 \in X$, então $\{\widehat{y_\alpha}\}$ está em R e é ω^*-convergente para $\widehat{y_0}$. Como R é ω^*-fechado, $\widehat{y_0} \in R$ e portanto $y_0 \in K$.∎

1.3 Álgebras e σ-álgebras

Seja Ω um conjunto.

Definição 1.34 Uma álgebra Σ de subconjuntos de Ω é uma família de $\mathcal{P}(\Omega\ )$ tal que:

(i) $\emptyset \in \Sigma$;

(ii) $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$;

(iii) dados quaisquer subconjuntos $A,\ B \in \Sigma$ ocorra $A \cup B \in \Sigma$.

Definição 1.35 Uma σ-álgebra Σ de subconjuntos de Ω é uma família de $\mathcal{P}(\Omega\ )$ tal que:

(i) Σ é uma álgebra;

(ii) para qualquer seqüência $\{A_n\} \in \Sigma$ de conjuntos, disjuntos dois a dois,y ocorrer que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

Consideremos Σ uma álgebra de subconjuntos de Ω , Σ_1 a σ-álgebra gerada por Σ e ν uma medida real não-negativa σ-aditiva definida em Σ_1.

Dada d:$\Sigma_1 \times \Sigma_1 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ por $d(A, B) = \nu(A \triangle B)$, onde $A \triangle B = (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C)$, temos que d é uma pseudométrica ([11],p73 & 118).

Lema 1.36 Sejam $\{A_n\}$ e $\{F_n\}$ seqüências em $\mathcal{P}(\Omega\ )$. Então

(i) $(\bigcup\limits_n A_n) \triangle (\bigcup\limits_n F_n) \subset \bigcup\limits_n (A_n \triangle F_n)$ e em particular $(A_1 \cup A_2) \triangle (F_1 \cup F_2) \subset (A_1 \triangle F_1) \cup (A_2 \triangle F_2)$;

(ii) $(A_1 \cap A_2) \triangle (F_1 \cap F_2) \subset (A_1 \triangle F_1) \cup (A_2 \triangle F_2)$.

prova:

Por definição temos

$$(\bigcup_n A_n)\triangle(\bigcup_k F_k) = ((\bigcup_n A_n)\cap(\bigcup_k F_k)^c)\cup((\bigcup_k F_k)\cap(\bigcup_n A_n)^c) = ((\bigcup_n A_n)\cap(\bigcap_k F_k^c))\cup((\bigcup_k F_k)\cap(\bigcap_n A_n^c)).$$

Se $x \in (\bigcup_n A_n)\cap(\bigcap_k F_k^c)$ temos $x \in \bigcup_n A_n$ e $x \in \bigcap_k F_k^c$. Logo, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_{n_0}$ e $x \in F_k^c$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Em particular $x \in A_{n_0} \cap F_{n_0}^c$ e portanto $x \in \bigcup_n (A_n \cap F_n^c)$.

Analogamente, se $x \in (\bigcup_k F_k)\cap(\bigcap_n A_n^c)$ temos $x \in \bigcup_n (F_n \cap A_n^c))$. Concluímos que se x pertence a $(\bigcup_n A_n)\triangle(\bigcup_k F_k)$ então $x \in \bigcup_n (A_n \cap F_n^c)$ ou $x \in \bigcup_n (F_n \cap A_n^c)$, ou seja, $x \in \bigcup_n (A_n \triangle F_n)$.

Para o item (ii) temos que

$$(A_1 \cap A_2)\triangle(F_1 \cap F_2) = \Big[(A_1 \cap A_2)\cap(F_1\cap F_2)^c\Big] \cup \Big[(F_1\cap F_2)\cap(A_1\cap A_2)^c\Big] =$$

$$=[(A_1\cap A_2)\cap F_1^c]\cup[(A_1\cap A_2)\cap F_2^c]\cup[(F_1\cap F_2)\cap A_1^c]\cup[(F_1\cap F_2)\cap A_2^c] =$$

$$=[A_2\cap(A_1\cap F_1^c)]\cup[A_1\cap(A_2\cap F_2^c)]\cup[F_1\cap(F_2\cap A_2^c)]\cup[F_2\cap(F_1\cap A_1^c)].$$

Mas $A_i \cap F_i^c \subset A_i\triangle F_i$, $F_i \cap A_i^c \subset A_i \triangle F_i$ para $i = 1, 2$.

Logo $(A_1 \cap A_2)\triangle(F_1\cap F_2) \subset (A_1\triangle F_1)\cup(A_2\triangle F_2)$. ∎

Lema 1.37 $\overline{\Sigma}^d$ é uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω .

prova:

Provaremos inicialmente que $\overline{\Sigma}^d$ é uma álgebra.

Dados $A, B \in \overline{\Sigma}^d$ queremos provar que $A \cup B \in \overline{\Sigma}^d$.

Para todo $\varepsilon > 0$, existem $C, D \in \Sigma$ tais que $d(A, C) < \frac{\varepsilon}{2}$ e $d(B, D) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Pelo lema 1.36 $(A\cup B)\triangle(C\cup D) \subset (A\triangle C)\cup(B\triangle D)$ e então temos $d(A\cup B, C\cup D) < \varepsilon$. Logo $A\cup B \in \overline{\Sigma}^d$.

Seja $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seqüência em $\overline{\Sigma}^d$.

Queremos mostrar que $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \overline{\Sigma}^d$. Podemos admitir que $\{A_n\}$ é disjunta por que $\overline{\Sigma}^d$ é álgebra.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $B_k = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$. Logo $B_k \in \overline{\Sigma}^d$.

Como $B_k \subset B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ temos que $B \cap {B_k}^c = \bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n$ e $B_k \cap B^c = \emptyset$. Então

$$\mathrm{d}(B_k, B) = \nu(B\triangle B_k) = \nu(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=k+1}^{\infty}\nu(A_n). \tag{I}$$

Sendo $\nu(B) < \infty$ temos $\sum_{n=k+1}^{\infty}\nu(A_n) \overset{k\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} 0$ e voltando a (I) temos que $B \in \overline{\Sigma}^d$. ∎

Proposição 1.38 Σ é densa em Σ_1 com respeito a d.

prova:

Sabemos que $\overline{\Sigma}^d \subset \Sigma_1$. Mas $\Sigma \subset \overline{\Sigma}^d$ e $\overline{\Sigma}^d$ é σ-álgebra. Portanto $\overline{\Sigma}^d \supset \Sigma_1$. Logo $\overline{\Sigma}^d = \Sigma_1$ e Σ é densa em Σ_1 com respeito a d. ∎

Capítulo 2

Medida e multimedida

Neste capítulo estaremos trabalhando com os conceitos de medidas e multimedidas vetoriais. Teremos um conjunto Ω fixado, um espaço de Banach real X e usaremos álgebras ou σ-álgebras de $\mathcal{P}(\Omega)$.

2.1 Medidas vetoriais e integração vetorial

Seja Σ uma álgebra de subconjuntos de Ω.

Definição 2.1 1. Uma função $m : \Sigma \to X$ é `medida vetorial` se for finitamente aditiva, isto é, se dados A e B em Σ disjuntos ocorrer que $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$. Em particular $m(\emptyset) = 0$.

2. O espaço de todas as medidas vetoriais de Σ em X será denotado por $fa(\Sigma, X)$.

Definição 2.2 1. Uma medida vetorial $m : \Sigma \to X$ é σ-`aditiva` se dada uma seqüência disjunta $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em Σ com $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$ ocorrer $m(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_n m(A_n)$.

2. O espaço de todas as medidas vetoriais σ-aditivas de Σ em X será denotado por $ca(\Sigma, X)$.

Definição 2.3 1. Seja $m : \Sigma \longrightarrow X$ medida vetorial. A `variação de` m é a função não negativa $|m| : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dada por $|m|(E) = \sup_{\pi} \sum_{A\in\pi} \|m(A)\|$ onde, para $E \in \Sigma$, o supremo é tomado sobre todas as partições finitas π de E tais que $\pi \subset \Sigma$.

2. Uma medida vetorial $m : \Sigma \longrightarrow X$ é de variação limitada se $|m|(\Omega) < \infty$.

3. O espaço de todas as medidas vetoriais de variação limitada de Σ em X será denotado por $bv(\Sigma, X)$.

Observação 2.4 Seja m medida vetorial.

1.A função $|m|$ é medida (aditiva) de Σ a valores em $[0,+\infty) \cup \{+\infty\}$ e é monótona.

2. Para todo $x^* \in X^*$, $x^*(m(\cdot)) = x^* \circ m(\cdot)$ é medida (aditiva) a valores reais e é de variação limitada se m o for. Sua variação $|x^* \circ m|(\cdot)$ é limitada por $\|x^*\||m|(\cdot)$.

Exemplo 2.5 Seja $T : L_\infty[0,1] \longrightarrow X$ um operador linear contínuo. Para cada conjunto E contido em $[0,1]$ e Lebesgue-mensurável, definamos $m(E) = T(\chi_E)$, onde χ_E é a função característica de E. Pela linearidade de T, m é uma medida vetorial finitamente aditiva mas não é σ-aditiva em geral, mesmo no caso de $X = \mathbb{R}$.

Exemplo 2.6 Seja $T : L_1[0,1] \longrightarrow X$ um operador linear contínuo. Novamente definimos $m(E) = T(\chi_E)$, onde χ_E é a função característica de E para cada conjunto E contido em $[0,1]$ e Lebesgue-mensurável. Então m é evidentemente finitamente aditiva. Além disso, para cada E, temos $\|m(E)\| \leq \lambda(E)\|T\|$, onde λ é a medida de Lebesgue do $[0,1]$. Como m é dominada por λ e é finitamente aditiva, m é σ-aditiva.

Exemplo 2.7 Seja $m \in bv(\Sigma, X)$. Se f é uma função simples mensurável sobre Ω , digamos $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$, onde α_i são escalares não nulos e E_i são elementos de Σ disjuntos dois a dois, $1 \leq i \leq n$, definimos $T_m(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i m(E_i)$. Esta função é uma aplicação linear do espaço das funções simples mensuráveis em X. Além disso, se f é como acima e $\beta = sup\{|f(z)| : z \in \Omega\}$, então temos que

$$\begin{aligned}
\|T_m(f)\| &= \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(E_i)\| \\
&= \beta\|\sum_{i=1}^{n} (\frac{\alpha_i}{\beta}) m(E_i)\| \\
&\leq \beta \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\alpha_i}{\beta} m(E_i)\| \\
&\leq \beta \sup_{\Pi} \sum_{E \in \Pi} \|m(E)\| \\
&= \beta |m|(\Omega).
\end{aligned}$$

Como $m \in bv(\Sigma, X)$, temos que T_m é uma aplicação linear contínua com $\|T_m\| \leq |m|(\Omega)$, se no conjuntos das funções simples mensuráveis usamos a norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{z \in \Omega} |f(z)|$.

Seja f uma função que é limite uniforme de funções simples mensuráveis, digamos $\{s_k\}$. Usando a norma do supremo temos $\|T_m(s_k - s_j)\| \leq \|s_k - s_j\|_\infty |m|(\Omega)$.

Portanto a seqüência $\{T_m(s_k)\}$ é de Cauchy, logo convergente para algum $x_0 \in X$. Definimos $T_m(f) = x_0$. Note-se que x_0 não depende da particular seqüência $\{s_k\}$ escolhida e ainda temos $\|T_m\| \leq \|f\|_\infty |m|(\Omega)$

Assim T_m admite uma única extensão linear contínua para o conjunto das funções que são limite uniforme de funções simples mensuráveis, que continuaremos chamando de T_m.

Denotaremos por $B(\Sigma)$ o conjunto das funções $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ limitadas e mensuráveis. Observemos que $B(\Sigma)$ é um subconjunto do conjunto de funções que são limite uniforme de funções simples. Assim podemos definir T_m para as funções de $B(\Sigma)$.

Definição 2.8 Sejam $f \in B(\Sigma)$ e $m \in bv(\Sigma, X)$. Definimos a integral de Bartle de f em relação a m em Ω por $\int_\Omega f dm = T_m(f)$, onde $T_m : B(\Sigma) \longrightarrow X$ é como no exemplo 2.7. Também definimos, para $A \in \Sigma$, $\int_A f dm = \int_\Omega f\chi_A dm = T_m(f\chi_A)$.

Proposição 2.9 Sejam $f,\ g \in B(\Sigma)$ e $m,\ n \in bv(\Sigma, X)$ e $A \in \Sigma$. Valem:

1. $\int_A (f+g) dm = \int_A f dm + \int_A g dm$.
2. $\int_A f d(m+n) = \int_A f dm + \int_A f dn$.
3. $\|\int_A f dm\| \leq \|f\|_\infty |m|(A)$.
4. Se $\{m_\alpha\}$ é net em $bv(\Sigma, X)$ com $|m_\alpha|(\Omega) \leq M \in \mathbb{R}$ para todo α, $m_0 \in bv(\Sigma, X)$, e $m_\alpha(B) \longrightarrow m_0(B)$ para todo $B \in \Sigma, B \subset A$, então $\int_A f dm_\alpha \longrightarrow \int_A f dm_0$.

prova:

(1) Temos $\int_A (f+g) dm = \int_\Omega (f+g)\chi_A dm = T_m((f+g)\chi_A)$ por definição. Sabemos que T_m é aplicação linear. Logo $T_m((f+g)\chi_A) = T_m(f\chi_A + g\chi_A) = T_m(f\chi_A) + T_m(g\chi_A) = \int_A f dm + \int_A g dm$.

(2) Temos $m+n \in bv(\Sigma, X)$. Suponhamos que f seja simples, $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$, onde α_i são escalares não nulos e $E_i \in \Sigma$, dois a dois disjuntos, $1 \leq i \leq n$. Então

$$\begin{aligned}
\int_A f d(m+n) &= \int_\Omega f\chi_A d(m+n) &&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (m+n)(E_i \cap A) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (m(E_i \cap A) + n(E_i \cap A)) &&= \sum_{i=1}^{n} [\alpha_i m(E_i \cap A) + \alpha_i n(E_i \cap A)] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(E_i \cap A) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i n(E_i \cap A) &&= \int_A f dm + \int_A f dn.
\end{aligned}$$

Se f não for simples, como $f \in B(\Sigma)$, existe uma seqüência de funções simples mensuráveis $\{s_k\}$ tal que $s_k \xrightarrow{u} f$.

Então $T_m(s_k) \longrightarrow T_m(f)$, $T_n(s_k) \longrightarrow T_n(f)$, $T_{m+n}(s_k) \longrightarrow T_{m+n}(f)$ e como $T_{m+n}(s_k) = T_m(s_k) + T_n(s_k)$, para todo $k \in \mathbb{N}$, temos $T_{m+n}(f) = T_m(f) + T_n(f)$.

(3) Se f for simples, digamos $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$, onde α_i são escalares não nulos e $E_i \in \Sigma$, dois a dois disjuntos, $1 \leq i \leq n$, temos

$$\| \int_A f dm \| = \| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(E_i \cap A) \| \leq \|f\|_\infty \sum_{i=1}^{n} \|m(E_i \cap A)\| \leq \|f\|_\infty |m|(A).$$

Se f não for simples e $\{s_k\}$ for uma seqüência de funções simples mensuráveis com $s_k \xrightarrow{u} f$, temos $\int_A s_k dm \longrightarrow \int_A f dm$ e também $\|s_k\|_\infty \longrightarrow \|f\|_\infty$. Pela parte anterior, segue-se que $\| \int_A f dm \| \leq \|f\|_\infty |m|(A)$.

(4) Se f for simples, dada por $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$, onde α_i são escalares não nulos e $E_i \in \Sigma$, dois a dois disjuntos, $1 \leq i \leq n$, então $\| \int_A f dm_\alpha - \int_A f dm_0 \| \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \|m_\alpha(E_i \cap A) - m_0(E_i \cap A)\| \longrightarrow 0$.

Se f não for simples, dado $\varepsilon > 0$, existe s simples mensurável com $\|f - s\|_\infty < \varepsilon$. Com o mesmo $\varepsilon > 0$, existe α_0 tal que $\alpha > \alpha_0$ implica em $\| \int_A s dm_\alpha - \int_A s dm_0 \| < \varepsilon$.

Então, se $\alpha > \alpha_0$,

$$\begin{aligned} \| \int_A f dm_\alpha - \int_A f dm_0 \| &\leq \|f - s\|_\infty [|m_\alpha|(A) + |m_0|(A)] + \| \int_A s dm_\alpha - \int_A s dm_0 \| \\ &< \varepsilon \, [M + |m_0|(A) + 1]. \end{aligned}$$

Logo $\int_A f dm_\alpha \longrightarrow \int_A f dm_0$.

Proposição 2.10 Para $f \in B(\Sigma)$ e $m \in bv(\Sigma, X)$, a função $n : \Sigma \longrightarrow X$, dada por $n(A) = \int_A f dm$, $A \in \Sigma$, é uma medida vetorial de variação limitada com $|n|(\cdot) \leq \|f\|_\infty |m|(\cdot)$ e ainda para todo $x^* \in X^*$ vale $x^*(n(A)) = \int_A f dx^* \circ m$.

prova:

Sejam $f \in B(\Sigma)$ e $m \in bv(\Sigma, X)$. Temos $n(\emptyset) = \int_\emptyset f dm = 0$.

Dados $A, B \in \Sigma$ disjuntos, então

$$\begin{aligned} n(A \cup B) &= \int_{A \cup B} f dm &&= \int_\Omega f \cdot \chi_{A \cup B} dm \\ &= \int_\Omega f \chi_A dm + \int_\Omega f \chi_B dm &&= \int_A f dm + \int_B f dm \\ &= n(A) + n(B). \end{aligned}$$

Logo n é aditiva.

Pela proposição 2.9 (3), $\|n(E)\| = \| \int_E f dm \| \leq \|f\|_\infty |m|(E)$, para todo $E \in \Sigma$.

Fixemos $A \in \Sigma$.

Sabemos que $f \in B(\Sigma)$. Então existe um $M \in \mathbb{R}$ tal que $\|f\|_\infty < M$ e como $m \in bv(\Sigma, X)$ temos que $|m|(A) \leq |m|(\Omega) < \infty$.

Por outro lado $|n|(A)$ satisfaz

$$\begin{aligned}
|n|(A) &= \sup_{\pi} \sum_{E\in\pi} \|n(E)\| \\
&\leq \sup_{\pi} \sum_{E\in\pi} \|f\|_{\infty}|m|(E) \\
&\leq \|f\|_{\infty} \sup_{\pi} \sum_{E\in\pi} |m|(E) \\
&\leq \|f\|_{\infty}|m|(A) \\
&\leq M|m|(\Omega) < \infty.
\end{aligned}$$

Sejam $x^* \in X^*$ e $f \in B(\Sigma)$.

Se f for simples, dada por $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$, onde α_i são escalares não nulos e $E_i \in \Sigma$,dois a dois disjuntos, $1 \leq i \leq n$, temos que

$x^*(\int_A f dm) = x^*(\sum_{i=1}^{n} \alpha_1 m(E_i \cap A)) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^*(m(E_i \cap A)) = \int_A f dx^* \circ m.$

Se f não for simples, como $f \in B(\Sigma)$, existe seqüência de funções simples mensuráveis tal que $s_k \xrightarrow{\mathcal{U}} f$.

Para cada s_k vale $x^*(\int_A s_k dm) = \int_A s_k dx^* \circ m$, e $\int_A s_k dx^* \circ m \longrightarrow \int_A f dx^* \circ m$ e ainda $x^*(\int_A s_k dm) \longrightarrow x^*(\int_A f dm)$.

Obtemos que $x^*(\int_A f dm) = \int_A f dx^* \circ m$, ou seja, $x^*(n(A)) = \int_A f dx^* \circ m$. ∎

2.2 Multimedidas

Seja Σ uma álgebra de subconjuntos de Ω , consideraremos em $\mathcal{P}(X)$ os seguintes subconjuntos

$$\begin{aligned}
P_0(X) &= \{A \subset X / A \neq \emptyset\}, \\
P_{fc}(X) &= \{A \subset X / A \neq \emptyset, \text{ fechado e convexo }\}, e \\
P_{lfc}(X) &= \{A \subset X / A \neq \emptyset, \text{ limitado, fechado e convexo }\}, e \\
P_{wkc}(X) &= \{A \subset X / A \neq \emptyset, \text{fracamente compacto e convexo}\}.
\end{aligned}$$

Definição 2.11 1.Dizemos que uma multifunção $M : \Sigma \longrightarrow P_0(X)$ é uma `multimedida` se $M(\emptyset) = \{0\}$ e se for finitamente aditiva, isto é, se dados A e B em Σ disjuntos ocorrer que $M(A \cup B) = M(A) + M(B)$.

2.Uma multimedida M é σ-`aditiva` ou `multimedida forte` se dada uma seqüência disjunta $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em Σ , com $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$, ocorrer que se para todo seqüência $\{x_n\}$ com

$x_n \in M(A_n), n \in \mathbb{N}$, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge e $M(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} M(A_n)$, onde $\sum_{n\in\mathbb{N}} M(A_n) = \{x/x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n, x_n \in M(A_n)\}$.

3.Uma multimedida M é `fortemente aditiva` se para cada seqüência disjunta $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em Σ e cada seqüência $\{x_n\}$ com $x_n \in M(A_n), n \in \mathbb{N}$, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge.

4.Uma multifunção $M : \Sigma \longrightarrow P_0(X)$ é uma `multimedida fraca` se para cada $x^* \in X^*$, a função $\sigma(x^*, M(\cdot)) : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dada por $\sigma(x^*, M(A)) = \sup_{x\in M(A)} x^*(x)$ for uma medida σ-aditiva com sinal.

5. Em todos os casos anteriores definimos $M(\Sigma) = \bigcup_{A\in\Sigma} M(A)$.

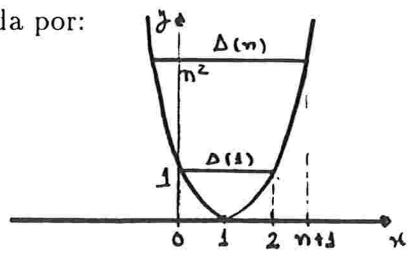
Observação 2.12 As séries do tipo $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n, x_n \in M(A_n)$, onde $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência disjunta em Σ e M é multimedida σ-aditiva ou fortemente aditiva são incondicionalmente convergentes em X, pois a convergência independe da ordem dos $A_{n's}$.

Exemplo 2.13 (Multimedida forte) Sejam $(\Omega, \Sigma, \lambda)$ um espaço mensurável com λ medida positiva, X um espaço de Banach e Q um subconjunto limitado de X. Se Ξ é uma família de medidas vetoriais de Σ em X satisfazendo que para cada $m \in \Xi$, para cada $A \in \Sigma$ ocorre que $m(A) \in \lambda(A).Q$. Definimos M por $M(A) = \{\sum_{i\le n} m_i(A_i), m_i \in \Xi, \{A_i\}_{i\le n}$ partição finita de $A\}$. Então M é uma multimedida forte.

Exemplo 2.14 (Multimedida fraca que não é forte) Sejam $X = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{C}$ o gráfico de $y = (x-1)^2$. Tomemos $\Omega = \mathbb{N}$ e $\Sigma = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Seja a multifunção $M : \Sigma \longrightarrow P_0(X)$ definida por

$$M(A) = \begin{cases} \sum_{n\in A} \Delta(n) & \text{, se } A \text{ finito} \\ \mathbb{R}^2 & \text{, se } A \text{ infinito} \end{cases}$$

Onde $\Delta(n)$ é dada por:



Para cada $z \in \mathbb{R}^2$ temos $\lim_{n\longrightarrow\pm\infty} \sup_{z\in\Delta(n)} x^*(z) = +\infty$. Então, para cada cada $z \in \mathbb{R}^2$, para cada $A = \bigcup_n A_n$ (disjuntos), $\sigma(z, M(A)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma(z, M(A_n))$. Mas, para cada $x_n \in M(A_n)$, x_n não é somável.

Proposição 2.15 1.Se $M : \Sigma \longrightarrow P_0(X)$ é uma multimedida forte então M é uma multimedida fraca.

2. Se $M : \Sigma \longrightarrow P_{fc}(X)$ é uma multifunção com $\sigma(x^*, M(\cdot))$ medida aditiva para todo $x^* \in X^*$ então $M(\emptyset) = \{0\}$ e se $A,\ B \in \Sigma$ são disjuntos, $\overline{M(A) + M(B)} = M(A \cup B)$.

3. Se $M : \Sigma \longrightarrow P_0(X)$ é uma multimedida então $\sigma(x^*, M(\cdot))$ é medida (aditiva) para todo $x^* \in X^*$.

prova:

(1)Seja $x^* \in X^*$ fixado e consideremos a função $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por

$$\mu(A) = \sigma(x^*, M(A)) = \sup_{x \in M(A)} x^*(x).$$

Temos:

<u>(i)</u> μ só assume valores em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Como nenhum $M(A)$ é vazio, teremos sempre $\sup\limits_{x \in M(A)} x^*(x) > -\infty$.

<u>(ii)</u> $\mu\ (\ \emptyset\ ) = 0$.

De fato, $\mu\ (\ \emptyset\ ) = \sigma(x^*, M(\emptyset)) = \sup\limits_{x \in \{0\}} x^*(x) = 0$

<u>(iii)</u> $\mu(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$, para toda seqüência disjunta $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em Σ com $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

Seja uma seqüência disjunta $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em Σ com $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.

Como $\mu(A) = \sigma(x^*, M(A)) = \sup\limits_{x \in M(A)} x^*(x)$, dado $\varepsilon > 0$ existem $\overline{x_n} \in M(A_n)$ tais que $x^*(\overline{x_n}) > \mu(A_n) - \frac{\varepsilon}{2^n}$,ou seja, $\mu(A_n) < x^*(\overline{x_n}) + \frac{\varepsilon}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Assim, $\sum\limits_{n=1}^{k} \mu(A_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{k} x^*(\overline{x_n}) + \varepsilon\ (1 - \frac{1}{2^k})$.

Tomando o limite superior temos $\limsup \sum\limits_{n=1}^{k} \mu(A_n) \leq \limsup \sum\limits_{n=1}^{k} x^*(\overline{x_n}) + \limsup \varepsilon\ (1 - \frac{1}{2^k})$.

Como M é multimedida forte a série $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \overline{x_n}$ converge, e então $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} x^*(\overline{x_n})$ converge. Portanto $\limsup \sum\limits_{n=1}^{k} x^*(\overline{x_n}) = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} x^*(\overline{x_n})$.

Com isto temos $\limsup \sum\limits_{n=1}^{k} \mu(A_n) \leq \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} x^*(\overline{x_n}) + \varepsilon = x^*(\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \overline{x_n}) + \varepsilon$, de onde segue que $\limsup \sum\limits_{n=1}^{k} \mu(A_n) \leq \mu(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n) + \varepsilon$, pois $\mu(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sup\limits_{x_n \in M(A_n)} x^*(\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} x_n)$.

Como ε é arbitrário,

$$\limsup \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n) \leq \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n). \tag{I}$$

Por outro lado, para quaisquer $x_n \in M(A_n)$ e para cada $k \in \mathbb{N}$ temos que

$$\sum_{n=1}^{k} x^*(x_n) \leq \sum_{n=1}^{k} \sup_{x_n \in M(A_n)} x^*(x_n) = \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n).$$

Assim $\liminf_k \sum_{n=1}^{k} x^*(x_n) \leq \liminf_k \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n)$.

Mas $\liminf_k \sum_{n=1}^{k} x^*(x_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x^*(x_n) = x^*(\sum_n x_n)$, como antes, por M ser multimedida forte.

Logo,

$$\mu(\bigcup_n A_n) = \sup_{x_n \in M(A_n)} x^*(\sum_{n=1}^{k} x_n) \leq \liminf \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n). \qquad \text{(II)}$$

De (I) e (II) temos $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \lim_{k \longrightarrow \infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n)$, ou seja, $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$.

Logo μ é uma medida σ-aditiva com sinal e portanto M é uma multimedida fraca.

(2) Se $x \in M(\emptyset)$ e $x \neq 0$, existe $x_0^* \in X^*$ com $x_0^*(x) = \|x\| > 0$. Logo $\sigma(x_0^*, M(\emptyset)) > 0$ e $\sigma(x_0^*, M(\cdot))$ não seria medida aditiva.

Sejam $A,\ B \in \Sigma$ disjuntos. Sabemos que $M(A \cup B)$ é convexo e fechado.

Para $x = x_A + x_B \in M(A) + M(B)$, se $x \notin M(A \cup B)$, pelo teorema 1.6 existem $c,\ a \in \mathbb{R}$ e $x_0^* \in X^*$, com

$x_0^*(x) = x_0^*(x_A) + x_0^*(x_B) > c > a > x_0^*(z)$, para todo $z \in M(A \cup B)$.

Portanto,

$$\sigma(x_0^*, M(A)) + \sigma(x_0^*, M(B)) \geq x_0^*(x) > c > a \geq \sigma(x_0^*, M(A \cup B)),$$

e $\sigma(x_0^*, M(\cdot))$ não seria aditiva. Logo,

$$M(A) + M(B) \subset M(A \cup B). \qquad \text{(III)}$$

Por outro lado, se existir $y \in M(A \cup B)$ com $y \notin \overline{M(A) + M(B)}$, de novo existirá $y_0^* \in X^*$ com

$y_0^*(y) > c > a > y_0^*(w)$, para todo $w \in \overline{M(A) + M(B)}$ e daí

$$\sigma(y_0^*, M(A \cup B)) \geq y_0^*(y) > c > a \geq \sigma(y_0^*, M(A)) + \sigma(y_0^*, M(B)),$$

contrariando também a aditividade de $\sigma(y_0^*, M(\cdot))$.

Logo,

$$M(A \cup B) \subset \overline{M(A) + M(B)}. \qquad \text{(IV)}$$

De (III) e (IV) segue que $M(A \cup B) = \overline{M(A) + M(B)}$.

(3) Como $M(\emptyset) = \{0\}$, $\sigma(x^*, M(\emptyset)) = 0$, para todo $x^* \in X^*$.

Dados A, $B \in \Sigma$ disjuntos, temos que $M(A \cup B) = M(A) + M(B)$.

Logo, para todo $x^* \in X^*$,

$$\begin{aligned}
\sigma(x^*, M(A \cup B)) &= \sup_{x \in M(A\cup B)} x^*(x) \\
&= \sup_{\substack{x = x_A + x_B \\ x_A \in M(A),\ x_B \in M(B)}} x^*(x_A + x_B) \\
&= \sup_{x_A \in M(A)} x^*(x_A) + \sup_{x_b \in M(B)} x^*(x_B) \\
&= \sigma(x^*, M(A)) + \sigma(x^*, M(B)).
\end{aligned}$$

Lema 2.16 Seja $M : \Sigma \longrightarrow P_0(X)$ uma multimedida. M é fortemente aditiva se e somente se para toda seqüência disjunta $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em Σ e quaisquer que sejam $x_n \in M(A_n), n \in \mathbb{N}$ temos que $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_n\| = 0$.

prova:

Se M é fortemente aditiva, dados $\{A_n\}$ e $\{x_n\}$ como no enunciado, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge e portanto $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_n\| = 0$.

Suponhamos que M não seja fortemente aditiva. Então existem $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ em Σ e x_j em $M(A_j)$ tais que a série $\sum_{j\in\mathbb{N}} x_j$ é divergente.

Logo $\{s_k\} = \{\sum_{j=1}^{k} x_j\}$ não é de Cauchy, ou seja, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo n_0 existem $m, n > n_0$ com $\|s_m - s_n\| > \varepsilon_0$.

Sem perda de generalidade podemos supor que $m > n$. Então $s_m - s_n = x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_m = \sum_{j=n+1}^{m} x_j, x_j \in M(A_j)$ e assim $s_m - s_n \in M(\bigcup_{j=n+1}^{m} A_j)$.

Para $n_0 = 1$, existem $m_1 > n_1 > 1$ com $\|s_{m_1} - s_{n_1}\| > \varepsilon_0$. Tomemos $B_1 = \bigcup_{j=n_1+1}^{m_1} A_j$ e $y_1 = s_{m_1} - s_{n_1}$. Logo $y_1 \in M(B_1)$ e $\|y_1\| > \varepsilon_0$.

Para $n_0 = m_1$, existem $m_2 > n_2 > m_1$ com $\|s_{m_2} - s_{n_2}\| > \varepsilon_0$. Tomemos $B_2 = \bigcup_{j=n_2+1}^{m_2} A_j$ e $y_2 = s_{m_2} - s_{n_2}$. Logo $y_2 \in M(B_2)$ e $\|y_2\| > \varepsilon_0$.

Genericamente, para $n_0 = m_{k-1}$ sejam $m_k > n_k > m_{k-1}$ com $\|s_{m_k} - s_{n_k}\| > \varepsilon_0$. Tomando $B_k = \bigcup_{j=n_k+1}^{m_k} A_j$ e $y_k = s_{m_k} - s_{n_k}$, temos $y_k \in M(B_k)$ e $\|y_k\| > \varepsilon_0$.

Assim, $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência disjunta em Σ , e a seqüência $\{y_k\}$, com $y_k \in M(B_k)$, é tal que $\|y_k\| > \varepsilon_0$, donde $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|y_k\| \neq 0$. ∎

Proposição 2.17 Seja $M : \Sigma \longrightarrow P_{fc}(X)$ uma multimedida tal que $M(\Sigma)$ seja um subconjunto de X relativamente fraco-compacto. Então M é fortemente aditiva.

prova:

Vamos provar inicialmente que dados uma seqüência disjunta $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em Σ e x_n em $M(A_n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^*(x_n)$ é convergente para todo $x^* \in X^*$.

Suponhamos, por absurdo, que exista $x_1{}^* \in X^*$ tal que a série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_1{}^*(x_n)$ seja divergente. Sem perda de generalidade podemos admitir que a série de termos positivos de $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_1{}^*(x_n)$ é divergente.

Sejam então $p_i = x_1^*(x_{n_i}) > 0, i \in \mathbb{N}$ e $x_1^*(x_n) \leq 0$ se $n \in \mathbb{N}$-$\{n_i : i \in \mathbb{N}\}$.

Como M é multimedida, $M(\bigcup_{n=1}^{k} B_n) = \sum_{n=1}^{k} M(B_n)$ para quaisquer $B_1, B_2, \ldots B_k \in \Sigma$ dois a dois disjuntos e assim toda subsérie de $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ tem somas parciais em $M(\Sigma)$, que é relativamente fraco-compacto.

Como $\overline{M(\Sigma)}^{\omega}$ é ω-compacto, temos pelo teorema 1.9 , a seqüência das somas parciais de $\sum_{i\in\mathbb{N}} x_{n_i}$ tem subseqüência ω-convergente em $\overline{M(\Sigma)}^{\omega}$, ou seja, sendo $s_j = \sum_{i=1}^{j} x_{n_i}$, existe $s_{j_t} = \sum_{i=1}^{j_t} x_{n_i}$ ω-convergente para $x_0 \in X$. Então $\sum_{i=1}^{j_t} x_1^*(x_{n_i}) \overset{t\longrightarrow\infty}{\longrightarrow} x_1^*(x_0)$ e como $p_i > 0$, isso significa que a série $\sum_i p_i$ converge para $x_1^*(x_0)$, o que contradiz a suposição de que $\sum p_i$ é divergente.

Portanto, para todo $x^* \in X^*$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} x^*(x_n)$ converge.

Agora vamos mostrar que para toda subsérie $\sum_k x_{n_k}$ existe $x_0 \in X$ tal que $\sum_{k\geq 1} x^*(x_{n_k})$ converge para $x^*(x_0)$, para todo $x^* \in X^*$.

Seja $s_j = \sum_{k=1}^{j} x_{n_k}$. Sabemos que $\sum_{k\in\mathbb{N}} x^*(x_{n_k})$ converge, para todo $x^* \in X^*$.

De novo, pelo teorema 1.9, temos que existem $\{s_{j_r}\}$ e $x_0 \in X$ tais que

$$x^*(s_{j_r}) = x^*(\sum_{k=1}^{j_r} x_{n_k}) \longrightarrow x^*(x_0), \tag{I}$$

para todo $x^* \in X^*$.

Por (I) e pela convergência temos a seqüência das somas parciais de $\sum x^*(x_{n_k})$ convergente, com subseqüência convergente para $x^*(x_0)$. Logo, $\{x^*(s_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ converge para $x^*(x_0)$.

Podemos agora aplicar o teorema 1.14, concluindo que toda subsérie de $\sum x_n$ é convergente, ou seja, $\sum x_n$ é incondicionalmente convergente.

Portanto, M é fortemente aditiva.

Proposição 2.18 Consideremos $M : \Sigma \longrightarrow P_{fc}(X)$ uma multimedida fortemente aditiva tal que a aplicação $A \in \Sigma \mapsto \sigma(x^*, M(A)) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ seja uma medida σ-aditiva para cada $x^* \in X^*$. Então M é σ-aditiva.

prova:

Suponhamos que não. Então existem uma seqüência disjunta $\{A_n\}$ em Σ com $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ em Σ e $x_n \in M(A_n), n \in \mathbb{N}$ tais que $\sum_n x_n$ é convergente para $y \in X$, pois M é fortemente aditiva, mas $y = \sum_n x_n \notin M(\bigcup_n A_n)$.

Como $\{y\}$ é um conjunto convexo e compacto e $M(\bigcup_n A_n)$ é fechado e convexo podemos aplicar o teorema 1.6 e existem constantes reais c e a e $x^* \in X^*$ tais que $x^*(y) < c < a < x^*(z)$, para qualquer $z \in M(\bigcup_n A_n)$.

Seja $y^* = -x^*$. Assim $y^*(z) < -c < y^*(y)$ para todo $z \in M(\bigcup_n A_n)$. Mas $y^*(y) = y^*(\sum_n x_n) = \sum_n y^*(x_n) \leq \sum_n \sigma(y^*, M(A_n))$, donde $y^*(z) < -c < \sum_n \sigma(y^*, M(A_n))$, para qualquer $z \in M(\bigcup_n A_n)$. Logo $\sigma(y^*, M(\bigcup_n A_n)) = \sup_{z\in M(\bigcup_n A_n)} y^*(z) \leq -c < \sum_n \sigma(y^*, M(A_n))$, o que contradiz a hipótese. Portanto, M é σ-aditiva. ∎

Lembramos que dados dois conjuntos K e L de um espaço métrico M a `distância de Hausdorff` entre eles é dada por:

$$h(K, L) = max\left\{\sup_{x\in K} d(x, L), \sup_{x\in L} d(x, K)\right\},$$

onde $d(x, K) = \inf\{d(x, y), y \in K\}$.

Lema 2.19 Seja $M : \Sigma \longrightarrow P_0(X)$ multimedida fortemente aditiva.Então:

(i) $\lim_{n\longrightarrow\infty} h(\{0\}, \sum_{k=n}^{\infty} M(A_k)) = 0$, para qualquer seqüência disjunta $\{A_n\}$ em Σ .

Se M tiver valores em $P_{lfc}(X)$

(ii) $M(\Sigma)$ é um subconjunto limitado de X.

(iii) Se $\sigma(x^*, M(\cdot))$ for σ-aditiva para cada $x^* \in X^*$ então a coleção $\{\sigma(x^*, M(\cdot))/x^* \in X^*$ e $\|x^*\| \leq 1\}$ é uma família de medidas uniformemente σ-aditiva.

prova:

(i) Suponhamos, por absurdo, que exista uma seqüência disjunta $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ em Σ tal que $\lim_{n\longrightarrow\infty} h(\{0\}, \sum_{k=n}^{\infty} M(A_k)) \neq 0$. Então, existem $\varepsilon > 0$ e uma subseqüência $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ tais que $h(\{0\}, \sum_{k=n_i}^{\infty} M(A_k)) > \varepsilon$, ou seja, $\sup_{x\in \sum_{k=n_i}^{\infty} M(A_k)} \|x\| > \varepsilon$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Dado $k_1 = n_1$, escolhemos $m_1 \in \{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $m_1 > k_1$ e $x_1 \in \sum_{j=k_1}^{m_1} M(A_j)$ com $\|x_1\| > \frac{\varepsilon}{2}$.

Tomando $k_2 > m_1$ e $k_2 \in \{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, escolhemos $m_2 \in \{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $m_2 > k_2$ e $x_2 \in \sum_{j=k_2}^{m_2} M(A_k)$ com $\|x_2\| > \frac{\varepsilon}{2}$.

E assim sucessivamente, para cada r podemos construir $x_r \in M(B_r)$, onde $B_r = \bigcup_{k=n_r}^{m_r} A_k$, com $\|x_r\| > \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Então $\{B_r\}$ é uma seqüência disjunta em Σ com $x_r \in M(B_r)$ e $\lim_{r\longrightarrow\infty} \|x_r\| \neq 0$, e isso contradiz a hipótese de M ser fortemente aditiva.

(ii) Observemos inicialmente que para todo $A \in \Sigma$ temos $h(\{0\}, M(A)) = \sup_{x\in M(A)} \|x\| < \infty$, pois $M(A)$ é limitado.

Suponhamos agora que $M(\Sigma)$ não seja limitado.

Então existe um conjunto $A_1 \in \Sigma$ com $h(\{0\}, M(A_1)) > 1$. Como observamos acima, $h(\{0\}, M(A_1)) < \infty$ logo existe um conjunto $C_2 \in \Sigma$ com $h(\{0\}, M(C_2)) > 2.h(\{0\}, M(A_1))$.

Sendo $A_2 = A_1 \cup C_2$, vale que $h(\{0\}, M(A_2)) > 2.h(\{0\}, M(A_1))$ e $h(\{0\}, M(A_2)) < \infty$.

Do mesmo modo, existe $C_3 \in \Sigma$ com $h(\{0\}, M(C_3)) > 2.h(\{0\}, M(A_2))$.

Tomando $A_3 = A_2 \cup C_3$, temos $h(\{0\}, M(A_3)) > 2.h(\{0\}, M(A_2))$.

Assim sucessivamente, construímos $\{A_n\}$ em Σ com $h(\{0\}, M(A_1)) > 1$, $A_n \subset A_{n+1}$ e $h(\{0\}, M(A_{n+1})) > 2.h(\{0\}, M(A_n))$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos $\{B_n\}$, seqüência disjunta em Σ, dada por $B_1 = A_1$, $B_{n+1} = A_{n+1} \cap A_n^c$, para $n \in \mathbb{N}$.

Como $A_n \cap B_{n+1} = \emptyset$, $A_n \cup B_{n+1} = A_{n+1}$ e M é finitamente aditiva temos,

$$M(A_{n+1}) = M(A_n) + M(B_{n+1}) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Seja $y_1 \in M(B_1) = M(A_1)$ com $\|y_1\| > 1$.

Escolhendo $x_2 \in M(A_2)$ com $\|x_2\| > 2.h(\{0\}, M(A_1))$, existem $z_1 \in M(A_1)$ e $y_2 \in M(B_2)$ tais que $x_2 = z_1 + y_2$. Daí $\|y_2\| = \|x_2 - z_1\| \geq \|x_2\| - \|z_1\| > h(\{0\}, M(A_1)) > 1$.

Tomando $x_3 \in M(A_3)$ com $\|x_3\| > 2h(\{0\}, M(A_2))$, também $x_3 = z_2 + y_3$, com $z_2 \in M(A_2)$ e $y_3 \in M(B_3)$. Novamente, $\|y_3\| \geq \|x_3\| - \|z_2\| > h(\{0\}, M(A_2)) > h(\{0\}, M(A_1)) > 1$.

Deste modo construímos uma seqüência $\{y_n\}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $y_n \in M(B_n)$ e $\|y_n\| > 1$, e portanto $\sum\limits_n y_n$ não pode ser convergente.

As seqüências $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em Σ e $\{y_n\}$ em X contradizem o fato de M ser fortemente aditiva.

Logo, $M(\Sigma)$ é limitado.

(iii) Pela proposicao 2.18 sabemos que M é σ-aditiva e portanto, pela proposição 2.13, é uma multimedida fraca.

Então, dados $x^* \in X^*$ e uma seqüência disjunta $\{A_n\}$ com $\bigcup\limits_n A_n \in \Sigma$, para cada $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\begin{aligned} \left|\sum_{k=n}^{\infty} \sigma(x^*, M(A_k))\right| &= \left|\sigma(x^*, M(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k))\right| = \left| \sup_{x \in \sum_{k=n}^{\infty} M(A_k)} x^*(x)\right| \\ &\leq \sup_{x \in \sum_{k=n}^{\infty} M(A_k)} |x^*(x)| \leq \|x^*\| \sup_{x \in \sum_{k=n}^{\infty} M(A_k)} \|x\|. \end{aligned}$$

Logo, $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \sup\limits_{\|x^*\| \leq 1} \left|\sum\limits_{k=n}^{\infty} \sigma(x^*, M(A_k))\right| \leq \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \sup\limits_{x \in \sum_{k=n}^{\infty} M(A_k)} \|x\| \overset{(i)}{=} 0.$

Assim $\{\sigma(x^*, M(\cdot))/x^* \in X^* \text{ e } \|x^*\| \leq 1\}$ é uma família de medidas uniformemente σ-aditiva. ∎

Definição 2.20 Sejam $\mu : \Sigma \to \mathbb{R}_+$ uma medida e $M : \Sigma \to P_0(X)$ uma multimedida. Se $\lim_{\mu(E) \longrightarrow 0} h(\{0\}, M(E)) = 0$ então M é chamada `contínua com respeito a` μ . Denotaremos por $M \ll \mu$.

Proposição 2.21 Se $M : \Sigma \longrightarrow P_{lfc}(X)$ é uma multimedida fortemente aditiva tal que para todo $x^* \in X^*$ a aplicação $\sigma(x^*, M(\cdot)) : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é uma medida σ-aditiva, então existe uma medida real σ-aditiva não negativa ν sobre Σ_1, a σ-álgebra gerada por Σ , tal que $M \ll \nu\Big|_{\Sigma}$.

prova:

Pelo Lema 2.19-(iii) temos que a coleção $\{\sigma(x^*, M(\cdot)) : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\}$ é uma família de medidas uniformemente σ-aditiva sobre Σ.

Como $|\sigma(x^*, M(A))| \leq \|x^*\| \sup\limits_{x \in M(\Sigma)} \|x\|$ para cada $x^* \in X^*$ e $M(\Sigma)$ é limitado pelo lema 2.19 (ii), $\sigma(x^*, M(\cdot))$ é real e limitada, para cada $x^* \in X^*$.

Aplicando o teorema de extensão de Hahn ([3],p136), para cada $x^* \in X^*$, $\|x^*\| \leq 1$, existe uma única medida $\sigma_{x^*}(\cdot)$ que estende $\sigma(x^*, M(\cdot))$ e também é σ-aditiva sobre Σ_1, a σ-álgebra gerada por Σ.

Logo, por ([4],lema 1,p.26), a família $\{\sigma_{x^*}(\cdot) : x^* \in X^*, \|x^*\| \leq 1\}$ é uniformemente σ-aditiva sobre Σ_1 , e sendo limitada, por ([4],teorema 4,p.11) existe uma medida real ν, não negativa, sobre Σ_1 tal que $\lim\limits_{\nu(E)\longrightarrow 0} \sup\limits_{\|x^*\|\leq 1} |\sigma_{x^*}(E)| = 0$.

Quando $E \in \Sigma$,

$$\lim_{\nu(E)\longrightarrow 0} \sup_{\|x^*\|\leq 1} |\sigma(x^*, M(E))| = \lim_{\nu(E)\longrightarrow 0} \sup_{\|x^*\|\leq 1} |\sigma_{x^*}(E)| = 0.$$

Assim temos que

$$\lim_{\nu(E)\to 0} \sup_{\|x^*\|\leq 1} \left| \sup_{z\in M(E)} x^*(z) \right| = 0. \tag{I}$$

Pelo teorema 1.7, se $x \in M(E)$ e $x \neq 0$ existe $y^* \in X^*$ tal que $y^*(x) = \|x\|$ e $\|y^*\|=1$, donde

$$0 < \|x\| = y^*(x) \leq \left| \sup_{z\in M(E)} y^*(z) \right| \leq \sup_{\|x^*\|\leq 1} \left| \sup_{z\in M(E)} x^*(z) \right|.$$

Portanto vale que

$$0 \leq \lim_{\nu(E)\longrightarrow 0} \sup_{x\in M(E)} \|x\| \leq \lim_{\nu(E)\longrightarrow 0} \sup_{\|x^*\|\leq 1} \left| \sup_{z\in M(E)} x^*(z) \right| \overset{(I)}{=} 0.$$

Logo, $\lim\limits_{\nu(E)\longrightarrow 0} h(\{0\}, M(E))=0$, ou seja, M $\ll \nu\Big|_{\Sigma}$. ∎

Proposição 2.22 Sejam Σ uma σ-álgebra e $M : \Sigma \longrightarrow P_{wkc}(X)$ uma multimedida fraca. Então $M(\Sigma)$ é relativamente ω-compacto e M é σ-aditiva.

prova:

Fixado $x^* \in X^*$, consideremos $\mu_1(\cdot) = \sigma(x^*, M(\cdot))$ e $\mu_2(\cdot) = \sigma(-x^*, M(\cdot))$, que são medidas reais σ-aditivas na σ-álgebra Σ . Pelo teorema de decomposição de Hahn ([3],p 129), para $i = 1, 2$, existem $P_i, N_i \in \Sigma$, com $P_i \cap N_i = \emptyset$ e $P_i \cup N_i = \Omega$, tais que μ_i é positiva em P_i e seus subconjuntos e negativa em N_i e seus subconjuntos.

Em particular,

$$\mu_i(P_i) \geq \mu_i(C), \; i = 1, 2, \tag{I}$$

para todo $C \in \Sigma$.

Sendo $M(P_i)$ ω-compactos, $i = 1, 2$, existem $x_i \in M(P_i)$, $i = 1, 2$, com

$$\mu_1(P_1) = \sup_{x\in M(P_1)} x^*(x) = x^*(x_1) \tag{II}$$

e

$$\mu_2(P_2) = \sup_{x \in M(P_2)} -x^*(x) = -x^*(x_2). \tag{III}$$

Dado $x \in M(\Sigma)$, existe $C \in \Sigma$ tal que $x \in M(C)$, de modo que

$$x^*(x) \leq \mu_1(C) \leq x^*(x_1) \quad \text{e} \quad -x^*(x) \leq \mu_2(C) \leq -x^*(x_2).$$

Então $|x^*(x)| \leq M_{x^*} = max\ \{x^*(x_1), -x^*(x_2)\}$, para todo $x \in M(\Sigma)$.

Pelo princípio da limitação uniforme, $\widehat{M(\Sigma)}$ é limitado em X^{**}, e como $\|\hat{x}\| = \|x\|$ para $x \in X$, temos $M(\Sigma)$ e também $\overline{M(\Sigma)}^{\omega}$ limitados.

Sendo $\overline{M(\Sigma)}^{\omega}$ limitado e ω-fechado, pelo teorema de James (1.13) resta mostrar que todo $x^* \in X^*$ assume seu supremo em $\overline{M(\Sigma)}^{\omega}$.

Fixamos novamente $x^* \in X^*$ e, utilizando (I),(II) e (III), temos que $x^*(x_1) \geq \mu_1(C) \geq x^*(x)$, para todo $C \in \Sigma$ e todo $x \in C$.

Portanto, $x^*(x_1) \geq \sup_{x \in M(\Sigma)} x^*(x) = \sup_{x \in \overline{M(\Sigma)}^{\omega}} x^*(x)$.

Por outro lado, $x^*(x_1) \leq \sup_{x \in \overline{M(\Sigma)}^{\omega}} x^*(x)$, pois $x_1 \in M(P_1) \subset \overline{M(\Sigma)}^{\omega}$.

Então $x^*(x_1) = \sup_{x \in \overline{M(\Sigma)}^{\omega}} x^*(x)$ e x^* atinge seu supremo em $\overline{M(\Sigma)}^{\omega}$.

Logo, $\overline{M(\Sigma)}^{\omega}$ é ω-compacto.

Agora vamos mostrar que M é multimedida, isto é, é aditiva. Sejam A, $B \in \Sigma$ disjuntos. Como tanto $M(A \cup B)$ com $M(A) + M(B)$ são ω-compactos e portanto ω-fechados, o resultado segue da proposição 2.13 (2), pois eles também são convexos.

Portanto, M é multimedida a valores em $P_{wkc}(X)$, com $\overline{M(\Sigma)}^{\omega}$ ω-compacto. Pelas proposições 2.16 e 2.17, M é σ-aditiva. ∎

Definição 2.23 Sejam $M : \Sigma \longrightarrow P_0(X)$ uma multimedida, $A \in \Sigma$ e Π a coleção de todas as partições finitas disjuntas π de A. Definimos a **variação** de M sobre A por $|M|(A) = \sup_{\pi \in \Pi} \sum_{E \in \pi} h(\{0\}, M(E))$.Se $|M|(\Omega) < \infty$ dizemos que M é de variação limitada.

Lema 2.24 Seja $M : \Sigma \longrightarrow P_0(X)$ uma multimedida. Para qualquer $A \in \Sigma$ temos $|M|(A) \leq |M|(\Omega)$.

prova:

Sejam Π_A o conjunto das partições finitas disjuntas π_A de A e Π o conjunto das partições finitas disjuntas π de Ω.

Para cada $\pi_A \in \Pi_A$ temos

$$\sum_{F\in\pi_A\cup\{A^c\}} h(\{0\},M(F)) = \sum_{F\in\pi_A} h(\{0\},M(F)) + h(\{0\},M(A^c)).$$

Então

$$\sum_{F\in\pi_A\cup\{A^c\}} h(\{0\},M(F)) \geq \sum_{F\in\pi_A} h(\{0\},M(F)).$$

Como $\pi_A \cup \{A^c\} \in \Pi$,

$|M|(\Omega) = \sup\limits_{\pi\in\Pi} \sum_{E\in\pi} h(\{0\},M(E)) \geq \sum_{F\in\pi_A} h(\{0\},M(F))$ para todo $\pi_A \in \Pi_A$.

Portanto $|M|(\Omega) \geq |M|(A)$. ∎

Proposição 2.25 Seja $M : \Sigma \longrightarrow P_0(X)$ uma multimedida de variação limitada. Então sua variação $|M|(\cdot)$ tem valores reais positivos e é monótona e finitamente aditiva.

prova:

Pelo lema anterior, $|M|(A) \leq |M|(\Omega)$ para todo $A \in \Sigma$ e portanto $|M|(\cdot)$ tem valores reais, pois $|M|(\Omega) < \infty$. Também são valores positivos pois $h(K,L) \geq 0$.

Mostremos agora que $|M|$ é monótona.

Sejam $A, B \in \Sigma$ com $A \subset B$, Π_B o conjunto das partições finitas disjuntas π_B de B, Π_A o conjunto das partições finitas disjuntas π_A de A.

Para cada $\pi_A \in \Pi_A$ temos

$$\begin{aligned}\sum_{F\in\pi_A\cup\{B\cap A^c\}} h(\{0\},M(F)) &= \sum_{F\in\pi_A} h(\{0\},M(F)) + h(\{0\},M(B\cap A^c)) \\ &\geq \sum_{F\in\pi_A} h(\{0\},M(F)),\end{aligned}$$

e portanto

$$\sum_{F\in\pi_A\cup\{B\cap A^c\}} h(\{0\},M(F)) \geq \sum_{F\in\pi_A} h(\{0\},M(F)).$$

Como $\pi_A \cup \{B\cap A^c\} \in \Pi_B$,

$$|M|(B) = \sup_{\pi_B\in\Pi_B} \sum_{F\in\pi_B} h(\{0\},M(F)) \geq \sum_{F\in\pi_A} h(\{0\},M(F)),$$

para todo $\pi_A \in \Pi_A$ e portanto $|M|(B) \geq |M|(A)$.

Para provar que $|M|$ é finitamente aditiva. consideremos $A, B \in \Sigma$ disjuntos. Observamos que quaisquer partições finitas π_A de A e π_B de B disjuntos temos $\pi_A \cup \pi_B$ é partição de $A \cup B$, de modo que Π, o conjunto das partições finitas disjuntas π de $A \cup B$, $\Pi \supset \{\pi_A \cup \pi_B : \pi_A \in \Pi_A, \pi_B \in \Pi_B\}$.

Dado $\varepsilon > 0$, existem $\pi_A^\varepsilon \in \Pi_A$ e $\pi_B^\varepsilon \in \Pi_B$ tais que $\sum_{F \in \pi_A^\varepsilon} h(\{0\}, M(F)) > |M|(A) - \frac{\varepsilon}{2}$ e $\sum_{F \in \pi_B^\varepsilon} h(\{0\}, M(F)) > |M|(B) - \frac{\varepsilon}{2}$.

Assim

$$\begin{aligned}
|M|(A \cup B) &= \sup_{\pi \in \Pi} \sum_{F \in \pi} h(\{0\}, M(F)) \\
&\geq \sum_{F \in \pi_A^\varepsilon} h(\{0\}, M(F)) + \sum_{F \in \pi_B^\varepsilon} h(\{0\}, M(F)) \\
&> |M|(A) + |M|(B) - \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Fazendo ε tender a 0, temos

$$|M|(A \cup B) \geq |M|(A) + |M|(B). \tag{I}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
|M|(A \cup B) &= \sup_{\pi \in \Pi_{A \cup B}} \sum_{F \in \pi} h(\{0\}, M(F)) \\
&= \sup_{\pi \in \Pi_{A \cup B}} \Big(\sum_{F \in \pi} h(\{0\}, M(F \cap A)) + \sum_{F \in \pi} h(\{0\}, M(F \cap B)) \Big) \\
&\leq \sup_{\pi \in \Pi_{A \cup B}} \Big(\sum_{F \in \pi} h(\{0\}, M(\underbrace{F \cap A}_{\in \pi_A})) \Big) + \Big(\sup_{\pi \in \Pi_{A \cup B}} \sum_{F \in \pi} h(\{0\}, M(\underbrace{F \cap B}_{\in \pi_B})) \Big) \\
&\leq \sup_{\pi \in \Pi_A} \Big(\sum_{F \in \pi} h(\{0\}, M(A)) \Big) + \Big(\sup_{\pi \in \Pi_B} \sum_{F \in \pi} h(\{0\}, M(B)) \Big) \\
&\leq |M|(A) + |M|(B).
\end{aligned}$$

Temos que

$$|M|(A \cup B) \leq |M|(A) + |M|(B). \tag{II}$$

Por (I) e (II) temos $|M|(A \cup B) = |M|(A) + |M|(B)$. ∎

Proposição 2.26 Seja $M : \Sigma \longrightarrow P_0(X)$ uma multimedida forte de variação limitada. Então $|M| : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ é medida σ-aditiva.

prova:

Já sabemos que $|M|$ é medida finitamente aditiva e a valores reais positivos pela proposição anterior.

Seja $\{A_n\}_{n \geq 1}$ seqüência disjunta em Σ com $\bigcup_n A_n \in \Sigma$. Novamente pela proposição 2.25 temos $|M|$ monótona e como $\bigcup_{n=1}^{k} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, vale que

$$|M|(\bigcup_{n=1}^{k} A_n) = \sum_{n=1}^{k} |M|(A_n) \leq |M|(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n). \quad \text{(I)}$$

Fazendo k tender a ∞ em (I),

$$\sum_{n=1}^{\infty} |M|(A_n) \leq |M|(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n). \quad \text{(II)}$$

Para a outra desigualdade, temos $|M|(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sup_{\pi \in \Pi} \sum_{F \in \pi} h(\{0\}, M(F))$, onde Π é o conjunto das partições finitas disjuntas π de $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Sendo $F \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ podemos escrever $F = F \cap (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (F \cap A_n)$ e então

$$\begin{aligned} |M|(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) &= \sup_{\pi \in \Pi} \sum_{F \in \pi} h(\{0\}, M(\bigcup_{n=1}^{\infty} (F \cap A_n))) \\ &\overset{M\ \sigma-\text{aditiva}}{=} \sup_{\pi \in \Pi} \sum_{F \in \pi} h(\{0\}, \sum_{n=1}^{\infty} M(F \cap A_n)). \quad \text{(III)} \end{aligned}$$

Para cada $\pi \in \Pi$ e cada $F \in \pi$ temos,

$$\begin{aligned} h(\{0\}, \sum_{n=1}^{\infty} M(F \cap A_n) &= \sup_{x \in \sum_{n=1}^{\infty} M(F \cap A_n)} \|x\| \\ &= \sup_{x_n \in M(A_n \cap F)} \|\sum_{n=1}^{\infty} x_n\| \\ &\leq \sup_{x_n \in M(A_n \cap F)} \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x_n \in M(A_n \cap F)} \|x_n\|. \end{aligned}$$

Logo $h(\{0\}, \sum_{n=1}^{\infty} M(F \cap A_n)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} h(\{0\}, M(F \cap A_n))$ e podemos concluir que

$$\sum_{F \in \pi} h(\{0\}, \sum_{n=1}^{\infty} M(F \cap A_n)) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{F \in \pi} h(\{0\}, M(F \cap A_n)) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} |M|(A_n)$$

Voltando em (III), temos

$$|M|(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |M|(A_n). \quad \text{(IV)}$$

Por (II) e (IV) temos que $|M|$ é σ-aditiva. ∎

2.3 O conjunto S_M e suas propriedades

Lembramos que o espaço de todas as medidas vetoriais de Σ em X é denotado por $fa(\Sigma, X)$.

Definição 2.27 Seja $M : \Sigma \longrightarrow P_0(X)$ uma multimedida. Uma medida $m \in fa(\Sigma, X)$ é um `seletor` de M se $m(A) \in M(A)$, para qualquer $A \in \Sigma$. O conjunto de todos os seletores de M será denotado por S_M.

Definição 2.28 Um subconjunto $\mathcal{M}$ de $fa(\Sigma, X)$ é `decomponível` se para m_1, m_2 em $\mathcal{M}$ e todo $A \in \Sigma$ a medida $m : \Sigma \longrightarrow X$ dada por $m(B) = m_1(B \cap A) + m_2(B \cap A^c)$, para $B \in \Sigma$, pertence a $\mathcal{M}$. Denota-se $m = \chi_A m_1 + \chi_{A^c} m_2$

Observação 2.29 Para toda multimedida $M : \Sigma \longrightarrow P_0(X)$ o subconjunto S_M é decomponível pois sabemos que $m \in fa(\Sigma, X)$ e para todo $B \in \Sigma$ temos

$$m(B) = m_1(B \cap A) + m_2(B \cap A^c) \in M(B \cap A) + M(B \cap A^c) \overset{\text{multim.}}{=} M((B \cap A) \cup (B \cap A^c)).$$

Logo $m(B) \in M(B)$.

Teorema 2.30 Seja $M : \Sigma \longrightarrow P_{wkc}(X)$ uma multimedida. Então $S_M \neq \emptyset$.

prova:

Pelo teorema de Zermelo da boa ordem ([7],p8) podemos bem ordenar X^*, ou seja, definir uma ordem total $\leq$ em X^* tal que todo $D \subset X^*$ não vazio tem menor elemento.

Seguindo ([1],p157), definiremos uma relação $\prec$ em X utilizando essa boa ordem de X^*, que mostraremos ser uma relação de ordem total (é chamada ordem lexicográfica).

Para $x, y \in X$ dizemos que $x \prec y$ se e só se $x = y$ ou, se $x \neq y, x_0^*(x) < x_0^*(y)$, onde $x_0^* = \min\{x^* \in X^* : x^*(x) \neq x^*(y)\}$. Observamos que se $x \neq y$ pelo teorema 1.6 sempre existe pelo menos um $x^* \in X^*$ com $x^*(x) \neq x^*(y)$, de modo que x_0^* está bem defindo.

É claro que $x \prec x$, pois $x = x$ e vale a propriedade reflexiva.

Para a propriedade anti-simétrica, sejam $x, y \in X$ com $x \prec y$ e $y \prec x$. Se $x \neq y$, sendo $x_0^* = \min\{x^* \in X^* : x^*(x) \neq x^*(y)\}$ temos $x_0^*(x) < x_0^*(y)$ e $x_0^*(y) < x_0^*(x)$, o que é absurdo. Logo, $x = y$.

Quanto à propriedade transitiva, tomemos $x, y, z \in X$ tais que $x \prec y$ e $y \prec z$. Os casos $x = y$, $y = z$ ou $x = z$ nos levam trivialmente a $x \prec z$. Suponhamos então $x \neq y$, $y \neq z$ e $x \neq z$ e consideremos os seguintes subconjuntos não vazios de X^*:

$$D_1 = \{x^* \in X^* : x^*(x) \neq x^*(y)\}$$
$$D_2 = \{x^* \in X^* : x^*(y) \neq x^*(z)\}$$
$$D_3 = \{x^* \in X^* : x^*(x) \neq x^*(z)\}$$

Sejam $x_1^* = \min D_1$, $x_2^* = \min D_2$, $x_3^* = \min D_3$ e $x_4^* = \min(D_1 \cup D_2 \cup D_3)$. Sabemos então que $x_1^*(x) < x_1^*(y)$, $x_2^*(y) < x_2^*(z)$ e queremos mostrar que $x_3^*(x) < x_3^*(z)$.

Como $x_4^* = \min(D_1 \cup D_2 \cup D_3)$, temos $x_4^* \in D_1 \cup D_2 \cup D_3$ e $x_4^* \leq x_i^*, 1 \leq i \leq 3$.

Se $x_4^* \in D_3$, temos $x_4^* = x_3^*$ e quatro possibilidades:

(i) $x_4^* \in D_1 \cap D_2$;

(ii) $x_4^* \in D_1 \cap D_2^c$;

(iii) $x_4^* \in D_2 \cap D_1^c$;

(iv) $x_4^* \in (D_1 \cup D_2)^c$.

No caso (i) $x_4^* \geq x_i^*, 1 \leq i \leq 2$, ou seja $x_4^* = x_1^* = x_2^*$. Então, trivialmente,

$$x_3^*(x) = x_4^*(x) < x_4^*(y) < x_4^*(z) = x_3^*(z) \text{ e } x \prec z.$$

Em (ii), temos $x_4^* \geq x_1^*$ e portanto $x_4^* = x_1^*$ e ainda $x_4^*(y) = x_4^*(z)$, de modo que

$$x_3^*(x) = x_4^*(x) < x_4^*(y) = x_4^*(z) = x_3^*(z) \text{ e } x \prec z.$$

Para (iii), $x_4^* \geq x_2^*$ e portanto $x_4^* = x_2^*$ e ainda $x_4^*(y) = x_4^*(z)$. De novo obtemos

$$x_3^*(x) = x_4^*(x) < x_4^*(y) = x_4^*(z) = x_3^*(z) \text{ e } x \prec z.$$

Finalmente, no caso (iv), $x_4^*(x) = x_4^*(y) = x_4^*(z)$, donde

$$x_3^*(x) = x_4^*(x) = x_4^*(y) = x_4^*(z) = x_3^*(z),$$

o que é absurdo pois $x_3^* \in D_3$.

Se $x_4^* \notin D_3$, temos $x_4^*(x) = x_4^*(z)$ e existem três possibilidades, pois com certeza $x_4^* \in D_1 \cup D_2$:

(v) $x_4^* \in D_1 \cap D_2$;

(vi) $x_4^* \in D_1 \cap D_2^c$;

(vii)$x_4^* \in D_2 \cap D_1^c$

No caso (v), $x_4^* = x_1^* = x_2^*$, de modo que $x_4^*(x) < x_4^*(y) < x_4^*(z)$ o que é absurdo pois $x_4^*(x) = x_4^*(z)$.

Em (vi), $x_4^* = x_1^*$, e $x_4^*(y) = x_4^*(z)$. Então $x_4^*(x) < x_4^*(y) = x_4^*(z)$ o que novamente contradiz $x_4^*(x) = x_4^*(z)$.

Para (vii), $x_4^* = x_2^*$, e $x_4^*(x) = x_4^*(y)$. Então $x_4^*(x) = x_4^*(y) < x_4^*(z)$ de novo contradizendo $x_4^*(x) = x_4^*(z)$.

Para mostrar agora que $\prec$ é ordem total, consideremos $x,\ y \in X$, distintos e seja $x_0^* = min\ \{x^* \in X^* : x^*(x) \neq x^*(y)\}$. Então $x_0^*(x) < x_0^*(y)$ ou $x_0^*(y) < x_0^*(x)$, ou seja, $x \prec y$ ou $y \prec x$. Portanto, se $x, y \in X$, temos $x \prec y$ ou $y \prec x$.

Ainda temos que a relação de ordem $\prec$ é compatível com a adição de X, isto é, se $x, y, z \in X$ e $x \prec y$, então $x + z \prec y + z$.

De fato, de $x \prec y$ obtemos que ou $x = y$ e neste caso $x + z = y + z$ ou, se $x \neq y$, como $D = \{x^* \in X^* : x^*(x) \neq x^*(y)\} = \{x^* \in X^* : x^*(x+z) \neq x^*(y+z)\}$, sendo $x_0^* = min\ D$, $x_0^*(x) < x_0^*(y)$. Então $x_0^*(x+z) < x_0^*(y+z)$ e $x + y \prec y + z$.

Seja agora dada uma multimedida $M : \Sigma \longrightarrow P_{wkc}(X)$. Vamos mostrar que $S_M \neq \emptyset$ definindo um seletor $m : \Sigma \longrightarrow X$ por $m(A) \in M(A)$ e $m(A)$ é elemento maximal de $M(A)$ em relação à ordem $\prec$, para cada $A \in \Sigma$. A existência de tais elementos maximais é obtida pelo Lema de Zorn.

Dado $A \in \Sigma$, consideremos $C = \{x_\alpha : \alpha \in I\}$ um subconjunto totalmente ordenado de $M(A)$. A ordem total em X induz uma ordem total em I que o torna um conjunto dirigido: $\alpha \leq \beta$, $\alpha, \beta \in I$ se e só se $x_\alpha \prec x_\beta$.

Considerando o net $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ em $M(A)$ (com essa ordem em I), ele é um net crescente em X, isto é, se $\alpha \leq \beta$, $x_\alpha \prec x_\beta$. Como $M(A)$ é ω-compacto, existe um subnet $\{x_{\alpha_\beta}\}_{\beta \in J}$ ω-convergente para $x_0 \in M(A)$. Mas sendo o net $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ crescente, temos então que ele é ω-convergente para x_0 e x_0 é um limitante superior de C.

Pelo Lema de Zorn ([7],p14), $M(A)$ tem elemento maximal x_A, isto é, $x_A \in M(A)$ e se $y \in M(A)$ com $x_A \prec y$ então $y = x_A$.

Definimos $m : \Sigma \longrightarrow X$ por $m(A) = x_A$, $A \in \Sigma$, e vamos mostrar que m é finitamente aditiva, donde seguirá $m \in S_M$.

Sejam $A, B \in \Sigma$ disjuntos. Temos que $m(A)+m(B) \in M(A)+M(B) = M(A \cup B)$, e como a ordem $\prec$ é total,

$$m(A) + m(B) \prec m(A \cup B). \qquad \text{(I)}$$

Por outro lado, como $m(A \cup B) \in M(A) + M(B)$, existem $y \in M(A)$ e $z \in M(B)$ tais que $y + z = m(A \cup B)$. Mas $y \prec m(A)$ e $z \prec m(B)$ pois a ordem $\prec$ é total e daí

$$y + z \prec m(A) + z \text{ e } m(A) + z \prec m(A) + m(B),$$

porque a ordem $\prec$ é compatível com a adição de X.

Pela transitividade, $y + z \prec m(A) + m(B)$, ou

$$m(A \cup B) \prec m(A) + m(B). \qquad \text{(II)}$$

Por (I) e (II), m é aditiva.

Logo $S_M \neq \emptyset$. ∎

Proposição 2.31 Seja $M : \Sigma \longrightarrow P_0(X)$ multimedida. Então

(i) se $m \in S_M$, então $|m|(A) \leq |M|(A)$, para todo $A \in \Sigma$;

(ii) se M for de variação limitada; $S_M \subset bv(\Sigma, X)$;

(iii) se Σ for σ-álgebra e M for multimedida forte, $S_M \subset ca(\Sigma, X)$.

prova:

(i) Sejam $m \in S_M$ e $A \in \Sigma$. Para qualquer $B \in \Sigma$ temos $m(B) \in M(B)$ e portanto $\|m(B)\| \leq \sup_{x \in M(B)} \|x\| = h(\{0\}, M(B))$. Então

$$\begin{aligned} |m|(A) &= \sup_{\pi \in \Pi} \sum_{F \in \pi} \|m(F)\| \\ &\leq \sup_{\pi \in \Pi} \sum_{F \in \pi} h(\{0\}, M(F)) \\ &= |M|(A). \end{aligned}$$

(ii) Dado $m \in S_M$ da parte (i) temos $|m|(\Omega) \leq |M|(\Omega)$ e se M for de variação limitada obtemos $|m|(\Omega) < +\infty$, ou seja, $m \in bv(\Sigma, X)$.

(iii) Sejam $m \in S_M$ e $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ seqüência disjunta em Σ .

Então

$$\begin{aligned} \|m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) - \sum_{n=1}^{k} m(A_n)\| &= \|m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) - m(\bigcup_{n=1}^{k} A_n)\| \\ &= \|m(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n)\| \\ &\leq h(\{0\}, M(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n)). \end{aligned}$$

Como Σ é σ-álgebra e M σ-aditiva, M é também fortemente aditiva. Podemos então usar o Lema 2.19(i), obtendo $h(\{0\}, \sum_{n=k+1}^{\infty} M(A_n)) \overset{k \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$ e portanto $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$, ou seja, $m \in ca(\Sigma, X)$. ∎

Definição 2.32 Definimos no conjuntos das funções de Σ em X, $\mathcal{F}(\Sigma, X)$, a topologia τ da convergência pontual fraca da seguinte forma: um net $\{m_\alpha\}_{\alpha \in D}$ de $\mathcal{F}(\Sigma, X)$ é τ-convergente para $m_0 \in \mathcal{F}(\Sigma, X)$ se para todo $A \in \Sigma$, $\{m_\alpha\}_{\alpha \in D}$ é ω-convergente para $m_0(A)$ em X.

Teorema 2.33 Seja $M : \Sigma \longrightarrow P_{wkc}(X)$ uma multimedida. Então S_M é τ-compacto.

prova:

Para qualquer $A \in \Sigma$, o conjunto $H(A) = \{m(A)/m \in S_M\}$ é relativamente fraco-compacto sobre X, pois $\overline{H(A)}^{\omega} \subset \overline{M(A)}^{\omega}$ e $M(A)$ é ω-compacto.

Em virtude do teorema 1.15, para S_M ser τ-compacto basta mostrar que S_M é pontualmente fechado em $\mathcal{F}(\Sigma, X)$.

Seja m pertencente ao aderente de S_M em $\mathcal{F}(\Sigma, X)$ com a topologia τ. Então existem um net $\{m_\alpha\}_{\alpha \in D}$ em S_M, e uma função $m \in \mathcal{F}(\Sigma, X)$ tais que $m_\alpha(E) \overset{\omega}{\longrightarrow} m(E)$, para todo $E \in \Sigma$.

Como $m_\alpha(E) \in M(E)$ e $M(E)$ é ω-compacto, $m(E) \in M(E)$. Para que $m \in S_M$ falta verificar que m é medida.

Sejam $A, B \in \Sigma$ disjuntos. Sabemos que para m_α vale que $m_\alpha(A \cup B) = m_\alpha(A) + m_\alpha(B)$. Por outro lado $m_\alpha(E) \stackrel{\omega}{\longrightarrow} m(E)$ para qualquer $E \in \Sigma$.

Assim

$$m_\alpha(A) + m_\alpha(B) = m_\alpha(A \cup B) \stackrel{\omega}{\longrightarrow} m(A \cup B). \tag{I}$$

Como também que

$$m_\alpha(A) \stackrel{\omega}{\longrightarrow} m(A) \text{ e } m_\alpha(B) \stackrel{\omega}{\longrightarrow} m(B). \tag{II}$$

Por (I) e (II) temos $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$.

Logo, $m \in S_M$, e isto nos garante que S_M é pontualmente fechado em $\mathcal{F}\ (\Sigma, X)$. Portanto S_M é τ-compacto. ∎

Lema 2.34 Se $K_1,\ K_2 \in P_0(X)$ e $x \in ext\ (K_1 + K_2)$, existem e são únicos os elementos $x_1 \in K_1,\ x_2 \in K_2$ tais que $x = x_1 + x_2$. Além disso, $x_1 \in ext\ K_1$ e $x_2 \in ext\ K_2$.

prova:

É claro que existem $x_1 \in K_1$ e $x_2 \in K_2$ com $x = x_1 + x_2$, pois $ext\ (K_1 + K_2) \subset K_1 + K_2$.

Para a unicidade, suponhamos que $x_1, x_1' \in K_1$ e $x_2, x_2' \in K_2$ sejam tais que

$$x = x_1 + x_2 = x_1' + x_2'. \tag{I}$$

Então $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_1') + \frac{1}{2}(x_2 + x_2')$ e, como $x_1 + x_2',\ x_1' + x_2\ \in K_1 + K_2$ e $x \in ext\ (K_1 + K_2)$, concluímos que

$$x_1 + x_2' = x_1' + x_2. \tag{II}$$

De (I) temos $x_1 - x_2' = x_1' - x_2$ e usando (II) obtemos $x_1 = x_1'$ e $x_2 = x_2'$.

Se x_1 não fosse extremal de K_1, existiria $y \in X$ com $x_1 + y,\ x_1 - y\ \in K_1$ (x_1 seria ponto médio de algum segmento com extremos em K_1). Então $x + y = (x_1 + y) + x_2$ e $x - y = (x_1 - y) + x_2$ pertenceriam a $K_1 + K_2$ e x não seria extremal de $K_1 + K_2$, contrariando a hipótese. Logo, $x_1 \in ext\ K_1$.

Analogamente $x_2 \in ext\ K_2$.

Para $B \in \Sigma$ usaremos a notação $\sum \cap B$ para a álgebra $\{A \cap B :\ A \in \Sigma\}$.

Proposição 2.35 Se $M\ :\ \Sigma \longrightarrow P_{wkc}(X)$ é multimedida, então para todo $B \in \Sigma$ temos $\mathcal{B} = \{m(B) : m \in S_M|_{\Sigma \cap B}\} \in P_{wkc}(X)$.

prova:

Temos $\mathcal{B} \neq \emptyset$, pois $S_M \neq \emptyset$.

Sejam m_1, $m_2 \in S_M|_{\Sigma\cap B}$ e $\lambda \in [0,1]$. Então $m = \lambda m_1 + (1-\lambda)m_2$ é medida vetorial σ-aditiva e também $m(B) = \lambda m_1(B) + (1-\lambda)m_2(B) \in \lambda M(B) + (1-\lambda)M(B) = M(B)$, pois $m_1(B), m_2(B) \in M(B)$ e $M(B)$ é convexo. Assim $\mathcal{B}$ é convexo.

Consideremos agora $\{m_\alpha(B)\}$ em $\mathcal{B}$. Como $S_M|_{\Sigma\cap B}$ é τ-compacto, existem $m_0 \in S_M|_{\Sigma\cap B}$ e $\{m_{\alpha_\beta}\}_{\beta\in J}$ com $m_{\alpha_\beta} \xrightarrow{\tau} m_0$, ou seja, para todo $C \in \Sigma\cap B$, $m_{\alpha_\beta}(C) \xrightarrow{\omega} m_0(C)$. Em particular, $m_{\alpha_\beta}(B) \xrightarrow{\omega} m_0(B)$ com $m_0(B) \in \mathcal{B}$ e daí concluimos que $\mathcal{B}$ é ω-compacto.

Teorema 2.36 Sejam $M : \Sigma \longrightarrow P_{wkc}(X)$ multimedida e $B \in \Sigma$ fixado. Então, para todo $x \in M(B)$, existe $m \in S_M|_{\Sigma\cap B}$ tal que $m(B) = x$.

prova:

Suponhamos inicialmente que $x \in ext\ M(B)$. Para todo $C \in \Sigma\cap B$, como $M(B) = M(C) + M(B\cap C^c)$, pelo lema 2.34 existem e são únicos os elementos $x_C \in ext\ M(C)$ e $y_C \in ext\ M(B\cap C^c)$ tais que $x = x_C + y_C$.

Definindo $m : \Sigma\cap B \longrightarrow X$ por $m(C) = x_C$, vamos verificar que $m \in S_M|_{\Sigma\cap B}$ e $m(B) = x$.

Para que $m \in S_M|_{\Sigma\cap B}$, basta mostrar que m é medida vetorial, pois já temos $m(C) = x_C \in M(C)$, para todo $C \in \Sigma\cap B$.

Sejam C_1, $C_2 \in \Sigma\cap B$ disjuntos. Como $x_{C_1\cup C_2} \in M(C_1\cup C_2) = M(C_1) + M(C_2)$, de novo pelo lema 2.34 existem (únicos) $z_{C_1} \in ext\ M(C_1)$ e $z_{C_2} \in ext\ M(C_2)$, com $x_{C_1\cup C_2} = z_{C_1} + z_{C_2}$. Também existe (único) $y_{C_1\cup C_2} \in ext\ M((C_1\cup C_2)^c\cap B)$ com $x = x_{C_1\cap C_2} + y_{C_1\cup C_2}$.

Então $z_{C_1} + z_{C_2} + y_{C_1\cup C_2} = x$. Como $z_{C_2} + y_{C_1\cup C_2} \in M(C_2) + M((C_1\cup C_2)^c\cap B)$ e

$$\begin{aligned} M(C_2) + M((C_1\cup C_2)^c\cap B) &= M(C_2\cup((C_1\cup C_2)^c\cap B)) \\ &= M((C_2\cup C_1^c)\cap(C_2\cup C_2^c)\cap(C_2\cup B)) \\ &= M(C_1^c\cap B), \end{aligned}$$

temos $z_{C_1} = x_{C_1}$, pela unicidade.

Analogamente $z_{C_2} = x_{C_2}$, de modo que $m(C_1\cup C_2) = x_{C_1\cup C_2} = x_{C_1} + x_{C_2} = m(C_1) + m(C_2)$.

Suponhamos agora $x \in co(ext\ M(B))$. Então existem $x_i \in ext\ M(B)$ e $\lambda_i > 0$, $1 \le i \le n$, com $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ e $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$.

Pelo que fizemos antes, existem $m_i \in S_M|_{\Sigma\cap B}$ com $m_i(B) = x_i$, $1 \le i \le n$. A medida vetorial $m = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i$ também é seletor de $M|_{\Sigma\cap B}$ e vale que $m(B) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = x$.

Obtemos assim que

$$co(ext\ M(B)) \subset \{m(B) : m \in S_M|_{\Sigma\cap B}\} \subset M(B). \tag{I}$$

Lembrando que, por 1.12, $M(B) = \overline{co}^\omega(ext\ M(B))$, pois é convexo e ω-compacto, tomando o fecho na topologia fraca nas inclusões em (I) e usando a proposição anterior ($\mathcal{B} \in P_{wkc}(X)$)

temos finalmente $M(B) = \{m(B) : m \in S_M|_{\Sigma \cap B}\}$, ou seja, para todo $x \in M(B)$ existe um $m \in S_M|_{\Sigma \cap B}$ com $m(B) = x$.

Teorema 2.37 Se $M : \Sigma \longrightarrow P_{wkc}(X)$ é multimedida, então $M(A) = \{m(A) : m \in S_M\}$, para todo $A \in \Sigma$.

prova:

Seja $A \in \Sigma$ e consideremos $\mathcal{A}=\{m(A) : m \in S_M\}$.

É claro que $\mathcal{A} \subset M(A)$.

Por outro lado, dado $x \in M(A)$ e tomando $y \in M(A^c)$ arbitrário, pelo teorema 2.35, existem $m_1 \in S_M|_{\Sigma \cap A}$ e $m_2 \in S_M|_{\Sigma \cap A^c}$ tais que $m_1(A) = x$ e $m_2(A^c) = y$.

Definindo $m : \Sigma \longrightarrow X$ por $m(C) = m_1(C \cap A) + m_2(C \cap A^c)$, temos que m é medida vetorial, $m(A) = m_1(A) = x$ e $m(C) \in M(C)$, pois $m_1(C \cap A) \in M(C \cap A)$, $m_2(C \cap A^c) \in M(C \cap A^c)$ e M é aditiva.

Portanto, $x \in \mathcal{A}$. ∎

Capítulo 3

Extensão de uma multimedida

Este capítulo dedica-se ao estudo das condições para que uma multimedida M definida numa álgebra Σ de subconjuntos de Ω possa ser estendida para a σ-álgebra Σ_1 de subconjuntos de Ω gerada por Σ.

Lema 3.1 Sejam Σ uma álgebra de subconjuntos de Ω e $M_0 : \Sigma \longrightarrow P_{lfc}(X)$ uma multimedida. Consideremos a função $g : X^* \times \Sigma \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definida por $g(x^*; B) = \sup_{x \in M_0(B)} x^*(x)$. Então

(i) para cada $B \in \Sigma$ fixo, $g(\cdot; B) : X^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ é uma função convexa real e ω^*-semicontínua inferiormente;

(ii) para cada $x^* \in X^*$ fixo, $g(x^*, \cdot) : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ é medida (aditiva) real.

prova:

Observamos inicialmente que $g(x^*; B) \in \mathbb{R}$ para todo $x^* \in X^*$ e todo $B \in \Sigma$, pois $M_0(B)$ é limitado.

(i) Fixado $B \in \Sigma$ e dados x^*, $y^* \in X^*$ e $0 < \lambda < 1$, temos $g(\lambda x^* + (1-\lambda)y^*; B) = \sup_{x \in M_0(B)} (\lambda x^* + (1-\lambda)y^*)(x) \leq \lambda \sup_{x \in M_0(B)} x^*(x) + (1-\lambda) \sup_{x \in M_0(B)} y^*(x)$ e portanto $g(\cdot; B)$ é convexa real.

Agora dados $x_0^* \in X^*$ e $\varepsilon > 0$, existe $x_0 \in M_0(B)$ tal que $x_0^*(x_0) > g(x_0^*; B) - \varepsilon$, ou seja, $-g(x_0^*; B) > -x_0^*(x_0) - \varepsilon$.

Assim $g(x^*; B) - g(x_0^*; B) > \sup_{x \in M_0(B)} x^*(x) - x_0^*(x_0) - \varepsilon$, e como $x_0 \in M_0(B)$ temos $g(x^*; B) - g(x_0^*; B) > x^*(x_0) - x_0^*(x_0) - \varepsilon$.

Escolhendo $V_{x_0^*} = \{x^* \in X^* : |x^*(x_0) - x_0^*(x_0)| < \varepsilon \}$, então $V_{x_0^*}$ é uma vizinhança ω^* de x_0^* e para $x^* \in V_{x_0^*}$ temos $g(x^*; B) - g(x_0^*; B) > -2\varepsilon$. Logo $g(\cdot; B)$ é ω^*-semicontínua inferiormente em x_0^*.

(ii) Segue da proposição 2.13 (3), pois M é multimedida. ∎

Lema 3.2 Sejam Σ, M_0 e g como no lema 3.1. Suponhamos que exista uma medida aditiva μ real não negativa em Σ tal que $M_0 \ll \mu$. Então, para cada $x^* \in X^*$ fixado,

(i) $\lim_{\mu(E)\longrightarrow 0} |g(x^*; E)| = 0$, ou seja $g(x^*, \cdot)$ é μ -contínua;

(ii) $g(x^*; \cdot)$ é uniformemente contínua em Σ com respeito a $d : \Sigma \times \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $d(A, B) = \mu(A\triangle B)$;

e se μ for σ-aditiva, temos ainda que

(iii) $g(x^*, \cdot)$ é σ-aditiva.

prova:

Seja $x^* \in X^*$ fixado.

(i) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que $E \in \Sigma$ e $\mu(E) < \delta_\varepsilon$ implicam em $h(\{0\}, M_0(E)) < \varepsilon$, pois $M_0 \ll \mu$.

Como $|g(x^*; E)| = |\sup_{x\in M_0(E)} x^*(x)| \leq \sup_{x\in M_0(E)} |x^*(x)| \leq \|x^*\| \sup_{x\in M_0(E)} \|x\|$, temos

$$|g(x^*; E)| \leq \|x^*\| h(\{0\}, M_0(E)) \leq \|x^*\|\varepsilon ,$$

sempre que $E \in \Sigma$ e $\mu(E) < \delta_\varepsilon$.

Portanto, $\lim_{\mu(E)\longrightarrow 0} |g(x^*; E)| = 0$ e $g(x^*, \cdot)$ é μ -contínua.

(ii) Vamos mostrar que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que se A, B em Σ , $d(A, B) = \mu(A\triangle B) < \delta_1$, vale que $|g(x^*; A) - g(x^*; B)| < \varepsilon \, \|x^*\|$.

Façamos inicialmente uma estimativa para $|g(x^*; A) - g(x^*; B)|$.

Sabemos que $A\cup B = A\cup(B\cap(A\cap B)^c) = B\cup(A\cap(A\cap B)^c)$ (uniões disjuntas) e como $g(x^*, \cdot)$ é medida real podemos escrever $g(x^*; A) + g(x^*; B\cap(A\cap B)^c)) = g(x^*; B) + g(x^*; A\cap(A\cap B)^c)$.

Logo

$$|g(x^*; A) - g(x^*; B)| \leq |g(x^*; A\cap(A\cap B)^c)| + |g(x^*; B\cap(A\cap B)^c)|. \tag{I}$$

Mas $|g(x^*, C)| \leq \sup_{x\in M_0(C)} |x^*(x)| \leq \|x^*\| \sup_{x\in M_0(C)} \|x\| = \|x^*\| h(\{0\}, M_0(C))$, para todo $C \in \Sigma$ e voltando a (I) temos

$$|g(x^*; A) - g(x^*; B)| \leq \|x^*\| \, \{h(\{0\}, M_0(A\cap(A\cap B)^c)) + h(\{0\}, M_0(B\cap(A\cap B)^c))\}. \tag{II}$$

Seja dado $\varepsilon > 0$. Como $M_0 \ll \mu$, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $E \in \Sigma$ e $\mu(E) < \delta_1$ então $h(\{0\}, M_0(E)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dados $A, B \in \Sigma$ com $\mu(A \triangle B) < \delta_1$, como os conjuntos $(A \cap (A \cap B)^c)$ e $(B \cap (A \cap B)^c)$ são subconjuntos de $A \triangle B$ temos que $\mu(A \cap (A \cap B)^c) < \delta_1$ e $\mu(B \cap (A \cap B)^c) < \delta_1$.

Utilizando (II) concluimos que se $d(A, B) < \delta_1$ então $|g(x^*; A) - g(x^*; B)| < \|x^*\|.\varepsilon$.

Portanto $g(x^*; \cdot)$ é uniformemente contínua em Σ .

(iii) Vamos provar que $g(x^*, \cdot)$ é σ-aditiva, supondo que μ é σ-aditiva.

Dada uma seqüência disjunta $\{A_n\}$ em Σ com $\bigcup_n A_n \in \Sigma$, como $g(x^*, \cdot)$ é finitamente aditiva, temos que $|g(x^*, \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) - \sum_{n=1}^{r} g(x^*, A_n)| = |g(x^*, \bigcup_{n=r+1}^{\infty} A_n)|$.

Mas $\mu(\bigcup_{n=r+1}^{\infty} A_n) \overset{r \to \infty}{\longrightarrow} 0$ e então, por (ii) $|g(x^*, \bigcup_{n=r+1}^{\infty} A_n)| \overset{r \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Logo $g(x^*, \cdot)$ é σ-aditiva. ∎

Lema 3.3 Sejam Σ, M_0, g como no lema 3.1 e Σ_1 a σ-álgebra gerada por Σ . Suponhamos que exista uma medida real não negativa σ-aditiva μ em Σ_1 tal que $M_0 \ll \mu\Big|_{\Sigma}$ e seja $d : \Sigma_1 \times \Sigma_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(A, B) = \mu(A \triangle B)$. Então

(i) para cada $x^* \in X^*$ e para $A \in \Sigma_1$, se $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ em Σ for tal que $d(A, B_n) \longrightarrow 0$, existe $\lim_{n \longrightarrow \infty} g(x^*; B_n) \in \mathbb{R}$, que independe da seqüência $\{B_n\}$.

Podemos definir $G : X^* \times \Sigma_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$G(x^*; A) = \lim_{n \longrightarrow \infty} g(x^*, B_n)$ e valem, para cada $x^* \in X^*$,

(ii) $G(x^*; B) = g(x^*; B)$, para todo $B \in \Sigma$;

(iii) $\lim_{\mu(E) \longrightarrow 0} |G(x^*; E)| = 0$;

(iii) $G(x^*; \cdot)$ é uniformemente contínua em Σ_1 com respeito a d;

(iv) $G(x^*; \cdot)$ é medida real σ-aditiva.

prova:

(i) Fixamos $x^* \in X^*$ e seja $A \in \Sigma_1$. Sempre existe alguma seqüência $\{B_n\}$, pela proposição 1.36, tal que $d(B_n, A) \longrightarrow 0$.

Segue que $d(B_n, B_m) \overset{m,n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$. Pelo lema 3.2, $g(x^*, \cdot)$ é uniformemente contínua e portanto $\lim_{n,m \longrightarrow \infty} |g(x^*; B_n) - g(x^*; B_m)| = 0$. Assim, $\{g(x^*; B_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy. Logo existe $\lim_n g(x^*; B_n) \in \mathbb{R}$.

Dadas seqüências $\{B_n\}, \{C_n\}$ em Σ tais que $d(B_n, A) \longrightarrow 0$ e $d(C_n, A) \longrightarrow 0$, existem $\lim_n g(x^*; B_n) = L \in \mathbb{R}$ e $\lim_n g(x^*; C_n) = M \in \mathbb{R}$.Então

$$0 \leq |L - M| = |\lim_{n \longrightarrow \infty} g(x^*; B_n) - \lim_{n \longrightarrow \infty} g(x^*; C_n)| = \lim_{n \in \mathbb{N}} |g(x^*; B_n) - g(x^*; C_n)|.$$

Sabendo que $d(B_n, C_n) \leq d(B_n, A) + d(A, C_n)$ temos $d(B_n, C_n) \longrightarrow 0$ e pelo lema 3.2, $|(g(x^*; B_n) - g(x^*; C_n))| \longrightarrow 0$. Portanto $L = M$, e com isto o limite independe da seqüência $\{B_n\}$.

Podemos definir $G(x^*; A) = \lim_{n \longrightarrow \infty} g(x^*; B_n)$, para quaisquer $x^* \in X^*$ e $A \in \Sigma_1$.

Fixamos $x^* \in X^*$.

(ii) Seja $B \in \Sigma$. Podemos tomar $B_n = B$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Logo $G(x^*; B) = \lim_{n \longrightarrow \infty} g(x^*; B_n) = g(x^*; B)$.

(iii) Queremos provar que $\lim_{\mu(E) \longrightarrow 0} |G(x^*; E)| = 0$.

Dado $\varepsilon > 0$, pela demonstração do Lema 3.2, existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que se $E \in \Sigma$ e $\mu(E) \leq \delta_\varepsilon$ então $|g(x^*; E)| < \varepsilon \; \|x^*\|$.

Seja $A \in \Sigma_1$ com $\mu(A) < \delta = \dfrac{\delta_\varepsilon}{2}$.

Como Σ é denso em Σ_1 por 1.38, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $B_n \in \Sigma$ tal que $d(A, B_n) < \dfrac{\delta}{n}$. Temos então $B_n \xrightarrow{n} A$. Mas $B_n \subset A \cup (A \triangle B_n)$, logo $\mu(B_n) < \delta + \dfrac{\delta}{n} \leq \delta_\varepsilon$.

Portanto $|g(x^*; B_n)| < \varepsilon \; \|x^*\|$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\mu(A) < \delta$ implica que $|G(x^*; A)| = \lim_{n \longrightarrow \infty} |g(x^*; B_n)| \leq \varepsilon \; \|x^*\|$, ou seja, $\lim_{\mu(E) \longrightarrow 0} |G(x^*; E)| = 0$.

(iv) Provaremos que $G(x^*, \cdot)$ é uniformemente contínua em Σ_1 com respeito a d.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $d(C, D) < \delta_1$ com C, D em Σ então

$|g(x^*; C) - g(x^*; D)| < \varepsilon \; \|x^*\|$, pela demonstração do lema 3.2

Sejam $\delta_0 = \dfrac{\delta_1}{3}$ e A, B em Σ_1 tais que $d(A, B) < \delta_0$.

Existem

$\delta_A > 0$ tal que se $d(A, C) < \delta_A$ e $C \in \Sigma$ então $|G(x^*; A) - g(x^*; C)| < \varepsilon$ e

$\delta_B > 0$ tal que se $d(B, D) < \delta_B$ e $D \in \Sigma$ então $|G(x^*; B) - g(x^*; D)| < \varepsilon$.

Pela densidade, existem C, D em Σ tais que

$$d(A, C) < \delta_A \text{ e } d(A, C) < \delta_0$$

$$\text{e } d(B, D) < \delta_B \text{ e } d(B, D) < \delta_0.$$

Então $d(C, D) \leq d(C, A) + d(A, B) + D(B, D) < 3\delta_0 < \delta_1$, e portanto

$|g(x^*; C) - g(x^*; D)| < \varepsilon \; \|x^*\|$.

Como

$$|G(x^*;A) - G(x^*;B)| \leq |G(x^*;A) - g(x^*;C)| + |g(x^*;C) - g(x^*;D)| + |g(x^*;D) - G(x^*;B)|,$$

obtemos finalmente que se $A, B \in \Sigma_1$ com $d(A,B) < \delta_0$ então

$|G(x^*;A) - G(x^*;B)| < 2\varepsilon + \varepsilon .\|x^*\|$.

(v) Vamos mostrar que $G(x^*;\cdot)$ é medida real σ-aditiva.

Para isto vamos provar que é finitamente aditiva e depois usamos sua μ -continuidade dada por (iii).

Inicialmente temos $G(x^*,\emptyset) = 0$, pois $\emptyset \in \Sigma$ e $g(x^*,\emptyset) = 0$.

Dados A e B em Σ_1 disjuntos, consideremos $\{C_n\}$ e $\{D_n\}$ em Σ tais que $C_n \xrightarrow{d} A$ e $D_n \xrightarrow{d} B$, ou seja, $\mu(A \Delta C_n) \longrightarrow 0$ e $\mu(B \Delta D_n) \longrightarrow 0$. Então

$G(x^*;A) + G(x^*;B) = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} [g(x^*;C_n) + g(x^*;D_n)]$

Mas $g(x^*;C_n) + g(x^*;D_n) = g(x^*;C_n \cup D_n) - g(x^*;C_n \cap D_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, já que $g(x^*;\cdot)$ é medida real.

Pelo lema 1.36 temos $C_n \cup D_n \xrightarrow{d} A \cup B$ e $C_n \cap D_n \xrightarrow{d} A \cap B = \emptyset$.

Daí $G(x^*;A) + G(x^*;B) = G(x^*;A \cup B)$ e $G(x^*;\cdot)$ é finitamente aditiva.

Seja dada uma seqüência disjunta $\{A_n\}$ em Σ_1. Como $G(x^*;\cdot)$ é finitamente aditiva $|G(x^*;\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) - \sum\limits_{n=1}^{r} G(x^*;A_n)| = |G(x^*;\bigcup\limits_{n=r+1}^{\infty} A_n)|$.

Mas $\mu(\bigcup\limits_{n=r+1}^{\infty} A_n) \overset{r \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$ e então por (iii) $|G(x^*;\bigcup\limits_{n=r+1}^{\infty} A_n)| \overset{r \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$.

Logo $G(x^*;\cdot)$ é σ-aditiva. ∎

Lema 3.4 Sejam Σ, M_0, g, μ e G como no lema 3.3. Então para cada $A \in \Sigma_1$ a função $G(\cdot;A) : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ é convexa, positivamente homogênea e ω^*-semicontínua inferiormente.

prova:

Fixado $A \in \Sigma_1$, fixemos também $\{B_n\}$ em Σ com $d(B_n, A) \longrightarrow 0$.

Para todo $x^* \in X^*$ temos $G(x^*;A) = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} g(x^*;B_n)$.

Sabemos que $G(x^*;A) \in \mathbb{R}$ para todo $x^* \in X^*$ e então $G(\cdot;A)$ é função real.

Como $g(x^*;B_n)$ é uma função convexa para cada n, dados x^*, $y^* \in X^*$ e $0 < \lambda < 1$ temos que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} g((\lambda x^* + (1-\lambda)y^*);B_n) \leq \lambda \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} g(x^*;B_n) + (1-\lambda) \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} g(y^*;B_n)$

Logo, $G(\lambda x^* + (1-\lambda)y^*;A) \leq \lambda G(x^*;A) + (1-\lambda)G(y^*;A)$ e $G(\cdot,A)$ é convexa.

Sendo $G(\lambda x^*;A) = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} g(\lambda x^*;B_n) = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \sup\limits_{x \in M_0(B_n)} (\lambda x^*)(x)$, para todo $\lambda > 0$ temos $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \lambda \sup\limits_{x \in M_0(B_n)} x^*(x) = \lambda \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} g(x^*;B_n) = \lambda G(x^*;A)$ e $G(\cdot;A)$ é positivamente homogênea.

Para mostrar que $G(\cdot;A)$ é ω^*-semicontínua inferiormente, provaremos que $[G(\cdot;A) \leq \lambda]$ é ω^*-fechado, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Fixado $\lambda \in \mathbb{R}$, como $[G(\cdot;A) \leq \lambda]$ é convexo, pelo teorema 1.8 basta mostrar que para todo $r \geq 0$, $[G(\cdot;A) \leq \lambda] \cap rB_{X^*}$ é ω^*-fechado, onde $rB_{X^*} = \{x^* \in X^*/\|x^*\| \leq r\}$.

Quando $r = 0$ ficamos com um dos dois conjuntos $[G(\cdot;A) \leq \lambda] \cap \{0\} = \emptyset$ ou $[G(\cdot;A) \leq \lambda] \cap \{0\} = \{0\}$, e ambos são ω^*-fechados.

Fixemos então $r > 0$ e seja dado um net $\{x_\alpha^*\}$ com $x_\alpha^* \in [G(\cdot;A) \leq \lambda] \cap rB_{X^*}$, para todo α, e $x_\alpha^* \xrightarrow{w^*} x_0^*$. Então $\|x_0^*\| \leq r$ e queremos mostrar que $x_0^* \in [G(\cdot;A) \leq \lambda]$.

Dado $\varepsilon > 0$, pela demonstração do lema 3.2 existe $\delta_\varepsilon > 0$ tal que, para B, $C \in \Sigma$ com $d(B,C) < \delta_\varepsilon$, $|g(x^*;B) - g(x^*;C)| \leq \dfrac{\varepsilon\,\|x^*\|}{3r}$, para qualquer $x^* \in X^*$.

Lembrando que $d(B_n, A) \longrightarrow 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $m, n \geq n_0$ $d(B_n, B_m) < \delta_\varepsilon$. Então para, $m, n \geq n_0$, $\sup\limits_{x^* \in rB_{X^*}} |g(x^*;B_n) - g(x^*;B_m)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Fazendo $n = n_0$ e $m \longrightarrow \infty$, temos

$$\sup_{x^* \in rB_{X^*}} |g(x^*;B_{n_0}) - G(x^*;A)| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{I}$$

Como $g(\cdot;B_{n_0})$ é ω^*-semicontínua inferiormente em x_0^*, existe uma vizinhança ω^* de x_0^*, que denotaremos por $V_{x_0^*}$, tal que se $x^* \in V_{x_0^*}$ então

$$g(x^*;B_{n_0}) - g(x_0^*;B_{n_0}) \geq -\frac{\varepsilon}{3}. \tag{II}$$

De (I) e (II) e

$$G(x^*;A) - G(x_0^*;A) = G(x^*;A) - g(x^*;B_{n_0}) + g(x^*;B_{n_0}) - g(x_0^*;B_{n_0}) + g(x_0^*;B_{n_0}) - G(x_0^*;A),$$

temos que se $x^* \in V_{x_0^*} \cap rB_{X^*}, G(x^*;A) - G(x_0^*;A) \geq -\dfrac{\varepsilon}{3} - \dfrac{\varepsilon}{3} - \dfrac{\varepsilon}{3} = -\varepsilon$, ou seja, $G(x_0^*;A) < G(x^*;A) + \varepsilon$.

Por outro lado, dado $V_{x_0^*}$ existe α_0 tal que para $\alpha \geq \alpha_0$ temos $x_\alpha^* \in V_{x_0^*}$ pois $x_\alpha^* \xrightarrow{w^*} x_0^*$.

Como $x_\alpha^* \in rB_{X^*}$ para todo α, então $\alpha \geq \alpha_0$ implica que $x_\alpha^* \in V_{x_0^*} \cap rB_{X^*}$ e daí, em particular, $G(x_0^*;A) < G(x_{\alpha_0}^*;A) + \varepsilon$. Mas $G(x_{\alpha_0}^*;A) \leq \lambda$ e então $G(x_0^*;A) \leq \lambda + \varepsilon$

Sendo ε arbitrário temos $G(x_0^*;A) \leq \lambda$.(III)

Portanto $[G(\cdot;A) \leq \lambda] \cap rB_{X^*}$ é ω^*-fechado para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e todo $r \geq 0$ e pelo teorema 1.8 temos que $[G(\cdot;A) \leq \lambda]$ é ω^*-fechado. ∎

Teorema 3.5 Sejam Σ uma álgebra de subconjuntos de Ω , Σ_1 a σ-álgebra gerada por Σ e $M_0 : \Sigma \longrightarrow P_{lfc}(\mathrm{X})$ uma multimedida que também seja multimedida fraca. Se existe uma medida real não negativa σ-aditiva μ em Σ_1 tal que $M_0 \ll \mu\big|_{\Sigma}$ então M_0 pode ser estendida para uma multimedida fraca $M : \Sigma_1 \longrightarrow P_{lfc}(X)$.

prova:

Podemos utilizar o lema 3.3 e definir $M : \Sigma_1 \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ por

$$M(A) = \{x \in X / x^*(x) \leq G(x^*; A), \forall x^* \in X^*\}, \ A \in \Sigma_1.$$

Fixado $A \in \Sigma_1$, vamos mostrar que $M(A) \in P_{lfc}(X)$.

Sendo $g : X^* \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x^*) = G(x^*, A)$, podemos aplicar a proposição 1.33, pois g é convexa, própria, positivamente homogênea e ω^*-semicontínua inferiormente e obtemos $K \subset X$ não vazio, convexo e ω-fechado, e portanto fechado, tal que $g^*|_{\widehat{X}}$ é indicadora de K. Então

$$\begin{aligned} K &= \{x \in X : g^*(\widehat{x}) \leq 0\} &&= \{x \in X : \sup_{x^* \in X^*} (x^*(x) - G(x^*, A)) \leq 0\} \\ &= \{x \in X : x^*(x) \leq G(x^*, A), \ \forall \ x^* \in X^*\} &&= M(A), \end{aligned}$$

donde $M(A) \in P_{fc}(X)$.

Resta mostrar que $M(A)$ é limitado. Consideremos $\widehat{M(A)} \subset X^{**}$. Para todo $x^* \in X^*$ e todo $x \in M(A)$ temos $x^*(x) \leq G(x^*, A)$ e $-x^*(x) \leq G(-x^*, A)$, de modo que $|\widehat{x}(x^*)| \leq M_{x^*} = \max\{G(x^*, A), G(-x^*, A)\} \in \mathbb{R}$. Pelo princípio da limitação uniforme ([3],p66), existe $L \in \mathbb{R}$ com $\|\widehat{x}\| \leq L$, para todo $\widehat{x} \in \widehat{M(A)}$. Como $\|x\| = \|\widehat{x}\|$, segue-se que $M(A)$ é limitado.

Além disso, devemos verificar que M coincide com M_0 em Σ.

Para A $\in \Sigma$ temos $G(x^*; A) = g(x^*; A) = \sigma(x^*; M_0(A))$, e como para $x \in M_0(A)$, $x^*(x) \leq g(x^*; A)$ para todo $x^* \in X^*$, temos que $M_0(A) \subset$ M(A).

Suponhamos que não vale $M(A) \subset M_0(A)$. Então existe $x_0 \in M(A)$ com $x_0 \notin M_0(A)$. Temos que $\{x_0\}$ é um conjunto convexo e compacto e $M_0(A)$ é fechado e convexo.

Pelo teorema 1.6, existem c, a constantes reais e $x^* \in X^*$ tais que

$$x^*(y) \leq c < a < x^*(x_0), \text{para todo } y \in M_0(A)$$

e assim $\sup\limits_{y \in M_0(A)} x^*(y) \leq c < a < x^*(x_0)$. Com isto temos $g(x^*; A) < x^*(x_0)$, o que é absurdo, pois $g(x^*; A) = G(x^*; A) \geq x^*(x_0)$. Logo $M(A) \subset M_0(A)$.

Portanto, $M(A) = M_0(A)$, para todo $A \in \Sigma$.

Falta provarmos que M é uma multimedida fraca, isto é, para todo $x^* \in X^*$, $\sigma(x^*, M(\cdot)) = \sup\limits_{x \in M(\cdot)} x^*(x) : \Sigma_1 \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ é medida σ-aditiva com sinal.

Em primeiro lugar, sabemos que $\sigma(x^*, M(\cdot))$ tem valores reais, pois $\sup\limits_{x \in M(A)} x^*(x) \leq G(x^*, A)$ e $G(x^*, A) \in \mathbb{R}$, para quaisquer $x^* \in X^*$ e $A \in \Sigma_1$.

Vamos provar que $\sigma(x^*, M(\cdot)) = G(x^*, \cdot)$ para todo $x^* \in X^*$ e daí, pelo lema 3.3(iv), seguirá o que queremos.

Inicialmente, vamos mostrar que para $A, B \in \Sigma_1$ disjuntos vale

$$M(A \cup B) = \overline{M(A) + M(B)}. \tag{I}$$

De fato, dado $x \in M(A)+M(B)$ temos $x = x_A + x_B$, com $x_A \in M(A)$ e $x_B \in M(B)$. Então, para todo $x^* \in X^*$ temos $x^*(x) = x^*(x_A) + x^*(x_B) \leq G(x^*, A) + G(x^*, B) = G(x^*, A \cup B)$, pois $G(x^*, \cdot)$ é medida. Logo, $x \in M(A \cup B)$ e temos $\overline{M(A) + M(B)} \subset M(A \cup B)$, pois $M(A \cup B)$ é fechado.

Por outro lado, se $x \in M(A \cup B)$ e $x \notin \overline{M(A) + M(B)}$ pelo teorema 1.6, existem $x_0^* \in X^*$ e $c \in \mathbb{R}$ com $x_0^*(x) > c > x_0^*(y)$, para todo $y \in \overline{M(A) + M(B)}$. Em particular,para todo $y = x_A + x_B$ com $x_A \in M(A)$ e $x_B \in M(B)$ vale $x_0^*(x) > c > x_0^*(x_A) + x_0^*(x_B)$. Daí $x_0^*(x) > c \geq G(x_0^*, A) + G(x_0^*, B) = G(x_0^*, A \cup B)$, o que contradiz $x \in M(A \cup B)$. Então$M(A \cup B) \subset \overline{M(A) + M(B)}$.

Fixemos agora $x^* \in X^*$ e vamos verificar que $\sigma(x^*, M(\cdot))$ é aditiva. Dados $A, B \in \Sigma_1$ disjuntos, temos

$$\begin{aligned}
\sigma(x^*, M(A \cup B)) &= \sup_{x \in M(A \cup B)} x^*(x) &&= \sup_{x \in \overline{M(A)+M(B)}} x^*(x) \\
&= \sup_{x \in M(A)+M(B)} x^*(x) &&= \sup_{x_A \in M(A),\, x_B \in M(B)} (x^*(x_A) + x^*(x_B)) \\
&= \sup_{x \in M(A)} x^*(x) + \sup_{x \in M(B)} x^*(x) &&= \sigma(x^*, M(A)) + \sigma(x^*, M(B)).
\end{aligned}$$

Vamos finalmente provar que $\sigma(x^*, M(A)) = G(x^*, A)$, para todo $A \in \Sigma_1$.

Fixamos $A \in \Sigma_1$ e uma seqüência $\{B_n\}$ em Σ com $d(B_n, A) \xrightarrow{n} 0$, ou $\mu(A \triangle B_n) \xrightarrow{n} 0$.

Como $\sigma(x^*, M(\cdot))$é aditiva e real, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}
\sigma(x^*, M(A)) &= \sup_{x \in M(A)} x^*(x) \\
&= \sup_{x \in M(A \cap B_n)} x^*(x) + \sup_{x \in M(A \cap B_n^c)} x^*(x) \\
&= \sup_{x \in M(A \cap B_n)} x^*(x) + \sup_{x \in M(A^c \cap B_n)} x^*(x) + \sup_{x \in M(A \cap B_n^c)} x^*(x) - \sup_{x \in M(A^c \cap B_n)} x^*(x) \\
&= \sup_{x \in M(B_n)} x^*(x) + \sup_{x \in M(A \cap B_n^c)} x^*(x) + \inf_{x \in M(A^c \cap B_n)} -x^*(x) \\
&= \sigma(x^*, M(B_n)) + \sup_{x \in M(A \cap B_n^c)} x^*(x) + \inf_{x \in M(A^c \cap B_n)} -x^*(x),
\end{aligned}$$

e, de forma análoga,

$$\sigma(x^*, M(B_n)) = \sigma(x^*, M(A)) + \sup_{x \in M(A^c \cap B_n)} x^*(x) + \inf_{x \in M(A \cap B_n^c)} -x^*(x).$$

Da definição de M obtemos, para qualquer $C \in \Sigma_1$ e qualquer $y^* \in X^*$, que

$$\sup_{x \in M(C)} y^*(x) \leq G(y^*, C) \text{ e } \inf_{x \in M(C)} y^*(x) \leq G(y^*, C).$$

Utilizando essas desigualdades com $A \cap B_n^c$, $A^c \cap B_n$, x^* e $-x^*$ ficamos com

$|\sigma(x^*, M(A)) - \sigma(x^*, M(B_n))| \leq \max\{|G(x^*, A \cap B_n^c)| + |G(-x^*, A^c \cap B_n)|, |G(x^*, A^c \cap B_n)| + |G(-x^*, A \cap B_n^c)|\}$.

Lembrando que $\sigma(x^*, M(B_n)) = g(x^*, B_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, que $\lim_{\mu(E) \longrightarrow 0} |G(x^*, E)| = 0$ e $\lim_{\mu(E) \longrightarrow 0} |G(-x^*, E)| = 0$ (por 3.3(iii)) e que $\mu(A \cap B_n^c)$, $\mu(A^c \cap B_n) \xrightarrow{n} 0$, pois $A \cap B_n^c$ e $A^c \cap B_n$ estão contidos em $A \triangle B_n$ e $\mu(A \triangle B_n) \xrightarrow{n} 0$, obtemos que $\sigma(x^*, M(A)) = \lim_{n \longrightarrow \infty} g(x^*, B_n)$.

Mas esse limite é exatamente $G(x^*, A)$ e assim $G(x^*, A) = \sigma(x^*, M(A))$.

Portanto, M é uma multimedida fraca. ∎

Teorema 3.6 Sejam Σ uma álgebra de subconjuntos de Ω e Σ_1 a σ-álgebra gerada por Σ. Se X for reflexivo e $M_0 : \Sigma \longrightarrow P_{wkc}(X)$ for uma multimedida fraca, então as seguintes afirmações são equivalentes:

(i) M_0 pode se estendida para uma multimedida forte $M : \Sigma_1 \longrightarrow P_{wkc}(X)$.

(ii) $M_0(\Sigma)$ é um subconjunto relativamente fraco-compacto.

(iii) M_0 é fortemente aditiva.

(iv) Existe uma medida $\mu : \Sigma_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ não negativa σ-aditiva tal que $M_0 \ll \mu\Big|_{\Sigma}$.

prova:

Inicialmente, por M_0 ter valores em $P_{wkc}(X)$, pela proposição 2.13 segue que M_0 é multimedida, pois $\overline{M_0(A) + M_0(B)} = M_0(A) + M_0(B)$.

(i) $\Rightarrow$(ii) Temos $M_0(\Sigma) = M(\Sigma) \subset M(\Sigma_1)$ e, pela proposição 2.21, $M(\Sigma_1)$ é relativamente ω-compacto. Então $M_0(\Sigma)$ é relativamente ω-compacto.

(ii) $\Rightarrow$(iii) Sendo $M_0(\Sigma)$ relativamente ω-compacto, pelas proposições 2.13(1) e 2.17 temos que M é fortemente aditiva, pois $P_{wkc}(X) \subset P_{fc}(X)$.

(iii) $\Rightarrow$(iv) É a Proposição 2.20

(iv) $\Rightarrow$(i) Pelo Teorema 3.5, M_0 pode ser estendida para uma multimedida fraca $M : \Sigma_1 \longrightarrow P_{wkc}(X)$, pois $P_{wkc}(X) = P_{lfc}(X)$ porque X é reflexivo.

Pela proposição 2.21, M é σ-aditiva, ou seja, é multimedida forte.

Capítulo 4

Integração com respeito a uma multimedida

Este capítulo visa estabelecer condições para que possamos integrar uma multimedida, o fato desta integral poder ser usada para definir uma outra multimedida e descobrir quais as características da inicial que esta nova multimedida tem.

Neste capítulo Σ será uma σ-álgebra de subconjuntos de Ω .

Lembramos que $B(\Sigma)$ denota o conjunto das funções $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ limitadas e mensuráveis e que se $f \in B(\Sigma)$ e $m \in bv(\Sigma, X)$ existe a integral $\int_A f dm$ para todo $A \in \Sigma$ pelo exemplo 2.7.

Assim, se $M : \Sigma \longrightarrow P_{wkc}(X)$ for uma multimedida de variação limitada, temos pela proposição 2.30, $S_M \subset bv(\Sigma, X)$ e portanto, para todo $m \in S_M$ e todo $A \in \Sigma$, existe $\int_A f dm$, o que nos permite enunciar a seguinte definição.

Definição 4.1 Sejam $M : \Sigma \longrightarrow P_{wkc}(X)$ multimedida de variação limitada e $f \in B(\Sigma)$. A integral de f com respeito a M em $A \in \Sigma$ é dada por $\int\limits_A f dM = \{\int\limits_A f dm : m \in S_M\}$.

Teorema 4.2 Sejam $f \in$ B(Σ) e M:$\Sigma \rightarrow P_{wkc}(X)$ uma multimedida forte de variação limitada. Então a multifunção de conjuntos definida por $G(A) = \int\limits_A f dM$, para cada $A \in \Sigma$, é uma multimedida forte com valores em $P_{wkc}(X)$ e de variação limitada.

prova:

Primeiro mostraremos que $G(A) \in P_{wkc}$(X) para cada $A \in \Sigma$.

Em primeiro lugar, $G(A) \neq \emptyset$, pois $S_M \neq \emptyset$, por 2.29.

Seja $\{\int\limits_A f dm_\alpha\}_{\alpha \in D}$ um net em $G(A)$, onde $\{m_\alpha\}_{\alpha \in D}$ é um net em S_M.

Desde que S_M é τ-compacto pelo Lema 2.33, existe um subnet $\{m_{\alpha_k}\}_{k\in J}$ de $\{m_\alpha\}_{\alpha\in D}$ que τ-converge para $m \in S_M$, ou seja, para todo $B \in \Sigma$ a net $\{m_{\alpha_k}(B)\}_{k\in J}$ é ω-convergente para $m(B)$.

Observando que $|m_{\alpha_k}|(\Omega) \leq |M|(\Omega) < \infty$, temos por 2.9 que,

$\lim\limits_{k\in J} x^*(\int\limits_B f dm_{\alpha_k}) = \lim\limits_{k\in J} \int\limits_B f dx^* \circ m_{\alpha_k} = \int\limits_B f dx^* \circ m = x^*(\int\limits_B f dm)$.

Logo $G(A)$ é fraco-compacto.

Agora vamos mostrar que $G(A)$ é convexo.

Sejam $x, y \in G(A)$ onde $x = \int\limits_A f dm_1$ e $y = \int\limits_A f dm_2$, com $m_1,\ m_2 \in S_M$. Temos

$$\lambda x + (1-\lambda) y = \lambda \int\limits_A f dm_1 + (1-\lambda) \int\limits_A f dm_2 = \int\limits_A f[\lambda dm_1 + (1-\lambda) dm_2] = \int\limits_A f d[\lambda m_1 + (1-\lambda) m_2].$$

Sendo $m = \lambda m_1 + (1-\lambda) m_2$, temos que m é medida vetorial. Além disso, como m_1, m_2 pertencem a S_M temos que $m_1(A), m_2(A) \in M(A)$ e este sendo convexo vale que

$$m(A) = \lambda m_1(A) + (1-\lambda) m_2(A) \in M(A).$$

Logo, $\int_A f dm \in G(A)$ e $G(A)$ é convexo.

Então $G(A) \in P_{wkc}$.

Vamos provar que G é uma multimedida forte.

1.$G(\emptyset) = \{\int\limits_\emptyset f dm; m \in S_M\} = \{0\}$, é claro.

2. $G(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} G(A_n)$, para $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ seqüência disjunta em Σ .

Mostraremos inicialmente que $\sigma(x^*, G(\cdot))$ é σ-aditiva para todo $x^* \in X^*$.

Sejam $x^* \in X^*$ e $A,\ B \in \Sigma$ disjuntos. Então temos que

$$\begin{aligned} \sigma(x^*, G(A\cup B)) &= \sigma(x^*, \{\int\limits_{A\cup B} f dm : m \in S_M\}) \\ &= \sup_{m\in S_M} x^*(\int_{A\cup B} f dm) \\ &= \sup_{m\in S_M} x^*(\int_A f dm + \int_B f m). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sigma(x^*, G(A\cup B) &\leq \sup_{m\in S_M} x^*(\int\limits_A f dm) + \sup_{m\in S_M} x^*(\int\limits_B f dm) \\ &= \sigma(x^*, G(A)) + \sigma(x^*, G(B)). \end{aligned} \qquad (I)$$

Como $G(A),\ G(B)$ são ω-compactos, existem $m_1,\ m_2 \in S_M$ tais que

$$\sigma(x^*, G(A)) = x^*(\int_A f dm_1) \text{ e } \sigma(x^*, G(B)) = x^*(\int_B f dm_2) \tag{II}$$

Pela Observação 2.29 sabemos que S_M é decomponível e assim a medida m_0 dada por $m_0 = \chi_{A_1} m_1 + \chi_{A_2} m_2$ é um seletor de M.

Como $\int_{A \cup B} f dm_0 = \int_A f dm_1 + \int_B f dm_2$, vale que

$x^*(\int_{A\cup B} f dm_0) = x^*(\int_A f dm_1 + \int_B f dm_2) = x^*(\int_A f dm_1) + x^*(\int_B f dm_2) \overset{(II)}{=} \sigma(x^*, G(A)) + \sigma(x^*, G(B))$.

Logo,

$$\sup_{m \in S_M} x^*(\int_{A\cup B} f dm) \geq \sigma(x^*, G(A)) + \sigma(x^*, G(B)). \tag{III}$$

Por (I) e (III) vale que

$$\sigma(x^*, G(A \cup B)) = \sigma(x^*, G(A)) + \sigma(x^*, G(B)), \tag{IV}$$

ou seja, $\sigma(x^*, G(\cdot))$ é aditiva e pela proposição 2.13(2), G é aditiva, pois, como G tem valores em $P_{wkc}(X)$, para $A,\ B \in \Sigma$ disjuntos temos $\overline{G(A) + G(B)} = G(A) + G(B)$.

Para a σ-aditividade temos $|\sigma(x^*, G(\overset{k}{\underset{n=1}{\cup}} A_n)) - \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(x^*, G(A_n))| =$

$|\sigma(x^*, G(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n)) - \sigma(x^*, G(\overset{k}{\underset{n=1}{\cup}} A_n))|$.

Como podemos escrever $\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n = (\overset{k}{\underset{n=1}{\cup}} A_n) \cup (\overset{\infty}{\underset{n=k+1}{\cup}} A_n)$ e essa união é disjunta,

$|\sigma(x^*, G(\overset{\infty}{\underset{n=k+1}{\cup}} A_n))| = |\sup_{m \in S_M} x^*(\int_{\overset{\infty}{\underset{n=k+1}{\cup}} A_n} f dm)|$.

Mas $|\sup_{m \in S_M} x^*(\int_{\overset{\infty}{\underset{n=k+1}{\cup}} A_n} f dm)| \leq \sup_{m \in S_M} |\int_{\overset{\infty}{\underset{n=k+1}{\cup}} A_n} f dx^* \circ m| \leq \sup_{m \in S_M} \|f\|_\infty |x^* \circ m|(\overset{\infty}{\underset{n=k+1}{\cup}} A_n)$,
e como $|x^* \circ m|(\cdot) \leq \|x^*\| |m|(\cdot) \leq \|x^*\| |M|(\cdot)$, por 2.4 e 2.30(i), então

$|\sigma(x^*, G(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n)) - \sigma(x^*, G(\overset{k}{\underset{n=1}{\cup}} A_n))| \leq \|f\|_\infty \|x^*\| . |M|(\overset{\infty}{\underset{n=k+1}{\cup}} A_n)$. Por 2.30(iii), $|M|(\cdot)$ é σ-aditiva e daí, fazendo $k \longrightarrow \infty$,

$$\sigma(x^*, G(\overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} A_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(x^*, G(A_n)), \tag{IV}$$

para todo $x^* \in X^*$.

Pela proposição 2.21, G é σ-aditiva, pois tem valores em $P_{wkc}(X)$.

Além disso, temos que G é de variação limitada, com $|G|(\Omega) \leq \|f\|_\infty |M|(\Omega)$. De fato,

$$\begin{aligned}
|G|(\Omega) &= \sup_{\Pi} \sum_{A_n \in \Pi} h(\{0\}, G(A_n)) &&= \sup_{\Pi} \sum_{A_n \in \Pi} h(\{0\}, \{\int_{A_n} f dm : m \in S_M\}) \\
&= \sup_{\Pi} \sum_{A_n \in \Pi} \sup_{m \in S_M} \|\int_{A_n} f dm\| &&\leq \|f\|_\infty \sup_{\Pi} \sum_{A_n \in \Pi} \sup_{m \in S_M} |m|(A_n) \\
&\leq \|f\|_\infty \sup_{\Pi} \sum_{A_n \in \Pi} |M|(A_n) &&= \|f\|_\infty |M|(\Omega),
\end{aligned}$$

sendo que a penúltima desigualdade segue da proposição 2.30. ∎

Dada uma função $f \in B(\Omega)$ podemos escrever $f = f_+ - f_-$ onde $f_+ = \max(f, 0)$ e $f_- = \max(-f, 0)$.

Teorema 4.3 Sejam $M : \Sigma \longrightarrow P_{wkc}(X)$ multimedida forte de variação limitada e f em $B(\Omega)$. Então para cada A em Ω , cada $x^* \in X^*$ e G dada no teorema 4.2 temos

$$\sigma(x^*, G(A)) = \int_A f_+ d\sigma(x^*, M(\cdot)) - \int_A f_- d\sigma(-x^*, M(\cdot)).$$

prova:

Provaremos primeiro para funções simples.

Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ simples. Então f_+ e f_- também são funções simples e podemos escrever $f_+ = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i}$ e $f_- = \sum_{j=1}^{\lambda} (-b_j) \chi_{B_j}$, com a_i, $(-b_j)$ estritamente positivos e os conjuntos A_i e B_j disjuntos dois a dois, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq \lambda$.

Então $f = \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i} + \sum_{j=1}^{\lambda} b_j \chi_{B_j}$ e, sendo $C = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ e $D = \bigcup_{j=1}^{\lambda} B_j$, $f(x) = 0$ para $x \notin C \cup D$. Logo $\int_A f dM = \int_{A \cap (C \cup D)} f dM$, para cada $A \in \Sigma$.

Para $x^* \in X^*$ temos então

$$\begin{aligned}
\sigma(x^*, G(A)) &= \sigma(x^*, G((A \cap C) \cup (A \cap D))) \\
&= \sigma(x^*, G(A \cap C)) + \sigma(x^*, G(A \cap D)) \\
&= \sigma(x^*, \int_{A \cap C} f dM) + \sigma(x^*, \int_{A \cap D} f dM),
\end{aligned}$$

pois $\sigma(x^*; G(\cdot))$ é σ-aditiva.

Portanto,

$$\sigma(x^*, G(A)) = \sup_{m \in S_M} x^*(\sum_{i=1}^{k} a_i m(A \cap A_i)) + \sup_{m \in S_M} (-x^*)(\sum_{j=1}^{\lambda} (-b_j) m(A \cap B_j)). (I)$$

Como os $A_i's$ e os $B_j's$ são disjuntos,

$\sigma(x^*, G(A)) = \sum_{i=1}^{k} \sup_{m\in S_M} x^*(a_i m(A \cap A_i)) + \sum_{j=1}^{\lambda} \sup_{m\in S_M} (-x^*)(-b_j m(A \cap B_j))$.

Mas $M(B) = \{m(B)/m \in S_M\}$, para todo $B \in \Sigma$,pelo teorema 2.36, e então temos que

$$\begin{aligned} \sigma(x^*, G(A)) &= \sum_{i=1}^{k} a_i \sigma(x^*, M(A \cap A_i)) + \sum_{j=1}^{\lambda} (-b_j)\sigma(-x^*, M(A \cap B_j)) \\ &= \int_A \sum_{i=1}^{k} a_i \chi_{A_i} d\sigma(x^*, M(\cdot)) - \int_A \sum_{j=1}^{\lambda} (-b_j)\chi_{B_j} d\sigma(-x^*, M(\cdot)). \end{aligned}$$

Logo $\sigma(x^*, G(A)) = \int_A f_+ d\sigma(x^*, M(\cdot)) - \int_A f_- d\sigma(-x^*, M(\cdot))$.

Para o caso genérico de uma função f mensurável e limitada, existem sequências de funções simples mensuráveis com $\{s_n^+\}$ e $\{s_n^-\}$ com $s_n^+ \overset{U}{\longrightarrow} f_+$ e $s_n^- \overset{U}{\longrightarrow} f_-$. Daí segue o resultado. ∎

Agora que conseguimos definir uma multimedida pela integral de outra, gostariamos de saber qual a relação entre seus seletores. O próximo teorema trata disso.

Teorema 4.4 Sejam $M : \Sigma \longrightarrow P_{wkc}(X)$ multimedida forte de variação limitada, $f \in B(\Omega\ )$ e $G : \Sigma \longrightarrow P_{wkc}(X)$, dada por $G(A) = \int_A f dM$, $A \in \Sigma$. Então se $m_0 \in S_M$, a medida vetorial σ-aditiva n_0 definida por $n_0(A) = \int_A f dm_0$, $A \in \Sigma$, é um seletor de G.

prova:

Para $A \in \Sigma$, $n_0(A) = \int_A f dm_0 \in \{\int_A f dm : m \in S_M\} = \int_A f dM = G(A)$ e assim $n_0(A) \in G(A)$.

Dado $m_0 \in S_M$, é claro que n_0 é medida vetorial pela proposição 2.10 e então n_0 é seletor de G. Além disso, como m_0 é σ-aditiva, $|m_0|(\cdot)$ também o é pela proposição 2.30. Daí, se $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é seqüência disjunta em Σ ,

$$\begin{aligned} \|n_0(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) - \sum_{n=1}^{k} n_0(A_n)\| &= \|n_0(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n)\| = \|\int_{\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n} f dm_0\| \\ &\leq \|f\|_\infty |m_0|(\bigcup_{n=k+1}^{\infty} A_n) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

e n_0 é σ-aditiva. ∎

Referências Bibliográficas

[1] BOURBAKI, N., *Theory of sets, Elements of mathematics*, Hermann, Paris, 1968.

[2] BREZIS, H., *Analyse Fonctionelle, Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[3] DUNFORD, N. and SCHWARTZ, J. *Linear Operators I*, Willey Interscience,New York, 1958.

[4] DIESTEL,J. and UHL,J., *Vector Measures*. Am. Math. Soc. Publ.,Providence, 1977.

[5] GODET-THOBIE, C. *Multimesures et multimesures de transitions*, Thèse, Montpellier, 1975.

[6] GODET-THOBIE, C. *Some results about multimeasures and their selectors*, Measure Theory at Oberwohlfach, 1979, Lectures Notes in Math., vol 794, Springer, Berlin and New York, 1979, pp 112-116.

[7] HEWITT, E., STROMBERG, K. *Real and abstract analysis*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1965.

[8] HOLMES, R.B., *Geometric Functional Analysis and its applications*, New York, Springer Verlag, 1975.

[9] KANDILAKIS, D., *On the extension of multimeasures and integration with respect to a multimeasures*, Proc. Am. Math. Soc, n.1,pp 85-93,1992.

[10] KELLEY,JOHN L., *General Topology*, Van Nostrand,New York, 1955.

[11] MURKHEJEA,A. and POTOVEN,K., *Real and Functional Analysis, Part A:Real Analysis*, Plenum Press, New York and Londres, 1972.

[12] PALLU DE LA BARRIERRE, R. *Quelques propriétes des multi-mesures*, Seminaire d'analyse convexe, exposé no. 11, Montepellier, 1973.

[13] PALLU DE LA BARRIERRE, R. *Multimesures à valeurs convexes fermées*, Colloque sur l'intégration vectorielle et multivoque, exposé no. 4, Caen, 1975.

[14] PAPAGEORGIOU, N.S., *Radon-Nikodym theorems for multimeasures and transition multimeasures*, Proc. Am. Math. Soc, n.2,pp 465-474,1991.

Índice Remissivo