Sobre a energia e energia corrigida de campos unitários e distribuições. Volume de campos unitários.

Pablo Miguel Chacón Martín

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇAO DO GRAU
DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA

Área de concentração: **Geometria.**
Orientador: **Prof. Dr. Fabiano Gustavo Braga Brito.**

São Paulo, 25 de agosto de 2000.

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro da Fapesp e da Agencia Española de Cooperación Internacional.

Sobre a energia e energia corrigida de campos unitários e distribuições. Volume de campos unitários.

PABLO MIGUEL CHACÓN MARTÍN

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Pablo Miguel Chacón Martín e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 25 de agosto de 2000.

Banca examinadora:

Prof. Dr. FABIANO GUSTAVO BRAGA BRITO (Orientador), IME-USP
Prof. Dr. PAOLO PICCIONE, IME-USP
Prof. Dr. ALCIBÍADES RIGAS, IMECC-UNICAMP
Profa. Dra. KETI TENENBLAT, UnB
Profa. Dra. OLGA GIL MEDRANO, Univ. de Valência (Espanha)

RESUMO.

Define-se a energia de um campo de vetores unitário X numa variedade riemanniana M^n como a energia da seção $X : M \to T^1M$ que determina. No fibrado tangente T^1M consideramos a métrica de Sasaki. Analogamente, a energia de uma distribuição de dimensão q é a energia da seção no fibrado de q-planos tangentes a M. Os mínimos triviais do funcional energia são os campos paralelos ou as distribuições totalmente geodésicas com complementar também totalmente geodésico. Quando não existem estes campos ou distribuições, como no caso das esferas $\mathbb{S}^{2k+1}$ $k > 1$, estudamos os pontos críticos, mínimos locais e globais do funcional.

Para campos de vetores, é apresentado um teorema que dá uma limitação inferior para a soma das energias de n campos ortogonais. Para distribuições conseguimos provar um teorema para variedades quaisquer que aplicado às esferas $\mathbb{S}^{2k+1}$ fornece uma limitação inferior para a energia. Esta cota inferior é atingida pela folheação Norte-Sul (com duas singularidades). Num análise variacional, mostra-se também que as fibrações de Hopf $\mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{S}^{4k+3}$ são pontos críticos instáveis.

O volume de um campo de vetores unitário é o volume da imagem da seção correspondente no fibrado tangente unitário, sendo este fibrado munido da métrica de Sasaki. De novo, os campos paralelos são os mínimos triviais.

Demonstra-se nesta tese que o volume é limitado inferiormente pela soma, com certos coeficientes combinatórios, das integrais das funções simétricas de ordem $2i$ da segunda forma fundamental da distribuição complementar ao campo X. Estas integrais resultam ser independentes de X em espaços de curvatura seccional constante. Deste modo conseguimos dizer que nas esferas $\mathbb{S}^{2k+1}$, o volume de um campo unitário é sempre maior que o volume do campo Norte-Sul.

O teorema principal do volume é aplicado também a espaços hiperbólicos compactos obtendo assim uma limitação não trivial do volume de um campo unitário.

ABSTRACT.

If X is a unit vector field on a Riemannian manifold M^n, its energy is defined as the energy of the section $X : M \to T^1M$ it determines. On the tangent bundle T^1M we consider the Sasaki metric. Similarly, the energy of a distribution of dimension q is the energy of the corresponding section of the bundle of q-planes tangents to M. The trivial minima of the energy functional are the parallel fields or the totally geodesic distributions with also totally geodesic complement. When these fields or distributions do not exist, as in the case for spheres $\mathbf{S}^{2k+1}$, $k > 1$, we study the critical points, local and global minima of the functional.

For vector fields we present a theorem giving a lower bound for the sum of the energies of n orthogonal fields. For distributions, we obtained a theorem on arbitrary manifolds which provides, when applied to spheres $\mathbf{S}^{2k+1}$ a lower bound for the energy functional. This lower bound is attained by the North-South foliation (with two singularities). We also show, with a variational analysis of the energy, that the Hopf fibrations $\mathbf{S}^3 \hookrightarrow \mathbf{S}^{4k+3}$ are unstable critical points.

The volume of a unit vector field is the volume of the image of the corresponding section of the unit tangent bundle, for the Sasaki metric. Again, the parallel fields are the trivial minima.

In this work, we prove that a lower bound for this volume is the sum, with certain combinatory coefficients, of the integrals of the $2i$ symmetric functions of the second fundamental form of the orthogonal distribution to the field X. It turns out that these integrals are independents of X in spaces of constant sectional curvature. So, we may say that in the spheres $\mathbf{S}^{2k+1}$ the volume of a vector field is always greater than the volume of the North-South field.

The main theorem on volumes is applied also to hyperbolic compact spaces, giving a non-trivial lower bound of the volume of unit fields.

A meu pai, Antonio, por seu apoio de sempre. Obrigado.

Agradecimentos

A matemática mais do que uma ciência exata é uma ciência linda. Mesmo sem saber isto, anos atrás, resolvi estudar matemática e depois fazer um doutorado.

Meus primeiros passos dentro da pós-graduação foram dados ao lado do prof. Antonio Naveira na Universidade de Valência. Sua desmensurada vontade de trabalhar na pesquisa dá fôlego a qualquer aluno distraído como eu.

Pensei em me mover um pouco e aqui eu vim parar. Devo muito a meu orientador Fabiano Brito, um bom amigo com quem falo muito de matemática. Papos que sempre são importantíssimos para desenvolver qualquer trabalho científico.

Nestes três anos e meio no Brasil tenho muito que agradecer. Com Guillermo convivi todo este tempo. Amizades como estas ensinam muito. Guillermo, te desejo o melhor nesta nova fase de tua vida, o futuro.

Me senti bem acolhido pelo povo brasileiro. Lucia Ikemoto é a primeira responsável por eu dizer isso. Você me ajudou muito em muitas circunstâncias. Jair, Orlando e Henrique, já comecei uma lista de nomes que não sei quando vai acabar. Juaci e Marcio que moram naquela terra linda. Armando com essa mistura de humor e seriedade. Zé e Irene que depois de tudo se converteram em meu exemplo de casal formado de diferentes culturas. Daniel, Liane, Bárbara e Ronaldo, excelentes pessoas. Raul, Marcela, Kiko e Rosa, o pouco espaço não permite escrever um detalhe de cada um.

Do outro lado do oceano também muitas pessoas me deram força. Juan me fez ver que as palavras *em dimensão n* são mais fáceis de dizer do que explicar. Ernesto e Paqui são outros aos que devo pelo menos um grande abraço. E minha família, que sempre me apoiou plenamente dentro de grandes saudades.

Deixei para o final a Cecilia porque no fim desta passagem por América se converteu no meu ponto de referência. Vivo melhor desde então e não sei agradecê-la o suficiente.

As coisas boas nestes anos em São Paulo não vou esquecer, com certeza. Levo um pouco de todos vocês no meu coração. Bom, isto aqui são os agradecimentos e não uma biografia nem uma triste carta de despedida.

A todos aos aqui citado e a aqueles outros que me ajudaram só posso dizer... muchas gracias.

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é investigar dois funcionais, energia e volume, que aparecem de um modo natural dentro da geometria riemanniana.

A energia de uma aplicação diferenciável entre variedades riemannianas, ver [EL], tem sido amplamente estudada. O estudo de pontos críticos da energia de funções, as chamadas aplicações harmônicas, e a estabilidade destes entre espaços com alguma particularidade é, sem dúvida, um tema interessante.

Um campo de vetores pode ser visto como uma aplicação entre a própria variedade e seu espaço tangente. Assumimos que nossa variedade M é riemanniana, fechada (compacta e sem bordo) e orientável. Nestas condições, chamamos energia do campo de vetores X à energia da aplicação $X : M \to TM$. O estudo da energia se restringe ao estudo de aplicações entre M e TM que sejam seções. Numa segunda restrição exigimos que o campo seja unitário. A existência de campos unitários em M implica que a característica de Euler tem de ser zero.

Todo campo unitário pode ser perturbado localmente de modo que o novo campo tenha maior energia. Com isto, ao procurar pontos críticos estamos buscando mínimos pelo menos de caráter local.

Como veremos nesta monografia, os mínimos triviais da energia são os campos paralelos. Quando a variedade não admite a definição de campos paralelos, tentamos obter os campos de menor energia ou pelo menos obter informação sobre estes.

Com a motivação de campos de vetores, consideramos o mesmo problema em dimensão maior, isto é, consideramos a energia de distribuições. Uma distribuição de dimensão q é uma seção da grassmanniana de q-planos tangentes a M. Chamamos energia da distribuição a energia desta seção. De novo, os pontos críticos desta energia são as distribuições que definem uma estrutura local de produto riemanniano, i.e. que tanto a distribuição considerada como a distribuição ortogonal são totalmente geodésicas.

Nas esfera de dimensão ímpar maior ou igual a 3 não existem campos unitários paralelos ou distribuições que determinem localmente um produto. Estes agradáveis espaços foram o primeiro objetivo de nosso estudo. Mesmo assim, vários resultados são provados em geral e depois aplicados às esferas.

Para campos de vetores já são conhecidos alguns resultados em S^3 [**Wi2**] [**B**] e também em S^{2k+1} [**Wo**]. No Capítulo II é demonstrado um teorema que dá uma limitação inferior da soma das energias de n campos ortogonais, Teorema II.10. Esta limitação é a integral da curvatura escalar da variedade a menos de uma constante.

No Capítulo III fazemos um extenso estudo da energia de distribuições. Conseguimos caracterizar os pontos críticos, Proposição III.8. As fibrações de Hopf são o exemplo de referência e conseguimos provar na Proposição III.9 que estas fibrações são pontos críticos da energia. Com a segunda derivada do funcional e com uma variação específica mostramos no Teorema III.11 que as fibrações de Hopf são instáveis. Num análise global, conseguimos provar que a energia de uma distribuição integrável é sempre maior ou igual à integral da curvatura escalar cruzada da estrutura quase-produto a menos de uma constante, Teorema III.7.

Sem achar os mínimos da energia, os resultados apresentados sugerem que nas esferas de dimensão ímpar não existe um mínimo porém um ínfimo. O campo Norte-Sul e o de Pedersen, definido no Capítulo II, e suas generalizações a distribuições aparecem como objetos importantes do funcional energia. Particularmente os campos de Pedersen se apresentam como sérios candidatos a ser ínfimos da energia.

Dentro do tratamento dado ao funcional energia de distribuições é interessante incorporar uma correção em termos das normas das segundas formas fundamentais da estrutura quase-produto considerada. A energia corrigida, definida anteriormente para campos de vetores [**B**], é um funcional mais tratável que a energia. No Teorema III.6 será demonstrado que a energia corrigida nas esferas tem como mínimos as fibrações de Hopf. É este mínimo global que dá importância ao funcional energia corrigida.

O volume do campo de vetores [**GZ**] é também um conceito bem geométrico. Consideramos a subvariedade do espaço tangente determinada pela seção $X : M \to T^1M$. Chamamos volume de X ao volume desta subvariedade $X(M)$. Como no caso anterior procuramos os campos unitários de menor volume. Os mínimos triviais do volume são também os campos paralelos. Novamente o problema de mínimos é estudado nas esferas unitárias.

Em S^3 é conhecido que o campo de Hopf é o único mínimo [**GZ**] e que nas outras dimensões não é nem mínimo local [**J**]. As técnicas usadas para obter estes resultados são muito pesadas.

De um modo totalmente diferente, no Capítulo IV conseguimos estender os resultados de [**GZ**] para espaços de curvaturas seccional constante. No Teorema IV.5 conseguimos limitar inferiormente o valor do volume de um campo unitário pelas integrais das curvaturas $2i$-ésimas da distribuição complementar a X. Com este modo mais natural de tratar o funcional volume, conseguimos identificar os campos que atingem a limitação.

Particularizando o teorema principal do volume às esferas, obtemos uma limitação que depende somente da dimensão. Em S^3 o resultado de [GZ] segue fácil. Para as outras esferas, apoiando-nos em resultados conhecidos, mostramos na Proposição IV.15 que não existem campos unitários globalmente definidos que atinjam esta nova limitação.

É importante também o fato de que obtemos uma limitação não trivial do volume em espaços de curvatura seccional constante negativa, Teorema IV.17. O conjunto deste espaços hiperbólicos compactos é muito rico e amplo.

Em S^{2k+1}, o defeito em termos de volume que todo campo unitário tem em relação a ser paralelo, isto é, a diferença entre o valor mínimo trivial e o valor da nova limitação aqui obtida, tem um caráter topológico. Como será mostrado no Teorema IV.16, a nova limitação pode ser vista como uma integral que envolve a forma de Euler do subfibrado definido pelo ortogonal ao campo X em S^{2k+1}.

Finalmente, o caráter natural da definição dos funcionais energia e volume fazem com que os pontos críticos, os mínimos ou ínfimos sejam campos unitários ou distribuições geometricamente distinguidos.

CAPíTULO I

Preliminares

I.1. Métrica de Sasaki

Neste capítulo vamos descrever a métrica de Sasaki. Esta métrica é, talvez, mais conhecida na variedade tangente mas pode-se definir do mesmo modo na variedade de q-planos tangentes.

Para definir a métrica de Sasaki precisamos de certa notação e de alguma definição básica que passamos a enunciar.

I.1.1. A variedade G(q,M). Seja (M^n, g) uma variedade compacta riemanniana e orientada de dimensão $n = p+q$. Denotamos por ∇ a conexão de Levi-Civita de g. Seja $G(q, M)$ a variedade de Grassmann de q-planos orientados tangentes a M definida por:

$$G(q, M) = \bigcup_{x \in M} G(q, T_x M)$$

onde $G(q, T_x M)$ é a grassmanniana de q-planos orientados no espaço euclidiano $T_x M$.

Descrevemos um ponto de $G(q, T_x M)$ como um multivetor. Isto é, para cada $\xi \in G(q, T_x M)$ pegamos $\{v_\alpha\}_{\alpha=1}^q$ uma base ortonormal e orientada do plano e identificamos ξ com $v_1 \wedge \cdots \wedge v_q$. O q-vetor $\xi = v_1 \wedge \cdots \wedge v_q$ pertence à álgebra exterior de $T_x M$ de grau q, $\Lambda^q(T_x M)$. Somente os q-vetores unitários e decomponíveis (também chamados simples) de $\Lambda^q(T_x M)$ representam um q-plano.

Em cada $G(q, T_x M)$ temos um produto escalar induzido da métrica de $\Lambda^q(T_x M)$. Denotamos este produto pela mesma letra que a métrica em M, g. Assim para

$$\xi = v_1 \wedge \cdots \wedge v_q \quad \text{e} \quad \eta = w_1 \wedge \cdots \wedge w_q$$

temos

$$g(\xi, \eta) = \det\big(g(v_i, w_j)_{1 \leq i,j \leq q}\big).$$

Seja $\pi : G(q, M) \to M$ a projeção do fibrado. Para uma carta $(U, (z^a))$ de M, seja $\big(\pi^{-1}(U), \varphi = (z^a, \xi^{a_1 \cdots a_q})\big)$ uma carta de $G(q, M)$, onde para

$$x \in U \quad \text{e} \quad \xi = \sum_{1 \leq a_1 < \cdots < a_q \leq n} \xi^{a_1 \ldots a_q} \frac{\partial}{\partial z^{a_1}}(x) \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{a_q}}(x)$$

a aplicação coordenada φ está dada por

$$\varphi(x,\xi) = \left(z^1(x), \dots, z^n(x), \xi^{1,\dots,q}, \dots, \xi^{p+1,\dots,n}\right).$$

Freqüentemente esqueceremos o ponto base $x \in M$ e diremos que ξ pertence a $G(q,M)$ quando para ser exatos deveríamos dizer que (x,ξ) pertence a $G(q,M)$.

I.1.2. O fibrado tangente $\tilde{\pi} : \mathrm{TG(q,M)} \to \mathrm{G(q,M)}$. Antes de mais nada, especificamos umas coordenadas locais para o espaço $TG(q,M)$. Denotamos por $\tilde{\pi}$ a projeção do fibrado tangente a $G(q,M)$, $\tilde{\pi} : TG(q,M) \to G(q,M)$. Seja $(U,(z^a))$ uma carta de M ao redor de $x \in M$. Para um ponto $(x,\xi) \in G(q,M)$ e η um vetor tangente a (x,ξ),

$$\text{(I.1)} \quad \eta = \sum_{a=1}^{n} X^a \frac{\partial}{\partial z^a}(\xi) + \sum_{1 \le a_1 < \dots < a_q \le n} \eta^{a_1 \dots a_q} \frac{\partial}{\partial \xi^{a_1 \dots a_q}}(\xi) \in T_\xi G(q,M),$$

a carta $\left(\tilde{U} = \tilde{\pi}^{-1}(\pi^{-1}(U)), \psi\right)$ é dada por

$$\psi(\xi,\eta) = \left(z^1(x), \dots, z^n(x), \xi^{1,\dots,q}, \dots, \xi^{p+1,\dots,n}, X^1, \dots \right.$$
$$\left. \dots, X^n, \eta^{1,\dots,q}, \dots, \eta^{p+1,\dots,n}\right).$$

Define-se o subespaço vertical de $T_\xi G(q,M)$ como $\mathfrak{V}_\xi = Ker(d\pi)_\xi$. O $\mathfrak{V}_\xi$ é o subespaço de vetores tangentes a ξ que provêm de curvas $\xi(t)$ em $G(q,T_xM)$, i.e. de curvas que $\forall t \quad \pi(\xi(t)) = \pi(\xi) = x$. Nas coordenadas locais descritas antes temos

$$\mathfrak{V}_\xi = T_\xi G(q,T_xM) = \left\{ (z^a, \xi^{a_1 \dots a_q}, 0, \eta^{a_1 \dots a_q}) \right\}.$$

Existem muitos complementares algébricos de $\mathfrak{V}_\xi$ em $T_\xi G(q,M)$, mas pode-se definir um naturalmente usando a conexão de Levi-Civita de M. Isto é feito do seguinte modo.

Para um vetor η tangente a $(x,\xi) \in G(q,M)$ como em (I.1) seja $\xi(t) = \sum \xi^{a_1 \dots a_q}(t) \frac{\partial}{\partial z^{a_1}}(t) \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{a_q}}(t)$ o transporte paralelo de ξ ao longo da curva integral de $X = \sum X^a \frac{\partial}{\partial z^a}$ que passa por x. A condição $\nabla_X \xi(t)|_{t=0} = 0$ implica que

$$\sum_{1 \le a_1 < \dots < a_q \le n} \xi^{a_1 \dots a_q}(0)' \frac{\partial}{\partial z^{a_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{a_q}} +$$
$$+ \xi^{a_1 \dots a_q} \nabla_X \left(\frac{\partial}{\partial z^{a_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{a_q}} \right) = 0.$$

Dizemos que η é o levantamento horizontal de X em ξ se as coordenadas $\eta^{a_1 \dots a_q}$ de (I.1) provêm da variação descrita acima, isto é, se $\eta^{a_1 \dots a_q} = \xi^{a_1 \dots a_q}(t)'|_{t=0}$.

O subespaço horizontal $\mathfrak{H}_\xi$ de $T_\xi G(q,M)$ é o espaço de todos os levantamentos horizontais dado por

$$\mathfrak{H}_\xi = \Big\{ (z^a, \xi^{a_1\ldots a_q}, X^a, \eta^{a_1\ldots a_q}) \in T_\xi G(q,M) /$$
$$\sum_{1\le a_1<\cdots<a_q\le n} \eta^{a_1\ldots a_q} \frac{\partial}{\partial z^{a_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{a_q}} = -\xi^{a_1\ldots a_q} \nabla_X \Big(\frac{\partial}{\partial z^{a_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{a_q}} \Big) \Big\}.$$

Observamos que $\mathfrak{H}_\xi \cap \mathfrak{V}_\xi = \{0\}$ e também que

$$T_\xi G(q,M) = \mathfrak{H}_\xi \oplus \mathfrak{V}_\xi.$$

Um vetor $\eta \in T_\xi G(q,M)$ se decompõe com respeito a esta soma direta do seguinte modo,

$$\eta = (z^a, \xi^{a_1\ldots a_q}, X^a, \eta^{a_1\ldots a_q}) = \eta_{\mathfrak{H}} + \eta_{\mathfrak{V}} \qquad \text{onde}$$

$$\eta_{\mathfrak{H}} = \sum_{a=1}^{n} X^a \frac{\partial}{\partial z^a} - \sum_{a_1<\cdots<a_q} \xi^{a_1\ldots a_q} \nabla_X \left(\frac{\partial}{\partial z^{a_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{a_q}} \right)$$

e

$$\eta_{\mathfrak{V}} = \sum_{a_1<\cdots<a_q} \eta^{a_1\ldots a_q} \frac{\partial}{\partial z^{a_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{a_q}} + \xi^{a_1\ldots a_q} \nabla_X \left(\frac{\partial}{\partial z^{a_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{a_q}} \right).$$

Definição I.1. Define-se o conector $\mathcal{K}$ da conexão de Levi-Civita ∇ de M, $\mathcal{K} : TG(q,M) \to G(q,M)$ como

$$\mathcal{K}(\xi,\eta) = \sum_{1\le a_1<\cdots<a_q\le n} \eta^{a_1\ldots a_q} \frac{\partial}{\partial z^{a_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{a_q}} +$$
$$+ \xi^{a_1\ldots a_q} \nabla_X \left(\frac{\partial}{\partial z^{a_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial z^{a_q}} \right).$$

Como foi mencionado antes, o subespaço vertical $\mathfrak{V}$ é o espaço tangente à subvariedade $G(q,T_xM)$. Como $G(q,T_xM)$ é um espaço vetorial, podemos identificar seu espaço tangente com ele mesmo, i.e. $\mathfrak{V}_\xi = T_\xi G(q,T_xM) = G(q,T_xM)$. A aplicação $\mathcal{K}$ faz esta identificação natural da componente vertical de η como ponto de $G(q,M)$. Temos as seguintes propriedades de $\mathcal{K}$.

Proposição I.2 ([S]). *O conector $\mathcal{K} : TG(q,M) \to G(q,M)$ verifica*
1) $\pi \circ \mathcal{K} = \pi \circ \tilde{\pi}$ *e* $\pi \circ \mathcal{K} = \pi \circ d\pi$.
2) *Para $v \in T_xM$ e uma seção $\xi : M \to G(q,M)$ temos*

$$\mathcal{K}(d\xi(v)) = \nabla_v \xi.$$

I.1.3. Definição da métrica de Sasaki. Uma vez dividido o espaço tangente à grassmaniana $T_\xi G(q,M) = \mathfrak{H}_\xi \oplus \mathfrak{V}_\xi$, usaremos π e $\mathcal{K}$ para tomar a parte horizontal e vertical, respectivamente, e medir assim vetores em $T_\xi G(q,M)$.

Definição I.3. Para $\eta_1, \eta_2 \in T_\xi G(q, M)$ definimos

$$g_S(\eta_1, \eta_2) = g\big(d\pi(\eta_1), d\pi(\eta_2)\big) + g\big(\mathcal{K}(\eta_1), \mathcal{K}(\eta_2)\big). \tag{I.2}$$

A g_S define uma métrica riemanniana sobre $G(q, M)$ e é chamada métrica de Sasaki.

A métrica g_S converte a projeção $\pi : G(q, M) \to M$ em uma imersão riemanniana. Da definição pode-se observar que o espaço vertical $\mathfrak{V}$ e o horizontal $\mathfrak{H}$ são ortogonais.

I.2. Fibrações de Hopf

Existem três tipos diferentes de fibrações de Hopf dependendo da dimensão da fibra: $\mathbf{S}^1 \hookrightarrow \mathbf{S}^{2n+1}$, $\mathbf{S}^3 \hookrightarrow \mathbf{S}^{4n+3}$ e $\mathbf{S}^7 \hookrightarrow \mathbf{S}^{15}$.

Considere-se a esfera $\mathbf{S}^{2n+1} \subset \mathbb{R}^{2n+2} \cong \mathbb{C}^{n+1}$. Os diferentes modos de identificar $\mathbb{R}^{2n+2}$ com os complexos $\mathbb{C}^{n+1}$ darão distintas fibrações da esfera mas, evidentemente, todas elas congruentes.

Considerem-se todas as retas complexas em $\mathbb{C}^{n+1}$ que passam pela origem. Todo ponto de $\mathbf{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ pertence a uma única destas retas. As retas complexas são subespaços lineares reais de dimensão 2 em $\mathbb{R}^{2n+2}$.

Definem-se as fibras como a intersecção destes 2-planos com $\mathbf{S}^{2n+1}$. Por todo ponto passa uma e só uma fibra. Este procedimento define a fibração de Hopf $\mathbf{S}^1 \hookrightarrow \mathbf{S}^{2n+1}$. As fibras são círculos máximos e portanto subvariedades totalmente geodésicas de $\mathbf{S}^{2n+1}$. As fibras representam o conjunto de direções complexas em $\mathbb{C}^{n+1}$ e portanto o espaço base da fibração é o projetivo complexo $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$.

Denotando por $\mathbf{I}$ a estrutura quase-complexa de $\mathbb{C}^{n+1}$, a reta complexa que define a fibra que passa por $x \in \mathbf{S}^{2n+1}$ tem $\{x, \mathbf{I}x\}$ como vetores geradores em $\mathbb{R}^{2n+2}$. Como x é normal à esfera, $\mathbf{I}x$ será sempre tangente à esfera. Assim $\forall x \in \mathbf{S}^{2n+1}$ o vetor $\mathbf{I}x$ é o vetor tangente à fibra.

A distribuição complementar à fibração de Hopf, $(\mathbf{I}x)^\perp$, não é integrável. Para ver isto pegamos uma base de $\mathbb{R}^{2n+2}$ adaptada à esfera, à fibração e também à estrutura quase-complexa: $\{x, \mathbf{I}x, e_1, \mathbf{I}e_1, e_2, \dots \dots, e_n, \mathbf{I}e_n\}$. Para calcular $\nabla_{e_i}(\mathbf{I}x)$ primeiro derivamos em $\mathbb{R}^{2n+2}$ onde $\mathbf{I}$ é paralela:

$$D_{e_i}(\mathbf{I}x) = \mathbf{I}(D_{e_i}x) = \mathbf{I}e_i.$$

Assim, $\forall i = 1, \dots, n$,

$$\nabla_{e_i}\mathbf{I}x = \mathbf{I}e_i \in T\mathbf{S}^{2n+1}.$$

Com isto podemos calcular a segunda forma fundamental A de $(\mathrm{I}x)^\perp$. A matriz associada a A é:

$$\text{(I.3)} \qquad \mathsf{A} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & \cdots \\ 0 & \cdots \end{matrix} & & \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & \cdots \\ 0 & \cdots \end{matrix} & \\ & & \ddots & \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \end{matrix} & & \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Como A não é simétrica, a distribuição $(\mathrm{I}x)^\perp$ não é integrável.

Para definir a fibração de Hopf em S^{4n+3} com fibra de dimensão 3, basta considerar a esfera dentro do espaço quaterniônico $S^{4n+3} \subset \mathbb{H}^{n+1}$ e pegar a intersecção da esfera com as retas quaterniônicas que passam pela origem (subespaços reais de dimensão 4 em $\mathbb{R}^{4n+4}$). Definimos assim a fibração $S^3 \hookrightarrow S^{4n+3} \to \mathbb{HP}^n$. Como no caso complexo, a distribuição complementar à fibração não é integrável.

A definição da fibração de Hopf $S^7 \hookrightarrow S^{15} \to \mathrm{CaP}$ não segue o mesmo padrão. Se tentamos fazer a mesma construção que antes, percebemos que o que seriam as retas de Cayley em Ca^2 não são Ca-subespaços lineares e que têm intersecção não trivial. Isto acontece porque a álgebra dos números de Cayley não é associativa.

Assim se $(a_1, a_2) \in S^{15} \subset \mathrm{Ca}^2 (\cong \mathbb{R}^{16})$ denotemos por $L_{(a_1,a_2)}$ a "reta" de Cayley que passa por (a_1, a_2),

$$L_{(a_1,a_2)} = \{(p,q) \in \mathrm{Ca}^2 / \exists \alpha \in \mathrm{Ca}, (p,q) = \alpha(a_1,a_2) = (\alpha a_1, \alpha a_2)\}.$$

Evidentemente $(a_1, a_2) \in L_{(a_1,a_2)}$ mas se outro $(b_1, b_2) = \alpha(a_1, a_2) = (\alpha a_1, \alpha a_2) \in L_{(a_1,a_2)}$ pode acontecer que $\beta(b_1, b_2) \notin L_{(a_1,a_2)}$ pois

$$\beta(b_1, b_2) = (\beta b_1, \beta b_2) = (\beta(\alpha a_1), \beta(\alpha a_2)) \neq \gamma(a_1, a_2),$$

mesmo com $\gamma = \beta\alpha$. Assim, $(b_1, b_2) \in L_{(a_1,a_2)} \cap L_{(b_1,b_2)}$ mas $L_{(a_1,a_2)} \neq L_{(b_1,b_2)}$. Tendo a mão a tabela de multiplicação de Cayley (ver por exemplo [E]) não é difícil obter exemplos deste fato.

Para construir a fibração de Hopf $S^7 \hookrightarrow S^{15}$ fazemos o seguinte. Seja $\alpha \in \mathrm{Ca}$ e sejam

$$\widetilde{L}_\alpha = \{(a,b) \in \mathrm{Ca}^2 / b = \alpha a\},$$
$$\widetilde{L}_\infty = \{(0,b) \in \mathrm{Ca}^2\}.$$

Estes subespaços também não são Ca-subespaços mas a diferencia dos anteriores, estes $\widetilde{L}_\alpha$ e $\widetilde{L}_\infty$ não tem intersecção em $\mathrm{Ca}^2 - \{(0,0)\}$. Em $L_{(a,b)}$ o ponto (a,b) determina a direção enquanto em $\widetilde{L}_\alpha$ o α determina a pendente. Trabalhando em $\mathbb{C}$ ou em $\mathbb{H}$ os dois tipos de conjuntos são equivalentes mas não quando trabalhamos em Ca.

Para definir as fibras em S^{15}, pegamos intersecção das linhas $\widetilde{L}_\alpha$ e $\widetilde{L}_\infty$ com a esfera.

Ao contrário das outras fibrações de Hopf, as fibras de $S^7 \hookrightarrow S^{15}$ não vêm determinadas pelas estruturas quase-complexas $\mathbf{I}_1, \ldots, \mathbf{I}_7$ induzidas pela multiplicação pela unidades imaginárias de Cayley. Se $x = (x_1, x_2) \in S^{15} \subset \mathrm{Ca}^2$ com $x \in \widetilde{L}_\alpha$, então $\mathbf{I}_1 x = (\mathbf{i}_1 x_1, \mathbf{i}_1 x_2)$ não tem porque pertencer a $\widetilde{L}_\alpha$ pois

$$x_2 = \alpha x_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{i}_1 x_2 = \mathbf{i}(\alpha x_1) \neq \alpha(\mathbf{i}_1 x_1),$$

e portanto $\mathbf{I}_1 x \notin \widetilde{L}_\alpha$.

As estruturas quase-complexas definidas em $\mathbb{C}^{n+1}$ e $\mathbb{H}^{n+1}$ serão fortemente usadas ao estudar o comportamento das fibrações de Hopf em relação ao funcional energia. Por isto, os teoremas expostos não poderão ser demonstrados do mesmo modo para a fibração $S^7 \hookrightarrow S^{15} \to \mathrm{CaP}$.

I.3. Laplaciano da conexão

Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana, compacta e orientada. Denotamos por ∇ a conexão de Levi-Civita de g. Usando o produto interno pontual do espaço tangente TM e a integração sobre M podemos definir um produto interno em $\mathcal{X}(M)$, o conjunto das seções do fibrado tangente $\pi : TM \to M$.

Sejam X e Y campos vetoriais sobre M, definimos

$$\langle\langle X, Y \rangle\rangle = \int_M g(X, Y)\nu,$$

onde ν é a n-forma volume de M. Se a variedade não for compacta deveríamos considerar seções C^∞ com suporte compacto.

Através deste produto definimos ∇^*, o adjunto de ∇ como

$$\langle\langle \nabla^* X, Y \rangle\rangle = \langle\langle X, \nabla Y \rangle\rangle.$$

Definição I.4. Seja X um campo vetorial sobre M. O laplaciano da conexão de X é a seção $\nabla^*(\nabla X)$.

O laplaciano da conexão também aparece na literatura matemática como *rough laplacian* mas neste trabalho será referido simplesmente como laplaciano.

Outro modo de definir o laplaciano é mediante o traço das segundas derivadas. Seja $\{e_a\}_{a=1}^n$ um referencial local ortonormal de M. A expressão

$$\sum_{a=1}^n \nabla_{e_a} \nabla_{e_a} X - \nabla_{\nabla_{e_a} e_a} X,$$

onde $X \in \mathcal{X}(M)$, é invariante.

Proposição I.5. *Se $X \in \mathcal{X}(M)$ temos*

$$\nabla^*\nabla X = -\Big(\sum_{a=1}^{n} \nabla_{e_a}\nabla_{e_a}X - \nabla_{\nabla_{e_a}e_a}X\Big).$$

DEMONSTRAÇÃO. Por definição, $\forall Y \in \mathcal{X}(M)$,

$$\langle\langle \nabla^*\nabla X, Y\rangle\rangle = \int_M g(\nabla X, \nabla Y)\nu = \sum_{a=1}^{n}\int_M g(\nabla_{e_a}X, \nabla_{e_a}Y)\nu =$$

$$= \sum_{a=1}^{n}\int_M \Big(\nabla_{e_a}\big(g(\nabla_{e_a}X, Y)\big) - g(\nabla_{e_a}\nabla_{e_a}X, Y)\Big)\nu.$$

Por outro lado, para X e Y fixos, seja $Z \in \mathcal{X}(M)$ definido por

$$g(Z, v) = g(\nabla_v X, Y) \qquad \forall v \in TM.$$

Assim, para um referencial local ortonormal $\{e_a\}_{a=1}^{n}$, a divergência de Z é

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} Z &= \sum_{a=1}^{n} g(\nabla_{e_a}Z, e_a) = \sum_{a,b=1}^{n} \nabla_{e_a}\big(g(Z, e_b)\big)\, g(e_b, e_a) + \\
&\quad + \sum_{a,b=1}^{n} g(Z, e_b) g(\nabla_{e_a}e_b, e_a) = \\
&= \sum_{a=1}^{n} \nabla_{e_a}\big(g(\nabla_{e_a}X, Y)\big) - \sum_{a,b=1}^{n} g(\nabla_{e_b}X, Y) g(\nabla_{e_a}e_a, e_b) = \\
&= \sum_{a=1}^{n} \Big(\nabla_{e_a}\big(g(\nabla_{e_a}X, Y)\big) - g(\nabla_{\nabla_{e_a}e_a}X, Y)\Big).
\end{aligned}$$

Portanto, usando o Teorema de Stokes

$$\langle\langle \nabla^*\nabla X, Y\rangle\rangle = \sum_{a=1}^{n}\int_M g(\nabla_{\nabla_{e_a}e_a}X - \nabla_{e_a}\nabla_{e_a}X, Y)\nu.$$

Como a igualdade é satisfeita $\forall Y \in \mathcal{X}(M)$ temos

$$\nabla^*\nabla X = \sum_{a=1}^{n} -\nabla_{e_a}\nabla_{e_a}X + \nabla_{\nabla_{e_a}e_a}X.$$

□

O laplaciano pode-se definir analogamente para seções do fibrado tensorial, $\Lambda^q(M) \to M$.

CAPÍTULO II

Energia de campos de vetores

II.1. Introdução

A energia de uma aplicação diferenciável entre duas variedades riemannianas $f : M \to N$ é dada por [**EL**]:

$$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{2}\int_M \|df\|^2\nu,$$

onde ν é a forma volume de M. Para evitar problemas com o sinal consideramos M orientada. Para garantir que a integral converge ou bem pedimos que M seja compacta ou só consideramos funções de suporte compacto.

Um campo de vetores X sobre uma variedade riemanniana pode ser visto como uma simples aplicação diferenciável entre a variedade e seu espaço tangente $X : M \to TM$. Em TM temos definida a métrica de Sasaki (ver Capítulo I) e portanto podemos calcular a energia de X.

Definição II.1. Seja X um campo de vetores sobre uma variedade riemanniana compacta e orientada M^n. A energia de X é a energia da aplicação $X : (M, g) \to (TM, g_S)$.

No Capítulo I foi descrita a métrica de Sasaki para o fibrado de q-planos orientados. Agora, com $q = 1$, podemos calcular $\|dX\|$ a partir da definição de g_S.

Seja $\{e_a\}_{a=1}^n$ um referencial local ortonormal de M. De (I.2),

$$\begin{aligned} &g_S(dX(e_a), dX(e_a)) = \\ &\qquad = g\big(d\pi(dX(e_a)), d\pi(dX(e_a))\big) + g\big(\mathcal{K}(dX(e_a)), \mathcal{K}(dX(e_a))\big), \end{aligned}$$

onde $\pi : TM \to M$ é a projeção do fibrado e $\mathcal{K} : TTM \to TM$ é o conector da conexão de Levi-Civita ∇.

Como X é uma seção, $d\pi \circ dX = d(\pi \circ X) = d(\mathrm{Id}_M) = \mathrm{Id}_{TM}$. Também sabemos pela Proposição I.2 que $\mathcal{K}(dX(e_a)) = \nabla_{e_a}X$. Portanto,

$$\sum_{a=1}^n g_S\big(dX(e_a), dX(e_a)\big) = \sum_{a=1}^n g\left(e_a, e_a\right) + g\left(\nabla_{e_a}X, \nabla_{e_a}X\right).$$

Proposição II.2. *A energia de X é dada pela expressão*

$$\mathcal{E}(X) = \frac{n}{2}\mathrm{vol}(M) + \frac{1}{2}\int_M \sum_{a=1}^n \|\nabla_{e_a}X\|^2\nu,$$

onde $\{e_a\}_{a=1}^n$ *é um referencial local ortonormal de* M.

Com esta proposição podemos ver que

$$\mathcal{E}(X) \geq \frac{n}{2}\text{vol}(M).$$

Restringimos o estudo da energia a campos unitários pelo seguinte fato. Para qualquer campo vetorial X podemos definir $X_k = \frac{1}{k}X$ e é fácil ver que $\mathcal{E}(X_k) \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{n}{2}\text{vol}(M)$. Isto é, quando problema é considerado em $\mathcal{X}(M)$ todo campo é instável. Daqui para frente consideraremos o funcional energia definido para campos de vetores unitários, $\mathcal{E} : \mathcal{X}^1(M) \to \mathbb{R}$.

O valor mínimo da energia, $\frac{n}{2}\text{vol}(M)$, é atingido se e somente se X é paralelo. Assim o funcional $\mathcal{E}$ tem um mínimo trivial. Podemos dizer que a energia mede por quanto se afasta o campo de vetores de ser paralelo.

Existem muitas variedades compactas que não admitem a definição de campos paralelos. Nestas circunstâncias podemos nos perguntar se existe uma limitação inferior para a energia melhor que $\frac{n}{2}\text{vol}(M)$. Podemos nos perguntar quais são os pontos críticos do funcional e se tem um mínimo ou um ínfimo (talvez não único). A grosso modo, dizemos que os mínimo ou ínfimos são os campos melhor ordenados.

A existência de campos unitários globalmente definidos em uma variedade compacta implica que a característica de Euler é zero. Em variedades de dimensão ímpar isto sempre acontece.

Nosso primeiro objetivo foi estudar a energia nas esferas de dimensão ímpar maior que 3 mas vários dos teoremas aqui expostos são válidos em variedades arbitrárias. Nestas esferas não existem campos paralelos mas temos um exemplo básico de campo de vetores que a priori está muito bem ordenado. O ponto de referência é o campo de vetores unitário tangente á fibração de Hopf que foi definida no Capítulo I.

Pode-se encontrar na literatura matemática outro funcional bem parecido chamado *total bending* [**Wi1**]. O total bending $\mathcal{B}$ é uma renormalização da energia:

$$\mathcal{B}(X) = \frac{1}{(n-1)\text{vol}(\mathbb{S}^n)} \int_M \|\nabla X\|^2 =$$
$$= \frac{2}{(n-1)\text{vol}(\mathbb{S}^n)}\left(\mathcal{E}(X) - \frac{n}{2}\text{vol}(M^n)\right).$$

II.2. Resultados conhecidos

Wiegmink [**Wi1**] estudou a energia de campos de vetores unitários no toro bidimensional. Ele achou em cada classe de homotopia um mínimo para a energia.

Também é conhecida uma caracterização dos pontos críticos da energia.

Teorema II.3 ([Wi1] e [Wo]). *Um campo campo unitário X em M^n é ponto crítico de $\mathcal{E}$ se e somente se*

$$\nabla^*\nabla X = \|\nabla X\|^2 X \tag{II.1}$$

onde $\nabla^*\nabla X$ é o laplaciano de X definido no Capítulo I.

DEMONSTRAÇÃO. Seja I um intervalo real contendo o zero e seja uma aplicação diferenciável $\varphi : M \times I \to T^1M$ de modo que $\varphi(x,0) = X(x)$. Denotamos por $X_t(x) = \varphi(x,t)$. A X_t é uma variação do campo X através de campos unitários. Queremos calcular a variação de $\mathcal{E}$ para uma X_t qualquer.

Denotamos por $\{e_a\}_{a=1}^n$ a extensão ao espaço $M \times I$ de uma base local ortonormal em M. Seja ∂t a extensão a $M \times I$ de um vetor unitário em TI. Abusando de notação, denotamos a conexão em $M \times I$ por ∇. Assim, partindo da expressão da energia da Proposição II.2

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{E}(X_t)}{\partial t} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_M \|\nabla X_t\|^2 \nu = \frac{1}{2}\int_M \sum_{a=1}^n \frac{\partial}{\partial t} g(\nabla_{e_a} X_t, \nabla_{e_a} X_t)\nu = \\ &= \int_M \sum_{a=1}^n g(\nabla_{\partial t}\nabla_{e_a} X_t, \nabla_{e_a} X_t)\nu = \\ &= \int_M \sum_{a=1}^n g(\nabla_{e_a}\nabla_{\partial t} X_t, \nabla_{e_a} X_t)\nu.\end{aligned}$$

Na última igualdade podemos trocar a ordem das derivadas ∇_{e_a} e $\nabla_{\partial t}$ pois a variedade $M \times I$ é um produto riemanniano. Agora fazemos uso da propriedade que define o laplaciano,

$$\int_M \sum_{a=1}^n g(\nabla_{e_a}\nabla_{\partial t} X_t, \nabla_{e_a} X_t)\nu = \int_M g(\nabla_{\partial t} X_t, \nabla^*\nabla X_t)\nu.$$

Então,

$$\left.\frac{\partial \mathcal{E}(X_t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \int_M g(\nabla_{\partial t} X_t|_{t=0}, \nabla^*\nabla X)\nu.$$

O campo X será ponto crítico de $\mathcal{E}$ se e somente se $\left.\frac{\partial \mathcal{E}(X_t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$ para qualquer X_t. Então, X será ponto crítico se e somente se para qualquer variação temos $g(\nabla_{\partial t} X_t|_{t=0}, \nabla^*\nabla X) \equiv 0$. Como X é unitário e a variação é feita entre campos unitários, sabemos que o vetor diretor da variação V,

$$V = \left.\frac{\partial X_t}{\partial t}\right|_{t=0},$$

é ortogonal a X. Portanto X será ponto crítico se e somente se o laplaciano tem a direção do X, isto é, se

$$\nabla^*\nabla X = fX \quad \text{com } f \in C^\infty(M).$$

É fácil calcular o valor da função f,

$$f = g(\nabla^*\nabla X, X) = \sum_{a=1}^{n} -g(\nabla_{e_a}\nabla_{e_a}X, X) + g(\nabla_{\nabla_{e_a}e_a}X, X) =$$

$$= \sum_{a=1}^{n} g(\nabla_{e_a}X, \nabla_{e_a}X) = \sum_{a=1}^{n} \|\nabla_{e_a}X\|^2 = \|\nabla X\|^2.$$

□

NOTA. Se a variação de X fosse em $\mathcal{X}(M)$ e não em $\mathcal{X}^1(M)$ o vetor diretor da variação V poderia ter componente não nula na direção de X. Neste caso, X seria ponto crítico se e somente se $\nabla^*\nabla X = 0$ e como X é unitário isto implica que $\nabla X \equiv 0$, i.e. os pontos críticos serão os campos paralelos (mínimos triviais).

NOTA. Em [GM] a autora determina uma condição tensorial para que um campo de vetores seja ponto crítico da energia. Esta condição é pontual e portanto não precisamos assumir compacidade. Quando a variedade é compacta o teorema de caracterização de [GM] e o aqui exposto coincidem.

Teorema II.4 ([Wi2] e [Wo]). *Os campos de Hopf em S^{2n+1} são pontos críticos da energia $\forall n \geq 1$.*

A estabilidade dos campos de Hopf como pontos críticos foi estudada em [Wi2] e em [Wo].

Teorema II.5 ([Wi2]). *Os campos de Hopf em S^3 são mínimos entre os campos que, escolhendo como base do tangente a formada pela estruturas quaterniônicas de $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$, tenha como coeficientes polinômios quadráticos homogêneos e harmônicos de $\mathbb{R}^4$.*

Deste teorema ainda não se pode afirmar que os campos de Hopf são mínimos absolutos da energia em S^3. Para as outras esferas temos,

Teorema II.6 ([Wo]). *Os campos de Hopf em S^{2n+1} são instáveis quando $n > 1$.*

Para a demonstração deste teorema foi calculado o hessiano da energia. Mesmo em [Wo] um detalhe da prova está errado, o teorema enunciado continua sendo certo.

Com técnicas completamente diferentes às de Wiegmink e Wood, Brito provou o seguinte

Teorema II.7 ([B]). *O campo de Hopf em S^3 é o único mínimo da energia.*

Para isto foi introduzido o funcional energia corrigida.

Definição II.8. Seja X um campo unitário em M^n, riemanniana e compacta. A energia corrigida é:

$$\mathcal{D}(X) = \int_M \left(\|\nabla X\|^2 - (n-1)(n-3)\|\vec{H}_{X^\perp}\|^2 \right) \nu$$

onde para um referencial ortonormal adaptado $\{e_1, \ldots e_{n-1}, e_n = X\}$, $\vec{H}_{X^\perp} = \frac{-1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} g(\nabla_{e_i}X, e_i)e_i$ é o vetor curvatura média da distribuição complementar a X.

O teorema principal de [**B**] é,

Teorema II.9 ([**B**]). *A energia corrigida em M^n está limitada por,*

$$\mathcal{D}(X) \geq \frac{1}{n-2}\int_M Ricci(X)\nu,$$

onde $Ricci(X)$ é a curvatura de Ricci de X. Se $n > 3$, a igualdade é satisfeita se e somente se X é totalmente geodésico e conforme.

NOTA. Quando o grupo 1-paramétrico de difeomorfismos que todo campo vetorial define é formado por aplicações conformes, então o campo é chamado *conforme*. Uma condição para isto acontecer pode ser dada em termos da segunda forma fundamental da distribuição complementar a X, $h_{ij} = -g(\nabla_{e_i}X, e_j)$ onde os $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$ são ortonormais e também ortogonais a X. Assim um campo X é conforme se e somente se

$$h_{ii} = h_{jj} \quad \forall i, j = 1, \ldots, n-1 \quad \text{e} \quad h_{ij} = -h_{ji} \quad i \neq j.$$

Esta condição é também equivalente a

$$\mathcal{L}_X g(Y, Z) = \lambda g(Y, Z) \quad \forall Y, Z \perp X \quad \text{e} \quad \lambda \in C^\infty(M),$$

onde $\mathcal{L}_X$ é a derivada de Lie na direção de X. Os campos de Killing são campos conformes com $\lambda \equiv 0$.

Notar que para a dimensão 3, a energia corrigida é igual a energia *pura*, $\mathcal{D} = \mathcal{E}$. Pode-se comprovar que os campos de Hopf são os únicos que satisfazem as condições de minimização do Teorema II.9.

II.3. Soma da energia de n campos

Teorema II.10. *Seja M^n, $n > 4$, uma variedade riemanniana compacta e paralelizável. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ n-campos de vetores unitários e mutuamente ortogonais. Seja τ_M a curvatura escalar de M. Então,*

$$\sum_{a=1}^{n} \mathcal{E}(X_n) \geq \frac{1}{n-2}\int_M \tau_M \nu + \frac{n^2}{2}\mathrm{vol}(M).$$

A igualdade é satisfeita se e somente se todos os X_a definem distribuições complementares umbílicas.

DEMONSTRAÇÃO. Os vetores $\{X_a\}_{a=1}^n$ formam um referencial global de M. Denotamos por $h_{ab}^c = -g(\nabla_{e_a}e_c, e_b)$. Notar que como os X_a são ortogonais e unitários temos $h_{ab}^c = -h_{ac}^b$ quando $b \neq c$ e $h_{ab}^b = 0$. O integrando da energia de cada X_a é:

$$\|\nabla X_a\|^2 = \sum_{b,c\neq a}(h_{bc}^a)^2 + \sum_{b\neq a}(h_{ab}^a)^2 =$$

$$= \sum_{\substack{b\neq c\\ b,c\neq a}}(h_{bc}^a)^2 + \sum_{b\neq a}(h_{bb}^a)^2 + \sum_{b\neq a}(h_{aa}^b)^2.$$

Então temos 3 tipos de somandos. O primeiro é a parte não diagonal da segunda forma fundamental de $X_a^\perp$. O segundo é a parte diagonal e o terceiro é a componente da aceleração de X_a. Este último tipo de termos, os h_{aa}^b, pode-se acrescentar à parte simétrica de outros X_b. Assim somando os integrandos de todos os X_a,

$$\text{(II.2)}\quad \sum_{a=1}^n \|\nabla X_a\|^2 = \sum_{a=1}^n\Big(\sum_{\substack{b\neq c\\ b,c\neq a}}(h_{bc}^a)^2 + 2\sum_{b\neq a}(h_{bb}^a)^2\Big) \geq$$

$$\geq 2\sum_{a=1}^n\Big(\frac{1}{n-2}\sum_{\substack{b\neq c\\ b,c\neq a}}(h_{bc}^a)^2 + \sum_{b\neq a}(h_{bb}^a)^2\Big).$$

Notar que temos retirado $\frac{n-4}{n-2}$ vezes o $\sum(h_{bc}^a)^2$ com $b \neq c$. Para um a fixo, temos as seguintes igualdades:

$$\text{(II.3)}\quad \sum_{\substack{b<c\\ b,c\neq a}}(h_{bb}^a - h_{cc}^a)^2 = (n-2)\sum_{b\neq a}(h_{bb}^a)^2 - 2\sum_{\substack{b<c\\ b,c\neq a}}h_{bb}^a h_{cc}^a,$$

$$\text{(II.4)}\quad \sum_{\substack{b<c\\ b,c\neq a}}(h_{bc}^a + h_{cb}^a)^2 = \sum_{\substack{b\neq c\\ b,c\neq a}}(h_{bc}^a)^2 + 2\sum_{\substack{b<c\\ b,c\neq a}}h_{bc}^a h_{cb}^a.$$

Portanto somando (II.3) e (II.4),

$$\text{(II.5)}\quad \sum_{b\neq a}(h_{bb}^a)^2 + \frac{1}{n-2}\sum_{\substack{b\neq c\\ b,c\neq a}}(h_{bc}^a)^2 \geq$$

$$\geq \frac{2}{n-2}\sum_{\substack{b<c\\ b,c\neq a}}\left(h_{bb}^a h_{cc}^a - h_{bc}^a h_{cb}^a\right) = \frac{2}{n-2}\sigma_2(X_a^\perp),$$

onde $\sigma_2(X_a^\perp)$ é a segunda função simétrica da segunda forma fundamental da distribuição complementar a X_a (se $X_a^\perp$ fosse integrável, $\sigma_2(X_a^\perp)$ seria a segunda função simétrica elementar das curvaturas principais de $X_a^\perp$).

De (II.2) e (II.5)

$$\sum_{a=1}^{n} \|\nabla X_a\|^2 \geq \frac{4}{n-2} \sum_{a=1}^{n} \sigma_2(X_a^\perp).$$

Para obter a soma das energias precisamos integrar esta expressão. Em [W] é demonstrada a seguinte equação

$$\operatorname{div}\Big(\nabla_{X_a} X_a + \sum_{b\neq a} h^a_{bb} X_a\Big) = \sum_{b\neq a} c_{ab} - 2\sigma_2(X_a^\perp),$$

onde c_{ab} é a curvatura seccional do plano gerado por $\{e_a, e_b\}$. Com isto, obtemos que a integral de $2\sigma_2(X_a^\perp)$ é a integral da curvatura de *Ricci* de X_a (ver também [B]). Deste modo

$$\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{n} \mathcal{E}(X_a) \geq & \frac{2}{n-2} \int_M \sum_{a=1}^{n} \sigma_2(X_a^\perp)\nu + \frac{n^2}{2}\operatorname{vol}(M) = \\
= & \frac{1}{n-2} \int_M \sum_{a=1}^{n} Ricci(X_a)\nu + \frac{n^2}{2}\operatorname{vol}(M) = \\
= & \frac{1}{n-2} \int_M \tau_M \nu + \frac{n^2}{2}\operatorname{vol}(M).
\end{aligned}$$

Das desigualdades (II.2) e (II.5) pode-se observar que a igualdade é satisfeita se e somente se as $X_a^\perp$ fossem todas integráveis e umbílicas. □

As únicas esferas paralelizáveis são $\mathbf{S}^1, \mathbf{S}^3$ e $\mathbf{S}^7$. Então o Teorema II.10 aplicado à esfera fica:

Teorema II.11. *Em S^7 a soma das energias de 7 campos $\{X_a\}_{a=1}^7$ unitários globalmente ortogonais está limitada por*

$$\sum_{a=1}^{7} \mathcal{E}(X_a) \geq \frac{329}{10}\operatorname{vol}(S^7).$$

A igualdade é atingida se e somente se as distribuições complementares a cada X_a fossem formadas por esferas.

DEMONSTRAÇÃO. A curvatura escalar de $\mathbf{S}^7$ é constante igual a $\tau_{\mathbf{S}^7} = n(n-1) = 42$. Agora o resultado segue facilmente. □

II.4. Campos de Pedersen

O campo de Pedersen foi definido em [P] em relação ao funcional volume mas também é importante para o funcional energia.

Partindo de um vetor fixo v unitário e tangente à esfera no Polo Sul, define-se o campo de Pedersen em $x \in \mathbf{S}^n$, $\mathsf{P}(x)$, como o transporte paralelo de v ao longo da geodésica que une o Polo Sul com x. As geodésicas partindo do Polo Sul, que são círculos máximos, vão se encontrar todas no Polo Norte. Como o transporte paralelo depende da curva, não podemos definir um valor no Polo Norte. Assim o campo de Pedersen tem uma singularidade. Notar que se v é unitário, $\mathsf{P}(x)$ será também unitário $\forall x \in \mathbb{S}^n - \{\text{Polo Norte}\}$.

Como o transporte paralelo mantém o ângulo entre vetores, escolhendo n-vetores unitários e ortogonais tangentes no Polo Sul, conseguimos definir n campos de Pedersen em $\mathbb{S}^n - \{\text{Polo Norte}\}$ unitários e mutuamente ortogonais.

Para obter em coordenadas um campo de Pedersen raciocinamos do seguinte modo. Em $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ temos

$$\text{Polo Norte} = (0, \ldots, 0, 1) \quad \text{e} \quad \text{Polo Sul} = (0, \ldots, 0, -1).$$

Consideramos a projeção estereográfica centrada no Polo Norte.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{S}^n - \{\text{Polo Norte}\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_1, \ldots x_{n+1}) &\mapsto \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right) \end{aligned}$$

e sua inversa

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{S}^n - \{\text{Polo Norte}\} \\ (z_1, \ldots, z_n) &\mapsto \left(\frac{2z_1}{\sum_{i=1}^n z_i^2 + 1}, \ldots, \frac{2z_n}{\sum_{i=1}^n z_i^2 + 1}, \frac{\sum_{i=1}^n z_i^2 - 1}{\sum_{i=1}^n z_i^2 + 1}\right). \end{aligned}$$

Como $\varphi(\text{Polo Sul}) = 0$, consideramos a base canônica de $\mathbb{R}^n$, $\{e_i\}_{i=1}^n$, tangente em $0 \in \mathbb{R}^n$. O transporte paralelo desses $\{e_i\}$ em $\mathbb{R}^n$ serão os mesmos vetores só que em outro ponto. Como a carta φ é conforme (mantem os ângulos), o transporte paralelo na esfera pode ser calculado em $\mathbb{R}^n$ via φ. Definimos o campo de Pedersen P_i como o transporte paralelo na esfera do vetor $d\varphi_0^{-1}(e_i)$. Assim,

$$\mathsf{P}_i(x) = \frac{d\varphi^{-1}_{\varphi(x)}(e_i)}{\|d\varphi^{-1}_{\varphi(x)}(e_i)\|}.$$

Calculando as derivadas de φ^{-1} obtemos as coordenadas de $\mathsf{P}_i(x)$:

$$\begin{aligned} \mathsf{P}_1(x) &= \left(1 - \frac{x_1^2}{1 - x_{n+1}}, \frac{-x_1 x_2}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{-x_1 x_n}{1 - x_{n+1}}, x_1\right) \\ \mathsf{P}_2(x) &= \left(\frac{-x_1 x_2}{1 - x_{n+1}}, 1 - \frac{x_2^2}{1 - x_{n+1}}, \frac{-x_2 x_3}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{-x_2 x_n}{1 - x_{n+1}}, x_2\right) \\ &\vdots \\ \mathsf{P}_n(x) &= \left(\frac{-x_1 x_n}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{-x_{n-1} x_n}{1 - x_{n+1}}, 1 - \frac{x_n^2}{1 - x_{n+1}}, x_n\right). \end{aligned} \tag{II.6}$$

As curvas integrais dos $\{e_i\}$ em $\mathbb{R}^n$ são retas e por tanto, via a projeção estereográfica, as curvas integrais dos P_i são círculos. Pela mesma ração a distribuição ortogonal a P_i é integrável e umbílica.

Para calcular a energia de $\mathsf{P}_a(x)$ precisamos saber o valor de $\|\nabla_{\mathsf{P}_b}\mathsf{P}_a\|$. Para calcular $\nabla_{\mathsf{P}_b}\mathsf{P}_a$ primeiro derivamos em $\mathbb{R}^{n+1}$ e depois projetamos na esfera. Assim

$$\nabla_{\mathsf{P}_a}\mathsf{P}_a = \sum_{b\neq a}\frac{x_b}{1-x_{n+1}}\mathsf{P}_b\ ;$$

$$\text{se } b \neq a \quad \nabla_{\mathsf{P}_b}\mathsf{P}_a = \frac{-x_a}{1-x_{n+1}}\mathsf{P}_b.$$

Notar que com esta última derivada se comprova a umbilicidade de $\mathsf{P}_a^{\perp}$. Agora pode-se obter a norma de $\nabla\mathsf{P}_a$

$$\begin{aligned}
\|\nabla\mathsf{P}_a\|^2 &= \sum_{b=1}^{n}\|\nabla_{\mathsf{P}_b}\mathsf{P}_a\|^2 = \\
&= \sum_{b\neq a}\frac{x_b^2}{(1-x_{n+1})^2} + \sum_{b\neq a}\frac{x_a^2}{(1-x_{n+1})^2} = \\
&= \frac{1-x_{n+1}^2}{(1-x_{n+1})^2} + (n-2)\frac{x_a^2}{(1-x_{n+1})^2} = \\
&= \frac{1+x_{n+1}}{1-x_{n+1}} + (n-2)\frac{x_a^2}{(1-x_{n+1})^2}.
\end{aligned}$$

Finalmente calculamos a energia integrando a expressão anterior

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(\mathsf{P}_a) &= \frac{1}{2}\int_{\mathrm{S}^n}\|\nabla\mathsf{P}_a\|^2\nu + \frac{n}{2}\mathrm{vol}(\mathrm{S}^n) = \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathrm{S}^n}\frac{1+x_{n+1}}{1-x_{n+1}}\nu + \frac{n-2}{2}\int_{\mathrm{S}^n}\frac{x_a^2}{(1-x_{n+1})^2}\nu + \frac{n}{2}\mathrm{vol}(\mathrm{S}^n) = \\
&= \frac{1}{2}\frac{2n\pi^{\frac{n+1}{2}}}{(n-2)\Gamma(\frac{n+1}{2})} + \frac{n-2}{2}\frac{2\pi^{\frac{n+1}{2}}}{(n-2)\Gamma(\frac{n+1}{2})} + \frac{n}{2}\mathrm{vol}(\mathrm{S}^n) = \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n-2} + 1 + n\right)\mathrm{vol}(\mathrm{S}^n) = \\
&= \frac{n^2-2}{2(n-2)}\mathrm{vol}(\mathrm{S}^n).
\end{aligned}$$

Mesmo com uma singularidade os $\{\mathsf{P}_a\}_{a=1}^{7}$ em S^7 satisfazem as condições de minimização do Teorema II.11. Reparar também que a esfera menos um ponto é paralelizável em qualquer dimensão. Assim ampliando o Teorema II.10 à variedade completa $\mathrm{S}^n - \{\text{Polo Norte}\}$, temos que a soma das energias de n campos ortogonais em todo ponto atinge o mínimo com os campos de Pedersen.

CAPíTULO III

Energia e energia corrigida de distribuições

III.1. Introdução

Seja (M^n, g) uma variedade riemanniana de dimensão $n = p+q$. Seja $\mathcal{V}^q$ uma distribuição de dimensão q que chamaremos vertical. Denotamos por $\mathcal{H}$ à distribuição complementar a $\mathcal{V}$ que chamaremos horizontal e que tem dimensão p.

Usaremos como convenção de índices

$$1 \leq a, b \leq n \quad , \quad 1 \leq i, j \leq p \quad , \quad p+1 \leq \alpha, \beta \leq n.$$

Seja $\{e_a\}$ um referencial local ortonormal adaptado a estrutura quase-produto $(\mathcal{H}, \mathcal{V})$, isto é, $\forall x \in M$

$$\{e_1(x), \dots, e_p(x)\} \subset \mathcal{H}_x \quad \text{e} \quad \{e_{p+1}(x), \dots, e_n(x)\} \subset \mathcal{V}_x.$$

Como foi visto no Capítulo I, em todo ponto $x \in M$ a distribuição $\mathcal{V}$ define um q-vetor $\xi(x) = e_{p+1}(x) \wedge \cdots \wedge e_n(x)$. Podemos ver $\mathcal{V}$ como a aplicação diferenciável ξ entre (M, g) e a grassmanniana de q-planos tangentes a M, $(G(q, M), g_S)$, onde g_S é a métrica de Sasaki,

$$\begin{aligned} \xi : M &\longrightarrow G(q, M) \\ x &\mapsto \xi(x) = e_{p+1}(x) \wedge \cdots \wedge e_n(x). \end{aligned}$$

Lembramos que a energia de uma aplicação diferenciável entre duas variedades riemannianas $f : M \to N$ é dada por:

$$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{2} \int_M \|df\|^2 \nu,$$

onde ν é a n-forma volume de M.

Definição III.1. A energia de uma distribuição $\mathcal{V}$ é a energia da seção $\xi : (M, g) \to (G(q, M), g_S)$ que induz.

Para obter o valor de $\|d\xi\|^2$ fazemos uso da expressão da métrica de Sasaki (I.2) vista no Capítulo I ,

$$\begin{aligned} &g_S(d\xi(e_a), d\xi(e_a)) = \\ &\qquad = g\big(d\pi(d\xi(e_a)), d\pi(d\xi(e_a))\big) + g\big(\mathcal{K}(d\xi(e_a)), \mathcal{K}(d\xi(e_a))\big), \end{aligned}$$

onde $\pi : G(q, M) \to M$ é a projeção do fibrado e $\mathcal{K} : TG(q, M) \to G(q, M)$ é o conector da conexão de Levi-Civita ∇.

Como ξ é uma seção, $d\pi(d\xi) = d(\pi \circ \xi) = d(\mathrm{Id}_M) = \mathrm{Id}_{TM}$. Pela Proposição I.2 sabemos que $\mathcal{K}(d\xi(e_a)) = \nabla_{e_a}\xi$. Portanto,

$$\sum_{a=1}^{n} g_S\big(d\xi(e_a), d\xi(e_a)\big) = \sum_{a=1}^{n} g\,(e_a, e_a) + g\,(\nabla_{e_a}\xi, \nabla_{e_a}\xi)\,.$$

Proposição III.2. *A energia da distribuição $\mathcal{V}$ é dada pela expressão*

$$\mathcal{E}(\mathcal{V}) = \frac{n}{2}\mathrm{vol}(M) + \frac{1}{2}\int_M \sum_{a=1}^{n} \|\nabla_{e_a}\xi\|^2 \nu, \tag{III.1}$$

onde $\{e_a\}_{a=1}^{n}$ é um referencial local ortonormal de M^n.

Podemos calcular $\nabla\xi$ em termos da segunda forma fundamental de $\mathcal{H}$ e $\mathcal{V}$. Lembrar que a ∇ atua como derivação na álgebra de multivetores. Se $e_i \in \mathcal{H}$,

$$\nabla_{e_i}\xi = \sum_{\alpha=p+1}^{n} e_{p+1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha-1} \wedge \nabla_{e_i} e_\alpha \wedge e_{\alpha+1} \wedge \cdots \wedge e_n.$$

Como e_α é unitário $g(\nabla_{e_i} e_\alpha, e_\alpha) = 0$. Por tratar-se de um produto exterior, o resto da componente vertical de $\nabla_{e_i} e_\alpha$ vai dar um q-vetor nulo. Assim só nos interessa a parte horizontal de $\nabla_{e_i} e_\alpha$.

$$\nabla_{e_i}\xi = \sum_\alpha \sum_j -h_{ij}^\alpha e_{p+1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha-1} \wedge e_j \wedge e_{\alpha+1} \wedge \cdots \wedge e_n,$$

onde $h_{ij}^\alpha = -g(\nabla_{e_i} e_\alpha, e_j)$. Quando derivamos na direção vertical e_β obtemos

$$\nabla_{e_\beta}\xi = \sum_\alpha \sum_j h_{\beta\alpha}^j e_{p+1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha-1} \wedge e_j \wedge e_{\alpha+1} \wedge \cdots \wedge e_n,$$

pois $g(\nabla_{e_\beta} e_\alpha, e_i) = -g(\nabla_{e_\beta} e_i, e_\alpha) = h_{\beta\alpha}^i$.

Deste modo,

$$\sum_a \|\nabla_{e_a}\xi\|^2 = \sum_{\alpha,i,j} \left(h_{ij}^\alpha\right)^2 + \sum_{\alpha,\beta,i} \left(h_{\alpha\beta}^i\right)^2. \tag{III.2}$$

Com isto pode-se ver que o mínimo trivial da energia de distribuições,

$$\mathcal{E}(\mathcal{V}) \geq \frac{n}{2}\mathrm{vol}(M),$$

é atingido por distribuições totalmente geodésicas com complementar também totalmente geodésico, i.e. quando a variedade é localmente um produto riemanniano. Como no caso de campos de vetores, podemos nos propor a pergunta de que distribuições são as de menor energia em variedades que não são localmente um produto.

Os primeiros espaços onde pensamos estudar a energia de distribuições são as esferas. Nas esferas temos definidas as fibrações de Hopf (ver Capítulo I). As fibrações de Hopf estão definidas de um modo muito natural e estão a priori muito ordenadas. Por isto são candidatas a ser mínimos da energia. No próximo Capítulo refutaremos tal afirmação.

III.2. Energia corrigida

Como antes, seja $\{e_a\}$ um referencial local adaptado a estrutura quase-produto $(\mathcal{H}^p, \mathcal{V}^q)$. Sejam h_{ij}^{α} os coeficientes da segunda forma fundamental da distribuição $\mathcal{H}$, $h_{ij}^{\alpha} = -g(\nabla_{e_i} e_\alpha, e_j)$. Analogamente sejam $h_{\alpha\beta}^{i} = -g(\nabla_{e_\alpha} e_i, e_\beta)$.

Denotamos por $\overrightarrow{\mathrm{H}}_{\mathcal{H}}$ e $\overrightarrow{\mathrm{H}}_{\mathcal{V}}$ os vetores curvatura média, das distribuições $\mathcal{H}$ e $\mathcal{V}$,

$$\text{(III.3)} \qquad \overrightarrow{\mathrm{H}}_{\mathcal{H}} = \frac{1}{p} \sum_{\alpha=p+1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{p} h_{ii}^{\alpha}\Big) e_\alpha \qquad \overrightarrow{\mathrm{H}}_{\mathcal{V}} = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{p} \Big(\sum_{\alpha=p+1}^{n} h_{\alpha\alpha}^{i}\Big) e_i.$$

A Definição II.8 de energia corrigida de campos de vetores, pode ser generalizada a distribuições do seguinte modo.

Definição III.3. Seja $\mathcal{V}$ uma distribuição de dimensão q em M^n. Define-se a energia corrigida de $\mathcal{V}$ como

$$\mathcal{D}(\mathcal{V}) = 2\mathcal{E}(\mathcal{V}) - n\mathrm{vol}(M) + \int_M \left(p(p-2)\|\vec{H}_{\mathcal{H}}\|^2 + q^2\|\vec{H}_{\mathcal{V}}\|^2\right) \nu,$$

ou mais explicitamente,

$$\text{(III.4)} \qquad \mathcal{D}(\mathcal{V}) = \int_M \left(\sum_a \|\nabla_{e_a}\xi\|^2 + p(p-2)\|\vec{H}_{\mathcal{H}}\|^2 + q^2\|\vec{H}_{\mathcal{V}}\|^2\right) \nu.$$

Notar que esta correção não é uma simples generalização da dada por Brito em [B] pois aparece a norma da curvatura média de $\mathcal{V}$ (comparar Definição II.8).

Um exemplo básico que desde o começo temos em mente é o das fibrações de Hopf $\mathrm{S}^3 \hookrightarrow \mathrm{S}^{4n+3}$. No caso de campos de vetores, a correção da energia se anulava quando $n = 3$. A idéia de generalizar a energia corrigida a distribuições incluia a esperança de que para o primeiro caso, $\mathrm{S}^3 \hookrightarrow \mathrm{S}^7 \to \mathbb{HP}$, a correção se iria anular também. Para obter um resultado interessante, a correção teve que ser dada de um modo que resultou não nula no caso esperado. Como será visto na próxima seção, a conjectura inicial de que a fibração de Hopf $\mathrm{S}^3 \hookrightarrow \mathrm{S}^7$ era mínimo absoluto da energia é infundada.

Teorema III.4. *Se $\mathcal{V}$ for integrável então*

$$\mathcal{D}(\mathcal{V}) \geq \int_M \sum_{i,\alpha} c_{i\alpha}\, \nu,$$

onde $c_{i\alpha}$ é a curvatura seccional do plano gerado por $\{e_i, e_\alpha\}$ com $e_i \in \mathcal{H}$ e $e_\alpha \in \mathcal{V}$. A igualdade é satisfeita se e somente se $\mathcal{V}$ for totalmente geodésica e os vetores verticais forem conformes em relação aos horizontais.

NOTA. Como foi comentado no Teorema II.9 um campo é conforme se $\mathcal{L}_X g(Y,Z) = \lambda g(Y,Z)$ para $Y, Z \perp X$ e $\lambda \in C^\infty(M)$. Agora, dizer que $X_\alpha \in \mathcal{V}$ é conforme em relação aos vetores horizontais quer dizer que a equação acima é válida para Y e Z horizontais.

DEMONSTRAÇÃO. De (III.2) e da definição de curvatura média (III.3) temos

$$
\text{(III.5)}\quad
\begin{aligned}
&\sum_a \|\nabla_{e_a}\xi\|^2 + p(p-2)\|\overrightarrow{\mathrm{H}}_{\mathcal{H}}\|^2 = \\
&= \sum_\alpha \left[\sum_{i,j} \left(h^\alpha_{ij}\right)^2 + \sum_{i,\beta} \left(h^i_{\alpha\beta}\right)^2 + \frac{p-2}{p}\left(\sum_i h^\alpha_{ii}\right)^2 \right] = \\
&= \sum_\alpha \Bigg[\sum_i \frac{2p-2}{p}\left(h^\alpha_{ii}\right)^2 + \sum_{i\neq j}\left(h^\alpha_{ij}\right)^2 + \frac{2(p-2)}{p}\sum_{i<j} h^\alpha_{ii}h^\alpha_{jj} + \\
&+ \sum_{i,\beta}\left(h^i_{\alpha\beta}\right)^2 \Bigg].
\end{aligned}
$$

Para cada α, as somas $\sum \left(h^\alpha_{ii}\right)^2$ e $\sum \left(h^\alpha_{ij}\right)^2$ podem ser escritas de um modo mais conveniente:

$$
\text{(III.6)}\quad
\begin{aligned}
(p-1)\sum_i \left(h^\alpha_{ii}\right)^2 &= \sum_{i<j}\left(h^\alpha_{ii} - h^\alpha_{jj}\right)^2 + 2h^\alpha_{ii}h^\alpha_{jj}\,, \\
\sum_{i\neq j}\left(h^\alpha_{ij}\right)^2 &= \sum_{i<j}\left(h^\alpha_{ij} + h^\alpha_{ji}\right)^2 - 2h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ji}\,.
\end{aligned}
$$

Assim de (III.5) e (III.6)

$$
\text{(III.7)}\quad
\begin{aligned}
&\sum_a \|\nabla_{e_a}\xi\|^2 + p(p-2)\|\overrightarrow{\mathrm{H}}_{\mathcal{H}}\|^2 = \frac{2}{p}\sum_{i<j,\alpha}(h^\alpha_{ii} - h^\alpha_{jj})^2 + \\
&+2\sum_{i<j} h^\alpha_{ii}h^\alpha_{jj} + \sum_{i<j,\alpha}(h^\alpha_{ij} + h^\alpha_{ji})^2 - 2\sum_{i<j,\alpha} h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ji} + \sum_{i,\alpha,\beta}(h^i_{\alpha\beta})^2 \geq \\
&\geq 2\sum_{i<j,\alpha}\left(h^\alpha_{ii}h^\alpha_{jj} - h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ji}\right) + \sum_{i,\alpha,\beta}(h^i_{\alpha\beta})^2 = 2\sum_\alpha \sigma^\alpha_2 + \sum_{i,\alpha,\beta}(h^i_{\alpha\beta})^2,
\end{aligned}
$$

onde σ^α_2 é a segunda função simétrica elementar da segunda forma fundamental de $\mathcal{H}$ na direção e_α.

Sob a condição de integrabilidade de $\mathcal{V}$, podemos relacionar a curvatura média de $\mathcal{V}$ com a segunda função simétrica σ_2^i do seguinte modo:

$$
\begin{aligned}
\Big(\sum_\alpha h^i_{\alpha\alpha}\Big)^2 &= \sum_{\alpha,\beta} h^i_{\alpha\alpha} h^i_{\beta\beta} = \\
&= \sum_\alpha (h^i_{\alpha\alpha})^2 + \sum_{\alpha\neq\beta} \left(h^i_{\alpha\alpha}h^i_{\beta\beta} - h^i_{\alpha\beta}h^i_{\beta\alpha} + h^i_{\alpha\beta}h^i_{\beta\alpha}\right) = \\
&= \sum_\alpha (h^i_{\alpha\alpha})^2 + 2\sum_{\alpha<\beta} \left(h^i_{\alpha\alpha}h^i_{\beta\beta} - h^i_{\alpha\beta}h^i_{\beta\alpha}\right) + \sum_{\alpha\neq\beta}(h^i_{\alpha\beta})^2 \\
&= 2\sigma_2^i + \sum_{\alpha,\beta}(h^i_{\alpha\beta})^2.
\end{aligned}
\tag{III.8}
$$

Agora, lembrando que o vetor curvatura média (III.3) está normalizado, podemos escrever a partir de (III.8),

$$
q^2\|\vec{H}_{\mathcal{V}}\|^2 = \sum_i \Big(\sum_\alpha h^i_{\alpha\alpha}\Big)^2 = \sum_i 2\sigma_2^i + \sum_{i,\alpha,\beta}(h^i_{\alpha\beta})^2.
\tag{III.9}
$$

De (III.7) e (III.9) temos

$$
\begin{aligned}
\sum_a \|\nabla_{e_a}\xi\|^2 &+ p(p-2)\|\vec{H}_{\mathcal{H}}\|^2 + q^2\|\vec{H}_{\mathcal{V}}\|^2 \geq \\
&\geq 2\sum_\alpha \sigma_2^\alpha + 2\sum_i \sigma_2^i + 2\sum_{i,\alpha,\beta}(h^i_{\alpha\beta})^2.
\end{aligned}
\tag{III.10}
$$

Para avaliar a integral do σ_2^α e do σ_2^i, precisamos de um lema provado em [GN].

Sejam $\{\theta_a\}$ a co-referência dual a $\{e_a\}$ e ω_{ab} as formas de conexão, $\omega_{ab}(e_c) = g(\nabla_{e_c}e_a, e_b)$. As 2-formas de curvatura serão denotadas por $\Omega_{ab}(X,Y) = g(\mathbf{R}(X,Y)e_a, e_b)$ onde $\mathbf{R}$ é o tensor curvatura da variedade. A curvatura seccional do plano gerado por $\{e_a, e_b\}$ será expressada por $c_{ab} = -\Omega_{ab}(e_a, e_b)$.

Em [GN] encontramos definidas as formas

$$
\begin{aligned}
\varphi = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}^q} &\epsilon(\sigma)\epsilon(\tau)\omega_{\sigma(1)\tau(p+1)} \wedge \theta_{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge \theta_{\sigma(p)} \wedge \theta_{\tau(p+2)} \wedge \cdots \\
&\cdots \wedge \theta_{\tau(n)} \\
\phi_1 = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}^q} &\epsilon(\sigma)\epsilon(\tau)\Big(\sum_\alpha \omega_{\sigma(1)\alpha}\wedge\omega_{\alpha\sigma(2)}\Big)\wedge\theta_{\sigma(3)}\wedge\cdots \\
&\cdots\wedge\theta_{\sigma(p)}\wedge\theta_{\tau(p+1)}\wedge\cdots\wedge\theta_{\tau(n)}
\end{aligned}
$$

$$\phi_2 = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}^q} \epsilon(\sigma)\epsilon(\tau)\theta_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge\theta_{\sigma(p)}\wedge\left(\sum_i \omega_{\tau(p+1)i}\wedge\omega_{i\tau(p+2)}\right)\wedge$$
$$\wedge\,\theta_{\tau(p+3)}\wedge\cdots\wedge\theta_{\tau(n)}$$

e

$$\Omega = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_p}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}^q} \epsilon(\sigma)\epsilon(\tau)\Omega_{\sigma(1)\tau(p+1)}\wedge\theta_{\sigma(2)}\wedge\cdots\wedge\theta_{\sigma(p)}\wedge\theta_{\tau(p+2)}\wedge\cdots$$
$$\cdots\wedge\theta_{\tau(n)}\ ,$$

onde $\mathfrak{S}_p$ denota o grupo de permutações de $\{1,\ldots,p\}$, $\mathfrak{S}^q$ as permutações de $\{p+1,\ldots,p+q\}$ e $\epsilon(\tau)$ denota o sinal da permutação τ. As formas φ, ϕ_1, ϕ_2 e Ω são invariantes por mudanças de referencias ortonormais. Estas formas satisfazem o seguinte lema.

Lema III.5 ([GN]). *Para φ, ϕ_1, ϕ_2 e Ω definidas acima,*

$$d\varphi = (-1)^p\left[\frac{p-1}{q}\phi_1 + \frac{q-1}{p}\phi_2\right] + \Omega.$$

NOTA. Os autores de [GN] trabalham com a hipótese de integrabilidade das duas distribuições ortogonais mas estas não são necessárias para a demonstração do lema. Na prova somente são usadas as equações de estrutura da variedade M e propriedades do grupo de permutações.

Avaliando as formas ϕ_1, ϕ_2 e Ω na base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ temos

$$\begin{aligned}
\phi_1(e_1,\ldots,e_n) &= -q!(p-2)!\sum_\alpha 2\sigma_2^\alpha,\\
\phi_2(e_1,\ldots,e_n) &= -p!(q-2)!\sum_i 2\sigma_2^i\ ,\\
\Omega(e_1,\ldots,e_n) &= (-1)^p(p-1)!(q-1)!\sum_{i,\alpha} c_{i\alpha}.
\end{aligned}\tag{III.11}$$

Agora aplicamos o Teorema de Stokes ao Lema III.5 e com (III.11) deduzimos

$$\int_M\left(\sum_\alpha 2\sigma_2^\alpha + \sum_i 2\sigma_2^i\right)\nu = \int_M\sum_{i,\alpha} c_{i\alpha}\nu.\tag{III.12}$$

Para obter a energia corrigida integramos a equação (III.10) e usamos (III.12):

$$\mathcal{D}(\mathcal{V}) \geq \int_M\sum_{i,\alpha} c_{i\alpha} + 2\sum_{i,\alpha,\beta}(h^i_{\alpha\beta})^2\nu \geq \int_M\sum_{i,\alpha} c_{i\alpha}\nu\ ,\tag{III.13}$$

como tínhamos enunciado.

Nas desigualdades (III.7) e (III.13) temos perdido vários termos. Estes termos fornecem as condições para a folheação $\mathcal{V}$ ser mínimo de $\mathcal{D}$. As condições são

$$\text{(III.14)} \quad \sum_{\alpha,\beta,i}(h^i_{\alpha\beta})^2 = 0 \quad ; \sum_{i<j,\alpha}(h^\alpha_{ii} - h^\alpha_{jj})^2 = 0 \quad ; \sum_{i<j,\alpha}(h^\alpha_{ij} + h^\alpha_{ji})^2 = 0.$$

Então, para atingir a limitação da energia corrigida do enunciado do teorema, a $\mathcal{V}$ tem que ser totalmente geodésica e os vetores verticais $\{e_{p+1}, \ldots, e_n\}$ devem ser horizontalmente conformes. Isto é, $\forall\alpha$ e $\forall X, Y \in \mathcal{H}$, $\mathcal{L}_{e_\alpha} g(X,Y) = \lambda g(X,Y)$, $\lambda \in C^\infty(M)$.

□

Notar que a limitação inferior do Teorema III.4 depende a priori da própria distribuição. Em qualquer caso o limitante é interessante pois é a integral da curvatura seccional cruzada da estrutura quase-produto. Esta curvatura seccional cruzada é um invariante de ordem 2 da estrutura quase produto (também chamados invariantes lineares) [C]. Em espaços de curvaturas seccional constante a limitação inferior depende só de n e q.

Teorema III.6. *Entre as distribuições integráveis, as fibrações de Hopf* $S^1 \hookrightarrow S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ *e* $S^3 \hookrightarrow S^{4n+3} \to \mathbb{HP}^n$ $\forall n \geq 1$ *são mínimos absolutos de* $\mathcal{D}$.

DEMONSTRAÇÃO. Descrevemos aqui a prova para a S^{4n+3} com fibras de dimensão $q = 3$ por ser mais interessante. No outro caso a prova é muito similar.

Como foi visto no Capítulo I, as fibras de $S^3 \hookrightarrow S^{4n+3}$ são totalmente geodésicas. Para comprovar a outra condição de minimalidade de (III.14), usamos as estruturas quase-complexas $\mathbf{I}, \mathbf{J}$ e $\mathbf{K}$ definidas em $\mathbb{H}^{n+1}$. Para cada ponto $x \in S^{4n+3} \subset \mathbb{H}^{n+1}$, os vetores tangentes à fibra são $\mathbf{I}(\vec{x}), \mathbf{J}(\vec{x})$ e $\mathbf{K}(\vec{x})$. Consideramos a base real $\{\vec{x}, \mathbf{I}\vec{x}, \mathbf{J}\vec{x}, \mathbf{K}\vec{x}, v_1, \mathbf{I}v_1, \mathbf{J}v_1, \mathbf{K}v_1, v_2, \ldots, \mathbf{K}v_n\}$ em $\mathbb{H}^{n+1}$ que é adaptada à esfera e à fibração. Nesta base é facilmente calculável a segunda forma fundamental A_X de $\mathcal{H}$ com $X \in \mathcal{V}$. Só precisamos usar que as estruturas quase-complexas são isometrias e paralelas (em $\mathbb{R}^{4n+4}$).

A matriz da segunda forma fundamental está formada por blocos 4×4 na diagonal do tipo

$$A_{\mathbf{I}x} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad A_{\mathbf{J}x} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{matrix}} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

e

$$\mathsf{A}_{\mathrm{K}x} = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}} & \cdots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Com isto obtemos a condição de (III.14) que faltava.

□

III.3. Energia de distribuições. Análise global

Como foi visto na Proposição III.2 a energia de uma distribuição $\mathcal{V}$ é dada por

$$\mathcal{E}(\mathcal{V}) = \frac{1}{2}\int_M \sum_{a=1}^{n} \|\nabla_{e_a}\xi\|\nu + \frac{n}{2}\mathrm{vol}(M),$$

onde ξ é o q-vetor associado à distribuição.

Para a energia pura primeiro fazemos um estudo global e depois, nas seguintes seções, faremos um estudo variacional. O teorema que queremos provar é

Teorema III.7. *Seja $\mathcal{V}$ uma q-distribuição integrável e orientada em M^n riemanniana, compacta e orientada. Então*

$$\text{(III.15)} \qquad \mathcal{E}(\mathcal{V}) \geq \frac{1}{p-1}\int_M \sum_{i,\alpha} c_{i\alpha}\nu + \frac{n}{2}\mathrm{vol}(M),$$

onde $c_{i\alpha}$ é a curvatura seccional do plano $\{e_i, e_\alpha\}$ com $e_i \in \mathcal{H}$ e $e_\alpha \in \mathcal{V}$. A igualdade é satisfeita se e somente se $\mathcal{V}$ é totalmente geodésica e $\mathcal{H}$ umbílica.

Demonstração. Pela equação (III.2) sabemos que

$$\begin{aligned} \sum_a \|\nabla_{e_a}\xi\|^2 &= \sum_{\alpha,i,j} (h_{ij}^{\alpha})^2 + \sum_{i,\alpha,\beta} (h_{\alpha\beta}^{i})^2 \geq \\ \text{(III.16)} \qquad &\geq \sum_{\alpha} \Big(\sum_{i\neq j} (h_{ij}^{\alpha})^2 + \sum_i (h_{ii}^{\alpha})^2 \Big) \geq \\ &\geq \sum_{\alpha} \Big(\frac{1}{p-1} \sum_{i\neq j} (h_{ij}^{\alpha})^2 + \sum_i (h_{ii}^{\alpha})^2 \Big). \end{aligned}$$

Como nos teoremas anteriores, para cada α, escrevemos as somas $\sum(h^\alpha_{ii})^2$ e $\sum(h^\alpha_{ij})^2$ do seguinte modo

$$\sum_{i<j}\left(h^\alpha_{ii}-h^\alpha_{jj}\right)^2=(p-1)\sum_i(h^\alpha_{ii})^2-2\sum_{i<j}h^\alpha_{ii}h^\alpha_{jj}\,, \tag{III.17}$$

$$\sum_{i<j}\left(h^\alpha_{ij}+h^\alpha_{ji}\right)^2=\sum_{i\neq j}\left(h^\alpha_{ij}\right)^2+2\sum_{i<j}h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ji}\,. \tag{III.18}$$

Somando (III.17) e (III.18) conseguimos

$$\begin{aligned}(p-1)\sum_i(h^\alpha_{ii})^2+\sum_{i\neq j}\left(h^\alpha_{ij}\right)^2&=\sum_{i<j}\left(h^\alpha_{ii}-h^\alpha_{jj}\right)^2+\\ &+\sum_{i<j}\left(h^\alpha_{ij}+h^\alpha_{ji}\right)^2+2\sum_{i<j}\left(h^\alpha_{ij}h^\alpha_{ji}-h^\alpha_{ii}h^\alpha_{jj}\right)\geq\\ &\geq 2\sigma^\alpha_2.\end{aligned} \tag{III.19}$$

Portanto integrando (III.16) e de (III.19) obtemos

$$\mathcal{E}(\mathcal{V})\geq\frac{2}{p-1}\int_M\sum_\alpha\sigma^\alpha_2\nu+\frac{n}{2}\mathrm{vol}(M).$$

Como $\mathcal{V}$ é integrável, a integral do σ^α_2 pode ser calculada através da divergência de certo campo e das integrais das curvaturas seccionais $c_{\alpha i}$ com $e_i\in\mathcal{H}$, ver [W] e Teorema II.10. Assim conseguimos

$$\mathcal{E}(\mathcal{V})\geq\frac{1}{p-1}\int\sum_{i,\alpha}c_{i\alpha}+\frac{n}{2}\mathrm{vol}(M),$$

onde $c_{i\alpha}$ é a curvatura seccional do plano gerado por $\{e_i,e_\alpha\}$.

Pelas equações (III.16) e (III.19), a igualdade será satisfeita se e somente se $\forall\alpha$

$$(h^i_{\alpha\beta})^2=0\quad\forall i,\beta\quad;\quad(h^\alpha_{ij})^2=0\quad\text{se } i\neq j$$

e

$$\left(h^\alpha_{ii}-h^\alpha_{jj}\right)^2=0\quad\forall i,j=1,\ldots p.$$

Ou equivalentemente, se $\mathcal{V}$ é totalmente geodésica, e $\mathcal{H}$ for umbílica. □

O valor

$$\sum_{i,\alpha}c_{i\alpha}$$

é a curvatura seccional cruzada da estrutura quase produto $(\mathcal{H},\mathcal{V})$, [C]. Para espaços de curvatura seccional constante a limitação do Teorema III.7 é independente da estrutura quase-produto. Com isto temos uma limitação não trivial para a energia de distribuições.

Na esfera, a generalização a distribuições do campo Norte-Sul atinge o valor da limitação pois é totalmente geodésico e o complementar é umbílico. Este Norte-Sul de dimensão q tem também 2 singularidades.

III.4. Primeira variação da energia

Com a primeira derivada do funcional energia obteremos uma caracterização dos pontos críticos para depois, com a segunda variação, decidir sobre a estabilidade de certos pontos críticos.

III.4.1. Caracterização de ponto crítico. O critério para identificar pontos críticos da energia é muito similar ao dado para campos de vetores (ver Teorema II.3 [**Wi1**] [**Wo**]). A diferença vem da interpretação das equações já que agora temos codimensão maior.

Proposição III.8. *Uma distribuição $\mathcal{V}$ é um ponto crítico da energia se e somente se o laplaciano $\nabla^*\nabla\xi$ é ortogonal a todos os vetores tangentes de ξ na álgebra $\Lambda^q(M)$. Isto é,*

$$\nabla^*\nabla\xi = \|\nabla\xi\|^2\xi + \sum \textit{termos de tipo } \mathcal{H}\wedge\mathcal{H}\wedge\mathcal{V}\wedge\cdots\wedge\mathcal{V}.$$

Demonstração. Seja (t_1, t_2) um intervalo real aberto que contenha o zero. Na variedade produto $M\times(t_1,t_2)$ consideramos a aplicação

$$\eta : M\times(t_1,t_2)\to G(q,M)$$

onde

$$\pi\left(\eta(x,t)\right) = x \quad \text{e} \quad \eta(x,0)=\xi(x).$$

A $\xi_t(x) = \eta(x,t)$ é uma variação arbitrária de $\mathcal{V}$ através de distribuições orientadas. Queremos derivar a energia para todas as variações deste tipo. Estendemos o referencial ortonormal $\{e_a\}$ de M a $M\times(t_1,t_2)$ denotando-o pela mesma letra. Do mesmo modo, seja ∂t a extensão a $M\times(t_1,t_2)$ de um vetor tangente ao intervalo. Da definição (III.1),

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{E}(\xi_t) &= \frac{1}{2}\int_M \partial t\Big(\sum_{a=1}^n g(\nabla_{e_a}\xi_t,\nabla_{e_a}\xi_t)\Big)\nu = \\ &= \int_M\sum_{a=1}^n g(\nabla_{\partial t}\nabla_{e_a}\xi_t,\nabla_{e_a}\xi_t)\nu = \int_M\sum_{a=1}^n g(\nabla_{e_a}\nabla_{\partial t}\xi_t,\nabla_{e_a}\xi_t)\nu = \\ &= \int_M g(\nabla_{\partial t}\xi_t,\nabla^*\nabla\xi_t)\nu.\end{aligned}$$

Como no caso de campos de vetores, podemos trocar de ordem as derivadas $\nabla_{\partial t}$ e ∇_{e_a} pois $M\times(t_1,t_2)$ é um produto riemanniano. Avaliando em $t=0$ temos

$$\text{(III.20)} \qquad \left.\frac{d\mathcal{E}(\xi_t)}{dt}\right|_{t=0} = \int_M g(\nabla_{\partial t}\xi_t\big|_{t=0},\nabla^*\nabla\xi)\nu.$$

O q-vetor $\nabla_{\partial t}\xi_t|_{t=0}$ pertence ao espaço tangente no ponto $(x,\xi)\in G(q,M)$ e portanto de tipo $\mathcal{H}\wedge\mathcal{V}\wedge\cdots\wedge\mathcal{V}$. A distribuição $\mathcal{V}$ será um ponto crítico se e somente se $\frac{d\mathcal{E}(\xi_t)}{dt}\big|_{t=0} = 0$ para todos as possíveis escolhas de ξ_t.

Lembrar que em $\nabla^*\nabla\xi$ derivamos duas vezes o ξ original. O q-vetor ξ é de tipo $\mathcal{V}\wedge\cdots\wedge\mathcal{V}$, portanto $\nabla^*\nabla\xi$ será a soma de q-vetores de tipo $\mathcal{V}\wedge\cdots\wedge\mathcal{V}$, $\mathcal{H}\wedge\mathcal{V}\wedge\cdots\wedge\mathcal{V}$ e $\mathcal{H}\wedge\mathcal{H}\wedge\mathcal{V}\wedge\cdots\wedge\mathcal{V}$. A equação (III.20) nos diz que para que ξ seja ponto crítico de $\mathcal{E}$, $\nabla^*\nabla\xi$ não deve conter termos de tipo $\mathcal{H}\wedge\mathcal{V}\wedge\cdots\wedge\mathcal{V}$.

Lembrando que ξ é um q-vetor unitário, podemos calcular a parte de $\nabla^*\nabla\xi$ tangente a ξ:

$$\begin{aligned} g(\nabla^*\nabla\xi,\xi) &= \sum_{a=1}^{n} g(-\nabla_{e_a}\nabla_{e_a}\xi + \nabla_{\nabla_{e_a}e_a}\xi,\xi) = -\sum_{a=1}^{n} g(\nabla_{e_a}\nabla_{e_a}\xi,\xi) = \\ &= \sum_{a=1}^{n} g(\nabla_{e_a}\xi,\nabla_{e_a}\xi) = \sum_{a=1}^{n} \|\nabla_{e_a}\xi\|^2 = \|\nabla\xi\|^2. \end{aligned}$$

Então os pontos críticos da energia devem satisfazer a equação

$$\nabla^*\nabla\xi = \|\nabla\xi\|^2\xi + \sum \mathcal{H}\wedge\mathcal{H}\wedge\mathcal{V}\wedge\cdots\wedge\mathcal{V}.$$

O recíproco é claro. Uma distribuição que satisfaz esta última equação é ponto crítico de $\mathcal{E}$. □

III.4.2. A fibração de Hopf é ponto crítico. Como foi dito antes, o objetivo e estudar a energia das fibrações de Hopf.

Proposição III.9. *A fibração de Hopf* $S^3 \hookrightarrow S^{4n+3} \to \mathbb{HP}^n$ *é um ponto critico da energia* $\mathcal{E}$ $\forall n \geq 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Queremos aplicar a Proposição III.8 a $M = \mathrm{S}^{4n+3}$ sendo $\mathcal{V}$ gerada por $\{\mathbf{I}x, \mathbf{J}x, \mathbf{K}x\}$. Agora ξ é o 3-vetor

$$\xi = \mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}x.$$

Primeiro derivamos ξ em $\mathbb{R}^{4n+4}$ onde as estruturas quase-complexas $\mathbf{I}, \mathbf{J}$ e $\mathbf{K}$ são paralelas.

$$\begin{aligned} D_X\xi =& D_X(\mathbf{I}x)\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}x + \mathbf{I}x\wedge D_X(\mathbf{J}x)\wedge\mathbf{K}x + \mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}x\wedge D_X(\mathbf{K}x) \\ =& \mathbf{I}X\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}x + \mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}X\wedge\mathbf{K}x + \mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}X. \end{aligned}$$

Notar que se $X \in \mathcal{V}$ então $\mathbf{I}X, \mathbf{J}X$ e $\mathbf{K}X$ podem ter parte normal à esfera ou componente vertical que se iria anular com o produto exterior. Notar também que $\mathbf{I}, \mathbf{J}$ e $\mathbf{K}$ são fechadas em $\mathcal{H}$. A parte de $D_X\xi$ tangente à esfera é:

$$\text{(III.21)} \qquad \nabla_X\xi = \begin{cases} \mathbf{I}X\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}x + \mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}X\wedge\mathbf{K}x + \\ \quad +\mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}X & \text{se } X\in\mathcal{H} \\ 0 & \text{se } X\in\mathcal{V} \end{cases}$$

O valor $\nabla_X \xi = 0$ quando $X \in \mathcal{V}$ era esperado pois as fibras de $S^3 \hookrightarrow S^{4n+3}$ são totalmente geodésicas. Agora, para obter $\nabla^*\nabla\xi$ calculamos $\nabla_X \nabla_X \xi$ para $X \in \mathcal{H}$.

$$D_X(\nabla_X \xi) = \mathbf{I}\,(D_X X) \wedge \mathbf{J}x \wedge \mathbf{K}x + 2\mathbf{I}X \wedge \mathbf{J}X \wedge \mathbf{K}x + 2\mathbf{I}X \wedge \mathbf{J}x \wedge \mathbf{K}X$$
$$+\mathbf{I}x \wedge \mathbf{J}\,(D_X X) \wedge \mathbf{K}x + 2\mathbf{I}x \wedge \mathbf{J}X \wedge \mathbf{K}X + \mathbf{I}x \wedge \mathbf{J}x \wedge \mathbf{K}\,(D_X X)\,.$$

Antes de tomar a parte tangente, calculamos

$$\nabla_{\nabla_X X}\xi = \nabla_{(\nabla_X X)_{\mathcal{H}}}\xi =$$
$$= \mathbf{I}\,(\nabla_X X)_{\mathcal{H}} \wedge \mathbf{J}x \wedge \mathbf{K}x + \mathbf{I}x \wedge \mathbf{J}\,(\nabla_X X)_{\mathcal{H}} \wedge \mathbf{K}x + \mathbf{I}x \wedge \mathbf{J}x \wedge \mathbf{K}\,(\nabla_X X)_{\mathcal{H}}\,.$$

Notar que $\mathbf{I}\,(Y_{\mathcal{H}}) = (\mathbf{I}Y)_{\mathcal{H}} \quad \forall Y \in TM$ e similarmente para as outras estruturas quase-complexas. Então, se $X \in \mathcal{H}$,

$$\nabla_X \nabla_X \xi - \nabla_{\nabla_X X}\xi = (\mathbf{I}(D_X X))_{\mathcal{V}} \wedge \mathbf{J}x \wedge \mathbf{K}x + \mathbf{I}x \wedge (\mathbf{J}(D_X X))_{\mathcal{V}} \wedge \mathbf{K}x$$
$$+\mathbf{I}x \wedge \mathbf{J}x \wedge (\mathbf{K}(D_X X))_{\mathcal{V}} + 2\mathbf{I}X \wedge \mathbf{J}X \wedge \mathbf{K}x + 2\mathbf{I}X \wedge \mathbf{J}x \wedge \mathbf{K}X +$$
$$+2\mathbf{I}x \wedge \mathbf{J}X \wedge \mathbf{K}X.$$

Dos termos com $D_X X$ só precisamos tomar conta de $g(\mathbf{I}(D_X X), \mathbf{I}x) = g(\mathbf{J}(D_X X), \mathbf{J}x) = g(\mathbf{K}(D_X X), \mathbf{K}x) = g(D_X X, x) = -g(X, X)$. Assim

$$\nabla_X \nabla_X \xi - \nabla_{\nabla_X X}\xi = -3\|X\|^2 \mathbf{I}x \wedge \mathbf{J}x \wedge \mathbf{K}x +$$
$$+ 2\mathbf{I}X \wedge \mathbf{J}X \wedge \mathbf{K}x + 2\mathbf{I}X \wedge \mathbf{J}x \wedge \mathbf{K}X + 2\mathbf{I}x \wedge \mathbf{J}X \wedge \mathbf{K}X$$

e

$$\nabla^*\nabla\xi = \sum_{a=1}^{4n+3} \left(-\nabla_{e_a}\nabla_{e_a}\xi + \nabla_{\nabla_{e_a}e_a}\xi\right) =$$

$$\text{(III.22)} \quad = \sum_{i=1}^{4n} 3\|e_i\|^2\xi + \sum_{i=1}^{4n}\big(- 2\mathbf{I}e_i \wedge \mathbf{J}e_i \wedge \mathbf{K}x - 2\mathbf{I}e_i \wedge \mathbf{J}x \wedge \mathbf{K}e_i -$$
$$- 2\mathbf{I}x \wedge \mathbf{J}e_i \wedge \mathbf{K}e_i\big) = 12n\xi -$$
$$- \sum_{i=1}^{4n} (2\mathbf{I}e_i \wedge \mathbf{J}e_i \wedge \mathbf{K}x + 2\mathbf{I}e_i \wedge \mathbf{J}x \wedge \mathbf{K}e_i + 2\mathbf{I}x \wedge \mathbf{J}e_i \wedge \mathbf{K}e_i)\,.$$

Finalmente, e por pura formalidade, calculamos $\|\nabla\xi\|$. De (III.21),

$$\text{(III.23)} \qquad \|\nabla\xi\|^2 = \sum_{a=1}^{4n+3} \|\nabla_{e_a}\xi\|^2 = \sum_{i=1}^{4n} \|\nabla_{e_i}\xi\|^2 = \sum_{i=1}^{4n} 3\|e_i\|^2 = 12n.$$

Com as equações (III.22) e (III.23) comprova-se que a fibração de Hopf satisfaz a Proposição III.8 e portanto $S^3 \hookrightarrow S^{4n+3} \to \mathbb{H}P^n$ é ponto crítico de $\mathcal{E}$.

□

Aproveitamos os cálculos feitos na demonstração para obter o valor da energia da fibração de Hopf. Da definição de energia (III.1) e de (III.23),

$$\mathcal{E}(\mathrm{S}^3 \hookrightarrow \mathrm{S}^{4n+3}) = \left(8n + \frac{3}{2}\right) \mathrm{vol}(\mathrm{S}^{4n+3}).$$

III.5. Segunda variação da energia

III.5.1. Cálculo do hessiano. Com a seguinte proposição obtemos uma expressão razoável do hessiano da energia em termos do laplaciano e dos campos diretores da variação.

Proposição III.10. *Seja $\mathcal{V}$ uma distribuição orientada de dimensão q e ξ_{st} uma variação a 2-parâmetros de $\mathcal{V}$ por distribuições orientadas. Sejam os vetores diretores da variação*

$$V = \left.\frac{\partial \xi_{st}}{\partial s}\right|_{(s,t)=(0,0)} \qquad e \qquad W = \left.\frac{\partial \xi_{st}}{\partial t}\right|_{(s,t)=(0,0)}.$$

Então,

$$\text{(III.24)} \quad \left.\frac{\partial^2 \mathcal{E}(\xi_{st})}{\partial s \partial t}\right|_{(0,0)} = \int_M \big(g(\nabla_{\partial s}\nabla_{\partial t}\xi_{st}|_{(0,0)}, \nabla^*\nabla\xi) + g(W, \nabla^*\nabla V)\big)\nu.$$

NOTA. Para obter uma equação mais clara, na tese da proposição não temos usado a caracterização de ponto critico que nos dá uma expressão para $\nabla^*\nabla\xi$.

DEMONSTRAÇÃO. Agora trabalhamos na variedade $M \times (s_1, s_2) \times (t_1, t_2)$, onde $(s_1, s_2) \times (t_1, t_2)$ contem a origem de $\mathbb{R}^2$. Da primeira derivada de $\mathcal{E}$ na Proposição III.8, temos

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{E}(\xi_{st}) = \int_M \sum_{a=1}^{n} g(\nabla_{e_a}\nabla_{\partial t}\xi_{st}, \nabla_{e_a}\xi_{st})\nu.$$

Continuamos derivando esta expressão na direção ∂s,

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\mathcal{E}(\xi_{st}) =$$

$$= \int_M \sum_{a=1}^{n} \big(g(\nabla_{\partial s}\nabla_{e_a}\nabla_{\partial t}\xi_{st}, \nabla_{e_a}\xi_{st}) + g(\nabla_{e_a}\nabla_{\partial t}\xi_{st}, \nabla_{\partial s}\nabla_{e_a}\xi_{st})\big)\nu.$$

Como antes, podemos trocar de ordem as $\nabla_{\partial t}$ e $\nabla_{\partial s}$ com as ∇_{e_a}.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\mathcal{E}(\xi_{st}) = \\
&\quad = \int_M \sum_{a=1}^{n} \left(g(\nabla_{e_a}\nabla_{\partial s}\nabla_{\partial t}\xi_{st}, \nabla_{e_a}\xi_{st}) + g(\nabla_{e_a}\nabla_{\partial t}\xi_{st}, \nabla_{e_a}\nabla_{\partial s}\xi_{st})\right)\nu \\
&\quad = \int_M \Big(g(\nabla_{\partial s}\nabla_{\partial t}\xi_{st}, \nabla^*\nabla\xi_{st}) + g\big(\nabla_{\partial t}\xi_{st}, \nabla^*\nabla(\nabla_{\partial s}\xi_{st})\big)\Big)\nu.
\end{aligned}
$$

Avaliando em $(s,t) = (0,0)$,

$$
\frac{\partial^2\mathcal{E}(\xi_{st})}{\partial s \partial t}\Big|_{(0,0)} = \int_M \left(g(\nabla_{\partial s}\nabla_{\partial t}\xi_{st}|_{(0,0)}, \nabla^*\nabla\xi) + g(W, \nabla^*\nabla V)\right)\nu.
$$

como foi anunciado.

□

Notar que uma boa expressão do hessiano não deveria depender da variação. Em qualquer caso a equação (III.24) é suficiente para nosso objetivo.

III.5.2. Instabilidade. Para estudar a instabilidade da fibração de Hopf $S^3 \hookrightarrow S^{4n+3} \to \mathbb{H}P^n$ usaremos a forma quadrática associada ao hessiano. Em geral, quando se pretende provar a instabilidade de um ponto crítico de um funcional qualquer, só se precisa achar uma variação pela qual o valor do funcional decresça. Para a energia, tomaremos uma variação ξ_t da fibração de Hopf e derivaremos duas vezes em t. Isto é, na Proposição III.10 os parâmetros s e t representam o mesmo.

A variação ξ_t que nos permitirá afirmar que as fibrações de Hopf $S^3 \hookrightarrow S^{4n+3}$ são instáveis está inspirada em [X]. Ao contrário do caso unidimensional ($q = 1$) onde os fluxos de Hopf $S^1 \hookrightarrow S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ são instáveis exceto quando $n = 1$, agora temos instabilidade em todas as dimensões. Isto é, a fibração $S^3 \hookrightarrow S^7$ é também instável.

Definimos o campo Norte-Sul em S^m do seguinte modo. Pegamos uma aplicação linear f de $\mathbb{R}^{m+1}$. Restringimos f a S^m e definimos

$$Y(x) = \operatorname{grad} f(x).$$

A aplicação f determina uma direção em $\mathbb{R}^{m+1}$ que privilegia dois pontos antipodais na esfera, os que chamaremos Polo Norte e Polo Sul. O campo Y é tangente as geodésicas que saem do Polo Sul. Este campo C^∞ é conforme, não de Killing, e se anula em dois pontos.

Por ser f linear, existe um vetor fixo ω em $\mathbb{R}^{4n+4}$ tal que $f(x) = \langle x, \omega\rangle$ onde $\langle\ ,\ \rangle$ é o produto escalar usual em $\mathbb{R}^{4n+4}$. Então o gradiente de f em $\mathbb{R}^{4n+4}$ é o vetor constante ω e para obter $\operatorname{grad} f$ (o gradiente em S^{4n+3})

só precisamos tirar a parte normal:

$$Y(x) = \mathrm{grad} f(x) = \omega - \langle \omega, x \rangle \vec{x} = \omega - f(x)\vec{x}.$$

As derivadas de Y em $\mathbb{R}^{4n+4}$ e em $\mathbb{S}^{4n+3}$ são

$$\begin{aligned} D_X Y &= -(D_X f)\vec{x} - fX = -\langle \omega, X \rangle \vec{x} - fX, \\ \nabla_X Y &= -fX. \end{aligned} \tag{III.25}$$

Definimos a variação ξ_t como o transporte paralelo do ξ ao longo das curvas integrais de Y por um tempo t. Notar que $\xi_t(x)$ é um q-vetor unitário $\forall x \in \mathbb{S}^{4n+3}$, assim ξ_t representa $\forall t$ uma distribuição orientada de dimensão q.

Teorema III.11. *As fibrações de Hopf $S^3 \hookrightarrow S^{4n+3}$ são instáveis como pontos críticos da energia $\forall n \geq 1$.*

Demonstração. Queremos verificar que $\frac{\partial^2 \mathcal{E}(\xi_t)}{\partial t^2}\Big|_{t=0} \leq 0$, onde ξ_t é a descrita acima. Da definição de ξ_t, o vetor diretor da variação é

$$V = \nabla_Y \xi = \mathbf{I} Y_{\mathcal{H}} \wedge \mathbf{J}x \wedge \mathbf{K}x + \mathbf{I}x \wedge \mathbf{J}Y_{\mathcal{H}} \wedge \mathbf{K}x + \mathbf{I}x \wedge \mathbf{J}x \wedge \mathbf{K}Y_{\mathcal{H}}.$$

Para avaliar o hessiano (III.24) com $W = V$, primeiro calculamos o fator $g(V, \nabla^*\nabla V)$. Para $X \in T\mathbb{S}^{4n+3}$, a derivada de V em $\mathbb{R}^{4n+4}$ é

$$\begin{aligned} D_X V =& \mathbf{I}(D_X Y_{\mathcal{H}}) \wedge \mathbf{J}x \wedge \mathbf{K}x + \mathbf{I}Y_{\mathcal{H}} \wedge \mathbf{J}X \wedge \mathbf{K}x + \mathbf{I}Y_{\mathcal{H}} \wedge \mathbf{J}x \wedge \mathbf{K}X + \\ &+ \mathbf{I}X \wedge \mathbf{J}Y_{\mathcal{H}} \wedge \mathbf{K}x + \mathbf{I}x \wedge \mathbf{J}(D_X Y_{\mathcal{H}}) \wedge \mathbf{K}x + \mathbf{I}x \wedge \mathbf{J}Y_{\mathcal{H}} \wedge \mathbf{K}X + \\ &+ \mathbf{I}X \wedge \mathbf{J}x \wedge \mathbf{K}Y_{\mathcal{H}} + \mathbf{I}x \wedge \mathbf{J}X \wedge \mathbf{K}Y_{\mathcal{H}} + \mathbf{I}x \wedge \mathbf{J}x \wedge \mathbf{K}(D_X Y_{\mathcal{H}}). \end{aligned}$$

Para obter $D_X Y_{\mathcal{H}}$ é mais fácil calcular a derivada da parte vertical e depois subtrair de $D_X Y$. Como

$$Y_{\mathcal{V}} = g(Y, \mathbf{I}x)\mathbf{I}x + g(Y, \mathbf{J}x)\mathbf{J}x + g(Y, \mathbf{K}x)\mathbf{K}x,$$

a derivada é

$$\begin{aligned} D_X Y_{\mathcal{V}} =& (D_X Y)_{\mathcal{V}} + g(Y, \mathbf{I}X)\mathbf{I}x + g(Y, \mathbf{I}x)\mathbf{I}X + \\ &+ g(Y, \mathbf{J}X)\mathbf{J}x + g(Y, \mathbf{J}x)\mathbf{J}X + g(Y, \mathbf{K}X)\mathbf{K}x + g(Y, \mathbf{K}x)\mathbf{K}X. \end{aligned}$$

Então junto com (III.25),

$$\begin{aligned} D_X Y_{\mathcal{H}} &= D_X Y - D_X Y_{\mathcal{V}} = \\ &= -g(X, \omega)\vec{x} - fX_{\mathcal{H}} - g(Y, \mathbf{I}X)\mathbf{I}x - g(Y, \mathbf{J}X)\mathbf{J}x - \\ &\quad - g(Y, \mathbf{K}X)\mathbf{K}x - g(Y, \mathbf{I}x)\mathbf{I}X - g(Y, \mathbf{J}x)\mathbf{J}X - g(Y, \mathbf{K}x)\mathbf{K}X. \end{aligned} \tag{III.26}$$

Observar que $g(X,\omega) = g(X,Y)$ pois X é tangente à esfera. Assim a derivada de V projetada na esfera fica

$$\text{(III.27)}\qquad \begin{aligned}\nabla_X V =& - 3g(X,Y)\xi - f\nabla_X\xi - g(Y,\mathbf{I}x)D_{\mathbf{I}X}\xi\big|_T - \\ &- g(Y,\mathbf{J}x)D_{\mathbf{J}X}\xi\big|_T - g(Y,\mathbf{K}x)D_{\mathbf{K}X}\xi\big|_T + \\ &+ \mathbf{I}Y_{\mathcal{H}} \wedge (\mathbf{J}X)_T \wedge \mathbf{K}x + \mathbf{I}Y_{\mathcal{H}} \wedge \mathbf{J}x \wedge (\mathbf{K}X)_T + \\ &+ (\mathbf{I}X)_T \wedge \mathbf{J}Y_{\mathcal{H}} \wedge \mathbf{K}x + \mathbf{I}x \wedge \mathbf{J}Y_{\mathcal{H}} \wedge (\mathbf{K}X)_T + \\ &+ (\mathbf{I}X)_T \wedge \mathbf{J}x \wedge \mathbf{K}Y_{\mathcal{H}} + \mathbf{I}x \wedge (\mathbf{J}X)_T \wedge \mathbf{K}Y_{\mathcal{H}},\end{aligned}$$

onde o subíndice $_T$ indica a parte tangente a S^{4n+3}. Notar que escrevemos $D_{\mathbf{I}X}\xi|_T$ e não $\nabla_{\mathbf{I}X}\xi$ pois $\mathbf{I}X$ pode ter componente normal à esfera (isto é, $\mathbf{I}X$ pode não ser tangente à esfera). É mais fácil continuar os cálculos se distinguimos os casos $X \in \mathcal{V}$ e $X \in \mathcal{H}$.

Primeiro se $X \in \mathcal{V}$, notar que $\mathbf{I}X, \mathbf{J}X$ e $\mathbf{K}X$ podem ter componente normal à esfera. Então dos termos $D_{\mathbf{I}X}\xi|_T, D_{\mathbf{J}X}\xi|_T$ e $D_{\mathbf{K}X}\xi|_T$ de (III.27) só temos que levar em conta a derivada na direção normal pois por (III.21) a derivada da parte vertical é nula. Assim

$$\begin{aligned}\Big[-g(Y,\mathbf{I}x)D_{\mathbf{I}X}\xi - g(Y,\mathbf{J}x)D_{\mathbf{J}X}\xi - g(Y,\mathbf{K}x)D_{\mathbf{K}X}\xi\Big]_T =& \\ = + g(Y,\mathbf{I}x)g(X,\mathbf{I}x)D_x\xi + g(Y,\mathbf{J}x)g(X,\mathbf{J}x)D_x\xi +& \\ + g(Y,\mathbf{K}x)g(X,\mathbf{K}x)D_x\xi = g(Y,X_{\mathcal{V}})D_x\xi = g(Y,X)\xi&.\end{aligned}$$

Assim a equação (III.27) com $X \in \mathcal{V}$ fica

$$\text{(III.28)}\qquad \begin{aligned}\nabla_X V =& - 2g(X,Y)\xi + \mathbf{I}Y_{\mathcal{H}} \wedge (\mathbf{J}X)_{\mathcal{V}} \wedge \mathbf{K}x + \\ &+ \mathbf{I}Y_{\mathcal{H}} \wedge \mathbf{J}x \wedge (\mathbf{K}X)_{\mathcal{V}} + (\mathbf{I}X)_{\mathcal{V}} \wedge \mathbf{J}Y_{\mathcal{H}} \wedge \mathbf{K}x + \\ &+ \mathbf{I}x \wedge \mathbf{J}Y_{\mathcal{H}} \wedge (\mathbf{K}X)_{\mathcal{V}} + (\mathbf{I}X)_{\mathcal{V}} \wedge \mathbf{J}x \wedge \mathbf{K}Y_{\mathcal{H}} + \\ &+ \mathbf{I}x \wedge (\mathbf{J}X)_{\mathcal{V}} \wedge \mathbf{K}Y_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

Derivamos separadamente os termos de (III.28) uma segunda vez na direção $X \in \mathcal{V}$. Lembrar que V é de tipo $\mathcal{H}\wedge\mathcal{V}\wedge\mathcal{V}$ e que queremos saber quanto vale $g(V, \nabla^*\nabla V)$.

$$\text{(III.29)}\qquad \nabla_X\big(g(X,Y)\xi\big)\big|_{\mathcal{H}\mathcal{V}\mathcal{V}} = g(X,Y)\nabla_X\xi = 0,$$

$$\text{(III.30)}\qquad \begin{aligned}&D_X\big(\mathbf{I}Y_{\mathcal{H}} \wedge (\mathbf{J}X)_{\mathcal{V}} \wedge \mathbf{K}x + \mathbf{I}Y_{\mathcal{H}} \wedge \mathbf{J}x \wedge (\mathbf{K}X)_{\mathcal{V}}\big) = \\ &+\mathbf{I}(D_X Y_{\mathcal{H}}) \wedge (\mathbf{J}X)_{\mathcal{V}} \wedge \mathbf{K}x + \mathbf{I}Y_{\mathcal{H}} \wedge D_X\big((\mathbf{J}X)_{\mathcal{V}}\big) \wedge \mathbf{K}x + \\ &+\mathbf{I}Y_{\mathcal{H}} \wedge (\mathbf{J}X)_{\mathcal{V}} \wedge \mathbf{K}X + \mathbf{I}(D_X Y_{\mathcal{H}}) \wedge \mathbf{J}x \wedge (\mathbf{K}X)_{\mathcal{V}} + \\ &+\mathbf{I}Y_{\mathcal{H}} \wedge \mathbf{J}X \wedge (\mathbf{K}X)_{\mathcal{V}} + \mathbf{I}Y_{\mathcal{H}} \wedge \mathbf{J}x \wedge D_X\big((\mathbf{K}X)_{\mathcal{V}}\big).\end{aligned}$$

Dos termos de (III.30) que contêm $D_X Y_{\mathcal{H}}$ não vai aparecer nenhum do tipo $\mathcal{H} \wedge \mathcal{V} \wedge \mathcal{V}$ pois por (III.26) se $X \in \mathcal{V}$, $D_X Y_{\mathcal{H}}$ será vertical ou normal à esfera.

Avaliamos a parte vertical das derivadas $D_X\big((\mathbf{J}X)_{\mathcal{V}}\big)$ e $D_X\big((\mathbf{K}X)_{\mathcal{V}}\big)$ junto aos fatores comparáveis de (III.28) com $X = \nabla_{e_\alpha}e_\alpha \in \mathcal{V}$.

$$
\begin{aligned}
&\nabla_X\big((\mathbf{J}X)_\mathcal{V}\big)\big|_\mathcal{V} - (\mathbf{J}\nabla_X X)_\mathcal{V} = \\
&=\nabla_X\Big(g(\mathbf{J}X,\mathbf{I}x)\mathbf{I}x + g(\mathbf{J}X,\mathbf{J}x)\mathbf{J}x + g(\mathbf{J}X,\mathbf{K}x)\mathbf{K}x\Big)\Big|_\mathcal{V} - \\
&\quad - g(\mathbf{J}\nabla_X X,\mathbf{I}x)\mathbf{I}x - g(\mathbf{J}\nabla_X X,\mathbf{J}x)\mathbf{J}x - g(\mathbf{J}\nabla_X X,\mathbf{K}x)\mathbf{K}x \\
&=\nabla_X\Big(g(X,\mathbf{K}x)\mathbf{I}x - g(X,\mathbf{I}x)\mathbf{K}x\Big)\Big|_\mathcal{V} - g(\nabla_X X,\mathbf{K}x)\mathbf{I}x + \\
&\quad + g(\nabla_X X,\mathbf{I}x)\mathbf{K}x = g(X,\nabla_X(\mathbf{K}x))\mathbf{I}x + g(X,\mathbf{K}x)(\mathbf{I}X)_\mathcal{V} \\
&\quad - g(X,\nabla_X(\mathbf{I}x))\mathbf{K}x - g(X,\mathbf{I}x)(\mathbf{K}X)_\mathcal{V} = \\
&=g(X,\mathbf{K}x)(\mathbf{I}X)_\mathcal{V} - g(X,\mathbf{I}x)(\mathbf{K}X)_\mathcal{V}.
\end{aligned} \tag{III.31}
$$

Do mesmo modo

$$
\begin{aligned}
\nabla_X\big((\mathbf{K}X)_\mathcal{V}\big)\big|_\mathcal{V} - (\mathbf{K}\nabla_X X)_\mathcal{V} &= \\
&= -g(X,\mathbf{J}x)(\mathbf{I}X)_\mathcal{V} + g(X,\mathbf{I}x)(\mathbf{J}X)_\mathcal{V}.
\end{aligned} \tag{III.32}
$$

Escolhemos como vetores verticais da base os $\{\mathbf{I}x, \mathbf{J}x, \mathbf{K}x\}$ e somamos (III.30) para estes vetores verticais. Por (III.31) e (III.32)

$$
\begin{aligned}
&\sum_{X=\mathbf{I}x,\mathbf{J}x,\mathbf{K}x}\Big[\nabla_X\big(\mathbf{I}Y_\mathcal{H}\wedge(\mathbf{J}X)_\mathcal{V}\wedge\mathbf{K}x + \mathbf{I}Y_\mathcal{H}\wedge\mathbf{J}x\wedge(\mathbf{K}X)_\mathcal{V}\big) - \\
&\qquad - \mathbf{I}Y_\mathcal{H}\wedge(\mathbf{J}\nabla_X X)_\mathcal{V}\wedge\mathbf{K}x - \mathbf{I}Y_\mathcal{H}\wedge\mathbf{J}x\wedge(\mathbf{K}\nabla_X X)_\mathcal{V}\Big]_{\mathcal{HVV}} = \\
&= -2\mathbf{I}Y_\mathcal{H}\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}x.
\end{aligned} \tag{III.33}
$$

Do mesmo modo para a derivada dos outros termos de (III.28), sabendo que

$$
\nabla_X\big((\mathbf{I}X)_\mathcal{V}\big)\big|_\mathcal{V} - (\mathbf{I}\nabla_X X)_\mathcal{V} = -g(X,\mathbf{K}x)(\mathbf{J}X)_\mathcal{V} + g(X,\mathbf{J}x)(\mathbf{K}X)_\mathcal{V},
$$

temos

$$
\begin{aligned}
&\sum_{X=\mathbf{I}x,\mathbf{J}x,\mathbf{K}x}\Big[\nabla_X\big((\mathbf{I}X)_\mathcal{V}\wedge\mathbf{J}Y_\mathcal{H}\wedge\mathbf{K}x + \mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}Y_\mathcal{H}\wedge(\mathbf{K}X)_\mathcal{V}\big) - \\
&\qquad - (\mathbf{I}\nabla_X X)_\mathcal{V}\wedge\mathbf{J}Y_\mathcal{H}\wedge\mathbf{K}x - \mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}Y_\mathcal{H}\wedge(\mathbf{K}\nabla_X X)_\mathcal{V}\Big]_{\mathcal{HVV}} = \\
&= -2\mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}Y_\mathcal{H}\wedge\mathbf{K}x,
\end{aligned} \tag{III.34}
$$

e

$$
\begin{aligned}
&\sum_{X=\mathbf{I}x,\mathbf{J}x,\mathbf{K}x}\Big[(\mathbf{I}X)_\mathcal{V}\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}Y_\mathcal{H} + \mathbf{I}x\wedge(\mathbf{J}X)_\mathcal{V}\wedge\mathbf{K}Y_\mathcal{H} - \\
&\qquad - (\mathbf{I}\nabla_X X)_\mathcal{V}\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}Y_\mathcal{H} - \mathbf{I}x\wedge(\mathbf{J}\nabla_X X)_\mathcal{V}\wedge\mathbf{K}Y_\mathcal{H}\Big]_{\mathcal{HVV}} = \\
&= -2\mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}Y_\mathcal{H}.
\end{aligned} \tag{III.35}
$$

De (III.29), (III.33), (III.34) e (III.35) concluimos que a soma das derivadas nas direções verticais do laplaciano de V é

$$
\text{(III.36)}\qquad
\begin{aligned}
&\sum_{e_\alpha=\mathbf{I}x,\mathbf{J}x,\mathbf{K}x} \nabla_{e_\alpha}\nabla_{e_\alpha}V - \nabla_{\nabla_{e_\alpha}e_\alpha}V\Big|_{\mathcal{H}\mathcal{V}\mathcal{V}} =\\
&= -\,2\mathbf{I}Y_{\mathcal{H}}\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}x - 2\mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}Y_{\mathcal{H}}\wedge\mathbf{K}x - 2\mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}Y_{\mathcal{H}} =\\
&= -\,2\nabla_Y\xi = -2V.
\end{aligned}
$$

Consideremos agora $X\in\mathcal{H}$. Na equação (III.27) podemos escrever $\nabla_{\mathbf{I}X}\xi$ em vez de $D_{\mathbf{I}X}\xi|_T$ pois agora $\mathbf{I}X$ será sempre tangente à esfera. Se $X\in\mathcal{H}$

$$
\text{(III.37)}\qquad
\begin{aligned}
\nabla_X V = &-3g(X,Y)\xi - f\nabla_X\xi -\\
&-g(Y,\mathbf{I}x)\nabla_{\mathbf{I}X}\xi - g(Y,\mathbf{J}x)\nabla_{\mathbf{J}X}\xi - g(Y,\mathbf{K}x)\nabla_{\mathbf{K}X}\xi +\\
&+\mathbf{I}Y_{\mathcal{H}}\wedge\mathbf{J}X\wedge\mathbf{K}x + \mathbf{I}Y_{\mathcal{H}}\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}X + \mathbf{I}X\wedge\mathbf{J}Y_{\mathcal{H}}\wedge\mathbf{K}x\\
&+\mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}Y_{\mathcal{H}}\wedge\mathbf{K}X + \mathbf{I}X\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}Y_{\mathcal{H}} + \mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}X\wedge\mathbf{K}Y_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}
$$

Derivamos uma segunda vez e procuramos de cada termo os de tipo $\mathcal{H}\wedge\mathcal{V}\wedge\mathcal{V}$. Assim

$$
\text{(III.38)}\qquad \nabla_X\big(g(X,Y)\xi\big)\big|_{\mathcal{H}\mathcal{V}\mathcal{V}} = g(X,Y)\nabla_X\xi,
$$

$$
\text{(III.39)}\qquad \nabla_X\big(f\nabla_X\xi\big)\big|_{\mathcal{H}\mathcal{V}\mathcal{V}} = g(X,Y)\nabla_X\xi + f\nabla_X\nabla_X\xi\big|_{\mathcal{H}\mathcal{V}\mathcal{V}},
$$

pois $\nabla_X f = g(X, gradf) = g(X,Y)$. Também

$$
\text{(III.40)}\qquad
\begin{aligned}
\nabla_X\big(g(Y,\mathbf{I}x)\nabla_{\mathbf{I}X}\xi\big)\big|_{\mathcal{H}\mathcal{V}\mathcal{V}} &= g(\nabla_X Y,\mathbf{I}x)\nabla_{\mathbf{I}X}\xi +\\
&+ g(Y,\nabla_X\mathbf{I}x)\nabla_{\mathbf{I}X}\xi + g(Y,\mathbf{I}x)(\nabla_X\nabla_{\mathbf{I}X}\xi)\big|_{\mathcal{H}\mathcal{V}\mathcal{V}} =\\
&= -\,g(fX,\mathbf{I}x)\nabla_{\mathbf{I}X}\xi + g(Y,\mathbf{I}X)\nabla_{\mathbf{I}X}\xi +\\
&+ g(Y,\mathbf{I}x)(\nabla_X\nabla_{\mathbf{I}X}\xi)\big|_{\mathcal{H}\mathcal{V}\mathcal{V}}.
\end{aligned}
$$

Para (III.40), como

$$
\nabla_{\mathbf{I}X}\xi = -X\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}x - \mathbf{I}x\wedge\mathbf{K}X\wedge\mathbf{K}x + \mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{J}X,
$$

então

$$
\begin{aligned}
\nabla_X(\nabla_{\mathbf{I}X}\xi) = &-\nabla_X X\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}x - X\wedge\mathbf{J}X\wedge\mathbf{K}x -\\
&- X\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}X - \mathbf{I}X\wedge\mathbf{K}X\wedge\mathbf{K}x - \mathbf{I}x\wedge\nabla_X(\mathbf{K}X)\wedge\mathbf{K}x +\\
&+\mathbf{I}X\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{J}X + \mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}x\wedge\nabla_X(\mathbf{J}X).
\end{aligned}
$$

Notar que $\big(\nabla_X(\mathbf{K}X)\big)_{\mathcal{H}} = \big(D_X(\mathbf{K}X)\big)_{\mathcal{H}} = (\mathbf{K}D_XX)_{\mathcal{H}} = \mathbf{K}(D_XX)_{\mathcal{H}} = \mathbf{K}(\nabla_XX)_{\mathcal{H}}$ pois $X\in\mathcal{H}$. Assim (III.40) fica

$$
\text{(III.41)}\qquad
\begin{aligned}
&\nabla_X\big(g(Y,\mathbf{I}x)\nabla_{\mathbf{I}X}\xi\big)\big|_{\mathcal{H}\mathcal{V}\mathcal{V}} = g(Y,\mathbf{I}X)\nabla_{\mathbf{I}X}\xi +\\
&+g(Y,\mathbf{I}x)\Big(-(\nabla_XX)_{\mathcal{H}}\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}x - \mathbf{I}x\wedge\mathbf{K}(\nabla_XX)_{\mathcal{H}}\wedge\mathbf{K}x +\\
&+\mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{J}(\nabla_XX)_{\mathcal{H}}\Big) = g(Y,\mathbf{I}X)\nabla_{\mathbf{I}X}\xi + g(Y,\mathbf{I}x)\nabla_{\mathbf{I}(\nabla_XX)}\xi.
\end{aligned}
$$

Também a derivada dos outros termos de (III.37),

$$\nabla_X\big(g(Y,\mathbf{J}x)\nabla_{\mathbf{J}X}\xi\big)\big|_{\mathcal{HVV}} = \\ = g(Y,\mathbf{J}X)\nabla_{\mathbf{J}X}\xi + g(Y,\mathbf{J}x)\nabla_{\mathbf{J}(\nabla_X X)}\xi, \tag{III.42}$$

$$\nabla_X\big(g(Y,\mathbf{K}x)\nabla_{\mathbf{K}X}\xi\big)\big|_{\mathcal{HVV}} = \\ = g(Y,\mathbf{K}X)\nabla_{\mathbf{K}X}\xi + g(Y,\mathbf{K}x)\nabla_{\mathbf{K}(\nabla_X X)}\xi. \tag{III.43}$$

Por finalizar com a segunda derivada de V, derivamos os termos do tipo $\mathbf{I}Y_{\mathcal{H}}\wedge\mathbf{J}X\wedge\mathbf{K}x$ de (III.37),

$$\nabla_X\big(\mathbf{I}Y_{\mathcal{H}}\wedge\mathbf{J}X\wedge\mathbf{K}x\big)\big|_{\mathcal{HVV}} = \big(\nabla_X(\mathbf{I}Y_{\mathcal{H}})\big)_{\mathcal{V}}\wedge\mathbf{J}X\wedge\mathbf{K}x + \\ + \mathbf{I}Y_{\mathcal{H}}\wedge\big(\nabla_X(\mathbf{J}X)\big)_{\mathcal{V}}\wedge\mathbf{K}x. \tag{III.44}$$

Por (III.26) sabemos,

$$(\nabla_X\mathbf{I}Y_{\mathcal{H}})_{\mathcal{V}} = (\mathbf{I}D_XY_{\mathcal{H}})_{\mathcal{V}} = -g(Y,X)\mathbf{I}x - g(Y,\mathbf{J}X)\mathbf{K}x + g(Y,\mathbf{K}X)\mathbf{J}x.$$

Calculamos também $\big(\nabla_X(\mathbf{J}X)\big)_{\mathcal{V}}$,

$$\big(\nabla_X(\mathbf{J}X)\big)_{\mathcal{V}} = \big(D_X(\mathbf{J}X)\big)_{\mathcal{V}} = (\mathbf{J}D_XX)_{\mathcal{V}} = \\ =(\mathbf{J}\nabla_XX)_{\mathcal{V}} + \mathbf{J}\big(g(D_XX,x)\vec{x}\big) = (\mathbf{J}\nabla_XX)_{\mathcal{V}} - \|X\|^2\mathbf{J}x.$$

Portanto, como os X são unitários, (III.44) fica

$$\nabla_X\big(\mathbf{I}Y_{\mathcal{H}}\wedge\mathbf{J}X\wedge\mathbf{K}x\big)\big|_{\mathcal{HVV}} = -g(Y,X)\mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}X\wedge\mathbf{K}x + \\ + g(Y,\mathbf{K}X)\mathbf{I}(\mathbf{K}X)\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}x - \mathbf{I}Y_{\mathcal{H}}\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}x + \\ + \mathbf{I}Y_{\mathcal{H}}\wedge\big(\mathbf{J}\nabla_XX\big)_{\mathcal{V}}\wedge\mathbf{K}x. \tag{III.45}$$

O último termo desta equação vai se anular com o correspondente de (III.37) para $X = \nabla_{e_i}e_i$. Analogamente, a derivada de todos os termos de (III.37) do tipo $\mathbf{I}Y_{\mathcal{H}}\wedge\mathbf{J}X\wedge\mathbf{K}x$ ficam

$$\nabla_X\big(\mathbf{I}Y_{\mathcal{H}}\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}X\big)\big|_{\mathcal{HVV}} = \\ = -\, g(X,Y)\mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}X + g(Y,\mathbf{J}X)\mathbf{I}(\mathbf{J}X)\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}x - \\ -\, \mathbf{I}Y_{\mathcal{H}}\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}x + \mathbf{I}Y_{\mathcal{H}}\wedge\mathbf{J}x\wedge(\mathbf{K}\nabla_XX)_{\mathcal{V}}, \tag{III.46}$$

$$\nabla_X\big(\mathbf{I}X\wedge\mathbf{J}Y_{\mathcal{H}}\wedge\mathbf{K}x\big)\big|_{\mathcal{HVV}} = \\ = -\, g(X,Y)\mathbf{I}X\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}x + g(Y,\mathbf{K}X)\mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}(\mathbf{K}X)\wedge\mathbf{K}x - \\ -\, \mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}Y_{\mathcal{H}}\wedge\mathbf{K}x + (\mathbf{I}\nabla_XX)_{\mathcal{V}}\wedge\mathbf{J}Y_{\mathcal{H}}\wedge\mathbf{K}x, \tag{III.47}$$

$$\nabla_X\big(\mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}Y_{\mathcal{H}}\wedge\mathbf{K}X\big)\big|_{\mathcal{HVV}} = \\ = -\, g(X,Y)\mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}x\wedge\mathbf{K}X + g(Y,\mathbf{I}X)\mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}(\mathbf{I}X)\wedge\mathbf{K}x - \\ -\, \mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}Y_{\mathcal{H}}\wedge\mathbf{K}x + \mathbf{I}x\wedge\mathbf{J}Y_{\mathcal{H}}\wedge(\mathbf{K}\nabla_XX)_{\mathcal{V}}, \tag{III.48}$$

$$\begin{aligned}
&\nabla_X\big(\mathrm{I}X \wedge \mathrm{J}x \wedge \mathrm{K}Y_{\mathcal{H}}\big)\big|_{\mathcal{HVV}} = \\
\text{(III.49)}\qquad &= -\, g(X,Y)\mathrm{I}X \wedge \mathrm{J}x \wedge \mathrm{K}x + g(Y,\mathrm{J}X)\mathrm{I}x \wedge \mathrm{J}x \wedge \mathrm{K}(\mathrm{J}X) - \\
&- \mathrm{I}x \wedge \mathrm{J}x \wedge \mathrm{K}Y_{\mathcal{H}} + (\mathrm{I}\nabla_X X)_{\mathcal{V}} \wedge \mathrm{J}x \wedge \mathrm{K}Y_{\mathcal{H}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\nabla_X\big(\mathrm{I}x \wedge \mathrm{J}X \wedge \mathrm{K}Y_{\mathcal{H}}\big)\big|_{\mathcal{HVV}} = \\
\text{(III.50)}\qquad &= -\, g(X,Y)\mathrm{I}x \wedge \mathrm{J}X \wedge \mathrm{K}x + g(Y,\mathrm{I}X)\mathrm{I}x \wedge \mathrm{J}x \wedge \mathrm{K}(\mathrm{I}X) - \\
&- \mathrm{I}x \wedge \mathrm{J}x \wedge \mathrm{K}Y_{\mathcal{H}} + \mathrm{I}x \wedge (\mathrm{J}\nabla_X X)_{\mathcal{V}} \wedge \mathrm{K}Y_{\mathcal{H}}.
\end{aligned}$$

Se somamos as equações de (III.45) a (III.50) para todos os vetores horizontais e subtraimos os mesmos que derivamos mas com $X = \nabla_{e_i}e_i$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{X\in\mathcal{H}} - 2g(Y,X)\big[\mathrm{I}X \wedge \mathrm{J}x \wedge \mathrm{K}x + \mathrm{I}x \wedge \mathrm{J}X \wedge \mathrm{K}x + \\
&\quad +\mathrm{I}x \wedge \mathrm{J}x \wedge \mathrm{K}X\big] + \sum_{X\in\mathcal{H}} \big[g(Y,\mathrm{K}X)\mathrm{I}(\mathrm{K}X) \wedge \mathrm{J}x \wedge \mathrm{K}x + \\
&\quad +g(Y,\mathrm{J}X)\mathrm{I}(\mathrm{J}X) \wedge \mathrm{J}x \wedge \mathrm{K}x + g(Y,\mathrm{K}X)\mathrm{I}x \wedge \mathrm{J}(\mathrm{K}X) \wedge \mathrm{K}x \\
\text{(III.51)}\qquad &\quad +g(Y,\mathrm{I}X)\mathrm{I}x \wedge \mathrm{J}(\mathrm{I}X) \wedge \mathrm{K}x + g(Y,\mathrm{J}X)\mathrm{I}x \wedge \mathrm{J}x \wedge \mathrm{K}(\mathrm{J}X) + \\
&\quad +g(Y,\mathrm{I}X)\mathrm{I}x \wedge \mathrm{J}x \wedge \mathrm{K}(\mathrm{I}X)\big] - 2\sum_{X\in\mathcal{H}} \big[\mathrm{I}Y_{\mathcal{H}} \wedge \mathrm{J}x \wedge \mathrm{K}x + \\
&\quad +\mathrm{I}x \wedge \mathrm{J}Y_{\mathcal{H}} \wedge \mathrm{K}x + \mathrm{I}x \wedge \mathrm{J}x \wedge \mathrm{K}Y_{\mathcal{H}}\big] = \\
&= -2\nabla_{Y_{\mathcal{H}}}\xi + 2\nabla_{Y_{\mathcal{H}}}\xi - 8n\nabla_Y\xi = -8n\nabla_Y\xi.
\end{aligned}$$

Por tanto de (III.38), (III.39), (III.41), (III.42), (III.43) e (III.51) obtemos,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{4n} \nabla_{e_i}\nabla_{e_i}V - \nabla_{\nabla_{e_i}e_i}V\big|_{\mathcal{HVV}} = \\
\text{(III.52)}\qquad &= -\, 7\nabla_{Y_{\mathcal{H}}}\xi - f\nabla^*\nabla\xi\big|_{\mathcal{HVV}} - 8n\nabla_Y\xi = (-7-8n)\nabla_Y\xi = \\
&= -\, (8n+7)V,
\end{aligned}$$

pois o laplaciano da fibração de Hopf $\nabla^*\nabla\xi$ não contem termos do tipo $\mathcal{H} \wedge \mathcal{V} \wedge \mathcal{V}$ (é ponto crítico, ver equação (III.22)). Conseguimos calcular o laplaciano de V somando (III.36) e (III.52),

$$\begin{aligned}
\nabla^*\nabla V\Big|_{\mathcal{HVV}} &= \sum_{a=1}^{n} -\nabla_{e_a}\nabla_{e_a}V + \nabla_{\nabla_{e_a}e_a}V\Big|_{\mathcal{HVV}} = \\
&= 2V + (8n+7)V = (8n+9)V.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$g(\nabla^*\nabla V, V) = (8n+9)g(V,V). \qquad \text{(III.53)}$$

O outro termo de hessiano (III.24) que precisamos calcular é $g(\nabla_{\partial t}\nabla_{\partial t}\xi_t\big|_{t=0}, \nabla^*\nabla\xi)$. Sabendo que a fibração de Hopf é ponto crítico (III.22),

$$\text{(III.54)}\quad g(\nabla_{\partial t}\nabla_{\partial t}\xi_t\big|_{t=0}, \nabla^*\nabla\xi) = \\ = g(\nabla_{\partial t}\nabla_{\partial t}\xi_t\big|_{t=0}, 12n\xi) + g(\nabla_{\partial t}\nabla_{\partial t}\xi_t\big|_{t=0}, \xi_{\mathcal{HHV}}),$$

onde $\xi_{\mathcal{HHV}} = -\sum_{i=1}^{4n}(2\mathbf{I}e_i \wedge \mathbf{J}e_i \wedge \mathbf{K}x + 2\mathbf{I}e_i \wedge \mathbf{J}x \wedge \mathbf{K}e_i + 2\mathbf{I}x \wedge \mathbf{J}e_i \wedge \mathbf{K}e_i)$.

Para o primeiro termo de (III.54), como ξ_t é sempre um q-vetor unitário

$$g(\nabla_{\partial t}\nabla_{\partial t}\xi_t, \xi_t) + g(\nabla_{\partial t}\xi_t, \nabla_{\partial t}\xi_t) = 0 \quad \forall t.$$

Para $t = 0$,

$$\text{(III.55)}\qquad g(\nabla_{\partial t}\nabla_{\partial t}\xi_t\big|_{t=0}, \xi) = -g(V, V).$$

Para calcular o segundo termo de (III.54), $g(\nabla_{\partial t}\nabla_{\partial t}\xi_t\big|_{t=0}, \xi_{\mathcal{HHV}})$, usamos fortemente o fato de que ξ_t é um 3-vetor

$$\xi_t = v_1(t) \wedge v_2(t) \wedge v_3(t),$$

onde $v_1(0) = \mathbf{I}x$, $v_2(0) = \mathbf{J}x$ e $v_3(0) = \mathbf{K}x$. A primeira derivada é

$$\nabla_{\partial t}\xi_t = v_1'(t) \wedge v_2(t) \wedge v_3(t) + v_1(t) \wedge v_2'(t) \wedge v_3(t) + v_1(t) \wedge v_2(t) \wedge v_3'(t).$$

Para a segunda derivada, somente escrevemos os possíveis termos de tipo $\mathcal{H} \wedge \mathcal{H} \wedge \mathcal{V}$ quando $t = 0$,

$$\nabla_{\partial t}\nabla_{\partial t}\xi_t\Big|_{\mathcal{HHV}} = 2v_1'(t) \wedge v_2'(t) \wedge v_3(t) + 2v_1'(t) \wedge v_2(t) \wedge v_3'(t) + \\ + 2v_1(t) \wedge v_2'(t) \wedge v_3'(t).$$

Mas $\big(v_1'(0)\big)_{\mathcal{H}} = \big(\nabla_Y(\mathbf{I}x)\big)_{\mathcal{H}} = \mathbf{I}Y_{\mathcal{H}}$, $\big(v_2'(0)\big)_{\mathcal{H}} = \big(\nabla_Y(\mathbf{J}x)\big)_{\mathcal{H}} = \mathbf{J}Y_{\mathcal{H}}$, e também $\big(v_3'(0)\big)_{\mathcal{H}} = \big(\nabla_Y(\mathbf{K}x)\big)_{\mathcal{H}} = \mathbf{K}Y_{\mathcal{H}}$. Então,

$$\left(\nabla_{\partial t}\nabla_{\partial t}\xi_t\big|_{t=0}\right)\Big|_{\mathcal{HHV}} = \\ = 2\mathbf{I}Y_{\mathcal{H}} \wedge \mathbf{J}Y_{\mathcal{H}} \wedge \mathbf{K}x + 2\mathbf{I}Y_{\mathcal{H}} \wedge \mathbf{J}x \wedge \mathbf{K}Y_{\mathcal{H}} + 2\mathbf{I}x \wedge \mathbf{J}Y_{\mathcal{H}} \wedge \mathbf{K}Y_{\mathcal{H}}.$$

Assim,

$$g(\nabla_{\partial t}\nabla_{\partial t}\xi_t\big|_{t=0}, \xi_{\mathcal{H}\mathcal{H}\mathcal{V}}) = -4\sum_{i=1}^{4n}\Big(g(\mathbf{I}Y_{\mathcal{H}} \wedge \mathbf{J}Y_{\mathcal{H}}\ , \mathbf{I}e_i \wedge \mathbf{J}e_i) +$$

$$+ g(\mathbf{I}Y_{\mathcal{H}} \wedge \mathbf{K}Y_{\mathcal{H}}\ , \mathbf{I}e_i \wedge \mathbf{K}e_i) + g(\mathbf{J}Y_{\mathcal{H}} \wedge \mathbf{K}Y_{\mathcal{H}}, \mathbf{J}e_i \wedge \mathbf{K}e_i)\Big)$$

$$(\text{III.56}) \quad = -4\sum_{i=1}^{4n}\Big(g(Y_{\mathcal{H}}, e_i)^2 + g(\mathbf{K}Y_{\mathcal{H}}, e_i)^2 + g(Y_{\mathcal{H}}, e_i)^2 +$$

$$+ g(\mathbf{J}Y_{\mathcal{H}}, e_i)^2 + g(Y_{\mathcal{H}}, e_i)^2 + g(\mathbf{I}Y_{\mathcal{H}}, e_i)^2\Big) =$$

$$= -24\sum_{i=1}^{4n} g(e_i, Y_{\mathcal{H}})^2 = -24g(Y_{\mathcal{H}}, Y_{\mathcal{H}}) = -8g(V, V).$$

Finalmente, de (III.53), (III.55) e (III.56),

$$\frac{\partial^2\mathcal{E}(\xi_t)}{\partial t^2}\bigg|_{t=0} = (-12n - 8 + 8n + 9)\int_M g(V,V)\nu =$$

$$= (1 - 4n)\int_M g(V,V)\nu < 0.$$

Assim ξ_t é uma variação de energia decrescente $\forall n \geq 1$.

$\square$

Em outras palavras o Teorema III.11 diz que as fibrações de Hopf $\mathbf{S}^3 \hookrightarrow \mathbf{S}^{4n+3}$ não são mínimas nem localmente entre as distribuições orientáveis de dimensão 3 em $\mathbf{S}^{4n+3}$.

CAPÍTULO IV

Volume de campos de vetores

IV.1. Introdução

Definição IV.1. O volume de um campo de vetores unitário X, $\mathrm{vol}(X)$, numa variedade (M^n, g) compacta e orientada é definido como o n-volume da subvariedade $X : M \to T^1M$ onde em T^1M, espaço tangente unitário, consideramos a métrica de Sasaki g_S.

Da definição temos,

$$\mathrm{vol}(X) = \int_{X(M)} \nu_{X(M)}(g_S),$$

onde $\nu_{X(M)}(g_S)$ é o pull-back na subvariedade $X(M)$ da forma volume de T^1M com a métrica de Sasaki g_S. Queremos calcular o volume como uma integral sobre M. Para isto temos que considerar outra métrica em M,

$$\int_{X(M)} \nu_{X(M)}(g_S) = \int_M \nu_M(X^*g_S).$$

A métrica X^*g_S e a g estão relacionadas do seguinte modo. Sejam $Y, Z \in TM$, usando a definição de métrica de Sasaki (I.2) temos

$$\begin{aligned}(X^*g_S)(Y,Z) &= g_S(dX(Y), dX(Z)) = \\ &= g\big((d\pi(dX(Y)), d\pi(dX(Z))\big) + g\big(\mathcal{K}(dX(Y)), \mathcal{K}(dX(Z))\big) = \\ &= g(Y,Z) + g(\nabla_Y X, \nabla_Z X),\end{aligned}$$

onde π é a projeção do fibrado tangente $\pi : TM \to M$ e $\mathcal{K} : TTM \to TM$ é o conector de ∇. Assim, a mudança da métrica é

$$\nu_M(X^*g_S) = \sqrt{\det(A)}\,\nu_M(g)$$

onde para um referencial ortonormal de M^n, $\{e_a\}_{a=1}^n$, A é a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 + g(\nabla_{e_1}X, \nabla_{e_1}X) & g(\nabla_{e_1}X, \nabla_{e_2}X) & \dots & g(\nabla_{e_1}X, \nabla_{e_n}X) \\ g(\nabla_{e_2}X, \nabla_{e_1}X) & 1 + g(\nabla_{e_2}X, \nabla_{e_2}X) & \dots & g(\nabla_{e_2}X, \nabla_{e_n}X) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ g(\nabla_{e_n}X, \nabla_{e_1}X) & \dots & & 1 + g(\nabla_{e_n}X, \nabla_{e_n}X) \end{pmatrix}.$$

Com um simples cálculo chegamos a que o determinante de A vale

$$\det(A) = 1 + \sum_{a=1}^{n} \|\nabla_{e_a} X\|^2 + \sum_{a<b} \|\nabla_{e_a} X \wedge \nabla_{e_b} X\|^2 + \dots$$
$$\dots + \sum_{a_1<\dots<a_{n-1}} \|\nabla_{e_{a_1}} X \wedge \dots \wedge \nabla_{e_{a_{n-1}}} X\|^2.$$

Notar que o seguinte termo que deveria aparecer na equação acima, $\nabla_{e_1} X \wedge \dots \wedge \nabla_{e_n} X$, é nulo pois X é unitário. Primeiro notar que o n-vetor $\nabla_{e_1} X \wedge \dots \wedge \nabla_{e_n} X$ é independente da base ortonormal escolhida. Agora, se consideramos uma base ortonormal onde $e_n = X$, ao avaliar

$$g(\nabla_{e_1} X \wedge \dots \wedge \nabla_{e_n} X, e_1 \wedge \dots \wedge e_{n-1} \wedge X) = \det\big(g(\nabla_{e_a} X, e_b)\big),$$

percebemos que a última coluna da matriz $\big(g(\nabla_{e_a} X, e_b)\big)$ está formada por $g(\nabla_{e_a} X, X) = 0 \quad \forall a$.

Assim, da Definição IV.1 podemos escrever,

Proposição IV.2. *Seja X campo de vetores unitário em (M^n, g) compacta e orientada. O volume de X é dado pela expressão*

$$\mathrm{vol}(X) = \int_M \sqrt{\det(\mathrm{Id} + (\nabla X)^*(\nabla X)}\nu =$$
$$(\mathrm{IV}.1) \qquad = \int_M \Bigg(1 + \sum_{a=1}^{n} \|\nabla_{e_a} X\|^2 + \sum_{a<b} \|\nabla_{e_a} X \wedge \nabla_{e_b} X\|^2 + \dots$$
$$\dots + \sum_{a_1<\dots<a_{n-1}} \|\nabla_{e_{a_1}} X \wedge \dots \wedge \nabla_{e_{a_{n-1}}} X\|^2\Bigg)^{\frac{1}{2}} \nu.$$

Depois desta proposição fica evidente que

$$\mathrm{vol}(X) \geq \mathrm{vol}(M)$$

e que a igualdade é satisfeita se e somente se X é paralelo. Existem variedades que não admitem campos paralelos e então surge naturalmente a pergunta de se existe outra limitação inferior para o volume melhor que o próprio $\mathrm{vol}(M)$. Podemos-nos perguntar se a nova limitação vai ser atingida ou não, isto é, em variedades que não admitem a definição de campos paralelos, existem campos unitários com volume menor que qualquer outro campo unitário?.

Nosso primeiro objetivo é estudar o problema nas esferas unitárias de dimensão ímpar maior ou igual a três. Na S^1 os dois únicos campos unitários que existem são paralelos. Para S^3 é conhecido o teorema,

Teorema IV.3 ([GZ]). *O único campo de vetores unitário de volume mínimo na S^3 é o campo de Hopf.*

O campo de Hopf está definido no Capítulo I. Para mostrar este teorema foram usadas calibrações. Uma calibração de dimensão q numa variedade qualquer M^n é uma q-forma diferenciável μ fechada tal que $\forall u_\alpha \in T_pM$,

$$\mu(u_1 \wedge \cdots \wedge u_q) \leq \text{volume}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_q) = \|u_1 \wedge \cdots \wedge u_q\|.$$

Dizemos que uma calibração *calibra* uma subvariedade N^q se a igualdade da equação acima é atingida somente para vetores $\{u_\alpha\}$ tangentes a N. Neste caso é imediato que N tem volume mínimo em sua classe de homologia. Seja N' outra q-subvariedade na mesma classe de homologia que N. Então,

$$\text{vol}(N) = \int_N \mu = \int_{N'} \mu \leq \int_{N'} \nu_{N'} = \text{vol}(N').$$

Em [**GZ**], os autores encontram uma 3-forma μ em $T^1\mathbf{S}^3$ fechada que calibra a subvariedade determinada pelo campo de Hopf. Assim o campo de Hopf tem volume mínimo em sua classe de homologia. Todo campo vetorial pertence a mesma classe de homologia e portanto Hopf é mínimo global. Para a unicidade, em [**GZ**] menciona-se que existem outras subvariedades de dimensão 3 em $T^1\mathbf{S}^3$ calibradas por μ mas nenhuma delas vem determinada por um campo de vetores global.

Para as esferas de outras dimensões esta técnica não serve. Se existisse uma calibração de dimensão 5 que calibrasse o campo de Hopf em $\mathbf{S}^5$, teríamos que o dobro homológico da subvariedade de Hopf, que está em outra classe de homologia, teria volume mínimo em sua classe. Em [**GZ**] encontra-se uma subvariedade que pertence à classe de homologia do dobro dos campos de Hopf e que tem menos volume que o dobro do campo de Hopf. Assim fica inútil procurar uma 5-forma fechada que calibre Hopf.

Além da dificuldade mencionada nas esferas de dimensão maior, a técnica de calibrações parece muito complicada em outro tipo de espaços.

Voltando as esferas, os campos de Hopf continuavam sendo candidatos a mínimos absolutos do volume em $\mathbf{S}^5, \mathbf{S}^7$, etc. até aparecer o seguinte resultado.

Teorema IV.4 ([J]). *O campo de Hopf em $\mathbf{S}^5$ é instável para o funcional volume.*

Para demonstrar isto, foram desenvolvidos cálculos diretos para ver que certa variação do campo de Hopf era de volume decrescente.

Outro artigo neste assunto é [**P**] onde é apresentado um campo de vetores unitário com uma singularidade e de volume muito pequeno. O campo de Pedersen P foi definido na Seção II.4. A grande vantagem de $\mathsf{P}(x)$ é que pode ser aproximado por campos unitários globalmente definidos.

Em [**P**] é conjecturado que o volume de campos unitários em $\mathbf{S}^{2k+1}$ só é atingido por uma seqüência de campos que convergem a um campo com singularidades. Isto é, que a melhor limitação inferior do funcional volume é um ínfimo e não um mínimo.

IV.2. Resultado principal

O teorema principal que queremos provar é,

Teorema IV.5. *Seja X campo de vetores unitário em M^{2k+1} então,*

$$\text{(IV.2)} \qquad \mathrm{vol}(X) \geq \int_M \left(1 + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \binom{2k}{2i}^{-1} |\sigma_{2i}(X^\perp)|\right)\nu,$$

onde $\sigma_{2i}(X^\perp)$ é a função simétrica elementar de ordem $2i$ da segunda forma fundamental da distribuição ortogonal a X (não necessariamente integrável). Para $k > 1$, a igualdade é satisfeita se e somente se X é totalmente geodésico e $X^\perp$ é integrável e umbílica.

O valor da integral dos $\sigma_{2i}(X^\perp)$ em variedades com curvatura seccional constante foi calculado em [**BLR**]. Esta integral resulta ser independente do campo X. Deste modo em $\mathbb{S}^{2k+1}$ a limitação do Teorema IV.5 é realmente uma limitação inferior para o funcional volume.

No caso da $\mathbb{S}^{2k+1}$, em [**GZ**] afirma-se que existe uma limitação numérica que coincide com a do Teorema IV.5 usando os cálculos de [**BLR**]. Afirmação que não encontramos demonstrada nos artigos que os autores fazem referência.

Para provar completamente o Teorema IV.5 vamos a realizar uma série de reduções. Para começar, trabalhamos com a matriz da segunda forma fundamental de $X^\perp$.

Seja $\{e_1, e_2, \dots e_{2k}, X\}$ um referencial local de M^{2k+1}. Sejam $h_{ij} = -g(\nabla_{e_i} X, e_j)$ as entradas da matriz da segunda forma fundamental A da distribuição complementar a X (não necessariamente integrável). Esta matriz define um endomorfismo do subespaço $X_x^\perp \subset T_xM \quad \forall x \in M$. Desde o ponto de vista algébrico, $X^\perp$ é um espaço vetorial V que tem definido um produto escalar.

Definição IV.6. O volume de uma aplicação linear $T : V^n \to V^n$ é o volume de seu gráfico. Isto é, se $\varphi : V \to V \times V$ é dada por $\varphi(v) = (v, Tv)$, então

$$\mathrm{vol}(T) = \mathrm{vol}(\varphi(V)).$$

Para calcular o volume de $\varphi(V)$ fazemos o seguinte. Definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_* : V \times \overset{n)}{\cdots} \times V &\longrightarrow \Lambda^n(V \times V) \\ (v_1, \dots, v_n) &\mapsto \varphi(v_1) \wedge \cdots \wedge \varphi(v_n) \end{aligned}$$

que é multilinear e anti-simétrica. Pela propriedade universal da álgebra tensorial, φ_* define uma única aplicação, que denotamos pela mesma letra, $\varphi_* : \Lambda^n V \to \Lambda^n(V \times V)$ tal que

$$\varphi_*(v_1 \wedge \cdots \wedge v_n) = \varphi(v_1) \wedge \cdots \wedge \varphi(v_n).$$

Por definição, para uma base $\{e_i\}_{i=1}^n$ de V,

$$\text{(IV.3)} \qquad \mathrm{vol}(T) = \mathrm{vol}(\varphi(V)) = \|\varphi_*(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)\|.$$

Mas esta igualdade é independente da base escolhida, isto é, sejam $\{e_i\}_{i=1}^n$ e $\{\tilde{e}_i\}_{i=1}^n$ duas bases ortonormais de V. É claro que $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n = \pm\tilde{e}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_n$ e por tanto,

$$\varphi_*(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = \pm\varphi_*(\tilde{e}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_n).$$

Assim,

$$\mathrm{vol}(T) = \|\varphi_*(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)\| = \|\varphi_*(\tilde{e}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{e}_n)\|.$$

Isto é, o volume de T expressado em (IV.3) não depende da base ortonormal escolhida para calculá-lo.

Vamos supor que a matriz de T na base $\{e_i\}_{i=1}^n$ é $A = (a_{ij})$. Calculamos $\mathrm{vol}(T)$. Abusando de notação, denotamos a base de $V \times V$ por $\{e_i = (e_i, 0), e_{n+i} = (0, e_i)\}_{i=1}^n$. O n-vetor $\varphi(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n)$ é:

$$\varphi(e_1) \wedge \cdots \wedge \varphi(e_n) = \left(e_1 + \sum_{i=1}^n a_{i1}e_{n+i}\right) \wedge \cdots \wedge \left(e_n + \sum_{i=1}^n a_{in}e_{2n}\right).$$

Agora queremos expressar o n-vetor $\varphi(e_1) \wedge \cdots \wedge \varphi(e_n)$ na base usual de $\Lambda^n(V \times V)$, $\{e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} / 1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq 2n\}$.

$$\begin{aligned}
\varphi(e_1) \wedge \cdots \wedge \varphi(e_n) &= e_1 \wedge \cdots \wedge e_n + \\
&+ \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} e_1 \wedge \cdots \wedge e_{j-1} \wedge e_{n+i} \wedge e_{j+1} \wedge \cdots \wedge e_n + \\
&+ \sum_{\substack{i_1 < i_2 \\ j_1 < j_2}} (a_{i_1j_1}a_{i_2j_2} - a_{i_1j_2}a_{i_2j_1}) e_1 \wedge \cdots \wedge e_{j_1-1} \wedge e_{n+i_1} \wedge e_{j_1+1} \wedge \cdots \\
&\cdots \wedge e_{j_2-1} \wedge e_{n+i_2} \wedge e_{j_2+1} \wedge \cdots \wedge e_n - \ldots \\
&\ldots + \sum_{\substack{i_1 < \cdots < i_{n-1} \\ j_1 < \cdots < j_{n-1}}} (-1)^{j_n - 1} \det A_{i_1 \ldots i_{n-1}}^{j_1 \ldots j_{n-1}} e_{j_n} \wedge e_{n+i_1} \wedge \cdots \wedge e_{n+i_{n-1}} + \\
&+ \det(A) e_{n+1} \wedge \cdots \wedge e_{2n},
\end{aligned}$$

onde no penúltimo somatório j_n é o único elemento de $\{1, \ldots, n\} \setminus \{j_1, \ldots, j_{n-1}\}$ e $A_{i_1 \ldots i_k}^{j_1 \ldots j_k}$ é a submatriz de A formada pelas filas $(i_1 \ldots i_k)$ e as colunas $(j_1 \ldots j_k)$.

Então, como coeficientes de $\varphi(e_1) \wedge \cdots \wedge \varphi(e_n)$ na base de $\Lambda^n(V \times V)$ aparecem todos os determinantes menores de A, além do 1 que acompanha a $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$. Com isto calculamos $\|\varphi(e_1) \wedge \cdots \wedge \varphi(e_n)\|^2$ elevando ao quadrado cada coeficiente. Assim fica demonstrada a seguinte

Proposição IV.7. *Seja T uma aplicação linear e $A = (a_{ij})$ a matriz de T associada a alguma base ortonormal. Então,*

$$\text{(IV.4)}\quad \operatorname{vol}(T) = \Bigg(1 + \sum_{1\le i,j\le n} a_{ij}^2 + \sum_{\substack{i_1<i_2\\ j_1<j_2}} \left(\det A_{i_1i_2}^{j_1j_2}\right)^2 + \dots$$

$$\cdots + \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_{n-1}\\ j_1<\cdots<j_{n-1}}} \left(\det A_{i_1\dots i_{n-1}}^{j_1\dots j_{n-1}}\right)^2 + (\det A)^2\Bigg)^{\frac{1}{2}}.$$

Abusando de linguagem, chamamos de volume da matriz A ao lado direito da expressão (IV.4). Sabendo que se fizermos uma mudança de base ortonormal em V não muda o volume de A, tentaremos obter outra matriz semelhante $B = PAP^{-1}$ de modo que seja mais simples calcular o volume segundo a equação (IV.4). Esta mudança de base em V^n representará uma mudança de referencial ortonormal em M^{2k+1} quando identifiquemos A com a segunda forma fundamental de $X^\perp$.

Com o objetivo de demonstrar o Teorema IV.5, nas transformações consecutivas deveremos controlar tanto o volume da matriz com os valores dos σ_{2i} que aparecem na limitação inferior.

As entradas da matriz A são reais e portanto nada garante que A tenha valores próprios reais. Cada valor próprio real, se existir, tem associado um vetor próprio unitário. Então se λ_1 for valor próprio real, existe um vetor unitário v_1 tal que $Av_1 = \lambda_1 v_1$. Podemos modificar a base original $\{e_i\}_{i=1}^n$ de modo que v_1 seja o primeiro elemento da nova base. Na nova base a matriz de T será

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Os valores próprios complexos têm associados dois vetores unitários v_1, v_2 tais que o subespaço gerado por eles $\langle v_1, v_2\rangle$ é invariante por T. Isto é, se complexificamos o espaço V e estendemos a aplicação T do modo natural, $T : V \times \mathbf{i}V \to V \times \mathbf{i}V$, o valor próprio $z_1 \in \mathbb{C}$ será tal que para certos $v_1, v_2 \in V$ temos $T(v_1 + \mathbf{i}v_2) = z_1(v_1 + \mathbf{i}v_2)$. Mas,

$$z_1(v_1 + \mathbf{i}v_2) = \big(\operatorname{Re}(z_1)v_1 - \operatorname{Im}(z_1)v_2\big) + \mathbf{i}\big(\operatorname{Im}(z_1)v_1 + \operatorname{Re}(z_1)v_2\big)$$

e

$$T(v_1 + \mathbf{i}v_2) = T(v_1) + \mathbf{i}T(v_2).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} Tv_1 &= \operatorname{Re}(z_1)v_1 - \operatorname{Im}(z_1)v_2 \\ Tv_2 &= \operatorname{Im}(z_1)v_1 + \operatorname{Re}(z_1)v_2. \end{aligned}$$

Se tomamos uma base ortonormal tal que v_1 e v_2 sejam os dois primeiros elementos, a matriz de T na nova base será

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Re}(z_1) & \mathrm{Im}(z_1) & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ -\mathrm{Im}(z_1) & \mathrm{Re}(z_1) & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Tanto no caso de valores próprios reais como complexos, temos um subespaço invariante V_1 (de dimensão 1 ou 2). O segundo passo e restringir T ao complementar ortogonal V_2 de V_1 em V.

$$\begin{aligned} T_2 = T| : V_2 &\longrightarrow V_2 \\ v &\mapsto Tv|_{V_2} \end{aligned}$$

De novo pegamos um valor próprio real ou complexo, agora de T_2, e procedemos a modificar a base de V_2 do mesmo modo que foi descrito antes. Os novos vetores próprios de T_2, que não têm porque ser vetores próprios de T, são evidentemente ortogonais aos anteriores e são escolhidos unitários. Repetimos o processo até completar uma base ortonormal de V na qual a matriz de T terá a forma

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & * & \cdots & \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r \end{matrix}} & * \ \cdots & & & \\ \begin{matrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{matrix}} & \begin{matrix} * & \cdots \\ * & \cdots \end{matrix} & & \\ \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} \cdots & 0 \\ \cdots & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{matrix}} & \begin{matrix} * & \cdots \\ * & \cdots \end{matrix} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \ddots \\ & & & \begin{matrix} \cdots & 0 \\ \cdots & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} a_s & b_s \\ -b_s & a_s \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Isto é, a matriz B estará formada por uma parte supradiagonal (a dos λ_i) e outra parte com caixas na diagonal de tamanho 2×2 e embaixo todo zeros. A parte de acima da diagonal não nos importa.

Lema IV.8. *Partindo de uma matriz genérica A e construindo B como foi descrito antes, temos*

$$\operatorname{vol}(B) = \operatorname{vol}(A) \quad e \quad \sigma_i(B) = \sigma_i(A) \quad \forall i.$$

DEMONSTRAÇÃO. No processo descrito acima só temos mudado de base de V mediante uma transformação ortogonal. Como já foi explicado antes, para mudanças ortogonais o volume não muda. Portanto, se $B = PAP^{-1}$ com P ortogonal temos

$$\operatorname{vol}(B) = \operatorname{vol}(A).$$

Por definição as funções simétricas elementares σ_i são tais que

$$\det(A - t\mathrm{Id}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \sigma_i(A) t^{n-i}.$$

Mas,

$$\det(A - t\mathrm{Id}) = \det\left(P(A - t\mathrm{Id})P^{-1}\right) = \det(PAP^{-1} - t\mathrm{Id}) =$$
$$= \det(B - t\mathrm{Id}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \sigma_i(B) t^{n-i}.$$

Assim, $\sigma_i(B) = \sigma_i(A) \quad \forall i = 1, \ldots, n.$

□

A partir de B construímos outra matriz C tomando só os valores próprios reais da diagonal ou bem as caixas 2×2 correspondentes a valores próprios complexos. Preenchemos o resto da matriz de zeros. Isto é,

$$C = \begin{pmatrix}
\lambda_1 & 0 & \cdots & & & & & & \\
0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & & & & & \\
\vdots & & \ddots & & & & & & \\
 & & & \lambda_r & 0 \; 0 & \cdots & & & \\
 & & \cdots & 0 & \boxed{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{matrix}} & 0 \; \cdots & & & \\
 & & \cdots & 0 & & 0 \; \cdots & & & \\
 & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & \cdots \; 0 & \boxed{\begin{matrix} a_s & b_s \\ -b_s & a_s \end{matrix}} & \\
 & & & & & & \cdots \; 0 & &
\end{pmatrix}.$$

Esta construção é completamente artificial mas conseguimos provar que

Lema IV.9. *Sendo B e C as matrizes descritas acima, temos*

$$\operatorname{vol}(C) \leq \operatorname{vol}(B) \quad e \quad \sigma_i(C) = \sigma_i(B) \quad \forall i.$$

Demonstração. Para calcular o volume de B necessitamos todos os determinantes menores de B ao quadrado. Alguns destes determinantes formam o volume de C enquanto que o resto são os que dão a desigualdade. Os determinantes que sobram são os formados por elementos de acima da diagonal. A igualdade em $\mathrm{vol}(B) \geq \mathrm{vol}(C)$ será satisfeita quando acima da diagonal todos os elementos sejam zero, isto é, quando $B = C$.

Também é evidente que $\sigma_i(B) = \sigma_i(C) \quad \forall i = 1, \ldots n$. O σ_i nada mais é que a soma de todos os determinantes diagonais de ordem i. Como B e C têm a mesma diagonal e embaixo todo zeros, os determinantes diagonais são iguais se calculados com as entradas em B ou em C. □

Modificamos ligeiramente C tomando os valores absolutos dos elementos da diagonal. Isto é, seja $\widetilde{C}$ a matriz

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 & \cdots & & & & & & & & \\ 0 & |\lambda_2| & 0 & \cdots & & & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & & & & & \\ & & & |\lambda_r| & 0 & \cdots & & & & & \\ & & \cdots & 0 & \boxed{\begin{matrix} |a_1| & b_1 \\ -b_1 & |a_1| \end{matrix}} & & 0 & \cdots & & & \\ & & \cdots & 0 & & & 0 & \cdots & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \cdots & 0 & \boxed{\begin{matrix} |a_s| & b_s \\ -b_s & |a_s| \end{matrix}} & & \\ & & & & & & \cdots & 0 & & & \end{pmatrix}.$$

É evidente que

$$\mathrm{vol}(\widetilde{C}) = \mathrm{vol}(C) \quad \text{e} \quad \sigma_{2i}(\widetilde{C}) \geq |\sigma_{2i}(C)| \quad \forall i. \tag{IV.5}$$

A partir de $\widetilde{C}$ construímos também a matriz diagonal D,

$$D = \begin{pmatrix} |\lambda_1| & 0 & \cdots & & & & \\ 0 & |\lambda_2| & & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & & \\ & & & |\lambda_r| & & & \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} \sqrt{a_1^2+b_1^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a_1^2+b_1^2} \end{matrix}} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \boxed{\begin{matrix} \sqrt{a_s^2+b_s^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a_s^2+b_s^2} \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Lema IV.10. *Sendo $\widetilde{C}$ e D as matrizes descritas acima,*

$$\operatorname{vol}(\widetilde{C}) = \operatorname{vol}(D) \quad e \quad \sigma_i(\widetilde{C}) \leq \sigma_i(D) \quad \forall i.$$

Demonstração. Para melhorar a notação vamos assumir que os λ_i e os a_j são positivos evitando assim escrever em todo momento $|\lambda_i|$ ou $|a_j|$. A diferença das matrizes $\widetilde{C}$ e D está na parte dos a_i, b_j. Para obter $\operatorname{vol}(\widetilde{C})$, se calculamos os determinantes de ordem 1 referente as entradas de $\widetilde{C}$ $\left(\begin{smallmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{smallmatrix}\right)$ obtemos

$$2a_i^2 + 2b_i^2.$$

Se fazemos o mesmo com as entradas de D, $\left(\begin{smallmatrix} \sqrt{a_i^2+b_i^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a_i^2+b_i^2} \end{smallmatrix}\right)$, obtemos

$$\left(\sqrt{a_i^2+b_i^2}\right)^2 + \left(\sqrt{a_i^2+b_i^2}\right)^2 = 2a_i^2 + 2b_i^2.$$

Isto é, o mesmo valor. Para os determinantes de ordem 2, em $\widetilde{C}$ temos

$$\det{}^2 \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix} = (a_i^2 + b_i^2)^2,$$

mas em D temos

$$\det{}^2 \begin{pmatrix} \sqrt{a_i^2+b_i^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a_i^2+b_i^2} \end{pmatrix} = (a_i^2 + b_i^2)^2,$$

que também é igual. Se quebramos uma das caixas 2×2 em $\widetilde{C}$ aparecem os determinantes

$$2\det^2\begin{pmatrix}\lambda_i & 0\\ 0 & a_j\end{pmatrix} = 2\lambda_i^2 a_j^2, \qquad 2\det^2\begin{pmatrix}\lambda_i & 0\\ 0 & b_j\end{pmatrix} = 2\lambda_i^2 b_j^2,$$
$$4\det^2\begin{pmatrix}a_i & 0\\ 0 & a_j\end{pmatrix} = 4a_i^2 a_j^2, \qquad 4\det^2\begin{pmatrix}a_i & 0\\ 0 & b_j\end{pmatrix} = 4a_i^2 b_j^2,$$
$$4\det^2\begin{pmatrix}b_i & 0\\ 0 & a_j\end{pmatrix} = 4a_j^2 b_i^2, \qquad 4\det^2\begin{pmatrix}b_i & 0\\ 0 & b_j\end{pmatrix} = 4b_i^2 b_j^2.$$

Mas em D também aparecem

$$2\det^2\begin{pmatrix}\lambda_i & 0\\ 0 & \sqrt{a_j^2+b_j^2}\end{pmatrix} = 2\lambda_i^2(a_j^2+b_j^2),$$
$$4\det^2\begin{pmatrix}\sqrt{a_i^2+b_i^2} & 0\\ 0 & \sqrt{a_j^2+b_j^2}\end{pmatrix} = 4(a_i^2+b_i^2)(a_j^2+b_j^2),$$

isto é, obtemos os mesmos valores.

Observar que este raciocínio é válido para os determinantes de qualquer ordem. Assim

$$\mathrm{vol}(\widetilde{C}) = \mathrm{vol}(D).$$

Para comprovar a desigualdade dos σ_i, perceber que os determinantes diagonais que não quebram as caixas 2×2 correspondentes aos valores próprios complexos, são exatamente iguais em $\widetilde{C}$ e em D. Justamente os determinantes menores diagonais em $\widetilde{C}$ que pegam só um a_i e os correspondentes em D que pegam só uma raiz $\sqrt{a_i^2+b_i^2}$ serão iguais se e somente se $b_i = 0$ (e $a_i > 0$). Portanto,

$$\sigma_i(\widetilde{C}) \le \sigma_i(D) \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Quando a dimensão da matriz é 2 ou 3 acontece um fenômeno a ter em conta. Se a matriz $\widetilde{C}$ é 2×2 e tem somente um valor próprio complexo, então $\sigma_2(D) = \sigma_2(\widetilde{C})$ mas o $b_1 \neq 0$. Isto é possível pois ao calcular o $\sigma_2(\widetilde{C})$ não temos a possibilidade de quebrar a caixa correspondente ao valor próprio complexo. Também na dimensão 3, se $\widetilde{C}$ tiver um valor próprio complexo, e u outro logicamente real, o $\sigma_3(D) = \sigma_3(\widetilde{C})$ onde de novo $b_1 \neq 0$.

Se a dimensão da matriz é maior ou igual a 4, a igualdade na equação $\sigma_i(\widetilde{C}) \le \sigma_i(D)$ será satisfeita se os valores próprios forem todos reais. □

Redefinindo as entradas de D, depois destas sucessivas reduções temos chegado a uma matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ 0 & & & \lambda_{2k} \end{pmatrix},$$

onde os λ_i são todos positivos.

Teorema IV.11. *Se D é uma matriz diagonal e positiva de dimensão $2k$ temos que*

$$\text{(IV.6)} \qquad \mathrm{vol}(D)^2 \geq \left(1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\binom{k}{i}}{\binom{2k}{2i}} \sigma_{2i}(D)\right)^2,$$

onde $\sigma_{2i}(D)$ são as funções simétricas elementares de ordem $2i$ dos elementos da diagonal $\{\lambda_i\}_{i=1}^{2k}$. A igualdade é satisfeita se e somente se $D = \lambda \mathrm{Id}_{2k}$.

Demonstração. Se as entradas da matriz D são $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{2k}\}$, é fácil ver que o volume de D (a soma dos quadrados de todos determinantes menores) é

$$\text{(IV.7)} \quad \mathrm{vol}(D)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{2k} \lambda_i^2 + \cdots + \sum_{i_1 < \cdots < i_{2k-1}} \lambda_{i_1}^2 \cdots \lambda_{i_{2k-1}}^2 + \lambda_1^2 \cdots \lambda_{2k}^2.$$

Desenvolvemos o quadrado da direita de (IV.6):

$$\text{(IV.8)} \quad \begin{aligned} \left(1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\binom{k}{i}}{\binom{2k}{2i}} \sigma_{2i}(D)\right)^2 &= 1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\binom{k}{i}^2}{\binom{2k}{2i}^2} \sigma_{2i}^2 + \sum_{i=1}^{k} 2 \frac{\binom{k}{i}}{\binom{2k}{2i}} \sigma_{2i} + \\ + \sum_{1 \leq i < j \leq k} 2 \frac{\binom{k}{i}\binom{k}{j}}{\binom{2k}{2i}\binom{2k}{2j}} \sigma_{2i}\sigma_{2j} &= \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{j} \frac{\binom{k}{i}\binom{k}{j-i}}{\binom{2k}{2i}\binom{2k}{2j-2i}} \sigma_{2i}\sigma_{2j-2i}. \end{aligned}$$

Por σ_0 entendemos a unidade ($\sigma_0 = 1$) e lembrar que

$$\sigma_j(D) = \sigma_j = \sum_{i_1 < \cdots < i_j} \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_j}.$$

A desigualdade (IV.6) é na verdade uma relação entre polinômios nas variáveis $\{\lambda_i\}$ e portanto teremos que comparar os termos de igual grau de cada membro da desigualdade.

A última igualdade da equação (IV.8) agrupa os distintos termos de grau $2j$. Isto é, em

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\binom{k}{i}}{\binom{2k}{2i}} \sigma_{2i}(D)\right)^2$$

os termos de grau $2j$ nos λ_i vêm dados por

$$\sum_{i=0}^{j} \frac{\binom{k}{i}\binom{k}{j-i}}{\binom{2k}{2i}\binom{2k}{2j-2i}} \sigma_{2i}\sigma_{2j-2i}.$$

Assim, de (IV.7) e (IV.8), para demonstrar o teorema teremos que ver que para $j = 1, \ldots, 2k$ se satisfaz

$$\text{(IV.9)} \qquad \sum_{i_1<\cdots<i_j} \lambda_{i_1}^2 \cdots \lambda_{i_j}^2 \geq \sum_{i=0}^{j} \frac{\binom{k}{i}\binom{k}{j-i}}{\binom{2k}{2i}\binom{2k}{2j-2i}} \sigma_{2i}\sigma_{2j-2i}.$$

Notar que no somatório da direita aparecem muitos termos duplicados (de fato todos ou todos menos um dependendo da paridade de j). Por exemplo para $i = 1$ e $i = j-1$ aparece $\sigma_2\sigma_{2j-2}$ com o mesmo coeficiente.

Para ter uma idéia do que queremos provar, a expressão (IV.9) para os primeiros j é:

$$\sum_{i=1}^{2k} \lambda_i^2 \geq \frac{2}{2k-1}\sigma_2,$$

$$\sum_{i_1<i_2} \lambda_{i_1}^2\lambda_{i_2}^2 \geq \frac{6}{(2k-1)(2k-3)}\sigma_4 + \frac{1}{(2k-1)^2}\sigma_2^2,$$

$$\sum_{i_1<i_2<i_3} \lambda_{i_1}^2\lambda_{i_2}^2\lambda_{i_3}^2 \geq \frac{30\sigma_6}{(2k-1)(2k-3)(2k-5)} + \frac{6\sigma_2\sigma_4}{(2k-1)^2(2k-3)},$$

$$\sum_{i_1<i_2<i_3<i_4} \lambda_{i_1}^2\lambda_{i_2}^2\lambda_{i_3}^2\lambda_{i_4}^2 \geq \frac{210\sigma_8}{(2k-1)(2k-3)(2k-5)(2k-7)} +$$

$$+\frac{30\sigma_2\sigma_6}{(2k-1)^2(2k-3)(2k-5)} + \frac{9\sigma_4^2}{(2k-1)^2(2k-3)^2}.$$

Passamos a demonstrar (IV.9). É conhecida a desigualdade $\big(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\big) \geq \frac{1}{n}\big(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\big)^2$ e dela obtemos

$$\text{(IV.10)} \qquad \sum_{i_1<\cdots<i_j} \lambda_{i_1}^2 \cdots \lambda_{i_j}^2 \geq \frac{1}{\binom{2k}{j}}\Big(\sum_{i_1<\cdots<i_j} \lambda_{i_1}\cdots\lambda_{i_j}\Big)^2 = \frac{1}{\binom{2k}{j}}\sigma_j^2.$$

Para relacionar o σ_j^2 com os distintos $\sigma_{2i}\sigma_{2j-2i}$ desenvolvemos a fórmula que aparece em [**HLP**, pág. 52] válida quando todos os λ_i são positivos. Seja

$$p_i = \frac{1}{\binom{2k}{i}}\sigma_i$$

então,

$$\text{(IV.11)} \qquad p_i^2 \geq p_{i-1}p_{i+1} \qquad i = 1, \ldots, 2k-1.$$

Em (IV.11) temos a igualdade se e somente se os λ_i são todos iguais. A partir desta fórmula pode-se conseguir

$$p_j^2 \geq p_{j-2}p_{j+2}$$

pois a equação (IV.11) para $i = j-1$ e $i = j+1$ é

$$p_{j-1}^2 \geq p_{j-2}p_j \qquad p_{j+1}^2 \geq p_j p_{j+2}. \tag{IV.12}$$

Assim, como os $p_j \geq 0$ pois os λ_i são positivos por hipótese, multiplicamos (IV.11) por p_{j-1} e p_{j+1}. Com (IV.12)

$$p_{j-1}p_j^2 p_{j+1} \geq p_{j-1}^2 p_{j+1}^2 \geq p_{j-2}p_j^2 p_{j+2}.$$

Simplificando esta expressão:

$$p_{j-1}p_{j+1} \geq p_{j-2}p_{j+2}. \tag{IV.13}$$

Então juntando (IV.11) e (IV.13) temos

$$p_j^2 \geq p_{j-2}p_{j+2}.$$

Consecutivamente, deste modo pode-se provar facilmente que se j é par,

$$p_j^2 \geq p_{j-2s}p_{j+2s} \qquad \forall s = 0, \ldots, j/2.$$

e portanto,

$$\sigma_j^2 \geq \frac{\binom{2k}{j}^2}{\binom{2k}{j-2s}\binom{2k}{j+2s}} \sigma_{j-2s}\sigma_{j+2s} \qquad \forall s = 0, \ldots, j/2. \tag{IV.14}$$

Quando j seja ímpar nos interessará a expressão

$$p_j^2 \geq p_{j-2s-1}p_{j+2s+1} \qquad s = 0, \ldots, (j-1)/2$$

ou equivalentemente

$$\sigma_j^2 \geq \frac{\binom{2k}{j}^2}{\binom{2k}{j-2s-1}\binom{2k}{j+2s+1}} \sigma_{j-2s-1}\sigma_{j+2s+1} \qquad s = 0, \ldots, (j-1)/2. \tag{IV.15}$$

<u>Caso j par</u>
De (IV.10) e de (IV.14) temos $\forall s = 0, \ldots, j/2$

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_j} \lambda_{i_1}^2 \cdots \lambda_{i_j}^2 \geq \frac{\binom{2k}{j}}{\binom{2k}{j-2s}\binom{2k}{j+2s}} \sigma_{j-2s}\sigma_{j+2s}. \tag{IV.16}$$

Para que apareça o coeficiente de $\sigma_{j-2s}\sigma_{j+2s}$ da expressão geral (IV.9) temos que multiplicar esta equação por

$$2\frac{\binom{k}{\frac{j}{2}-s}\binom{k}{\frac{j}{2}+s}}{\binom{2k}{j}} \sum_{i_1 < \cdots < i_j} \lambda_{i_1}^2 \cdots \lambda_{i_j}^2 \geq 2\frac{\binom{k}{\frac{j}{2}-s}\binom{k}{\frac{j}{2}+s}}{\binom{2k}{j-2s}\binom{2k}{j+2s}} \sigma_{j-2s}\sigma_{j+2s} \tag{IV.17}$$

se $s = 1, \ldots, j/2$ e para o caso $s = 0$,

$$\text{(IV.18)} \qquad \frac{\binom{k}{j/2}^2}{\binom{2k}{j}} \sum_{i_1 < \cdots < i_j} \lambda_{i_1}^2 \cdots \lambda_{i_j}^2 \geq \frac{\binom{k}{j/2}^2}{\binom{2k}{j}^2} \sigma_j^2.$$

Para demonstrar (IV.9) faltará ver a soma dos coeficientes de (IV.17) $\forall s = 1, \ldots, j/2$ com o coeficiente de (IV.18) dá exatamente 1. Isto é, faltara ver se

$$\text{(IV.19)} \qquad 2 \sum_{s=1}^{j/2} \frac{\binom{k}{\frac{j}{2}-s}\binom{k}{\frac{j}{2}+s}}{\binom{2k}{j}} + \frac{\binom{k}{j/2}^2}{\binom{2k}{j}} = 1.$$

Reordenando o somatório, queremos provar que

$$\text{(IV.20)} \qquad \binom{2k}{j} = 2 \sum_{l=0}^{j/2-1} \binom{k}{l}\binom{k}{j-l} + \binom{k}{j/2}^2 = \sum_{l=0}^{j} \binom{k}{l}\binom{k}{j-l}.$$

Esta igualdade é certa pois ambos números combinatórios podem se obter desenvolvendo o polinômio $(1+x)^{2k}$ de maneira direta ou bem desenvolvendo primeiro $(1+x)^k$ e depois elevando ao quadrado.

$$\sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} x^j = (1+x)^{2k} = (1+x)^k (1+x)^k =$$

$$= \left(\sum_{q_1=0}^{k} \binom{k}{q_1} x^{q_1} \right) \left(\sum_{q_2=0}^{k} \binom{k}{q_2} x^{q_2} \right) = \sum_{j=0}^{2k} \sum_{q_1+q_2=j} \binom{k}{q_1}\binom{k}{q_2} x^{q_1+q_2} =$$

$$= \sum_{j=0}^{2k} \sum_{l=0}^{j} \binom{k}{l}\binom{k}{j-l} x^j.$$

<u>Caso j ímpar</u>

A demonstração de (IV.9) para j ímpar é análoga à do caso par. A pequena diferença é que agora não aparecem termos do tipo σ_j^2. De (IV.10) e (IV.15) temos $\forall s = 0, \ldots, (j-1)/2$

$$\text{(IV.21)} \qquad \sum_{i_1 < \cdots < i_j} \lambda_{i_1}^2 \cdots \lambda_{i_j}^2 \geq \frac{\binom{2k}{j}}{\binom{2k}{j-2s-1}\binom{2k}{j+2s+1}} \sigma_{j-2s-1}\sigma_{j+2s+1}.$$

Devemos ajustar esta equação para que os $\sigma_{j-2s-1}\sigma_{j+2s+1}$ levem o coeficiente que aparece em (IV.9),

$$2 \frac{\binom{k}{j/2-s-1/2}\binom{k}{j/2+s+1/2}}{\binom{2k}{j}} \sum_{i_1 < \cdots < i_j} \lambda_{i_1}^2 \cdots \lambda_{i_j}^2 \geq$$

$$\geq 2 \frac{\binom{k}{j/2-s-1/2}\binom{k}{j/2+s+1/2}}{\binom{2k}{j-2s-1}\binom{2k}{j+2s+1}} \sigma_{j-2s-1}\sigma_{j+2s+1} \qquad s = 0, \ldots, \frac{j-1}{2}.$$

Para demonstrar (IV.9) faltará ver que

$$2\sum_{s=0}^{\frac{j-1}{2}} \binom{k}{j/2 - s - 1/2}\binom{k}{j/2 + s + 1/2} = \binom{2k}{j}$$

que, como no caso anterior, é certo pois basta desenvolver $(1+x)^{2k}$ y $(1+x)^k(1+x)^k$ por separado.

Para finalizar observar que tanto no caso par como no ímpar as desigualdades são estritas se e somente se os $\{\lambda_i\}$ não são todos iguais. Isto é, a igualdade e satisfeita somente quando $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{2k}$.

□

O teorema dá uma desigualdade para $\lambda_i \geq 0$ onde $\{\lambda_1, \ldots \lambda_{2k}\}$ são as entradas da matriz diagonal D. Acompanhando a demonstração detalhadamente percebemos que expressão pode ser um pouco mais geral. Sem exigir que os λ_i sejam positivos temos que

$$\text{(IV.22)} \qquad \operatorname{vol}(D) \geq \sum_{i=0}^{k} \frac{\binom{k}{i}}{\binom{2k}{2i}} \sigma_{2i}(\{|\lambda_j|\}_{j=1}^{2k}) \geq \sum_{i=0}^{k} \frac{\binom{k}{i}}{\binom{2k}{2i}} |\sigma_{2i}(\{\lambda_j\}_{j=1}^{2k})|.$$

Já temos todas as ferramentas para provar o Teorema IV.5.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA IV.5. Seja $\{e_1, \ldots, e_{2k}, e_{2k+1} = X\}$ um referencial local ortonormal de M^{2k+1}. Seja $\mathsf{A} = (h_{ij})$ a matriz da segunda forma fundamental de $X^\perp$ (que não necessariamente é integrável). A partir da expressão do volume de um campo unitário na Proposição IV.2 e do volume de uma matriz da Proposição IV.7 temos que

$$\text{(IV.23)} \qquad \operatorname{vol}(X) \geq \int_M \operatorname{vol}(\mathsf{A})\nu,$$

onde a igualdade é satisfeita se e somente se X é totalmente geodésico. Através de uma mudança de base ortonormal em $X^\perp$ podemos modificar a matriz A como foi descrito no Lema IV.8 e obtemos uma matriz B supradiagonal com, tal vez, caixas 2×2 na diagonal. Como no Lema IV.9 construímos uma matriz C quase-diagonal (o de *quase* é pelas caixas 2×2 que podem aparecer na diagonal). Tomando os valores absolutos na diagonal definimos $\widetilde{C}$. Por último seja matriz diagonal D como no Lema IV.10 (com entradas positivas). Então,

$$\text{(IV.24)} \qquad \int_M \operatorname{vol}(\mathsf{A})\nu = \int_M \operatorname{vol}(B)\nu \geq \int_M \operatorname{vol}(C)\nu = \\ = \int_M \operatorname{vol}(\widetilde{C})\nu = \int_M \operatorname{vol}(D)\nu.$$

Também pelos Lemas IV.8, IV.9 e IV.10 e de (IV.5) temos as desigualdades

$$\text{(IV.25)} \qquad \sigma_{2i}(D) \geq \sigma_{2i}(\widetilde{C}) \geq |\sigma_{2i}(C)| = |\sigma_{2i}(B)| = |\sigma_{2i}(\mathsf{A})|.$$

Por tanto usando (IV.23), (IV.24), Teorema IV.11 e (IV.25) consecutivamente,

$$\operatorname{vol}(X) \geq \int_M \operatorname{vol}(D)\nu \geq \int_M \left(1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\binom{k}{i}}{\binom{2k}{2i}} \sigma_{2i}(D)\right) \nu \geq$$
$$\geq \int_M \left(1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{\binom{k}{i}}{\binom{2k}{2i}} |\sigma_{2i}(\mathsf{A})|\right) \nu,$$

como foi dito em (IV.2).

Com $k > 1$, as desigualdades dos Lemas IV.9 e IV.10 são igualdades se e somente se o endomorfismo A é diagonalizável (i.e. com todos os valores próprios reais). O Teorema IV.11 nos diz que para a igualdade todos os valores próprios têm que ser iguais. Então, a igualdade em (IV.2) é satisfeita se e somente se X é totalmente geodésico e $X^\perp$ é umbílica, $\mathsf{A} = \lambda \mathrm{Id}_{2k}$. □

IV.3. Conseqüências

Como foi mencionado antes, as integrais das curvaturas i-ésimas foram calculadas em espaços de curvatura seccional constante.

Teorema IV.12 ([BLR]). *Seja M^{n+1} uma variedade com curvatura seccional constante c e X um campo de vetores unitário. Então,*

$$\int_M \sigma_i(X^\perp)\nu = \begin{cases} \binom{n/2}{i/2} c^{i/2} \operatorname{vol}(M) & \textit{se } n \textit{ e } i \textit{ são pares} \\ 0 & \textit{se } n \textit{ ou } i \textit{ forem ímpares} \end{cases}$$

De este modo o Teorema IV.5 aplicado à esfera fica

Teorema IV.13. *Seja X campo de vetores unitário em S^{2k+1} então*

$$\operatorname{vol}(X) \geq \frac{4^k}{\binom{2k}{k}} \operatorname{vol}(S^{2k+1}),$$

valendo a igualdade, com $k > 1$, se e somente se X é totalmente geodésico e $X^\perp$ integrável e umbílica.

Demonstração. Pelo Teorema IV.12

$$\text{(IV.26)} \qquad \begin{aligned} \int_{\mathrm{S}^{2k+1}} \sum_{i=0}^{k} \frac{\binom{k}{i}}{\binom{2k}{2i}} |\sigma_{2i}(X^\perp)|\nu &\geq \sum_{i=0}^{k} \frac{\binom{k}{i}}{\binom{2k}{2i}} \left| \int_{\mathrm{S}^{2k+1}} \sigma_{2i}(X^\perp)\nu \right| = \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{\binom{k}{i}^2}{\binom{2k}{2i}} \operatorname{vol}(\mathrm{S}^{2k+1}). \end{aligned}$$

Em [P] foi desenvolvido este somatório e pode-se comprovar que

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{\binom{k}{i}^2}{\binom{2k}{2i}} = \frac{4^k}{\binom{2k}{k}}.$$

Assim do Teorema IV.5 obtemos

$$\mathrm{vol}(X) \geq \frac{4^k}{\binom{2k}{k}} \mathrm{vol}(\mathrm{S}^{2k+1}).$$

As condições para a igualdade são, pelo Teorema IV.5, que X seja totalmente geodésico e que a distribuição $X^\perp$ seja integrável e umbílica ($\mathsf{A} = \lambda \mathrm{Id}_{2k}$). O valor de λ pode mudar de ponto a ponto e também pode mudar de sinal.

Nestas condições, a desigualdade (IV.26) será sempre igualdade, pois os σ_{2i} não mudam de sinal, já que a ordem destas funções simétricas é par.

□

O valor

$$\mathrm{gz}(k) = \frac{4^k}{\binom{2k}{k}}$$

já tinha sido sugerido como limitação inferior do volume de campos com outras técnicas [**GZ**]. Mesmo sem estar demonstrada esta afirmação, as técnicas de [**GZ**] e [**GMZ**] indicam que o valor $\mathrm{gz}(k)$ corresponde ao volume de uma calibração μ em $T^1\mathrm{S}^{2k+1}$. Todo indica que os autores de [**GZ**] e [**GMZ**] não sabiam se μ calibrava ou não algum campo vetorial quando $k > 1$ (sabia-se com certeza que não calibrava o campo de Hopf).

Com o Teorema IV.13 temos encontrado a mesma limitação de um modo muito mais natural e agora sabemos a quem calibraria essa μ: a um campo de vetores totalmente geodésico com complementar umbílico. O campo Norte-Sul unitário, tangente as geodésicas que unem o Polo Norte e o Polo Sul, é um campo com estas condições. Este campo Norte-Sul tem duas singularidades.

Procurando campos de vetores unitários globalmente definidos nas condições de minimização do Teorema IV.13 achamos na literatura matemática o seguinte resultado.

Teorema IV.14 ([**BW**]). *Seja M uma variedade riemanniana completa com curvatura de Ricci não negativa. Se $\mathcal{F}$ é uma folheação de codimensão 1 sobre M e $\mathcal{F}^\perp$, o fluxo normal a $\mathcal{F}$, é geodésico, então $\mathcal{F}$ é totalmente geodésica e $\mathcal{F}^\perp$ é paralelo. Portanto M é localmente um produto riemanniano.*

Com este teorema temos a seguinte proposição.

Proposição IV.15. *Não existe em S^{2k+1} com $k > 1$, um campo de vetores unitário com volume igual à $4^k\binom{2k}{k}^{-1}\mathrm{vol}(S^{2k+1})$.*

Demonstração. Se existir em S^{2k+1} um campo de vetores X que atingisse a limitação inferior do Teorema IV.13, X seria totalmente geodésico e pelo Teorema IV.14 a esfera seria um produto local. Contradição. □

Para $k = 1$, isto é em $\mathbf{S}^3$, o Teorema IV.13 dá a limitação

$$\mathrm{vol}(X) \geq 2\mathrm{vol}(\mathbf{S}^3).$$

A partir da segunda forma fundamental da distribuição ortogonal ao campo de Hopf, calculada em (I.3), é fácil obter o volume de Hopf em $\mathbf{S}^3$,

$$\mathrm{vol}(Hopf(3)) = 2\mathrm{vol}(\mathbf{S}^3).$$

Então, o campo de Hopf atinge a limitação inferior, é totalmente geodésico mas o complementar nem é integrável. As condições da igualdade do Teorema IV.5 são validas só em dimensão maior ou igual a 5. Como foi notado na demonstração do Lema IV.10, ao construir a matriz diagonal D a partir de uma quase-diagonal $\widetilde{C}$ em dimensão 3 ($n = 2k = 2$) e comprovar o comportamento dos $\sigma_j(D)$ em relação aos $\sigma_j(\widetilde{C})$, poderia se ter a igualdade sem ser a parte imaginária do valor próprio complexo (o b_1) igual a zero. Com isto, em dimensão baixa poderíamos ter $\sigma_j(D) = \sigma_j(\widetilde{C})$ sem ser todos os valores próprios reais.

O Teorema IV.13 também tem uma leitura topológica.

Teorema IV.16. *Seja X um campo de vetores unitário em S^{2k+1}. Seja $\chi(X^\perp)$ a $2k$-forma de Euler do subfibrado ortogonal a X e θ_{2k+1} a forma dual de X. Então,*

$$\mathrm{vol}(X) \geq \frac{2^{2k}\pi^k k!}{(2k)!} \int_{S^{2k+1}} \chi(X^\perp) \wedge \theta_{2k+1}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Pelas equações de estrutura, a 2-forma de curvatura Ω_{ij} de $X^\perp$ está relacionada com a 2-forma de curvatura $\widetilde{\Omega}_{ij} = \theta_i \wedge \theta_j$ de $\mathbf{S}^{2k+1}$ do seguinte modo,

$$\Omega_{ij} = \omega_{i,2k+1} \wedge \omega_{j,2k+1} + \widetilde{\Omega}_{ij}, \tag{IV.27}$$

onde $\omega_{i,2k+1}(Y) = \langle \nabla_Y e_i, e_{2k+1} \rangle$ para Y tangente a $X^\perp$ são umas das formas de conexão de $\mathbf{S}^{2k+1}$. Os valores de $\omega_{i,2k+1}(Y)$ vão nos fornecendo a segunda forma fundamental de $X^\perp$.

Por definição, ver por exemplo [**Gr**, pág. 83], o Pfaffiano de $\Omega = (\Omega_{ij})$ é a $2k$-forma

$$\mathrm{Pf}(\Omega) = \frac{1}{2^k k!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{2k}} \epsilon(\tau) \Omega_{\tau(1)\tau(2)} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\tau(2k-1)\tau(2k)},$$

onde $\mathfrak{S}_{2k}$ denota o grupo fundamental de permutações de $\{1, \ldots, 2k\}$ e $\epsilon(\tau)$ é o sinal de τ.

Por (IV.27),

$$
\begin{aligned}
2^k k!\mathrm{Pf}(\Omega) = & \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_{2k}} \epsilon(\tau)\left(\omega_{\tau(1),2k+1}\wedge\omega_{\tau(2),2k+1}+\theta_{\tau(1)}\wedge\theta_{\tau(2)}\right)\wedge\cdots\\
&\cdots\wedge\left(\omega_{\tau(2k-1),2k+1}\wedge\omega_{\tau(2k),2k+1}+\theta_{\tau(2k-1)}\wedge\theta_{\tau(2k)}\right)=\\
&=\sum_\tau \epsilon(\tau)\theta_{\tau(1)}\wedge\theta_{\tau(2)}\wedge\cdots\wedge\theta_{\tau(2k)}+\\
&+k\sum_\tau \epsilon(\tau)\omega_{\tau(1),2k+1}\wedge\omega_{\tau(2),2k+1}\wedge\theta_{\tau(3)}\wedge\cdots\wedge\theta_{\tau(2k)}+\dots\\
&+\binom{k}{j}\sum_\tau \epsilon(\tau)\omega_{\tau(1),2k+1}\wedge\cdots\wedge\omega_{\tau(2j),2k+1}\wedge\theta_{\tau(2j+1)}\wedge\cdots\wedge\theta_{\tau(2k)}\\
&\dots+\sum_\tau \epsilon(\tau)\omega_{\tau(1),2k+1}\wedge\cdots\wedge\omega_{\tau(2k),2k+1}.
\end{aligned}
$$

Avaliamos o termo genérico de $\mathrm{Pf}(\Omega)$ na base tangente a $X^\perp$ $\{e_1,\dots,e_{2k}\}$,

$$
\begin{aligned}
&\sum_\tau \epsilon(\tau)\omega_{\tau(1),2k+1}\wedge\cdots\wedge\omega_{\tau(2j),2k+1}\wedge\theta_{\tau(2j+1)}\wedge\cdots\wedge\theta_{\tau(2k)}(e_1,\dots e_{2k})=\\
&=\sum_\tau \omega_{\tau(1),2k+1}\wedge\cdots\wedge\omega_{\tau(2j),2k+1}\wedge\theta_{\tau(2j+1)}\wedge\cdots\wedge\theta_{\tau(2k)}(e_{\tau(1)},\dots e_{\tau(2k)})\\
&=(2k-2j)!\sum_\tau \omega_{\tau(1),2k+1}\wedge\cdots\wedge\omega_{\tau(2j),2k+1}(e_{\tau(1)},\dots e_{\tau(2j)})=\\
&=(2k-2j)!(2j)!\sigma_{2j}(X^\perp).
\end{aligned}
$$

Assim o Pfaffiano fica,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Pf}(\Omega)=&\frac{1}{2^k k!}\left[\binom{k}{0}(2k)!+\binom{k}{1}(2k-2)!2!\sigma_2(X^\perp)+\dots\right.\\
&\dots+\binom{k}{j}(2k-2j)!(2j)!\sigma_{2j}(X^\perp)+\dots\\
&\left.\dots+\binom{k}{k}(2k)!\sigma_{2k}(X^\perp)\right]\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_{2k}=\\
=&\frac{(2k)!}{2^k k!}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\binom{2k}{2j}^{-1}\sigma_{2j}(X^\perp)\right)\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_{2k}.
\end{aligned}
$$

Também sabemos, [**Gr**, pág. 84], que

$$\chi(X^\perp)=\frac{1}{(2\pi)^k}\mathrm{Pf}(\Omega)$$

e portanto

$$\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\binom{2k}{2j}^{-1}\sigma_{2j}(X^{\perp})\right)\theta_1\wedge\cdots\wedge\theta_{2k}=\frac{2^k k!(2\pi)^k}{(2k)!}\chi(X^{\perp}).$$

Assim o integrando da limitação inferior do Teorema IV.5 é também

$$\sum_{j=0}^{k}\frac{\binom{k}{j}}{\binom{2k}{2j}}\sigma_{2j}\nu=\frac{2^{2k}\pi^k k!}{(2k)!}\chi(X^{\perp})\wedge\theta_{2k+1}.$$

Em particular,

$$\mathrm{vol}(X)\geq\frac{2^{2k}\pi^k k!}{(2k)!}\int_{\mathbb{S}^{2k+1}}\chi(X^{\perp})\wedge\theta_{2k+1}.$$

□

Para finalizar, podemos aplicar o Teorema IV.5 a espaços compactos com curvatura seccional constante negativa. Este tipo de espaços são os quocientes de $\mathbb{H}^n$ por um grupo discreto de isometrias de $\mathbb{H}^n$. A demonstração do seguinte teorema é análoga à do Teorema IV.13.

Teorema IV.17. *Seja M^{2k+1} uma variedade compacta, orientada, riemanniana e com curvatura seccional constante $c<0$. Seja X um campo de vetores unitário, então*

$$\mathrm{vol}(X)\geq\sum_{i=0}^{k}\frac{\binom{k}{i}|c|^i}{\binom{2k}{2i}}\mathrm{vol}(M).$$

Referências Bibliográficas

[B] F.G.B. Brito, *Total bending of flows with mean curvature correction*, Differential Geom. Appl. **12** (2000), 157-163

[BLR] F.G.B. Brito, R. Langevin e H. Rosenberg, *Intégrales de courbure sur des variétés feuilletées*, J. Differential Geom. **16** (1981), 19–50.

[BW] F.G.B. Brito e P.G. Walczak, *Totally geodesic foliation with integrable normal bundles*, Bol. Soc. Brasil. Mat. **17**, (1986), 41–46.

[C] F.J. Carreras, *Linear invariants of Riemannian almost product manifolds* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **91** (1982), 99–106.

[E] H.D. Ebbinghaus et al., *Numbers*, Springer-Verlag, 1991

[EL] J. Eells e L. Lemaire, *A report on harmonic maps*, Bull. London Math. Soc. **10** (1978), 1–68.

[GN] F.J. García e A.M. Naveira *Two remarks about foliations and minimal foliations of codimension greater than two.* Analysis and geometry in foliated manilfolds (Santiago de Compostela, 1994), 29–38, World Sci Publishing, 1995.

[GM] O. Gil-Medrano, *Relationship between volume and energy of unit vector fields*, preprint 1999.

[Gr] A. Gray, *Tubes*, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.

[GMZ] H. Gluck, F. Morgan e W. Ziller, *Calibrated geometries in Grassmann manifolds*, Comment. Math. Helv. **64** (1989), 256–268.

[GZ] H. Gluck e W. Ziller, *On the volume of the unit vector fields on the three sphere*, Comment Math. Helv. **61** (1986) 177-192.

[HLP] G.H. Hardy, J.E. Littlewood e G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1988.

[J] D.L. Johnson, *Volume of flows*, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), 923-932.

[P] S.L. Pedersen, *Volumes of vector fields on spheres*, Trans. Amer. Math. Soc. **336** (1993), 69–78.

[S] T. Sakai, *Riemannian geometry*, Translations of Mathematical Monographs, 149. American Mathematical Society, 1996.

[W] P.G. Walczak, *An integral formula for a Riemannian manifold with two orthogonal complementary distributions*, Colloq. Math. **58** (1990), 243–252.

[Wi1] G. Wiegmink, *Total bending of vector fields on Riemannian manifolds*, Math. Ann. **303** (1995), 325–344.

[Wi2] G. Wiegmink, *Total bending of vector fields on the sphere S^3*, Differential Geom. Appl. **6** (1996), 219–236.

[Wo] C.M. Wood, *On the energy of a unit vector field*, Geom. Dedicata **64** (1997), 319–330.

[X] Y.L. Xin, *Some results on stable harmonic maps*, Duke Math. J. **47** (1980) 609–613.