# Uma versão do teorema de Ovcyannikov-Treves no contexto da teoria de funções generalizadas de Colombeau

**Ernandes Rocha de Oliveira**

TESE APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM MATEMÁTICA

Área de concentração: **Análise**

Orientador: **Prof. Dr. Alfredo Jorge Aragona Vallejo**

São Paulo, 22 de junho de 2001

*Durante o programa de doutorado, o autor obteve apoio financeiro da CAPES*

# UMA VERSÃO DO TEOREMA DE OVCYANNIKOV-TREVES NO CONTEXTO DA TEORIA DE FUNÇÕES GENERALIZADAS DE COLOMBEAU

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Ernandes Rocha de Oliveira e aprovada pela Comissão Julgadora.

São Paulo, 22 de junho de 2001.

Banca Examinadora:

- Prof. Dr. Alfredo Jorge Aragona Vallejo (Presidente) — IME-USP
- Profa. Dra. Roseli Fernandez — IME-USP
- Prof. Dr. Mario Carvalho de Matos — IMECC-UNICAMP
- Prof. Dr. Roberto Luiz Soraggi — IM-UFRJ
- Prof. Dr. Francisco Villarreal Alvarado — FEIS-UNESP

Dedico este trabalho
à memória de meu pai Orival,
à minha mãe Maria Madalena
e à minha mulher Márcia.

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu orientador Jorge Aragona pela confiança em mim depositada, pelo incentivo e sugestões sem os quais este trabalho dificilmente seria realizado.

Agradeço também aos meus professores do IME-USP, em particular ao Prof. Paulo Cordaro, pelos ensinamentos e pela sugestão de estudar o tema objeto deste trabalho.

Agradeço a hospitalidade e companheirismo do amigo Oswaldo Rio Branco de Oliveira.

Agradeço o incentivo constante dos colegas e amigos Zulind Luzmarina Freitas, João Toledo da Silva e Francisco Villareal.

Finalmente, este trabalho dificilmente poderia ser concluído sem o apoio, a tolerância e, muitas vezes, sacrifício de minha mulher Márcia Helena.

# Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma versão do teorema de Ovcyannikov-Treves no ambiente das funções generalizadas de Colombeau. Introduzimos as aplicações generalizadas a valores em escalas de espaços de Banach, estabelecemos, para o problema linear, condições para existência e unicidade de solução, assim como compatibilidade com a solução clássica $C^\infty$. Para o problema não linear estabelecemos condições para existência de soluções.

# Abstract

In this work, we study a version of the Ovcyannikov-Treves theorem in the Colombeau's generalized functions framework. We introduce generalized mappings taking their values on scales of Banach spaces, we also establish conditions for existence, uniqueness and compatibility with the classical $C^\infty$ solution in the linear case, and, for the nonlinear problem, we state conditions for existence of generalized solutions.

# Sumário


Introdução ii

**1 Funções Generalizadas em escalas de espaços de Banach** **1**

1.1 Definições e propriedades básicas . . . . . 1

1.1.1 Complementos do Cálculo . . . . . 4

1.1.2 Composição de aplicações generalizadas com elementos de $\mathcal{G}_\tau$ . 13

1.2 Aplicações a valores numa escala de espaços de Banach . . . . . 20

1.2.1 Derivação parcial em $\mathcal{G}[\Omega; X]$ . . . . . 27

1.2.2 Propriedades locais . . . . . 28

1.2.3 Valor pontual . . . . . 31

1.2.4 Funções generalizadas localmente limitadas . . . . . 33

1.3 Algumas aplicações especiais . . . . . 35

**2 Um teorema do tipo Ovcyannikov-Treves** **39**

2.1 Aplicações lineares admissíveis numa escala $(X, (X_s))$ . . . . . 39

2.2 Um resultado de existência de soluções . . . . . 50

2.3 Unicidade de soluções . . . . . 60

2.4 O Teorema de Cauchy-Kovalevska linear . . . . . 64

**3 Sobre uma versão não linear do teorema de Ovcyannikov** **69**

3.1 Aplicações definidas numa escala de espaços de Banach . . . . . 69

3.1.1 Uma composição particular . . . . . 73

3.2 Um resultado de existência de soluções . . . . . 83

3.3 Uma aplicação do teorema abstrato . . . . . 96

Referências Bibliográficas 110

# Introdução

Desde sua criação, no início da década de 1980, a teoria das Funções Generalizadas de Colombeau tem sido utilizada, com sucesso, no estudo de problemas não lineares envolvendo distribuições sem, é claro, excluir o tratamento dos problemas lineares. Inicialmente concebida para resolver o problema de definir um produto geral de Distribuições, a teoria criada por J. F. Colombeau origina métodos cuja elegância e flexibilidade têm permitido que seja utilizada em muitas áreas diferentes da Análise. Uma apresentação detalhada de várias aplicações e extensões da teoria, assim como várias referências, pode ser encontrada nos trabalhos de M. Oberguggenberger [22] e M. Kunzinger [17]. Neste trabalho, propomo-nos estudar algumas possíveis versões do Teorema de Ovcyannikov no contexto da teoria de Colombeau; para isso, será necessário, antes de mais nada, que recordemos esse resultado clássico assim como alguns conceitos a ele relacionados e estabeleçamos algumas notações. Denotaremos com o símbolo $\mathbb{K}$ indistintamente tanto o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais quanto o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos, e o símbolo I denotará o intervalo $]0,1]$; além disso, dado $a > 0$, a bola aberta de centro na origem de $\mathbb{K}^n$ e raio $a$ será denotada por $J_a$.

**I.1.1 Definição (Escala de espaços de Banach).** Seja $\mathrm{X}_0$ um espaço de Banach e consideremos $\left(\mathrm{X}_s, \|.\|_s\right)_{s\in \mathrm{I}}$ uma família de subespaços de $\mathrm{X}_0$, verificando a propriedade

[**(EB)**] para cada $r, s \in \mathrm{I}$, com $r < s$, $\mathrm{X}_s \hookrightarrow \mathrm{X}_r$ com a inclusão natural de norma

menor ou igual a um, isto é, as aplicações

$$\begin{aligned} \imath_r^s : \ \mathrm{X}_s &\to \mathrm{X}_r \\ u &\mapsto \imath_r^s(u) = u \end{aligned}$$

verificam

$$\|\imath_r^s(u)\|_r \leq \|u\|_s \ , \quad \text{para todo } u \in \mathrm{X}_s \ .$$

Uma escala de espaços de Banach é um par, $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$, constituído pelo $\mathbb{K}$-espaço vetorial $\mathrm{X} := \bigcup_{s\in \mathrm{I}} \mathrm{X}_s$, obtido como o limite indutivo na categoria dos espaços vetoriais, e a família de espaços de Banach, $(\mathrm{X}_s, \|\cdot\|_s)_{s\in\mathrm{I}}$.

O clássico Teorema de Ovcyannikov linear foi apresentado por L.V. Ovcyannikov em [23]. Nesse artigo, o autor introduz uma classe de operadores lineares, $L(t)$, chamados por ele de operadores de tipo $D$, que atuam sobre escalas de espaços de Banach (não necessariamente com parâmetro limitado) e destaca a subclasse dos operadores *singulares numa escala de espaços de Banach*, que podem ser descritos da seguinte forma:

**(H1)** $L(\cdot)$ é contínuo em $J_a$, para algum $a > 0$, a valores em $\mathcal{L}(\mathrm{X}_s; \mathrm{X}_r)$, para cada $r, s$ com $0 \leq r < s \leq 1$;

**(H2)** existe uma constante $C > 0$ tal que para cada $t \in J_a$ e quaisquer que sejam $0 \leq r < s \leq 1$ verifica-se

$$\|L(t)\|_{\mathcal{L}(\mathrm{X}_s;\mathrm{X}_r)} \leq \frac{C}{s-r} \ . \tag{I.1}$$

L.V. Ovcyannikov exibe, ainda nesse primeiro artigo, alguns exemplos de escalas de espaços de Banach e prova um teorema de existência e unicidade de soluções para problemas de Cauchy da forma

$$\frac{du}{dt} = L(t)u \ , \qquad u(0) = u_0 \in X_{s_0}$$

com $0 < s_0 \leq 1$ dado. Aplica seu resultado em problemas de Cauchy do tipo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} a^i D_i u + a^0 u \ , \qquad u|_{t=0} = u_0(x)$$

com coeficientes contínuos em $t$ e analíticos em $x$. Seu resultado passou também a ser conhecido como a versão abstrata do Teorema de Cauchy-Kovalevsky, uma vez que esse conhecido resultado é um caso particular de seu Teorema. Logo após o trabalho de L.V. Ovcyannikov, F. Treves publica uma monografia, [27], onde, em seu Capítulo I, reapresenta o resultado de Ovcyannikov com uma prova detalhada do teorema de existência e unicidade de soluções para problemas da forma

$$\frac{du}{dt} = L(t)u + f(t)\ , \qquad u(0) = u_0 \in X_1 \tag{I.2}$$

com $f \in C(J_a; X_1)$. F. Treves estende esse estudo para a dependência contínua e regularidade de soluções; além disso, avança mais ainda ao considerar o problema dual, que é a consideração do dado $f(t)$ como uma distribuição (é claro que $L(t)$ deve ser tomado na classe $C^\infty$ e não se considera condição inicial alguma), o que lhe permite dar uma prova mais simples do teorema de Holmgren. Algo que deve ser observado é a indicação de F. Treves sobre as possibilidades de extensão e aplicações a outros problemas, além da consideração de uma versão não linear para esse teorema. No artigo [28], F. Treves inicia o estudo de uma formulação não linear para o Teorema de Ovcyannikov. Nesse trabalho, F. Treves considera um problema da forma

$$\frac{du}{dt} = F(u,t)\ , \qquad u(0) = u_0 \tag{I.3}$$

no qual o termo $F(u,t)$ é uma aplicação analítica nas duas variáveis, ou seja, aqui ele considera que $F(u,t)$ tenha uma representação da forma

$$F(u,t) = \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty} \hat{F}_{p,q}(u-u_0)t^q$$

onde

- $\hat{F}_{0,q} = F_{0,q} \in \mathrm{X}_s$ para cada $s < 1$;
- existe uma constante $c > 0$ tal que $\|F_{0,q}\|_s \leq \dfrac{C\eta^{-q}}{1-s}$ com $q = 0, 1, \ldots$;
- para $p = 1, 2, \ldots$ e para cada $u \in \mathrm{X}_s$, $\hat{F}_{p,q}(u) = F_{p,q}(u, \ldots, u)$, onde $F_{p,q}$ é uma aplicação $p$-linear $X_s^p \to \mathrm{X}_r$ para $0 \leq r < s \leq 1$, satisfazendo ainda a condição: existe uma constante $r > 0$ tal que para cada $(u_1, \ldots, u_p) \in \mathrm{X}_s^p$

$$\|F_{p,q}(u_1, \ldots, u_p)\|_r \leq \frac{Cr^{-p}\eta^{-q}}{s-r}\|u_1\|_s \ldots \|u_p\|_s\ .$$

F. Treves prova então existência e unicidade de solução analítica para o problema de Cauchy (I.3). Nesse artigo, também são apresentados vários exemplos significativos de escalas de espaços de Banach, bem como dos operadores não-lineares singulares nas escalas consideradas. Dando continuidade ao programa estabelecido por F. Treves de exploração do Teorema de Ovcyannikov, F. Treves e P. Duchateau publicam [14], artigo no qual estudam o problema (I.3), porém eliminam a hipótese de analiticidade da função $F(u,t)$ em relação à variável $u$. O método de demonstração também é por aproximações sucessivas como considerado no caso linear em [23] e em [27]. Novos exemplos de escalas são construídas, com os respectivos operadores singulares. Estudam também a regularidade (Gevrey) da solução e, do mesmo modo que F. Treves já havia explorado no caso linear, aplicam seus resultados a problemas de Cauchy nos quais aparecem operadores pseudodiferenciais. Observa-se, no entanto, que é necessário que o termo $F(u,t)$ esteja definido globalmente com respeito a $u$ na escala $(\mathrm{X},(\mathrm{X}_s))$. Em [24], L. V. Ovcyannikov apresenta sua versão para o caso não linear. Nesse novo trabalho, Ovcyannikov introduz o conceito de operador quase-diferencial numa escala de espaços de Banach e a aplicação $F(u,t)$, embora não necessitando ser analítica em $u$, deve verificar a condição de ser quase-diferencial. Essa condição também limita o tipo de escalas que são consideradas, uma vez que envolve propriedades de convexidade e diferenciabilidade das normas na escala. O método de demonstração de seu teorema de existência e unicidade é uma modificação conveniente do método de aproximações sucessivas já usado no caso linear. Em [18], L. Nirenberg apresenta uma nova versão para o teorema de Ovcyannikov. Nesse trabalho, suas hipóteses são bastante diferentes de [24] e, num certo sentido, mais simples. Exigindo uma certa diferenciabilidade do termo $F(u,t)$ em relação a $u$ e condições sobre a "derivada de Fréchet" $D_uF(u,t)$, que implicam em ser um operador linear singular na escala $(\mathrm{X},(\mathrm{X}_s))$, acrescida de uma outra condição que controla o tipo de singularidade apresentado por $F(u,t)$, ele apresenta inicialmente uma nova forma do teorema linear (com hipóteses mais fortes que o exposto em [27]) e, em seguida, seu resultado para o caso não linear. Seu método de demonstração, baseado numa análise detalhada da prova do caso linear em [27], utiliza o teorema do ponto fixo de Banach conjugado com um processo de linearização do problema (I.3). T. Nishida apresenta, em [19], uma versão mais simples do

teorema não linear de Ovcyannikov (agora na versão não linear chamado também de Teorema de Nirenberg). Sua hipótese mais importante sobre o termo $F(u,t)$ pode ser descrita como: para cada $r < s < 1$ , para cada $u, v \in X_s$ com $\|u\|_s < R$, $\|v\|_s < R$ e para cada $t$ com $|t| < a$

$$\|F(u,t) - F(v,t)\|_r \leq \frac{C\|u-v\|_s}{s-r} \tag{I.4}$$

onde $C$ é uma constante independente de $t$, $u$,$v$, $s$ ou $r$. Outro fato curioso é não haver hipóteses sobre "diferenciabilidade" de $F(u,t)$. Voltando às origens do teorema abstrato de Ovcyannikov, que sempre esteve ligado a problemas da hidrodinâmica como pode ser confirmado em [25], T. Kano e T. Nishida, em [16], apresentam uma forma um pouco mais geral desse resultado, baseando-se na prova do Teorema de Nirenberg e com hipóteses semelhantes a (I.4). Outras aplicações e uma nova formulação são expostas em [20]. Em [4], K. Asano apresenta uma nova extensão para o Teorema de Nirenberg, e o método de demonstração também consiste em aplicar o teorema do ponto fixo. Finalmente, citamos o trabalho de Russel E. Caflisch, [6], no qual uma nova versão do teorema de Nirenberg é demonstrada e novamente hipóteses adicionais sobre a "derivada de Fréchet" de $F(u,t)$ são exigidas.

O breve resumo acima nos coloca frente à possibilidade de extensão dos resultados mencionados (pelo menos os abstratos) para a Teoria de Funções Generalizadas de Colombeau. Uma tal possibilidade se apóia em que J. F. Colombeau utiliza o teorema de Ovcyannikov em [10] para um estudo do teorema de Cauchy-Kovalevska linear no ambiente das funções generalizadas e ressalta a importância, para aplicações nesse novo contexto, das estimativas apresentadas por F. Treves em [27]. Em um outro trabalho [12], Colombeau volta a sugerir a utilização do teorema de Ovcyannikov, juntamente com o método de tomar "derivadas regularizadas", para o estudo do teorema de Cauchy-Kovalevsky (linear e não linear) no ambiente das funções generalizadas. As possibilidades de concretização deste projeto, surgiram a partir das aplicações levadas a efeito por J. F. Colombeau e do trabalho de Roseli Fernandez apresentado em sua tese de doutorado [15].

No desenvolvimento deste trabalho, devemos destacar algumas particularidades de uma nova formulação para (I.2), dentro da teoria de Colombeau:

**(a)** a introdução de uma nova classe de funções generalizadas definida sobre abertos

de um espaço de Banach E e a valores em uma escala de espaços de Banach. Quando E=$\mathbb{R}^n$ é esse tipo de espaço, aqui denotado por $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$ que será o universo de variação do dado $f$ e da solução $u$. Observa-se que o dado $u_0$ deve ser tomado como um vetor generalizado em $\overline{\mathrm{X}}$;

(b) a consideração de aplicações generalizadas a valores nos espaços $\mathcal{L}(\mathrm{X}_s, \mathrm{X}_r)$ e também uma lei de composição de modo a fazer sentido o lado direito de (I.2);

(c) uma reformulação de (I.2) de modo que seu caráter pontual não esteja presente.

Para a consecução dos itens destacados acima, procuramos adotar um programa dividido em três etapas.

**Etapa 1:** No Capítulo 1, após recordarmos algumas definições relativas a funções generalizadas em espaços de Banach, e os elementos de Cálculo Diferencial que são necessários, não só para essa revisão como também para o desenvolvimento do material subseqüente, introduzimos a definição para o espaço das aplicações generalizadas definidas sobre abertos de $\mathbb{R}^n$ tomando valores numa dada escala de espaços de Banach. Estudamos as principais propriedades desses espaços e introduzimos também a definição de vetores generalizados numa escala.

**Etapa 2:** No Capítulo 2, oferecemos a definição de aplicações generalizadas admissíveis e provamos ser possível definir uma regra de composição entre tais aplicações e os elementos de $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$. Por razões técnicas, tivemos de destacar as aplicações localmente limitadas.

**Etapa 3:** Estudamos o problema (I.2), no Capítulo 2, quando $L$ é uma aplicação linear generalizada singular localmente limitada. Nesse caso, mostramos existência de solução pelo método de aproximações sucessivas usado classicamente; verificamos também, usando os resultados clássicos de existência e unicidade, um resultado sobre unicidade de solução generalizada e também a compatibilidade com soluções clássicas $C^\infty$. Como no caso clássico, aplicamos o resultado abstrato ao problema de Cauchy-Kovalevsky linear com coeficientes generalizados de um tipo conveniente. Observamos que o resultado obtido por esse procedimento é, de certa forma, o mesmo que o obtido por J. F. Colombeau e exposto em [10].

O estudo do problema não linear em escalas de espaços de Banach

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = F(t, u(t)) \\ \\ u(0) = 0 \end{cases} \tag{I.5}$$

foi dividido em duas etapas.

**Etapa 1:** Introduzimos uma nova classe de funções generalizadas definidas sobre um produto de um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ por um subconjunto $\mathbb{B}_R := \cup_{s\in \mathrm{I}} B_R^s(0)$ da escala de espaços de Banach X e a valores na mesma escala. Definimos então o espaço das aplicações singulares $R$-limitadas na escala $(\mathrm{X}, (\mathrm{X_s}))$, denotado por $\mathcal{G}_{\mathrm{R}}(\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X})$. No Capítulo 3, definimos também uma regra de composição entre elementos de $\mathcal{G}_{\mathrm{R}}(\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X})$ e elementos de $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$.

**Etapa 2:** Estudamos existência de soluções generalizadas para (I.5), usando o mesmo método usado em [16]. Aplicamos também o resultado abstrato a um problema da forma

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t, z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j(t, z, u(t, z)) \frac{\partial u}{\partial z_j}(t, z) + a_0(t, z, u(t, z)) \\ \\ u(0, z) = u_0(z)\,, \end{cases}$$

com $(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$.

# Capítulo 1

# Funções Generalizadas em escalas de espaços de Banach

Neste capítulo, apresentamos uma construção do espaço das aplicações generalizadas definidas em abertos de $\mathbb{R}^n$ e tomando valores em uma escala de espaços de Banach. O objetivo deste capítulo é o de estabelecer notações e também recordar alguns resultados da teoria de Colombeau.

## 1.1 Definições e propriedades das funções generalizadas

No que se segue, $\mathbb{K}$ denotará indistintamente tanto o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais quanto o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos. Além disso, denotaremos por I o intervalo aberto em 0 e fechado em 1, isto é, $\mathrm{I} := ]0,1] \subset \mathbb{R}$. $\mathbb{N}$ sempre indicará o conjunto dos inteiros não negativos e $\mathbb{N}^*$ o dos inteiros positivos. Recordaremos inicialmente a construção do espaço das aplicações generalizadas definidas em abertos de um espaço de Banach E, e tomando valores em um espaço de Banach F e para isso utilizaremos como referência [30], cujas notações e resultados serão brevemente, e sempre que necessário, reunidos aqui.

Sejam E e F dois $\mathbb{K}$-espaços de Banach. Por $\mathcal{L}(^p\mathrm{E};\mathrm{F})$, denotaremos o $\mathbb{K}$-espaço

de Banach das aplicações $p$-lineares contínuas de $\mathrm{E}^p$ em F com a convenção de que quando $p = 0$, $\mathcal{L}({}^0\mathrm{E}; \mathrm{F}) := \mathrm{F}$. Convencionamos também que, quando $p \neq 0$, a norma em $\mathcal{L}({}^p\mathrm{E}; \mathrm{F})$ será denotada por $\|\cdot\|_p$. Usaremos ainda a identificação $\mathcal{L}(\mathbb{K}; \mathrm{F}) = \mathrm{F}$.

**1.1.1 Definição.** Sejam E e F dois $\mathbb{K}$-espaços de Banach e $\Omega \neq \emptyset$ um subconjunto aberto de E. Denotaremos por $\mathcal{E}[\Omega; \mathrm{F}]$ o conjunto das funções $\hat{u} : \mathrm{I} \times \Omega \longrightarrow \mathrm{F}$ tais que para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$,

$$\hat{u}(\varepsilon, \cdot) \in C^\infty(\Omega; \mathrm{F}) .$$

Verifica-se que $\mathcal{E}[\Omega; \mathrm{F}]$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial quando munido das operações pontuais, quais sejam, dadas $\hat{u}$, $\hat{v} \in \mathcal{E}[\Omega; \mathrm{F}]$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\hat{u}+\hat{v}) \in \mathcal{E}[\Omega; \mathrm{F}]$ e $\lambda\hat{u} \in \mathcal{E}[\Omega; \mathrm{F}]$ são definidas por

$$(\hat{u} + \hat{v})(\varepsilon, x) := \hat{u}(\varepsilon, x) + \hat{v}(\varepsilon, x) \ \text{ e } \ (\lambda\hat{u})(\varepsilon, x) := \lambda\hat{u}(\varepsilon, x)$$

para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$ e $x \in \Omega$.

**1.1.2 Notação.** Se $p \in \mathbb{N}$ e $\hat{u} \in \mathcal{E}[\Omega; \mathrm{F}]$, podemos considerar a aplicação $\mathbb{K}$-linear

$$d^p : \hat{u} \in \mathcal{E}[\Omega; \mathrm{F}] \mapsto d^p\hat{u} := \hat{u}^{(p)} \in \mathcal{E}[\Omega; \mathcal{L}({}^p\mathrm{E}; \mathrm{F})] \tag{1.1}$$

definida do seguinte modo, para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$ e $x \in \Omega$,

$$\hat{u}^{(p)}(\varepsilon, x) := [\hat{u}(\varepsilon, \cdot)]^{(p)}(x) .$$

**1.1.3 Definição.** Sejam E e F $\mathbb{K}$-espaços de Banach e $\Omega \neq \emptyset$ um subconjunto aberto de E. Denotaremos por $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{F}]$ o conjunto das aplicações $\hat{u} \in \mathcal{E}[\Omega; \mathrm{F}]$ tais que para cada $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$ e $p \in \mathbb{N}$ existem $N \in \mathbb{N}$, $c > 0$ e $\eta \in \mathrm{I}$ verificando

$$\sup_{x \in \mathrm{K}} \|\hat{u}^{(p)}(\varepsilon, x)\|_p \leq c\varepsilon^{-N} \ \text{ para cada } 0 < \varepsilon < \eta .$$

Um elemento de $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{F}]$ é chamado *aplicação moderada* em $\Omega$ a valores em F. Verifica-se que $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{F}]$, munido das operações pontuais, é um $\mathbb{K}$-subespaço vetorial de $\mathcal{E}[\Omega; \mathrm{F}]$.

**1.1.4 Definição.** Sejam E e F $\mathbb{K}$-espaços de Banach e $\Omega \neq \emptyset$ um subconjunto aberto de E. Denotaremos por $\mathcal{N}[\Omega; \mathrm{F}]$ o conjunto das aplicações $\hat{u} \in \mathcal{E}[\Omega; \mathrm{F}]$ tais que para cada $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$, $p \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{N}$, existem $c > 0$ e $\eta \in \mathrm{I}$ tais que

$$\sup_{x \in \mathrm{K}} \|\hat{u}^{(p)}(\varepsilon, x)\|_p \leq c\varepsilon^q \quad \text{para todo } \varepsilon \in ]0, \eta[ \ .$$

Um elemento de $\mathcal{N}[\Omega; \mathrm{F}]$ é chamado *aplicação nula* em $\Omega$ a valores em F. Verifica-se facilmente que $\mathcal{N}[\Omega; \mathrm{F}]$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{F}]$.

**1.1.5 Definição.** Sejam E e F $\mathbb{K}$-espaços de Banach e $\Omega \neq \emptyset$ um subconjunto aberto de E. Denotaremos por $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{F})$ o $\mathbb{K}$-espaço vetorial quociente de $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{F}]$ por $\mathcal{N}[\Omega; \mathrm{F}]$, isto é,

$$\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{F}) := \frac{\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{F}]}{\mathcal{N}[\Omega; \mathrm{F}]} \ .$$

Um elemento de $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{F})$ é chamado *aplicação generalizada em $\Omega$ a valores em* F.

A demonstração da seguinte proposição também é encontrada em [30, pág. 10].

**1.1.6 Proposição.** *Sejam* E *e* F *dois* $\mathbb{K}$*-espaços de Banach e* $\Omega \neq \emptyset$ *um subconjunto aberto de* E. *Dados* $p, q \in \mathbb{N}$ *valem as seguintes afirmações*

**(a)** *Se* $\hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{F}]$, *então* $\hat{u}^{(p)} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathcal{L}(^p\mathrm{E}; \mathrm{F})]$.

**(b)** *Se* $\hat{u} \in \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{F}]$, *então* $\hat{u}^{(p)} \in \mathcal{N}[\Omega; \mathcal{L}(^p\mathrm{E}; \mathrm{F})]$.

Dado $p \in \mathbb{N}$, a Proposição 1.1.6 mostra que a aplicação definida por (1.1) induz uma única aplicação $\mathbb{K}$-linear de $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{F})$ em $\mathcal{G}(\Omega; \mathcal{L}(^p\mathrm{E}; \mathrm{F}))$ que ainda é denotada por $d^p$ e chamada derivada de ordem $p$; além disso, essa aplicação é tal que, se $f \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{F})$, então, dado um representante qualquer $\hat{f} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{F}]$, teremos

$$f^{(p)} := d^p f := \hat{f}^{(p)} + \mathcal{N}(\Omega; \mathcal{L}(^p\mathrm{E}; \mathrm{F})) \ . \tag{1.2}$$

**1.1.7 Proposição.** *Sejam* E *e* F *dois* $\mathbb{K}$*-espaços de Banach e* $\Omega \neq \emptyset$ *um subconjunto aberto de* E. *Fixado* $p \in \mathbb{N}$ *e dada* $f \in C^\infty(\Omega; \mathcal{L}(^p\mathrm{E}; \mathrm{F}))$, *consideramos a aplicação* $\tilde{f} : \mathrm{I} \times \Omega \to \mathcal{L}(^p\mathrm{E}; \mathrm{F})$ *definida por*

$$\tilde{f}(\varepsilon, x) := f(x) \ \ \textit{para cada } (\varepsilon, x) \in \mathrm{I} \times \Omega \ ,$$

*então* $\tilde{f} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathcal{L}(^p\mathrm{E}; \mathrm{F})]$, *a aplicação*

$$f \in C^\infty(\Omega; \mathcal{L}(^p\mathrm{E}; \mathrm{F})) \mapsto \tilde{f} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathcal{L}(^p\mathrm{E}; \mathrm{F})]$$

*é* $\mathbb{K}$*-linear e injetora e, portanto, define o* $\mathbb{K}$*-homomorfismo injetivo de espaços vetoriais*

$$j^p_{\Omega,\mathrm{F}} : C^\infty(\Omega; \mathcal{L}(^p\mathrm{E}; \mathrm{F})) \to \mathcal{G}(\Omega; \mathcal{L}(^p\mathrm{E}; \mathrm{F})) \ ,$$

*com* $j^p_{\Omega,\mathrm{F}}(f) = \tilde{f} + \mathcal{N}[\Omega; \mathcal{L}(^p\mathrm{E}; \mathrm{F})]$ *e, em particular, podemos identificar* $C^\infty(\Omega; \mathrm{F})$ *com um subespaço de* $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{F})$ *e escrever*

$$C^\infty(\Omega; \mathrm{F}) \subset \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{F}) \ .$$

*Tendo em vista esse fato, e sempre que for conveniente, não faremos distinção entre a função* $f \in C^\infty(\Omega; \mathrm{F})$, *o elemento moderado* $\tilde{f} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{F}]$, *ou a aplicação generalizada* $j_{\Omega,\mathrm{F}}(f) \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{F})$.

### 1.1.1 Complementos do Cálculo

Recordaremos aqui a definição de derivadas parciais; tais objetos serão muito importantes para o entendimento das noções a serem introduzidas no capítulo 3. Sejam $\mathrm{E}_1$, $\mathrm{E}_2$ e F, $\mathbb{K}$-espaços de Banach, $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ o $\mathbb{K}$-espaço de Banach produto e $\Omega \subseteq \mathrm{E}$ um subconjunto aberto de E. Seja $f : \Omega \to \mathrm{F}$ uma aplicação contínua. Para cada ponto $a = (a_1, a_2) \in \Omega$ consideramos as aplicações injetoras $\lambda_i : \mathrm{E}_i \to \mathrm{E}$ $(i = 1, 2)$ definidas por

$$\lambda_1(x_1) = (x_1, a_2) \ \text{ e } \ \lambda_2(x_2) = (a_1, x_2) \ .$$

A aplicação composta $f \circ \lambda_i$, $(i = 1, 2)$ está definida no aberto $\lambda_i^{-1}(\Omega) \subset \mathrm{E}_i$ que contém $a_i \in \mathrm{E}_i$; essa aplicação, $f \circ \lambda_i$, é chamada $i$-ésima aplicação parcial no ponto $a$.

**1.1.8 Proposição (Cartan [7]).** *Com as notações precedentes, se* $f$ *é diferenciável no ponto* $a$, *então, para cada* $i = 1, 2$, *a aplicação parcial* $f \circ \lambda_i$ *é diferenciável no*

*ponto $a_i$. Representaremos com $D_i f(a)$ ou $D_i f(a_1, a_2)$ a derivada dessa aplicação parcial no ponto $a$. $D_i f(a)$ é um elemento do espaço $\mathcal{L}(\mathrm{E}_i; \mathrm{F})$ e é chamado derivada parcial de $f$ com respeito a $x_i$ no ponto $a$. Além disso, se $f'(a) \in \mathcal{L}(\mathrm{E}; \mathrm{F})$ denota a derivada de $f$ no ponto $a$, tem-se*

$$f'(a)(h, k) = D_1 f(a)h + D_2 f(a)k$$

*para $(h, k) \in \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$.*

De modo geral, vale a seguinte

**1.1.9 Proposição.** *Sejam $\mathrm{F}$, $\mathrm{E}_1$ e $\mathrm{E}_2$ $\mathbb{K}$-espaços de Banach e $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ o espaço produto. Sejam $\Omega \subseteq \mathrm{E}$ um subconjunto aberto de $\mathrm{E}$ e $f \in C^k(\Omega; \mathrm{F})$, então para cada $p = 1, \ldots, k$ tem-se, para cada $a \in \Omega$*

$$f^{(p)}(a) \cdot (h_1, \ldots, h_p) = \sum_{1 \leq j_1, \ldots j_p \leq 2} D_{j_1} \ldots D_{j_p} f(a) \Big( h_{1j_1}, h_{2j_2}, \ldots, h_{pj_p} \Big) \in \mathrm{F} \tag{1.3}$$

*para cada $h_i = (h_{i1}, h_{i2}) \in \mathrm{E}$, $i = 1, 2, \ldots, p$.*

*Demonstração.* Vamos apenas esboçar a demonstração para o caso $p = 2$, sendo que a prova completa deve ser feita por indução.

Sendo $f$ duas vezes diferenciável em $a$, segue-se que existe uma vizinhança aberta $V \subset \Omega$ de $a$ tal que $f'(x) \in \mathcal{L}(\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2; \mathrm{F})$ para cada $x \in V$. Além disso, vale, para cada $h = (h_1, h_2) \in \mathrm{E}$,

$$f'(x)(h_1, h_2) = \sum_{j=1}^{2} D_j f(x) h_j \quad \text{para cada } x \in V \ . \tag{1.4}$$

Aplicando (1.4) a $f''$ no ponto $a$, resulta, para cada $(k_1, k_2) \in \mathrm{E}$,

$$f''(a)(k_1, k_2) = \sum_{i=1}^{2} D_i f'(a) k_i \ . \tag{1.5}$$

Observe que $f''(a) \in \mathcal{L}(\mathrm{E}; \mathcal{L}(\mathrm{E}; \mathrm{F}))$; desse modo, teremos $f''(a)(k_1, k_2) \in \mathcal{L}(\mathrm{E}; \mathrm{F})$ e $D_i f'(a) \in \mathcal{L}(\mathrm{E}_i; \mathcal{L}(\mathrm{E}; \mathrm{F}))$. Assim, $D_i f'(a) k_i \in \mathcal{L}(\mathrm{E}; \mathrm{F})$. Seja $(h_1, h_2) \in \mathrm{E} =$

$\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$, então por (1.5), teremos

$$\big(f''(a)(k_1,k_2)\big)(h_1,h_2) = \sum_{i=1}^{2} \big(D_i f'(a)k_i\big)(h_1,h_2)\ . \tag{1.6}$$

Vamos reinterpretar o segundo membro de (1.6). Consideremos a função $x \in V \mapsto f'(x)(h_1,h_2) \in \mathrm{F}$, então derivando parcialmente em relação a $x_i$ e, levando em consideração (1.4) (veja também [7, Th.2.4.3]), segue-se que

$$\big(D_i f'(a)k_i\big)(h_1,h_2) = \sum_{j=1}^{2} \big\{D_i\big(D_j f\big)(a)k_i\big\}h_j\ . \tag{1.7}$$

De fato, temos a aplicação $x \in V \mapsto f'(x) \in \mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{F})$ e também a aplicação constante $h : x \in V \mapsto (h_1,h_2) \in \mathrm{E}$. A forma $B : \mathcal{L}(\mathrm{E};\mathrm{F}) \times \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $B(L,u) := L(u)$ é bilinear e contínua; portanto, a função $\psi : x \in V \mapsto B(f'(x),h(x)) \in \mathrm{F}$ coincide com a aplicação $x \in V \mapsto f'(x)(h_1,h_2) \in \mathrm{F}$, que se deriva parcialmente em relação a $x_i$ usando-se a forma $\psi$ e o Teorema [7, Th.2.4.3]. Como $D_i\psi(a) \in \mathcal{L}(\mathrm{E}_i;\mathrm{F})$, segue-se que, se $k_i \in \mathrm{E}_i$, teremos $D_i\psi(a)k_i \in \mathrm{F}$. Pela fórmula de Leibnitz, aplicada a $B$, e da definição de $\psi$, resulta, usando a [7, Prop.2.5.2],

$$D_i\psi(a)k_i = B\big(D_i f'(a)k_i, h(a)\big) = \big(D_i f'(a)k_i\big)(h_1,h_2)\ .$$

Isso mostra como se pode obter o primeiro membro de (1.7). O segundo membro de (1.7) é obtido de modo análogo usando-se as derivadas parciais em lugar da derivada. Define-se

$$D_i D_j f(a) := D_i\big(D_j f\big)(a) \in \mathcal{L}(\mathrm{E}_i;\mathcal{L}(\mathrm{E}_j;\mathrm{F}))\ .$$

Portanto, para cada $k_i \in \mathrm{E}_i$, tem-se $D_i\big(D_j f\big)(a)k_i \in \mathcal{L}(\mathrm{E}_j;\mathrm{F})$. Assim, para cada $h_j \in \mathrm{E}_j$ teremos $\Big(D_i\big(D_j f\big)(a)k_i\Big)h_j \in \mathrm{F}$. Podemos então escrever (1.6) do seguinte modo

$$\big(f''(a)(k_1,k_2)\big)(h_1,h_2) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \big(D_i D_j f(a)k_i\big)h_j\ .$$

Agora podemos induzir a fórmula geral pondo

$$\big(\cdots\big(\big(f^{(p)}(a)(h_{11},h_{12})\big)(h_{21},h_{22})\big)\cdots\big)(h_{p1},h_{p2}) =$$
$$= \sum_{1\le i_1\cdots i_p\le 2}\big(\cdots\big(\big(D_{i1}\cdots D_{i_p}f(a)h_{1i_1}\big)h_{2i_2}\big)\cdots\big)h_{pi_p}\,.$$

Considerando agora o isomorfismo

$$\mathcal{L}(\mathrm{E}_{i_1};\mathcal{L}(\mathrm{E}_{i_2};\ldots;\mathcal{L}(\mathrm{E}_{i_p};\mathrm{F}))\ldots)\cong\mathcal{L}(\prod_{\mu=1}^{p}\mathrm{E}_{i_\mu};\mathrm{F})\,,$$

e definindo $h_r := (h_{r1},h_{r2})\in \mathrm{E}_1\times\mathrm{E}_2=\mathrm{E}$ para $1\le r\le p$, podemos escrever

$$f^{(p)}(a)\cdot(h_1,\ldots,h_p)=\sum_{1\le j_1,\ldots j_p\le 2}D_{j_1}\ldots D_{j_p}f(a)\Big(h_{1j_1},h_{2j_2},\ldots,h_{pj_p}\Big)\in\mathrm{F}\,.$$

□

**1.1.10 Observação.** Sendo $f^{(p)}(a)\in\mathcal{L}(^p\mathrm{E};\mathrm{F})$ uma aplicação $p$-linear simétrica, é possível verificar que, se $(j_1,\ldots,j_p)\in\{1,2\}^p$ e $(i_1,\ldots,i_p)\in\{1,2\}^p$ for uma permutação de $(j_1,\ldots,j_p)$, então

$$D_{j_1}\ldots D_{j_p}f(a)\big(h_{1j_1},h_{2j_2},\ldots,h_{pj_p}\big)=D_{i_1}\ldots D_{i_p}f(a)\big(h_{1i_1},h_{2i_2},\ldots,h_{pi_p}\big)\,.$$

No caso particular em que $\mathrm{E}_1=\mathbb{R}^n$, usaremos a notação $D_t$ para a derivada parcial correspondente e $D_x$ para a derivada parcial em relação a $\mathrm{E}_2$. Assim, resulta que existe uma constante $c(n,p)>0$ tal que

$$\|f^{(p)}(a)\|\le c(n,p)\sum_{q=0}^{p}\|D_t^{p-q}D_x^q f(a)\| \tag{1.8}$$

com $D_t^{p-q}D_x^q f(a)\in\mathcal{L}(^{(p-q)}\mathbb{R}^n;\mathcal{L}(^q\mathrm{E}_2;\mathrm{F}))$.

Quando $E=\mathbb{K}^n$, podemos dar uma caracterização das aplicações generalizadas em termos de derivadas parciais (veja [30, prop. 1.2.19 ]).

**1.1.11 Proposição.** *Sejam $\Omega\neq\emptyset$ um subconjunto aberto de $\mathbb{K}^n$ e F um espaço de Banach. As seguintes afirmações são verdadeiras*

**(a)** $\hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{F}]$ *se e somente se para cada* $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$ *e cada* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *existem* $N \in \mathbb{N}$, $c > 0$ *e* $\eta \in \mathrm{I}$ *tais que*

$$\sup_{x \in \mathrm{K}} |\partial^\alpha \hat{u}(\varepsilon, x)| \leq c\varepsilon^{-N} \textit{para cada } 0 < \varepsilon < \eta \ .$$

**(b)** $\hat{u} \in \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{F}]$ *se e somente se para cada* $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$, *cada* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *e* $q \in \mathbb{N}$ *existem* $c > 0$ *e* $\eta \in \mathrm{I}$ *tais que*

$$\sup_{x \in \mathrm{K}} |\partial^\alpha \hat{u}(\varepsilon, x)| \leq c\varepsilon^{q} \ \textit{para cada } 0 < \varepsilon < \eta \ .$$

*Verifica-se também que* $\partial^\alpha(\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{F}]) \subset \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{F}]$ *e que* $\partial^\alpha(\mathcal{N}[\Omega; \mathrm{F}]) \subset \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{F}]$, *para cada* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *o que justifica definir a derivada parcial de ordem* $\alpha$ *de* $f \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{F})$ *por*

$$\partial^\alpha f := \partial^\alpha \hat{f} + \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{F}] \ ,$$

*com* $\hat{f}$ *sendo um representante qualquer de* $f$.

Sejam $\mathrm{E}, \mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$ e $\mathrm{G}$ $\mathbb{K}$-espaços de Banach e seja $B : \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \to \mathrm{G}$ uma aplicação bilinear contínua. Dadas as aplicações $A_1 \in \mathcal{L}(^p\mathrm{E}; \mathrm{F}_1)$ e $A_2 \in \mathcal{L}(^q\mathrm{E}; \mathrm{F}_2)$ com $p, q \in \mathbb{N}$, definimos a aplicação $A_1A_2 \in \mathcal{L}(^{p+q}\mathrm{E}; \mathrm{F}_2)$ por

$$A_1A_2 : (x_1, x_2) \in \mathrm{E}^p \times \mathrm{E}^q \mapsto B(A_1(x_1), A_2(x_2)) \in \mathrm{G} \ . \tag{1.9}$$

Para simplificar, usaremos a notação

$$B(A_1(x_1), A_2(x_2)) = A_1(x_1)A_2(x_2) \ .$$

Em particular, se $A_1 \in \mathcal{L}(^p\mathrm{E}; \mathrm{F}_1)$ e $v \in \mathrm{F}_2 = \mathcal{L}(^0\mathrm{E}; \mathrm{F}_2)$, então a aplicação $A_1v \in \mathcal{L}(^p\mathrm{E}; \mathrm{G})$ é definida por

$$A_1v : x \in \mathrm{E}^p \mapsto B(A_1(x), v) \in \mathrm{G} \ \text{ e } \ (A_1(x))v := B(A_1(x), v) \ .$$

De modo análogo, se $A_2 \in \mathcal{L}(^q\mathrm{E}; \mathrm{F}_2)$ e $u \in \mathrm{F}_1$, então a aplicação $uA_2 \in \mathcal{L}(^q\mathrm{E}; \mathrm{G})$ é definida por

$$uA_2 : x \in E^q \mapsto B(u, A_2(x)) \in G \ \text{ e } \ u(A_2(x)) := B(u, A_2(x)) \ .$$

Usando as notações acima, podemos enunciar a fórmula para a derivada do produto $B$ (ver [30, prop. 1.1.3]).

**1.1.12 Proposição.** *Sejam* E, $\mathrm{F}_1$, $\mathrm{F}_2$ *e* G $\mathbb{K}$*-espaços de Banach,* $B : (y_1, y_2) \in \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \mapsto B(y_1, y_2) \in \mathrm{G}$ *uma aplicação bilinear contínua,* $\Omega \neq \emptyset$ *um subconjunto aberto de* E, $f \in C^k(\Omega; \mathrm{F}_1)$, $g \in C^k(\Omega; \mathrm{F}_2)$ *e a aplicação* $(f, g) : x \in \Omega \mapsto (f(x), g(x)) \in F_1 \times \mathrm{F}_2$. *Então a aplicação*

$$fg := B \circ (f, g) : x \in \Omega \mapsto B(f(x), g(x)) = f(x)g(x) \in \mathrm{G}$$

*é de classe* $C^k$ *e, para cada* $p = 1, 2, \ldots, k$, *temos, para cada* $x \in \Omega$,

$$(fg)^{(p)}(x) = \sum_{q=0}^{p} \binom{p}{q} f^{(q)}(x) g^{(p-q)}(x) \ , \tag{1.10}$$

*onde o produto em cada parcela é no sentido de* (1.9).

Usando a proposição 1.1.12, podemos dar a $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{F})$ uma estrutura de $C^\infty(\Omega; \mathbb{K})$-módulo. De fato, dadas $\alpha \in C^\infty(\Omega; \mathbb{K})$ e $f \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{F})$, consideremos $\hat{f} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{F}]$ um representante qualquer de $f$ e definimos a aplicação $\widehat{\alpha f} : \mathrm{I} \times \Omega \to \mathrm{F}$ por

$$(\widehat{\alpha f})(\varepsilon, x) := \alpha(x).\hat{f}(\varepsilon, x) \quad (\varepsilon, x) \in \mathrm{I} \times \Omega \ .$$

É claro que, se $B$ for a aplicação bilinear contínua

$$\begin{aligned} B : \mathbb{K} \times \mathrm{F} &\to \mathrm{F} \\ (\lambda, y) &\mapsto B(\lambda, y) = \lambda y \ , \end{aligned}$$

então

$$(\widehat{\alpha f})(\varepsilon, x) = B(\alpha(x), \hat{f}(\varepsilon, x)) \ ,$$

e a proposição 1.1.12 nos diz que $\widehat{\alpha f} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{F}]$ e que $\widehat{\alpha f} \in \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{F}]$ se $\hat{f} \in \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{F}]$. Além disso, usando-se a bilinearidade de $B$, resulta que, se $\tilde{\alpha} - \hat{\alpha} \in \mathcal{N}[\Omega; \mathbb{K}]$ e $\hat{f} - \hat{f}_1 \in \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{F}]$, então

$$B \circ (\tilde{\alpha}, \hat{f}) - B \circ (\hat{\alpha}, \hat{f}_1) \in \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{F}] \ .$$

Portanto, podemos definir o produto de $\alpha \in C^\infty(\Omega; \mathbb{K})$ por $f \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{F})$ por

$$\alpha f := \widehat{\alpha f} + \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{F}] \ .$$

Verifica-se que, com o produto definido desse modo, o espaço $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{F})$ pode ser dotado de uma estrutura de $C^\infty(\Omega; \mathbb{K})$-módulo.

**1.1.13 Proposição.** *Sejam* E, F *e* G $\mathbb{K}$*-espaços de Banach,* $\Omega \neq \emptyset$ *um subconjunto aberto de* G, $A \in \mathcal{G}(\Omega; \mathcal{L}(\mathrm{E}; \mathrm{F}))$ *e* $u \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{E})$. *Sejam* $\hat{A} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})]$ *representante de* $A$ *e* $\hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{E}]$ *representante de* $u$, *então a aplicação* $\hat{A} \cdot \hat{u} : \mathrm{I} \times \Omega \to \mathrm{F}$ *definida por*

$$(\hat{A} \cdot \hat{u})(\varepsilon, x) = \hat{A}(\varepsilon, x)(\hat{u}(\varepsilon, x)) \quad (\varepsilon, x) \in \mathrm{I} \times \Omega$$

*é um elemento de* $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{F}]$, *sua classe em* $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{F})$ *será denotada por* $A \cdot u$ *e não depende da escolha dos representantes de* $A$ *ou de* $u$.

*Demonstração.* De fato, consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} B : \mathcal{L}(E, F) \times E &\to F \\ (A, u) &\mapsto B(A, u) = A(u) \, . \end{aligned}$$

É claro que $B$ é uma aplicação bilinear e contínua. Pela proposição 1.1.12 resulta imediatamente que

$$\hat{A} \cdot \hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{F}] \, .$$

Além disso, se $\hat{A} \in \mathcal{N}[\Omega; \mathcal{L}(\mathrm{E}; \mathrm{F})]$ ou se $\hat{u} \in \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{F}]$, então

$$\hat{A} \cdot \hat{u} \in \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{F}] \, .$$

Supondo agora que $\hat{A} - \hat{A}_1 \in \mathcal{N}[\Omega; \mathcal{L}(\mathrm{E}; \mathrm{F})]$ e $\hat{u} - \hat{u}_1 \in \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{E}]$, então, usando a bilinearidade de $B$, resulta

$$\hat{A} \cdot \hat{u} - \hat{A}_1 \hat{u}_1 \in \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{F}] \, .$$

De fato,

$$B(\hat{A}, \hat{u}) - B(\hat{A}_1, \hat{u}_1) = B(\hat{A}, \hat{u} - \hat{u}_1) + B(\hat{A} - \hat{A}_1, \hat{u}_1) \, .$$

Essas considerações nos permitem concluir a validade da proposição. □

Encontra-se em [30, prop. 3.1.6] a seguinte formulação um pouco mais geral.

**1.1.14 Proposição.** *Sejam* E, $\mathrm{F}_1$, ..., $\mathrm{F}_m$ *e* G $\mathbb{K}$*-espaços de Banach e* $\Omega \neq \emptyset$ *um subconjunto aberto de* E. *Se* $\mathbb{F}_m := \mathrm{F}_1 \times \ldots \times \mathrm{F}_m$, $B \in \mathcal{L}(\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_m; \mathrm{G})$, *espaço das aplicações multilineares contínuas definidas em* $\mathrm{F}_1 \times \ldots \times \mathrm{F}_m$ *a valores em* G, *e* $u \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathbb{F}_m]$, *então* $B \circ u \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{G}]$ *e* $B \circ u - B \circ v \in \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{G}]$, *para cada* $v \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathbb{F}_m]$ *tal que* $u - v \in \mathcal{N}[\Omega; \mathbb{F}_m]$. *Em vista disso, se* $f \in \mathcal{G}[\Omega; \mathbb{F}_m]$ *e* $B \in \mathcal{L}(\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_m; \mathrm{G})$, *definimos a aplicação composta*

$$B \circ f := B \circ \hat{f} + \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{G}]$$

*onde* $B \circ \hat{f} : (\varepsilon, x) \in \mathrm{I} \times \Omega \mapsto B(\hat{f}(\varepsilon, x)) \in \mathrm{G}$ *e* $\hat{f}$ *é um representante qualquer de* $f$.

Para podermos tratar de composições entre funções generalizadas, repetiremos aqui alguns resultados e notações apresentados em [30], no que se refere à fórmula clássica para a derivada da composta. No que se segue E, F e G denotarão $\mathbb{K}$-espaços de Banach. Fixado $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$, se $p := |\alpha|$,

$$\alpha(1) := 0 \ , \ \alpha(2) := \alpha_1 \ \text{ e } \ \alpha(j) := \alpha_1 + \ldots + \alpha_{j-1} \ , \ \text{ para } \ j \geq 3$$

todo elemento $x = (x_1, \ldots, x_p)$ de $\mathrm{E}^p = \mathrm{E}^{\alpha_1} \times \ldots \times \mathrm{E}^{\alpha_m}$ pode ser escrito na forma

$$x = (x\alpha_1, x\alpha_2, \ldots, x\alpha_m) \in \mathrm{E}^{\alpha_1} \times \mathrm{E}^{\alpha_2} \ldots \times \mathrm{E}^{\alpha_m}$$

onde $x\alpha_j := (x_{\alpha(j)+1}, \ldots, x_{\alpha(j+1)})$, para cada $1 \leq j \leq m$. Dadas

$$B \in \mathcal{L}(^m\mathrm{F}; \mathrm{G}) \ \text{ e } \ A_j \in \mathcal{L}(^{\alpha_j}\mathrm{E}; \mathrm{F}) \ , \ 1 \leq j \leq m$$

e considerando a aplicação $p$-linear contínua

$$BA_1 \ldots A_m : (x_1, \ldots, x_p) \in \mathrm{E}^p \mapsto B(A_1(x\alpha_1), \ldots, A_m(x\alpha_m)) \in \mathrm{G} \ ,$$

define-se uma aplicação $(m+1)$-linear contínua

$$T : (B, A_1, \ldots, A_m) \mapsto BA_1 \ldots A_m$$

de $\mathcal{L}(^m\mathrm{F}; \mathrm{G}) \times \mathcal{L}(^{\alpha_1}\mathrm{E}; \mathrm{F}) \times \ldots \times \mathcal{L}(^{\alpha_m}\mathrm{E}; \mathrm{F})$ em $\mathcal{L}(^p\mathrm{E}; \mathrm{G})$. Se $p \in \mathbb{N}$, então $\mathcal{O}_p$ indica o grupo das $p!$ permutações de $\{1, \ldots, p\}$. Dados $n \in \mathbb{N}$ e $\sigma \in \mathcal{O}_n$, consideremos o isomorfismo linear

$$\mathcal{I}_\sigma^n : (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{E}^n \mapsto (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \in \mathrm{E}^n \ .$$

Dada $\sigma \in \mathcal{O}_p$, seja $BA_1 \dots A_m \mathcal{I}_\sigma^p \in \mathcal{L}(^p\mathrm{E}; \mathrm{G})$ definida por

$$BA_1 \dots A_m \mathcal{I}_\sigma^p := (BA_1 \dots A_m) \circ \mathcal{I}_\sigma^p , \tag{1.11}$$

isto é,

$$(x_1, \dots, x_p) \in \mathrm{E}^p \mapsto B(A_1(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(\alpha_1)}), \dots, A_m(x_{\sigma(\alpha(m)+1)}, \dots, x_{\sigma(p)})) \in \mathrm{G} \ .$$

Usando as notações acima, podemos enunciar

**1.1.15 Proposição (Regra da cadeia).** *Sejam* E, F *e* G *espaços de Banach,* $\Omega \neq \emptyset$ *um aberto de* E *e* $U \neq \emptyset$ *um aberto de* F. *Se* $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(\Omega; \mathrm{F})$ *com* $f(\Omega) \subset U$ *e* $g \in C^k(U; \mathrm{G})$, *então* $g \circ f \in C^k(\Omega; \mathrm{G})$ *e, para cada* $x \in \Omega$ *e cada* $p = 1, \dots, k$, *temos*

$$(g \circ f)^{(p)}(x) = \sum_{\substack{1 \leq m \leq p \\ \alpha \in [p;m]}} \frac{1}{\alpha! m!} \sum_{\sigma \in \mathcal{O}_p} g^{(m)}(f(x)) f^{(\alpha_1)}(x) \cdots f^{(\alpha_m)}(x) \mathcal{I}_\sigma^p \tag{1.12}$$

*onde o produto em cada parcela é como definido em* (1.11) *e*

$$[p\,; m] := \{ \ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m \ ) \in \mathbb{N}^m \ / \ |\alpha| = p \ \} .$$

**1.1.16 Observação.** Se $\Omega \neq \emptyset$ for um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, pode-se mostrar, usando-se o teorema de representação local para distribuições a valores vetoriais (ver [29]), e, procedendo-se do mesmo modo que em [17], que existe uma inclusão, *não canônica*,

$$\mathcal{D}'(\Omega; \mathrm{E}) \subset \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{E}) .$$

**1.1.17 Definição.** Seja F um $\mathbb{K}$-espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathrm{F})$ o conjunto de todas as funções $\mu : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{F}$ verificando a condição seguinte: existem $N \in \mathbb{N}$, $c > 0$ e $\eta \in \mathrm{I}$ tais que, para cada $0 < \varepsilon < \eta$,

$$|\mu(\varepsilon)| \leq c\varepsilon^{-N} .$$

Denotaremos por $\mathcal{N}(\mathrm{F})$ o conjunto das funções $\mu : \mathrm{I} \to \mathrm{F}$ tais que para cada $q \in \mathbb{N}$, existem $c > 0$ e $\eta \in \mathrm{I}$ tais que

$$|\mu(\varepsilon)| \leq c\varepsilon^q$$

para todo $\varepsilon \in ]0, \eta[$.

Munidos das operações pontuais, verifica-se que $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathrm{F})$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial e que $\mathcal{N}(\mathrm{F})$ é um $\mathbb{K}$-subespaço vetorial de $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathrm{F})$. Os elementos de $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathrm{F})$ são chamados *elementos moderados* e os de $\mathcal{N}(\mathrm{F})$, *elementos nulos.*

**1.1.18 Definição.** Seja F um $\mathbb{K}$-espaço de Banach. Denotaremos por $\overline{\mathrm{F}}$ o $\mathbb{K}$-espaço vetorial quociente de $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathrm{F})$ por $\mathcal{N}(\mathrm{F})$, isto é,

$$\overline{\mathrm{F}} := \frac{\mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathrm{F})}{\mathcal{N}(\mathrm{F})}.$$

Um elemento de $\overline{\mathrm{F}}$ é chamado *vetor generalizado.* Verifica-se a existência das seguintes inclusões naturais

$$\mathrm{F} \subset \overline{\mathrm{F}} \subset \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{F}).$$

**1.1.19 Observação.** Em [30], mostra-se que, se F for uma álgebra de Banach, então naturalmente $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{F})$ tem uma estrutura de $\mathbb{K}$-álgebra.

**1.1.20 Definição (Valor pontual de uma aplicação generalizada).** Sejam E e F $\mathbb{K}$-espaços de Banach e $\Omega \neq \emptyset$ um subconjunto aberto de E. Dados $f \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{F})$ e $x \in \Omega$, denotaremos por $f(x)$ a classe em $\overline{\mathrm{F}}$ da função $\mu : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{F}$ definida por $\mu(\varepsilon) := \hat{f}(\varepsilon, x)$ , sendo $\hat{f}$ um representante qualquer de $f$.

### 1.1.2 Composição de aplicações generalizadas com elementos de $\mathcal{G}_\tau$

Existem várias formas de se considerar operações não lineares com funções generalizadas. No que se refere a aplicações generalizadas em espaços de Banach, veremos

que tais operações são muito bem comportadas quando compomos funções generalizadas com aplicações generalizadas que são temperadas (ou do tipo temperadas). No capítulo 3 deste trabalho, iremos estudar um problema não linear, onde, antes de qualquer outra coisa, deveremos introduzir aplicações não lineares de aplicações generalizadas. As idéias para tratar a composição nesse capítulo, estão contidas, de modo simplificado, na forma como compomos elementos de $\mathcal{G}$ com aplicações de $\mathcal{G}_\tau$; por isso vamos apresentar aqui essa composição mais simples.

**1.1.21 Definição.** Sejam E e F $\mathbb{K}$-espaços de Banach e $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathrm{E}$ um aberto. Denotaremos com $\mathcal{O}_{\mathrm{M}}(\Omega;\mathrm{F})$ o conjunto das funções $f \in C^\infty(\Omega;\mathrm{F})$ tais que para cada $p \in \mathbb{N}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{x\in\Omega}(1+\|x\|)^{-N}\|f^{(p)}(x)\|_p < +\infty\,.$$

Munido das operações pontuais, segue-se que $\mathcal{O}_{\mathrm{M}}(\Omega;\mathrm{F})$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Denotaremos com $\mathcal{E}_\tau[\Omega;\mathrm{F}]$ o $\mathbb{K}$-espaço vetorial, para operações pontuais, das funções $\hat{f}:\mathrm{I}\times\Omega\to\mathrm{F}$ tais que $\hat{f}(\varepsilon,\cdot)\in\mathcal{O}_{\mathrm{M}}(\Omega;\mathrm{F})$ para cada $\varepsilon\in\mathrm{I}$.

Denotaremos por $\mathcal{E}_{\mathrm{M},\tau}[\Omega;\mathrm{F}]$ o conjunto das funções $\hat{f}\in\mathcal{E}_\tau[\Omega;\mathrm{F}]$ tais que

**(T)** para cada $p\in\mathbb{N}$, existem $N\in\mathbb{N}$, $c>0$ e $\eta\in\mathrm{I}$ tais que

$$\sup_{x\in\Omega}(1+\|x\|)^{-N}\|\hat{f}^{(p)}(\varepsilon,x)\|_p \le c\varepsilon^{-N}, \quad \text{para cada} \quad 0<\varepsilon<\eta\,.$$

É claro que $\mathcal{E}_{\mathrm{M},\tau}[\Omega;\mathrm{F}]$ é um $\mathbb{K}$-subespaço vetorial de $\mathcal{E}_\tau[\Omega;\mathrm{F}]$. Denotaremos com $\mathcal{N}_\tau[\Omega;\mathrm{F}]$ o conjunto das funções $\hat{f}\in\mathcal{E}_{\mathrm{M},\tau}[\Omega;\mathrm{F}]$ tais que

**(NT)** para cada $p\in\mathbb{N}$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que para cada $q>0$ existem $c>0$ e $\eta\in\mathrm{I}$ tais que

$$\sup_{x\in\Omega}(1+\|x\|)^{-N}\|\hat{f}^{(p)}(\varepsilon,x)\|_p \le c\varepsilon^{q}\,, \quad \text{para cada} \quad 0<\varepsilon<\eta\,.$$

Tem-se que $\mathcal{N}_\tau[\Omega;\mathrm{F}]$ é um $\mathbb{K}$-subespaço vetorial de $\mathcal{E}_{\mathrm{M},\tau}[\Omega;\mathrm{F}]$. O *espaço vetorial das aplicações generalizadas temperadas em* $\Omega$ *a valores em* F é definido como o

$\mathbb{K}$-espaço vetorial quociente

$$\mathcal{G}_\tau(\Omega;\mathrm{F}) := \frac{\mathcal{E}_{\mathrm{M},\tau}[\Omega;\mathrm{F}]}{\mathcal{N}_\tau[\Omega;\mathrm{F}]}\,.$$

**1.1.22 Exemplo.** Resulta do teorema de representação local de distribuições temperadas, que existe uma inclusão, não canônica,

$$\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n;\mathrm{F}) \subset \mathcal{G}_\tau(\mathbb{R}^n;\mathrm{F})\,.$$

**1.1.23 Observação.** É possível mostrar que, em geral, não existe uma aplicação linear injetora de $\mathcal{G}_\tau(\Omega;\mathrm{F})$ em $\mathcal{G}(\Omega;\mathrm{F})$.

**1.1.24 Proposição.** *Sejam* $\mathrm{E},\mathrm{F}$ *e* $\mathrm{G}$ $\mathbb{K}$*-espaços de Banach,* $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathrm{E}$ *um aberto,* $u \in \mathcal{G}(\Omega;\mathrm{F})$ *e* $f \in \mathcal{G}_\tau(\mathrm{F};\mathrm{G})$. *Se* $\hat{u}$ *for um representante de* $u$*, e* $\hat{f}$ *for um representante de* $f$*, então a aplicação*

$$\hat{g} : \mathrm{I}\times\Omega \to \mathrm{G}$$

*definida por*

$$\hat{g}(\varepsilon,x) := \hat{f}(\varepsilon,\hat{u}(\varepsilon,x))$$

*é um elemento de* $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega;\mathrm{G}]$*, sua classe em* $\mathcal{G}(\Omega;\mathrm{G})$ *será denotada por* $f\circ u$*, e não depende da escolha dos representantes de* $f$ *e* $u$.

*Demonstração.* Em primeiro lugar, verifiquemos que $\hat{g} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega;\mathrm{G}]$. Sejam $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$ e $p \in \mathbb{N}$. Se $p = 0$ então existem $N_1 \in \mathbb{N}$, $c_1 > 0$ e $\eta_1 \in \mathrm{I}$ tais que para cada $0 < \varepsilon < \eta_1$ e $x \in \Omega$,

$$\|\hat{f}(\varepsilon,\hat{u}(\varepsilon,x))\| \leq c_1\varepsilon^{-N_1}\big(1+\|\hat{u}(\varepsilon,x)\|\big)^{N_1}\,.$$

Para o compacto K fixado, existem $N_2 \in \mathbb{N}$, $c_2 > 0$ e $\eta_2 \in \mathrm{I}$ tais que para cada $0 < \varepsilon < \eta_2$

$$\sup_{x\in\mathrm{K}}\|\hat{u}(\varepsilon,x)\| \leq c_2\varepsilon^{-N_2}\,.$$

Portanto, existem $N \in \mathbb{N}$, $c > 0$ e $\eta \in \mathrm{I}$ tais que para cada $0 < \varepsilon < \eta$

$$\sup_{x \in \mathrm{K}} \|\hat{f}(\varepsilon, \hat{u}(\varepsilon, x))\| \leq c\varepsilon^{-N} .$$

A regra da cadeia nos dá, para $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\hat{g}^{(p)}(\varepsilon, x) = \sum_{\substack{1 \leq m \leq p \\ \alpha \in [p;m]}} \frac{1}{\alpha! m!} \sum_{\sigma \in \mathcal{O}_p} \hat{f}^{(m)}(\varepsilon, \hat{u}(\varepsilon, x)) \hat{u}^{(\alpha_1)}(\varepsilon, x) \ldots \hat{u}^{(\alpha_m)}(\varepsilon, x) \mathcal{I}_\sigma^p$$

para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$ e $x \in \Omega$. Podemos escrever

$$\|\hat{g}^{(p)}(\varepsilon, x)\|_p \leq \sum_{m=1}^{p} \|\hat{f}^{(m)}(\varepsilon, \hat{u}(\varepsilon, x))\|_m \sum_{\alpha \in [p;m]} \frac{p!}{\alpha! m!} \prod_{j=1}^{m} \|\hat{u}^{(\alpha_j)}(\varepsilon, x)\|_{\alpha_j} . \tag{1.13}$$

Sendo $\hat{f} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M},\tau}[\mathrm{F}; \mathrm{G}]$, segue-se que, para cada $m$, existem $N_1 \in \mathbb{N}$, $c_1 > 0$ e $\eta_1 \in \mathrm{I}$ tais que

$$\|\hat{f}^{(m)}(\varepsilon, \hat{u}(\varepsilon, x))\|_m \leq c_1 \, \varepsilon^{-N_1} \left(1 + \|\hat{u}(\varepsilon, x)\|\right)^{N_1} , \tag{1.14}$$

para cada $x \in \Omega$ e $0 < \varepsilon < \eta_1$. Como $\hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{F}]$, segue-se que existem $N_2 \in \mathbb{N}$, $c_2 > 0$ e $\eta_2 \in \mathrm{I}$ tais que, para cada $1 \leq m \leq p$

$$\sup_{x \in \mathrm{K}} \sum_{\alpha \in [p;m]} \frac{p!}{\alpha! m!} \prod_{j=1}^{m} \|\hat{u}^{(\alpha_j)}(\varepsilon, x)\|_{\alpha_j} \leq c_2 \, \varepsilon^{-N_2}$$

para cada $0 < \varepsilon < \eta_2$ e ainda

$$\sup_{x \in K} \left(1 + \|\hat{u}(\varepsilon, x)\|\right)^{N_1} \leq c_2 \, \varepsilon^{-N_2} .$$

Voltando a (1.13), segue-se que existem $N \in \mathbb{N}$, $c > 0$ e $\eta \in \mathrm{I}$ tais que

$$\sup_{x \in K} \|\hat{g}^{(p)}(\varepsilon, x)\|_p \leq c \, \varepsilon^{-N}$$

para cada $0 < \varepsilon < \eta$.

Vamos agora verificar que a classe de $\hat{g}$ não depende dos representantes escolhidos para $f$ ou $u$. Sejam $\hat{v} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{F}]$ outro representante de $u$ e $\hat{f}_1 \in \mathcal{E}_{\mathrm{M},\tau}[\mathrm{F}; \mathrm{G}]$ um outro representante para $f$. Temos então, para cada $(\varepsilon, x) \in \mathrm{I} \times \Omega$,

$$\hat{f}(\varepsilon, \hat{u}(\varepsilon, x)) - \hat{f}_1(\varepsilon, \hat{v}(\varepsilon, x)) = (\hat{f} - \hat{f}_1)(\varepsilon, \hat{u}(\varepsilon, x)) + \hat{f}_1(\varepsilon, \hat{u}(\varepsilon, x)) - \hat{f}_1(\varepsilon, \hat{v}(\varepsilon, x)) . \tag{1.15}$$

Observamos, em primeiro lugar, que as contas feitas acima nos permitem concluir, a partir de (1.13), que, como $\hat{f} - \hat{f}_1 \in \mathcal{N}_\tau[\mathrm{F};\mathrm{G}]$, então a primeira parcela do lado direito de (1.15), $(\hat{f} - \hat{f}_1)(\varepsilon, \hat{u}(\varepsilon, x))$ é um elemento de $\mathcal{N}[\Omega;\mathrm{G}]$. Para a segunda parcela, $\hat{f}_1(\varepsilon, \hat{u}(\varepsilon, x)) - \hat{f}_1(\varepsilon, \hat{v}(\varepsilon, x))$, vamos supor que seja válida a seguinte afirmação:

**1.1.25 Afirmação.** *Para cada* $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$ *e cada* $m, q \in \mathbb{N}$, *existem* $c > 0$ *e* $\eta > 0$ *tais que*

$$\sup_{x\in K} \|\hat{f}_1^{(m)}(\varepsilon, \hat{u}(\varepsilon, x)) - \hat{f}_1^{(m)}(\varepsilon, \hat{v}(\varepsilon, x))\|_m \leq c\, \varepsilon^q .$$

Para concluirmos a prova da proposição, a partir dessa afirmação, devemos usar o mesmo tipo de argumento que aparece em [31, Prop. 3.1.]. Usando aqui as mesmas notações que são utilizadas em [31, Prop. 3.1.], escrevemos, para cada $(\varepsilon, x) \in \mathrm{I} \times \Omega$,

$$\big(f_1 \circ u - f_1 \circ v\big)^{(p)}(\varepsilon, x) = w_1(\varepsilon, x) + w_2(\varepsilon, x) .$$

Nessa expressão, $w_1$ e $w_2$ são dadas por

$$w_1(\varepsilon, x) = \sum_{\substack{1\leq m\leq p\\ \alpha\in[p;m]}} C_\alpha^m \sum_{\sigma\in\mathcal{O}_p} \big(\hat{f}_1^{(m)}(\varepsilon, \hat{u}(\varepsilon, x)) - \hat{f}_1^{(m)}(\varepsilon, \hat{v}(\varepsilon, x))\big)\hat{u}^{(\alpha_1)}(\varepsilon, x)\ldots\hat{u}^{(\alpha_m)}(\varepsilon, x)\mathcal{I}_\sigma^p,$$

e

$$w_2(\varepsilon, x) = \sum_{\substack{1\leq m\leq p\\ \alpha\in[p;m]}} C_\alpha^m \sum_{\sigma\in\mathcal{O}_p} \sum_{i=1}^{m} \big(f_1^{(m)} \circ v\big)(\varepsilon, x) \prod_{j=1}^{i-1} u^{(\alpha_j)}(\varepsilon, x) R^{(\alpha_i)}(\varepsilon, x) \prod_{j=i+1}^{m} v^{(\alpha_j)}(\varepsilon, x)\mathcal{I}_\sigma^p,$$

para cada $(\varepsilon, x) \in \mathrm{I} \times \Omega$ onde $R := u - v$ e $C_\alpha^m = \dfrac{1}{\alpha! m!}$ . A afirmação feita garante que $w_1 \in \mathcal{N}[\Omega; \mathcal{L}(^p\mathrm{E};\mathrm{G})]$ e, sendo $R \in \mathcal{N}[\Omega;\mathrm{F}]$, segue-se que $w_2 \in \mathcal{N}[\Omega; \mathcal{L}(^p\mathrm{E};\mathrm{G})]$. Portanto, a segunda parcela de (1.15) também é nula, isto é, usando uma notação mais conveniente, $\big(f_1 \circ u - f_1 \circ v\big) \in \mathcal{N}[\Omega;\mathrm{G}]$. □

Vamos agora verificar a afirmação feita.

*Prova da Afirmação 1.1.25.* Fixemos $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$ e $m, q \in \mathbb{N}$. Seja $\hat{R} := \hat{v} - \hat{u} \in \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{F}]$, para cada $(\varepsilon, x) \in \mathrm{I} \times \Omega$ consideremos o segmento $\theta(t, \varepsilon, x)$ definido por

$$\theta(t, \varepsilon, x) := \hat{u}(\varepsilon, x) + t\hat{R}(\varepsilon, x) \;\; 0 \leq t \leq 1 .$$

Pelo teorema do valor médio, resulta que para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$ e $x \in \Omega$,

$$\|\hat{f}_1^{(m)}(\varepsilon, \hat{u}(\varepsilon, x)) - \hat{f}_1^{(m)}(\varepsilon, \hat{v}(\varepsilon, x))\|_m \leq \|\hat{R}(\varepsilon, x)\| \sup_{t \in [0,1]} \|\hat{f}_1^{(m+1)}(\varepsilon, \theta(t, \varepsilon, x))\|_{(m+1)} .$$

Por hipótese, temos que existem $N_1 \in \mathbb{N}$, $c_1 > 0$ e $\eta_1 \in \mathrm{I}$ tais que

$$\|\hat{f}_1^{(m+1)}(\varepsilon, z))\|_{(m+1)} \leq c_1 \, \varepsilon^{-N_1} \, (1 + \|z\|)^{N_1}$$

para cada $0 < \varepsilon < \eta_1$ e $z \in \mathrm{F}$. Resulta então que existem $N_1 \in \mathbb{N}$, $c_1 > 0$ e $\eta_1 \in \mathrm{I}$ tais que

$$\sup_{t \in [0,1]} \|\hat{f}_1^{(m+1)}(\varepsilon, \theta(t, \varepsilon, x))\| \leq c_1 \, \varepsilon^{-N_1} (1 + \|\hat{u}(\varepsilon, x)\| + \|\hat{R}(\varepsilon, x)\|)^{N_1}$$

para $0 < \varepsilon < \eta_1$ e $x \in \Omega$. Por outro lado, existem $c_2 > 0$, $\eta_2 \in \mathrm{I}$ e $N_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\Big(1 + \|\hat{u}(\varepsilon, x)\| + \|\hat{R}(\varepsilon, x)\|\Big)^{N_1} \leq c_2 \, \varepsilon^{-N_2}$$

para cada $0 < \varepsilon < \eta_2$ e $x \in \mathrm{K}$. De modo semelhante, existem $c_3 > 0$ e $\eta_3 \in \mathrm{I}$ tais que para cada $0 < \varepsilon < \eta_3$

$$\sup_{x \in \mathrm{K}} \|\hat{R}(\varepsilon, x)\| \leq c_3 \, \varepsilon^{q + N_1 + N_2} .$$

Portanto,

$$\sup_{x \in \mathrm{K}} \|\hat{f}_1^{(m)}(\varepsilon, \hat{u}(\varepsilon, x)) - \hat{f}_1^{(m)}(\varepsilon, \hat{v}(\varepsilon, x))\|_m \leq c \, \varepsilon^q .$$

□

**1.1.26 Observação.** Sejam E e F $\mathbb{K}$-espaços de Banach e $\Omega \neq \emptyset$ um subconjunto aberto de E. Seja $u \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{F})$, suponha que exista um representante $\hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{F}]$ para $u$ possuindo a propriedade: existem constantes $R > 0$, $\eta \in \mathrm{I}$, e uma função limitada $\theta : \mathrm{I} \to [0, +\infty[$ tais que

1. $\sup_{\varepsilon\in \mathrm{I}} \theta(\varepsilon) < R$ ;

2. $\sup_{x\in\Omega} \|\hat{u}(\varepsilon, x)\| \leq \theta(\varepsilon)$, para cada $0 < \varepsilon < \eta$ .

Então, todo representante $\hat{v} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{F}]$ de $u$ tem a propriedade de que existe $\eta \in \mathrm{I}$ tal que

$$\{\hat{v}(\varepsilon, x) \ ; \ 0 < \varepsilon < \eta \text{ e } x \in \Omega\} \subset B_R(0) .$$

Nestas condições, se $f \in \mathcal{G}_\tau(B_R(0); \mathrm{G})$ e se $\hat{g} : \mathrm{I} \times \Omega \longrightarrow \mathrm{G}$ for definida por

$$\hat{g}(\varepsilon, x) := \begin{cases} 0 & \text{se} \quad \varepsilon \in [\eta, 1] \\ \hat{f}(\varepsilon, \hat{u}(\varepsilon, x)) & \text{se} \quad 0 < \varepsilon < \eta \end{cases}$$

obtemos a mesma conclusão da proposição (1.1.24).

**1.1.27 Exemplo.** Fixemos $p > 0$. Então a aplicação

$$f : x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \|x\|^p \in \mathbb{R}$$

é um elemento de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$. Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ é um aberto e $u \in \mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, então $f(u) = f \circ u \in \mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R})$ será denotada por $\|u\|^p$.

Recordemos as seguintes definições encontradas em [30, p.12-13].

**1.1.28 Definição.** Sejam E e F espaços de Banach e $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathrm{E}$ um subconjunto aberto.

(a) Denotaremos por $\mathcal{E}_{\mathrm{M},lb}[\Omega; \mathrm{F}]$ ao subespaço vetorial de $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{F}]$ dos elementos $\hat{u}$ que verificam a condição: para cada subconjunto compacto $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$, existem $c > 0$ e $\eta \in \mathrm{I}$ tais que para cada $0 < \varepsilon < \eta$

$$\sup_{x\in \mathrm{K}} |\hat{u}(\varepsilon, x)| \leq c . \tag{1.16}$$

(b) Denotaremos por $\mathcal{G}_{lb}(\Omega;\mathrm{F})$ ao subespaço vetorial de $\mathcal{G}(\Omega;\mathrm{F})$ dos elementos $u$ que possuem um representante $\hat{u}$ em $\mathcal{E}_{\mathrm{M},lb}[\Omega;\mathrm{F}]$. Verifica-se facilmente que, nesse caso, todo representante $\hat{u}$ de $u \in \mathcal{G}_{lb}(\Omega;\mathrm{F})$ é um elemento de $\mathcal{E}_{\mathrm{M},lb}[\Omega;\mathrm{F}]$. Os elementos de $\mathcal{G}_{lb}(\Omega;\mathrm{F})$ são chamados *funções generalizadas localmente limitadas.*

De forma análoga, diremos que um elemento $u \in \overline{\mathrm{F}}$ é *limitado* se existir um representante $\hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathrm{F})$ satisfazendo a condição: existem constantes $c > 0$ e $\eta \in \mathrm{I}$ tais que para cada $0 < \varepsilon < \eta$

$$|\hat{u}(\varepsilon)| \leq c\,.$$

Usaremos a notação $\hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M},lb}(\mathrm{F})$. É claro que, se $u \in \overline{\mathrm{F}}$ tem um representante $\hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M},lb}(\mathrm{F})$, então todo representante de $u$ é um elemento de $\mathcal{E}_{\mathrm{M},lb}(\mathrm{F})$.

## 1.2 Aplicações generalizadas a valores numa escala de espaços de Banach

Vamos agora apresentar a construção do espaço das funções generalizadas definidas sobre abertos de $\mathbb{R}^n$ a valores numa escala de espaços de Banach. Parte do material que se segue foi extraído de [2].

**1.2.1 Definição (Escala de espaços de Banach).** Consideremos que $\mathrm{X}_0$ seja um $\mathbb{K}$-espaço de Banach e que $\left(\mathrm{X}_s, \|.\|_s\right)_{s\in\mathrm{I}}$ seja uma família de subespaços de $\mathrm{X}_0$, verificando a propriedade

[**(EB)**] para cada $r, s \in \mathrm{I}$, com $r < s$, $\mathrm{X}_s \hookrightarrow \mathrm{X}_r$, com a inclusão natural de norma menor ou igual a um, isto é, as aplicações

$$\begin{aligned} \imath_r^s :\ & \mathrm{X}_s \to \mathrm{X}_r \\ & u \mapsto \imath_r^s(u) = u \end{aligned}$$

verificam

$$\|\imath_r^s(u)\|_r \leq \|u\|_s\,, \quad \text{para todo } u \in \mathrm{X}_s\,.$$

Uma escala de espaços de Banach é um par, $(X, (X_s))$, constituído pelo $\mathbb{K}$-espaço vetorial $X := \bigcup_{s\in I} X_s$, obtido como o limite indutivo da família $(X_s)_{s\in I}$ para as inclusões $X_s \subset X$ na categoria dos espaços vetoriais, e a própria família de espaços de Banach, $(X_s, \|\cdot\|_s)_{s\in I}$.

**1.2.2 Observação.** Na definição dada acima, não levamos em consideração qualquer topologia que eventualmente se possa definir sobre X. Sobre Categorias e Limites Indutivos, estamos adotando o ponto de vista apresentado em [26] em seu capítulo 0.

**1.2.3 Observação.** Para cada $s \in I$ denotaremos por $\imath_s$ a aplicação de inclusão

$$X_s \xrightarrow{\imath_s} X\,;$$

são essas inclusões que nos permitem escrever $X_s \subset X$.

**1.2.4 Exemplo.** Um exemplo de escala de espaços de Banach é o seguinte. Seja $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e limitado. Para cada $s \in [0,1]$ ponha

$$p = \begin{cases} \dfrac{2}{1-s} & \text{se } s \in [0,1[ \\ +\infty & \text{se } s = 1\,. \end{cases}$$

Desse modo, podemos considerar, para $0 \leq s \leq 1$, os conjuntos

$$L_s := L^p(\Omega)\,.$$

Observe que $2 \leq p \leq +\infty$. Dotamos esses conjuntos com a norma seguinte, que os tornam espaços de Banach,

$$u \in L_s \Rightarrow \|u\|_s := (\mathrm{med}(\Omega))^{\frac{s-1}{2}} \|u\|_p\,.$$

É fácil verificar que para $0 < r < s < 1$ temos $L_s \hookrightarrow L_r$ com norma menor ou igual a um. De fato, sabemos que, se $p < q$, então $L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$; ora, para $0 < r < s < 1$ temos $\dfrac{2}{1-r} < \dfrac{2}{1-s}$ daí $L^{\frac{2}{1-s}}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2}{1-r}}(\Omega)$ e

$$\|u\|_{\frac{2}{1-r}} \leq [\mathrm{med}(\Omega)]^{\frac{1-r}{2} - \frac{1-s}{2}} \|u\|_{\frac{2}{1-s}}\,,$$

daí resulta a afirmação feita.

**1.2.5 Observação.** Admitimos como um exemplo, trivial, de escala de espaços de Banach, a escala $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ na qual todos os espaços $\mathrm{X}_s$ são iguais a um mesmo espaço de Banach E; nesse caso, e a menos que surjam outras necessidades, consideraremos $\mathrm{X} = \mathrm{E}$ com sua dada estrutura de espaço de Banach.

Vamos agora introduzir os espaços que serão a base para a construção que desejamos fazer.

**1.2.6 Definição.** Sejam $\emptyset \neq \Omega$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach. Fixada uma *seqüência exaustiva* de compactos para $\Omega$, $(\mathrm{K}_j)_{j\in\mathbb{N}}$, definimos o conjunto, $C^\infty_*(\Omega; \mathrm{X})$, por

$$C^\infty_*(\Omega; \mathrm{X}) := \{ f : \Omega \to \mathrm{X} \ / \ \forall j \in \mathbb{N} \ \exists \ s \in \mathrm{I} \ \text{ tal que } f|_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} \in C^\infty(\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_s) \} .$$

Dadas $f, g \in C^\infty_*(\Omega; \mathrm{X})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ definimos ainda a soma e o produto por escalar, da seguinte forma

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \ \text{ e } \ (\lambda f)(x) := \lambda f(x) .$$

**1.2.7 Proposição.** *Sejam $\emptyset \neq \Omega$ um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach.*

**(a)** *$C^\infty_*(\Omega; \mathrm{X})$ é um espaço vetorial quando munido das operações pontuais.*

**(b)** *$C^\infty_*(\Omega; \mathrm{X})$ não depende da seqüência exaustiva $(\mathrm{K}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ usada.*

**(c)** *Para cada $s \in \mathrm{I}$ temos $C^\infty(\Omega; \mathrm{X}_s) \subset C^\infty_*(\Omega; \mathrm{X})$ .*

*Demonstração.* **(a)** Sejam $f, g \in C^\infty_*(\Omega; \mathrm{X})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Será suficiente verificarmos que $C^\infty_*(\Omega; \mathrm{X})$ é fechado para a soma e para o produto por escalar. Fixado $j \in \mathbb{N}$, sejam $0 < s_1, s_2 \leq 1$ tais que

$$f|_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} \in C^\infty(\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; X_{s_1}) \ \text{ e } \ g|_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} \in C^\infty(\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_{s_2}) .$$

Se $0 < s \leq \min(s_1, s_2)$, então

$$f|_{\overset{\circ}{K}_j} \in C^\infty(\overset{\circ}{K}_j; X_s) \text{ e } g|_{\overset{\circ}{K}_j} \in C^\infty(\overset{\circ}{K}_j; X_s);$$

portanto, $(f+g)|_{\overset{\circ}{K}_j} \in C^\infty(\overset{\circ}{K}_j; X_s)$ e também $(\lambda f)|_{\overset{\circ}{K}_j} \in C^\infty(\overset{\circ}{K}_j; X_s)$, ou seja,

$$(f+g) \in C^\infty_*(\Omega; X) \text{ e } \lambda f \in C^\infty_*(\Omega; X).$$

**(b)** Se $(H_l)_{l\in\mathbb{N}}$ é uma outra seqüência exaustiva de compactos para $\Omega$ e $C^\infty_{*1}(\Omega; X)$ é o espaço vetorial correspondente, então vamos verificar que

$$C^\infty_*(\Omega; X) = C^\infty_{*1}(\Omega; X).$$

Seja $f \in C^\infty_*(\Omega; X)$ e tome $l \in \mathbb{N}$ qualquer. Escolha $j \in \mathbb{N}$ tal que $H_l \subset \overset{\circ}{K}_j$. Como $f \in C^\infty_*(\Omega; X)$, existe $s \in I$ tal que $f|_{\overset{\circ}{K}_j} \in C^\infty(\overset{\circ}{K}_j; X_s)$, daí,

$$f|_{\overset{\circ}{H}_l} = (f|_{\overset{\circ}{K}_j})|_{\overset{\circ}{H}_l} \in C^\infty(\overset{\circ}{H}_l; X_s);$$

portanto $f \in C^\infty_{*1}(\Omega; X)$. A outra inclusão é análoga.

**(c)** Imediata a partir das definições. □

Sejam $\varphi \in C^\infty(\Omega; \mathbb{K})$ e $f \in C^\infty_*(\Omega; X)$. De modo natural, podemos definir o produto $\varphi f$ como um elemento de $C^\infty_*(\Omega; X)$. De fato, basta definir

$$\begin{array}{rccc} \varphi f: & \Omega & \to & X \\ & x & \mapsto & \varphi(x) f(x). \end{array}$$

É fácil verificar que, se $U \subset \Omega$ for um subconjunto aberto e $f \in C^\infty_*(\Omega; X)$, então $f|_U \in C^\infty_*(U; X)$. De fato, fixemos seqüências exaustivas $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ respectivamente para $\Omega$ e para $U$. Fixemos $k \in \mathbb{N}$. Como $L_k \subset\subset U \subset \Omega$, segue-se que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $L_k \subset\subset \overset{\circ}{K}_j$ e, associado a esse $j$, existe $s \in I$ tal que $f|_{\overset{\circ}{K}_j} \in C^\infty(\overset{\circ}{K}_j; X_s)$; portanto,

$$(f|_U)|_{\overset{\circ}{L}_k} = (f|_{\overset{\circ}{L}_k}) \in C^\infty(\overset{\circ}{L}_k; X_s).$$

**1.2.8 Definição.** Sejam $(X, (X_s))$ uma escala de espaços de Banach e $\emptyset \neq \Omega$ um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Fixemos uma seqüência exaustiva de compactos, $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$, para $\Omega$.

(a) Denotaremos com $\mathcal{E}[\Omega;\mathrm{X}]$ o conjunto das aplicações $u : \mathrm{I}\times\Omega \to \mathrm{X}$ tais que, para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$ fixado, $u(\varepsilon,\cdot) \in C^{\infty}_{*}(\Omega;\mathrm{X})$. Verifica-se que $\mathcal{E}[\Omega;\mathrm{X}]$, munido das operações pontuais, é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

(b) Denotaremos com $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega;\mathrm{X}]$ o conjunto de todas as aplicações $u \in \mathcal{E}[\Omega;\mathrm{X}]$ tais que, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $s \in \mathrm{I}$ tal que

$$u|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j;\mathrm{X}_s]\,.$$

Essas aplicações serão chamadas *aplicações moderadas.*

(c) Denotaremos com $\mathcal{N}[\Omega;\mathrm{X}]$, o conjunto de todas as aplicações $u \in \mathcal{E}[\Omega;\mathrm{X}]$ tais que, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $s \in \mathrm{I}$ tal que

$$u|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j;\mathrm{X}_s]\,.$$

Essas aplicações serão chamadas *aplicações nulas.*

Vamos agora verificar que tais conjuntos estão de fato bem definidos.

**1.2.9 Proposição.** *Sejam $\emptyset \neq \Omega$ um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $(\mathrm{X},(\mathrm{X_s}))$ uma escala de espaços de Banach.*

(a) *$\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega;\mathrm{X}]$ não depende da seqüência exaustiva de compactos $(\mathrm{K}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e é um subespaço vetorial de $\mathcal{E}[\Omega;\mathrm{X}]$.*

(b) *$\mathcal{N}[\Omega;\mathrm{X}]$ não depende da seqüência exaustiva de compactos $(\mathrm{K}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e é um subespaço vetorial de $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega;\mathrm{X}]$.*

*Demonstração.* (a) Seja $(H_l)_{l\in\mathbb{N}}$ uma outra seqüência exaustiva de compactos para $\Omega$ e seja $\mathcal{E}_{\mathrm{M},1}[\Omega;\mathrm{X}]$ definido a partir de $(H_l)_{l\in\mathbb{N}}$ do mesmo modo que $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega;\mathrm{X}]$ o foi a partir de $(\mathrm{K}_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Mostremos então que

$$\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega;\mathrm{X}] = \mathcal{E}_{\mathrm{M},1}[\Omega;\mathrm{X}]\,.$$

Seja $u \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$ e escolha $l \in \mathbb{N}$ qualquer. Tomemos $j \in \mathbb{N}$ tal que $H_l \subset \overset{\circ}{\mathrm{K}}_j$. Como $u \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$, existe $s \in \mathrm{I}$ tal que

$$u|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_s] .$$

Daí,

$$u|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{H}_j} = \left(u|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{\mathrm{K}}_j}\right)|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{H}_j} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{H}_j; \mathrm{X}_s] .$$

Portanto, $u \in \mathcal{E}_{\mathrm{M},1}[\Omega; \mathrm{X}]$. A outra inclusão é análoga.

Vamos agora apenas verificar que, se $u, v \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$, então $u + v \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$. Fixemos $j \in \mathbb{N}$ arbitrário. Existem $r, s \in I$ tais que

$$u_j := u|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_s] \text{ e } v_j := v|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_r] .$$

Podemos supor que $r \leq s$, daí, $\mathrm{X}_s \subset \mathrm{X}_r$ e (EB) implica a inclusão $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_s] \subset \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_r]$, daí

$$u_j + v_j \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_r] ;$$

portanto,

$$u + v \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}] .$$

(b) Análogo ao item (a). □

**1.2.10 Definição.** O espaço vetorial das aplicações generalizadas definidas num aberto $\Omega \neq \emptyset$ de $\mathbb{R}^n$ a valores em uma escala de espaços de Banach $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$, é definido como o $\mathbb{K}$-espaço vetorial quociente

$$\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X}) := \frac{\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]}{\mathcal{N}[\Omega; \mathrm{X}]} .$$

Os elementos de $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$ são chamados aplicações generalizadas (simplificadas) de $\Omega$ em X.

**1.2.11 Observação.** É fácil verificar que existe uma inclusão natural

$$C_*^{\infty}(\Omega; \mathrm{X}) \subset \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X}) .$$

De fato, consideremos a aplicação $\mathbb{K}$-linear

$$\begin{array}{rccc} \tilde{}: & C^\infty_*(\Omega;\mathrm{X}) & \to & \mathcal{E}_\mathrm{M}[\Omega;\mathrm{X}] \\ & f & \mapsto & \tilde{f} \end{array}$$

com $\tilde{f} : \mathrm{I}\times\Omega \to$ definida por

$$\tilde{f}(\varepsilon, x) := f(x) \text{ para todo } (\varepsilon, x) \in \mathrm{I}\times\Omega\,.$$

Observe que, dada uma seqüência exaustiva de compactos $(\mathrm{K}_j)_{j\in\mathbb{N}}$, para $\Omega$, teremos, para cada $j \in \mathbb{N}$ fixado

$$\tilde{f}|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} = f|_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} \in C^\infty(\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j;\mathrm{X}_s)$$

para algum $s \in \mathrm{I}$ e, como

$$C^\infty(\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j;\mathrm{X}_s) \subset \mathcal{E}_\mathrm{M}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j;\mathrm{X}_s]\,,$$

segue-se que

$$\tilde{f}|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} \subset \mathcal{E}_\mathrm{M}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j;\mathrm{X}_s]\,.$$

Essa aplicação define um $\mathbb{K}$-homomorfismo injetivo natural de espaços vetoriais

$$f \in C^\infty_*(\Omega;X) \mapsto \tilde{f} + \mathcal{N}[\Omega;\mathrm{X}] \in \mathcal{G}(\Omega;\mathrm{X})\,.$$

Observamos também que $\mathcal{G}(\Omega;\mathrm{X})$ é um $C^\infty(\Omega)$-módulo. De fato, sejam $\alpha \in C^\infty(\Omega)$, $f \in \mathcal{G}(\Omega;\mathrm{X})$ e $(\mathrm{K}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma seqüência exaustiva de compactos para $\Omega$. Seja $\hat{f} \in \mathcal{E}_\mathrm{M}[\Omega;\mathrm{X}]$; então, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $s \in \mathrm{I}$ tal que

$$\hat{f}|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} \in \mathcal{E}_\mathrm{M}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j;\mathrm{X}_s]\,.$$

Definimos a aplicação $\widehat{\alpha f} : \mathrm{I}\times\Omega \to \mathrm{X}$ por

$$(\widehat{\alpha f})(\varepsilon, x) := \alpha(x)\hat{f}(\varepsilon, x)\ , \text{ para cada } (\varepsilon, x) \in \mathrm{I}\times\Omega\,.$$

Fixados $\varepsilon \in \mathrm{I}$ e $j \in \mathbb{N}$, como

$$\alpha\hat{f}(\varepsilon,\cdot)|_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} = \alpha(\cdot)\hat{f}(\varepsilon,\cdot)|_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} \in C^\infty(\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j;\mathrm{X}_s)$$

para algum $s \in \mathrm{I}$ e

$$\alpha\hat{f}|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} \in \mathcal{E}_\mathrm{M}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j;\mathrm{X}_s]\,,$$

segue-se que $\widehat{\alpha f} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$ e que, se $\hat{f} \in \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{X}]$, então $\widehat{\alpha f} \in \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{X}]$. Isso permite definir o produto de $\alpha \in C^{\infty}(\Omega)$ por $f \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$ por

$$\alpha f := \widehat{\alpha f} + \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{X}]$$

com $\hat{f}$ representante qualquer de $f$. Não é difícil verificar que, com o produto assim definido, $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$ torna-se um $C^{\infty}(\Omega)$-módulo.

### 1.2.1 Derivação parcial em $\mathcal{G}[\Omega; \mathrm{X}]$

Sejam $\emptyset \neq \Omega$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach, $u \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Dado $j \in \mathbb{N}$ existe $s \in \mathrm{I}$ tal que

$$u_j := u|_{\mathrm{I} \times \mathring{\mathrm{K}}_j} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\mathring{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_s] .$$

Definimos a função

$$\partial^{\alpha} u : (\varepsilon, x) \in \mathrm{I} \times \Omega \mapsto \partial^{\alpha} u(\varepsilon, x) \in \mathrm{X}$$

por

$$\partial^{\alpha} u|_{\mathrm{I} \times \mathring{\mathrm{K}}_j} := \partial^{\alpha} u_j .$$

Como conseqüência, $\partial^{\alpha} u \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$ e temos uma aplicação $\mathbb{K}$-linear

$$\partial^{\alpha} : u \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}] \mapsto \partial^{\alpha} u \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}] .$$

Além disso,

$$\partial^{\alpha}(\mathcal{N}[\Omega; \mathrm{X}]) \subset \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{X}] ;$$

em conseqüência, a aplicação $\partial^{\alpha}$ acima define por passagem ao quociente *um operador de derivação parcial de ordem* $\alpha$, que ainda denotaremos por $\partial^{\alpha}$,

$$\partial^{\alpha} : \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X}) \longrightarrow \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$$

e, para cada $f \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$, o elemento $\partial^{\alpha} f \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$ é chamado *derivada parcial de ordem* $\alpha$ de $f$.

### 1.2.2 Propriedades locais

Sejam $\Omega \neq \emptyset$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach. Seja $U \neq \emptyset$ um subconjunto aberto de $\Omega$ e fixemos seqüências exaustivas de compactos

$$(L_j)_{j\in\mathbb{N}} \quad \text{para } U \quad \text{e} \quad (\mathrm{K}_l)_{l\in\mathbb{N}} \quad \text{para } \Omega\,.$$

Se $u \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$ e $j \in \mathbb{N}$, como $L_j \subset\subset U \subset \Omega$, segue-se que existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $L_j \subset\subset \overset{\circ}{\mathrm{K}}_l$ e, associado a esse $l$, existe $s \in \mathrm{I}$ tal que $u|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{\mathrm{K}}_l} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_l; \mathrm{X}_s]$. Portanto,

$$u|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{L}_j} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{L}_j; \mathrm{X}_s]$$

e isso mostra que

$$u|_{\mathrm{I}\times U} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[U; \mathrm{X}]\,.$$

Portanto, fica definida uma aplicação

$$R_U^{\Omega} : u \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}] \mapsto u|_{\mathrm{I}\times U} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[U; \mathrm{X}]$$

e é fácil verificar que

$$R_U^{\Omega}(\mathcal{N}[\Omega; \mathrm{X}]) \subset \mathcal{N}[U; \mathrm{X}]\,.$$

O que mostra, por passagem ao quociente, que $R_U^{\Omega}$ determina uma aplicação $\mathbb{K}$-linear de restrição

$$r_U^{\Omega} : f \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X}) \mapsto f|_U \in \mathcal{G}(U; \mathrm{X})\,.$$

O elemento $f|_U := r_U^{\Omega}(f)$ é chamado *restrição de $f$ a $U$*.

**1.2.12 Proposição.** *Sejam $(\Omega_\iota)_{\iota\in J}$ uma família de abertos não vazios de $\mathbb{R}^n$, defina $\Omega := \cup_{\iota\in J}\Omega_\iota$ e seja $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach. As seguintes afirmações são verdadeiras.*

**(i)** *Se $f$ e $g$ são elementos de $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$ tais que $f|_{\Omega_\iota} = g|_{\Omega_\iota}$ para todo $\iota \in J$, então $f = g$.*

**(ii)** *Se $(f_\iota)_{\iota\in J}$ é uma família tal que $f_\iota \in \mathcal{G}(\Omega_\iota; \mathrm{X})$ para todo $\iota \in J$ e $f_\iota|_{\Omega_\iota\cap\Omega_\jmath} = f_\jmath|_{\Omega_\iota\cap\Omega_\jmath}$ para todo $(\iota, \jmath) \in J \times J$ com $\Omega_\iota \cap \Omega_\jmath \neq \emptyset$, então existe $f \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$ com $f|_{\Omega_\iota} = f_\iota$ para todo $\iota \in J$.*

*Demonstração.* A prova é análoga à encontrada em [3], quando temos aplicações generalizadas a valores em espaços de Banach. De qualquer modo, incluiremos aqui apenas as passagens mais importantes.

(i) Sejam $\hat{f} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$ e $\hat{g} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$ representantes, respectivamente, de $f$ e $g$. Vamos mostrar que

$$\hat{h} := \hat{f} - \hat{g} \in \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{X}] .$$

Fixemos uma seqüência exaustiva de compactos $(\mathrm{K}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ para $\Omega$. Devemos então verificar que para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $s \in \mathrm{I}$ tal que

$$\hat{h}|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_s] . \tag{1.17}$$

Seja $(L_\kappa)_{\kappa\in K}$ uma *família finita* de subconjuntos compactos, com $K \subset J$, tal que

$$\emptyset \neq \overset{\circ}{L}_\kappa \ , \quad L_\kappa \subset\subset \Omega_\kappa \ , \text{para cada } \kappa \in K \ \text{ e } \ \mathrm{K}_j = \cup_{\kappa\in K} L_\kappa .$$

Por hipótese, temos

$$\hat{h}|_{\mathrm{I}\times\Omega_\iota} \in \mathcal{N}[\Omega_\iota; \mathrm{X}] \ \text{ para todo } \ \iota \in J .$$

Agora, para cada $\kappa \in K$ seja $W_\kappa \subset\subset \Omega_\kappa$ tal que

$$L_\kappa \subset \overset{\circ}{W}_\kappa \subset W_\kappa .$$

Logo, para cada $\kappa \in K$ existe $s_\kappa \in \mathrm{I}$ tal que

$$\hat{h}|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{W}_\kappa} \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{W}_\kappa; \mathrm{X}_{s_\kappa}] .$$

Seja $s := \min\{s_\kappa \ ; \ \kappa \in K\}$, daí,

$$\hat{h}|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{W}_\kappa} \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{W}_\kappa; \mathrm{X}_s] \ \text{ para todo } \ \kappa \in K .$$

Assim, fixados $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $q \in \mathbb{N}$, existem $c_\kappa > 0$ e $\eta_\kappa \in \mathrm{I}$ tais que

$$\sup_{x\in L_\kappa} \|\partial^\alpha \hat{h}(\varepsilon, x)\|_s \leq c_\kappa \varepsilon^q \ \text{ para todo } \ \varepsilon \in ]0, \eta_\kappa[ .$$

Tomando $c := \max\{c_\kappa \ ; \ \kappa \in K\}$ e $\eta := \min\{\eta_\kappa \ ; \ \kappa \in K\}$, concluímos que

$$\sup_{x \in \mathrm{K}_j} \|\partial^\alpha \hat{h}(\varepsilon, x)\|_s \leq C\varepsilon^q \ \text{ para todo } \ \varepsilon \in ]0, \eta[ \, .$$

Em particular, segue-se (1.17).

**(ii)** Para cada $\iota \in J$, seja $\hat{f}_\iota \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega_\iota; \mathrm{X}]$ uma representante de $f_\iota$. Por hipótese, temos, para cada $(\iota, \jmath) \in J^2$ tal que $\Omega_\iota \cap \Omega_\jmath \neq \emptyset$,

$$\hat{f}_\iota|_{\mathrm{I} \times (\Omega_\iota \cap \Omega_\jmath)} - \hat{f}_\jmath|_{\mathrm{I} \times (\Omega_\iota \cap \Omega_\jmath)} \in \mathcal{N}[\Omega_\iota \cap \Omega_\jmath; \mathrm{X}] \, . \tag{1.18}$$

Consideremos agora uma partição $C^\infty$ da unidade, localmente finita, $(\alpha_\iota)_{\iota \in J}$, subordinada à $(\Omega_\iota)_{\iota \in J}$. Assim temos a condição

> para cada $x \in \Omega$, existe uma vizinhança $W_x$ de $x$ tal que o conjunto $F_x := \{\iota \in J \ / \ \alpha_\iota|_{W_x} \neq 0\}$ é finito.

Se $S_\iota := \mathrm{supp}(\alpha_\iota) \subset \Omega_\iota$, então definimos a extensão de $\hat{f}_\iota$ a $\Omega$ pondo

$$\hat{f}_\iota(\varepsilon, x) := 0 \ \text{ para cada } \ \varepsilon \in \mathrm{I} \ \text{ e para cada } \ x \in \Omega \backslash S_\iota \, .$$

Definimos agora a aplicação $\hat{f} : \mathrm{I} \times \Omega \to \mathrm{X}$ por

$$\hat{f}(\varepsilon, x) := \sum_{\iota \in F_x} \alpha_\iota(x) \hat{f}_\iota(\varepsilon, x) = \sum_{\iota \in J} \alpha_\iota(x) \hat{f}_\iota(\varepsilon, x) \, .$$

Facilmente são verificadas as seguintes afirmações:

**(a)** $\hat{f} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$.

De fato, dados $x \in \Omega$ e $\varepsilon \in \mathrm{I}$ arbitrários, temos que $\hat{f}(\varepsilon, y) = \sum_{\iota \in F_x} \alpha_\iota(y) \hat{f}_\iota(\varepsilon, y)$ para cada $y \in W_x$. Se $x \in \Omega_j$, $j \in J$, podemos supor que $W_x \subset \Omega_j$; em conseqüência, segue-se que $\hat{f} \in \mathcal{E}[\Omega; \mathrm{X}]$. Seja agora $(\mathrm{K}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma seqüência exaustiva de compactos para $\Omega$. Fixemos $j \in \mathbb{N}$ e mostremos que existe $s \in \mathrm{I}$ tal que

$$\hat{f}|_{\mathrm{I} \times \overset{o}{\mathrm{K}}_j} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{o}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_s] \, .$$

Fixemos um aberto $W_j$ tal que $\mathrm{K}_j \subset W_j \subset \overline{W}_j \subset\subset \Omega$. Pela compacidade de $\overline{W}_j$, existe uma parte finita F de $J$ tal que

$$\alpha_\iota|_{\overline{W}_j} = 0 \text{ para cada } \iota \in J \backslash F\,.$$

Assim, para cada $(\varepsilon, x) \in \mathrm{I} \times W_j$

$$\hat{f}(\varepsilon, x) = \sum_{\iota \in F} (\alpha \hat{f}_\iota)(\varepsilon, x)\,.$$

Por outro lado, para cada $\iota \in F$ existe $s_\iota \in \mathrm{I}$ tal que

$$(\alpha \hat{f}_\iota)|_{\mathrm{I} \times \overset{o}{\mathrm{K}}_j} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{o}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_{s_\iota}]\,.$$

Tomando $s := \min\{s_\iota \,/\, \iota \in F\}$ segue-se que

$$(\alpha \hat{f}_\iota)|_{\mathrm{I} \times \overset{o}{\mathrm{K}}_j} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{o}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_s]$$

para cada $\iota \in F$. Portanto,

$$\hat{f}|_{\mathrm{I} \times \overset{o}{\mathrm{K}}_j} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{o}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_s]\,.$$

**(b)** Para cada $\kappa \in J$ , $\hat{f}|_{\mathrm{I} \times \Omega_\kappa} - \hat{f}_\kappa \in \mathcal{N}[\Omega_\kappa; \mathrm{X}]$.

De fato, basta usar um argumento análogo ao do item **(a)**.

Assim, basta definir $f :=$ classe $(\hat{f}) \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$. □

Podemos resumir a construção feita até o momento no seguinte

**1.2.13 Teorema.** *Seja* $(\mathrm{X}, (\mathrm{X_s}))$ *uma escala de espaços de Banach. Então* $\mathcal{G}(\cdot; \mathrm{X})$ *é um feixe fino de* $\mathbb{K}$*-espaços vetoriais ( $C^\infty$- módulos).*

### 1.2.3 Valor pontual

Vamos agora introduzir a noção de vetores generalizados em uma escala de espaços de Banach $(\mathrm{X}, (\mathrm{X_s}))$. Isso é necessário para que possamos dar sentido ao conceito de valor pontual de uma aplicação generalizada e, desse modo, podermos tratar de problemas de valor inicial.

**1.2.14 Definição.** Seja $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach.

**(a)** Denotaremos por $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathrm{X})$ o conjunto de todas as aplicações $\mu : \mathrm{I} \to \mathrm{X}$ para as quais existe $s \in \mathrm{I}$ tal que $\mu \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}_s)$.

Munido das operações pontuais, $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathrm{X})$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

**(b)** Denotaremos por $\mathcal{N}(\mathrm{X})$ o conjunto de todas as aplicações $\mu : \mathrm{I} \to \mathrm{X}$ para as quais existe $s \in \mathrm{I}$ tal que $\mu \in \mathcal{N}(\mathrm{X}_s)$.

Verifica-se facilmente que $\mathcal{N}(\mathrm{X})$ é um $\mathbb{K}$-subespaço vetorial de $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathrm{X})$.

**(c)** Definimos o espaço vetorial dos vetores generalizados em uma escala de espaços de Banach $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$, como o $\mathbb{K}$-espaço vetorial quociente

$$\overline{\mathrm{X}} := \frac{\mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathrm{X})}{\mathcal{N}(\mathrm{X})}\,.$$

Se $\emptyset \neq \Omega$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $\hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathrm{X})$, podemos considerar a aplicação

$$\begin{aligned} R_\Omega(\hat{u}) : \mathrm{I} \times \Omega &\to \mathrm{X} \\ (\varepsilon, x) &\mapsto \hat{u}(\varepsilon)\,; \end{aligned}$$

então, tem-se

**(a)** $R_\Omega(\hat{u}) \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$.

**(b)** A aplicação $R_\Omega : \mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}) \to \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$ é um homomorfismo injetor de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais tal que

$$R_\Omega[\mathcal{N}(\mathrm{X})] = \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{X}] \cap \mathrm{Im}(R_\Omega)\,.$$

Em conseqüência, $R_\Omega$ induz um homomorfismo injetor

$$\overline{R}_\Omega : \overline{\mathrm{X}} \to \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$$

que nos permite escrever

$$\overline{\mathrm{X}} \subset \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})\,.$$

**1.2.15 Proposição.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto não vazio e $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach. Sejam $f \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$ e $x_0 \in \Omega$ e consideremos um representante qualquer $\hat{f} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$ de $f$. Então a aplicação $\hat{\mu} : \mathrm{I} \to \mathrm{X}$, definida por $\hat{\mu}(\varepsilon) = \hat{f}(\varepsilon, x_0)$, é um elemento de $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathrm{X})$, e sua classe em $\overline{\mathrm{X}}$ não depende do representante $\hat{f}$ escolhido.*

*Demonstração.* De fato, fixado um compacto $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$ com $x_0 \in \overset{\circ}{\mathrm{K}}$, temos que existe $s \in \mathrm{I}$ tal que

$$\hat{f}|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{\mathrm{K}}} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}; \mathrm{X}_s];$$

portanto, a aplicação $\mathrm{I} \ni \varepsilon \mapsto \hat{f}(\varepsilon, x_0) \in \mathrm{X}_s$, é um elemento de $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}_s)$. Do mesmo modo, se $\hat{f} \in \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{X}]$, então $\hat{\mu} \in \mathcal{N}(\mathrm{X})$. □

**1.2.16 Definição.** Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto não vazio e $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach. Dados $f \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$ e $x_0 \in \Omega$, o *valor pontual de $f$ no ponto $x_0$*, a ser denotado por $f(x_0)$, é a classe em $\overline{\mathrm{X}}$, da aplicação $\hat{\mu}$ construída na proposição 1.2.15 .

### 1.2.4 Funções generalizadas localmente limitadas

A noção que vamos agora introduzir tem, no caso de aplicações generalizadas em espaços de Banach, aparecido com muita freqüência, principalmente quando de aplicações de técnicas que envolvam alguma forma de aplicação de teoremas (clássicos) de ponto fixo.

**1.2.17 Definição.** Sejam $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach. Diremos que uma aplicação generalizada $u \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$ é *localmente limitada* se existir um representante $\hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$, de $u$, verificando a seguinte condição: para cada subconjunto compacto $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$, com $\overset{\circ}{\mathrm{K}} \neq \emptyset$, existem $c > 0$, $\eta \in \mathrm{I}$ e $s \in \mathrm{I}$ tais que

**(i)** $\hat{u}(\varepsilon, t) \in \mathrm{X}_s$, para cada $0 < \varepsilon < \eta$ e $t \in \overset{\circ}{\mathrm{K}}$, e a aplicação $\hat{v} : \mathrm{I} \times \overset{\circ}{\mathrm{K}} \to \mathrm{X}_s$, definida por

$$\hat{v}(\varepsilon, t) := \begin{cases} \hat{u}(\varepsilon, t) & \text{se} \quad 0 < \varepsilon < \eta \\ 0 & \text{se} \quad \varepsilon \geq \eta\,, \end{cases}$$

é um elemento de $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}; \mathrm{X}_s]$.

**(ii)** $\sup\limits_{t \in \overset{\circ}{\mathrm{K}}} \|\hat{u}(\varepsilon, t)\|_s \leq c$ para cada $0 < \varepsilon < \eta$.

**1.2.18 Observação.** Sejam $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach, então qualquer elemento $\hat{u} \in \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{X}]$ verifica as condições da definição 1.2.17.

Usaremos a notação $\mathcal{G}_{lb}(\Omega; \mathrm{X})$ para indicar o conjunto das aplicações generalizadas localmente limitadas, definidas em $\Omega$ a valores na escala $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$.

**1.2.19 Proposição.** *Sejam $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach. Se $u \in \mathcal{G}_{lb}(\Omega; \mathrm{X})$, então todo representante $\hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$ de $u$ verifica as condições (i) e (ii) da Definição 1.2.17.*

*Demonstração.* De fato, sejam $\hat{u}\,, \hat{v} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$ representantes de $u$ e suponhamos que $\hat{u}$ verifique as condições da Definição 1.2.17. Fixemos um compacto $\mathrm{K} \subset \Omega$, com $\overset{\circ}{\mathrm{K}} \neq \emptyset$. Logo, existem constantes $c_1 > 0$, $\eta_1 \in \mathrm{I}$ e $s_1 \in \mathrm{I}$ tais que

**(i)** $\hat{u}(\varepsilon, t) \in \mathrm{X}_{s_1}$, para cada $0 < \varepsilon < \eta_1$ e $t \in \overset{\circ}{\mathrm{K}}$.

**(ii)** $\sup\limits_{t \in \overset{\circ}{\mathrm{K}}} \|\hat{u}(\varepsilon, t)\|_{s_1} \leq c$ para cada $0 < \varepsilon < \eta_1$.

Tomemos um compacto $L \subset\subset \Omega$ tal que $\overset{\circ}{\mathrm{K}} \subset L$. Então, existe $s_2 \in \mathrm{I}$ tal que

$$(\hat{u} - \hat{v})|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{L}} \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{L}; \mathrm{X}_{s_2}]\,,$$

ou seja, existem constantes $c_2 > 0$ e $\eta_2 \in \mathrm{I}$ tais que para cada $0 < \varepsilon < \eta_2$

$$\sup_{t \in K} \|\hat{u}(\varepsilon, t) - \hat{v}(\varepsilon, t)\|_{s_2} \leq c_2 \,.$$

Seja $c := c_1 + c_2$, $0 < \eta < \min(\eta_1, \eta_2)$ e $0 < s < \min(s_1, s_2)$. Como $\mathrm{X}_{s_1} \hookrightarrow \mathrm{X}_s$ e $\mathrm{X}_{s_2} \hookrightarrow \mathrm{X}_s$, segue-se que para cada $t \in \overset{\circ}{\mathrm{K}}$ e $0 < \varepsilon < \eta$, $\hat{v}(\varepsilon, t) \in \mathrm{X}_s$ e, além disso,

$$\|\hat{v}(\varepsilon, t)\|_s \leq \|\hat{u}(\varepsilon, t) - \hat{v}(\varepsilon, t)\|_{s_2} + \|\hat{u}(\varepsilon, t)\|_{s_1} \leq c \,.$$

Portanto, $\hat{v}$ também verifica as condições da Definição 1.2.17. □

**1.2.20 Proposição.** *Se $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ é um aberto e $(\mathrm{X}, (\mathrm{X_s}))$ é uma escala de espaços de Banach, então $\mathcal{G}_{lb}(\Omega; \mathrm{X})$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$.*

*Demonstração.* Sejam $u$ , $v \in \mathcal{G}_{lb}(\Omega; \mathrm{X})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Sejam $\hat{u}$ , $\hat{v} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$ representantes quaisquer de $u$ e $v$ respectivamente e, seja $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$, um compacto fixado, com $\overset{\circ}{\mathrm{K}} \neq \emptyset$. Ora, $\hat{u}$ verifica as condições da Definição 1.2.17 com constantes, digamos, $c_1 > 0$, $\eta_1 \in \mathrm{I}$ e $s_1 \in \mathrm{I}$. Da mesma forma, $\hat{v}$ verifica as condições da Definição 1.2.17 com constantes $c_2 > 0$, $\eta_2 \in \mathrm{I}$ e $s_2 \in \mathrm{I}$. Logo, $\lambda\hat{u}$ verifica as condições da Definição 1.2.17 com constantes $c_1 > 0$, $\eta_1 \in \mathrm{I}$ e $s_1 \in \mathrm{I}$ e $\hat{u} + \hat{v}$ verifica as condições da Definição 1.2.17 com constantes $c := c_1 + c_2$, $0 < \eta < \min(\eta_1, \eta_2)$ e $0 < s < \min(s_1, s_2)$. Portanto, $\lambda u \in \mathcal{G}_{lb}(\Omega; \mathrm{X})$ e também $u + v \in \mathcal{G}_{lb}(\Omega; \mathrm{X})$. □

## 1.3 Algumas aplicações especiais

Seja $(\mathrm{X}, (\mathrm{X_s}))$ uma escala de espaços de Banach. Para que possamos formular mais adiante uma versão do teorema de Ovcyannikov, vamos considerar, para cada $s \in \mathrm{I}$, a aplicação

$$\Theta_s : \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X}_s) \to \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X}) \,,$$

definida do seguinte modo: dada $f \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X}_s)$, seja $\hat{f} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}_s]$ um representante qualquer de $f$. Como

$$\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}_s] \subset \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}] \,,$$

definimos $\Theta_s(f) \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$ como a classe de $\hat{f}$ em $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$. Como

$$\mathcal{N}[\Omega; \mathrm{X}_s] \subset \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{X}],$$

segue-se que $\Theta_s(f)$ de fato *não depende* do representante escolhido para $f$. Em geral, essas aplicações não são inclusões, isto é, a aplicação $\Theta_s$ em geral não é uma aplicação $\mathbb{K}$-linear injetora de $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X}_s)$ em $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$ para cada $s \in \mathrm{I}$ fixado.

Por outro lado, para cada $0 < r < s \leq 1$ dados, definimos a aplicação

$$\Theta_r^s : \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X}_s) \to \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X}_r)$$

do seguinte modo: dada $f \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X}_s)$, seja $\hat{f} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}_s]$ um representante qualquer de $f$. Como $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}_s] \subset \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}_r]$, podemos definir $\Theta_r^s(f) \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X}_r)$ como a classe de $\hat{f}$ em $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X}_r)$. Como $\mathcal{N}[\Omega; \mathrm{X}_s] \subset \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{X}_r]$, segue-se que a aplicação $\Theta_r^s$ está bem definida. Em geral, essas aplicações também não são inclusões, isto é, a aplicação $\Theta_r^s$ em geral, não é uma aplicação $\mathbb{K}$-linear injetora de $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X}_s)$ em $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X}_r)$ para cada $0 < r < s \leq 1$.

Os próximos resultados são uma tentativa de caracterização do kernel das aplicações $\Theta_s$.

**1.3.1 Proposição.** *Sejam $\emptyset \neq \Omega$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach. Suponha que $u \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X}_s)$ seja uma aplicação tal que $\Theta_s(u) \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$ verifique a condição $\Theta_s(u) = 0$. Então para cada subconjunto compacto $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$, com $\overset{o}{\mathrm{K}} \neq \emptyset$ existe $0 < r \leq s$ tal que*

$$\Theta_r^s(u)|_{\overset{o}{\mathrm{K}}} = \Theta_r^s(u|_{\overset{o}{\mathrm{K}}}) = 0\,, \quad \textit{em } \mathcal{G}(\overset{o}{\mathrm{K}}; \mathrm{X}_r)\,.$$

*Demonstração.* Seja $(\mathrm{K}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma seqüência exaustiva de compactos para $\Omega$ e seja $\hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}_s]$ um representante qualquer de $u$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ fixado, temos

$$\hat{u}|_{\mathrm{I} \times \overset{o}{\mathrm{K}}_j} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{o}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_s]\,.$$

Por outro lado, existe $s_j \in \mathrm{I}$ tal que

$$\hat{u}|_{\mathrm{I} \times \overset{o}{\mathrm{K}}_j} \in \mathcal{N}[\overset{o}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_{s_j}]\,.$$

Seja $0 < r_j \leq \min(s_j, s)$, então

$$\hat{u}|_{\mathrm{I}\times\overset{o}{\mathrm{K}}_j} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{o}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_{r_j}] \cap \mathcal{N}[\overset{o}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_{r_j}] .$$

□

Como uma conseqüência da proposição acima, temos

**1.3.2 Corolário.** *Sejam $\emptyset \neq \Omega$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach. Suponha que $u \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X}_s)$ seja uma aplicação tal que a sua imagem $\Theta_s(u) \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$ verifique a condição $\Theta_s(u) = 0$. Então para cada subconjunto compacto $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$, com $\overset{o}{\mathrm{K}} \neq \emptyset$ existe $0 < r \leq s$ tal que para cada representante $\hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}_s]$ de $u$ e para cada $\varphi \in C_0^\infty(\overset{o}{\mathrm{K}})$ tem-se*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\overset{o}{\mathrm{K}}} \varphi(t)\hat{u}(\varepsilon, t)\, dt = 0 \ , \quad em\ \mathrm{X}_r \, . \tag{1.19}$$

*Demonstração.* De fato, sejam $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$ com $\overset{o}{\mathrm{K}} \neq \emptyset$ e $\hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}_s]$ um representante de $u$. A proposição 1.3.1 nos diz que existe $r \in ]0, s]$ tal que

$$\hat{u}|_{\mathrm{I}\times\overset{o}{\mathrm{K}}} \in \mathcal{N}[\overset{o}{\mathrm{K}}; \mathrm{X}_r] \, . \tag{1.20}$$

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\overset{o}{\mathrm{K}})$ e $L := \mathrm{supp}(\varphi)$, então $\varphi(\cdot)\hat{u}(\varepsilon, \cdot) \in C_0^\infty(\overset{o}{\mathrm{K}}; \mathrm{X}_r)$ e, por (1.20), existem constantes $c > 0$ e $\eta \in \mathrm{I}$ tais que

$$\| \int_{\overset{o}{\mathrm{K}}} \varphi(t)\hat{u}(\varepsilon, t)\|_r \leq c\varepsilon \ , \quad \text{para cada } \varepsilon \in ]0, \eta[ \, .$$

□

Para o caso de aplicações regulares, teremos a seguinte

**1.3.3 Proposição.** *Sejam $\emptyset \neq \Omega$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach. Suponha que $u \in C^\infty(\Omega; \mathrm{X}_s)$ seja uma aplicação tal que a sua imagem $\Theta_s(u) \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$ verifique a condição $\Theta_s(u) = 0$. Então necessariamente $u = 0$.*

*Demonstração.* Basta observar que podemos tomar para representante da aplicação $u \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X}_s)$ a aplicação $\tilde{u} : \mathrm{I} \times \Omega \to \mathrm{X}_s$, definida por $\tilde{u}(\varepsilon, t) := u(t)$, e usar o corolário anterior. $\square$

**1.3.4 Observação.** O que a proposição 1.3.3 nos diz é que o seguinte diagrama, no qual as setas indicam as inclusões já verificadas,

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\Omega; \mathrm{X}_s) & \longrightarrow & \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X}_s) \\ \downarrow & & \downarrow \Theta_s \\ C^\infty_*(\Omega; \mathrm{X}) & \longrightarrow & \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X}) \end{array}$$

é comutativo, apesar da aplicação $\Theta_s$ em geral não ser injetora.

# Capítulo 2

# Um teorema do tipo Ovcyannikov-Treves

## 2.1 Aplicações lineares admissíveis numa escala

Neste capítulo, consideramos um problema abstrato linear da forma

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = A(t)u(t) + f(t)\ , \quad |t| < \delta \\ \\ u(0) = 0\,. \end{cases} \tag{2.1}$$

Esse problema, como já foi dito na introdução deste trabalho, foi estudado em escalas de espaços de Banach por Ovcyannikov e logo depois por F. Treves. Estaremos procurando uma formulação conveniente para (2.1) e soluções que devem ser funções generalizadas, definidas em um intervalo aberto $J_\delta := ]-\delta, \delta[$, com $\delta > 0$, a valores numa escala de espaços de Banach $(\mathrm{X}, (\mathrm{X_s}))$. Iniciamos o estudo do Teorema de Ovcyannikov-Treves introduzindo uma classe de aplicações lineares conveniente.

Seja $(\mathrm{X}, (\mathrm{X_s}))$ uma escala de espaços de Banach. Consideremos uma aplicação linear $A : \mathrm{X} \longrightarrow \mathrm{X}$ satisfazendo a propriedade de que para cada $s \in \mathrm{I}$ fixado

$$A|_{\mathrm{X}_s} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}_s; \mathrm{X}_r) \ \text{ para todo } 0 < r < s\,. \tag{2.2}$$

Para simplificar, sempre que quisermos nos referir a essa propriedade, diremos que a aplicação linear $A$ é uma *aplicação admissível*. Denotaremos por $\mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})$ o conjunto

das aplicações admissíveis. Tal conjunto é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial quando o munimos das operações pontuais.

Veremos agora como as aplicações admissíveis atuam sobre as aplicações generalizadas.

**2.1.1 Lema.** *Sejam* $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ *uma escala de espaços de Banach e* $\Omega$ *um subconjunto aberto e não vazio de* $\mathbb{R}^n$. *Sejam* $u \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$, $A \in \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})$, $\hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$ *um representante de* $u$ *e* $\mathcal{K} = (\mathrm{K}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência exaustiva de compactos para* $\Omega$. *Então são válidas as assertivas seguintes:*

**(a)** *Existe uma seqüência estritamente decrescente* $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathrm{I}$ *tal que para cada* $j \in \mathbb{N}$

$$u_j := \hat{u}|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_{s_j}] .$$

**(b)** *Para cada* $j \in \mathbb{N}$ *a aplicação* $\hat{v}_j$, *definida em* $\mathrm{I}\times\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j$ *por*

$$\hat{v}_j(\varepsilon, t) := A(u_j(\varepsilon, t)) \in \mathrm{X} ,$$

*é um elemento de* $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}]$.

**(c)** *Existe* $v \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$ *tal que, se* $\hat{v} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$ *for um representante qualquer de* $v$, *então*

$$\hat{v}|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} - \hat{v}_j \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}] .$$

*Demonstração.* O item **(a)** é imediato a partir das definições.

**(b)** Para cada $j \in \mathbb{N}$ temos que $u_j \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_{s_j}]$ e $A|_{\mathrm{X}_{s_j}} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}_{s_j}; \mathrm{X}_r)$ para cada $r \in ]0, s_j[$. Concluímos então, usando a proposição 1.1.13 (pág. 10), que $\hat{v}_j \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_r]$ e, em particular, que $\hat{v}_j \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}]$.

**(c)** Para cada $j \in \mathbb{N}$ seja $v_j \in \mathcal{G}(\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X})$ a classe de $\hat{v}_j$, resulta então, usando-se o item **(ii)** da proposição 1.2.12 (pág. 28), que existe $v \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$ tal que $v|_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} = v_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$. $\square$

Vamos verificar agora que a construção do elemento $v \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$ do lema 2.1.1 anterior não depende das escolhas feitas.

**2.1.2 Proposição.** *O elemento $v \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$ não depende do representante de $u$ e nem da seqüência exaustiva de compactos para $\Omega$.*

*Demonstração.* Seja $\hat{u}_1 \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$ um outro representante para $u$ e consideremos $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma outra seqüência exaustiva de compactos para $\Omega$. Seja $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em I estritamente decrescente e tal que para cada $k \in \mathbb{N}$

$$u_{1,k} := \hat{u}_1|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{L}_k} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{L}_k; \mathrm{X}_{s_k}] .$$

Além disso, seja $\hat{v}_{1,k} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{L}_k; \mathrm{X}_{s_k}]$ tal que

$$\hat{v}_{1,k}(\varepsilon, t) := A\big(u_{1,k}(\varepsilon, t)\big) \ , \quad (\varepsilon, t) \in \mathrm{I}\times\overset{\circ}{L}_k$$

e seja $\hat{v}_1 \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$ tal que

$$\hat{v}_1|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{L}_k} - \hat{v}_{1,k} \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{L}_k; \mathrm{X}_{s_k}] .$$

Vamos verificar que

$$\hat{v} - \hat{v}_1 \in \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{X}] .$$

Seja $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$ tal que $\overset{\circ}{\mathrm{K}} \neq \emptyset$. Será suficiente verificar que existe $r \in \mathrm{I}$ tal que

$$(\hat{v} - \hat{v}_1)|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{\mathrm{K}}} \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}; \mathrm{X}_r] .$$

Tomemos então $j \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$\mathrm{K} \subset \overset{\circ}{\mathrm{K}}_j \cap \overset{\circ}{L}_k .$$

Escolhemos $s \in \mathrm{I}$ tal que $(0 < s < \min\{s_k; s_j\})$

$$u_j \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_s] \ , \ u_{1,k} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{L}_k; \mathrm{X}_s] \ , \ u_j - u_{1,k} \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j \cap \overset{\circ}{L}_k; \mathrm{X}_s]$$

e ainda

$$A|_{\mathrm{X}_s} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}_s; \mathrm{X}_r)\ , \quad \text{para cada } 0 < r < s\,.$$

Assim, para $(\varepsilon, x) \in \mathrm{I} \times \overset{\circ}{\mathrm{K}}$, teremos

$$(\hat{v}_j - \hat{v}_{1,k})(\varepsilon, x) = A\big(u_j(\varepsilon, x) - u_{1,k}(\varepsilon, x)\big)$$

e, como

$$\big(\hat{v} - \hat{v}_1\big)\big|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{\mathrm{K}}} = \big((\hat{v} - \hat{v}_j) + (\hat{v}_j - \hat{v}_{1,k}) + (\hat{v}_{1,k} - \hat{v}_1)\big)\big|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{\mathrm{K}}}$$

e

$$u_j - u_{1,k} \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j \cap \overset{\circ}{L}_k; \mathrm{X}_s]\,,$$

resulta, pela proposição (1.1.13) (pág. 10), que

$$\big(\hat{v} - \hat{v}_1\big)\big|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{\mathrm{K}}} \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}; \mathrm{X}_r] \quad \text{para cada } 0 < r < s\,.$$

□

**2.1.3 Definição.** Sejam $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach e $\Omega$ um subconjunto aberto não vazio de $\mathbb{R}^n$. Dadas $A \in \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})$ e $u \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$, definimos a ação de $A$ sobre $u$, e denotamos esse resultado por $Au$, como a aplicação $v$, obtida no item **(c)** do lema 2.1.1.

Por comodidade, vamos resumir a construção feita no seguinte

**2.1.4 Teorema.** *Sejam $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach e $\emptyset \neq \Omega$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Existe uma aplicação bilinear*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X}) \times \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X}) & \to & \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X}) \\ & (A, u) & \mapsto & Au \end{array}$$

*definida de tal modo que, se $\mathrm{K}$ for um subconjunto compacto de $\Omega$ com $\overset{\circ}{\mathrm{K}} \neq \emptyset$ e se $\hat{u}$ for um representante qualquer de $u \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$, então um representante $\widehat{(Au)}|_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}}$ de $(Au)|_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}}$ é obtido por*

$$\widehat{(Au)}|_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}}(\varepsilon, t) = A(\hat{u}(\varepsilon, t))\ , \ (\varepsilon, t) \in \mathrm{I} \times \overset{\circ}{\mathrm{K}}\,.$$

**2.1.5 Observação.** Sejam $\emptyset \neq \Omega$ um aberto de $\mathbb{R}^n$, $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach, $A$ uma aplicação linear admissível, $u$ e $v$ elementos de $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$ e $k \in \overline{\mathbb{K}}$, então

(a) $A(u+v) = Au + Av$.

(b) $A(ku) = k(Au)$.

*Demonstração.* Imediata a partir das definições. Observamos apenas que, dados $k \in \overline{\mathbb{K}}$ e $u \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$, se $\hat{k} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathbb{K})$ for um representante qualquer de $k$ e $\hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$ for um representante qualquer de $u$, podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} \hat{k}\hat{u} : \mathrm{I} \times \Omega &\to \mathrm{X} \\ (\varepsilon, x) &\mapsto \hat{k}(\varepsilon)\hat{u}(\varepsilon, x) . \end{aligned}$$

É fácil verificar que $\hat{k}\hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$ e que $ku := \mathrm{classe}(\hat{k}\hat{u})$ é um elemento bem definido de $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$, isto é, que não depende dos particulares representantes usados em sua definição. □

**2.1.6 Observação.** É fácil verificar que tanto $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$ quanto $\mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})$ possuem uma estrutura de $\overline{\mathbb{K}}$ módulos.

Vamos agora considerar uma certa extensão da definição anterior. Fixemos um número real $a > 0$. Denotaremos com $J_a$ o intervalo aberto $]-a, a[$.

**2.1.7 Definição.** Sejam $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach e $a > 0$. Usaremos a notação $\mathcal{E}[J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]$ para indicar o conjunto das aplicações

$$\hat{A} : \mathrm{I} \times J_a \to \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})$$

tais que, para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$ e para cada $s \in \mathrm{I}$, a aplicação

$$J_a \ni t \mapsto \hat{A}(\varepsilon, t)|_{\mathrm{X}_s} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}_s; \mathrm{X}_r) , \text{ é de classe } C^\infty, \text{ para cada } 0 < r < s . \tag{2.3}$$

**2.1.8 Observação.** Por simplicidade (e comodidade), escreveremos

$$\hat{A}(\varepsilon, .) \in C^{\infty}(J_a; \mathcal{L}(\mathrm{X}_s; \mathrm{X}_r))$$

em lugar da expressão (2.3) usada acima.

**2.1.9 Definição.** Sejam $a > 0$ e $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach. Denotaremos por $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]$ o conjunto das aplicações

$$\hat{A} \in \mathcal{E}[J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]$$

tais que para cada $\mathrm{K} \subset\subset J_a$, e para cada $p \in \mathbb{N}$, existem $N \in \mathbb{N}$, $c > 0$ e $\eta \in \mathrm{I}$ tais que para cada $s \in \mathrm{I}$

$$\sup_{t \in \mathrm{K}} \|\hat{A}^{(p)}(\varepsilon, t)\|_{(s,r)} \leq \frac{c\varepsilon^{-N}}{s - r} \tag{2.4}$$

sempre que $\varepsilon \in ]0, \eta[$ e $0 < r < s$.

**2.1.10 Definição.** Sejam $a > 0$ e $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach. Denotaremos por $\mathcal{N}[J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]$ o conjunto das aplicações $\hat{A} \in \mathcal{E}[J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]$ verificando a propriedade de que, dados quaisquer $\mathrm{K} \subset\subset J_a$, $p \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{N}$, existem $c > 0$ e $\eta \in \mathrm{I}$ tais que, para cada $s \in \mathrm{I}$,

$$\sup_{t \in \mathrm{K}} \|\hat{A}^{(p)}(\varepsilon, t)\|_{(s,r)} \leq \frac{c\varepsilon^{q}}{s - r}, \tag{2.5}$$

sempre que $\varepsilon \in ]0, \eta[$ e $0 < r < s$.

**2.1.11 Observação.** Verifica-se facilmente, que o conjunto $\mathcal{E}[J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial, $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]$ é um $\mathbb{K}$-subespaço vetorial de $\mathcal{E}[J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]$ e que o conjunto $\mathcal{N}[J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]$ é um $\mathbb{K}$-subespaço vetorial de $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]$.

Justifica-se assim a introdução da seguinte

**2.1.12 Definição.** Sejam $a > 0$ e $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach. O espaço vetorial das *aplicações lineares generalizadas singulares* na escala $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$

é, por definição, o $\mathbb{K}$-espaço vetorial quociente

$$\mathcal{SG}(J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})) := \frac{\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]}{\mathcal{N}[J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]}.$$

Um elemento $A \in \mathcal{SG}(J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X}))$, será chamado *aplicação linear generalizada singular na escala* $(\mathrm{X}, (\mathrm{X_s}))$.

**2.1.13 Exemplo.** Um modo de se produzir alguns exemplos de aplicações $\hat{A} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]$ pode ser o seguinte:

Suponhamos que uma aplicação $A \in \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})$ verifique também a condição

**(OT)** existe uma constante $c > 0$ tal que para cada $s \in \mathrm{I}$ e para cada $r \in ]0, s[$ tenhamos para cada $x \in \mathrm{X}_s$

$$\|Ax\|_r \leq \frac{c}{s-r}.$$

Exemplos de escalas $(\mathrm{X}, (\mathrm{X_s}))$ e de operadores $A \in \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})$ verificando a condição **(OT)** são abundantes na literatura, em particular veja [29, pág. 151 a 155]. Consideremos agora uma aplicação $\lambda \in \mathcal{G}(J_a)$ e seja $\hat{\lambda} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_a]$ um seu representante. Definimos a aplicação $\hat{A} : \mathrm{I} \times J_a \to \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})$ do seguinte modo:

$$\mathrm{I} \times J_a \ni (\varepsilon, t) \mapsto \hat{A}(\varepsilon, t) := \hat{\lambda}(\varepsilon, t)A \in \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X}).$$

Verifica-se facilmente (para isso veja também o Lema 3.3.2 (pág. 105)), que $\hat{A} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]$.

Por razões técnicas, que aparecem na prova do Teorema 2.2.1, somos levados a introduzir também a seguinte

**2.1.14 Definição.** Sejam $a > 0$ e $(\mathrm{X}, (\mathrm{X_s}))$ uma escala de espaços de Banach. Diremos que uma aplicação $A \in \mathcal{SG}(J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X}))$ é *localmente limitada* se existir um representante $\hat{A} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]$ satisfazendo a propriedade de que para cada $\mathrm{K} \subset\subset J_a$, existem $c > 0$ e $\eta > 0$ tais que para cada $s \in \mathrm{I}$

$$\sup_{t \in \mathrm{K}} \|\hat{A}(\varepsilon, t)\|_{(s,r)} \leq \frac{c}{s-r} \tag{2.6}$$

para cada $0 < \varepsilon < \eta$ e para cada $0 < r < s$.

**2.1.15 Proposição.** *Sejam $a > 0$ e $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach. Se existir um representante de $A \in \mathcal{SG}(J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X}))$ satisfazendo (2.6), então todo representante de $A$ satisfará a mesma condição.*

*Demonstração.* De fato, sejam $\hat{A}$ e $\hat{A}_1$ em $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]$ representantes de A. Suponhamos que $\hat{A}$ verifique a condição (2.6). Fixemos $\mathrm{K} \subset\subset J_a$; logo existem $c_0 > 0$ e $\eta_0 \in \mathrm{I}$ tais que, para cada $s \in \mathrm{I}$ e para cada $0 < r < s$,

$$\sup_{t \in \mathrm{K}} \|\hat{A}(\varepsilon, t)\|_{(s,r)} \leq \frac{c_0}{s-r}\,, \quad \text{para cada } 0 < \varepsilon < \eta_0\,. \tag{2.7}$$

Como

$$\hat{A} - \hat{A}_1 \in \mathcal{N}[J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]\,,$$

segue-se que, para $p = q = 0$, existem $c_1 > 0$ e $\eta_1 \in \mathrm{I}$ tais que, para cada $s \in \mathrm{I}$ e para cada $0 < r < s$,

$$\sup_{t \in \mathrm{K}} \|(\hat{A} - \hat{A}_1)(\varepsilon, t)\|_{(s,r)} \leq \frac{c_1}{s-r}\,, \quad \text{para cada } 0 < \varepsilon < \eta_1\,. \tag{2.8}$$

Portanto, resulta de (2.7) e (2.8) que existem $c = c_0 + c_1 > 0$ e $\eta = \min(\eta_0\,, \eta_1) \in \mathrm{I}$ tais que para cada $s \in \mathrm{I}$ e para cada $0 < r < s$

$$\sup_{t \in \mathrm{K}} \|\hat{A}_1(\varepsilon, t)\|_{(s,r)} \leq \frac{c}{s-r}\,, \quad \text{para cada } 0 < \varepsilon < \eta\,.$$

□

Vamos agora definir a ação de um elemento $A \in \mathcal{SG}(J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X}))$ sobre um elemento $u \in \mathcal{G}(J_a; \mathrm{X})$.

**2.1.16 Lema.** *Sejam $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach e $J_a = ]-a, a[$, intervalo aberto com $a > 0$. Sejam $u \in \mathcal{G}(J_a; \mathrm{X})$, $\hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_a; \mathrm{X}]$ um representante de $u$, $A \in \mathcal{SG}(J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X}))$, $\hat{A} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]$ um representante de $A$ e $\mathcal{K} = (\mathrm{K}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma seqüência exaustiva de compactos para $J_a$. As seguintes assertivas são válidas.*

(a) *Existe uma seqüência estritamente decrescente* $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *em* I *tal que para cada* $j \in \mathbb{N}$

$$u_j := \hat{u}|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{o}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_{s_j}]$$

*e para cada* $r \in ]0, s_j[$

$$A_j := \hat{A}|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{o}{\mathrm{K}}_j; \mathcal{L}(\mathrm{X}_{s_j}; \mathrm{X}_r)]\,.$$

(b) *Para cada* $j \in \mathbb{N}$ *a aplicação* $\hat{v}_j$, *definida em* $\mathrm{I}\times\overset{o}{\mathrm{K}}_j$ *por*

$$\hat{v}_j(\varepsilon, t) := A_j(\varepsilon, t)\big(u_j(\varepsilon, t)\big) \in \mathrm{X}\,,$$

*é um elemento de* $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{o}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}]$.

(c) *Existe* $v \in \mathcal{G}(J_a; \mathrm{X})$ *tal que, se* $\hat{v} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_a; \mathrm{X}]$ *for um representante qualquer de* $v$, *então*

$$\hat{v}|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} - \hat{v}_j \in \mathcal{N}[\overset{o}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}]\,.$$

*Demonstração.* O item **(a)** é imediato a partir das definições dadas.

**(b)** Para cada $j \in \mathbb{N}$ temos que $u_j \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{o}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_{s_j}]$ e, para cada $r \in ]0, s_j[$ fixado, temos $A_j \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{o}{\mathrm{K}}_j; \mathcal{L}(\mathrm{X}_{s_j}; \mathrm{X}_r)]$. Concluímos então, usando a proposição 1.1.13 (pág. 10), que $\hat{v}_j \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{o}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_r]$ e, em particular, que $\hat{v}_j \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{o}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}]$.

**(c)** Para cada $j \in \mathbb{N}$ seja $v_j \in \mathcal{G}(\overset{o}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X})$ a classe de $\hat{v}_j$, resulta então, usando-se o item **(ii)** da proposição 1.2.12 (pág. 28), que existe $v \in \mathcal{G}(J_a; \mathrm{X})$ tal que $v|_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} = v_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$. □

Vamos agora verificar que a construção do elemento $v \in \mathcal{G}(J_a; \mathrm{X})$, no lema 2.1.16 anterior, não depende das escolhas feitas.

**2.1.17 Proposição.** *O elemento* $v \in \mathcal{G}(J_a; \mathrm{X})$, *do lema 2.1.16 anterior, não depende dos representantes de* $u$ *ou de* $A$ *e nem da seqüência exaustiva de compactos para* $J_a$.

*Demonstração.* Sejam $\hat{u}_1 \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_a; \mathrm{X}]$ e $\hat{A}_1 \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]$ outros representantes de $u$ e $A$ respectivamente, e seja $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma outra seqüência exaustiva de compactos para $J_a$. Seja $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma seqüência estritamente decrescente em I e tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenhamos

$$u_{1,k} := \hat{u}_1|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{L}_k} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{L}_k; \mathrm{X}_{s_k}]$$

e para cada $r \in ]0, s_k[$

$$A_{1,k} := \hat{A}|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{L}_k} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{L}_k; \mathcal{L}(\mathrm{X}_{s_k}; \mathrm{X}_r)]\,.$$

Além disso, seja $\hat{v}_{1,k} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{L}_k; \mathrm{X}]$ tal que

$$\hat{v}_{1,k}(\varepsilon, t) = A_{1,k}(\varepsilon, t)\big(u_{1,k}(\varepsilon, t)\big)\ , \quad (\varepsilon, t) \in \mathrm{I}\times\overset{\circ}{L}_k$$

e seja $\hat{v}_1 \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_a; \mathrm{X}]$ tal que

$$\hat{v}_1|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{L}_k} - \hat{v}_{1,k} \in \mathcal{N}[J_a; \mathrm{X}]\,.$$

Devemos verificar que

$$\hat{v} - \hat{v}_1 \in \mathcal{N}[J_a; \mathrm{X}]\,.$$

Para isso, será suficiente verificar que, dado $\mathrm{K} \subset\subset J_a$ com $\overset{\circ}{\mathrm{K}} \neq \emptyset$, existe $r \in \mathrm{I}$ tal que

$$(\hat{v} - \hat{v}_1)|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{\mathrm{K}}} \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}; \mathrm{X}_r]\,.$$

Tomemos então $j \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$\mathrm{K} \subset \overset{\circ}{\mathrm{K}}_j \cap \overset{\circ}{L}_k\,.$$

Escolhemos $s \in \mathrm{I}$ tal que $0 < s < \min\{s_k; s_j\}$ e tal que possamos escrever, para $r \in ]0, s[$,

$$u_j \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_s], \quad A_j \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathcal{L}(\mathrm{X}_s; \mathrm{X}_r)]\,,$$

$$u_{1,k} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{L}_k; \mathrm{X}_s], \quad A_{1,k} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{L}_k; \mathcal{L}(\mathrm{X}_s; \mathrm{X}_r)]\,,$$

e ainda

$$\left(\hat{u}_j - \hat{u}_{1,k}\right)\big|_{\mathrm{I}\times(\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j\cap\overset{\circ}{L}_k)} \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j \cap \overset{\circ}{L}_k; \mathrm{X}_s]\,.$$

Então, para cada $(\varepsilon, t) \in \mathrm{I}\times\overset{\circ}{\mathrm{K}}$, e para cada $r \in \mathrm{I}$, $0 < r < s$, teremos

$$\begin{aligned}(\hat{v}_j - \hat{v}_{1,k})(\varepsilon,t) = &\ A_j(\varepsilon,t)(u_j(\varepsilon,t)) - A_{1,k}(\varepsilon,t)(u_{1,k}(\varepsilon,t)) = \\ = &\ (A_j - A_{1,k})(\varepsilon,t)(u_j(\varepsilon,t)) - A_{1,k}((u_{1,k} - u_j)(\varepsilon,t))\,.\end{aligned}$$

Logo,

$$\left(\hat{v} - \hat{v}_1\right)\big|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{\mathrm{K}}} = \left((\hat{v} - \hat{v}_j) + (\hat{v}_j - \hat{v}_{1,k}) + (\hat{v}_{1,k} - \hat{v}_1)\right)\big|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{\mathrm{K}}} \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}; \mathrm{X}_r]\,.$$

Portanto,

$$(\hat{v} - \hat{v}_1)\big|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{\mathrm{K}}} \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}; \mathrm{X}_r]\,.$$

□

**2.1.18 Definição.** Sejam $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach. Dados $A \in \mathcal{SG}(J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X}))$ e $u \in \mathcal{G}(J_a; \mathrm{X})$, definimos a aplicação

$$A \cdot u \in \mathcal{G}(J_a; \mathrm{X})$$

como o elemento $v \in \mathcal{G}(J_a; \mathrm{X})$ obtido no item **(c)** do Lema 2.1.16 .

Para comodidade, vamos resumir a construção feita no seguinte

**2.1.19 Teorema.** *Sejam $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach, $a > 0$ e $J_a$ o intervalo $]-a, a[$. Existe uma aplicação bilinear*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathcal{SG}(J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})) \times \mathcal{G}(J_a; \mathrm{X}) & \to & \mathcal{G}(J_a; \mathrm{X}) \\ & (A, u) & \mapsto & A \cdot u \end{array}$$

*definida de tal modo que, se $\mathrm{K}$ for um subconjunto compacto de $J_a$ com $\overset{\circ}{\mathrm{K}} \neq \emptyset$, $\hat{A}$ for um representante qualquer de $A \in \mathcal{SG}(J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X}))$ e, se $\hat{u}$ for um representante qualquer de $u \in \mathcal{G}(J_a; \mathrm{X})$, então um representante $\widehat{(A \cdot u)}|_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}}$ de $(A \cdot u)|_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}}$ é obtido por*

$$\widehat{(A \cdot u)}|_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}}(\varepsilon, t) = \hat{A}(\varepsilon, t)(\hat{u}(\varepsilon, t))\ ,\ t \in \overset{\circ}{\mathrm{K}}\,.$$

## 2.2 Um resultado de existência de soluções

O resultado que apresentamos a seguir é uma possível versão do teorema clássico de Ovcyannikov-Treves no contexto da teoria de Colombeau. Sua demonstração segue, em linhas gerais, aquela apresentada em [29], que chamaremos contexto clássico, com as adaptações necessárias ao novo contexto.

**2.2.1 Teorema.** *Sejam $a > 0$, $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach e $A \in \mathcal{SG}(J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X}))$ uma aplicação generalizada singular na escala $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$. Suponhamos também que $A$ seja localmente limitada. Tomemos $f \in \mathcal{G}(J_a; \mathrm{X})$ e $u_0 \in \overline{\mathrm{X}}$. Então existe $\delta \in ]0, a[$ e $u \in \mathcal{G}(J_\delta; \mathrm{X})$ satisfazendo*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = A \cdot u + f \quad \text{em } \mathcal{G}(J_\delta; \mathrm{X}) \\ \\ u(0) = u_0 \,. \end{cases} \tag{2.9}$$

*Demonstração.* No que se segue, $e$ é a constante tal que $\ln(e) = 1$.

Sejam $\hat{f} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_a; \mathrm{X}]$, $\hat{A} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]$ e $\hat{u}_0 \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathrm{X})$ representantes respectivamente de $f$, $A$ e $u_0$. Fixemos $0 < b < a' < a$. Então existe $s_0 \in \mathrm{I}$ tal que

$$\hat{f}|_{\mathrm{I} \times J_{a'}} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_{a'}; \mathrm{X}_{s_0}] \ \text{ e } \ \hat{u}_0 \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}_{s_0}) \,.$$

Além disso, existem $N \in \mathbb{N}$, $c > 0$ e $\eta \in \mathrm{I}$ tais que

$$\sup_{t \in \overline{J}_b} \|\hat{f}(\varepsilon, t)\|_{s_0} \leq c\varepsilon^{-N} \,, \quad 0 < \varepsilon < \eta \,, \tag{2.10}$$

$$\|\hat{u}_0(\varepsilon)\|_{s_0} \leq c\varepsilon^{-N} \,, \quad 0 < \varepsilon < \eta \,, \tag{2.11}$$

e ainda, sendo $\hat{A}$ localmente limitada, temos que para cada $0 < s < s_0$,

$$\sup_{t \in \overline{J}_b} \|\hat{A}(\varepsilon, t)\|_{(s,r)} \leq \frac{c}{s - r} \,, \quad 0 < \varepsilon < \eta \,, \quad \text{para cada } 0 < r < s. \tag{2.12}$$

Podemos ainda escolher a constante $c$ suficientemente grande de tal modo que também se verifique a desigualdade $(c\ e)^{-1} < b$. Para cada $\varepsilon \in ]0, \eta[$ fixado, definimos a seqüência $(v_k^\varepsilon)_{k \in \mathbb{N}}$ do seguinte modo:

$$v_0^\varepsilon(t) := \hat{u}_0(\varepsilon) + \int_0^t \hat{f}(\varepsilon, \xi)\, d\xi, \quad t \in J_b \,,$$

e, para cada $k \in \mathbb{N}$ e $t \in J_b$,

$$v_{k+1}^{\varepsilon}(t) := \hat{u}_0(\varepsilon) + \int_0^t \hat{f}(\varepsilon, \xi)\, d\xi \; + \int_0^t \hat{A}(\varepsilon, \xi)(v_k^{\varepsilon}(\xi))\, d\xi \,. \tag{2.13}$$

Vamos verificar, por indução, e simultaneamente, que a seqüência $(v_k^{\varepsilon})_{k\in\mathbb{N}}$ não só está bem definida como também

$$v_k^{\varepsilon} \in C_*^{\infty}(J_b; \mathrm{X}) \;\; \text{para cada } k \in \mathbb{N}.$$

Fixemos uma seqüência exaustiva de compactos $(\mathrm{K}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ para $J_b$. Iniciamos então com $v_0^{\varepsilon}$. Fixado $j \in \mathbb{N}$, como, para cada $0 < s < s_0$, $\hat{f}(\varepsilon, \cdot) \in C^{\infty}(J_b; \mathrm{X}_s)$, teremos então

$$v_0^{\varepsilon}|_{\overset{0}{\mathrm{K}}_j} \in C^{\infty}(\overset{0}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_s)\;, \;\; \text{para cada} \;\; 0 < s < s_0\,.$$

Fixemos $0 < s < s_0$ qualquer e suponhamos que

$$v_k^{\varepsilon}|_{\overset{0}{\mathrm{K}}_j} \in C^{\infty}(\overset{0}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_s)\,.$$

Como, para cada $0 < r < s$,

$$\hat{A}(\varepsilon, \cdot) \in C^{\infty}(J_b; \mathcal{L}(\mathrm{X}_s; \mathrm{X}_r))\,,$$

resulta da proposição 1.1.13 (pág. 10), que para cada $0 < r < s$

$$\hat{A}(\varepsilon, \cdot)(v_k^{\varepsilon}(.))|_{\overset{0}{\mathrm{K}}_j} \in C^{\infty}(\overset{0}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_r)\,.$$

Portanto, para cada $0 < r < s$, teremos $v_{k+1}^{\varepsilon}|_{\overset{0}{\mathrm{K}}_j} \in C^{\infty}(\overset{0}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_r)$. Sendo $0 < s < s_0$ qualquer, podemos escrever

$$v_k^{\varepsilon}|_{\overset{0}{\mathrm{K}}_j} \in C^{\infty}(\overset{0}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_s) \tag{2.14}$$

*para cada* $0 < s < s_0$ e para cada $k \in \mathbb{N}$. Em particular, para cada $0 < \varepsilon < \eta$,

$$v_k^{\varepsilon} \in C_*^{\infty}(J_b; \mathrm{X}) \;\; \text{para cada} \;\; k \in \mathbb{N}\,.$$

Definimos agora, para cada $0 < \varepsilon < \eta$ fixado, uma nova seqüência $w_k^\varepsilon \in C_*^\infty(J_b; \mathrm{X})$ do seguinte modo: pomos $w_0^\varepsilon := v_0^\varepsilon$ e para cada $k \geq 1$

$$w_k^\varepsilon := v_k^\varepsilon - v_{k-1}^\varepsilon \,.$$

Graças a (2.13) temos, para cada $t \in J_b$,

$$w_{k+1}^\varepsilon(t) = \int_0^t \hat{A}(\varepsilon, \xi)(w_k^\varepsilon(\xi))\, d\xi \,, \quad \text{para cada } \; 0 < \varepsilon < \eta$$

e para cada $k \in \mathbb{N}$. Definimos agora, para cada $\varepsilon \in ]0, \eta[$ e cada $t \in \overline{J}_b$,

$$M^\varepsilon(t) := \|\hat{u}_0(\varepsilon)\|_{s_0} + \left| \int_0^t \|\hat{f}(\varepsilon, \xi)\|_{s_0}\, d\xi \right| . \tag{2.15}$$

É fácil verificar que a função $M^\varepsilon(t)$ verifica a seguinte propriedade: em cada um dos intervalos $]0, b[$ ou $]-b, 0[$, se $|t_1| \leq |t_2|$, então $M^\varepsilon(t_1) \leq M^\varepsilon(t_2)$; além disso, existe uma constante $L > 0$ tal que, para cada $t \in J_b$ se verifica

$$M^\varepsilon(t) \leq \|\hat{u}_0(\varepsilon)\|_{s_0} + |t| \sup_{\xi \in J_b} \|\hat{f}(\varepsilon, \xi)\|_{s_0} \leq L\varepsilon^{-N} \,. \tag{2.16}$$

Usaremos indução para mostrar que para cada $t \in \overline{J}_b$, para cada $0 < \varepsilon < \eta$, para cada $k \in \mathbb{N}$ e qualquer que seja $0 < s < s_0$,

$$\|w_k^\varepsilon(t)\|_s \leq M^\varepsilon(t) \left( \frac{ce|t|}{s_0 - s} \right)^k \tag{2.17}$$

com a constante $c > 0$ a mesma que aparece em (2.10), (2.12) e (2.11). Fixemos $0 < s < s_0$. Para $k = 0$ teremos

$$\begin{aligned} \|v_0^\varepsilon(t)\|_s &\leq \|\hat{u}_0(\varepsilon)\|_s + \|\int_0^t \hat{f}(\varepsilon, \xi)\, d\xi\|_s \leq \|\hat{u}_0(\varepsilon)\|_{s_0} + \|\int_0^t \hat{f}(\varepsilon, \xi)\, d\xi\|_{s_0} \leq \\ &\leq \|\hat{u}_0(\varepsilon)\|_{s_0} + |\int_0^t \|\hat{f}(\varepsilon, \xi)\|_{s_0}\, d\xi| = M^\varepsilon(t) \,, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|v_0^\varepsilon(t)\|_s = \|w_0^\varepsilon(t)\|_s \leq M^\varepsilon(t) \,.$$

A desigualdade acima é verdadeira para cada $0 < s < s_0$. Para $k = 1$ teremos

$$\|w_1^\varepsilon(t)\|_s \leq \left| \int_0^t \|\hat{A}(\varepsilon, \xi)(v_0^\varepsilon(\xi))\|_s\, d\xi \right| .$$

Escolhemos $r > 0$ de modo que $0 < s < s + r < s_0$. Observemos que $v_0^\varepsilon(\xi) \in \mathrm{X}_{s_0}$ e, portanto, $v_0^\varepsilon(\xi) \in \mathrm{X}_{s+r}$. Sendo $A$ admissível, teremos

$$\hat{A}(\varepsilon, \xi)(v_0^\varepsilon(\xi)) \in \mathrm{X}_s \,.$$

Daí, usando (2.12) resulta

$$\|\hat{A}(\varepsilon, \xi)(v_0^\varepsilon(\xi))\|_s \leq \frac{c\, \|v_0^\varepsilon(\xi)\|_{(s+r)}}{r} \,.$$

Portanto,

$$\|w_1^\varepsilon(t)\|_s \leq \frac{c}{r} \left| \int_0^t \|v_0^\varepsilon(\xi)\|_{s+r}\, d\xi \right| \,.$$

Já vimos que (caso $k = 0$)

$$\|v_0^\varepsilon(t)\|_s \leq M^\varepsilon(t)$$

para cada $0 < s < s_0$ e, portanto,

$$\|v_0^\varepsilon(t)\|_{s+r} \leq M^\varepsilon(t) \,.$$

Usando a propriedade de não decrescimento de $M^\varepsilon$, resulta

$$\|w_1^\varepsilon(t)\|_s \leq \frac{c|t|}{r} M^\varepsilon(t) \,.$$

Sendo $r \in ]0, s_0 - s[$ arbitrário, segue-se que

$$\|w_1^\varepsilon(t)\|_{\mathrm{X}_s} \leq M^\varepsilon(t) \left( \frac{c\, e|t|}{s_0 - s} \right) ,$$

A desigualdade acima é válida para cada $0 < s < s_0$.

Suponhamos agora que (2.17) seja válida para $k \geq 1$ e mostremos que também será verdadeira para $k + 1$. Fixemos então $0 < s < s_0$ e tomemos $r > 0$ de tal modo que $0 < s < s + r < s_0$. Como $w_k^\varepsilon(\xi) \in \mathrm{X}_{s+r}$, segue-se que $\hat{A}(\varepsilon, \xi)(w_k^\varepsilon(\xi)) \in \mathrm{X}_s$; daí, usando (2.12),

$$\|w_{k+1}^\varepsilon(t)\|_s \leq \frac{c}{r} \left| \int_0^t \|w_k^\varepsilon(\xi)\|_{(s+r)}\, d\xi \right| \,.$$

Usando a hipótese de indução, resulta

$$\|w_{k+1}^{\varepsilon}(t)\|_s \leq M^{\varepsilon}(t)\frac{c}{r}\left(\frac{c\,e}{s_0 - s - r}\right)^k \frac{|t|^{k+1}}{k+1}.$$

Para cada $k \geq 1$ seja $r_k = \dfrac{s_0 - s}{k+1}$, então

$$s_0 - s - r_k = \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)(s_0 - s) = \frac{k}{k+1}(s_0 - s).$$

Tendo escolhido $r_k$ desse modo, teremos

$$\begin{aligned}
\|w_{k+1}^{\varepsilon}(t)\|_s &\leq M^{\varepsilon}(t)c\frac{k+1}{s_0 - s}(c^k e^k)\frac{(k+1)^k}{k^k(s_0 - s)^k}\frac{|t|^{k+1}}{k+1} = \\
&= M^{\varepsilon}(t)c^{k+1}\frac{1}{(s_0 - s)^{k+1}}e^k\left(\frac{k+1}{k}\right)^k |t|^{k+1} \leq \\
&\leq M^{\varepsilon}(t)\left(\frac{c}{s_0 - s}\right)^{k+1} e^{k+1}|t|^{k+1} = \\
&= M^{\varepsilon}(t)\left(\frac{c\,e}{s_0 - s}\right)^{k+1} |t|^{k+1},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|w_{k+1}^{\varepsilon}(t)\|_s \leq M^{\varepsilon}(t)\left(\frac{c\,e}{s_0 - s}\right)^{k+1} |t|^{k+1}.$$

A desigualdade é válida para cada $0 < s < s_0$.

Para cada $0 < s < s_0$ fixado, definimos $B_s := \{t \in J_b \ / \ |t| < (c\,e)^{-1}(s_0 - s)\}$. Resulta de (2.16) e de (2.17) que a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} w_k^{\varepsilon}(t) \tag{2.18}$$

converge absolutamente e uniformemente sobre as partes compactas de $B_s$, na topologia de $X_s$.

Seja $\delta := \dfrac{s_0}{c\,e}$ e $J_\delta := \{t \in J_b \ / \ |t| < \delta\}$. Para cada $\varepsilon \in ]0, \eta[$ definimos a função $u^{\varepsilon} : J_\delta \to X$ do seguinte modo: dado $t_0 \in J_\delta$, existe $0 < s < s_0$ tal que $t_0 \in B_s$. Como a série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} w_k^{\varepsilon}(t_0)$$

é convergente em $X_s$, pomos

$$u^\varepsilon(t_0) := \sum_{k=0}^{\infty} w_k^\varepsilon(t_0) = \lim_{k\to\infty} v_k^\varepsilon(t_0) \text{ em } X_s\,. \tag{2.19}$$

Observe que, se $t_0 \in B_r$, com $0 < r < s$, então, como $B_s \subset B_r$ e $X_s \hookrightarrow X_r$, segue-se que o elemento $u^\varepsilon(t_0) \in X_r$ está bem definido. A convergência uniforme sobre compactos de $B_s$, nos dá ainda que $u^\varepsilon|_{B_s} \in C(B_s; X_s)$ para cada $0 < s < s_0$. Além disso, pelo que acabamos de verificar, podemos concluir que $u^\varepsilon|_{B_{s+\theta}} \in C(B_{s+\theta}; X_{s+\theta})$. Resulta da definição de $v_k^\varepsilon$ que para cada $t \in B_s$

$$u^\varepsilon(t) = \hat{u}_0(\varepsilon) + \int_0^t \hat{f}(\varepsilon,\xi)d\xi + \int_0^t \hat{A}(\varepsilon,\xi)(u^\varepsilon(\xi))\, d\xi \ , \ t \in B_s\,. \tag{2.20}$$

Seja $0 < \theta < s_0 - s$, qualquer. Sendo $A$ admissível, ou seja, sendo $\hat{A}(\varepsilon,.) \in C^\infty(J_b; \mathcal{L}(X_s; X_r))$, resulta

$$u^\varepsilon|_{B_{s+\theta}} \in C^1(B_{s+\theta}; X_s)\,,$$

e daí resulta, pela arbitrariedade de $\theta$,

$$u^\varepsilon|_{B_s} \in C^1(B_s; X_s), \ \ 0 < s < s_0\,.$$

Repetindo o argumento, concluímos que para cada $\varepsilon \in ]0,\eta[$,

$$u^\varepsilon|_{B_s} \in C^\infty(B_s; X_s)\,. \tag{2.21}$$

Vamos agora verificar uma desigualdade que também será importante mais adiante quando discutirmos a unicidade de solução generalizada. A função $u^\varepsilon$ que verifica (2.20) satisfaz, para cada $0 < s < s_0$ e para cada $t \in B_s$

$$\|u^\varepsilon(t)\|_s \le \|\hat{u}_0(\varepsilon)\|_{s_0} + \frac{|t|}{s_0 - s - ce|t|}\left\{ce\|\hat{u}_0(\varepsilon)\|_{s_0} + \sup_{|\xi|\le b}\|\hat{f}(\varepsilon,\xi)\|_{s_0}\right\}. \tag{2.22}$$

De fato, temos, para cada $t \in B_s$,

$$M^\varepsilon(t) \le \|\hat{u}_0(\varepsilon)\|_{s_0} + |t| \sup_{|\xi|\le b}\|\hat{f}(\varepsilon,\xi)\|_{s_0}\,.$$

Agora, por (2.19), temos

$$u^\varepsilon(t) = w_0^\varepsilon(t) + \sum_{k=1}^{+\infty} w_k^\varepsilon(t)\,,$$

daí,

$$\|u^\varepsilon(t)\|_s \leq \|w_0^\varepsilon(t)\|_{s_0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \|w_k^\varepsilon(t)\|_{s_0}\,.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|u^\varepsilon(t)\|_s &\leq \|\hat{u}_0(\varepsilon)\|_{s_0} + |t| \sup_{|\xi|\leq b} \|\hat{f}(\varepsilon,\xi)\|_{s_0} + M^\varepsilon(t) \sum_{k\geq 1} \left(\frac{ce|t|}{s_0 - s}\right)^k \leq \|\hat{u}_0(\varepsilon)\|_{s_0} + \\
&+ |t| \sup_{|\xi|\leq b} \|\hat{f}(\varepsilon,\xi)\|_{s_0} + \left(\|\hat{u}_0(\varepsilon)\|_{s_0} + |t| \sup_{|\xi|\leq b} \|\hat{f}(\varepsilon,\xi)\|_{s_0}\right)\left(\frac{ce|t|}{s_0 - s - ce|t|}\right) = \\
&= \|\hat{u}_0(\varepsilon)\|_{s_0} + \sup_{|\xi|\leq b} \|\hat{f}(\varepsilon,\xi)\|_{s_0}\left(|t| + \frac{ce|t|^2}{s_0 - s - ce|t|}\right) + \|\hat{u}_0(\varepsilon)\|_{s_0}\left(\frac{ce|t|}{s_0 - s - ce|t|}\right) = \\
&= \|\hat{u}_0(\varepsilon)\|_{s_0} + \sup_{|\xi|\leq b} \|\hat{f}(\varepsilon,\xi)\|_{s_0}\left[\frac{|t|(s_0 - s)}{s_0 - s - ce|t|}\right] + \|\hat{u}_0(\varepsilon)\|_{s_0}\left(\frac{ce|t|}{s_0 - s - ce|t|}\right) \leq \\
&\leq \|\hat{u}_0(\varepsilon)\|_{s_0} + \sup_{|\xi|\leq b} \|\hat{f}(\varepsilon,\xi)\|_{s_0}\left(\frac{|t|}{s_0 - s - ce|t|}\right) + \|\hat{u}_0(\varepsilon)\|_{s_0}\left(\frac{ce|t|}{s_0 - s - ce|t|}\right) = \\
&= \|\hat{u}_0(\varepsilon)\|_{s_0} + \frac{|t|}{s_0 - s - ce|t|}\left[ce\|\hat{u}_0(\varepsilon)\|_{s_0} + \sup_{|\xi|\leq b} \|\hat{f}(\varepsilon,\xi)\|_{s_0}\right].
\end{aligned}$$

Portanto, obtivemos (2.22). Em particular, utilizando (2.10) e (2.11), teremos também o seguinte: para cada $s \in ]0, s_0[$ e para cada $\mathrm{K} \subset\subset B_s$ existe uma constante $\mathrm{M} = \mathrm{M}(s, K) > 0$ tal que para cada $0 < \varepsilon < \eta$, verifica-se

$$\sup_{t\in \mathrm{K}} \|u^\varepsilon(t)\|_s \leq \mathrm{M}\varepsilon^{-N}\,. \tag{2.23}$$

Definimos a função $\hat{u} : \mathrm{I} \times J_\delta \to \mathrm{X}$ do seguinte modo:

$$\hat{u}(\varepsilon, t) := \begin{cases} u^\varepsilon(t) & \text{se } \varepsilon \in ]0, \eta[ \\ u^{\frac{\eta}{2}}(t) & \text{se } \varepsilon \in [\eta, 1]\,. \end{cases}$$

Em primeiro lugar, vamos mostrar que $\hat{u} \in \mathcal{E}[J_\delta; \mathrm{X}]$. Fixemos uma seqüência exaustiva de compactos $(\mathrm{K}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ para $J_\delta$. Agora, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $s \in ]0, s_0[$ tal que

$$\mathrm{K}_j \subset B_s\,.$$

Por (2.21), temos, para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$, que $\hat{u}(\varepsilon,\cdot)|_{\overset{0}{\mathrm{K}}_j} \in C^\infty(\overset{0}{\mathrm{K}}_j;\mathrm{X}_s)$. Portanto, para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$

$$\hat{u}(\varepsilon,\cdot) \in C^\infty_*(J_\delta;\mathrm{X})\,.$$

Vamos mostrar agora que

$$\hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_\delta;\mathrm{X}]\,.$$

Tomemos a seqüência exaustiva de compactos $(\mathrm{K}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ para $J_\delta$ e mostremos que para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $s \in \mathrm{I}$ tal que

$$\hat{u}|_{\mathrm{I}\times\overset{0}{\mathrm{K}}_j} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{0}{\mathrm{K}}_j;\mathrm{X}_s]\,.$$

Fixemos então $j \in \mathbb{N}$ e consideremos $L \subset\subset \overset{0}{\mathrm{K}}_j$. A idéia aqui é usar indução sobre a ordem de derivação $m \in \mathbb{N}$. A prova será conseqüência da seguinte afirmação cuja prova faremos mais adiante

**2.2.2 Afirmação.** *Seja $0 < s < s_0$ fixado. Para cada $p \in \mathbb{N}$ e quaisquer que sejam $s \le r < l < s_0$, existem $\mathrm{M} > 0$, $N \in \mathbb{N}$ e $\eta \in \mathrm{I}$ tais que*

$$\sup_{t\in\overline{B}_l} \|\hat{u}^{(p)}(\varepsilon,t)\|_r \le \mathrm{M}\varepsilon^{-N} \quad \textit{para cada } 0 < \varepsilon < \eta\,. \tag{2.24}$$

Para concluirmos a moderação de $\hat{u}$, a partir dessa afirmação, será suficiente escolhermos $s \le r < l < s_0$ tais que

$$\mathrm{K}_j \subset\subset B_l \subset B_r \subset B_s\,.$$

Seja $u \in \mathcal{G}(J_\delta;\mathrm{X})$ a classe de $\hat{u}$. Da definição do produto $A\cdot u$, resulta que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = A\cdot u + f \quad \text{em} \quad \mathcal{G}(J_\delta;\mathrm{X}) \\[2ex] u(0) = u_0\,. \end{cases} \tag{2.25}$$

□

*Prova da Afirmação 2.2.2.* A prova será feita por indução sobre a ordem de derivação $p$. Verifiquemos, em primeiro lugar, a afirmação para $p = 0$. Sejam $0 < r < l < s_0$. Temos que $\overline{B}_l \subset\subset B_r$ e, portanto, pela desigualdade (2.23), resulta que existe uma constante $\mathrm{M} > 0$ tal que, para cada $0 < \varepsilon < \eta$

$$\sup_{t \in \overline{B}_l} \|\hat{u}(\varepsilon, t)\|_r \leq \mathrm{M}\, \varepsilon^{-N}.$$

Verifiquemos agora a afirmação para $p = 1$. Resulta de (2.20) que, para cada $0 < \varepsilon < \eta$ e para cada $t \in B_r$,

$$\frac{d\hat{u}}{dt}(\varepsilon, t) = \hat{A}(\varepsilon, t)(\hat{u}(\varepsilon, t)) + \hat{f}(\varepsilon, t),$$

daí, para $t \in \overline{B}_l$

$$\|\frac{d\hat{u}}{dt}(\varepsilon, t)\|_r \leq \|\hat{f}(\varepsilon, t)\|_r + \|\hat{A}(\varepsilon, t)(\hat{u}(\varepsilon, t))\|_r.$$

Como vale a afirmação para o caso $p = 0$, segue-se que para cada $r_1 > 0$ tal que $r < r_1 < l$ e $t \in \overline{B}_l$ existem constantes $C_1 > 0$ e $M > 0$ tais que,

$$\|\frac{d\hat{u}}{dt}(\varepsilon, t)\|_r \leq c\varepsilon^{-N} + C_1 \|\hat{u}(\varepsilon, t)\|_{r_1} \leq \mathrm{M}\varepsilon^{-N}.$$

Seja $m \geq 1$ e suponhamos que a afirmação seja verdadeira para cada $p$ tal que $0 \leq p \leq m$. Vamos verificá-la também para $p = m + 1$. Para cada $0 < \varepsilon < \eta$ e $t \in B_r$ temos

$$\|\hat{u}^{(m+1)}(\varepsilon, t)\|_r \leq \|\hat{f}^{(m)}(\varepsilon, t)\|_r + \|(\hat{A}(\varepsilon, t)(\hat{u}(\varepsilon, t)))^{(m)}\|_r. \tag{2.26}$$

Usando a Proposição 1.1.12 (pág. 9), teremos

$$\left(\hat{A}(\varepsilon, t)(\hat{u}(\varepsilon, t))\right)^{(m)} = \sum_{q=0}^{m} \binom{m}{q} \hat{A}^{(q)}\left(\hat{u}^{(m-q)}(\varepsilon, t)\right).$$

Como $\hat{f}|_{\mathrm{I} \times J_\delta} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_\delta; \mathrm{X}_r]$ e $\hat{A}|_{\mathrm{I} \times J_\delta} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_\delta; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]$, resulta que existem constantes $N_1 \in \mathbb{N}$, $\mathrm{M}_1 > 0$ e $0 < \eta_1 < \eta$ tais que

$$\sup_{t \in \overline{B}_l} \|\hat{f}^{(m)}(\varepsilon, t)\|_r \leq \mathrm{M}_1\, \varepsilon^{-N_1} \quad \text{para cada } 0 < \varepsilon < \eta_1$$

e para cada $q = 0, 1, \ldots, m$ e $0 < r < r_1 < l$

$$\sup_{t \in \overline{B}_l} \|\hat{A}^{(q)}(\varepsilon, t)\|_{(r_1, r)} \leq \mathrm{M}_1 \, \varepsilon^{-N_1} \quad \text{para cada} \quad 0 < \varepsilon < \eta_1 \, .$$

Logo, para $t \in \overline{B}_l$

$$\|\big(\hat{A}(\varepsilon, t)(\hat{u}(\varepsilon, t))^{(m)}\|_r \leq \sum_{q=0}^{m} \mathrm{M}_1 \binom{m}{q} \varepsilon^{-N_1} \|\hat{u}^{(m-q)}(\varepsilon, t)\|_{r_1} \, .$$

Usando a hipótese de indução, segue-se que existem constantes $\mathrm{M}_2 > 0$, $N_2 \in \mathbb{N}$ e $0 < \eta_2 < \eta_1$ tais que para cada $t \in \overline{B}_l$,

$$\|\hat{u}^{(m+1)}(\varepsilon, t)\|_r \leq \mathrm{M}_2 \, \varepsilon^{-N_2} \quad \text{para cada } 0 < \varepsilon < \eta_2 \, .$$

□

**2.2.3 Proposição.** *A função $u \in \mathcal{G}(J_\delta; \mathrm{X})$, obtida no* Teorema 2.2.1, *satisfaz a seguinte propriedade: existe $s_0 \in \mathrm{I}$ tal que para cada $s \in ]0, s_0[$ existe uma aplicação $v \in \mathcal{G}(B_s; \mathrm{X}_s)$ onde $B_s := J_{\delta(s_0 - s)}$ tal que (para a definição de $\Theta_s$ veja a pág. 35)*

$$u|_{B_s} = \Theta_s(v) \, .$$

*Demonstração.* De fato, por construção, obtivemos um representante $\hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_\delta; \mathrm{X}]$ de $u$ que verifica, para cada $0 < s < s_0$, a condição

$$\hat{u}(\varepsilon, \cdot)|_{B_s} \in C^\infty(B_s; \mathrm{X}_s)$$

para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$. Vamos então verificar que

$$\hat{u}|_{\mathrm{I} \times B_s} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[B_s; \mathrm{X}_s] \, .$$

De fato, dado $\mathrm{K} \subset\subset B_s$, podemos repetir todo o argumento de indução, que foi baseado no fato de $\hat{u}$ verificar (2.22) e, conseqüentemente, concluirmos a Afirmação 2.2.2, isto é, para cada $p \in \mathbb{N}$ existem $c > 0$ , $N \in \mathbb{N}$ e $\eta \in \mathrm{I}$ tais que

$$\sup_{t \in \mathrm{K}} \|\hat{u}^{(p)}(\varepsilon, t)\|_s \leq c\varepsilon^{-N} \quad \text{para cada} \quad 0 < \varepsilon < \eta \, .$$

Tomamos então $v :=$ classe$(\hat{u}|_{\mathrm{I} \times B_s})$ em $\mathcal{G}(B_s; \mathrm{X}_s)$. □

Os seguintes Corolários seguem-se facilmente do que foi visto acima e são enunciados apenas para comparação com as formulações clássicas.

**2.2.4 Corolário.** *Seja* $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ *uma escala de espaços de Banach,* $a > 0$ *e* $A \in \mathcal{SG}(J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X}))$ *uma aplicação generalizada singular na escala* $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ *e* localmente limitada. *Dados* $f \in \mathcal{G}(J_a; \mathrm{X}_1)$ *e* $u_0 \in \overline{\mathrm{X}}_1$, *existe* $\delta \in ]0, a[$ *e* $u \in \mathcal{G}(J_\delta; \mathrm{X})$ *satisfazendo*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = A.u + \Theta_1(f) \quad \text{em } \mathcal{G}(J_\delta; \mathrm{X}) \\ \\ u(0) = \Theta_1(u_0)\,. \end{cases} \tag{2.27}$$

**2.2.5 Corolário.** *Fixemos* $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ *uma escala de espaços de Banach. Suponhamos que sejam dados*

**(i)** *uma aplicação* $A \in \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})$ *admissível para a qual exista uma constante* $C > 0$ *verificando*

$$\|A\|_{(s,r)} \leq \frac{C}{s-r} \quad \text{para cada } 0 \leq r < s\,;$$

**(ii)** *um número* $T > 0$ *e uma aplicação* $f \in \mathcal{G}(J_T; \mathrm{X}_1)$ *;*

**(iii)** *uma aplicação* $u_0 \in \overline{\mathrm{X}}_1$ *.*

*Então existem* $\delta > 0$ *e* $u \in \mathcal{G}(J_\delta; \mathrm{X})$ *tais que*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + \Theta_1(f) \\ \\ u(0) = \Theta_1(u_0)\,. \end{cases} \tag{2.28}$$

## 2.3 Unicidade de soluções

Nesta seção, estudamos algumas condições que nos permitem obter unicidade de soluções para o problema (2.9).

**2.3.1 Teorema.** *Sejam $a > 0$, $(\mathrm{X}, (\mathrm{X_s}))$ uma escala de espaços de Banach e $A \in \mathcal{SG}(J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X}))$ uma aplicação generalizada singular na escala $(\mathrm{X}, (\mathrm{X_s}))$. Suponha que $A$ seja localmente limitada e suponha também que para algum $\delta \in ]0, a[$, a aplicação $v \in \mathcal{G}(J_\delta; \mathrm{X})$ seja solução de*

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = A \cdot v \\ \\ v(0) = 0\,. \end{cases} \tag{2.29}$$

*Então, existe $\alpha \in ]0, \delta[$ tal que $v|_{J_\alpha} = 0$.*

*Demonstração.* Seja $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência estritamente crescente em $]0, \delta[$ e tal que $\alpha_n \longrightarrow \delta$, $n \longrightarrow +\infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $K_n := \overline{J}_{\alpha_n}$, então $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência exaustiva de compactos (intervalos fechados com centro em 0) para $J_\delta$. Fixemos representantes $\hat{v} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_b; \mathrm{X}]$ e $\hat{A} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]$ para $v$ e para $A$ respectivamente. Resulta de (2.29) que existem aplicações $\hat{h} \in \mathcal{N}[J_\delta; \mathrm{X}]$ e $\hat{g} \in \mathcal{N}(\mathrm{X})$ tais que para cada $(\varepsilon, t) \in \mathrm{I} \times J_\delta$ verifica-se

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{v}}{dt}(\varepsilon, t) &= (\widehat{A \cdot v})(\varepsilon, t) + \hat{h}(\varepsilon, t) \\ \\ \hat{v}(\varepsilon, 0) &= \hat{g}(\varepsilon) \end{cases} \tag{2.30}$$

onde $\widehat{A \cdot v} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_\delta; \mathrm{X}]$ é um representante de $A \cdot v$ que, pelo Teorema 2.1.19 (pág. 49), pode ser tomado de tal modo que

$$(\widehat{A \cdot v})|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{K}_n}(\varepsilon, t) = \hat{A}(\varepsilon, t)\big(\hat{v}(\varepsilon, t)\big)\ ,\ (\varepsilon, t) \in \mathrm{I} \times \overset{\circ}{K}_n$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Desse modo, fixado $n \in \mathbb{N}$, teremos para $(\varepsilon, t) \in \mathrm{I} \times \overset{\circ}{K}_n$

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{v}}{dt}(\varepsilon, t) &= \hat{A}(\varepsilon, t)\big(\hat{v}(\varepsilon, t)\big) + \hat{h}(\varepsilon, t) \\ \\ \hat{v}(\varepsilon, 0) &= \hat{g}(\varepsilon)\,. \end{cases} \tag{2.31}$$

Sendo $A$ localmente limitada e $\delta \in ]0, a[$, segue-se que existem constantes $c > 0$ e $\eta \in \mathrm{I}$ tais que para cada $s \in \mathrm{I}$, para cada $r \in ]0, s[$ e para cada $\varepsilon \in ]0, \eta[$

$$\sup_{t \in \overline{J_\delta}} \|\hat{A}(\varepsilon, t)\|_{(s,r)} \leq \frac{c}{s-r}\,. \tag{2.32}$$

Consideremos $s_0 \in \mathrm{I}$ tal que $\hat{h}|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{K_n}} \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{K_n}; \mathrm{X}_{s_0}]$, $\hat{g} \in \mathcal{N}(\mathrm{X}_{s_0})$ e que também tenhamos $\hat{v}|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{K_n}} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{K_n}; \mathrm{X}_{s_0}]$. Portanto, para cada $s \in ]0, s_0[$ e para cada $\varepsilon \in ]0, \eta[$ fixado, tem-se que a função $\hat{v}(\varepsilon, \cdot) \in C^\infty(\overset{\circ}{K_n}; \mathrm{X}_s)$ é solução do problema (2.31). Como $\hat{A}(\varepsilon, \cdot)$ verifica (2.32), $\hat{h}(\varepsilon, \cdot) \in C^\infty(\overset{\circ}{K_n}; \mathrm{X}_s)$ e $\hat{g}(\varepsilon) \in \mathrm{X}_{s_0}$ resulta, pelo Teorema clássico de Ovcyannikov-Treves (ver [27, pág. 20-21]), que $\hat{v}(\varepsilon, \cdot)$ é a única solução de (2.31) e ainda mais, existe $d > 0$ com $\overline{J}_d \subset\subset \overset{\circ}{K_n}$ e tal que $\hat{v}(\varepsilon, \cdot)$ satisfaz a seguinte condição: para cada $r \in ]0, s_0[$ e para cada $t \in J_d$ com $|t| < d(s_0 - r)$ tem-se

$$\|\hat{v}(\varepsilon, t)\|_r \leq \|\hat{g}(\varepsilon)\|_{s_0} + \frac{|t|}{s_0 - s - ce|t|}\left\{ce\|\hat{g}(\varepsilon)\|_{s_0} + \sup_{|\xi| \leq d} \|\hat{h}(\varepsilon, \xi)\|_{s_0}\right\}. \tag{2.33}$$

A partir da desigualdade (2.33), podemos usar o mesmo tipo de argumento de indução já usado na prova de existência de solução, para concluir que para cada subconjunto compacto $\mathrm{K} \subset\subset J_{ds_0}$ com $\overset{o}{\mathrm{K}} \neq \emptyset$, existe $s_1 \in \mathrm{I}$ tal que

$$\hat{v}|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{\mathrm{K}}} \in \mathcal{N}[\overset{o}{\mathrm{K}}; \mathrm{X}_{s_1}]\,.$$

Portanto,

$$v|_{J_{ds_0}} = 0\,.$$

Tomamos então $\alpha = ds_0$. □

Como um corolário, podemos obter unicidade de solução para o problema 2.9, ou seja,

**2.3.2 Corolário.** *Sejam $a > 0$, $(\mathrm{X}, (\mathrm{X_s}))$ uma escala de espaços de Banach e $A \in \mathcal{SG}(J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X}))$ uma aplicação generalizada singular na escala $(\mathrm{X}, (\mathrm{X_s}))$. Suponhamos também que $A$ seja* localmente limitada. *Tomemos $f \in \mathcal{G}(J_a; \mathrm{X})$ e $u_0 \in \overline{\mathrm{X}}$.*

*Então existe* $\delta \in ]0, a[$ *e uma única aplicação* $u \in \mathcal{G}(J_\delta; \mathrm{X})$ *satisfazendo*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = A \cdot u + f \quad em \ \mathcal{G}(J_\delta; \mathrm{X}) \\ \\ u(0) = u_0 \,. \end{cases} \tag{2.34}$$

Para comparação com a formulação clássica, enunciamos também o corolário seguinte.

**2.3.3 Corolário.** *Sejam* $a > 0$, $(\mathrm{X}, (\mathrm{X_s}))$ *uma escala de espaços de Banach e* $A \in \mathcal{SG}(J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X}))$ *uma aplicação generalizada singular na escala* $(\mathrm{X}, (\mathrm{X_s}))$. *Suponhamos também que* $A$ *seja* localmente limitada. *Suponhamos que para cada* $0 < b < a$ *e para cada* $0 < s < 1$, *a aplicação* $u \in \mathcal{G}(J_b; \mathrm{X}_s)$ *seja tal que* $v := \Theta_s(u) \in \mathcal{G}(J_b; \mathrm{X})$ *seja solução de*

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = A \cdot v \\ \\ v(0) = 0 \,. \end{cases} \tag{2.35}$$

*Então existe um intervalo* $J_\alpha \subset J_b$ *tal que* $\Theta_s(u)|_{J_\alpha} = 0$.

**2.3.4 Observação (Compatibilidade com soluções clássicas).** De acordo com a *proposição 1.3.3* (pág. 37), podemos extrair também a seguinte conclusão: sejam $a > 0$, $(\mathrm{X}, (\mathrm{X_s}))$ uma escala de espaços de Banach e $A \in \mathcal{SG}(J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X}))$ uma aplicação generalizada singular na escala $(\mathrm{X}, (\mathrm{X_s}))$. Suponhamos também que $A$ seja *localmente limitada.* Suponhamos que para cada $0 < b < a$ e para cada $0 < s < 1$, a aplicação $u \in C^\infty(J_b; \mathrm{X}_s)$ seja tal que $v := \Theta_s(u) \in \mathcal{G}(J_b; \mathrm{X})$ seja solução de

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = A \cdot v \\ \\ v(0) = 0 \,. \end{cases}$$

Então existe um intervalo $J_\alpha \subset J_b$ tal que $u|_{J_\alpha} = 0$.

**2.3.5 Observação.** Observamos que, diferentemente do caso clássico, a unicidade de soluções generalizadas foi obtida usando-se a desigualdade (2.33), que, em [27], é obtida ao se estudar a dependência contínua de soluções com os dados iniciais.

## 2.4 O Teorema de Cauchy-Kovalevska linear

Consideremos um problema do tipo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} A_j(t,z)\frac{\partial u}{\partial z_j}(t,z) + A_0(t,z)u(t,z) + f(t,z) \\ \\ u(0,z) = u_0(z)\,. \end{cases} \tag{2.36}$$

Vamos reinterpretar esse problema e procurar formulá-lo de acordo com as condições do Teorema (2.2.1). Para simplificar, trabalharemos aqui com *polidiscos abertos e limitados* $\Delta \subset \mathbb{C}^n$. Como no caso clássico, denotaremos por $\mathcal{H}(\overline{\Delta})$ o espaço das funções *contínuas* em $\overline{\Delta}$ e que são *holomorfas* em $\Delta$. Munido da norma

$$\|f\|_\Delta := \sup_{z\in\Delta} |f(z)| \ , \ \ f \in \mathcal{H}(\overline{\Delta})\,,$$

segue-se que $\mathcal{H}(\overline{\Delta})$ é um espaço de Banach.

Sejam $\Delta_0$ e $\Delta_\bullet$ polidiscos abertos e limitados com *mesmo policentro* e tais que

$$\emptyset \neq \Delta_0 \subset \overline{\Delta}_0 \subset \Delta_\bullet\,.$$

Podemos supor que, para algum $d_0 > 0$,

$$\Delta_\bullet = \{z \in \mathbb{C}^n \ / \ \operatorname{dist}(z;\Delta_0) < d_0\}\,,$$

onde $\operatorname{dist}(\cdot;\cdot)$ é na norma do máximo. Seja $T > 0$, denotaremos por $(t,z) = (t, z_1, \ldots, z_n)$ um ponto genérico de $J_T \times \Delta_\bullet$. Suponhamos que sejam dados

**(a)** para cada $j = 0, 1, \ldots, n$, uma coleção de $n+1$ aplicações generalizadas localmente limitadas $A_j \in \mathcal{G}_{lb}(J_T \times \Delta_\bullet; M_m(\mathbb{C}))$ satisfazendo as condições

$$\frac{\partial A_j}{\partial \overline{z}_k} = 0 \text{ para cada } k = 1, 2, \ldots, n \text{ e para cada } j = 0, 1, \ldots, n\,;$$

(b) uma função $f \in \mathcal{G}(J_T \times \Delta_\bullet; \mathbb{C}^m)$ tal que para cada $k = 1, 2, \ldots, n$ tenhamos $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} = 0$;

(c) uma função $u_0 \in \mathcal{HG}(\Delta_\bullet; \mathbb{C}^m)$ (para uma definição das funções holomorfas generalizadas veja [11]).

Queremos estudar o problema de existência e unicidade de solução local para

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial u}{\partial z_j} + A_0 u + f \\ \\ u|_{\{0\}\times\Delta_0} = u_0 \,. \end{cases} \tag{2.37}$$

Para que possamos fazer a tradução de modo conveniente, devemos introduzir uma família de polidiscos entre $\Delta_0$ e $\Delta_\bullet$ do seguinte modo: seja $0 < d < d_0$ e seja

$$\Delta_1 := \{z \in \mathbb{C}^n \ / \ \operatorname{dist}(z; \Delta_0) < d\} \,.$$

É claro que $\Delta_0 \subset \overline{\Delta}_0 \subset \Delta_1 \subset \overline{\Delta}_1 \subset \Delta_\bullet$. Agora, para cada $0 < s < 1$ definimos

$$\Delta_s := \{z \in \mathbb{C}^n \ / \ \operatorname{dist}(z; \Delta_0) < sd\} \,.$$

Observamos que para $0 \leq r < s \leq 1$

$$\operatorname{dist}(\Delta_r; \mathbb{C}^n \backslash \Delta_s) = (s - r)d \,.$$

Definimos agora uma família de espaços de Banach pondo

$$\mathrm{X}_0 := \mathcal{H}(\overline{\Delta}_0; \mathbb{C}^m) \ \text{ e } \ \mathrm{X}_1 := \mathcal{H}(\overline{\Delta}_1; \mathbb{C}^m) \,,$$

e, para cada $0 < s < 1$, $\mathrm{X}_s := \mathcal{H}(\overline{\Delta}_s; \mathbb{C}^m)$. É fácil verificar que para a aplicação de restrição

$$\begin{aligned} \imath : \ \mathrm{X}_s &\to \ \mathrm{X}_r \,, \qquad\qquad \text{com } 0 \leq r < s \leq 1 \\ f &\mapsto \ \imath(f) := f|_{\overline{\Delta_r}} \end{aligned}$$

a família $(\mathrm{X}_s)_{s\in \mathrm{I}}$ define uma *escala de espaços de Banach* $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$.

Vamos necessitar também do seguinte Lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [29, pág. 144-145].

**2.4.1 Lema.** *Para cada* $0 \leq r < s \leq 1$ *e para cada* $k = 1, 2, \ldots, n$ *temos que o operador de derivação* $\dfrac{\partial}{\partial z_k}$ *define um elemento de* $\mathcal{L}(\mathrm{X}_s; \mathrm{X}_r)$ *e*

$$\|\frac{\partial}{\partial z_k}\|_{(s,r)} \leq \frac{1/d}{s-r}\,.$$

Vamos agora, usando as aplicações $A_j$, construir o operador $A \in \mathcal{SG}(J_T; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X}))$. Tomemos $d_1 > 0$ tal que $d < d_1 < d_0$ e consideremos o polidisco aberto e limitado

$$\Delta := \{z \in \mathbb{C}^n \;/\; \mathrm{dist}(z; \Delta_0) < d_1\}\,.$$

Observamos que para cada $0 < r < s < 1$ temos

$$\Delta_0 \subset \overline{\Delta_0} \subset \Delta_r \subset \overline{\Delta_r} \subset \Delta_s \subset \overline{\Delta_s} \subset \Delta_1 \subset \overline{\Delta_1} \subset \Delta \subset \Delta_\bullet\,.$$

O Teorema que nos fornece a estrutura local de funções holomorfas generalizadas (ver [1, pág. 272] ou [9, theor. 8.4.5]) nos diz que para cada $j = 0, 1, \ldots, n$, existe um representante $\hat{A}_j \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_T \times \Delta; M_m(\mathbb{C})]$ de $A_j|_{J_T \times \Delta}$ tal que para cada $(\varepsilon, t) \in \mathrm{I} \times J_T$,

$$\hat{A}_j(\varepsilon, t, \cdot) \in \mathcal{H}(\Delta; M_m(\mathbb{C}))\,.$$

A mesma propriedade é possuída por $f|_{J_T \times \Delta}$, isto é, existe um representante $\hat{f} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_T \times \Delta; \mathbb{C}^m]$ de $f|_{J_T \times \Delta}$ tal que para cada $(\varepsilon, t) \in \mathrm{I} \times J_T$,

$$\hat{f}(\varepsilon, t, \cdot) \in \mathcal{H}(\Delta; \mathbb{C}^m)\,. \tag{2.38}$$

Para cada $(\varepsilon, t) \in \mathrm{I} \times J_T$ definimos a aplicação $\hat{A}(\varepsilon, t) : \mathrm{X} \to \mathrm{X}$ do seguinte modo: para cada $s \in \mathrm{I}$, se $u \in \mathrm{X}_s$ então

$$\hat{A}(\varepsilon, t)(u) := \sum_{j=1}^{n} \hat{A}_j(\varepsilon, t, \cdot)\frac{\partial u}{\partial z_j} + \hat{A}_0(\varepsilon, t, \cdot)u\,.$$

De acordo com o Lema 2.4.1, segue-se que para cada $(\varepsilon, t) \in \mathrm{I} \times J_T$, $\hat{A}(\varepsilon, t) \in \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})$. Portanto, temos uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} \hat{A}: & \mathrm{I} \times J_T & \to & \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X}) \\ & (\varepsilon, t) & \mapsto & \hat{A}(\varepsilon, t)\,. \end{array}$$

É claro (ver Lema 3.3.1 (pág. 99) e Lema 3.3.2 (pág. 105)), que para cada $s \in \mathrm{I}$, para cada $0 < r < s$ e para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$, a aplicação

$$J_T \ni t \mapsto \hat{A}(\varepsilon, t)|_{\mathrm{X}_s} \in \mathcal{L}(\mathrm{X}_s; \mathrm{X}_r)$$

é de classe $C^\infty$. Vamos verificar que $\hat{A} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_T; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]$ e para isso, diminuindo $\Delta$ se necessário, e usando o Lema 10.2.1 de [1, pág. 267], podemos supor que para cada $p \in \mathbb{N}$ e para cada compacto $\mathrm{K} \subset\subset J_T$ existem constantes $c > 0$, $\eta \in \mathrm{I}$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que para cada $0 < \varepsilon < \eta$, para cada $j = 0, 1 \ldots, n$ e para cada $z \in \Delta$

$$\sup_{t \in \mathrm{K}} |\frac{\partial^p \hat{A}_j}{\partial t^p}(\varepsilon, t, z)| \leq c\varepsilon^{-N}. \tag{2.39}$$

Assim, (2.39) juntamente com o Lema 2.4.1, nos mostram que a aplicação $\hat{A}$ é um elemento de $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_T; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]$ e, além disso, como a aplicação $A_j$ é um elemento de $\mathcal{G}_{lb}(J_T \times \Delta_\bullet; M_m(\mathbb{C}))$, segue-se que, quando $p = 0$, podemos tomar $N = 0$ em (2.39). Isso mostra que a aplicação $\hat{A} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_T \times \Delta; M_m(\mathbb{C})]$, define um elemento $A \in \mathcal{SG}(J_T; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X}))$ *localmente limitado*. Vamos agora trabalhar com os outros dados $f$ e $u_0$. O representante $\hat{f}$ de $f|_{J_T \times \Delta}$, define uma aplicação $\hat{F} : \mathrm{I} \times J_T \to \mathrm{X}_1$, pondo-se $\hat{F}(\varepsilon, t) := \hat{f}(\varepsilon, t, \cdot)|_{\overline{\Delta_1}}$. Do mesmo modo que procedemos com $\hat{A}$, isto é, usando o Teorema de estrutura local de funções holomorfas generalizadas e o Lema 10.2.1 de [1], segue-se que $\hat{F} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_T; \mathrm{X}_1]$ e, portanto, define um elemento $F \in \mathcal{G}(J_T; \mathrm{X}_1)$. De modo análogo, tomamos um representante $\hat{u}_0 \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Delta; \mathbb{C}^m]$ de $u_0|_\Delta$ de tal modo que para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$, $\hat{u}_0(\varepsilon, \cdot) \in \mathcal{H}(\Delta; \mathbb{C}^m)$. Consideramos a aplicação

$$\mathrm{I} \ni \varepsilon \mapsto \hat{h}(\varepsilon) \in \mathrm{X}_1$$

definida por $\hat{h}(\varepsilon) := \hat{u}_0(\varepsilon, \cdot)|_{\overline{\Delta_1}}$. Temos que $\hat{h} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}_1)$ e, portanto, define um elemento $h \in \overline{\mathrm{X}}_1$. Pelo Teorema 2.2.1, existe $\delta \in ]0, T[$ e uma única função $u \in \mathcal{G}(J_\delta; \mathrm{X})$ satisfazendo

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = A \cdot u + \Theta_1(F) \\ \\ u(0) = \Theta_1(h). \end{cases} \tag{2.40}$$

Além disso, existe $s_0 \in \mathrm{I}$ tal que para cada $0 < s < s_0$ existe uma aplicação $v \in \mathcal{G}(J_{\delta(s_0 - s)}; \mathcal{H}(\overline{\Delta_s}; \mathbb{C}^m))$ tal que

$$u|_{J_{\delta(s_0 - s)}} = \Theta_s(v).$$

De modo mais preciso, se $\hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_\delta; \mathrm{X}]$ for o representante construído no teorema de existência, então existe $\eta \in \mathrm{I}$ tal que para cada $s \in ]0, s_0[$, para cada $t \in J_{\delta(s_0 - s)}$,

para cada $\varepsilon \in ]0,\eta[$ e para cada $z \in \Delta_s$ (observamos que a aplicação $J_{\delta(s_0-s)} \ni t \mapsto \hat{u}(\varepsilon,t) \in \mathcal{H}(\overline{\Delta}_s;\mathbb{C}^m)$ é um elemento de $C^\infty(J_{\delta(s_0-s)};\mathcal{H}(\overline{\Delta}_r;\mathbb{C}^m))$ para cada $r \in ]0,s]$) teremos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \hat{u}}{\partial t}(\varepsilon,t)(z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \hat{A}_j(\varepsilon,t)(z)\frac{\partial \hat{u}}{\partial z_j}(\varepsilon,t)(z) + \hat{A}_0(\varepsilon,t)(z)\hat{u}(\varepsilon,t)(z) + \hat{F}(\varepsilon,t)(z) \\ \\ \hat{u}(\varepsilon,0) = \hat{h}(\varepsilon)(z)\,. \end{cases}$$

Se, para cada $s \in ]0,s_0[$ definirmos a aplicação $\hat{v}_s : \mathrm{I}_\eta \times J_{\delta(s_0-s)} \times \Delta_s \to \mathbb{C}^m$ por $(\varepsilon,t,z) \mapsto \hat{v}_s(\varepsilon,t,z) := \hat{u}(\varepsilon,t)(z)$, então podemos concluir enunciando o seguinte

**2.4.2 Teorema.** *Seja $T > 0$ e seja $\Delta_\bullet$ um polidisco aberto e limitado de $\mathbb{C}^n$ e denotemos por $(t,z) = (t,z_1,\ldots,z_n)$ um ponto genérico de $J_T \times \Delta_\bullet$. Suponhamos dados*

**(a)** *para cada $j = 0,1,\ldots,n$, uma coleção de $n+1$ aplicações generalizadas localmente limitadas $A_j \in \mathcal{G}_{lb}(J_T \times \Delta_\bullet; M_m(\mathbb{C}))$ satisfazendo as condições*

$$\frac{\partial A_j}{\partial \overline{z}_k} = 0 \text{ para cada } k = 1,\ldots,n \text{ e para cada } j = 0,1,\ldots,n\,;$$

**(b)** *uma aplicação $f \in \mathcal{G}(J_T \times \Delta_\bullet;\mathbb{C}^m)$ tal que para cada $k = 1,\ldots,n$ tenhamos $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} = 0$;*

**(c)** *uma aplicação $u_0 \in \mathcal{HG}(\Delta_\bullet;\mathbb{C}^m)$.*

*Então existem $\delta > 0$ e $s_0 \in \mathrm{I}$ tais que para cada $s \in ]0,s_0[$ existe um polidisco aberto $\Delta_s \subset \Delta_\bullet$ e uma aplicação $v_s \in \mathcal{G}(J_{\delta(s_0-s)} \times \Delta_s;\mathbb{C}^m)$, com $\dfrac{\partial v_s}{\partial \overline{z}_k} = 0$ para cada $k = 1,\ldots,n$ e verificando*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_s}{\partial t} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} A_j|_{J_{\delta(s_0-s)}\times\Delta_s}\frac{\partial v_s}{\partial z_j} + A_0|_{J_{\delta(s_0-s)}\times\Delta_s} + f|_{J_{\delta(s_0-s)}\times\Delta_s} \\ \\ v_s|_{\{0\}\times\Delta_s} = u_0|_{\Delta_s}\,. \end{cases}$$

# Capítulo 3

# Sobre uma versão não linear do teorema de Ovcyannikov

## 3.1 Aplicações generalizadas definidas numa escala de espaços de Banach

Neste capítulo, estudaremos, sob hipóteses apropriadas, um problema abstrato não linear da forma

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = f(t, u(t)) \ , \quad |t| < \delta \ , \quad \delta > 0 \\ \\ u(0) = u_0 \ . \end{cases} \tag{3.1}$$

Empreenderemos nosso estudo do problema (3.1), no ambiente das funções generalizadas, seguindo os passos dados em [16], quando do tratamento do problema em sua formulação "clássica", isto é, sem usar as funções generalizadas de Colombeau. Para que seja possível estabelecer uma formulação adequada para o problema, devemos introduzir certas classes de funções $f$ que serão admitidas no segundo membro. Devemos também tornar preciso o significado da composição que aí aparece, uma vez que a formulação em (3.1) se apóia em valores pontuais.

**3.1.1 Notação.** Seja $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach. Para cada $s \in \mathrm{I}$

e para cada $R > 0$ denotaremos com $B_R^s$ o conjunto $B_R^s := \{x \in \mathrm{X}_s / \|x\|_s < R\}$, denotaremos por $\mathbb{B}_R := \bigcup_{s\in \mathrm{I}} B_R^s$. Denotaremos por $(t, x)$ um ponto genérico de $\Omega \times \mathbb{B}_R \subset \mathbb{R}^n \times \mathrm{X}$.

**3.1.2 Notação.** Neste capítulo, usaremos também a seguinte notação: para cada $s \in \mathrm{I}$ denotaremos por $\mathrm{I}_s$ o intervalo $\mathrm{I}_s := ]0, s[$.

**3.1.3 Definição.** Sejam $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach, $\Omega$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $R > 0$. Denotaremos por $\mathcal{E}_R[\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}]$ o conjunto das aplicações $\hat{f} : \mathrm{I} \times \Omega \times \mathbb{B}_R \to \mathrm{X}$, $(\varepsilon, t, x) \mapsto \hat{f}(\varepsilon, t, x)$, verificando as seguintes condições:

**(i)** para cada $s \in \mathrm{I}$, para cada $r \in \mathrm{I}_s$ e para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$ a restrição $\hat{f}(\varepsilon, \cdot, \cdot)|_{\Omega \times B_R^s}$ é uma aplicação a valores em $\mathrm{X}_r$;

**(ii)** para cada $s \in \mathrm{I}$, para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$ e para cada $r \in \mathrm{I}_s$ a restrição $\hat{f}(\varepsilon, \cdot, \cdot)|_{\Omega \times B_R^s}$ é uma aplicação de classe $C^\infty$ de $\Omega \times B_R^s$ em $\mathrm{X}_r$.

**3.1.4 Exemplo.** Seja $A \in \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})$ então a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \hat{f} : \ \mathrm{I} \times \Omega \times \mathbb{B}_R & \to & \mathrm{X} \\ (\varepsilon, t, x) & \mapsto & Ax \end{array}$$

é um elemento de $\mathcal{E}_R[\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}]$.

Podemos verificar que $\hat{f}$ verifica a condição **(ii)** da definição 3.1.3, da seguinte forma. Seja

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n \times \mathrm{X} & \xrightarrow{\pi_2} & \mathrm{X} \\ (t, x) & \mapsto & \pi_2(t, x) = x \end{array}$$

considerando a composição

$$\mathbb{R}^n \times \mathrm{X}_s \xrightarrow{\pi_2} \mathrm{X}_s \xrightarrow{A} \mathrm{X}_r .$$

Ou seja

$$\hat{f}(\varepsilon, t, x) = (A \circ \pi_2)(t, x) .$$

**3.1.5 Observação.** Munido das operações pontuais, $\mathcal{E}_R[\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}]$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.

Para a notação de derivada parcial usada neste capítulo, usaremos a interpretação estabelecida na página 7.

**3.1.6 Definição.** Sejam $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach, $\Omega$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $R > 0$. Denotaremos por $\mathcal{E}_{\mathrm{M},R}[\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}]$ o conjunto das aplicações $\hat{f} \in \mathcal{E}_R[\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}]$ que verificam a seguinte condição:

**(MR)** para cada $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$ e para cada $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, existem constantes $c > 0$, $\eta \in \mathrm{I}$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que para cada $s \in \mathrm{I}$, para cada $r \in \mathrm{I}_s$ e para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$

$$\sup_{t \in \mathrm{K}} \sup_{x \in B_R^s} \|D_t^p D_x^q \hat{f}(\varepsilon, t, x)\|_{(s,r)} \leq \frac{c\varepsilon^{-N}}{s - r} .$$

**3.1.7 Observação.** Munido das operações pontuais, $\mathcal{E}_{\mathrm{M},R}[\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}]$ é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial (subespaço de $\mathcal{E}_R[\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}]$).

**3.1.8 Definição.** Sejam $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach, $\Omega$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $R > 0$. Denotaremos por $\mathcal{N}_R[\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}]$ o conjunto das aplicações $\hat{f} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M},R}[\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}]$ que verificam a seguinte condição:

**(NR)** para cada $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$, para cada $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ e para cada $m \in \mathbb{N}$ existem constantes $c > 0$ e $\eta \in \mathrm{I}$ tais que para cada $s \in \mathrm{I}$, para cada $r \in \mathrm{I}_s$ e para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$

$$\sup_{t \in \mathrm{K}} \sup_{x \in B_R^s} \|D_t^p D_x^q \hat{f}(\varepsilon, t, x)\|_{(s,r)} \leq \frac{c\varepsilon^{m}}{s - r} .$$

**3.1.9 Observação.** Observamos que, quando munido das operações pontuais, o espaço $\mathcal{N}_R[\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}]$ é um $\mathbb{K}$-subespaço vetorial de $\mathcal{E}_{\mathrm{M},R}[\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}]$.

Usando-se a Proposição 1.1.9 (pág. 5, ver também a observação 1.1.10 na pág. 7) podemos fazer as seguintes observações.

**3.1.10 Observação.** Sejam $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach, $\Omega$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $R > 0$. Se $\hat{f} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M},R}[\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}]$, então para cada subconjunto compacto $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$ e para cada $p \in \mathbb{N}$, existem constantes $c > 0$, $\eta \in \mathrm{I}$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que para cada $s \in \mathrm{I}$ e para cada $r \in \mathrm{I}_s$

$$\sup_{t \in \mathrm{K}} \sup_{x \in B_R^s} \|\hat{f}^{(p)}(\varepsilon, t, x)\|_{(s,r)} \leq \frac{c\varepsilon^{-N}}{s - r}$$

para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$.

**3.1.11 Observação.** Sejam $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach, $\Omega$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $R > 0$. Se $\hat{f} \in \mathcal{N}_R[\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}]$, então para cada subconjunto compacto $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$ e para cada $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, existem constantes $c > 0$ e $\eta \in \mathrm{I}$ tais que para cada $s \in \mathrm{I}$ e para cada $r \in \mathrm{I}_s$

$$\sup_{t \in \mathrm{K}} \sup_{x \in B_R^s} \|\hat{f}^{(p)}(\varepsilon, t, x)\|_{(s,r)} \leq \frac{c\varepsilon^{q}}{s - r}$$

para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$.

**3.1.12 Definição.** Sejam $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach, $\Omega$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $R > 0$. O espaço vetorial das aplicações generalizadas singulares na escala $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ é, por definição, o $\mathbb{K}$-espaço vetorial quociente

$$\mathcal{G}_R(\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}) := \frac{\mathcal{E}_{\mathrm{M},R}[\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}]}{\mathcal{N}_R[\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}]} .$$

Um elemento $f \in \mathcal{G}_R(\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X})$ é chamado aplicação generalizada singular na escala $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$. Essas serão as funções que, essencialmente, interessar-nos-ão como segundo membro de (3.1).

**3.1.13 Exemplo.** Podemos construir exemplos de aplicações em $\mathcal{E}_{\mathrm{M},R}[\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}]$ a partir de aplicações $A \in \mathcal{SG}(J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X}))$. De fato, seja $\hat{A} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_a; \mathcal{A}\mathrm{d}(\mathrm{X})]$ um representante qualquer de $A$, definimos uma aplicação $\hat{B} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M},R}[J_a \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}]$ do seguinte modo:

$$\mathrm{I} \times J_a \times \mathbb{B}_R \ni (\varepsilon, t, x) \mapsto \hat{B}(\varepsilon, t, x) := \hat{A}(\varepsilon, t)(x) .$$

**3.1.14 Observação.** Se $\hat{f} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M},R}[\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}]$ e $\emptyset \neq U \subset \Omega$ é aberto, então a aplicação $\hat{g} : \mathrm{I} \times U \times \mathbb{B}_R \to \mathrm{X}$ definida por

$$\hat{g}(\varepsilon, t, x) := \hat{f}(\varepsilon, t, x)$$

é um elemento de $\mathcal{E}_{\mathrm{M},R}[U \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}]$ e, é claro, se $\hat{f} \in \mathcal{N}_R[\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}]$ então $\hat{g} \in \mathcal{N}_R[U \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}]$. Assim, podemos definir uma aplicação de restrição

$$f \in \mathcal{G}_R(\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}) \mapsto f|_U \in \mathcal{G}_R(U \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X})$$

via restrição de representantes.

### 3.1.1 Uma composição particular

O nosso próximo objetivo é, para $R > 0$ fixado, dar sentido à composta de uma aplicação $f \in \mathcal{G}_R(U \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X})$ com uma aplicação $u \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$. Numa primeira etapa, vamos determinar condições para definir a composta num caso mais simples, qual seja, em que $f \in \mathcal{G}(\Omega \times B_R; G)$ e $u \in \mathcal{G}(\Omega; F)$, onde $E$, $F$ e $G$ são espaços de Banach, $\Omega$ é um aberto não vazio de $E$ e $B_R = \{x \in F \ / \ \|x\| < R\}$. Numa segunda etapa, reduziremos o caso que nos interessa ao caso mais simples. Vamos então iniciar nosso programa com o seguinte

**3.1.15 Lema.** *Sejam $E$, $F$ e $G$ espaços de Banach, $\Omega \subset E$ um aberto não vazio, $R > 0$, $B_R := \{x \in F \ / \ \|x\| < R\}$ e denotemos por $z = (t, x)$ um ponto genérico de $\Omega \times B_R$. Seja $\hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; F]$ uma aplicação verificando a propriedade*

***(A)*** *existe $\eta_{\hat{u}} \in \mathrm{I}$ tal que para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_{\eta_{\hat{u}}}$ tem-se*

$$\sup_{t \in \Omega} \|\hat{u}(\varepsilon, t)\| < R\,.$$

*Consideremos uma aplicação $\hat{f} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega \times B_R; G]$.*

(a) *Se, para cada compacto $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$ e para cada $p \in \mathbb{N}$, existirem constantes $c > 0$, $\eta \in \mathrm{I}$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que*

$$\sup_{z \in \mathrm{K} \times B_R} \|\hat{f}^{(p)}(\varepsilon, z)\| \leq c\varepsilon^{-N} \ \textit{para cada } \varepsilon \in \mathrm{I}_\eta\,,$$

*então a aplicação* $\hat{g} : \mathrm{I} \times \Omega \to G$, *definida por*

$$\hat{g}(\varepsilon, t) := \begin{cases} \hat{f}(\varepsilon, t, \hat{u}(\varepsilon, t)) & se \quad \varepsilon \in \mathrm{I}_{\eta_{\hat{u}}} \\ 0 & se \quad \varepsilon \notin \mathrm{I}_{\eta_{\hat{u}}}, \end{cases} \tag{3.2}$$

*é um elemento de* $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; G]$.

**(b)** *Se, para cada compacto* $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$ *e para cada* $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, *existirem constantes* $c > 0$ *e* $\eta \in \mathrm{I}$ *tais que*

$$\sup_{z \in \mathrm{K} \times B_R} \|\hat{f}^{(p)}(\varepsilon, z)\| \leq c\varepsilon^q \quad para\ cada\ \varepsilon \in \mathrm{I}_\eta,$$

*então a aplicação* $\hat{g} : \mathrm{I} \times \Omega \to G$, *definida por* (3.2), *é um elemento de* $\mathcal{N}[\Omega; G]$.

**(c)** *Se* $\hat{u}_1 \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; F]$ *e* $\hat{u} - \hat{u}_1 \in \mathcal{N}[\Omega; F]$, *então verifica-se a condição*

***(B)*** *existe* $\eta_{\hat{u}_1} \in \mathrm{I}$ *tal que* $\sup_{t \in \Omega} \|\hat{u}_1(\varepsilon, t)\| < R$ *para cada* $\varepsilon \in \eta_{\hat{u}_1}$.

*Além disso, se* $\hat{f}_1 \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega \times B_R; G]$ *verifica a condição* $\hat{f} - \hat{f}_1 \in \mathcal{N}[\Omega \times B_R; G]$ *e se valem as condições*

***(C)*** *para cada compacto* $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$ *e para cada* $p \in \mathbb{N}$ *existem constantes* $c > 0$, $\eta \in \mathrm{I}$ *e* $N \in \mathbb{N}$ *tais que* $\sup_{z \in \mathrm{K} \times B_R} \|\hat{f}_1^{(p)}(\varepsilon, z)\| \leq c\varepsilon^{-N}$ *para cada* $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$

***(D)*** *para cada* $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$ *e para cada* $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ *existem constantes* $c > 0$, $\eta \in \mathrm{I}$ *e* $N \in \mathbb{N}$ *tais que* $\sup_{z \in \mathrm{K} \times B_R} \|(\hat{f} - \hat{f}_1)^{(p)}(\varepsilon, z)\| \leq c\varepsilon^q$ *para cada* $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$,

*então a aplicação* $\hat{h} : \mathrm{I} \times \Omega \to G$, *definida por*

$$\hat{h}(\varepsilon, t) := \begin{cases} \hat{f}(\varepsilon, t, \hat{u}(\varepsilon, t)) - \hat{f}_1(\varepsilon, t, \hat{u}_1(\varepsilon, t)) & se \quad \varepsilon \in \mathrm{I}_{\eta_1} \\ 0 & se \quad \varepsilon \notin \mathrm{I}_{\eta_1}, \end{cases}$$

*é um elemento de* $\mathcal{N}[\Omega; G]$, *onde* $\eta_1 := \min\{\eta_{\hat{u}}, \eta_{\hat{u}_1}\}$.

*Demonstração.* Vamos verificar apenas a afirmação **(c)**, as outras duas decorrem facilmente das definições dadas e da regra da cadeia. Sejam $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$ e $p, q \in \mathbb{N}$. Para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_{\eta_1}$ temos

$$\hat{h}(\varepsilon, t) = (\hat{f} - \hat{f}_1)(\varepsilon, t, \hat{u}_1(\varepsilon, t)) + \hat{f}(\varepsilon, t, \hat{u}(\varepsilon, t)) - \hat{f}(\varepsilon, t, \hat{u}_1(\varepsilon, t)) \ ;$$

como $\hat{f} - \hat{f}_1$ verifica a condição **(D)** e $\hat{u}_1$ verifica a condição **(B)**, segue-se do item **(b)** que a primeira parcela acima é um elemento de $\mathcal{N}[\Omega; G]$. Para que possamos analisar a segunda parcela, suponhamos que se verifique a seguinte

**3.1.16 Afirmação.** *Para cada $m \in \mathbb{N}$, existem $c > 0$ e $\eta \in \mathrm{I}$ tais que*

$$\sup_{t \in K} \|\hat{f}^{(m)}(\varepsilon, t, \hat{u}(\varepsilon, t)) - \hat{f}^{(m)}(\varepsilon, t, \hat{u}_1(\varepsilon, t))\|_m \leq c\varepsilon^q \ .$$

Usando a afirmação acima, segue-se que, existem constantes $c > 0$, $\eta \in \mathrm{I}$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$

$$\sup_{t \in \mathrm{K}} \|\hat{f}^{(m)}(\varepsilon, t, \hat{u}(\varepsilon, t))\|_m \leq c\varepsilon^{-N} \ ;$$

logo, podemos repetir o argumento usado na Proposição 3.1 de [31] (ver também o final da prova da afirmação 1.1.25 na pág. 17) para concluir que $\hat{h} \in \mathcal{N}[\Omega; G]$.

□

Vamos agora verificar a afirmação feita.

***Prova da afirmação.*** De fato, seja $\hat{R} := \hat{u}_1 - \hat{u} \in \mathcal{N}[\Omega; F]$, para cada $(\varepsilon, t) \in \mathrm{I}_{\eta_1} \times \Omega$, consideremos o segmento $\theta(\lambda, \varepsilon, t)$, definido por

$$\theta(\lambda, \varepsilon, t) := \hat{u}(\varepsilon, t) + \lambda \hat{R}(\varepsilon, t) \ , \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \ .$$

Pelo teorema do valor médio, resulta que para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_{\eta_1}$ e $t \in \Omega$

$$\|\hat{f}^{(m)}(\varepsilon, t, \hat{u}(\varepsilon, t)) - \hat{f}^{(m)}(\varepsilon, t, \hat{u}_1(\varepsilon, t))\|_m \leq \|\hat{R}(\varepsilon, t)\| \sup_{\lambda \in [0,1]} \|\hat{f}^{(m+1)}(\varepsilon, t, \theta(\lambda, \varepsilon, t))\|_{(m+1)} .$$

Por hipótese, temos que existem constantes $c_1 > 0$, $\eta_2 \in \mathrm{I}$ e $N_1 \in \mathbb{N}$ tais que para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_{\eta_2}$

$$\sup_{(t,x)\in \mathrm{K}\times B_R} \|\hat{f}^{(m+1)}(\varepsilon,t,x)\|_{(m+1)} \leq c_1\varepsilon^{-N} .$$

Além disso, existem constantes $c_2 > 0$ e $\eta_3 \in \mathrm{I}$ tais que para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_{\eta_3}$

$$\sup_{t\in \mathrm{K}}\|\hat{R}(\varepsilon,t)\| \leq c_2\varepsilon^{q+N} .$$

Portanto, para $\varepsilon < \min\{\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$ e $c \geq c_1c_2$ teremos

$$\sup_{t\in \mathrm{K}}\|\hat{f}^{(m)}(\varepsilon,t,\hat{u}(\varepsilon,t)) - \hat{f}^{(m)}(\varepsilon,t,\hat{u}_1(\varepsilon,t))\|_m \leq c\varepsilon^q . \tag{3.3}$$

□

**3.1.17 Definição.** Sejam $(\mathrm{X},(\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach, $\Omega$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $R > 0$. Diremos que uma aplicação generalizada $u \in \mathcal{G}(\Omega;\mathrm{X})$ é $R$-limitada se existir um representante $\hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega;\mathrm{X}]$ de $u$ verificando a seguinte condição: para cada subconjunto compacto $\mathrm{K} \subset\subset \Omega$, com $\overset{\circ}{\mathrm{K}} \neq \emptyset$, existem $\eta \in \mathrm{I}$ e $s \in \mathrm{I}$ tais que

**(i)** $\hat{u}(\varepsilon,t) \in \mathrm{X}_s$, para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$ e $t \in \overset{\circ}{\mathrm{K}}$ e, além disso, a aplicação $\hat{v} : \mathrm{I}\times\overset{\circ}{\mathrm{K}} \to \mathrm{X}_s$, definida por

$$\hat{v}(\varepsilon,t) := \begin{cases} \hat{u}(\varepsilon,t) & \text{se} \quad \varepsilon \in \mathrm{I}_\eta \\ 0 & \text{se} \quad \varepsilon \notin \mathrm{I}_\eta , \end{cases}$$

é um elemento de $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{\mathrm{K}};\mathrm{X}_s]$.

**(ii)** $\sup_{t\in\overset{\circ}{\mathrm{K}}}\|\hat{u}(\varepsilon,t)\|_s < R$, para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$.

**3.1.18 Observação.** Se $u \in \mathcal{G}(\Omega;\mathrm{X})$ é $R$-limitada, então todo representante de $u$ possui as propriedades **(i)** e **(ii)**.

Os dois próximos Lemas e a Definição 3.1.22 são baseados, inclusive as notações, nos Lemas 1.1.21 e 1.1.22 e na Definição 1.1.23 de [15] e, num certo sentido, os estendem para espaços e escalas de Banach.

**3.1.19 Lema.** *Sejam* $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ *uma escala de espaços de Banach,* $\Omega$ *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$ *e* $R > 0$. *Sejam* $f \in \mathcal{G}_R(\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X})$, $u \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$, *R-limitada,* $\hat{f}$ *um representante de* $f$, $\hat{u}$ *um representante de* $u$ *e* $\mathcal{K} = (\mathrm{K}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência exaustiva de compactos para* $\Omega$. *Então*

**(i)** *existem seqüências estritamente decrescentes* $(\eta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *e* $(s_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathrm{I}$ *tais que para cada* $j \in \mathbb{N}$

**(a)** $\hat{u}(\varepsilon, t) \in \mathrm{X}_{s_j}$, *para cada* $\varepsilon \in \mathrm{I}_{\eta_j}$ *e* $t \in \overset{o}{\mathrm{K}}_j$ *e a aplicação* $\hat{v}_j : \mathrm{I} \times \overset{o}{\mathrm{K}}_j \to \mathrm{X}_{s_j}$, *definida por*

$$\hat{v}_j(\varepsilon, t) := \begin{cases} \hat{u}(\varepsilon, t) & se \quad \varepsilon \in \mathrm{I}_{\eta_j} \\ 0 & se \quad \varepsilon \notin \mathrm{I}_{\eta_j}, \end{cases}$$

*é um elemento de* $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{o}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_{s_j}]$.

**(b)** $\sup\limits_{t\in\overset{o}{\mathrm{K}}_j} \|\hat{u}(\varepsilon, t)\|_{s_j} < R$, *para cada* $\varepsilon \in \mathrm{I}_{\eta_j}$.

**(ii)** *para cada* $j \in \mathbb{N}$ *a aplicação* $\hat{g}_j$, *definida em* $\mathrm{I} \times \overset{o}{\mathrm{K}}_j$ *por*

$$\hat{g}_j(\varepsilon, t) := \begin{cases} \hat{f}(\varepsilon, t, \hat{u}(\varepsilon, t)) & se \quad \varepsilon \in \mathrm{I}_{\eta_j} \\ 0 & se \quad \varepsilon \notin \mathrm{I}_{\eta_j}, \end{cases}$$

*é um elemento de* $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{o}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}]$.

**(iii)** *existe* $\Theta_{\mathcal{K},\hat{f},\hat{u}} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$ *tal que*

$$\Theta_{\mathcal{K},\hat{f},\hat{u}}\big|_{\mathrm{I}\times\overset{o}{\mathrm{K}}_j} - \hat{g}_j \in \mathcal{N}[\overset{o}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}] .$$

*Demonstração.* O item **(i)** resulta da própria definição de $u \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$ ser $R$-limitada e do fato de que $\mathrm{X}_s \hookrightarrow \mathrm{X}_r$ sempre que $r < s$.

**(ii)** Seja $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma seqüência exaustiva de compactos para $\overset{o}{\mathrm{K}}_j$ e fixemos $k \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar que existe $s \in \mathrm{I}$ tal que

$$\hat{g}_j\big|_{\mathrm{I}\times\overset{o}{L}_k} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{o}{L}_k; \mathrm{X}_s] . \tag{3.4}$$

Para o compacto $L_k \subset\subset \overset{\circ}{\mathrm{K}}_j$, e para cada $m \in \mathbb{N}$, decorre da Observação 3.1.10 que existem constantes $c > 0$, $\eta \in \mathrm{I}$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que para o $s_j \in \mathrm{I}$, dado no item **(i)**, e para cada $r \in \mathrm{I}_{s_j}$

$$\sup_{t\in L_k} \sup_{x\in B_R^{s_j}} \|\hat{f}^{(m)}(\varepsilon, t, x)\| \leq \frac{c\varepsilon^{-N}}{s_j - r} . \tag{3.5}$$

Tomemos esse $s_j \in \mathrm{I}$ e fixemos $r \in \mathrm{I}_{s_j}$. Vamos verificar que (3.4) é verdadeira para $s = r$. Seja $p \in \mathbb{N}$ fixado e tomemos um subconjunto compacto $\mathrm{K} \subset\subset \overset{\circ}{L}_k$. Podemos escolher em (3.5) $c > 0$, $\eta \in \mathrm{I}$ e $N \in \mathbb{N}$ de modo a servir para todo $m \in \{0, 1, \ldots, p\}$. De modo análogo, segue-se de **(i)-(a)** e **(i)-(b)** que existem $N_1 \in \mathbb{N}$, $c_1 > 0$ e $\tilde{\eta} \in \mathrm{I}_{\eta_j}$ tais que para cada $m \in \{1, \ldots, p\}$ e $\varepsilon \in \mathrm{I}_{\tilde{\eta}}$

$$\sup_{t\in \overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} \|\hat{u}(\varepsilon, t)\|_{s_j} < R < c_1\varepsilon^{-N_1}$$

e

$$\sup_{t\in L_k} \sum_{\alpha\in[p;m]} \frac{p!}{\alpha!m!} \prod_{j=1}^{m} \|\hat{w}^{(\alpha_j)}(\varepsilon, t)\|_{\alpha_j} \leq c_1\varepsilon^{-N_1}$$

onde $\hat{w}(\varepsilon, t) := (t, \hat{u}(\varepsilon, t))$ com $(\varepsilon, t) \in \mathrm{I}_{\eta_j} \times \overset{\circ}{\mathrm{K}}_j$ .

Tomando então $\overline{N} = \max\{N, N_1\}$, $\overline{c} = \max\{c, c_1\}$ e $\overline{\eta} = \min\{\eta, \tilde{\eta}\}$, teremos pela regra da cadeia, aplicada se $p \geq 1$, para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_{\overline{\eta}}$ e $t \in \overset{\circ}{L}_k$

$$\|\hat{g}_j^{(p)}(\varepsilon, t)\|_r \leq \sum_{m=1}^{p} \|\hat{f}^{(m)}(\varepsilon, t, \hat{u}(\varepsilon, t))\| \sum_{\alpha\in[p;m]} \frac{p!}{\alpha!m!} \prod_{j=1}^{m} \|\hat{w}^{(\alpha_j)}(\varepsilon, t)\|_{\alpha_j} .$$

Portanto, existem constantes $C' > 0$ e $C'' > 0$ tais que, para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_{\overline{\eta}}$,

$$\sup_{t\in \mathrm{K}} \|\hat{g}_j^{(p)}(\varepsilon, t)\|_r \leq C' \frac{\overline{c}\varepsilon^{-\overline{N}}}{s_j - r} \leq C''\varepsilon^{-\overline{N}} ,$$

quando $p = 0$, teremos da mesma forma, que existe uma constante $C > 0$ tal que para $\varepsilon \in \mathrm{I}_{\overline{\eta}}$,

$$\sup_{t\in \mathrm{K}} \|\hat{g}_j(\varepsilon, t)\|_r \leq C\varepsilon^{-\overline{N}} .$$

Isso mostra que $\hat{g}_j|_{\mathrm{I}\times \overset{\circ}{L}_k} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{L}_k; \mathrm{X}_r]$ e, portanto, $\hat{g}_j \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}]$.

**(iii)** Seja, para cada $j \in \mathbb{N}$, $g_j \in \mathcal{G}(\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X})$ a classe de $\hat{g}_j$, resulta então da proposição 1.2.12-**(ii)** (pág. 28) que existe $g \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$ tal que $g|_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} = g_j$ para cada $j \in \mathbb{N}$, basta então considerar $\Theta_{\mathcal{K},\hat{f},\hat{u}} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\Omega; \mathrm{X}]$ um representante qualquer de $g$ para que tenhamos

$$\Theta_{\mathcal{K},\hat{f},\hat{u}}|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} - \hat{g}_j \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}] .$$

□

Nosso objetivo agora será verificar que a aplicação $g \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$, obtida no lema anterior, não depende das escolhas particulares feitas para $\mathcal{K} = (\mathrm{K}_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $\hat{f}$ ou $\hat{u}$.

**3.1.20 Lema.** *Sejam* $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ *uma escala de espaços de Banach,* $\Omega$ *um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^n$ *e* $R > 0$. *Sejam* $f \in \mathcal{G}_R(\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X})$, $u \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$, *R-limitada,* $\hat{f}$ *um representante de* $f$, $\hat{u}$ *um representante de* $u$. *Usando-se as mesmas notações do Lema 3.1.19, as seguintes afirmações são verdadeiras.*

**(I)** *Se* $\mathcal{K} = (\mathrm{K}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *é uma seqüência exaustiva de compactos para* $\Omega$, $\hat{f}_1$ *é um representante de* $f$ *e* $\hat{u}_1$ *é um representante de* $u$, *então*

$$\Theta_{\mathcal{K},\hat{f},\hat{u}} - \Theta_{\mathcal{K},\hat{f}_1,\hat{u}_1} \in \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{X}] .$$

**(II)** *Se* $\mathcal{K} = (\mathrm{K}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *e* $\mathcal{H} = (H_j)_{j \in \mathbb{N}}$ *são seqüências exaustivas de compactos para* $\Omega$, $\hat{f}_1$ *um representante de* $f$ *e* $\hat{u}_1$ *um representante de* $u$, *então*

$$\Theta_{\mathcal{K},\hat{f},\hat{u}} - \Theta_{\mathcal{H},\hat{f}_1,\hat{u}_1} \in \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{X}] .$$

*Demonstração.* **(I)** Devemos verificar que, se $(L_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência exaustiva de compactos para $\Omega$, então para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $s \in \mathrm{I}$ tal que

$$(\Theta_{\mathcal{K},\hat{f},\hat{u}} - \Theta_{\mathcal{K},\hat{f}_1,\hat{u}_1})|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{L}_k} \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{L}_k; \mathrm{X}_s] .$$

Fixemos então $k \in \mathbb{N}$. Como estamos usando as notações do Lema 3.1.19, segue-se que existem seqüências estritamente decrescentes $(\eta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ e $(s_j)_{j \in \mathbb{N}}$ em I tais que

valem **(a)** e **(b)** do Lema 3.1.19 para $\hat{u}$ e $\hat{u}_1$ e as aplicações $\hat{v}_j, \hat{v}_{j,1} : \mathrm{I} \times \overset{\circ}{\mathrm{K}}_j \to \mathrm{X}_{s_j}$, definidas por

$$\hat{v}_j(\varepsilon, t) := \begin{cases} \hat{u}(\varepsilon, t) & \text{se} \quad \varepsilon \in \mathrm{I}_{\eta_j} \\ 0 & \text{se} \quad \varepsilon \notin \mathrm{I}_{\eta_j} \end{cases} \quad \text{e} \quad \hat{v}_{j,1}(\varepsilon, t) := \begin{cases} \hat{u}_1(\varepsilon, t) & \text{se} \quad \varepsilon \in \mathrm{I}_{\eta_j} \\ 0 & \text{se} \quad \varepsilon \notin \mathrm{I}_{\eta_j} \end{cases},$$

são elementos de $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_{s_j}]$. Além disso, as aplicações $\hat{g}_j, \hat{g}_{j,1} : \mathrm{I} \times \overset{\circ}{\mathrm{K}}_j \to \mathrm{X}$, definidas por

$$\hat{g}_j(\varepsilon, t) := \begin{cases} \hat{f}(\varepsilon, t, \hat{u}(\varepsilon, t)) & \text{se} \quad \varepsilon \in \mathrm{I}_{\eta_j} \\ 0 & \text{se} \quad \varepsilon \notin \mathrm{I}_{\eta_j} \end{cases}$$

e

$$\hat{g}_{j,1}(\varepsilon, t) := \begin{cases} \hat{f}_1(\varepsilon, t, \hat{u}_1(\varepsilon, t)) & \text{se} \quad \varepsilon \in \mathrm{I}_{\eta_j} \\ 0 & \text{se} \quad \varepsilon \notin \mathrm{I}_{\eta_j} \end{cases},$$

são elementos de $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}]$ e são tais que

$$\Theta_{\mathcal{K}, \hat{f}, \hat{u}}\big|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} - \hat{g}_j \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}] \quad \text{e} \quad \Theta_{\mathcal{K}, \hat{f}_1, \hat{u}_1}\big|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} - \hat{g}_{j,1} \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}]$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Seja $j \in \mathbb{N}$ tal que $L_k \subset\subset \overset{\circ}{\mathrm{K}}_j$, como $\emptyset \neq \overset{\circ}{L}_k \subset \overset{\circ}{\mathrm{K}}_j$, segue-se que existe $s \in \mathrm{I}$, que podemos tomar de tal modo que $s < s_j$, tal que

$$\hat{u}\big|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{L}_k} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{L}_k; \mathrm{X}_s] \quad \text{e} \quad \big(\hat{u}_1 - \hat{u}\big)\big|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{L}_k} \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{L}_k; \mathrm{X}_s] \,.$$

Além disso, existe $r < s$ tal que

$$\Theta_{\mathcal{K}, \hat{f}, \hat{u}}\big|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{L}_k} - \hat{g}_j\big|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{L}_k} \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{L}_k; \mathrm{X}_r]$$

e

$$\Theta_{\mathcal{K}, \hat{f}_1, \hat{u}_1}\big|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{L}_k} - \hat{g}_{j,1}\big|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{L}_k} \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{L}_k; \mathrm{X}_r] \,;$$

para esse $r$, temos que $\hat{f}\big|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{L}_k \times \mathrm{X}_s} : \mathrm{I} \times \overset{\circ}{L}_k \times \mathrm{X}_s \to \mathrm{X}_r$ e $\hat{f}_1\big|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{L}_k \times \mathrm{X}_s} : \mathrm{I} \times \overset{\circ}{L}_k \times \mathrm{X}_s \to \mathrm{X}_r$ verificam, juntamente com $\hat{u}\big|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{L}_k}$ as hipóteses do Lema 3.1.15. Portanto, teremos

$$\hat{g}_j\big|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{L}_k} - \hat{g}_{j,1}\big|_{\mathrm{I} \times \overset{\circ}{L}_k} \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{L}_k; \mathrm{X}_r] \,,$$

logo

$$\Theta_{\mathcal{K},\hat{f},\hat{u}}|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{L}_k} - \Theta_{\mathcal{K},\hat{f}_1,\hat{u}_1}|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{L}_k} = \left(\Theta_{\mathcal{K},\hat{f},\hat{u}}|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{L}_k} - \hat{g}_j|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{L}_k}\right) + \left(\hat{g}_{j,1}|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{L}_k} - \Theta_{\mathcal{K},\hat{f}_1,\hat{u}_1}|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{L}_k}\right) + \\ + \left(\hat{g}_j|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{L}_k} - \hat{g}_{j,1}|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{L}_k}\right)$$

pertence a $\mathcal{N}[\overset{\circ}{L}_k; \mathrm{X}_r]$ e assim concluímos **(I)**.

**(II)** Como

$$\Theta_{\mathcal{K},\hat{f},\hat{u}} - \Theta_{\mathcal{H},\hat{f}_1,\hat{u}_1} = \Theta_{\mathcal{K},\hat{f},\hat{u}} - \Theta_{\mathcal{K},\hat{f}_1,\hat{u}_1} + \Theta_{\mathcal{K},\hat{f}_1,\hat{u}_1} - \Theta_{\mathcal{H},\hat{f}_1,\hat{u}_1}$$

e vale **(I)** basta verificar que

$$\Theta_{\mathcal{K},\hat{f}_1,\hat{u}_1} - \Theta_{\mathcal{H},\hat{f}_1,\hat{u}_1} \in \mathcal{N}[\Omega; \mathrm{X}] \, .$$

Devemos verificar que, se $(L_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência exaustiva de compactos para $\Omega$, então para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $s \in \mathrm{I}$ tal que

$$\left(\Theta_{\mathcal{K},\hat{f}_1,\hat{u}_1} - \Theta_{\mathcal{H},\hat{f}_1,\hat{u}_1}\right)|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{L}_k} \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{L}_k; \mathrm{X}_s] \, . \tag{3.6}$$

Fixemos então $k \in \mathbb{N}$. Como estamos usando as notações do Lema 3.1.19, segue-se que existem seqüências estritamente decrescentes $(\overline{\eta}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ e $(\overline{s}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em I tais que valem **(a)** e **(b)** do Lema 3.1.19 para $\hat{u}_1$ e a aplicação $\hat{w}_j : \mathrm{I}\times\overset{\circ}{H}_j \to \mathrm{X}_{\overline{s}_j}$, definida por

$$\hat{w}_j(\varepsilon, t) := \begin{cases} \hat{u}_1(\varepsilon, t) & \text{se} \quad \varepsilon \in \mathrm{I}_{\overline{\eta}_j} \\ 0 & \text{se} \quad \varepsilon \notin \mathrm{I}_{\overline{\eta}_j} \, , \end{cases}$$

é um elemento de $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{H}_j; \mathrm{X}_{\overline{s}_j}]$. Além disso, a aplicação $\hat{l}_j : \mathrm{I}\times\overset{\circ}{H}_j \to \mathrm{X}$, definida por

$$\hat{l}_j(\varepsilon, t) := \begin{cases} \hat{f}_1(\varepsilon, t, \hat{u}_1(\varepsilon, t)) & \text{se} \quad \varepsilon \in \mathrm{I}_{\overline{\eta}_j} \\ 0 & \text{se} \quad \varepsilon \notin \mathrm{I}_{\overline{\eta}_j} \, , \end{cases}$$

é um elemento de $\mathcal{E}_{\mathrm{M}}[\overset{\circ}{H}_j; \mathrm{X}]$ e é tal que

$$\Theta_{\mathcal{H},\hat{f}_1,\hat{u}_1}|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{H}_j} - \hat{l}_j \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{H}_j; \mathrm{X}]$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Seja $j \in \mathbb{N}$ tal que $L_k \subset\subset \overset{\circ}{\mathrm{K}}_j \cup \overset{\circ}{H}_j$, como $\emptyset \neq \overset{\circ}{L}_k \subset \overset{\circ}{\mathrm{K}}_j$, segue-se que existe $s \in \mathrm{I}$, que podemos tomar de tal modo que $s < \min\{s_j, \overline{s}_j\}$, tal que, usando as notações de **(I)**,

$$\Theta_{\mathcal{H},\hat{f}_1,\hat{u}_1}|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{L}_k} - \hat{l}_j|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{L}_k} \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{L}_k; \mathrm{X}_s]$$

e

$$\Theta_{\mathcal{K},\hat{f}_1,\hat{u}_1}|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{L}_k} - \hat{g}_{j,1}|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{L}_k} \in \mathcal{N}[\overset{\circ}{L}_k; \mathrm{X}_s] \, .$$

Seja $\overline{\eta} := \min\{\eta_j, \overline{\eta}_j\}$ então $\hat{l}_j = \hat{g}_{j,1}$ em $\mathrm{I}_{\overline{\eta}} \times \overset{\circ}{L}_k$ e

$$\left(\Theta_{\mathcal{K},\hat{f}_1,\hat{u}_1} - \Theta_{\mathcal{H},\hat{f}_1,\hat{u}_1}\right)|_{\mathrm{I}_{\overline{\eta}}\times\overset{\circ}{L}_k} = \left(\Theta_{\mathcal{K},\hat{f}_1,\hat{u}_1} - \hat{g}_{j,1}\right)|_{\mathrm{I}_{\overline{\eta}}\times\overset{\circ}{L}_k} - \left(\Theta_{\mathcal{H},\hat{f}_1,\hat{u}_1} - \hat{l}_j\right)|_{\mathrm{I}_{\overline{\eta}}\times\overset{\circ}{L}_k} \, ;$$

e isso é suficiente para que se possa garantir a validade de (3.6). □

**3.1.21 Notação.** Seja $\Omega$ um aberto de $\mathbb{R}^n$, denotaremos com $\mathbf{1}_\Omega$, a classe em $\mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ da aplicação moderada $\hat{1}_\Omega : \mathrm{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, definida por

$$\hat{1}_\Omega(\varepsilon, t) := t \, .$$

Usando os Lemas anteriores, podemos introduzir a seguinte definição:

**3.1.22 Definição.** Sejam $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach, $\Omega$ um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $R > 0$. Sejam $f \in \mathcal{G}_R(\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X})$ e $u \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$, $R$-limitada. Denotaremos por $f \circ (\mathbf{1}_\Omega, u)$ a classe em $\mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$ da aplicação moderada $\Theta_{\mathcal{K},\hat{f},\hat{u}}$, definida no Lema 3.1.19 **(iii)**, sendo $\mathcal{K} = (\mathrm{K}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma seqüência exaustiva de compactos para $\Omega$, $\hat{f}$ um representante de $f$ e $\hat{u}$ um representante de $u$. A aplicação $f \circ (\mathbf{1}_\Omega, u)$ será chamada a composta de $f \in \mathcal{G}_R(\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X})$ com $u \in \mathcal{G}(\Omega; \mathrm{X})$.

**3.1.23 Observação.** A notação para a composta, introduzida na Definição 3.1.22, sugere, corretamente, que $(\mathbf{1}_\Omega, u) \in \mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R}^n \times \mathrm{X})$ e que essa definição seria um caso particular de uma composição entre aplicações $f \in \mathcal{G}_R(\Omega \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X})$ com aplicações $w \in \mathcal{G}(\Omega; \mathbb{R}^n \times \mathrm{X})$ possuindo certas propriedades. Como, neste trabalho, não necessitaremos de um nível de generalização tão mais alto quanto o que já possuímos, optamos por apresentar a composta do modo feito acima.

## 3.2 Um resultado de existência de soluções

Nesta seção, apresentaremos uma possível versão do Teorema de Ovcyannikov não linear no ambiente das funções generalizadas de Colombeau.

Sejam $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach, $a > 0$ e $s_0 \in \mathrm{I}$. Consideremos a classe de todas as funções $u : J_{as_0} \to \mathrm{X}$, que, munida das operações pontuais, é um espaço vetorial. Denotaremos por $\mathcal{B}_{as_0}$ o espaço vetorial das funções $u : J_{as_0} \to \mathrm{X}$ que verificam as seguintes condições

1. para cada $s \in \mathrm{I}_{s_0}$ tem-se que $u|_{J_{a(s_0-s)}} \in C(J_{a(s_0-s)}; \mathrm{X}_s)$;
2. $\displaystyle\sup_{\substack{s\in \mathrm{I}_{s_0} \\ |t|<a(s_0-s)}} \|u(t)\|_s \left(1 - \frac{|t|}{a(s_0-s)}\right) < +\infty$.

**3.2.1 Lema.** *Sejam $(\mathrm{X}, (\mathrm{X}_s))$ uma escala de espaços de Banach, $a > 0$ e $s_0 \in \mathrm{I}$. Então a aplicação $M_a : \mathcal{B}_{as_0} \to \mathbb{R}^+$, definida por*

$$M_a[u] := \sup_{\substack{s\in I_{s_0} \\ |t|<a(s_0-s)}} \|u(t)\|_s \left(1 - \frac{|t|}{a(s_0-s)}\right),$$

*é uma norma sobre $\mathcal{B}_{as_0}$ que o torna um espaço de Banach.*

*Demonstração.* É fácil verificar que $M_a$ verifica as propriedades de uma norma. Vamos verificar que $\mathcal{B}_{as_0}$ é completo. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{B}_{as_0}$. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$M_a[u_m - u_n] < \varepsilon \text{ para cada } m, n \geq n_0 .$$

Para cada $s \in \mathrm{I}_{s_0}$ fixado, e para cada $t \in J_{a(s_0-s)}$, teremos

$$\|u_m(t) - u_n(t)\|_s \left(1 - \frac{|t|}{a(s_0-s)}\right) < \varepsilon .$$

Tomemos um compacto $\mathrm{K} \subset\subset J_{a(s_0-s)}$. Então, existe $\alpha_{\mathrm{K}} > 0$ tal que, para cada $t \in \mathrm{K}$,

$$\alpha_{\mathrm{K}} \|u_m(t) - u_n(t)\|_s < \varepsilon \text{ para cada } m, n \geq n_0 .$$

Logo a seqüência $(u_n)$ é de Cauchy em $C(J_{a(s_0-s)}; \mathrm{X}_s)$, estando esse espaço munido de sua topologia natural de espaço de Fréchet. Assim, para cada $s \in \mathrm{I}_{s_0}$ existe $u_s \in C(J_{a(s_0-s)}; \mathrm{X}_s)$ tal que

$$u_n \to u_s \ , \ \text{ em } C(J_{a(s_0-s)}; \mathrm{X}_s) \, .$$

Fixado $s \in \mathrm{I}_{s_0}$, segue-se que para cada $r \in \mathrm{I}_s$ teremos

$$u_n \to u_r \ , \ \text{ em } C(J_{a(s_0-r)}; \mathrm{X}_r) \ \text{ e}$$

$$u_n|_{J_{a(s_0-s)}} \to u_r|_{J_{a(s_0-s)}} \ , \ \text{ em } C(J_{a(s_0-s)}; \mathrm{X}_r) \, .$$

Como $\mathrm{X}_s \hookrightarrow \mathrm{X}_r$, segue-se que

$$u_r|_{J_{a(s_0-s)}} = u_s \ \text{ em } \ C(J_{a(s_0-s)}; \mathrm{X}_s) \, .$$

Definimos então $u : \mathcal{B}_{as_0} \to \mathrm{X}$, pondo, para cada $s \in \mathrm{I}_{s_0}$,

$$u(t) := u_s(t) \ , \ \text{ para cada } \ t \in J_{a(s_0-s)} \, .$$

Não é difícil verificar que

$$M_a[u_n - u] \to 0 \, , \ \text{ quando } \ n \to +\infty \, .$$

□

Vamos agora enunciar e demonstrar o principal resultado deste capítulo que consiste em uma versão, isto é, uma adaptação ao nosso contexto, do clássico teorema de Ovcyannikov. O resultado que apresentamos é baseado na formulação de T. Kano e T. Nishida em [16].

**3.2.2 Teorema.** *Sejam* $(\mathrm{X}, (\mathrm{X_s}))$ *uma escala de espaços de Banach,* $d > 0$, $J_d := ]-d, d[ \subset \mathbb{R}$ *e* $R > 0$. *Seja* $f \in \mathcal{G}_R(J_d \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X})$ *uma aplicação para a qual existe um representante* $\hat{f} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M},R}[J_d \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}]$ *satisfazendo as seguintes condições:*

(i) *para cada subconjunto compacto* $\mathrm{K} \subset\subset J_d$, *existem constantes* $c > 0$ *e* $\eta \in \mathrm{I}$ *tais que para cada* $s \in \mathrm{I}$ *e para cada* $(x, y) \in B_R^s \times B_R^s$ *vale , para cada* $r \in \mathrm{I}_s$

$$\sup_{t \in \mathrm{K}} \|\hat{f}(\varepsilon, t, x) - \hat{f}(\varepsilon, t, y)\|_r \leq \frac{c\|x - y\|_s}{s - r},$$

*para cada* $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$ ;

(ii) *para cada subconjunto compacto* $\mathrm{K} \subset\subset J_d$, *existem constantes* $c > 0$ *e* $\eta \in \mathrm{I}$, *tais que para cada* $s \in \mathrm{I}$ *e para cada aplicação* $\tilde{x} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}_s)$ *com* $\tilde{x}(\mathrm{I}_\eta) \subset B_R^s$, *tem-se, para cada* $r \in \mathrm{I}_s$ ,

$$\sup_{t \in \mathrm{K}} \|\hat{f}(\varepsilon, t, \tilde{x}(\varepsilon))\|_r \leq \frac{c}{s - r},$$

*para cada* $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$.

*Suponhamos também que seja dada* $u_0 \in \overline{\mathrm{X}}$ *para a qual existe um representante* $\hat{u}_0 \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathrm{X})$ *satisfazendo a propriedade: existem* $s \in \mathrm{I}$ *e* $\eta \in \mathrm{I}$ *tais que* $\hat{u}_0(\mathrm{I}_\eta) \subset B_{R/2}^s$.

*Nessas condições, existe* $\delta > 0$ *e uma função* $u \in \mathcal{G}(J_\delta; \mathrm{X})$ *satisfazendo as condições*

(I) *u é R-limitada. (Definição 3.1.17);*

(II)

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f \circ (\mathbf{1}_{J_\delta}, u) \quad \text{em } \mathcal{G}(J_\delta; \mathrm{X}) \\ \\ u(0) = u_0 \,. \end{cases} \tag{3.7}$$

*Demonstração.* A idéia é seguir bem de perto a demonstração do caso "clássico" apresentada em [16]. Sejam $\hat{f} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M},R}[J_d \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}]$ e $\hat{u}_0 \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathrm{X})$ representantes de $f$ e $u_0$ verificando as condições do enunciado. Fixemos $b \in \mathrm{I}_d$ e o compacto $\overline{J}_b \subset\subset J_d$. Sejam $c > 0$, $\eta \in \mathrm{I}$ e $s_0 \in \mathrm{I}$ tais que

**(i)'** para cada $s \in \mathrm{I}$ e para cada $(x, y) \in B_R^s \times B_R^s$ para cada $r \in \mathrm{I}_s$ e para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$

$$\sup_{t \in \overline{J}_b} \|\hat{f}(\varepsilon, t, x) - \hat{f}(\varepsilon, t, y)\|_r \leq \frac{c\|x - y\|_s}{s - r}\,; \tag{3.8}$$

**(ii)'** para cada $s \in \mathrm{I}$, para cada aplicação $\tilde{x} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}_s)$ com $\tilde{x}(\mathrm{I}_\eta) \subset B_R^s$, para cada $r \in \mathrm{I}_s$ e para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$

$$\sup_{t \in \overline{J}_b} \|\hat{f}(\varepsilon, t, \tilde{x}(\varepsilon))\|_r \leq \frac{c}{s - r}\,; \tag{3.9}$$

**(iii)'** $\|\hat{u}_0(\varepsilon)\|_{s_0} < \dfrac{R}{2}$, para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$.

Seja $a_0 > 0$; inicialmente o escolhemos de tal modo que também verifique as condições: $0 < a_0 s_0 < b$. Mais adiante, será feita uma escolha mais conveniente. Como no caso "clássico", uma candidata a representante da solução será construída por meio de uma seqüência $(u_k^\varepsilon)_{k \in \mathbb{N}}$, definida por recorrência, de modo impreciso, da seguinte forma: para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$

$$u_{k+1}^\varepsilon(t) := \hat{u}_0(\varepsilon) + \int_0^t \hat{f}(\varepsilon, \zeta, u_k^\varepsilon(\zeta))\, d\zeta\,,$$

para cada $k = 0, 1, \ldots$ com $u_0^\varepsilon(t) := \hat{u}_0(\varepsilon)$.

Vamos agora tornar precisa a definição acima. Seja $0 < a_0 < \min\{\dfrac{b}{s_0}; \dfrac{R}{36c}; \dfrac{1}{12c}\}$. Inicialmente definimos uma seqüência $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ por

$$a_{k+1} := a_k - \frac{a_0}{2^{k+2}}$$

para cada $k = 0, 1, 2, \ldots$, ou seja,

$$a_k = \frac{a_0}{2^{k+1}} + \frac{a_0}{2}\,.$$

Assim,

$$a := \lim_{k \to \infty} a_k = \frac{a_0}{2}\,.$$

Fixemos $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$ e definamos, para cada $t \in J_{a_0 s_0}$, $u_0^\varepsilon(t) := \hat{u}_0(\varepsilon)$. Observamos que

(a) $u_0^\varepsilon \in C^\infty(J_{a_0 s_0}; \mathrm{X}_s)$ para cada $s \in \mathrm{I}_{s_0}$. Além disso,

(b) $\|u_0^\varepsilon(t)\|_s < \dfrac{R}{2}$ para cada $t \in J_{a_0 s_0}$, para cada $s \in \mathrm{I}_{s_0}$.

Definimos agora, para cada $t \in J_{a_0 s_0}$,

$$v_0^\varepsilon(t) := \int_0^t \hat{f}(\varepsilon, \zeta, u_0^\varepsilon(\zeta))\, d\zeta\,.$$

É claro que para cada $s \in \mathrm{I}_{s_0}$, $v_0^\varepsilon \in C^\infty(J_{a_0 s_0}; \mathrm{X}_s)$; além disso, para cada $\theta \in ]0, s_0 - s[$, como $\|u_0^\varepsilon(t)\|_{s+\theta} < \dfrac{R}{2}$ segue-se, usando-se a hipótese (3.9), que

$$\|v_0^\varepsilon(t)\|_s \leq \left| \int_0^t \|\hat{f}(\varepsilon, \zeta, u_0^\varepsilon(\zeta))\|_s\, d\zeta \right| \leq \frac{c|t|}{\theta}\,.$$

Daí

$$\|v_0^\varepsilon(t)\|_s \leq \frac{c|t|}{s_0 - s}\,,\ t \in J_{a_0 s_0} \text{ e } s \in \mathrm{I}_{s_0}\,.$$

Seja $\lambda_0 := \sup\limits_{\substack{0<s<s_0 \\ |t|<a_0(s_0-s)}} \|v_0^\varepsilon(t)\|_s \left(1 - \dfrac{|t|}{a_0(s_0 - s)}\right)$. Então teremos $\lambda_0 \leq a_0 c$, ou seja, $v_0^\varepsilon \in \mathcal{B}_{a_0 s_0}$. Definimos agora para cada $t \in J_{a_0 s_0}$,

$$u_1^\varepsilon(t) := u_0^\varepsilon(t) + v_0^\varepsilon(t)\,.$$

Temos que $u_1^\varepsilon \in C^\infty(J_{a_0 s_0}; \mathrm{X}_s)$ para cada $s \in \mathrm{I}_{s_0}$. Observamos que, para cada $s \in \mathrm{I}_{s_0}$ e para cada $|t| < a_0(s_0 - s)$,

$$\|v_0^\varepsilon(t)\|_s \leq \frac{\lambda_0}{1 - \dfrac{|t|}{a_0(s_0 - s)}}\,.$$

Desse modo, se $|t| < a_1(s_0 - s)$, teremos

$$\|v_0^\varepsilon(t)\|_s \leq \frac{\lambda_0}{1 - \dfrac{a_1}{a_0}}\,.$$

Daí, para $|t| < a_1(s_0 - s)$,

$$\|u_1^\varepsilon(t)\|_s \leq \frac{R}{2} + \frac{\lambda_0}{1 - \dfrac{a_1}{a_0}}\,.$$

Como $4a_0c < \dfrac{R}{2}$, então $\|u_1^\varepsilon(t)\|_s < R$. Assim, para cada $t \in J_{a_1 s_0}$ podemos definir

$$v_1^\varepsilon(t) := \int_0^t \left[\hat{f}(\varepsilon, \zeta, u_1^\varepsilon(\zeta)) - \hat{f}(\varepsilon, \zeta, u_0^\varepsilon(\zeta))\right] d\zeta\,.$$

Se $t^* \in J_{a_1 s_0}$, então existe $s \in \mathrm{I}_{s_0}$ tal que $|t^*| < a_1(s_0 - s)$ e daí $v_1^\varepsilon(t^*) \in \mathrm{X}_r$ para $r \in \mathrm{I}_s$. Por outro lado, para cada $s \in \mathrm{I}_{s_0}$ e para cada $\theta \in ]0, s_0 - s[$, como $\|u_i^\varepsilon(t)\|_{s+\theta} < R$, para $i = 0, 1$, se $|t| < a_i(s_0 - s - \theta)$, então

$$v_1^\varepsilon \in C^\infty(J_{a_1(s_0-s-\theta)}; \mathrm{X}_s)\,.$$

Podemos então concluir que

$$v_1^\varepsilon \in C^\infty(J_{a_1(s_0-s)}; \mathrm{X}_s)$$

para cada $s \in \mathrm{I}_{s_0}$. Fixemos $s \in \mathrm{I}_{s_0}$. Para cada $\zeta$, $t$ tais que $|\zeta| < |t| < a_1(s_0 - s)$, seja $s(\zeta) := \dfrac{1}{2}(s_0 - \dfrac{|\zeta|}{a_1} + s)$; então tem-se $s < s(\zeta) < s_0 - \dfrac{|\zeta|}{a_1}$. Observamos também que $|\zeta| < a_1(s_0 - s(\zeta))$, o que implica em $u_1^\varepsilon(\zeta) \in B_R^{s(\zeta)}$ e também em $u_0^\varepsilon(\zeta) \in B_R^{s(\zeta)}$. Assim, por (3.8), teremos

$$\|v_1^\varepsilon(t)\|_s \le c\left|\int_0^t \frac{\|v_0^\varepsilon(\zeta)\|_{s(\zeta)}}{s(\zeta) - s}\, d\zeta\right|.$$

Como $\|v_0^\varepsilon(\zeta)\|_{s(\zeta)} \le \dfrac{\lambda_0}{1 - \dfrac{|\zeta|}{a_0(s_0 - s(\zeta))}}$, segue-se que

$$\|v_1^\varepsilon(t)\|_s \le c\left|\int_0^t \frac{\lambda_0}{(1 - \dfrac{|\zeta|}{a_0(s_0 - s(\zeta))})} \frac{d\zeta}{s(\zeta) - s}\right| \le c\left|\int_0^t \frac{\lambda_0}{(1 - \dfrac{|\zeta|}{a_1(s_0 - s(\zeta))})} \frac{d\zeta}{s(\zeta) - s}\right|;$$

portanto,

$$\|v_1^\varepsilon(t)\|_s \le c\lambda_0 a_1\left|\int_0^t \frac{s_0 - s(\zeta)}{a_1(s_0 - s(\zeta)) - |\zeta|}\left(\frac{d\zeta}{(s(\zeta) - s)}\right)\right|$$

e, substituindo $s(\zeta) = \dfrac{1}{2}(s_0 - \dfrac{|\zeta|}{a_1} + s)$, segue-se que

$$\|v_1^\varepsilon(t)\|_s \le 2c\lambda_0 a_1\left|\int_0^t \frac{a_1(s_0 - s) + |\zeta|}{(a_1(s_0 - s) - |\zeta|)^2}\, d\zeta\right| \le 4c\lambda_0 a_1\left(\frac{a_1(s_0 - s)}{a_1(s_0 - s) - |t|}\right),$$

ou seja,

$$\|v_1^\varepsilon(t)\|_s \leq 4c\lambda_0 a_1 \left( \frac{1}{1 - \dfrac{|t|}{a_1(s_0 - s)}} \right),$$

para cada $t$ tal que $|t| < a_1(s_0 - s)$. Logo, se definirmos

$$\lambda_1 := \sup_{\substack{s \in \mathrm{I}_{s_0} \\ |t| < a_1(s_0 - s)}} \|v_1^\varepsilon(t)\|_s \left( 1 - \frac{|t|}{a_1(s_0 - s)} \right),$$

teremos

$$\lambda_1 \leq 4c\lambda_0 a_0 .$$

Assim, para $|t| < a_2(s_0 - s)$ teremos, para cada $s \in \mathrm{I}_{s_0}$,

$$\|v_1^\varepsilon(t)\|_s \leq \frac{\lambda_1}{1 - \dfrac{|t|}{a_1(s_0 - s)}} \leq \frac{\lambda_1}{1 - \dfrac{a_2}{a_1}} .$$

Definimos agora, para cada $t \in J_{a_1 s_0}$,

$$u_2^\varepsilon(t) := u_1^\varepsilon(t) + v_1^\varepsilon(t) .$$

Temos que $u_2^\varepsilon \in C_*^\infty(J_{a_1 s_0}; \mathrm{X})$ e, para cada $s \in \mathrm{I}_{s_0}$, $u_2^\varepsilon \in C^\infty(J_{a_1(s_0 - s)}; \mathrm{X}_s)$. Por outro lado, temos

$$\|u_2^\varepsilon(t)\|_s \leq \|u_1^\varepsilon(t)\|_s + \|v_1^\varepsilon(t)\|_s \leq \frac{R}{2} + \frac{\lambda_0}{1 - \dfrac{a_1}{a_0}} + \frac{\lambda_1}{1 - \dfrac{a_2}{a_1}} .$$

Vamos agora estabelecer o processo de indução. Suponhamos que, para cada $i = 0, \ldots, k$ e $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$ fixado, estejam definidas funções $u_i^\varepsilon \in C_*^\infty(J_{a_i s_0}; \mathrm{X})$ e $v_i^\varepsilon \in C_*^\infty(J_{a_i s_0}; \mathrm{X})$ tais que

**(i)** para cada $i = 0, \ldots, k$, para cada $s \in \mathrm{I}_{s_0}$ e para cada $t \in J_{a_i(s_0 - s)}$ tenhamos $\|u_i^\varepsilon(t)\|_s < R$. Além disso, que se verifique também $u_i^\varepsilon \in C^\infty(J_{a_i(s_0 - s)}; \mathrm{X}_s)$ ;

**(ii)** para cada $i = 0, 1, \ldots, k$ e para cada $s \in \mathrm{I}_{s_0}$ tenhamos $v_i^\varepsilon \in C^\infty(J_{a_i(s_0 - s)}; \mathrm{X}_s)$ ;

**(iii)** para cada $t \in J_{as_0}$ e para cada $i = 0, \ldots, k-1$,

$$u_0^\varepsilon(t) = \hat{u}_0(\varepsilon)\,,$$
$$u_{i+1}^\varepsilon(t) = u_i^\varepsilon(t) + v_i^\varepsilon(t)\,,$$
$$v_{i+1}^\varepsilon(t) = \int_0^t \left[\hat{f}(\varepsilon, \zeta, u_{i+1}^\varepsilon(\zeta)) - \hat{f}(\varepsilon, \zeta, u_i^\varepsilon(\zeta))\right] d\zeta\,,$$

**(iv)** para cada $i = 0, \ldots, k-1$ tenhamos,

$$\lambda_i := \sup_{\substack{s \in \mathrm{I}_{s_0} \\ |t| < a_i(s_0 - s)}} \|v_i^\varepsilon(t)\|_s \left(1 - \frac{|t|}{a_i(s_0 - s)}\right) < +\infty\,,$$

$\lambda_{i+1} \leq 4\lambda_i c a_0$ e

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_i}{1 - \dfrac{a_{i+1}}{a_i}} < \frac{R}{4}\,.$$

A partir daqui, as contas são as mesmas de [16]; porém, para facilitar a leitura, vamos incluí-las aqui. Para cada $t \in J_{a_k s_0}$, teremos

$$u_{k+1}^\varepsilon(t) = u_k^\varepsilon(t) + v_k^\varepsilon(t)\,,$$

segue-se que teremos $u_{k+1}^\varepsilon \in C_*^\infty(J_{a_k s_0}; \mathrm{X})$, e, para cada $s \in \mathrm{I}_{s_0}$, teremos $u_{k+1}^\varepsilon \in C^\infty(J_{a_k(s_0 - s)}; \mathrm{X}_s)$. Mais ainda, para $|t| < a_{k+1}(s_0 - s)$ teremos

$$\|u_{k+1}^\varepsilon(t)\|_s \leq \frac{\lambda_k}{1 - \dfrac{a_{k+1}}{a_k}} + \|u_k^\varepsilon(t)\|_s\,.$$

Por recorrência, resulta

$$\|u_{k+1}^\varepsilon(t)\|_s \leq \sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda_j}{1 - \dfrac{a_{j+1}}{a_j}} + \frac{R}{2}\,.$$

A idéia é estimar $(\lambda_k)$ de modo que $\lambda_k \to 0$ quando $k \to +\infty$; e fazê-lo de tal modo que também tenhamos

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{\lambda_j}{1 - \dfrac{a_{j+1}}{a_j}} < \frac{R}{4}$$

independente de $k$. Temos

$$v_{k+1}^{\varepsilon}(t) := \int_0^t \left[ \hat{f}(\varepsilon, \zeta, u_{k+1}^{\varepsilon}(\zeta)) - \hat{f}(\varepsilon, \zeta, u_k^{\varepsilon}(\zeta)) \right] d\zeta \,.$$

Resulta, desse modo, que $v_{k+1}^{\varepsilon} \in C_*^{\infty}(J_{a_{k+1}s_0}; \mathrm{X})$ e ainda, para cada $s \in \mathrm{I}_{s_0}$, $v_{k+1}^{\varepsilon} \in C^{\infty}(J_{a_{k+1}(s_0-s)}; \mathrm{X}_s)$. Mais ainda, para cada $|\zeta| < |t| < a_{k+1}(s_0 - s)$, isto é, $s < s_0 - \dfrac{|\zeta|}{a_{k+1}}$. Escolhemos $s(\zeta)$ com $s < s(\zeta) < s_0 - \dfrac{|\zeta|}{a_{k+1}}$. Daí,

$$\|v_{k+1}^{\varepsilon}(t)\|_s \leq \left| \int_0^t \|\hat{f}(\varepsilon, \zeta, u_{k+1}^{\varepsilon}(\zeta)) - \hat{f}(\varepsilon, \zeta, u_k^{\varepsilon}(\zeta))\|_s \, d\zeta \right| \leq c \left| \int_0^t \frac{\|v_k^{\varepsilon}(\zeta)\|_{s(\zeta)}}{s(\zeta) - s} \, d\zeta \right| .$$

Tomamos $s(\zeta) = \dfrac{1}{2}\left( s_0 - \dfrac{|\zeta|}{a_{k+1}} + s \right)$. Como

$$\|v_k^{\varepsilon}(\zeta)\|_{s(\zeta)} \left( 1 - \frac{|\zeta|}{a_k(s_0 - s(\zeta))} \right) \leq \lambda_k \,,$$

segue-se que

$$\|v_{k+1}^{\varepsilon}(t)\|_s \leq c \left| \int_0^t \frac{\lambda_k}{\left(1 - \frac{|\zeta|}{a_k(s_0 - s(\zeta))}\right)} \frac{d\zeta}{s(\zeta) - s} \right| \leq c \left| \int_0^t \frac{\lambda_k d\zeta}{\left(1 - \frac{|\zeta|}{a_{k+1}(s_0 - s(\zeta))}\right)(s(\zeta) - s)} \right| .$$

Ou seja,

$$\|v_{k+1}^{\varepsilon}(t)\|_s \leq 2c\lambda_k a_{k+1} \left| \int_0^t \frac{\left[a_{k+1}(s_0 - s) + |\zeta|\right]}{\left[a_{k+1}(s_0 - s) - |\zeta|\right]^2} d\zeta \right| .$$

Como $|\zeta| < |t| < a_{k+1}(s_0 - s)$, teremos

$$\|v_{k+1}^{\varepsilon}(t)\|_s \leq 4c\lambda_k a_{k+1} \left( \frac{a_{k+1}(s_0 - s)}{a_{k+1}(s_0 - s) - |t|} \right) .$$

Ou seja,

$$\|v_{k+1}^{\varepsilon}(t)\|_s \leq 4c\lambda_k a_0 \left( \frac{1}{1 - \dfrac{|t|}{a_{k+1}(s_0 - s)}} \right) .$$

Portanto,

$$\lambda_{k+1} \leq 4c\lambda_k a_0 \,.$$

Como $\lambda_0 \leq a_0 c < 4a_0 c$, pela escolha inicial de $a_0$, temos que $4a_0 c < \dfrac{1}{3}$. Assim, para cada $j = 0, 1, \ldots, k$ teremos

$$\lambda_{j+1} < \frac{1}{3}\lambda_j \,.$$

Logo,

$$\sum_{j=0}^{k+1} \frac{\lambda_j}{1-\frac{a_{j+1}}{a_j}} = \sum_{j=0}^{k+1} 2(1+2^j)\lambda_j \leq \sum_{j=0}^{k+1} \frac{2(1+2^j)\lambda_0}{3^j} \leq 3\lambda_0 \sum_{j=0}^{k+1} \left(\frac{2}{3}\right)^j \leq 9\lambda_0 < 9a_0c\,.$$

Finalmente, observamos que $a_0$ foi escolhido de modo que $9a_0c < \dfrac{R}{4}$. Portanto, concluímos que, para cada $k = 0, 1, \ldots$, teremos $u_k^\varepsilon \in C_*^\infty(J_{a_k s_0}; \mathrm{X})$ e, para cada $s \in \mathrm{I}_{s_0}$, teremos $u_k^\varepsilon \in C^\infty(J_{a_k(s_0-s)}; \mathrm{X}_s)$ e ainda para cada $t \in J_{a_k(s_0-s)}$

$$\|u_k^\varepsilon(t)\|_s \leq \frac{3R}{4}\,.$$

Como $M_k[v_k^\varepsilon] = \lambda_k$, segue-se que para $|t| < a(s_0 - s) < a_k(s_0 - s)$ teremos

$$\|u_{k+1}^\varepsilon(t) - u_k^\varepsilon(t)\|_s \leq \frac{\lambda_k}{\left(1 - \frac{|t|}{a_k(s_0-s)}\right)} < \frac{\lambda_k}{\left(1 - \frac{|t|}{a(s_0-s)}\right)}\,.$$

Portanto,

$$M_a[u_{k+1}^\varepsilon - u_k^\varepsilon] \leq \lambda_k\,.$$

Como a série $\sum \lambda_k$ é convergente, segue-se que a seqüência $(u_k^\varepsilon)$ converge a um elemento $u^\varepsilon \in \mathcal{B}_{as_0}$ e, além disso, para cada $t \in J_{a(s_0-s)}$ teremos,

$$\|u^\varepsilon(t)\|_s \leq \frac{3R}{4} \text{ para cada } s \in \mathrm{I}_{s_0}\,. \tag{3.10}$$

Verifica-se também, do mesmo modo que em [16], que para cada $s \in \mathrm{I}_{s_0}$ e $t \in J_{a(s_0-s)}$, teremos

$$u^\varepsilon(t) = u_0^\varepsilon(t) + \int_0^t \hat{f}(\varepsilon, \zeta, u^\varepsilon(\zeta))\, d\zeta \text{ em } \mathrm{X}_s\,. \tag{3.11}$$

De fato, fixemos $s \in \mathrm{I}_{s_0}$ e seja $\theta \in ]0, s_0 - s[$ qualquer. Então, para cada $t \in J_{as_0}$ tal que $|t| < a(s_0 - s - \theta)$, teremos

$$\begin{aligned}
&\|u_0^\varepsilon(t) + \int_0^t \hat{f}(\varepsilon, \zeta, u^\varepsilon(\zeta))\, d\zeta - u^\varepsilon(t)\|_s \leq \\
&\leq \left| \int_0^t \|\hat{f}(\varepsilon, \zeta, u^\varepsilon(\zeta)) - \hat{f}(\varepsilon, \zeta, u_k^\varepsilon(\zeta))\|_s\, d\zeta \right| + \|u^\varepsilon(t) - u_{k+1}^\varepsilon(t)\|_s \leq \\
&\leq \frac{c}{\theta} \left| \int_0^t \|u^\varepsilon(\zeta) - u_k^\varepsilon(\zeta)\|_{s+\theta}\, d\zeta \right| + \|u^\varepsilon(t) - u_{k+1}^\varepsilon(t)\|_s\,,
\end{aligned}$$

e as duas parcelas do segundo membro convergem a zero quando $k \to +\infty$.

Para cada $s \in \mathrm{I}_{s_0}$, seja $\theta > 0$ tal que $0 < s < s + \theta < s_0$, como $u^\varepsilon \in C(J_{a(s_0-s-\theta)}; \mathrm{X}_{s+\theta})$ e $X_{s+\theta} \hookrightarrow \mathrm{X}_s$, segue-se, de (3.11), que $u^\varepsilon \in C^1(J_{a(s_0-s-\theta)}; \mathrm{X}_s)$ e da arbitrariedade de $\theta$, segue-se que, para cada $s \in \mathrm{I}_{s_0}$, teremos $u^\varepsilon \in C^1(J_{a(s_0-s)}; \mathrm{X}_s)$. Repetindo o argumento, concluímos que para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$ e para cada $s \in \mathrm{I}_{s_0}$

$$u^\varepsilon \in C^\infty(J_{a(s_0-s)}; \mathrm{X}_s)\,. \tag{3.12}$$

Fixemos $s \in \mathrm{I}_{s_0}$ e seja $\mathrm{K} \subset\subset J_{a(s_0-s)}$ de (3.10) obtemos

$$\sup_{t\in\mathrm{K}} \|u^\varepsilon(t)\|_s < R\,. \tag{3.13}$$

Seja $\delta := as_0$. Para facilitar a escrita, usaremos, daqui por diante, a seguinte notação: para cada $s \in \mathrm{I}$, $B_s := J_{a(s_0-s)}$. Definimos a função $\hat{u} : \mathrm{I} \times J_\delta \to \mathrm{X}$ do seguinte modo:

$$\hat{u}(\varepsilon, t) := \begin{cases} u^\varepsilon(t) & \text{se} \quad \varepsilon \in \mathrm{I}_\eta \\ 0 & \text{se} \quad \varepsilon \notin \mathrm{I}_\eta\,. \end{cases}$$

Em primeiro lugar, vamos verificar que $\hat{u} \in \mathcal{E}[J_\delta; \mathrm{X}]$. Fixemos uma seqüência exaustiva de compactos $(\mathrm{K}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ para $J_\delta$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $s \in \mathrm{I}_{s_0}$ tal que $\mathrm{K}_j \subset B_s$. Por (3.12), segue-se que para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$ teremos $\hat{u}(\varepsilon, \cdot)|_{\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} \in C^\infty(\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_s)$; portanto, para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$,

$$\hat{u}(\varepsilon, \cdot) \in C^\infty_*(J_\delta; \mathrm{X})\,.$$

Vamos agora verificar que $\hat{u} \in \mathcal{E}_\mathrm{M}[J_\delta; \mathrm{X}]$. Seja $(\mathrm{K}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma seqüência exaustiva de compactos para $J_\delta$ e mostremos que para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $s \in \mathrm{I}$ tal que

$$\hat{u}|_{\mathrm{I}\times\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j} \in \mathcal{E}_\mathrm{M}[\overset{\circ}{\mathrm{K}}_j; \mathrm{X}_s]\,.$$

Fixemos $j \in \mathbb{N}$ e consideremos um compacto $L \subset\subset \overset{\circ}{\mathrm{K}}_j$. A idéia é usar indução sobre a ordem de derivação $m \in \mathbb{N}$. A prova será conseqüência da seguinte

**3.2.3 Afirmação.** *Para cada $p \in \mathbb{N}$, para cada $s \in \mathrm{I}_{s_0}$ e para cada para $(r,l) \in \mathrm{I}_{s_0} \times \mathrm{I}_{s_0}$, tais que $s \leq r < l$, existem constantes $M > 0$, $N \in \mathbb{N}$ e $\eta \in \mathrm{I}$ tais que para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$,*

$$\sup_{t \in \overline{B}_l} \|\hat{u}^{(p)}(\varepsilon,t)\|_r \leq M\varepsilon^{-N}.$$

Vamos concluir a verificação de que $\hat{u}$ é uma aplicação moderada e, em seguida, demonstrar a afirmação. Escolhemos $s, r, l \in \mathrm{I}_{s_0}$ tais que

$$\mathrm{K}_j \subset\subset B_l \subset B_r \subset B_s.$$

Pela afirmação feita acima, resulta que para cada $p \in \mathbb{N}$, existem constantes $M > 0$, $N \in \mathbb{N}$ e $\eta \in \mathrm{I}$ tais que para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$

$$\sup_{t \in \overline{B}_l} \|\hat{u}^{(p)}(\varepsilon,t)\|_r \leq M\varepsilon^{-N}.$$

Conseqüentemente, para o compacto $L \subset\subset \overset{\circ}{\mathrm{K}}_j$ teremos

$$\sup_{t \in L} \|\hat{u}^{(p)}(\varepsilon,t)\|_s \leq M\varepsilon^{-N}.$$

Seja $u \in \mathcal{G}(J_\delta;\mathrm{X})$ a classe de $\hat{u}$. Observando que $\hat{u} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M}}[J_\delta;\mathrm{X}]$ e que (3.11) nos diz que existe $\eta \in \mathrm{I}$ tal que para cada $s \in \mathrm{I}_{s_0}$, para cada $t \in B_s$ e para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$, teremos

$$\hat{u}(\varepsilon,t) = \hat{u}_0(\varepsilon) + \int_0^t \hat{f}(\varepsilon,\zeta,\hat{u}(\varepsilon,\zeta))\, d\zeta \ \text{ em } \mathrm{X}_s.$$

Além disso, (3.13) nos diz que $u$ é $R$-limitada. Portanto, usando a definição da composta $f \circ (\mathbf{1}_{J_\delta}, u)$, segue-se que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = f \circ (\mathbf{1}_{J_\delta}, u) \ \text{ em } \mathcal{G}(J_\delta;\mathrm{X}) \\ \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

□

*Prova da afirmação.* A prova dessa afirmação, será feita por indução sobre a ordem de derivação $p$. Verifiquemos, em primeiro lugar, a afirmação para $p = 0$. Seja $s \in \mathrm{I}_{s_0}$ e consideremos $r, l \in \mathrm{I}_{s_0}$ tais que $s \leq r < l$. Como $\overline{B}_l \subset\subset B_r$, resulta de (3.13) que existem constantes $M > 0$, $N \in \mathbb{N}$ e $\eta \in \mathrm{I}$ tais que para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$

$$\sup_{t \in \overline{B}_l} \|\hat{u}(\varepsilon, t)\|_r < R \leq M\varepsilon^{-N}.$$

Verifiquemos a afirmação para $p = 1$. Seja $s \in \mathrm{I}_{s_0}$ e consideremos $r, l \in \mathrm{I}_{s_0}$ tais que $s \leq r < l$. Resulta de (3.11) que existe $\eta \in \mathrm{I}$ tal que para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$ e para cada $t \in B_r$

$$\frac{d\hat{u}}{dt}(\varepsilon, t) = \hat{f}(\varepsilon, t, \hat{u}(\varepsilon, t)) \text{ em } \mathrm{X}_r.$$

Portanto, para $t \in \overline{B}_l$

$$\|\frac{d\hat{u}}{dt}(\varepsilon, t)\|_r = \|\hat{f}(\varepsilon, t, \hat{u}(\varepsilon, t))\|_r.$$

Tomando $r_1 \in \mathrm{I}_{s_0}$ tal que $r < r_1 < l$, teremos $\overline{B}_l \subset\subset B_{r_1}$ e $\hat{u}(\varepsilon, \cdot) \in C^\infty(B_{r_1}; \mathrm{X}_{r_1})$ com

$$\sup_{t \in \overline{B}_l} \|\hat{u}(\varepsilon, t)\|_{r_1} < R.$$

Segue-se que existem constantes $M > 0$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$

$$\sup_{t \in \overline{B}_l} \|\hat{f}(\varepsilon, t, \hat{u}(\varepsilon, t))\|_r \leq M\varepsilon^{-N}.$$

Portanto,

$$\sup_{t \in \overline{B}_l} \|\frac{d\hat{u}}{dt}(\varepsilon, t)\|_r \leq M\varepsilon^{-N}.$$

Seja $m \geq 1$ e suponhamos que a afirmação seja verdadeira para cada $p \in \mathbb{N}$ tal que $0 \leq p \leq m$. Vamos verificá-la também para $p = m + 1$. Seja $s \in \mathrm{I}_{s_0}$ e consideremos $r, l \in \mathrm{I}_{s_0}$ tais que $s \leq r < l$. Resulta de (3.11) que existe $\eta \in \mathrm{I}$ tal que para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$ e para cada $t \in B_r$

$$\|\hat{u}^{(m+1)}(\varepsilon, t)\|_r = \|\big(\hat{f}(\varepsilon, t, \hat{u}(\varepsilon, t))\big)^{(m)}\|_r.$$

Seja $r_1 \in \mathrm{I}_{s_0}$ tal que $r < r_1 < l$; então, pela regra da cadeia, teremos para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$ e $t \in B_{r_1}$

$$\|\big(\hat{f}(\varepsilon,t,\hat{u}(\varepsilon,t))\big)^{(m)}\|_{r_1} \leq \sum_{q=1}^{m}\|\hat{f}^{(q)}(\varepsilon,t,\hat{u}(\varepsilon,t))\| \sum_{\alpha\in[q;m]} \frac{q!}{\alpha!m!}\prod_{j=1}^{m}\|\hat{u}^{(\alpha_j)}(\varepsilon,t)\|_{r_1}.$$

Como $\hat{f} \in \mathcal{E}_{\mathrm{M},R}[J_a \times \mathbb{B}_R; \mathrm{X}]$ resulta, da Observação 3.1.10, que existem constantes $c > 0$, $\eta_1 \in \mathrm{I}$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$

$$\sup_{t\in\overline{B}_l}\sum_{q=1}^{m}\|\hat{f}^{(q)}(\varepsilon,t,\hat{u}(\varepsilon,t))\| \leq \frac{c\varepsilon^{-N}}{r_1 - r}.$$

Usando a hipótese de indução, podemos concluir que existem constantes $M > 0$, $N \in \mathbb{N}$ e $\eta \in \mathrm{I}$ tais que para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$

$$\sup_{t\in\overline{B}_l}\|\big(\hat{f}(\varepsilon,t,\hat{u}(\varepsilon,t))\big)^{(m)}\|_{r_1} \leq M\varepsilon^{-N}.$$

Portanto, existem constantes $M > 0$, $N \in \mathbb{N}$ e $\eta \in \mathrm{I}$ tais que para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$

$$\sup_{t\in\overline{B}_l}\|\hat{u}^{(m+1)}(\varepsilon,t)\|_r \leq M\varepsilon^{-N}.$$

□

## 3.3 Uma aplicação do teorema abstrato

Veremos nesta seção um exemplo simples de aplicação do Teorema 3.2.2. Trata-se de estudar existência de soluções para um problema de Cauchy do tipo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,z) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j(t,z,u(t,z))\frac{\partial u}{\partial z_j}(t,z) + a_0(t,z,u(t,z)) \\ \\ u(0,z) = u_0(z) \end{cases} \tag{3.14}$$

com $(t,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n$.

Vamos considerar condições que nos permitam reinterpretar esse problema e reformulá-lo de acordo com as condições do Teorema 3.2.2. Recordemos, antes de

qualquer coisa, algumas notações: seja $\Omega$ um subconjunto aberto de $\mathbb{C}^n$. Denotaremos por $\mathcal{H}(\Omega)$ ao espaço das funções holomorfas em $\Omega$. Se $\overline{\Omega} \subset\subset \mathbb{C}^n$, denotaremos por $\mathcal{H}(\overline{\Omega})$ ao espaço das funções $u \in C(\overline{\Omega})$ tais que $u \in \mathcal{H}(\Omega)$. Munimos o espaço $\mathcal{H}(\overline{\Omega})$ da norma

$$\|u\| := \sup_{z\in\Omega} |u(z)| .$$

Verifica-se que, desse modo, $\mathcal{H}(\overline{\Omega})$ é um espaço de Banach.

Para podermos reformular o problema (3.14), vamos começar fixando dois polidiscos abertos e limitados, $\triangle_0$ e $\triangle_\bullet$, que suporemos tenham sido tomados de tal modo que se verifiquem as relações

$$\emptyset \neq \triangle_0 \subset \overline{\triangle_0} \subset\subset \triangle_\bullet .$$

Podemos supor ainda que para algum $d_0 > 0$ tenhamos

$$\triangle_\bullet = \{z \in \mathbb{C}^n \ / \ \mathrm{dist}(z; \triangle_0) < d_0\} ,$$

onde $\mathrm{dist}(\cdot;\cdot)$ é tomada relativamente à norma do máximo. Seja $0 < d_1 < d_0$ (que podemos tomar, por exemplo, como $d_1 = \dfrac{d_0}{2}$) e consideremos também o polidisco

$$\triangle := \{z \in \mathbb{C}^n \ / \ \mathrm{dist}(z; \triangle_0) < d_1\} .$$

Seja $T > 0$ fixado e $J_T := \{t \in \mathbb{R} \ / |t| < T\}$. Denotaremos por $(t, z) = (t, z_1, \ldots, z_n)$ um ponto genérico de $J_T \times \triangle_\bullet$ e por $(t, z, \zeta) = (t, z_1, \ldots, z_n, \zeta)$ um ponto genérico de $J_T \times \triangle_\bullet \times \mathbb{C}$. Vamos agora considerar as seguintes hipóteses sobre os dados do problema: seja $d \in ]0, d_1[$ (que podemos tomar, por exemplo, como $d = \dfrac{d_0}{4}$) e consideremos $B_d(0) \subset \mathbb{C}$ um disco aberto com centro na origem.

**(a)** Suponhamos que para cada $j = 0, 1, \ldots, n$ sejam dadas as aplicações

$$a_j \in \mathcal{G}_{lb}(J_T \times \triangle_\bullet \times B_d(0); \mathbb{C}) ,$$

para as quais existe um representante $\hat{a}_j$ satisfazendo as seguintes condições:

**(i)** para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$ e para cada $t \in J_T$

$$\hat{a}_j(\varepsilon, t, \cdot, \cdot) \in \mathcal{H}(\triangle \times B_d(0); \mathbb{C}) \ , \ j = 0, 1, \ldots, n ;$$

(ii) para cada subconjunto compacto $K \subset\subset J_T \times \triangle_\bullet$ existem constantes $c > 0$ e $\eta \in \mathrm{I}$ tais que para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$ e para cada $\zeta \in B_d(0)$

$$\sup_{(t,z)\in K} \|\frac{\partial \hat{a}_j}{\partial \zeta}(\varepsilon, t, z, \zeta)\| \leq c\,. \tag{3.15}$$

(b) Suponhamos também, que seja dada uma aplicação $u_0 \in \mathcal{HG}(\triangle_\bullet)$ para a qual podemos supor que exista um representante $\hat{u}_0$ de tal modo que, para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$, tenhamos $\hat{u}_0(\varepsilon, \cdot) \in \mathcal{H}(\overline{\triangle})$.

Vamos agora retomar a construção feita na página 66, isto é, vamos introduzir uma família de polidiscos entre $\triangle_0$ e $\triangle_\bullet$ do seguinte modo: seja

$$\triangle_1 := \{z \in \mathbb{C}^n \;/\; \mathrm{dist}(z; \triangle_0) < d\}\,.$$

Para cada $s \in ]0, 1[$ definimos

$$\triangle_s := \{z \in \mathbb{C}^n \;/\; \mathrm{dist}(z; \triangle_0) < sd\}\,.$$

Observamos que para cada $0 \leq r < s \leq 1$ teremos

$$\mathrm{dist}(\triangle_r; \mathbb{C}\backslash\triangle_s) = (s - r)d\,.$$

Consideremos a aplicação

$$\mathrm{I} \ni \varepsilon \mapsto \hat{u}_0(\varepsilon, \cdot)|_{\overline{\triangle}_1} \in \mathcal{H}(\overline{\triangle}_1)\,, \tag{3.16}$$

e suponhamos que exista $\eta \in \mathrm{I}$ tal que

$$\lambda := \sup_{z\in\overline{\triangle}_1} |\hat{u}_0(\varepsilon, z)| < d/2 \quad \text{para cada } \varepsilon \in \mathrm{I}_\eta\,. \tag{3.17}$$

Definimos agora uma família de espaços de Banach pondo

$$\mathrm{X}_0 := \mathcal{H}(\overline{\triangle_0}) \;\text{ e }\; \mathrm{X}_1 := \mathcal{H}(\overline{\triangle_1})\,.$$

Ainda, para cada $s \in ]0, 1[$ definimos

$$\mathrm{X}_s := \mathcal{H}(\overline{\triangle_s})\,.$$

Verifica-se facilmente que, para cada $0 \leq r < s \leq 1$, as aplicações de restrição

$$\begin{array}{rccl} \iota_r^s : & \mathrm{X}_s & \longrightarrow & \mathrm{X}_r \\ & f & \mapsto & \iota_r^s(f) := f|_{\overline{\triangle_r}} \end{array}$$

fazem com que a família $(X_s)_{s\in I}$ defina uma escala de espaços de Banach $(X, (X_s))$. Vamos agora, a partir das aplicações $a_j$ e $a_0$, construir o operador não linear que deve ser usado na formulação abstrata do problema, como em (3.7). Esse operador, $f$, deve verificar $f \in \mathcal{G}_d(J_a \times \mathbb{B}_d; X)$, onde $a \in ]0, T[$. Para que isso seja feito, vamos utilizar o seguinte Lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [8].

**3.3.1 Lema.** *Sejam $M$ um espaço métrico compacto, $E$, $F$ e $G$ espaços de Banach, $\Omega$ um subconjunto aberto de $E$ e $U$ um subconjunto aberto de $F$. Seja*

$$\begin{array}{rccc} f: & U \times M \times \Omega & \longrightarrow & G \\ & (t, z, w) & \mapsto & f(t, z, w) \end{array}$$

*uma aplicação uniformemente contínua e limitada. Munimos $C(M; E)$ $\big(C(M; G)\big)$ da norma*

$$\|u\| := \sup_{z\in M} \|u(z)\|_E \ \big(\sup_{z\in M} \|u(z)\|_G\big).$$

*Denotaremos por $\mathcal{V}_*(M; \Omega)$ o subconjunto de $C(M; E)$, formado pelas aplicações $u \in C(M; E)$, tais que $u(M) \subset \Omega$. Verifica-se que $\mathcal{V}_*(M; \Omega)$ é um subconjunto aberto de $C(M; E)$. Definimos a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} F: & U \times \mathcal{V}_*(M; \Omega) & \longrightarrow & C(M; G) \\ & (t, u) & \mapsto & F(t, u) \end{array}$$

*por $F(t, u)(z) := f(t, z, u(z))$, para cada $z \in M$. Sendo $f$ uniformemente contínua e limitada, segue-se que $F$ está bem definida e é contínua. Suponhamos que as aplicações*

$$U \times M \times \Omega \ni (t, z, w) \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t, z, w) \in \mathcal{L}(F; G)$$

*e*

$$U \times M \times \Omega \ni (t, z, w) \mapsto \frac{\partial f}{\partial w}(t, z, w) \in \mathcal{L}(E; G)$$

*sejam uniformemente contínuas e limitadas. Então a aplicação $F : U \times \mathcal{V}_*(M; \Omega) \to C(M; G)$, definida acima, possui derivadas parciais $D_tF$ e $D_uF$ e*

**(i)** *para cada $t$ fixado e para cada $u \in \mathcal{V}_*(M;\Omega)$ tem-se que a derivada $D_uF(t,u) \in \mathcal{L}(C(M;E);C(M;G))$ é obtida do seguinte modo: para cada $h \in C(M;E)$, $D_uF(t,u)(h) \in C(M;G)$ coincide com a aplicação*

$$M \ni z \mapsto \frac{\partial f}{\partial w}(t,z,u(z))(h(z)) \in G\,;$$

**(ii)** *fixado $u$, para cada $t \in U$ a derivada $D_tF(t,u) \in \mathcal{L}(F;C(M;G))$ é obtida do seguinte modo: para cada $k \in F$, $D_tF(t,u)(k) \in C(M;G)$ coincide com a aplicação*

$$M \ni z \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(t,z,u(z))(k) \in G\,.$$

*Em particular,*

$$\|D_uF(t,u)\| \leq \sup_{z\in M}\|\frac{\partial f}{\partial w}(t,z,u(z))\|$$

*e*

$$\|D_tF(t,u)\| \leq \sup_{z\in M}\|\frac{\partial f}{\partial t}(t,z,u(z))\|\,.$$

*Além disso, suponhamos que as aplicações*

$$U \times M \times \Omega \ni (t,z,w) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial w}(t,z,w) \in \mathcal{L}(F;\mathcal{L}(E;G))\,,$$

$$U \times M \times \Omega \ni (t,z,w) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial t}(t,z,w) \in \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(F;G))\,,$$

$$U \times M \times \Omega \ni (t,z,w) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t,z,w) \in \mathcal{L}(F;\mathcal{L}(F;G))$$

*e*

$$U \times M \times \Omega \ni (t,z,w) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}(t,z,w) \in \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(E;G))\,,$$

*sejam uniformemente contínuas e limitadas. Então existem as derivadas parciais segundas de $F$ e valem as desigualdades*

$$\|D_iD_jF(t,u)\| \leq \sup_{z\in M}\|D_iD_jf(t,z,u(z))\|\,,$$

*onde $D_i$ denota derivação parcial e $i,j \in \{t,u\}$.*

*Demonstração.* Em primeiro lugar, devemos observar que, para cada $(t,u) \in U \times \mathcal{V}_*(M;\Omega)$, temos $F(t,u) \in C(M;G)$, pois $f$ é *limitada* e contínua. Vamos verificar que a aplicação $F$ é contínua. Sejam $(t_*,u_*) \in U \times \mathcal{V}_*(M;\Omega)$ e $(t_n,u_n) \in U \times \mathcal{V}_*(M;\Omega)$ tais que $(t_n,u_n) \to (t_*,u_*)$, então

$$\|F(t_n,u_n) - F(t_*,u_*)\| = \sup_{z\in M}\|f(t_n,z,u_n(z)) - f(t_*,z,u_*(z))\|\,.$$

Sendo $f$ uniformemente contínua, segue-se que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\|t - t_*\| < \delta$ e $\|w - w_*\| < \delta$ implicam que

$$\|f(t,z,w) - f(t_*,z,w_*)\| < \varepsilon\,.$$

Para esse $\delta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para cada $n \geq n_0$, tem-se $\|t_n - t_*\| < \delta$ e $\|u_n(z) - u_*(z)\| < \delta$ para todo $z \in M$. Logo, para $n \geq n_0$ resulta

$$\sup_{z\in M}\|f(t_n,z,u_n(z)) - f(t_*,z,u_*(z))\| < \varepsilon\,,$$

ou seja,

$$\|F(t_n,u_n) - F(t_*,u_*)\| < \varepsilon, \quad \text{para } n \geq n_0\,.$$

Vamos agora verificar a existência da derivada parcial $D_uF$. Fixemos $(t,z) \in U \times M$. Para cada $u \in \mathcal{V}_*(M;\Omega)$ e $h \in C(M;E)$ tal que $u+h \in \mathcal{V}_*(M;\Omega)$, definimos a aplicação $R$ por

$$f(t,z,u(z)+h(z)) - f(t,z,u(z)) = \frac{\partial f}{\partial w}(t,z,u(z))(h(z)) + R_h(t,z)\,. \tag{3.18}$$

Pelo Teorema do Valor Médio (ver [13, (8.6.2), pág. 159]),

$$\begin{aligned}\|R_h(t,z)\| &\leq \sup_{0\leq\theta(z)\leq 1}\|\frac{\partial f}{\partial w}(t,z,u(z)+\theta(z)h(z)) - \frac{\partial f}{\partial w}(t,z,u(z))\|\|h(z)\| \leq \\ &\leq \sup_{\substack{0\leq\theta(z)\leq 1\\ z\in M}}\|\frac{\partial f}{\partial w}(t,z,u(z)+\theta(z)h(z)) - \frac{\partial f}{\partial w}(t,z,u(z))\| \sup_{z\in M}\|h(z)\|\,.\end{aligned}$$

Observamos que, para $t \in U$ fixado, a aplicação

$$M \ni z \mapsto R_h(t,z) \in G$$

é contínua. Logo, $R_h(t,\cdot) \in C(M;G)$ e, da desigualdade acima, teremos

$$\frac{\|R_h(t,\cdot)\|}{\|h\|} \leq \sup_{\substack{0\leq\theta(z)\leq 1\\ z\in M}} \|\frac{\partial f}{\partial w}(t,z,u(z)+\theta(z)h(z)) - \frac{\partial f}{\partial w}(t,z,u(z))\|\,.$$

Graças à continuidade uniforme e limitação de $\dfrac{\partial f}{\partial w}$, segue-se que, quando $\|h\| \to 0$,

$$\sup_{\substack{0\leq\theta(z)\leq 1\\ z\in M}} \|\frac{\partial f}{\partial w}(t,z,u(z)+\theta(z)h(z)) - \frac{\partial f}{\partial w}(t,z,u(z))\| \to 0\,.$$

Portanto,

$$\frac{R_h(t,\cdot)}{\|h\|} \to 0 \quad \text{se} \quad h \to 0 \quad \text{em} \quad C(M;G)\,. \tag{3.19}$$

Para cada $z \in M$, $\dfrac{\partial f}{\partial w}(t,z,u(z))$ é um elemento de $\mathcal{L}(E;G)$. Além disso, a aplicação

$$M \ni z \mapsto \frac{\partial f}{\partial w}(t,z,u(z)) \in \mathcal{L}(E;G)$$

é contínua. Portanto, para cada $h \in C(M;E)$ a aplicação

$$M \ni z \mapsto \frac{\partial f}{\partial w}(t,z,u(z))(h(z)) \in G \tag{3.20}$$

é contínua. Logo, para $h \in C(M;E)$, podemos definir o elemento $D_uF(t,u)(h) \in C(M;G)$ por (3.20). Isso define uma aplicação

$$\begin{aligned} D_uF(t,u) : C(M;E) &\to C(M;G) \\ h &\mapsto D_uF(t,u)(h) \end{aligned}$$

que é uma *aplicação linear e contínua*; de fato, tem-se

$$\|D_uF(t,u)\| \leq \sup_{z\in M}\|\frac{\partial f}{\partial w}(t,z,u(z))\|\,.$$

Voltando a (3.18), podemos escrever então, onde $r(t,h)(z) := R_h(t,z)$,

$$F(t,u+h) - F(t,u) = D_uF(t,u)(h) + r(t,h),$$

onde, por (3.19), $\dfrac{r(t,h)}{\|h\|} \to 0$ quando $\|h\| \to 0$.

De modo análogo, procedemos com $D_tF(t,u)$. Vamos verificar agora que a aplicação

$$U \times \mathcal{V}_*(M;\Omega) \ni (t,u) \mapsto D_uF(t,u) \in \mathcal{L}(C(M;E);C(M;G))$$

é contínua.

Fixemos $(t_*,u_*) \in U \times \mathcal{V}_*(M;\Omega)$ e $\varepsilon > 0$. Sendo a aplicação

$$U \times M \times \Omega \ni (t,z,w) \mapsto \frac{\partial f}{\partial w}(t,z,w) \in \mathcal{L}(E;G)$$

uniformemente contínua e limitada, existe $\delta > 0$ tal que $\|t-t_*\| < \delta$ e $\|w-w_*\| < \delta$, implicam em $\|\frac{\partial f}{\partial w}(t,z,w) - \frac{\partial f}{\partial w}(t_*,z,w_*)\| < \varepsilon$ qualquer que seja $z \in M$. Portanto, para $\|t-t_*\| < \delta$, para $u \in \mathcal{V}(M;\Omega)$ com $\|u-u_*\| < \delta$ e para cada $h \in C(M;E)$ com $\|h\| \leq 1$ tem-se

$$\sup_{z\in M}\|\frac{\partial f}{\partial w}(t,z,u(z))(h(z)) - \frac{\partial f}{\partial w}(t_*,z,u_*(z))(h(z))\| < \varepsilon\,.$$

Ou seja,

$$\|D_uF(t,u) - D_uF(t_*,u_*)\| < \varepsilon\,.$$

De modo análogo, verifica-se que a aplicação

$$U \times \mathcal{V}_*(M;\Omega) \ni (t,u) \mapsto D_tF(t,u) \in \mathcal{L}(F;C(M;G))$$

é contínua. Verificamos então que a aplicação $F : U \times \mathcal{V}_*(M;\Omega) \to C(M;G)$ é de classe $C^1$. Suponhamos agora que a aplicação

$$U \times M \times \Omega \ni (t,z,w) \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial t}(t,z,w) \in \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(F;G))$$

seja uniformemente contínua e limitada. Vamos verificar a existência da derivada parcial $D_uD_tF$. Fixemos $(t,z) \in U \times M$. Para cada $u \in \mathcal{V}_*(M;\Omega)$ e $h \in C(M;E)$ tal que $u+h \in \mathcal{V}_*(M;\Omega)$ teremos

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,z,u(z)+h(z)) - \frac{\partial f}{\partial t}(t,z,u(z)) = \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial t}(t,z,u(z))(h(z)) + R_h(t,z)\,.$$

Observamos que, para cada $t \in U$ fixado, a aplicação

$$M \ni z \mapsto R_h(t,z) \in \mathcal{L}(F;G)$$

é contínua; além disso, do mesmo modo que foi feito anteriormente, verifica-se que

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_h(t,\cdot)}{\|h\|} = 0 \quad \text{em} \quad C(M;\mathcal{L}(F;G)).$$

Para cada $z \in M$ fixado, temos $\dfrac{\partial^2 f}{\partial w \partial t}(t,z,u(z)) \in \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(F;G))$. Além disso, a aplicação

$$M \ni z \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial t}(t,z,u(z)) \in \mathcal{L}(E;\mathcal{L}(F;G))$$

é contínua. Portanto, para cada $h \in C(M;E)$ e para cada $k \in F$, a aplicação

$$M \ni z \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial w \partial t}(t,z,u(z))(h(z))(k) \in G \tag{3.21}$$

é contínua.

Por tudo o que foi feito acima, podemos concluir que para $(h,k) \in C(M;E) \times F$ podemos definir o elemento $D_u D_t F(t,u)(h,k) \in C(M;G)$ por (3.21). Isso define uma aplicação

$$\begin{aligned} D_u D_t F(t,u) : C(M;E) \times F &\to C(M;G) \\ (h,k) &\mapsto D_u D_t F(t,u)(h,k) \end{aligned}$$

que é uma *aplicação bilinear e contínua.* De fato tem-se

$$\|D_u D_t F(t,u)\| \leq \sup_{z\in M} \|\frac{\partial^2 f}{\partial w \partial t}(t,z,u(z))\|.$$

De modo análogo, tratamos as outras derivadas parciais de segunda ordem. Verifica-se também, usando a continuidade uniforme e limitação de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial w \partial t}$, que a aplicação $D_u D_t F$ é contínua. □

Além desse Lema, vamos também usar os dois seguintes lemas; o primeiro tem prova muito simples, e o segundo já foi utilizado no problema linear e, por comodidade, vamos relembrá-lo aqui também.

**3.3.2 Lema.** *Sejam $E$, $F$,$G$ e $H$ espaços de Banach, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um aberto e $U \subset H$ aberto. Seja $B : E \times F \to G$ uma aplicação bilinear contínua, $L : H \to F$ uma aplicação linear e contínua e $a : \Omega \times U \to E$ uma aplicação de classe $C^\infty$. Então a aplicação*

$$\Omega \times E \ni (t, u) \mapsto B(a(t, u), L(u)) \in G$$

*é de classe $C^\infty$.*

*Demonstração.* Veja a proposição 1.1.12 na pág. 9. □

Recordemos que a prova do seguinte Lema pode ser encontrada em [29, pág. 144-145]

**3.3.3 Lema.** *Para cada $0 \leq r < s \leq 1$ e para cada $k = 1, 2, \ldots, n$ temos que o operador de derivação $\dfrac{\partial}{\partial z_k}$ define um elemento de $\mathcal{L}(\mathrm{X}_s; \mathrm{X}_r)$ e*

$$\|\frac{\partial}{\partial z_k}\|_{(s,r)} \leq \frac{1/d}{s - r}.$$

Fixemos $R \in ]2\lambda, d[$, onde $\lambda$ foi definido em (3.17) na pág. 98. Se usarmos a notação $p = (p_1, q_1, \ldots, q_n, s) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, então denotaremos por $\partial^p$ qualquer um dos operadores de derivação parcial de ordem $|p|$, por exemplo, $\partial^p = \dfrac{\partial^{p_1}}{\partial t^{p_1}}(\dfrac{\partial^q}{\partial z^q}(\dfrac{\partial^s}{\partial \zeta^s}))$. Seja $0 < a < T$. Se, para cada $r \in \mathrm{I}$, definirmos o compacto $K_r$ por, $K_r := \overline{J}_a \times \overline{\triangle}_r \times \overline{B_R(0)} \subset\subset J_T \times \triangle_\bullet \times B_d(0)$, então, pela moderação de $\hat{a}_j$, existem constantes $c > 0$, $\eta \in \mathrm{I}$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que, para cada $j = 0, 1, \ldots, n$,

$$\sup_{K_r} \|\partial^p \hat{a}_j(\varepsilon, t, z, \zeta)\| \leq c\varepsilon^{-N} \text{ para cada } \varepsilon \in \mathrm{I}_\eta. \tag{3.22}$$

Além disso, não podemos nos esquecer de que, para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$ fixado, $\hat{a}_j(\varepsilon, \cdot, \cdot, \cdot) \in C^\infty(J_T \times \triangle_\bullet \times B_d(0); \mathbb{C})$. Mais ainda, para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$ e para cada $t \in J_T$ tem-se

$$\hat{a}_j(\varepsilon, t, \cdot, \cdot) \in \mathcal{H}(\triangle \times B_d(0); \mathbb{C}).$$

Logo, para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$, para cada $s \in \mathrm{I}$ e para cada $t \in J_a$ as aplicações

$$\overline{\triangle}_r \ni z \mapsto \hat{a}_j(\varepsilon, t, z, u(z)) \in \mathbb{C}$$

são elementos de $\mathrm{X}_r$, para cada $u \in B_R^s$, com $r \in \mathrm{I}_s$ qualquer. Sendo, para cada $s \in \mathrm{I}$, $\mathrm{X}_s$ uma álgebra, segue-se que, para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$, para cada $s \in \mathrm{I}$ e para cada $t \in J_a$ a aplicação

$$\overline{\triangle_r} \ni z \mapsto \hat{f}(\varepsilon, t, u)(z) \in \mathbb{C}\,,$$

definida por

$$\hat{f}(\varepsilon, t, u)(z) := \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_j(\varepsilon, t, z, u(z)) \frac{\partial u}{\partial z_j}(z) + \hat{a}_0(\varepsilon, t, z, u(z))\,, \tag{3.23}$$

é um elemento de $\mathrm{X}_r$, para cada $u \in B_R^s$, com $r \in \mathrm{I}_s$ qualquer. Assim, para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$ definimos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \hat{f}(\varepsilon, \cdot, \cdot) : \ J_a \times \mathbb{B}_R & \to & \mathrm{X} \\ (t, u) & \mapsto & \hat{f}(\varepsilon, t, u) \end{array}$$

do seguinte modo: para cada $s \in \mathrm{I}$, se $u \in B_R^s$, então $\hat{f}(\varepsilon, t, u)$ é a aplicação definida acima em (3.23). Assim, para cada $s \in \mathrm{I}$, para cada $r \in \mathrm{I}_s$ e para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$, a restrição $\hat{f}(\varepsilon, \cdot, \cdot)|_{J_a \times B_R^s}$ é uma aplicação a valores em $\mathrm{X}_r$. Para verificarmos a questão da diferenciabilidade de $\hat{f}(\varepsilon, \cdot, \cdot)|_{J_a \times B_R^s}$, observamos que, para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}$, para cada multi-índice $p \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}$ e para cada $j = 0, 1, \ldots, n$, a aplicação $\partial^p \hat{a}_j(\varepsilon, \cdot, \cdot, \cdot) : \overline{J_a} \times \overline{\triangle_s} \times \overline{B_R(0)} \to \mathbb{C}$ é uniformemente contínua e limitada. Assim, se considerarmos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} A_j^\varepsilon : J_a \times B_R^s & \to & \mathrm{X}_r \\ (t, u) & \mapsto & A_j^\varepsilon(t, u)\,, \end{array}$$

definida por $A_j^\varepsilon(t, u)(z) := \hat{a}_j(\varepsilon, t, z, u(z))$, para $z \in \overline{\triangle_r}$ e, observando que a norma em $\mathcal{H}(\overline{\triangle_r})$ ( ou $\mathcal{H}(\overline{\triangle_s})$) é a norma do sup, podemos proceder exatamente como no Lema 3.3.1 para demonstrar que $A_j^\varepsilon \in C^\infty(J_a \times B_R^s; \mathrm{X}_r)$. Além disso, se para cada $j = 1, \ldots, n$ considerarmos a aplicação linear e contínua (ver Lema 3.3.3)

$$\begin{array}{rcl} L_j : \mathrm{X}_s & \to & \mathrm{X}_r \\ u & \mapsto & L_j(u) = \dfrac{\partial u}{\partial z_j} \end{array}$$

e a aplicação bilinear contínua

$$\begin{array}{rcl} B_j : \mathrm{X}_r \times \mathrm{X}_r & \to & \mathrm{X}_r \\ (u, v) & \mapsto & B_j(u, v) = uv\,, \end{array}$$

então podemos aplicar o Lema 3.3.2 para podermos concluir que $\hat{f}(\varepsilon,\cdot,\cdot)|_{J_a\times B_R^s}$ é de classe $C^\infty$. Esses mesmos Lemas, juntamente com (3.22), nos garantem também que $\hat{f}\in\mathcal{E}_{\mathrm{M},R}[J_a\times\mathbb{B}_R;\mathrm{X}]$, definindo portanto, um elemento $f\in\mathcal{G}_R(J_a\times\mathbb{B}_R;\mathrm{X})$. Além disso, sendo $a_j$ localmente limitada, para cada $j=0,1,\ldots,n$, segue-se, usando-se o teorema do valor médio, que $\hat{f}$ verifica a condição **(i)** do Teorema 3.2.2. De fato, é suficiente observar que, para $(u,v)\in B_R^s\times B_R^s$, para $z\in\overline{\triangle}_r$, $r\in\mathrm{I}_s$,

$$\hat{a}_j(\varepsilon,t,z,u(z))\frac{\partial u}{\partial z_j}(z)-\hat{a}_j(\varepsilon,t,z,v(z))\frac{\partial v}{\partial z_j}(z)=\hat{a}_j(\varepsilon,t,z,u(z))\frac{\partial(u-v)}{\partial z_j}(z)+$$
$$+\Big[\hat{a}_j(\varepsilon,t,z,u(z))-\hat{a}_j(\varepsilon,t,z,v(z))\Big]\frac{\partial v}{\partial z_j}(z)\,.$$

Se $K\subset\subset J_a$, então $L:=K\times\overline{\triangle}_r\times\overline{B_R(0)}\subset\subset J_T\times\triangle_\bullet\times B_d(0)$ e, por hipótese, existem $\eta\in\mathrm{I}$ e $M>0$ tais que

$$\sup_L|\hat{a}_j(\varepsilon,t,z,\zeta)|\le M\ \text{ para cada } \varepsilon\in\mathrm{I}_\eta\,. \tag{3.24}$$

Sendo $K\times\overline{\triangle}_r\subset\subset J_T\times\triangle_\bullet$, a hipótese (3.15) nos diz que existem constantes $c>0$ e $\eta\in\mathrm{I}$ tais que, para cada $\varepsilon\in\mathrm{I}_\eta$,

$$\sup_{K\times\overline{\triangle}_r}\|\frac{\partial\hat{a}_j}{\partial\zeta}(\varepsilon,t,z,\zeta)\|\le c\,.$$

Isso é suficiente para garantir a condição **(i)** do Teorema 3.2.2. Por outro lado, os Lemas já citados e (3.24) são suficientes para garantir que $\hat{f}$ também verifica a condição **(ii)** do Teorema 3.2.2. Quanto ao dado inicial, observamos que (3.16) define um elemento $\hat{h}\in\mathcal{E}_{\mathrm{M}}(\mathrm{X}_1)$ com a propriedade de que existe $\eta\in\mathrm{I}$ tal que $\hat{h}(\mathrm{I}_\eta)\subset B^1_{R/2}$ (observe que $\lambda<R/2$; veja (3.17)). Sejam então $f\in\mathcal{G}_R(J_a\times\mathbb{B}_R;\mathrm{X})$ a classe de $\hat{f}$ e $\Theta_1(h)\in\overline{\mathrm{X}}$ o elemento definido por $h\in\overline{\mathrm{X}}_1$, classe de $\hat{h}$. Pelo Teorema 3.2.2, existem $\delta\in]0,a[$ e uma função $u\in\mathcal{G}(J_\delta;\mathrm{X})$, $R$-limitada, tais que

$$\begin{cases}\dfrac{du}{dt}=f\circ(1_\delta,u)\quad\text{em }\mathcal{G}(J_\delta;\mathrm{X})\\[2ex] u(0)=\Theta_1(h)\,.\end{cases}$$

Além disso, a solução construída no Teorema verifica a condição: para cada $s\in\mathrm{I}$, se $B_s:=\{t\in J_a\ /\ |t|<\delta(1-s)\}$ e, se $\hat{u}$ for o representante construído na prova do

Teorema, então existe $\eta \in \mathrm{I}$ tal que para cada $s \in \mathrm{I}$, para cada $t \in B_s$, para cada $\varepsilon \in \mathrm{I}_\eta$ e $z \in \triangle_s$ (observamos que $\hat{u}(\varepsilon, \cdot) \in C^\infty(B_s; \mathcal{H}(\overline{\triangle}_r))$ para cada $r \in \mathrm{I}_s$),

$$\frac{d\hat{u}}{dt}(\varepsilon, t)(z) = \sum_{j=1}^{n} \hat{a}_j(\varepsilon, t, z, \hat{u}(\varepsilon, t)(z)) \frac{\partial}{\partial z_j}[\hat{u}(\varepsilon, t)](z) + \hat{a}_0(\varepsilon, t, z, \hat{u}(\varepsilon, t)(z)) .$$

Assim, se para cada $s \in \mathrm{I}$ definirmos $\hat{v}_s : \mathrm{I}_\eta \times B_s \times \triangle_s \to \mathbb{C}$, $(\varepsilon, t, z) \mapsto \hat{v}_s(\varepsilon, t, z) := \hat{u}(\varepsilon, t)(z)$ e observando que as funções $\hat{a}_j$ verificam as condições do Lema 3.1.15 na terceira variável[1], podemos concluir que existe $v_s \in \mathcal{G}_{lb}(B_s \times \triangle_s)$ tal que

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} a_j \circ (\mathbf{1}_{B_s}, \mathbf{1}_{\triangle_s}, v_s) \frac{\partial v_s}{\partial z_j} + a_0 \circ (\mathbf{1}_{B_s}, \mathbf{1}_{\triangle_s}, v_s)$$

com $v_s|_{\{0\} \times \triangle_s} = u_0$ .

Podemos resumir o que foi feito acima enunciando o seguinte:

**3.3.4 Teorema.** *Sejam $T > 0$ e $\mathrm{P}_0$ um polidisco aberto e limitado de $\mathbb{C}^n$. Seja $\mathrm{P}$ o polidisco definido por*

$$\mathrm{P} := \{z \in \mathbb{C}^n \ / \ \mathrm{dist}(z; \mathrm{P}_0) < d_0\}$$

*para algum $d_0 > 0$. Seja $r = \dfrac{d_0}{4}$ e $B_r(0) \subset \mathbb{C}$ um disco aberto com centro na origem. Denotemos por $(t, z) = (t, z_1, \ldots, z_n)$ um ponto genérico de $J_T \times \mathrm{P}$ e por $(t, z, \zeta) = (t, z_1, \ldots, z_n, \zeta)$ um ponto genérico de $J_T \times \mathrm{P} \times B_r(0)$. Suponhamos dados*

**(a)** *para cada $j = 0, 1, \ldots, n$ uma coleção de $n+1$ aplicações generalizadas localmente limitadas $a_j \in \mathcal{G}_{lb}(J_T \times \mathrm{P} \times B_r(0); \mathbb{C})$ com $\dfrac{\partial a_j}{\partial \zeta} \in \mathcal{G}_{lb}(J_T \times \mathrm{P} \times B_r(0); \mathbb{C})$ e tais que*

$$\frac{\partial a_j}{\partial \overline{z}_k} = 0 \ \textit{ para cada } \ k = 1, \ldots, n \ \textit{ e } \ \frac{\partial a_j}{\partial \overline{\zeta}} = 0 ;$$

**(b)** *uma aplicação $u_0 \in \mathcal{HG}(\mathrm{P})$ tal que $u_0 \in \mathcal{G}_*(\mathrm{P}; B_{r/2}(0))$ (para uma definição dos conjuntos $\mathcal{G}_*$, veja [3, pág. 114]).*

[1] A rigor, deveríamos definir a classe das funções que verificam as condições do Lema 3.1.15 na terceira variável, e mostrar que a composição é possível. Porém, como essa tarefa, além de não ser difícil, alongaria desnecessariamente esta exposição, optamos por omiti-la aqui.

*Então existe $\delta > 0$ tal que, para cada $s \in \mathrm{I}$, existe um polidisco $\triangle_s \subset \mathrm{P}$ e uma aplicação $v_s \in \mathcal{G}_{lb}(J_{\delta(1-s)} \times \triangle_s)$ com $\dfrac{\partial v_s}{\partial \overline{z}_k} = 0$, para cada $k = 1, \ldots, n$, e verificando as condições*

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n} a_j \circ (\mathbf{1}_{B_s}, \mathbf{1}_{\triangle_s}, v_s) \frac{\partial v_s}{\partial z_j} + a_0 \circ (\mathbf{1}_{B_s}, \mathbf{1}_{\triangle_s}, v_s)$$

*com $v_s|_{\{0\}\times\triangle_s} = u_0|_{\triangle_s}$.*

**3.3.5 Observação.** Até o momento não sabemos sob que condições podemos esperar unicidade de solução para o problema estudado no Teorema 3.2.2. Também, ainda não nos foi possível verificar a relação entre soluções generalizadas e soluções clássicas $C^\infty$ quando essas ocorrem. Observamos que, em muitas situações, problemas de Cauchy não lineares foram investigados no ambiente de funções generalizadas de Colombeau; além dos trabalhos já citados , R. Fernandez [15], M. Oberguggenberger [21] e J. F. Colombeau [12], podemos nos referir a H. Biagioni [5]; porém, aqui, a autora trata com não linearidades de classe $C^\infty$, e sua técnica é diferente da que adotamos neste trabalho.

# Referências Bibliográficas


[1] ARAGONA, J. *Introdução à teoria das funções generalizadas de Colombeau.* Notas de aula de MAT 829 - IME-USP 240p, 1989.

[2] _____. Anotações sobre funções generalizadas definidas num aberto de $\mathbb{R}^n$ a valores numa escala de espaços de Banach. Manuscrito, IME-USP, 1997.

[3] ARAGONA, J.; BIAGIONI, H. Intrinsic definition of the Colombeau algebra of generalized functions. *Analysis Mathematica 17* (1991), 75–132.

[4] ASANO, K. A note on the abstract Cauchy-Kowalewski theorem. *Proc. Japan Acad. 64 (A)* (1988), 102–105.

[5] BIAGIONI, H. A. Generalized Solutions to Nonlinear First-Order Systems. *Monatshefte für Mathematik* (1994), 1–14.

[6] CAFLISCH, R. A simplified version of the abstract Cauchy-Kowalewski theorem with weak singularities. *Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society 23(2)* (1990), 495–500.

[7] CARTAN, H. *Cálculo Diferencial.* Colección Métodos. Ediciones Omega S.A., 1972.

[8] CHILOV, G. *Analyse Mathématique: Fonctions de Plusieurs Variables Réelles*, vol. 1 et 2. Editions Mir, 1975.

[9] COLOMBEAU, J. F. *New Generalized Functions and Multiplication of Distributions*, vol. 84. North-Holland Math. Studies, 1984.

[10] COLOMBEAU, J. F. *Elementary Introduction to New Generalized Functions*, vol. 113. North-Holland Math. Studies, 1985.

[11] COLOMBEAU, J. F.; GALÉ, J. E. Holomorphic Generalized Functions. *J. Math. Analysis and Appl. 103* (1984), 117–133.

[12] COLOMBEAU, J. F.; HEIBIG, A. Generalized solutions to Cauchy problems. *Mh. Math. 117* (1994), 33–49.

[13] DIEUDONNÉ, J. *Fundamentos de Análisis Moderno.* Editorial Reverté, S. A., 1966.

[14] DUCHATEAU, P.; TREVES, F. An abstract Cauchy-Kovalevska theorem in scales of Gevrey classes. *Symposia Math.- Academic Press 7* (1971), 135–163.

[15] FERNANDEZ, R. *A equação de Hamilton-Jacobi no contexto das funções generalizadas.* PhD thesis, Universidade de São Paulo IME-USP, 1996.

[16] KANO, T.; NISHIDA, T. Sur les ondes de surface de l'eau avec une justification mathématique des équations des ondes en eau peu profonde. *J. Math. Kyoto Univ. (JMKYAZ) Vol. 19-2* (1979), 335–370.

[17] KUNZINGER, M. *Lie Transformation Groups in Colombeau Algebras.* Ph.D. Thesis, Fakultät der Universität Wien, 1996.

[18] NIRENBERG, L. An abstract form of the nonlinear Cauchy-Kowalewski theorem. *Journal of Differential Geometry 6* (1972), 561–576.

[19] NISHIDA, T. A note on a theorem of Nirenberg. *Journal of Differential Geometry 12* (1977), 629–633.

[20] _____. Fluid Dynamical Limit of the Nonlinear Boltzmann Equation to the Level of the Compressible Euler Equation. *Commun. Math. Phys. Vol. 61* (1978), 119–148.

[21] OBERGUGGENBERGER, M. *Multiplication of Distributions and Applications to Partial Differential Equations*, vol. 259 of *Pitman Research Notes in Math.* Longman Science and Technology, 1993.

[22] _____. Nonlinear theories of generalized functions (survey). In: *S. Albeverio, W. A. J. Luxenbourg, M. P. H. Wolff: Advances in Analysis, Probability and Mathematical Physics - Contribution from Non Standard Analysis* (1994).

[23] OVSJANNIKOV, L. V. A singular operator in a scale of Banach spaces. *Soviet Math. Doklady 163-4* (1965), 1025–1028.

[24] _____. A nonlinear Cauchy problem in a scale of Banach spaces. *Soviet Math. Doklady 12-4* (1971), 1497–1502.

[25] _____. Cauchy Problem in a Scale of Banach Spaces and its Application to the Shallow Water Theory Justification. In *Lecture Note in Math.* Springer-Verlag, 1976, pp. 426–437.

[26] TOLEDO, J. A Equação $\overline{\partial}$ no Contexto das Funções Generalizadas. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo - Instituto de Matemática e Estatística, 1985.

[27] TREVES, F. *Ovcyannikov theorem and hyperdifferential operators.* No. 46 in Notas de Matemática. IMPA - RJ BRAZIL, 1968.

[28] _____. An abstract nonlinear Cauchy-Kovalevska theorem. *Transactions of the American Mathematical Society 150* (1970), 77–92.

[29] _____. *Basic Linear Partial Differential Equations.* Academic Press, 1975. 470p.

[30] VILLARREAL, F. *Sobre soluções na forma de onda de choque de certos sistemas de equações diferenciais parciais da hidrodinâmica.* Tese de Doutoramento, Universidade de São Paulo: IME-USP, 1990.

[31] _____. Composition and Invertibility for a Class of Generalized Functions in the Colombeau's Theory. *Integral Transforms and Special Functions 6* (1998), 339–345.