O Problema de Specht em Álgebras de Bernstein

Sidnei Azevedo de Souza

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Álgebra**
Orientador: **Prof. Dr. Luiz Antonio Peresi**

Durante este trabalho, o autor teve o apoio financeiro do PICDT/CAPES.

São Paulo, Fevereiro de 1999

O Problema de Specht em Álgebras de Bernstein

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação apresentada por **Sidnei Azevedo de Souza**, aprovada pela Banca Examinadora.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Luiz Antonio Peresi (Presidente)	IME-USP
Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov	IMECC-UNICAMP
Prof. Dr. Antonio Paques	IMECC-UNICAMP

À Amelia e Jose, pelos exemplos de luta,

coragem e perseverança;

a Antonio J. de Souza, pelas doces lembranças.

Agradecimentos:

- primeiramente a Deus, por mais uma conquista e por ter me colocado entre pessoas muito especiais;

- à minha querida família, por ter se privado da minha presença, sobretudo a meus pais, por terem facilitado meus primeiros passos na vida acadêmica;

- ao meu orientador, Prof. Dr. Luiz Antonio Peresi, pela sua extrema dedicação, simplicidade e incentivo;

- aos professores que, de alguma maneira, contribuíram com a minha formação;

- a todos os colegas que encontrei na USP, que fizeram com que esta fase de minha vida fosse mais agradável, especialmente: Alexander S. Luz, Edson T. Tsukimoto, Fernando M. Antoneli Junior, Flávio S. Yamamoto, Jair D. Junior, Maria A. Couto, Raul A. Ferraz, Samuel G. da Silva, Silvio Cesar G. Granja, Vanessa F. Coutinho, Walquiria F. Torezani;

- aos colegas e amigos do DEB/CEUD/UFMS e à amiga do DCO Rosana Zanelatto Santos.

Resumo

Este trabalho resultou do estudo do artigo *Polynomial identities of Bernstein algebras of small dimension* de J. Bernad, S. González, C. Martínez e A. V. Iltyakov, publicado no J. Algebra em 1998. Consideramos o problema de Specht, isto é, o problema da existência de uma base finita de identidades (polinomiais), para as álgebras de Bernstein. No Capítulo 1, mencionamos que este problema não tem solução para as álgebras de Bernstein, tem solução para as álgebras de Bernstein-Jordan e para as álgebras de Bernstein nucleares, e mostramos que o ideal de identidades de uma álgebra de Bernstein particular de dimensão 2 tem um conjunto finito de geradores. No Capítulo 2, encontramos um conjunto finito de identidades que gera o ideal de identidades da classe formada pelas álgebras de Bernstein regulares. No Capítulo 3, encontramos um conjunto finito de identidades que gera o ideal de identidades de uma subclasse das álgebras de Bernstein excepcionais.

Abstract

This work is based on the paper *Polynomial identities of Bernstein algebras of small dimension* by J. Bernad, S. González, C. Martínez and A. V. Iltyakov, published in the J. Algebra in 1998. We consider the Specht's problem, i.e., the problem of the existence of a finite basis of (polynomial) identities for Bernstein algebras. In the first chapter we mention that this problem does not have solution for Bernstein algebras, has solution for Bernstein-Jordan algebras and for nuclear Bernstein algebras, and show that the ideal of identities of certain Bernstein algebra of dimension 2 has a finite set of genarators. In the second chapter we find a finite set of identities which generates the ideal of identities of the class formed by regular Bernstein algebras. In the third chapter we find a finite set of identities which generates the ideal of identities of a subclass of excepcional Bernstein algebras.

Conteúdo

Introdução 1

1 Identidades e Álgebras de Bernstein 4

1.1 Identidades 4

1.2 Álgebras Comutativas 7

1.3 Álgebras de Bernstein 10

1.4 O Problema de Specht 17

2 Identidades de Álgebras de Bernstein Regulares 23

3 Identidades de Uma Subclasse das Álgebras de Bernstein Excepcionais 40

Bibliografia 76

Introdução

Dada uma classe $\mathcal{C}$ de álgebras (não-associativas), um problema consiste em encontrar as identidades (polinomiais) que são satisfeitas por todas as álgebras em $\mathcal{C}$. A questão principal, nesta direção, é o seguinte problema:

Problema de Specht. *Seja $\mathcal{C}$ uma classe de álgebras.*

(i) É verdade que toda álgebra A em $\mathcal{C}$ tem uma base finita de identidades, isto é, existe um conjunto finito de identidades que gera o ideal de identidades $T(A)$ de A?

(ii) É verdade que $\mathcal{C}$ tem uma base finita de identidades, isto é, existe um conjunto finito de identidades que gera o ideal de identidades $T(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$?

É claro que (i) implica (ii), pois $T(\mathcal{C}) \subset T(A)$, para $A \in \mathcal{C}$.

Este problema foi proposto para a classe das álgebras associativas por W. Specht em 1950. Algumas soluções parciais importantes deste problema apareceram no final dos anos 70 e começo dos anos 80. Em 1987, Kemer [9] chegou à solução completa, mais especificamente provou o seguinte teorema:

Teorema 0.1. *(Kemer [9]). Toda álgebra associativa sobre um corpo de característica 0 tem uma base finita de identidades.*

Este teorema prova a existência de uma base de identidades, mas não fornece a construção da base para uma dada álgebra associativa.

Temos os seguintes teoremas análogos para as álgebras de Lie, as alternativas e as de Jordan, respectivamente:

Teorema 0.2. *(Iltyakov [12]). Toda álgebra de Lie de dimensão finita sobre um corpo de característica 0 tem uma base finita de identidades.*

Teorema 0.3. *(Iltyakov [11]). Seja A uma álgebra alternativa finitamente gerada sobre um corpo de característica 0 satisfazendo uma identidade polinomial. Então a variedade de álgebras $\mathcal{V}(A)$ gerada por A tem uma base finita de identidades.*

Teorema 0.4. *(Vais e Zelmanov [10]). Toda álgebra de Jordan finitamente gerada sobre um corpo de característica 0 satisfazendo uma identidade polinomial tem uma base finita de identidades.*

Nesta dissertação, consideramos o Problema de Specht no contexto das álgebras de Bernstein sobre um corpo de característica 0 (conforme Bernad et al [15, 16]).

No Capítulo 1, introduzimos os conceitos de identidade (polinomial), ideal de identidades e álgebras de Bernstein; mencionamos um exemplo que mostra que o Problema de Specht (item (i)) não tem solução para as álgebras de Bernstein; referimos que

este problema tem solução para as álgebras de Bernstein-Jordan e para as álgebras de Bernstein nucleares; finalmente, mostramos que o ideal de identidades de uma álgebra de Bernstein particular (a álgebra $\mathcal{B}_2$) tem um conjunto finito de geradores.

No Capítulo 2, consideramos a classe $\mathcal{N}$ formada pelas álgebras de Bernstein regulares e mostramos que o Problema de Specht (item ii) tem solução para esta classe $\mathcal{N}$. Mais especificamente, encontramos um conjunto finito de identidades que gera o ideal de identidades $T(\mathcal{N})$.

No Capítulo 3, consideramos uma subclasse $\mathcal{M}$ da classe das álgebras de Bernstein excepcionais e mostramos que o Problema de Specht (item ii) tem solução para esta subclasse $\mathcal{M}$. Mais especificamente, encontramos um conjunto finito de identidades que gera o ideal de identidades $T(\mathcal{M})$.

Vamos assumir que $\mathbb{F}$ é um corpo de característica 0 e, sem perda de generalidade, que $\mathbb{F}$ é um corpo algebricamente fechado. Vamos considerar álgebras não necessariamente associativas sobre o corpo $\mathbb{F}$.

Capítulo 1

Identidades e Álgebras de Bernstein

1.1 Identidades

Consideremos $X = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ um conjunto infinito livre sobre o corpo $\mathbb{F}$ e f um polinômio em n dessas variáveis; para comodidade da escrita, consideremos polinômios de grau n nas n primeiras variáveis, isto é, $f(x_1, \ldots, x_n)$. Consideremos, também, a álgebra livre com conjunto de geradores X, que denotaremos por $\mathbb{F}[X]$.

Definição 1.1. Seja A uma álgebra sobre $\mathbb{F}$. Dizemos que $f \in \mathbb{F}[X]$ é uma *identidade* de A se para todo $a_1, \ldots, a_n \in A$ tivermos $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

Considerando A uma $\mathbb{F}$-álgebra, denotamos por $T(A)$ o conjunto formado por todas as identidades que são válidas em A. A afirmação que podemos fazer é que $T(A)$ é um ideal de $\mathbb{F}[X]$. De fato, se $f_1, f_2 \in T(A)$, então $f_1(a_1, \ldots, a_n) = f_2(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Logo,

$f_1 - f_2 \in T(A)$, pois cada parcela é nula para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$. Tomemos ainda $f \in T(A)$ e $g \in \mathbb{F}[X]$ e da mesma forma obtemos gf e $fg \in T(A)$.

Notemos que se $f(x_1, \ldots, x_n) \in T(A)$ e $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ são polinômios de $\mathbb{F}[X]$, então $f(p_1(x), \ldots, p_n(x)) \in T(A)$. Este fato podemos obter diretamente da Definição 1.1.

O ideal $T(A)$ é denominado *T-ideal* ou *ideal de identidades* de A. Um subconjunto $S \subseteq T(A)$ é chamado um *conjunto de geradores* das identidades de A se $T(A)$ for o T-ideal minimal que contém S. Isto significa que qualquer identidade f de A pode ser obtida de S através da troca de variáveis por polinômios, multiplicação por polinômios e combinações lineares. Dizemos que um conjunto minimal de geradores é uma *base de identidades* de A.

O conjunto de todas as identidades que são satisfeitas para cada álgebra de uma classe de álgebras $\mathcal{C}$ também é um ideal de $\mathbb{F}[X]$. Este ideal é denominado *T-ideal* ou *ideal de identidades* de $\mathcal{C}$ e é denotado por $T(\mathcal{C})$. De modo análogo, podemos definir os conceitos de *conjunto de geradores* das identidades de $\mathcal{C}$ e *base de identidades* de $\mathcal{C}$.

Como mencionamos no final da Introdução, estamos assumindo que a característica de $\mathbb{F}$ é 0. Neste caso, temos que $T(A)$ é gerado por polinômios homogêneos multilineares. Sejam $\mathbb{K}$ uma extensão de $\mathbb{F}$ e $A_{\mathbb{K}} = A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K}$. Então $T(A_{\mathbb{K}}) = T(A) \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{K}$. Veja Pierce [6], Capítulo 20 e Zhevlakov et al [7], Capítulo 1. Quando $\mathbb{F}$ não é algebricamente fechado, tomamos o fecho algébrico $\overline{\mathbb{F}}$ de $\mathbb{F}$ e consideramos a álgebra $A_{\overline{\mathbb{F}}}$. Portanto, podemos assumir, sem perda de generalidade, que F é um corpo algebricamente fechado.

Uma *partição* de um número natural n é uma seqüência $(n_1, \ldots, n_k)$, em que $n_i \geq n_{i+1}$ e $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$. Um *diagrama de Young* associado a $(n_1, \ldots, n_k)$ é uma figura formada por quadrados, de tal maneira que na i-ésima linha temos n_i quadrados e as linhas estão alinhadas à esquerda. Um *tableau* é um diagrama de Young, em que os quadrados são preenchidos com os números $1, 2, \ldots, n$ e cada um destes números aparece somente uma vez. Quando isto é feito de tal maneira que os números crescem à medida que percorremos uma linha (da esquerda para a direita) ou uma coluna (de cima para baixo), dizemos que o tableau é *standard*.

Dado um número natural n, seja r o número de possíveis diagramas de Young. Então a álgebra de grupo $\mathbb{F}S_n$ do grupo simétrico S_n ($\mathrm{car}(\mathbb{F}) = 0$ e $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado) tem a decomposição

$$\mathbb{F}S_n = \mathbb{F}S_n e_1 \oplus \ldots \oplus \mathbb{F}S_n e_r,$$

soma direta de ideais simples, em que $e_1, \ldots, e_r$ são idempotentes primitivos ortogonais e $1 = e_1 + \ldots + e_r$.

Sejam $D_1, \ldots, D_r$ os possíveis diagramas de Young. O idempotente e_i é determinado por D_i da seguinte maneira: sejam $T_1^{(i)}, \ldots, T_{s_i}^{(i)}$ os possíveis tableaux standard associados a D_i; definimos

$$e_j^{(i)} = \sum_{p \in P_j^{(i)},\ q \in Q_j^{(i)}} sgn(\sigma) pq,$$

em que $sgn(\sigma)$ é o sinal da permutação q; $P_j^{(i)}$ e $Q_j^{(i)}$ são os subgrupos de S_n formados pelas permutações que deixam invariantes as linhas e colunas, respectivamente, de $T_j^{(i)}$

como conjuntos; $e_j^{(i)}$ é *essencialmente idempotente*, isto é, $e_j^{(i)}e_j^{(i)} = \frac{n!}{s_i}e_j^{(i)}$; então

$$e_i = \frac{s_i}{n!}\ [e_1^{(i)} + \ldots + e_{s_i}^{(i)}],$$

Veja Boerner [2], Capítulo IV ou Curtis e Reiner [1], Capítulo IV, Seção 28.

Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}[X]$. Denotamos por $(\sigma f)(x_1, \ldots, x_n)$ ou simplesmente por σf o polinômio definido por

$$(\sigma f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

Como

$$1 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s_i} e_j^{(i)}$$

temos que

$$f = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s_i} e_j^{(i)} f.$$

Logo, a partir das propriedades dos polinômios $e_j^{(i)}f$, podemos obter propriedades do polinômio f. Por exemplo, se para todo $i = 1, \ldots . r$ e $j = 1, \ldots, s_i$, $e_j^{(i)}f$ é uma identidade de uma álgebra A ou é uma conseqüência de um conjunto de identidades ou pertence a um ideal I, então f tem esta mesma propriedade.

1.2 Álgebras Comutativas

Estamos considerando álgebras comutativas, isto é, álgebras que satisfaçam a identidade

$$xy = yx. \tag{1.1}$$

Denotemos por (x, y, t) o *associador* $xy.t - x.yt$. Em toda álgebra comutativa, as seguintes identidades são válidas:

$$(x, y, x) = 0, \tag{1.2}$$

$$(x, y, t) = -(t, y, x), \tag{1.3}$$

$$(x, y, t) + (y, t, x) + (t, x, y) = 0. \tag{1.4}$$

A identidade (1.2) é denominada *flexível* e segue imediatamente de (1.1). A identidade (1.3) é conseqüência direta da linearização da identidade (1.2). Vejamos: para linearizar $(x, y, x) = 0$ temos que fazer $(x + z, y, x + z) = 0$ e segue que $(x, y, x) + (x, y, z) + (z, y, x) + (z, y, z) = 0$ e, portanto, usando novamente a identidade flexível, temos $(x, y, z) + (z, y, x) = 0$, e (1.3) vale em toda álgebra comutativa. Já para provarmos a identidade (1.4), basta desenvolvermos os associadores e usarmos a comutatividade.

Proposição 1.1. *Todo polinômio multilinear $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{F}[X]$ módulo a identidade (1.1) tem a forma*

$$\alpha x_1 R_{x_2} \ldots R_{x_n} + \sum_i \beta_i \, (u_i, v_i, w_i) R_{a_i} \ldots R_{b_i}, \tag{1.5}$$

em que $\alpha, \beta_i \in \mathbb{F}$, u_i, v_i, w_i, a_i, b_i são monômios em quaisquer das n primeiras variáveis de X e R_{x_i} é o operador multiplicação à direita por x_i.

Prova. Primeiro apresentaremos como passos iniciais da indução sobre n os casos $n = 2, 3$, em que n é o grau do polinômio. Para $n = 2$, f tem a forma $f(x_1, x_2) = \alpha x_1 x_2 = \alpha x_1 R_{x_2}$ módulo a identidade (1.1). Agora, para $n = 3$, podem aparecer no polinômio f os

seguintes monômios (módulo (1.1)): $x_1x_2.x_3$, $x_1x_3.x_2$, $x_2x_3.x_1$ e, cada um deles, módulo (1.1), pode ser escrito da seguinte maneira:

$$x_1x_2.x_3 = x_1R_{x_2}R_{x_3},$$

$$\begin{aligned} x_1x_3.x_2 &\overset{(1.1)}{=} x_3x_1.x_2 + [x_1x_2, x_3] \\ &= x_1x_2.x_3 + (x_3, x_1, x_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2x_3.x_1 &\overset{(1.1)}{=} x_1.x_2x_3 + x_1x_2.x_3 - x_1x_2.x_3 \\ &= x_1x_2.x_3 - (x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Portanto, para $n = 3$, temos

$$\begin{aligned} f &= \alpha_1x_1x_2.x_3 + \alpha_2x_1x_3.x_2 + \alpha_3x_2x_3.x_1 \\ &= \sum_{i=1}^{3} \alpha_i\ x_1R_{x_2}R_{x_3} + \alpha_2(x_3, x_1, x_2) - \alpha_3(x_1, x_2, x_3), \end{aligned}$$

módulo a identidade (1.1).

Suponhamos, como hipótese de indução, que todo polinômio multilinear de grau $< n$ tem a forma (1.5) módulo a identidade (1.1). Vamos mostrar que todo polinômio multilinear $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ de grau n tem a forma (1.5) módulo (1.1).

Denotemos por I o ideal de $\mathbb{F}[X]$ gerado pelos associadores e comutadores. Então se $\tilde{A}ss[X]$ denota a álgebra associativa comutativa livre com conjunto de geradores X, temos $\tilde{A}ss[X] \cong \mathbb{F}[X]/I$. Logo,

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) = \alpha x_1R_{x_2} \ldots R_{x_n} + g(x_1, \ldots, x_n), \tag{1.6}$$

em que $g(x_1, \ldots, x_n) \in I$. Módulo a identidade (1.1) temos

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \sum_j \gamma_j \; p_j(x_1, \ldots, x_n), \tag{1.7}$$

em que

$$p_j(x_1, \ldots, x_n) = (u'_j, v'_j, w'_j) q_{j_1} \ldots q_{j_t}$$

e o produto no lado direito desta última igualdade é associado de alguma maneira. Se $y_j = (u'_j, v'_j, w'_j)$, podemos considerar $p_j(x_1, \ldots, x_n)$ como sendo um polinômio multilinear nas variáveis $y_j, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}$, em que k $(k \geq 3)$ é o grau de y_j. Neste caso, $p_j(y_j, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}})$ é um polinômio multilinear de grau $n-k+1 < n$ e podemos aplicar a hipótese de indução. Obtemos então que

$$p_j(x_1, \ldots, x_n) = \delta \; y_j R_{x_{i_1}} \ldots R_{x_{i_{n-k}}} + \sum_s \delta_s \; (u''_j, v''_j, w''_j) R_{a''_s} \ldots R_{b''_s}. \tag{1.8}$$

Podemos concluir de (1.6), (1.7) e (1.8) que f tem a forma (1.5) módulo a identidade (1.1). ■

1.3 Álgebras de Bernstein

As álgebras de Bernstein foram introduzidas por Holgate [5] e Lyubich (veja [8]) em conexão com o problema, proposto por S. Bernstein em 1923, da classificação das populações que atingem o equilíbrio na segunda geração. Este problema foi estudado e essencialmente resolvido por Lyubich nos anos 70 (veja [8]).

Definição 1.2. Seja B uma $\mathbb{F}$-álgebra comutativa e $\omega : B \longrightarrow \mathbb{F}$ um homomorfismo de álgebras não-trivial. Chamamos o par (B, ω) uma *álgebra ponderada* em que a aplicação $\omega : B \longrightarrow \mathbb{F}$ é denominada *homomorfismo peso.*

Definição 1.3. Seja B uma álgebra sobre $\mathbb{R}$. Suponhamos que B tem uma base $\{b_1, \ldots, b_n\}$ tal que as constantes de estrutura γ_{ijk}, são definidas por

$$b_i b_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} b_k \quad (1 \leq i, j \leq n),$$

são reais e satisfazem

$$0 \leq \gamma_{ijk} \leq 1, \ \sum_{k=1}^{n} \gamma_{ijk} = 1 \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

Então dizemos que B é uma *álgebra estocástica.*

Toda álgebra estocástica é ponderada. De fato, se B é uma álgebra estocástica com base $\{b_1, \ldots, b_n\}$, então $\omega : B \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por $\omega(b_i) = 1 \quad (1 \leq i \leq n)$ é um homomorfismo peso.

Se B é uma álgebra estocástica com base $\{b_1, \ldots, b_n\}$, podemos interpretar $b_1, \ldots, b_n$ como os genótipos de uma população e γ_{ijk} como a probabilidade do cruzamento aleatório dos genótipos b_i e b_j produzir o genótipo b_k.

Definição 1.4. Dizemos que uma álgebra ponderada (B, ω) é uma *álgebra de Bernstein* se satisfaz a identidade ponderada

$$x^2 x^2 = \omega(x)^2 x^2. \tag{1.9}$$

A classe das álgebras de Bernstein é fechada com relação a imagens homomorfas. Mais precisamente, se (B, ω) é uma álgebra de Bernstein e $\phi : B \to A$ é um homomorfismo de álgebras tal que $ker(\phi) \subset Ker(\omega)$. então $(\phi(A), \bar{\omega})$ é uma álgebra de Bernstein, em que $\bar{\omega}(\phi(x)) = \omega(x)$.

Se (B, ω) é uma álgebra estocástica descrevendo uma população e $x \in B$ representa a distribuição de freqüências dos genótipos na geração inicial (neste caso, $\omega(x) = 1$), então x^2 e x^2x^2 representa a distribuição de freqüências na segunda e terceira gerações, respectivamente. Agora, se B satisfaz (1.9), temos $x^2x^2 = x^2$ e isto significa que a população está em equilíbrio a partir da segunda geração.

Toda álgebra de Bernstein B tem elementos idempotentes. De fato, se $x \in B$ e $\omega(x) \neq 0$, então segue de (1.9) que $\frac{x^2}{\omega(x)^2}$ é um idempotente de B.

Seja B uma álgebra de Bernstein sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica $\neq 2$ e e um idempotente não-nulo de B. Temos a seguinte decomposição de Peirce relativa a este idempotente:

$$B = \mathbb{F}e \oplus U_e \oplus Z_e,$$

em que

$$U_e = \{x \in \ker(\omega) : ex = \frac{1}{2}x\}, \quad Z_e = \{x \in \ker(\omega) : ex = 0\}.$$

Além disso, ocorrem as seguintes relações:

$$U_e^2 \subset Z_e; \quad U_eZ_e \subset U_e; \quad Z_e^2 \subset U_e. \tag{1.10}$$

A forma linearizada de (1.9) é

$$2xy.zt + 2xz.yt + 2xt.yz = \omega(xy)zt + \omega(zt)xy + \omega(xz)yt + \omega(yt)xz + \omega(xt)yz + \omega(yz)xt. \tag{1.11}$$

Se $x \in B$, então $x = \omega(x)e + (x - \omega(x)e)$. Logo, $B = \mathbb{F}e + N$ em que $N = \ker(\omega)$. Se $x \in \mathbb{F}e \cap N$, então $x = \alpha e$ e $\omega(x) = 0$. Como $\omega(e) = 1$, temos $\alpha = 0$, isto é, $x = 0$. Portanto, $B = \mathbb{F}e \oplus N$. Suponhamos que $n \in N$ pode ser escrito como $n = n_1 + n_2$, onde $n_1 \in U_e$ e $n_2 \in Z_e$. Multiplicando e por n temos $en = \frac{1}{2}n_1$ e segue que $n_1 = 2en$. Portanto, $n = 2en + (n - 2en)$. Fazendo $x = y = z = e$, $t = n$ em (1.11) obtemos $2e(en) = en$. Logo $2en \in U_e$ e $(n - 2en) \in Z_e$. Isto mostra que $N = U_e + Z_e$. Agora, se $n \in U_e \cap Z_e$, então $n = 2en = 0$. E, portanto, $N = U_e \oplus Z_e$.

Provemos agora (1.10). Começando a prova com $U_e^2 \subset Z_e$, tomando $u_1, u_2 \in U_e$, precisamos provar que $u_1u_2 \in Z_e$, isto é, $e(u_1u_2) = 0$. Observamos que $e(u_1u_2) = e^2(u_1u_2)$ e fazendo $x = y = e$, $z = u_1$ e $t = u_2$ na identidade (1.11) obtemos

$$2e.u_1u_2 + 4eu_1.eu_2 = \omega(e)u_1u_2.$$

Logo,

$$2e(u_1u_2) + u_1u_2 = u_1u_2,$$

isto é,

$$2e(u_1u_2) = 0$$

e como $\mathrm{car}(\mathbb{F}) \neq 2$, segue que $e(u_1u_2) = 0$.

Para provar $U_eZ_e \subset U_e$, basta mostrar que $e(uz) = \frac{1}{2}uz$ para $u \in U_e$ e $z \in Z_e$. Observamos que $e(uz) = e^2(uz)$ e fazendo $x = y = e$, $t = u$ na identidade (1.11), temos que $2e.uz = \omega(e)uz$, ou seja, $e(uz) = \frac{1}{2}uz$, como queríamos demonstrar.

Finalmente, para provar que $Z_e^2 \subset U_e$, do mesmo modo como foi demonstrado anteriormente, tomando $z_1, z_2 \in Z_e$, basta provar que $e(z_1z_2) = \frac{1}{2}z_1z_2$. Para isso, fazemos $x = y = e$, $z = z_1$ e $t = z_2$ e substituímos na identidade (1.11), e obtemos $2e.z_1z_2 = \omega(e)z_1z_2$, isto é, $e(z_1z_2) = \frac{1}{2}z_1z_2$, como queríamos demonstrar.

Vejamos como podemos descrever os idempotentes de uma álgebra de Bernstein. Seja (B,ω) uma álgebra de Bernstein e $B = \mathbb{F}e \oplus U_e \oplus Z_e$ sua decomposição de Peirce relativo ao idempotente e. Se $b \in B$, então $b = \alpha e + u + z$. Suponhamos que b seja um outro idempotente de B. Então

$$\begin{aligned} b^2 &= \alpha^2 e + \alpha u + u^2 + 2uz + z^2 \\ &\overset{(1.10)}{=} \alpha^2 e + (\alpha u + 2uz + z^2) + u^2. \end{aligned}$$

De $b^2 = b$ temos $\alpha = 1$, pois $\omega(b) = 1$, e $z = u^2$. Assim, se b é idempotente de B, então b tem a forma $b = e + u + u^2$. Em particular, b é o único idempotente de B se e somente se $U_e = 0$.

Definição 1.5. Uma álgebra de Bernstein (B,ω) é chamada *regular* ou *normal* se para todo $x \in B$

$$x^2y = \omega(x)xy. \tag{1.12}$$

Em termos da decomposição de Peirce, B é regular se e somente se $U_eZ_e = 0$ e

$Z_e^2 = 0$ para e idempotente de B.

Definição 1.6. *Dada uma álgebra de Bernstein (B,ω), dizemos que ela é* excepcional *se $U_e^2 = 0$.*

Exemplo 1.1 (A álgebra B_2). Existe uma única álgebra de Bernstein não-associativa de dimensão 2, que denotamos por B_2. A tábua de multiplicação desta álgebra é dada por

B_2	e	u
e	e	$\frac{1}{2}u$
u	$\frac{1}{2}u$	0

O homomorfismo peso $\omega : B_2 \longrightarrow \mathbb{F}$ é dado por $\omega(e) = 1$, $\omega(u) = 0$. Temos que $U_e = \langle u \rangle$ e $Z_e = 0$ e segue da tábua de multiplicação que $U_e Z_e = 0$, $Z_e^2 = 0$ e $U_e^2 = 0$. Logo, B_2 é uma álgebra regular e excepcional.

Provemos que a identidade $2xy = \omega(x)y + \omega(y)x$, que é a forma linearizada da identidade ponderada $x^2 = \omega(x)x$, vale em (B_2,ω). Tomemos $x, y \in B_2$. Então, $x = a_1 e + a_2 u$ e $y = b_1 e + b_2 u$ e, pela definição, $\omega(x) = a_1$ e $\omega(y) = b_1$. Como $xy = a_1 b_1 e + \frac{1}{2}(a_1 b_2 + a_2 b_1)u$, segue que

$$\begin{aligned} 2xy &= 2a_1 b_1 e + (a_1 b_2 + a_2 b_1)u \\ &= a_1 b_1 e + a_1 b_2 u + a_1 b_1 e + a_2 b_1 u \\ &= a_1(b_1 e + b_2 u) + b_1(a_1 e + a_2 u) \\ &= \omega(x)y + \omega(y)x, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Exemplo 1.2 (A álgebra M_3). Seja $M_3 = \mathbb{F}e \oplus \mathbb{F}u \oplus \mathbb{F}v$ a álgebra de Bernstein de dimensão 3 dada pela tábua de multiplicação

M_3	e	u	v
e	e	$\frac{1}{2}u$	0
u	$\frac{1}{2}u$	v	0
v	0	0	0

e com homomorfismo peso dado por $\omega(e) = 1$, $\omega(u) = 0$ e $w(v) = 0$. Como $U_e = \langle u \rangle$, $Z_e = \langle v \rangle$, $uv = 0$ e $v^2 = 0$ temos que M_3 é uma álgebra regular.

Exemplo 1.3 (A álgebra B_3). Seja $B_3 = \mathbb{F}e \oplus \mathbb{F}u \oplus \mathbb{F}v$ a álgebra de Bernstein de dimensão 3 com tábua de multiplicação para a base $\{e, u, v\}$, dada a seguir,

B_3	e	u	v
e	e	$\frac{1}{2}u$	0
u	$\frac{1}{2}u$	0	0
v	0	0	u

com homomorfismo peso tal que $\omega(e) = 1$, $\omega(u) = 0$ e $\omega(v) = 0$. Como $U_e = \langle u \rangle$ e pela tábua de multiplicação da álgebra $u^2 = 0$, temos que B_3 é uma álgebra excepcional. Notemos que $Z_e = \langle v \rangle$ e que $U_e Z_e = 0$.

1.4 O Problema de Specht

Comecemos recordando o Problema de Specht já mencionado na Introdução.

Problema de Specht. *Seja $\mathcal{C}$ uma classe de álgebras.*

(i) É verdade que toda álgebra A em $\mathcal{C}$ tem uma base finita de identidades, isto é, existe um conjunto finito de identidades que gera o ideal de identidades $T(A)$ de A?

(ii) É verdade que $\mathcal{C}$ tem uma base finita de identidades, isto é, existe um conjunto finito de identidades que gera o ideal de identidades $T(\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$?

Recordemos, também, que (i) implica (ii), pois $T(\mathcal{C}) \subset T(A)$, para $A \in \mathcal{C}$.

O Problema de Specht para a classe das álgebras de Bernstein foi estudado por Bernad et al [15, 16]. O problema (item (i)) não tem solução para a classe das álgebras de Bernstein como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 1.4. (*Bernad et al [15]*, Seção 5) Seja U um espaço vetorial de dimensão 3 sobre um corpo F de característica 0 e seja $\beta = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de U. Identificamos o elemento $u \in U$ com suas coordenadas $[u]_\beta = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Seja Z o espaço das matrizes 3×3 triangulares superiores com coeficientes em F. Seja $B = Fe \oplus U \oplus Z$ a álgebra sobre F com produtos não-nulos dados por

$$e^2 = e, \qquad eu = \frac{1}{2}u,$$

$$[uz]_\beta = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix},$$

em que $z = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$. Seja $\omega : B \to F$ o homomorfismo definido por $\omega(\alpha e + u + z) = \alpha$. Uma conta simples mostra que $x^2x^2 = \omega(x)^2x^2$ e, logo, (B, ω) é uma álgebra de Bernstein. Como $U^2 = 0$, B é excepcional. Existem T-ideais J_k tais que a cadeia ascendente de T-ideais

$$T(B) \subset T(B) + J_1 \subset \ldots \subset T(B) + J_k \subset \ldots$$

não estaciona (veja [15], Theorem 6). Seja

$$I = T(B) + J_1 + \ldots + J_k + \ldots$$

A álgebra $\mathbb{F}[X]/I$ é uma álgebra de Bernstein excepcional pois $T(B) \subset I$. A álgebra $\mathbb{F}[X]/I$ não tem uma base finita de identidades pois seu ideal de identidades é I e este T-ideal não é finitamente gerado pois a cadeia acima não estaciona.

Portanto, o Problema de Specht (item (i)) não tem solução para a classe das álgebras de Bernstein excepcionais, logo, não tem solução para a classe das álgebras de Bernstein.

Definição 1.7. Seja (B, ω) uma álgebra de Bernstein. A álgebra B é denominada uma *álgebra de Bernstein-Jordan* se satisfaz a *identidade de Jordan* $(x^2, y, x) = 0$. A álgebra B é denominada *nuclear* se $B^2 = B$.

Para a classe das álgebras de Bernstein-Jordan e para a classe das álgebras de

Bernstein nucleares, o Problema de Specht (item (i)) tem solução. Mais precisamente temos o seguinte teorema:

Teorema 1.1. *(Bernad et al [15], Theorem 1). Seja (B,ω) uma álgebra de Bernstein-Jordan ou uma álgebra de Bernstein nuclear sobre um corpo de característica 0. Então o ideal $T(A)$ tem um conjunto finito de geradores.*

Nos Capítulos 2 e 3, mostraremos que o Problema de Specht (item (ii)) tem solução para a classe das álgebras de Bernstein regulares e para uma subclasse das álgebras de Bernstein excepcionais.

Terminaremos esta seção provando um teorema que estabelece que o ideal de identidades $T(B_2)$ (veja o Exemplo 1.1) é gerado por 4 identidades. Vamos assumir car($\mathbb{F}$)=0.

Teorema 1.2. *(Bernad et al [16], Theorem 2.1) O ideal de identidades $T(B_2)$ é gerado por (1.1) e as seguintes identidades:*

$$(x, yt, s) = 2(x, y, s)t, \tag{1.13}$$

$$(x, y, st) = (x, y, s)t + (x, y, t)s, \tag{1.14}$$

$$(x, y, r).ts = 2(x, y, r)t.s. \tag{1.15}$$

Prova. Mostraremos, inicialmente, que (1.13 - 1.15) são identidades de B_2. Notemos que são identidades multilineares e, portanto, é suficiente checarmos para os elementos da base $\{e, u\}$ de B_2. Na identidade (1.13) temos a igualdade verificada quando fazemos $x = y = t = e$ e $s = u$ ou $y = s = t = e$ e $x = u$; para qualquer outra substituição, a

igualdade também é verificada, pois temos os dois membros iguais a zero, considerando que $u^2 = 0$ ou a identidade flexível. Quanto à identidade (1.14), ela é verificada para os seguintes valores das variáveis: $x = y = s = e$ e $t = u$ ou $x = y = t = e$ e $s = u$ ou $y = s = t = e$ e $x = u$; por outro lado, para quaisquer outras substituições, os dois membros dessa identidade é zero e, portanto, a identidade (1.14) vale em B_2. Finalizando, a identidade (1.15) também é verificada quando substituímos suas variáveis pelos seguintes valores: $x = y = s = t = e$ e $r = u$ ou $y = r = s = t = e$ e $x = u$. Da mesma forma que as duas identidades anteriores, usando os fatos que em uma álgebra de Bernstein $u^2 = 0$ ou que $(x, y, x) = 0$, temos que os dois membros da identidade (1.15) são iguais a zero para quaisquer outras substituições de variáveis.

Suponhamos que $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in T(B_2)$. Pela Proposição 1.1 temos $f(x_1, \ldots, x_n) = \alpha x_1 R_{x_2} \ldots R_{x_n} + \sum_i \beta_i (u_i, v_i, w_i) R_{a_i} \ldots R_{b_i}$. Devido a (1.3), (1.4) e (1.14), podemos considerar que $u_i, v_i, w_i \in X$ e, graças a (1.15), podemos reduzir o grau de cada a_i. Além disso, das identidades (1.15) e (1.1) segue a identidade

$$(x, y, r)s.t = (x, y, r)t.s. \tag{1.16}$$

Assim, por (1.13) e (1.16),

$$\begin{aligned}
(x, y, z)R_{u_1} \ldots R_{u_i} R_v R_w &= \frac{1}{2^i}(x, yR_{u_1} \ldots R_{u_i}, z)R_v R_w \\
&= \frac{1}{2^i}(x, yR_{u_1} \ldots R_{u_i}, z)R_w R_v \\
&= (x, y, z)R_{u_1} \ldots R_{u_i} R_w R_v.
\end{aligned}$$

Então podemos permutar variáveis fora do associador e, portanto, podemos trocar todos os $a_i, \ldots, b_i$ por variáveis e ordená-las.

Notemos ainda que, tomando a identidade (1.13) e aplicando (1.1), obtemos

$$\begin{aligned} 2(x,y,s)t &= (x,yt,s) \\ &\overset{(1.1)}{=} (x,ty,s) \\ &\overset{(1.13)}{=} 2(x,t,s)y. \end{aligned}$$

Logo,

$$(x,y,s)t = (x,t,s)y. \tag{1.17}$$

Se $x_1 \notin \{u_i, v_i, w_i\}$, por (1.17) podemos incluí-lo, para cada i; na realidade, por (1.4) $x_1 \in \{u_i, w_i\}$. De fato:

$$\begin{aligned} (u_i, v_i, w_i)x_1 &\overset{(1.17)}{=} (u_i, x_1, w_i)v_i \\ &\overset{(1.4)}{=} [-(x_1, w_i, u_i) - (w_i, u_i, x_1)]v_i. \end{aligned}$$

Da mesma forma também podemos incluir x_2 em $\{u_i, v_i, w_i\}$. Por fim, depois de todas essas considerações, em f aparece a parcela

$$(x_1, x_i, x_2)R_{x_3} \dots \hat{R}_{x_i} \dots R_{x_n}$$

e pela identidade (1.17) podemos permutar x_i e x_3. Portanto,

$$f = \alpha x_1 R_{x_2} \dots R_{x_n} + \beta(x_1, x_3, x_2)R_{x_4} \dots R_{x_n} + \sum_{i=3}^{n} \beta_i(x_1, x_2, x_i)R_{x_3} \dots \hat{R}_{x_i} \dots R_{x_n}$$

módulo as identidades (1.13 - 1.15).

Fazendo $x_i = e$ para todo i, temos que $f(e, \dots, e) = \alpha e$ e como $f \in T(B_2)$ temos $\alpha = 0$. Agora, fazendo $x_i = u$ para um $i \geq 3$ fixado e $x_j = e$ para $i \neq j$, temos que

$$0 = \beta_i(e, e, u)R_e \dots R_e = \beta_i \frac{1}{2} u R_e \dots R_e = \frac{1}{2^{n-1}} \beta_i u.$$

Considerando que $u \neq 0$ e $\mathrm{car}(\mathbb{F}) = 0$, temos então $\beta_i = 0$. Por fim, fazendo $x_1 = u$ e $x_j = e$ para $j \geq 2$, temos $(-\frac{1}{2^{n-1}})\beta u = 0$ e, portanto, $\beta = 0$.

Portanto, f é uma conseqüência das identidades (1.13 - 1.15). ■

Capítulo 2

Identidades de Álgebras de Bernstein Regulares

Os resultados deste capítulo foram publicados por Bernad et al [16].

Denotamos por $\mathcal{N}$ a classe formada pelas álgebras de Bernstein regulares. Neste capítulo, encontraremos um conjunto finito de geradores para o ideal de identidades $T(\mathcal{N})$ de $\mathcal{N}$. Assumiremos car($\mathbb{F}$)= 0 e, sem perda de generalidade, que $\mathbb{F}$ é um corpo algebricamente fechado.

Teorema 2.1. *(Bernad et al [16], Theorem 3.1) Toda álgebra de Bernstein regular satisfaz todas as identidades de M_3.*

Prova. Tomemos $(B,\omega) \in \mathcal{N}$ e consideremos a decomposição de Peirce $B = \mathbb{F}e \oplus U_e \oplus Z_e$, em que $U_eZ_e = 0$ e $Z_e^2 = 0$. Suponhamos que exista um polinômio

multilinear $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in T(M_3) \setminus T(B)$. Assim, para algum $b_1, \ldots, b_n \in B$, temos $f(b_1, \ldots, b_n) \neq 0$. Portanto, podemos considerar, sem perda de generalidade, que o espaço vetorial B é gerado por e e b_i para $i = 1, \ldots, n$, ou seja, $B = \langle e, b_1, \ldots, b_n \rangle$.

Provemos, agora, que todo subespaço $Z \subset Z_e$ é um ideal de B. Para isso, basta notarmos que $BZ \subset Z$; de fato, para todo $z \in Z$, temos:

$$ez = 0 \in Z,$$

$$U_e Z \subseteq U_e Z_e = 0 \subset Z,$$

$$Z_e Z \subseteq Z_e^2 = 0 \subset Z.$$

Consideremos, então, B cortado por Z, isto é, B/Z. Temos que B/Z é uma álgebra de Bernstein (veja a observação logo após a Definição 1.4). Como B é regular, B/Z também é regular.

Suponhamos que $\dim Z_e = n$ e que $Z_e = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle$, isto é, Z_e é o espaço vetorial com base $\{z_1, \ldots, z_n\}$. Seja $Z_i = \langle z_1, \ldots, \hat{z}_i, \ldots, z_n \rangle \quad (1 \leq i \leq n)$. Então $\dim(Z_i) = n-1$ e $\bigcap_{i=1}^{n} Z_i = \{0\}$. Então B é isomorfo a um produto subdireto de álgebras de Bernstein $B_i = B/Z_i$ com $\dim(Z_e(B_i)) = 1$.

Notemos que $e + Z_i$ é idempotente de B_i e que

$$(e + Z_i)(u + Z_i) = \frac{1}{2}(u + Z_i),$$

$$(e + Z_i)(z + Z_i) = Z_i.$$

Assim, $B_i = \mathbb{F}_{e+Z_i} \oplus (U_e/Z_i) \oplus (Z_e/Z_i)$ é a decomposição de Peirce relativo ao idempotente $e + Z_i$.

Supomos, no início da demonstração, que $f \notin T(B) = \bigcap_{i=1}^{n} T(B_i)$. Assim, temos que $f \notin T(B_i)$ para algum i. Portanto, podemos considerar, sem perda de generalidade, que $\dim Z_e = 1$, ou seja, $Z_e = \mathbb{F}z$. Escolhendo $\{u_1, \ldots, u_m\}$, uma base de U_e com $u_i u_j = \alpha_{ij} z$, como B é uma álgebra comutativa, segue que $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ e, portanto, a matriz $\Lambda = \text{mat}(\alpha_{ij})$ é simétrica. Logo, podemos fazer uma mudança de base de U_e de tal forma que Λ fica na forma diagonal, isto é, $u_i u_j = \alpha_i z$ se $i = j$ e $u_i u_j = 0$ se $i \neq j$. Sendo $\mathbb{F}$ algebricamente fechado, temos $\alpha_i = 1$ ou $\alpha_i = 0$. Considerando ainda que f é um polinômio multilinear, basta fazer as contas para os elementos da base, ou seja, $b_i \in \{e, z, u_1, \ldots, u_m\}$. Suponhamos que exista u_j tal que $b_i \in \{e, z, u_j\}$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Dessa forma $b_i \in \mathbb{F}e \oplus \mathbb{F}u_j \oplus \mathbb{F}z$, ou seja, $b_i = \gamma_i u_j + \beta_i e + \lambda_i z$. Se $\alpha_j \neq 0$, $u_j^2 = z$ e $\mathbb{F}e \oplus \mathbb{F}u_j \oplus \mathbb{F}z \cong M_3$, portanto, $f(b_1, \ldots, b_n) = 0$. Agora se $\alpha_j = 0$ obtemos também que $f(b_1, \ldots, b_n) = 0$. Nos outros casos, existe i, k tal que $b_i \in \{e, z, u_j\}$ e $b_k \in \{e, z, u_h\}$ para $j \neq h$, com $f(b_1, \ldots, b_i, \ldots, b_k, \ldots, b_n) = 0$, uma vez que $u_j u_h = 0$. Em qualquer caso chegamos a uma contradição, pois $f(b_1, \ldots, b_n) \neq 0$. ■

Lembremos que $M_3 \in \mathcal{N}$. Como o conjunto de identidades que valem em $\mathcal{N}$ valem em particular para M_3, temos $T(\mathcal{N}) \subset T(M_3)$. E pelo Teorema 2.1 segue a igualdade, isto é,

$$T(\mathcal{N}) = T(M_3).$$

Temos:

$$x^2 y.x \overset{(1.12)}{=} \omega(x) xy.x \overset{(1.1)}{=} \omega(x) x.yx \overset{(1.12)}{=} x^2.yx.$$

Então, pelas identidades (1.1) e (1.12), temos que toda álgebra em $\mathcal{N}$ satisfaz a identidade de Jordan

$$(x^2, y, x) = 0. \tag{2.1}$$

O teorema abaixo fornecerá um conjunto finito de geradores para $T(\mathcal{N})$.

Teorema 2.2. *(Bernad et al [16], Theorem 3.2) Toda identidade de $\mathcal{N}$ (e M_3) é uma conseqüência de (1.1), (2.1) e das seguintes identidades:*

$$(x, y, z^2)t = 2(x, y, z)z.t, \tag{2.2}$$

$$(x, y, z)t.r = (x, t, z)y.r, \tag{2.3}$$

$$(x, x, y^2) = 2(x, y, y)x, \tag{2.4}$$

$$(x, y, z)t + (t, y, x)z + (z, y, t)x = 0. \tag{2.5}$$

Para provar este teorema precisamos dos lemas que seguem.

Lema 2.1. *Seja $f = f(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n)$ um polinômio multilinear anti-simétrico com relação a x_1, x_2 e x_3, x_4. Então, $fx_{n+1} \in T(M_3)$. Também, se f for anti-simétrico com relação a x_1, x_2, x_3, então $f \in T(M_3)$.*

Prova. Tomemos f anti-simétrico com relação a x_1, x_2, ou seja, $f(x_1, x_2, \ldots) = -f(x_2, x_1, \ldots)$. Se $x_1 = x_2 = a$, temos que $f(a, a, \ldots) = 0$. E da mesma forma temos $f(x_1, x_2, a, a, x_5, \ldots) = 0$ para f anti-simétrico em x_3, x_4 e se $x_3 = x_4 = a$.

Sejam $m_1, \ldots, m_n$ elementos de M_3. Demonstraremos que $\bar{f} = f(m_1, \ldots, m_n)$ pertence ao subespaço Z_e da decomposição de Peirce de M_3. Como f é um polinômio multi-

linear, basta tomarmos para $m_1, \ldots, m_n$ elementos da base $\{e, u, v\}$ de M_3. Considerando que f é anti-simétrico nas variáveis x_1, x_2 e x_3, x_4 e $U_e Z_e = 0$, $Z_e^2 = 0$, $\bar{f}$ não é igual a zero somente para $m_1 = e, m_2 = u, m_3 = e, m_4 = u$ e $m_j = e$ para $j \geq 5$. Neste caso, $\bar{f} \in Z_e$.

Temos que $M_3 Z_e = 0$, pois v multiplicado por todos os elementos da base de M_3 é zero. Tomemos, então, $m_{n+1} \in M_3$, e notemos que, pela observação anterior, $\bar{f} m_{n+1} = 0$ e, portanto, $f x_{n+1} \in T(M_3)$.

Passemos a provar o caso em que f é anti-simétrico nas variáreis x_1, x_2, x_3. Como no início da demonstração, se $m_1 = m_2$ ou $m_1 = m_3$ ou $m_2 = m_3$, temos que $f(m_1, \ldots, m_n) = 0$. Consideremos os casos em que $m_1 \neq m_2$ e $m_1 \neq m_3$ e $m_2 \neq m_3$. Notemos que uma das substituições possíveis é $\bar{f} = (e, u, v, e, \ldots, e)$ e $\bar{f} = 0$, pois $ev = 0$, $v^2 = 0$ e $uv = 0$. Para as outras substituições também temos $\bar{f} = 0$. ■

Lema 2.2. *As identidades (2.2 - 2.5) valem em qualquer álgebra de Bernstein regular. As identidades*

$$[(x, s, z)y]t.r - [(x, s, z)t]y.r = 0 \tag{2.6}$$

e

$$(x, y, z)R_{t^2}R_s - 2(x, y, z)R_t^2 R_s = 0 \tag{2.7}$$

são conseqüências de (1.1), (2.1) e (2.2 - 2.5).

Prova. Provemos primeiro (2.3). Notemos que o polinômio $(x,y,z)t-(x,t,z)y$ é anti-simétrico com relação às variáveis y,t e x,z. Vejamos a prova deste fato: para as variáveis y,t temos

$$(x,y,z)t-(x,t,z)y = -[(x,t,z)y-(x,y,z)t];$$

para as variáveis x,z, por (1.3), temos

$$(x,y,z)t-(x,t,z)y = -[(z,y,x)t-(z,t,x)y].$$

Logo, pelo Lema 2.1, (2.3) vale em M_3, isto é, (2.3) pertence a $T(M_3)=T(\mathcal{N})$.

Provaremos agora que (2.5) é anti-simétrico nas variáveis x,z,t. Trocando em (2.5) x por t, temos

$$\begin{aligned}(t,y,z)x+(x,y,t)z+(z,y,x)t &\overset{(1.3)}{=} -(z,y,t)x-(t,y,x)z-(x,y,z)t\\ &= -[(x,y,z)t+(t,y,x)z+(z,y,t)x].\end{aligned}$$

Trocando também z por t, temos

$$\begin{aligned}(x,y,t)z+(z,y,x)t+(t,y,z)x &\overset{(1.3)}{=} -(t,y,x)z-(x,y,z)t-(z,y,t)x\\ &= -[(x,y,z)t+(t,y,x)z+(z,y,t)x].\end{aligned}$$

Por último, trocando x por z, temos

$$\begin{aligned}(z,y,x)t+(x,y,t)z+(t,y,z)x &\overset{(1.3)}{=} -(x,y,z)t-(t,y,x)z-(z,y,t)x\\ &= -[(x,y,z)t+(t,y,x)z+(z,y,t)x].\end{aligned}$$

Logo, (2.5) é anti-simétrico nas variáveis x,z,t. Segue então, do Lema 2.1, que esta identidade vale para toda álgebra de Bernstein regular.

Para provar a identidade (2.4), desenvolveremos os dois membros e usaremos a identidade

$$2x.yz = \omega(y)xz + \omega(z)xy, \tag{2.8}$$

que é a forma linearizada de (1.12). Fazendo $x = x^2$ e $z = y$ na identidade (2.8), temos

$$\begin{aligned} 2x^2y^2 &= \omega(y)x^2y + \omega(y)x^2y \\ &\overset{(1.12)}{=} \omega(y)\omega(x)xy + \omega(y)\omega(x)xy \\ &= 2\omega(xy)xy. \end{aligned}$$

Portanto, $x^2y^2 = \omega(xy)xy$. A seguir, faremos outro cálculo separadamente:

$$\begin{aligned} 2x.xy^2 &\overset{(2.8)}{=} \omega(x)xy^2 + \omega(y^2)x^2 \\ &\overset{(1.12)}{=} \omega(xy)xy + \omega(y^2)x^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$x.xy^2 = \frac{1}{2}\omega(xy)xy + \frac{1}{2}\omega(y^2)x^2.$$

E agora temos

$$\begin{aligned} (x, x, y^2) &= x^2y^2 - x.xy^2 \\ &= \omega(xy)xy - \frac{1}{2}\omega(xy)xy - \frac{1}{2}\omega(y^2)x^2 \\ &= \frac{1}{2}\omega(xy)xy - \frac{1}{2}\omega(y^2)x^2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} 2(x,y,y)x &= 2(xy.y)x - 2(y^2x)x \\ &\overset{(1.12)}{=} 2(xy.y)x - 2\omega(y)xy.x \\ &= (2y.yx)x - \omega(y)(2x.yx) \end{aligned}$$

e, aplicando a identidade (2.8), temos

$$\begin{aligned} (2y.yx)x - \omega(y)(2x.yx) &= [\omega(y)xy + \omega(x)y^2]x - \omega(y)[\omega(y)x^2 + \omega(x)xy] \\ &= \omega(y)(x.yx) + \omega(x)y^2x - \omega(y^2)x^2 - \omega(xy)xy \\ &= \omega(y)\left[\frac{1}{2}\omega(y)x^2 + \frac{1}{2}\omega(x)xy\right] + \omega(x)y^2x - \omega(y^2)x^2 - \omega(xy)xy \\ &\overset{(1.12)}{=} -\frac{1}{2}\omega(y^2)x^2 + \frac{1}{2}\omega(xy)xy + \omega(x)\omega(y)xy - \omega(xy)xy \\ &= \frac{1}{2}\omega(xy)xy - \frac{1}{2}\omega(y^2)x^2. \end{aligned}$$

Portanto, (2.4) vale em $\mathcal{N}$.

Para provar a identidade (2.2), também desenvolveremos seus dois lados. Lembremos ainda que ω é um homomorfismo e, portanto, $\omega[(x,y,z)] = 0$. Então temos por (2.8)

$$2(x,y,z)z.t = \omega[(x,y,z)]tz + \omega(z)(x,y,z)t = \omega(z)(x,y,z)t.$$

Fazendo separadamente:

$$\begin{aligned} 2(x,y,z) &= 2z.yx - 2x.yz \\ &\overset{(2.8)}{=} \omega(y)xz + \omega(x)yz - \omega(y)xz - \omega(z)xy \\ &= \omega(x)yz - \omega(z)xy. \end{aligned}$$

E aplicando este resultado no primeiro membro da identidade (2.2), temos

$$\begin{aligned}
(x, y, z^2)t &= \frac{1}{2}\left[\omega(x)yz^2 - \omega(z^2)xy\right]t \\
&\overset{(1.12)}{=} \frac{1}{2}\left[\omega(x)\omega(z)yz - \omega(z^2)xy\right]t \\
&= \frac{1}{2}[\omega(x)yz - \omega(z)xy]\omega(z)t \\
&= \omega(z)(x, y, z)t.
\end{aligned}$$

E, portanto, (2.2) vale em $\mathcal{N}$.

Linearizando a identidade de Jordan $(x^2, y, x) = 0$, temos

$$(xz, y, t) + (xt, y, z) + (tz, y, x) = 0,$$

e expandindo os associadores, obtemos

$$(xz.y)t + (xt.y)z + (tz.y)x = xz.yt + xt.yz + xy.tz.$$

Notemos que o segundo membro desta última identidade é um polinômio completamente simétrico, isto é, simétrico em qualquer troca de variáveis. Logo, do primeiro membro, trocando x por y e y por x, temos

$$(xz.y)t + (xt.y)z + (tz.y)x = (yz.x)t + (yt.x)z + (tz.x)y,$$

isto é,

$$(y.tz)x - (tz.x)y = [(yt.x) - (y.tx)]z + [(yz.x) - (y.zx)]t,$$

ou ainda,

$$(y, tz, x) = (y, t, x)z + (y, z, x)t,$$

e, trocando y por x, t por y e x por t, temos a identidade

$$(x, yz, t) = (x, y, t)z + (x, z, t)y. \tag{2.9}$$

Agora, fazendo $z = s$ e $t = z$ em (2.9) e multiplicando esta identidade por t, temos

$$\begin{aligned}(x, ys, z)t &= (x, y, z)s.t + (x, s, z)y.t \\ &\overset{(2.3)}{=} 2(x, y, z)s.t,\end{aligned}$$

ou seja,

$$(x, ys, z)t = 2(x, y, z)s.t. \tag{2.10}$$

Seja $f = (x_1, x_2, x_3)[R_{x_4}, R_{x_5}]x_6$, em que $[a, b]$ é o comutador $ab - ba$. Desenvolvendo o comutador temos

$$\begin{aligned}f &= (x_1, x_2, x_3)[R_{x_4}, R_{x_5}]x_6 \\ &= (x_1, x_2, x_3)R_{x_4}R_{x_5}R_{x_6} - (x_1, x_2, x_3)R_{x_5}R_{x_4}R_{x_6} \\ &= [(x_1, x_2, x_3)x_4.x_5]x_6 - [(x_1, x_2, x_3)x_5.x_4]x_6.\end{aligned}$$

Logo, $f = 0$ é a identidade (2.6), a menos das variáveis.

Demonstraremos agora que $e_j^{(i)}f = 0$ é uma conseqüência das identidades (1.1), (2.1) e (2.2 - 2.5) para qualquer diagrama de Young D_i e qualquer tableaux standard $T_j^{(i)}$. Disto seguirá que f é uma conseqüência de (1.1), (2.1) e (2.2 - 2.5) (veja o final da Seção 1.1).

No tableau $T_j^{(i)}$ substituimos k por x_k. Da definição de $e_j^{(i)}$ segue que o polinômio

$e_j^{(i)} f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ é simétrico nas variáveis que estão na mesma linha e anti-simétrico nas variáveis que estão na mesma coluna.

Suponhamos que o diagrama D_i tem pelos menos 3 linhas. Em primeiro lugar, seja f_1 o polinômio f quando permutamos, considerando o sinal da permutação, somente as variáveis x_i, x_j, x_k, em que $\{i, j, k\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Notemos que se $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ então

$$\begin{aligned} f_1 &= \{[(x_1, x_2, x_3) + (x_3, x_1, x_2) + (x_2, x_3, x_1)] \\ &+ [(x_2, x_1, x_3) + (x_3, x_2, x_1) + (x_1, x_3, x_2)]\}[R_{x_4}, R_{x_5}]R_{x_6} \overset{(1.4)}{=} 0. \end{aligned}$$

Demonstraremos que podemos assumir que $\{1, 2\}$ ou $\{1, 3\}$ ou $\{2, 3\}$ está contido em $\{i, j, k\}$. Notemos que

$$\begin{aligned} a[R_b, R_c] &= aR_bR_c - aR_cR_b = ab.c - ac.b \\ &\overset{(1.1)}{=} ba.c - b.ac = (b, a, c) \end{aligned}$$

em qualquer álgebra comutativa. Portanto,

$$\begin{aligned} (x_1, x_2, x_3)[R_{x_4}, R_{x_5}]R_{x_6} &= (x_4, (x_1, x_2, x_3), x_5)x_6 \\ &= (x_4, x_1x_2.x_3, x_5)x_6 - (x_4, x_1.x_2x_3, x_5)x_6 \\ &\overset{(2.10)}{=} 2(x_4, x_1x_2, x_5)x_3.x_6 - 2(x_4, x_2x_3, x_5)x_1.x_6 \\ &\overset{(2.10)}{=} 4((x_4, x_1, x_5)x_2.x_3)x_6 - 4((x_4, x_2, x_5)x_3.x_1)x_6 \\ &\overset{(2.3)}{=} 4[(x_4, x_2, x_5)x_1.x_3 - (x_4, x_2, x_5)x_3.x_1]x_6 \\ &= 4(x_4, x_2, x_5)[R_{x_1}, R_{x_3}]R_{x_6}. \end{aligned}$$

Portanto, se $\{4,5\}$ está contido em $\{i,j,k\}$, trocando o nome das variáveis, podemos assumir que $\{1,3\}$ está contido em $\{i,j,k\}$.

Assim vimos que podemos assumir que $\{1,2\} \subset \{i,j,k\}$ ou $\{1,3\} \subset \{i,j,k\}$ ou $\{2,3\} \subset \{i,j,k\}$. Por (1.4) segue que $i = 1$ e $j = 3$. Logo, por (2.10), f_1 é igual a $(x_1,u,x_3)x_k + (x_3,u,x_k)x_1 + (x_k,u,x_1)x_3$ multiplicado por um número de variáveis e u é um polinômio de grau 1 ou 2. Isto é,

$$f_1 = ((x_1,u,x_3)x_k + (x_3,u,x_k)x_1 + (x_k,u,x_1)x_3)R_{x_i}\ldots \overset{(2.5)}{=} 0.$$

Portanto, podemos assumir que D_i é associado a uma partição (n_1,n_2) e que f_1 é simétrico com relação às variáveis com índices em cada linha. Logo, $f_1 = 0$ é uma linearização de uma identidade $f_2 = 0$ em duas variáveis, isto é, $f_2 = (y,x,x)[R_y,R_x]R_x$ ou $f_2 = (y,x,x)[R_y,R_x]R_y$. No primeiro caso temos

$$\begin{aligned}
f_2 &= (y,(y,x,x),x)x \\
&= ((y,yx.x,x) - (y,yx^2,x))x \\
&\overset{(2.10)}{=} 2(y,yx,x)x.x - 2(y,x^2,x)y.x \\
&\overset{(2.2)}{=} (y,yx,x^2)x - 2(y,x^2,x)y.x \\
&\overset{(2.10)}{=} (y,yx,x^2)x - 4[(y,x,x)x]y.x \\
&\overset{(2.2)}{=} (y,yx,x^2)x - 2(y,x,x^2)y.x \\
&\overset{(2.10)}{=} 0.
\end{aligned}$$

Para o outro caso temos

$$
\begin{aligned}
f_2 &= (y,(y,x,x),x)y \\
&= ((y,yx.x,x)-(y,yx^2,x))y \\
&\overset{(2.10)}{=} 2(y,yx,x)x.y-2(y,x^2,x)y.y \\
&\overset{(2.2)}{=} (y,yx,x^2)y-2(y,x^2,x)y.y \\
&\overset{(2.10)}{=} (y,yx,x^2)y-4[(y,x,x)x]y.y \\
&\overset{(2.2)}{=} (y,yx,x^2)y-2(y,x,x^2)y.y \\
&\overset{(2.10)}{=} 0.
\end{aligned}
$$

Finalizando a demonstração do lema, provaremos a identidade (2.7). Temos

$$
\begin{aligned}
(x,y,z)R_{t^2}R_s &= (x,y,z)t^2.s \\
&\overset{(2.5)}{=} -(t^2,y,x)z.s-(z,y,t^2)x.s \\
&\overset{(1.3)}{=} (x,y,t^2)z.s-(z,y,t^2)x.s \\
&\overset{(2.2)}{=} 2[(x,y,t)t]z.s-2[(z,y,t)t]x.s \\
&\overset{(2.6)}{=} 2[(x,y,t)z]t.s-2[(z,y,t)x]t.s \\
&\overset{(1.3)}{=} 2[-(t,y,x)z-(z,y,t)x]t.s \\
&\overset{(2.5)}{=} 2[(x,y,z)R_t^2R_s,
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar. ■

Prova do Teorema 2.2. Seja I o T-ideal definido pelas identidades (2.1 - 2.7) e suponhamos que $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ seja uma identidade multilinear de M_3 tal que $f \notin I$. Como vimos na Proposição 1.1, f tem a forma

$$f = \alpha x_1 R_{x_2} \ldots R_{x_n} + \sum_i \beta_i(u_i, v_i, w_i) R_{a_i} \ldots R_{b_i}.$$

Primeiro mostraremos que se grau$(f) \geq 5$, então podemos assumir que f é igual a uma combinação linear de polinômios da forma

$$h = (x_i, x_j, x_k) R_{u_1} \ldots R_{u_l}, \tag{2.11}$$

onde $u_1, \ldots, u_l$ são monômios. Notemos que, se temos um monômio da forma

$$(u, v, w) R_a, \tag{2.12}$$

por (1.4) e (2.2), podemos considerar que u e w são variáveis. Além disso, um monômio (u, v, w) com grau$(v) \geq 2$ é da forma (2.12) por (2.9). Assim, se dois elementos de $\{u, v, w\}$ tem grau maior que um, podemos assumir que (u, v, w) é da forma (2.11). Então, suponhamos que temos um monômio $g = (x, y, w)$, onde $x, y \in X$. Se grau$(w) \geq 3$, isto é, $w = pq.r$, então, expandindo os associadores, obtemos

$$g = (x, y, pq)r + x(y, pq, r) - (xy, pq, r) + (x, y.pq, r).$$

Portanto, g é da forma (2.12) por (2.9). Assim, mostramos que, se f é um polinômio com grau$(f) \geq 5$, então f é uma combinação linear de monômios da forma (2.11). Por (2.7), u_1 pode ser trocado por uma variável. Além disso, graças a (2.10), isto vale para qualquer u_j, com $j \leq l - 1$. Finalmente, por meio de (2.10), (2.2) e (2.5), também podemos trocar u_l por uma variável. Também, módulo (2.10) e (2.6) podemos permutar $u_1, \ldots, u_l$.

Agora, seja

$$h_1 = \sum_{\sigma \in S_3} sgn(\sigma) h(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, x_{\sigma(3)}, \ldots);$$

se $u_l = x_r$ com $r > 3$, então $h_1 = 0$ graças a (2.10), (2.6) e (2.5). Portanto, podemos assumir que $u_l = x_3$. Se $i, j, k > 3$, então a identidade $h_1 = 0$ segue de (2.6). Portanto, $x_i = x_1$ e, por (2.5), obtemos $x_k = x_3$ (isto é evidente para grau$(h) = 5$; para grau$(h) > 5$ usamos (2.10)). Portanto, neste caso, a identidade $h_1 = 0$ segue de (2.10) e (2.5).

Em seguida, se grau$(h) \geq 6$ e h_1 é alternado com respeito a três pares de variáveis, então a identidade $h_1 = 0$ segue de (2.6). Daí, se D_i é um diagrama de Young que tem uma coluna de altura ≥ 3 ou pelo menos três colunas de altura ≥ 2, então o polinômio $e_j^{(i)} h$ permanece em I.

Agora, consideremos o S_n-módulo gerado por f. Notemos que ele é decomposto em soma direta de S_n-módulos gerados por $e_j^{(i)} f$ (veja o final da Seção 1.1). Como $f \notin I$, existe $T_j^{(i)}$ tal que $g = e_j^{(i)} f \notin I$ e, pela afirmação provada acima, D_i não tem mais que duas linhas, e a segunda linha não tem mais que 2 quadrados. Portanto, g é uma linearização do polinômio f_1 obtido de f por substituição de duas variáveis (ou menos) por y e as outras por x.

Se grau$_y(f_1) = 0$, então $f_1 = \alpha x^n$ e, portanto, $\alpha = 0$ (pois se $x = e$ temos $\alpha e = 0$). Se grau$_y(f_1) = 1$ temos $f_1 = \alpha y R_x^{n-1} + \beta(y, x, x) R_x^{n-3}$. Fazendo $x = e = y$ obtemos $\alpha = 0$. Em seguida, fazendo $x = e$ e $y = u$ obtemos $\beta = 0$. Finalmente, se grau$_y(f_1) = 2$, então,

por (2.3),

$$f_1 = \alpha y^2 R_x^{n-2} + \beta(y, y, x) R_x^{n-3} + \gamma(y, x, x) R_x^{n-4} R_y.$$

Linearizando em y, temos

$$\begin{aligned} f_2 = 2\alpha y_1 y_2 R_x^{n-2} \quad &+ \quad \beta(y_1, y_2, x) R_x^{n-3} + \beta(y_2, y_1, x) R_x^{n-3} \\ &+ \quad \gamma(y_1, x, x) R_x^{n-4} R_{y_2} + \gamma(y_2, x, x) R_x^{n-4} R_{y_1}. \end{aligned}$$

Como $f_2 = 0$ quando $y_1 = y_2 = x = e$, $y_1 = y_2 = u$, $x = e$ e $y_1 = u$, $y_2 = x = e$, obtemos um sistema homogêneo não-degenerado de equações lineares com respeito a α, β, γ. Logo, $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$ e temos $f_2 = 0$. Em qualquer caso, concluímos que $g = 0$ (módulo I), logo, $g \in I$, o que é uma contradição.

Portanto, provamos o teorema para grau$(f) \geq 5$. Seja f um polinômio de grau 4. Notemos que qualquer polinômio g de grau 4 alternado em três variáveis é uma conseqüência de (1.4) e (2.5). De fato, g é constituído por uma soma de monômios da forma $(x, y, z)t$ ou (x, y, zt). No primeiro caso, se g é alternado em x, y, z, então g é uma conseqüência de (1.4) e, se g alterna em x, y, t (ou em y, z, t), é uma conseqüência de (2.5). No segundo caso, g alterna em x, y, z (ou em x, y, t) pela lei comutativa. Temos

$$\begin{aligned} (x, y, zt) - (y, x, zt) &\overset{(1.4)}{=} (x, y, zt) + (x, zt, y) + (zt, y, x) \\ &\overset{(1.3)}{=} (x, zt, y) \\ &\overset{(2.9)}{=} (x, z, y)t + (x, t, y)z. \end{aligned}$$

Portanto, como g alterna em x, y, z, podemos reduzir g ao primeiro caso.

Assim, podemos assumir que f é a linearização de um polinômio g com $\text{grau}_x(g) = 3$ e $\text{grau}_y(g) = 1$, ou $\text{grau}_x(g) = \text{grau}_y(g) = 2$. Se $\text{grau}_x(g) = \text{grau}_y(g) = 2$, então por (2.1) e (2.4)

$$g = \alpha_1(x, x, y)y + \alpha_2(y, y, x)x.$$

Mas se $x = e$, $y = u$, então $\frac{1}{4}\alpha_1 = 0$ e, logo, $\alpha_2 = 0$. Se $\text{grau}_x(g) = 3$ e $\text{grau}_y(g) = 1$, então por (2.1) e (2.4) temos

$$g = \alpha(x, x, y)x.$$

Logo, fazendo $x = e$, $y = u$ obtemos $\alpha = 0$. Novamente, em qualquer caso, $g \in I$ (contradição) e o teorema está demonstrado. ■

Capítulo 3

Identidades de Uma Subclasse das Álgebras de Bernstein Excepcionais

Neste capítulo, encontraremos um conjunto finito de geradores para o ideal de identidades da subclasse $\mathcal{M}$ de álgebras de Bernstein, definida pelas condições

$$U_e Z_e = 0, \quad U_e^2 = 0. \tag{3.1}$$

A álgebra B_3 (Exemplo 1.3) está em $\mathcal{M}$.

Em todo o capítulo, assumiremos $\mathrm{car}(\mathbb{F}) = 0$ e, sem perda de generalidade, que $\mathbb{F}$ é um corpo algebricamente fechado. Seguiremos a exposição de Bernad et al [16].

Temos o seguinte teorema análogo ao Teorema 2.1:

Teorema 3.1. *Toda álgebra que pertence a subclasse $\mathcal{M}$ satisfaz todas as identidades de B_3.*

Prova. A prova repete as idéias da prova do Teorema 2.1. Tomemos $(A, \omega) \in \mathcal{M}$ e consideremos a decomposição de Peirce $A = \mathbb{F}e \oplus U_e \oplus Z_e$, em que $U_e Z_e = 0$ e $U_e^2 = 0$. Suponhamos que exista um polinômio multilinear $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in T(B_3) \setminus T(A)$. Assim, para algum $a_1, \ldots, a_n \in A$, temos $f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$. Portanto, consideremos sem perda de generalidade, que A é gerada, como espaço vetorial, por e e a_i para $i = 1, \ldots, n$, ou seja, $A = \langle e, a_1, \ldots, a_n \rangle$.

Vamos provar que todo subespaço $U \subset U_e$ é um ideal de B. Para isto, basta notarmos que $AU \subset U$; de fato, para todo $u \in U$, temos:

$$eu = \tfrac{1}{2}u \subset U,$$

$$U_e U \subseteq U_e^2 = 0 \subset U,$$

$$Z_e U \subseteq Z_e U_e = 0 \subset U.$$

Consideremos, então, A cortado por U, isto é, A/U. A álgebra A/U é de Bernstein pois $U \subset ker(\omega)$ (veja a observação logo após a Definição 1.4). Como $(u + U)(z + U) = 0 + U$ e $(u + U)^2 = 0 + U$ para todo $u \in U_e$ e $z \in Z_e$ temos $A/U \in \mathcal{M}$.

Suponhamos que $\dim U_e = n$ e que $U_e = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$. Seja $U_i = \langle u_1, \ldots, \hat{u}_i, \ldots, u_n \rangle$ $(1 \leq i \leq n)$. Temos que $\dim(U_i) = n - 1$ e $\bigcap_{i=1}^{n} U_i = \{0\}$. Então, A é isomorfo ao produto subdireto de álgebras de Bernstein $A_i = A/U_i$ com $\dim(U_e(A_i)) = 1$.

Notemos que $e + U_i$ é idempotente de A_i e que

$$(e + U_i)(u + U_i) = \frac{1}{2}(u + U_i),$$

$$(e + U_i)(z + U_i) = 0 + U_i.$$

Assim, $A_i = \mathbb{F}_{e+U_i} \oplus (U_e/U_i) \oplus (Z_e/U_i)$ é a decomposição de Peirce relativo ao idempotente $e + U_i$.

Supomos, no início da demonstração, que $f \notin T(A) = \bigcap_{i=1}^{n} T(A_i)$. Assim, temos que $f \notin T(A_i)$ para algum i. Portanto, podemos considerar, sem perda de generalidade, que $\dim U_e = 1$, ou seja, $U_e = \mathbb{F}u$. Escolhendo $\{v_1, \ldots, v_m\}$, uma base de Z_e com $v_i v_j = \alpha_{ij} u$, como A é uma álgebra comutativa, segue que $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ e, portanto, a matriz $\Lambda = \text{mat}(\alpha_{ij})$ é simétrica. Logo, podemos fazer uma mudança de base de Z_e de tal forma que Λ fica na forma diagonal, isto é, $v_i v_j = \alpha_i u$ se $i = j$ e $v_i v_j = 0$ se $i \neq j$. Sendo $\mathbb{F}$ algebricamente fechado, temos $\alpha_i = 1$ ou $\alpha_i = 0$. Considerando ainda que f é um polinômio multilinear, basta fazer as contas para os elementos da base, ou seja, $a_i \in \{e, u, v_1, \ldots, v_m\}$. Suponhamos que exista v_j tal que $a_i \in \{e, u, v_j\}$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Dessa forma $a_i \in \mathbb{F}e \oplus \mathbb{F}u \oplus \mathbb{F}v_j$, ou seja, $a_i = \gamma_i v_j + \beta_i e + \delta_i u$. Se $\alpha_j \neq 0$, $v_j^2 = u$ e $\mathbb{F}e \oplus \mathbb{F}u \oplus \mathbb{F}v_j \cong B_3$, portanto, $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Agora se $\alpha_j = 0$ obtemos também que $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Nos outros casos, existe i, k tal que $a_i \in \{e, u, v_j\}$ e $a_k \in \{e, u, v_h\}$ para $j \neq h$, com $f(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_k, \ldots, a_n) = 0$, uma vez que $v_j v_h = 0$. Em qualquer caso chegamos a uma contradição, pois $f(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$. ■

Como no caso das álgebras de Bernstein regulares (veja Capítulo 2), segue do Teorema 3.1 que $T(\mathcal{M}) = T(B_3)$.

O resultado principal deste capítulo é o seguinte teorema:

Teorema 3.2. *(Bernad et al [16], Theorem 4.1) Toda identidade de $\mathcal{M}$ (e B_3) é uma conseqüência de (1.1) e das seguintes identidades:*

$$(x,y,s)t + (t,y,x)s + (s,y,t)x = 0, \tag{3.2}$$

$$(x,yt,r)s = (x,ys,r)t, \tag{3.3}$$

$$(x,yt.r,s) = 2(x,yt,s)r, \tag{3.4}$$

$$(x,y,r).ts = 2(x,y,r)t.s, \tag{3.5}$$

$$3(x,x^2,x^2) = 2(x,x,x^2)x, \tag{3.6}$$

$$(x_1,x_3,x_2x_4) - (x_2,x_3,x_1x_4) - (x_1,x_4,x_2x_3) + (x_2,x_4,x_1x_3) = 3(x_1,x_3,x_2)x_4 - 3(x_1,x_4,x_2)x_3, \tag{3.7}$$

$$2(x,s,y)r^2 + (x,r^2,y)s = (x,s,r^2y) - (y,s,r^2x). \tag{3.8}$$

Faremos a prova deste teorema em uma série de lemas.

Lema 3.1. *A álgebra B_3 satisfaz as seguintes identidades:*

$$2x^2y^2 = \omega(y)^2x^2 + \omega(x)^2y^2, \tag{3.9}$$

$$2(x,y,s)t = (x,y,s)\omega(t), \tag{3.10}$$

$$2(x,ys,t) = ys(\omega(x)t - \omega(t)x). \tag{3.11}$$

Prova. Sejam x,y elementos de $B_3 = \mathbb{F}e \oplus \mathbb{F}u \oplus \mathbb{F}v$. Então $x = a_1e + a_2u + a_3v$ e $y = b_1e + b_2u + b_3v$. Temos que $xy = a_1b_1e + [\frac{1}{2}(a_1b_2 + a_2b_1) + a_3b_3]u$, ou seja,

$xy \in B_2' = \mathbb{F}e \oplus \mathbb{F}u$. Como tomamos $x, y \in B_3$ quaisquer, temos que $B_3^2 \subset B_2'$. Notemos, ainda, que $e = e^2 \in B_3^2$ e $u = v^2 \in B_3^2$; assim provamos que a base de B_2' pertence a B_3^2 e, portanto, temos que $B_2' \subset B_3^2$. Logo, $B_3^2 = B_2' \cong B_2$.

No Capítulo 1 (veja Exemplo 1.1), provamos que a identidade $2xy = \omega(x)y + \omega(y)x$ vale em B_2. Se tomarmos $x, y \in B_3$, temos que $x^2, y^2 \in B_3^2$. Portanto, como $B_3^2 \cong B_2$ temos que a identidade (3.9) vale em B_3.

Vimos que em B_3 vale $U_e^2 = 0$ e $U_e Z_e = 0$. Assim, $\ker(\omega)U_e = (U_e \oplus Z_e)U_e \subset U_e^2 + U_e Z_e = 0$. Do fato de ω ser um homomorfismo, temos que qualquer associador $(x, y, s) \in \ker(\omega)$. Também é claro que $(x, y, z) \in B_3^2$. Logo, $(x, y, s) \in \ker(\omega) \cap B_3^2 = U_e$. Segue então que $2(x, y, s)e = (x, y, s)$. Por outro lado, se $t' \in \ker(\omega)$ temos $(x, y, s)t' \in U_e \ker(\omega) = 0$. Logo, para $t = \omega(t)e + t'$ em que $t' \in \ker(\omega)$, temos $2(x, y, s)t = \omega(t)2(x, y, s)e + 2(x, y, s)t' = (x, y, s)\omega(t)$. Portanto, (3.10) vale para B_3.

Para provar (3.11), consideramos $x, y, s, t \in B_3$, isto é, $x = a_1 e + a_2 u + a_3 v$ e $t = b_1 e + b_2 u + b_3 v$. O produto $ys \in \mathbb{F}e \oplus \mathbb{F}u$, ou seja, $ys = \alpha e + \beta u$. Temos:

$$\begin{aligned}
(x, ys, t) &= (x, \alpha e + \beta u, t) \\
&= [x(\alpha e + \beta u)]t - x[(\alpha e + \beta u)t] \\
&= (a_1 \alpha e + \frac{1}{2} a_1 \beta u + \frac{1}{2} a_2 \alpha u)t - x(\alpha b_1 e + \frac{1}{2} \alpha b_2 u + \frac{1}{2} \beta b_1 u) \\
&= [\alpha a_1 e + \frac{1}{2}(\beta a_1 + \alpha a_2)u]t - x[\alpha b_1 e + \frac{1}{2}(\alpha b_2 + \beta b_1)u] \\
&= \frac{1}{2} \alpha a_1 b_2 u + \frac{1}{4} \alpha a_2 b_1 u - \frac{1}{2} \alpha a_2 b_1 u - \frac{1}{4} \alpha a_1 b_2 u
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\alpha a_1 b_2 u - \frac{1}{4}\alpha a_2 b_1 u.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} ys(\omega(x)t - \omega(t)x) &= (\alpha e + \beta u)[a_1(b_1 e + b_2 u + b_3 v) - b_1(a_1 e + a_2 u + a_3 v)] \\ &= (\alpha e + \beta u)[a_1 b_1 e + a_1 b_2 u + a_1 b_3 v - a_1 b_1 e - a_2 b_1 u - a_3 b_1 v] \\ &= \frac{1}{2}\alpha a_1 b_2 u - \frac{1}{2}\alpha a_2 b_1 u. \end{aligned}$$

Portanto, a identidade (3.11) vale para a álgebra B_3. ■

Lema 3.2. *A álgebra B_3 satisfaz as identidades (3.2 - 3.8).*

Prova. A identidade (3.3) é conseqüência de (3.10) e (3.11). De fato:

$$\begin{aligned} (x, yt, r)s - (x, ys, r)t &\overset{(3.11)}{=} [\frac{1}{2}yt(\omega(x)r - \omega(r)x)]s - [\frac{1}{2}ys(\omega(x)r - \omega(r)x)]t \\ &= \frac{1}{2}(ty.s - t.ys)[\omega(x)r - \omega(r)x] \\ &= \frac{1}{2}(t, y, s)[\omega(x)r - \omega(r)x] \\ &= \frac{1}{2}[\omega(x)(t, y, s)r - \omega(r)(t, y, s)x] \\ &\overset{(3.10)}{=} \frac{1}{2}[\omega(x)\frac{1}{2}\omega(r)(t, y, s) - \omega(r)\frac{1}{2}\omega(x)(t, y, s)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, a identidade (3.3) vale em B_3.

Em seguida faremos a prova da identidade (3.2), usando anti-simetria. Provaremos que $f(x, y, s, t) = (x, y, s)t + (t, y, x)s + (s, y, t)x$ é um polinômio anti-simétrico nas

variáveis x, s, t. Trocando em f, x por s e s por x, temos

$$\begin{aligned} f(s,y,x,t) &= (s,y,x)t + (t,y,s)x + (x,y,t)s \\ &\overset{(1.3)}{=} -(x,y,s)t - (s,y,t)x - (t,y,x)s \\ &= -f(x,y,s,t). \end{aligned}$$

Trocando x por t e t por x, temos

$$\begin{aligned} f(t,y,s,x) &= (t,y,s)x + (x,y,t)s + (s,y,x)t \\ &\overset{(1.3)}{=} -(s,y,t)x - (t,y,x)s - (x,y,s)t \\ &= -f(x,y,s,t). \end{aligned}$$

E agora trocando s por t e t por s, temos

$$\begin{aligned} f(x,y,t,s) &= (x,y,t)s + (s,y,x)t + (t,y,s)x \\ &\overset{(1.3)}{=} -(t,y,x)s - (x,y,s)t - (s,y,t)x \\ &= -f(x,y,s,t). \end{aligned}$$

Logo, f é anti-simétrico nas variáveis x, s, t e, por um resultado análago ao que fizemos para a álgebra M_3 (Lema 2.1) $f \in T(B_3)$, ou seja, a identidade (3.2) vale em B_3.

Provaremos agora (3.4), isto é, provaremos que $(x, yt.r, s) = 2(x, yt, s)r$. Vimos anteriormente que se $y, t \in B_3$ então $yt = \alpha e + \beta u$. Consideremos $r \in \{u, v\}$. Se $r = u$, $yt.r = (\alpha e + \beta u)u = \frac{1}{2}\alpha u$, para esse caso temos

$$\begin{aligned} (x, yt.r, s) &= (x, \frac{1}{2}\alpha u, s) \\ &= \frac{1}{2}\alpha(x, u, s). \end{aligned}$$

Tomemos $x, s \in B_3$, ou seja. $x = a_1e + a_2u + a_3v$ e $s = b_1e + b_2u + b_3v$. Temos

$$\begin{aligned}
(x,u,s) &= xu.s - x.us \\
&= [(a_1e + a_2u + a_3v)u](b_1e + b_2u + b_3v) - (a_1e + a_2u + a_3v)[u(b_1e + b_2u + b_3v)] \\
&= \frac{1}{2}a_1u(b_1e + b_2u + b_3v) - (a_1e + a_2u + a_3v)\frac{1}{2}b_1u \\
&= \frac{1}{4}a_1b_1u - \frac{1}{4}a_1b_1u \\
&= 0.
\end{aligned}$$

E, portanto, $(x,u,s) = 0$ para qualquer $x, s \in B_3$, ou seja, $(x, yt.r, s) = 0$ se $r = u$. Agora se $r = v$, $(x, yt.r, s) = 0$, pois $(\alpha e + \beta u)v = 0$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(x, yt, s) &= (x.yt)s - x(yt.s) \\
&= [(a_1e + a_2u + a_3v)(\alpha e + \beta u)]s - x[(\alpha e + \beta u)(b_1e + b_2u + b_3v)] \\
&= [(\alpha a_1e + \frac{1}{2}\beta a_1u + \frac{1}{2}\alpha a_2u)s - x[(\alpha b_1e + \frac{1}{2}\alpha b_2u + \frac{1}{2}\beta b_1u] \\
&= \frac{1}{2}\alpha a_1b_2u + \frac{1}{4}(\beta a_1b_1 + \alpha a_2b_1)u - \frac{1}{2}\alpha a_2b_1u - \frac{1}{4}(\alpha a_1b_2 + \beta a_1b_1)u \\
&= [\frac{1}{2}(\alpha a_1b_2 - \alpha a_2b_1) + \frac{1}{4}(\beta a_1b_1 + \alpha a_2b_1) - \alpha a_2b_2 - \beta a_1b_1)]u.
\end{aligned}$$

E assim temos $(x, yt, s) = \gamma u$. E, portanto, $2(x, yt, s)r = 2\gamma ur = 0$, pois estamos considerando $r \in \{u, v\}$.

Consideremos agora o caso $r = e$. Então $yt.r = yt.e = (\alpha e + \beta u)e = \alpha e + \frac{1}{2}\beta u$. Como vimos acima, temos que $(x, yt, s) = \gamma u$. Logo, segue que $(x, yt, s)e = \frac{1}{2}\gamma u$ e, portanto, $2(x, yt, s)e = (x, yt, s)$. Queremos mostrar que $2(x, yt, s)e = (x, yt.e, s)$. Por um lado,

$(x, yt.e, s) = (x, \alpha e + \frac{1}{2}\beta u, s) = \alpha(x, e, s) + \frac{1}{2}\beta(x, u, s)$ e, portanto, $(x, yt.e, s) = \alpha(x, e, s)$ para qualquer $x, s \in B_3$. Por outro lado, $(x, yt, s) = (x, \alpha e + \beta u, s) = \alpha(x, e, s) + \beta(x, u, s)$ e, da mesma forma, $(x, yt, s) = \alpha(x, e, s)$. Logo, (3.4) vale também em B_3 quando $r = e$.

Portanto, a identidade (3.4) vale em B_3.

Provaremos agora a identidade (3.5). Temos

$$\begin{aligned} 2(x, y, r)t.s &\overset{(3.10)}{=} \omega(t)(x, y, r)s \\ &\overset{(3.10)}{=} \frac{1}{2}\omega(ts)(x, y, r) \\ &\overset{(3.10)}{=} (x, y, r).ts \end{aligned}$$

e, portanto, esta identidade vale em B_3.

Para provar a identidade (3.6), consideremos x tal que $\omega(x) = 1$, isto é, $x = e + \alpha u + \beta v$ e temos:

$$x^2 = (e + \alpha u + \beta v)(e + \alpha u + \beta v) = e + \left(\alpha + \beta^2\right) u,$$

$$\begin{aligned} x^3 &= x^2 x \\ &= [e + \left(\alpha + \beta^2\right) u](e + \alpha u + \beta v) \\ &= e + \left(\alpha + \frac{1}{2}\beta^2\right) u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 x &= \left[e + \left(\alpha + \frac{1}{2}\beta^2\right) u\right](e + \alpha u + \beta v) \\ &= e + \left(\alpha + \frac{1}{4}\beta^2\right) u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 x^2 &= \left[e + \left(\alpha + \frac{1}{2}\beta^2\right) u\right]\left[e + \left(\alpha + \beta^2\right) u\right] \\ &= e + \left(\alpha + \frac{3}{4}\beta^2\right) u. \end{aligned}$$

Como $\omega(x) = 1$, por (1.9) temos que $x^2x^2 = x^2$. Portanto, segue que

$$\begin{aligned} 3(x, x^2, x^2) &= 3(x^3x^2 - x^3) \\ &= 3\left[e + \left(\alpha + \frac{3}{4}\beta^2\right)u - e - \left(\alpha + \frac{1}{2}\beta^2\right)u\right] \\ &= \frac{3}{4}\beta^2 u. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} 2(x, x, x^2)x &= 2(x^2 - x.x^3)x \\ &= 2\left[e + \alpha u + \beta^2 u - e - \left(\alpha + \frac{1}{4}\beta^2\right)u\right](e + \alpha u + \beta v) \\ &= \frac{3}{2}\beta^2 u(e + \alpha u + \beta v) \\ &= \frac{3}{4}\beta^2 u. \end{aligned}$$

Portanto, (3.6) vale em B_3 para $x = e + \alpha u + \beta v$. Para $x \in B_3$ qualquer com $\omega(x) \neq 0$, tomemos $y = \frac{x}{\omega(x)}$. Temos $\omega(y) = 1$ e $x = \omega(x)y$. Logo,

$$\begin{aligned} 3(x, x^2, x^2) &= 3(\omega(x)y, \omega(x)^2y^2, \omega(x)^2y^2) \\ &= 3\omega(x)^5(y, y^2, y^2) \\ &\overset{(3.6)}{=} 2\omega(x)^5(y, y, y^2)y \\ &= 2(\omega(x)y, \omega(x)y, \omega(x)^2y^2)\omega(x)y \\ &= 2(x, x, x^2)x. \end{aligned}$$

Para o caso em que $\omega(x) = 0$, tomemos $x = \beta u + \gamma v$. Notemos que $x^2 = \gamma^2 u$, $x^3 = 0$ e por (1.9), $x^2x^2 = 0$. Logo, (3.6) vale trivialmente para este caso.

Portanto, a identidade (3.6) vale para a álgebra B_3.

Para provar (3.7), notemos que esta identidade é anti-simétrica em x_1, x_2 e x_3, x_4. Portanto, atribuindo o mesmo valor a 3 variáveis, (3.7) é válida nulamente em B_3. E da mesma forma é válida quando fazemos $x_1 = x_2 = x$ e $x_3 = x_4 = y$. Nos casos em que $x_1 = x_3$ e $x_2 \neq x_4$, $x_1 = x_4$ e $x_2 \neq x_3$, $x_2 = x_3$ e $x_1 \neq x_4$, $x_2 = x_4$ e $x_1 \neq x_3$, quando substituídos por elementos da base, (3.7) é satisfeita nulamente. Para as substituições em que e e v aparecem nos pares anti-simétricos, isto é, $x_1 = x_3 = v$ e $x_2 = x_4 = e$, $x_1 = x_3 = e$ e $x_2 = x_4 = v$, $x_1 = x_4 = e$ e $x_2 = x_3 = v$, $x_1 = x_4 = v$ e $x_2 = x_3 = e$, considerando que $\mathrm{car}(\mathbb{F}) = 0$, chegamos a uma igualdade do tipo $u = u$, ou seja, (3.7) também vale para estes casos. Para qualquer outra substituição (3.7) vale, pois tanto o primeiro membro quanto o segundo é zero.

Para provar a identidade (3.8), provaremos primeiro que ela é uma identidade de $B_2 \cong B_3^2$. Tomemos $r, y \in B_2$ e lembremos que $r^2 = \omega(r)r$ e $ry = \frac{1}{2}\omega(r)y + \frac{1}{2}\omega(y)r$. Substituindo r^2 por $\omega(r)r$ em (3.8), temos

$$2(x,s,y)\omega(r)r + (x,\omega(r)r,y)s = \omega(r)(x,s,ry) - \omega(r)(y,s,rx).$$

Substituindo, no lado direito desta última identidade, ry por $\frac{1}{2}\omega(r)y + \frac{1}{2}\omega(y)r$ e rx por $\frac{1}{2}\omega(r)x + \frac{1}{2}\omega(x)r$, temos

$$\begin{aligned}
& \omega(r)[(x,s,ry) - (y,s,rx)] \\
= \; & \omega(r)\left[\left(x,s,\frac{1}{2}\omega(r)y + \frac{1}{2}\omega(y)r\right) - \left(y,s,\frac{1}{2}\omega(r)x + \frac{1}{2}\omega(x)r\right)\right] \\
\overset{(1.3)}{=} \; & \omega(r)^2(x,s,y) + \frac{1}{2}\omega(ry)(x,s,r) - \frac{1}{2}\omega(rx)(y,s,r).
\end{aligned}$$

Do lado esquerdo, temos

$$\omega(r)[2(x,s,y)r + (x,r,y)s] \overset{(3.10)}{=} \omega(r)^2(x,s,y) + \frac{1}{2}\omega(rs)(x,r,y).$$

Igualando e considerando que $\mathrm{car}(\mathbb{F}) = 0$, temos

$$\omega(rs)(x,r,y) = \omega(r)[\omega(y)(x,s,r) - \omega(x)(y,s,r)].$$

Tomemos o associador (a,b,c), expandindo e aplicando a identidade $2xy = \omega(x)y + \omega(y)x$, obtemos

$$\begin{aligned}
(a,b,c) &= ab.c - a.bc \\
&= \left[\frac{1}{2}\omega(a)b + \frac{1}{2}\omega(b)a\right]c - a\left[\frac{1}{2}\omega(b)c + \frac{1}{2}\omega(c)b\right] \\
&= \frac{1}{2}\omega(a)bc - \frac{1}{2}\omega(c)ab \\
&= \frac{1}{2}\omega(a)\left[\frac{1}{2}\omega(b)c + \frac{1}{2}\omega(c)b\right] - \frac{1}{2}\omega(c)\left[\frac{1}{2}\omega(a)b + \frac{1}{2}\omega(b)a\right] \\
&= \frac{1}{4}\omega(b)[\omega(a)c - \omega(c)a].
\end{aligned}$$

Usando este resultado, no segundo membro da identidade anterior, obtemos:

$\omega(r)[\omega(y)(x,s,r) - \omega(x)(y,s,r)]$

$$\begin{aligned}
&= \omega(r)\omega(y)\frac{1}{4}\omega(s)[\omega(x)r - \omega(r)x] - \omega(r)\omega(x)\frac{1}{4}\omega(s)[\omega(y)r - \omega(r)y] \\
&= \frac{1}{4}\omega(r)^2\omega(s)[\omega(x)y - \omega(y)x] \\
&= \omega(r)\omega(s)\left\{\frac{1}{4}\omega(r)[\omega(x)y - \omega(y)x]\right\} \\
&= \omega(r)\omega(s)(x,r,y).
\end{aligned}$$

E, portanto, temos que (3.8) vale em $B_2 \cong B_3^2$.

Sabemos que $B_3^2 = \mathbb{F}e \oplus \mathbb{F}u$. Assim falta verificarmos quando a identidade toma valores em $\mathbb{F}v$. Notemos que, se três ou mais variáveis tomam valores em $\mathbb{F}v$, então (3.8) vale trivialmente. Agora, no caso em que duas variáveis tomam valores em $\mathbb{F}v$, para a maioria dos casos, (3.8) é zero nos dois membros, exceto quando $x = s = v$ e $y = r = e$ ou $y = s = v$ e $x = r = e$ em que chegamos à uma igualdade do tipo $u = u$, considerando que $\mathrm{car}(\mathbb{F}) = 0$. E quando uma só das variáveis toma valor em $\mathbb{F}v$, (3.8) também vale trivialmente.

Portanto, a identidade (3.8) vale em B_3. ■

Proposição 3.1. *Seja I o T-ideal definido por (1.1) e (3.2 - 3.8). Então as seguintes identidades valem módulo I:*

$$(x, ys, t) - (y, xs, t) + (y, xt, s) - (x, yt, s) = 0, \tag{3.12}$$

$$(x, ys, t) + (t, yx, s) + (s, yt, x) = 0, \tag{3.13}$$

$$(x, y, r)t.s = (x, y, r)s.t, \tag{3.14}$$

$$(x, y, z)(r, s, t) = 0, \tag{3.15}$$

$$(x, z^2, yt^2) - (y, z^2, xt^2) = 3(x, z^2, y)t^2, \tag{3.16}$$

$$(x_1, y, x_2)y + (x_1, y^2, x_2) = (x_1, y, yx_2) - (x_2, y, yx_1), \tag{3.17}$$

$$\frac{3}{2}(x_1, y, x_2)y^2 + [(x_1, y, yx_2) - (x_2, y, yx_1)]y = (x_1, y, y^2x_2) - (x_2, y, y^2x_1), \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}(x_1, x_3, x_2.x_4y) - (x_2, x_3, x_1.x_4y) - (x_1, x_4, x_2.x_3y) + (x_2, x_4, x_1.x_3y)\\ = 2(x_1, x_3, x_2).x_4y - 2(x_1, x_4, x_2).x_3y,\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$(x_1, x_3y, x_2x_4) - (x_2, x_3y, x_1x_4) - (x_1, x_4y, x_2x_3) + (x_2, x_4y, x_1x_3)$$

$$= (x_1, x_3, x_2).x_4y - (x_1, x_4, x_2).x_3y. \tag{3.20}$$

Prova. Expandindo a identidade (3.12), temos

$$\begin{aligned}
& (x, ys, t) - (y, xs, t) + (y, xt, s) - (x, yt, s) \\
= \; & (x.ys)t - x(ys.t) - (y.xs)t + y(xs.t) + (y.xt)s - y(xt.s) - (x.yt)s + x(yt.s) \\
\overset{(1.1)}{=} \; & (ys.x - y.sx)t + (ty.s - t.ys)x + (sx.t - s.xt)y + (xt.y - x.ty)s \\
= \; & (y, s, x)t + (t, y, s)x + (s, x, t)y + (x, t, y)s \\
\overset{(3.2)}{=} \; & -(t, s, y)x - (x, s, t)y + (t, y, s)x + (s, x, t)y + (x, t, y)s \\
\overset{(1.3)}{=} \; & [-(x, s, t) - (t, x, s)]y + [-(t, s, y) - (s, y, t)]x + (x, t, y)s \\
\overset{(1.4)}{=} \; & (s, t, x)y + (y, t, s)x + (x, t, y)s \\
\overset{(3.2)}{=} \; & 0.
\end{aligned}$$

Portanto, a identidade (3.12) é válida módulo I.

A prova da identidade (3.13) segue da expansão dos associadores:

$$\begin{aligned}
& (x, ys, t) + (t, yx, s) + (s, yt, x) \\
= \; & (x.ys)t - x(ys.t) + (t.yx)s - t(yx.s) + (s.yt)x - s(yt.x) \\
\overset{(1.1)}{=} \; & (sy.x - s.yx)t + (ty.s - t.ys)x + (xy.t - x.yt)s \\
= \; & (s, y, x)t + (t, y, s)x + (x, y, t)s \\
\overset{(3.2)}{=} \; & 0.
\end{aligned}$$

E, portanto, a identidade (3.13) é válida módulo I.

Passemos à prova da identidade (3.14). Temos

$$\begin{aligned}(x,y,r)t.s &\overset{(3.5)}{=} \frac{1}{2}(x,y,r).ts \\ &\overset{(1.1)}{=} \frac{1}{2}(x,y,r).st \\ &\overset{(3.5)}{=} (x,y,r)s.t,\end{aligned}$$

e, portanto, a identidade (3.14) vale módulo o ideal I.

Expandindo um dos associadores da identidade (3.15), obtemos

$$\begin{aligned}(x,y,z)(r,s,t) &= (x,y,z)(rs.t - r.st) \\ &= (x,y,z)(rs.t) - (x,y,z)(r.st) \\ &\overset{(1.1)}{=} (x,y,z)(sr.t) - (x,y,z)(st.r) \\ &\overset{(3.5)}{=} 2(x,y,z)(sr).t - 2(x,y,z)(st).r \\ &\overset{(3.5)}{=} 4[(x,y,z)s.r]t - 4[(x,y,z)s.t]r.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}(r,s,t)(x,y,z) &\overset{(3.2)}{=} -((x,y,z),s,r)t - (t,s,(x,y,z))r \\ &\overset{(1.1)}{=} -[(x,y,z)s.r]t + [(x,y,z).sr]t - [(x,y,z).st]r + [(x,y,z)s.t]r \\ &\overset{(3.5)}{=} -[(x,y,z)s.r]t + 2[(x,y,z)s.r]t - 2[(x,y,z)s.t]r + [(x,y,z)s.t]r \\ &= [(x,y,z)s.r]t - [(x,y,z)s.t]r.\end{aligned}$$

Portanto, das duas últimas identidades, temos

$$4(r,s,t)(x,y,z) - (x,y,z)(r,s,t) = 0,$$

e como car($\mathbb{F}$) $= 0$, a identidade (3.15) é válida módulo I.

Agora provemos (3.16). Notemos primeiro que

$$\begin{aligned}
(x, z^2, y)t^2 &\overset{(3.5)}{=} 2(x, z^2, y)t.t \\
&\overset{(3.3)}{=} 2(x, zt, y)z.t \\
&\overset{(3.14)}{=} 2(x, tz, y)t.z \\
&\overset{(3.3)}{=} 2(x, tt, y)z.z \\
&\overset{(3.5)}{=} (x, t^2, y)z^2.
\end{aligned}$$

Agora, tomando a identidade (3.8) e substituindo s por z^2 e r por t, obtemos

$$2(x, z^2, y)t^2 + (x, t^2, y)z^2 = (x, z^2, yt^2) - (y, z^2, xt^2).$$

Aplicando o resultado anterior nesta identidade, obtemos

$$(x, z^2, yt^2) - (y, z^2, xt^2) = 3(x, z^2, y)t^2$$

e, portanto, demonstramos que a identidade (3.16) vale módulo I.

Passemos à demonstração da identidade (3.17). Temos que

$$\begin{aligned}
(x_1, y^2, x_2) &\overset{(3.13)}{=} -(x_2, yx_1, y) - (y, yx_2, x_1) \\
&\overset{(1.4)}{=} (yx_1, y, x_2) + (y, x_2, yx_1) + (yx_2, x_1, y) + (x_1, y, yx_2) \\
&\overset{(1.3)}{=} -(x_2, y, yx_1) - (yx_1, x_2, y) + (yx_2, x_1, y) + (x_1, y, yx_2),
\end{aligned}$$

e segue que

$$(x_1, y^2, x_2) - [(x_1, y, yx_2) - (x_2, y, yx_1)] = (yx_2, x_1, y) - (yx_1, x_2, y).$$

Desenvolvendo os associadores do segundo membro, obtemos

$$(x_1, y^2, x_2) + (x_1, y, x_2)y = (x_1, y, yx_2) - (x_2, y, yx_1),$$

ou seja, a identidade (3.17) é válida módulo I.

A seguir, provaremos a identidade (3.18). Temos

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2}(x_1, y, x_2)y^2 + [(x_1, y, yx_2) - (x_2, y, yx_1)]y \\
\overset{(3.17)}{=} \; & \frac{3}{2}(x_1, y, x_2)y^2 + (x_1, y^2, x_2)y + (x_1, y, x_2)y.y \\
\overset{(3.5)}{=} \; & 2(x_1, y, x_2)y^2 + (x_1, y^2, x_2)y \\
\overset{(3.8)}{=} \; & (x_1, y, y^2x_2) - (x_2, y, y^2x_1).
\end{aligned}$$

Portanto, a identidade (3.18) vale módulo I.

Provemos a identidade (3.19). Temos

$$\begin{aligned}
& (x_1, x_3, x_4y.x_2) - (x_2, x_3, x_4y.x_1) - (x_1, x_4, x_3y.x_2) + (x_2, x_4, x_3y.x_1) \\
\overset{(3.8)}{=} \; & 2(x_1, x_3, x_2).x_4y + (x_1, x_4y, x_2)x_3 - 2(x_1, x_4, x_2).x_3y - (x_1, x_3y, x_2)x_4 \\
\overset{(3.3)}{=} \; & 2(x_1, x_3, x_2).x_4y - 2(x_1, x_4, x_2).x_3y.
\end{aligned}$$

Portanto, esta identidade também vale módulo I.

Para provar a identidade (3.20), partiremos da forma linearizada da identidade (3.17), isto é,

$$\begin{aligned}
(x_1, x_3, x_2)y + 2(x_1, x_3y, x_2) + (x_1, y, x_2)x_3 &= (x_1, x_3, yx_2) + (x_1, y, x_3x_2) \\
&- (x_2, x_3, yx_1) - (x_2, y, x_3x_1).
\end{aligned}$$

Fazendo $y = x_4$ e $x_3 = x_3y$, obtemos

$$\begin{aligned}(x_1, yx_3, x_4x_2) - (x_2, yx_3, x_4x_1) &= (x_1, yx_3, x_2)x_4 + 2(x_1, yx_3.x_4, x_2) + (x_1, x_4, x_2).yx_3 \\ &- (x_1, x_4, yx_3.x_2) + (x_2, x_4, yx_3.x_1).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}& (x_1, x_3y, x_2x_4) - (x_2, x_3y, x_1x_4) - (x_1, x_4y, x_2x_3) + (x_2, x_4y, x_1x_3) \\ = \; & (x_1, yx_3, x_2)x_4 + 2(x_1, yx_3.x_4, x_2) + (x_1, x_4, x_2).yx_3 \\ - \; & (x_1, x_4, yx_3.x_2) + (x_2, x_4, yx_3.x_1) \\ - \; & (x_1, yx_4, x_2)x_3 - 2(x_1, yx_4.x_3, x_2) - (x_1, x_3, x_2).yx_4 \\ + \; & (x_1, x_3, yx_4.x_2) - (x_2, x_3, yx_4.x_1).\end{aligned}$$

Notemos que, pelas identidades (1.1) e (3.14), $(x, (a, b, c), u) = 0$. Logo, $2(x_1, yx_3.x_4, x_2) - 2(x_1, yx_4.x_3, x_2) = 0$ e, ainda, por (3.3) temos que $(x_1, yx_3, x_2)x_4 - (x_1, yx_4, x_2)x_3 = 0$. Portanto, segue que

$$\begin{aligned}& (x_1, x_3y, x_2x_4) - (x_2, x_3y, x_1x_4) - (x_1, x_4y, x_2x_3) + (x_2, x_4y, x_1x_3) \\ = \; & (x_1, x_4, x_2).yx_3 - (x_1, x_4, yx_3.x_2) + (x_2, x_4, yx_3.x_1) \\ - \; & (x_1, x_3, x_2).yx_4 + (x_1, x_3, yx_4.x_2) - (x_2, x_3, yx_4.x_1),\end{aligned}$$

e pela identidade (3.19), obtemos

$$\begin{aligned}& (x_1, x_3y, x_2x_4) - (x_2, x_3y, x_1x_4) - (x_1, x_4y, x_2x_3) + (x_2, x_4y, x_1x_3) \\ = \; & (x_1, x_3, x_2).x_4y - (x_1, x_4, x_2).x_3y.\end{aligned}$$

Logo, a identidade (3.20) vale módulo I.

Portanto, demonstramos que as identidades (3.12 - 3.20) valem módulo I, em que I é o ideal gerado pelas identidades (1.1) e (3.2 - 3.8). ■

Prova do Teorema 3.2. Seja I o T-ideal definido pelas identidades (1.1) e (3.2 - 3.8). Mostraremos que todo f, que não está em I, é diferente de zero para valores apropriados de variáveis em B_3.

Lema 3.3. *Módulo I todo polinômio multilinear $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é uma combinação linear de*

(p_1) $x_1 R_{x_2} \ldots R_{x_n}$,

(p_2) $(a, b, c) R_{i_1} \ldots R_{i_k}$, *onde* $grau(a) \leq 1$, $grau(b) \leq 2$, $grau(c) \leq 3$ *e* $i_1 < \ldots < i_k$.

Prova. Pela Proposição 1.1, fica claro que f é igual a (p_1) módulo o ideal associador $D = \langle (a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{F}[X] \rangle$. Seguindo, vejamos que para $(a, b, c) R_{v_1} \ldots R_{v_k} \in D$ os monômios v_i comutam. Para isto, é suficiente provar que v_{i-1} comuta com v_i:

$$\begin{aligned}
(a, b, c) R_{v_1} \cdots R_{v_{i-1}} R_{v_i} \cdots R_{v_k} &\overset{(3.5)}{=} \frac{1}{2^{i-1}} (a, b, c)(v_1 \cdots v_{i-1} v_i) R_{v_{i+1}} \cdots R_{v_k} \\
&= [\frac{1}{2^{i-1}} (a, b, c)(v_1 \cdots v_{i-2} v_i v_{i-1}) \\
&+ \frac{1}{2^{i-1}} (a, b, c)(v_{i-1}, v_1 \cdots v_{i-2}, v_i)] R_{v_{i+1}} \cdots R_{v_k} \\
&\overset{(3.15)}{=} \frac{1}{2^{i-1}} (a, b, c)(v_1 \cdots v_i v_{i-1}) R_{v_{i+1}} \cdots R_{v_k} \\
&\overset{(3.5)}{=} (a, b, c) R_{v_1} \cdots R_{v_i} R_{v_{i-1}} \cdots R_{v_k},
\end{aligned}$$

em que $v_1 \ldots v_{i-1} v_i$ denota $(\ldots((v_1 v_2) v_3) \ldots) v_i$. Portanto, módulo as identidades (3.5) e (3.15), todo polinômio de D é uma combinação linear de elementos da forma (p_2), sendo

a, b, c monômios quaisquer.

Tomemos o associador (a, b, c). Se grau de b for maior ou igual a 3, aplicando a identidade (3.4) quantas vezes forem necessárias, podemos reduzir o grau de b a 2. Então escrevemos

$$\begin{aligned}(a, b, c) &\overset{(1.4)}{=} -(b, c, a) - (c, a, b)\\ &\overset{(1.3)}{=} -(b, c, a) + (b, a, c)\end{aligned}$$

e notamos que na primeira parcela podemos reduzir o grau de c a 2 pela identidade (3.5) e, da mesma forma reduzimos o grau de a na segunda parcela. Temos, então, uma combinação linear de polinômios da forma (p_2) com grau(a), grau$(b) \leq 2$. Além disso, podemos reduzir o grau de a a 1. Para isto, consideremos os casos: se grau$(b) = 2$ e grau$(a) = 2$, então temos

$$\begin{aligned}(a, b, c) &= (a, b_1 b_2, c)\\ &\overset{(3.12)}{=} (b_1, ab_2, c) - (b_1, ac, b_2) + (a, b_1 c, b_2)\\ &\overset{(3.4)}{=} 2(b_1, a, c)b_2 - 2(b_1, c, b_2)a + 2(a, c, b_2)b_1\\ &\overset{(1.3)}{=} 2(b_1, a, c)b_2 - 2(b_1, c, b_2)a - 2(b_2, c, a)b_1.\end{aligned}$$

Observemos que nas duas últimas parcelas podemos aplicar a identidade (3.4) quantas vezes forem necessárias, para deixar grau$(c) \leq 2$. Se grau$(b) = 1$ e grau$(a) = 2$, temos

$$\begin{aligned}(a, b, c) &= (a, b_1, c)\\ &\overset{(1.4)}{=} -(b_1, c, a) - (c, a, b_1)\\ &\overset{(1.3)}{=} -(b_1, c, a) + (b_1, a, c).\end{aligned}$$

Observemos também que na primeira parcela podemos reduzir o grau de c a 2 pela identidade (3.4).

Finalmente, suponhamos que grau$(c) \geq 4$. Suponhamos, ainda, que $c = px_i.x_j$ com grau$(p) \geq 2$. Então

$$\begin{aligned}
(a, b, px_i.x_j) &= (a, b, px_i.x_j) + (a, b, p.x_ix_j) - (a, b, p.x_ix_j) \\
&= (a, b, p.x_ix_j) + (a, b, (p, x_i, x_j)) \\
&= (a, b, p.x_ix_j) + (p, x_i, x_j).ab - (p, x_i, x_j)b.a.
\end{aligned}$$

Notemos que, pelas identidades (1.3) e (3.5), as duas últimas parcelas podem ser colocadas na forma (p_2). Portanto, podemos assumir que $c = pq$ com grau(p), grau$(q) \geq 2$.

Da linearização da identidade (3.8) e considerando que car$(\mathbb{F}) = 0$, obtemos a identidade

$$(x, s, rt.y) - (y, s, x.rt) = 2(x, s, y).rt + (x, rt, y)s.$$

Logo, temos que

$$(a, b, pq) - (p, b, aq) = 2(a, b, p)q + (a, q, p)s.$$

Assim, módulo a identidade (3.8), o polinômio $(a, b, pq) - (p, b, aq)$ é uma combinação linear de polinômios da forma (p_2), pois abaixamos o grau do associador e podemos usar indução. Portanto, podemos considerar um polinômio da forma (p_2), em que o associador é (p, b, aq) e repetir novamente o processo. ■

Consideremos primeiro f como um polinômio de grau n simétrico em todas as variáveis. Neste caso, devemos provar que, qualquer polinômio $f = f(x) \notin I$ não é uma identidade de B_3. Então, pelo Lema 3.3, f é combinação linear de xR_x^{n-1} e $(x, x^k, x^m)x^{n-k-m-1}$, em que $k \leq 2$ e m é igual a 2 ou 3.

Linearizando a identidade (3.6), obtemos

$$\begin{aligned} 3(y, x^2, x^2) + 6(x, xy, x^2) + 6(x, x^2, xy) &= 2(y, x, x^2)x + 2(x, y, x^2)x \\ &+ 4(x, x, xy)x + 2(x, x, x^2)y. \end{aligned}$$

Substituindo y por x^2 e utilizando a identidade (1.2), obtemos

$$6(x, xx^2, x^2) + 6(x, x^2, xx^2) = 2(x, x^2, x^2)x + 4(x, x, xx^2)x + 2(x, x, x^2)x^2,$$

e também aplicando a identidade (3.4), obtemos

$$6(x, x^2, xx^2) = -10(x, x^2, x^2)x + 4(x, x, xx^2)x + 2(x, x, x^2)x^2.$$

Notemos ainda que

$$3(x, x^2, x^2)x \overset{(3.6)}{=} 2(x, x, x^2)x.x \overset{(3.5)}{=} (x, x, x^2)x^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 6(x, x^2, xx^2) &= -\frac{10}{3}(x, x, x^2)x^2 + 4(x, x, xx^2)x + 2(x, x, x^2)x^2 \\ &= -\frac{4}{3}(x, x, x^2)x^2 + 4(x, x, x^3)x. \end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever o associador (x, x^k, x^m) com $k = 2$ e $m = 3$ como uma combinação linear de associadores com $k = 1$, $m = 2$ e $k = 1$, $m = 3$. Para o caso $k = 2$ e

$m = 2$, temos direto da identidade (3.6), que o associador pode ser transformado em um associador com $k = 1$ e $m = 2$. Logo, para qualquer caso, temos $k = 1$ e $m = 2$ ou $m = 3$ e, portanto, f pode ser escrito da seguinte maneira:

$$f(x) = [\alpha(x, x, x^2)x + \beta(x, x, x^3)]R_x^{n-5} + \gamma x R_x^{n-1}.$$

Se $\gamma \neq 0$ temos $f(e) = \gamma e \neq 0$. Suponhamos que $\gamma = 0$. Fazendo $x = e + v$, temos

$$f(e + v) = \frac{1}{2^{n-2}}(3\alpha + 5\beta)u \neq 0$$

se $3\alpha + 5\beta \neq 0$. Quando $3\alpha + 5\beta = 0$, temos

$$f(x) = \frac{\beta}{3}[-5(x, x, x^2)x + 3(x, x, x^3)]R_x^{n-5}.$$

Mas $-5(x, x, x^2)x + 3(x, x, x^3) = 0$ é a identidade (3.6) escrita de outra forma e, neste caso, $f(x) \in I$.

Portanto, o Teorema 3.2 está demonstrado para polinômios simétricos.

Consideremos agora o caso geral. Seja $f = f(x_1, \ldots, x_n) \notin I$ uma identidade multilinear de B_3. Temos que $f(x) = f(x, \ldots, x)$ é uma identidade de B_3 e pelo que foi provado acima $f(x) \in I$. Então $\sum_{\sigma \in S_n} \sigma f(x_1, \ldots, x_n) \in I$, pois se trata da forma linearizada de $f(x)$. Portanto, temos que $\tau f - (kl)\tau f \notin I$ para algum $\tau \in S_n$ e k, l elementos de $\{1, \ldots, n\}$. De fato, suponhamos o contrário, isto é, que $\tau f - (kl)\tau f \in I$ para todo $\tau \in S_n$ e $k, l \in \{1, \ldots, n\}$. Seja r a maior ordem possível de um elemento de S_n. Seja $\sigma \in S_n$ um elemento de ordem r (usamos a notação $|\sigma| = r$). Sabemos que σ é um produto de transposições, digamos, $\sigma = (k_1 l_1) \ldots (k_t l_t)$. Temos, por hipótese, que $\sigma f - (k_1 l_1)\sigma f \in I$.

Logo, como $\sum_{\sigma \in S_n} \sigma f \in I$, temos

$$\sum_{\sigma \in S_n} \sigma f - \sum_{|\sigma|=r} (\sigma f - (k_1 l_1)\sigma f) \in I,$$

isto é,

$$\sum_{|\sigma|<r} \alpha_\sigma \ \sigma f \in I,$$

em que $\alpha_\sigma \in \mathbb{F}$. Repetamos agora o processo para os elementos $\alpha_\sigma \sigma f$ com $|\sigma| = r-1$, obtendo

$$\sum_{|\sigma|<r} \alpha_\sigma \ \sigma f - \sum_{|\sigma|=r-1} \alpha_\sigma \ (\sigma f - (k_1' l_1')\sigma f),$$

isto é,

$$\sum_{|\sigma|<r-1} \beta_\sigma \ \sigma f \in I \qquad (\beta_\sigma \in \mathbb{F}).$$

Continuando com o processo, obtemos $\gamma f \in I$ para algum $\gamma \in \mathbb{F}, \gamma \neq 0$. Como $\mathrm{car}(\mathbb{F}) = 0$, temos $f \in I$, o que é uma contradição.

A menos da notação, podemos supor que $\tau = id$ e $(ij) = (12)$ e temos então que $g = f - (12)f \notin I$.

Lema 3.4. *Módulo I o polinômio $g = f - (12)f$ é uma combinação linear dos polinômios*

(i) $(x_1, b, x_2)E$, em que grau$(b) \leq 2$,

(ii) $[(x_1, b, cx_2) - (x_2, b, cx_1)]E$, em que E é um produto de operadores multiplicação à direita R_{x_i}, grau$(b) = 2$ e grau$(c) \leq 1$, ou grau$(b) = 1$ e grau$(c) \leq 2$.

Prova. No que segue, a mesma letra E será usada para indicar vários produtos distintos de operadores multiplicação à direita.

Pelo Lema 3.3, podemos assumir que f tem a forma (p_2), ou seja, $f = (a,b,c)R_{x_{i_1}} \dots R_{x_{i_k}}$, em que grau$(a) = 1$, grau$(b) \leq 2$, grau$(c) \leq 3$ e $i_1 < \dots < i_k$. Provemos que x_1 ocorre em (a,b,c). De fato, se x_1 não ocorre em (a,b,c), então temos $f = (a,b,c)x_1E$ pois $i_1 < \dots < i_k$. Se $b = x_ix_j$ temos

$$\begin{aligned}(a, x_ix_j, c)x_1E &\overset{(3.3)}{=} (a, x_ix_1, c)x_jE \\ &= (a, x_ix_1, c)R_{x_j}E.\end{aligned}$$

Se $a = x_i$, $b = x_j$ e grau$(c) \leq 3$ e c não depende de x_1, então temos

$$\begin{aligned}(x_i, x_j, c)x_1E &\overset{(3.2)}{=} [-(x_1, x_j, x_i)c - (c, x_j, x_1)x_i]E \\ &\overset{(1.3)}{=} [-(x_1, x_j, x_i)c + (x_1, x_j, c)x_i]E \\ &= (x_1, x_j, c)E - 2^{\beta}(x_1, x_j, x_i)E.\end{aligned}$$

Notemos que a última igualdade é válida pela identidade (3.5), aplicada quantas vezes for necessário. Assim x_1 ocorre em (a,b,c).

Em seguida, se x_2 não ocorre no associador (a,b,c), então provaremos que $a = x_1$ ou c depende de x_1. De fato, se grau$(b) = 1$, considerando $b = x_1$, temos

$$\begin{aligned}(a, x_1, c)x_2E &\overset{(1.4)}{=} [-(x_1, c, a) - (c, a, x_1)]x_2E \\ &\overset{(1.3)}{=} [(x_1, a, c) - (x_1, c, a)]x_2E.\end{aligned}$$

Notemos que, se o grau de c for 3 em (x_1, c, a), por (3.4) podemos reduzi-lo a 2. Agora,

se grau$(b) = 2$, considerando $b = x_1x_i$, temos

$$\begin{aligned}
(a, x_1x_i, c)x_2E &\overset{(1.4)}{=} [-(x_1x_i, c, a)x_2 - (c, a, x_1x_i)x_2]E \\
&\overset{(3.2)}{=} [-(x_1x_i, c, a)x_2 + (x_2, a, c).x_1x_i + (x_1x_i, a, x_2)c]E \\
&\overset{(1.3)}{=} [(a, c, x_1x_i)x_2 + (x_2, a, c).x_1x_i - (x_2, a, x_1x_i)c]E \\
&\overset{(3.5)}{=} (a, c, x_1x_i)E + 2(x_2, a, c)E - 2^{\alpha}(x_2, a, x_1x_i)E.
\end{aligned}$$

Notemos que se c não depende de x_1 na parcela $(x_2, a, c)E$, então, pelo caso anterior, temos $a = x_1$.

Se $f = (x_1, b, c)x_2E$, então

$$g = [(x_1, b, c)x_2 - (x_2, b, c)x_1]E \overset{(3.2)}{=} (x_1, b, x_2)cE.$$

Agora, suponhamos que $f = (a, b, px_1)x_2E$ ou $f = (a, b, yx_1.z)x_2E$. No primeiro caso temos

$$\begin{aligned}
(a, b, px_1)x_2E &\overset{(3.2)}{=} -(x_2, b, a).px_1E - (px_1, b, x_2)aE \\
&\overset{(3.5)}{=} -2(x_2, b, a)p.x_1E - (px_1, b, x_2)aE \\
&\overset{(1.3)}{=} (x_2, b, px_1)aE - 2(x_2, b, a)p.x_1E
\end{aligned}$$

e então

$$\begin{aligned}
g &= f - (12)f \\
&= (x_2, b, px_1)aE - (x_1, b, px_2)aE - 2(x_2, b, a)p.x_1E + 2(x_1, b, a)p.x_2E \\
&\overset{(3.14)}{=} 2[-(x_2, b, a)x_1 + (x_1, b, a)x_2]pE + (x_2, b, px_1)aE - (x_1, b, px_2)aE \\
&\overset{(3.2)}{=} 2(x_1, b, x_2)a.pE + [(x_2, b, px_1) - (x_1, b, px_2)]aE,
\end{aligned}$$

que é uma combinação linear de (i) e (ii). Vejamos que o mesmo ocorre com o outro caso. Temos

$$\begin{aligned}(a,b,yx_1.z)x_2E &= (a,b,yx_1.z)x_2E + (a,b,x_1.yz)x_2E - (a,b,x_1.yz)x_2E \\ &= (a,b,x_1.yz)x_2E + (a,b,(x_1,y,z))x_2E \\ &= (a,b,yz.x_1)x_2E + [(x_1,y,z).ab]x_2E - [(x_1,y,z)b.a]x_2E,\end{aligned}$$

e observamos que este caso está reduzido aos casos anteriores.

Assim, temos a forma (ii) para grau(b) e grau(c) menor ou igual a 2. Se grau(b) = grau(c) = 2, pela forma linearizada da identidade (3.16), temos

$$\begin{aligned}[(x_1,x_ix_j,x_kx_l.x_2) - (x_2,x_ix_j,x_kx_l.x_1)]E &= 3[(x_1,x_ix_j,x_2).x_kx_l]E \\ &\overset{(3.5)}{=} 6[(x_1,x_ix_j,x_2)x_k.x_l]E,\end{aligned}$$

que é um múltiplo do monômio (i). ■

Agora, consideremos g como no Lema 3.4. Temos que g é simétrico em $x_4,\ldots,x_n$, logo, podemos considerar $x_4 = \ldots = x_n = y$ e denotar $g(x_1,\ldots,x_n)$ por $g(x_1,x_2,y)$, ou que existam duas variáveis anti-simétricas (digamos x_3,x_4).

Se $g = g(x_1,x_2,y)$, afirmamos que pelas identidades (3.17) e (3.18) g é combinação linear dos seguintes polinômios:

(I) $(x_1,y,x_2)R_y^{n-3}$,

(II) $(x_1,y,yx_2) - (x_2,y,yx_1)R_y^{n-4}$.

Pelo Lema 3.4, g é combinação linear dos dois polinômios acima e também dos demais listados abaixo:

(i) $(x_1, y^2, x_2)R_y^{n-4}$,

(ii) $(x_1, y^2, yx_2) - (x_2, y^2, yx_1)R_y^{n-5}$,

(iii) $(x_1, y, y^2x_2) - (x_2, y, y^2x_1)R_y^{n-5}$.

Vejamos o que ocorre com (i). Temos

$$\begin{aligned}(x_1, y^2, x_2)R_y^{n-4} &\overset{(3.17)}{=} [-(x_1, y, x_2)y + (x_1, y, yx_2) - (x_2, y, yx_1)]R_y^{n-4} \\ &= -(x_1, y, x_2)R_y^{n-3} + [(x_1, y, yx_2) - (x_2, y, yx_1)]R_y^{n-4},\end{aligned}$$

que é combinação linear de (I) e (II). No caso (iii), temos

$$\begin{aligned}[(x_1, y, y^2x_2) - (x_2, y, y^2x_1)]R_y^{n-5} &\overset{(3.18)}{=} \frac{3}{2}(x_1, y, x_2)y^2R_y^{n-5} \\ &+ [(x_1, y, yx_2) - (x_2, y, yx_1)]yR_y^{n-5} \\ &\overset{(3.5)}{=} 3(x_1, y, x_2)R_y^{n-3} \\ &+ [(x_1, y, yx_2) - (x_2, y, yx_1)]R_y^{n-4},\end{aligned}$$

que da mesma forma é combinação linear de (I) e (II).

Linearizando (3.17), temos

$$\begin{aligned}(x_1, y_1, x_2)y_2 + (x_1, y_2, x_2)y_1 + 2(x_1, y_1y_2, x_2) &= (x_1, y_1, y_2x_2) - (x_2, y_1, y_2x_1) \\ &+ (x_1, y_2, y_1x_2) - (x_2, y_2, y_1x_1),\end{aligned}$$

e substituindo y_1 por y e y_2 por y^2, obtemos

$$\begin{aligned}(x_1, y, x_2)y^2 + (x_1, y^2, x_2)y + 2(x_1, yy^2, x_2) &= (x_1, y, y^2x_2) - (x_2, y, y^2x_1) \\ &+ (x_1, y^2, yx_2) - (x_2, y^2, yx_1).\end{aligned}$$

Pelas identidades (3.4) e (3.5), temos então

$$2(x_1, y, x_2)y.y + 5(x_1, y^2, x_2)y = (x_1, y, y^2x_2) - (x_2, y, y^2x_1) + (x_1, y^2, yx_2) - (x_2, y^2, yx_1),$$

e por (3.18) e (3.5), obtemos

$$\begin{aligned}2(x_1, y, x_2)y.y + 5(x_1, y^2, x_2)y &= 3(x_1, y, x_2)y.y + [(x_1, y, yx_2) - (x_2, y, yx_1)]y \\ &+ (x_1, y^2, yx_2) - (x_2, y^2, yx_1).\end{aligned}$$

Segue então que

$$(x_1, y^2, yx_2) - (x_2, y^2, yx_1) = 5(x_1, y^2, x_2)y - (x_1, y, x_2)y.y - [(x_1, y, yx_2) - (x_2, y, yx_1)]y.$$

Assim podemos passar ao caso (ii). Temos

$$\begin{aligned}[(x_1, y^2, yx_2) - (x_2, y^2, yx_1)]R_y^{n-5} &= 5(x_1, y^2, x_2)R_y^{n-4} - (x_1, y, x_2)R_y^{n-3} \\ &- [(x_1, y, yx_2) - (x_2, y, yx_1)]R_y^{n-4}.\end{aligned}$$

Substituindo $(x_1, y^2, x_2)R_y^{n-4}$ pela combinação linear de (I) e (II), já obtida, temos

$$[(x_1, y^2, yx_2) - (x_2, y^2, yx_1)]R_y^{n-5} = 4[(x_1, y, yx_2) - (x_2, y, yx_1)]R_y^{n-4} - 6(x_1, y, x_2)R_y^{n-3},$$

que também é combinação linear de (I) e (II).

Portanto,

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, y) &= \alpha_1(x_1, y, x_2)R_y^{n-3} + \beta[(x_1, y, yx_2) - (x_2, y, yx_1)]R_y^{n-4} \\ &\overset{(3.17)}{=} (\alpha_1 + \beta)(x_1, y, x_2)R_y^{n-3} + \beta[(x_1, y^2, x_2)R_y^{n-4}, \end{aligned}$$

isto é,

$$g(x_1, x_2, y) = \alpha(x_1, y, x_2)R_y^{n-3} + \beta[(x_1, y^2, x_2)R_y^{n-4}.$$

Fazendo $x_1 = e + v$, $y = e + v$ e $x_2 = e$, temos

$$(x_1, y, x_2) = (e + v, e + v, e) = \frac{1}{2}u,$$

e

$$(x_1, y^2, x_2) = (e + v, (e + v)^2, e) = (e + v, e + u, e) = 0.$$

Logo, $g(e + v, e, e + v) = \frac{\alpha}{2}uR_{e+v}^{n-3} = \frac{\alpha}{2^{n-2}}u \neq 0$, para $\alpha \neq 0$. Se $\alpha = 0$ temos $\beta \neq 0$ e logo $g(e, u, e) = \frac{\beta}{2^{n-2}}u \neq 0$. Portanto, não podemos ter o caso $g(x_1, x_2, y)$.

Portanto, podemos assumir que $g = g(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n)$ é um polinômio anti-simétrico em x_1, x_2 e x_3, x_4. Afirmamos que, qualquer que seja o caso, temos

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_n) = \alpha[(x_1, x_3, x_2)x_4 - (x_1, x_4, x_2)x_3]R_{x_5} \ldots R_{x_n}. \tag{3.21}$$

Primeiro analisaremos o caso em que grau de g é igual a 4. Notemos que, pelo Lema 3.4, podemos ter g como combinação linear dos seguintes polinômios:

(q_1) $(x_1, x_3, x_2)x_4 - (x_1, x_4, x_2)x_3,$

(q_2) $[(x_1, x_3, x_2x_4) - (x_2, x_3, x_1x_4)] - [(x_1, x_4, x_2x_3) - (x_2, x_4, x_1x_3)].$

Entretanto,

$$\begin{aligned} & (x_1, x_3, x_2x_4) - (x_2, x_3, x_1x_4) - (x_1, x_4, x_2x_3) + (x_2, x_4, x_1x_3) \\ \overset{(3.7)}{=} \; & 3(x_1, x_3, x_2)x_4 - 3(x_1, x_4, x_2)x_3, \end{aligned}$$

que é múltiplo de (q_1). Logo, g é da forma

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = \alpha[(x_1, x_3, x_2)x_4 - (x_1, x_4, x_2)x_3],$$

ou seja, g tem a forma (3.21) quando grau$(g) = 4$. Suponhamos que grau$(g) \geq 5$. Notemos que x_3, x_4 não podem aparecer ambos fora do associador, pois pela identidade (3.5) podemos transformar $((a, b, c)x_3.x_4)E$ em $((a, b, c).x_3x_4)E$ e pela anti-simetria temos que este termo é zero. Portanto, pelo Lema 3.4, temos que g é uma combinação linear dos seguintes polinômios:

(r_1) $[(x_1, x_3, x_2).x_4x_i - (x_1, x_4, x_2).x_3x_i]E,$

(r_2) $\{(x_1, x_3x_i, x_2x_4) - (x_2, x_3x_i, x_1x_4) - (x_1, x_4x_i, x_2x_3) + (x_2, x_4x_i, x_1x_3)\}E,$

(r_3) $\{[(x_1, x_3, x_4x_i.x_2) - (x_2, x_3, x_4x_i.x_1)] - [(x_1, x_4, x_3x_i.x_2) - (x_2, x_4, x_3x_i.x_1)]\}E,$

(r_4) $\{[(x_1, x_3, x_4x_2) - (x_2, x_3, x_4x_1)] - [(x_1, x_4, x_3x_2) - (x_2, x_4, x_3x_1)]\}E.$

(r_5) $\{[(x_1, x_ix_j, x_3x_2) - (x_2, x_ix_j, x_3x_1)]x_4 - [(x_1, x_ix_j, x_4x_2) - (x_2, x_ix_j, x_4x_1)]x_3\}E,$

(r_6) $\{[(x_1, x_3x_i, x_2)x_4 - (x_1, x_4x_i, x_2)x_3]\}E,$

(r_7) $\{[(x_1, x_3, x_ix_j.x_2) - (x_2, x_3, x_ix_j.x_1)]x_4 - [(x_1, x_4, x_ix_j.x_2) - (x_2, x_4, x_ix_j.x_1)]x_3\}E,$

(r_8) $\{[(x_1, x_i, x_3x_j.x_2) - (x_2, x_i, x_3x_j.x_1)]x_4 - [(x_1, x_i, x_4x_j.x_2) - (x_2, x_i, x_4x_j.x_1)]x_3\}E,$

(r_9) $\{[(x_1, x_i, x_3x_2)x_4 - (x_2, x_i, x_3x_1)x_4] - [(x_1, x_i, x_4x_2)x_3 - (x_2, x_i, x_4x_1)x_3]\}E,$

(r_{10}) $\{[(x_1, x_3, x_ix_2) - (x_2, x_3, x_ix_1)]x_4 - [(x_1, x_4, x_ix_2) - (x_2, x_4, x_ix_1)]x_3\}E,$

(r_{11}) $\{[(x_1, x_3x_i, x_jx_2) - (x_2, x_3x_i, x_jx_1)]x_4 - [(x_1, x_4x_i, x_jx_2) - (x_2, x_4x_i, x_jx_1)]x_3\}E.$

Vejamos o que ocorre com (r_4). Temos

$$\begin{aligned}
& \{[(x_1, x_3, x_4x_2) - (x_2, x_3, x_4x_1)] - [(x_1, x_4, x_3x_2) - (x_2, x_4, x_3x_1)]\}R_{x_i}E \\
\overset{(3.7)}{=} \; & 3[(x_1, x_3, x_2)x_4 - (x_1, x_4, x_2)x_3]R_{x_i}E \\
= \; & 3[(x_1, x_3, x_2)x_4.x_i - (x_1, x_4, x_2)x_3.x_i]E \\
\overset{(3.5)}{=} \; & \frac{3}{2}[(x_1, x_3, x_2).x_4x_i - (x_1, x_4, x_2).x_3x_i]E,
\end{aligned}$$

que é múltiplo de (r_1).

Agora, vejamos o polinômio (r_5). Temos

$$\begin{aligned}
& [(x_1, x_ix_j, x_3x_2)x_4 - (x_2, x_ix_j, x_3x_1)x_4 - (x_1, x_ix_j, x_4x_2)x_3 + (x_2, x_ix_j, x_4x_1)x_3]E \\
\overset{(3.3)}{=} \; & \{(x_1, x_ix_4, x_3x_2) - (x_2, x_ix_4, x_3x_1) - (x_1, x_ix_3, x_4x_2) + (x_2, x_ix_3, x_4x_1)\}R_{x_j}E
\end{aligned}$$

e obtemos um polinômio da forma (r_2), a menos do sinal.

Notemos que, pela identidade (3.3), o polinômio (r_6) é identicamente nulo.

Em seguida, vejamos como se comporta o polinômio (r_7). Temos

$$
\begin{aligned}
& \{[(x_1, x_3, x_i x_j . x_2) - (x_2, x_3, x_i x_j . x_1)]x_4 - [(x_1, x_4, x_i x_j . x_2) - (x_2, x_4, x_i x_j . x_1)]x_3\}E \\
\overset{(3.8)}{=} & \{[2(x_1, x_3, x_2).x_i x_j + (x_1, x_i x_j, x_2)x_3]x_4 - [2(x_1, x_4, x_2).x_i x_j + (x_1, x_i x_j, x_2)x_4]x_3\}E \\
= & \{2[(x_1, x_3, x_2)(x_i x_j).x_4 - (x_1, x_4, x_2)(x_i x_j).x_3] \\
+ & [(x_1, x_i x_j, x_2)x_3.x_4 - (x_1, x_i x_j, x_2)x_4.x_3]\}E \\
\overset{(3.5)}{=} & \{[(x_1, x_3, x_2).(x_i x_j)x_4 - (x_1, x_4, x_2).(x_i x_j)x_3] \\
+ & \frac{1}{2}[(x_1, x_i x_j, x_2).x_3 x_4 - (x_1, x_i x_j, x_2).x_4 x_3]\}E \\
\overset{(1.1)}{=} & \{[(x_1, x_3, x_2).(x_i x_j)x_4 - (x_1, x_4, x_2).(x_i x_j)x_3] \\
\overset{(3.20)}{=} & \{(x_1, x_3.x_i x_j, x_2 x_4) - (x_2, x_3.x_i x_j, x_1 x_4) - (x_1, x_4.x_i x_j, x_2 x_3) + (x_2, x_4.x_i x_j, x_1 x_3)\}E \\
\overset{(3.4)}{=} & -2\{[(x_1, x_i x_j, x_3 x_2) - (x_2, x_i x_j, x_3 x_1)]x_4 - [(x_1, x_i x_j, x_4 x_2) - (x_2, x_i x_j, x_4 x_1)]x_3\}E.
\end{aligned}
$$

Logo, (r_7) é um múltiplo do polinômio (r_5), que já foi reduzido acima ao polinômio (r_2).

Vejamos o polinômio (r_8). Temos

$$
\begin{aligned}
& \{[(x_1, x_i, x_3 x_j . x_2) - (x_2, x_i, x_3 x_j . x_1)]x_4 - [(x_1, x_i, x_4 x_j . x_2) - (x_2, x_i, x_4 x_j . x_1)]x_3\}E \\
\overset{(3.8)}{=} & \{[2(x_1, x_i, x_2).x_3 x_j + (x_1, x_3 x_j, x_2)x_i]x_4 - [2(x_1, x_i, x_2).x_4 x_j + (x_1, x_4 x_j, x_2)x_i]x_3\}E \\
= & \{2[(x_1, x_i, x_2)(x_3 x_j).x_4 - (x_1, x_i, x_2)(x_4 x_j).x_3] \\
+ & (x_1, x_3 x_j, x_2)x_i.x_4 - (x_1, x_4 x_j, x_2)x_i.x_3\}E \\
\overset{(3.3)}{=} & \{2[(x_1, x_i, x_2)(x_3 x_j).x_4 - (x_1, x_i, x_2)(x_4 x_j).x_3]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad (x_1, x_3x_i, x_2)x_j.x_4 - (x_1, x_4x_i, x_2)x_j.x_3\}E \\
&\overset{(3.5)}{=} \quad \{(x_1, x_i, x_2).(x_3x_j)x_4 - (x_1, x_i, x_2).(x_4x_j)x_3 \\
&+ \quad \frac{1}{2}[(x_1, x_3x_i, x_2).x_jx_4 - (x_1, x_4x_i, x_2).x_jx_3]\}E \\
&= \quad \{(x_1, x_i, x_2)[x_3x_j.x_4 - x_4x_j.x_3] + \frac{1}{2}[(x_1, x_3x_i, x_2).x_jx_4 - (x_1, x_4x_i, x_2).x_jx_3]\}E \\
&\overset{(1.1)}{=} \quad \{(x_1, x_i, x_2)[x_3x_j.x_4 - x_3.x_jx_4] + \frac{1}{2}[(x_1, x_3x_i, x_2).x_4x_j - (x_1, x_4x_i, x_2).x_3x_j]\}E \\
&\overset{(3.5)}{=} \quad \{(x_1, x_i, x_2)(x_3, x_j, x_4) + (x_1, x_3x_i, x_2)x_4.x_j - (x_1, x_4x_i, x_2)x_3.x_j]\}E \\
&\overset{(3.15)}{=} \quad [(x_1, x_3x_i, x_2)x_4 - (x_1, x_4x_i, x_2)x_3]R_{x_j}E.
\end{aligned}
$$

Portanto, o polinômio (r_8) é da forma (r_6), que reduzimos a zero acima.

Vejamos como ficam os polinômios (r_9) e (r_{10}). Temos

$$
\begin{aligned}
&\{[(x_1, x_3, x_ix_2) - (x_2, x_3, x_ix_1)]x_4 - [(x_1, x_4, x_ix_2) - (x_2, x_4, x_ix_1)]x_3\}E \\
&\overset{(3.7)}{=} \quad \{(x_1, x_i, x_2x_3)x_4 - (x_2, x_i, x_1x_3)x_4 + 3(x_1, x_3, x_2)x_i.x_4 - 3(x_1, x_i, x_2)x_3.x_4 \\
&- \quad (x_1, x_i, x_2x_4)x_3 + (x_2, x_i, x_1x_4)x_3 - 3(x_1, x_4, x_2)x_i.x_3 + 3(x_1, x_i, x_2)x_4.x_3\}E \\
&\overset{(3.5)}{=} \quad \{[(x_1, x_i, x_2x_3)x_4 - (x_2, x_i, x_1x_3)x_4] - [(x_1, x_i, x_2x_4)x_3 - (x_2, x_i, x_1x_4)x_3]\}E \\
&+ \quad \frac{3}{2}\{[(x_1, x_3, x_2).x_ix_4 - (x_1, x_4, x_2).x_ix_3] + [(x_1, x_i, x_2).x_4x_3 - (x_1, x_i, x_2).x_3x_4]\}E \\
&\overset{(1.1)}{=} \quad \{[(x_1, x_i, x_2x_3)x_4 - (x_2, x_i, x_1x_3)x_4] - [(x_1, x_i, x_2x_4)x_3 - (x_2, x_i, x_1x_4)x_3]\}E \\
&+ \quad \frac{3}{2}[(x_1, x_3, x_2).x_4x_i - (x_1, x_4, x_2).x_3x_i]E,
\end{aligned}
$$

assim,

$$(r_{10}) - (r_9) = \frac{3}{2}\,(r_1).$$

Por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
& \{[(x_1, x_i, x_3x_2) - (x_2, x_i, x_3x_1)]x_4 - [(x_1, x_i, x_4x_2) - (x_2, x_i, x_4x_1)]x_3\}E \\
\overset{(3.17)}{=} & \{[(x_1, x_3, x_2)x_i + 2(x_1, x_3x_i, x_2) + (x_1, x_i, x_2)x_3 - (x_1, x_3, x_ix_2) + (x_2, x_3, x_ix_1)]x_4 \\
+ & [-(x_1, x_4, x_2)x_i - 2(x_1, x_ix_4, x_2) - (x_1, x_i, x_2)x_4 + (x_1, x_4, x_ix_2) - (x_2, x_4, x_ix_1)]x_3\}E \\
\overset{(3.14)}{=} & \{[(x_1, x_3, x_2)x_i.x_4 - (x_1, x_4, x_2)x_i.x_3] + 2[(x_1, x_3x_i, x_2)x_4 - (x_1, x_ix_4, x_2)x_3] \\
- & [(x_1, x_3, x_ix_2)x_4 - (x_2, x_3, x_ix_1)x_4 - (x_1, x_4, x_ix_2)x_3 + (x_2, x_4, x_ix_1)x_3]\}E \\
\overset{(3.5)}{=} & \{\frac{1}{2}[(x_1, x_3, x_2).x_ix_4 - (x_1, x_4, x_2).x_ix_3] + 2[(x_1, x_3x_i, x_2)x_4 - (x_1, x_ix_4, x_2)x_3] \\
- & [(x_1, x_3, x_ix_2)x_4 - (x_2, x_3, x_ix_1)x_4 - (x_1, x_4, x_ix_2)x_3 + (x_2, x_4, x_ix_1)x_3]\}E,
\end{aligned}
$$

assim

$$(r_{10}) + (r_9) = \frac{1}{2}\ (r_1).$$

Portanto $(r_9) = -\frac{1}{2}(r_1)$ e $(r_{10}) = (r_1)$.

Na seqüência, vejamos o que ocorre com o polinômio (r_{11}). Temos

$$
\begin{aligned}
& \{[(x_1, x_3x_i, x_jx_2) - (x_2, x_3x_i, x_jx_1)]x_4 - [(x_1, x_4x_i, x_jx_2) - (x_2, x_4x_i, x_jx_1)]x_3\}E \\
\overset{(3.20)}{=} & \{[(x_1, x_ix_j, x_2x_3) - (x_2, x_ix_j, x_1x_3) + (x_1, x_3, x_2).x_ix_j - (x_1, x_j, x_2).x_3x_i]x_4\}E \\
+ & \{[-(x_1, x_ix_j, x_2x_4) + (x_2, x_ix_j, x_1x_4) - (x_1, x_4, x_2).x_ix_j + (x_1, x_j, x_2).x_4x_i]x_3\}E \\
= & \{[(x_1, x_ix_j, x_2x_3) - (x_2, x_ix_j, x_1x_3)]x_4 - [(x_1, x_ix_j, x_2x_4) - (x_2, x_ix_j, x_1x_4)]x_3\}E \\
+ & \{(x_1, x_3, x_2)(x_ix_j).x_4 - (x_1, x_4, x_2)(x_ix_j).x_3 \\
+ & (x_1, x_j, x_2)(x_4x_i).x_3 - (x_1, x_j, x_2)(x_3x_i).x_4\}E \\
\overset{(3.5)}{=} & \{[(x_1, x_ix_j, x_2x_3) - (x_2, x_ix_j, x_1x_3)]x_4 - [(x_1, x_ix_j, x_2x_4) - (x_2, x_ix_j, x_1x_4)]x_3\}E
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \{(x_1,x_3,x_2)(x_ix_j).x_4 - (x_1,x_4,x_2)(x_ix_j).x_3 + \frac{1}{2}(x_1,x_j,x_2)(x_4,x_i,x_3)\}E \\
&\overset{(3.15)}{=} \quad \{[(x_1,x_ix_j,x_2x_3) - (x_2,x_ix_j,x_1x_3)]x_4 - [(x_1,x_ix_j,x_2x_4) - (x_2,x_ix_j,x_1x_4)]x_3\}E \\
&+ \quad \{(x_1,x_3,x_2)(x_ix_j).x_4 - (x_1,x_4,x_2)(x_ix_j).x_3\}E \\
&\overset{(3.5)}{=} \quad \{[(x_1,x_ix_j,x_2x_3) - (x_2,x_ix_j,x_1x_3)]x_4 - [(x_1,x_ix_j,x_2x_4) - (x_2,x_ix_j,x_1x_4)]x_3\}E \\
&+ \quad \frac{1}{2}\{(x_1,x_3,x_2).(x_ix_j)x_4 - (x_1,x_4,x_2).(x_ix_j)x_3\}E \\
&\overset{(3.20)}{=} \quad \{[(x_1,x_ix_j,x_2x_3) - (x_2,x_ix_j,x_1x_3)]x_4 - [(x_1,x_ix_j,x_2x_4) - (x_2,x_ix_j,x_1x_4)]x_3\}E \\
&+ \quad \frac{1}{2}\{(x_1,x_3.x_ix_j,x_2x_4) - (x_2,x_3.x_ix_j,x_1x_4) - (x_1,x_4.x_ix_j,x_2x_3) + (x_2,x_4.x_ix_j,x_1x_3)\}E \\
&\overset{(3.4)}{=} \quad \{[(x_1,x_ix_j,x_2x_3) - (x_2,x_ix_j,x_1x_3)]x_4 - [(x_1,x_ix_j,x_2x_4) - (x_2,x_ix_j,x_1x_4)]x_3\}E \\
&+ \quad \{(x_1,x_ix_j,x_2x_4)x_3 - (x_2,x_ix_j,x_1x_4)x_3 - (x_1,x_ix_j,x_2x_3)x_4 + (x_2,x_ix_j,x_1x_3)x_4\}E \\
&\overset{(3.3)}{=} \quad \{[(x_1,x_ix_j,x_2x_3) - (x_2,x_ix_j,x_1x_3)]x_4 - [(x_1,x_ix_j,x_2x_4) - (x_2,x_ix_j,x_1x_4)]x_3\}E \\
&+ \quad \{(x_1,x_ix_3,x_2x_4) - (x_2,x_ix_3,x_1x_4) - (x_1,x_ix_4,x_2x_3) + (x_2,x_ix_4,x_1x_3)\}R_{x_j}E.
\end{aligned}
$$

Logo, escrevemos o polinômio (r_{11}), a menos da comutatividade, como combinação linear dos polinômios (r_5) e (r_2).

Até agora, reduzimos os 11 possíveis polinômios aos polinômios (r_1), (r_2) e (r_3). Na seqüência, mostraremos que estes polinômios são da forma (3.21). Começando com (r_1), temos

$$
\begin{aligned}
[(x_1,x_3,x_2).x_4x_i - (x_1,x_4,x_2).x_3x_i]E &\overset{(3.5)}{=} 2[(x_1,x_3,x_2)x_4.x_i - (x_1,x_4,x_2)x_3.x_i]E \\
&= 2[(x_1,x_3,x_2)x_4 - (x_1,x_4,x_2)x_3]R_{x_i}E \\
&= 2[(x_1,x_3,x_2)x_4 - (x_1,x_4,x_2)x_3]R_{x_5}\dots R_{x_n}.
\end{aligned}
$$

Notemos que na última igualdade, as identidades (3.5), (3.14) e (3.15) são aplicadas várias

vezes para obtermos um polinômio da forma (3.21). Seguindo, notemos que o polinômio (r_2) é igual ao polinômio que aparece no primeiro membro de (3.20) com $y = x_i$, logo,

$$\begin{aligned}
& \{[(x_1, x_3x_i, x_2x_4) - (x_2, x_3x_i, x_1x_4)] - [(x_1, x_4x_i, x_2x_3) - (x_2, x_4x_i, x_1x_3)]\}E \\
= \; & [(x_1, x_3, x_2).x_4x_i - (x_1, x_4x_2).x_3x_i]E \\
\overset{(3.5)}{=} \; & 2[(x_1, x_3, x_2)x_4 - (x_1, x_4, x_2)x_3]R_{x_i}E,
\end{aligned}$$

e também temos que (r_2) é da forma do polinômio (3.21). Vejamos o polinômio (r_3). Temos

$$\begin{aligned}
& \{[(x_1, x_3, x_4x_i.x_2) - (x_2, x_3, x_4x_i.x_1)] - [(x_1, x_4, x_3x_i.x_2) - (x_2, x_4, x_3x_i.x_1)]\}E \\
\overset{(3.19)}{=} \; & 2[(x_1, x_3, x_2).x_4x_i - (x_1, x_4, x_2).x_3x_i]E \\
\overset{(3.5)}{=} \; & 4[(x_1, x_3, x_2)x_4 - (x_1, x_4, x_2)x_3]R_{x_i}E.
\end{aligned}$$

Logo, (r_3) é da forma do polinômio (3.21).

Provamos então que g tem a forma (3.21). Para terminar a prova do Teorema 3.2, fazemos $x_1 = x_3 = e$, $x_2 = x_4 = v$ e $x_5 = \ldots = x_n = e$ em (3.21). Obtemos $\alpha\frac{1}{2^{n-2}}u \neq 0$.

Bibliografia

1. C. Curtis and I. Reiner, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras.* Interscience Publishers, New York, 1962.

2. H. Boerner, *Representations of Groups.* North-Holland, Amsterdam, 1963.

3. R. D. Schafer, *An Introduction to Nonassociative Algebras.* Academic Press, New York, 1966.

4. I. N. Herstein, *Tópicos de Álgebra.* Editora da USP e Polígono, São Paulo, 1970.

5. P. Holgate, *Genetic Algebras Satisfying Bernstein's Stationary Principle.* J. London Math. 9:613-623, 1975.

6. R. Pierce, *Associative Algebras.* Springer-Verlag, New York, 1982.

7. K. A. Zhevlakov, A. M. Slin'ko, I. P. Shestakov and A. I. Shirshov, *Rings That Are Nearly Associative.* Academic Press, first edition, New York, 1982.

8. Y. I. Lyubich, *Mathematical Structures in Population Genetics.* Springer-Verlag, Berlin, 1983.

9. A. R. Kemer, *Finite Basis Property in Associative Algebras.* Algebra and Logic 5:362-397, 1987.

10. A. Ya. Vais and E. I. Zelmanov, *Kemer's Theorem for Finitely Generated Jordan Algebras.* Soviet Math. (Iz. VUZ.) 33:38-47 (1990).

11. A. V. Iltyakov, *Finiteness of Basis of Identities of a Finitely Generated Alternative PI-Algebra over a Field of Característica Zero.* Siberian Math. J. 32:948-961, 1991.

12. A. V. Iltyakov, *On Finite Basis of Identities of Lie Representations.* Nova J. Alg. Geom. 1:207-259, 1992.

13. I. Correa, I. R. Hentzel and L. A. Peresi, *Minimal Identities of Bernstein Algebras.* Algebras Groups Geom. 11:181-199, 1993.

14. I. Correa, *Identidades Polinomiais em Álgebras de Bernstein.* Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo, 1994.

15. J. Bernad, S. González, C. Martínez and A. V. Iltyakov, *On Identities of Baric Algebras and Superalgebras.* J. Algebra 197:385-408, 1997.

16. J. Bernad, S. González, C. Martínez and A. V. Iltyakov, *Polynomial Identities of Bernstein Algebras of Small Dimension.* J. Algebra 207:664-681, 1998.

Índice

álgebra

associativa comutativa livre, 9

comutativa, 7

de Bernstein, 11

-Jordan, 17

excepcional, 14

normal, 14

nuclear, 17

regular, 14

estocástica, 11

ponderada, 10, 11

associador, 7

base de identidades, 5

conjunto de geradores, 5

decomposição de Peirce, 12

diagrama de Young, 5, 6, 32

essencialmente idempotente, 6

ideal de identidades, 5

$T(B_2)$, 18

identidade

de Jordan, 17

flexível, 7

polinomial, 4

ponderada, 11

partição, 5

Problema de Specht, 16

tableau, 5

standard, 6, 32