Aplicações do teorema da transversalidade à genericidade em alguns problemas de contorno elípticos

Marcone Corrêa Pereira

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Análise**
Orientador: **Prof. Antônio L. Pereira**

Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq

São Paulo, março de 2001

Aplicações do teorema da transversalidade à genericidade em alguns problemas de contorno elípticos

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Marcone Corrêa Pereira
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 28 de março de 2001.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Antônio L. Pereira (Presidente) - IME-USP
- Profa. Dra. Marina Pizzotti - IME-USP
- Prof. Dr. Orlando Lopes - IMECC - UNICAMP

"Portanto todo aquele que ouve estas minhas palavras e as pratica, será semelhante ao homem prudente, que edificou a sua casa sobre a rocha. Desceu a chuva, transbordaram os rios, sopraram os ventos e deram contra aquela casa; contudo, ela não caiu porque estava edificada sobre a *rocha*." Mateus 7:24,25.

Agradecimentos

A **Deus** por mais esta prova de **amor**.
Aos meus pais, Áurea e Manoel, que me deram todo apoio e amor.
À Raquel pela companhia, carinho, incentivo e amor.
À tia Gracelina e tio Antônio que cuidaram de mim durante todo este tempo em São Paulo juntamente com meus primos.
Ao meu orientador Professor Antônio Luiz Pereira pela amizade, paciência, apoio, incentivo, cuidado e disposição em ensinar.
À professora Marina pela cooperação no nosso trabalho.
Aos professores Luiz Augusto, Plínio, Rosa, Lúcia, Clodoaldo, Verderesi, Glads, Pedro Fagundes e Sérgio Oliva pelas oportunidades de discussão e aprendizado.
A Francisca, Feijão e Pinho pelo apoio eficiente.
Ao Antônio por me ensinar Latex.
Aos colegas Plácido, Marcelo, Marcelo Passos, Davi, Emivan, Albetan, Regina, Leonardo e Alexandre pela companhia e colaboração.

Resumo

Nesta dissertação apresentamos cinco aplicações do teorema da *Transversalidade* enunciado e provado por D. Henry em [11]. Os quatro primeiros exemplos são de perturbação de fronteira para o problema de Dirichlet em equações elípticas. O último exemplo é uma aplicação do teorema da Transversalidade para uma equação parabólica unidimensional com condições de contorno de Neumann.

Abstract

In this dissertation we present five applications of the *Tranversality Theorem* in a version due to D. Henry [11]. In the first four examples we consider perturbation of the boundary problems with Dirichlet boundary conditions. In the last example we apply the Transversality Theorem to obtain generic hyperbolicity for the equilibria of a unidimensional parabolic equation with Neumann boundary conditions.

Índice

Agradecimentos iv

Resumo v

Abstract vi

Introdução 1

1 Perturbação de Contorno 3

1.1 Definições, notações e resultados preliminares 3

1.2 Perturbação de Contorno 7

1.3 Cálculo da diferencial 11

2 Operadores de Fredholm e o Teorema da Transversalidade 16

2.1 Operadores de Fredholm 16

2.2 O Teorema da Transversalidade 24

3 Aplicações 27

3.1 Preliminares 28

3.2 Simplicidade Genérica dos Autovalores do Laplaciano 30

3.3 Uma Propriedade Genérica para as Autofunções do Laplaciano 33

3.4 Simplicidade Genérica dos Autovalores Reais 40

3.5 Simplicidade Genérica das soluções de $\Delta u + f(x, u, \nabla u) = 0$ 42

3.6 Hiperbolicidade Genérica dos Equilíbrios de $u_t = (au_x)_x + f(u)$ 49

Referências Bibliográficas 58

Introdução

O problema de perturbação de fronteira recebeu atenção apenas esporádica na literatura matemática até o trabalho exaustivo de D. Henry em [11] (onde também se encontram muitas referências). Nessa obra o autor introduz novos métodos e obtem vários resultados inéditos, além de simplificar resultados conhecidos.

O objetivo central desta dissertação é expor alguns desses resultados e métodos. Em especial apresentamos uma versão generalizada do *Teorema da Transversalidade* de Abraham e Thom obtida em [11] com algumas aplicações.

No capítulo 1 algumas definições e notações são dadas bem como teoremas preliminares, alguns sem demonstração. Neste mesmo capítulo introduzimos a técnica desenvolvida por Henry em [11] para trabalhar com o tema de perturbação de fronteira.

No capítulo 2 desta dissertação enunciamos a versão generalizado do teorema da Transversalidade por Henry, definimos operadores de Fredholm no espaço dos operadores limitados e provamos algumas propriedades importantes destes operadores que são úteis nos exemplos apresentados no capítulo 3.

O terceiro e último capítulo é sem dúvida o mais importante pois é nele que algumas aplicações do teorema da Transversalidade são desenvolvidas. O primeiro exemplo é a prova de que os autovalores do Laplaciano com condições de contorno de Dirichlet são genericamente simples no conjunto das regiões limitadas $\mathcal{C}^3$-regulares do $\mathbb{R}^n$. Este resultado foi originalmente demonstrado por Micheletti [15] e Uhlenbeck [17] mas uma prova curta é apresentada aqui. Nosso segundo exemplo está intimamente relacionado com o primeiro e é a prova de que as autofunções u do Laplaciano com condições de contorno de Dirichlet satisfazem genericamente no conjunto das regiões $\int_\Omega g(u) \neq 0$ onde g é uma função real qualquer de classe $\mathcal{C}^3$. Este problema foi originalmente proposto por K. Rybakowski para $g(u) = u^3$ em conexão com um problema de bifurcação e foi generalizado sem maiores dificuldades. A prova de tal resultado é simples e exemplifica de maneira elegante a versão

do teorema da Transversalidade apresentada aqui.

O terceiro exemplo do capítulo 3 é apenas uma generalização do primeiro exemplo. Consideramos agora um operador uniformemente elíptico geral em vez do Laplaciano e provamos que também nesse caso todos os autovalores reais do problema de Dirichlet são genericamente simples no conjunto das regiões limitadas $\mathcal{C}^3$-regulares. Este exemplo é aplicado no quarto exemplo que é a prova de que a equação não linear $\Delta u + f(\cdot, u, \nabla u) = 0$ com condições de contorno de Dirichlet possui todas as soluções simples genericamente no conjunto das regiões limitadas $\mathcal{C}^3$-regulares. Este exemplo é mais trabalhoso e requer o uso da versão generalizada do teorema da Transversalidade.

O quinto e último exemplo é tambem uma aplicação do teorema da Transversalidade mas não é um exemplo de perturbação de fronteira. Provaremos que, para uma função monótona fixada $a \in \mathcal{C}^2([0,1],(0,+\infty))$, genericamente no conjunto das funções reais de classe $\mathcal{C}^2$ na topologia de Whitney todos os equilíbrios da equação

$$u_t = (au_x)_x + f(u),\ 0 < x < 1 \tag{1}$$

com condições de contorno de Neumann $u_x(t,0) = u_x(t,1) = 0$ são hiperbólicos.

P. Brunovsky e S. Chow em [7] provaram tal afirmação para a constante. A. L. Pereira em [16] prova que para uma função f fixa todos os equilíbrios de (1) são genericamente hiperbólicos com relação a função a e que para uma função a fixada todos os equilíbrios de (1), satisfazendo uma hipótese adicional, são genericamente hiperbólicos em f na topologia de Whitney.

O problema no caso geral permanece, tanto quanto saibamos, em aberto.

CAPÍTULO 1

Perturbação de Contorno

Para tratar problemas de variação de domínios em problemas de EDP D. Henry desenvolve em [11] uma espécie de cálculo diferencial onde a variável independente é o domínio.

Neste capítulo preliminar vamos introduzir a técnica desenvolvida em [11] para tratar este tipo de problema bem como notações e alguns outros resultados que serão necessários nas aplicações.

1.1 Definições, notações e resultados preliminares

Denotaremos um ponto x qualquer do espaço n-dimensional Euclidiano $\mathbb{R}^n$ por $x = (x_1, ..., x_n)$.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x_1}^{\alpha_1} ... \frac{\partial}{\partial x_n}^{\alpha_n}$$

onde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e a $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. De maneira análoga $x^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} ... x_n^{\alpha_n}$. Usaremos também a seguinte notação para derivadas parciais,

$$D_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \text{ e } D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}.$$

Seja f uma aplicação que assume valores reais m-diferenciável em $x \in \mathbb{R}^n$. A m-ésima derivada de f em x pode ser considerada como uma m-forma linear simétrica sobre $\mathbb{R}^n$,

$$h \longrightarrow D^m f(x) h^m.$$

Então a norma $|\cdot|$ de $D^m f(x)$ pode ser definida como o

$$max_{|h| \leq 1} |D^m f(x) h^m|.$$

Vale a pena observar que a m-ésima derivada de f em x pode ser considerada também como uma coleção de derivadas parciais de f, ou seja,

$$D^m f(x) = \{\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}; |\alpha| = m\}.$$

Denotaremos por Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\partial\Omega$ e fecho $\bar{\Omega}$. Se E é algum espaço vetorial normado, $\mathcal{C}^m(\Omega, E)$ é o espaço das funções limitadas m-diferenciáveis f sobre Ω com derivadas limitadas e valores em E cujas derivadas se extendem continuamente até $\bar{\Omega}$ com a norma usual

$$\|f\|_{\mathcal{C}^m(\Omega,E)} = max_{0\leq j\leq m} sup_{x\in\Omega}|D^m f(x)|.$$

Se o espaço vetorial normado $E = \mathbb{R}$, escreveremos apenas $\mathcal{C}^m(\Omega)$.

$\mathcal{C}_0^m(\Omega)$ é o subeconjunto de $\mathcal{C}^m(\Omega)$ consistindo de todas as funções com suporte compacto em Ω.

$\mathcal{C}_{unif}^m(\Omega, E)$ é o subespaço fechado de $\mathcal{C}^m(\Omega, E)$ consistindo das funções cuja a m-ésima derivada é uniformemente contínua. Observe que se Ω é limitado, este conjunto é o próprio $\mathcal{C}^m(\Omega, E)$.

$\mathcal{C}^{m,\alpha}(\Omega, E)$ é o espaço consistindo de todas as funções cuja a m-ésima derivada é Holder contínua com expoente α, $0 < \alpha \leq 1$, e norma

$$\|f\|_{\mathcal{C}^{m,\alpha}(\Omega,E)} = max\Big\{\|f\|_{\mathcal{C}^m(\Omega,E)}, H_\alpha^\Omega(D^m f)\Big\}$$

onde

$$H_\alpha^\Omega(f) = sup\Big\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha}; x \neq y \in \Omega\Big\}.$$

Dizemos que um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é $\mathcal{C}^m$-*regular* se existe $\phi \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, que é pelo menos $\mathcal{C}_{unif}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, tal que

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; \phi(x) > 0\}$$

e $\phi(x) = 0$ implica $|\nabla\phi| \geq 1$.

D. Henry em [11] mostra, para abertos limitados, que esta definição de região $\mathcal{C}^m$-regular é equivalente às definições usadas por E. Browder [4] e Agmon-Douglis-Nirenberg [6] em seus artigos de problemas de contorno para operadores elípticos.

Seja m um inteiro não negativo, p um número real ≥ 1 e Ω um aberto limitado. Para uma função $u \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ defina a norma

$$\|u\| = \Big(\int_\Omega \sum_{|\alpha|\leq m} |D^\alpha u|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.1}$$

O espaço vetorial $\mathcal{C}^m(\Omega)$ não é completo sob a norma (1.1). Completando tal espaço, obtemos um espaço de Banach que denotamos por $H^{m,p}(\Omega)$. Fixamos a notação $\|\cdot\|_{H^{m,p}(\Omega)}$ para a norma (1.1) em $H^{m,p}(\Omega)$.

Introduzimos outro espaço linear $W^{m,p}(\Omega)$ da seguinte maneira. Uma função de valores reais u pertence a $W^{m,p}(\Omega)$ se $u \in L^p(\Omega)$ e se todas as suas derivadas fracas de ordem menor ou igual a m pertencem a $L^p(\Omega)$. Friedman prova em [9] que se $\partial\Omega$ é $\mathcal{C}^m$-regular então $W^{m,p}(\Omega) = H^{m,p}(\Omega)$. Quando $p = 2$ tem-se a notação especial $H^{m,p}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

De maneira análoga introduzimos os espaços $H_0^{m,p}(\Omega)$ e $W_0^{m,p}(\Omega)$, onde $H_0^{m,p}(\Omega)$ é o completamento do espaço $\mathcal{C}_0^m(\Omega)$ e $W_0^{m,p}(\Omega)$ é o espaço das funções u cuja m-ésima derivada pertence a $L^p(\Omega)$ satisfazendo $D^\alpha u = 0$ para todo $|\alpha| \leq m$ em $\partial\Omega$.

Teorema 1.1 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma região $\mathcal{C}^2$-regular e $h \in \mathcal{C}^2((-\epsilon,\epsilon) \times \Omega, \mathbb{R}^n)$ para algum $\epsilon > 0$ com $h(0,\cdot) = i_\Omega$. Seja também $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^2$ pelo menos numa vizinhança de $t = 0$ com suporte compacto. Então, se $\Omega(t) = h(t,\Omega)$, $t \longrightarrow \int_\Omega f(t,x)dx$ é $\mathcal{C}^1$ próximo de $t = 0$ e*

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega(t)} f(t,x)dx = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx + \int_{\partial\Omega(t)} f(t,x)V \cdot N dA_x$$

onde V é o campo de vetores $\frac{\partial h}{\partial t}(t,x) = V(t,h(t,x))$ e N é o vetor normal unitário apontando para fora de Ω.

Prova. É suficiente calcular tal derivada em $t = 0$.

$$h(t,x) = x + tV(x) + O(t^2)$$

que nos dá

$$\frac{\partial h}{\partial x}(t,x) = I + tV_x(x) + O(t^2).$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega(t)} f(t,y)dy &= \int_\Omega f(t,h(t,x))det\Big(\frac{\partial h}{\partial x}(t,x)\Big)dx \\
&= \int_\Omega \Big\{f(0,x) + t\Big(f_t(0,x) + f_x(0,x)\cdot V + f(0,x)det'(I)\cdot V_x(x)\Big) + O(t^2)\Big\}dx \\
&= \int_\Omega \Big\{f(0,x) + t\Big(f_t(0,x) + f_x(0,x)\cdot V + f(0,x)tracoV_x(x)\Big) + O(t^2)\Big\}dx \\
&= \int_\Omega \Big\{f(0,x) + t\Big(f_t(0,x) + f_x(0,x)\cdot V + f(0,x)divV(x)\Big) + O(t^2)\Big\}dx.
\end{aligned}$$

Portanto em $t = 0$ temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_\Omega f(0,y)dy &= \int_\Omega \Big\{f_t(0,x) + f_x(0,x)\cdot V + f(0,x)divV(x)\Big\}dx \\
&= \int_\Omega \Big\{f_t(0,x) + div(f(0,x)V(x))\Big\}dx \\
&= \int_\Omega f_t(0,x)dx + \int_{\partial\Omega} f(0,x)V(x)\cdot N dA_x
\end{aligned}$$

de onde segue o resultado desejado. ∎

Algumas vezes se faz necessário o uso de operadores diferenciais em hipersuperfícies $S \subset \mathbb{R}^n$. As seguintes definições são intrínsecas a S e nada dizem sobre o ambiente $\mathbb{R}^n$.

Seja S uma hipersuperfície C^1 em $\mathbb{R}^n$ e seja $\phi : S \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 de maneira que possa ser estendida C^1 a uma vizinhança S. Então $\nabla_S \phi$ é o campo vetorial tangente sobre S tal que para cada curva $x(t) \subset S$ de classe C^1, temos

$$\frac{d}{dt}\phi(x(t)) = \nabla_S \phi(x(t)) \cdot \dot{x}(t).$$

Seja S uma hipersuperfície C^2 em $\mathbb{R}^n$ e $\vec{a} : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial C^1, definimos $div_S \vec{a} : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ como a função contínua tal que, para toda função $\phi : S \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 com suporte compacto em S,

$$\int_S (div_S \vec{a})\phi = -\int_S \vec{a} \cdot \nabla_S \phi.$$

Finalmente, se $u : S \longrightarrow \mathbb{R}$ é C^2, então $\Delta_S u = div_S(\nabla_S u)$ ou equivalentemente, para toda $\phi : S \longrightarrow \mathbb{R}$ C^1 com suporte compacto em S,

$$\int_S \phi \Delta_S u = -\int_S \nabla_S \phi \cdot \nabla_S u.$$

Teorema 1.2 *1. Se S é uma hipersuperfície C^1 e $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é C^1 numa vizinhança de S, então, sobre S, $\nabla_S \phi(x)$ é a componente do $\nabla \phi(x)$ tangente a S em x, ou seja,*

$$\nabla_S \phi(x) = \nabla \phi(x) - \frac{\partial \phi}{\partial N}(x) N$$

onde N é um campo vetorial normal sobre S.

2. Se S é uma hipersuperfície C^2 em $\mathbb{R}^n$ $\vec{a} : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial C^1 numa vizinhança de S, $N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial unitário sobre uma vizinhança de S, e N sobre S é o campo normal a S nos pontos de S. Então

$$div_S \vec{a} = div \vec{a} - (div N)\vec{a} \cdot N - \frac{\partial}{\partial N}(a \cdot N)$$

sobre S.

3. Se S é uma hipersuperfície C^2, $u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é C^2 sobre uma vizinhança de S e N é um campo vetorial normal unitário a S no sentido de 2 acima. Então

$$\Delta_S u = \Delta u - div N \frac{\partial u}{\partial N} - \frac{\partial^2 u}{\partial N^2} + \nabla_S u \cdot \frac{\partial N}{\partial N}$$

sobre S.

Prova. Veja [10]. ∎

Frequentemente citaremos o *teorema de unicidade de Cauchy para equações elípticas de segunda ordem.* Enunciaremos este resultado com detalhes aqui. A prova pode ser encontrada em Hormander [13] teorema 8.9.1, ou em Agmon [3] assumindo a_{ij} de classe C^2.

Teorema 1.3 *Suponha que $Q \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto conexo; B é uma bola que intercepta ∂Q numa hipersuperfície $B \cap \partial Q$; $a_{ij} = a_{ji} : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^1 com $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2$ $\forall x \in Q$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$ para alguma constante $c_0 > 0$. Assuma que $u \in H^2(Q)$ e que para alguma constante K*

$$\Big|\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}\Big| \leq K(|\nabla u(x)| + |u(x)|)$$

para quase todo ponto de Q e que em quase todo ponto de $B \cap \partial Q$ temos $u = 0$ e $\frac{\partial u}{\partial N} = 0$. Então $u = 0$ em quase todo ponto de Q.

1.2 Perturbação de Contorno

Consideremos o operador linear diferencial matricial formal

$$Lu(x) = \Big(u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}(x), ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}(x), \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x), \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}(x), ...\Big),\ x \in \mathbb{R}^n$$

com a quantidade de termos que se fizer necessário. Dada uma função f de várias variáveis podemos definir um operador diferencial formal não linear por

$$v(x) = f(x, Lu(x)),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Mais precisamente, suponha que $Lu(\cdot)$ assume valores em $\mathbb{R}^p$ e $f(x, \lambda)$ está definida para (x, λ) em algum conjunto aberto $O \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Para subconjuntos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ definimos F_Ω por

$$F_\Omega(u)(x) = f(x, Lu(x)),\ x \in \Omega$$

para funções u suficientemente suaves sobre Ω tal que $(x, Lu(x)) \in O$ para todo $x \in \bar{\Omega}$. Por exemplo, se f é contínua, Ω é limitado e L envolve derivadas de ordem menor ou igual a m, o domínio de F_Ω é um subconjunto aberto de $C^m(\Omega)$, (talvez vazio) e os valores de F_Ω se encontram em $C^0(\Omega)$. Outros espaços de funções podem ser usados com modificações naturais.

Seja $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um mergulho m vezes diferenciável, isto é, um difeomorfismo sobre sua imagem $h(\Omega)$ de ordem m. Definimos a aplicação de composição (ou o *pull-back*) h^* de h por

$$h^*u(x) = (u \circ h)(x) = u(h(x)),\ x \in \Omega$$

onde u é uma função definida em $h(\Omega)$.

Proposição 1.4 *$h^* : \mathcal{C}^m(h(\Omega)) \longrightarrow \mathcal{C}^m(\Omega) : u \longrightarrow u \circ h$ é um isomorfismo com inversa $h^{*-1} = (h^{-1})^*$.*

Prova. Seja $h : \Omega \longrightarrow h(\Omega)$ um mergulho de ordem m, $h^*u \in \mathcal{C}^m(\Omega)$ para todo $u \in \mathcal{C}^m(h(\Omega))$ pela regra da cadeia, portanto h^* está bem definido. Observe também que h^* é limitado, de fato, $\|h^*u\|_{\mathcal{C}^m(\Omega)} = \|u \circ h\|_{\mathcal{C}^m(\Omega)} \leq c\|u\|_{\mathcal{C}^m(h(\Omega))}$ para algum $c > 0$ já que $h \in \mathcal{C}^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Além disso h^* é claramente linear, injetora e sobrejetora. Logo h^* é um isomorfismo já que $h^{*-1} = (h^{-1})^*$ também satisfaz a desigualdadeque acima. ∎

Proposição 1.5 *Sejam $h_1 : \Omega_0 \longrightarrow h_1(\Omega_0) = \Omega_1$ e $h_2 : \Omega_1 \longrightarrow h_2(\Omega_1) = \Omega_2$ difeomorfismos sobre suas imagens onde $\Omega_i \subset \mathbb{R}^n$ para $i = 0, 1, 2$. Então $(h_2 \circ h_1)^* = h_1^* h_2^*$.*

Prova. Temos que

$$(h_2 \circ h_1)^* v = v \circ h_2 \circ h_1 = h_1^*(v \circ h_2) = h_1^*(h_2^* v) = h_1^* h_2^* v$$

de onde segue o resultado. ∎

É importante observar que as proposições anteriores são válidas em outros espaços de funções, como por exemplo, os espaços de Sobolev, $h^* : W^{k,p}(h(\Omega)) \longrightarrow W^{k,p}(\Omega)$ $0 \leq k \leq m$, $1 \leq p \leq \infty$.

Dado um mergulho h de uma região limitada Ω podemos considerar o operador diferencial $F_{h(\Omega)}$ com domínio aberto $D_{F_{h(\Omega)}} \subset \mathcal{C}^m(h(\Omega))$. A aplicação

$$F_{h(\Omega)} : D_{F_{h(\Omega)}} \subset \mathcal{C}^m(h(\Omega)) \longrightarrow \mathcal{C}^0(h(\Omega))$$

é chamada a forma *Euleriana* do operador diferencial formal não linear $v \longrightarrow f(\cdot, Lv(\cdot))$ sobre $h(\Omega)$, enquanto

$$h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1} : h^* D_{F_{h(\Omega)}} \subset \mathcal{C}^m(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\Omega)$$

é chamada forma *Lagrangeana* do mesmo operador diferencial formal não linear. Os mesmos termos são usados para outros espaços de funções.

A forma Euleriana é frequentemente mais natural e simples para se fazer cálculos, a forma Lagrangeana é usada para provar teoremas. De fato, provaremos no capítulo de aplicações que, para nossas aplicações, ambos os métodos são equivalentes.

A vantagem da forma Lagrangeana é que ela age em espaços de funções que não dependem de h facilitando então o uso de teoremas como o teorema da função implícita e o teorema da Transversalidade. Entretanto precisamos garantir que

$$(u, h) \longrightarrow h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1} u \tag{1.2}$$

é diferenciável e calcular derivadas com respeito a h. Como h^* é linear, a diferenciabilidade em relação a u não apresenta problema algum. Antes de estudarmos a diferenciabilidade da aplicação (1.2), provaremos o seguinte resultado.

Proposição 1.6

$$\mathrm{Diff}^m(\Omega) = \{h \in \mathcal{C}^m(\Omega, \mathbb{R}^n); h \text{ é injetora e } \frac{1}{|deth'(x)|} \text{ é limitado em } \Omega\}$$

é aberto se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto limitado de classe $\mathcal{C}^m$.

Prova. Tome $h_0 \in \mathrm{Diff}^m(\Omega)$ e suponha por absurdo que existe $\{h_n\} \subset \mathcal{C}^m(\Omega, \mathbb{R}^n) - \mathrm{Diff}^m(\Omega)$ tal que $\|h_n - h_0\|_{\mathcal{C}^m} \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$. Então $\|h'_n - h'_0\|_{\mathcal{C}^{m-1}} \longrightarrow 0$ e como por hipótese $\frac{1}{|deth'_0(x)|}$ é limitado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{|deth'_n(x)|}$ é limitado para $n \geq n_0$. Se $h_n \notin \mathrm{Diff}^m(\Omega)$, h_n deve ser não injetora. Assim para todo $n \geq n_0$ existe p_n, q_n tal que $h_n(p_n) = h_n(q_n)$. Sendo Ω limitado em $\mathbb{R}^n$ existem subseqüências $\{p_{n_{j_k}}\} \subset \{p_n\}$ e $\{q_{n_{j_k}}\} \subset \{q_n\}$ convergentes para p e $q \in \bar{\Omega}$ tal que $h_{n_{j_k}}(p_{n_{j_k}}) = h_{n_{j_k}}(q_{n_{j_k}})$. Suponha, sem perda de generalidade $p_n \longrightarrow p$, $q_n \longrightarrow q$ e $h_n(p_n) = h_n(q_n)$. Agora

$$\begin{aligned} |h_0(p) - h_0(q)| &\leq |h_0(p) - h_0(p_n)| + |h_0(p_n) - h_n(p_n)| + |h_n(p_n) - h_n(q_n)| + \\ &\quad + |h_n(q_n) - h_0(q_n)| + |h_0(q_n) - h_0(q)| \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $n \longrightarrow \infty$. Então $p = q$ pois h_0 é injetora.

Portanto até agora nossa hipótese de absurdo resultou em duas seqüências $\{p_n\}$ e $\{q_n\}$ distintas convergindo para um mesmo ponto $p \in \bar{\Omega}$ tal que $h_n(p_n) = h_n(q_n)$. Mostraremos agora que existe uma vizinhança U de p em $\bar{\Omega}$ tal que todo h suficientemente próximo de h_0 em $\mathcal{C}^m$ é injetora em U implicando então que a partir de algum $n_1 > n_0$, h_n é injetora em U e portanto $p_n = q_n$, contradição.

Seja $\theta = inf\{\|h'(p) \cdot k\|; \|k\| = 1 \text{ e } \|h - h_0\| < \epsilon \text{ em } \mathcal{C}^m\}$.

(a) Afirmamos que $\theta > 0$ se ϵ é suficientemente pequeno, de fato,

$$\begin{aligned} \|h'(p) \cdot k\| &\geq \|h'_0(p) \cdot k\| - \|(h'(p) - h'_0(p)) \cdot k\| \\ &\geq \|h'_0(p) \cdot k\| - \|h'(p) - h'_0(p)\|. \end{aligned}$$

Basta tomar $2\epsilon = inf_{\|k\|=1}\|h_0'(p)\cdot k\|$ (que é positivo pois $h_0, \in \mathrm{Diff}^m(\Omega)$) e h suficientemente próximo a h_0 para que $\|h'(p) - h_0'(p)\| \leq \epsilon$.

(b) Afirmamos também que para h numa vizinhança de h_0 e $p+k$ numa vizinhança de p temos $\|h'(p+k) - h'(p)\| \leq \frac{\theta}{2}$. De fato,

$$\begin{aligned}\|h'(p+k) - h'(p)\| &\leq \|h'(p+k) - h_0'(p+k)\| + \|h_0'(p+k) - h_0'(p)\| + \|h_0'(p) - h'(p)\| \\ &< \frac{\theta}{6} + \frac{\theta}{6} + \frac{\theta}{6} < \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

se fizermos $\|h' - h_0'\|$ e $\|h_0'(p+k) - h_0'(p)\| < \frac{\theta}{6}$.

Tomando V vizinhança de h_0 e U vizinhança de p para que (a) e (b) sejam válidos, temos

$$h(p+k) = h(p) + \int_0^1 h'(p+tk)\cdot k dt \ \forall k \in U \text{ e } \forall h \in V.$$

Então podemos obter que

$$\begin{aligned}\|h(p+k) - h(p)\| &\geq \|\int_0^1 h'(p)\cdot k dt\| - \int_0^1 \|h'(p+tk) - h'(p)\|\|k\| dt \\ &\geq \|h'(p)\cdot k\| - \|h'(p+\tau k) - h'(p)\|\|k\| \\ &\geq \|h'(p)\cdot \frac{k}{\|k\|}\|\|k\| - \|h'(p+\tau k) - h'(p)\|\|k\| \\ &\geq \frac{\theta}{2}\|k\| > 0\end{aligned}$$

de onde segue o resultado. ∎

Diferenciabilidade. Voltando a questão de suavidade, sejam $h \in \mathrm{Diff}^m(\Omega)$, $v = h^{*-1}u$, $y = h(x)$, $x \in \Omega$

$$h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1} u(x) = F_{h(\Omega)} v(y) = f(y, Lv(y)) = f(h(x), h^* L h^{*-1} u(x)).$$

Consideremos primeiro o operador diferencial

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)^{\alpha_i}$$

onde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ para α_i inteiro não-negativo. Pela regra da cadeia temos que

$$\begin{aligned}h^* \frac{\partial}{\partial y_i} h^{*-1} u(x) &= \frac{\partial}{\partial y_i}(u \circ h^{-1})(h(x)) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k}(h^{-1}(y)) \frac{\partial (h^{-1})_k}{\partial y_i}(h(x)) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k}(h^{-1}(y))(h_y^{-1})_{ki}(h(x)) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k}(x)(h_x^{-1})_{ki}(x)\end{aligned}$$

o que nos dá

$$h^*\Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^\alpha h^{*-1}u(x) = \Big(\frac{\partial}{\partial y}\Big)^\alpha v(y) = \prod_{i=1}^n \Big(\sum_{k=1}^n (h_x^{-1})_{ki}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}\Big)^{\alpha_i} u(x).$$

Então, a aplicação

$$F : \mathcal{C}^m(\Omega) \times \mathrm{Diff}^m(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\Omega) : (u,h) \longrightarrow h^* L h^{*-1} u$$

é função racional dos coeficientes de h_x^{-1} e suas derivadas parciais de ordem menor ou igual a m, logo é analítica no aberto $\mathrm{Diff}^m(\Omega)$ em h. Portanto se f é uma função $\mathcal{C}^r$ ou analítica em O temos que a aplicação

$$F : \mathcal{C}^m(\Omega) \times \mathrm{Diff}^m(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\Omega) : (u,h) \longrightarrow h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1} u = f(h(\cdot), h^* L h^{*-1} u)$$

é $\mathcal{C}^r$ ou analítica respectivamente em seu domínio de definição. Outros espaços de funções podem ser empregados e os resultados de suavidade são essencialmente os mesmos.

1.3 Cálculo da diferencial

Em vista dos resultados da seção 1.2, para calcular a derivada de

$$h \longrightarrow h^* F_{h(\Omega)} h^{*-1} u,$$

basta calcular a derivada de Gâteaux, isto é, a t-derivada ao longo de uma curva de mergulhos $t \longrightarrow h(t,\cdot)$ de classe $\mathcal{C}^1$. Suponha então que queremos calcular

$$\frac{\partial}{\partial t} F_{\Omega(t)}(v)(y) = \frac{\partial}{\partial t} f(y, Lv(y))$$

com $y = h(t,x)$ fixo em $\Omega(t) = h(t,\Omega)$. Para que y permaneça fixo devemos ter $x = x(t)$, $y = h(t, x(t))$ tal que

$$0 = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} x'(t) \Longrightarrow x'(t) = -(\frac{\partial h}{\partial x})^{-1} \frac{\partial h}{\partial t} \ ,$$

ou seja, $U(x,t) = (\frac{\partial h}{\partial x})^{-1} \frac{\partial h}{\partial t}$, $x(t)$ deve ser solução da equação diferencial $\frac{dx}{dt} = -U(x,t)$. Assim a derivada parcial com relação a t na forma Eureliana com $y = h(t,x)$ fixado corresponde à *derivada anti-convectiva* D_t da forma Lagrangeana na região de referência Ω

$$D_t = \frac{\partial}{\partial t} - U(x,t)\frac{\partial}{\partial x}, \ U(x,t) = (\frac{\partial h}{\partial x})^{-1} \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Mais precisamente, temos o seguinte.

Lema 1.7 *Suponha $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 e $h(t, \cdot)$ um difeomorfismo de classe C^1 sobre sua imagem $\Omega(t)$ para cada t. Então*

$$D_t(h^*\psi) = h^*(\frac{\partial \psi}{\partial t}).$$

Prova. Para $0 \leq k, j \leq n$ sejam

$$U = (\frac{\partial h}{\partial x})^{-1}\frac{\partial h}{\partial t} = (U_1, ..., U_n) \text{ onde } U_k = \sum_j (h_x^{-1})_{kj}\frac{\partial h_j}{\partial t} \text{ e } U \cdot \frac{\partial}{\partial x} = \sum_k U_k \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Então temos

$$\begin{aligned} D_t(h^*\psi)(x) &= D_t(\psi(h(t,x),t)) \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial \psi}{\partial y_j}\frac{\partial h_j}{\partial t} - \sum_k U_k \frac{\partial}{\partial x_k}\psi(h(t,x),t) \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial \psi}{\partial y_j}\Big(\frac{\partial h_j}{\partial t} - \sum_k U_k \frac{\partial h_j}{\partial x_k}\Big). \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \sum_k U_k \frac{\partial h_j}{\partial x_k} &= \sum_k \Big(\sum_i (h_x^{-1})_{ki}\frac{\partial h_i}{\partial t}\Big)\frac{\partial h_j}{\partial x_k} \\ &= \sum_i \frac{\partial h_i}{\partial t}\sum_k (h_x^{-1})_{ki}\Big(\frac{\partial h_j}{\partial x_k}\Big) \\ &= \sum_i \frac{\partial h_i}{\partial t}\delta_{ji} \\ &= \frac{\partial h_j}{\partial t} \end{aligned}$$

de onde segue o resultado. ∎

Teorema 1.8 *Suponha que $f(t, y, \lambda)$ é de classe C^1 num conjunto aberto de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, L é um operador diferencial com coeficientes constantes de ordem menor ou igual a m com $Lv(y) \in \mathbb{R}^p$. Para um conjunto aberto $Q \subset \mathbb{R}^n$ e funções v definidas em Q, seja $F_Q(t)v$ a aplicação*

$$y \longrightarrow f(t, y, Lv(y)),\ y \in Q.$$

Suponhamos que $t \longrightarrow h(t, \cdot)$ é uma curva de mergulhos de um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega(t) = h(t, \Omega)$ e para $|j| \leq m$, $|k| \leq m+1$ $(t, x) \longrightarrow \partial_t \partial_x^j h(t, x)$, $\partial_x^k h(t, x)$, $\partial_x^k u(t, x)$ sejam contínuas em $\mathbb{R} \times \Omega$ numa vizinhança de $t = 0$ e que $h(t, \cdot)^{*-1}u(t, \cdot)$ está no domínio de $F_{\Omega(t)}$. Então nos pontos de Ω

$$D_t(h^* F_{\Omega(t)}(t)h^{*-1})(u) = (h^*\dot{F}_{\Omega(t)}(t)h^{*-1})(u) + (h^* F'_{\Omega(t)}(t)h^{*-1})(u) \cdot D_t u$$

onde D_t é a derivada anti-convectiva definida anteriormente,

$$\dot{F}_Q(t)v(y) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, y, Lv(y))$$

e

$$F'_Q(t)v \cdot w(y) = \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, y, Lv(y)) \cdot Lw(y),\ y \in Q$$

é a linearização de $v \longrightarrow F_Q(t)v$.

Prova. Defina como antes $v = h^{*-1}u$, isto é, $u(t,x) = v(t, h(t,x))$. Pelo lema (1.7)

$$\begin{aligned} h^{*-1}D_t u &= (D_t u) \circ h^{-1} \\ &= D_t(h^* v) \circ h^{-1} \\ &= (h^* \frac{\partial v}{\partial t}) \circ h^{-1} \\ &= \frac{\partial v}{\partial t}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} [(h^* F'_{\Omega(t)}(t) h^{*-1})(u) \cdot D_t u](x) &= [F'_{\Omega(t)}(t)(u \circ h^{-1}) \cdot (D_t u) \circ h^{-1}](h(x)) \\ &= (F'_{\Omega(t)}(t)v \cdot \frac{\partial v}{\partial t})(y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, y, Lv(y)) \cdot \frac{\partial v}{\partial t}. \end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned} [(h^* \dot{F}_{\Omega(t)}(t) h^{*-1})(u)](x) &= \dot{F}_{\Omega(t)}(t)(u \circ h^{-1})(h(x)) \\ &= \dot{F}_{\Omega(t)}(t)(v)(y) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, y, Lv(y)) \end{aligned}$$

logo, pelo lema (1.7) temos que

$$\begin{aligned} [D_t(h^* F_{\Omega(t)}(t) h^{*-1})(u)](x) &= [h^*\Big(\frac{\partial}{\partial t}(F_{\Omega(t)}(t)v)\Big)](x) \\ &= \frac{\partial}{\partial t}[f(t, \cdot, Lv(\cdot))](h(x)) \\ &= \Big(\frac{\partial f}{\partial t}(t, \cdot, Lv(\cdot)) + \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, \cdot, Lv(\cdot)) \cdot \frac{\partial v}{\partial t}\Big)(h(x)) \\ &= [(h^* \dot{F}_{\Omega(t)}(t) h^{*-1})(u)](x) + [(h^* F'_{\Omega(t)}(t) h^{*-1})(u) \cdot D_t u](x) \end{aligned}$$

de onde segue a afirmação. ∎

Exemplos:

1. Suponhamos que $A = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(y)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^\alpha$ é um operador diferencial linear que não depende explicitamente de t e $h(t,x) = x + tV(x) + o(t)$ numa vizinhança de $t = 0$ e $x \in \Omega$. Então pelo teorema (1.8) temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(h^* A h^{*-1} u)\Big|_{t=0} &= D_t(h^* A h^{*-1} u)\Big|_{t=0} + h_x^{-1} h_t \nabla(h^* A h^{*-1} u)\Big|_{t=0} \\ &= A(\frac{\partial u}{\partial t} - V\cdot\nabla u) + V\cdot\nabla(Au) \\ &= A\frac{\partial u}{\partial t} + [V\cdot\nabla, A]u\end{aligned}$$

já que $\frac{\partial}{\partial t}A = 0$. $[V\cdot\nabla, A](\cdot)$ é chamado *comutador* e ainda é uma operador de ordem m embora $V\cdot\nabla A$ e $AV\cdot\nabla$ sejam operadores de ordem $m+1$. Portanto ainda pode ser calculado em funções de classe C^m.

2. Dizemos que λ_0 é autovalor do problema de Dirichelet para o operador de Laplace $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ se existe solução não nula u_0 de

$$\Delta u + \lambda_0 u = 0 \text{ em } \Omega,\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega \tag{1.3}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é uma região C^2-regular. Dizemos ainda que λ_0 é autovalor simples do problema de Dirichlet se $dim\ ker(\Delta + \lambda_0) = 1$. Seja u_0 autofunção de (1.3) associada ao autovalor λ_0 com $\int_\Omega u_0^2 = 1$. Provaremos que em alguma vizinhança C^2 de i_Ω, $h(\Omega)$ é também uma região C^2-regular e existe um único autovalor simples $\lambda_{h(\Omega)}$ próximo a λ_0 tal que a aplicação $h \longrightarrow \lambda_{h(\Omega)}$ é analítica. Isto segue facilmente do teorema da função implícita, de fato, defina

$$\begin{aligned}F : H^2 \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R} \times \mathrm{Diff}^3(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega)\times\mathbb{R} \\ (u,\lambda,h) &\longrightarrow (h^*(\Delta+\lambda)h^{*-1}u, \int_\Omega u^2 \det h')\end{aligned}$$

$F(u_0,\lambda_0,i_\Omega) = (0,1)$ e sempre que $F(u,\lambda,h) = (0,1)$, $v = h^{*-1}u$ satisfaz

$$\Delta v + \lambda v = 0 \text{ em } h(\Omega),\ v = 0 \text{ em } \partial h(\Omega),\ \int_{h(\Omega)} v^2 = 1.$$

Observe que F é analítica já que cada função coordenada de F é analítica. A derivada

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial(u,\lambda)}(u_0,\lambda_0,i_\Omega) : H^2\cap H_0^1(\Omega)\times\mathbb{R} &\longrightarrow L^2(\Omega)\times\mathbb{R} \\ (\dot u,\dot\lambda) &\longrightarrow ((\Delta+\lambda_0)\dot u + \dot\lambda u_0, 2\int_\Omega u_0\dot u)\end{aligned}$$

é um isomorfismo, de fato, sendo λ_0 um autovalor simples temos que, dado qualquer $(f,\xi) \in L^2(\Omega)\times\mathbb{R}$

$$(\Delta+\lambda_0)v + \alpha u_0 = f \text{ e } 2\int_\Omega u_0 v = \xi$$

tem solução única $(v, \alpha) \in H^2 \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$

$$\alpha = \int_\Omega u_0 f \text{ e } v = v_0 + \frac{1}{2}\xi u_0$$

onde $(\Delta + \lambda_0)v_0 = f - \alpha u_0$, $v_0 \perp u_0$ e $v_0 \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$. [Os detalhes da prova de que tal derivada é um isomorfismo podem ser vistos na seção (3.3).]

Então, pelo teorema da função implícita existem aplicações analíticas $h \longrightarrow u_h$ e $h \longrightarrow \lambda_h$ numa vizinhança $\mathcal{C}^2$ de i_Ω tal que $F(u_h, \lambda_h, h) = (0, 1)$, de onde segue a afirmação.

CAPÍTULO 2

Operadores de Fredholm e o Teorema da Transversalidade

Na primeira parte deste capítulo estudaremos os operadores de Fredholm e semi-Fredholm obtendo algumas propriedades importantes que serão utilizadas no capítulo de aplicações.

Na segunda parte enunciaremos o *Teorema da Transversalidade*, que será a principal ferramenta utilizada nas aplicações.

2.1 Operadores de Fredholm

Neste capítulo X, Y e Z denotarão sempre espaços de Banach a não ser que haja menção contrária. Dado qualquer elemento $x \in X$, a norma de x em X será denotada por $\|x\|_X$. Um operador linear, ou simplesmente um operador $T : X \longrightarrow Y$ é contínuo em $x \in X$ se $\|x_n - x\|_X \longrightarrow 0$, $x_n \in X$, implica que $\|Tx_n - Tx\|_Y \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$. T é contínuo em todo o domínio X se é contínuo em $x = 0$ e T é contínuo se somente se T é limitado, ou seja, $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X \ \forall x \in X$. O menor número M com esta propriedade é a norma de T que será indicada por $\|T\|$. Denotamos por $kerT$ o núcleo do operador T e ImT a sua imagem. Dado um subespaço M qualquer de um espaço de Banach, chamamos de codimensão de M a $dim\ X/M$ que é denotada por $codim\ M$. Denotamos ainda por $\mathcal{B}(X,Y)$ o conjunto de todos os operadores lineares contínuos com domínio X e contra-domínio Y. $\mathcal{B}(X,Y)$ é um espaço vetorial normado com norma $\|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)}$ acima. O produto (composição) TS com $T \in \mathcal{B}(Y,Z)$ e $S \in \mathcal{B}(X,Y)$ pode ser definido e pertence a $\mathcal{B}(X,Z)$.

Dizemos que T é *Fredholm* se ImT é fechada e $dim\ kerT$ e $codim\ ImT$ são ambas finitas. Neste caso

$$ind(T) = dim\ kerT \ominus codim\ ImT$$

que é um número inteiro. Se ImT é fechada e ao menos $dim\ kerT$ ou $codim\ ImT$ é finita, T é *semi-Fredholm* e o $ind(T)$ é $+\infty$ ou $-\infty$ respectivamente.

Exemplos:

1. Se X e Y são espaços de Banach de dimensão finita, todo operador $T : X \longrightarrow Y$ é Fredholm com $ind(T) = dimX - dimY$. De fato, se o posto de T é igual a r a $dim\ kerT = dimX - r$ e a $codim\ ImT = dimY - r$. Se ao menos um dos X, Y é de dimensão finita, todo operador contínuo é semi-Fredholm e $ind(T) = dimX - dimY$ como no caso anterior.

2. Suponha X e Y espaços de Banach de dimensão infinita. O operador nulo não é semi-Fredholm e qualquer outro operador compacto de X para Y não é semi-Fredholm. De fato, se T é um operador compacto com ImT fechada, temos que $dim\ ImT < \infty$. Daí como $dim\ Y$ é infinita temos que a $codim\ ImT$ é infinita. Observe que a $dim\ X$ ser infinita e a $dim\ ImT < \infty$ com ImT fechada implica que $dim\ kerT$ é infinita pois se não existiria um isomorfismo entre um espaço de dimensão finita e um espaço de dimensão infinita. Logo T compacto não pode ser semi-Fredholm.

3. Seja $X = Y = l^2$ o conjunto de todas as sequências $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ de números reais tais que $\sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2 < \infty$. A identidade em l^2 ou qualquer isomorfismo é Fredholm de índice zero. A translação $S : (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \longrightarrow (x_2, x_3..., x_n, ...)$ é Fredholm com índice 1 e S^m é Fredholm com índice m. O adjunto $S^* : (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \longrightarrow (0, x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ é Fredholm com índice -1 e $(S^*)^m$ é Fredholm com índice $-m$. $L : (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \longrightarrow (x_1, 0, x_2, 0, ...)$ é Fredholm de índice $-\infty$ e seu adjunto $L^* : (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \longrightarrow (x_1, x_3, x_5, ...)$ é semi-Fredholm de índice $+\infty$. Note que L^*L é a identidade que é Fredholm de índice zero, mas LL^* não é semi-Fredholm.

Vale a pena observar também que se a $dim\ kerT$ e a $codim\ ImT$ são finitas, podemos provar, em vez de assumir, que ImT é fechada. De fato, seja $X = X_1 \oplus X_2$, $X_1 = kerT$ e X_2 seu complementar fechado e seja Y_1 um subespaço de dimensão finita tal que $Y = Y_1 \oplus ImT$. Defina $G : Y_1 \times X_2 \longrightarrow Y : (y_1, x_2) \longrightarrow y_1 + Tx_2$. G é um isomorfismo, $y_1 + Tx_2 = 0$ se somente se $y_1 \in ImT$ o que nos dá $(y_1, x_2) = (0, 0)$ e G é claramente sobrejetora. Portanto G é uma bijeção e pelo teorema do Gráfico Fechado é um isomorfismo. Logo, como $0 \times X_2$ é fechado e G é um isomorfismo, $G(0 \times X_2) = ImT$ é fechado.

Teorema 2.1 *$T \in \mathcal{B}(X, Y)$ é semi-Fredholm se somente se $\mathcal{B}(X^*, Y^*)$ é semi-Fredholm. Neste caso $ind(T) = -ind(T^*)$.*

Prova. De fato, pelo teorema 5.13 em [14] temos que a ImT é fechada se somente se

ImT^* é fechada e neste caso $ImT^{\perp} = kerT^*$, $kerT^{\perp} = ImT^*$, $dim\ kerT^* = codim\ ImT$ e $codim\ ImT^* = dim\ kerT$, de onde o resultado segue imediatamente. ∎

Teorema 2.2 *Se $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ é semi-Fredholm, existe $\delta > 0$ tal que se $\|S - T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} < \delta$, S é semi-Fredholm e o $ind(S) = ind(T)$. Ou seja, o conjunto dos operadores semi-Fredholm com dado índice é aberto em $\mathcal{B}(X,Y)$.*

Prova. Suponha inicialmente que T é Fredholm. Então $X_1 = kerT$ e $Y_2 = ImT$ são subespaços fechados. De $dim\ kerT < \infty$ e $codim\ ImT < \infty$ temos $X = X_1 \oplus X_2$ para algum subespaço fechado X_2 de X e temos $Y = Y_1 \oplus Y_2$ para algum subespaço fechado de dimensão finita $Y_1 \subset Y$. Feita tal decomposição, todo $S \in \mathcal{B}(X,Y)$ pode ser escrito na forma matricial

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} S_{11}x_1 + S_{12}x_2 \\ S_{21}x_1 + S_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

onde $S_{ij} \in \mathcal{B}(X_j, Y_i)$ com $i, j = 1, 2$. Em particular

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}.$$

Agora $T_{11}x_1 + T_{12}x_2 = 0\ \forall x \in X$ pois $ImT = Y_2$, daí $T_{11} \equiv T_{12} \equiv 0$. $T(X_1) = \{0\} \Longrightarrow T_{21}x_1 = 0$, $\forall x_1 \in X_1$, então $T_{21} \equiv 0$. Logo

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}$$

onde $T_{22} : X_2 \longrightarrow Y_2$ é isomorfismo. Qualquer T_1 próximo a T pode ser escrito na forma

$$T_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & T_{22} + D \end{pmatrix}$$

com $\|A\|_{\mathcal{B}(X_1,Y_1)}$, $\|B\|_{\mathcal{B}(X_2,Y_1)}$, $\|C\|_{\mathcal{B}(X_1,Y_2)}$ e $\|D\|_{\mathcal{B}(X_2,Y_2)}$ pequenas. Se $\|T - T_1\|_{\mathcal{B}(X,Y)} < \epsilon$ temos que $\|D\|_{\mathcal{B}(X_2,Y_2)} < c_0\epsilon$ onde c_0 é uma constante que depende apenas das projeções em X_2 e Y_2. Daí como T_{22} é um isomorfismo e o conjunto dos isomorfismos é aberto, temos que $T_{22} + D$ é também um isomorfismo. Seja

$$\tilde{T_1} = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & I \end{pmatrix} T_1 \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q & I \end{pmatrix}$$

com $P = -B(T_{22} + D)^{-1}$, $Q = -(T_{22} + D)^{-1}C$ e I a identidade. Note que

$$\begin{pmatrix} I & -P \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & P \\ 0 & I \end{pmatrix}^{-1} \text{ e } \begin{pmatrix} I & 0 \\ -Q & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q & I \end{pmatrix}^{-1}.$$

Portanto

$$\begin{pmatrix} I & P \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} I & 0 \\ Q & I \end{pmatrix}$$

são isomorfismos de Y em Y e de X em X respectivamente e $ind(\tilde{T_1}) = ind(T_1)$. Agora, fazendo a multiplicação obtemos

$$\tilde{T_1} = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & T_{22} + D \end{pmatrix}$$

com $\Delta = A - B(T_{22} + D)^{-1}C \in \mathcal{B}(X_1, Y_1)$. Observe agora que

$$Im\tilde{T_1} = \begin{pmatrix} Im\Delta \\ Y_2 \end{pmatrix} \text{ e } ker\tilde{T_1} = \begin{pmatrix} ker\Delta \\ 0 \end{pmatrix}$$

portanto, temos que a $codim\ Im\tilde{T_1} = codim\ Im\Delta$ e que $dim\ ker\tilde{T_1} = dim\ ker\Delta$. Logo $\tilde{T_1}$ é Fredholm e portanto T_1 é Fredholm com $ind(T_1) = ind(\tilde{T_1}) = ind(\Delta) = dimX_1 - dimY_1 = ind(T)$ já que $\Delta \in \mathcal{B}(X_1, Y_1)$ com X_1 e Y_1 espaços de dimensão finita.

Suponha agora T semi-Fredholm com índice $-\infty$. Como no caso anterior, seja $X = X_1 \oplus X_2$ com $X_1 = kerT$. Seja $Y_2 = ImT$ que é fechada e possui codimensão infinita. A restrição de T a $\mathcal{B}(X_2, Y_2)$ é uma bijeção contínua e então, pelo teorema do gráfico fechado, existe $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y_2, X_2)$ o que implica $\|Tx_2\|_Y \geq c\|x_2\|_X$ para algum $c > 0$ e $\forall x_2 \in X_2$. Vamos mostrar que qualquer T_1 com $\|T - T_1\|_{\mathcal{B}(X,Y)} < \frac{c}{5}$ é semi-Fredholm com índice $-\infty$. Suponha $x = x_1 + x_2 \in kerT_1$. Então, se $\Delta = T_1 - T$ com $\|\Delta\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \leq \frac{c}{5}$ temos que $Tx_2 + \Delta(x_1 + x_2) = 0$. Assim

$$c\|x_2\|_X \leq \|Tx_2\|_Y \leq \|\Delta\|_{\mathcal{B}(X,Y)}(\|x_1\|_X + \|x_2\|_X) \Longrightarrow \|x_2\|_X \leq \frac{\|\Delta\|_{\mathcal{B}(X,Y)}}{c + \|\Delta\|_{\mathcal{B}(X,Y)}}\|x_1\|_X. \tag{2.1}$$

De tal desigualdade podemos provar que $kerT_1$ está contido num gráfico sobre X_1 o que nos dá $dim\ kerT_1 < \infty$. Com efeito, seja $P : X \longrightarrow X$ a projeção sobre X_1 e defina

$$\varphi : P(kerT_1) \longrightarrow X_2 : Px \longrightarrow (I - P)x.$$

$\varphi(x' + \lambda y') = \varphi(Px + \lambda Py) = \varphi(P(x + \lambda y)) = (I - P)(x + \lambda y) = \varphi(x') + \lambda\varphi(y')$ para x', $y' \in P(kerT_1)$, o que implica φ linear. Como $P(kerT_1) \subset X_1$ que tem dimensão finita, φ é contínua. Observe agora que φ está bem definida, de fato, dados x',$y' \in P(kerT_1)$ tal que $x' = y'$, existem x e $y \in kerT_1$, $x = x' + x_2$ e $y = y' + y_2$ para x_2 e $y_2 \in X_2$. Pela desigualdade (2.1), já que $x - y \in kerT_1$,

$$0 \leq \|x_2 - y_2\|_X \leq \frac{\|\Delta\|_{\mathcal{B}(X,Y)}}{c + \|\Delta\|_{\mathcal{B}(X,Y)}}\|x' - y'\|_X = 0,$$

portanto $\varphi(x') = x_2 = y_2 = \varphi(y')$, ou seja, φ está bem definida. Mostraremos agora que ImT_1 é fechada. Seja então $y \neq 0 \in \bar{ImT_1}$ e $x^n \in X$ tal que $T_1x^n \longrightarrow y$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Já que $y \neq 0$ podemos supor que $x^n \notin kerT_1$, mais ainda, podemos supor que $dist(\frac{x^n}{\|x^n\|_X}, kerT_1) \geq \frac{1}{2} \Longrightarrow dist(x^n, kerT_1) \geq \frac{1}{2}\|x^n\|_X \ \forall n \in \mathbb{N}$. Se $\{x^n\}$ é limitada, já que a $dim\ X_1 < \infty$, X_1 é localmente compacto e portanto podemos supor que $\{x_1^n\} \subset X_1$ converge. Agora

$$c\|x_2^n - x_2^m\|_X \leq \|T(x_2^n - x_2^m)\|_Y \leq \|T_1(x_2^n - x_2^m)\|_Y + \|\Delta\|_{\mathcal{B}(X,Y)}\|x_2^n - x_2^m\|_X$$

o que implica

$$\|x_2^n - x_2^m\|_X \leq \frac{1}{c - \|\Delta\|_{\mathcal{B}(X,Y)}}\|T_1(x_2^n - x_2^m)\|_Y \tag{2.2}$$

que tende a 0 quando n, $m \longrightarrow +\infty$, de onde podemos concluir que $\{x_2^n\}$ também converge e então $\{x^n\}$ converge para algum $x \in X$. Logo, como T_1 é contínuo, $T_1x^n \longrightarrow T_1x = y \Longrightarrow ImT_1$ é fechada. Agora suponha que $\{x^n\}$ não é limitada, ou seja, passando a subsequência $\|x^n\|_X \longrightarrow +\infty$. A componente da sequência $\left\{\frac{x^n}{\|x^n\|_X}\right\}$ em X_1, passando a subsequência, converge e isto, como no caso anterior, implica na convergência de $\frac{x^n}{\|x^n\|_X}$ para algum $u \in X$ tal que $\|u\|_X = 1$. Então $T_1\frac{x^n}{\|x^n\|_X} \longrightarrow T_1u = 0$ pois $T_1x^n \longrightarrow y \neq 0$ e $\|x^n\|_X \longrightarrow \infty$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Mas, por construção, $dist(\frac{x^n}{\|x^n\|_X}, kerT_1) \geq \frac{1}{2}$, contradição. Portanto ImT_1 é fechada. Mostraremos agora que a $codim\ T_1 = \infty$. Sendo a $codim\ T = \infty$ podemos definir uma sequência $\{y_n\} \subset Y$ com $\|y_n\|_Y = 1$, $dist(y_n, [ImT \cup \{y_1, ..., y_{n-1}\}]) \geq \frac{1}{2}$ ([ ] significa subespaço gerado). Suponha que ImT_1 tem codimensão finita. Então $Y = T_1(X_2) \oplus \tilde{Y_2}$ para algum subespaço $\tilde{Y_2}$ de dimensão finita. Desta maneira todo ponto de Y pode ser escrito como $\tilde{y} + T_1x^2$, $\tilde{y} \in \tilde{Y_2}$ e $x^2 \in X_2$. Assim $y_n = \tilde{y_n} + T_1x_n^2 \forall n \in \mathbb{N}$. Observe que $\{\tilde{y_n}\}$ é limitada num espaço de dimensão finita, portanto possui subsequência convergente. Passando a subsequência temos como em (2.2)

$$\begin{aligned}
\|x_2^n - x_2^m\|_X &\leq \frac{1}{c - \|\Delta\|_{\mathcal{B}(X,Y)}}\|T_1(x_2^n - x_2^m)\|_Y \\
&\leq \frac{1}{c - \|\Delta\|_{\mathcal{B}(X,Y)}}(2 + \|\tilde{y_n} - \tilde{y_m}\|_Y) \\
&\leq \frac{2}{c - \|\Delta\|_{\mathcal{B}(X,Y)}}
\end{aligned}$$

se n, $m \longrightarrow +\infty$. Temos também para $n > m$, pela definição de $\{y_n\}$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &\leq \|y_n - y_m - T(x_n^2 - x_m^2)\|_Y \\
&\leq \|\tilde{y_n} - \tilde{y_m} + T_1(x_n^2 - x_m^2) - T(x_n^2 - x_m^2)\|_Y \\
&\leq \|\tilde{y_n} - \tilde{y_m} + \Delta(x_n^2 - x_m^2)\|_Y \\
&\leq \|\Delta\|_{\mathcal{B}(X,Y)}\|x_n^2 - x_m^2\|_X
\end{aligned}$$

se $m \longrightarrow +\infty$ $(n > m)$. Assim

$$\frac{1}{2} \leq \frac{2\|\Delta\|_{\mathcal{B}(X,Y)}}{c - \|\Delta\|_{\mathcal{B}(X,Y)}} \Longrightarrow c \leq 5\|\Delta\|_{\mathcal{B}(X,Y)},$$

mas nós assumimos que $\|\Delta\|_{\mathcal{B}(X,Y)} < \frac{c}{5}$, contradição. Assim $codim\ ImT_1 = +\infty$ o que nos dá $ind(T_1) = -\infty$.

Finalmente se T é semi-Fredholm com índice $+\infty$, T^* pelo teorema (2.1) é semi-Fredholm com índice $-\infty$. Agora para todo T_1 próximo a T, T_1^* está próximo a T^* e é semi-Fredholm com índice $-\infty$ pelo que provamos anteriormente. Então, novamente pelo teorema (2.1) temos que T_1 é semi-Fredholm com índice $+\infty$ de onde segue o teorema. ∎

Teorema 2.3 *Sejam T, $K \in \mathcal{B}(X,Y)$ com T semi-Fredholm e K compacto. Então $T+K$ é semi-Fredholm com $ind(T+K) = ind(T)$.*

Prova. Suponha que $ind(T) < +\infty$ (podemos ter $ind(T) = -\infty$). Então $X = X_1 \oplus X_2$ onde $X_1 = kerT$ que possui dimensão finita. A restrição $T|_{X_2} \longrightarrow ImR(T)$ é um isomorfismo, portanto $\|Tx_2\|_Y \geq c\|x_2\|_X$ $\forall x_2 \in X_2$ e algum $c > 0$.

Afirmamos que $dim\ ker(T+K) < +\infty$, de fato, tome uma sequência $\{x_n\} \subset ker(T+K)$, $x_n = x_n^1 + x_n^2$ e $\|x_n\|_X = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $\{x_n^1\} \subset X_1$ e $\{Kx_n\}$ possuem subsequências convergentes pois $\{x_n\}$ é limitada, X_1 é localmente compacto e K é um operador compacto. Então como $(T+K)x_n = 0$ $\forall n$ temos que $Tx_n^2 = -Kx_n$ é uma sequência convergente. Como T é Fredholm, T possui imagem fechada e então Tx_n^2 converge para algum Tx na imagem de T. Daí como $\|Tx_2\|_Y \geq c\|x_2\|_X$ $\forall x_2 \in X_2$ temos que a sequência $\{x_n^2\}$ converge para $x \in X$. Portanto $\{x_n\}$ possui subsequência convergente implicando que $ker(T+K)$ é localmente compacto. Logo, como o $ker(T+K)$ é também fechado, tal subespaço possui dimensão finita.

Mostraremos agora que $Im(T+K)$ é fechada. Suponha que a sequência $(T+K)x_n \longrightarrow y$ com $dist(x_n, ker(T+K)) \geq \frac{1}{2}\|x_n\|_X$ $\forall n \in \mathbb{N}$ como na prova do teorema (2.2). Se $\{x_n\}$ é limitado, podemos assumir que $\{x_n^1\}$ e $\{Kx_n\}$ são convergentes e assim obter $\{x_n^2\}$ convergente como acima e então concluiremos que $\{x_n\}$ converge para algum $x \in X$ o que nos dá $(T+K)x = y$, ou seja, $Im(T+K)$ é fechada. Agora se $\{x_n\}$ não é limitada, passando a subsequência podemos assumir $\|x_n\|_X \longrightarrow +\infty$. A sequência $\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|_X}\right\}$ é limitada, portanto as sequências $\left\{K\frac{x_n}{\|x_n\|_X}\right\}$ e $\left\{\frac{x_n^1}{\|x_n\|_X}\right\}$ possuem subsequência convergente implicando $\left\{T\frac{x_n^2}{\|x_n\|_X}\right\}$ convergente que nos dá $\left\{\frac{x_n^2}{\|x_n\|_X}\right\}$ convergente pois $\|Tx_2\|_Y \geq c\|x_2\|_X$ $\forall x_2 \in X_2$. Portanto, passando a subsequência, a sequência $\left\{\frac{x_n}{\|x_n\|_X}\right\}$ converge para algum $u \in X$ onde $\|u\|_X = 1$. Então $(T+K)\frac{x_n}{\|x_n\|_X} \longrightarrow (T+K)u = 0$ pois $(T+K)x_n \longrightarrow y$ e $\|x_n\|_X \longrightarrow +\infty$, contradição, já que por construção $dist(x_n, ker(T+K)) \geq \frac{1}{2}\|x_n\|_X$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Logo $Im(T+K)$ é fechada.

Temos então que $T + K$ é um operador semi-Fredholm como é o operador $T + \alpha K$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Pelo teorema (2.2) a aplicação $\psi : \alpha \longrightarrow ind(T + \alpha K)$ é contínua e localmente constante. Como $[0, 1]$ é conexo temos que ψ é uma aplicação constante, de onde podemos concluir que $ind(T) = ind(T + K)$.

Suponha agora que T é apenas Fredholm, pela afirmação anterior

$$ind(T) = ind(T + K) = dim\ ker(T + K) - codim\ Im(T + K)$$

que é finito. Portanto temos que $codim\ Im(T+K)$ é finito o que implica $T+K$ um operador de Fredholm.

O caso em que o $ind(T) = +\infty$ nos dá pelo teorema (2.1) que o $ind(T^*) = -\infty$. Daí pelo que foi mostrado anteriormente temos que $T^* + K^*$ é semi-Fredholm com índice $-\infty$ o que implica novamente pelo teorema (2.1) que $T + K$ é semi-Fredholm com índice $+\infty$ de onde segue o teorema. ∎

Corolário 2.4 *Se $K \in \mathcal{B}(X, Y)$ é compacto, $I + K$ e $I^* + K^*$ são operadores Fredholm com índice zero. Assim se $I + K$ ou $I^* + K^*$ é injetivo, ambos são isomorfismos. Em geral temos*

$$dim\ ker(I + K) = codim\ Im(I + K) = dim\ ker(I^* + K^*) = codim\ Im(I^* + K^*)$$

que é finita.

Prova. Segue diretamente do teorema anterior. ∎

Embora o próximo resultado não vá ser usado no que segue, ele é uma propriedade básica dos operadores de Fredholm (ou semi-Fredholm).

Teorema 2.5 *Se $S \in \mathcal{B}(X, Y)$ e $T \in \mathcal{B}(Y, Z)$ são semi-Fredholm e se o $ind(S)$ e o $ind(T)$ podem ser somados, então $TS \in \mathcal{B}(X, Z)$ é semi-Fredholm com $ind(TS) = ind(T) + ind(S)$.*

Prova. Inicialmente assumiremos T e S sobrejetor ou injetor.

T e S sobrejetores Sendo T e S sobrejetores temos que TS é sobrejetor com $ker(TS) = S^{-1}(ker(T))$, daí $dim\ ker(TS) = dim\ ker S + dim\ ker T$ finito ou não. Assim $ind(TS) = ind(T) + ind(S)$. Observe que $Im(TS)$ é obviamente fechada já que TS é sobrejetor.

T e S injetores T e S injetores implica TS injetor. Observemos que a $Im(TS)$ é fechada pois $\|TSx\|_Y \geq c\|x\|_X\ \forall x \in X$ para algum $c > 0$ já que os operadores T e S satisfazem o mesmo tipo de estimativa. Provermos que a $codim\ Im(TS) = codim\ Im(T) +$

codim $Im(S)$ finita ou não, de onde segue o teorema. Suponha que T e S são operadores Fredholm, caso contrário a codimensão da imagem de um dos operadores é infinita e a afirmação segue facilmente pois ambos os operadores são injetores. Então $Y = Y_1 \oplus Y_2$ onde $Y_1 = ImS$ e Y_2 é um subespaço de dimensão finita e $Z = Z_1 \oplus Z_2$ onde $Z_1 = ImT$ e Z_2 é um subespaço de dimensão finita. Sendo T injetivo e a *dim* Y_2 finito temos que $Z = Z_1 \oplus Z_2 = T(ImS) \oplus T(Y_2) \oplus Z_2$ onde a *dim* $Y_2 =$ *dim* $T(Y_2)$. Então *codim* $Im(TS) =$ *dim* $T(Y_2) +$ *dim* $Z_2 =$ *codim* $Im(T) +$ *codim* $Im(S)$.

T injetora e S sobrejetora $ker(TS) = kerS$ e $Im(TS) = Im(T)$, então $Im(TS)$ é fechada e se ao menos um dos T e S possui índice finito, os índices podem ser somados e TS é semi-Fredholm com índice $ind(T) + ind(S)$.

T sobrejetora e S injetora Observe que ao menos um dos operadores deve ter índice finito. Se $ind(T) = +\infty$, *codim* ImS é finita o que implica *codim* $ImTS$ finita, de onde segue que a $ImTS$ é fechada. Então TS é semi-Fredholm com índice $+\infty$. Se $ind(T)$ é finito, *dim* $kerT = ind(T)$ é finita. Daí se $Y_1 = kerT \cap ImS$, $ker(TS) = S^{-1}(Y_1)$ que tem dimensão finita igual a *dim* Y_1 já que S é injetora. Escolha Y_2 tal que $Y_1 \oplus Y_2 = kerT$. Temos então que $Im(TS) = T(ImS + kerT) = T(ImS \oplus Y_2)$ de onde segue que a *codim* $Im(TS) =$ *codim* $ImS -$ *dim* Y_2 já que o núcleo de T está contido na $ImS \oplus Y_2$. Assim $ind(TS) =$ *dim* $Y_1 +$ *dim* $Y_2 -$ *codim* $ImS = ind(T) + ind(S)$.

Caso geral Em geral se $S \in \mathcal{B}(X, Y)$ é semi-Fredholm com índice menor ou igual a 0, a *dim* $kerS = m$ nos dá *codim* $ImS \geq m$. Escolha um espaço m dimensional $Y_1 \subset Y$ com $Y_1 \cap ImS = \{0\}$ e uma bijeção S_1 do $kerS$ sobre Y_1. Seja $X = X_1 \oplus X_2$ onde $X_1 = kerS$ e tome o operador de posto finito $G : X_1 \oplus X_2 \longrightarrow Y_1 : (x_1, x_2) \longrightarrow S_1 x_1$. O operador $S + G : X \longrightarrow Y$ é injetor, de fato, $(S + G)x = 0 \iff Sx_2 + S_1 x_1 = 0$, como $ImS_1 \cap ImS = \{0\}$, $x_1 = x_2 = 0 \Longrightarrow x = 0$. Agora, se $ind(S) \geq 0$ então *codim* $ImS = m < \infty$ e *dim* $kerS \geq m$. Então podemos escolher subespaços de dimensão finita m, $X_1 \subset kerS$ e $Y_1 \subset Y$ onde $Y_1 \cap ImS = \{0\}$ de tal maneira que $X = X_1 \oplus X_2$ para algum subespaço fechado X_2 e $Y = Y_1 \oplus Y_2$ com $Y_2 = ImS$. Tome então S_1 bijeção qualquer de X_1 para Y_1 e defina $L : X_1 \oplus X_2 \longrightarrow Y : x_1 + x_2 \longrightarrow S_1 x_1$. Por construção o operador L é sobrejetor. Dados então T e S operadores semi-Fredholm com $ind(T) + ind(S)$ definido podemos escolher L_i tal que $T + L_1$ e $S + L_2$ são injetores ou sobrejetores com imagem fechada. Pelo que foi provado anteriormente, $(T + L_1)(S + L_2)$ é semi-Fredholm de índice $ind(T + L_1) + ind(S + L_2)$. Agora se $K = L_1 S + T L_2 + L_1 L_2$ temos que

$$TS = (T + L_1)(S + L_2) - K$$

onde K é um operador de posto finito, ou seja, K é um operador compacto. Então

pelo teorema (2.3) TS é semi-Fredholm e

$$ind(TS) = ind(T + L_1)(S + L_2) = ind(T + L_1) + ind(S + L_2) = ind(T) + ind(S)$$

como queríamos provar.

∎

As estimativas de Schauder são tipicamente da forma

$$\|x\|_X \leq C(\|Tx\|_Y + |x|_X) \ \forall x \in X$$

com $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ onde $|\cdot|_X$ é uma semi-norma compacta em X, isto é, qualquer sequência $\{x_n\}$ limitada na norma $\|\cdot\|_X$ possui subsequência de Cauchy em respeito a $|\cdot|_X$. Isto facilmente implica $dim\ kerT < \infty$ e ImT fechada de onde podemos concluir que T é semi-Fredholm com índice $< +\infty$ - tipicamente T é Fredholm de índice zero.

Exemplo 4 Para um conjunto aberto conexo limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, seja

$$L = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + K : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$$

um operador elíptico de ordem dois, onde $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in C^2$, $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2 \ \forall x, \ \xi \in \mathbb{R}^n$ e para alguma constante $c_0 > 0$ e $K = b(x) \cdot \nabla + c(x)$ é um operador diferencial de ordem menor ou igual a 1 com coeficientes pelo menos contínuos. Pelo corolário 1 de [5] temos que existe uma constante $\lambda \geq 0$ tal que o operador $L + \lambda : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$ é um isomorfismo. Como o operador $\lambda : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$ é um operador compacto segue pelo teorema (2.3) que $L = L + \lambda - \lambda$ é um operador Fredholm de índice zero.

2.2 O Teorema da Transversalidade

O teorema da Transversalidade de *Thom* e *Abraham* [1] é uma ferramenta útil em muitos ramos da Geometria e Análise. Em [11], *Henry* prova uma versão generalizada desse teorema visando aplicações em dimensão infinita com atenção especial para o caso de índice negativo. Vamos estudar alguns exemplos com índice negativo no capítulo de aplicações.

Antes de enunciar o teorema precisamos de algumas definições.

Dizemos que um conjunto F de um espaço topológico X é *magro* se F está contido na união enumerável de conjuntos raros, ou seja, se F está contido na união enumerável de conjuntos cujo fecho não possui interior. Segue da definição de conjunto magro que a união enumerável de conjuntos magros é magro.

Dizemos que F é *residual* se seu complementar é magro, ou seja, F é a interseção enumerável de abertos densos.

Dizemos ainda que um espaço topológico X é espaço de *Baire* se todo subconjunto residual é denso.

Seja f uma aplicação C^k entre espaços de Banach. Diremos que x é *ponto regular* de f se a derivada $f'(x)$ é sobrejetora e possui núcleo de dimensão finita. Se x não é ponto regular de f, x é chamado *ponto crítico* de f. Em nossas aplicações o núcleo de f' sempre será de dimensão finita, portanto, para x ser ponto crítico de f será necessário e suficiente $f'(x)$ ser não sobrejetora. Um *valor crítico* de f é a imagem por f de algum ponto crítico de f. Todos os outros pontos do contradomínio são chamados *valores regulares* de f, incluindo todos os pontos fora da imagem de f.

Sejam agora X um espaço topológico de Baire e $I = [0,1]$. Para qualquer subconjunto fechado ou σ-fechado $F \subset X$ e um inteiro $m \geq 0$, dizemos que a codimensão de F é maior ou igual a m ($codim\ F \geq m$) se o subconjunto $\{\phi \in C(I^m, X); \phi(I^m) \cap F$ é não vazio $\}$ é magro em $C(I^m, X)$. Dizemos que $codim\ F = k$ se k é o maior inteiro satisfazendo $codim\ F \geq m$.

Teorema 2.6 *Sejam k, m inteiros positivos; X, Y e Z variedades de Banach de classe C^k; $A \subset X \times Y$ um conjunto aberto; $f : A \longrightarrow Z$ uma aplicação de classe C^k e um ponto $\xi \in Z$. Assuma que para cada $(x,y) \in f^{-1}(\xi)$:*

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) : T_xX \longrightarrow T_\xi Z$ *é semi-Fredholm com índice* $< k$.
2. *(α)* $Df(x,y) : T_xX \times T_yY \longrightarrow T_\xi Z$ *é sobrejetora*

   ou

   (β) $dim \left\{ \frac{Im(Df(x,y))}{Im(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y))} \right\} \geq m + dim\ ker(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y))$.
3. $(x,y) \longrightarrow y : f^{-1}(\xi) \longrightarrow Y$ *é σ-própria, ou seja, $f^{-1}(\xi)$ é a união enumerável de conjuntos M_j tais que $(x,y) \longrightarrow y : M_j \longrightarrow Y$ é uma aplicação própria para cada j.[Dado $(x_n, y_n) \in M_j$ tal que $\{y_n\}$ converge em Y, existe uma subsequência convergente de $\{(x_n, y_n)\}$ com limite em M_j.]*

Observamos que (3) *se verifica se $f^{-1}(\xi)$ é Lindelof, ou mais especificamente se $f^{-1}(\xi)$ é um espaço métrico separável, ou se X e Y são espaços métricos separáveis.*

Seja $A_y = \{x \in X; (x,y) \in A\}$ e

$$Y_{crit} = \{y \in Y; \xi \text{ é valor crítico de } f(\cdot, y) : A_y \longrightarrow Z\}.$$

Então Y_{crit} é magro em Y e se $(x,y) \longrightarrow y : f^{-1}(\xi) \longrightarrow Y$ é própria, Y_{crit} também é fechado. Se $ind(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) \leq -m < 0$ em $f^{-1}(\xi)$ então $2(\alpha)$ implica $2(\beta)$ e

$$Y_{crit} = \{y \in Y; \xi \in f(A_y, y)\}$$

tem codimensão maior ou igual a m em Y.[Note que Y_{crit} é magro em Y se somente se codim $Y_{crit} \geq 1$.]

A hipótese usual é a de que ξ é valor regular de f, assim sempre temos $2(\alpha)$. Se $2(\beta)$ se verifica em algum ponto, então $ind(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) \leq -m$ neste ponto já que a

$$codim\ Im(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) \geq dim\ \left\{\frac{Im(Df(x,y))}{Im(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y))}\right\}.$$

Se o $ind(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) \leq -m$ e $2(\alpha)$ se verifica, então $2(\beta)$ também se verifica como nos diz o teorema. Portanto a hipótese $2(\beta)$ é mais geral para o caso de índice negativo.

CAPÍTULO 3

Aplicações

Suponhamos que $\mathcal{P}$ é uma propriedade que depende de um parâmetro $x \in X$, onde X é um espaço topológico de Baire. Dizemos que $\mathcal{P}$ é *genérica* (em x) se ela vale para todo x em um conjunto residual de X.

Em nossas aplicações (exceto a última) X será a classe de regiões $\mathcal{C}^m$ difeomorfas a uma região fixa Ω_0 de classe $\mathcal{C}^m$, ou seja,

$$X = \{h(\Omega_0); h \in \mathrm{Diff}^m(\Omega_0)\}.$$

Introduzimos uma topologia em X definindo uma sub-base das vizinhanças de um $\Omega \in X$ por

$$\{h(\Omega); \|h - i_\Omega\|_{\mathcal{C}^m(\Omega,\mathbb{R}^n)} < \epsilon, \epsilon > 0 \text{ suficientemente pequeno}\}.$$

Michelleti prova em [15] que este é de fato um espaço topológico metrizável, portanto de Baire. De fato, provaremos nas aplicações é que a propriedade $\mathcal{P}$ vale para todo h fora de um conjunto magro de $\mathrm{Diff}^m(\Omega_0)$.

Entretanto nessas aplicações, o conjunto F de mergulhos excluídos será sempre definido pelas propriedades da imagem do mergulho, portanto é invariante por composição com difeomorfismos de classe $\mathcal{C}^m$ de Ω_0 em Ω_0. Isto implica (ver [11]) que o subconjunto das regiões definidas por F também é magro no nosso espaço X.

3.1 Preliminares

Consideremos o operador diferencial elíptico de segunda ordem

$$A(\lambda) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x,\lambda)\frac{\partial}{\partial x_j} + c(x,\lambda) \tag{3.1}$$

onde $a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \in \mathcal{C}^2$, $b_j(x,\lambda)$, $c(x,\lambda)$ são polinômios em λ com coeficientes $\mathcal{C}^1$ todos assumindo valores reais quando λ é real. Assumimos também que $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2$ $\forall x$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ para alguma constante $c_0 > 0$.

Impondo condições convenientes de contorno, podemos definir operadores sobre diversos espaços de funções. Aqui consideramos $A(\lambda)$ como um operador em $L^2(\Omega)$ com domínio $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$.

Dado uma região limitada $\mathcal{C}^2$-regular $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que λ é *autovalor* de $A(\lambda)$ se existe uma solução não nula u de

$$A(\lambda)u = 0 \text{ em } \Omega,\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega. \tag{3.2}$$

λ *é autovalor simples* se o núcleo de $A(\lambda)$ é unidimensional e sua imagem contida em $L^2(\Omega)$ não contém $\frac{d}{d\lambda}\Big(A(\lambda)\Big)u$ para $u \neq 0$ no núcleo.

Proposição 3.1 *Seja $h \in \mathrm{Diff}^m(\Omega)$. A aplicação*

$$\begin{aligned} G_h : H^2 \cap H_0^1(\Omega) - \{0\} \times \mathbb{R} &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ (u,\lambda) &\longrightarrow h^* A(\lambda) h^{*-1} u \end{aligned}$$

tem zero como valor regular se somente se todos os autovalores reais de

$$h^* A(\lambda) h^{*-1} u = 0 \text{ em } \Omega,\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,\ u \neq 0 \tag{3.3}$$

são simples.

Prova. Considere $A'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\Big(A(\lambda)\Big)$. A diferencial de G_h em $(u,\lambda) \in H^2 \cap H_0^1(\Omega) - 0 \times \mathbb{R}$ é

$$\begin{aligned} DG_h(u,\lambda) : H^2 \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R} &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ (\dot{u},\dot{\lambda}) &\longrightarrow h^* A(\lambda) h^{*-1}\dot{u} + \dot{\lambda} h^* A'(\lambda) h^{*-1} u. \end{aligned}$$

Pelo exemplo 4 capítulo 2 temos que $ind(A(\lambda)) = 0$ como aplicação de $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$, portanto $ind(A(\lambda)) = 1$ como aplicação de $H^2 \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ em $L^2(\Omega)$. Daí, como h^* é um isomorfismo temos $ind(h^* A(\lambda) h^{*-1}) = 1$. Agora, a aplicação linear contínua

3.2 Simplicidade Genérica dos Autovalores do Laplaciano

Nesta seção mostraremos que genericamente no conjunto das regiões abertas, conexas, limitadas C^3-regulares $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, todos os autovalores λ de

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ em } \Omega,\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,\ u \neq 0 \tag{3.5}$$

são simples. Isto foi demonstrado originalmente por Micheletti [15] e Uhlenbeck [17].

O operador $(\Delta + \lambda)$ com domínio $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ é um operador do tipo (3.1), logo as proposições da seção 3.1 podem ser aplicadas. Observe que λ é autovalor simples de (3.5) se somente se a dimensão do espaço gerado pelas autofunções associadas a λ é 1. Tal afirmação segue facilmente do lema a seguir.

Lema 3.3 *Consideremos o operador* $(\Delta + \lambda) : H^2 \cap H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$. *Então temos* $Im(\Delta + \lambda) = \{ker(\Delta + \lambda)\}^{\perp}$.

Prova. Dado $v \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ e $u \in ker(\Delta + \lambda)$ temos pela segunda identidade de Green que

$$\int_\Omega u(\Delta + \lambda)v = \int_\Omega v(\Delta + \lambda)u = 0$$

implicando que a imagem do operador $(\Delta+\lambda)$ em $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ está contida no $\{u\}^{\perp}$. Vimos no exemplo 4 capítulo 2 que o operador $(\Delta + \lambda) : H^2 \cap H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ é Fredholm de índice zero, portanto a $dim\ ker(\Delta+\lambda) = codim(\Delta+\lambda)$ de onde segue a afirmação do lema. ∎

Considere a aplicação diferenciável

$$\begin{aligned} F : H^2 \cap H_0^1(\Omega) - \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathrm{Diff}^3(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ (u, \lambda, h) &\longrightarrow h^*(\Delta + \lambda)h^{*-1}u. \end{aligned}$$

Segue da proposição (3.2) que estudar a simplicidade genérica dos autovalores de (3.5) é equivalente a estudar a simplicidade genérica dos autovalores de (3.3) para $A(\lambda) = (\Delta + \lambda)$.

Desta maneira, mostraremos a simplicidade genérica de todos os autovalores do probema problema de Dirichlet para Δ mostrando que 0 é valor regular de G_h, com $A(\lambda) = (\Delta + \lambda)$, para todo $h \in \mathrm{Diff}^3(\Omega)$, exceto um conjunto magro, através do teorema da Transversalidade. Portanto, nossos esforços agora se concentram em verificar as hipóteses do teorema da Trasversalidade para a aplicação diferenciável F.

Observe que as hipóteses (1) e (3) do teorema são satisfeitas diretamente já que o operador linear

$$\frac{\partial F}{\partial(u, \lambda)}(u, \lambda, h) : H^2 \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R} \longrightarrow L^2(\Omega)$$

$(\dot{u}, \dot{\lambda}) \longrightarrow \dot{\lambda} h^* A'(\lambda) h^{*-1} u$ de $H^2 \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ em $L^2(\Omega)$ é compacta, e então, pelo teorema (2.3), temos que $ind(DG_h(u, \lambda)) = 1$.

Suponha que zero é valor regular de G_h, ou seja, $DG_h(u, \lambda)$ é sobrejetora para todo $(u, \lambda) \in G_h^{-1}(0)$. O $ind(DG_h(u, \lambda)) = 1$ implica que o núcleo de $DG_h(u, \lambda)$ é unidimensional e igual ao subespaço gerado por $(u, 0)$. Isto implica que o núcleo de $h^* A(\lambda) h^{*-1}$ como aplicação de $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ é unidimensional. Além disso, como

$$DG_h(u, \lambda)(\dot{u}, \dot{\lambda}) = 0 \iff \dot{\lambda} h^* A'(\lambda) h^{*-1} u = -h^* A(\lambda) h^{*-1} \dot{u}$$

temos que $h^* A'(\lambda) h^{*-1} u$ não pertence a imagem de $h^* A(\lambda) h^{*-1}|_{H^2 \cap H_0^1(\Omega)}$ implicando que λ é autovalor simples. Logo todos os autovalores de (3.3) são simples.

Reciprocamente, suponha que todos os autovalores reais de (3.3) são simples. Então se $(u, \lambda) \in G_h^{-1}(0)$ temos que $ker(h^* A(\lambda) h^{*-1}) = [u]$ e $\dot{\lambda} h^* A'(\lambda) h^{*-1} u \neq -h^* A(\lambda) h^{*-1} \dot{u}$ para todo $\dot{u}$ e $\dot{\lambda} \neq 0$ o que implica $DG_h(u, \lambda)(\dot{u}, \dot{\lambda}) = 0 \iff \dot{u} = u$ e $\dot{\lambda} = 0$, ou seja, $dim\ ker(h^* A(\lambda) h^{*-1}) = 1$.

Assim, sendo $ind(DG_h(u, \lambda)) = 1$ temos que $codim\ Im(DG_h(u, \lambda)) = 0$ o que nos dá $DG_h(u, \lambda)$ sobrejetora, de onde segue o resultado. ∎

Proposição 3.2 *λ é autovalor simples de (3.3) se somente se λ é autovalor simples de*

$$A(\lambda) v = 0 \text{ em } h(\Omega),\ v = 0 \text{ sobre } \partial h(\Omega),\ v \neq 0. \tag{3.4}$$

Prova. Observemos que

$$h^* A(\lambda) h^{*-1} u = 0 \iff A(\lambda) h^{*-1} u = 0$$

pois h^* é um isomorfismo. Então $v = h^{*-1} u \in H^2 \cap H_0^1(h(\Omega))$ é autofunção de (3.4) associada a λ em $h(\Omega)$ se somente se u é autofunção de (3.3) associada a λ, ou seja, λ é autovalor de (3.3) se somente se é autovalor de (3.4) em $h(\Omega)$, portanto o $ker(h^* A(\lambda) h^{*-1}) \subset H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ é unidimensional se somente se o $ker(A(\lambda)) \subset H^2 \cap H_0^1(h(\Omega))$ é unidimensional.

Para concluirmos a prova, basta mostrarmos que

$$\frac{d}{d\lambda}(A(\lambda)) v \in Im(A(\lambda)) \iff \frac{d}{d\lambda}(h^* A(\lambda) h^{*-1}) u \in Im(h^* A(\lambda) h^{*-1}).$$

De fato, como $\frac{d}{d\lambda}(h^* A(\lambda) h^{*-1}) = h^* \frac{d}{d\lambda}(A(\lambda)) h^{*-1}$ e h^* é um isomorfismo temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda}(A(\lambda)) v \in Im(A(\lambda)) &\iff \frac{d}{d\lambda}(A(\lambda)) h^{*-1} u \in Im(A(\lambda)) \\ &\iff h^* \frac{d}{d\lambda}(A(\lambda)) h^{*-1} u \in Im(h^* A(\lambda) h^{*-1}), \end{aligned}$$

de onde segue o resultado. ∎

$$(\dot{u}, \dot{\lambda}) \longrightarrow h^*(\Delta + \lambda)h^{*-1}\dot{u} + \dot{\lambda}u.$$

é Fredholm de índice 1 e as variedades de Banach $\mathrm{Diff}^3(\Omega)$, $\mathbb{R}$, $H^2 \cap H_0^1(\Omega) - \{0\}$ são separáveis. Resta-nos então verificar a hipótese $2(\alpha)$ do teorema, ou seja, basta-nos mostrar que F possui zero como valor regular. Faremos tal prova por absurdo.

Suponha que exista um ponto crítico (u_0, λ_0, h_0) de F tal que $F(u_0, \lambda_0, h_0) = 0$. Sejam $\Omega_0 = h_0(\Omega)$ e $v_0 = h_0^{*-1}u_0$ e defina uma nova aplicação diferenciável

$$\begin{aligned} \tilde{F} : H^2 \cap H_0^1(\Omega_0) - \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathrm{Diff}^3(\Omega_0) &\longrightarrow L^2(\Omega_0) \\ (v, \lambda, h) &\longrightarrow h^*(\Delta + \lambda)h^{*-1}v. \end{aligned}$$

Sabendo que $(h \circ h_0)^* = h_0^* h^*$ temos que

$$h_0^{*-1}F(h_0^* v, \lambda, h \circ h_0) = h_0^{*-1}(h \circ h_0)^*(\Delta + \lambda)(h \circ h_0)^{*-1}h_0^* v = \tilde{F}(v, \lambda, h).$$

Sabendo isto e tendo que h_0^* um isomorfismo, temos que $\tilde{F}(v, \lambda, h)$, com $\tilde{F}(v_0, \lambda_0, i_{\Omega_0}) = 0$ possui $(v_0, \lambda_0, i_{\Omega_0})$ como ponto crítico se somente se (u_0, λ_0, h_0) é ponto crítico de F com $F(u_0, \lambda_0, h_0) = 0$. Desta forma temos a seguinte observação:

Observação 3.1 *Podemos supor sem perda de generalidade que o ponto crítico (u_0, λ_0, h_0) de F tal que $F(u_0, \lambda_0, h_0) = 0$ tem $h_0 = i_\Omega$, simplificando assim nossos cálculos e notação.*

É importante observar também que tal observação é válida para qualquer operador diferencial $A(\lambda)$ no lugar de $(\Delta + \lambda)$ pois a forma particular do operador não foi usada no argumento acima.

Calculando então a diferencial de F no ponto crítico $(u_0, \lambda_0, i_\Omega)$ através do teorema (1.8) obtemos pela hipótese de absurdo que

$$\begin{aligned} DF(u_0, \lambda_0, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{\lambda}, \dot{h}) &= (\Delta + \lambda_0)\dot{u} + \dot{\lambda}u_0 + [\dot{h} \cdot \nabla, \Delta + \lambda_0]u_0 \\ &= (\Delta + \lambda_0)(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u_0) + \dot{\lambda}u_0 \end{aligned}$$

não é sobrejetora.

Observemos que a imagem de $DF(u_0, \lambda_0, i_\Omega)$ em $\{\dot{u} \in H^2 \cap H_0^1(\Omega), \dot{\lambda} = 0, \dot{h} = 0\}$ coincide com a imagem do operador de Fredholm $(\Delta + \lambda_0)$ em $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ que é fechada e possui codimensão finita. Agora, como tal conjunto está contido na imagem de $DF(u_0, \lambda_0, i_\Omega)$, podemos concluir que a imagem de $DF(u_0, \lambda_0, i_\Omega)$ tem codimensão finita e portanto é fechada. Como este operador é não sobrejetor, podemos afirmar também que a

codimensão de sua imagem é positiva. Assim sendo, como $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert e a imagem de $DF(u_0, \lambda_0, i_\Omega)$ é fechada, existe $\psi \in L^2(\Omega)$, não nula, ortogonal a imagem de $DF(u_0, \lambda_0, i_\Omega)$.

Tomando $\dot{\lambda} = \dot{h} = 0$ temos $\int_\Omega \psi(\Delta + \lambda_0)\dot{u} = 0 \; \forall \; \dot{u} \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$, ou seja, ψ é solução fraca de (3.5). Pelo fato de estarmos trabalhando com $(\Delta + \lambda_0)$ em $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$, com Ω conexa limitada $\mathcal{C}^3$-regular, podemos afirmar que $\psi \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ e é solução forte de (3.5). Tal afirmação segue, por exemplo, do teorema (8.2′) de [2]. De fato, sendo $\Omega \in \mathcal{C}^3$, segue do teorema (15.2) de [6] que u_0, $\psi \in H^3(\Omega)$, então pelo teorema (11.1) de [9] u_0, $\psi \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ de onde obtemos pelo teorema (2.28) em [8] que u_0, $\psi \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega)$ $\forall \alpha > 1$, já que u_0, ψ satisfazem (3.5).

Tomando então $\dot{h}$ em $T_{i_\Omega}(\mathrm{Diff}^3(\Omega)) = \mathcal{C}^3(\Omega, R^n)$ temos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \psi(\Delta + \lambda_0)\dot{h} \cdot \nabla u_0 \\
&= \int_\Omega \{\psi(\Delta + \lambda_0)\dot{h} \cdot \nabla u_0 - (\Delta + \lambda_0)\psi\dot{h} \cdot \nabla u_0\} \\
&= \int_{\partial\Omega} \{\psi \frac{\partial(\dot{h} \cdot \nabla u_0)}{\partial N} - \frac{\partial \psi}{\partial N}\dot{h} \cdot \nabla u_0\} \\
&= -\int_{\partial\Omega} \dot{h} \cdot N \frac{\partial \psi}{\partial N}\frac{\partial u_0}{\partial N} \; \forall \; \dot{h} \in \mathcal{C}^3(\Omega, \mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Portanto $\frac{\partial \psi}{\partial N}\frac{\partial u_0}{\partial N} \equiv 0$ em $\partial\Omega$ e nossa hipótese de absurdo implica na existência de $\psi \in L^2(\Omega)$, não nula, solução de (3.5) tal que $\frac{\partial \psi}{\partial N}\frac{\partial u_0}{\partial N} \equiv 0$ em $\partial\Omega$.

Para concluirmos nosso exemplo, utilizaremos o teorema de Cauchy (1.3) para equações elípticas de segunda ordem. Suponha que para algum $x_0 \in \partial\Omega$ $\frac{\partial u_0}{\partial N} \neq 0$. Então $\frac{\partial u_0}{\partial N} \neq 0$ numa vizinhança V de x_0 em $\partial\Omega$, implicando $\frac{\partial \psi}{\partial N} = 0$ nesta vizinhança. Assim temos $\frac{\partial \psi}{\partial N} = 0$ e $\psi = 0$ em V enquanto $(\Delta + \lambda_0)\psi = 0$ em Ω. Portanto, as condições do teorema de Cauchy (1.3) estão satisfeitas resultando que $\psi \equiv 0$ em Ω. Mas por hipótese ψ é não nula, então temos que $\frac{\partial u_0}{\partial N} = 0$ em $\partial\Omega$. Podemos então repetir o argumento anterior para u_0 e obtermos que $u_0 \equiv 0$ em Ω, mas por hipótese $u_0 \in H^2 \cap H_0^1(\Omega) - \{0\}$, contradição. Logo podemos concluir que 0 é valor regular de F, como queríamos mostrar.

3.3 Uma Propriedade Genérica para as Autofunções do Laplaciano

No exemplo anterior trabalhamos com uma condição sobre os autovalores do problema de Dirichlet. Neste exemplo trabalharemos com uma condição sobre as autofunções deste problema, mostrando que, genericamente no conjunto das regiões $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abertas, conexas, limitadas, $\mathcal{C}^3$-regulares, as autofunções normalizadas u de (3.5) satisfazem $\int_\Omega g(u) \neq 0$, onde $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathcal{C}^3$ cujas raízes formam um conjunto discreto.

Suponha então g uma função de classe $\mathcal{C}^3$ como acima e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma região aberta, conexa, limitada, $\mathcal{C}^3$-regular. Através do teorema da Transversalidade provaremos que o subconjunto

$$B = \{h \in \mathrm{Diff}^3(\Omega); \int_{h(\Omega)} g(u) = 0 \text{ para alguma autofunção normalizada } u \text{ de (3.5) em } h(\Omega)\}$$

é magro em $\mathrm{Diff}^3(\Omega)$ de onde segue o resultado desejado.

Inicialmente vamos mostrar que as autofunções associadas a autovalores simples menores ou iguais a algum $N \in \mathbb{N}$ satisfazem genericamente $\int_\Omega g(u) \neq 0$, depois obteremos o resultado desejado para todas as autofunções de (3.5) através de um argumento simples.

Precisamos antes dos seguintes lemas.

Lema 3.4 *Dado $h_0 \in \mathrm{Diff}^2(\Omega)$ existe uma vizinhança V_0 de h_0 em $\mathrm{Diff}^2(\Omega)$ tal que para todo $h \in V_0$ temos*

$$\|(h^*\Delta h^{*-1} - h_0^*\Delta h_0^{*-1})u\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon(h)\|u\|_{H^2\cap H_0^1(\Omega)}$$

onde $\epsilon(h)$ tende a zero quando $h \longrightarrow h_0$ em $\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

Prova. Basta considerarmos o caso $h_0 = i_\Omega$. Da seção 1.2 temos

$$\begin{aligned} h^*\frac{\partial}{\partial y_i}h^{*-1}u(x) &= \frac{\partial}{\partial y_i}(u \circ h^{-1})(h(x)) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)(h_x^{-1})_{ji}(x) \\ &= \sum_{j=1}^n b_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \end{aligned}$$

onde $b_{ij}(x) = (h_x^{-1})_{ji}(x)$, ou seja, $b_{ij}(x)$ é a i,j-ésima entrada da transposta da matriz Jacobiana inversa de $h_x = (\frac{\partial h_i}{\partial x_j})_{i,j=1}^n$. Portanto

$$h^*\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}h^{*-1}u(x) = \sum_{k=1}^n b_{ik}(x)\frac{\partial}{\partial x_k}(x)\Big(\sum_{j=1}^n b_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n} b_{ik}(x) \sum_{j=i}^{n} \Big[(\frac{\partial}{\partial x_k} b_{ij})(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + b_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j}(x) \Big] \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} b_{ik}(x) b_{ij}(x) \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} \Big)(x) + \sum_{j,k=1}^{n} b_{ik}(x) \Big(\frac{\partial}{\partial x_k} b_{ij})(x) \Big)(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \\
&= \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(u) \Big)(x) + L_i(u)(x)
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
L_i(u)(x) &= (b_{ii}^2(x) - 1) \Big(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(u) \Big)(x) + \sum_{j,k=1}^{n} (1 - \delta_{i,j,k}) b_{i,k}(x) b_{i,j}(x) \Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} \Big)(x) + \\
&+ \sum_{j,k=1}^{n} b_{i,k}(x) \Big(\frac{\partial}{\partial x_k} b_{ij})(x) \Big)(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x).
\end{aligned}
$$

Então

$$
\Big(h^* \Delta h^{*-1}(u) \Big) = \Delta u + Lu
$$

com

$$
Lu = \sum_{i=1}^{n} L_i u.
$$

Já que $b_{j,k} \longrightarrow \delta_{j,k}$ em $\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ quando $h \longrightarrow i_\Omega$ em $\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$ temos que os coeficientes de L tendem a 0 uniformemente quando $h \longrightarrow i_\Omega$ em $\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. Então segue que

$$
\|Lu\|_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon(h) \|u\|_{H^2 \cap H_0^1(\Omega)}
$$

onde $\epsilon(h)$ tende a zero quando $h \longrightarrow i_\Omega$ em $\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$. ∎

Seja

$$
\begin{aligned}
D_N &= \{h \in \mathrm{Diff}^3(\Omega);\ N \text{ não é autovalor de (3.5) em } h(\Omega) \\
&\quad \text{e todos os autovalores em } (0, N) \text{ de (3.5) em } h(\Omega) \text{ são simples}\}.
\end{aligned}
$$

Lema 3.5 *D_N é um subconjunto aberto e denso de* $\mathrm{Diff}^3(\Omega)$.

Prova. Defina

$$
D = \{h \in \mathrm{Diff}^3(\Omega);\ \text{todos os autovalores de (3.5) em } h(\Omega) \text{ são simples }\}
$$

e

$$
\tilde{D_N} = \{h \in \mathrm{Diff}^3(\Omega);\ \text{todos os autovalores em } (0, N) \text{ de (3.5) em } h(\Omega) \text{ são simples}\}.
$$

Vamos mostrar primeiro que D_N é aberto. Sejam $h_0 \in D_N$ e $\lambda_1, ..., \lambda_k$ autovalores de Δ em $h_0(\Omega)$ menores que N. Considere um círculo γ de raio N.

O lema anterior e os teoremas 2.14 e 3.16 de [14] nos garantem que existe uma vizinhança V_0 de h_0 tal que a dimensão de auto-espaço associado aos autovalores de norma menor que N é k para todo operador $h^*\Delta h^{*-1}$ com $h \in V_0$. Pelo exemplo 2 capítulo 1 temos que cada autovalor simples de ${h_0}^*\Delta {h_0}^{*-1}$ depende continuamente de h numa vizinhança C^2 de h_0. Então, para cada $1 \leq i \leq k$ existe $V_i \subset \mathrm{Diff}^3(\Omega)$ vizinhança de h_0 e $\Lambda_i : V_i \longrightarrow (0, N)$ contínuas tal que $\Lambda_i(h)$ é autovalor simples de $h^*\Delta h^{*-1}$ para todo $h \in V_i$ com $\Lambda_i(h_0) = \lambda_i$ e os conjuntos $\Lambda_i(V_i)$ são dois a dois disjuntos. Defina então $V = \bigcap_{i=0}^{k} V_i$, vizinhança de h_0 em $\mathrm{Diff}^3(\Omega)$. Observe que $\forall h \in V$, $h^*\Delta h^{*-1}$ possui k autovalores menores que N todos simples. Portanto D_N é aberto.

No exemplo anterior vimos que o complementar de D é magro, logo temos que D é denso em $\mathrm{Diff}^3(\Omega)$. Como $\tilde{D_N} \supset D$, podemos concluir que $\tilde{D_N}$ é denso em $\mathrm{Diff}^3(\Omega)$. Portanto, para provar que D_N é denso basta mostrar que se N é autovalor de (3.5) em uma região Ω, então existe h próximo de i_Ω tal que isto não se verifica em $h(\Omega)$. De fato, basta tomar $h(x) = (1+\epsilon)x$. Um cálculo simples mostra que cada autovalor λ de Δ em Ω se transforma em um autovalor $\frac{\lambda}{(1+\epsilon)^2}$ em $h(\Omega)$. ∎

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma região C^3-regular, aberta, conexa, limitada e considere a aplicação diferenciável

$$\begin{aligned} F : H^2 \cap H_0^1(\Omega) - \{0\} \times (0, N) \times D_N &\longrightarrow L^2(\Omega) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ (u, \lambda, h) &\longrightarrow (h^*(\Delta + \lambda)h^{*-1}u, \int_\Omega u^2 det\ h', \int_\Omega g(u) det\ h'). \end{aligned}$$

Através do teorema da transversalidade mostraremos que o subconjunto

$$B_N = \{h \in D_N; (0, 1, 0) \in F(H^2 \cap H_0^1(\Omega) - \{0\}, (0, N), h)\}$$

é magro em D_N de onde segue o resultado.

Afirmamos inicialmente que o operador contínuo $\frac{\partial F}{\partial(u,\lambda)}(u, \lambda, h)$ de $H^2 \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R}$ em $L^2(\Omega) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é Fredholm com $ind(\frac{\partial F}{\partial(u,\lambda)}(u, \lambda, h)) \leq -1$ $\forall (u, \lambda, h) \in F^{-1}(0, 1, 0)$.

Seja $(u, \lambda, h) \in F^{-1}(0, 1, 0)$. Podemos supor sem perda de generalidade $h = i_\Omega$ como na observação (3.1). De fato, sempre que $F(u, \lambda, h) = (0, 1, 0)$, $v = h^{*-1}u$ satisfaz

$$\Delta v + \lambda v = 0 \text{ em } h(\Omega),\ v = 0 \text{ em } \partial h(\Omega) \text{ e } \int_{h(\Omega)} v^2 = 1.$$

Calculando as derivadas temos

$$\begin{aligned} DF_1(u, \lambda, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{\lambda}, \dot{h}) &= (\Delta + \lambda)(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u) + \dot{\lambda} u \\ DF_2(u, \lambda, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{\lambda}, \dot{h}) &= \int_\Omega 2u\dot{u} + \int_{\partial\Omega} u^2(\dot{h} \cdot N) \\ &= \int_\Omega 2u\dot{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DF_3(u,\lambda,i_\Omega)(\dot{u},\dot{\lambda},\dot{h}) &= \int_\Omega g'(u)\dot{u} + \int_{\partial\Omega} g(u)(\dot{h}\cdot N) \\ &= \int_\Omega g'(u)\dot{u} + g(0)\int_{\partial\Omega}(\dot{h}\cdot N) \end{aligned}$$

onde N é o vetor normal unitário a $\partial\Omega$. Logo

$$\begin{aligned} DF(u,\lambda,i_\Omega)(\dot{u},\dot{\lambda},\dot{h}) &= (DF_1(u,\lambda,i_\Omega), DF_2(u,\lambda,i_\Omega), DF_3(u,\lambda,i_\Omega))(\dot{u},\dot{\lambda},\dot{h}) \\ &= ((\Delta+\lambda)(\dot{u}-\dot{h}\cdot\nabla u)+\dot{\lambda}u, \int_\Omega 2u\dot{u}, \int_\Omega g'(u)\dot{u} + g(0)\int_{\partial\Omega}(\dot{h}\cdot N)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial(u,\lambda)}(u,\lambda,i_\Omega)(\dot{u},\dot{\lambda}) &= (\frac{\partial F_1}{\partial(u,\lambda)}(u,\lambda,i_\Omega), \frac{\partial F_2}{\partial(u,\lambda)}(u,\lambda,i_\Omega), \frac{\partial F_3}{\partial(u,\lambda)}(u,\lambda,i_\Omega))(\dot{u},\dot{\lambda}) \\ &= ((\Delta+\lambda)\dot{u}+\dot{\lambda}u, \int_\Omega 2u\dot{u}, \int_\Omega g'(u)\dot{u}). \end{aligned}$$

Claramente $\frac{\partial F}{\partial(u,\lambda)}(u,\lambda,i_\Omega)$ é Fredholm pois $\frac{\partial F_1}{\partial(u,\lambda)}(u,\lambda,i_\Omega)$ é Fredholm e os operadores F_2, F_3 tem imagem em espaços de dimensão finita. Observe agora que a aplicação

$$(\frac{\partial F_1}{\partial(u,\lambda)}(u,\lambda,i_\Omega), \frac{\partial F_2}{\partial(u,\lambda)}(u,\lambda,i_\Omega)) : H^2\cap H_0^1(\Omega)\times\mathbb{R} \longrightarrow L^2(\Omega)\times\mathbb{R} \tag{3.6}$$

é sobrejetora. De fato, dado $(f,x)\in L^2(\Omega)\times\mathbb{R}$ definidas por seja $(v,\xi)\in H^2\cap H_0^1(\Omega)\times\mathbb{R}$

$$v = v_0 + \frac{xu}{2} \text{ e } \xi = \int_\Omega uf$$

onde $v_0\in H^2\cap H_0^1(\Omega)$ satisfaz

$$(\Delta+\lambda)v_0 = f-\xi u \text{ e } v_0\perp u.$$

Note que existência de v_0 é garantida pelo lema (3.3) pois $(f-\xi u)\perp u$. Então temos

$$\frac{\partial F_1}{\partial(u,\lambda)}(u,\lambda,i_\Omega)(\dot{u},\dot{\lambda}) = (\Delta+\lambda)v+\xi u = f-\xi u+\frac{x}{2}(\Delta+\lambda)u+\xi u = f$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial(u,\lambda)}(u,\lambda,i_\Omega)(\dot{u},\dot{\lambda}) = \int_\Omega 2u(v_0+\frac{x}{2}u) = x\int_\Omega u^2 = x.$$

Observe também que $(\frac{\partial F_1}{\partial(u,\lambda)}(u,\lambda,i_\Omega), \frac{\partial F_2}{\partial(u,\lambda)}(u,\lambda,i_\Omega))$ é injetora, de fato,

$$(\frac{\partial F_1}{\partial(u,\lambda)}(u,\lambda,i_\Omega), \frac{\partial F_2}{\partial(u,\lambda)}(u,\lambda,i_\Omega))(v,\xi) = (0,0) \iff (\Delta+\lambda)v+\xi u = 0 \text{ e } \int_\Omega 2uv = 0.$$

Agora $(\Delta+\lambda)v+\xi u = 0 \Longrightarrow u(\Delta+\lambda)v+\xi u^2 = 0$ o que implica $-\int_\Omega u(\Delta+\lambda)v = \xi \iff \xi = 0$. Daí $(\Delta+\lambda)v = 0$ com $\int_\Omega 2uv = 0$, ou seja, $u\perp v$ e $(\Delta+\lambda)v = 0$. Portanto, como

λ é autovalor simples associado a autofunção u, temos que $v \equiv 0$. Agora, como (3.6) é um operador contínuo, sobrejetor com domínio $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ temos pelo teorema do Gráfico Fechado que a sua inversa é contínua em $L^2(\Omega)$. Portanto (3.6) é um isomorfismo.

Sendo a aplicação (3.6) um isomorfismo, podemos concluir que $\frac{\partial F}{\partial(u,\lambda)}(u,\lambda,i_\Omega)$ não é sobrejetora. Mais ainda, como o núcleo de tal aplicação é o subespaço nulo temos que o $ind(\frac{\partial F}{\partial(u,\lambda)}(u,\lambda,i_\Omega)) \leq -1$. Desta maneira podemos afirmar que $\forall(u,\lambda,h) \in F^{-1}(0,1,0)$ o $ind(\frac{\partial F}{\partial(u,\lambda)}(u,\lambda,h)) \leq -1$, como queríamos verificar.

Agora vamos verificar a sobrejetividade da diferencial de F $\forall(u,\lambda,h) \in F^{-1}(0,1,0)$. Antes de mais nada observamos que basta verificar tal afirmação para $h = i_\Omega$ como já foi justificado anteriormente.

Seja $(f,x,y) \in L^2(\Omega)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Temos que determinar $(\dot{u},\dot{\lambda},\dot{h})$ tal que $DF(u,\lambda,i_\Omega)(\dot{u},\dot{\lambda},\dot{h}) = (f,x,y)$, ou seja, devemos resolver o sistema

$$(\Delta+\lambda)(\dot{u}-\dot{h}\cdot\nabla u)+\dot{\lambda}u = f \tag{3.7}$$

$$\int_\Omega 2u\dot{u} = x \tag{3.8}$$

$$\int_\Omega \{g'(u)\dot{u}+g(0)div(\dot{h})\} = y \tag{3.9}$$

para $(\dot{u},\dot{\lambda},\dot{h}) \in H^2 \cap H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R} \times \mathcal{C}^3(\Omega,\mathbb{R}^n)$. Observemos que $\int_{\partial\Omega}(\dot{h}\cdot N) = \int_\Omega div(\dot{h})$. Suponha $\dot{h}$ variando em $\mathcal{C}_0^3(\Omega,\mathbb{R}^n)$, isto é $\dot{h}$ em $\mathcal{C}^3(\Omega,\mathbb{R}^n)$ e suporte compacto. Multiplicando (3.7) por u e integrando dos dois lados temos que

$$\int_\Omega u(\Delta+\lambda)(\dot{u}-\dot{h}\cdot\nabla u)+\dot{\lambda}u^2 = \int_\Omega uf \iff \dot{\lambda} = \int_\Omega uf$$

já que $\dot{u}-\dot{h}\cdot\nabla u \in H^2\cap H_0^1(\Omega)$. Fixemos $\dot{\lambda} = \int_\Omega uf$. Então como $f-\dot{\lambda}u\perp u$, pelo lema (2.3) existe $w \in H^2\cap H_0^1(\Omega)$, $w\perp u$ tal que $(\Delta+\lambda)(w+\alpha u) = f-\dot{\lambda}u$. Tomemos $\dot{u} = w+\alpha u+\dot{h}\cdot\nabla u$ para $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\dot{\lambda} = \int_\Omega uf$. Observe que $\dot{u} \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$. Então para todo $\dot{h}$ em $\mathcal{C}_0^3(\Omega,\mathbb{R}^n)$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que $\dot{u}$ e $\dot{\lambda}$ satisfazem (3.7).

Se tomarmos $\alpha = \frac{x}{2} - \int_\Omega u(\dot{h}\cdot\nabla u)$ temos que $\dot{u}$ também satisfaz (3.8), de fato,

$$\begin{aligned}\int_\Omega 2u\dot{u} &= \int_\Omega 2u\Big[w+\Big(\frac{x}{2}-\int_\Omega u(\dot{h}\cdot\nabla u)\Big)u+\dot{h}\cdot\nabla u\Big]\\ &= \int_\Omega\Big\{2u^2\frac{x}{2}-\Big(\int_\Omega u(\dot{h}\cdot\nabla u)\Big)2u^2+2u(\dot{h}\cdot\nabla u)\Big\}\\ &= x.\end{aligned}$$

Agora observemos que

$$\int_\Omega u(\dot{h}\cdot\nabla u) = \frac{1}{2}\int_\Omega(\dot{h}\cdot\nabla u^2)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\Big(\int_{\partial\Omega} u^2(\dot{h}\cdot N) - \int_{\Omega} u^2 div(\dot{h})\Big) \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\Omega} u^2 div(\dot{h})
\end{aligned}
$$

onde div é o divergente. Logo $\alpha = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 div(\dot{h})$. Substituindo $\dot{u}$ em (3.9) encontramos a equação:

$$
\begin{aligned}
y &= \int_\Omega \Big\{g'(u)\Big[w + \Big(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 div(\dot{h})\Big)u + \dot{h}\cdot\nabla u\Big] + g(0)div(\dot{h})\Big\} \\
&= \int_\Omega \Big\{g'(u)\Big[w + \Big(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 div(\dot{h})\Big)u + \dot{h}\cdot\nabla u\Big]\Big\} + g(0)\int_{\partial\Omega} \dot{h}\cdot N \\
&= \int_\Omega \Big\{g'(u)\Big[w + \Big(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 div(\dot{h})\Big)u + \dot{h}\cdot\nabla u\Big]\Big\}
\end{aligned}
$$

que é equivalente à equação

$$
y - \int_\Omega \Big\{g'(u)\Big(w + \frac{xu}{2}\Big)\Big\} = \int_\Omega \Big\{\Big[\Big(\int_\Omega \frac{u}{2}g'(u)\Big)u^2 - g(u)\Big]div(\dot{h})\Big\} \tag{3.10}
$$

já que $\int_\Omega g'(u)(\dot{h}\cdot\nabla u) = -\int_\Omega g(u)div(\dot{h})$. Observe que w, x, u, $g(u)$ e $g'(u)$ estão determinados e o lado direito da equação (3.10) é linear em $\dot{h}$, portanto podemos definir um funcional linear contínuo em $\mathcal{C}_0^3(\Omega,\mathbb{R}^n)$

$$
\Phi : \dot{h} \longrightarrow \int_\Omega \Big\{\Big[\Big(\int_\Omega \frac{u}{2}g'(u)\Big)u^2 - g(u)\Big]div(\dot{h})\Big\}.
$$

Se mostrarmos que Φ é não nulo em $\mathcal{C}_0^3(\Omega,\mathbb{R}^n)$, a equação será resolvida para algum $\dot{h} \in \mathcal{C}_0^3(\Omega,\mathbb{R}^n)$ e portanto $DF(u,\lambda,i_\Omega)$ será sobrejetora como queremos mostrar. Assim, basta mostrar que existe $\dot{h} \in \mathcal{C}_0^3(\Omega,\mathbb{R}^n)$ tal que $\Phi(\dot{h}) \neq 0$.

Para isto observemos que Φ se estende a um funcional linear contínuo $\tilde{\Phi}$ em $\mathcal{C}^3(\Omega,\mathbb{R}^n)$

$$
\tilde{\Phi} : \dot{h} \longrightarrow \int_\Omega \Big\{\Big[\Big(\int_\Omega \frac{u}{2}g'(u)\Big)u^2 - g(u)\Big]div(\dot{h})\Big\}.
$$

Observemos que dado qualquer função $v \in \mathcal{C}^3(\Omega)$ existe $\dot{h} \in \mathcal{C}^3(\Omega,\mathbb{R}^n)$ tal que $div(\dot{h}) = v$, de fato, tome $\dot{h} = (\dot{h}_1,...,\dot{h}_n)$ com $\dot{h}_1(x_1,x_2,...,x_n) = \int_{x_0}^{x_1} v(\xi,x_2,...,x_n)d\xi$ e $\dot{h}_i \equiv 0$ para $2 \leq i \leq n$, $div(\dot{h}) = v$. Sendo assim, para que $\tilde{\Phi}$ não seja identicamente nulo basta mostrarmos que $\Big(\int_\Omega \frac{u}{2}g'(u)\Big)u^2 - g(u)$ não é a função nula, pois se $\Big(\int_\Omega \frac{u}{2}g'(u)\Big)u^2 - g(u) \neq 0$ podemos tomar $\dot{h} \in \mathcal{C}^3(\Omega,\mathbb{R}^n)$ tal que o $div(\dot{h}) = \Big(\int_\Omega \frac{u}{2}g'(u)\Big)u^2 - g(u)$ o que nos dá $\tilde{\Phi}(\dot{h}) = \int_\Omega \Big\{\Big[\Big(\int_\Omega \frac{u}{2}g'(u)\Big)u^2 - g(u)\Big]^2\Big\} > 0$. Agora

$$
\Big(\int_\Omega \frac{u}{2}g'(u)\Big)u^2 - g(u) \equiv 0 \iff g(u) = \Big(\int_\Omega \frac{u}{2}g'(u)\Big)u^2.
$$

Observemos agora que se $g(u) = \left(\int_\Omega \frac{u}{2} g'(u)\right) u^2$ temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega g(u) \\ &= \int_\Omega \left(\int_\Omega \frac{u}{2} g'(u)\right) u^2 \\ &= \int_\Omega \frac{u}{2} g'(u) \end{aligned}$$

o que implica $g(u) \equiv 0$. Mas $u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega) - \{0\}$ e g por hipótese é uma função de classe $\mathcal{C}^3$ cujas raízes formam um conjunto discreto, portanto $g(u) \neq 0$ e temos que $\tilde{\Phi}$ é não nulo de onde segue imediatamente que Φ não é identicamente nulo.

Portanto, até aqui verificamos as hipóteses (1) e (2) do teorema da Transversalidade. A hipótese (3) é diretamente verificada pois $H^2 \cap H_0^1(\Omega) - \{0\}$, $(0, N)$ e D_N são variedades de Banach separáveis. Logo, podemos concluir pelo teorema da Transversalidade que para cada $N \in \mathbb{N}$ temos B_N magro em D_N.

Vamos agora mostrar que B é magro em $\mathrm{Diff}^3(\Omega)$. Para isso, observamos primeiro que $(0, 1, 0) \in F(H^2 \cap H_0^1(\Omega) - \{0\}, (0, N), h)$ para $h \in D_N$ se somente se

$$\Delta u + \lambda u = 0 \text{ em } h(\Omega), \quad \int_{h(\Omega)} u^2 = 1 \text{ e } \int_{h(\Omega)} g(u) = 0$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ autovalor simples e algum $u \in H^2 \cap H_0^1(h(\Omega)) - \{0\}$. Observe que tal resultado segue facilmente da proposição (3.2). Daí podemos dizer que B_N é o conjunto dos $h \in D_N$ tal que $\int_{h(\Omega)} g(u) = 0$ para alguma u autofunção de (3.5) em $h(\Omega)$ associada a algum autovalor simples $\lambda < N$ satisfazendo $\int_{h(\Omega)} u^2 = 1$. Assim, temos diretamente que

$$B \subset \{\cup_{N \in \mathbb{N}} B_N\} \cup \{\mathrm{Diff}^3(\Omega) - D\}.$$

Como a união enumerável de conjuntos magros é magro, temos que B está contido num subconjunto magro de $\mathrm{Diff}^3(\Omega)$, ou seja, B é magro em $\mathrm{Diff}^3(\Omega)$. Assim obtemos o resultado desejado para toda g de classe $\mathcal{C}^3$ cujas raízes formam um conjunto discreto.

3.4 Simplicidade Genérica dos Autovalores Reais

Estudaremos agora a simplicidade genérica dos autovalores reais de (3.1).

Seja $A_\Omega(\lambda)$ o operador $A(\lambda)$ definido de $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$ considerados com a estrutura de espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e considere o problema

$$A_\Omega(\lambda)u = 0 \text{ em } \Omega,\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega. \tag{3.11}$$

Suponha $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma região conexa, limitada, $\mathcal{C}^3$-regular e considere a aplicação diferenciável

$$\begin{aligned} F : H^2 \cap H_0^1(\Omega) - \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathrm{Diff}^3(\Omega) &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ (u, \lambda, h) &\longrightarrow h^* A_{h(\Omega)}(\lambda) h^{*-1} u. \end{aligned}$$

O objetivo desta seção é mostrar que, genericamente no conjunto das regiões $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abertas, conexas, limitadas $\mathcal{C}^3$-regulares todos os autovalores reais de (3.11) são simples. É importante observar que nossas hipóteses permitem o caso em que $A_\Omega(\lambda)$ não depende de λ. Neste caso, $A'_\Omega(\lambda) \equiv 0$ e como 0 pertence a qualquer subspaço linear, não podem existir autovalores simples para (3.11). Sendo assim, provaremos que $A_\Omega(\lambda)$ é genericamente um isomorfismo se não depende de λ.

A proposição (3.2) nos garante que estudar a simplicidade genérica dos autovalores de (3.11) em $h(\Omega)$ é equivalente a estudar a simplicidade genérica dos autovalores de (3.3) para $A(\lambda) = A_\Omega(\lambda)$. Desta maneira, mostraremos a simplicidade genérica de todos os autovalores do probema de Dirichlet para $A_\Omega(\lambda)$ mostrando através do teorema da Transversalidade que genericamente em $\mathrm{Diff}^3(\Omega)$, 0 é valor regular da aplicação G_h definida na proposição (3.1) supondo neste caso que $A(\lambda) = A_\Omega(\lambda)$. Portanto, nossos esforços agora se concentram em verificar as hipóteses do teorema da Trasversalidade para a aplicação diferenciável F.

Observe que as hipóteses (1) e (3) do teorema são verificadas diretamente pois para h fixo a aplicação $(u, \lambda) \longrightarrow F(u, \lambda, h)$ é Fredholm de índice 1 e todos os espaços envolvidos são separáveis. Assim precisamos apenas mostrar que zero é valor regular de F.

Suponha por absurdo que F tenha um ponto crítico (u, λ, h) com $F(u, \lambda, h) = 0$. Podemos supor sem perda de generalidade que $h = i_\Omega$ como já foi justificado na observação (3.1).

Calculando então a diferencial de F no ponto crítico (u, λ, i_Ω) através do teorema (1.8) obtemos pela hipótese de absurdo que

$$DF(u, \lambda, i_\Omega)(\dot{u}, \dot{\lambda}, \dot{h}) = A_\Omega(\lambda)\dot{u} + \dot{\lambda} A'_\Omega(\lambda)u + [\dot{h} \cdot \nabla, A_\Omega(\lambda)]u$$

$$= A_\Omega(\lambda)(\dot{u} - \dot{h}\cdot\nabla u) + \dot{\lambda}A'_\Omega(\lambda)u$$

não é sobrejetora.

A imagem de $DF(u,\lambda,i_\Omega)$ em $\{\dot{u}\in H^2\cap H^1_0(\Omega),\ \dot{\lambda}=0,\ \dot{h}=0\}$ coincide com a imagem do operador Fredholm $A_\Omega(\lambda)$ em $H^2\cap H^1_0(\Omega)$ que é fechada e possui codimensão finita. Agora, como tal conjunto está contido na imagem de $DF(u,\lambda,i_\Omega)$, podemos concluir que a imagem de $DF(u,\lambda,i_\Omega)$ tem codimensão finita e portanto é fechada. Como este operador é não sobrejetor, podemos afirmar também que a codimensão de sua imagem é positiva. Assim sendo, como $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert e a imagem de $DF(u,\lambda,i_\Omega)$ é fechada, existe $\psi\in L^2(\Omega)$, não nula, ortogonal a imagem de $DF(u,\lambda,i_\Omega)$.

Tomando $\dot{\lambda}=\dot{h}=0$ temos $\int_\Omega \psi A_\Omega(\lambda)\dot{u}=0\ \forall\ \dot{u}\in L^2(\Omega)$, ou seja, ψ é solução fraca de (1.10). Pelo fato de estarmos trabalhando com $A_\Omega(\lambda)$ em $H^2\cap H^1_0(\Omega)$, com Ω conexa limitada $\mathcal{C}^3$-regular satisfazendo as hipóteses citadas anteriormente, podemos afirmar que $\psi\in H^2\cap H^1_0(\Omega)$ e é solução forte de

$$A^*_\Omega(\lambda)\psi = 0 \text{ em } \Omega,\ \psi = 0 \text{ em } \partial\Omega. \tag{3.12}$$

Tal afirmação segue do teorema (8.2′) de [2]. Observe ainda que $u,\ \psi\in\mathcal{C}^2(\Omega)\cap H^3(\Omega)$, de fato, sendo $\Omega\in\mathcal{C}^3$, segue do teorema (15.2) de [6] que $u,\ \psi\in H^3(\Omega)$ e do seu corolário que $u,\ \psi\in\mathcal{C}^2(\Omega)$.

Então, $\forall\dot{h}\in\mathcal{C}^3(\Omega,R^n)$ temos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \psi A_\Omega(\lambda)\dot{h}\cdot\nabla u\\
&= \int_\Omega \{\psi A_\Omega(\lambda)\dot{h}\cdot\nabla u - A^*{}_\Omega(\lambda)\psi\dot{h}\cdot\nabla u\}\\
&= -\int_{\partial\Omega}\dot{h}\cdot\nabla u\sum_{i,j=1}^n \psi_{x_i}a_{ij}(x)N_j\\
&= -\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial N}\dot{h}\cdot N\sum_{j=1}^n N_j\nabla\psi\cdot(a_{1j}(x),\ldots,a_{nj}(x))\\
&= -\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\psi}{\partial N}\frac{\partial u}{\partial N}\dot{h}\cdot N\Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)N_iN_j\Big)\ \forall\ \dot{h}\in\mathcal{C}^3(\Omega,\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Portanto $\frac{\partial\psi}{\partial N}\frac{\partial u_0}{\partial N}\equiv 0$ em $\partial\Omega$ já que $\Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)N_iN_j\Big)\geq c_0|N|^2\geq c_0$.

Logo nossa hipótese de absurdo implica na existência de $\psi\in L^2(\Omega)$, não nula, solução de (3.12) tal que $\frac{\partial\psi}{\partial N}\frac{\partial u_0}{\partial N}\equiv 0$ em $\partial\Omega$. Mas isto, como na primeira aplicação, viola a unicidade do problema de Cauchy para equações elípticas de segunda ordem (1.3), de onde podemos

concluir que zero é valor regular de F. Portanto, genericamente em Ω, todos os autovalores reais de (3.11) são simples.

3.5 Simplicidade Genérica das soluções de $\Delta u + f(x, u, \nabla u) = 0$

Seja Q um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e seja $f : Q \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{C}^2$ limitada.

Provaremos que, genericamente no conjunto das regiões $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abertas, conexas, $\mathcal{C}^3$-regulares, limitadas, todas as soluções u de

$$\Delta u + f(x, u, \nabla u) = 0 \text{ em } \Omega,\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \tag{3.13}$$

são simples, isto é, a linearização

$$L_u : \dot{u} \longrightarrow \Delta\dot{u} + \frac{\partial f}{\partial p}(\cdot, u, \nabla u) \cdot \nabla\dot{u} + \frac{\partial f}{\partial u}(\cdot, u, \nabla u)\dot{u}$$

é um isomorfismo. É importante observar que parte da definição de solução é que se u de classe $\mathcal{C}^1$ é solução de (3.13), $(x, u, \nabla u) \in Q\ \forall x \in \bar{\Omega}$.

Segue diretamente do teorema da função inversa em espaços de Banach que, se todas as soluções de (3.13) são simples, tais soluções formam um conjunto discreto. Além disso, sendo f limitada, afirmamos que o conjunto das soluções de (3.13) é finito. De fato, se $\Delta u + f(x, u, \nabla u) = 0$, $\|\Delta u\|_{L^p(\Omega)} = \|f(x, u, \nabla u)\|_{L^p(\Omega)} \leq M$ para algum $M > 0$. Agora sendo $\Delta : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^p(\Omega)$ um isomorfismo temos que $M \geq \|\Delta u\|_{L^p(\Omega)} \geq m\|u\|_{W^{2,p}\cap W_0^{1,p}(\Omega)}$ para algum $m > 0$, o que nos dá $\|u\|_{W^{2,p}\cap W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \frac{M}{m}$. Como $W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ está imerso em $L^p(\Omega)$ por imersão compacta e todas as soluções são discretas, temos que o número de soluções deve ser finito. Desta forma, se f é limitada, a equação $\Delta u + f(x, u, \nabla u) = 0$ em Ω com $u = 0$ em $\partial\Omega$ tem somente um número finito de soluções.

Proposição 3.6 *Se para algum $h \in \mathrm{Diff}^3(\Omega)$ a aplicação*

$$\begin{aligned} F_h : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow L^p(\Omega) \\ u &\longrightarrow h^*(\Delta + f)h^{*-1}u \end{aligned}$$

tem zero com valor regular, então todas as soluções de (3.13) *em $h(\Omega)$ são simples.*

Prova. 0 valor regular de $F_h \Longrightarrow h^* L_u h^{*-1}$ é sobrejetora para $u \in {F_h}^{-1}(0)$. Agora o índice de Fredholm de tal aplicação é zero, logo tal aplicação é bijetora e então pelo teorema do Gráfico Fechado é um isomorfismo. ∎

Proposição 3.7 *$u \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ é solução simples de*

$$h^*(\Delta + f)h^{*-1}u = 0 \text{ em } \Omega,\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \tag{3.14}$$

se somente se $v = h^{*-1}u$ é solução simples de (3.13) em $h(\Omega)$.

Prova. Seja $u \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, como h^* é isomorfismo temos que

$$h^*(\Delta + f)h^{*-1}u = 0 \iff (\Delta + f)h^{*-1}u = 0,$$

ou seja, u é solução de (3.14) se somente se $h^{*-1}u$ é solução de (3.13) em $h(\Omega)$. Novamente usando o fato de que h^* é isomorfismo temos que $h^* L_u h^{*-1}$ é isomorfismo em $W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ se somente se L_u é isomorfismo em $W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(h(\Omega))$. ∎

A proposição (3.7) nos diz que estudar a simplicidade genérica das soluções de (3.13) é equivalente a estudar a simplicidade genérica das soluções de (3.14), portanto, de acordo com a proposição (3.6), obteremos a simplicidade genérica de todas as soluções de (3.13) se mostrarmos que para a maioria das $h \in \mathrm{Diff}^3(\Omega)$ a aplicação F_h tem zero como valor regular.

Seja E o seguinte subconjunto de $\mathcal{C}^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} E &= E_1 \cup E_2 \text{ onde} \\ E_1 &= \{h \in \mathcal{C}^3(\Omega, \mathbb{R}^n); f(x, 0, 0) \equiv 0 \text{ numa vizinhança de } \partial h(\Omega)\} \text{ e} \\ E_2 &= \{f(x, 0, 0) \neq 0 \text{ em algum ponto de } \partial h(\Omega)\}. \end{aligned}$$

E é aberto, de fato, dado $h_0 \in E$ com $f(x, 0, 0) \equiv 0$ numa vizinhança de $\partial h_0(\Omega)$ existe uma vizinhança V_{h_0} de h_0 em $\mathcal{C}^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tal que $f(x, 0, 0) \equiv 0$ em $\partial h(\Omega)$ $\forall h \in V_{h_0}$; se $f(x, 0, 0) \neq 0$ em algum ponto de $\partial h_0(\Omega)$, $f(x, 0, 0) \neq 0$ numa vizinhança de $\partial h_0(\Omega)$ o que implica na existência de uma vizinhança $\tilde{V}_{h_0}$ de h_0 tal que $f(x, 0, 0) \neq 0$ em algum ponto de $\partial h_0(\Omega)$ para todo $h \in \tilde{V}_{h_0}$. Portanto E é aberto. E também é denso. De fato, qualquer perturbação da região $h(\Omega)$ na direção da normal N_h pertence a E. Logo podemos afirmar que E é aberto e denso em $\mathcal{C}^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$.

$\tilde{D} = E \cap \mathrm{Diff}^3(\Omega)$ é um subconjunto aberto e denso de $\mathrm{Diff}^3(\Omega)$. Observe que

$$\tilde{D} = \tilde{D}_1 \cup \tilde{D}_2 \text{ onde}$$

$$\tilde{D}_1 = \{E_1 \cap \mathrm{Diff}^3(\Omega)\} \text{ e } \tilde{D}_2 = \{E_2 \cap \mathrm{Diff}^3(\Omega)\}$$

que são abertos disjuntos de $\mathrm{Diff}^3(\Omega)$.

Para todo $h \in \tilde{D}$ temos que $h \in \tilde{D}_i$ para $i = 1$ ou $i = 2$. Seja V_h uma vizinhança de $h \in \tilde{D}_i$ contida em $\tilde{D}_i$ de maneira que se $\tilde{h} \in V_h$, $\partial\tilde{h}(\Omega)$ está contida numa vizinhança

tubular de $\partial h(\Omega)$. O conjunto $\mathcal{C}$ de tais vizinhanças forma uma cobertura de abertos para $\tilde{D}$, portanto, sendo $\mathrm{Diff}^3(\Omega)$ Lindelof, $\tilde{D}$ é Lindelof e então podemos tomar uma subcobertura enumerável $\{V_{h_1}, ..., V_{h_k}, ...\}$ de $\tilde{D}$ onde cada $V_{h_k} \in \mathcal{C}$.

Provaremos que para cada k e para todo $h \in V_{h_k}$, exceto um subconjunto H_k magro de $\tilde{D}$ contido em V_{h_k}, todas as soluções de (3.13) em $h(\Omega)$ são simples. Mais precisamente, provaremos que para todo $h \in \cup_{k\geq 1}\{V_{h_k} - H_k\}$ todas as soluções de (3.13) em $h(\Omega)$ são simples. Observe que $\cup_{k\geq 1}\{V_{h_k} - H_k\}$ é um subconjunto denso de $\tilde{D}$, daí como $\tilde{D}$ é um subconjunto aberto e denso de $\mathrm{Diff}^3(\Omega)$ teremos que todas as soluções de (3.13) são genericamente simples em $\mathrm{Diff}^3(\Omega)$ como queremos mostrar.

Para isso considere a aplicação diferenciável

$$\begin{aligned} F : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \times V_{h_k} &\longrightarrow L^p(\Omega) \\ (u, h) &\longrightarrow h^*(\Delta + f)h^{*-1}u \end{aligned}$$

para algum p com $n < p < \infty$ de tal maneira que $W^{2,p} \subset \mathcal{C}^1$ e algum $k \in \mathbb{N}$. Através do teorema da Transversalidade aplicado a F mostraremos que existe H_k magro em V_{h_k}, portanto magro em $\tilde{D}$, tal que em $\{V_{h_k} - H_k\}$ todas as soluções de (3.13) são simples, de onde segue o resultado desejado.

As hipóteses (1) e (3) do teorema para a aplicação F são satisfeitas diretamente bastando apenas provar a sobrejetividade da diferencial de F.

Suponha por absurdo que exista (u, i_Ω) ponto crítico de F com $F(u, i_\Omega) = 0$, ou seja, a diferencial de F

$$\begin{aligned} DF(u, i_\Omega) : W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \times \mathcal{C}^3(\Omega, \mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^p(\Omega) \\ (\dot{u}, \dot{h}) &\longrightarrow L_u(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u) \end{aligned}$$

não é sobrejetora. Como $DF(u, i_\Omega)$ é Fredholm não sobrejetor existe ψ não nulo em $L^q(\Omega)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, ortogonal a imagem de $DF(u, i_\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \psi L_u(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u) = 0 \ \forall \dot{u} \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) \text{ e } \forall \dot{h} \in \mathrm{C}^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

Pelo teorema (15.2) de [6] $u \in W^{3,p}(\Omega)$ já que $\Omega \in \mathrm{C}^3$. Daí pelo teorema (11.1) de [9] temos que $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Como u é solução de (3.13) e $f \in \mathcal{C}^2$ temos pelo teorema (2.28) de [8] que $u \in \mathrm{C}^{2,\alpha}$ para todo $\alpha < 1$, logo os coeficientes de L_u são ao menos de classe C^1.

Fixando $\dot{h} = 0$ temos que $\int_\Omega \psi L_u \dot{u} = 0 \ \ \forall \dot{u} \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. Daí pelo teorema (8.2′) de [2] $\psi \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ e é solução de $L_u^* \psi = 0$ em Ω com $\psi = 0$ em $\partial\Omega$. Observe que ψ como u é de classe $\mathrm{C}^{2,\alpha}$.

Tomando $\dot{u} = 0$ temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \psi L_u(\dot{h}\cdot\nabla u) \\ &= \int_\Omega \{\psi L_u(\dot{h}\cdot\nabla u) - (\dot{h}\cdot\nabla u)L_u^*\psi\} \\ &= \int_{\partial\Omega} \Big\{\psi\frac{\partial(\dot{h}\cdot\nabla u)}{\partial N} - \frac{\partial\psi}{\partial N}(\dot{h}\cdot\nabla u) - \psi(\dot{h}\cdot\nabla u)\frac{\partial f}{\partial p}\cdot N\Big\} \\ &= -\int_{\partial\Omega} \dot{h}\cdot N\frac{\partial\psi}{\partial N}\frac{\partial u}{\partial N} \;\forall\, \dot{h}\in\mathcal{C}^3(\Omega,\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

de onde obtemos que $\frac{\partial\psi}{\partial N}\frac{\partial u}{\partial N} = 0$ em $\partial\Omega$. Agora

$$L_u^*\psi = 0 \iff \Delta\psi - \frac{\partial f}{\partial p}(\cdot,u,\nabla u)\cdot\nabla\psi + \Big(\frac{\partial f}{\partial u}(\cdot,u,\nabla u) - div\Big(\frac{\partial f}{\partial p}(\cdot,u,\nabla u)\Big)\Big)\psi = 0$$

$$\Longrightarrow |\Delta\psi(x)| \le |\frac{\partial f}{\partial p}(x,u,\nabla u)\cdot\nabla\psi(x)| + |\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial p_i}(x,u,\nabla u)\psi(x)| + |\frac{\partial f}{\partial u}(x,u,\nabla u)\psi(x)|$$

para todo $x\in\Omega$. Portanto sendo Ω limitado, $f\in\mathcal{C}^2$ e u solução de (3.13) ao menos $\mathcal{C}^1$ temos que

$$|\Delta\psi(x)| \le C(|\nabla\psi(x)| + |\psi(x)|),\ \forall x\in\Omega$$

onde

$$C = max_{x\in\bar{\Omega}}\Big\{|\frac{\partial f}{\partial p}(x,u,\nabla u)|, |\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial p_i}(x,u,\nabla u)|, |\frac{\partial f}{\partial u}(x,u,\nabla u)|\Big\}.$$

Logo, como $\psi\in W^{2,p}\cap W_0^{1,p}(\Omega)-\{0\}$ e satisfaz a desigualdade anterior, temos pelo teorema de Cauchy (1.3) que $\frac{\partial\psi}{\partial N}\neq 0$ em quase todo ponto de $\partial\Omega$ implicando que $\frac{\partial u}{\partial N} = 0$ em $\partial\Omega$. Portanto a hipótese de contradição implica que a solução u de (3.13) satisfaz ainda $\frac{\partial u}{\partial N} = 0$ em $\partial\Omega$.

Como por hipótese $\Omega\in\tilde{D}$, temos que $i_\Omega\in\tilde{D}_i$ para $i=1$ ou $i=2$. Suponha que $i_\Omega\in\tilde{D}_1$. Então existe uma vizinhança V de $\partial\Omega$ tal que $f(x,0,0)=0$ para todo $x\in V$. Dado $x\in V$

$$\begin{aligned} |\Delta u(x)| &= |f(x,u(x),\nabla u(x))| \\ &= |f(x,u(x),\nabla u(x)) - f(x,0,0)| \\ &\le K(|u(x)| + |\nabla u(x)|)\ \forall x\in V \end{aligned}$$

para algum $K>0$. Logo pelo teorema de unicidade do problema de Cauchy, como $u = \frac{\partial u}{\partial N} = 0$ em $\partial\Omega$, $u\equiv 0$ em V. Assim nós obtemos uma solução especial $u=u_0$ que se anula numa vizinhança V de $\partial\Omega$, ou seja, obtemos uma solução u_0 de (3.13) que satisfaz (3.13) para todo $h\in V_{h_k}$ (u_0 não depende de Ω para pequenas pertubações). Observe que u_0 está

definida em $\Omega \cup V$ pois se anula em V e $\partial\Omega \subset V$. Observe também que u_0 é única em $\Omega \cup V$ pois é única em Ω. De fato, sejam u_0^1 e u_0^2 satisfazendo (3.13) em Ω e $\frac{\partial u_0^i}{\partial N} = 0$ em $\partial\Omega$ $i = 1, 2$. $v = u_0^1 - u_0^2$ satisfaz

$$\Delta v + f(x, u_0^1, \nabla u_0^1) - f(x, u_0^2, \nabla u_0^2) = 0 \text{ em } \Omega,\ v = 0 \text{ e } \frac{\partial v}{\partial N} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Para todo $x \in \Omega$ temos que

$$\begin{aligned} |\Delta v(x)| &= |f(x, u_0^1(x), \nabla u_0^1(x)) - f(x, u_0^2(x), \nabla u_0^2(x))| \\ &\leq M(|v(x)| + |\nabla v(x)|) \end{aligned}$$

para algum $M > 0$. Então segue pelo teorema de Cauchy (1.3) para operadores elípticos de segunda ordem que $v \equiv 0$ em Ω o que nos dá $u_0^1 \equiv u_0^2$.

Suponha então que desde o início do argumento de contradição $u \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega) - \{u_0\}$. Repetindo todo o argumento temos que $u \equiv u_0$ pois a solução especial u_0 é única em Ω de onde obtemos contradição, o que nos permite concluir que DF é sobrejetora.

Sendo assim temos que todas as soluções de (3.13) são genericamente simples em V_{h_k} exceto talvez a solução u_0. Mas tal solução também é genericamente simples. De fato, pelo exemplo anterior L_{u_0} é um isomorfismo em V_{h_k} exceto um subconjunto magro H. Então, como todas as outras soluções de (3.13) são simples em V_{h_k} exceto um subconjunto magro $\tilde{H}_k$, segue-se que todas as soluções de (3.13) são simples em V_{h_k} exceto um subconjunto magro $H_k = H \cup \tilde{H}_k$, de onde segue o resultado.

Suponha agora que $i_\Omega \in \tilde{D}_2$. Então $f(x, 0, 0) \neq 0$ em algum ponto de $\partial\Omega$. Defina

$$\begin{aligned} G : W_0^{2,p}(\Omega) \times V_{h_k} &\longrightarrow L^p(\Omega) \\ (u, h) &\longrightarrow h^*(\Delta + f)h^{*-1}u. \end{aligned}$$

Note que G é de classe $\mathcal{C}^1$ e que $u \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ está em $W_0^{2,p}(\Omega)$ se somente se $u = \frac{\partial u}{\partial N} = 0$ em $\partial\Omega$.

Suponha que para todo $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$ e para todo $h \in V_{h_k}$, exceto um subconjunto fechado e magro O, $G(u, h) \neq 0$. Sendo tal afirmação verdadeira podemos restringir F ao subconjunto $\{V_{h_k} - O\}$ aberto e denso em V_{h_k} e concluir que a solução u de (3.13) satisfazendo $\frac{\partial u}{\partial N} = 0$ em $\partial\Omega$ não poderá existir de onde obtemos uma contradição para nossa hipótese de absurdo implicando que DF é sobrejetora e enfim segue-se o resultado desejado.

A demonstração de que $G(u, h) \neq 0$ genericamente em V_{h_k} para todo $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$ será feita usando a hipótese (2β) do teorema (2.6) no caso $n \geq 2$. O caso $n = 1$ será estudado separadamente.

Para usarmos o teorema verificaremos inicialmente a hipótese (2β) supondo $G(u, i_\Omega) = 0$, $n \geq 2$. Observe que $\frac{\partial G}{\partial u}(u, i_\Omega) = L_u|_{W_0^{2,p}(\Omega)}$ é injetivo pelo teorema de unicidade de Cauchy para operadores elípticos.

Suponha

$$m = dim\Big\{Im(DG(u, i_\Omega))/Im\Big(\frac{\partial G}{\partial u}(u, i_\Omega)\Big)\Big\} < \infty.$$

$$\begin{aligned} DG(u, i_\Omega) : W_0^{2,p}(\Omega) \times C^3(\Omega, \mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^p(\Omega) \\ (\dot{u}, \dot{h}) &\longrightarrow L_u(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u) \end{aligned}$$

então existem $\{f_1, ..., f_m\}$ em $L^p(\Omega)$ com $f_i = L_u(\dot{u}_i - \dot{h}_i \cdot \nabla u)$ $\dot{u}_i \in W_0^{2,p}(\Omega)$ e $\dot{h}_i \in C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tal que para todo $(\dot{u}, \dot{h}) \in W_0^{2,p}(\Omega) \times C^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$ existem $\dot{v} \in W_0^{2,p}(\Omega)$ e únicos $c_1, ..., c_m \in \mathbb{R}$ tal que

$$\sum_{i=1}^{m} c_i f_i + L_u \dot{v} = L_u(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u)$$

de onde obtemos que

$$\sum_{i=1}^{m} c_i L_u(\dot{u}_i - \dot{h}_i \cdot \nabla u) + L_u \dot{v} - L_u(\dot{u} - \dot{h} \cdot \nabla u) = 0$$

ou seja

$$L\Big(\dot{u} - \dot{v} - \sum_{i=1}^{m} c_i \dot{u}_i - (\dot{h} - \sum_{i=1}^{m} c_i \dot{h}_i) \cdot \nabla u\Big) = 0.$$

Seja $\{\phi_1, ..., \phi_k\}$ base do núcleo do operador de Fredholm $L_u|_{W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)}$. Assim para constantes $b_1, ..., b_k$ temos que

$$\dot{u} - \dot{v} - \sum_{i=1}^{m} c_i \dot{u}_i - (\dot{h} - \sum_{i=1}^{m} c_i \dot{h}_i) \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^{k} b_i \phi_i.$$

Já sabemos que $u \in W^{3,p}(\Omega)$. Logo $u \in W^{3,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega)$ o que implica $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ para cada i.

Calculando a derivada normal de tal expressão em $\partial\Omega$ temos que

$$-(\dot{h} - \sum_{i=1}^{m} \dot{h}_i) \cdot N \frac{\partial^2 u}{\partial N^2} = \sum_{i=1}^{k} b_i \frac{\partial \phi_i}{\partial N}.$$

Pelo teorema (1.2), $\Delta_{\partial\Omega} u = \Delta u - div(N) \frac{\partial u}{\partial N} - \frac{\partial^2 u}{\partial N^2}$. Como $u \equiv 0$ em $\partial\Omega$, temos que $\Delta_{\partial\Omega} u = 0$. Portanto temos que em $\partial\Omega$ $\frac{\partial^2 u}{\partial N^2} = \Delta u|_{\partial\Omega} = -f(x, 0, 0)$. Assim

$$\dot{h} \cdot N f(x, 0, 0) = \sum_{i=1}^{m} c_i \dot{h}_i \cdot N f(x, 0, 0) + \sum_{i=1}^{k} b_i \frac{\partial \phi_i}{\partial N} \text{ em } \partial\Omega.$$

Então para todo $\dot{h} \in \mathcal{C}^3(\Omega, \mathbb{R}^n)$ existem constantes $c_1, ..., c_m, b_1, ..., b_k$ tais que a equação anterior se verifica em $\partial\Omega$, ou seja, o operador limitado

$$\dot{h} \longrightarrow \dot{h} \cdot Nf(x, 0, 0)|_{\partial\Omega}$$

tem posto finito. Como $f(x, 0, 0)|_{\partial\Omega} \neq 0$ e $n \geq 2$,ou seja $dim\partial\Omega > 0$, isto não pode ocorrer, contradição.

Logo $dim\Big\{Im(DG(u, i_\Omega))/Im\Big(\frac{\partial G}{\partial u}(u, i_\Omega)\Big)\Big\}$ é infinita e a condição (2β) está verificada. Como a $codim\frac{\partial G}{\partial u} \geq dim\Big\{Im(DG(u, i_\Omega))/Im\Big(\frac{\partial G}{\partial u}(u, i_\Omega)\Big)\Big\}$ e $\frac{\partial G}{\partial u}$ é injetivo, o $ind(\frac{\partial G}{\partial u}) = -\infty\ \forall (u, h) \in G^{-1}(0)$, satisfazendo também a condição (1) do teorema da Transversalidade.

Agora, sendo f limitada a aplicação $(u, h) \longrightarrow h : G^{-1}(0) \longrightarrow V_{h_k}$ é própria, de fato, $(u_n, h_n) \in G^{-1}(0) \longrightarrow \|\Delta h_n^{*-1} u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq M\ \forall n$. Sendo Δ isomorfismo temos que passando a subsequência $\|h_n^{*-1} u_n\|_{L^p(h_n(\Omega))}$ converge. Como h_n^{*-1} é uma sequência de isomorfismos convergindo para um isomorfismo h existem $m_n, m_h > 0$ tal que $\|h_n^{*-1} u_n\|_{L^p(h_n(\Omega))} \geq m_n \|u_n\|_{W_0^{2,p}(\Omega)} \geq m_h \|u_n\|_{W_0^{2,p}(\Omega)}$ para todo n o que nos dá $\{u_n\}$ uniformemente limitada em $W_0^{2,p}(\Omega)$. Mas, $\{u_n\}$ de fato é uniformemente limitada em $W^{3,p} \cap W_0^{2,p}(\Omega)$ já que Ω é uma região $\mathcal{C}^3$-regular. Portanto como $W^{3,p}(\Omega)$ está imerso compactamente em $W_0^{2,p}(\Omega)$, existe subsequência de Cauchy convergente em $W_0^{2,p}(\Omega)$, ou seja, existe $u \in W_0^{2,p}(\Omega)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ em $W_0^{2,p}(\Omega)$ e segue a afirmação.

Verificado (3) podemos concluir pelo teorema da Transversalidade que se $n \geq 2\ \forall h \in V_{h_k}$, exceto para um subconjunto magro e fechado, não existe solução para (3.13) em $h(\Omega)$ satisfazendo $\frac{\partial u}{\partial N} = 0$ em $\partial\Omega$. Basta agora considerar o caso $n = 1$ para concluirmos nosso resultado.

Suponhamos então $n = 1$.

$$u'' + f(x, u, u') = 0 \text{ em } a < x < b,\ u(a) = u(b) = 0. \tag{3.15}$$

Perturbar $\Omega = (a, b)$ significa apenas mudar a e b. Mostraremos que para muitas escolhas de a e b não existe solução de (3.15) com $u'(a) = u'(b) = 0$. Seja $U(x, a)$ solução de (3.15) com $U_x = 0$ em $x = a$. Assuma que para algum $b > a$ $f(b, 0, 0) \neq 0$ e $U(b, a) = U_x(b, a) = 0$. Considere a equação de duas variáveis $U(x, \alpha) = 0$. Já que $U_{xx}(b, a) = f(b, 0, 0) \neq 0$ temos que $\nabla U(b, a) \neq 0$ e então pelo teorema da função implícita existe uma única aplicação $\beta : (a - \epsilon, a + \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $U_x(\beta(\alpha), \alpha) = 0$ para todo $\alpha \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$, logo não existe solução para (3.15) em $W_0^{2,p}(\alpha, \beta)$ para (α, β) perturbação de (a, b), a menos que $\beta = \beta(\alpha)$ e $U(\beta(\alpha), \alpha) = 0$.

3.6 Hiperbolicidade Genérica dos Equilíbrios de $u_t = (au_x)_x + f(u)$

Considere a equação parabólica não linear

$$u_t = (au_x)_x + f(u),\ 0 < x < 1 \tag{3.16}$$

com condições de Neumann para o contorno $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$ onde $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é $\mathcal{C}^2$ e $a : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^+ = (0,\infty)$ é uma função $\mathcal{C}^2$.

Uma função u é equilíbrio de (3.16) se somente se

$$(au_x)_x + f(u) = 0,\ 0 < x < 1 \tag{3.17}$$

com $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$. Dizemos ainda que u equilíbrio de (3.16) é hiperbólico se somente se o operador

$$L_u\phi = (a\phi_x)_x + f'(u)\phi$$

com $\phi_x(0) = \phi_x(1) = 0$ é um isomorfismo.

Dado f de classe $\mathcal{C}^2$ considere a aplicação diferenciável

$$\begin{aligned} \psi_f : H^2_{\mathcal{N}}(0,1) &\longrightarrow L^2(0,1) \\ u &\longrightarrow (au_x)_x + f(u) \end{aligned}$$

onde $H^2_{\mathcal{N}}(0,1) = \{u \in H^2(0,1); u_x(0) = u_x(1) = 0\}$. Observe que tal conjunto é um subespaço fechado de $H^2(0,1)$ já que $H^2(0,1) \subset \mathcal{C}^1(0,1)$. Logo $H^2_{\mathcal{N}}(0,1)$ pode ser considerado um espaço de Banach.

Proposição 3.8 *Os equilíbrios de (3.16) são todos hiperbólicos se somente se 0 é valor regular de ψ_f.*

Prova. 0 é valor regular de ψ_f se somente se $\forall u \in \psi^{-1}(0)$ o operador

$$L_u : H^2_{\mathcal{N}}(0,1) \longrightarrow L^2(0,1) : \phi \longrightarrow (a\phi_x)_x + f'(u)\phi$$

é sobrejetor. L_u é um operador Fredholm de índice zero já que $(a(\cdot)_x)_x$ é Fredholm de índice zero e $f'(u)(\cdot)$ é um operador compacto em $H^2_{\mathcal{N}}(0,1)$. Portanto temos que L_u é sobrejetor se somente se L_u é um isomorfismo. ∎

Nesta seção faremos uma aplicação diferente do teorema (2.6). Não perturbaremos o domínio, mas sim a função f na equação (3.16). Mostraremos que se $a \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}^+)$ é uma função monótona, então todos os equilíbrios de (3.16) são hiperbólicos em $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$\mathcal{C}^2$ na topologia de Whitney [12] exceto em um conjunto magro, ou seja, todos os equilíbrios de (3.16) são genericamente hiperbólicos em f $\mathcal{C}^2$ na topologia de Whitney.

Para obtermos a hiperbolicidade genérica de todos os equilíbrios de (3.16) em f na topologia de Whitney, mostraremos primeiro a hiperbolicidade genérica de todos os equilíbrios de (3.16) em f no espaço de Banach $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Provada a afirmação em $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, obtemos com certa facilidade a afirmação para f de classe $\mathcal{C}^2$ na topologia de Whitney.

Dito isto, provemos primeiro que se $a \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}^+)$ é uma função monótona, então para todo $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, exceto um subconjunto magro, todos os equilíbrios de (3.16) são hiperbólicos.

Para isto, vamos mostrar que, dado $N \in \mathbb{N}$, todos os equilíbrios u da equação (3.16) com $\|u\|_{H^2_N(0,1)} \leq N$ são hiperbólicos para toda $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, exceto em um conjunto magro. Logo, fazendo interseção enumerável obtemos que todos os equilíbrios de (3.16) são hiperbólicos em $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, exceto em um conjunto magro.

Inicialmente, vamos provar que os equilíbrios constantes de (3.16) com módulo limitado por $N \in \mathbb{N}$ são todos hiperbólicos num subconjunto aberto e denso de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. De fato, seja $u = u_0 \in \mathbb{R}$ equilíbrio constante de (3.16) e $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n, ...$ os autovalores do operador

$$T : H^2_N(0,1) \longrightarrow L^2(0,1) : \phi \longrightarrow (a\phi_x)_x.$$

Observemos que u_0 é solução de (3.16) se somente se $f(u_0) = 0$ e, nesse caso, L_{u_0} é não sobrejetor se somente se $f'(u_0) = \lambda_i$ para algum i. Observe que tais autovalores são enumeráveis e não possuem ponto de acumulação já que T é um operador limitado de resolvente compacto. Seja $K \in \mathbb{N}$ o número de autovalores de T contido no intervalo $[-N, N]$ e defina a aplicação contínua

$$S : [-N,N] \times \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} : (x,f) \longrightarrow (f(x), f'(x)).$$

$S^{-1}(0,\lambda_i)$ é fechado em $\mathbb{R} \times \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, portanto possui complementar $S^{-1}(0,\lambda_i)^c$ aberto. Seja O_{λ_i} a projeção de $S^{-1}(0,\lambda_i)^c$ em $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. O_{λ_i} é aberto já que a projeção é uma aplicação aberta. Afirmamos que O_{λ_i} é também denso em $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Seja f uma função de classe $\mathcal{C}^2$ e considere a aplicação diferenciável

$$\Lambda : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x,\lambda,\mu) \longrightarrow (f(x) + \lambda x + \mu, f'(x) + \lambda).$$

Seja $(x,\lambda,\mu) \in \Lambda^{-1}(0,\lambda_i)$.

$$D\Lambda(x,\lambda,\mu) = \begin{pmatrix} f'(x) + \lambda & x & 1 \\ f''(x) & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

é sobrejetora, portanto pelo teorema da Transversalidade de *Thom* a aplicação

$$\Psi_{\lambda,\mu} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : x \longrightarrow \Lambda(x,\lambda,\mu)$$

possui $(0, \lambda_i)$ como valor regular num conjunto residual de $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Agora, $(0, \lambda_i)$ ser valor regular de $\Psi_{\lambda,\mu}$ implica que o ponto $(0, \lambda_i)$ não pertence a imagem de $\Psi_{\lambda,\mu}$. Então, se $\Lambda(x, \lambda, \mu) = (0, \lambda_i)$, existem $\tilde{\lambda}$, $\tilde{\mu} \in \mathbb{R}$ próximos a λ, μ respectivamente, de maneira que $(f(x) + \tilde{\lambda}x + \tilde{\mu}, f'(x) + \tilde{\lambda}) \neq (0, \lambda_i)$ para todo $x \in [-N, N]$. Suponha então que $f \in {O_{\lambda_i}}^c$, ou seja, existe $u_0 \in [-N, N]$ tal que $\Lambda(u_0, 0, 0) = (0, \lambda_i)$. Pelo fato observado acima existem λ, $\mu \in \mathbb{R}$ próximos de 0 tal que

$$(f(x) + \lambda x + \mu, f'(x) + \lambda) \neq (0, \lambda_i) \text{ para todo } x \in [-N, N].$$

De fato, $g(x) = f(x) + \lambda x + \mu$ pertence a O_{λ_i}. Modificando-a fora de $[-N, N]$ podemos obter $\tilde{g} \in O_{\lambda_i}$ tal que $\tilde{g}$ está próxima de f em $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Portanto O_{λ_i} é denso como queríamos provar. Então $\cup_{i=0}^{K} {O_{\lambda_i}}^c$ é um conjunto magro e fechado de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e todos os equilíbrios constantes de (3.16) limitados por N são hiperbólicos no subconjunto aberto e denso de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$Y_N = \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) - \cup_{i=0}^{K} {O_{\lambda_i}}^c.$$

De fato, para toda função constante $u \leq N$ equilíbrio de (3.16) temos que $f(u) = 0$, daí como $f \in Y_N$, $f'(u) \neq \lambda_i$ para $0 \leq i \leq K$ implicando que u é equilíbrio hiperbólico de (3.16).

Sendo assim, para mostrarmos que todos os equilíbrios de (3.16) são genericamente hiperbólicos, basta mostrar que todos os equilíbrios de (3.16) limitados por N são hiperbólicos em Y_N, exceto um subconjunto magro X_N de Y_N, pois assim, todos os equilíbrios de (3.16) são hiperbólicos em $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ exceto o subconjunto magro $\left\{ \cup_{i=0}^{\infty} X_i \right\} \cup \left\{ \cup_{i=0}^{\infty} {O_{\lambda_i}}^c \right\}$ de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Para este fim, considere então a aplicação diferenciável

$$\begin{aligned} F : B_N \times Y_N &\longrightarrow L^2(0,1) \\ (u, f) &\longrightarrow (au_x)_x + f(u) \end{aligned}$$

onde

$$B_N = \{u \in H_N^2(0,1); \|u\|_{H_N^2(0,1)} \leq N\},$$

Y_N é o subconjunto aberto e denso de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ definido anteriormente e $a \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}^+)$ é uma função monótona. Usando o teorema da Transversalidade mostraremos que para todo f em Y_N, exceto um conjunto magro, a aplicação $u \longrightarrow F(u, f)$ tem zero como valor regular. Então pela proposição (3.8) segue que todos os equilíbrios de (3.16) em B_N são genericamente hiperbólicos em Y_N de onde segue o resultado desejado.

As hipóteses (1) e (3) do teorema da transversalidade são imediatas, bastando apenas verificar a hipótese $2(\alpha)$.

Suponha por absurdo que exista $(u, f) \in F^{-1}(0)$ tal que a diferencial

$$\begin{aligned} DF(u,f) : H^2_N(0,1) \times C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) &\longrightarrow L^2(0,1) \\ (\dot{u}, \dot{f}) &\longrightarrow (a\dot{u}_x)_x + f'(u)\dot{u} + \dot{f}(u) \end{aligned}$$

não é sobrejetora.

Observe que a função u não pode ser constante, de fato, se u fosse constante o conjunto $\{DF(u,f)(\dot{u},0); \dot{u} \in H^2_N(0,1)\}$ seria igual a $L^2(0,1)$ já que $f \in Y_N$ implicando que o operador $DF(u,f)$ é sobrejetor.

Então u é não constante e como sempre, existe $\phi \in L^2(0,1)$ não nula ortogonal à imagem do operador $DF(u,f)$, ou seja,

$$\int_0^1 \phi\{(a\dot{u}_x)_x + f'(u)\dot{u} + \dot{f}(u)\} = 0 \; \forall \dot{u} \in H^2_N(0,1) \text{ e } \forall \dot{f} \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Tomando $\dot{f} = 0$ temos que $\int_0^1 \phi\{(a\dot{u}_x)_x + f'(u)\dot{u}\} = 0 \; \forall \dot{u} \in H^2_N(0,1)$ implicando que $\phi \in H^2_N(0,1) \cap C^2(0,1)$ é solução fraca, portanto solução forte de

$$L_u\phi = 0 \text{ em } 0 < x < 1 \tag{3.18}$$

já que $a > 0$. Fazendo agora $\dot{u} = 0$ temos que $\int_0^1 \dot{f}(u)\phi = 0 \; \forall \dot{f} \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Lema 3.9 *Seja $u : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ solução não constante de (3.17). Se $\int_0^1 \dot{f}(u)\phi dx = 0 \; \forall \dot{f} \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ temos que*

$$2 \sum_{p \in I_q \cap (0,1)} \frac{\phi(p)}{\sqrt{|u''(p)|}} + \sum_{p \in I_q \cap \{0,1\}} \frac{\phi(p)}{\sqrt{|u''(p)|}} = 0$$

onde $I_q = \{p \in [0,1]; u(p) = q \text{ e } u'(p) = 0\}$.

Prova. Observe que u, equilíbrio de (3.17) é uma função $C^3(0,1)$, de fato,

$$(au_x)_x = -f(u) \in C^1(0,1) \longrightarrow au_x \in C^2(0,1)$$

com $a \in C^2([0,1],\mathbb{R}^+)$. Observe agora que I_q é um conjunto finito, já que u é solução não constante de (3.17). De fato, se I_q fosse ao menos enumerável, existiria $p \in I_q$ tal que $u''(p) = 0$ implicando que $u_x \in C^2(0,1)$ é solução da equação de segunda ordem

$$(av)_{xx} + f'(u)v = 0$$

satisfazendo $u_x(p) = u_{xx}(p) = 0$, e então, pelo teorema de unicidade de EDOs $u_x \equiv 0$ e u é constante, absurdo.

Suponha $p \in (0,1)$ um ponto crítico da função u. Numa vizinhança de p podemos escrever u como

$$u(x) = u(p) + \frac{u''(p)}{2}(x-p)^2 + O(x-p)^3.$$

Sendo u solução não constante de (3.17) temos que $u''(p) \neq 0$. Suponha $u''(p) < 0$, (o caso positivo é análogo). A imagem de um pequeno intervalo $I = (p - \delta_1, p + \delta_2)$ ao redor de p é então um intervalo da forma $(q - \epsilon, q]$, onde $q = u(p)$ e $\epsilon > 0$. Então para $x \in I$ e $y \in [q - \epsilon, q]$ temos que

$$\begin{aligned} u(x) = y \quad &\Longleftrightarrow \quad y - q = \frac{u''(p)}{2}(x-p)^2 + O(|(x-p)|^3) \\ &\Longleftrightarrow \quad y - q = \frac{u''(p)}{2}(x-p)^2 + O(|(x-p)^2|^{\frac{3}{2}}) \\ &\Longleftrightarrow \quad (x-p)^2 = \frac{2}{u''(p)}(y-q) + O(|y-q|^{\frac{3}{2}}) \end{aligned}$$

Observe que u é um a um em cada um dos intervalos $[p - \delta_1, p]$ e $[p, p + \delta_2]$ sobre $[q - \epsilon, q]$, com

$$\begin{aligned} (x-p) &= \pm\sqrt{\frac{2(y-q)}{u''(p)} + O(|y-q|^{\frac{3}{2}})} \\ &= \pm\sqrt{\frac{2(y-q)}{u''(p)}}\sqrt{1 + O(|y-q|^{\frac{1}{2}})} \\ &= \pm\sqrt{\frac{2(y-q)}{u''(p)}}(1 + O(|y-q|^{\frac{1}{2}})), \end{aligned}$$

ou seja,

$$(x-p) = \pm\sqrt{\frac{2(y-q)}{u''(p)}} + O(|y-q|). \tag{3.19}$$

Seja $g_\epsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ a seguinte função:

$$g_\epsilon = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} & \text{se } |y-q| \leq \epsilon \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Através de (3.19) podemos determinar aproximadamente o valor de δ_1:

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{2\epsilon}{|u''(p)|}} + O(\epsilon).$$

Portanto, a integral

$$\int_{p-\delta_1}^{p} g_\epsilon(u(x))\phi(x)dx \quad = \quad \int_{p-\delta_1}^{p} \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\phi(x)dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\phi(\bar{x})\delta_1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\phi(\bar{x})\Big(\sqrt{\frac{2\epsilon}{|u''(p)|}} + O(\epsilon)\Big) \\
&= \phi(\bar{x})\Big(\sqrt{\frac{2}{|u''(p)|}} + O(\sqrt{\epsilon})\Big).
\end{aligned}
$$

para algum $\bar{x} \in (p - \delta_1, p)$. Fazendo $\epsilon \longrightarrow 0$ temos que a integral tende a

$$\phi(p)\sqrt{\frac{2}{|u''(p)|}}.$$

De maneira análoga obtemos o mesmo valor para a integral $\int_p^{p+\delta_2} g_\epsilon(u(x))\phi(x)dx$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$. Então somando sobre todos os $p \in u^{-1}(q)$ temos que

$$\int_0^1 g_\epsilon(u(x))\phi(x)dx \longrightarrow \sqrt{2}\Big(2\sum_{p\in I_q\cap(0,1)} \frac{\phi(p)}{\sqrt{|u''(p)|}} + \sum_{p\in I_q\cap\{0,1\}} \frac{\phi(p)}{\sqrt{|u''(p)|}}\Big)$$

quando $\epsilon \longrightarrow 0$, onde $I_q = \{p \in [0,1]; u(p) = q \text{ e } u'(p) = 0\}$. Observe que qualquer função em $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ pode ser aproximada por funções do tipo g_ϵ. Portanto, podemos afirmar que

$$2\sum_{p\in I_q\cap(0,1)} \frac{\phi(p)}{\sqrt{|u''(p)|}} + \sum_{p\in I_q\cap\{0,1\}} \frac{\phi(p)}{\sqrt{|u''(p)|}} = 0$$

já que por hipótese $\int_0^1 \dot{f}(u)\phi dx = 0 \ \forall \dot{f} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$. ∎

Observe que se $I_{u(0)} = \{0\}$ temos que $\phi(0) = 0$. Como $\phi \in H^2_{\mathcal{N}}(0,1) \cap \mathcal{C}^2(0,1)$ e satisfaz (3.18), temos pelo teorema de unicidade de soluções de EDOs que $\phi \equiv 0$, contradizendo o fato de que ϕ é não nula. Portanto, $\phi(0) \neq 0$.

Dado $p \in I_{u(0)}$ temos que $a(p)u_{xx}(p) + f(u(p)) = 0$, o que nos dá $u_{xx}(p) = -\frac{f(u(0))}{a(p)}$. Portanto, já que $a > 0$ temos que para todo $p \in I_{u(0)}$, $u_{xx}(p)$ possui o mesmo sinal. Então, se $u_{xx}(p) > 0$ (o caso negativo é análogo) temos que $\forall p \in I_{u(0)}$

$$2\sum_{p\in I_{u(0)}\cap(0,1)} \frac{\phi(p)}{\sqrt{u''(p)}} + \sum_{p\in I_{u(0)}\cap\{0,1\}} \frac{\phi(p)}{\sqrt{u''(p)}} = 0.$$

Defina a aplicação diferenciável

$$\omega(x, v(x), w(x)) = \frac{1}{2}\Big(a(w(x))^2 + \int_0^x a_x(w(s))^2 ds\Big) + G(v(x))$$

onde G é uma primitiva de f. Sendo u solução de (3.17) temos que

$$
\begin{aligned}
\omega_x(x,u,u_x) &= \Big(\frac{1}{2}(a{u_x}^2 + \int_0^x a_x{u_x}^2 ds) + G(u)\Big)_x \\
&= u_x(au_{xx} + a_x u_x + f(u)) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\omega(x, u, u_x)$ é uma função constante e para $p \in I_{u(0)}$ temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \omega(p, u(0), 0) - \omega(0, u(0), 0) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^p a_x u_x^2 ds. \end{aligned}$$

Como u não é constante em $[0, 1]$, para todo $\epsilon > 0$ a função u_x é não nula em $(0, \epsilon)$. De fato, se isto não fosse verdade a solução constante $v = u(0)$ satisfaria a EDO (3.17) com valor inicial $v = u(0)$ e então pelo teorema de unicidade de EDOs $v = u$ mas por hipótese u não é constante. Logo podemos concluir que $a_x \equiv 0$ em $[0, p]$, já que a é uma função monótona, e daí temos que a equação (3.16) é uma equação com coeficiente constante em $[0, p]$ para todo $p \in I_{u(0)}$.

Seja $\tilde{p} = max\{I_{u(0)}\}$, $\tilde{p} \in I_{u(0)}$, de fato, como foi visto na demostração do lema, o conjunto I_q é finito para todo q já que a função u não é constante.

Então, até aqui, nossa hipótese de absurdo implica na existência de uma função ϕ solução clássica da equação (3.18) e que a é constante em $[0, \tilde{p}] \subset [0, 1]$.

Considere agora a equação

$$av_{xx} + f'(u)v = 0,\ 0 < x < \tilde{p}. \tag{3.20}$$

Já que (3.16) é uma equação com coeficiente de difusão constante em $[0, \tilde{p}]$ temos que as funções u_x e ϕ satisfazem (3.20) com $u_x(0) = 0$, $u_{xx}(0) \neq 0$, $\phi(0) \neq 0$ e $\phi_x(0) = 0$. O Wronskiano de (3.20) é constante para qualquer duas soluções dadas, portanto temos que para alguma constante c

$$u_x\phi_x - u_{xx}\phi = c\ \forall x \in [0, \tilde{p}].$$

Dado $p \in I_{u(0)}$ temos que $p \in [0, \tilde{p}]$ e

$$\phi(p) = -\frac{c}{u_{xx}(p)} = \frac{ca}{f(u(0))}$$

que é constante em $I_{u(0)}$.

Então, pelo lema (3.9) temos que

$$\frac{ca}{f(u(0))}\Big(2\sum_{p \in I_{u(0)} \cap (0,1)} \frac{1}{\sqrt{|u''(p)|}} + \sum_{p \in I_{u(0)} \cap \{0,1\}} \frac{1}{\sqrt{|u''(p)|}}\Big) = 0$$

de onde podemos concluir que $\phi(p) \equiv 0\ \forall p \in I_{u(0)}$ e portanto $\phi(0) = 0$ contradizendo nossa hipótese de absurdo. Logo a hipótese $2(\alpha)$ do teorama da Transversalidade está verificada e segue afirmação de que todos os equilíbrios de (3.16) são hiperbólicos em $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, exceto em um conjunto magro.

Vamos agora mostrar o resultado principal desta seção.

Teorema 3.10 *Se $a \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R}^+)$ é uma função monótona, então todos os equilíbrios de*

$$u_t = (au_x)_x + f(u),\ 0 < x < 1$$

com condições de Neumann para o contorno $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$ são genericamente hiperbólicos em f $\mathcal{C}^2$ na topologia de Whitney.

Prova. Para provar o teorema, basta mostrar que o conjunto $\mathcal{F}_N$ das f na topologia de Whitney que possui todos os equilíbrios em $B_N \subset H^2_{\mathcal{N}}(0,1)$ hiperbólicos é aberto e denso na topologia de Whitney já que tal espaço topológico é de Baire.

Primeiro observe que $\mathcal{F}_N$ é denso. Seja f uma função de classe $\mathcal{C}^2$. Como todos os equilíbrios de (3.16) pertencem a B_N, existe um intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tal que a imagem de todos estes equilíbrios estão contidos em $[a,b]$. Tome $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que $g = f$ em $[a,b]$. Se g não possui todos os seus equilíbrios hiperbólicos em B_N existe $\bar{g} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ próxima a g em $\mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ que possui todos os equilíbrios hiperbólicos pelo que foi demonstrado antes no exemplo. Seja $\tilde{f} = f - g + \bar{g}$. $\tilde{f}$ está próxima a f na topologia de Whitney e todos os equilíbrios de (3.16) em B_N para $\tilde{f}$ são hiperbólicos. Portanto $\mathcal{F}_N$ é denso na topologia de Whitney.

Provemos agora que $\mathcal{F}_N$ é aberto. Suponha por absurdo que exista uma sequência $\{f_n\}$ fora de $\mathcal{F}_N$ convergindo para $f \in \mathcal{F}_N$. Então existem sequências $\{u_n\} \subset B_N$ e $\{\phi_n\} \subset H^2_{\mathcal{N}}(0,1)$, $\int_0^1 (\phi_n)^2 = 1$ satisfazendo

$$(a(u_n)_x)_x + f_n(u_n) = 0 \text{ e } (a(\phi_n)_x)_x + f_n'(u_n)\phi_n = 0\ \forall n.$$

Na demonstração do lema (3.9) vimos que $u_n \in \mathcal{C}^3(0,1)$. Portanto cada u_n pertence a $H^3(0,1) \cap H^2_{\mathcal{N}}(0,1)$. Observe também que cada u_n possui imagem em $[a,b]$ e portanto a sequência $\{u_n\}$ é uniformemente limitada em $H^3(0,1)$. Como $H^3(0,1)$ está imerso compactamente em $H^2(0,1)$, passando a subsequência, existe $u \in H^2_{\mathcal{N}}(0,1)$ tal que $u_n \longrightarrow u$. Por argumento análogo temos que cada $\phi_n \in H^3(0,1) \cap H^2_{\mathcal{N}}(0,1)$ e, passando a subsequência, existe $\phi \in H^2_{\mathcal{N}}(0,1)$ não nula já que $\int_0^1 (\phi_n)^2 = 1$ tal que $\phi_n \longrightarrow \phi$. Sendo assim, quando $n \longrightarrow \infty$ temos que

$$(au_x)_x + f(u) = 0 \text{ e } (a\phi_x)_x + f'(u)\phi = 0.$$

Logo, nossa hipótese de absurdo produziu um equilíbrio $u \in B_N$ para f que não é hiperbólico, absurdo. ∎

Referências Bibliográficas

[1] R. Abraham e J. Bobin, *Transversal mappings and flows*, W. A. Benjamin, 1967.

[2] S. Agmon, The L_p approach to the dirichlet problem, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa,* vol. 13, 405-448 (1959),.

[3] ———, *Unicité et convexité dans les problems differentielles*, Univ. Montreal.

[4] E. Browder, Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA,* vol. 45, 385-372 (1959).

[5] M. Chicco, Solvability of the dirichlet problem in for a class of linear second order elliptic partial differential equations, *Bollet. U. M. I.,* vol. 4, 374-387 (1971).

[6] S. Agmon; A. Douglis e N. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfyng general boundary conditions, *Comm. Pure Appl. Math.,* vol. 12, 623-727 (1959).

[7] S. Chow e P. Brunovsky, Generic properties of stationary state solutions of reaction-diffusion equations, *Journal Differential Equations,* vol. 53, 1-23 (1984).

[8] G. B. Folland, *Introduction to partial differential equations*, Princeton University Press, 1995.

[9] A. Friedman, *Partial differential equations*, Holt Rinehart and Winston, 1969.

[10] D. B. Henry, *Topics in nonlinear analysis*, UnB, 1982.

[11] ———, *Perturbation of the boundary in boundary value problems of pdes*, notas não publicadas, 1985.

[12] M. W. Hirsch, *Differential topology*, Springer Verlag, 1976.

[13] L. Hormander, *Linear partial differential operators*, Springer Verlag, 1964.

[14] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Springer Verlag, 1980.

15] A. M. Micheletti, Perturbazione dello spettro dell'operatore de laplace in relazione ad una variazone del campo, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa,* vol. 26, 151-169 (1972).

16] A. L. Pereira, Generic hiperbolicity for scalar parabolic equations, *Proc. Royal Soc. Edinburgh,* vol. 123A, 1031-1040 (1993).

.7] K. Uhlenbeck, Eigenfunctions of laplace operators, *Bull. Am. Math. Soc.,* vol. 78, 1073-1076 (1972).