SUPERFÍCIES ROTACIONAIS COM CURVATURA MÉDIA CONSTANTE EM $\mathbb{L}^3$

Antonio Noel Filho

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de concentração: **Geometria**

Orientador: **Profa. Dra. Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves**

São Paulo, 7 de maio de 2002.

Superfícies Rotacionais com Curvatura Média Constante em $\mathbb{L}^3$

Este exemplar corresponde à redação
final da dissertação devidamente corrigida
e defendida por Antonio Noel Filho
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 7 de maio de 2002.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Rosa dos Santos Barreiro Chaves (orientadora) - IME-USP
- Prof. Dr. Cláudia Cueva Cândido
- Prof. Dr. Francesco Mercure

Dedico esta dissertação à minha família, em especial, à minha esposa Rita e ao meu filho Gabriel, por serem as pessoas mais importantes de minha vida e por compartilharem comigo os momentos mais difíceis desta dura caminhada.

"A Matemática é a rainha das ciências,
a Geometria sua parte mais bela."

Resumo

Neste trabalho estudamos as superfícies de revolução de tipo espaço, com curvatura média constante no espaço de Lorentz-Minkowski. Neste caso, o eixo de revolução pode ser de tipo espaço, de tipo tempo ou de tipo luz e, nos dois primeiros casos, obtemos resultados análogos aos que Delaunay obteve no caso Euclidiano. No entanto, o comportamento geométrico das quádricas, neste novo ambiente, é bastante diferente. Abordamos também, neste trabalho, o estudo da completude destas superfícies.

Abstract

In this work we study spacelike surfaces of revolution with constant mean curvature in the Lorentz-Minkowski 3-space. In this case, the axis of revolution is either spacelike, timelike or lightlike and, in the first two cases, we obtain results of the same kind Delaunay obtained in the Euclidian space, but, in this case, the behavior of the quadrics is quite different. We study also the completeness of these surfaces.

4.4 Gráficos das geratrizes e das superfícies de revolução com eixo de tipo espaço 69

5 Superfícies de Revolução de Tipo Espaço com Eixo de Tipo Tempo 77

5.1 A equação das superfícies de revolução com eixo de tipo tempo 77

5.2 Estudo das quádricas de tipo tempo no plano de Lorentz-Minkowski 86

5.3 Caracterização e estudo da completude das superfícies de revolução com eixo de tipo tempo 93

6 Superfícies de Revolução de Tipo Espaço com Eixo de Tipo Luz 97

6.1 A equação diferencial das superfícies de revolução com eixo de tipo luz. . . 97

6.2 Gráficos 101

Lista de Figuras

3.1 Cone de luz 34

4.1 Parametrização da curva geratriz 42

4.2 Elipse Lorentziana 56

4.3 Parábola Lorentziana 59

4.4 Hipérbole Lorentziana 61

4.5 Hipérbole Euclidiana (L: diretriz $x = \frac{a}{\epsilon}$) 64

4.6 Hipérbole Euclidiana 67

4.7 **Gráficos cG0 , cg0 e S0 com** $d = 2,\ \epsilon = 1,\ -7 < \theta < 7$ **e** $-3 < t < 3.$ 70

4.8 **Gráficos cG1 , cg1 e S1 com** $d = \frac{1}{2}, \epsilon = 2,\ \theta \in]-7, 7[$ **e** $-3 < t < 3.$ 71

4.9 **Gráficos cG2 , cg2 e S2 com** $d = 1, \epsilon = \frac{1}{2},\ \ln\frac{1}{2} < \theta < \ln 2$ **e** $-2 < t < 2.$ 72

4.10 **Gráficos cG3 , cg3 e S3 com** $\epsilon = 2, d = \frac{1}{2},\ \theta \in]-7, 7[$ **e** $-3 < t < 3.$ . . 73

4.11 **Gráficos cG4 , cg4 e S4 com** $\epsilon = 2, d = \frac{1}{2},\ \theta \in]\ln\frac{1}{2}, \ln 2[$ **e** $-3 < t < 3.$ 74

4.12 **Gráficos cG5 , cg5 e S5 com** $c = 1$ **e** $-\frac{1}{2} < \theta < \frac{1}{2},\ -3 < t < 3.$ 75

4.13 **Gráficos cG9 , cg9 e S9 com** $a = 1, c = 1, \ln 2 < \theta < 5$ **e** $-3 < t < 3.$ 76

5.1 Parametrização da curva geratriz 78

6.1 **Gráficos cg1 e L1 com** $a = 1,\ k = 0,\ H = 1,\ 1 < v < 10$ **e** $-3 < t < 3$ 101

6.2 **Gráficos cg2 e L2 com** $a = 1,\ k = 0,\ H = 1,\ 0 < v < 1$ **e** $-3 < t < 3$ 102

6.3 **Gráficos cg3 e L3 com** $a = 1,\ k = 0,\ H = 1,\ 0 < v < 3$ **e** $-2 < t < 2$ 103

6.4 **Gráficos cg4 e L4 com** $c = 1,\ k = 0,\ H = 0,\ 0 < v < 3$ **e** $-2 < t < 2$ 104

Introdução

As superfícies rotacionais com curvatura média constante no espaço Euclidiano foram caracterizadas por Delaunay em 1841 como sendo superfícies rotacionais geradas por cuvas descritas pela trajetória do foco de secções cônicas que rolam, sem deslizar, ao longo de um eixo. Tais superfícies são exatamente o cilindro, o catenóide, o nodóide, o ondulóide, a esfera e o plano.

Uma generalização para este problema foi apresentada por W.Y. Hsiang, em [8], onde foram obtidas as hipersuperfícies rotacionais com curvatura média constante, no espaço Euclidiano.

Em 1984, J. Hano e K. Nomizu apresentaram em [4], a mesma construção para superfícies de tipo espaço no espaço de Lorentz-Minkowski, com base na construção feita por Hsiang e Yu em [8]. Convém ressaltar que no Espaço de Lorentz-Minkowski, o eixo de revolução pode ser de tipo espaço, tipo tempo ou tipo luz. Nos dois primeiros casos, eles provam resultados análogos ao de Delaunay, embora o comportamento geométrico das cônicas no plano de Lorentz-Minkowski seja bastante diferente.

Neste trabalho, fazemos um estudo detalhado de [4], sendo que:

No capítulo 1, com base em [7], apresentamos resultados básicos da Geometria Lorentziana em $\mathbb{L}^2$, como trigonometria, semelhança de triângulos, e cônicas no plano de Lorentz-Minkowski. Apresentamos as Definições 1.2.6 e 1.2.8 e os Lema 1.2.10, que são fundamentais na obtenção da parametrização da curva geratriz das superfícies de revolução de tipo espaço e com eixo de tipo espaço (ver 4.1) e na obtenção da parametrização da curva geratriz das superfícies de revolução de tipo espaço e com eixo de tipo tempo (ver 5.1).

No capítulo 2, com base em [3], apresentamos resultados básicos da Geometria Lo-

rentziana em $\mathbb{L}^3$ (ver 2.1), os grupos de isometrias (grupo Hiperbólico, Elíptico e Parabólico)(ver 2.2), que são fundamentais na obtenção da parametrização das superfícies rotacionais com eixo de revolução de tipo espaço (ver 3.1), tipo tempo (ver 3.2) e tipo luz (ver 3.3). Apresentamos também a definição de círculo no plano de Lorentz-Minkowski (ver Definição 2.2.5) e mostramos que estes círculos, podem ser vistos do ponto de vista Euclidiano, como um círculo, uma hipérbole ou uma parábola.

Iniciamos o capítulo 3, definindo superfície de revolução (ver Definição 3.1.1) e superfície de tipo espaço em $\mathbb{L}^3$ (ver Definição 3.1.2). Em seguida , fazendo uso dos grupos de isometrias, obtemos as parametrizações das superfícies de revolução de tipo espaço, em $\mathbb{L}^3$, com eixos de tipo espaço, de tipo tempo e de tipo luz. Para finalizar o capítulo, apresentamos alguns resultados, como o Teorema 3.2.5 (Hopf e Rinow) e o Lema 3.2.7, que serão utilizados nos capítulos 4, 5 e 6, para decidirmos se as superfícies de revolução com eixos de tipo espaço, tipo tempo e tipo luz, em $\mathbb{L}^3$, são completas.

O capítulo 4 é dedicado ao estudo das superfícies de revolução, em $\mathbb{L}^3$, com curvatura média constante, de tipo espaço e com eixo de revolução de tipo espaço. Com base em [4], discutimos o rolamento de uma cônica Γ, dada em coordenadas polares por $\Gamma = (r(\theta)\sinh\theta, r(\theta)\cosh\theta)$, ao longo do eixo x, que é de tipo espaço, obtendo assim, a parametrização da curva Ω, gerada por um dos seus focos. Tomando-se a curva Ω como geratriz da superfície de revolução e considerando o caso em que o centro de curvatura de Ω não pertence ao eixo x, obtemos no Teorema 4.1.4, a equação diferencial que a função $r = r(\theta)$ deve satisfazer. Considerando o caso em que o centro de curvatura não pertence ao eixo x, obtemos no Teorema 4.1.6, uma superfície de revolução de tipo espaço congruente a um hiperbolóide. Fazemos um estudo detalhado das cônicas de tipo espaço, através das equações polares de $r(\theta)$, obtidas como solução da equação diferencial (4.8). Fazemos ainda, uma comparação entre as cônicas Lorentzianas e as cônicas Euclidianas, ou seja, olhamos as cônicas Lorentzianas do ponto de vista Euclidiano, observando que uma hipérbole Lorentziana tem o aspecto gráfico de uma elípse Euclidiana e vice-versa, embora os focos e as diretrizes tenham um posicionamento geométrico diferente. Para finalizar o capítulo, caracterizamos as superfícies de revolução de tipo espaço em $\mathbb{L}^3$ (ver Teorema 4.3.1), estudamos a completude destas superfícies (ver Teorema 4.3.2) e tomando valores particulares, na Seção 4.4, fazemos a representação gráfica de algumas cônicas, das curvas geratrizes e das respectivas superfícies de revolução.

O capítulo 5 é dedicado ao estudo das superfícies de revolução, em $\mathbb{L}^3$, com curvatura média constante, de tipo espaço e com eixo de revolução de tipo tempo. Fazendo um estudo análogo ao capítulo 4, obtemos também, neste caso, a mesma equação diferencial (4.8). Caracterizamos as superfícies de revolução de tipo espaço, com eixo de tipo tempo (ver Teorema 5.3) e mostramos no Teorema 5.3.2 que estas superfícies são todas não completas.

No capítulo 6, usando um sistema de coordenadas de tipo luz, obtemos a equação diferencial satisfeita pela curva Ω, cujas soluções nos permitem caracterizar as superfícies de revolução, em $\mathbb{L}^3$, de tipo espaço e com eixo de revolução de tipo luz. Finalizamos o capítulo com o estudo da completude destas superfícies e com os gráficos das geratrizes e das respectivas superfícies.

Capítulo 1

O Plano de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^2$

As definições e resultados deste capítulo serão utilizados para o estudo das secções cônicas no plano de Lorentz-Minkowski, que estudaremos nos capítulos 4 e 5.

1.1 Generalidades sobre $\mathbb{L}^2$

Seja $\mathbb{L}^2$ o plano de Lorentz - Minkowski, que é o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ munido da métrica:

$$ds^2 = dx_1^2 - dx_2^2,$$

onde x_1, x_2 representam as coordenadas canônicas em $\mathbb{L}^2$.

Denotaremos a métrica por g_{-1}, que é uma forma bilinear simétrica, não - degenerada de índice 1 sobre $\mathbb{R}^2$. Lembramos que o *índice* ν de uma forma bilinear simétrica β sobre um $\mathbb{R}$- espaço vetorial V, é a maior dimensão de qualquer subespaço $W \subset V$ no qual se $w \in W, w \neq 0$ então $\beta(w,w) < 0$, isto é, β é negativa definida em W.

Proposição 1.1.1 *O índice ν da forma bilinear simétrica g_{-1} é igual a 1 e g_{-1} é não-degenerada.*

Demonstração:

Seja $W_- = \{(0, x_1) \in \mathbb{R}^2\}$ e $x = (0, x_1) \in W_-$, então
$g_{-1}(x,x) = -x_1^2 < 0$ e $g_{-1}|_{W_-}$ é negativa-definida, logo $\nu \geq 1$.

Por outro lado, se $W_+ = \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2\}$ e $y = (x_1, 0) \in W_+$, então $g_{-1}(y, y) = x_1^2 > 0$ e $g_{-1}|_{W_+}$ é positiva - definida.

Suponhamos que exista um subespaço $W \subset V$, com $dimW \geq 2$, tal que $g_{-1}|_W$ é negativa - definida.

Como $dimW \geq 2$, existe $xinW \cap W_+$, $x \neq 0$ tal que $g_{-1}(x, x) < 0 < g_{-1}(x, x)$, o que é absurdo. Logo não existe tal subespaço W. Portanto $\nu = 1$.

Suponhamos que existe $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $g_{-1}(x, y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}^2$. Tomando-se $y = (x_1, 0)$, temos $g_{-1}(x, (x_1, 0)) = 0$. Logo $x_1^2 = 0$, $x_1 = 0$ e $g_{-1}(x, x) = -x_2^2$. Como $g_{-1}(x, y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}^2$, em particular, vale para $y = x$, então $g_{-1}(x, x) = -x_2^2 = 0$. Logo $x = 0$, o que é absurdo. Portanto g_{-1} é não - degenerada.

∎

Definição 1.1.2 *Um vetor $v \in \mathbb{L}^2$ é chamado:*
(i) de tipo espaço (spacelike) se $g_{-1}(v, v) > 0, \forall v \neq 0$ ou se $v = 0$;
(ii) de tipo tempo (timelike) se $g_{-1}(v, v) < 0, \forall v \neq 0$;
(iii) de tipo luz (lightlike) se $g_{-1}(v, v) = 0, \forall v \neq 0$.

A categoria na qual um vetor se enquadra é chamada seu *caráter causal.*

Definição 1.1.3 *Seja $v \in \mathbb{L}^2$, definimos a norma de v por:*

$$||v|| = \sqrt{|g_{-1}(v, v)|}.$$

Assim, em $\mathbb{L}^2$, podemos falar em ortogonalidade, vetores unitários e ortonormalidade.

Considerando a norma acima, definiremos a distância lorentziana entre dois pontos de $\mathbb{L}^2$ e a distância entre um ponto e uma reta em $\mathbb{L}^2$.

Definição 1.1.4 *Dados P e Q dois pontos quaisquer em $\mathbb{L}^2$, a distância Lorentziana entre P e Q é dada por:*

$$d(P, Q) = ||\overrightarrow{(PQ)}||_{\mathbb{L}}$$

Definição 1.1.5 *Sejam P e r, um ponto e uma reta, respectivamente, em $\mathbb{L}^2$ e $Q \in r$ a projeção ortogonal de P sobre r. Então, a distância do ponto P à reta r é dada por:*

$$d(P, r) = d(P, Q).$$

Lema 1.1.6 *Dados um ponto $P = (x_\circ, y_\circ)$ e uma reta r, em $\mathbb{L}^2$, a distância Lorentziana de P a r é dada pela fórmula:*

$$d(P,r) = \frac{|ax_\circ + by_\circ + c|}{\sqrt{|a^2 - b^2|}}.$$

Demonstração:

Considere a equação geral de r dada por $ax + by + c = 0$, $A = (x, y)$ e $P(x_0, y_0)$ um ponto qualquer de r. O vetor normal à reta r será indicado por $\overrightarrow{n_r} = (a, -b)$. Como $\overrightarrow{AP} = (x_0 - x, y_0 - y)$, obtemos

$$\begin{aligned} d(P,r) &= ||proj_{\overrightarrow{n_r}} \overrightarrow{AP}|| = \frac{|\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{n_r}|}{||\overrightarrow{n_r}||} = \\ &= \frac{|(x_0 - x)a + (y_0 - y)b|}{\sqrt{|a^2-b^2|}} = \frac{|ax_0 + by_0 - ax - by|}{\sqrt{|a^2-b^2|}}. \end{aligned}$$

Como o ponto $A = (x, y)$ está na reta r, temos $ax + by + c = o$, ou seja, $c = -ax - by$.

Logo

$$d(P,r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{|a^2 - b^2|}}.$$

∎

1.2 Trigonometria no plano de Lorentz - Minkowski

Para algumas definições e resultados desta seção nos baseamos em [3].

Denotemos por $O_1(2)$ o conjunto dos operadores lineares $O : \mathbb{L}^2 \to \mathbb{L}^2$ tais que $g_{-1}(O(u), O(v)) = g_{-1}(u, v), \forall u, v \in \mathbb{L}^2$ e, em particular, por G, o grupo de Lorentz $SO^+(1,1)$, que consiste de todos as matrizes da forma:

$$A(\varphi) = \begin{bmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{bmatrix}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Definição 1.2.1 *Uma tranformação linear de $\mathbb{L}^2$ preserva a orientação tempo se preserva o caráter causal de qualquer vetor.*

Afirmação 1.2.1 *O grupo G preserva a orientação e a orientação tempo.*

Demonstração:

Como G preserva o produto interno, segue que G preserva a orientação *tempo* e como $detA(\varphi) = 1 > 0$ segue que G preserva a orientação.

∎

Definição 1.2.2 *Sejam $v = (x, y)$ e $e = (0, 1)$ vetores de $\mathbb{L}^2$. Dizemos que v aponta para o futuro (passado) se $g_{-1}(v, e) < 0$ ($g_{-1}(v, e) > 0$).*

Proposição 1.2.3 *Um vetor $v = (x, y) \in \mathbb{L}^2$ é de tipo tempo e aponta para o futuro se e somente se $x^2 - y^2 < 0$ e $y > 0$.*

Demonstração:

O vetor v é de tipo tempo $\Leftrightarrow$ $g_{-1}(v, v) < 0$ $\Leftrightarrow$ $x^2 - y^2 < 0$. Por outro lado, v aponta para o futuro $\Leftrightarrow$ $g_{-1}(v, e) < 0$ $\Leftrightarrow$ $g_{-1}((x, y), (0, 1)) = -y < 0$ $\Leftrightarrow$ $y > 0$.

∎

Lema 1.2.4 *Sejam u e v vetores de tipo tempo* que apontam para o futuro, então:
(i) $g_{-1}(u, v) < 0$;
(ii) $u + v$ é um vetor tipo tempo que aponta para o futuro;
(iii) $-g_{-1}(u, v) \geq ||u||.||v||$; ocorrendo a igualdade se e somente se $v = \alpha u$;
(iv) $||u + v|| \geq ||u|| + ||v||$; ocorrendo a igualdade se e somente se $v = \alpha u$.

Demonstração:

Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, vetores de *tipo tempo* que apontam para o futuro. Então,
$g_{-1}(u, u) = x_1^2 - y_1^2 < 0$ e $g_{-1}(u, e) = -y_1 < 0 \Rightarrow y_1 > 0 \Rightarrow |x_1| < y_1$ e
$g_{-1}(v, v) = x_2^2 - y_2^2 < 0$ e $g_{-1}(v, e) = -y_2 < 0 \Rightarrow y_2 > 0 \Rightarrow |x_2| < y_2$.

Portanto temos:

(i) $g_{-1}(u, v) = g_{-1}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - y_1y_2 < 0$.

(ii) $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$. Logo $g_{-1}(u + v, u + v) = (x_1 + x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2 = x_1^2 + 2\, x_1x_2 + x_2^2 - y_1^2 - 2\, y_1y_2 - y_2^2 = (x_1^2 - y_1^2) + 2\,(x_1x_2 - y_1y_2) + (x_2^2 - y_2^2) < 0$. Logo $u + v$ é de *tipo tempo*.

Por outro lado,

$$g_{-1}(u+v,e) = g_{-1}\big((x_1+x_2, y_1+y_2),(0,1)\big) = -(y_1+y_2) < 0.$$

Logo u+v aponta para o futuro.

(iii) Suponhamos u e v vetores de *tipo tempo* que apontam para o futuro. Para $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ temos por (ii) que $g_{-1}(u+\alpha v, u+\alpha v) \leq 0$. Logo,

$$\begin{aligned} g_{-1}(u+\alpha v, u+\alpha v) &= g_{-1}(u,u) + 2\alpha g_{-1}(u,v) + g_{-1}(v,v)\alpha^2 = \\ &= -||u||^2 + 2\alpha g_1(u,v) - ||v||^2\alpha^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Portanto, $||u||^2 - 2\alpha g_1(u,v) + ||v||^2\alpha^2 \geq 0$ é um trinômio de segundo grau em α, que é sempre maior ou igual a zero. Logo seu discriminante deve ser negativo, ou seja,

$4g_{-1}^2(u,v) - 4||u||^2||v||^2 < 0 \Rightarrow g_{-1}^2(u,v) < ||u||^2||v||^2 \Rightarrow g_{-1}(u,v) < -||u||||v||$ ou $g_{-1}(u,v) > ||u||||v||$, mas $g_{-1}(u,v) < 0$, então $g_{-1}(u,v) < -||u||||v|| \Rightarrow$ $-g_{-1}(u,v) > ||u||||v||$.

Agora, analisemos o caso em que ocorre a igualdade:

$$\begin{aligned} -g_{-1}(u,v) &= ||u||||v|| \Leftrightarrow -(x_1x_2 - y_1y_2) = \\ &= \sqrt{|x_1^2 - y_1^2|}.\sqrt{|x_2^2 - y_2^2|} \Leftrightarrow (x_1x_2 - y_1y_2)^2 = \\ &= |(x_1^2 - y_1^2)(x_2^2 - y_2^2)| \Leftrightarrow x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 = \\ &= x_1^2x_2^2 - x_1^2y_2^2 - x_2^2y_1^2 + y_1^2y_2^2 \Leftrightarrow x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2 = \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1)^2 = 0 \Leftrightarrow x_1y_2 - x_2y_1 = 0. \end{aligned}$$

Se $x_2 = 0$, claramente, $g_{-1}(u,v) < 0$. Suponhamos que $x_2 \neq 0$, então,

$\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = k$. Logo, $x_2 = \dfrac{1}{k}\, x_1$ e $y_2 = \dfrac{1}{k}\, y_1$, ou seja, $(x_2, y_2) = \dfrac{1}{k}(x_1, y_1)$.

(iv)

$$\begin{aligned} ||u+v||^2 &= |g_{-1}(u+v, u+v)| = -g_{-1}(u+v, u+v) = \\ &= -g_{-1}(u,u) - g_{-1}(u,v) - g_{-1}(v,u) - g_{-1}(v,v) = \\ &= ||u||^2 - 2g_{-1}(u,v) + ||v||^2 \geq ||u||^2 + 2||u||||v|| + ||v||^2 = (||u|| + ||v||)^2. \end{aligned}$$

Extraindo-se a raiz quadrada em ambos os membros da desigualdade, temos:

$$||u+v|| \geq ||u|| + ||v||.$$

Agora, analisemos o caso em que ocorre a igualdade:

$$\begin{aligned} ||u+v|| &= ||u|| + ||v|| \Leftrightarrow (||u+v||)^2 = (||u|| + ||v||)^2 \\ &\Leftrightarrow ||u||^2 - 2g_{-1}(u,v) + ||v||^2 = \\ &= ||u||^2 + 2||u||||v|| + ||v||^2 \Leftrightarrow -g_{-1}(u,v) = \\ &= ||u||||v||. \end{aligned}$$

Por (iii) sabemos que esta última igualdade ocorre $\Leftrightarrow v = \alpha u$.

∎

Definição 1.2.5 *Sejam u e v dois vetores unitários de $\mathbb{L}^2$, de tipo tempo e que apontam para o futuro. Dizemos que $\varphi \in \mathbb{R}$ é o ângulo orientado de u para v se $A(\varphi)u = v$. Neste caso, o ângulo orientado de v para u é obviamente $-\varphi$.*

Lema 1.2.6 *Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$ vetores unitários de $\mathbb{L}^2$, de tipo tempo, que apontam para o futuro. O ângulo orientado φ de u para v é dado por:*

$$cosh\ \varphi = -g_{-1}(u,v).$$

Demonstração:

Da definição 1.2.6 segue que

$$\begin{bmatrix} cosh\ \varphi & sinh\ \varphi \\ sinh\ \varphi & cosh\ \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \text{ ou seja,}$$

$(x_2, y_2) = (x_1 cosh\varphi + y_1 sinh\varphi, x_1 sinh\varphi + y_1 cosh\varphi)$. Logo

$$\begin{aligned} g_{-1}(u,v) &= g_{-1}\big((x_1,y_1),(x_1 cosh\varphi + y_1 senh\varphi, x_1 senh\varphi + y_1 cosh\varphi)\big) = \\ &= x_1^2 cosh\varphi + x_1 y_1 senh\varphi - x_1 y_1 senh\varphi - y_1^2 cosh\varphi \\ &= (x_1^2 - y_1^2) cosh\varphi \\ &= -cosh\varphi. \end{aligned}$$

∎

Assim, quando u e v são vetores de *tipo tempo*, não unitários e apontam para o futuro, o ângulo φ orientado de u para v é o ângulo entre os versores $\dfrac{u}{||u||}$ e $\dfrac{v}{||v||}$, ou seja,

$$cosh\varphi = -\frac{g_{-1}(u,v)}{||u||||v||}.$$

Observação: A definição acima, ainda vale, se u e v são vetores de *tipo tempo* e apontam para o passado.

De modo análogo, definimos o ângulo para dois vetores de *tipo espaço.*

Definição 1.2.7 *Sejam u e v dois vetores unitários de tipo espaço* em $\mathbb{L}^2$, tais que $g_{-1}(u,e) > 0$ *e* $g_{-1}(v,e) > 0$, onde $e = (1,0)$. Dizemos que $\varphi \in \mathbb{R}$ é o ângulo orientado de u para v se $A(\varphi)u = v$.

Lema 1.2.8 *Sejam $u = (x_1, y_1)$ e $v = (x_2, y_2)$, vetores unitários de $\mathbb{L}^2$, de tipo espaço,* tais que $g_{-1}(u,e) > 0$ *e* $g_{-1}(v,e) > 0$. O ângulo φ, orientado de u para v, é dado por:

$$\cosh\varphi = g_{-1}(u,v).$$

Demonstração:

Pela Definição 1.2.8 segue que

$$\begin{bmatrix} \cosh\varphi & \sinh\varphi \\ \sinh\varphi & \cosh\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}, \text{ ou seja,}$$

$(x_2, y_2) = x_1\cosh\varphi + y_1\sinh\varphi, x_1\sinh\varphi + y_1\cosh\varphi)$.

$$\begin{aligned} \text{Logo } g_{-1}(u,v) &= g_{-1}\big((x_1,y_1),(x_1\cosh\varphi + y_1\sinh\varphi, x_1\sinh\varphi + y_1\cosh\varphi)\big) = \\ &= x_1^2\cosh\varphi + x_1y_1\sinh\varphi - x_1y_1\sinh\varphi - y_1^2\cosh\varphi \\ &= (x_1^2 - y_1^2)\cosh\varphi \\ &= \cosh\varphi. \end{aligned}$$

∎

Assim, se $u, v \neq 0$ são vetores não unitários de *tipo espaço* em $\mathbb{L}^2$, o ângulo orientado φ de u para v é dado por:

$$\cosh\varphi = \frac{g_{-1}(u,v)}{||u||||v||}.$$

Observação: A definição acima ainda vale se tivermos u e v vetores de *tipo espaço*, com $g_{-1}(u,e) < 0$ *e* $g_{-1}(v,e) < 0$.

Dados três pontos não colineares em $\mathbb{L}^2$, podemos considerar o triângulo de vértices A, B e C. O lema e a proposição seguintes, mostram que para um triângulo em $\mathbb{L}^2$, que

possui dois lados ortogonais, vale uma fórmula análoga à de Pitágoras e um análogo à relações trigonométricas dos triângulos retângulos Euclideanos.

Lema 1.2.9 *Sejam A, B e C três pontos não colineares de $\mathbb{L}^2$ tais que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são vetores de tipo tempo, apontando para o futuro ou para o passado, $\overrightarrow{BC}$ de tipo espaço e $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$. Como B é obtido pela projeção ortogonal de C sobre a reta AB, temos:*

(i) $\cosh\varphi = \dfrac{||\overrightarrow{AB}||}{||\overrightarrow{AC}||}$;

(ii) $\operatorname{senh}\varphi = \dfrac{||\overrightarrow{BC}||}{||\overrightarrow{AC}||}$,

onde φ é o ângulo orientado de $\overrightarrow{AB}$ para $\overrightarrow{AC}$.

Demonstração:

(i) Pela Definição 1.2.8, temos:

$$\begin{aligned}\cosh\varphi &= \frac{-g_{-1}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{||\overrightarrow{AB}||||\overrightarrow{AC}||} = \frac{-g_{-1}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})}{||\overrightarrow{AB}||||\overrightarrow{AC}||} = -\frac{[g_{-1}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB})+g_{-1}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC})]}{||\overrightarrow{AB}||||\overrightarrow{AC}||}\\ &= \frac{||\overrightarrow{AB}||^2}{||\overrightarrow{AB}||||\overrightarrow{AC}||} = \frac{||\overrightarrow{AB}||}{||\overrightarrow{AC}||}.\end{aligned}$$

(ii) Como $\cosh^2\varphi - \sinh^2\varphi = 1$, para todo φ real positivo, segue que:

$$\sinh\varphi = \sqrt{\cosh^2\varphi - 1} = \sqrt{(\frac{||\overrightarrow{AB}||}{||\overrightarrow{AC}||})^2 - 1} = \sqrt{\frac{||\overrightarrow{AB}||^2 - ||\overrightarrow{AC}||^2||}{||\overrightarrow{AC}||^2}}\ .$$

Mas,

$||\overrightarrow{AB}||^2 - ||\overrightarrow{AC}||^2 = -g_{-1}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}) - [-g_{-1}(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC})] = -g_{-1}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}) + g_{-1}(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC}) =$
$-g_{-1}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}) + g_{-1}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}) + g_{-1}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}) + g_{-1}(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{AB}) + g_{-1}(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BC})$
$= g_{-1}(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BC}) = ||\overrightarrow{BC}||^2$, onde na penúltima igualdade usamos $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

Logo, $\sinh\varphi = \dfrac{||\overrightarrow{BC}||}{||\overrightarrow{AC}||}$.

∎

Observação: O lema 1.2.10, ainda vale, se tivermos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ de *tipo espaço* e $\overrightarrow{BC}$ de *tipo tempo*.

Proposição 1.2.10 *Sejam A, B e C três pontos não colineares de $\mathbb{L}^3$, tais que $\overrightarrow{AB}$ é de tipo espaço, $\overrightarrow{AC}$ é de tipo tempo e $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$. O vetor $\overrightarrow{BC}$ satisfaz:*
(i) Se $\overrightarrow{BC}$ é de tipo luz, então $||\overrightarrow{AB}|| = ||\overrightarrow{AC}||$;
(ii) Se $\overrightarrow{BC}$ é de *tipo tempo*, então $||\overrightarrow{BC}||^2 = ||\overrightarrow{AC}||^2 - ||\overrightarrow{AB}||^2$;
(iii) Se $\overrightarrow{BC}$ é de *tipo espaço*, então $||\overrightarrow{BC}||^2 = ||\overrightarrow{AB}||^2 - ||\overrightarrow{AC}||^2$.

Demonstração:
(i) Como $\overrightarrow{BC}$ é de *tipo luz* e $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, temos:
$0 = ||\overrightarrow{BC}||^2 =< \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC} >=< \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} > =$
$= < \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA} > + < \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC} > + < \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA} > + < \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} > =$
$=< \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA} > + < \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} >= ||\overrightarrow{BA}||^2 - ||\overrightarrow{AC}||^2 \implies ||\overrightarrow{BA}||^2 - ||\overrightarrow{AC}||^2.$

(ii) Como $\overrightarrow{BC}$ é de *tipo tempo* e $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$, temos:
$||\overrightarrow{BC}||^2 = - < \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC} >= - < \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} > =$
$= -(< \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA} > + < \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC} > + < \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA} > + < \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} >) =$
$=- < \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA} > - < \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} >= ||\overrightarrow{AC}||^2 - ||\overrightarrow{BA}||^2.$

(iii) Como $\overrightarrow{BC}$ é de *tipo espaço*, temos:
$||\overrightarrow{BC}||^2 =< \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC} >=< \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} > =$
$= < \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA} > + < \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC} > + < \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA} > + < \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} > =$
$= < \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA} > + < \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC} >= ||\overrightarrow{BA}||^2 - ||\overrightarrow{AC}||^2.$

∎

1.3 Caracterização do rolamento em $\mathbb{L}^2$

Sabemos que no caso Euclidiano, o rolamento de um ponto ao longo de um eixo fixo é expresso pela operação matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} cos\ u & -sin\ u \\ sin\ u & cos\ u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad u \in \mathbb{R},$$

que é a composição de uma rotação com uma translação.

Por exemplo, a ciclóide em $\mathbb{R}^2$ pode ser descrita como o lugar geométrico da origem, quando o círculo unitário centrado no ponto $(-1, 0)$, rola sobre o eixo y. Esta curva pode

ser vista como uma aplicação que a cada $u \in \mathbb{R}$, associa a imagem do ponto $(1,0)$ pela rotação de ângulo $-u$ composta com a translação $(-1,u)$.

De modo análogo, temos que o rolamento em $\mathbb{L}^2$, é expresso pela operação matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} coshu & sinhu \\ sinhu & coshu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

1.4 Semelhança de triângulos no plano de Lorentz - Minkowski

Nesta seção, daremos a definição de semelhança de triângulos no plano de Lorentz-Minkowski e apresentaremos dois lemas, que serão de grande importância na identificação dos ângulos que aparecerão nos capítulos 4 e 5.

Definição 1.4.1 *Dois triângulos em $\mathbb{L}^2$, cujos lados não são de tipo luz, são semelhantes, se possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados correspondentes proporcionais.*

O esquema a seguir resume esta definição:

$$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C' \iff \begin{cases} \widehat{A} = \widehat{A}' \\ \widehat{B} = \widehat{B}' \\ \widehat{C} = \widehat{C}' \end{cases} \text{e} \quad \frac{||\overrightarrow{AB}||}{||\overrightarrow{A'B'}||} = \frac{||\overrightarrow{BC}||}{||\overrightarrow{B'C'}||} = \frac{||\overrightarrow{AC}||}{||\overrightarrow{A'C'}||}.$$

Sendo K a razão entre os lados correspondentes, temos:

$$\frac{||\overrightarrow{AB}||}{||\overrightarrow{A'B'}||} = \frac{||\overrightarrow{BC}||}{||\overrightarrow{B'C'}||} = \frac{||\overrightarrow{AC}||}{||\overrightarrow{A'C'}||} = K$$

K é chamada razão de semelhança dos triângulos.

Lema 1.4.2 *Considere em $\mathbb{L}^2$, $\triangle ABC$ e $\triangle DEF$, de modo que os vetores diretores dos lados são dados pelas condições do Lema 1.2.10, $\overline{AB} \perp \overline{AC}$ e $\overline{DE} \perp \overline{DF}$. Se o ângulo $\widehat{B}$, orientado de $\overrightarrow{BA}$ para $\overrightarrow{BC}$ é igual ao ângulo orientado $\widehat{E}$ de $\overrightarrow{ED}$ para $\overrightarrow{EF}$, então $\widehat{C} = \widehat{F}$.*

Demonstração:

Pelo lema 1.2.10 temos: $\sinh \widehat{B} = \dfrac{||\overrightarrow{AC}||}{||\overrightarrow{BC}||}$ e $\sinh \widehat{E} = \dfrac{||\overrightarrow{DF}||}{||\overrightarrow{EF}||}$;

$\cosh \widehat{B} = \dfrac{||\overrightarrow{AB}||}{||\overrightarrow{BC}||}$ e $\cosh \widehat{E} = \dfrac{||\overrightarrow{DE}||}{||\overrightarrow{EF}||}$.

Como $\widehat{B} = \widehat{E}$ segue que

$$\frac{||\overrightarrow{AC}||}{||\overrightarrow{BC}||} = \frac{||\overrightarrow{DF}||}{||\overrightarrow{EF}||} \tag{1.1}$$

e

$$\frac{||\overrightarrow{AB}||}{||\overrightarrow{BC}||} = \frac{||\overrightarrow{DE}||}{||\overrightarrow{EF}||} \tag{1.2}$$

Pelo Lema 1.2.10 temos também que:

$\sinh \widehat{C} = \dfrac{||\overrightarrow{AB}||}{||\overrightarrow{BC}||}$ e $\sinh \widehat{F} = \dfrac{||\overrightarrow{DE}||}{||\overrightarrow{EF}||}$;

$\cosh \widehat{C} = \dfrac{||\overrightarrow{AC}||}{||\overrightarrow{BC}||}$ e $\cosh \widehat{F} = \dfrac{||\overrightarrow{DF}||}{||\overrightarrow{EF}||}$.

Logo, de (1.1) e (1.2) , segue que $\widehat{C} = \widehat{F}$.

∎

Lema 1.4.3 *Nas condições do lema anterior,* $\triangle ABC \backsim \triangle DEF$.

Demonstração:

Como no lema anterior, já mostramos que $\widehat{C} = \widehat{F}$, falta mostrar que os lados são proporcionais. Mas das igualdades (1.1) e (1.2), segue que $\dfrac{||\overrightarrow{AC}||}{||\overrightarrow{DF}||} = \dfrac{||\overrightarrow{BC}||}{||\overrightarrow{EF}||}$ e $\dfrac{||\overrightarrow{AB}||}{||\overrightarrow{DE}||} = \dfrac{||\overrightarrow{BC}||}{||\overrightarrow{EF}||}$. Logo os lados são proporcionais.

∎

1.5 Cônicas no Plano de Lorentz - Minkowski.

A teoria das cônicas no plano de Lorentz - Minkowski é pouco conhecida. Portanto trataremos aqui somente o essencial para o desenvolvimento deste trabalho. Notemos que a

definição e a caracterização de uma cônica Lorentziana que daremos a seguir, são análogas ao caso Euclidiano. Mas mostraremos, no capítulo 4, que há diferenças nos gráficos, em especial, no comportamento dos focos e das diretrizes das cônicas Lorentzianas, em comparação com os gráficos análogos da geometria Euclidiana. Por exemplo, uma elipse Lorentziana pode ter aparência de uma hipérbole Euclidiana e vice-versa.

Definição 1.5.1 *Seja F um ponto fixo, D uma reta fixa em $\mathbb{L}^2 = (\mathbb{R}^2, <,>_{\mathbb{L}})$ e $\varepsilon > 0$ um número real. Uma cônica Γ de foco F, diretriz D e excentricidade ε, é o lugar geométrico de um ponto P tal que, $\dfrac{d(P,F)}{d(P,D)} = \varepsilon$, onde $d(P,D)$ é a distância Lorentziana do ponto P à reta diretriz D.*

Definição 1.5.2 *Uma cônica Lorentziana é dita uma elipse, se $0 < \varepsilon < 1$, uma parábola, se $\varepsilon = 1$ e uma hipérbole, se $\varepsilon > 1$.*

Capítulo 2

O Espaço de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^3$

Este capítulo se baseia em [7], sendo que alguns dos resultados foram adaptados para o caso particular $n = 3$.

2.1 Generalidades sobre $\mathbb{L}^3$

Seja $\mathbb{L}^3$ o espaço tridimensional de Lorentz-Minkowski, que é o espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ munido da métrica:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 - dx_3^2,$$

onde x_1, x_2, x_3 representam as coordenadas canônicas em $\mathbb{L}^3$.

Denotaremos a métrica acima, por g_{-1}, que é uma forma bilinear simétrica, não - degenerada de índice 1 sobre $\mathbb{R}^3$.

Proposição 2.1.1 *O índice ν da forma bilinear simétrica g_{-1} é igual a 1 e g_{-1} é não-degenerada.*

Demonstração:

Seja $W_- = \{(0,0,x_1) \in \mathbb{R}^3\}$ e $x = (0,0,x_1) \in W_-$, então $g_{-1}(x,x) = -x_1^2 < 0$ e $g_{-1}|_{W_-}$ é negativa-definida, logo $\nu \geq 1$.

Por outro lado, se $W_+ = \{(x_1,x_2,0) \in \mathbb{R}^3\}$ e $y = (x_1,x_2,0) \in W_+$, então $g_{-1}(y,y) = x_1^2 + x_2^2 > 0$, e $g_{-1}|_{W_+}$ é positiva - definida.

Suponhamos que exista um subespaço $W \subset V$, com $dimW \geq 2$, tal que $g_{-1}|_W$ é negativa - definida.

Como $dim\ W \geq 2$, existe $w \in W \cap W_+$, $w \neq 0$ tal que $g_{-1}(x,x) < 0 < g_{-1}(x,x)$, o que é absurdo. Logo não existe tal subespaço W. Portanto $\nu = 1$.

Suponhamos que existe $x = (x_1, x_2, x_3) \neq 0 \in \mathbb{R}^3$ tal que $g_{-1}(x,y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}^3$. Tomemos $y = (x_1, x_2, 0)$, temos:
$g_{-1}(x,(x_1,x_2,0)) = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow g_{-1}(x,x) = -x_3^2$. Como $g_{-1}(x,y) = 0, \forall y \in \mathbb{R}^3$, em particular, vale para $y = x$, então $g_{-1}(x,x) = -x_3^2 = 0$. Logo $x = 0$, o que é absurdo. Portanto g_{-1} é não - degenerada.

∎

Usaremos a seguinte notação:

Se $X : U \to \mathbb{L}^3$ é uma parametrização de $\mathbb{L}^3$ em um aberto $U \subset \mathbb{R}^3$, denotamos os coeficientes de g_{-1}, em U, por:

$$g_{ij}(p) = g_{-1}(\frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p)) \quad i,j = 1,2,3, \quad \text{onde} \quad \frac{\partial}{\partial x_i}(p) = dx_p(e_i), \quad p \in U$$

e $\{e_1, e_2, e_3\}$ é a base canônica do $T_p\mathbb{R}^3$.

Logo, se V e W são campos de vetores tangentes a $\mathbb{L}^3$ definidos em U, podemos escrever:

$$V = \sum_{i=1}^{3} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad W = \sum_{j=1}^{3} w_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad g_{-1}(V,W) = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} v_i w_j$$

Como g_{-1} é não - degenerada, a matriz $g_{ij}(p)$, de ordem 3, possui inversa, a qual denotaremos por $(g^{ij}(p))$. Além disso, pelo fato de g_{-1} ser simétrica, obtemos:

$$g_{ij}(p) = g_{ji}(p) \quad e \quad g^{ij}(p) = g^{ji}(p), \qquad i,j = 1,2,3, \quad p \in U.$$

Do mesmo modo que em $\mathbb{L}^2$, temos:

Definição 2.1.2 *Seja $v \in \mathbb{L}^3$, definimos a norma de v por:*

$$||v|| = \sqrt{|g_{-1}(v,v)|}.$$

Definição 2.1.3 *Um vetor* $v \in \mathbb{L}^3$ *é chamado:*
(i) de tipo espaço (spacelike) se $g_{-1}(v,v) > 0, \forall v \neq 0$ ou se $v = 0$;
(ii) de *tipo tempo* (timelike) se $g_{-1}(v,v) < 0, \forall v \neq 0$;
(iii) de *tipo luz* (lightlike) se $g_{-1}(v,v) = 0, \forall v \neq 0$.

Assim, em $\mathbb{L}^3$, também podemos definir ortogonalidade, vetores unitários e ortonormalidade.

Definição 2.1.4 *Sendo* a *e* b *vetores de* $\mathbb{L}^3$*, definimos o produto vetorial* $a \wedge b$ *por:* $a \wedge b = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_2b_1 - a_1b_2)$*, onde* $a = (a_1, a_2, a_3)$ *e* $b = (b_1, b_2, b_3)$.

Observação: Para o produto vetorial acima definido e para qualquer x em $\mathbb{L}^3$, vale a relação $g_{-1}(a \wedge b, x) = \det(a, b, x)$.

Definição 2.1.5 *Um plano em* $\mathbb{L}^3$ *é de:*
(i) tipo espaço se seus vetores normais unitários são de tipo tempo.
(ii) tipo tempo se seus vetores normais unitários são de tipo espaço.
(iii) tipo luz se seus vetores normais são de tipo luz.

Proposição 2.1.6 *Se* W *é um* K*- subespaço de* $\mathbb{L}^3$*, então* $dimW + dimW^{\perp} = dim\mathbb{L}^3$ *e* $(W^{\perp})^{\perp} = W$*, onde* $W^{\perp} = \{v \in \mathbb{L}^3 / \ g_{-1}(v,w) = 0, \ \forall w \in W\}$.

Demonstração:

Seja $\{e_1, e_2, e_3\}$ base de $\mathbb{L}^3$ com $\{e_1, \dots, e_k\}$, $0 < k \leq 3$ base de W.

Consideremos a aplicação $f : \mathbb{L}^3 \to W$ dada por $f(v) = \sum_{i=1}^{k} g_{-1}(v, e_i)e_i$.

Observemos que $f(v) = 0$ se e somente se $g_{-1}(v, e_i) = 0, i = 1, \dots, k$, ou seja, $kerf = W^{\perp}$. Por outro lado, dado $w = \sum_{i=1}^{k} w_i e_i \in W$, tomemos $\tilde{w} = \sum_{l=1}^{3} \sum_{i=1}^{k} w_i g^{il} e_l$.

Então:

$$f(\tilde{w}) = \sum_{j=1}^{k} g_{-1}(\sum_{l=1}^{3} \sum_{i=1}^{k} w_i g^{il} e_l, e_j)e_j, \quad \text{logo } f(\tilde{w}) = \sum_{i,j=1}^{k} w_i \delta_{ij} e_j = w,$$

o que mostra que f é sobrejetora.

Portanto, $dimW^{\perp} = dim\ kerf = 3 - dim\ Imf = 3 - dimW$, isto é, $dimW + dimW^{\perp} = 3$.

Para todo $v \in W$, temos $g_{-1}(v, w) = 0$, $\forall w \in W^{\perp}$, logo $v \in (W^{\perp})^{\perp} e\ W \subset (W^{\perp})^{\perp}$. Analogamente obtemos a inclusão $(W^{\perp})^{\perp} \subset W$. Portanto, segue que $W = (W^{\perp})^{\perp}$.

∎

Proposição 2.1.7 *Se $w \in \mathbb{L}^3$ é tal que $g_{-1}(w, w) < 0$, então:*
(i) $g_{-1}|_{[w]}$ é não - degenerada de índice 1 e $\mathbb{L}^3 = [w] \oplus [w]^{\perp}$;
(ii) $g_{-1}|_{[w]^{\perp}}$ é positiva - definida.

Demonstração: (i) É imediato que se $g_{-1}(w, w) < 0$, então o subespaço $[w]$ é não - degenerado de índice 1.

Temos:

$$3 = dim[w] + dim[w]^{\perp} = dim([w] + [w]^{\perp}) + dim([w] \cap [w]^{\perp})$$

Mostremos que $[w] \cap [w]^{\perp} = \{0\}$ e daí $\mathbb{L}^3 = [w] \oplus [w]^{\perp}$.

$$v \in [w] \cap [w]^{\perp} \subset [w] \text{ então, existe } a \in \mathbb{R} \text{ tal que } v = aw$$
$$v \in [w] \cap [w]^{\perp} \subset [w]^{\perp} \text{ então, } 0 = g_{-1}(v, w) = ag_{-1}(w, w)$$

Mas $g_{-1}(w, w) < 0$ e portanto $a = 0$, isto é $v = 0$, logo $\mathbb{L}^3 = [w] \oplus [w]^{\perp}$.

(ii) Observamos que $g_{-1}|_{[w]^{\perp}}$ é positiva semi - definida. Suponhamos, por absurdo, que existe $x \in [w]^{\perp}$ tal que $g_{-1}(x, x) < 0$. Como $g_{-1}(x, w) = 0$, segue que $g_{-1}|_{[x,w]}$ é negativa - definida e $dim[w, x] = 2 \geq 1$ (índice de $\mathbb{L}^3$), o que é absurdo. Portanto, $g_{-1}(x, x) \geq 0$, $\forall x \in [w]^{\perp}$.

Suponhamos que $x \in [w]^{\perp}$ e $g_{-1}(x, x) = 0$. Pela desigualdade de Cauchy - Schwarz temos:
$g_{-1}^2(x, y) \leq g_{-1}(x, x).\ g_{-1}(y, y) = 0$, $\forall y \in [w]^{\perp}$. Então $g_{-1}(x, y) = 0, \forall y \in [w]^{\perp}$, logo $x \in [w]$. Como $x \in [w]^{\perp}$, segue que $x = 0$. Assim, para $x \in [w]^{\perp}, x \neq 0$, temos $g_{-1}(x, x) \neq 0$.
Portanto $g_{-1}|_{[w]^{\perp}}$ é positiva - definida.

∎

Proposição 2.1.8 *Se W é um subespaço de $\mathbb{L}^3$, então $g_{-1}|_W$ é não-degenerada de índice 1, se e somente se $g_{-1}|_{W^\perp}$ é positiva - definida.*

Demonstração:

Suponhamos que $g_{-1}|_W$ é não degenerada de índice 1. Então existe $w \in W$, $w \neq 0$ tal que $g_{-1}(w,w) < 0$. Tomemos $x \in W^\perp, x \neq 0$, então $g_{-1}(x,w) = 0$. Pela proposição 2.1.7, $g_{-1}|_{[W]^\perp}$ é positiva - definida e como $x \in [W]^\perp$, temos $g_{-1}(x,x) > 0$, isto é, $g_{-1}|_{W^\perp}$ é positiva - definida.

Suponhamos agora que $g_{-1}|_{W^\perp}$ é positiva - definida. Se $w \in W$ é tal que $g_{-1}(w,z) = 0, \forall z \in W$, então $w \in W^\perp$ e $g_{-1}(w,w) = 0$. Mas como $g_{-1}|_{W^\perp}$ é positiva - definida, devemos ter $w = 0$ e $g_{-1}|_W$ é não - degenerada. Pela proposição 2.1.6, temos:

$$dimW + dimW^\perp = 3, \text{ então } \mathbb{L}^3 = W \oplus W^\perp.$$

Como o índice de g_{-1} em $\mathbb{L}^3$ é 1, $\exists\, v \in \mathbb{L}^3$, $v \neq 0$ tal que $g_{-1}(v,v) < 0$ e desta forma $v \in W$ e $v \notin W^\perp$. Logo $g_{-1}|_W$ possui índice maior ou igual a 1. Mas o índice de $g_{-1}|_W$ é menor ou igual ao índice de $g_{-1}|_{\mathbb{L}^3}$, que é 1. Portanto, $g_{-1}|_W$ tem índice 1.

∎

Proposição 2.1.9 *Seja W um subespaço k - dimensional de $\mathbb{L}^3, k \geq 2$. São equivalentes:*
(i) $g_{-1}|_W$ é não - degenerada de índice 1;
(ii) W contém dois vetores tipo luz, linearmente independentes;
(iii) existe $w \in W, w \neq 0$, tal que $g_{-1}(w,w) < 0$.

Demonstração:

$(i) \Longrightarrow (ii)$ Se $g_{-1}|_W$ é não - degenerada de índice 1, deduz-se da proposição 2.1.7, que existe uma base ortonormal $\{e_1, \ldots, e_k\}$ de W, tal que $g_{-1}(e_i, e_j) = \delta_{ij}, i \neq 1$. Então, $e_1 + e_2, e_1 - e_2$ são vetores tipo luz linearmente independentes, pois $g_{-1}(e_1 + e_2, e_1 + e_2) = 0 = g_{-1}(e_1 - e_2, e_1 - e_2)$ e se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a(e_1 + e_2) + b(e_1 - e_2) = 0$ então $a + b = b - a = 0$, ou seja, $a = b = 0$

$(ii) \Longrightarrow (iii)$ Sejam u e v vetores de tipo luz, linearmente independentes de W.

Temos, $g_{-1}(u,v) \neq 0$.

De fato,

Suponhamos, por absurdo, que $g_{-1}(u,v) = g_{-1}(u,u) = g_{-1}(v,v) = 0$. Como e_1 é um vetor unitário de $\mathbb{L}^3$ tal que $g_{-1}(e_1,e_1) < 0$, então pela Proposição 2.1.7, existem reais, únicos c e d, que podemos supor, sem perda de generalidade, ambos positivos (trocando, se necessário u por -u ou v por -v), tais que:

$$\begin{cases} u &= ce_1 + \tilde{u}; \\ v &= de_1 + \tilde{v}. \end{cases}$$

onde $\tilde{u} \neq 0$ e $\tilde{v} \neq 0$ pertencem ao subespaço $[e_1]^\perp$.

Observemos que

$$\begin{cases} g_{-1}(u,u) &= 0 \implies g_{-1}(\tilde{u},\tilde{u}) = c^2 \implies ||\tilde{u}|| = |c| = c; \\ g_{-1}(v,v) &= 0 \implies g_{-1}(\tilde{v},\tilde{v}) = d^2 \implies ||\tilde{v}|| = |d| = d. \end{cases}$$

Além disso,
$g_{-1}(u,v) = 0$, então $cd = g_{-1}(\tilde{u},\tilde{v}) \leq |c||d|$. Logo existe $\lambda \in \mathbb{R}$ / $\tilde{u} = \lambda\ \tilde{v}$ e portanto $\lambda = c/d$. Então $u = \lambda\ d\ e_1 + \lambda\ \tilde{v}$, o que é absurdo. Logo, $g_{-1}(u,v) = -cd + g_{-1}(\tilde{u},\tilde{v}) \neq 0$.

Temos então,

$$\begin{aligned} g_{-1}(u+v,u+v) &= -(c+d)^2 + g_{-1}(\tilde{u},\tilde{u}) + g_{-1}(\tilde{v},\tilde{v}) + 2g_{-1}(\tilde{u},\tilde{v}) \\ &= 2[-cd + g_{-1}(\tilde{u},\tilde{v})] = 2g_{-1}(u,v) \neq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{-1}(u-v,u-v) &= -(c-d)^2 + g_{-1}(\tilde{u},\tilde{u}) + g_{-1}(\tilde{v},\tilde{v}) - 2g_{-1}(\tilde{u},\tilde{v}) \\ &= 2[cd - g_{-1}(\tilde{u},\tilde{v})] = -2g_{-1}(u,v) \neq 0, \end{aligned}$$

sendo pois, um deles menor que zero.
$(iii) \implies (i)$ Seja $x \in W$ tal que $g_{-1}(x,x) < 0$. Então $W^\perp \subset [x]^\perp$ e sendo $g_{-1}|_{[x]^\perp}$ positiva - definida, $g_{-1}|_{W^\perp}$ também o é. Então, como $W = (W^\perp)^\perp$, segue que $g_{-1}|_W$ é não - degenerada de índice 1, pela Proposição 2.1.8.

2.2 Isometrias de $\mathbb{L}^3$

Denotemos por $O_1(3)$ o conjunto dos operadores lineares $O : \mathbb{L}^3 \to \mathbb{L}^3$ tais que $g_{-1}(O(u),O(v)) = g_{-1}(u,v)$, $\forall u,v \in \mathbb{L}^3$.

Definição 2.2.1 *Um elemento O de $O_1(3)$ será chamado de transformação ortogonal de $\mathbb{L}^3$.*

Observação: O conjunto $O_1(3)$ é um grupo relativamente à composição dos operadores. Por outro lado, identificando os elementos de $O_1(3)$ com matrizes (a_{ij}) $i,j = 1,2,3$ relativamente a uma base ortonormal fixada $\{e_i\}$ $i = 1,2,3$, onde $a_{ij} = g_{-1}(O(e_i), O(e_j))$, podemos concluir que $O_1(3)$ é um grupo relativamente a multiplicação de matrizes e admite uma estrutura de variedade diferenciável de modo que $O_1(3)$ é um grupo de Lie de dimensão 3.

Definição 2.2.2 *As isometrias de $\mathbb{L}^3$ são aplicações $F : \mathbb{L}^3 \to \mathbb{L}^3$ tais que para cada $p \in \mathbb{L}^3$,*

$$g_{-1}(dF_p(v), dF_p(w)) = g_{-1}(v,w), \forall v,w \in T_p\mathbb{L}^3, \text{ ou seja, } dF_p \in O_1(3).$$

Assim, as isometrias de $\mathbb{L}^3$ são precisamente, as aplicações da forma $F : \mathbb{L}^3 \to \mathbb{L}^3$ dadas por $F(p) = O(p) + q$, onde $O \in O_1(3)$ e $q \in \mathbb{L}^3$.

Definição 2.2.3 *Se ℓ é uma reta de $\mathbb{L}^3$, dizemos que ℓ é de tipo espaço se a restrição $g_{-1}|_\ell$ é positiva - definida, ou seja $g_{-1}|_\ell$ é uma métrica Riemaniana; ℓ é de tipo tempo se $g_{-1}|_\ell$ é não degenerada de índice 1 (métrica Lorentziana) e ℓ é de tipo luz se $g_{-1}|_\ell$ é degenerada.*

Denotemos por $O(\ell)$ o conjunto das transformações ortogonais de $\mathbb{L}^3$ com determinante positivo, que deixam ℓ fixa ponto a ponto. Assim, a matriz de O é dada, em cada caso, pela seguinte proposição:

Proposição 2.2.4 *Seja O uma transformação ortogonal de $O(\ell)$. A matriz de O em relação à uma base ortonormal é dada por:*

(i) $O_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}$, *se ℓ é de tipo espaço;*

(ii) $O_T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, se ℓ é de *tipo tempo*;

(iii) $O_L = \begin{bmatrix} 1 & -t & t \\ t & 1-\frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2} \\ t & -\frac{t^2}{2} & 1+\frac{t^2}{2} \end{bmatrix}$, se ℓ é de *tipo luz.*

Demonstração:

(i) No caso em que ℓ é de *tipo espaço*, pela Proposição 2.1.8, $g_{-1}|_{[\ell]^\perp}$ é não - degenerada de índice 1 e pela Proposição 2.1.9, existe $w \neq 0 \in [\ell]^\perp$ tal que, $g_{-1}|_\ell^\perp(w,w) < 0$. Além disso, existe uma base ortonormal $B_S = \{f_1, f_2, f_3\}$ de L^3 com f_1 fixo na direção de ℓ e $f_3 = \dfrac{w}{||w||}$. Agora, $O_S \in \mathbb{L}^3$ é tal que:

$$g_{-1}(O_S(f_i), O_S(f_j)) = g_{-1}(f_i, f_j) = \begin{cases} 1, & se\ i = j = 1,2; \\ -1 & ,se\ i = j = 3; \\ 0 & ,se\ i \neq j. \end{cases}$$

Tomando - se

$$O_S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

e escrevendo O_S na base B_S temos:

$$\begin{cases} O_S(f_1) & = f_1; \\ O_S(f_2) & = a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + a_{32}f_3; \\ O_S(f_3) & = a_{13}f_1 + a_{23}f_2 + a_{33}f_3. \end{cases}$$

(a) $g_{-1}\big(O_S(f_1), O_S(f_3)\big) = g_{-1}(f_1, a_{13}f_1 + a_{23}f_2 + a_{33}f_3) = a_{13}g_{-1}(f_1, f_1) + a_{23}g_{-1}(f_1, f_2) + a_{33}g_{-1}(f_1, f_3) = a_{13}$. Como $g_{-1}\big(O_S(f_1), O_S(f_3)\big) = 0$ segue que $a_{13} = 0$

(b) $g_{-1}\big(O_S(f_1), O_S(f_2)\big) = g_{-1}(f_1, a_{12}f_1 + a_{22}f_2 + a_{32}f_3) = a_{12}g_{-1}(f_1, f_1) + a_{22}g_{-1}(f_1, f_2) + a_{32}g_{-1}(f_1, f_3) = a_{12}$. Como $g_{-1}\big(O_S(f_1), O_S(f_2)\big) = 0$ segue que $a_{12} = 0$

(c) $g_{-1}\big(O_S(f_1), O_S(f_1)\big) = g_{-1}(f_1, f_1) = 1$

(d) $g_{-1}\big(O_S(f_2), O_S(f_2)\big) = g_{-1}(a_{22}f_2 + a_{32}f_3, a_{22}f_2 + a_{32}f_3) = a_{22}^2 g_{-1}(f_2, f_2) + a_{22}a_{32}g_{-1}(f_2, f_3) + a_{32}a_{22}g_{-1}(f_3, f_2) + a_{32}^2 g_{-1}(f_3, f_3) = a_{22}^2 - a_{32}^2 = 1$

(e) $g_{-1}\big(O_S(f_3), O_S(f_3)\big) = g_{-1}(a_{23}f_2 + a_{33}f_3, a_{23}f_2 + a_{33}f_3) = a_{23}^2 g_{-1}(f_2, f_2) + 2a_{22}a_{33}g_{-1}(f_2, f_3) + a_{33}^2 g_{-1}(f_3, f_3) = a_{23}^2 - a_{33}^2 = -1$

(f) $g_{-1}\big(O_S(f_2), O_S(f_3)\big) = g_{-1}(a_{22}f_2 + a_{32}f_3, a_{23}f_2 + a_{33}f_3) = a_{22}a_{23}g_{-1}(f_2, f_2) + a_{22}a_{33}g_{-1}(f_2, f_3) + a_{23}a_{32}g_{-1}(f_3, f_2) + a_{32}a_{33}g_{-1}(f_3, f_3) = a_{22}a_{23} - a_{32}a_{33} = 0$

Das condições (d), (e) e (f) temos:

$$\begin{cases} a_{22}^2 - a_{32}^2 = 1; \\ a_{23}^2 - a_{33}^2 = -1; \\ a_{22}a_{23} - a_{32}a_{33} = 0. \end{cases}$$

Portanto, existe um número real t tal que $a_{22} = a_{33} = cosh\ t$ e $a_{23} = a_{32} = senh\ t$. Logo a matriz O_S é da forma:

$$O_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}.$$

(ii) No caso em que ℓ é de *tipo tempo*, o vetor diretor v de ℓ é tal que $g_{-1}(v, v) < 0$ e, pela proposição 2.1.7, $g_{-1}|_{[v]^\perp}$ é positiva - definida. Além disto, existe uma base ortonormal $B_T = \{h_1, h_2, h_3\}$ de $\mathbb{L}^3$ tal que $h_3 = \dfrac{v}{||v||}$ e h_3 está fixado na direção de ℓ.

Suponhamos que $O_T \in \mathbb{L}^3$, nas mesmas condições de (i), seja da forma:

$$O_T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}.$$

Escrevendo O_T na base B_T temos:

$$\begin{cases} O_T(h_1) &= b_{11}h_1 + b_{21}h_2 + b_{31}h_3; \\ O_T(h_2) &= b_{12}h_1 + b_{22}h_2 + b_{32}h_3; \\ O_T(h_3) &= h_3. \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
(a)\quad & g_{-1}\left(O_T(h_1), O_T(h_3)\right) = g_{-1}(b_{11}h_1 + b_{21}h_2 + b_{31}h_3, h_3) = \\
& = b_{11}g_{-1}(h_1, h_3) + b_{21}bg_{-1}(h_2, h_3) + b_{31}g_{-1}(h_3, h_3) = -b_{31} = 0, \\
(b)\quad & g_{-1}\left(O_T(h_2), O_T(h_3)\right) = g_{-1}(b_{12}h_1 + b_{22}h_2 + b_{32}h_3, h_3) = \\
& = b_{12}g_{-1}(h_1, h_3) + b_{22}g_{-1}(h_2, h_3) + b_{32}g_{-1}(h_3, h_3) = -b_{32} = 0, \\
(c)\quad & g_{-1}\left(O_T(h_1), O_T(h_1)\right) = g_{-1}(b_{11}h_1 + b_{21}h_2, b_{11}h_1 + b_{21}h_2) = \\
& = b_{11}^2 g_{-1}(h_1, h_1) + b_{11}b_{21}g_{-1}(h_1, h_2) + b_{21}b_{11}g_{-1}(h_2, h_1) + b_{21}^2 g_{-1}(h_2, h_2) = \\
& = b_{11}^2 + b_{21}^2 = 1, \\
(d)\quad & g_{-1}\left(O_T(h_2), O_T(h_2)\right) = g_{-1}(b_{12}h_1 + b_{22}h_2, b_{12}h_1 + b_{22}h_2) = \\
& = b_{12}^2 g_{-1}(h_1, h_1) + b_{12}b_{22}g_{-1}(h_1, h_2) + b_{22}b_{12}g_{-1}(h_2, h_1) + b_{22}^2 g_{-1}(h_2, h_2) = \\
& = b_{12}^2 + b_{22}^2 = 1, \\
(e)\quad & g_{-1}\left(O_T(h_1), O_T(h_2)\right) = g_{-1}(b_{11}h_1 + b_{21}h_2, b_{12}h_1 + b_{22}h_2) = \\
& = b_{11}b_{12}g_{-1}(h_1, h_1) + b_{11}b_{22}g_{-1}(h_1, h_2) + b_{21}b_{21}g_{-1}(h_2, h_1) + b_{12}b_{22}g_{-1}(h_2, h_2) = \\
& = b_{11}b_{21} + b_{12}b_{22} = 0.
\end{aligned}
$$

Das condições (c), (d) e (e) temos:

$$
\begin{cases}
b_{11}^2 + b_{21}^2 & = 1; \\
b_{12}^2 + b_{22}^2 & = 1; \\
b_{11}b_{12} + b_{12}b_{22} & = 0.
\end{cases}
$$

Portanto, existe um número real $0 \leq \theta < 2\pi$, tal que $b_{11} = b_{22} = \cos\theta$, $b_{21} = -b_{12} = \sin\theta$. Logo, a matriz O_T é da forma:

$$
O_T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
$$

(iii) No caso em que ℓ é de *tipo luz*, tomemos uma base ortonormal $B_L = \{e_1, e_2, e_3\}$ que fixa o vetor $e_2 + e_3$ na direção de ℓ, sendo e_1, e_2 vetores de *tipo espaço* e e_3 um vetor de *tipo tempo*.

Suponhamos que $O_L \in \mathbb{L}^3$, nas mesmas condições de (i), seja da forma:

$$
O_L = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}.
$$

Escrevendo O_L na base B_L temos:

$$\begin{cases} O_L(e_1) &= c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + c_{31}e_3; \\ O_L(e_2) &= c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + c_{32}e_3; \\ O_L(e_3) &= c_{13}e_1 + c_{23}e_2 + c_{33}e_3. \end{cases}$$

Então temos:

(a) $g_{-1}\big(O_L(e_1), O_L(e_1)\big) = g_{-1}\big(c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + c_{31}e_3, c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + c_{31}e_3\big) =$

$= c_{11}^2 g_{-1}(e_1, e_1) + c_{21}^2 g_{-1}(e_2, e_2) + c_{31}^2 g_1(e_3, e_3) = c_{11}^2 + c_{21}^2 - c_{31}^2 = 1,$

(b) $g_{-1}\big(O_L(e_1), O_L(e_2)\big) = g_{-1}\big(c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + c_{31}e_3, c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + c_{32}e_3\big) =$

$= c_{11}c_{12}g_{-1}(e_1, e_1) + c_{21}c_{22}g_{-1}(e_2, e_2) + c_{31}c_{32}g_{-1}(e_3, e_3) = c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} - c_{31}c_{32} = 0,$

(c) $g_{-1}\big(O_L(e_1), O_L(e_3)\big) = g_{-1}\big(c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + c_{31}e_3, c_{13}e_1 + c_{23}e_2 + c_{33}e_3\big) =$

$= c_{11}c_{13}g_{-1}(e_1, e_1) + c_{21}c_{23}g_{-1}(e_2, e_2) + c_{31}c_{33}g_{-1}(e_3, e_3) = c_{11}c_{13} + c_{21}c_{23} - c_{31}c_{33} = 0,$

(d) $g_{-1}\big(O_L(e_2), O_L(e_3)\big) = g_{-1}\big(c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + c_{32}e_3, c_{13}e_1 + c_{23}e_2 + c_{33}e_3\big) =$

$= c_{12}c_{13}g_{-1}(e_1, e_1) + c_{22}c_{23}g_{-1}(e_2, e_2) + c_{32}c_{33}g_{-1}(e_3, e_3) = c_{12}c_{13} + c_{22}c_{23} - c_{32}c_{33} = 0,$

(e) $g_{-1}\big(O_L(e_2), O_L(e_2)\big) = g_{-1}\big(c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + c_{32}e_3, c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + c_{32}e_3\big) =$

$= c_{12}^2 g_{-1}(e_1, e_1) + c_{22}^2 g_{-1}(e_2, e_2) + c_{32}^2 g_1(e_3, e_3) = c_{12}^2 + c_{22}^2 - c_{32}^2 = 1,$

(f) Como O_L fixa o vetor $e_2 + e_3$, temos:

$$O_L(0,1,1) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} c_{12} + c_{13} &= 0 \\ c_{22} + c_{23} &= 1 \\ c_{32} + c_{33} &= 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

Usando-se (2.1) em (d) e (e), respectivamente, temos:

$$-c_{12}^2 + c_{22}(1 - c_{22}) - (1 - c_{33})c_{33} = 0 \implies -c_{12}^2 - c_{22}^2 + c_{33}^2 + c_{22} - c_{33} = 0 \tag{2.2}$$

$$c_{12}^2 + c_{22}^2 - (1 - c_{33})^2 = 1 \implies c_{12}^2 + c_{22}^2 - c_{33}^2 + 2c_{33} = 2 \tag{2.3}$$

De (2.2) e (2.3) segue que

$$c_{22} + c_{33} = 2 \tag{2.4}$$

Usando-se a $3^{\underline{a}}$ equação de (2.1) em (b) temos $c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} - c_{31}(1 - c_{33}) = 0 \implies$

$$c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} + c_{31}c_{33} - c_{31} = 0 \tag{2.5}$$

Usando-se a $1^{\underline{a}}$ e $2^{\underline{a}}$ de (2.1) em (d) temos: $-c_{11}c_{12} - c_{21}(1 - c_{22}) - c_{31}c_{33} = 0 \implies$

$$-c_{11}c_{12} - c_{21}c_{22} - c_{31}c_{33} + c_{21} = 0 \tag{2.6}$$

De (2.5) e (2.6) segue que

$$c_{21} = c_{31} \tag{2.7}$$

Somando-se a $2^{\underline{a}}$ e $3^{\underline{a}}$ equação de (2.1), temos:

$$c_{22} + c_{23} + c_{32} + c_{33} = 2 \tag{2.8}$$

Usando-se (2.4) em (2.8) segue que

$$c_{23} = -c_{32} \tag{2.9}$$

Por (e) temos que $c_{12}^2 + c_{22}^2 - c_{32}^2 = 1 \implies c_{12}^2 = 1 - c_{22}^2 + c_{32}^2$.

Da $2^{\underline{a}}$ equação de (2.1) segue que $c_{22} = 1 + c_{32}$, logo $c_{12}^2 = 1 - (1 + c_{32})^2 + c_{32}^2 \implies$

$\implies c_{12}^2 = -2c_{32} \implies c_{32} = -\dfrac{c_{12}^2}{2}$.

Usando-se a $1^{\underline{a}}$ equação de (2.1) temos que $c_{12} = -c_{13}$, então $c_{32} = -\dfrac{c_{13}^2}{2}$.

Portanto existe um número real t tal que: $c_{13} = t$ e $c_{32} = -\frac{t^2}{2}$. Então, $c_{12} = -t$,

$c_{23} = \frac{t^2}{2}$, $c_{22} = 1 - \frac{t^2}{2}$, $c_{33} = 1 + \frac{t^2}{2}$, $c_{11} = 1$ e $c_{31} = t$. Logo,

$$O_L = \begin{bmatrix} 1 & -t & t \\ t & 1 - \frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2} \\ t & -\frac{t^2}{2} & 1 + \frac{t^2}{2} \end{bmatrix}.$$

∎

A Definição seguinte pode ser encontrada em [5]

Definição 2.2.5 *Um círculo em $\mathbb{L}^3$ é a órbita descrita por um ponto p fora de uma reta ℓ sob a ação do grupo de rotação em $\mathbb{L}^3$ que deixa ℓ, ponto a ponto, fixada.*

Assim, um círculo Lorentziano está contido num plano ortogonal a ℓ. Dependendo do caráter causal de ℓ, descreveremos os círculos de $\mathbb{L}^3$ como segue:

(1) No caso em que ℓ é de *tipo espaço*, tomemos o grupo de rotação O_S em relação a uma base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$, com e_1 na direção da reta ℓ. Neste caso, os círculos Lorentzianos são dados por:

$$\alpha(s) = r(e_2 \sinh s + e_3 \cosh s) + c, \quad r > 0, \text{ e } c \in \ell.$$

Do ponto de vista Euclidiano, estes círculos são hipérboles em planos paralelos ao plano yz.

De fato: Sejam $P = (x_o, y_o, z_o)$ um ponto de $\mathbb{L}^3$ e O_S o grupo de rotação obtido pela proposição 2.2.4 (i). A órbita α descrita por P sob a ação desse grupo é dada por:

$$\alpha(t) = (x_o, y_o \cosh t + z_o \sinh t, y_o \sinh t + z_o \cosh t).$$

Tomando - se $x = x_o$, $y = y_o cosh\ t + z_o senh\ t$, $z = y_o senh\ t + z_o cosh\ t$, temos:

$$\begin{aligned} y^2 - z^2 &= (y_o \cosh t + z_o \sinh t)^2 - (y_o \sinh t + z_o \cosh t)^2 = \\ &= y_o^2 \cosh^2 t + 2y_o z_o \sinh t \ \cosh t + z_o^2 \sinh^2 t - y_o^2 \sinh^2 t - 2y_o z_o \sinh t \ \cosh t \\ &- z_o^2 \cosh^2 t = (y_o^2 - z_o^2) \cosh^2 t - (y_o^2 - z_o^2) \sinh^2 t (y_o^2 - z_o^2)(\cosh^2 t - \sinh^2 t) \\ &= (y_o^2 - z_o^2). \end{aligned}$$

Logo, $\alpha(t)$ menos a translação $c = (x_o, 0, 0)$ é da forma $y^2 - z^2 = (y_o^2 - z_o^2)$, que é uma hipérbole Euclidiana no plano yz.

(2) No caso em que ℓ é de *tipo tempo*, tomemos o grupo de rotação O_T em relação a uma base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$, com e_3 na direção da reta ℓ. Neste caso, os círculos Lorentzianos são dados por:

$$\beta(s) = r(e_1 \cos s + e_2 \sin s) + c, \quad \text{com } r > 0 \text{ e } c \in \ell.$$

Do ponto de vista Euclidiano, estes círculos Lorentzianos, são realmente círculos Euclidianos em planos paralelos ao plano xy.

De fato: Sejam $P = (x_o, y_o, z_o)$ um ponto de $\mathbb{L}^3$ e O_T o grupo de rotação obtido pela proposição 2.2.4 (ii). A órbita descrita por p sob a ação desse grupo é dada por:

$$\beta(\theta) = (x_o \cos\theta - y_o \sin\theta, x_o \sin\theta + y_o \cos\theta, z_o)$$

Tomando - se $x = x_o \cos\theta - y_o \sin\theta$, $y = x_o \sin\theta + y_o \cos\theta$ e $z = z_o$ temos:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x_o \cos\theta - y_o \sin\theta)^2 + (x_o \sin\theta + y_o \cos\theta)^2 \\ &= x_o^2 \cos^2\theta - 2x_o y_o \sin\theta \ \cos\theta + y_o^2 sen^2\theta + x_o^2 \sin^2\theta + 2x_o y_o \sin\theta \ \cos\theta + y_o^2 \cos^2\theta \\ &= x_o^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + y_o^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = x_o^2 + y_o^2. \end{aligned}$$

Logo, $\beta(\theta)$ menos a translação $(0, 0, z_o)$ é da forma $x^2 + y^2 = x_o^2 + y_o^2 = r^2$, que é um círculo no plano xy.

(3) No caso em que ℓ é *tipo luz*, consideremos ℓ na direção do vetor $e_2 + e_3$, onde $\{e_1, e_2, e_3\}$ é base ortonormal de $\mathbb{L}^3$ e e_3 é um vetor de *tipo tempo*. Os círculos Lorentzianos, neste caso, são dados por:

$$\gamma(s) = c + s\ e_1 + \frac{1}{2} r s^2 (e_2 + e_3), \quad \text{com } r > 0.$$

Do ponto de vista Euclidiano, estes círculos Lorentzianos, são parábolas Euclidianas em planos paralelos ao plano $y = z$.

De fato: Sejam $P = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto de $\mathbb{L}^3$ e O_L o grupo de rotação obtido pela proposição 2.2.4 (iii). A órbita descrita por P sob a ação desse grupo é dada por:

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= (x_o - y_o t + z_o t,\ x_o t + (1 - \tfrac{t^2}{2}) y_0 + \tfrac{t^2}{2} z_o,\ x_o t - \tfrac{t^2}{2} y_0 + (1 + \tfrac{t^2}{2}) z_0) \\ &= (x_0, y_0, z_0) + ((z_o - y_o)t,\ x_o t + (z_o - y_o)\tfrac{t^2}{2},\ x_o t + (z_o - y_o)\tfrac{t^2}{2}) \end{aligned}$$

Logo, $\gamma(t)$ menos a translação $c = (x_0, y_0, z_0)$, pode ser escrita na forma: $y = z = \dfrac{x^2}{2(z_o - y_o)} + \dfrac{x_0}{(z_o - y_o)}x$, onde isolamos t na igualdade $x = (z_o - y_o)t$ e substituimos em $y = z$. Assim, $\gamma(t)$ é uma parábola no plano $y = z$.

Como as órbitas descritas pelos grupos O_S, O_T e O_L são hipérboles, elipses e parábolas Euclidianas, respectivamente, tais grupos são chamados, respectivamente de: *Grupo Hiperbólico*, *Grupo Eliptico* e *Grupo Parabólico.*

Capítulo 3

Superfícies de Revolução de Tipo Espaço em $\mathbb{L}^3$

Neste capítulo, estudaremos as superfícies de revoluçao de tipo espaço em $\mathbb{L}^3$. Mostraremos que dependendo do caráter causal do eixo de revolução, tais superfícies, são obtidas pela ação dos Grupos Hiperbólico, Elíptico ou Parabólico na curva geratriz. Obteremos, para cada caso, a parametrização da superfície e apresentaremos alguns resultados básicos para o estudo da completude destas superfícies.

3.1 Superfícies de Revoluçao em $\mathbb{L}^3$

Definição 3.1.1 *As superfícies em $\mathbb{L}^3$, invariantes pela ação do grupo a um parâmetro de isometrias, que deixam uma reta fixa, são denominadas superfícies de revolução.*

Definição 3.1.2 *Uma superfície de revolução S , em $\mathbb{L}^3$, é de tipo espaço, se a métrica induzida em S é a métrica Riemanniana. Isto equivale a dizer que para $p \in S$, todo $v \in T_pS$ é de tipo espaço, ou ainda, que o vetor normal unitário é de tipo tempo, em todo ponto de S.*

O teorema seguinte nos permite definir para cada ponto de uma superfície de tipo espaço, um campo de vetores normal e unitário.

Teorema 3.1.3 *Toda superfície de tipo espaço em* $\mathbb{L}^3$ *é orientável.*

Demonstração:

Seja $X : M \longrightarrow \mathbb{L}^3$ uma superfície de tipo espaço. Então para todo $p \in M, T_pM$ é um plano de tipo espaço em $\mathbb{L}^3$ e $(T_pM)^\perp$ é uma reta de tipo tempo. Esta condição nos permite escolher para cada ponto $p \in M$ um único vetor $N(p) \in (T_pM)^\perp$, que é unitário e aponta para o futuro. Portanto obteremos uma aplicação $N : M \longrightarrow H^2_+$. Além disto, para qualquer sistema de coordenadas (u, v), temos $N = \pm\dfrac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}$, que é diferenciável em todos os seus pontos.

Logo N é um campo de vetores normal e unitário globalmente definido sobre M. Portanto M é orientável. ∎

O campo de vetores $N : M \longrightarrow H^2_+$ que acabamos de construir acima, é denominado **aplicação normal de Gauss** da superfície M e a imagem $N(M)$ é a **imagem hiperbólica** de M.

O caráter causal dos eixos de revolução é dado pelo caráter causal de seus vetores diretores (ver Definição 2.1.3). Na Figura 3.1, estamos supondo que u é de *tipo espaço* , v é *de tipo tempo* e w é *de tipo luz*, ou seja, os eixos y, z e $y = z$ são respectivamente, de *tipo espaço,tempo e luz.*

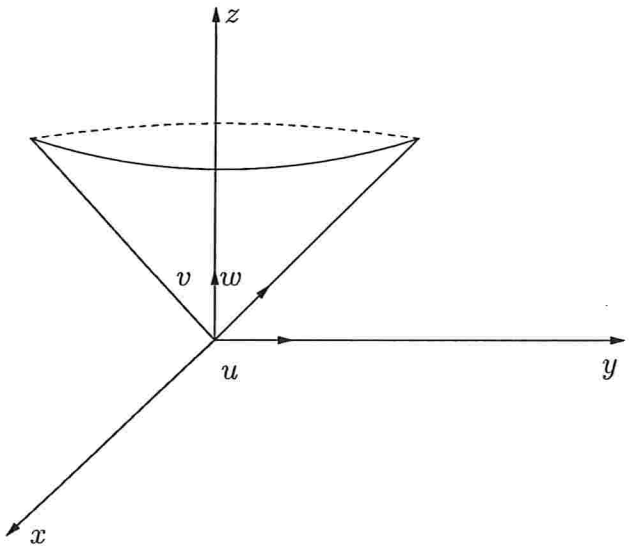


Figura 3.1: Cone de luz

Considerando o caráter causal dos eixos de revolução, obteremos a parametrização da superfície em cada caso:

1º **caso**: No caso em que o eixo de revolução é de *tipo espaço*, seja $\Omega(\theta) = \big(x(\theta), 0, z(\theta)\big)$, uma curva regular, $a < \theta < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. A superfície de revolução S, com eixo x, de *tipo espaço*, gerada pela curva Ω sob a ação do grupo hiperbólico, é parametrizada como segue:

$$X(\theta, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(\theta) \\ 0 \\ z(\theta) \end{pmatrix}.$$

Então,

$$X(\theta, t) = \big(x(\theta), z(\theta)\sinh t, z(\theta)\cosh t\big), \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Tomando-se a superfície S com a parametrização (3.1), substituindo θ pelo parâmetro comprimento de arco s de Ω e admitindo-se que $z < 0$, faremos o cálculo de suas curvaturas principais. Observamos que, para superfícies no espaço de Lorentz-Minkowski os coeficientes da primeira forma fundamental são calculados de modo análogo ao caso Euclidiano e que os coeficientes da segunda forma fundamental são dados por $e = -g_{-1}(X_{ss}, N)$, $f = -g_{-1}(X_{st}, N)$ e $-g_{-1}(X_{tt}, N)$.

Calculando-se, obtemos:
$X_s = \big(\dot{x}, \dot{z}\ \sinh t, \dot{z}\ \cosh t\big)$ e $X_t = \big(0, z\ \cosh t, z\ \sinh t\big)$.

Logo $E = g_{-1}(X_s, X_s) = \dot{x}^2 + \dot{z}^2\ \sinh^2\ t - \dot{z}^2\ \cosh^2 t = \dot{x}^2 - \dot{z}^2 = 1$, $F = g_{-1}(X_s, X_t) = z\ \dot{z}\ \sinh t\ \cosh t - z\ \dot{z}\ \sinh t\ \cosh t = 0$ e $G = g_{-1}(X_t, X_t) = z^2 \cosh^2\ t - z^2 \sinh^2\ t = z^2$. Além disso,
$X_{ss} = \big(\ddot{x}, \ddot{z}\ \sinh t, \ddot{z}\ \cosh t\big)$, $X_{st} = \big(0, \dot{z}\ \cosh t, \dot{z}\ \sinh t\big)$ e $X_{tt} = \big(0, z\ \sinh t, z\ \cosh t\big)$.

Computando-se o produto vetorial Lorentziano, conforme Definição 2.1.4, obtemos:

$$X_s \wedge X_t = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dot{x} & \dot{z}\ \sinh t & \dot{z}\ \cosh t \\ 0 & z\ \cosh t & z\ \sinh t \end{vmatrix} = (-z\dot{z}, -\dot{x}z\ \sinh t, -\dot{x}z\ \cosh t).$$

Logo

$$\begin{aligned} ||X_s \wedge X_t|| &= \sqrt{\left|z^2\dot{z}^2 + \dot{x}^2 z^2 \sinh^2\ t - \dot{x}^2 z^2 \cosh^2\ t\right|} = \sqrt{\left|z^2\dot{z}^2 - \dot{x}^2 z^2\right|} = \\ &= \sqrt{|z^2(\dot{z}^2 - \dot{x}^2)|} = -z. \end{aligned}$$

Escolhendo-se N apontando para o passado, segue que
$N = -\dfrac{X_s \wedge X_t}{||X_s \wedge X_t||} = (-\dot{z}, -\dot{x}\sinh t, -\dot{x}\cosh t)$.

Agora, computando-se os coeficientes da segunda forma fundamental, temos:
$e = -g_{-1}(X_{ss}, N) = \ddot{x}z + \dot{x}\ddot{z}\sinh^2 t - \dot{x}\ddot{z}\cosh^2 t = \ddot{x}\dot{z} - \dot{x}\ddot{z}$.

Como $\dot{x}^2 - \dot{z}^2 = 1$, por derivação obtemos $2\dot{x}\ddot{x} - 2\dot{z}\ddot{z} = 0$, ou seja, $\ddot{z} = \dfrac{\dot{x}\ddot{x}}{\dot{z}}$.

Assim,
$e = -g_{-1}(X_{ss}, N) = \ddot{x}\dot{z} - \dfrac{\dot{x}^2\ddot{x}}{\dot{z}} = \dfrac{\ddot{x}\dot{z}^2 - \dot{x}^2\ddot{x}}{\dot{z}} = \dfrac{\ddot{x}}{\dot{z}}(\dot{z}^2 - \dot{x}^2) = -\dfrac{\ddot{x}}{\dot{z}}$;
$f = -g_{-1}(X_{st}, N) = 0 + \dot{x}\dot{z}\sinh t\ \cosh t - \dot{x}\dot{z}\sinh t\ \cosh t = 0$;
$g = g_{-1}(X_{tt}, N) = 0 + \dot{x}z\sinh^2 t - \dot{x}z\cosh^2 t = -\dot{x}z$.

Como as curvaturas principais são dadas por $k_1 = \dfrac{e}{E}$ e $k_2 = \dfrac{g}{G}$, segue que
$k_1 = -\dfrac{\ddot{x}/\dot{z}}{1} = -\dfrac{\ddot{x}}{\dot{z}}$ e $k_2 = -\dfrac{\dot{x}z}{z^2} = -\dfrac{\dot{x}}{z}$.

2º **caso**: No caso em que o eixo de revolução é de *tipo tempo*, consideremos $\Omega(\theta) = (x(\theta), 0, z(\theta))$, uma curva regular, $a < \theta < b$, $a, b \in \mathbb{R}$. A superfície de revolução com eixo z, de *tipo tempo*, gerada pela curva Ω, sob ação do grupo elíptico, é parametrizada por:

$$X(\theta, t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(\theta) \\ 0 \\ z(\theta) \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$X(\theta, t) = (x(\theta)\cos t, x(\theta)\sin t, z(\theta)), \quad 0 < t < 2\pi. \tag{3.2}$$

Tomando-se a superfície S com a parametrização (3.2), substituindo θ pelo parâmetro comprimento de arco s de Ω e admitindo que $x > 0$, faremos os cálculos de suas curvaturas principais. Temos:
$X_s = (\dot{x}\ \cos t, \dot{x}\ \sin t, \dot{z})$ e $X_t = (-x\ \sin t, x\ \cos t, 0)$. Logo $E = g_1(X_s, X_s) = \dot{x}^2\ \cos^2 t + \dot{x}^2\ \sin^2 t - \dot{z}^2 = \dot{x}^2 - \dot{z}^2 = 1$, $F = g_1(X_s, X_t) = -x\dot{x}\cos t\sin t + x\dot{x}\sin t\cos t = 0$ e $G = g_1(X_t, X_t) = x^2\ \sin^2 t + x^2\ \cos^2 t = x^2$. Além disso,
$X_{ss} = (\ddot{x}\ \cos t, \ddot{x}\ \sin t, \ddot{z})$, $X_{st} = (-\dot{x}\ \sin t, \dot{x}\ \cos t, 0)$ e $X_{tt} = (-x\ \cos t, -x\ \sin t, 0)$.

Computando-se o produto vetorial Lorentziano, conforme Definição 2.1.4, obtemos:

$$X_s \wedge X_t = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \dot{x}\ \cos t & \dot{x}\ \sin t & \dot{z} \\ -x\ \sin t & x\ \cos t & 0 \end{vmatrix} = (-x\dot{z}\ \cos t, -x\dot{z}\ \sin t, -x\dot{x}).$$

Logo

$$||X_s \wedge X_t|| = \sqrt{|x^2\dot{z}^2 \cos t + x^2\dot{z}^2 \sin^2 t - x^2\dot{x}^2|} = \sqrt{|x^2\dot{z}^2 - x^2\dot{x}^2|} = \sqrt{|x^2(\dot{z}^2 - \dot{x}^2)|} = x$$

e, escolhendo-se N apontando para o passado, segue que
$N = \dfrac{X_s \wedge X_t}{||X_s \wedge X_t||} = (-\dot{z}\ \cos t, -\dot{z}\sin t, -\dot{x}).$

Assim, $e = -g_{-1}(X_{ss}, N) = \ddot{x}\dot{z}\ \cos^2 t + \ddot{x}\dot{z}\ \sin^2 t - \dot{x}\ddot{z} = \ddot{x}\dot{z} - \dot{x}\ddot{z}.$

Como $\dot{x}^2 - \dot{z}^2 = 1$, derivando-se novamente em relação à s, obtemos $2\dot{x}\ddot{x} - 2\dot{z}\ddot{z} = 0$, ou seja, $\ddot{x} = \dfrac{\dot{z}\ddot{z}}{\dot{x}}$.

Assim,

$$e = -g_{-1}(X_{ss}, N) = \ddot{x}\dot{z} - \dot{x}\ddot{z} = \frac{\dot{z}^2\ddot{z}}{\dot{x}} - \dot{x}\ddot{z} = \frac{\dot{z}^2\ddot{z} - \dot{x}^2\ddot{z}}{\dot{x}} = \frac{\ddot{z}(\dot{z}^2 - \dot{x}^2)}{\dot{x}} = -\frac{\ddot{z}}{\dot{x}};$$
$$f = -g_{-1}(X_{st}, N) = -\dot{x}\dot{z}\ \sin t \cos t + \dot{x}\dot{z} \sin t \cos t = 0;$$
$$g = -g_{-1}(X_{tt}, N) = -x\dot{z}\cos^2 t - x\dot{z}\sin^2 t = -x\dot{z}.$$

Logo as curvaturas principais são $k_1 = -\dfrac{\ddot{z}}{\dot{x}}$ e $k_2 = -\dfrac{\dot{z}}{x}$.

3º **caso**: No caso em que o eixo é de *tipo luz*, consideremos $\Omega(\theta) = (0, y(s), z(s))$ uma curva regular parametrizada pelo parâmetro comprimento de arco. A superfície de revolução com eixo $y = z$, de *tipo luz*, gerada pela curva Ω sob a ação do grupo parabólico é parametrizada por:

$$X(s,t) = \begin{pmatrix} 1 & -t & t \\ t & 1 - \frac{t^2}{2} & \frac{t^2}{2} \\ t & -\frac{t^2}{2} & 1 + \frac{t^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$X(s,t) = \big(-ty(s) + tz(s),\ (1 - \frac{t^2}{2})y(s) + \frac{t^2}{2}z(s),\ -\frac{t^2}{2}y(s) + (1 + \frac{t^2}{2})z(s)\big).$$

Logo,

$$X(s,t) = \big(-t(y(s) - z(s)),\ y(s) - (y(s) - z(s))\frac{t^2}{2},\ z(s) - (y(s) - z(s))\frac{t^2}{2}\big),\quad t \in \mathbb{R} \quad (3.3)$$

Tomando-se a parametrização (3.3), considerando-se que a curva Ω é de *tipo espaço*, ou seja, $\dot{y}^2(s) - \dot{z}^2(s) = 1$, temos que o vetor tangente unitário $\big(\dot{y}(s)\ ,\ \dot{z}(s)\big)$ de Ω pode ser escrito como $\pm\big(\cosh(\phi)\ ,\ \sinh(\phi)\big)$ e, neste caso, o vetor unitário normal à Ω pode ser dado por $\pm\big(\sinh(\phi)\ ,\ \cosh(\phi)\big)$.

Sabemos que uma das curvaturas principais de uma superfície de revolução é a curvatura da curva geratriz e a outra é a curvatura da órbita, ou seja, é a curvatura do círculo Lorentziano. Como $\big(\ddot{y}\ ,\ \ddot{z}\big) = \pm\big(\sinh(\phi)\ ,\ \cosh(\phi)\big)\dot{\phi}$ e $g_{-1}\big(\ddot{y}\ ,\ \ddot{z}\big)\ ,\ \big(\dot{y}\ ,\ \dot{z}\big)\big) =$ $= g_{-1}\big(\dot{\phi}\ \sinh(\phi), \dot{\phi}\ \cosh(\phi)\big)\ ,\ \big(\cosh(\phi), \sinh(\phi)\big) = \dot{\phi}\ \sinh(\phi)\cosh(\phi) - \dot{\phi}\ \sinh(\phi)\cosh(\phi) =$ 0, segue que $\big(\ddot{y}(s), \ddot{z}(s)\big) \perp \big(\dot{y}(s), \dot{z}(s)\big)$. Deste modo, a curvatura k_Ω da curva geratriz Ω é tal que $\big(\ddot{y}, \ddot{z}\big) = k_\Omega\big(\dot{z}, \dot{y}\big)$, ou seja, $k_\Omega = \dfrac{\ddot{y}}{\dot{z}} = \dot{\phi}$.

Como a reta $(y, z) + r(\dot{z}, \dot{y}) = (y + r\dot{z}, z + r\dot{y})$ intercepta o eixo de revolução $y = z$, segue que $y + r\dot{z} = z + r\dot{y}$. Então $y - z = r(\dot{y} - \dot{z})$ e $r = \dfrac{y - z}{\dot{y} - \dot{z}}$. Logo a curvatura da órbita é $-\dfrac{1}{r}$ e portanto as curvaturas principais da superfície são $k_1 = \dfrac{\ddot{y}}{\dot{z}}$ e $k_2 = -\dfrac{1}{r} = -\dfrac{(\dot{y} - \dot{z})}{y - z}$.

3.2 Superfícies Completas

Para decidirmos se uma superfície S é ou não completa, usaremos o Teorema 3.2.5 (Hopf e Rinow) e o Lema 3.2.7, a seguir.

Definição 3.2.1 *Uma variedade semi-Riemanniana é uma variedade* (M^n, g), $n \geq 2$, *em que* M^n *é uma variedade regular e* g *é uma métrica sobre* M^n *com índice* $\nu \geq 1$.

Observação: Se $\nu = 1$ e $n \geq 2$, M^n é uma variedade de Lorentz e se $\nu = 0$, M^n é uma variedade Riemanniana.

Definição 3.2.2 *Uma variedade Riemanniana* M *é completa se o comprimento de qualquer caminho divergente diferenciável* λ *sobre* M *é infinito.*

Definição 3.2.3 *Seja* S *uma superfície regular em* $\mathbb{R}^3$. *Uma curva regular* $\gamma : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow S$ *é uma geodésica se* $\ddot{\gamma}(t)$ *é normal a* S *em* $\gamma(t)$, $\forall t \in I$.

Exemplos:

1) Os círculos máximos de uma esfera são geodésicas;
2) Toda reta contida numa superfície é uma geodésica;
3) Os meridianos de um cilindro são geodésicas.

Definição 3.2.4 *Uma variedade Riemanniana M é geodesicamente completa se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial exp_p, está definida para todo $v \in T_pM$, isto é, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.*

Teorema 3.2.5 *(Hopf e Rinow). Seja M uma variedade Riemanniana conexa. Então, M é completa (como espaço métrico) se e somente se M é geodesicamente completa.*

Demonstração: Pode ser encontrada no O'Neill [6].

∎

Definição 3.2.6 *Suponha que B e F sejam variedades semi - Riemannianas e seja $f > 0$ uma função diferenciável em B. O produto torcido $M = B \times_f F$ é a variedade produto $B \times F$ munida do tensor métrico $g = \pi^*(g_B) + (f \circ \pi)^2\sigma^*(g_F)$, onde g_B e g_F são os tensores métricos em B e F, respectivamente, π e σ são as projeções de $B \times F$ sobre B e F, respectivamente. Ou seja, se x é tangente a $B \times F$ em (p, q), então,*
$< x, x >=< d\pi(x), d\pi(x) > + f^2(p)\big(d\sigma(x), d\sigma(x)\big)$.

Observação: B é chamado de base de $M = B \times_f F$ e F de fibra e se $f = 1$, então $B \times_f F$ reduz-se a uma variedade produto direto. Assim, poderemos expressar a geometria de M em termos da função f e das geometrias de B e F.

Lema 3.2.7 *Se B e F são variedades Riemannianas completas, então $M = B \times_f F$ é uma variedade Riemanniana completa para toda função f.*

Demonstração:

Se $v \in T_pM$ para algum $p \in M$, então como $f > 0$ e F é Riemanniana, segue que $< v, v > \geqslant < d\pi(v), d\pi(v) >$, onde π é a projeção de M sobre B. Então, se L é o comprimento de arco de uma curva α, segue que $L(\alpha) \geqslant L(\pi \circ \alpha)$, para qualquer segmento de α. Assim, $d(m, n) \geqslant d\big(\pi(m), \pi(n)\big)$ para todo m, n em M. Portanto se $\{(p_i, q_i)\}$ é uma

seqüencia de Cauchy em M, então $\{p_i\}$ é uma seqüencia de Cauchy em B. Como B é uma variedade Riemanniana completa, segue que a seqüência $\{p_i\}$ converge para algum ponto $p \in B$. Podemos supor que a seqüencia pertence a um subconjunto K contido em B. Então $f \geqslant c > 0$ em K. Assim, $d(m, m') \geqslant d(\pi(m), \pi(m'))$ para $m, m' \in K \times F$.

Por outro lado, $\{q_i\}$ é uma seqüência de Cauchy em F, que é uma variedade Riemanniana completa, então converge. Logo a seqüencia $\{(p_i, q_i)\}$ converge. Portanto M é completa.

∎

Capítulo 4

Superfícies de Revolução de Tipo Espaço com Eixo de Tipo Espaço

Neste capítulo, estudaremos as superfícies de revolução, em $\mathbb{L}^3$, de tipo espaço com curvatura média constante e eixo de revolução de tipo espaço. Para obtermos tais superfícies faremos um estudo análogo ao que Delaunay fez para o caso euclidiano, com base em [4]. Tomaremos como curva geratriz, a curva descrita pelo foco de uma cônica Lorentziana, quando esta rola, sem deslizar, ao longo de um eixo fixo.

4.1 A equação diferencial das superfícies de revolução com eixo de tipo espaço

Agora, discutiremos o rolamento da cônica Γ, obtendo assim, a parametrização da curva Ω gerada por um dos seus focos.

Seja Γ uma cônica de $\mathbb{L}^2$ e F um dos seus focos. Rolando-se esta cônica sem deslizar ao longo do eixo x, conforme 1.3 e acompanhando-se o foco F, obteremos uma curva Ω, que será a geratriz da superfície de revolução.

Tomando-se o foco F da cônica como origem polar e $\overline{FQ_o}$, o eixo polar, a forma polar de Γ, onde Q_o é a origem do arco de Γ dado na Figura (4.1), é dada por:

$$\Gamma(\theta) = \big(r(\theta)\sinh\theta, r(\theta)\cosh\theta\big).$$

Assumindo que $r > 0$ e que o vetor tangente de Γ é de *tipo espaço*, temos: $g_{-1}(\Gamma(\theta), \Gamma(\theta)) = r^2(\theta)\sinh^2\theta - r^2(\theta)\cosh^2\theta = -r^2(\theta) < 0$, ou seja, o vetor $\Gamma(\theta)$ é de *tipo tempo.*

Como $\Gamma'(\theta) = (r'(\theta)\sinh\theta + r(\theta)\cosh\theta, r'(\theta)\cosh\theta + r(\theta)\sinh\theta)$, segue que $g_{-1}(\Gamma'(\theta), \Gamma'(\theta)) = (r'(\theta)\sinh\theta + r(\theta)\cosh\theta)^2 - (r'(\theta)\cosh\theta + r(\theta)\sinh\theta)^2 =$ $r'(\theta)\sinh^2\theta + 2r'(\theta)\sinh\theta\cosh\theta + r^2(\theta)\cosh^2\theta - r'(\theta)\cosh^2\theta - 2r'(\theta)\sinh\theta\cosh\theta -$ $r^2(\theta)\sinh^2\theta = r'(\theta)(\sinh^2\theta - \cosh^2\theta) + r^2(\theta)(\cosh^2\theta - \sinh^2\theta) = -r'(\theta) + r^2(\theta)$.

Assumindo que o vetor tangente de Γ é de *tipo espaço*, segue que $r^2(\theta) - r'^2(\theta) > 0$.

Seja ξ o comprimento de arco de Γ com origem em Q_0, s o comprimento de arco de Ω com origem em F_0 e ϕ o ângulo orientado de Ω' para o eixo x, como mostra a figura abaixo. Pelo lema 1.2.10 segue que $\sinh\phi(\theta) = \dfrac{\xi(\theta) - \xi(\theta_0) - x(\theta)}{r(\theta)}$ e $\cosh\phi(\theta) = -\dfrac{z(\theta)}{r(\theta)}$. Logo

$$\Omega(\theta) : \begin{cases} x(\theta) &= \xi(\theta) - \xi(\theta_0) - r(\theta)\sinh\phi(\theta); \\ z(\theta) &= -r(\theta)\cosh\phi(\theta). \end{cases} \tag{4.1}$$

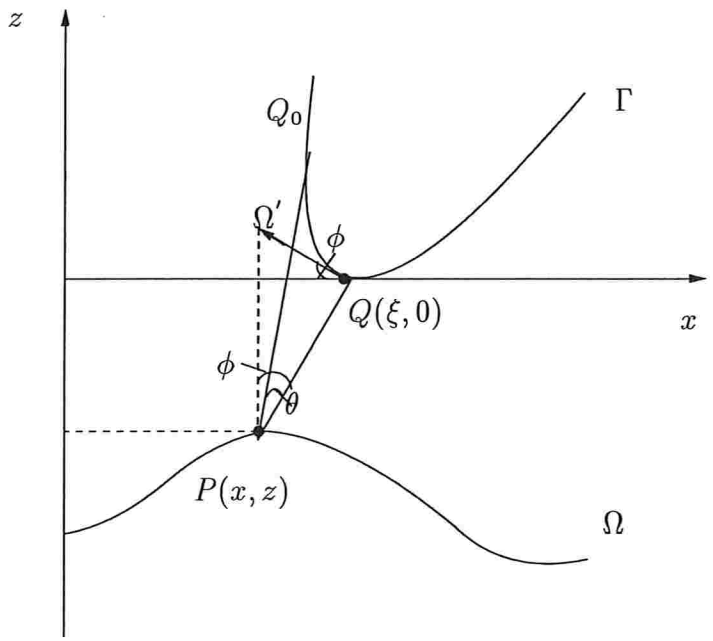


Figura 4.1: Parametrização da curva geratriz

Proposição 4.1.1 *Seja ϕ o ângulo orientado de Ω' para o eixo x. Então, $\phi = \phi(\theta)$ é tal que $r(\theta)\sinh\theta$ é igual ao produto interno de Lorentz do vetor posição $\Gamma(\theta)$ com o vetor unitário $\dfrac{\Gamma'(\theta)}{||\Gamma'(\theta)||}$ e conseqüentemente ,*

$$\cosh\phi(\theta) = \frac{r(\theta)}{\sqrt{r^2(\theta) - r'^2(\theta)}} \quad e \quad \sinh\phi(\theta) = \frac{-r'(\theta)}{\sqrt{r^2(\theta) - r'^2(\theta)}}$$

Demonstração:

Sejam ϕ o ângulo orientado de Ω' para o eixo x, β o ângulo orientado de Γ para o eixo z e α o ângulo que $\Gamma = \overrightarrow{FQ}$ faz com $\dfrac{\Gamma'(\theta)}{||\Gamma'(\theta)||}$, como mostra a Figura 4.1, onde transportamos o vetor Γ' para o ponto Q. Pelo Lema 1.4.2 segue que $\beta = \phi$.

Pela Definição 1.2.6 segue que $\cosh\alpha(\theta) = g_{-1}(\dfrac{\Gamma}{||\Gamma||}, \dfrac{\Gamma'}{||\Gamma'||})$. Como $||\Gamma(\theta)|| = r(\theta)$, segue que $r(\theta)\ \cosh\phi(\theta) = g_{-1}(\Gamma, \dfrac{\Gamma'}{||\Gamma'||})$. Mas pela demonstração do Lema 1.4.2, temos que $\cosh\alpha(\theta) = \sinh\phi(\theta)$. Logo $\sinh\phi(\theta) = g_{-1}(\Gamma, \dfrac{\Gamma'}{||\Gamma'||})$.

Assim, temos:

$$g_{-1}(\Gamma, \frac{\Gamma'}{||\Gamma'||}) =$$

$$= g_{-1}((r(\theta)\sinh\theta, r(\theta)\cosh\theta), (\frac{r'(\theta)\sinh\theta + r(\theta)\cosh\theta}{\sqrt{r^2(\theta) - r'^2(\theta)}}, \frac{(r'(\theta)\cosh\theta + r(\theta)\sinh\theta}{\sqrt{r^2(\theta) - r'^2(\theta)}})) =$$

$$= \frac{r(\theta)r'(\theta)\sinh^2\theta + r^2(\theta)\sinh\theta\cosh\theta - r(\theta)r'(\theta)\cosh^2\theta - r^2(\theta)\sinh\theta\cosh\theta}{\sqrt{r^2(\theta) - r'^2(\theta)}} =$$

$$= \frac{r(\theta)r'(\theta)(\sinh^2\theta - \cosh^2\theta}{\sqrt{r^2(\theta) - r'^2(\theta)}} = \frac{r(\theta)r'(\theta)}{\sqrt{r^2(\theta) - r'^2(\theta)}}.$$

Como $g_{-1}(\Gamma, \dfrac{\Gamma'}{||\Gamma'||}) = r(\theta)\sinh\phi(\theta)$, segue que

$$\sinh\phi(\theta) = \frac{-r'(\theta)}{\sqrt{r^2(\theta) - r'^2(\theta)}} \text{ e, conseqüentemente, } \cosh\phi(\theta) = \frac{r(\theta)}{\sqrt{r^2(\theta) - r'^2(\theta)}}. \quad (4.2)$$

Proposição 4.1.2 *O vetor tangente a Ω é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{FQ} = (r(\theta)\ \sinh\phi(\theta), r(\theta)\ \cosh\phi(\theta))$.*

Demonstração:

Como a ortogonalidade não depende do compromento do vetor, tomemos $\dfrac{\overrightarrow{FQ}}{||\overrightarrow{FQ}||}$. Então como $\Omega'(\theta) = (x'(\theta), z'(\theta))$, segue que $g_{-1}((\Omega', \overrightarrow{FQ}) = x' \sinh\phi(\theta) - z' \cosh\phi(\theta)$. Mas

$x'(\theta) = \dfrac{d\xi}{d\theta} - \dfrac{dr}{d\theta}\sinh\phi(\theta) - r(\theta)\cosh\phi(\theta)\dfrac{d\phi}{d\theta}$ e $z'(\theta) = -\dfrac{dr}{d\theta}\cosh\phi(\theta) - r(\theta)\sinh\phi(\theta)\dfrac{d\phi}{d\theta}$.

Logo $g_{-1}(\Omega', \overrightarrow{FQ}) = = \dfrac{d\xi}{d\theta}\sinh\phi(\theta) - \dfrac{dr}{d\theta}\sinh^2\phi(\theta) - r(\theta)\sinh\phi(\theta)\cosh\phi(\theta)\dfrac{d\phi}{d\theta} + \dfrac{dr}{d\theta}\cosh^2\phi(\theta) + r(\theta)\sinh\phi(\theta)\cosh\phi(\theta)\dfrac{d\phi}{d\theta} = \dfrac{d\xi}{d\theta}\sinh\phi(\theta) + \dfrac{dr}{d\theta}$.

Como $\sinh\phi(\theta) = -\dfrac{r'(\theta)}{\sqrt{r^2(\theta) - r'^2(\theta)}} = -\dfrac{dr}{d\theta}/\dfrac{ds}{d\xi}$ segue que $\dfrac{dr}{d\theta} = -\dfrac{d\xi}{d\theta}\sinh\phi(\theta)$.

Assim, $g_{-1}(\Omega', \overrightarrow{FQ}) = \dfrac{d\xi}{d\theta}\sinh\phi(\theta) - \dfrac{d\xi}{d\theta}\sinh\phi(\theta) = 0$. Logo $\Omega' \perp \overrightarrow{FQ}$.

∎

Consideraremos dois casos:

(A) **O centro de curvatura de Ω não pertence ao eixo x.**

Com relação a este caso, temos a seguinte proposição:

Proposição 4.1.3 *Se o centro de curvatura de Ω não pertence ao eixo x, então* $\dfrac{1 + r(s)\dot{\phi}(s)}{r(s)} > 0$.

Demonstração:

Sendo s o parâmetro comprimento de arco para Ω e levando em conta que $\Omega(s)$ é *tipo espaço*, ou seja, $\dot{x}^2(s) - \dot{z}^2(s) = 1$, podemos tomar $\dot{\Omega}(s)$ de modo que $\dot{\Omega}(s) = (\dot{x}(s), \dot{z}(s)) = (\cosh\phi(s), \sinh\phi(s))$, onde o ponto significa $\dfrac{d}{ds}$. Por (4.1) temos:

$$\begin{aligned}
\dot{r}(s) = \frac{d}{ds}\left(\frac{-z(s)}{\sinh\phi(s)}\right) &= \frac{-\dot{z}(s)\cosh\phi(s) + z(s)\sinh\phi(s)\dot{\phi}(s)}{\cosh^2\phi(s)} \\
&= -\dot{z}(s)\frac{1}{\cosh\phi(s)} + \frac{z(s)}{\cosh\phi(s)}\frac{\sinh\phi(s)}{\cosh\phi(s)}\dot{\phi}(s) \\
&= \frac{-\sinh\phi(s)}{\cosh\phi(s)} - r(s)\frac{\sinh\phi(s)}{\cosh\phi(s)}\dot{\phi}(s) \\
&= -\frac{\sinh\phi(s)}{\cosh\phi(s)}(1 + r(s)\dot{\phi}(s)).
\end{aligned}$$

Logo

$$\dot{r}(s) = -\tanh\phi(s)(1 + r(s)\dot{\phi}(s)). \tag{4.3}$$

Ainda pela $1^{\underline{a}}$ equação de (4.1) temos:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}(s) &= \dot{x}(s) + \dot{r}(s)\sinh\phi(s) + r(s)\cosh\phi(s)\dot{\phi}(s) \\
&= \cosh\phi(s) - \frac{\sinh\phi(s)}{\cosh\phi(s)}\sinh\phi(s)(1 + r(s)\dot{\phi}(s)) + r(s)\cosh\phi(s)\dot{\phi}(s) \\
&= \frac{\cosh^2\phi(s) - \sinh^2\phi(s)(1 + r(s)\dot{\phi}(s)) + r(s)\cosh^2\phi(s)\dot{\phi}(s)}{\cosh\phi(s)} \\
&= \frac{(1 + r(s)\dot{\phi}(s))(\cosh^2\phi(s) - \sinh^2\phi(s)}{\cosh\phi(s)}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\dot{\xi}(s) = \frac{1 + r(s)\dot{\phi}(s)}{\cosh\phi(s)}. \tag{4.4}$$

Como $\xi(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} ||\Gamma'(\theta)||d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{r^2(\theta) - r'^2(\theta)}\, d\theta$, segue que $\xi'(\theta) = \sqrt{r^2(\theta) - r'^2(\theta)}$. Logo $\xi'^2(\theta) = r^2(\theta) - r'^2(\theta)$ e $r^2(\theta) = \xi'^2(\theta) + r'^2(\theta)$. Assim, $r^2(\theta)(\frac{d\theta}{ds})^2 = (\frac{d\xi}{d\theta})^2(\frac{d\theta}{ds})^2 + (\frac{dr}{d\theta})^2(\frac{d\theta}{ds})^2$, ou seja, $r^2(\theta)(\frac{d\theta}{ds})^2 = (\frac{d\xi}{ds})^2 + (\frac{dr}{ds})^2$.

Logo

$$\dot{\theta}(s) = \frac{1}{r(s)}\sqrt{(\dot{\xi})^2(s) + (\dot{r})^2(s)}. \tag{4.5}$$

Usando-se (4.3) e (4.4) segue que $\dot{\theta}(s) = \frac{1}{r(s)}\sqrt{(sech^2\phi + \tanh^2\phi)(1 + r(s)\dot{\phi}(s))^2}$.

Logo

$$\dot{\theta}(s) = \frac{|1 + r(s)\dot{\phi}(s)|}{r(s)}. \tag{4.6}$$

Como $\xi'(\theta) = \sqrt{r'^2(\theta) - r^2(\theta)} > 0$ e $\dot{\xi}(s) = \frac{d\xi}{ds} = (\frac{d\xi}{d\theta})(\frac{d\theta}{ds})$ segue de (4.4) e (4.6) que $\dot{\xi}(s) = \frac{1 + r(s)\dot{\phi}(s)}{\cosh\phi(s)} \geq 0,\ \forall s \in \mathbb{R}$.

Logo

$$1 + r(s)\dot{\phi}(s) \geq 0,\ \forall s \in \mathbb{R}. \tag{4.7}$$

Sejam s o parâmetro comprimento de arco de Ω, $\dot{\Omega}(s) = (\cosh\phi(s), \sinh\phi(s))$ e $\eta(s) = (\sinh\phi(s), \cosh\phi(s))$ o vetor normal unitário, à curva Ω.

A curvatura de Ω é dado por $k_\Omega(s) = ||\ddot{\Omega}(s)||$, mas como $\ddot{\Omega}(s) = (\sinh\phi(s), \cosh\phi(s))\dot{\phi}(s)$, segue que $||\ddot{\Omega}(s)|| = \sqrt{|(\sinh^2\phi(s) - \cosh^2\phi(s))\dot{\phi}^2(s)|} = |\dot{\phi}(s)|$. Portanto $k_\Omega(s) = |\dot{\phi}(s)|$.

O centro de curvatura de Ω é dado por: $C(s) = \Omega(s) - \dfrac{1}{k_{\Omega(s)}}\eta(s)$. Então

$$\begin{aligned} C(s) &= (\xi(s) - \xi(s_0) - r(s)\sinh\phi(s), -r(s)\cosh\phi(s)) - \frac{1}{|\dot{\phi}(s)|}(\sinh\phi(s), \cosh\phi(s)) \\ &= \Big(\xi(s) - \xi(s_0) - r(s)\sinh\phi(s) - \frac{\sinh\phi(s)}{|\dot{\phi}(s)|}, \frac{-(1 + r(s)|\dot{\phi}(s)|)}{|\dot{\phi}(s)|}\cosh\phi(s)\Big) \end{aligned}$$

Como $C(s) \notin O_x$. Então $z(s) = \dfrac{1 + r(s)|\dot{\phi}(s)|}{|\dot{\phi}(s)|}\cosh\phi(s) \neq 0$. Logo $1 + r(s)|\dot{\phi}(s)| \neq 0$, ou seja, $1 + r(s)\dot{\phi}(s) \neq 0$ e $1 - r(s)\dot{\phi}(s) \neq 0$.

Portanto de (4.7) segue que $1 + r(s)\dot{\phi}(s) > 0$ e $\dfrac{1 + r(s)\dot{\phi}(s)}{r(s)} > 0$.

∎

Observação:

Da proposição anterior segue que $\dot{\theta}(s) = \dfrac{1 + r(s)\dot{\phi}(s)}{r(s)} > 0$ e portanto a solução $\theta = \theta(s) = \displaystyle\int \frac{1}{r(s)}(1 + r(s)\dot{\phi}(s))\, ds$ é uma função monótona de s. Logo escrevendo s em termos de θ e substituindo em $r = r(s)$, obtemos novamente $r = r(\theta)$.

Agora, seja S a superfície de revolução cuja geratriz é a curva Ω obtida acima. Do capítulo 3 temos que as curvaturas principais de S são dadas por:

$$k_1 = -\frac{\ddot{x}}{\dot{z}} = -\frac{\sinh\phi(s)\dot{\phi}(s)}{\sinh\phi(s)} = -\dot{\phi}(s) \quad \text{e} \quad k_2 = -\frac{\dot{x}}{z} = -\frac{\cosh\phi(s)}{-r\cosh\phi(s)} = \frac{1}{r(s)}.$$

Conforme [1], a curvatura média de uma superfície S, em $\mathbb{L}^3$, é definida por: $H(s) = -\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$.

Neste caso, $H = -\dfrac{1}{2}\Big(-\dot{\phi}(s) + \dfrac{1}{r(s)}\Big) = \dfrac{r(s)\dot{\phi}(s) - 1}{2r(s)}$.

Assim, temos o seguinte teorema:

Teorema 4.1.4 *Seja S a superfície de revolução gerada pela curva Ω. Se o centro de curvatura de Ω não pertence ao eixo x, S tem curvatura média constante se e somente se a função $r(\theta)$ satisfaz a equação diferencial:*

$$\frac{d^2}{d^2\theta}(lnr) = [(\frac{d}{d\theta}lnr)^2 - 1]\frac{1+2rH}{2+2rH}. \tag{4.8}$$

Demonstração:

Seja S a superfície de revolução gerada pela curva Ω, cujo centro de curvatura não pertence ao eixo. Pela proposição 4.1.2 temos que $\dfrac{1+r(s)\dot{\phi}(s)}{r(s)} > 0$ e por (4.7), temos:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\frac{dr}{ds}}{\frac{d\theta}{ds}} == \frac{-\tanh\phi(1+r\dot{\phi})}{\frac{1+r\dot{\phi}}{r}} = -r\ \tanh\phi.$$

Logo

$$\frac{-1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \tanh\phi. \tag{4.9}$$

Disto segue que $\dfrac{d}{d\theta}(lnr) = -\tanh\phi$. Derivando-se novamente esta expressão em relação à θ temos:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}(\ln r) = (sech^2\phi)\frac{d\phi}{d\theta} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2}{d\theta^2}(\ln r) = (-1+\tanh^2\phi)\frac{d\phi}{d\theta}.$$

Portanto $\dfrac{d^2}{d\theta^2}(\ln r) = (\tanh^2\phi - 1)\dfrac{\frac{d\phi}{ds}}{\frac{d\theta}{ds}} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{d^2}{d\theta^2}(\ln r) = (\tanh^2\phi - 1)\dfrac{\dot{\phi}}{\frac{1+r\dot{\phi}}{r}}$, ou seja, $\dfrac{d^2}{d\theta^2}(\ln r) = (\tanh^2\phi - 1)\dfrac{r\dot{\phi}}{1+r\dot{\phi}}$. Finalmente $\dfrac{d^2}{d\theta^2}(\ln r) = [(\dfrac{d}{d\theta}\ln r)^2 - 1]\dfrac{r\dot{\phi}}{1+r\dot{\phi}}$.

Segue de [5], página 165, que a superfície de revolução gerada pela curva Ω tem curvatura média h constante se e somente se Ω, dada como o gráfico da função $z = f(x)$, é solução da equação diferencial $\dot{x}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{x} + \dfrac{\dot{x}}{z} = h$.

Observemos que $H = \dfrac{r\dot{\phi} - 1}{2r}$ satisfaz esta equação. Logo a superfície S tem curvatura média constante e da expressão do H segue que $r\dot{\phi} = 1 + 2rH$. Portanto a função $r = r(\theta)$ satisfaz a equação diferencial (4.8).

Agora, sejam Γ, uma cônica dada em coordenadas polares pela solução $r = r(\theta)$, da equação diferencial (4.8) e Ω, a curva gerada por um dos focos de Γ quando esta

rola, sem deslizar, ao longo do eixo x. Vê-se, facilmente, que Ω pode ser vista como o gráfico da função $z = f(x)$. Seja ϕ, o ângulo dado pela Figura (4.1). Por (4.9), segue que $-\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \tanh\phi$, ou seja, $\frac{d}{d\theta}(lnr) = -\tanh\phi$. Derivando-se esta equação em relação θ, temos:
$\frac{d^2}{d\theta^2}(\ln r) = (sech^2\phi)\frac{d\phi}{d\theta}$, ou seja, $\frac{d^2}{d\theta^2}(\ln r) = (\tanh^2\phi - 1)\frac{d\phi}{d\theta}$, que é equivalente, a $\frac{d^2}{d\theta^2}(\ln r) = [(\frac{d}{d\theta}\ln r)^2 - 1]\frac{d\phi}{d\theta}$.

Como $\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{r\dot{\phi}}{1+r\dot{\phi}}$ e $r = r(\theta)$ satisfaz a equação (4.8), segue que $\frac{d\phi}{d\theta} = \frac{r\dot{\phi}}{1+r\dot{\phi}}$, ou ainda, $r\dot{\phi} = 1 + rH$. Isto prova que Ω é solução de $\dot{\phi} - \frac{1}{r} = \dot{x}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{z} = H$. Portanto H é constante.

∎

Afirmação 4.1.1 *A solução de (4.8) é* $\frac{1}{r(\theta)} = a\ \cosh\theta + b\ \sinh\theta + c, \quad r > 0,$ *onde*

$$2Hc = a^2 - b^2 - c^2, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Demonstração:

Sejam $u = \ln r$ e $v = \frac{du}{d\theta} = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}$. Então $\frac{d^2}{d\theta^2} = \frac{dv}{d\theta} = \frac{du}{d\theta}\frac{dv}{du} = v\frac{dv}{du}$.
De $u = \ln r$ segue que $r = e^u$. Substituindo-se em (4.8) temos:

$$v\ \frac{dv}{du} = (v^2 - 1)(\frac{1 + 2He^u}{2 + 2He^u}) \implies \frac{d}{du}\ln(v^2 - 1) = 2(\frac{1 + 2He^u}{2 + 2He^u}).$$

Integrando-se em relação a u segue que

$$\begin{aligned}
\ln(v^2 - 1) &= 2\int (\frac{1 + 2He^u}{2 + 2He^u})\ du = \int (\frac{1 + 2He^u}{1 + He^u})\ du \\
&= \int (\frac{1 + He^u}{1 + He^u})\ du + \int (\frac{He^u}{1 + He^u})\ du \\
&= \int du + \int \frac{d(1 + He^u)}{1 + He^u}\ du \\
&= u + \ln(1 + He^u) + c_1.
\end{aligned}$$

Portanto

$$v^2 - 1 = e^{[u + \ln(1 + He^u) + c_1]} \implies v = \sqrt{1 + ke^u e^{\ln(1 + He^u)}}.$$

Mas $v = \dfrac{1}{r}\dfrac{dr}{d\theta}$, então

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \sqrt{1 + ke^u e^{\ln(1 + He^u)}} = \sqrt{1 + kr(1 + rH)}.$$

Assim,

$$d\theta = \frac{dr}{r\sqrt{1 + kr(1 + rH)}}.$$

Integrando-se em relação a θ segue que

$$\int d\theta = \int \frac{dr}{r\sqrt{1 + kr(1 + rH)}}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \theta + c_1 &= \ln(2\sqrt{1 = kr + kHr^2} - kr - 2) - \ln r \\ &= \frac{\ln\left(2\sqrt{1 + kr + rHr^2} - kr - 2\right)}{r}. \end{aligned}$$

Fazendo-se $e^{c_1} = c$, isolando-se a raiz quadrada e elevando-se ambos os membros da igualdade ao quadrado temos:

$$\left((ce^\theta + k)r + 2\right)^2 = \left(2\sqrt{1 + kr + rHr^2}\right)^2 \implies (ce^\theta + k)^2 r^2 + 4(ce^\theta + k)r + 4 = 4(1 + kr + kHr^2)$$

Logo

$$4kHr^2 = (ce^\theta + k)r^2 + 4ce^\theta r \implies r = \frac{4ce^\theta r}{4kH - (ce^\theta + k)^2}.$$

Reescrevendo a igualdade acima temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{1}{4ce^\theta}(4kH - c^2e^{2\theta} - 2kce^\theta - k^2) \\ &= \frac{1}{4c}[(4kH - k^2)e^{-\theta} - ce^\theta - 2kc] \\ &= -\frac{c}{4}e^\theta + \frac{(4kH - k^2)}{4c}e^{-\theta} - \frac{k}{2} \end{aligned}$$

Sabemos de E.D.O que, toda solução da forma $c_1e^{\theta} + c_2e^{\theta}$ pode ser escrita na forma $\alpha\cosh\theta + \beta\sinh\theta$, com $\alpha = c_1 + c_2$ e $\beta = c_1 - c_2$.

Assim, a expressão acima pode ser escrita nesta forma, ou seja,

$$\frac{1}{r} = \Big(-\frac{c}{4} + \frac{(4kH - k^2)}{4c}\Big)\ \cosh\theta + \Big(-\frac{c}{4} - \frac{(4kH - k^2)}{4c}\Big)\ \sinh\theta - \frac{k}{2}$$

Portanto

$$\frac{1}{r} = a\ \cosh\theta + b\ \sinh\theta + c, \quad \text{onde}$$

$$a = -\frac{c}{4} + \frac{(4kH - k^2)}{4c},\ b = -\frac{c}{4} - \frac{(4kH - k^2)}{4c}\ e\ c = -\frac{k}{2}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 - c^2 &= \Big(-\frac{c}{4} + \frac{(4kH - k^2)}{4c}\Big)^2 - \Big(-\frac{c}{4} - \frac{(4kH - k^2)}{4c}\Big)^2 - \frac{k^2}{4} \\ &= -4\ \frac{c}{4}\ \Big(\frac{(4kH - k^2)}{4c} - \frac{k^2}{4} = -kH = 2cH. \end{aligned}$$

Portanto $2cH = a^2 - b^2 - c^2$.

∎

Discutindo-se as soluções em termos das constantes a,b,c temos a seguinte proposição:

Proposição 4.1.5 *A curva Γ origina uma superfície de revolução com curvatura média constante e eixo de tipo espaço se e somente se $r(\theta)$ é de uma das seguintes formas:*
(I) $r(\theta) = \dfrac{1}{c}$, *com* $H = \dfrac{-c}{2}, (c \neq 0)$;
(II) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \pm\ \lambda\cosh(\theta + \mu) + c$, *com* $\lambda > 0$, $H = \dfrac{\lambda^2 + c^2}{2c}, (c \neq 0)$;
(III) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \pm\ \lambda\sinh(\theta + \mu) + c$, *com* $\lambda > 0$, $H = \dfrac{-(\lambda^2 + c^2)}{2c}, (c \neq 0)$;
(IV) $\dfrac{1}{r(\theta)} = ae^{\theta} + c$ *ou* $ae^{-\theta} + c$ *com* $H = \dfrac{-c}{2}, (c \neq 0)$.

Demonstração:

Considerando-se $c = 0$ na Afirmação 4.1.1 e $r(\theta) > 0$ temos: $\frac{1}{r(\theta)} = a\cosh\theta + b\sinh\theta$ e $0 = a^2 - b^2$. Assim, $b^2 = a^2$ e $b = \overset{+}{-} a$. Logo, há duas soluções:

$$\frac{1}{r(\theta)} = a(\cosh\theta + \sinh\theta) = ae^{\theta} \quad \text{e} \quad \frac{1}{r(\theta)} = a(\sinh\theta - \cosh\theta) = ae^{-\theta}.$$

Estas soluções serão excluídas, pois os vetores tangentes a Γ em cada caso são de *tipo luz*. De fato, no primeiro caso, temos

$$\begin{aligned}\Gamma(\theta) &= \left(\frac{\sinh\theta}{ae^{\theta}}, \frac{\cosh\theta}{ae^{\theta}}\right) \text{ e } \Gamma'(\theta) = \left(\frac{\cosh\theta ae^{\theta} - \sinh\theta ae^{\theta}}{a^2e^{2\theta}}, \frac{\sinh\theta ae^{\theta} - \cosh\theta ae^{\theta}}{a^2e^{2\theta}}\right)\\ &= \left(\frac{(\cosh\theta - \sinh\theta)}{ae^{\theta}}, \frac{(\sinh\theta - \cosh\theta)}{ae^{\theta}}\right) = \left(\frac{e^{-\theta}}{ae^{\theta}}, \frac{-e^{-\theta}}{ae^{\theta}}\right) = \left(\frac{e^{-2\theta}}{a}, \frac{-e^{-2\theta}}{a}\right).\end{aligned}$$

Portanto $g_{-1}(\Gamma'(\theta), \Gamma'(\theta)) == \frac{e^{-4\theta}}{a^2} - \frac{e^{-4\theta}}{a^2} = 0.$

Analogamente para $\Gamma(\theta) = \left(\frac{\sinh\theta}{ae^{-\theta}}, \frac{\cosh\theta}{ae^{-\theta}}\right)$ temos $g_{-1}(\Gamma'(\theta), \Gamma'(\theta)) = 0.$

Considerando-se $c \neq 0$ e $r(\theta) > 0$ temos:

- Se $a = b = 0 \implies \frac{1}{r(\theta)} = c \implies r(\theta) = \frac{1}{c}$ e $2Hc = -c^2 \implies H = \frac{-c}{2}$;
- se $a = 0, b \neq 0 \implies \frac{1}{r(\theta)} = b\sinh\theta + c \implies \frac{1}{r(\theta)} = \overset{+}{-} \lambda\sinh(\theta) + c$,

$\lambda > 0$ e $2Hc = -b^2 - c^2$, ou seja, $4H = \frac{-\lambda^2 - c^2}{2c}$.

Se duas curvas Γ_1 e Γ_2, simples, diferem por uma transformação Lorentziana fixando a origem, então as curvas resultantes Ω_1 e Ω_2 geram superfícies de revolução congruentes. Assim, a equação $\frac{1}{r(\theta)} = \overset{+}{-} \lambda\sinh\theta + c$ gera uma superfície de revolução congruente à gerada pela equação $\frac{1}{r(\theta)} = \overset{+}{-} \lambda\sinh(\theta + \mu) + c$.

- se $a \neq 0, b = 0 \implies \frac{1}{r(\theta)} = a\cosh\theta + c \implies \frac{1}{r(\theta)} = \overset{+}{-} \lambda cosh(\theta) + c$, $\lambda > 0$ e

$2Hc = \frac{-\lambda^2 - c^2}{2c}$, ou seja, $H = \frac{-\lambda^2 - c^2}{2c}$.

Pela mesma razão anterior, a equação $\frac{1}{r(\theta)} = a\cosh\theta + c$ gera uma superfície de revolução congruente à gerada pela equação $\frac{1}{r(\theta)} = a\cosh(\theta + \mu) + c$.

- se $b = \overset{+}{-} a \neq 0 \implies \frac{1}{r(\theta)} = a(\cosh\theta + \sinh\theta) + c \implies \frac{1}{r(\theta)} = ae^{\theta} + c$ ou

$\dfrac{1}{r(\theta)} = a(\cosh\theta - \sinh\theta) + c$ e, neste caso, $\dfrac{1}{r(\theta)} = ae^{-\theta} + c$, onde $H = \dfrac{-c}{2}$.

Portanto, Γ origina uma superfície de revolução com curvatura média constante se $r(\theta)$ é de uma das formas acima.

∎

(B) O centro de curvatura de Ω pertence ao eixo x.

Assim, temos o seguinte teorema:

Teorema 4.1.6 *Se o centro de curvatura de Ω pertence ao eixo x, a superfície S de revolução com eixo de tipo espaço tem curvatura média constante $H \neq 0$ se e somente se é congruente ao hiperbolóide:*

$$x^2 + y^2 - z^2 = \frac{-1}{H^2},\ z > 0. \tag{4.10}$$

Demonstração:

Se o centro de curvatura de Ω pertence ao eixo x, claramente, $1 + r\dot{\phi} = 0$.
Logo $\dot{\phi} = \dfrac{-1}{r}$. Como a curvatura média de S é dada por $2H = \dot{\phi} - \dfrac{1}{r}$ segue que $H = \dot{\phi}$.

Portanto, por integração, temos $\phi = Hs + \phi_o$. Tomemos, então

$(\dot{x}\ ,\ \dot{z}) = \big(cosh(Hs + \phi_o)\ ,\ sinh(Hs + \phi_o)\big)$. Logo Ω é dada por

$$(x\ ,\ z) = \Big(\frac{\sinh(Hs + \phi_o)}{H}\ ,\ \frac{\cosh(Hs + \phi_o)}{H}\Big).$$

Portanto a superfície de revolução gerada por Ω é

$$X(s\ ,\ t) = \Big(\frac{\sinh(Hs + \phi_o)}{H}\ ,\ \frac{\cosh(Hs + \phi_o)}{H}\sinh t\ ,\ \frac{\cosh(Hs + \phi_o)}{H}\cosh t\Big).$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= \frac{\sinh^2(Hs + \phi_o)}{H^2} + \frac{\cosh^2(Hs + \phi_o)}{H^2}\sinh^2 t - \frac{\cosh^2(Hs + \phi_o)}{H^2}\cosh^2 t = \\ &= \frac{\sinh^2(Hs + \phi_o)}{H^2} + \frac{\cosh^2(Hs + \phi_o)}{H^2}(\sinh^2 t - \cosh^2 t) = \\ &= \frac{\sinh^2(Hs + \phi_o)}{H^2} - \frac{\cosh^2(Hs + \phi_o)}{H^2} = \\ &= \frac{-1}{H^2}. \end{aligned}$$

segue que a superfície S é congruente ao hiperbolóide (4.10).

∎

Agora, resumiremos (A) e (B) no seguinte teorema:

Teorema 4.1.7 *(a) Seja Ω uma curva de tipo espaço no plano xz tal que o seu centro de curvatura não pertence ao eixo x. Então a superfície de revolução gerada pela rotação de Ω em torno do eixo x tem curvatura média constante se e somente se Ω é gerada pelo foco de uma quando sua parte de tipo espaço é rolada, sem deslizar, ao longo do eixo x;*
(b) Seja Ω uma curva de tipo espaço no plano xz tal que o seu centro de curvatura pertence ao eixo x. Então a superfície de revolução com geratriz Ω tem curvatura média constante se e somente se é congruente ao hiperbolóide $x^2 + y^2 - z^2 = \frac{-1}{H^2}$, $z > 0$.

4.2 Quádricas de tipo espaço no plano de Lorentz-Minkowski

Mostraremos, nesta seção, que cada curva Γ dada pelas equações polares $(i) \longrightarrow (iv)$ da proposição 4.1.4 é parte de uma curva quadrática e que há diferenças nos gráficos, em especial, no comportamento dos focos e das diretrizes das cônicas Lorentzianas em comparação com os gráficos análogos da Geometria Euclidiana. Explicitaremos, também, o domínio da função $r(\theta)$ em cada caso.

(I) Consideremos a equação da forma $r(\theta) = \frac{1}{c}, c > 0$.

Neste caso, a curva Γ é parte de uma hipérbole Euclidiana contida no plano xz, pois de $\Gamma(\theta) = (\frac{1}{c}\sinh\theta, \frac{1}{c}\cosh\theta)$ segue que $x^2 - z^2 = \frac{-1}{c^2}$.

Como $r(\theta) > 0, \forall\theta \in \mathbb{R}$ e $x'^2(\theta) - z'^2(\theta) = \frac{1}{c^2}(\cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta)) = \frac{1}{c^2} > 0$, segue que r está definida para todo θ real.

(II) Consideremos a equação da forma $\frac{1}{r(\theta)} = \pm \lambda\cosh\theta + c$, com $c > 0$ ou $c < 0$.

Para classificarmos todas estas curvas, tomemos $d = \frac{1}{\lambda} > 0$ e $\epsilon = \frac{\lambda}{|c|} > 0$. Então temos:

1°) Se $c > 0$ e $0 < \epsilon < 1$, a equação polar é da forma:

(i) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{\cosh\theta}{d} + \dfrac{1}{\epsilon d}$.

Esta equação pode ser reescrita como $\epsilon(d - r\cosh\theta) = r$, cujo significado geométrico é o seguinte:

Denotemos a origem por $F = (0,0)$ e consideremos a reta de *tipo espaço* $L : v = d$. Nossa equação mostra que Γ consiste dos pontos $P = (r(\theta)\sinh\theta, r(\theta)\cosh\theta)$ abaixo da reta L, tais que sua distância à F é ϵ vezes sua distância à reta L, ou seja, Γ é uma cônica Lorentziana.

De fato,
$d(P,F) = ||\overrightarrow{PF}|| = ||(r\sinh\theta, r\cosh\theta)|| = r$ e $d(P,L) = d(P,A) = d - r\cosh\theta$, onde $A = (r\sinh\theta, d)$. Logo $d(P,F) = \epsilon d(P,L)$.

Como $0 < \epsilon < 1$, a cônica Γ é uma elipse Lorentziana.

Agora, fazendo-se uma mudança de coordenadas, mostraremos que Γ é parte da hipérbole Euclidiana:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \ com\ a = b\sqrt{1-\epsilon^2},\ z > 0 \tag{4.11}$$

e está estritamente entre as intersecções, $G_1 = (-d, \frac{b}{\epsilon})$ e $G_2 = (d, \frac{b}{\epsilon})$ da hipérbole com a reta L.

Considere a transformação de coordenadas de modo que, nas novas coordenadas, u e v , $F = (0, b\epsilon)$ e que $L : v = \frac{b}{\epsilon}$, onde $d = b(\frac{1}{\epsilon} - \epsilon)$. Sendo (u,v) o novo sistema de coordenadas , temos:

$$\begin{cases} u &= x; \\ v &= z + b\epsilon, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x &= r\sinh\theta; \\ z &= r\cosh\theta. \end{cases}$$

Então ,

$$\begin{aligned} -\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} &= -\frac{x^2}{b^2(1-\epsilon^2)} + \frac{(z+b\epsilon)^2}{b^2} = \frac{-x^2 + (z^2 + 2zb\epsilon + b^2\epsilon^2)(1-\epsilon^2)}{b^2(1-\epsilon^2)} = \\ &= \frac{-x^2 + z^2 + 2zb\epsilon + b^2\epsilon^2 - \epsilon^2 z^2 - b^2 - \epsilon^4}{b^2(1-\epsilon^2)}. \end{aligned}$$

Usando-se as novas coordenadas na expressão acima, temos:

$$= \frac{-r^2\sinh^2(\theta) + r\cosh^2(\theta) - \epsilon^2 r^2 cosh^2(\theta) + 2b\epsilon r\cosh\theta - 2b\epsilon^3 r\cosh\theta + b^2\epsilon^2 - b^2\epsilon^4}{b^2(1-\epsilon^2)} =$$
$$= \frac{r^2 + 2b(1-\epsilon^2)\epsilon r\cosh\theta - \epsilon^2 r^2 cosh^2(\theta) + b^2\epsilon^2(1-\epsilon^2)}{b^2(1-\epsilon^2)} =$$
$$= \frac{r^2 + 2d\epsilon^2 r\cosh\theta - \epsilon^2 r^2 cosh^2(\theta)}{b^2(1-\epsilon^2)} = \frac{\epsilon^2(d - r\cosh\theta)^2 + 2d\epsilon^2 r\cosh\theta - \epsilon^2 r^2 cosh^2(\theta)}{b^2(1-\epsilon^2)} =$$
$$= \frac{\epsilon^2 d^2 + b^2\epsilon^2(1-\epsilon^2)}{b^2(1-\epsilon^2)} = \frac{b^2(1-\epsilon^2)^2 + b^2(1-\epsilon^2)}{b^2(1-\epsilon^2)} = 1.$$

Logo, Γ satisfaz a equação da hipérbole Euclidiana (4.11).

A intersecção da hipérbole (1) com a reta L é dada por :

$$\begin{cases} z = \dfrac{b}{\epsilon}, \\ -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Assim, para obtermos x, fazemos: $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{\frac{b^2}{\epsilon^2}}{b^2} = 1$, ou seja, $x^2 = \dfrac{a^2(1-\epsilon^2)^2}{\epsilon^2}$.

Substituindo-se o valor de a , obtemos:

$x^2 = \dfrac{b^2(1-\epsilon^2)^2}{\epsilon^2}$, ou seja $x = \pm b(\dfrac{b}{\epsilon} - \epsilon)$ e portanto $x = \pm\, d$. Logo $G_1 = (-d, \dfrac{b}{\epsilon})$ e $G_2 = (d, \dfrac{b}{\epsilon})$.

As retas FG_1 e FG_2 são de *tipo luz* tangentes a hipérbole.

Além disso,

$r(\theta) = \dfrac{\epsilon d}{1 + \epsilon\ \cosh\theta} > 0,\ \ \forall\, \theta \in \mathbb{R}$ e $r'(\theta) = \dfrac{-\epsilon^2 d\sinh\theta}{(1+\epsilon\ \cosh\theta)^2}$. Logo

$$\begin{aligned} r^2(\theta) - r'^2(\theta) &= \frac{\epsilon^2 d^2}{(1+\epsilon\ \cosh\theta)^2} - \frac{\epsilon^4 d^2\sinh^2(\theta)}{(1+\epsilon\ \cosh\theta)^4} = \frac{\epsilon^2 d^2(1+\epsilon\cosh\theta)^2 - \epsilon^4 d^2\sinh^2(\theta)}{(1+\epsilon\ \cosh\theta)^4} \\ &= \frac{\epsilon^2 d^2(1 + 2\epsilon\cosh\theta + \epsilon^2 cosh^2(\theta) - \epsilon^2 sinh^2(\theta))}{(1+\epsilon\ \cosh\theta)^4} \\ &= \frac{\epsilon^2 d^2(1 + 2\epsilon\cosh\theta + \epsilon^2)}{(1+\epsilon\ \cosh\theta)^4} > 0, \end{aligned}$$

$\forall\theta \in \mathbb{R}$. Logo, r está definida para todo θ real.

Como $\lim\limits_{\theta\to\pm\ \infty} x(\theta) = \lim\limits_{\theta\to\pm\ \infty} \dfrac{\epsilon d\sinh\theta}{1+\epsilon\ \cosh\theta} = \pm d$ concluimos que Γ está estritamente entre G_1 e G_2.

Observamos na figura (4.2) que esta elipse Lorentziana tem aspecto de uma hipérbole Euclidiana e que há diferença na aparência do foco F e da diretriz L da hipérbole Lorentziana em comparação com a da hipérbole Euclidiana.

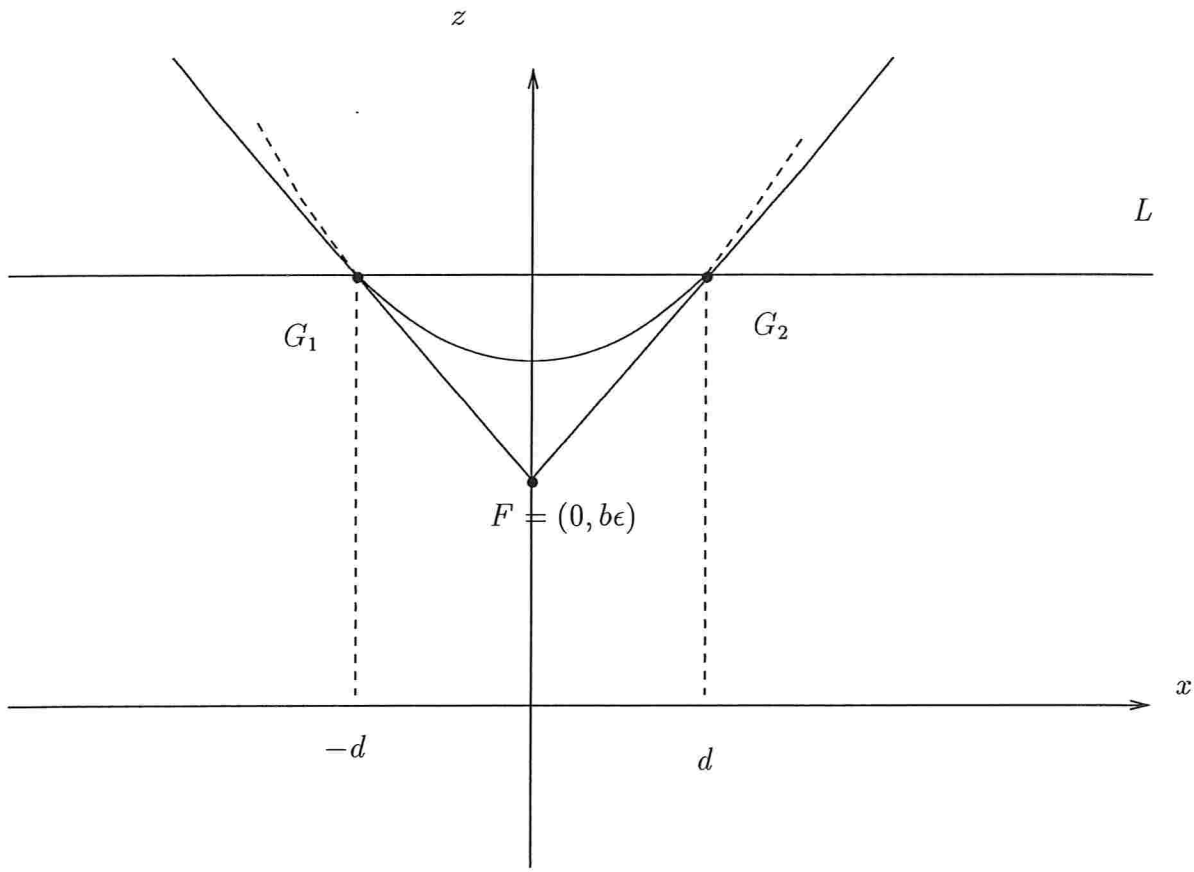


Figura 4.2: Elipse Lorentziana

(ii) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{-\cosh(\theta)}{d} + \dfrac{1}{\epsilon d}$

Reescrevendo esta equação na forma $r = \epsilon(d + r\cosh\theta)$, concluiremos, de modo análogo ao caso (i), que Γ é uma elipse Lorentziana e descreve a mesma curva que (i), exceto, que devemos tomar $\overrightarrow{FP} = (r\sinh\theta, 0, r\cosh\theta)$, onde $F = (0, -b\epsilon)$.

Neste caso, θ está definida no intervalo $]ln\ \epsilon, ln\ \dfrac{1}{\epsilon}[$, pois:

$$r(\theta) = \frac{\epsilon d}{1 - \epsilon\cosh\theta} > 0 \iff 1 - \epsilon\cosh\theta > 0 \iff \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2} < \frac{1}{\epsilon} \iff$$

$$\epsilon e^{2\theta} - 2e^{\theta} + \epsilon < 0 \iff ln\left(\frac{1 - \sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}\right) < \theta < ln\left(\frac{1 + \sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}\right);$$

$$r'(\theta) = \frac{\epsilon^2 d \sinh\theta}{(1-\epsilon\cosh\theta)^2} \quad \text{e} \quad r^2 - r'^2 = \frac{\epsilon^2 d^2}{(1-\epsilon\cosh\theta)^2} - \frac{\epsilon^4 d^2 \sinh\theta}{(1-\epsilon\cosh\theta)^4} =$$
$$= \frac{\epsilon^2 d^2(1 - 2\epsilon\cosh\theta + \epsilon^2 cosh^2(\theta))}{(1-\epsilon\cosh\theta)^4} > 0 \iff 1 + \epsilon^2\cosh^2\theta - 2\epsilon\cosh\theta > 0 \iff$$
$$1 + \epsilon^2 - 2\epsilon(\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}) > 0 \iff \epsilon e^{2\theta} - (\epsilon^2+1)e^\theta + \epsilon > 0 \iff ln\epsilon < \theta < ln\frac{1}{\epsilon}.$$

Da intersecção das condições acima segue que $]ln\ \epsilon, ln\ \frac{1}{\epsilon}[$.

$2^{\underline{o}}$) Se $c < 0$ e $0 < \epsilon < 1$, a equação polar é da forma:

(i) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{\cosh(\theta)}{d} - \dfrac{1}{\epsilon d}$.

Neste caso, a curva Γ é de *tipo tempo* e será estudada no próximo capítulo.

(ii) $\dfrac{1}{r(\epsilon)} = \dfrac{-\cosh\theta}{d} - \dfrac{1}{\epsilon d}$.

Neste caso, não existe Γ, pois $r(\theta) = \dfrac{-\epsilon d}{(1+\epsilon\cosh\theta)} < 0, \quad \forall\theta \in \mathbb{R}$.

$3^{\underline{o}}$) Se $c > 0$ e $\epsilon = 1$, a equação polar é da forma:

(i) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{\cosh\theta}{d} + \dfrac{1}{d}$.

Esta equação pode ser reescrita na forma $r = d - r\cosh\theta$. Denotando-se por $F = (0,0)$ e considerando-se a reta $L : v = d$ a equação acima mostra que Γ consiste dos pontos $P = (r\sinh\theta, r\cosh\theta)$ abaixo da reta L, tais que sua distância a F é igual sua distância a reta L, ou seja, Γ é uma parábola Lorentziana.

De fato, $d(P,F) = ||\overrightarrow{FP}|| = ||(r\sinh\theta, rcosh\theta)|| = r$ e $d(P,L) = d(P,A) =$
$= d - r\cosh\theta = r$, onde $A = (r\sinh\theta, d)$. Logo $d(P,F) = d(P,L)$.

Agora, fazendo uma mudança de coordenadas, mostraremos que Γ é um arco da parábola Euclidiana

$$v = \alpha u^2, \ com\ \alpha = \frac{1}{2d} \tag{4.12}$$

com extremos nos pontos $G_1 = (-d, \frac{d}{2})$ e $G_2 = (d, \frac{d}{2})$, obtidos pelas intersecções da parábola com a reta L.

Consideremos uma transformação de coordenadas de modo que $F = (0, \frac{-d}{2})$ e que $L : v = \frac{d}{2}$. Sendo (u, v) o novo sistema de coordenadas, temos:

$$\begin{cases} u &= x; \\ v &= z - \dfrac{d}{2} \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x &= r\sinh\theta; \\ z &= r\cosh\theta. \end{cases}$$

Então , $v = \frac{1}{2d}u^2 \iff u^2 - 2dv = 0$.

Usando-se o sistema de coordenadas (x, y), temos:

$$\begin{aligned} u^2 - 2dv &= x^2 - 2d(z - \tfrac{d}{2}) = x^2 - 2dz + d^2 = (r\sinh\theta)^2 - 2d(r\cosh\theta) + d^2 = \\ &= r^2\sinh^2\theta - 2dr\cosh\theta + d^2 == r^2(\cosh^2\theta - 1) - 2dr\cosh\theta + d^2 = \\ &= r^2\cosh^2\theta - 2dr\cosh\theta + d^2 - r^2 = (d - r\cosh\theta)^2 - r^2 = r^2 - r^2 = 0. \end{aligned}$$

Logo, Γ satisfaz a equação da parábola Euclidiana (4.12).

Notemos que a intersecção da parábola Euclidiana (4.12) com a reta L é dada por:

$$\begin{cases} v &= \dfrac{d}{2}; \\ v &= \dfrac{1}{2d}u^2. \end{cases}$$

Logo $\frac{1}{2d}u^2 = \frac{d}{2}$ e $u^2 = d^2$, ou seja, $u = \pm d$ o que fornece os pontos $G_1 = (-d, \frac{d}{2})$ e $G_2 = (d, \frac{d}{2})$.

Além disso, $r(\theta) = \dfrac{d}{1 + \cosh\theta} > 0$, $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$ e $r'(\theta) = \dfrac{-d\sinh\theta}{(1 + \cosh\theta)^2}$. Logo $r^2(\theta) - r'^2(\theta) = \dfrac{d^2(2 + 2cosh(\theta)}{(1 + \cosh\theta)^4} > 0$, $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$, e $r(\theta)$ está definida para todo θ real.

Como $\lim\limits_{\theta \to \pm\infty} x(\theta) = \lim\limits_{\theta \to \pm\infty} \dfrac{d\sinh\theta}{1 + \cosh\theta} = \pm d$, concluimos que Γ está estritamente entre G_1 e G_2.

Observemos na figura 4.3 que esta parábola Lorentziana tem o mesmo aspecto de uma parábola Euclidiana, mas há diferença no posicionamento do foco e da diretriz em comparação com o que ocorre na Geometria Euclidiana.

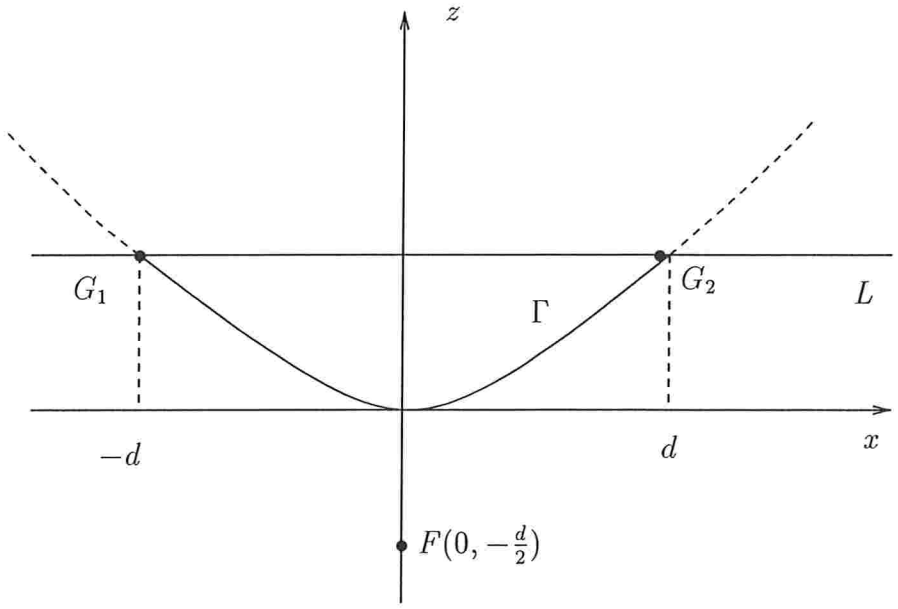


Figura 4.3: Parábola Lorentziana

(ii) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{-\cosh\theta}{d} + \dfrac{1}{d}$.

Como devemos ter $r(\theta) > 0$, este caso não ocorrerá.

De fato,

$\dfrac{d}{1-\cosh\theta} > 0 \iff 1 - \cosh\theta > 0$. Mas isto é impossível, pois $\cosh\theta > 1$, $\forall\, \theta \in \mathbb{R}$.

Portanto, Γ não existe para este valor de $r(\theta)$.

$4^{\underline{o}}$) Se $c < 0$ e $\epsilon = 1$, a equação polar é da forma :

(i) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{\cosh\theta}{d} - \dfrac{1}{d}$.

A curva definida por esta equação polar tem vetores tangentes de tipo tempo e será estudada no próximo capítulo.

(ii) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{-\cosh\theta}{d} - \dfrac{1}{d}$.

Neste caso, não existe Γ, pois $r(\theta) = \dfrac{-d}{1+\cosh\theta} < 0, \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}$.

$5^{\underline{o}}$) Se $c > 0$ e $\epsilon > 1$, a equação polar é da forma:

(i) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{\cosh\theta}{d} + \dfrac{1}{\epsilon d}$

Neste caso, Γ é uma hipérbole Lorentziana(ver Figura 4.4).

Agora, fazendo-se uma mudança de coordenadas, mostraremos que Γ é um arco da elipse Euclidiana

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad com\ a = b\sqrt{\epsilon^2 - 1} \tag{4.13}$$

com extremos nos pontos $G_1 = (-d, \dfrac{-b}{\epsilon})$ e $G_2 = (d, \dfrac{-b}{\epsilon})$, obtidos pelas intersecções da elipse com a reta L.

Consideremos uma tranformação de coordenadas de modo que $F = (0, \dfrac{-b}{\epsilon})$ e que $L : v = \dfrac{-b}{\epsilon}$, onde $d = b\epsilon - \dfrac{b}{\epsilon}$. Sendo (u, v) o novo sistema de coordenadas, temos:

$$\begin{cases} u &= x; \\ v &= z - b\epsilon \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x &= r\sinh\theta; \\ z &= r\cosh\theta. \end{cases}$$

Então ,

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} &= \frac{x^2}{b^2(\epsilon^2-1)} + \frac{(z-b\epsilon)^2}{b^2} = \frac{x^2 + (z^2 - 2zb\epsilon + b^2\epsilon^2)(\epsilon^2-1)}{b^2(\epsilon^2-1)} = \\ &= \frac{x^2 + z^2 + 2zb\epsilon - b^2\epsilon^2 + \epsilon^2 z^2 - b^2 - \epsilon^4}{b^2(\epsilon^2-1)}. \end{aligned}$$

Usando as expressões de x e z na equação acima obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} &= \frac{r^2\sinh^2\theta - r\cosh^2\theta + \epsilon^2 r^2\cosh^2\theta + 2b\epsilon r\cosh\theta - 2b\epsilon^3 r\cosh\theta + b^2\epsilon^2 - b^2\epsilon^4}{b^2(\epsilon^2-1)} \\ &= \frac{-r^2 - 2b(\epsilon^2-1)\epsilon r\cosh\theta + \epsilon^2 r^2\cosh^2\theta + b^2\epsilon^2(\epsilon^2-1)}{b^2(\epsilon^2-1)} \\ &= \frac{-r^2 - 2d\epsilon^2 r\cosh\theta + \epsilon^2 r^2\cosh^2\theta}{b^2(\epsilon^2-1)} \\ &= \frac{-\epsilon^2(d - r\cosh\theta)^2 + 2d\epsilon^2 r\cosh\theta - \epsilon^2 r^2\cosh^2\theta}{b^2(\epsilon^2-1)} \\ &= \frac{-\epsilon^2 d^2 + b^2\epsilon^2(\epsilon^2-1)}{b^2(\epsilon^2-1)} \\ &= \frac{b^2(\epsilon^2-1)^2 + b^2(\epsilon^2-1)}{b^2(\epsilon^2-1)} = 1. \end{aligned}$$

Logo, Γ satisfaz a equação da elipse Euclidiana (4.13).
Sua intersecção com a reta L é dada por :

$$\begin{cases} v = \dfrac{-b}{\epsilon}; \\ \dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{v^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Logo $\dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{\frac{b^2}{\epsilon^2}}{b^2} = 1$, ou seja, $u^2 = \dfrac{b^2(\epsilon^2 - 1)}{\epsilon^2}$. Portanto $u = \pm(b\epsilon - \dfrac{b}{\epsilon})$, ou ainda, $u = \pm\, d$.
Os pontos de intersecção são, então, dados por $G_1 = (-d, \dfrac{-b}{\epsilon})$ e $G_2 = (d, \dfrac{b}{\epsilon})$.

Como $r(\theta)$ está definida para todo θ real segue que $\lim\limits_{\theta \to \pm\infty} x(\theta) = \pm d$ e $z < 0$. Concluimos assim que Γ está abaixo da reta L, entre G_1 e G_2.

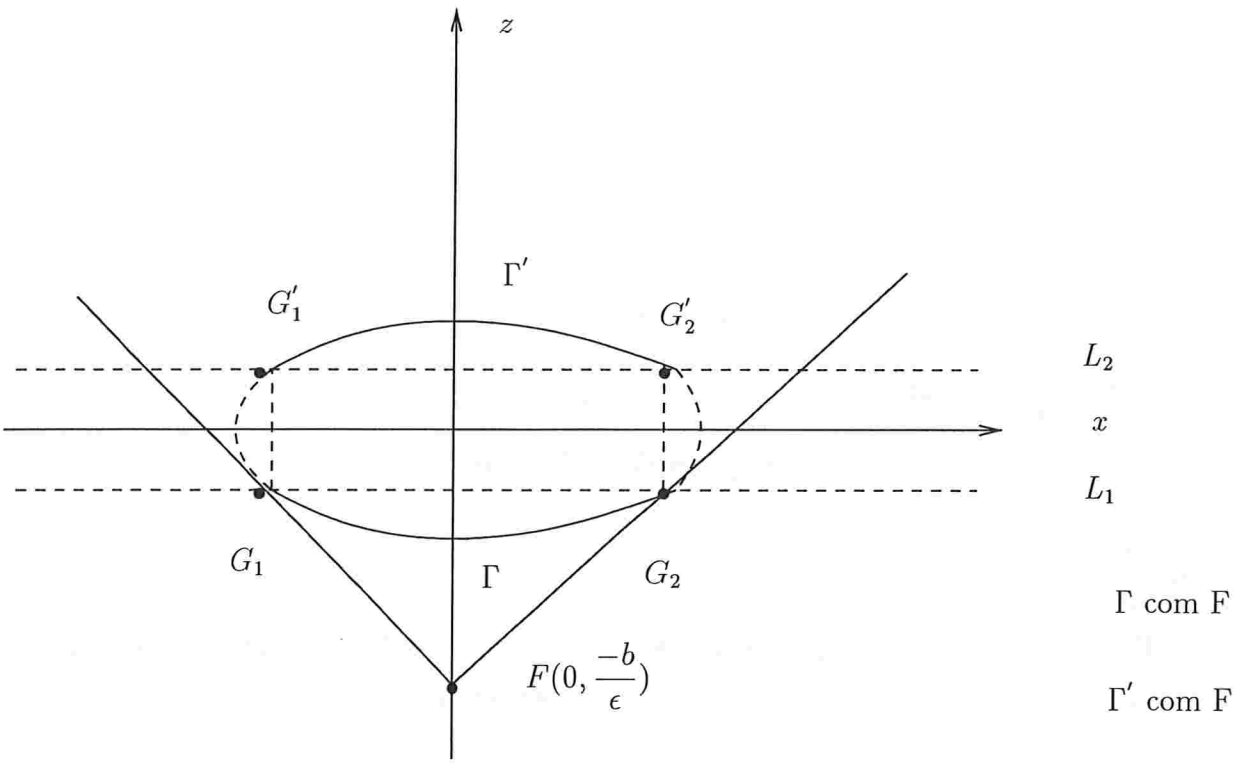


Figura 4.4: Hipérbole Lorentziana

(ii) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{-\cosh\theta}{d} + \dfrac{1}{\epsilon d}$.

Neste caso, Γ representa a mesma curva que no caso anterior, exceto que devemos tomar $\overrightarrow{F'P} = \big(r\sinh\theta,\ r\cosh\theta\big)$, onde $F' = (0\ ,\ -b\epsilon)$.

$6^{\underline{o}}$) Se $c < 0$ e $\epsilon > 1$, a equação polar é da forma :
$\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{\cosh\theta}{d} - \dfrac{1}{\epsilon d}$.

Fazendo uma mudança de coordenadas, mostra-se facilmente, que Γ satisfaz a equação da elipse Euclidiana (4.13). Além disso, a função $r(\theta)$ está definida no intervalo $]\ \ln\dfrac{1}{\epsilon}\ ,\ \ln\epsilon\ [$.

De fato:
$r(\theta) = \dfrac{\epsilon d}{-1+\cosh\theta} > 0 \iff -1+\epsilon\ \cosh\theta > 0 \iff -1+\epsilon(\dfrac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}) > 0 \iff$
$\epsilon e^{2\theta} - 2e^{\theta} + \epsilon > 0 \iff \theta \in \mathbb{R}$. Como $r'(\theta) = \dfrac{-\epsilon^2 d\sinh\theta}{(-1+\epsilon\cosh\theta)^2}$ segue que

$$\begin{aligned} r^2(\theta) - r'^2(\theta) &= \frac{\epsilon^2 d^2}{(-1+\epsilon\cosh\theta)^2} - \frac{\epsilon^4 d^2\sinh^2\theta}{(-1+\epsilon\cosh\theta)^4} \\ &= \frac{\epsilon^2 d^2(1-2\epsilon\cosh\theta+\epsilon^2\cosh^2\ \theta) - \epsilon^4 d^2\ \sinh^2\theta}{(1-\epsilon\cosh\theta)^4} \\ &= \frac{\epsilon^2 d^2(1+\epsilon^2-2\epsilon\cosh\theta}{(1-\epsilon\cosh\theta)^4}. \end{aligned}$$

Assim, $r^2(\theta) - r'^2(\theta) > 0 \iff 1+\epsilon^2 - 2\epsilon\ \cosh\theta > 0 \iff \ln\dfrac{1}{\epsilon} < \theta < \ln\epsilon$.

(III) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \lambda\sinh\theta + c,\quad c > 0$ ou $c < 0$.

$1^{\underline{o}}$) Quando $c > 0$ e $\epsilon > 0$, a equação polar é da forma:

(i) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{\sinh\theta}{d} + \dfrac{1}{\epsilon d}$.

Reescrevendo esta equação na forma $r = \epsilon(d - r\ \sinh\theta)$ e fazendo uma mudança de coordenadas, mostraremos que Γ é parte da hipérbole Euclidiana

$$\frac{-u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1,\quad com\ b = a\sqrt{1+\epsilon^2}, \tag{4.14}$$

com extremos nos pontos G_1 e G_2, obtidos pela intersecção da hipérbole com as retas $L_1 :\ z = \dfrac{a}{\epsilon}\ \ L_2 = -\dfrac{a}{\epsilon}$.

Consideremos uma transformação de coordenadas de modo que $F = (-a\epsilon, 0)$ e

$L: \ v = \frac{a}{\epsilon}$, onde $d = a(\frac{1}{\epsilon} + \epsilon)$. Sendo (u, v) o novo sistema de coordenadas temos:

$$\begin{cases} u &= x - a\ \epsilon; \\ v &= z \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x &= r \sinh\theta; \\ z &= r\cosh\theta. \end{cases}$$

Então ,

$$\begin{aligned} -\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} &= -\frac{(x - a\ \epsilon)^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2(1+\epsilon^2)} \\ &= \frac{-z^2 - \epsilon^2 x^2 + 2a\ x\epsilon - a^2\ \epsilon^2 + 2a\ \epsilon^3 x - a^2\epsilon^4 + z^2}{a^2(1+\epsilon^2)} \\ &= \frac{-r^2\sinh^2\theta - \epsilon^2 r^2 \sinh^2\theta + 2a\epsilon r\sinh\theta + 2a\epsilon^3 r\sinh\theta + r^2\cosh^2\theta - a^2(\epsilon^2 - \epsilon^4)}{a^2(1+\epsilon^2)} \\ &= \frac{a^2(1+\epsilon^2)^2 - a^2\epsilon^2(1+\epsilon^2)^2}{a^2(1+\epsilon^2)} = \frac{a^2(1+\epsilon^2)^2(1+\epsilon^2-\epsilon^2)}{a^2(1+\epsilon^2)} = 1 \end{aligned}$$

Temos

$r(\theta) = \dfrac{\epsilon d}{1 + \epsilon\ \sinh\theta} > 0 \iff 1 + \epsilon\ \sinh\theta > 0 \iff 1 + \epsilon(\dfrac{e^{2\theta} - 1}{2\ e^{\theta}} > 0 \iff$
$\epsilon e^{2\theta} + 2e^{\theta} - \epsilon > 0 \iff \theta\ > ln\ \epsilon.$

Como $r'(\theta) = \dfrac{-\epsilon^2 d\cosh\theta}{(1 + \epsilon\sinh\theta)^2}$, segue que

$$\begin{aligned} r^2(\theta) - r'^2(\theta) &= \frac{\epsilon^2 d^2}{(1+\epsilon\ \sinh\theta)^2} - \frac{\epsilon^4 d^2 cosh^2\ \theta}{(1+\epsilon\sinh\ \theta)^4} \\ &= \frac{\epsilon^2 d^2 + 2\epsilon^3 d^2\sinh\theta + \epsilon^4 d^2\ \sinh^2\theta - \epsilon^4 d^2\ \cosh^2\theta}{(1+\epsilon\ \sinh\theta)^4} \\ &= \frac{\epsilon^2 d^2(1 - \epsilon^2 + 2\epsilon\ \sinh\theta}{(1+\epsilon\ \sinh\theta)^4}. \end{aligned}$$

Assim, $r^2(\theta) - r'^2(\theta) > 0 \iff 1 - \epsilon^2 + 2\epsilon\ \sinh\theta > 0 \iff 1 + 2\epsilon(\dfrac{e^{2\theta} - 1}{2\ e^{\theta}} - \epsilon^2 > 0 \iff$
$\epsilon\ e^{2\theta} + (1 - \epsilon^2)e^{\theta} - \epsilon > 0 \iff \theta > \ ln\ \epsilon\ .$

Logo , $r(\theta)$ está definida para $\theta > \ ln\ \epsilon$. Além disso,

$$\lim_{\theta \to \ \ln\ \epsilon} x(\theta) = \lim_{\theta \to \ \ln\ \epsilon} \frac{\epsilon d\ \sinh\theta}{1 + \epsilon\ \sinh\theta} = -\frac{a}{\epsilon} + a\ \epsilon$$

e

$$\lim_{\theta \to \infty} x(\theta) = \lim_{\theta \to \infty} \frac{\epsilon d\ \sinh\theta}{1 + \epsilon\ \sinh\theta} = \frac{a}{\epsilon} + a\ \epsilon.$$

Portanto Γ está contida entre as retas $L_1 : x = -\frac{a}{\epsilon} + a\,\epsilon$ e $L_2 : x = \frac{a}{\epsilon} + a\,\epsilon$

Observamos que, sem fazer restrições para $\epsilon > 0$, obtemos que Γ com equação polar $\frac{1}{r(\theta)} = \frac{sinh\ \theta}{d} + \frac{1}{\epsilon\, d}$ é parte da hipérbole Euclidiana (4.14), ou seja, este é um caso em que a elípse($0 < \epsilon < 1$), a hipérbole ($\epsilon > 1$) ou parábola ($\epsilon = 1$) Lorentzianas tem aspecto gráfico de uma hipérbole Euclidiana.

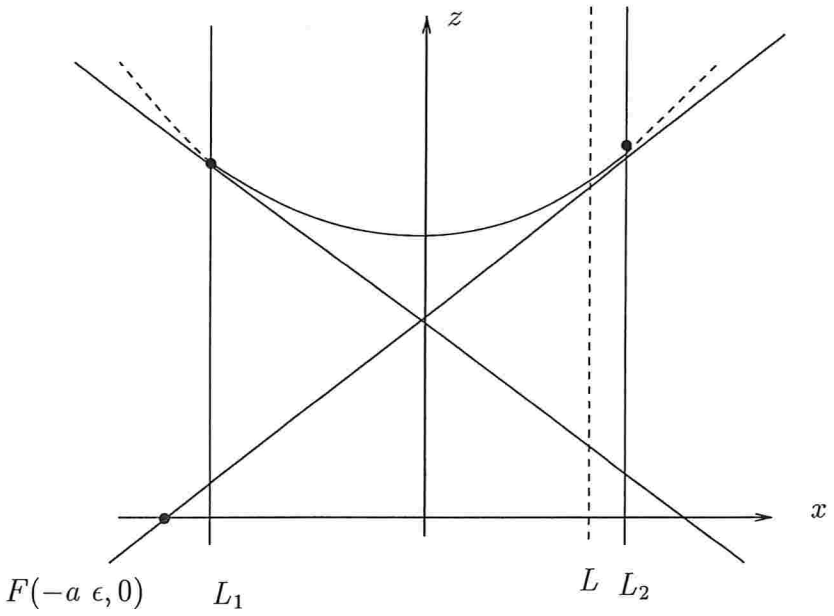


Figura 4.5: Hipérbole Euclidiana (L: diretriz $x = \frac{a}{\epsilon}$)

$2^{\underline{0}}$) Quando $c < 0$ e $\epsilon > 0$, a equação polar é da forma:

$$\frac{1}{r(\theta)} = \frac{\sinh\theta}{d} - \frac{1}{\epsilon\, d}.$$

Neste caso, Γ é de *tipo tempo* e será estudada no próximo capítulo.

Finalmente estudaremos o caso em a equação polar é da forma:

(IV) $\frac{1}{r(\theta)} = ae^{-\theta} + c$, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$.

para isto consideremos $A, B > 0$, de modo que a equação polar acima é dividida em três casos:

(i) $\dfrac{1}{r(\theta)} = Ae^{-\theta} + B$

Reescrevendo esta equação na forma $r(\theta) = \dfrac{1}{Ae^{-\theta} + B}$, temos que $r(\theta) > 0$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$ e $r'(\theta) = \dfrac{-Ae^{\theta}}{(Ae^{\theta} + B)^2}$. Logo

$$\begin{aligned} r^2(\theta) - r'^2(\theta) &= \frac{1}{(Ae^{\theta} + B)^2} - \frac{A^2e^{2\theta}}{(Ae^{\theta} + B)^4} = \frac{(Ae^{\theta} + B)^2 - A^2e^{2\theta}}{(Ae^{\theta} + B)^4} = \\ &= \frac{A^2e^{2\theta} + 2ABe^{\theta} + B^2 - A^2e^{2\theta}}{(Ae^{\theta} + B)^4} = \frac{2ABe^{\theta} + B^2}{(Ae^{\theta} + B)^2} > 0, \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto $r(\theta)$ está definida para todo θ real.

Tomando $a > 0$ e $k > 0$ tal que $B = \dfrac{2}{k}$ e $A = \dfrac{2\sqrt{2}a}{r^2}$, temos $r(\theta) = \dfrac{1}{\frac{2\sqrt{2}a}{r^2}ae^{-\theta} + \frac{2}{k}}$. Assim $r(2\sqrt{2}a + 2ke^{\theta}) = e^{\theta}k^2 \implies k^2 = r(2\sqrt{2}ae^{-\theta} + 2k)$. Somando $-2kr + r^2$ a ambos os membros, obtemos $k^2 - 2rk + r^2 = r(2\sqrt{2}ae^{-\theta} + 2k) - 2rk + r^2$, ou seja,

$$(k - r)^2 = 2\sqrt{2}ae^{-\theta}r + r^2. \tag{4.15}$$

Como $B = \dfrac{2}{k}$, ou seja, $\dfrac{1}{k} = \dfrac{B}{2}$ e $\dfrac{1}{r} = \dfrac{2\sqrt{2}a}{k^2}e^{-\theta} + \dfrac{2}{k}$, segue que $\dfrac{1}{r} > \dfrac{1}{k}$ e conseqüentemente $k - r > 0$.

Logo de (4.15) temos:

$$k = \sqrt{2\sqrt{2}are^{-\theta} + r^2} + r. \tag{4.16}$$

A interpretação geométrica de (4.16) é a seguinte. Se $P = (r\ \sinh\theta, r\cosh\theta)$, então $r = ||\overrightarrow{OP}||$, onde $O = (0,0)$. Consideremos o ponto $O' = (-\sqrt{2}a, \sqrt{2}a)$. Então $\overrightarrow{O'P} = (r\ \sinh\theta + \sqrt{2}a, r\cosh\theta + \sqrt{2}a)$. Assim, $||\overrightarrow{O'P}|| = \sqrt{2\sqrt{2}are^{-\theta} + r^2}$. Logo $||\overrightarrow{O'P}|| + ||\overrightarrow{OP}|| = k$.

Usando o sistema de coordenadas de *tipo luz* $\{u, v\}$ tal que $O = (a, 0)$ e $O' = (-a, 0)$, mostraremos que Γ é o ramo superior $u > 0$ e $v > 0$ da hipérbole Euclidiana

$$8k^2uv - 16a^2v^2 = k^4, \tag{4.17}$$

com assíntotas $v = 0$ e $k^2u = 2a^2v$.

Consideremos a transformação de coordenadas

$$\begin{cases} u &= \dfrac{x+z}{\sqrt{2}} + a = r\dfrac{e^{\theta}}{\sqrt{2}} + a \\ v &= \dfrac{-x+z}{\sqrt{2}} = r\dfrac{e^{-\theta}}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Então,usando (4.15), obtemos:

$$\begin{aligned} 8k^2uv - 16a^2v^2 &= 8k^2(\tfrac{r^2}{2} + ar\tfrac{e^{-\theta}}{\sqrt{2}}) - 16a^2r^2\tfrac{e^{-2\theta}}{2} = \\ &= 8(2\sqrt{2}are^{-\theta} + 2kr)(\tfrac{r^2}{2} + ar\tfrac{e^{-\theta}}{\sqrt{2}}) - 8a^2r^2e^{-2\theta} = \\ &= 8\sqrt{2}ar^3e^{-\theta} + 16a^2r^2e^{-2\theta} + 8kr^3 + 16akr^2\tfrac{e^{-\theta}}{\sqrt{2}} - 8a^2r^2e^{-2\theta} = \\ &= 4r^2(2\sqrt{2}are^{-\theta} + 2kr) + 8akr^2e^{-\theta} + 8a^2r^2e^{-2\theta} = \\ &= 8a^2r^2e^{-2\theta} + 8\sqrt{2}akr^2e^{-\theta} + 4kr^2 = \\ &= (2\sqrt{2}are^{-\theta} + 2kr)^2 = \\ &= k^4. \end{aligned}$$

Observemos na Figura 4.6 que $v = 0$ é uma assíntota da hipérbole. Além disso, pela intersecção da hipérbole com a reta $u = a$ segue que $G = (a\ ,\ \dfrac{k^2}{4a})$. Logo a intersecção da reta $u = a$ com a outra assíntota é $Q = (a\ ,\ \dfrac{k^2}{2a})$. Portanto a equação desta assíntota é $v = \dfrac{k^2u}{2a^2}$.

(ii) $\dfrac{1}{r(\theta)} = Ae^{-\theta} - B.$

Neste caso, de maneira análoga ao caso (i) anterior mostra-se que Γ é parte da hipérbole Euclidiana (4.17), mas é de *tipo tempo* e portanto será estudada no próximo capítulo.

(iii) $\dfrac{1}{r(\theta)} = -Ae^{-\theta} + B.$

Neste caso, usando $O' = (-a, 0)$ como origem, ou seja, $\overrightarrow{O'P} = \big(r\ \sinh\theta\ ,\ r\ \cosh\theta\big)$, mostra-se facilmente que Γ representa a mesma curva obtida no caso (i). Além disso, a função $r(\theta)$ está definida no intervalo $]\ln\dfrac{2A}{B}\ ,\ +\infty[$, pois

$r(\theta) = \dfrac{1}{(-Ae^{-\theta} + B)} > 0 \iff -Ae^{-\theta} + B > 0 \iff \theta > \ln\dfrac{A}{B}$. Além disso,

$$r'(\theta) = \frac{-Ae^{-\theta}}{(-Ae^{-\theta}+B)^2} \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} r^2(\theta) - r'^2(\theta) &= \frac{1}{(-Ae^{-\theta}+B)^2} - \frac{A^2e^{-2\theta}}{(-Ae^{-\theta}+B)^4} = \frac{(-Ae^{-\theta}+B)^2 - A^2e^{-2\theta}}{(-Ae^{-\theta}+B)^4} = \\ &= \frac{A^2e^{-2\theta} - 2ABe^{-\theta} + B^2 - A^2e^{-2\theta}}{(-Ae^{-\theta}+B)^4} = \frac{-2ABe^{-\theta}+B^2}{(-Ae^{-\theta}+B)^2}. \end{aligned}$$

Logo $r^2(\theta) - r'^2(\theta) > 0 \iff -2ABe^{-\theta} + B^2 > 0 \iff \theta > \dfrac{\ln 2A}{B}$.

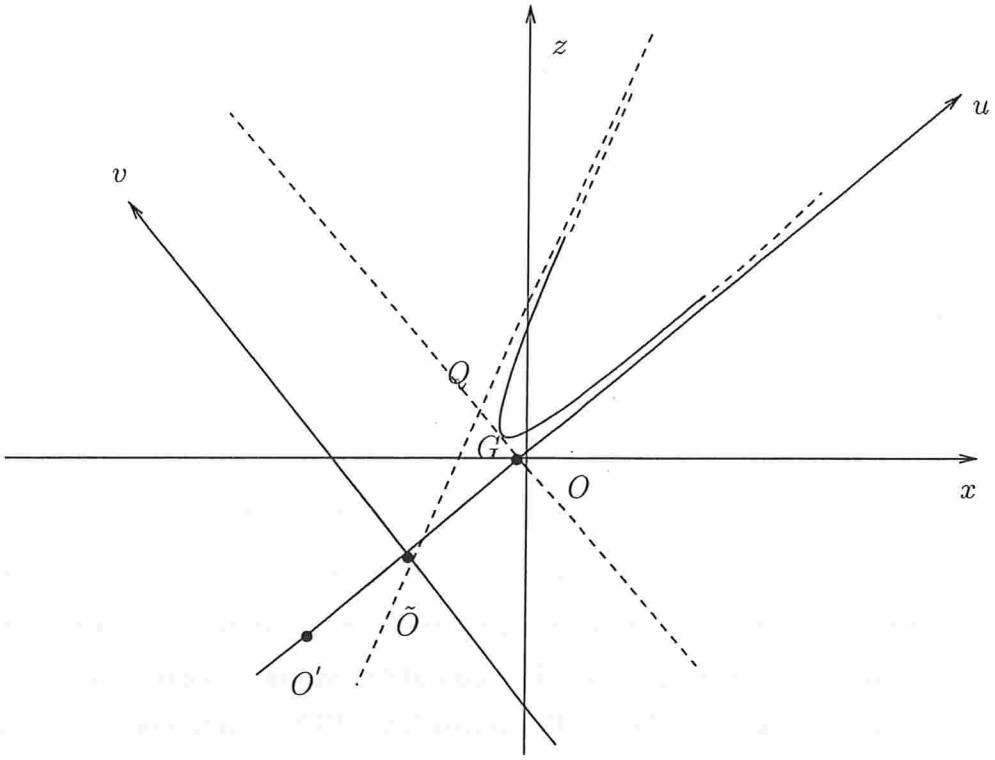


Figura 4.6: Hipérbole Euclidiana

4.3 Caracterização e estudo da completude das superfícies de revolução com eixo de tipo espaço

Nesta seção, resumiremos as seções 4.1 e 4.2 no teorema 4.3.1 e estudaremos a completude das superfícies de revolução de tipo espaço, obtidas acima.

Teorema 4.3.1 *As superfícies de revolução, de tipo espaço, com curvatura média constante H em $\mathbb{L}^3$, obtidas pela rotação de $\Omega_s(\theta)$ ao longo do eixo x, são dadas pelas equações polares:*

$$
\begin{aligned}
&S_o)\ r(\theta) = \frac{d}{1+\cosh\theta},\ \forall\theta\in\mathbb{R},\ \epsilon=1,\ H=0;\\
&S_1)\ r(\theta) = \frac{\epsilon d}{1+\epsilon\cosh\theta},\ \forall\theta\in\mathbb{R},\ 0<\epsilon<1,\ H=\frac{\epsilon^2-1}{2\epsilon d};\\
&S_2)\ r(\theta) = \frac{\epsilon d}{1-\epsilon\cosh\theta},\ \ln\epsilon<\theta<\ln\frac{1}{\epsilon},\ 0<\epsilon<1,\ H=\frac{\epsilon^2-1}{2\epsilon d};\\
&S_3)\ r(\theta) = \frac{\epsilon d}{1+\epsilon\cosh\theta},\ \forall\theta\in\mathbb{R},\ \epsilon>1,\ H=\frac{\epsilon^2-1}{2\epsilon d};\\
&S_4)\ r(\theta) = \frac{\epsilon d}{-1+\epsilon\cosh\theta},\ \ln\frac{1}{\epsilon}<\theta<\ln\epsilon,\ \epsilon>1,\ H=\frac{1-\epsilon^2}{2\epsilon d};\\
&S_5)\ r(\theta) = \frac{1}{c},\ \forall\theta\in\mathbb{R},\ H=\frac{-c}{2},\ c\neq 0;\\
&S_6)\ \Omega_s(\theta)\ \textit{é dada por}\ x^2-z^2=\frac{-1}{H^2},\ z<0,\forall\theta\in\mathbb{R}, H\neq 0;\\
&S_7)\ r(\theta) = \frac{\epsilon d}{1+\epsilon\sinh\theta},\ \theta>\ln\epsilon,\ \epsilon>0,\ H=-\frac{\epsilon^2+1}{2\epsilon d};\\
&S_8)\ r(\theta) = \frac{1}{ae^{-\theta}+c},\ \forall\theta\in\mathbb{R},\ a>0,\ c>0,\ H=\frac{-c}{2};\\
&S_9)\ r(\theta) = \frac{1}{-ae^{-\theta}+c},\ \theta>\ln\frac{2a}{c},\ a>0,\ c>0,\ H=\frac{-c}{2}.
\end{aligned}
$$

Observemos que a superfície S_6 corresponde à superfície do Teorema 4.1.6.

Sabemos que uma superfície de revolução pode ser vista como produto cartesiano da curva geratriz Ω pelas órbitas. Então para estudarmos a completude dessas superfícies, basta mostrarmos que a curva geratriz Ω é completa, já que, claramente, as órbitas (os círculos Lorentzianos) são completas. Por outro lado, $\Omega(\theta)$ é uma geodésica em S e se é não completa, a superfície é não geodesicamente completa e consequentemente S é não completa.

Agora, observando que a curva geratriz, em cada caso, é uma geodésica da superfície, temos o seguinte teorema:

Teorema 4.3.2 *As únicas superfícies de revolução de tipo espaço com curvatura média H constante em $\mathbb{L}^3$, que são obtidas pela rotação de $\Omega(\theta)$ ao longo do eixo x são S_2, S_4, S_5, S_6 e S_9.*

Demonstração:

O parâmetro comprimento de arco para $\Omega_s(\theta)$ é dado por $s(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{x'^2(u) - z'^2(u)}dr$. Tomando $\theta_0 = 0$ calcularemos o limite de $s(\theta)$ para θ tendendo aos extremos do intervalo de definição, em cada caso:

(a) Para S_0, a função $r(\theta)$ está definida em todo $\mathbb{R}$ e $s(\theta) = \frac{1}{2}\tanh(\frac{u}{2})$.

Como $\lim_{\theta\to-\infty} s(\theta) = \frac{\sqrt{d^2}}{2}$ e $\lim_{\theta\to\infty} s(\theta) = -\frac{\sqrt{d^2}}{2}$, segue que o o parâmetro comprimento de arco de $\Omega(\theta)$ é finito . Logo $\Omega(\theta)$ não é completa. Assim, a superfície S_0 não é geodesicamente completa e portanto pelo Teorema 3.2.5, não é completa.

(b) Para S_1, temos $s(\theta) = \frac{\epsilon d}{\epsilon^2 - 1}\ln(\frac{\epsilon + e^{-\theta}}{1 + \epsilon e^{-\theta}})$, $0 < \epsilon < 1$, $\forall\theta \in \mathbb{R}$.

Como $\lim_{\theta\to-\infty} s(\theta) = \frac{\epsilon d}{1 - \epsilon^2 \ln\epsilon}$ e $\lim_{\theta\to-\infty} s(\theta) = \frac{\epsilon d}{-1 - \epsilon^2 \ln\epsilon}$, segue que o parâmetro comprimento de arco de $\Omega(\theta)$ é finito. Logo $\Omega(\theta)$ não é completa. Assim, a superfície S_1 não é geodesicamente completa e portanto pelo teorema 3.2.5, não é completa.

Analogamente, calculando-se os convenientes limites concluimos que as superfícies S_3, S_7 e S_8 são não completas.

(c) Para S_2, temos $s(\theta) = \frac{\epsilon d}{-1 + \epsilon^2}\ln|\frac{-e^{-\theta/2} + \epsilon e^{\theta/2}}{\epsilon e^{-\theta/2} - \epsilon e^{-\theta/2}}| + k$, k constante, $0 < \epsilon < 1$, $\forall\theta \in \mathbb{R}$.

Como $\lim_{\theta\to\ln\epsilon} s(\theta) = -\infty$ e $\lim_{\theta\to\ln\frac{1}{\epsilon}} s(\theta) = \infty$ segue que $\Omega(\theta)$ é completa. Portanto, S_2 é completa.

Analogamente, calculando-se os limites convenientes concluimos que as superfícies S_4 e S_9 são completas.

(c) S_5 e S_6 são claramente completas, pois correspodem ao cilindro Lorentziano e ao hiperbolóide, respectivamente.

∎

4.4 Gráficos das geratrizes e das superfícies de revolução com eixo de tipo espaço

Nesta seção, tomaremos casos particulares para representar os gráficos de algumas cônicas obtidas acima, das curvas geradas por um dos seus focos e das respectivas su-

perfícies de revolução de tipo espaço.

Nas figuras abaixo, cGi, cgi e Si são a cônica Γ_i, a curva Ω_i e a superfície S_i, respectivamente.

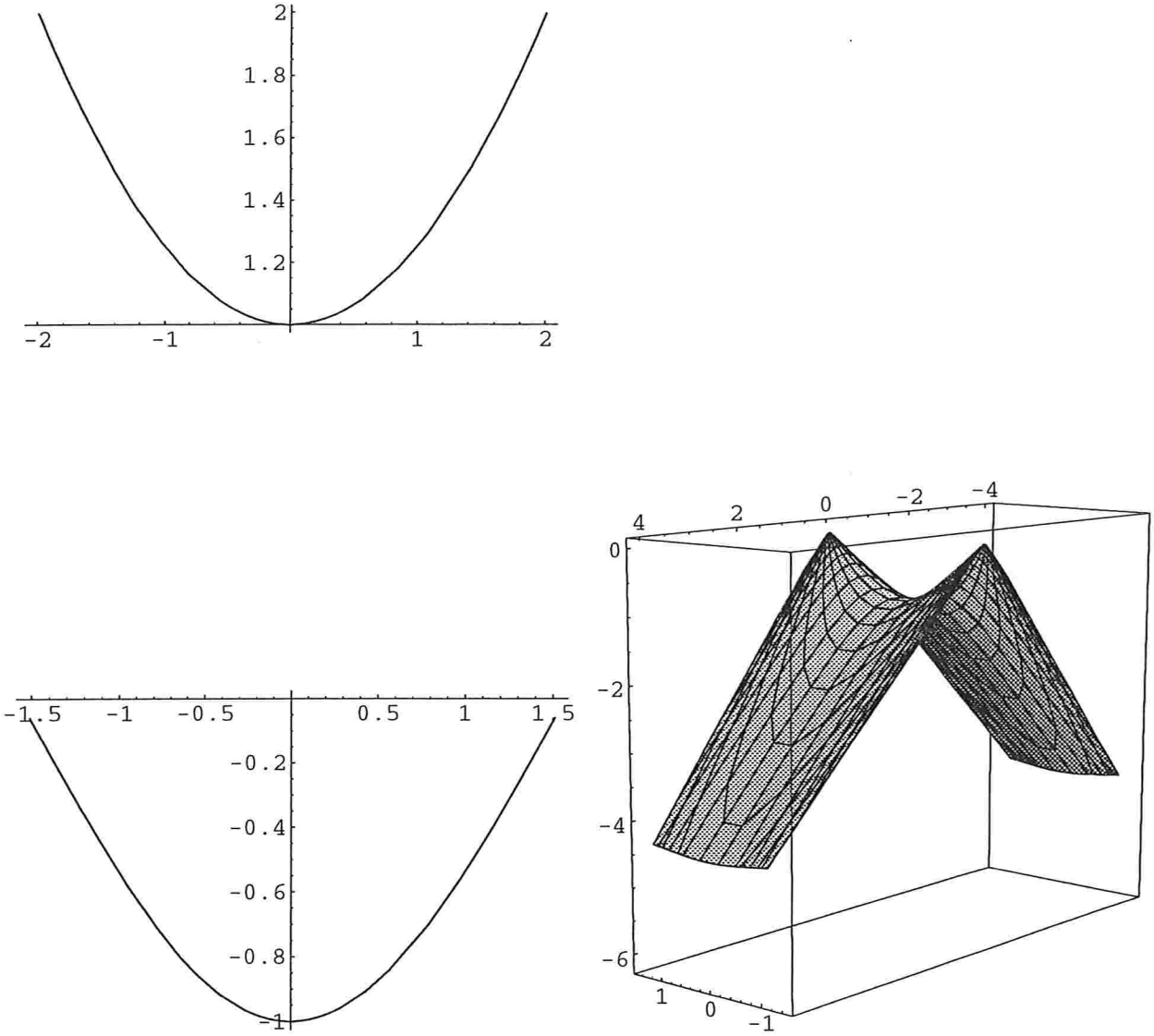


Figura 4.7: **Gráficos cG0 , cg0 e S0 com** $d = 2$, $\epsilon = 1$, $-7 < \theta < 7$ **e** $-3 < t < 3$.

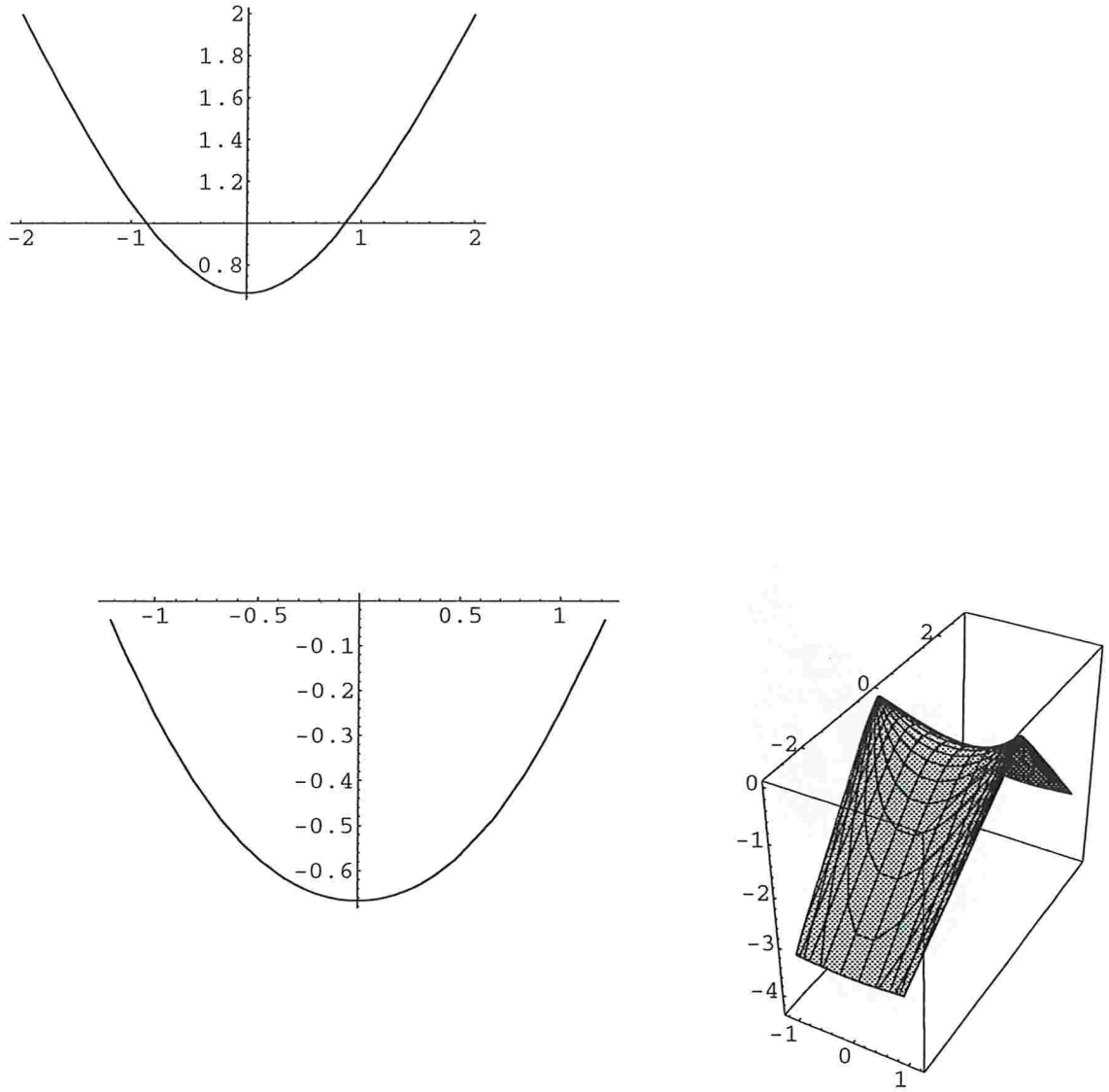


Figura 4.8: **Gráficos cG1 , cg1 e S1 com** $d = \dfrac{1}{2}, \epsilon = 2,\ \theta \in]-7, 7[$ **e** $-3 < t < 3$.

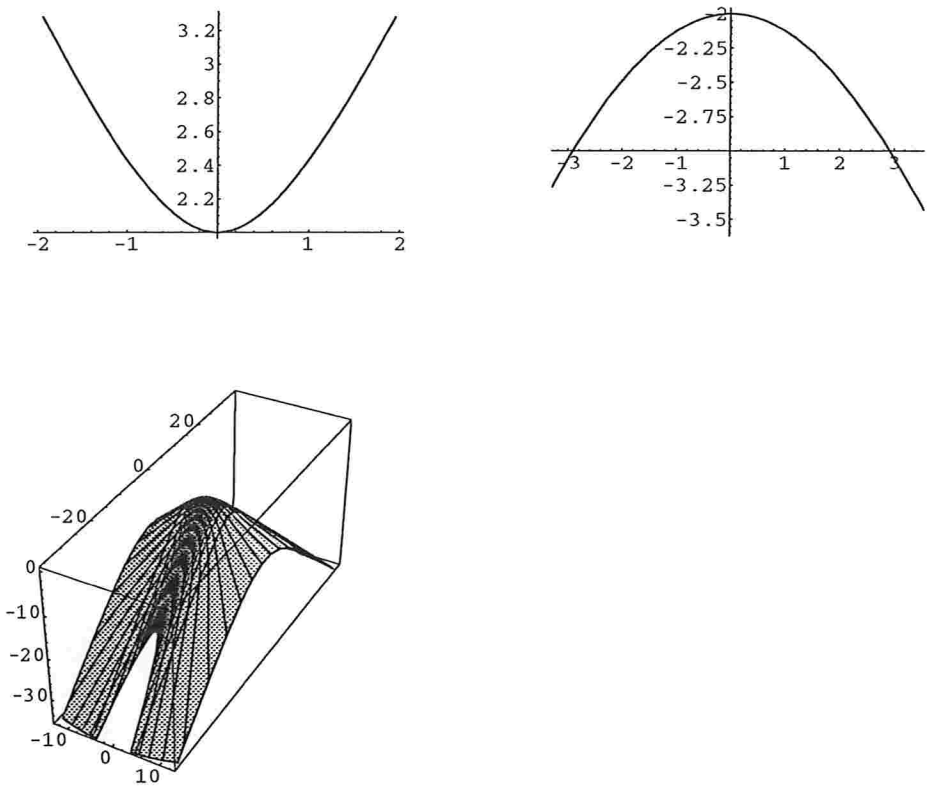


Figura 4.9: **Gráficos cG2 , cg2 e S2 com** $d = 1, \epsilon = \dfrac{1}{2}$, $\ln\dfrac{1}{2} < \theta < \ln 2$ **e** $-2 < t < 2$.

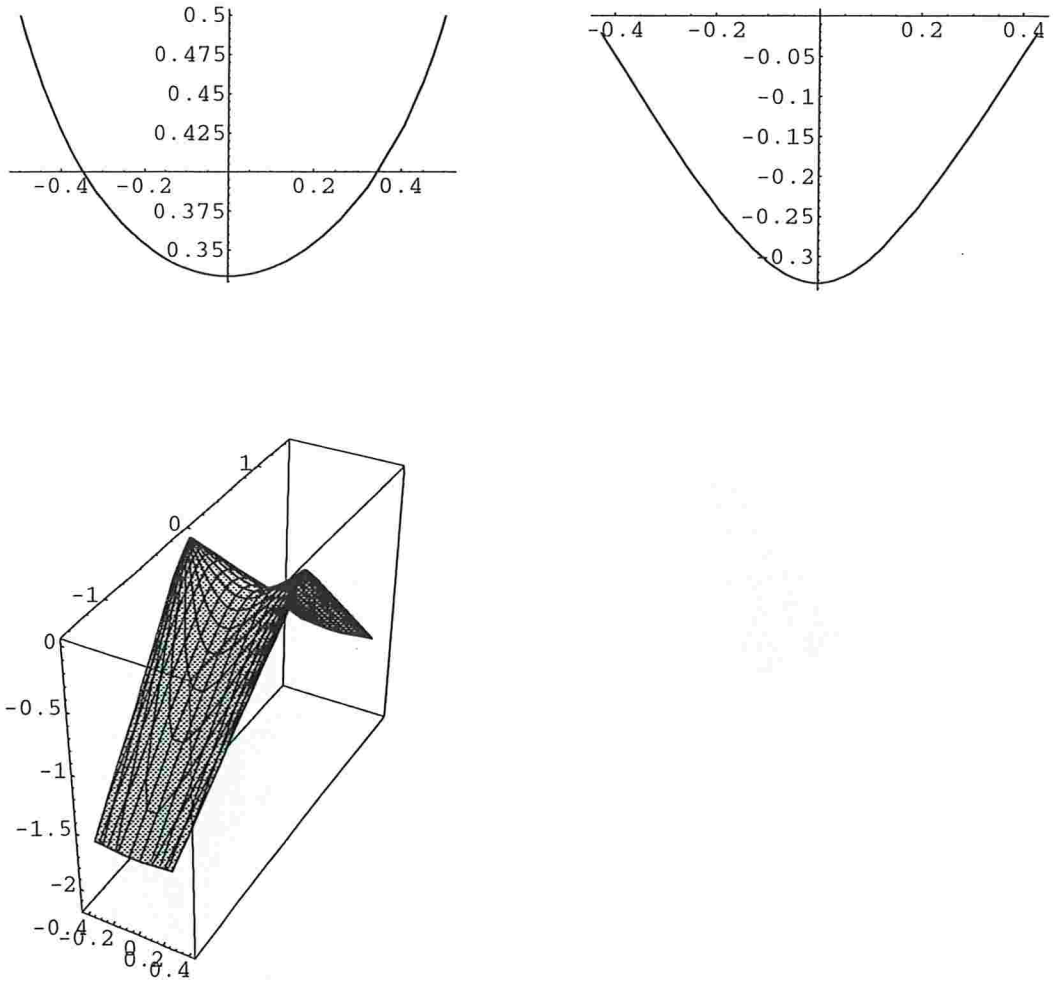


Figura 4.10: **Gráficos cG3 , cg3 e S3 com** $\epsilon = 2, d = \frac{1}{2}$, $\theta \in]-7,7[$ **e** $-3 < t < 3$.

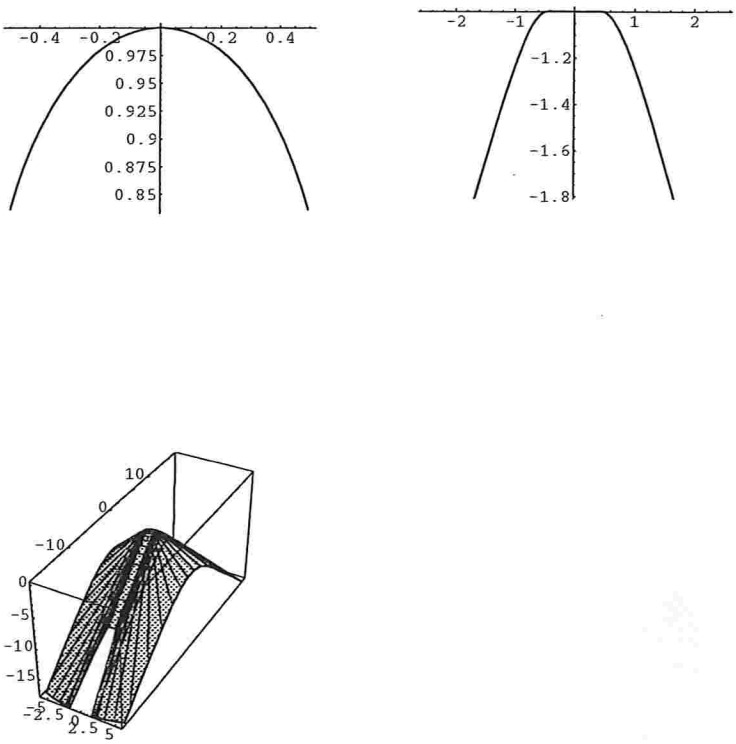


Figura 4.11: **Gráficos cG4 , cg4 e S4 com** $\epsilon = 2, d = \frac{1}{2}$, $\theta \in]\ln\frac{1}{2}, \ln 2[$ **e** $-3 < t < 3$.

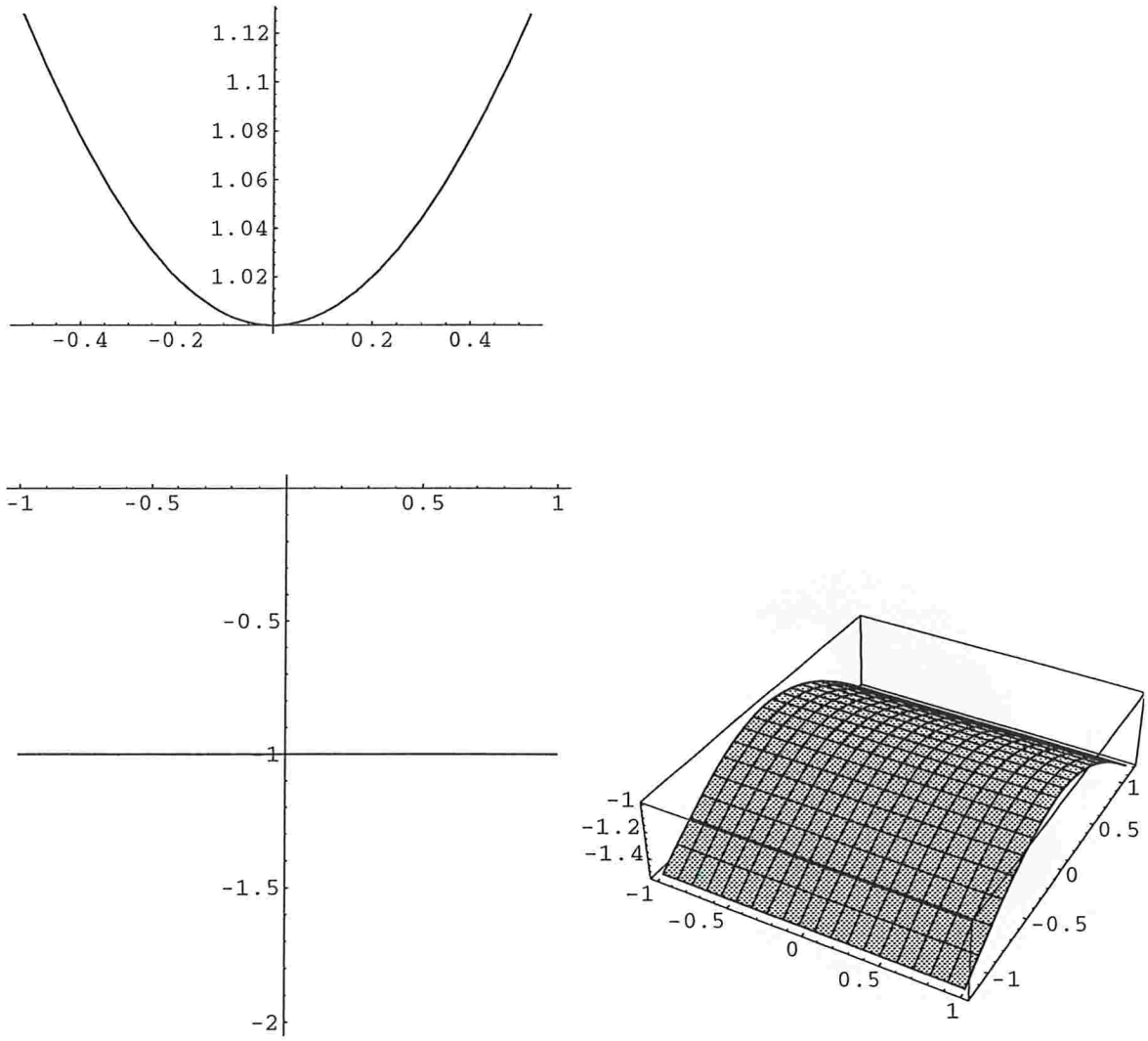


Figura 4.12: **Gráficos cG5 , cg5 e S5 com** $c = 1$ **e** $-\frac{1}{2} < \theta < \frac{1}{2}$, $-3 < t < 3$.

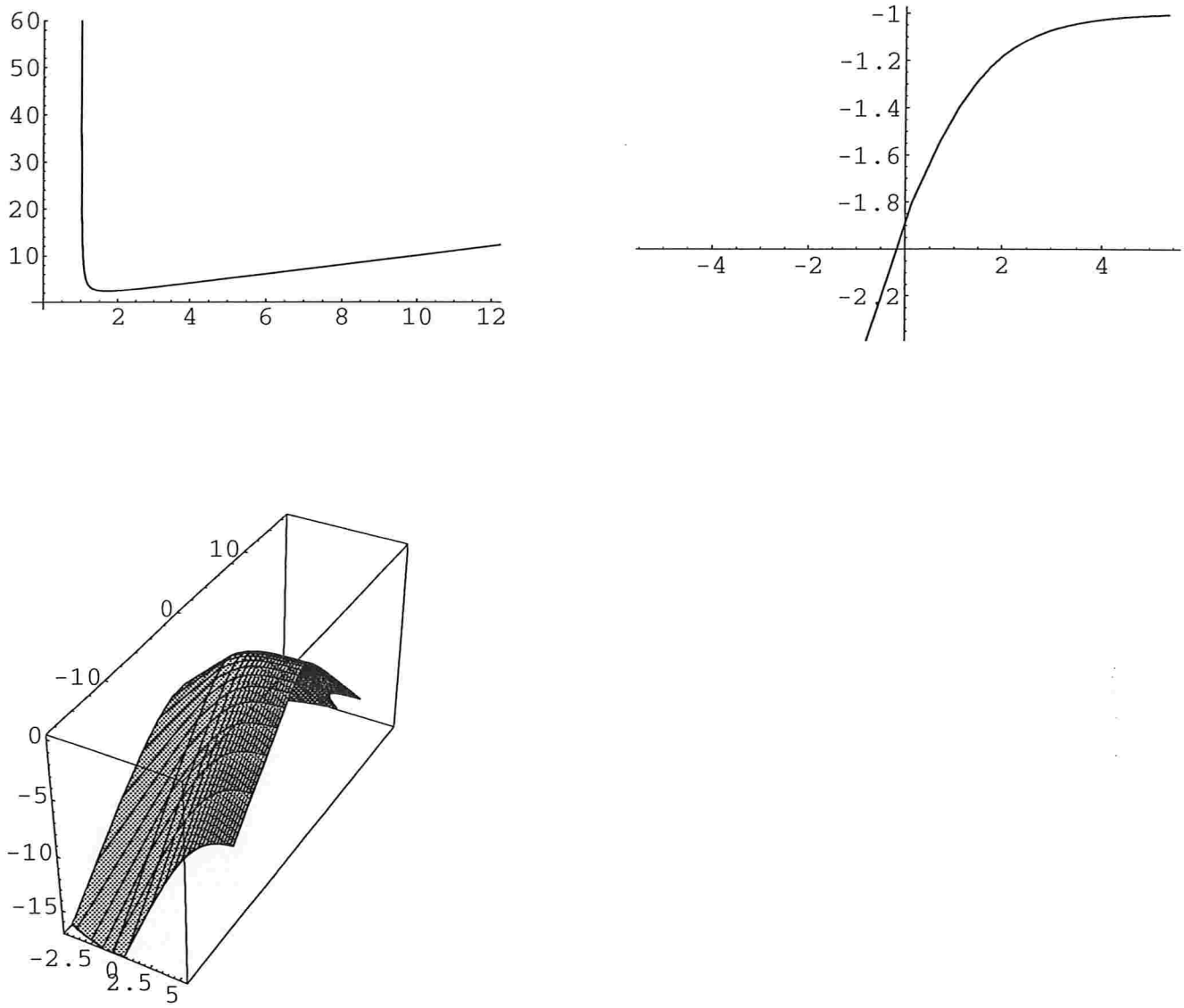


Figura 4.13: **Gráficos cG9 , cg9 e S9 com** $a = 1, c = 1, \ln 2 < \theta < 5$ **e** $-3 < t < 3$.

Capítulo 5

Superfícies de Revolução de Tipo Espaço com Eixo de Tipo Tempo

Neste capítulo, estudaremos as superfícies de revolução,em $\mathbb{L}^3$, de tipo espaço com curvatura média constante e eixo de tipo tempo. Novamente, para obtermos tais superfícies, usaremos a idéia de Delaunay apresentada por Hsiang em [8]. Tomaremos como curva geratriz, a curva descrita por um foco de uma cônica Lorentziana, quando esta rola, sem deslizar, ao longo de um eixo fixo.

5.1 A equação das superfícies de revolução com eixo de tipo tempo

Agora adotando-se o método similar ao capítulo anterior, discutiremos o rolamento de uma cônica ao longo de um eixo fixo, que é de *tipo tempo* .

Sejam Γ, uma cônica, em $\mathbb{L}^2$, e F, um dos seus focos. Tomando-se o foco F como origem polar e $\overrightarrow{FQ_0}$, o eixo polar, onde Q_o é a origem do arco da curva Γ, temos que a forma polar de Γ é dada por:

$$\Gamma(\theta) = \big(r(\theta)\sinh\theta, r(\theta)\cosh\theta\big).$$

Rolando esta cônica, sem deslizar, conforme 1.3, ao longo do eixo z e acompanhando o foco F, obteremos uma curva Ω, que será a geratriz da superfície de revolução.

Assumindo que $r(\theta) > 0$, temos:
$g_{-1}\big(\Gamma(\theta), \Gamma(\theta)\big) = r^2(\theta)\sinh^2\theta - r^2(\theta)\cosh^2\theta = -r^2(\theta) < 0$, ou seja, o vetor $\Gamma(\theta)$ é de *tipo tempo.*

Como $\Gamma'(\theta) = \big(r'(\theta)\sinh\theta + r(\theta)\cosh\theta, r'(\theta)\cosh\theta + r(\theta)\sinh\theta\big)$, segue que
$g_{-1}\big(\Gamma'(\theta), \Gamma'(\theta)\big) = \big(r'(\theta)\sinh\theta + r(\theta)\cosh\theta\big)^2 - \big(r'(\theta)\cosh\theta + r(\theta)sinh\theta\big)^2 =$
$r'^2(\theta)\sinh^2\theta + 2r'(\theta)r(\theta)sinh\theta cosh\theta + r^2(\theta)cosh^2\theta - r'^2(\theta)cosh^2\theta - 2r'(\theta)r(\theta)sinh\theta cosh\theta -$
$r^2(\theta)sinh^2\theta = r'^2(\theta)(sinh^2\theta - cosh^2\theta) + r^2(\theta)(cosh^2\theta - sinh^2\theta) = -r'^2(\theta) + r^2(\theta).$

Assumindo que o vetor tangente de Γ é de *tipo tempo*, segue que $-r'^2(\theta) + r^2(\theta) < 0$, ou seja, $r'^2(\theta) - r^2(\theta) > 0$.

Seja ξ o comprimento de arco de Γ com origem em Q_o, s o comprimento de arco de Ω com origem em F_o e ϕ o ângulo orientado de Ω' para o eixo x, onde transportamos o vetor Ω' para o ponto Q, como mostra a figura a seguir.

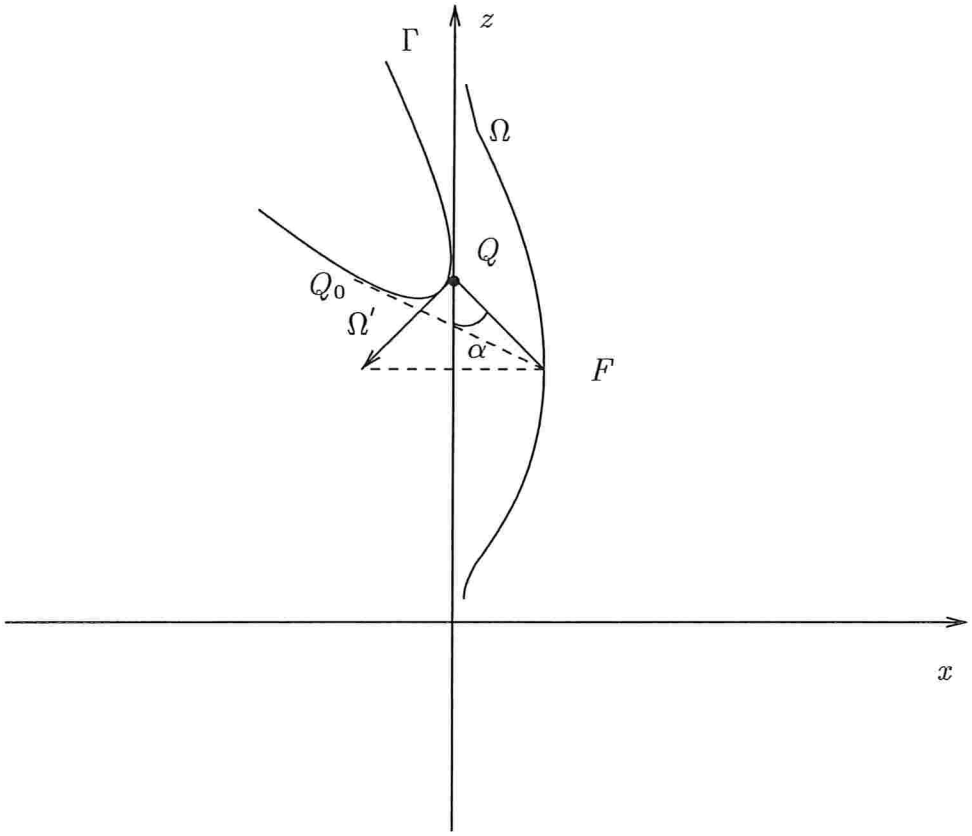


Figura 5.1: Parametrização da curva geratriz

Pelo lema 1.2.10 segue que $\cosh\phi(\theta) = \dfrac{\xi(\theta) - \xi(\theta_o) - z(\theta)}{r(\theta)}$ e $\sinh\phi(\theta) = \dfrac{x(\theta)}{r(\theta)}$.
Logo

$$\Omega(\theta) : \begin{cases} x(\theta) &= r(\theta)\sinh\phi(\theta); \\ z(\theta) &= \xi(\theta) - \xi(\theta_0) - r(\theta)\cosh\phi(\theta). \end{cases} \tag{5.1}$$

Proposição 5.1.1 *Seja ϕ o ângulo orientado de Ω' para o eixo x. Então, $\phi = \phi(\theta)$ é tal que $-r(\theta)\cosh\phi(\theta)$ é igual ao produto interno de Lorentz do vetor posição $\Gamma(\theta)$ com o vetor tangente unitário $\dfrac{\Gamma'(\theta)}{||\Gamma'(\theta)||}$ e conseqüentemente,*

$$\cosh\phi(\theta) = \frac{r'(\theta)}{\sqrt{r'^2(\theta) - r^2(\theta)}} \quad e \quad \sinh\phi(\theta) = \frac{r(\theta)}{\sqrt{r'^2(\theta) - r^2(\theta)}}.$$

Demonstração:

Sejam ϕ o ângulo orientado de Ω' para o eixo x e α o ângulo que Γ faz com $\dfrac{\Gamma'}{||\Gamma'||}$, como mostra a Figura 5.1. Pelo Lema 1.4.2 segue que $\alpha = \phi$.

Pela Definição 1.2.6 segue que $\cosh\phi(\theta) = -g_{-1}(\dfrac{\Gamma}{||\Gamma||}, \dfrac{\Gamma'}{||\Gamma'||})$. Como $||\Gamma(\theta)|| = r(\theta)$, segue que $-r(\theta)\ \cosh\phi(\theta) = g_{-1}(\Gamma, \dfrac{\Gamma'}{||\Gamma'||})$.

Assim, temos:

$$\begin{aligned}
&g_{-1}(\Gamma(\theta), \frac{\Gamma'(\theta)}{||\Gamma'(\theta)||}) = \\
&g_{-1}((r(\theta)\sinh\theta, r(\theta)\cosh\ \theta), \frac{(r'(\theta)\sinh\ \theta + r(\theta)\cosh\theta}{\sqrt{r'^2(\theta) - r^2(\theta)}}, \frac{r'(\theta)\cosh\theta + r(\theta)\sinh\theta)}{\sqrt{r'^2(\theta) - r^2(\theta)}}) = \\
&= \frac{r(\theta)r'(\theta)\sinh^2\theta + r^2(\theta)\sinh\theta\cosh\theta - r(\theta)r'(\theta)\cosh^2\theta - r^2(\theta)\sinh\theta\cosh\theta}{\sqrt{r'^2(\theta) - r^2(\theta)}} = \\
&= \frac{r(\theta)r'(\theta)(\sinh^2\theta - \cosh^2\theta)}{\sqrt{r'^2(\theta) - r^2(\theta)}} = \frac{-r(\theta)r'(\theta)}{\sqrt{r'^2(\theta) - r^2(\theta)}}.
\end{aligned}$$

Como $g_{-1}(\Gamma(\theta), \dfrac{\Gamma'(\theta)}{||\Gamma'(\theta)||}) = -r(\theta)\cosh\phi(\theta)$ segue que

$$\cosh\phi(\theta) = \frac{r'(\theta)}{\sqrt{r'^2(\theta) - r^2(\theta)}} \quad e, \text{ conseqüentemente, } \sinh\phi(\theta) = \frac{r(\theta)}{\sqrt{r'^2(\theta) - r^2(\theta)}}. \tag{5.2}$$

∎

Proposição 5.1.2 *O vetor tangente a Ω é ortogonal ao vetor* $\overrightarrow{FQ} = (r(\theta)\sinh\phi(\theta), r(\theta)\cosh\phi(\theta))$.

Demonstração:

Como a ortogonalidade não depende do comprimento do vetor, tomemos $\dfrac{\overrightarrow{FQ}}{||\overrightarrow{FQ}||}$. Então como $\Omega'(\theta) = (x'(\theta), z'(\theta))$, segue que $g_{-1}(\Omega', \dfrac{\overrightarrow{FQ}}{||\overrightarrow{FQ}||}) = -x' sinh\ \phi(\theta) - z' cosh\ \phi(\theta)$. Mas $x'(\theta) = -\dfrac{dr}{d\theta}\sinh\phi(\theta) - r(\theta)\cosh\phi(\theta)\dfrac{d\phi}{d\theta}$ e $z'(\theta) = \dfrac{d\xi}{d\theta} - \dfrac{dr}{d\theta}\cosh\ \phi(\theta) - r(\theta)\sinh\ \phi(\theta)\dfrac{d\phi}{d\theta}$.

Logo $g_{-1}(\Omega', \dfrac{\overrightarrow{FQ}}{||\overrightarrow{FQ}||}) = -\dfrac{dr}{d\theta}\sinh^2\phi(\theta) - r(\theta)\sinh\phi(\theta)\cosh\phi(\theta)\dfrac{d\phi}{d\theta} - \dfrac{d\xi}{d\theta}\cosh\ \phi(\theta) + \dfrac{dr}{d\theta}\cosh^2\phi(\theta) + r(\theta)\sinh\phi(\theta)\cosh\phi(\theta)\dfrac{d\phi}{d\theta} = -\dfrac{d\xi}{d\theta}\cosh\phi(\theta) + \dfrac{dr}{d\theta}$.

Como $cosh\ \phi(\theta) = \dfrac{r'(\theta)}{\sqrt{r'^2(\theta) - r^2(\theta)}} = \dfrac{dr}{d\theta}/\dfrac{d\xi}{d\theta}$, segue que $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{d\xi}{d\theta}\cosh\phi(\theta)$.

Assim, $g_{-1}(\Omega', \dfrac{\overrightarrow{FQ}}{||\overrightarrow{FQ}||}) = \dfrac{d\xi}{d\theta}\cosh\phi(\theta) - \dfrac{d\xi}{d\theta}\cosh\phi(\theta) = 0$. Logo $\Omega' \perp \overrightarrow{PQ}$.

∎

Consideraremos dois casos:

(A) O centro de curvatura de Ω não pertence ao eixo z.

Com relação a este caso, temos a seguinte proposição:

Proposição 5.1.3 *Se o centro de curvatura de Ω não pertence ao eixo z, então* $\dfrac{1 - r(s)\dot{\phi}(s)}{r(s)} > 0$.

Demonstração:

Sendo s o parâmetro comprimento de arco para Ω e levando em conta que Ω é de *tipo espaço*, ou seja, $\dot{x}^2(s) - \dot{z}^2(s) = 1$, podemos tomar $\dot{\Omega}(s)$ de modo que $\dot{\Omega}(s) = (\dot{x}, \dot{z}) =$

$(\cosh\phi, -\sinh\phi)$, onde o ponto significa $\dfrac{d}{ds}$. Por (5.1) temos:

$$\begin{aligned}
\dot{r}(s) = \frac{d}{ds}\Big(\frac{x(s)}{\sinh\phi(s)}\Big) &= \frac{\dot{x}(s)\sinh\phi(s) - x(s)\cosh\phi(s)\dot{\phi}(s)}{\sinh^2\phi(s)} \\
&= \dot{x}(s)\frac{1}{\sinh\phi(s)} - \frac{x(s)}{\sinh\phi(s)}\frac{\cosh\phi(s)}{\sinh\phi(s)}\dot{\phi}(s) \\
&= \frac{\cosh\phi(s)}{\sinh\phi(s)} - r(s)\frac{\cosh\phi(s)}{\sinh\phi(s)}\dot{\phi}(s) \\
&= \frac{\cosh\phi(s)}{\sinh\phi(s)}(1 - r(s)\dot{\phi}(s)).
\end{aligned}$$

Logo

$$\dot{r}(s) = \coth\phi(s)\big(1 - r(s)\dot{\phi}(s)\big). \tag{5.3}$$

Ainda pela $2^{\underline{a}}$ equação de (5.1) temos:

$$\begin{aligned}
\dot{\xi}(s) &= \dot{z}(s) + \dot{r}(s)\cosh\phi(s) + r(s)\sinh\phi(s)\dot{\phi}(s) \\
&= \sinh\phi(s) + \frac{\cosh\phi(s)}{\sinh\phi(s)}\cosh\phi(s)(1 - r(s)\dot{\phi}(s)) + r(s)\sinh\phi(s)\dot{\phi}(s) \\
&= \frac{\sinh^2\phi(s) + \cosh^2\phi(s)(1 - r(s)\dot{\phi}(s)) + r(s)\sinh^2\phi(s)\dot{\phi}(s)}{\sinh\phi(s)} \\
&= \frac{(1 - r(s)\dot{\phi}(s))(-\sinh^2\phi(s) + \cosh^2\phi(s))}{\sinh\phi(s)}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\dot{\xi}(s) = \frac{1 - r(s)\dot{\phi}(s)}{\sinh\phi(s)}. \tag{5.4}$$

Como $\xi(\theta) = \displaystyle\int_{\theta_0}^{\theta} ||\Gamma'(\theta)||d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{r'^2(\theta) - r^2(\theta)}\, d\theta$, segue que $\xi'(\theta) = \sqrt{r'^2(\theta) - r^2(\theta)}$. Logo $\xi'^2(\theta) = r'^2(\theta) - r^2(\theta)$ e $r^2(\theta) = r'^2(\theta) - \xi'^2(\theta)$. Assim, $r^2(\theta) = (\frac{dr}{ds})^2(\frac{ds}{d\theta})^2 - (\frac{d\xi}{ds})^2(\frac{ds}{d\theta})^2$, ou seja, $r^2(\theta)(\frac{d\theta}{ds})^2 = (\frac{dr}{ds})^2 - (\frac{d\xi}{ds})^2$.

Portanto

$$\dot{\theta}(s) = \frac{1}{r(s)}\sqrt{(\dot{r})^2(s) - (\dot{\xi})^2(s)}. \tag{5.5}$$

Substituindo-se (5.3) e (5.4) em (5.5) segue

$$\dot{\theta}(s) = \frac{1}{r(s)}\sqrt{(\coth^2\phi(s) - cossech^2\phi(s))(1 - r(s)\dot{\phi}(s))^2}.$$

Logo

$$\dot{\theta}(s) = \frac{|1 - r(s)\dot{\phi}(s)|}{r(s)}. \tag{5.6}$$

Pela expressão dada na Proposição 5.1.1, temos que $\sinh\phi(s) > 0, \forall s \in \mathbb{R}$ e como $\xi'(\theta) = \sqrt{r'^2(\theta) - r^2(\theta)} > 0$ e $\dot{\xi}(s) = (\frac{d\xi}{d\theta})(\frac{d\theta}{ds})$, segue de (5.4) e (5.6) que $\dot{\xi}(s) = \dfrac{1 - r(s)\dot{\phi}(s)}{\sinh\phi(s)} \geq 0, \ \forall s \ \in \mathbb{R}$.

Logo

$$1 - r(s)\dot{\phi}(s) \geq 0, \ \forall s \ \in \mathbb{R}. \tag{5.7}$$

Seja s o parâmetro comprimento de arco de Ω, então $\dot{\Omega}(s) = (\cosh\phi(s), -\sinh\phi(s))$. Assim, $\ddot{\Omega}(s) = (\sinh\phi(s), -\cosh\phi(s))\dot{\phi}(s)$.

Logo $||\ddot{\Omega}(s)|| = \sqrt{|(\sinh^2\phi(s) - \cosh^2\phi(s))\dot{\phi}^2(s)|} = |\dot{\phi}(s)|$. Portanto $k_\Omega(s) = |\dot{\phi}(s)|$.

O centro de curvatura de Ω é dado por $C(s) = \Omega(s) - \dfrac{1}{k_{\Omega(s)}}\eta(s)$.

Sendo $\eta(s) = (\sinh\phi(s), -\cosh\phi(s))$, o vetor normal unitário de Ω , segue que

$$\begin{aligned} C(s) &= (r(s)\sinh\phi(s), \xi(s) - \xi(s_0) - r(s)\cosh\phi(s)) - \frac{1}{|\dot{\phi}(s)|}(\sinh\phi(s), -\cosh\phi(s)) \\ &= (\frac{-1 + r(s)|\dot{\phi}(s)|}{|\dot{\phi}(s)|}\sinh\phi(s) \ , \ \xi(s) - \xi(s_0) - \frac{(r(s)|\dot{\phi}(s)| + 1)\cosh\phi(s)}{|\dot{\phi}(s)|}). \end{aligned}$$

Como o centro de curvatura de Ω não pertence ao eixo z, segue que $x = \dfrac{-1 + r(s)|\dot{\phi}(s)|}{|\dot{\phi}(s)|}\sinh\phi(s) \neq 0$. Logo $1 - r(s)|\dot{\phi}(s)| \neq 0$. Assim, $|\dot{\phi}(s)| \neq \dfrac{1}{r(s)}$, ou ainda, $\dot{\phi}(s) \neq \dfrac{1}{r(s)}$ e $\dot{\phi}(s) \neq \dfrac{-1}{r(s)}$.

Portanto de 5.7 segue que $1 - r(s)\dot{\phi}(s) > 0$ e conseqüentemente, $\dfrac{1 - r(s)\dot{\phi}(s)}{r(s)} > 0$.

∎

Observação:

Pela Proposição 5.1.2 segue que a função $\theta = \theta(s) = \displaystyle\int \frac{1}{r(s)}(1 - r(s)\dot{\phi}(s))ds$ é uma função monótona de s. Logo, escrevendo-se s em termos de θ e substituindo-se em $r = r(s)$ temos novamente, $r = r(\theta)$.

Agora, seja S a superfície de revolução cuja geratriz é a curva Ω obtida em (5.1). Vimos no capítulo 3, que as curvaturas principais desta superfície são dadas por:

$$k_1 = -\frac{\ddot{z}}{\dot{x}} = -\frac{-\cosh\phi(s)\dot{\phi}(s)}{\cosh\phi(s)} = \dot{\phi}(s) \quad \text{e} \quad k_2 = -\frac{\dot{z}}{x} = -\frac{-\sinh\phi(s)}{r(s)\sinh\phi(s)} = \frac{1}{r(s)}.$$

Sabemos também que a curvatura média de S é dada por :

$$H(s) = -\frac{1}{2}(k_1 + k_2) = -\frac{1}{2}(\dot{\phi}(s) + \frac{1}{r(s)}) = \frac{-r(s)\dot{\phi}(s) - 1}{2r(s)}.$$

Assim temos o seguinte teorema:

Teorema 5.1.4 *Seja S a superfície de revolução gerada pela curva Ω. Se o centro de curvatura de Ω não pertence ao eixo z, a superfície S tem curvatura média constante se e somente se a função $r(\theta)$ satisfaz a equação diferencial (4.8).*

Demonstração:

Pela proposição 5.1.3 temos que $\dfrac{1 - r(s)\dot{\phi}(s)}{r(s)} > 0$ e usando (5.3) e (5.6), obtemos:

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{\frac{dr}{ds}}{\frac{d\theta}{ds}} = \frac{\coth\phi(1 - r\dot{\phi})}{\frac{1 - r\dot{\phi}}{r}} = r\coth\phi.$$

Logo

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \coth\phi. \tag{5.8}$$

De (5.8) segue que $\dfrac{d}{d\theta}(\ln r) = \coth\phi$. Derivando-se novamente esta expressão em relação à θ temos:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}(\ln r) = \big(-cossech^2\phi\big)\frac{d\phi}{d\theta} \implies \frac{d^2}{d\theta^2}(\ln r) = (1 - \coth^2\phi)\frac{d\phi}{d\theta} \implies$$
$$\frac{d^2}{d\theta^2}(\ln r) = (1 - \coth^2\phi)\frac{\frac{d\phi}{ds}}{\frac{d\theta}{ds}}. \text{ Logo } \frac{d^2}{d\theta^2}(\ln r) = (1 - \coth^2\phi)\frac{\dot{\phi}}{\frac{1-r\dot{\phi}}{r}}\frac{d^2}{d\theta^2}(\ln r) =$$
$$= (\coth^2\phi - 1)\frac{-r\dot{\phi}}{1 - r\dot{\phi}}, \text{ ou seja, } \frac{d^2}{d\theta^2}(\ln r) = \big[(\frac{d}{d\theta}\ln r)^2 - 1\big]\frac{-r\dot{\phi}}{1 - r\dot{\phi}}.$$

Analogamente ao Teorema 4.1.4 segue que a superfície S tem curatura média $H = \dfrac{-r\dot{\phi} - 1}{2r}$, constante e a função $r = r(\theta)$ satisfaz a equação diferencial (4.8).

A volta também é análoga à do Teorema 4.1.4.

∎

Deste modo, analogamente ao capítulo 4, temos a seguinte proposição; cuja demonstração é idêntica à da Proposição 4.1.5.

Proposição 5.1.5 *A curva Γ origina uma superfície de revolução com curvatura média constante e eixo de tipo tempo e $r(\theta)$ é de uma das seguintes formas:*

(I) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \overset{+}{-} \lambda cosh(\theta + \mu) + c$, *com* $\lambda > 0$, $H = \dfrac{\lambda^2 + c^2}{2c}, (c \neq 0)$

(II) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \overset{+}{-} \lambda sinh(\theta + \mu) + c$, *com* $\lambda > 0$, $H = \dfrac{-(\lambda^2 + c^2)}{2c}, (c \neq 0)$

(III) $\dfrac{1}{r(\theta)} = ae^{\theta} + c$ *ou* $ae^{-\theta} + c$ *com* $H = \dfrac{-c}{2}, (c \neq 0)$

Observação:

Na Proposição 4.1.5 tínhamos também o caso $r(\theta) = \dfrac{1}{c}$, que agora é descartado, pois $r'(\theta) = 0\ \forall\theta \in \mathbb{R}$ e como $\cosh\phi(\theta) = \dfrac{r'(\theta)}{\sqrt{r'^2(\theta) - r^2(\theta)}} > 0$, $\forall\theta \in \mathbb{R}$, devemos ter $r'(\theta) > 0$, $\forall\theta \in \mathbb{R}$.

(B) O centro de curvatura de Ω pertence ao eixo z.

Neste caso, temos o seguinte teorema:

Teorema 5.1.6 *Se o centro de curvatura de Ω pertence ao eixo z, então a superfície S de revolução com eixo de tipo tempo tem curvatura média constante $H \neq 0$ e somente se é congruente ao hiperbolóide:*

$$x^2 + y^2 - z^2 = \frac{-1}{H^2}, \qquad x > 0. \tag{5.9}$$

Demonstração:

Se o centro de curvatura de Ω pertence ao eixo z, temos claramente, que $-1 + r|\dot{\phi}| = 0$.

Logo $|\dot{\phi}| = \frac{1}{r}$, ou seja, $\dot{\phi} = \frac{1}{r}$ ou $\dot{\phi} = -\frac{1}{r}$.

Como a curvatura média de S é dada por $2H = -\dot{\phi} - \frac{1}{r}$ segue que $H = -\dot{\phi}$ ou $H = 0$. Mas como $H \neq 0$, segue $H = -\dot{\phi}$. Por integração, temos que $\phi = -Hs + \phi_o$. Tomando, então

$(\dot{x}\ ,\ \dot{z}) = \big(\cosh(-Hs + \phi_o)\ ,\ -sinh(-Hs + \phi_o)\big)$, segue que Ω é dada por

$$(x\ ,\ z) = \Big(\frac{-\sinh(-Hs + \phi_o)}{H}\ ,\ \frac{\cosh(-Hs + \phi_o)}{H}\Big).$$

Portanto a superfície de revolução, gerada por Ω, pode ser parametrizada por:

$$X(s\ ,\ t) = \Big(\frac{-\sinh(-Hs + \phi_o)}{H}\cos t\ ,\ \frac{-\sinh(-Hs + \phi_o)}{H}\sin t\ ,\ \frac{\cosh(-Hs + \phi_o)}{H}\Big).$$

Temos então:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - z^2 &= \frac{\sinh^2(-Hs + \phi_o)}{H^2}\cos^2 t + \frac{\sinh^2(-Hs + \phi_o)}{H^2}\sin^2 t - \frac{\cosh^2(-Hs + \phi_o)}{H^2} = \\ &= \frac{\sinh^2(-Hs + \phi_o)}{H^2}\big(\cos^2 t + \sin^2 t\big) - \frac{\cosh^2(-Hs + \phi_o)}{H^2} \\ &= \frac{\sinh^2(-Hs + \phi_o) - \cosh^2(-Hs + \phi_o)}{H^2} \\ &= \frac{-1}{H^2}. \end{aligned}$$

Como $\dot{\phi} > 0$, $H < 0$ e $z(s,t) = \dfrac{\cosh(-Hs + \phi_o)}{H} < 0$, segue que a superfície S é congruente ao hiperbolóide (5.9).

∎

Agora, resumiremos os casos (A) e (B) no seguinte teorema:

Teorema 5.1.7 *(a) Seja Ω uma curva de tipo tempo no plano xz tal que o seu centro de curvatura não pertence ao eixo z. Então a superfície de revolução gerada pela rotação de Ω em torno do eixo z tem curvatura média constante se Ω é gerada pelo foco de uma cônica quando sua parte de tipo tempo é rolada, sem deslizar, ao longo do eixo z;*
(b) Seja Ω uma curva de tipo tempo no plano xz tal que o seu centro de curvatura pertence ao eixo z. Então a superfície de revolução com geratriz Ω tem curvatura média constante se e somente se é congruente ao hiperbolóide (5.9).

5.2 Estudo das quádricas de tipo tempo no plano de Lorentz-Minkowski

Mostraremos, nesta seção, que cada curva Γ, dada pelas equações polares da Proposição 5.1.5, é parte de uma quádricas obtidas na seção 4.2. Explicitaremos, também, o domínio da função $r(\theta)$ em cada caso, lembrando que as condições para $r(\theta)$ nas superfícies de revolução, com eixo de tipo tempo, são:

$$r(\theta) > 0, \quad r'(\theta) > 0, \quad e \quad r'^2(\theta) - r^2(\theta) > 0. \tag{5.10}$$

(I) A equação polar é da forma $\dfrac{1}{r(\theta)} = \overset{+}{-} \lambda \cosh\theta + c$, com $c > 0$ ou $c < 0$.

Para classificarmos todas estas curvas, tomemos $d = \dfrac{1}{\lambda} > 0$ e $\epsilon = \dfrac{\lambda}{|c|} > 0$. Então temos:

1°) Se $c > 0$ e $0 < \epsilon < 1$, a equação polar é da forma:

(i) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{\cosh\theta}{d} + \dfrac{1}{\epsilon d}$.

Este caso, Γ não ocorrerá, pois

$$\begin{aligned} r'^2(\theta) - r^2(\theta) &= \frac{(-\epsilon d \sinh\theta)^2}{(1+\epsilon\cosh\theta)^4} - \frac{\epsilon^2 d^2}{(1+\epsilon\cosh\theta)^2} = \frac{(\epsilon^4 d^2 \sinh\theta)^2 - (1+\epsilon\cosh\theta)^2}{(1-\epsilon^2 d^2)^4} \\ &= \frac{\epsilon^4 d^2 \sinh\theta)^2 - \epsilon^2 d^2 - 2\epsilon^3 d^2 \cosh\theta - \epsilon^4 d^2 \cosh\theta}{(1+\epsilon\cosh\theta)^4} \\ &= \frac{\epsilon^4 d^2 + \epsilon^2 d^2 + 2\epsilon^3 d^2 \cosh\theta}{(1+\epsilon\cosh\theta)^4} < 0, \ \forall\theta \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

o que contraria a $3^{\underline{a}}$ condição de 5.10.

(ii) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{-\cosh(\theta)}{d} + \dfrac{1}{\epsilon d}$.

Já vimos no capítulo 4, que neste caso, Γ satistaz a equação da hipérbole Euclidiana (4.11). Além disso, a função $r(\theta)$ está definida no intervalo $]\ln\dfrac{1}{\epsilon}, \ \ln(\dfrac{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon})[$.

De fato,

$r(\theta) = \dfrac{\epsilon d}{1-\epsilon\cosh\theta} > 0 \iff 1 - \epsilon\cosh\theta > 0 \iff \epsilon e^{2\theta} - 2e^{\theta} + \epsilon < 0 \iff$
$\ln(\dfrac{1-\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}) < \theta < \ln(\dfrac{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon})$;

$$r'(\theta) = \frac{-\epsilon d(-\sinh\theta))}{(1-\epsilon\cosh\theta)^2} > 0 \iff \sinh\theta > 0 \iff \theta > 0 \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} r'(\theta)^2 - r^2(\theta) &= \frac{\epsilon^4 d^2 \sinh^2\theta}{(1-\epsilon\cosh\theta)^4} - \frac{\epsilon^2 d^2}{(1-\epsilon\cosh\theta)^2} \\ &= \frac{\epsilon^4 d^2 \sinh^2\theta - \epsilon^2 d^2((1-\epsilon\cosh\theta)^2}{(1-\epsilon\cosh\theta)^4} \\ &= \frac{-\epsilon^4 d^2 - \epsilon^2 d^2 + 2\epsilon^2 d^2 \cosh\theta}{(1-\epsilon\cosh\theta)^4} \\ &= \frac{-\epsilon^2 d^2(1+\epsilon^2 - 2\epsilon\cosh\theta)}{(1-\epsilon\cosh\theta)^4}. \end{aligned}$$

Logo $r'(\theta)^2 - r^2(\theta) > 0 \iff 1+\epsilon^2 - 2\epsilon\cosh\theta < 0 \iff \epsilon e^{2\theta} - (\epsilon^2+1)e^\theta - \epsilon > 0 \iff \theta \in \,]\ln\epsilon \;,\; \ln\frac{1}{\epsilon}[$.

Considerando a intersecção das três condições acima, segue que $]\ \ln\frac{1}{\epsilon} \;,\; \ln\frac{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}\ [$.

Como $\lim\limits_{\theta\to\ \ln\frac{1}{\epsilon}} x(\theta) = \lim\limits_{\theta\to\ln\frac{1}{\epsilon}} \frac{\epsilon d\sinh\theta}{1-\epsilon\cosh\theta} = d$ e $\lim\limits_{\theta\to\ \ln\frac{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}} x(\theta) = +\infty$, segue que Γ é a parte da hipérbole pontilhada à direita de G_2, na Figura (4.2).

$2^{\underline{o}}$) Se $c < 0$ e $0 < \epsilon < 1$, a equação polar é da forma:

(i) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{\cosh(\theta)}{d} - \dfrac{1}{\epsilon d}$.

Já vimos no capítulo 4 que, neste caso, Γ é de tipo tempo e pode ser mostrado que também é parte da hipérbole Euclidiana (4.11). Além disso, a função $r(\theta)$ está definida no intervalo $]-\infty \;,\; \ln\frac{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}[$.

De fato,

$r(\theta) = \dfrac{\epsilon d}{-1+\epsilon\cosh\theta} > 0 \iff -1+\epsilon\cosh\theta > 0 \iff \epsilon e^{2\theta} - 2e^\theta + \epsilon > 0 \iff$
$\theta < \ln(\dfrac{1-\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon})$ *ou* $\theta > \ln(\dfrac{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon})$;

$$r'(\theta) = \frac{-\epsilon^2 d \sinh\theta}{(-1+\epsilon\cosh\theta)^2} > 0 \iff \sinh\theta < 0 \iff \theta < 0 \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} r'(\theta)^2 - r^2(\theta) &= \frac{\epsilon^4 d^2 \sinh^2\theta}{(-1+\epsilon\cosh\theta)^4} - \frac{\epsilon^2 d^2}{(-1+\epsilon\cosh\theta)^2} \\ &= \frac{\epsilon^4 d^2 \sinh^2\theta - \epsilon^2 d^2 (-1+\epsilon\cosh\theta)^2}{(-1+\epsilon\cosh\theta)^4} \\ &= \frac{-\epsilon^4 d^2 - \epsilon^2 d^2 + 2\epsilon^3 d^2 \cosh\theta}{(-1+\epsilon\cosh\theta)^4} \\ &= \frac{-\epsilon^2 d^2 (1+\epsilon^2 - 2\epsilon\cosh\theta)}{(-1+\epsilon\cosh\theta)^4}. \end{aligned}$$

Logo $r'(\theta)^2 - r^2(\theta) > 0 \iff 1+\epsilon^2 - 2\epsilon\cosh\theta < 0 \iff -\epsilon e^{2\theta} + (\epsilon^2+1)e^{\theta} - \epsilon < 0 \iff$ $\theta < \ln\epsilon$ ou $\theta > \ln\frac{1}{\epsilon}$.

Considerando a intersecção das três condições acima, segue que $\theta \in]-\infty\ ,\ \ln(\frac{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon})\ [$.

Como $\lim\limits_{\theta\to\infty} x(\theta) = -d$ e $\lim\limits_{\theta\to\ln(\frac{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon})} x(\theta) = -\infty$,
segue que Γ é a parte da hipérbole pontilhada à esquerda de G_1, na Figura (4.2).

(ii) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{-\cosh\theta}{d} - \dfrac{1}{\epsilon d}$.

Este caso não ocorrerá, pois $r(\theta) = \dfrac{-\epsilon d}{1+\epsilon\cosh\theta} < 0, \quad \forall\theta \in \mathbb{R}$.

$3^{\underline{o}}$) Se $c > 0$ e $\epsilon = 1$, a equação polar é da forma:

(i) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{\cosh\theta}{d} + \dfrac{1}{d}$.

Este caso também não ocorre pois,

$$\begin{aligned} r'(\theta)^2 - r^2(\theta) &= \frac{d^2 \sinh^2\theta}{(1+\cosh\theta)^4} - \frac{d^2}{(1+\cosh\theta)^2} \\ &= \frac{d^2 \sinh^2\theta - d^2(1+\cosh\theta)^2}{(1+\cosh\theta)^4} \\ &= \frac{-d^2\big(-\sinh^2\theta + 2\cosh\theta + \cosh^2\theta\big)}{(1+\cosh\theta)^4} \\ &= \frac{-d^2\big(1+2\cosh\theta\big)}{(1+\cosh\theta)^4} < 0, \quad \forall\theta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(ii) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{-\cosh\theta}{d} + \dfrac{1}{d}$.

Pela mesma razão descrita no Capítulo 4, este caso, não ocorrerá.

4º) Se $c < 0$ e $\epsilon = 1$, a equação polar é da forma :

(i) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{\cosh\theta}{d} - \dfrac{1}{d}$.

Fazendo-se uma mudança de coordenadas, mostra-se facilmente que, neste caso, Γ, satisfaz a equação da parábola Euclidiana (4.12), que também é uma parábola Lorentziana. Além disso, a função $r(\theta)$ está definida no intervalo $]-\infty\ ,\ 0\ [$.

De fato,

$$r(\theta) = \frac{d}{-1+\cosh\theta} > 0 \iff -1+\cosh\theta > 0 \iff e^{2\theta} - 2e^{\theta} + 1 > 0 \iff \theta \in \mathbb{R};$$

$$r'(\theta) = \frac{-d\sinh\theta}{(-1+\cosh\theta)^2} > 0 \iff \sinh\theta < 0 \iff \theta < 0 \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} r'(\theta)^2 - r^2(\theta) &= \frac{d^2\sinh^2\theta}{(-1+\cosh\theta)^4} - \frac{d^2}{(-1+\cosh\theta)^2} \\ &= \frac{d^2\sinh^2\theta - d^2((1-\cosh\theta)^2}{(-1+\cosh\theta)^4} \\ &= \frac{-2d^2 + 2d^3\cosh\theta}{(-1+\cosh\theta)^4} \\ &= \frac{-d^2(1-\cosh\theta)}{(-1+\cosh\theta)^4}. \end{aligned}$$

Logo $r'(\theta)^2 - r^2(\theta) > 0 \iff 1 - \cosh\theta < 0 \iff \theta \in \mathbb{R}$.

Analisando a intersecção dessas condições segue que $\theta \in\ ]-\infty\ ,\ 0\ [$.

Como $\lim\limits_{\theta\to\ -\infty} x(\theta) = \lim\limits_{\theta\to\ -\infty} \dfrac{d\sinh\theta}{-1+\cosh\theta} = -d$ e $\lim\limits_{\theta\to\ 0} x(\theta) = -\infty$, concluimos que Γ, neste caso, é a parte da parábola pontilhada à esquerda de G_1, na Figura (4.3).

(ii) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{-\cosh\theta}{d} - \dfrac{1}{d}$.

Neste caso, Γ não existe, pois $r(\theta) < 0, \forall\theta \in \mathbb{R}$.

5º) Se $c > 0$ e $\epsilon > 1$, a equação polar é da forma:

(i) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{\cosh\theta}{d} + \dfrac{1}{\epsilon d}$

Neste caso, não existe Γ, pois

$$r'(\theta)^2 - r^2(\theta) = \frac{-(\epsilon^4 d^2 + 2\epsilon d^2 + 2\epsilon^3 d^2 \cosh\theta)}{(1+\cosh\theta)^4} < 0, \ \forall\theta \in \mathbb{R}.$$

(ii) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{-\cosh\theta}{d} + \dfrac{1}{\epsilon d}$.

Neste caso, não existe Γ, pois

$r(\theta) = \dfrac{\epsilon d}{1-\cosh\theta} > 0 \iff 1 - \cosh\theta > 0 \iff \cosh\theta < 1.$

Mas isto é impossível, já que, $\cosh\theta > 1, \ \forall\theta \in \mathbb{R}$.

6º) Se $c < 0$ e $\epsilon > 1$, a equação polar é da forma :

(i) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{\cosh\theta}{d} - \dfrac{1}{\epsilon d}$.

Neste caso pode ser mostrado que Γ satisfaz a equação da elipse Euclidiana (4.13). Além disso, a função $r(\theta)$ está definida no intervalo $]-\infty \ , \ \ln\frac{1}{\epsilon}[$.

De fato,

$r(\theta) = \dfrac{\epsilon d}{-1+\epsilon\cosh\theta} > 0 \iff -1 + \epsilon\cosh\theta > 0$

$\iff \epsilon e^{2\theta} - 2e^{\theta} - \epsilon > 0 \iff \theta < \dfrac{\ln(1-\sqrt{1+\epsilon^2}}{\epsilon}$ ou $\theta > \dfrac{\ln(1+\sqrt{1+\epsilon^2}}{\epsilon}$;

$r'(\theta) = \dfrac{-\epsilon^2 d\sinh\theta}{(-1+\epsilon\cosh\theta)^2} > 0 \iff \sinh\theta < 0 \iff \theta < 0$ e $r'(\theta)^2 - r^2(\theta) =$

$\dfrac{-\epsilon^2 d^2(1+\epsilon^2 - 2\epsilon\cosh\theta)}{(-1+\cosh\theta)^4} > 0 \iff 1 + \epsilon^2 - 2\epsilon\cosh\theta < 0 \iff$

$-\epsilon e^{2\theta} + (1+\epsilon^2)e^{\theta} - \epsilon < 0 \iff \theta < \ln\dfrac{1}{\epsilon}$ ou $\theta > \ln\epsilon$.

Como $\lim\limits_{\theta\to-\infty} z(\theta) = \lim\limits_{\theta\to-\infty} \dfrac{\epsilon d\cosh\theta}{-1+\epsilon\cosh\theta} = d$ e $\lim\limits_{\theta\to\ln\frac{1}{\epsilon}} z(\theta) = -d$, segue que, neste caso, Γ é o arco pontilhado, com extremos G_1 e G_1' na elipse Euclidiana (4.4), que é uma hipérbole Lorentziana.

(ii) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{-\cosh\theta}{d} - \dfrac{1}{\epsilon d}$.

Já vimos que, neste caso, não existe Γ, pois $r(\theta) < 0, \ \forall\theta \in \mathbb{R}$.

(III) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \lambda sinh\ \theta + c, \quad c > 0$ ou $c < 0$.

$1^{\underline{o}}$) Quando $c > 0$ e $\epsilon > 0$, a equação polar é da forma:

(i) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{\sinh\theta}{d} + \dfrac{1}{\epsilon d}$.

Este caso não ocorrerá, pois $r'(\theta) = \dfrac{-\epsilon^2 d\cosh\theta}{(1+\epsilon\sinh\theta)^2} < 0,\ \forall\theta \in \mathbb{R}$.

(ii) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{-\sinh\theta}{d} + \dfrac{1}{\epsilon d}$.

Fazendo uma mudança de coordenadas, mostra-se facilmente que Γ satisfaz a equação da hipérbole Euclidiana (4.14). Além disso, $r(\theta)$ está definida no intervalo $]\ \ln\dfrac{1}{\epsilon}\ ,\ \ln(\dfrac{1+\sqrt{1+\epsilon^2}}{\epsilon})\ [$.

De fato,

$r(\theta) > 0 \iff 1 - \epsilon\sinh\theta > 0 \iff \epsilon e^{2\theta} - 2e^{\theta} - \epsilon < 0 \iff \theta < \ln(\dfrac{1+\sqrt{1+\epsilon^2}}{\epsilon})$,

$r'(\theta) = \dfrac{\epsilon^2 d\cosh\theta}{(1-\sinh\theta)^2} > 0,\ \forall\theta \in \mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} r'(\theta)^2 - r^2(\theta) &= \frac{\epsilon^4 d^2\cosh\theta}{(1-\epsilon\sinh\theta)^4} - \frac{\epsilon^2 d^2}{(1-\sinh\theta)^2} \\ &= \frac{\epsilon^2 d^2(\epsilon^2 - 1 + 2\epsilon\sinh\theta)}{(1-\epsilon\sinh\theta)^4}. \end{aligned}$$

Logo $r'(\theta)^2 - r^2(\theta) > 0 \iff -1 + \epsilon^2 + 2\epsilon\sinh\theta > 0 \iff \theta > \ln\dfrac{1}{\epsilon}$.

A intersecção dessas condições, nos dá $\theta \in]\ \ln\dfrac{1}{\epsilon}\ ,\ \ln(\dfrac{1+\sqrt{1+\epsilon^2}}{\epsilon})\ [$.

Como $\displaystyle\lim_{\theta\to\ln\frac{1}{\epsilon}} x(\theta) = \lim_{\theta\to\ln\frac{1}{\epsilon}} \frac{\epsilon d\sinh\theta}{1-\epsilon\sinh\theta} = d$ e $\displaystyle\lim_{\theta\to\ln\frac{1+\sqrt{1+\epsilon^2}}{\epsilon}} x(\theta) = +\infty$, segue que Γ, é o arco pontilhado da hipérbole que aparece à direita da reta L_2, na Figura (4.5).

$2^{\underline{o}}$) Quando $c < 0$ e $\epsilon > 0$, a equação polar é da forma:

(i) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{\sinh\theta}{d} - \dfrac{1}{\epsilon d}$.

Neste caso, não existe Γ, pois $r'(\theta) = \dfrac{-\epsilon^2 d\cosh\theta}{(-1+\epsilon\sinh\theta)^2} < 0,\ \forall\theta\in\mathbb{R}$.

(ii) $\dfrac{1}{r(\theta)} = \dfrac{-\sinh\theta}{d} - \dfrac{1}{\epsilon d}$.

Já vimos no capítulo 4 que, neste caso, Γ é parte da hipérbole euclidiana (4.14). Além disso, a função $r(\theta)$ está definida no intervalo $]\ -\infty\ ,\ \ln(\dfrac{-1+\sqrt{1+\epsilon^2}}{\epsilon})\ [$.

De fato,

$r(\theta) > 0 \iff -1-\epsilon\sinh\theta > 0 \iff \epsilon e^{2\theta} + 2e^{\theta} - \epsilon < 0 \iff \theta < \ln(\dfrac{-1+\sqrt{1+\epsilon^2}}{\epsilon})$,

$r'(\theta) = \dfrac{\epsilon^2 d^2\cosh\theta}{(-1-\epsilon\sinh\theta)^2} > 0,\ \forall\theta\in\mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned} r'(\theta)^2 - r^2(\theta) &= \frac{\epsilon^4 d^2\cosh^2\theta}{(-1-\epsilon\sinh\theta)^4} - \frac{\epsilon^2 d^2}{(-1-\epsilon\sinh\theta)^2} \\ &= \frac{-\epsilon^2 d^2\sinh\theta)}{(-1-\epsilon\sinh\theta)^4}. \end{aligned}$$

Logo $r'(\theta)^2 - r^2(\theta) > 0 \iff \sinh\theta > 0 \iff \theta < 0$.

Da intersecção dessas condições, segue que $\theta \in\ ]\ -\infty\ ,\ \ln(\dfrac{-1+\sqrt{1+\epsilon^2}}{\epsilon})\ [$.

Como $\lim\limits_{\theta\to-\infty} x(\theta) = \lim\limits_{\theta\to-\infty} \dfrac{\epsilon d\sinh\theta}{-1-\epsilon\sinh\theta} = -d$ e $\lim\limits_{\theta\to\ln\frac{-1+\sqrt{1+\epsilon^2}}{\epsilon}} x(\theta) = -\infty$, segue que Γ, neste caso, é a parte pontilhada que aparece à esquerda da reta L_1, na hipérbole da Figura (4.5).

Finalmente vamos examinar o caso em que a equação polar é da forma:

(IV) $\dfrac{1}{r(\theta)} = ae^{-\theta} + c$, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$.

Para isto consideremos $A, B > 0$, de modo que a equação pode ser dividida em três casos:

(i) $\dfrac{1}{r(\theta)} = Ae^{-\theta} + B$.

Neste caso, não existe Γ, pois

$$r'(\theta)^2 - r^2(\theta) = \frac{A^2e^{2\theta}}{(A+Be^{\theta})^4} - \frac{e^{2\theta}}{(A+Be^{\theta})^2} = \frac{-(2ABe^{3\theta}+B^2e^{4\theta})}{(A+Be^{\theta})^4} < 0, \ \forall\theta \in \mathbb{R}.$$

(ii) $\dfrac{1}{r(\theta)} = Ae^{-\theta} - B.$

Já vimos no capítulo 4 que, neste caso, Γ, satisfaz a equação da hipérbole Euclidiana (4.17). Além disso, a função $r(\theta)$ está definida no intervalo $]-\infty\ ,\ \ln\dfrac{A}{B}[$.

De fato,

$$r(\theta) = \frac{1}{Ae^{-\theta}-B} > 0 \iff Ae^{-\theta} - B > 0 \iff \theta < \ln\frac{A}{B},$$

$$r'(\theta) = \frac{Ae^{-\theta}}{(Ae^{-\theta}-B)^2} > 0, \ \forall\theta \in \mathbb{R} \quad \text{e}$$

$$r'(\theta)^2 - r^2(\theta) = \frac{A^2e^{-2\theta}}{(Ae^{-\theta}-B)^4} - \frac{1}{(Ae^{-\theta}-B)^2} = \frac{2ABe^{-\theta}-B^2}{(Ae^{-\theta}-B)^4}.$$

Logo $r'(\theta)^2 - r^2(\theta) > 0 \iff 2ABe^{-\theta} - B^2 > 0 \iff e^{-\theta} > \dfrac{B}{2A} \iff \theta < \ln\dfrac{2A}{B}.$

A intersecção destas condições, nos fornece $\theta \in]-\infty\ ,\ \ln\dfrac{A}{B}[$.

Como $\lim\limits_{\theta\to-\infty} x(\theta) = \dfrac{\sinh\theta}{Ae^{-\theta}-B} = \dfrac{1}{2A}$ e $\lim\limits_{\theta\to\ln\frac{A}{B}} x(\theta) = +\infty$, segue que Γ, neste caso, é o arco que aparece pontilhado na hipérbole da Figura (4.6).

(iii) $\dfrac{1}{r(\theta)} = -Ae^{-\theta} + B.$

Neste caso, não existe Γ, pois $r'(\theta) = \dfrac{-Ae^{-\theta}}{(-Ae^{-\theta}+B)^2} < 0, \ \forall\theta \in \mathbb{R}.$

5.3 Caracterização e estudo da completude das superfícies de revolução com eixo de tipo tempo

Nesta seção, resumiremos as seções 5.1 e 5.2 no teorema 5.3.1 e estudaremos a completude das superfícies de revolução de tipo espaço, com eixo de revolução de tipo tempo.

Teorema 5.3.1 *As superfícies de revolução, de tipo espaço, com curvatura média constante H em $\mathbb{L}^3$, obtidas pela rotação da curva $\Omega(\theta)$ dada em (5.1) ao longo do eixo z, são dadas pelas equações polares:*

$$T_o)\ r(\theta) = \frac{d}{-1+\cosh\theta},\ \theta < 0,\ \epsilon = 1,\ H = 0;$$
$$T_1)\ r(\theta) = \frac{\epsilon d}{1-\epsilon\cosh\theta},\ \ln\frac{1}{\epsilon} < \theta < \ln(\frac{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}),\ 0 < \epsilon < 1,\ H = \frac{\epsilon^2-1}{2\epsilon d};$$
$$T_2)\ r(\theta) = \frac{\epsilon d}{-1+\epsilon\cosh\theta},\ \theta < \ln(\frac{1-\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}),\ 0 < \epsilon < 1,\ H = \frac{1-\epsilon^2}{2\epsilon d};$$
$$T_3)\ r(\theta) = \frac{\epsilon d}{-1+\epsilon\cosh\theta},\ \theta < \ln\frac{1}{\epsilon},\ \epsilon > 1,\ H = \frac{1-\epsilon^2}{2\epsilon d};$$
$$T_4)\ r(\theta) = \frac{\epsilon d}{1-\epsilon\sinh\theta},\ \ln\frac{1}{\epsilon} < \theta < \ln(\frac{1+\sqrt{1+\epsilon^2}}{\epsilon}),\ \epsilon > 0,\ H = \frac{-1-\epsilon^2}{2\epsilon d};$$
$$T_5)\ r(\theta) = \frac{\epsilon d}{-1-\epsilon\sinh\theta},\ \theta < \ln(\frac{-1+\sqrt{1+\epsilon^2}}{\epsilon}),\ \epsilon > 0,\ H = \frac{1+\epsilon^2}{2\epsilon d};$$
$$T_6)\ r(\theta) = \frac{1}{Ae^{-\theta}-B},\ \theta < \ln\frac{A}{B},\ \epsilon > 0,\ A > 0,\ B > 0,\ H = \frac{B}{2}.$$

Observação:

Optamos por não acrescentar nesta lista a superfície do Teorema 5.1.6, pois ela é congruente à superfície S_6, já listada no Teorema 4.3.1.

Agora, estudando a completude das superfícies de revolução com curvatura média constante obtidas acima, temos o seguinte teorema:

Teorema 5.3.2 *Todas as superfícies de revolução com curvatura média H constante em $\mathbb{L}^3$ que são obtidas pela rotação de Ω dada em (5.1) ao longo do eixo z, não são completas.*

Demonstração: Pelo lema 3.2.7, basta mostrar que, em cada caso, Ω não é completa.

O comprimento de arco de Ω é dado por $s(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{x'^2(u) - z'^2(u)}du$. Tomando-se $\theta_0 = 0$ e computando-se o limite de $s(\theta)$ para θ tendendo aos extremos, em cada caso, temos:

(a)Para a superfície T_0, $s(\theta) = -\frac{d}{2}\coth(\frac{\theta}{2})$, onde $\theta < 0$. Como $\lim_{\theta\to-\infty} s(\theta) = \frac{d}{2}$, segue que $\Omega(\theta)$ não é completa. Logo a superfície T_0 não é completa.

(b) Para a superfície T_1, $s(\theta) = \frac{\epsilon d}{-1+\epsilon^2}\ln|\frac{-e^{\frac{-\theta}{2}}+\epsilon e^{\frac{\theta}{2}}}{\epsilon e^{\frac{-\theta}{2}}-e^{\frac{\theta}{2}}}|+k$, k constante, onde $\ln\frac{1}{\epsilon} < \theta < \ln\frac{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}$. Como $\lim_{\theta\to\ln\frac{1+\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}} s(\theta)$ é um número finito, segue que $\Omega(\theta)$ não é

completa. Logo a superfície T_1 não é completa.

(c) Para a superfície T_2, $s(\theta)$ tem a mesma expressão acima, mas agora, $\theta < \ln \frac{1-\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}$, $0 < \epsilon < 1$. Como, $\lim\limits_{\theta \to \ln \frac{1-\sqrt{1-\epsilon^2}}{\epsilon}} s(\theta)$ é um número finito, segue que $\Omega(\theta)$ não é completa. Logo a superficie T_2 não é completa.

(d) Para a superfície T_3, $s(\theta)$ tem a mesma expressão acima, mas agora, $\theta < \ln \dfrac{1}{\epsilon}$, $\epsilon > 1$. Então $\lim\limits_{\theta \to -\infty} s(\theta) = \dfrac{d\epsilon \ln \epsilon}{1-\epsilon^2} + k$, k constante. Logo $\Omega(\theta)$ não é completa e portanto a superfície T_3 não é completa.

Analogamente,

(e) Para a superfície T_4, $\lim\limits_{\theta \to \ln \frac{1+\sqrt{1+\epsilon^2}}{\epsilon}} s(\theta)$ é um número finito;

(f) Para a superfície T_5, $\lim\limits_{\theta \to \ln \frac{-1+\sqrt{1+\epsilon^2}}{\epsilon}} s(\theta)$ é um número finito;

(f) Para a superfície T_6, $\lim\limits_{\theta \to -\infty} s(\theta)$ é um número finito.

Portanto, todas as superfícies de revolução acima são não completas.

∎

Capítulo 6

Superfícies de Revolução de Tipo Espaço com Eixo de Tipo Luz

Neste capítulo estudaremos as superfícies de revolução de tipo espaço com eixo de tipo luz. Trabalhando com um sistema de coordenadas de *tipo luz*, determinaremos a curva geratriz da superfície.

6.1 A equação diferencial das superfícies de revolução com eixo de tipo luz.

Seja $\Omega(s) = \big(0, y(s), z(s)\big)$, parametrizada pelo parâmetro comprimento de arco s, a curva geratriz da superfície de revolução S de tipo espaço e com eixo de tipo luz dado por $y = z$. Consideremos o sistema de coordenadas (u, v) de *tipo luz* tal que $u = \dfrac{y+z}{\sqrt{2}}$ e $v = \dfrac{-y+z}{\sqrt{2}}$. Assim Ω se escreve como $u = \dfrac{y+z}{\sqrt{2}}$ e $v = \dfrac{-y+z}{\sqrt{2}}$, com $v > 0$. Logo o vetor tangente unitário $\dot{\Omega}$ é da forma $\dot{u} = \dfrac{\dot{y}+\dot{z}}{\sqrt{2}}$ e $\dot{v} = \dfrac{-\dot{y}+\dot{z}}{\sqrt{2}}$. Como Ω é de tipo espaço, ou seja, $\dot{y}^2(s) - \dot{z}^2(s) = 1$, podemos escolher $\dot{y}(s) = \cosh(\phi)(s)$ e $\dot{z}(s) = \sinh(\phi)(s)$. Assim $\dot{u} = \dfrac{\cosh(\phi)(s) + \sinh(\phi)(s)}{\sqrt{2}} = \dfrac{e^{\phi(s)}}{\sqrt{2}} > 0$ e $\dot{v} = \dfrac{-\cosh(\phi)(s) + \sinh(\phi)(s)}{\sqrt{2}} = \dfrac{-e^{-\phi(s)}}{\sqrt{2}} < 0$.

Logo $\ddot{v} = \dfrac{e^{-\phi(s)}}{\sqrt{2}}\dot{\phi}(s) = -\dot{v}\dot{\phi}(s)$ e $\dot{\phi}(s) = \dfrac{-\ddot{v}}{\dot{v}}$. No capítulo 3 vimos que as curvaturas

principais desta superfície são expressas por $k_1 = \frac{\ddot{y}}{\dot{z}} = \dot{\phi} = \frac{-\ddot{v}}{\dot{v}}$ e $k_2 = \frac{-(\dot{y}-\dot{z})}{y-z} = \frac{-\dot{v}}{v}$. A curvatura média H da superfície é dada por $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}(\frac{-\ddot{v}}{\dot{v}} - \frac{\dot{v}}{v})$.

Proposição 6.1.1 *A superfície de revolução S tem curvatura média H constante se e somente se $v\ddot{v} = -2Hv\dot{v} - \dot{v}^2$, com $v > 0$ e $\dot{v} < 0$.*

Demonstração: H é constante $\Leftrightarrow H = \frac{1}{2}(\frac{-\ddot{v}}{\dot{v}} - \frac{\dot{v}}{v}) = \frac{1}{2}(\frac{-v\ddot{v} - v\dot{v}}{v\dot{v}}) = \frac{1}{2}(\frac{-v\ddot{v} - \ddot{v}^2}{v\dot{v}}) \Leftrightarrow$ $-2v\dot{v}H = v\ddot{v} + \dot{v}^2 \Leftrightarrow v\ddot{v} = -2v\dot{v}H - \dot{v}^2$, $v > 0$ e $\dot{v} < 0$.

∎

Proposição 6.1.2 *A curva geratriz Ω é obtida como o gráfico da função $u = u(v)$ e é de uma das seguintes formas:*
(i) Se $H \neq 0$ e $\frac{c}{H} = a^2 > 0$, então $u(v) = \frac{1}{4H^2}(\frac{v}{v^2 - a^2} - \frac{1}{2a}\log(\frac{v-a}{v+a}) + k)$, k constante e $v \in (a, \infty)$, $a > 0$;
(ii) Se $H \neq 0$ e $\frac{c}{H} = -a^2 < 0$, então $u(v) = \frac{1}{4H^2}(\frac{v}{v^2 + a^2} - \frac{1}{a}arctg\frac{v}{a} + k)$, k constante e $v \in (0, \infty)$;
(iii) Se $H \neq 0$ e $c = 0$, então $u(v) = \frac{1}{2H^2}(\frac{1}{v} + k)$, k constante e $v \in (0, \infty)$;
(iv) Se $H = 0$ e $c \neq 0$, então $u(v) = \frac{-v^3}{6c^2} + k$, onde k é uma constante arbitrária.

Demonstração: Tomando-se $\dot{v} = p$ e $\ddot{v} = p\frac{dp}{dv}$, a equação obtida na proposição anterior transforma-se na equação exata $vdp + (2Hv + p)dv = 0$, ou seja, $vp\frac{dp}{dv} + 2vpH + p^2 = 0$. Então $p(v\frac{dp}{dv} + 2vH + p) = 0 \Longrightarrow vdp + (2vH + p)dv = 0$. Logo $vp + Hv^2 = c$. Assim $p = \frac{c - v^2H}{v} \Longrightarrow \dot{v} = \frac{c - v^2H}{v}$.

Como $\dot{u} = \frac{e^{\phi}}{\sqrt{2}}$ e $\dot{v} = \frac{-e^{-\phi}}{\sqrt{2}}$ segue que $\dot{u}\dot{v} = \frac{-1}{2}$. Logo $\frac{du}{dv} = \frac{-v^2}{2(c - Hv^2)^2}$. Integrando-se esta equação, obtemos a curva geratriz como o gráfico da função $u(v) = \int \frac{-v^2}{2(c - Hv^2)^2}dv$. Então temos:

(i) Se $H \neq 0$ e $\frac{c}{H} = a^2 > 0$ segue que $u(v) = \int \frac{-v^2}{2(c - Hv^2)^2}dv = \frac{-1}{2H^2}\int \frac{v^2}{(v^2 - a^2)^2}dv$. Calculando-se a integral segue que $u(v) = \frac{1}{4H^2}(\frac{v}{v^2 - a^2} - \frac{1}{2a}\log(\frac{v-a}{v+a}) + k)$, onde k é

uma constante arbitrária.

De fato, como $u(v) = \dfrac{-1}{2H^2}\displaystyle\int \frac{v^2}{(v^2-a^2)^2}dv = \frac{-1}{2H^2}\int \frac{v}{2}\frac{2v}{(v^2-a^2)^2}dv$, fazendo-se $u = \dfrac{v}{2}$ e $dx = \dfrac{2v\ dv}{(v^2-a^2)^2}$ segue que $du = \dfrac{dv}{2}$ e $x = \dfrac{-1}{v^2-a^2}$.

Calculando-se $\displaystyle\int \frac{v^2}{(v^2-a^2)^2}dv$ por partes temos $ux - \displaystyle\int xdu = \frac{1}{2}(\frac{-v}{v^2-a^2}) - \frac{1}{2}\int \frac{-1}{v^2-a^2}dv = \frac{-1}{2}(\frac{v}{v^2-a^2} - \int \frac{1}{v^2-a^2}dv)$. Agora, $\displaystyle\int \frac{1}{v^2-a^2}dv = \frac{1}{2a}\int (\frac{-1}{v+a} + \frac{1}{v-a})dv = \frac{1}{2a}(\log(v-a) - \log(v+a)) = \frac{1}{2a}\log(\frac{v-a}{v+a})$.
Logo $u(v) = \dfrac{1}{4H^2}(\dfrac{v}{v^2-a^2} - \dfrac{1}{2a}\log(\dfrac{v-a}{v+a}) + k)$

(ii) Se $H \neq 0$ e $\dfrac{c}{H} = -a^2 < 0$ segue que $u(v) = \displaystyle\int \frac{-v^2}{2H^2(v^2+a^2)^2}dv = \frac{-1}{2H^2}\int \frac{v^2}{(v^2+a^2)^2}dv$.
Calculando-se a integral segue que $u(v) = \dfrac{1}{4H^2}(\dfrac{v}{v^2+a^2} - \dfrac{1}{a}arctg\dfrac{v}{a} + k)$, onde k é uma constante arbitrária.

De fato, como $u(v) = \dfrac{-1}{2H^2}\displaystyle\int \frac{v^2}{(v^2+a^2)^2}dv = \frac{-1}{2H^2}\int \frac{v}{2}\frac{2v}{(v^2+a^2)^2}dv$, fazendo-se $u = \dfrac{v}{2}$ e $dx = \dfrac{2v\ dv}{(v^2+a^2)^2}$ segue que $du = \dfrac{dv}{2}$ e $x = \dfrac{-1}{v^2+a^2}$. Calculando-se $\displaystyle\int \frac{v^2}{(v^2+a^2)^2}dv$ por partes temos $ux - \displaystyle\int xdu = \frac{-1}{2}(\frac{v}{v^2+a^2}) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{v^2+a^2}dv = \frac{-1}{2}(\frac{v}{v^2+a^2}) + \frac{1}{2a}arctg\frac{v}{a} + k$.
Logo $u(v) = \dfrac{1}{4H^2}(\dfrac{1}{a}arctg\dfrac{v}{a} - \dfrac{v}{v^2+a^2} + k)$.
(iii) Se $H \neq 0$ e $c = 0$ segue que $u(v) = \displaystyle\int \frac{-v^2}{2H^2v^4}dv = \frac{1}{2H^2}\int \frac{-1}{v^2}dv$. Calculando-se a integral segue que $u(v) = \dfrac{1}{2H^2}(\dfrac{1}{v} + k)$, onde k é uma constante arbitrária.
(iv) Se $H = 0$, então $c \neq 0$. Logo $u(v) = \displaystyle\int \frac{-v^2}{2c^2}dv$. Calculando-se a integral segue que $u(v) = \dfrac{-v^3}{6c^2} + k$, onde k é uma constante arbitrária.

∎

Em resumo temos o seguinte teorema:

Teorema 6.1.3 *A curva geratriz de uma superfície de revolução com eixo de tipo luz* $x = 0$, $y = z$ e curvatura média constante H é dada por $\Omega(v) = \left(0, \frac{u(v) - v}{\sqrt{2}}, \frac{u(v) + v}{\sqrt{2}}\right)$, onde $u = u(v)$ é uma das quatro funções acima.

Proposição 6.1.4 *As únicas superfícies de revolução completas com eixo de tipo luz são as geradas pelas curvas do caso (i) e (iii) da Proposição 6.1.2.*

Demonstração : Pelo Teorema 6.1.3 temos $\Omega(v) = \left(0, \frac{u(v) - v}{\sqrt{2}}, \frac{u(v) + v}{\sqrt{2}}\right)$. Logo $\Omega'(v) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0, u'(v) - 1, u'(v) + 1\right)$. O parâmetro comprimento de arco para Ω é dado por:

$$s(v) = \int_{v_0}^{v} \sqrt{y'^2(r) - z'^2(r)}dr = \int_{v_0}^{v} \frac{r}{\sqrt{2}|c - Hr^2|}dr.$$

Tomando-se o valor de H obtido em cada caso acima e chamando de $(L_1), (L_2), (L_3)$ e (L_4) as superfícies de revolução geradas pelas curvas $(i), (ii), (iii)$ e (iv) respectivamente, temos:

(L_1) Para esta superfície $s(v) = \frac{1}{2\sqrt{2}|H|}(\ln(v^2 - a^2) - \ln(v_0^2 - a^2)$, $v \in (a, \infty)$. Logo $\lim_{v \to a^+} s(v) = -\infty$ e $\lim_{v \to \infty} s(v) = +\infty$. Portanto pelo Teorema 3.2.5 segue que (L_1) é completa.

(L_2) Para esta superfície $s(v) = \frac{1}{4|H|}(log(a^2 + v^2) - log(a^2 + v_0^2)$, $v \in (0, \infty)$. Como $\lim_{v \to 0} s(v) = \frac{1}{4|H|}\left(\log a^2 - \log(a^2 + v_0^2)\right) = \frac{1}{4|H|}\log\left(\frac{a^2}{a^2 + v_0^2}\right)$ segue que a superfície não é completa.

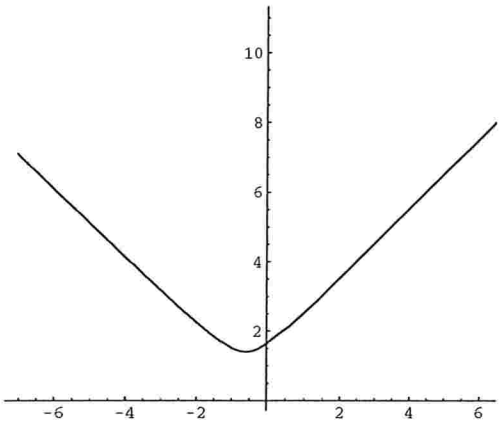
(L_3) Para esta superfície $s(v) = \frac{1}{\sqrt{2}|H|}\left(\log v - \log v_0\right)$, $v \in (0, \infty)$. Logo $\lim_{v \to 0^+} s(v) = -\infty$ e $\lim_{v \to \infty} s(v) = +\infty$. Portanto pelo teorema 3.2.5 segue que a superfície é completa.

(L_4) Para esta superfície $s(v) = \frac{1}{2\sqrt{2}|c|}\left(v^2 - v_0^2\right)$. Como $\lim_{v \to 0^+} s(v) = \frac{-v_0^2}{2\sqrt{2}|c|}$ segue que a superfície não é completa.

∎

6.2 Gráficos

Nesta seção tomaremos casos particulares para representar os gráficos das geratrizes g_i e das respectivas superfícies de revolução L_i.



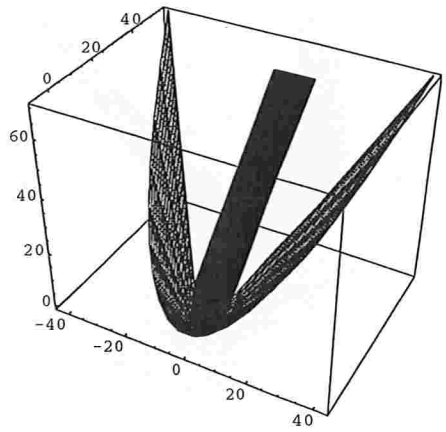


Figura 6.1: **Gráficos cg1 e L1 com** $a = 1,\ k = 0,\ H = 1,\ 1 < v < 10$ **e** $-3 < t < 3$

[8] [2][6]

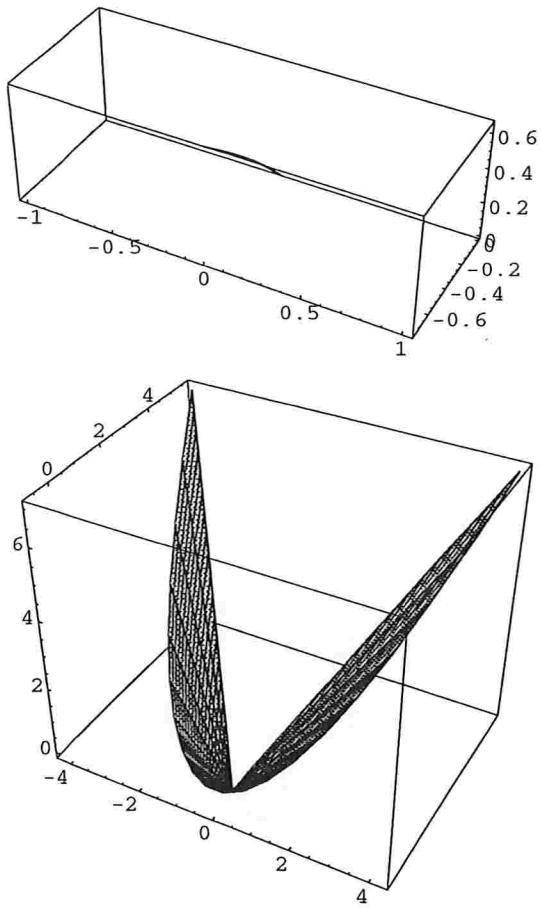


Figura 6.2: **Gráficos cg2 e L2 com** $a = 1,\ k = 0,\ H = 1,\ 0 < v < 1$ **e** $-3 < t < 3$

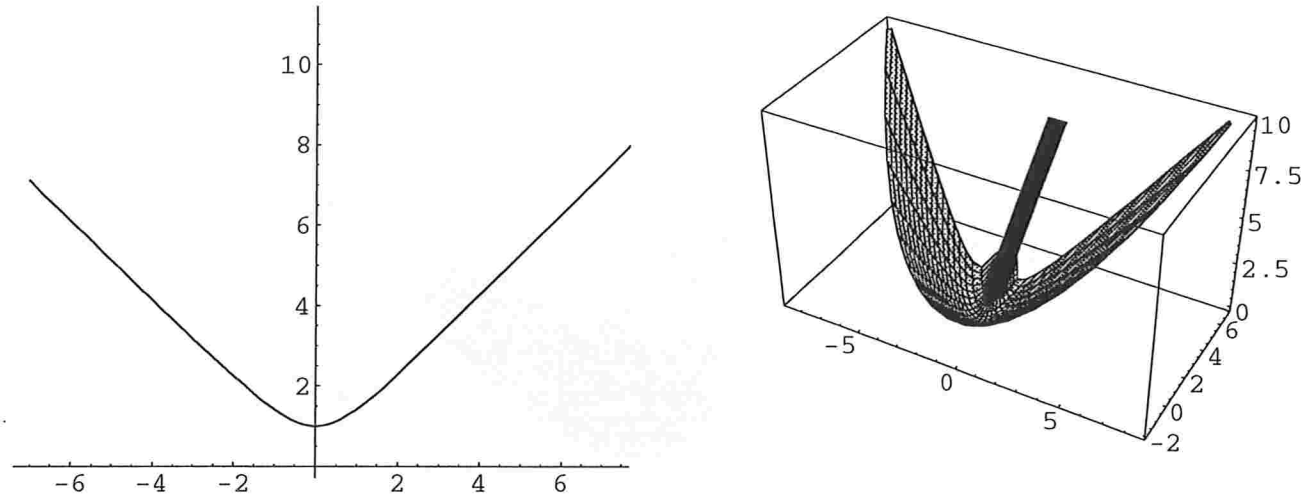


Figura 6.3: **Gráficos cg3 e L3 com** $a = 1,\ k = 0,\ H = 1,\ 0 < v < 3$ **e** $-2 < t < 2$

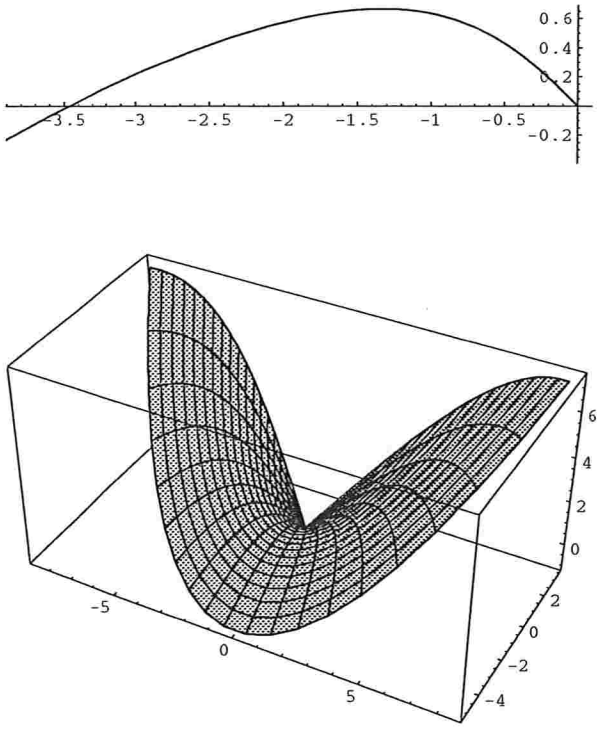


Figura 6.4: **Gráficos cg4 e L4 com** $c = 1,\ k = 0,\ H = 0,\ 0 < v < 3$ **e** $-2 < t < 2$

Referências Bibliográficas

[1] Pablo Mira Carrillo, Geometria de las superficies maximales en el espacio de Lorentz-Minkowski, *Tesina de Licenciatura Universidade de Murcia Espanha* (2000).

[2] Manfredo Perdigão do Carmo, Geometria Riemanniana, *Instituto de Matematica Pura e Aplicada Rio de Janeiro* (1988, 2ª edição.).

[3] K. Nomizu G.S. Birman, Trigonometry in Lorentz Geometry, *Am. Math. Monthly, 91* (1984).

[4] K. Nomizu J.I. Hano, Surfaces of revolution with constant mean curvature in Lorentz-Minkowski space, *Tôkohu Math. Journal (36) 427-437* (1984).

[5] R. Lopez, Constant mean curvature surfaces foliated by circles in Lorentz-Minkowski space, *Geometriae Dedicata 76, 81-95* (1999).

[6] Barret O'Neill, Semi-Riemannian Geometry with aplications to relativity, *New York Academic Press* (1983).

[7] C.A. Suzuki, Hipersuperfícies de rotação em espaços de curvatura constante, *Tese de Mestrado , IME - USP* (1989).

[8] W.Y. Hsiang , W.C. Yu, A generalization of a theorem of Delaunay, *Differential Geometry 16, 161-177* (1981).