Sobre o primeiro grupo de cohomologia de Hochschild de uma álgebra

Ana Teresa Tavares Lopes

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de concentração: **Álgebra**
Orientadora: **Profa. Dra. Maria Izabel Ramalho Martins**

Durante a elaboração deste trabalho a autora recebeu auxílio financeiro do CNPq.

São Paulo, 24 de abril de 2002

Sobre o primeiro grupo de cohomologia de Hochschild de uma álgebra

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Ana Teresa Tavares Lopes e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 24 de abril de 2002.

Banca examinadora:

- Profa. Dra. Maria Izabel Ramalho Martins (Orientadora) - IME-USP
- Prof. Dr. Héctor Alfredo Merklen Goldschmidt - IME-USP
- Prof. Dr. Antonio Paques - IMECC-UNICAMP

Aos meus pais e
ao meu esposo Mário Marcos.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer à Prof. Dra. Maria Izabel Ramalho Martins, por sua orientação cuidadosa, sua paciência e amizade.

Meus sinceros agradecimentos ao Prof. Dr. Eduardo Nascimento Marcos, pelo interesse e pelas sugestões que tanto contribuiram para o enriquecimento deste trabalho, e ao Prof. Dr. Flávio Ulhoa Coelho, pelo incentivo inicial.

Agradeço, ainda, aos meus pais e a todos os familiares que me apoiaram nesta difícil jornada, e em especial aos meus sogros Maria José e Odilon e ao meu esposo Mário Marcos.

Finalmente, gostaria de agradecer ao CNPq pelo apoio financeiro.

Ana Teresa Tavares Lopes

Resumo

Seja $A = KQ/I$ um quociente de uma álgebra de caminhos. O objetivo deste trabalho é apresentar os resultados obtidos por De la Peña e Saorín, em [PS], que permitem computar a dimensão do primeiro grupo de cohomologia de Hochschild $H^1(A)$ de A e determinar condições necessárias e suficientes para que $H^1(A)$ se anule.

Para computar a dimensão de $H^1(A)$ eles primeiramente identificam esse grupo com um quociente do K-espaço vetorial das derivações normalizadas de A, para posteriormente obterem uma decomposição adequada de $H^1(A)$ em subespaços. Essa decomposição é obtida através do resultado principal de [PS], no qual é provado que $H^1(A)$ é o termo médio de uma seqüência exata curta de K-espaços vetoriais, cujo termo à esquerda é o quociente do espaço das derivações F^2 - lineares de A pelas internas, e à direita é um subquociente do K-espaço vetorial de dimensão finita $\mathrm{End}_K(A/J^2)$.

Através da extensão de alguns resultados de [AP], eles obtém um K-monomorfismo de $\mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I), K^+)$ em $H^1(A)$, o que lhes permite relacionar a dimensão de $H^1(A)$ com o posto e o p-posto do grupo abelianizado do grupo fundamental $\pi_1(Q,I)$ de (Q,I). Esta é a estratégia usada para obter condições necessárias e suficientes para que $H^1(A)$ se anule.

Como contribuição pessoal, este trabalho também estuda a estrutura de álgebra de Lie de $H^1(A)$, que é induzida pela de $\mathrm{End}_K(A)$. Considerando alguns tipos de quiver Q e as álgebras $A = KQ/I$, onde I é um ideal admissível de KQ, estudamos condições necessárias e suficientes para que $H^1(A)$ seja uma álgebra de Lie abeliana.

Abstract

Let $A = KQ/I$ be a factor of a path algebra. The purpose of this work is to present the results obtained by De la Peña e Saorín, in [PS], to compute the dimension of the first Hochschild cohomology group $H^1(A)$ of A and to determine necessary and sufficient conditions for this group to vanish.

In order to compute the dimension of $H^1(A)$, they identify it with a quotient of the K-vector space of the normalized derivation of A and then obtain an adequate decomposition into subspaces. This decomposition is obtained in the main result of [PS], in which it is proved that $H^1(A)$ is the middle term of a short exact sequence, whose left term is given by the quotient of the K-vector space of F^2 - linear derivations of A by the inner ones, and the right term is a subquotient of the finite-dimensional K-vector space $\mathrm{End}_K(A/J^2)$.

Extending some results in [AP], they obtain an embedding from $\mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I), K^+)$ into $H^1(A)$, which allows them to connect the dimension of $H^1(A)$ with the rank and the p-rank of the abelianization of the fundamental group $\pi_1(Q,I)$ of (Q,I). This is the strategy used to get necessary and sufficient conditions for $H^1(A)$ to vanish.

As a personal contribuition we also study, in this work, the Lie algebra structure of $H^1(A)$, which is induced by the one of $\mathrm{End}_K(A)$. We consider some kinds of quiver Q and algebras $A = KQ/I$, where I is an admissible ideal of the path algebra KQ. We study necessary and sufficient conditions for $H^1(A)$ to be an abelian Lie algebra.

Índice

Introdução 3

1 Preliminares 9

1.1 Quivers e álgebras de caminhos 10

1.2 O grupo fundamental de um quiver 14

1.3 O grupo fundamental de um quiver com relações 19

2 O Primeiro Grupo de Cohomologia de Hochschild de uma Álgebra 23

2.1 O grupo $H^1(A)$ 24

2.2 Derivações de uma K-álgebra 25

2.3 A descrição de $H^1(A)$ em termos de derivações 29

2.4 A estrutura de álgebra de Lie de $H^1(A)$ 31

3 Uma Fórmula para $\dim_K H^1(A)$ 35

3.1 Uma decomposição do $H^1(A)$ 36

3.2 Casos particulares da decomposição do H^1(A) 42

4 O Primeiro Grupo Fundamental e o $H^1(A)$ 48

4.1 $\pi_1(Q, I)$ e as derivações de A 49

4.2 A dimensão do $H^1(A)$ e o grupo fundamental 53

4.3 Um monomorfismo de $\mathrm{Hom}(\pi_1(Q, I), K^+)$ em $H^1(A)$ 56

4.4 Condições necessárias e suficientes para $H^1(A)$ se anular 59

5 A Álgebra de Lie $H^1(A)$ **65**

5.1 As álgebra hereditárias 68

5.2 A álgebra do laço 69

5.3 A álgebra do circuito 71

5.4 A álgebra dos dois laços 74

5.5 Construindo $H^1(A)$ - Lie não abeliana 86

Referências Bibliográficas **97**

Introdução

Seja A uma K-álgebra, onde K é um corpo qualquer. Os grupos de cohomologia de Hochschild de A foram introduzidos por Hochschild, em [Ho], como grupos de cohomologia de um complexo "especial", que hoje é conhecido como complexo de Hochschild. Esses grupos, denotados por $H^i(A)$, para $i \geq 0$, por serem invariantes da álgebra sob equivalência derivada (em [Ha]) e sob equivalência de Morita (em [We]), têm sido amplamente estudados na teoria de representações de álgebras por vários autores. O primeiro grupo de cohomologia de Hochschild, por exemplo, está intrinsecamente relacionado com a caracterização da classe das álgebras simplesmente conexas e, sua generalização, à das fortemente simplesmente conexas (ver [Sk]). A importância das álgebras simplesmente conexas na teoria de representações está assentada no fato de que, muitas vezes, o estudo dos módulos indecomponíveis de uma dada álgebra pode ser reduzido, via teoria de recobrimento, ao dos seus correspondentes módulos sobre álgebras simplesmente conexas - esse é o caso, por exemplo, das álgebras de tipo de representação finito.

Entre outros resultados que relacionam as conexões simples e o primeiro grupo de cohomologia de Hochschild podemos citar, a título de ilustração, os seguintes: Happel, em [Ha], mostra que uma K-álgebra A de dimensão finita e de tipo de representação finito (K um corpo algebricamente fechado) é simplesmente conexa se, e somente se, o quiver de Auslander-Reiten de A não contém ciclos e $H^1(A)$ se anula; Skowroński, em [Sk], prova que uma K-álgebra triangular A é fortemente simplesmente conexa (ou seja, tal que toda subcategoria plena e conexa é simplesmente conexa) se, e somente se, $H^1(C)$ se anula para toda subcategoria plena e conexa C de A.

De outro lado, é bastante conhecido que o primeiro grupo de cohomologia de Hochs-

child de uma K-álgebra qualquer é um quociente do espaço das derivações de A. Para as álgebras do tipo $A = KQ/I$, onde Q é um quiver finito e I é um ideal admissível de KQ, essa conexão entre $H^1(A)$ e as derivações tem permitido estabelecer relações entre o anulamento do $H^1(A)$ e a existência de ciclos em Q (ver [FGM] e [Ha]).

Um dos objetivos deste trabalho é apresentar principalmente a estratégia que foi desenvolvida por De la Peña e Saorín, em [PS], para computar a dimensão de $H^1(A)$ e determinar condições necessárias e suficientes para que $H^1(A)$ se anule.

Um outro objetivo é o de estudar a estrutura de álgebra de Lie de $H^1(A)$, estrutura essa que é induzida pela natural estrutura de Lie da álgebra associativa $\mathrm{End}_K(A)$.

Para o objetivo inicial, as álgebra consideradas são do tipo $A = KQ/I$, onde K é um corpo qualquer, Q é um quiver finito e I é um ideal da álgebra de caminhos KQ contido em F^2 (F denota o ideal de KQ gerado pelas flechas de Q), para o qual está fixado um conjunto de geradores que satisfaz uma condição de minimalidade. Nesse caso, o primeiro grupo de cohomologia de Hochschild $H^1(A)$ pode ser identificado, na verdade, com o espaço das derivações normalizadas de A, módulo as internas (em [Ha] e [PS]).

A estratégia desenvolvida, em [PS], para computar a dimensão de $H^1(A)$ consiste em decompô-lo, a partir dessa identificação, "em peças menores", cujas dimensões se possa calcular. Tal idéia aparece claramente no resultado principal do artigo, que mostra que o $H^1(A)$ é o termo médio de uma seqüência exata curta (de K-espaços vetoriais), cujo termo à esquerda é o quociente das derivações F^2 - lineares de A pelas internas, e o à direita é um subquociente do K-espaço de dimensão finita $\mathrm{End}_K(A/J^2)$, onde $J = F/I$ (Teo. 3.6 neste trabalho).

A "decomposição" sugerida pela seqüência mencionada, junto com uma melhor identificação do seu termo à direita, através de particulares derivações de A, e a intervenção do grupo fundamentental $\pi_1(Q, I)$ de (Q,I) permitem, então, relacionar a dimensão de $H^1(A)$ com o posto e o p-posto do grupo abelianizado de $\pi_1(Q, I)$.

Essa mesma relação e a existência de um K-monomorfismo de $\mathrm{Hom}(\pi_1(Q, I), K^+)$ em $H^1(A)$ (K^+ denota o grupo aditivo do corpo K), por sua vez, levam à obtenção de condições necessárias e suficientes para que $H^1(A)$ se anule.

Para o outro objetivo deste trabalho, que é o de estudar a estrutura de álgebra de Lie de $H^1(A)$, as álgebras consideradas são do tipo $A = KQ/I$, onde Q é um quiver finito e I

é um ideal admissível de KQ (ie: $F^n \subseteq I \subseteq F^2$, para algum $n \geq 2$). Nosso interesse nesse assunto originou-se da sugestão do Prof. Dr. Eduardo N. Marcos, dada durante nosso exame de qualificação, de tentar estudar a estrutura de álgebra de Lie de $H^1(A)$. Além disso, até onde sabemos, essa estrutura do $H^1(A)$ tem sido pouco explorada (com exceção do tratado, em [FGGM], sobre derivações diagonalizáveis de uma K-álgebra de dimensão finita, quando car$K = 0$ ou K é algebricamente fechado de característica positiva). Desta forma, optamos, como contribuição pessoal ao trabalho, por estudar a estrutura de álgebra de Lie de $H^1(A)$ de forma a determinar condições sobre o quiver Q ou sobre o ideal I que garantam a sua abelianidade, em alguns casos.

Os resultados obtidos por De la Peña e Saorín, em [PS], e o nosso estudo sobre as condições para que a álgebra de Lie seja abeliana ficarão mais evidenciadas na descrição que segue da organização deste trabalho.

O capítulo 1 contém definições, alguns resultados e propriedades básicas sobre quivers, quivers com relações e álgebras de quivers, que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Em especial, as seções 1.2 e 1.3 são dedicadas à construção e ao estudo de propriedades dos grupos fundamentais $\pi_1(Q)$ de um quiver finito Q e $\pi_1(Q, I)$ de um quiver com relações (Q,I). Um resultado bastante conhecido é que, sendo Q conexo, o grupo fundamental $\pi_1(Q)$ é um grupo livre de posto igual a $\chi(Q)$, a função característica de Euler de Q (em [Ma]). Através das "parade data" utilizadas por Farkas, Green e Marcos, em [FGM], apresentamos uma "versão algébrica" da prova desse resultado.

No capítulo 2 introduzimos os grupos de cohomologia de Hochschild $H^i(A)$, para $i \geq 0$, e os K-espaços vetoriais $Der(A)$ e $Inn(A)$, respectivamente, das derivações e das derivações internas de uma K-álgebra A qualquer, mostrando, então, que $H^1(A) = \frac{Der(A)}{Inn(A)}$. Para as álgebras de quivers com relações $A = KQ/I$, são definidas outras derivações mais específicas (como as derivações normalizadas, especiais, lineares e F^2 - lineares). Como em [Ha] ou [PS], mostramos que as derivações normalizadas permitem uma identificação mais conveniente de $H^1(A)$, ou seja, que $H^1(A) \cong \frac{Nor(A)}{Nor(A) \cap Inn(A)}$ ($Nor(A)$ denota o espaço das derivações normalizadas de A).

No entanto, cabe às derivações normalizadas da álgebra KQ desempenhar um papel fundamental na obtenção dos resultados contidos em [PS], pela particular propriedade de serem determinadas por seus valores sobre as flechas de Q e, por isso, decompostas

em uma soma de derivações mais simples. Por esse motivo, incluímos neste capítulo a mencionada propriedade, através da Prop. 2.3, cuja demonstração é uma sugestão do Prof. Dr. Eduardo N. Marcos, a quem agradecemos muito pelo interesse e incentivo.

Ainda no capítulo 2, apresentamos as álgebras de Lie e algumas de suas propriedades e exemplos, com o intuito de mostrar que o primeiro grupo de cohomologia de Hochschild $H^1(A)$, além de estrutura de K-espaço vetorial, possui também a de álgebra de Lie, induzida que é pelo colchete de Lie da álgebra associativa $\mathrm{End}_K(A)$. A álgebra de Lie $H^1(A)$ será objeto de estudo no capítulo 5.

Assim, os capítulos 1 e 2 contém as ferramentas básicas para o desenvolvimento da parte central deste trabalho. Os resultados contidos nos dois capítulos seguintes (capítulos 3 e 4) foram essencialmente obtidos, em [PS], por De la Peña e Saorín.

No capítulo 3 apresentamos, no Teo. 3.6, o principal resultado em [PS], que mostra que o $H^1(A)$ é o termo médio de uma seqüência exata curta de K-espaços vetoriais, na qual os outros termos são um quociente do subespaço das derivações F^2 - lineares de A (à esquerda) e um subquociente do espaço $\mathrm{End}_K(A/J^2)$ (à direita), iniciando, assim, o "fatiamento" de $H^1(A)$ mencionado no início desta introdução. A prova desse teorema se baseia na propriedade de que as derivações normalizadas de $A = KQ/I$ são obtidas pelas classes das derivações normalizadas de KQ que são I-admissíveis, módulo aquelas que têm imagem em I. Um outro ingrediente importante no Teo. 3.6 é o grupo $ch(Q, K)$ dos caracteres aditivos acíclicos de Q que, passível de um cálculo completo, permite melhor identificar o termo à direita da seqüência do $H^1(A)$, onde comparece. Um "refinamento" desse termo é obtido na Prop. 3.12, por meio das derivações lineares e especiais de A, nos casos particulares em que a álgebra $A = KQ/I$ é quase fortemente acíclica ou o ideal I é homogêneo

No capítulo 4, com o Teo. 3.6 e as "aproximações aprimoradas" dos casos particulares em mãos, tratamos da relação do grupo fundamental $\pi_1(Q, I)$ do quiver com relações (Q,I) com a dimensão de $H^1(KQ/I)$, em primeiro lugar, e com as condições necessárias e suficientes para o seu anulamento, em segundo lugar.

Como em [PS], apresentamos fórmulas para a dimensão de $H^1(A)$ em função do posto e do p-posto do grupo abelianizado $\overline{\Pi}$ de $\pi_1(Q, I)$ (Prop. 4.4 e Cor. 4.5). Notamos aqui que o Cor. 4.5 inclui, como casos particulares, alguns resultados obtidos por Happel

(em [Ha], Teo. 2.2 e Prop. 2.3).

Na seção 4.2, apresentamos um exemplo, Ex. 4.6, que mostra que os resultados obtidos podem ser aplicados ao caso em que a álgebra $A = KQ/I$ não é de dimensão finita sobre K (isto é, em que o ideal I considerado não é admissível).

Para a obtenção de condições de anulamento de $H^1(A)$, a ferramenta essencial é a existência de um K-monomorfismo canônico de $\mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I), K^+)$ em $H^1(A)$. A existência desse monomorfismo já fora obtida por Assem e De la Peña, em [AP], para as álgebras triangulares (aquelas cujo quiver não contém circuitos) e, mais tarde, por Farkas, Green e Marcos, em [FGM], para o caso geral. Embora De la Peña e Saorín desenvolvam, em [PS], uma demonstração desse fato, optamos por apresentar uma outra mais simples que se baseia na definição de $H^1(A)$ e em argumentos similares aos usados em [AP] para o caso triangular.

Desse monomorfismo e das "fórmulas" da dimensão de $H^1(A)$ que envolvem o posto e o p-posto de $\overline{\Pi}$, surgem as condições necessárias e suficientes para o anulamentento de $H^1(A)$. Essas condições, conforme o Cor. 4.11, dependem da finitude do grupo $\overline{\Pi}$, da relação de sua ordem com a característica de K e das derivações lineares e F^2 - lineares de A.

Por fim, o capítulo 5 contém uma contribuição pessoal ao trabalho, através do estudo da estrutura de Lie de $H^1(A)$, quanto à propriedade de ser abeliana, para álgebras $A = KQ/I$, com o par (Q,I) sob certas condições.

Consideramos, primeiramente, as álgebra $A = KQ$, onde Q é um quiver finito, não contendo circuitos orientados (álgebras hereditárias); as álgebras locais $A = KQ/I$, onde Q é constituído por um laço α e $I = \langle\ \alpha^m\ \rangle$, para algum $m \geq 2$ ($A \cong K[X]/(X^m)$, $m \geq 2$); as álgebras locais $A = KQ/I$, onde Q é um quiver formado por dois laços, cujos quadrados estão no ideal I admissível; e as álgebras que são quociente da álgebra de caminhos de um circuito orientado, não laço, por um ideal admissível.

Determinamos, nos casos considerados, as condições necessárias e suficientes para que a álgebra de Lie $H^1(A)$ seja abeliana. O resultado obtido para as álgebras locais $A \cong K[X]/(X^m)$, $m \geq 2$ (Prop. 5.4), motivou-nos a impor, no caso das locais de dois laços, que os quadrados desses estivessem no ideal de relações. Para essas álgebras, as condições impostas ao ideal I o caracterizam, então, como um ideal homogêneo (Prop. 5.13) e

determinam que $H^1(A)$ é uma álgebra de Lie abeliana somente quando $I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ \alpha\beta\ \rangle$ ou quando K é um corpo com pelo menos quatro elementos e $I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ \alpha\beta + \lambda\beta\alpha\ \rangle$ com $\lambda \in K \setminus \{0,1,-1\}$ (Prop. 5.23).

Conhecendo a estrutura de Lie de $H^1(A)$ das álgebras acima mencionadas (quanto a ser abeliana ou não), estudamos a possibilidade de adotá-las como "exemplos básicos" a partir dos quais possamos contruir novas álgebras e garantir algo sobre a abelianidade ou não dos respectivos grupos de cohomologia de Hochschild.

Esse estudo é feito na seção 5.5. Consideramos uma dada álgebra $B = KQ_B/I_B$, onde K é um corpo qualquer, Q_B é um quiver finito (conexo) e I_B é um ideal admissível de KQ_B. A partir do par (Q_B,I_B) construímos um outro (Q,I), onde Q é obtido de Q_B por adjunção de novos vértices e/ou novas flechas, sob certas condições, e I é um ideal admissível de KQ, contendo as relações geradoras de I_B e de forma que as novas relações não envolvam flechas de Q_B.

Mostramos que existe um monomorfismo de álgebras de Lie do espaço das derivações normalizadas de B no correspondente $Nor(A)$, onde $A = KQ/I$. Em conseqüência, obtivemos que se B é tal que $H^1(B)$ é uma álgebra de Lie não abeliana, então a álgebra de Lie $H^1(A)$ é também não abeliana (Teo. 5.28).

Assim, a partir do par (Q_B,I_B) dos exemplos adotados como "básicos", podemos obter inúmeros exemplos de álgebras $A = KQ/I$ em que $Nor(A)$ e $H^1(A)$ são álgebras de Lie não abelianas.

CAPÍTULO 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar um resumo dos conceitos básicos que serão utilizados ao longo deste trabalho.

Na seção 1.1, introduziremos a noção de quiver e de álgebras de caminhos e assumiremos alguns resultados aqui apresentados, sem explicitar suas demonstrações. Uma exposição detalhada desses resultados pode ser encontrada em [ASS], [CLS] e [JM].

Em 1.2 definiremos o grupo fundamental $\pi_1(Q)$ de um quiver Q e apresentaremos uma prova algébrica de que o grupo $\pi_1(Q)$ é livre de posto $\chi(Q)$, onde $\chi(Q)$ denota a característica de Euler do quiver Q. Tal prova será feita com a utilização de argumentos análogos aos usados por Farkas, Green e Marcos, em [FGM], para mostrar que esse grupo é finitamente gerado. Uma abordagem topológica do assunto pode ser encontrada no capítulo VI de [Ma].

Na seção 1.3, apresentaremos duas descrições do grupo fundamental de um quiver com relações (Q,I): uma primeira como imagem epimórfica do grupo $\pi_1(Q)$, através da construção efetuada na seção anterior; a outra - a chamada construção formal - como uma espécie de extensão da descrição tradicional de $\pi_1(Q)$ (em [AP] e [Sk]), supondo que o conjunto de relações gerador de I satisfaça uma condição de minimalidade. A primeira construção mencionada é a que permite, de uma forma bastante simples, garantir que o grupo fundamental de um quiver com relações (Q,I) é finitamente gerado.

1.1 Quivers e álgebras de caminhos

Nesta seção, descreveremos a construção da álgebra de caminhos de um quiver com relações (Q,I). Tal conceito é essencial para o desenvolvimento de nosso trabalho, uma vez que estudaremos certas propriedades de álgebras dadas por quivers e relações. Indicamos, para maiores detalhes, [ASS], [CLS] e [JM].

Um *quiver* $Q = (Q_0,Q_1)$ é um grafo orientado, onde Q_0 é o conjunto dos vértices e Q_1 é o conjunto das flechas. Dada uma flecha $\alpha \in Q_1$ de origem no vértice x e término no vértice y, denotamos x por $o(\alpha)$ e y por $t(\alpha)$. A notação $\alpha : x \to y$ indica que α é uma flecha em Q com $o(\alpha) = x$ e $t(\alpha) = y$.

Ao longo deste trabalho, estaremos sempre supondo que Q é um quiver finito, isto é, que Q_0 e Q_1 são conjuntos finitos.

Uma *caminho* γ em Q de x para y é uma seqüência de flechas $\gamma = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_r$, com $r \geq 1$, tal que $o(\alpha_1) = x$, $t(\alpha_r) = y$ e $t(\alpha_i) = o(\alpha_{i+1})$ $(1 \leq i \leq r-1)$. O número r de flechas que aparece em γ é chamado de *comprimento* de γ e denotado por $\ell(\gamma)$.

A cada vértice $x \in Q_0$, associamos um *caminho trivial*, que é um caminho sem flechas, entendendo-o como de comprimento zero, e denotando-o por e_x. Por definição, $o(e_x) = x = t(e_x)$.

Dizemos que dois caminhos γ_1 e γ_2 em Q são *paralelos* se $o(\gamma_1) = o(\gamma_2)$ e $t(\gamma_1) = t(\gamma_2)$.

Um caminho γ em Q, com $\ell(\gamma) \geq 1$, é chamado um *ciclo*, um *circuito orientado* ou um *caminho fechado* se $o(\gamma) = t(\gamma)$. Um circuito orientado γ em Q tal que $\ell(\gamma) = 1$ é chamado simplesmente um *laço*.

Um quiver Q é conexo se, para qualquer par de vértices $x, y \in Q_0$, existe uma seqüência de flechas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in Q_1$ tal que $o(\alpha_1) = x$ ou $t(\alpha_1) = x$, $o(\alpha_n) = y$ ou $t(\alpha_n) = y$ e $\{o(\alpha_j), t(\alpha_j)\} \cap \{o(\alpha_{j+1}), t(\alpha_{j+1})\} \neq \varnothing$, para todo j, com $1 \leq j < n$ (isto é, flechas consecutivas têm um extremo em comum).

Dados um quiver Q e um corpo K, denotamos por KQ o K-espaço vetorial cuja base é o conjunto formado por todos os caminhos de Q, inclusive os triviais. É possível munir KQ de uma estrutura de K-álgebra, definindo primeiramente o produto de dois caminhos

$\gamma = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r$ e $\delta = \beta_1\beta_2\ldots\beta_s$ em Q por:

$$\gamma\delta = \begin{cases} \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r\beta_1\beta_2\ldots\beta_s & \text{, se } t(\alpha_r) = o(\beta_1) \\ 0 & \text{, caso contrário} \end{cases}$$

e estendendo este produto por linearidade a todos os elementos de KQ. A K-álgebra assim construída, também denotada por KQ, é denominada *a álgebra de caminhos do quiver* Q. Observamos que KQ é uma álgebra associativa.

Denotamos sempre por F o ideal esquerdo de KQ gerado pelas flechas de Q. Claramente, F é um ideal bilateral de KQ e nos referimos, por isso, ao ideal F.

Observação: $KQ \cong \bigoplus_{x,y\in Q_0} e_xKQe_y$ (como K-espaço vetorial), onde e_xKQe_y indica o K-espaço vetorial com base nos caminhos de x para y em Q.

Reunimos, na proposição abaixo, algumas propriedades de KQ. Uma demonstração detalhada destes resultados pode ser encontrada no capítulo 2 de [CLS].

Proposição 1.1 *Sejam K um corpo, Q um quiver finito e KQ a álgebra de caminhos de Q. Então:*

(1) $\{e_x \mid x \in Q_0\}$ é um conjunto completo de idempotentes primitivos e ortogonais de KQ. Além disso, KQ é uma álgebra básica com $1 = \sum_{x\in Q_0} e_x$;

(2) KQ é uma álgebra de dimensão finita e F é o radical de Jacobson de KQ se, e somente se, Q não contém circuitos orientados;

(3) KQ é uma álgebra indecomponível se, e somente se, Q é um quiver conexo.

Veremos, mais adiante, que as álgebras básicas e indecomponíveis de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado K podem ser identificadas com o quociente de álgebras de caminhos por certos ideais convenientes: os chamados ideais admissíveis.

Definição 1.2 *Sejam Q um quiver finito e K um corpo. Dizemos que um ideal I de KQ é admissível se existe um inteiro $t \geq 2$ tal que $F^t \subseteq I \subseteq F^2$.*

Observamos que se Q é um quiver finito que não contém circuitos orientados, então todo ideal de KQ contido em F^2 é admissível. Em particular, o ideal nulo é admissível

se, e somente se, Q não contém circuitos orientados. Além disso, para todo $r \geq 2$, F^r é um ideal admissível de KQ.

Enunciaremos, a seguir, o resultado que estabelece a identificação das álgebras básicas e indecomponíveis de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado com quocientes de álgebras de caminhos por ideais admissíveis.

Teorema 1.3 (***Teorema de Gabriel***) *[Ga] Sejam K um corpo algebricamente fechado e A uma álgebra básica, indecomponível e de dimensão finita sobre K. Então existem um quiver conexo e finito Q_A e um epimorfismo de álgebras $\psi : KQ_A \to A$ tais que $I_A = Ker\psi$ é um ideal admissível de KQ_A.*

Notamos que o quiver Q_A obtido no Teorema de Gabriel é único, o mesmo não ocorrendo com o ideal I_A, que depende do epimorfismo construído. Muitas vezes denotamos o quociente $A \cong KQ_A/I_A$ por $A \cong K(Q_A,I_A)$. O par (Q_A,I_A) é denominado *uma apresentação da álgebra A.*

Definição 1.4 *Sejam Q um quiver finito e K um corpo. Uma relação em Q é um elemento de KQ que é uma combinação linear de caminhos de comprimento maior ou igual a dois, todos com mesma origem e mesmo término. Em outras palavras, é um elemento não nulo do K-espaço vetorial $e_x F^2 e_y$, com x, $y \in Q_0$.*

É fácil verificar que se Q é um quiver finito e I é um ideal admissível de KQ, então I é finitamente gerado e admite um sistema gerador formado por relações em Q. Isso motiva a seguinte definição.

Definição 1.5 *Sejam Q um quiver finito e K um corpo. Seja I um ideal bilateral de KQ, com $I \subseteq F^2$. Se I admitir um conjunto gerador R formado por relações em Q, então dizemos que o par (Q,R) é um quiver com relações e que a álgebra $KQ/\langle R\rangle = KQ/I$ é a álgebra de caminhos de (Q,R) sobre K.*

Observação: (i) Por abuso de linguagem, referimo-nos indistintamente ao quiver com relações (Q,R) ou (Q,I). Da mesma forma, a álgebra de caminhos de (Q,R) sobre K é denotada por $K(Q,I)$ ou $K(Q,R)$;

(ii) O ideal I de KQ pode, então, ser descrito como o K-espaço vetorial $I = \bigoplus_{x,y \in Q_0} I(x,y)$ tal que, para cada par $(x,y) \in Q_0 \times Q_0$, $I(x,y) = e_x I e_y \subseteq e_x KQ e_y$ e são satisfeitas as condições $(e_z KQ e_x) I(x,y) \subseteq I(z,y)$ e $I(x,y)(e_y KQ e_t) \subseteq I(x,t)$, para quaisquer $z, t \in Q_0$.

Assim, o Teorema de Gabriel garante que toda álgebra básica, indecomponível e de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado K é isomorfa a uma álgebra de caminhos dada por um quiver com relações.

Proposição 1.6 *Sejam K um corpo e $A = KQ/I$ uma álgebra dada por um quiver finito Q com relações. Então:*

(1) A é uma álgebra básica. Além disso, A é indecomponível se, e somente se, Q é conexo;

(2) $\{\tau_x = e_x + I \mid x \in Q_0\}$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais e primitivos de A;

(3) Se I é admissível, então A é de dimensão finita e $J = F/I$ é o radical de Jacobson de A.

A demonstração do resultado acima também é encontrada em [CLS].

Finalmente definiremos certas relações com algumas propriedades especiais, que serão úteis na construção do grupo fundamental de um quiver com relações (Q,I).

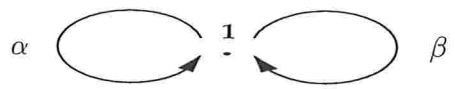
Definição 1.7 *Dado um quiver com relações (Q,I), seja $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \gamma_i \in I(x,y)$ uma relação em Q, com $\lambda_i \in K$, não nulo, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.*

(i) Se $m = 1$ (ou seja, se ρ é um caminho de comprimento maior ou igual a dois em Q), então dizemos que ρ é uma relação zero ou uma relação monomial em Q;

(ii) Se $\ell(\gamma_i) = \ell(\gamma_j)$, quaisquer que sejam $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, então dizemos que ρ é uma relação homogênea em Q de grau $\ell(\gamma_i)$;

(iii) Dizemos que ρ é uma relação minimal em Q se $m \geq 2$ e não existem subconjuntos próprios, não vazios, X de $\{1, 2, \ldots, m\}$ tais que $\sum_{j \in X} b_j \gamma_j \in I$, com algum $b_j \neq 0$.

Exemplo 1.8 Sejam K um corpo, Q o quiver



I_1 o ideal de KQ gerado por $R_1 = \{\alpha^2 - \beta^2, \alpha\beta - \beta\alpha\}$ e I_2 o ideal de KQ gerado por $R_2 = \{\alpha^2 - \beta^2, \alpha\beta - \alpha(\alpha^2 - \beta^2)\beta - \beta\alpha\}$. I_1 é gerado por relações minimais, mas a relação $\rho = \alpha\beta - \alpha(\alpha^2 - \beta^2)\beta - \beta\alpha \in I_2(1,1)$ não é minimal. É fácil ver que $I_1 = I_2$.

1.2 O grupo fundamental de um quiver

O grupo fundamental de um quiver com relações (Q,I) desempenha um papel importante na obtenção de "fórmulas" para a dimensão de $H^1(A)$, o primeiro grupo de cohomologia de Hochshild de $A \cong K(Q,I)$, conforme veremos no capítulo 4.

Um resultado conhecido é que o grupo fundamental de um quiver Q finito e conexo é um grupo livre de posto igual a $\chi(Q)$, onde $\chi(Q)$ denota a característica de Euler de Q. No entanto, uma prova conhecida desse resultado é topológica (ver em [Ma]).

Nosso objetivo nesta seção é, pois, fornecer uma prova algébrica desse fato, utilizando argumentos bastante semelhantes aos usados por Farkas, Green e Marcos, em [FGM], para provar que tal grupo é finitamente gerado.

Vejamos, então, a construção do grupo fundamental de um quiver Q.

Seja Q um quiver finito e conexo. Dada uma flecha α de x para y em Q, denotamos por α^{-1} sua inversa formal, cuja origem é y e cujo término é x (a seguinte notação é utilizada: $o(\alpha^{-1}) = y$ e $t(\alpha^{-1}) = x$).

Dados x e y vértices em Q_0, um *passeio* não trivial em Q, de x para y, é uma composição $w = \alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\cdots\alpha_r^{\varepsilon_r}$, com $r \geq 1$, $\alpha_i \in Q_1$ e $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, e tal que $o(\alpha_1^{\varepsilon_1}) = x$, $t(\alpha_r^{\varepsilon_r}) = y$ e $o(\alpha_i^{\varepsilon_i}) = t(\alpha_{i-1}^{\varepsilon_{i-1}})$, para todo i, com $2 \leq i \leq r$. Convencionamos que o *passeio trivial* em $x \in Q_0$ é o caminho trivial em x. Como foi feito para caminhos, podemos também definir o *comprimento* de um passeio em Q como sendo o número de flechas ou de inversas delas que compõem o passeio. Dizemos, ainda, que w é um

passeio fechado em Q se $o(w) = t(w)$, e que dois passeios w_1 e w_2 em Q são *paralelos* se $o(w_1) = o(w_2)$ e $t(w_1) = t(w_2)$.

Observação 1.9 Para facilitar a notação, referimo-nos simplesmente ao passeio não trivial $\alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\cdots\alpha_r^{\varepsilon_r}$ de x para y em Q (x e $y \in Q_0$), supondo sempre que as seguintes condições estejam satisfeitas: $r \geq 1$; $\alpha_i \in Q_1$ e $\varepsilon_i \in \{1, -1\}$, para cada i, com $1 \leq i \leq r$; $o(\alpha_1^{\varepsilon_1}) = x$; $t(\alpha_r^{\varepsilon_r}) = y$ e $o(\alpha_i^{\varepsilon_i}) = t(\alpha_{i-1}^{\varepsilon_{i-1}})$, para todo $i \in \{2, 3, \ldots, r\}$.

Observamos, ainda, que se w_1 é um passeio em Q de x para y e w_2 é um passeio em Q de y para z, então w_1w_2 é um passeio em Q de x para z, denominado o *produto dos passeios* w_1 e w_2. Notamos que o produto de dois passeios de Q nem sempre está definido.

Seja $\mathcal{W}(Q)$ o conjunto dos passeios de Q. Definimos sobre $\mathcal{W}(Q)$ a "relação de homotopia $\sim$" como sendo a menor relação de equivalência sobre $\mathcal{W}(Q)$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) Para cada flecha α de Q_1, $\alpha : x \to y$, tem-se que $\alpha\alpha^{-1} \sim e_x$ e que $\alpha^{-1}\alpha \sim e_y$.

(ii) Se u, v, w_1 e w_2 são passeios em Q tais que $u \sim v$, então $w_1uw_2 \sim w_1vw_2$, sempre que tais produtos estiverem definidos.

Vamos denotar por $[w]$ a classe de equivalência do passeio w em $\mathcal{W}(Q)/\sim$.

Seja x_0 um vértice fixo em Q_0 e consideremos $\mathcal{W}(Q,x_0)$ o conjunto dos passeios de $\mathcal{W}(Q)$ que têm origem e término em x_0. Sobre tal conjunto o produto de passeios está sempre definido e, pela condição (ii), podemos considerar o grupo quociente $\mathcal{W}(Q,x_0)/\sim$. Esse grupo é denominado o grupo fundamental de Q com base em x_0 e denotado por $\pi_1(Q,x_0)$.

Usando a conexidade de Q é fácil verificar que tal grupo independe do ponto base x_0. Assim, iremos denotá-lo simplesmente por $\pi_1(Q)$ e chamá-lo de *grupo fundamental de* Q.

Exemplo 1.10 Seja Q o quiver

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\gamma"'] & & 3 \end{tikzcd}$$

O grupo fundamental $\pi_1(Q)$ é gerado por $[\alpha\beta\gamma^{-1}]$, ou seja, $\pi_1(Q) \cong \mathbb{Z}$.

Observação: No caso em que Q não é conexo, a construção do grupo fundamental de cada componente conexa de Q é feita de forma análoga à acima descrita e temos, então, que $\pi_1(Q) = \prod_{j=1}^{m(Q)} \pi_1(Q^{(j)})$, onde $Q^{(1)}, \ldots, Q^{(m(Q))}$ denotam as componentes conexas de Q.

Seja Q um quiver finito e conexo. Com o intuito de provar que $\pi_1(Q)$ é um grupo livre, introduzimos algumas notações e definições adicionais, como foi feito em [FGM].

Seja x_0 um vértice fixado. Para cada vértice x de Q_0, escolhemos um passeio de x_0 para x em Q, que denotamos por $w_{x_0,x}$, convencionando que w_{x_0,x_0} seja o passeio trivial em x_0 e que $w_{x_0,x_0}^{-1} = e_{x_0}^{-1} = e_{x_0}$. O conjunto $\mathcal{W} = \{w_{x_0,x} \mid x \in Q_0\} \subseteq \mathcal{W}(Q)$ assim obtido é, então, denominado uma *escolha de "parade data"*. Além disso, se $w \in \mathcal{W}(Q)$ é um passeio qualquer de x para y em Q, então definimos $c_{\mathcal{W}}(w) = w_{x_0,x} w w_{x_0,y}^{-1}$, onde $w_{x_0,y}^{-1} \in \mathcal{W}(Q)$ denota o passeio de retorno de y para x_0 através da "parade data" $w_{x_0,y}$.

Observação 1.11 Fixada uma escolha de "parade data" $\mathcal{W}$, pode-se verificar facilmente que:

(i) Para todo $w \in \mathcal{W}(Q)$, $c_{\mathcal{W}}(w) \in \mathcal{W}(Q,x_0)$;

(ii) Se $w \in \mathcal{W}(Q,x_0)$, então $c_{\mathcal{W}}(w) = w$;

(iii) Para todo $w \in \mathcal{W}(Q)$, a classe $[c_{\mathcal{W}}(w)]$ é um elemento do subgrupo de $\pi_1(Q)$ gerado por $\{[c_{\mathcal{W}}(\alpha)] \mid \alpha$ é uma flecha de $Q\}$;

(iv) $\pi_1(Q)$ é gerado pelo conjunto $\{[c_{\mathcal{W}}(\alpha)] \mid \alpha \in Q_1\}$ e

(v) Seja $w_{x_0,x} \in \mathcal{W}$. Se $w_{x_0,x} = \alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\cdots\alpha_r^{\varepsilon_r}$, com $r \geq 1$, temos então que a classe $[c_{\mathcal{W}}(\alpha_1)^{\varepsilon_1} c_{\mathcal{W}}(\alpha_2)^{\varepsilon_2} \ldots c_{\mathcal{W}}(\alpha_r)^{\varepsilon_r}] = 1$ em $\pi_1(Q)$.

Fixemos uma escolha de "parade data" $\mathcal{W}$ como acima. A Obs. 1.11, e em particular o ítem (v), permite-nos considerar a seguinte construção. Seja $F_{\mathcal{W}}$ o grupo livre com base em $\{c_{\mathcal{W}}(\alpha) \mid \alpha \in Q_1\}$ e, para cada $w_{x_0,x} = \alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\cdots\alpha_r^{\varepsilon_r} \in \mathcal{W}$, com $r \geq 1$, consideremos o elemento $c_{\mathcal{W}}(\alpha_1)^{\varepsilon_1} c_{\mathcal{W}}(\alpha_2)^{\varepsilon_2} \ldots c_{\mathcal{W}}(\alpha_r)^{\varepsilon_r} \in F_{\mathcal{W}}$, que é denominado uma *"relação parade"* em $F_{\mathcal{W}}$. Seja $H_{\mathcal{W}}$ o subgrupo normal de $F_{\mathcal{W}}$ gerado pelas "relações parade". Com tais notações e definições obtemos, como Farkas, Green e Marcos, em [FGM], a seguinte descrição do grupo $\pi_1(Q)$.

Proposição 1.12 *$\pi_1(Q)$ é isomorfo ao grupo quociente $F_{\mathcal{W}}/H_{\mathcal{W}}$.*

Prova. Consideremos a aplicação $\varphi : \mathcal{W}(Q) \to F_{\mathcal{W}}/H_{\mathcal{W}}$ dada por $\varphi(e_x) = H_{\mathcal{W}}$, para cada $x \in Q_0$, e $\varphi(\alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\cdots\alpha_r^{\varepsilon_r}) = (c_{\mathcal{W}}(\alpha_1)^{\varepsilon_1}c_{\mathcal{W}}(\alpha_2)^{\varepsilon_2}\ldots c_{\mathcal{W}}(\alpha_r)^{\varepsilon_r})H_{\mathcal{W}}$, para todo passeio não trivial $\alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\cdots\alpha_r^{\varepsilon_r} \in \mathcal{W}(Q)$.

Da definição de $H_{\mathcal{W}}$ resulta que $\varphi(w_{x_0,x}) = H_{\mathcal{W}}$, para cada $w_{x_0,x} \in \mathcal{W}$. Claramente, temos que $(\varphi(\alpha))^{-1} = \varphi(\alpha^{-1})$, para toda $\alpha \in Q_1$, e que se w_1 e w_2 são passeios em $\mathcal{W}(Q)$ tais que o produto w_1w_2 está definido, então $\varphi(w_1w_2) = \varphi(w_1)\varphi(w_2)$. Decorre daí que $\varphi(\alpha\alpha^{-1}) = \varphi(\alpha^{-1}\alpha) = H_{\mathcal{W}}$, para toda flecha α, e que se u, v, w_1 e w_2 são passeios em Q tais que $\varphi(u) = \varphi(v)$ e os produtos uw_1, vw_1, w_2u e w_2v estão definidos, então $\varphi(uw_1) = \varphi(vw_1)$ e $\varphi(w_2u) = \varphi(w_2v)$.

Mostremos que φ respeita a homotopia $\sim$ de $\mathcal{W}(Q)$, ou seja, que se u e $v \in \mathcal{W}(Q)$ são tais que $u \sim v$, então $\varphi(u) = \varphi(v)$.

Observamos, primeiramente, que se u, $v \in \mathcal{W}(Q)$ são passeios triviais quaisquer, então $\varphi(u) = H_{\mathcal{W}} = \varphi(v)$. Portanto, basta mostrar que φ respeita a homotopia quando um dos passeios considerados é não trivial.

Suponhamos, pois, que tal não aconteça, isto é, que u seja um passeio não trivial em $\mathcal{W}(Q)$ para o qual exista um passeio $v \in \mathcal{W}(Q)$ com $u \sim v$, mas $\varphi(u) \neq \varphi(v)$. Suponhamos, ainda, que u seja o passeio não trivial de comprimento mínimo com tal propriedade. Se escrevemos $u = \alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\cdots\alpha_r^{\varepsilon_r}$, então de $\alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\cdots\alpha_r^{\varepsilon_r} \sim v$ resulta que $u_1 = \alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\ldots\alpha_{r-1}^{\varepsilon_{r-1}} \sim v\alpha_r^{-\varepsilon_r}$. De $\ell(u_1) < \ell(u)$, $u_1 \sim v\alpha_r^{-\varepsilon_r}$ e da minimalidade de u segue que $\varphi(u_1) = \varphi(\alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\ldots\alpha_{r-1}^{\varepsilon_{r-1}}) = \varphi(v\alpha_r^{-\varepsilon_r}) = \varphi(v)\varphi(\alpha_r)^{-\varepsilon_r}$. Portanto, $\varphi(u) = \varphi(\alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\ldots\alpha_{r-1}^{\varepsilon_{r-1}})\varphi(\alpha_r^{\varepsilon_r}) = \varphi(v)$, o que contradiz a hipótese de que $\varphi(u) \neq \varphi(v)$.

Como $\pi_1(Q)$ é gerado por $\{[c_{\mathcal{W}}(\alpha)] \mid \alpha \in Q_1\}$ (pela Obs. 1.11 (iv)) e φ respeita as classes de homotopia, podemos então considerar a aplicação (também denotada por φ) $\varphi : \pi_1(Q) \to F_{\mathcal{W}}/H_{\mathcal{W}}$ definida por $\varphi([c_{\mathcal{W}}(\alpha)]) = c_{\mathcal{W}}(\alpha)H_{\mathcal{W}}$, para toda $\alpha \in Q_1$. Claramente, φ é um morfismo de grupos e sobrejetivo. Mostremos que φ é injetivo. Para tanto, consideremos a aplicação $\lambda : \{c_{\mathcal{W}}(\alpha) \mid \alpha \in Q_1\} \to \pi_1(Q)$ dada por $\lambda(c_{\mathcal{W}}(\alpha)) = [c_{\mathcal{W}}(\alpha)]$ e a inclusão natural $i : \{c_{\mathcal{W}}(\alpha) \mid \alpha \in Q_1\} \to F_{\mathcal{W}}$. Como $F_{\mathcal{W}}$ é um grupo livre com base em $\{c_{\mathcal{W}}(\alpha) \mid \alpha \in Q_1\}$, então existe um único morfismo de grupos $\theta : F_{\mathcal{W}} \to \pi_1(Q)$ tal que $\theta(i(c_{\mathcal{W}}(\alpha))) = \theta(c_{\mathcal{W}}(\alpha)) = [c_{\mathcal{W}}(\alpha)]$. É fácil ver que $\theta(H_{\mathcal{W}}) = [e_{x_0}] = 1$ em $\pi_1(Q)$. Logo, podemos definir o morfismo de grupos $\overline{\theta} : F_{\mathcal{W}}/H_{\mathcal{W}} \to \pi_1(Q)$ dado por $\overline{\theta}(aH_{\mathcal{W}}) = \theta(a)$,

para cada $aH_{\mathcal{W}} \in F_{\mathcal{W}}/H_{\mathcal{W}}$. Assim, $(\overline{\theta}\varphi)([c_{\mathcal{W}}(\alpha)]) = \overline{\theta}(c_{\mathcal{W}}(\alpha)H_{\mathcal{W}}) = [c_{\mathcal{W}}(\alpha)]$, para cada $\alpha \in Q_1$, ou seja, $\overline{\theta}\circ\varphi = id_{\pi_1(Q)}$, o que mostra que φ é injetivo. Portanto, φ é um isomorfismo de grupos e a proposição está demonstrada. ∎

A prova de que $\pi_1(Q)$ é um grupo livre de posto $\chi(Q) = 1 - |Q_0| + |Q_1|$ é feita através da escolha de uma "parade data" conveniente, conforme será descrito a seguir.

Seja $T = (T_0, T_1)$ uma árvore maximal de Q, isto é, T é um subquiver conexo de Q, tal que o conjunto de vértices T_0 é o conjunto Q_0 dos vértices de Q, e o conjunto de flechas T_1 é formado pelas flechas de Q tais que, omitidas suas orientações (isto é, olhadas como arestas), não determinam uma seqüência fechada de arestas. Fixemos, então, essa árvore maximal T em Q e uma fonte x_0 em T (isto é, um vértice que não é término de nenhuma flecha de T). Para cada vértice $x \in Q_0 = T_0$, seja $w_{x_0,x}$ o passeio de comprimento mínimo de x_0 para x em T. Seja $\mathcal{W}_T$ o conjunto dos passeios $w_{x_0,x}$ acima escolhidos sobre a árvore T.

Proposição 1.13 *Seja Q um quiver finito e conexo. Então $\pi_1(Q)$ é um grupo livre de posto $\chi(Q) = 1 - |Q_0| + |Q_1|$, onde $|Q_0|$ e $|Q_1|$ indicam, respectivamente, o número de vértices e de flechas de Q.*

Prova. Fixemos a "parade data" $\mathcal{W}_T$ construída através da escolha de uma árvore maximal T em Q e de uma fonte x_0 em T. Pela Prop. 1.12, $\pi_1(Q) \cong F_{\mathcal{W}_T}/H_{\mathcal{W}_T}$ (para simplificar a notação, F_T, H_T e c_T denotarão, respectivamente, $F_{\mathcal{W}_T}$, $H_{\mathcal{W}_T}$ e $c_{\mathcal{W}_T}$).

Mostremos, agora, que F_T/H_T é isomorfo ao grupo livre com base no conjunto $X' = \{c_T(\alpha) \mid \alpha \notin T_1\}$. De fato, da escolha de $\mathcal{W}_T$, formado pelos passeios de comprimento mínimo sobre a árvore T, e da fixação da fonte $x_0 \in T_0$ resulta que todo elemento $c_T(\alpha)$, com $\alpha \in T_1$, está em H_T e, conseqüentemente, que H_T coincide com o subgrupo normal de F_T gerado por $\{c_T(\alpha) \mid \alpha \in T_1\}$. Logo, F_T/H_T é o grupo gerado pelo conjunto $\{c_T(\alpha)H_T \mid \alpha \notin T_1\}$.

Consideremos F'_T o grupo livre com base em $X' = \{c_T(\alpha) \mid \alpha \notin T_1\}$ e a inclusão $i : X' \to F'_T$. Seja $\lambda : X' \to F_T/H_T$ a aplicação definida por $\lambda(c_T(\alpha)) = c_T(\alpha)H_T$, para toda $\alpha \in Q_1 \backslash T_1$. Por ser F'_T um grupo livre, existe um único morfismo de grupos $\overline{\lambda} : F'_T \to F_T/H_T$ tal que $\overline{\lambda}\circ i = \lambda$, isto é, tal que $\overline{\lambda}(c_T(\alpha)) = c_T(\alpha)H_T$, para cada $\alpha \notin T_1$. Claramente, $\overline{\lambda}$ é sobrejetivo. De maneira análoga, usando o fato de que F_T é um grupo

livre com base em $\{c_{\mathcal{T}}(\alpha) \mid \alpha \in Q_1\}$, construímos um morfismo de grupos (que é único) $\psi : F_{\mathcal{T}} \to F'_{\mathcal{T}}$, tal que $\psi(c_{\mathcal{T}}(\alpha)) = 1_{F'}$, se $\alpha \in T_1$, e $\psi(c_{\mathcal{T}}(\alpha)) = c_{\mathcal{T}}(\alpha)$, se $\alpha \in Q_1 \backslash T_1$. Logo, podemos considerar o morfismo de grupos $\overline{\psi} : F_{\mathcal{T}}/H_{\mathcal{T}} \to F'_{\mathcal{T}}$ definindo $\overline{\psi}(c_{\mathcal{T}}(\alpha)H_{\mathcal{T}}) = c_{\mathcal{T}}(\alpha)$, para toda $\alpha \notin T_1$. Temos então que, para cada $\alpha \notin T_1$, $(\overline{\psi}\ \overline{\lambda})(c_{\mathcal{T}}(\alpha)) = c_{\mathcal{T}}(\alpha)$; ou seja, que $\overline{\lambda}$ é injetivo. Portanto, $\overline{\lambda}$ é um isomorfismo de grupos e $\pi_1(Q) \cong F'_{\mathcal{T}}$ é livre de posto $\mid X' \mid$.

A prova de que $\mid X' \mid$ coincide com a característica de Euler $\chi(Q) = 1 - |Q_0| + |Q_1|$ de Q independe de argumentos topológicos e pode ser encontrada em [Ma]. ∎

1.3 O grupo fundamental de um quiver com relações

Seja (Q,I) um quiver com relações e suponhamos que o ideal I seja gerado por um conjunto R de relações em Q. O grupo fundamental $\pi_1(Q,R)$ pode ser descrito "abstratamente", como em [Sk], ou de uma forma mais "tradicional", a partir da descrição de $\pi_1(Q)$, como em [FGM]. É essa última descrição que garante, de uma forma bastante simples, que ele é um grupo finitamente gerado e que escolhas adequadas de R determinam o mesmo grupo, conforme veremos a seguir.

(A) Descrição "tradicional" de $\pi_1(Q,R)$

Seja (Q,I) um quiver com relações, onde Q é um quiver conexo e finito. Suponhamos que esteja fixado um conjunto R de geradores de I e que $\pi_1(Q)$ tenha sido descrito, conforme a seção anterior, através da fixação de uma "parade data" $\mathcal{W}$. Denotemos por $N(R)$ o subgrupo normal de $\pi_1(Q)$ gerado por $c_{\mathcal{W}}(v)c_{\mathcal{W}}(u^{-1})$, com v e u variando sobre todos os caminhos que aparecem com coeficiente não nulo em uma mesma relação não monomial $\rho \in R$. O grupo quociente $\pi_1(Q)/N(R)$ é denominado o *grupo fundamental* $\pi_1(Q,R)$.

Decorre diretamente da definição que $\pi_1(Q,R)$ é finitamente gerado (pois $\pi_1(Q)$ o é). Além disso, se R é constituído de relações monomiais, então $\pi_1(Q,R) = \pi_1(Q)$.

O exemplo abaixo mostra que o grupo $\pi_1(Q,R)$ depende do conjunto de geradores R de I.

Exemplo 1.14 Sejam K um corpo, Q o quiver

e os conjuntos R_1 e R_2 de relações em Q tais que $R_1 = \{\alpha^2 - \beta^2,\ \alpha\beta - \beta\alpha\}$ e $R_2 = \{\alpha^2 - \beta^2,\ \alpha\beta - \alpha(\alpha^2 - \beta^2)\beta - \beta\alpha\}$.

Conforme vimos no Ex. 1.8, R_1 e R_2 geram um mesmo ideal I de KQ.

Claramente, $\pi_1(Q) = F\langle\ \alpha,\ \beta\ \rangle$ é o grupo livre gerado por α e β (ou seja, $\pi_1(Q) \cong \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$). Por definição, $N(R_1)$ é o subgrupo normal de $\pi_1(Q)$ gerado por $\{\alpha^2\beta^{-2},\ \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\}$ e, portanto, $\pi_1(Q,R_1) = \pi_1(Q)/N(R_1) = \langle\ x,\ y \mid x^2 = y^2,\ xy = yx\ \rangle$, que é um grupo abeliano finitamente gerado.

Desde que $xy^{-1} \in \pi_1(Q,R_1)$ é um elemento de ordem dois e y possui ordem infinita, temos então que $\pi_1(Q,R_1) = G_1G_2 \cong G_1 \times G_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$, onde G_1 é o subgrupo cíclico de $\pi_1(Q,R_1)$ gerado por xy^{-1} e G_2 é o subgrupo cíclico de $\pi_1(Q,R_1)$ gerado por y.

De outro lado, $N(R_2)$ é o subgrupo normal de $\pi_1(Q) = F\langle\ \alpha,\ \beta\ \rangle$ gerado por $\{\alpha^2\beta^{-2};\ \alpha\beta(\alpha^3\beta)^{-1} = \alpha^{-2};\ \alpha\beta(\alpha\beta^3)^{-1} = \alpha\beta^{-2}\alpha^{-1};\ \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1};\ \alpha^3\beta(\alpha\beta^3)^{-1} = \alpha^2\alpha\beta^{-2}\alpha^{-1};\ \alpha^3\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = \alpha^2\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1};\ \alpha\beta^3\alpha^{-1}\beta^{-1} = \alpha\beta^2\alpha^{-1}\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\}$. Portanto, $N(R_2)$ é gerado por $\{\alpha^2,\ \beta^2,\ \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}\}$ e, conseqüentemente, $\pi_1(Q,R_2) = \langle\ x,\ y \mid x^2 = 1 = y^2,\ xy = yx\ \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Logo, $\pi_1(Q,R_1) \ncong \pi_1(Q,R_2)$.

Tal dependência, no entanto, pode ser superada: o grupo fundamental $\pi_1(Q,R)$ é o mesmo para duas escolhas quaisquer de R nas quais as relações não monomiais são minimais (Def. 1.7 (iii)), conforme Prop. 1.1 em [FGM]. Nesse caso, esse mesmo grupo é denominado o grupo fundamental de (Q,I) e denotado por $\pi_1(Q,I)$.

A descrição "abstrata" de $\pi_1(Q,I)$, em [Sk], mencionada no início desta seção, é feita a partir da hipótese de que esteja fixado um conjunto R de geradores de I satisfazendo a condição de minimalidade (isto é, relações não monomiais são minimais). Apresentaremos, aqui, sua descrição, que será utilizada nos capítulos posteriores, com o intuito de

simplificação.

(B) Descrição "abstrata" de $\pi_1(Q,I)$

Seja (Q,I) um quiver com relações, onde Q é um quiver conexo e finito e I é um ideal de KQ gerado por um conjunto R que satisfaz a condição de minimalidade. Seja "$\sim$" a menor relação de equivalência no conjunto de todos os passeios em Q tal que:

(i) Se $\alpha : x \to y$ é uma flecha, então $\alpha\alpha^{-1} \sim e_x$ e $\alpha^{-1}\alpha \sim e_y$;

(ii) Se u, v, w_1 e w_2 são passeios em Q tais que $u \sim v$, então $w_1uw_2 \sim w_1vw_2$, sempre que tais produtos estiverem definidos;

(iii) Se $\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\gamma_i \in R$ é uma relação minimal, então $\gamma_i \sim \gamma_j$, para todo $1 \leq i, j \leq m$.

A classe de equivalência de um passeio u é denotada por $[u]$.

Fixemos x_0 um vértice arbitrário de Q. O conjunto $\pi_1(Q,I,x_0)$ das classes de equivalência de todos os passeios fechados de Q, começando e terminando em x_0, tem uma estrutura de grupo definida pela operação $[u][v] = [uv]$. Claramente, o grupo $\pi_1(Q,I,x_0)$ não depende do ponto x_0 escolhido (pela conexidade de Q) e, por isso, será denotado simplesmente por $\pi_1(Q,I)$ e denominado o grupo fundamental de (Q,I). Também da definição da relação de equivalência, segue que esse grupo depende somente das relações minimais e, portanto, do ideal I.

Observamos que essa construção é equivalente a considerar o quociente $\pi_1(Q)/N(R)$, vista anteriormente.

Além disso, para ambas as construções, se o quiver Q não é conexo, vale que $\pi_1(Q,I) \cong \prod_{j=1}^{m(Q)} \pi_1(Q^{(j)}, I_j)$, onde $Q^{(1)}, \ldots, Q^{(m(Q))}$ denotam as componentes conexas de Q e $I_j = KQ^{(j)} \cap I$ ($1 \leq j \leq m(Q) :=$ número de componentes conexas de Q).

Na seção 4.2 o grupo fundamental $\pi_1(Q,I)$ será uma ferramenta bastante útil para o estabelecimento de "fórmulas" mais simplificadas para a dimensão de alguns espaços vetoriais relacionados com o espaço das derivações da K-álgebra $A = KQ/I$.

Mais explicitamente, tais "fórmulas" dependerão, em certa medida, do K-espaço vetorial $\mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I),K^+)$, onde K^+ denota o grupo aditivo do corpo K. Por esse motivo, encerramos esta seção com algumas observações decorrentes de resultados bastante conhecidos da Teoria de Grupos.

Lembramos, inicialmente, que dado um grupo abeliano finitamente gerado G (utilizaremos notação multiplicativa para grupos abelianos), então o teorema de estrutura para tais grupos permite escrever uma decomposição de G como produto direto de grupos cíclicos indecomponíveis (única, a menos de isomorfismo). Mais especificamente, $G \cong \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}_{p_1^{r_1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_s^{r_s}}$, com $n \in \mathbb{N}$, onde os p_i's são números primos (não necessariamente distintos) e $r_i \in \mathbb{N}$ $(1 \leq i \leq s)$. Então, o *posto de* G (denotado por $\mathrm{rk}(G)$) é, por definição, n ($:=$ a multiplicidade do grupo cíclico infinito em uma decomposição de G como acima); e se p é um número primo, então o *p-posto de* G (denotado por $\mathrm{rk}_p(G)$) é o número (finito) de p-grupos indecomponíveis numa decomposição de G como a explicitada acima.

Vejamos, pois, as observações mencionadas acima.

Observação 1.15 (i) O grupo $\pi_1(Q,I)$ é finitamente gerado e $\pi_1(Q,I) = \pi_1(Q)$, se o ideal I é gerado por relações monomiais (conforme o comentário anterior ao Ex. 1.14);

(ii) Se denotarmos por $\overline{\Pi}$ o grupo abelianizado de $\pi_1(Q,I)$, então $\overline{\Pi}$ é um grupo abeliano finitamente gerado (via (i)) e $\mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I),K^+) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overline{\Pi},K^+)$ (como grupos abelianos). Além disso, ambos possuem uma estrutura natural de K-espaço vetorial, que é induzida pela estrutura multiplicativa do corpo K, e o isomorfismo referido é também um isomorfismo de K-espaços vetoriais;

(iii) A dimensão do K-espaço vetorial $\mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I),K^+)$ é finita e tal que $\dim_K \mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I),K^+) = \mathrm{rk}(\overline{\Pi}) + r$, onde $r = 0$, se $\mathrm{car}K = 0$, e $r = \mathrm{rk}_p(\overline{\Pi})$, se $\mathrm{car}K = p > 0$ (tal afirmação é conseqüência de (ii), da decomposição de $\overline{\Pi}$ em produto direto de grupos cíclicos indecomponíveis - como acima - e dos seguintes isomorfismos (de K-espaços vetoriais): $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^n,K^+) \cong K^n$ e, para cada primo p e todo $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^m},K^+) = \{0\}$ (se $\mathrm{car}K \neq p$) e $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^m},K^+) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},K^+) \cong K$ (se $\mathrm{car}K = p$)).

CAPÍTULO 2

O Primeiro Grupo de Cohomologia de Hochschild de uma Álgebra

O objetivo deste capítulo é definir o primeiro grupo de cohomologia de Hochschild de uma álgebra A, denotado por $H^1(A)$, e verificar de que forma é possível interpretá-lo como um quociente de subespaços de derivações de A. Foi através de tal interpretação que De la Peña e Saorín obtiveram, em [PS], uma "fórmula" para a dimensão de $H^1(A)$ para álgebras do tipo $A = KQ/I$, onde Q é um quiver finito e I é um ideal bilateral de KQ contido em F^2. Decorre, ainda, dessa interpretação de $H^1(A)$, sua estrutura de álgebra de Lie.

Utilizaremos, aqui, as notações introduzidas no capítulo 1. Lembramos que F denota o ideal de KQ gerado pelas flechas de Q e que, para todo $x \in Q_0$, e_x denota o caminho trivial em x.

Na seção 2.1, definiremos o primeiro grupo de cohomologia de Hochschild de uma K-álgebra, onde K é um corpo.

Em 2.2, voltaremos a nossa atenção para o estudo das derivações de uma álgebra A, introduzindo algumas definições, notações e estudando certas propriedades, que serão bastante úteis nos capítulos subseqüentes, quando $A = KQ/I$, com Q um quiver finito e I um ideal de KQ contido em F^2. Destacamos a Prop. 2.3, que tem como conseqüência o fato de que uma derivação normalizada de KQ fica completamente determinada se conhecemos suas imagens sobre as flechas de Q.

Na seção 2.3, veremos como $H^1(A)$ pode ser interpretado como o quociente do espaço das derivações de A pelo subespaço das derivações internas de A.

Em 2.4 definiremos as álgebras de Lie. Verificaremos, também, que a interpretação do primeiro grupo de cohomologia de Hochschild de uma álgebra A em termos de subespaços de derivações permite definir em $H^1(A)$ uma estrutura de álgebra de Lie, estrutura essa que será estudada no capítulo 5, em alguns casos.

2.1 O grupo $H^1(A)$

Nesta seção definiremos o primeiro grupo de cohomologia de Hochschild de uma K-álgebra, onde K é um corpo.

Os grupos de cohomologia foram inicialmente definidos para álgebras sobre anéis comutativos com unidade (ver [CE]). Os grupos de cohomologia de Hochschild, porém, foram introduzidos, em [Ho], para álgebras sobre corpos, e será nesse contexto que trabalharemos. As definições abaixo podem ser encontradas em [Ha], [AP].

Sejam, então, K um corpo e A uma K-álgebra. Para cada $i \geq 1$, denotamos por $A^{\otimes i}$ o produto tensorial $\underbrace{A \otimes_K A \otimes_K \ldots \otimes_K A}_{i \text{ vezes}}$.

Seja M um A-A-bimódulo. *O Complexo de Hochschild associado a M*, denotado por $C^\bullet = (C^i, d^i)_{i\in\mathbb{Z}}$, é definido como segue:

Para $i < 0$, $C^i = \{0\}$ e $d^i = 0$; $C^0 = M$ e, para cada $i > 0$, $C^i = \mathrm{Hom}_K(A^{\otimes i}, M)$; $d^0 : M \to \mathrm{Hom}_K(A,M)$ é dada por $d^0(m)(a) = am - ma$, para todo m de M e todo a de A; e, para cada $i > 0$, $d^i : C^i \to C^{i+1}$ é definida por $d^i(f)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_{i+1}) = a_1 f(a_2 \otimes \ldots \otimes a_{i+1}) + \sum_{j=1}^{i} (-1)^j f(a_1 \otimes \ldots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \ldots \otimes a_{i+1}) + (-1)^{i+1} f(a_1 \otimes \ldots \otimes a_i) a_{i+1}$, para toda $f \in C^i$ e todo $a_1 \otimes \ldots \otimes a_{i+1} \in A^{\otimes i+1}$.

Para cada $i \in \mathbb{Z}$, o *i-ésimo Grupo de Cohomologia de Hochschild de A com coeficientes em M*, denotado por $H^i(A,M)$ é, por definição, o quociente $\mathrm{Ker}d^i/\mathrm{Im}d^{i-1}$. Observamos que $H^i(A,M) = \{0\}$, para todo $i < 0$, e que $H^0(A,M) = \{m \in M \mid am = ma, \forall\, a \in A\}$.

Como A é um A-A-bimódulo, podemos falar do *i-ésimo Grupo de Cohomologia de Hochschild de A* (com coeficientes em A), que denotamos simplesmente por $H^i(A)$. Nesse

caso temos, em particular, que $H^0(A) = Z(A)$, o centro de A.

Nosso objeto de estudo é o primeiro grupo de cohomologia de Hochschild de A, ou seja, $H^1(A) = \mathrm{Ker}d^1/\mathrm{Im}d^0$.

2.2 Derivações de uma K-álgebra

Nesta seção definiremos o espaço vetorial das derivações de uma K-álgebra A e o das derivações internas de A, onde A é uma álgebra arbitrária sobre um corpo K. Para as K-álgebras que admitem um conjunto completo de idempotentes primitivos e ortogonais, definiremos as derivações normalizadas de A.

Desta forma, pela Prop. 1.6, para as álgebras $A = KQ/I$, onde Q é um quiver finito e $I \subseteq F^2$ é um ideal de KQ, podemos então considerar as derivações normalizadas e definir, dentre essas, algumas com propriedades especiais.

Sejam K um corpo e A uma K-álgebra.

Uma *derivação* de A é um morfismo K-linear $\partial : A \to A$ que satisfaz a condição de que $\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b)$, para quaisquer a e $b \in A$. É fácil verificar que $Der(A) = \{\partial \in \mathrm{End}_K(A) \mid \partial$ é uma derivação de $A\}$ é um K-subespaço de $\mathrm{End}_K(A)$ e é denominado o *espaço das derivações de* A.

Para cada $a \in A$, seja $\partial_a : A \to A$ o morfismo K-linear definido por $\partial_a(x) = ax - xa$, para todo $x \in A$. É claro que ∂_a é uma derivação de A e é denominada a *derivação interna determinada por* a. O conjunto $\{\partial_a \mid a \in A\}$ é um subespaço de $Der(A)$, denominado o *espaço das derivações internas de* A e denotado por $Inn(A)$.

Seja A uma K-álgebra que admite um conjunto completo de idempotentes primitivos e ortogonais $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Dizemos que uma derivação $\partial \in Der(A)$ é uma *derivação normalizada de* A se $\partial(e_i) = 0$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Verifica-se com facilidade que $Nor(A) = \{\partial \in Der(A) \mid \partial$ é uma derivação normalizada de $A\}$ é um K-subespaço de $Der(A)$, denominado o *espaço das derivações normalizadas de* A.

Definiremos, a seguir, algumas derivações específicas para as K-álgebras do tipo $A = KQ/I$, onde Q é um quiver finito e I é um ideal bilateral de KQ contido em F^2. Tais

álgebras, conforme vimos no capítulo 1, admitem um sistema completo de idempotentes primitivos e ortogonais (a saber, o conjunto $\{\tau_x = e_x + \mathrm{I} \mid x \in Q_0\}$). Portanto, para elas podemos considerar o subespaço $Nor(A)$ das derivações normalizadas de A. Algumas derivações normalizadas de A recebem, ainda, uma classificação adicional, como veremos a seguir.

Estaremos, então, ao longo do que segue neste trabalho, considerando K-álgebras do tipo $A = KQ/I$, onde Q é um quiver finito (não necessariamente conexo) e $I \subseteq F^2$ é um ideal de KQ. Lembramos que J denota o quociente F/I.

Definição 2.1 *Seja ∂ uma derivação normalizada de A. Dizemos que ∂ é uma derivação F^2 - linear de A se $\partial(J) \subseteq J^2$.*

Em particular, se $A = KQ$ definimos:

(i) ∂ é uma derivação especial de KQ se ∂ é nula em cada flecha que não é um laço e $\partial(\alpha) = \lambda_x e_x$, com $\lambda_x \in K$, em cada laço α no vértice $x \in Q_0$;

(ii) ∂ é uma derivação linear de KQ se, para cada flecha $\alpha \in Q_1$, $\partial(\alpha)$ é uma combinação linear de flechas paralelas a α;

(iii) ∂ é uma derivação diagonal de KQ se existir uma aplicação $\lambda : Q_1 \to K$ tal que $\partial(\alpha) = \lambda(\alpha)\alpha$, para cada $\alpha \in Q_1$;

(iv) Seja $I \subseteq F^2$ um ideal de KQ. Dizemos que ∂ é I-admissível se $\partial(I) \subseteq I$.

Observação 2.2 Resulta diretamente da definição de derivação que, para toda $\partial \in Nor(A)$, $\partial(\overline{\alpha}) = \tau_{o(\alpha)}\partial(\overline{\alpha})\tau_{t(\alpha)}$, qualquer que seja $\alpha \in Q_1$. Além disso, se I é um ideal gerado por relações monomiais, então toda derivação diagonal ∂ de KQ é I-admissível (isto é conseqüência de que se γ é um caminho não trivial em Q, então $\partial(\gamma) = \lambda\gamma$, para algum $\lambda \in K$).

Denotamos, respectivamente, por $s(KQ)$, $l(KQ)$, $d(KQ)$, $F^2(KQ)$ e $h(Q, I)$ os conjuntos das derivações especiais, lineares, diagonais, F^2 - lineares e I-admissíveis de KQ. Verifica-se com facilidade que esses conjuntos são K-subespaços de $Nor(KQ)$ e que os subconjuntos $s(Q, I)$, $l(Q, I)$, $d(Q, I)$ e $F^2(Q, I)$ das derivações I-admissíveis de KQ que são, respectivamente, especiais, lineares, diagonais e F^2 - lineares são K-subespaços de $h(Q, I)$.

A próxima proposição mostra que as derivações normalizadas de KQ ficam determinadas por seus valores sobre as flechas de Q, fato esse que será fundamental para o desenvolvimento deste trabalho. A sugestão de sua inclusão aqui, bem como a de sua prova, foi do Prof. Dr. Eduardo N. Marcos, a quem agradecemos.

Para demonstrá-la precisaremos da seguinte notação:

Notação: Sejam γ um caminho em Q, com $\ell(\gamma) \geq 1$, e α uma flecha de Q. Se α é uma flecha contida em γ, então dizemos que α divide γ (notação : $\alpha|\gamma$); caso contrário, dizemos que α não divide γ (notação : $\alpha \not| \gamma$). Convencionamos que, para os caminhos triviais γ de Q (caminhos de comprimento zero), $\alpha \not| \gamma$, qualquer que seja a flecha α. Assim, dados um caminho γ, com $\ell(\gamma) \geq 1$, e uma flecha α tal que $\alpha|\gamma$, escrevemos $\gamma = \gamma_1\alpha\gamma_2\alpha\gamma_3\ldots\gamma_t\alpha\gamma_{t+1}$, com $t \geq 1$, de forma que $\alpha \not| \gamma_i$ e $\ell(\gamma_i) \geq 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, t+1$.

Com essa notação, podemos enunciar a seguinte proposição, sobre cuja afirmação está a idéia central do desenvolvimento dos resultados de [PS].

Proposição 2.3 *Os K-espaços vetoriais $Nor(KQ)$ e $\prod_{\alpha\in Q_1} e_{o(\alpha)}KQe_{t(\alpha)}$ são isomorfos.*

Prova. Pela Obs. 2.2, podemos definir a aplicação $\psi : Nor(KQ) \to \prod_{\alpha\in Q_1} e_{o(\alpha)}KQe_{t(\alpha)}$ dada por $\psi(\partial) = (\partial(\alpha))_{\alpha\in Q_1}$, para cada $\partial \in Nor(KQ)$. A aplicação ψ é claramente um morfismo de K-espaços vetoriais e injetivo. Mostremos que ψ é sobrejetivo.

Seja $(y_\alpha)_{\alpha\in Q_1} \in \prod_{\alpha\in Q_1} e_{o(\alpha)}KQe_{t(\alpha)}$ qualquer, com $y_\alpha \in e_{o(\alpha)}KQe_{t(\alpha)}$.

Fixada uma flecha $\alpha \in Q_1$, definimos um morfismo de K-espaços vetoriais $\partial_\alpha : KQ \to KQ$ sobre a base de caminhos de KQ, utilizando a notação acima, da forma:

$$\partial_\alpha(\gamma) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{t} \gamma_1\alpha\gamma_2\ldots\gamma_i y_\alpha\gamma_{i+1}\ldots\gamma_{t+1} & , se\ \alpha|\gamma \\ 0 & , se\ \alpha \not| \gamma \end{cases}$$

Segue, imediatamente da definição de ∂_α, que $\partial_\alpha(e_x) = 0$, para todo $x \in Q_0$; $\partial_\alpha(\alpha) = y_\alpha$ e que $\partial_\alpha(\beta) = 0$, para toda flecha $\beta \neq \alpha$. Mostremos que ∂_α é uma derivação de KQ, para o que é suficiente provar que $\partial_\alpha(\gamma_1\gamma_2) = \partial_\alpha(\gamma_1)\gamma_2 + \gamma_1\partial_\alpha(\gamma_2)$, para caminhos γ_i tais que $\ell(\gamma_i) \geq 2$ e $\alpha \mid \gamma_i$ $(i = 1, 2)$. Com essas hipóteses, se escrevemos

$\gamma_1 = \gamma_1^1\alpha\gamma_2^1\alpha\ldots\gamma_t^1\alpha\gamma_{t+1}^1$, com $\alpha \not| \gamma_i^1$ $(1 \leq i \leq t+1)$ e $\gamma_2 = \gamma_1^2\alpha\gamma_2^2\alpha\ldots\gamma_k^2\alpha\gamma_{k+1}^2$, com $\alpha \not| \gamma_j^2$ $(1 \leq j \leq k+1)$, temos então que:

$$\partial_\alpha(\gamma_1\gamma_2) = \partial_\alpha(\gamma_1^1\alpha\gamma_2^1\alpha\ldots\gamma_t^1\alpha\gamma_{t+1}^1\gamma_1^2\alpha\gamma_2^2\alpha\ldots\gamma_k^2\alpha\gamma_{k+1}^2) =$$

$$\sum_{i=1}^{t}\gamma_1^1\alpha\gamma_2^1\alpha\ldots\gamma_i^1 y_\alpha\gamma_{i+1}^1\ldots\gamma_t^1\alpha\gamma_{t+1}^1\gamma_1^2\alpha\gamma_2^2\alpha\ldots\gamma_k^2\alpha\gamma_{k+1}^2 +$$

$$\sum_{j=1}^{k}\gamma_1^1\alpha\gamma_2^1\alpha\ldots\gamma_t^1\alpha\gamma_{t+1}^1\gamma_1^2\alpha\gamma_2^2\alpha\ldots\gamma_j^2 y_\alpha\gamma_{j+1}^2\ldots\gamma_k^2\alpha\gamma_{k+1}^2 =$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{t}\gamma_1^1\alpha\gamma_2^1\alpha\ldots\gamma_i^1 y_\alpha\gamma_{i+1}^1\ldots\gamma_t^1\alpha\gamma_{t+1}^1\Big)\gamma_1^2\alpha\gamma_2^2\alpha\ldots\gamma_k^2\alpha\gamma_{k+1}^2 +$$

$$\gamma_1^1\alpha\gamma_2^1\alpha\ldots\gamma_t^1\alpha\gamma_{t+1}^1\Big(\sum_{j=1}^{k}\gamma_1^2\alpha\gamma_2^2\alpha\ldots\gamma_j^2 y_\alpha\gamma_{j+1}^2\ldots\gamma_k^2\alpha\gamma_{k+1}^2\Big) =$$

$$\partial_\alpha(\gamma_1)\gamma_2 + \gamma_1\partial_\alpha(\gamma_2).$$

Seja, agora, $\partial = \sum_{\beta\in Q_1}\partial_\beta$. Pela construção das ∂_β, temos que $\partial \in Nor(KQ)$ e, além disso, que $\psi(\partial) = (\sum_{\beta\in Q_1}\partial_\beta(\alpha))_{\alpha\in Q_1} = (\partial_\alpha(\alpha))_{\alpha\in Q_1} = (y_\alpha)_{\alpha\in Q_1}$, isto é, que ψ é sobrejetiva. ∎

Como dissemos anteriormente, o isomorfismo ψ dessa última proposição nos permite definir as derivações normalizadas de KQ por meio de seus valores sobre as flechas de Q, fato que será utilizando livremente neste trabalho. Mais ainda, ele permite também, por meio da identificação de $s(KQ)$, $l(KQ)$ e $F^2(KQ)$ em $\prod_{\alpha\in Q_1} e_{o(\alpha)}KQe_{t(\alpha)}$, destacar a seguinte observação:

Observação 2.4 Cada derivação $\partial \in Nor(KQ)$ pode ser escrita da forma $\partial = \partial_1 + \partial_2 + \partial_3$, onde ∂_1, ∂_2 e ∂_3 são, respectivamente, derivações especial, linear e F^2 - linear de KQ.

2.3 A descrição de $H^1(A)$ em termos de derivações

Veremos, nesta seção, que o primeiro grupo de cohomologia de Hochschild de uma K-álgebra A coincide com o quociente do espaço das derivações de A pelo subespaço das derivações internas de A. Mostraremos, ainda, que, para as álgebras que admitem um conjunto completo de idempotentes primitivos e ortogonais, podemos considerar apenas as suas derivações normalizadas. Os resultados mencionados acima podem ser encontrados em [Ha], para as álgebras de dimensão finita, e em [PS], para as álgebras KQ/I ($I \subseteq F^2$). No entanto, a finitude da dimensão da álgebra ou o fato de ser ela uma álgebra de quiver com relações não constituem restrições a eles. Por isso, serão aqui apresentados de uma forma mais geral.

Proposição 2.5 *Seja A uma K-álgebra, onde K é um corpo qualquer. Então $H^1(A) = \frac{Der(A)}{Inn(A)}$.*

Prova. Lembramos que $H^1(A) = \mathrm{Ker}d^1/\mathrm{Im}d^0$, onde d^0 é, por definição, dada por $d^0(x)(a) = ax - xa$, quaisquer que sejam x, $a \in A$, e que d^1 é dada por $d^1(f)(a \otimes b) = af(b) - f(ab) + f(a)b$, para cada $a \otimes b \in A^{\otimes 2}$ e $f \in \mathrm{End}_K(A)$.

Logo, $\mathrm{Ker}d^1 = \{f \in \mathrm{End}_K(A) \mid d^1(f) = 0\} = \{f \in \mathrm{End}_K(A) \mid f(ab) = f(a)b + af(b), \forall\, a,\, b \in A\} = Der(A)$ e $\mathrm{Im}d^0 = \{f \in \mathrm{End}_K(A) \mid d^0(x) = f$, para algum $x \in A\} = \{f \in \mathrm{End}_K(A) \mid f = \partial_x$, para algum $x \in A\} = Inn(A)$, o que conclui nossa demonstração. ∎

No entanto, se consideramos A uma K-álgebra que admite um conjunto completo de idempotentes primitivos e ortogonais, veremos a seguir que $H^1(A)$ pode ser então identificado com um quociente das derivações normalizadas de A. Para isso, necessitamos do lema abaixo, que podemos encontrar em [Ha].

Lema 2.6 *Seja A uma K-álgebra que admite um conjunto completo de idempotentes primitivos e ortogonais $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Então, dada $\partial \in Der(A)$, existe $a \in A$ tal que $\partial - \partial_a$ é uma derivação normalizada de A.*

Prova. Consideremos o elemento $a = \sum_{i=1}^{n} \partial(e_i)e_i \in A$. Seja $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ qualquer.

Temos, por um lado, que $\partial_a(e_j) = ae_j - e_ja = \partial(e_j)e_j - e_j\partial(e_j)e_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} e_j\partial(e_i)e_i$.

Por outro lado, de $\partial(e_je_i) = e_j\partial(e_i) + \partial(e_j)e_i$ resulta, para $j \neq i$, que $e_j\partial(e_i) = -\partial(e_j)e_i$ e, portanto, que $e_j\partial(e_i)e_i = -\partial(e_j)e_i$. Além disso, de $\partial(e_j) = \partial({e_j}^2) = \partial(e_j)e_j + e_j\partial(e_j)$ segue que $\partial(e_j)e_j = \partial(e_j){e_j}^2 + e_j\partial(e_j)e_j = \partial(e_j)e_j + e_j\partial(e_j)e_j$, ou seja, que $e_j\partial(e_j)e_j = 0$.

Assim, $\partial_a(e_j) = \partial(e_j)e_j - e_j\partial(e_j)e_j - \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} e_j\partial(e_i)e_i = \partial(e_j)e_j + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \partial(e_j)e_i = \partial(e_j)\sum_{i=1}^{n} e_i$ $= \partial(e_j)$. Mostramos, pois, que $(\partial - \partial_a)(e_j) = 0$, para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, ou seja, que $\partial - \partial_a$ é uma derivação normalizada de A. ∎

Proposição 2.7 *Seja A uma K-álgebra que admite um conjunto completo de idempotentes primitivos e ortogonais. Então $H^1(A) \cong \frac{Nor(A)}{Nor(A)\cap Inn(A)}$.*

Prova. Consideremos a composição $\varphi = \pi \circ i : Nor(A) \to H^1(A) = \frac{Der(A)}{Inn(A)}$, onde i é a inclusão $Nor(A) \hookrightarrow Der(A)$ e $\pi : Der(A) \to \frac{Der(A)}{Inn(A)}$ é a projeção canônica. Claramente, φ é um K-morfismo. Mostremos que φ é sobrejetivo.

Seja $\partial \in Der(A)$. Então, pelo Lema 2.6, existe um elemento $a \in A$ tal que $(\partial - \partial_a) \in Nor(A)$. Portanto, dada $\partial + Inn(A)$, com $\partial \in Der(A)$, existe $a \in A$ tal que $\partial_1 = \partial - \partial_a \in Nor(A)$, com $\partial_a \in Inn(A)$ e, portanto, $\varphi(\partial_1) = (\partial - \partial_a) + Inn(A) = \partial + Inn(A)$, o que mostra que φ é sobrejetivo.

É fácil verificar que $\mathrm{Ker}\varphi = Nor(A) \cap Inn(A)$.

Logo, $H^1(A) \cong \frac{Nor(A)}{Nor(A)\cap Inn(A)}$. ∎

Observação 2.8 Seja $A = KQ/I$, onde Q é um quiver finito e $I \subseteq F^2$ é um ideal de KQ (F é o ideal de KQ gerado pelas flechas). Conforme já dissemos, a Prop. 1.6 garante a aplicabilidade da proposição acima a essas álgebras, ou seja, $H^1(A) \cong \frac{Nor(A)}{Nor(A)\cap Inn(A)}$. Além disso, para tais álgebras temos que $Nor(A) \cap Inn(A) = \{\partial_a \mid a \in \bigoplus_{x\in Q_0} \tau_x A \tau_x\}$, ou seja, que ele é o subespaço gerado pelas derivações internas determinadas por $\tau_x = \overline{e_x}$,

$x \in Q_0$, e pelas classes $0 \neq \overline{\gamma} \in A$ dos caminhos fechados (não triviais) γ de Q (de fato, se $\partial_a \in Nor(A) \cap Inn(A)$, $a \in A$, então $\tau_x a \tau_x = \tau_x a$, para cada $x \in Q_0$. Portanto, $a = (\sum_{x \in Q_0} \tau_x) a \in \bigoplus_{x \in Q_0} \tau_x A \tau_x)$.

2.4 A estrutura de álgebra de Lie de $H^1(A)$

Na seção anterior vimos que $H^1(A) = \frac{Der(A)}{Inn(A)}$. Nesta seção veremos que $H^1(A)$ possui uma estrutura natural de álgebra de Lie. Para tanto definiremos as álgebras de Lie e destacaremos algumas de suas propriedades. Maiores detalhes do exposto aqui, bem como propriedades adicionais, podem ser encontradas em [SM].

Observamos que, embora as álgebras de Lie tenham sido definidas para módulos sobre anéis comutativos com unidade (ver [CE]), estaremos aqui nos referindo a álgebras de Lie para espaços vetoriais sobre corpos.

Definição 2.9 *Seja K um corpo. Uma álgebra de Lie sobre K é um par (A,φ), onde A é um K-espaço vetorial e φ é uma aplicação $\varphi : A \times A \to A$, cuja imagem $\varphi(x,y)$ é denotada por $[x,y]$ e denominada colchete ou comutador de x e y (x, $y \in A$), satisfazendo as seguintes condições:*

(i) φ é K-bilinear;

(ii) $[x,x] = 0$, para todo x de A e

(iii) Para quaisquer x, y e z de A, vale que $[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0$ (Identidade de Jacobi).

Quando não houver risco de confusão, omitimos a aplicação φ e nos referimos simplesmente à álgebra de Lie A. Além disso, a dimensão da álgebra de Lie A é definida como sendo a dimensão do K-espaço vetorial A.

Decorre diretamente da definição que o colchete é anti-comutativo, isto é, que $[x,y] = -[y,x]$, quaisquer que sejam x, $y \in A$. Observamos que se K é um corpo tal que $\mathrm{car} K \neq 2$, então $[x,x] = 0$, para cada $x \in A$, se, e somente se, $[x,y] = -[y,x]$, quaisquer que sejam x, $y \in A$.

Definição 2.10 *Seja A uma álgebra de Lie. Dizemos que A é uma álgebra de Lie abeliana*

se $[x,y] = 0$, quaisquer que sejam x, $y \in A$.

Notamos que se car$K \neq 2$, então A é abeliana se, e somente se, $[x,y] = [y,x]$, quaisquer que sejam x e y em A. Claramente, toda álgebra de Lie unidimensional é abeliana.

Exemplo 2.11 Consideremos o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e seja {e, f, g} uma base qualquer de $\mathbb{R}^3$. Definindo o colchete por [f,g] = e = −[g,f] e por zero nos demais pares de elementos da base dada de $\mathbb{R}^3$, obtemos uma álgebra de Lie.

É fácil verificar que a álgebra de Lie obtida no exemplo anterior é também associativa (isto é, o colchete é associativo), o que em geral não acontece (um exemplo pode ser encontrado em [SM]).

Sejam K um corpo e A uma K-álgebra (associativa) qualquer. É possível munir A de uma estrutura de álgebra de Lie definindo seu colhete pelo comutador $[x,y] = xy - yx$, para quaisquer x, $y \in A$.

Um exemplo que, particularmente, vai nos interessar é o seguinte.

Exemplo 2.12 Seja A uma K-álgebra e consideremos o K-espaço vetorial $\mathrm{End}_K(A)$. Definimos em $\mathrm{End}_K(A)$ o colchete [f,g] = f∘g − g∘f, para quaisquer f, g $\in \mathrm{End}_K(A)$. É fácil verificar que esse colchete define em $\mathrm{End}_K(A)$ uma estrutura de álgebra de Lie. Esse exemplo, embora bastante simples, merece ser aqui destacado, pois queremos garantir, via o colchete considerado em $\mathrm{End}_K(A)$, uma estrutura de álgebra de Lie para $H^1(A) = \frac{Der(A)}{Inn(A)}$. Para isso, introduziremos novas definições e resultados gerais sobre álgebras de Lie.

Definição 2.13 *Sejam A uma álgebra de Lie e B um subespaço de A. Dizemos que B é uma subálgebra de Lie de A se $[x,y] \in B$, quaisquer que sejam x, y em B; B é dito um ideal de Lie de A se $[x,y] \in B$, para todo $x \in A$ e todo $y \in B$.*

Decorre imediatamente da definição acima que todo ideal de Lie de uma álgebra de Lie é uma subálgebra de Lie. No entanto, a recíproca desta afirmação é, em geral, falsa, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 2.14 Consideremos o espaço vetorial das matrizes 2×2 sobre $\mathbb{R}$, com o colchete definido por [X,Y] = XY − YX, para quaisquer X e Y $\in M_2(\mathbb{R})$. É fácil verificar que, também nesse caso, obtemos uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{R}$.

O subespaço V $\subseteq M_2(\mathbb{R})$ gerado pela matriz N = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ é uma subálgebra de Lie (pois é unidimensional). Afirmamos que V não é um ideal de Lie de $M_2(\mathbb{R})$. De fato, seja M = $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. De [M,N] = $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin$ V segue que V não é um ideal de Lie de $M_2(\mathbb{R})$.

Vamos, agora, introduzir rapidamente a noção de quociente de álgebras de Lie.

Sejam A uma álgebra de Lie sobre um corpo K e B um ideal de Lie de A e consideremos o K-espaço quociente A/B. Denotando por $\overline{x}$ a classe de x em A/B e definindo $[\overline{x},\overline{y}] = \overline{[x,y]}$, para dois elementos quaisquer de A/B, é fácil verificar que a definição deste colchete independe dos representantes de $\overline{x}$ e $\overline{y}$ e que, portanto, através dele pode-se definir uma estrutura de álgebra de Lie em A/B. Mais ainda, que a projeção canônica $\pi : A \to A/B$ é um morfismo sobrejetivo de álgebras de Lie (isto é, π é K-morfismo sobrejetivo e $\pi[x,y] = [\pi(x), \pi(y)]$, para quaisquer x, $y \in A$).

É através dessa noção de quociente que podemos definir uma estrutura de álgebra de Lie em $H^1(A) = \frac{Der(A)}{Inn(A)}$. Para isso, mostraremos que $Der(A)$ é uma subálgebra de Lie de $\mathrm{End}_K(A)$ e que $Inn(A)$ é um ideal de Lie de $Der(A)$, usando o colchete definido no Ex. 2.12. É imediato ver que, dadas ∂_1 e $\partial_2 \in Der(A) \subseteq \mathrm{End}_K(A)$, temos que $[\partial_1,\partial_2] \in Der(A)$. Portanto, $Der(A)$ é uma subálgebra de Lie de $\mathrm{End}_K(A)$.

Mostremos que $Inn(A)$ é um ideal de Lie de $Der(A)$. Sejam $\partial \in Der(A)$ e $\partial_x \in Inn(A)$ a derivação interna de A determinada por x. Temos, então, que $[\partial,\partial_x](a) = \partial(\partial_x(a)) - \partial_x(\partial(a)) = \partial(xa - ax) - (x\partial(a) - \partial(a)x) = \partial(x)a - a\partial(x) = \partial_{\partial(x)}(a)$, para todo $a \in A$, isto é, $[\partial,\partial_x] = \partial_{\partial(x)} \in Inn(A)$.

Portanto, $H^1(A) = \frac{Der(A)}{Inn(A)}$ é uma K-álgebra de Lie, cujo colchete de Lie é dado por:

$$[\partial_1 + Inn(A), \partial_2 + Inn(A)] = [\partial_1, \partial_2] + Inn(A), \text{ para } \partial_1 \text{ e } \partial_2 \in Der(A).$$

Em particular, para as álgebras de quiver com relações $A = KQ/I$, o espaço $H^1(A) \cong \frac{Nor(A)}{Nor(A) \cap Inn(A)}$ é uma álgebra de Lie, visto que $\frac{Nor(A)}{Nor(A) \cap Inn(A)}$ é uma álgebra de

Lie e o K-isomorfismo $\varphi : \frac{Nor(A)}{Nor(A)\cap Inn(A)} \to \frac{Der(A)}{Inn(A)} = H^1(A)$ é um morfismo de álgebras de Lie. Notamos que o colchete de Lie em $\frac{Nor(A)}{Nor(A)\cap Inn(A)}$ é dado por:

$$[\partial_1 + Nor(A) \cap Inn(A), \partial_2 + Nor(A) \cap Inn(A)] = [\partial_1, \partial_2] + Nor(A) \cap Inn(A),$$

para ∂_1, $\partial_2 \in Nor(A)$.

CAPÍTULO 3

Uma Fórmula para $\dim_K H^1(A)$

Este capítulo tem como objetivo apresentar uma "fórmula" para a dimensão do primeiro grupo de cohomologia de Hochschild $H^1(A)$ de uma álgebra de quiver com relações $A = KQ/I$. Os resultados aqui apresentados foram desenvolvidos por De la Peña e Saorín, em [PS]. Nesse trabalho, eles constróem uma seqüência exata curta de K-espaços vetoriais cujos termos, além de $H^1(A)$, estão relacionados com o espaço das derivações F^2 - lineares de A e com o K-espaço $\mathrm{End}_K(A/J^2)$. Além disso, para os casos em que $A = KQ/I$ é uma álgebra quase fortemente acíclica ou em que I é um ideal homogêneo de KQ, eles apresentam um aprimoramento da seqüência inicialmente construída, através da qual se obtém a "fórmula" para $\dim_K H^1(A)$, quando tal dimensão é finita.

Iniciaremos o capítulo mostrando que o espaço $Nor(A)$ das derivações normalizadas de A pode ser entendido como o espaço $h(Q, I)$ das derivações normalizadas de KQ que são I-admissíveis, módulo as que têm imagem em I. Em seguida, introduziremos a noção de caráter aditivo acíclico, o que permite identificar, de uma forma mais simples, o subespaço $\frac{Nor(A)\cap Inn(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)}$ de $\frac{Nor(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)}$. Tais identificações permitirão, na seção 3.1, obter o resultado mais importante do capítulo, o Teo. 3.6, que trata da construção da seqüência exata mencionada acima. A seção 3.2 trata da aplicação do Teo. 3.6 para os casos em que $A = KQ/I$ é quase fortemente acíclica ou o ideal I é homogêneo.

Observamos que as álgebras consideradas ao longo deste capítulo são do tipo $A = KQ/I$, onde Q é um quiver finito e $I \subseteq F^2$ é um ideal de KQ (F denota o ideal de KQ gerado pela flechas de Q). Assumimos, ainda, que esteja fixado um conjunto R de geradores de I formado por relações em Q (isto é, combinações lineares de caminhos com mesma

origem e mesmo término) de forma que as não monomiais sejam relações minimais (conforme Def. 1.7 (iii)). Notamos que não exigir que $I \subseteq F^2$ seja um ideal admissível de KQ permite que A seja uma álgebra de dimensão infinita. Lembramos, ainda, que J denota o quociente F/I e que τ_x e $\overline{\alpha}$ denotam, respectivamente, as classes do caminho trivial e_x ($x \in Q_0$) e da flecha $\alpha \in Q_1$ em A. Além disso, estaremos utilizando a identificação $H^1(A) \cong \frac{Nor(A)}{Nor(A) \cap Inn(A)}$, onde $Nor(A) = \{\partial \in Der(A) \mid \partial(\tau_x) = 0, \ \forall \ x \in Q_0\}$ e $Nor(A) \cap Inn(A) = \{\partial_a \mid a \in \bigoplus_{x \in Q_0} \tau_x A \tau_x\}$ (Obs. 2.8).

3.1 Uma decomposição do $H^1(A)$

Lembramos, inicialmente, do capítulo anterior, que $h(Q,I) = \{\partial \in Nor(KQ) \mid \partial(I) \subseteq I\}$ denota o espaço das derivações normalizadas e I-admissíveis de KQ. Indicando por $h_0(Q,I)$ o subconjunto $\{\partial \in Nor(KQ) \mid \mathrm{Im}\partial \subseteq I\}$ (que claramente é um subespaço de $h(Q,I)$), mostraremos, no lema abaixo, que toda derivação normalizada de $A = KQ/I$ pode ser vista como uma derivação normalizada e I-admissível de KQ, módulo $h_0(Q,I)$. Essa visão permitirá também identificar os subespaços $s(Q,I)$, $l(Q,I)$ e $d(Q,I)$ de $h(Q,I)$ das derivações I-admissíveis de KQ que são especiais, lineares e diagonais, respectivamente (Def. 2.1), com subespaços de $Nor(A)$.

Lema 3.1 *$Nor(A)$ é isomorfo a $h(Q,I)/h_0(Q,I)$.*

Prova. Para cada $\partial \in h(Q,I)$, podemos definir o K-morfismo $\partial' : KQ/I \to KQ/I$ dado por $\partial'(a + I) = \partial(a) + I$, para cada $a \in KQ$, pois ∂ é I-admissível. Além disso, de $\partial(e_x) = 0$, para todo $x \in Q_0$, e de $\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b)$, quaisquer que sejam a, $b \in KQ$, resulta que ∂' é uma derivação normalizada de A.

Consideremos, então, a aplicação $f : h(Q,I) \to Nor(A)$ que a cada $\partial \in h(Q,I)$ associa $\partial' \in Nor(A)$, como acima. A aplicação f é um K-morfismo tal que $\mathrm{Ker} f = h_0(Q,I)$ (isso é conseqüência imediata da definição da f).

Mostremos que o morfismo f é sobrejetivo. Seja $\partial' \in Nor(A)$ qualquer. Queremos definir uma derivação $\partial \in h(Q,I)$ tal que $f(\partial) = \partial'$. Pela Prop. 2.3, basta definir a ∂ requerida por seus valores sobre as flechas de Q.

Para cada flecha α, escolhemos $a_\alpha \in e_{o(\alpha)}KQe_{t(\alpha)}$ tal que $\partial'(\alpha + I) = a_\alpha + I$. Então a aplicação $\partial : KQ \to KQ$ dada por $\partial(e_x) = 0$, para todo $x \in Q_0$, e $\partial(\alpha) = a_\alpha$, para toda $\alpha \in Q_1$, é uma derivação normalizada de KQ. Da definição da ∂ e do fato de ∂' ser uma derivação em A, segue que $\partial(I) \subseteq I$ e que $\partial'(a + I) = \partial(a) + I$, para todo a de KQ, o que mostra que f é sobrejetivo. Portanto, $Nor(A) \cong h(Q, I)/h_0(Q,I)$. ∎

Notamos que as restrições do K-morfismo f definido na prova do Lema 3.1 aos subespaços $s(Q, I)$, $l(Q, I)$ e $d(Q, I)$ são injetivas, o que nos permite identificar esses espaços com suas imagens, via f, em $Nor(A)$. Por isso, denotaremos por $s(A)$, $l(A)$ e $d(A)$ as correspondentes imagens de $s(Q, I)$, $l(Q, I)$ e $d(Q, I)$, módulo $h_0(Q,I)$, em $Nor(A)$.

Introduziremos, a seguir, a noção de caráter aditivo acíclico de um quiver finito Q, o que possibilitará identificar o subespaço $\frac{Nor(A)\cap Inn(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)} \subseteq \frac{Nor(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)}$ com o K-espaço vetorial dos caracteres aditivos acíclicos de Q (lembramos que $F^2(A) = \{\partial \in Nor(A) \mid \partial(J) \subseteq J^2\}$ denota o espaço das derivações F^2 - lineares de A). Tal identificação, por sua vez, será utilizada na construção de um seqüência exata curta de K-espaços vetoriais cujo termo do meio é $H^1(A) \cong \frac{Nor(A)}{Nor(A)\cap Inn(A)}$.

Lembramos que, conforme o convencionado na Obs. 1.9, os passeios não triviais em Q serão denotados por $u = \alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\cdots\alpha_r^{\varepsilon_r}$.

Definição 3.2 *Seja Q um quiver finito. Um caráter aditivo acíclico de Q é uma aplicação $\xi : Q_1 \to K$ satisfazendo a condição $\xi(u) = \xi(v)$, quaisquer que sejam os passeios não triviais u e v de Q, com mesma origem e mesmo término, convencionando que $\xi(u) = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i\xi(\alpha_i)$, com $u = \alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\cdots\alpha_r^{\varepsilon_r}$.*

Denotamos por $ch(Q, K)$ o conjunto dos caracteres aditivos acíclicos de Q, que claramente é um K-espaço vetorial.

Notamos, por exemplo, que se Q é um circuito, então $ch(Q, K) = \{\xi \in K^{Q_1} \mid \sum_{\alpha\in Q_1} \xi(\alpha) = 0\}$; em particular, $ch(Q, K) = \{0\}$, se Q é um laço. Um outro exemplo é que $ch(Q, K) = K^{Q_1}$, se Q é uma árvore.

Com o objetivo de mostrar que os espaços $\frac{Nor(A)\cap Inn(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)}$ e $ch(Q,K)$ são isomorfos, provaremos que $ch(Q,K)$ é isomorfo a um quociente de K^{Q_0}. Esse último fato foi demonstrado, em [GS], para o caso mais geral em que o quiver Q não era necessariamente finito. No entanto, exibiremos aqui uma prova distinta da que se encontra em [GS], para o caso em que Q é finito.

Proposição 3.3 *Seja Q um quiver finito (não necessariamente conexo). Então existe uma seqüência exata de K-espaços vetoriais $0 \longrightarrow W \longrightarrow K^{Q_0} \longrightarrow ch(Q,K) \longrightarrow 0$, onde $W = \{\lambda \in K^{Q_0} \mid \lambda$ é constante em cada componente conexa de $Q\}$.*

Prova. Para cada $\lambda \in K^{Q_0}$, seja $\tilde{\lambda} : Q_1 \to K$ a aplicação definida por $\tilde{\lambda}(\alpha) = \lambda(o(\alpha)) - \lambda(t(\alpha))$, para cada $\alpha \in Q_1$. Convencionando que, quando α^{-1} é a inversa de uma flecha α de Q, $\tilde{\lambda}(\alpha^{-1}) = -\tilde{\lambda}(\alpha)$, podemos estender $\tilde{\lambda}$ aos passeios não triviais $w = \alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\cdots\alpha_r^{\varepsilon_r}$ em Q, definindo $\tilde{\lambda}(\alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\cdots\alpha_r^{\varepsilon_r}) = \sum_{i=1}^{r}\tilde{\lambda}(\alpha_i^{\varepsilon_i})$. Com a convenção adotada, é fácil verificar que $\tilde{\lambda}(\alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\cdots\alpha_r^{\varepsilon_r}) = \lambda(o({\alpha_1}^{\varepsilon_1})) - \lambda(t({\alpha_r}^{\varepsilon_r}))$, resultando, então, que $\tilde{\lambda} \in ch(Q,K)$.

Portanto, podemos considerar a aplicação $\varphi : K^{Q_0} \to ch(Q,K)$ dada por $\varphi(\lambda) = \tilde{\lambda}$, para cada $\lambda \in K^{Q_0}$. φ é claramente um morfismo de K-espaços vetoriais e, além disso, decorre diretamente da definição que $\mathrm{Ker}\varphi = W \cong K^{m(Q)}$, onde $m(Q)$ denota o número de componentes conexas de Q. Mostremos, pois, que φ é sobrejetivo.

Seja $\xi \in ch(Q,K)$. Queremos definir uma aplicação $\lambda : Q_0 \to K$, através da determinação de suas imagens em cada componente conexa $\mathcal{C}$ de Q, e provar que $\varphi(\lambda) = \xi$ em $\mathcal{C}$. Portanto, não há perda de generalidade se assumirmos que $Q = \mathcal{C}$ é conexo.

Usaremos a construção e as notações contidas na prova da Prop. 1.13, ou seja, fixados um vértice x_0 em Q_0 e uma árvore maximal $T = (T_0,T_1)$ em Q, denotamos por $w_{x_0,x}$ o único passeio em T, de comprimento mínimo, de origem em x_0 e término em $x \in Q_0$.

Seja, pois, $\lambda : Q_0 \to K$ dada por $\lambda(x_0) = 0$ e, para cada $x \neq x_0$, $\lambda(x) = -\xi(w_{x_0,x})$. Observamos que λ independe da árvore maximal fixada inicialmente, pois $\xi \in ch(Q,K)$. Mostremos que $\varphi(\lambda) = \xi$ em Q_1. Consideremos, primeiramente, o caso em que $\alpha \in T_1$. Se $o(\alpha) = x_0$, temos então que $t(\alpha) = x \neq x_0$ e que $w_{x_0,x} = \alpha$. Logo, $\varphi(\lambda)(\alpha) = \lambda(o(\alpha)) - \lambda(t(\alpha)) = \lambda(x_0) - \lambda(x) = \xi(w_{x_0,x}) = \xi(\alpha)$. Um argumento análogo pode ser utilizado para o caso em que $t(\alpha) = x_0$ e $o(\alpha) = x \neq x_0$. Suponhamos, agora, que α seja

uma flecha em T_1 e que $o(\alpha)$ e $t(\alpha)$ sejam ambos distintos de x_0. Nesse caso, temos que $w_{x_0,t(\alpha)} = w_{x_0,o(\alpha)}\alpha$ ou que $w_{x_0,o(\alpha)} = w_{x_0,t(\alpha)}\alpha^{-1}$. Para ambas as possibilidades, vale que $\varphi(\lambda)(\alpha) = \xi(\alpha)$.

Resta, agora, verificar que $\varphi(\lambda) = \xi$ em $Q_1 \backslash T_1$. Se α é um laço, é imediato que $\varphi(\lambda)(\alpha) = 0 = \xi(\alpha)$. Suponhamos, pois, que α não seja um laço. Logo, $o(\alpha) \neq t(\alpha)$. Como $T_0 = Q_0$, então $o(\alpha)$ e $t(\alpha)$ são vértices de T. Segue da conexidade de T que existe um único passeio não trivial $w = {\beta_1}^{t_1}\, {\beta_2}^{t_2} \ldots {\beta_s}^{t_s}$ em T, de comprimento mínimo, tal que $o({\beta_1}^{t_1}) = o(\alpha)$ e $t({\beta_s}^{t_s}) = t(\alpha)$. Se $o(\alpha) = x_0$, então $w = w_{x_0,t(\alpha)}$ e, nesse caso, temos que $\varphi(\lambda)(\alpha) = \lambda(o(\alpha)) - \lambda(t(\alpha)) = \xi(w) = \xi(\alpha)$. O mesmo argumento pode ser utilizado se $t(\alpha) = x_0$. Suponhamos que $o(\alpha)$ e $t(\alpha)$ sejam distintos de x_0. Dependendo de x_0 ser ou não um vértice percorrido por w, temos que ou $w = w^{-1}_{x_0,o(\alpha)} w_{x_0,t(\alpha)}$, ou $w_{x_0,t(\alpha)} = w_{x_0,o(\alpha)} w$, ou $w_{x_0,o(\alpha)} = w_{x_0,t(\alpha)} w^{-1}$. Em qualquer desses casos, verifica-se facilmente que $\varphi(\lambda)(\alpha) = \xi(\alpha)$.

Assim, $\varphi(\lambda) = \xi$ em Q_1, o que mostra que φ é sobrejetivo. ∎

A Prop. 3.3 nos conta, no caso em que Q é conexo, que $\dim_K ch(Q,K) = \mid Q_0 \mid - 1$, pois $W \cong K^{m(Q)}$, onde $m(Q)$ denota o número de componentes conexas de Q.

Estamos, agora, em condições de caracterizar o K-espaço vetorial $ch(Q,K)$ em termos de derivações de A, utilizando o isomorfismo, garantido pela proposição acima, entre $ch(Q,K)$ e K^{Q_0}/W.

Lema 3.4 *Os K-espaços vetoriais $ch(Q,K)$ e $\frac{Nor(A)\cap Inn(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)}$ são isomorfos.*

Prova. Desde que, pela Prop. 3.3, $ch(Q,K) \cong K^{Q_0}/W$, então, para obtermos a afirmação do lema, é suficiente mostrar que $\frac{Nor(A)\cap Inn(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)} \cong K^{Q_0}/W$.

A cada $\lambda \in K^{Q_0}$ podemos associar a derivação interna ∂_a^λ de A, onde $a = \sum_{x\in Q_0} \lambda(x)\tau_x$. Afirmamos que ∂_a^λ é uma derivação normalizada de A. De fato, para cada $y \in Q_0$, temos que $\partial_a^\lambda(\tau_y) = \Big(\sum_{x\in Q_0} \lambda(x)\tau_x\Big)\tau_y - \tau_y\Big(\sum_{x\in Q_0} \lambda(x)\tau_x\Big) = \lambda(y)\tau_y - \lambda(y)\tau_y = 0$ em A. Assim, podemos definir a aplicação $\psi_1 : K^{Q_0} \to Nor(A)\cap Inn(A)$ dada por $\psi_1(\lambda) = \partial_a^\lambda$, para

cada $\lambda \in K^{Q_0}$. Claramente, ψ_1 é um morfismo de K-espaços vetoriais.

Seja $\psi = \pi \circ \psi_1$, onde $\pi : Nor(A) \cap Inn(A) \to \frac{Nor(A)\cap Inn(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)}$ é a projeção canônica. Mostremos que Ker$\psi = W$. Seja, pois, $\lambda \in$ Kerψ. Então $\partial_a^\lambda \in F^2(A)$ e, portanto, para cada flecha α, $\partial_a^\lambda(\overline{\alpha}) = a\overline{\alpha} - \overline{\alpha}a = \big(\lambda(o(\alpha)) - \lambda(t(\alpha))\big)\overline{\alpha} \in \tau_{o(\alpha)}J^2\tau_{t(\alpha)}$. Segue, então, que $\lambda(o(\alpha)) = \lambda(t(\alpha))$, para toda $\alpha \in Q_1$, e, conseqüentemente, que $\lambda \in W$. Assim, Ker$\psi = W$, uma vez que a inclusão contrária é imediata.

Resta, pois, provar que ψ é sobrejetiva. Seja $a \in$ A e consideremos a derivação $\partial_a \in Nor(A) \cap Inn(A)$. Conforme Obs. 2.8, temos que $a = \sum_{x\in Q_0} \lambda_x\tau_x + b$, com $\lambda_x \in K$ e $b \in \bigoplus_{x\in Q_0} \tau_x J\tau_x$. Consideremos a aplicação $\lambda : Q_0 \to K$ definida por $\lambda(x) = \lambda_x$, para cada $x \in Q_0$. Então, pela definição de ψ_1, temos que $\psi_1(\lambda) = \partial_c^\lambda$, onde $c = \sum_{x\in Q_0} \lambda_x\tau_x$, e, além disso, que $(\partial_a - \partial_c^\lambda) = \partial_b \in F^2(A) \cap Inn(A)$(pois $b \in \bigoplus_{x\in Q_0} \tau_x J\tau_x$). Logo, existe $\lambda \in K^{Q_0}$ tal que $\psi(\lambda) = \pi(\psi_1(\lambda)) = \partial_c^\lambda + F^2(A) \cap Inn(A) = \partial_a + F^2(A) \cap Inn(A)$, o que mostra que ψ é sobrejetiva.

Portanto, dos isomorfismos $K^{Q_0}/W \cong ch(Q,K)$ e $K^{Q_0}/W \cong \frac{Nor(A)\cap Inn(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)}$, resulta que $ch(Q,K) \cong \frac{Nor(A)\cap Inn(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)}$. ∎

O isomorfismo estabelecido no Lema 3.4 será utilizado na construção da seqüência exata curta de K-espaços vetoriais cujo termo médio é $H^1(A)$, principal resultado desta seção.

No que segue, denotaremos por φ e θ os isomorfismos $\frac{Nor(A)\cap Inn(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)} \xrightarrow{\varphi} ch(Q,K)$ e $\frac{Nor(A)}{Nor(A)\cap Inn(A)} \xrightarrow{\theta} \frac{\frac{Nor(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)}}{\frac{Nor(A)\cap Inn(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)}}$, respectivamente.

Definiremos, a seguir, alguns morfismos que, além de φ e θ, serão necessários para a construção da seqüência exata acima mencionada. Inicialmente, construiremos um K-morfismo de $Nor(A)$ em $\mathrm{End}_K(A/J^2)$.

Como $A/J^2 \cong \bigoplus_{x\in Q_0} K(\tau_x + J^2) \oplus J/J^2$, podemos fixar uma base $\tilde{B} = \{\tau_x + J^2, \overline{\alpha} + J^2 \mid x \in Q_0, \alpha \in Q_1\}$ para A/J^2 e definir o K-morfismo $\varepsilon : Nor(A) \to \mathrm{End}_K(A/J^2)$ dado por:

$$\varepsilon(\partial)\Big(\sum_{x\in Q_0} \lambda_x(\tau_x + J^2) + \sum_{\alpha\in Q_1} \lambda_\alpha(\overline{\alpha} + J^2)\Big) = \sum_{\alpha\in Q_1} \lambda_\alpha(\partial(\overline{\alpha}) + J^2),$$

para cada $\partial \in Nor(A)$, onde λ_x e λ_α estão em K. É imediato ver que $\mathrm{Ker}\varepsilon = F^2(A)$. Indiquemos por $\overline{\varepsilon}$ o isomorfismo canônico $\frac{Nor(A)}{F^2(A)} \cong \mathrm{Im}\varepsilon$ induzido por ε.

Observação 3.5 (i) As restrições de ε aos subespaços $s(A)$, $l(A)$ e $d(A)$ de $Nor(A)$ (notações decorrentes do Lema 3.1) são injetivas, pois $s(A) \cap F^2(A) = l(A) \cap F^2(A) = d(A) \cap F^2(A) = \{0\}$. Esse fato permite a identificação de $s(A)$, $l(A)$ e $d(A)$ com suas imagens $\varepsilon(s(A))$, $\varepsilon(l(A))$ e $\varepsilon(d(A))$ em $\mathrm{Im}\varepsilon$ e não os distinguiremos no que segue;

(ii) É fácil verificar que $s(A) \cap Inn(A) = \{0\}$.

Podemos, então, enunciar agora o resultado principal deste capítulo, que é o seguinte teorema:

Teorema 3.6 *O K-morfismo ε acima definido induz uma seqüência exata de K-espaços vetoriais da forma: $0 \to \frac{F^2(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)} \to H^1(A) \to \frac{Im\varepsilon}{ch(Q,K)} \to 0$.*

Prova. Primeiramente, vejamos que ε induz um K-epimorfismo $\tilde{\varepsilon}$ de $\frac{Nor(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)}$ sobre $\mathrm{Im}\varepsilon$. De fato, como $F^2(A) \cap Inn(A) \subseteq F^2(A) = \mathrm{Ker}\varepsilon$, podemos definir o K-morfismo $\tilde{\varepsilon} : \frac{Nor(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)} \to \mathrm{Im}\varepsilon$ dado por $\tilde{\varepsilon}(\partial + (F^2(A)\cap Inn(A))) = \overline{\varepsilon}(\partial + F^2(A)) = \varepsilon(\partial)$, para cada $\partial \in Nor(A)$. Claramente, $\tilde{\varepsilon}$ é sobrejetivo e $\mathrm{Ker}\tilde{\varepsilon} = \frac{F^2(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)}$.

Além disso, uma vez que $Nor(A)\cap Inn(A) = \{\partial_a \mid a \in \bigoplus_{x\in Q_0} \tau_x A \tau_x\}$ (Obs. 2.8), verifica-se facilmente que a restrição de $\tilde{\varepsilon}$ a $\frac{Nor(A)\cap Inn(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)}$ determina um isomorfismo $\frac{Nor(A)\cap Inn(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)} \cong \varepsilon(Nor(A) \cap Inn(A)) \subseteq \mathrm{Im}\varepsilon$. De outro lado, como $\frac{Nor(A)\cap Inn(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)} \xrightarrow{\varphi} ch(Q,K)$ (Lema 3.4), podemos, via tal isomorfismo e a restrição mencionada acima, considerar $ch(Q,K) \cong \varepsilon(Nor(A) \cap Inn(A)) \subseteq \mathrm{Im}\varepsilon$.

Obtemos, então, o seguinte diagrama comutativo com linhas exatas:

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & \frac{F^2(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)} \arrow[d] & Ker\psi \arrow[d, "\alpha"] & \\
0 \arrow[r] & \frac{Nor(A)\cap Inn(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\cong"', "\varphi"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \frac{Nor(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)} \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\tilde{\varepsilon}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \frac{\frac{Nor(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)}}{\frac{Nor(A)\cap Inn(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)}} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\psi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & ch(Q,K) \arrow[r, "\tilde{\varepsilon} i \varphi^{-1}"] & Im\varepsilon \arrow[r, "\pi_\varepsilon"] \arrow[d] & \frac{Im\varepsilon}{ch(Q,K)} \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

onde π_1 e π_ε são as projeções canônicas. A existência do K-morfismo ψ, tal que $\psi\pi_1 = \pi_\varepsilon\tilde{\varepsilon}$, é garantida pela propriedade universal do Coker$i$.

Por construção, ψ é um epimorfismo e, da comutatividade do diagrama resulta que $\mathrm{Ker}\psi = \frac{\frac{(Nor(A)\cap Inn(A))+F^2(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)}}{\frac{Nor(A)\cap Inn(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)}}$. Portanto, $\mathrm{Ker}\psi \overset{\beta}{\cong} \frac{(Nor(A)\cap Inn(A))+F^2(A)}{Nor(A)\cap Inn(A)} \overset{\delta}{\cong} \frac{F^2(A)}{(Nor(A)\cap Inn(A))\cap F^2(A)}$ $= \frac{F^2(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)}$.

Logo, obtemos a seguinte seqüência exata curta de K-espaços vetoriais:

$$0 \to \frac{F^2(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)} \xrightarrow{\theta^{-1}\alpha\beta^{-1}\delta^{-1}} H^1(A) \xrightarrow{\psi\theta} \frac{Im\varepsilon}{ch(Q,K)} \to 0,$$

onde θ é o isomorfismo $H^1(A) \cong \frac{\frac{Nor(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)}}{\frac{Nor(A)\cap Inn(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)}}$, e o teorema está provado. ∎

Notando que a dimensão do subespaço $\frac{Im\varepsilon}{ch(Q,K)}$ é finita, observamos que a seqüência do Teo. 3.6 mostra que a finitude da dimensão de $H^1(A)$ depende da dimensão do subespaço $\frac{F^2(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)}$.

3.2 Casos particulares da decomposição do H^1(A)

Nesta seção apresentaremos um "aprimoramento" da seqüência exata do Teo. 3.6 para os casos particulares em que $A = KQ/I$ é uma álgebra quase fortemente acíclica ou em

que I é um ideal homogêneo de KQ, através dos subespaços $l(A)$ e $s(A)$, como em [PS].

Retomamos aqui a Obs. 2.4, que assinala que cada derivação normalizada ∂ de KQ pode ser escrita como uma soma $\partial = \partial_1 + \partial_2 + \partial_3$, onde ∂_1, ∂_2 e ∂_3 são, respectivamente, derivações especial, linear e F^2 - linear de KQ.

O fato crucial utilizado em [PS] para "refinar" a referida seqüência é que, nos casos mencionados, se ∂ é uma derivação normalizada e I-admissível de KQ e $\partial = \partial_1 + \partial_2 + \partial_3$, como acima, então as derivações ∂_1, ∂_2 e ∂_3 são também I-admissíveis, conforme veremos no próximo lema. Antes vejamos a definição de álgebras quase fortemente acíclicas.

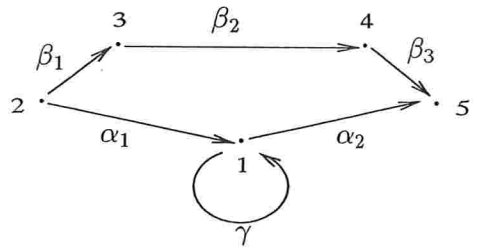
Definição 3.7 *Seja $A = KQ/I$. Dizemos que A é uma álgebra quase fortemente acíclica se $\tau_x \frac{J}{J^2} \tau_y \neq \{0\}$ (com x, $y \in Q_0$) implica que $\tau_x J^2 \tau_y = \{0\}$.*

Decorre imediatamente da definição que se A é uma álgebra quase fortemente acíclica, então A é de dimensão finita e $e_x F^2 e_y = e_x I e_y$ sempre que $\tau_x \frac{J}{J^2} \tau_y \neq \{0\}$. Além disso, todo caminho em Q, de comprimento maior ou igual a dois, paralelo a uma flecha de Q (se existir) está em I. Em particular, se A é quase fortemente acíclica e Q contém um laço α, então $\alpha^2 \in I$. Por exemplo, se $A = KQ/I$, com $I = F^2$, então A é trivialmente quase fortemente acíclica.

Recordemos, agora, a definição de ideal homogêneo de KQ.

Dados um quiver Q e um ideal $I \subseteq F^2$ de KQ, dizemos que I é um *ideal homogêneo* de KQ se I é gerado por relações homogêneas em Q (Def. 1.7 (ii)). Nesse caso, se ρ é uma relação em Q geradora de I, então o comprimento dos caminhos que aparecem em ρ é chamado de *grau* de ρ e denotado por grau(ρ).

Exemplo 3.8 Seja Q o quiver



(i) O ideal $I_1 = \langle\ \alpha_1\alpha_2,\ \alpha_1\gamma\alpha_2 - \beta_1\beta_2\beta_3,\ \gamma^3\ \rangle$ é um ideal homogêneo de KQ e a K-álgebra $A_1 = KQ/I_1$ não é quase fortemente acíclica, pois $\tau_2\frac{J}{J^2}\tau_1 \neq \{0\}$ e $\tau_2 J^2\tau_1 \neq \{0\}$;

(ii) O ideal $I_2 = \langle\ \alpha_1\gamma,\ \gamma\alpha_2,\ \gamma^2,\ \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2\beta_3\ \rangle$ não é um ideal homogêneo de KQ e a K-álgebra $A_2 = KQ/I_2$ é quase fortemente acíclica;

(iii) O ideal $I_3 = \langle\ \alpha_1\gamma,\ \gamma\alpha_2,\ \gamma^2\ \rangle$ é um ideal homogêneo de KQ e a K-álgebra $A_3 = KQ/I_3$ é quase fortemente acíclica;

(iv) O ideal $I_4 = \langle\ \gamma^3,\ \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2\beta_3\ \rangle$ não é um ideal homogêneo de KQ e a K-álgebra $A_4 = KQ/I_4$ não é quase fortemente acíclica, pois $\tau_1\frac{J}{J^2}\tau_1 \neq \{0\}$ e $\tau_1 J^2\tau_1 \neq \{0\}$.

Com as definições acima, temos o seguinte resultado:

Lema 3.9 *Seja $A = KQ/I$ uma álgebra tal que A é quase fortemente acíclica ou o ideal I é homogêneo. Seja $\partial \in h(Q,I)$. Então ∂ se escreve da seguinte forma: $\partial = \partial_1 + \partial_2 + \partial_3$, com $\partial_1 \in s(Q,I)$, $\partial_2 \in l(Q,I)$ e $\partial_3 \in F^2(Q,I)$. Em particular, toda derivação $\tilde{\partial} \in Nor(A)$ pode ser escrita como $\tilde{\partial} = \partial_1 + \partial_2 + \tilde{\partial}_3$, com $\partial_1 \in s(A)$, $\partial_2 \in l(A)$ e $\tilde{\partial}_3 \in F^2(A)$. (Equivalentemente, $\frac{Nor(A)}{F^2(A)} \cong s(A) \oplus l(A)$).*

Prova. Seja $\partial \in h(Q,I)$. Então, utilizando a Obs. 2.4, podemos escrever que $\partial = \partial_1 + \partial_2 + \partial_3$, com ∂_1 uma derivação especial de KQ, ∂_2 uma derivação linear de KQ e ∂_3 uma derivação F^2 - linear de KQ. Mostremos, pois, que $\partial_i(I) \subseteq I$, para todo $i = 1, 2, 3$.

Suponhamos, primeiramente, que A seja quase fortemente acíclica. Então, para cada flecha $\alpha : x \to y$, temos que $\partial_3(\alpha) \in e_x F^2 e_y = e_x I e_y \subseteq I$. Logo, $\mathrm{Im}\partial_3 \subseteq I$, ou seja, $\partial_3 \in h_0(Q,I)$. Portanto, ∂_3 e $\partial_1 + \partial_2$ são I-admissíveis (pois ∂ o é).

Se Q não contém laços, então, por definição, ∂_1 é nula (logo, I-admissível) e conseqüentemente ∂_2 é I-admissível. Portanto, analisemos o caso em que Q contém laços. Seja α um laço qualquer em Q, com vértice em x, e consideremos β uma flecha em Q tal que $o(\beta) = x$ ou $t(\beta) = x$. Suponhamos que $t(\beta) = x$ (o outro caso é análogo). Das hipóteses de que A é quase fortemente acíclica e de que $\partial_1 + \partial_2$ é I-admissível, resulta que $\beta\alpha \in I$ e $(\partial_1 + \partial_2)(\beta\alpha) \in e_{o(\beta)} I e_x = e_{o(\beta)} F^2 e_x \subseteq F^2$. Portanto, desde que $\partial_2(\beta\alpha) \in F^2$ (pois ∂_2 é linear), resulta que $\partial_1(\beta\alpha) \in e_{o(\beta)} F^2 e_x \subseteq F^2$. De outro lado, por ser $\partial_1(\beta\alpha)$ uma combinação linear de α e β, temos que $\partial_1(\beta\alpha) = 0$. Assim, no caso em que $\beta \neq \alpha$, segue

imediatamente que $\partial_1(\alpha) = 0$. Conseqüentemente, ∂_1 será não nula somente em laços isolados α de Q. Nesse caso, para tais laços isolados α em $x \in Q_0$, vale que $\partial_1(\alpha) = \lambda_x e_x$, para algum $\lambda_x \in K$, não nulo. Usando os mesmos argumentos acima, concluímos que $\alpha^2 \in I$ e que $0 = \partial_1(\alpha^2) = 2\lambda_x\alpha$, o que acarreta que car$K = 2$.

Portanto, se car$K \neq 2$, então $\partial_1 = 0$. No caso em que car$K = 2$ e ∂_1 é não nula, ∂_1 é trivialmente I-admissível. Em qualquer caso, temos que ∂_2 é I-admissível e a afirmação do lema está verificada para o caso em que $A = KQ/I$ é quase fortemente acíclica.

Suponhamos, agora, que o ideal $I \subseteq KQ$ seja homogêneo. Seja ρ uma relação geradora de I e suponhamos que grau$(\rho) = d$. Logo, $d \geq 2$. Podemos escrever, então, que $\rho = a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \ldots + a_s\gamma_s$ $(s \geq 1)$, onde $a_i \in K$ e os γ_i's são caminhos de comprimento d, de mesma origem e mesmo término. Observamos que se $s \geq 2$, então ρ é uma relação minimal em Q. Temos, pois, para cada $i = 1, 2, \ldots, s$, que $\partial_1(\gamma_i) = 0$ ou $\partial_1(\gamma_i)$ é uma relação homogênea não nula em Q de grau $d-1$; $\partial_2(\gamma_i) = 0$ ou $\partial_2(\gamma_i)$ é uma relação homogênea não nula em Q de grau d e que $\partial_3(\gamma_i) = 0$ ou $\partial_3(\gamma_i)$ é uma relação homogênea não nula em Q de grau maior do que d. Portanto, $\partial_1(\rho)$, $\partial_2(\rho)$ e $\partial_3(\rho)$, quando não nulas, são relações homogêneas em Q de graus $d-1$, d e maior do que d, respectivamente. Logo, de $\partial(\rho) = \partial_1(\rho) + \partial_2(\rho) + \partial_3(\rho) \in I$, das observações sobre os graus de $\partial_i(\rho)$ (para $1 \leq i \leq 3$) e do fato de que I é gerado por relações homogêneas, resulta que $\partial_i(\rho) \in I$, para $i = 1, 2, 3$. Logo, ∂_1, ∂_2 e ∂_3 são I-admissíveis e a primeira afirmação do lema está provada.

Mostremos a parte final do lema. Seja $\tilde{\partial} \in Nor(A)$. Pelo Lema 3.1, temos que $\tilde{\partial} \equiv \partial \pmod{h_0(Q,I)}$, para alguma derivação $\partial \in h(Q,I)$. Portanto, usando a primeira parte do lema, podemos escrever que $\tilde{\partial} \equiv (\partial_1 + \partial_2 + \partial_3) \pmod{h_0(Q,I)}$, onde $\partial_1 \in s(Q,I)$, $\partial_2 \in l(Q,I)$ e $\partial_3 \in F^2(Q,I)$. Das identificações decorrentes do Lema 3.1, reescrevemos $\tilde{\partial} = \partial_1 + \partial_2 + \tilde{\partial}_3$, onde $\partial_1 \in s(A)$, $\partial_2 \in l(A)$ e $\tilde{\partial}_3 = \partial_3 + h_0(Q,I) \in F^2(A)$. No caso particular em que A é quase fortemente acíclica, observamos que $\tilde{\partial} = \partial_1 + \partial_2$, com $\partial_1 \in s(A)$ e $\partial_2 \in l(A)$, pois $F^2(Q,I) \subseteq h_0(Q,I)$. Assim, o lema está completamente verificado. ∎

Para o caso em que o quiver Q contém laços, alguns fatos merecem ser mencionados sobre o subespaço $s(Q,I) \subseteq h(Q,I)$, através da seguinte observação:

Observação 3.10 (i) Seja α um laço em Q, tal que $\alpha^n \in I$ e $\alpha^{n-1} \notin I$, para algum $n \geq 2$.

Se $\partial(\alpha) \neq 0$, para alguma $\partial \in s(Q, I)$, então a I-admissibilidade de ∂ implica que car$K$ divide n. Em particular, se car$K = 0$ e os laços de Q têm a propriedade acima, temos então que $s(Q, I) = \{0\}$ (em conseqüência, $s(A) = \{0\}$).

Particularmente, se $A = KQ/I$ é quase fortemente acíclica, então a prova do Lema 3.9 possibilita ainda observar que:

(ii) $s(Q, I) \neq \{0\}$ somente quando car$K = 2$ e A admite um somando direto (como álgebra) isomorfo a $K[X]/(X^2)$. Nesse caso, $A \cong \left(K[X]/(X^2)\right)^m \times B$ (como álgebra), onde $m = \dim_K s(Q, I)$.

Daremos, a seguir, um exemplo para mostrar que em geral a afirmação do Lema 3.9 não se verifica.

Exemplo 3.11 Seja $A = KQ/I$, onde Q é o quiver

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha_1"'] & & 2 \arrow[r, "\beta"] & 3 \\
& 4 \arrow[ur, "\alpha_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

e I é o ideal de KQ gerado pela relação $\alpha\beta - \alpha_1\alpha_2\beta$.

O ideal I não é homogêneo, nem a álgebra $A = KQ/I$ é quase fortemente acíclica (pois $\tau_1 \frac{J}{J^2} \tau_2 \neq \{0\}$ e $\tau_1 J^2 \tau_2 \neq \{0\}$). Além disso, como Q não contém laços, $s(Q, I) = \{0\}$.

A derivação normalizada ∂ de KQ dada por $\partial(\alpha) = \alpha_1\alpha_2$, $\partial(\beta) = -\beta$, $\partial(\alpha_1) = \alpha_1$ e $\partial(\alpha_2) = 0$ é claramente I-admissível. Podemos escrever que $\partial = \partial_1 + \partial_2$, onde ∂_1 e ∂_2 são, respectivamente, as derivações linear e F^2 - linear de KQ definidas por $\partial_1(\beta) = -\beta$, $\partial_1(\alpha_1) = \alpha_1$, $\partial_1(\alpha) = \partial_1(\alpha_2) = 0$; $\partial_2(\alpha) = \alpha_1\alpha_2$, $\partial_2(\beta) = \partial_2(\alpha_1) = \partial_2(\alpha_2) = 0$. No entanto, ambas não são I-admissíveis.

Na proposição que segue daremos uma descrição do termo à direita da seqüência exata no Teo. 3.6 somente em termos de derivações I-admissíveis de KQ nos casos em que $A = KQ/I$ é uma álgebra quase fortemente acíclica ou em que $I \subseteq KQ$ é um ideal homogêneo.

Estaremos ainda utilizando as identificações, obtidas a partir do Lema 3.1, de $l(Q,I)$ e $s(Q,I)$, módulo $h_0(Q,I)$, com os subespaços $l(A)$ e $s(A)$ de $Nor(A)$, e desses últimos com subespaços de $\mathrm{Im}\varepsilon$, onde ε é o K-morfismo definido para o Teo. 3.6.

Proposição 3.12 *Seja $A = KQ/I$ uma álgebra tal que A é quase fortemente acíclica ou I é um ideal homogêneo de KQ. Então a restrição (também denotada por ε) $\varepsilon : l(A) \oplus s(A) \to Im\varepsilon$ é um isomorfismo. Em conseqüência, obtemos a seguinte seqüência exata de K-espaços vetoriais:*

$$0 \to \frac{F^2(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)} \to H^1(A) \to s(A) \oplus \frac{l(A)}{ch(Q,K)} \to 0.$$

Além disso, se A é quase fortemente acíclica, então $F^2(A) = \{0\}$ e $H^1(A) \cong s(A) \oplus \frac{l(A)}{ch(Q,K)}$.

Prova. Vimos, na Obs. 3.5 (i), que a restrição $\varepsilon : s(A) \oplus l(A) \to \mathrm{Im}\varepsilon$ é injetiva. Seja $\partial \in Nor(A)$. Pelo lema anterior, podemos escrever $\partial = \partial_1 + \partial_2 + \partial_3$, com $\partial_1 \in s(A)$, $\partial_2 \in l(A)$ e $\partial_3 \in F^2(A)$. Portanto, $\varepsilon(\partial) = \varepsilon(\partial_1 + \partial_2) + \varepsilon(\partial_3) = \varepsilon(\partial_1 + \partial_2)$, pois $\partial_3 \in F^2(A) = \mathrm{Ker}\varepsilon$. Assim a restrição ε é sobrejetiva e então $\mathrm{Im}\varepsilon = \varepsilon(s(A)) \oplus \varepsilon(l(A)) \cong s(A) \oplus l(A)$. Portanto, usando a seqüência exata do Teo. 3.6, construímos a seguinte seqüência exata de K-espaços vetoriais: $0 \to \frac{F^2(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)} \to H^1(A) \to \frac{s(A)\oplus l(A)}{ch(Q,K)} \to 0$.

Mostremos que $\frac{s(A)\oplus l(A)}{ch(Q,K)} \cong s(A) \oplus \frac{l(A)}{ch(Q,K)}$. Para isso, é suficiente mostrar que $s(A)\cap ch(Q,K) = \{0\}$ em $\mathrm{Im}\varepsilon$ e, para tanto, usaremos novamente o diagrama contido na demonstração do Teo. 3.6.

Seja $\partial \in s(A) \cap ch(Q,K) \subseteq \mathrm{Im}\varepsilon$. Então, de um lado, $\partial = \varepsilon(\partial_1)$, para alguma $\partial_1 \in s(A)$ e, de outro lado, $\partial = \tilde{\varepsilon}(\partial_a + F^2(A) \cap Inn(A)) = \varepsilon(\partial_a)$, para alguma $\partial_a \in Nor(A) \cap Inn(A)$ (estamos usando diretamente que $ch(Q,K) \cong \tilde{\varepsilon}\left(\frac{Nor(A)\cap Inn(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)}\right) \subseteq \mathrm{Im}\varepsilon$, a exemplo do que fizemos na prova do Teo. 3.6). Portanto, de $\varepsilon(\partial_1) = \varepsilon(\partial_a)$ resulta que $\partial_1 - \partial_a \in \mathrm{Ker}\varepsilon = F^2(A)$. Logo, para cada flecha $\alpha : x \to y$ em Q, temos que $(\partial_1 - \partial_a)(\overline{\alpha}) \in \tau_x J^2 \tau_y \subseteq J^2$ e, em conseqüência, que $\partial_1 = 0$. Assim, $\partial = 0$ e está provado que $s(A)\cap ch(Q,K) = \{0\}$ em $\mathrm{Im}\varepsilon$, resultando, pois, na obtenção da seqüência exata requerida.

A última afirmação da proposição decorre imediatamente do fato já observado de que $F^2(A) = \{0\}$ quando A é quase fortemente acíclica (pois, nesse caso, $\mathrm{Im}\partial \subseteq h_0(Q,I)$, para toda $\partial \in F^2(Q,I)$). ∎

CAPÍTULO 4

O Primeiro Grupo Fundamental e o $H^1(A)$

O objetivo deste capítulo é apresentar uma "simplificação da fórmula" para a dimensão do espaço $H^1(A)$, obtida no Teo. 3.6, para as álgebras $A = KQ/I$ nas condições do capítulo anterior, através da utilização do grupo fundamental $\pi_1(Q, I)$. A existência de um K-monomorfismo de $\mathrm{Hom}(\pi_1(Q, I), K^+)$ em $H^1(A)$ permitirá essa "simplificação" que, por sua vez, resultará na determinação de condições necessárias e suficientes para que $H^1(A)$ se anule. Os resultados aqui desenvolvidos foram obtidos por De la Peña e Saorín, em [PS], e por Assem e De la Peña, em [AP], e serão apresentados da seguinte forma:

Na seção 4.1 mostraremos que o espaço $\mathrm{Hom}(\pi_1(Q, I), K^+)$ é isomorfo ao espaço quociente $\frac{d(A)}{ch(Q,K)}$. Utilizando esse isomorfismo obteremos, na seção 4.2, a mencionada "simplificação da fórmula" para a dimensão de $H^1(A)$, em termos do posto e do p-posto do grupo abelianizado de $\pi_1(Q, I)$ (ver Obs. 1.15 (iii)).

Na seção 4.3 mostraremos que existe um K-monomorfismo entre $\mathrm{Hom}(\pi_1(Q, I), K^+)$ e $H^1(A)$, onde K^+ denota o grupo aditivo do corpo K; em conjunto com os resultados das seções anteriores, tal monomorfismo possibilitará, na seção 4.4, a determinação de condições necessárias e suficientes para que $H^1(A)$ se anule.

As álgebras aqui consideradas são, como no capítulo anterior, álgebras do tipo $A = KQ/I$, onde Q é um quiver finito e I é um ideal bilateral de KQ contido em F^2 para o qual está fixado um conjunto gerador R satisfazendo a condição de minimalidade,

isto é, toda relação $\rho \in R$ que não é monomial é uma relação minimal (Def. 1.7 (iii)). Usaremos as mesmas notações e identificações adotadas nos capítulos anteriores. No entanto, recordaremos aqui algumas delas, com o intuito de facilitar a leitura.

Conforme a Obs. 1.9, um passeio não trivial u em Q é sempre denotado por $u = \alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\cdots\alpha_r^{\varepsilon_r}$ $(r \geq 1)$. Também serão necessárias as definições, notações e convenções adotadas em (B) da seção 1.3 para a construção do grupo fundamental $\pi_1(Q, I)$. Assumimos que está fixado um vértice $x_0 \in Q_0$ e que $\pi_1(Q, I)$ é o grupo formado pelas classes de equivalência dos passeios fechados de Q de origem e término em x_0 (a relação de equivalência considerada é denotada por $\sim$). Além disso, está fixada uma árvore maximal $T = (T_0, T_1)$ em Q e, para cada $x \in Q_0$, $w_{x_0,x}$ denota o passeio (único) em T, de comprimento mínimo, de x_0 para x.

Por último, convencionamos que dada uma derivação ∂ normalizada e I-admissível de KQ, a sua correspondente classe em $Nor(A) = \frac{h(Q,I)}{h_0(Q,I)}$ (Lema 3.1) será também denotada por ∂ e mencionada, por simplicidade, por "a correspondente ∂ em $Nor(A)$".

4.1 $\pi_1(Q, I)$ e as derivações de A

Conforme foi dito na introdução deste capítulo, o grupo fundamental $\pi_1(Q, I)$ desempenha um papel importante na obtenção de fórmulas para a dimensão do K-espaço vetorial $H^1(A)$, quando essa é finita. Esta seção tem, pois, como objetivo relacionar o referido grupo com as derivações de A. Estabeleceremos, como em [PS], que $\mathrm{Hom}(\pi_1(Q, I), K^+) \cong \frac{d(A)}{ch(Q,K)}$, onde K^+ denota o grupo aditivo do corpo K. Para isso, iniciamos com a definição de um novo espaço vetorial, introduzido em [JAP] e [AP], que contém como subespaço $ch(Q, K)$.

Denotamos por $\mathcal{Z}^1(Q, I, K)$ o conjunto formado pelas aplicações $\lambda : Q_1 \to K$ que satisfazem a seguinte condição: se $\gamma_1 = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r$ e $\gamma_2 = \beta_1\beta_2\ldots\beta_s$ são caminhos que aparecem com coeficientes não nulos em alguma relação minimal $\rho \in R$, então $\lambda(\gamma_1) = \lambda(\gamma_2)$, onde $\lambda(\gamma_1) := \sum_{i=1}^{r} \lambda(\alpha_i)$. Convencionamos que se $u = \alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\cdots\alpha_r^{\varepsilon_r}$ é um passeio não trivial em Q e $\lambda \in \mathcal{Z}^1(Q, I, K)$, então $\lambda(u) := \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i\lambda(\alpha_i)$. É fácil ver que $\mathcal{Z}^1(Q, I, K)$

é um K-espaço vetorial e que $ch(Q,K) \subseteq \mathcal{Z}^1(Q,I,K)$.

Lema 4.1 *$\mathcal{Z}^1(Q,I,K)$ é canonicamente isomorfo a $d(Q,I)$.*

Prova. Dada $\lambda \in \mathcal{Z}^1(Q,I,K)$, a ela associamos a derivação diagonal ∂^λ de KQ tal que $\partial^\lambda(\alpha) = \lambda(\alpha)\alpha$, para toda $\alpha \in Q_1$. Assim, podemos considerar a aplicação $\phi : \mathcal{Z}^1(Q,I,K) \to d(KQ)$ que, a cada $\lambda \in \mathcal{Z}^1(Q,I,K)$, associa a derivação $\phi(\lambda) = \partial^\lambda \in d(KQ)$.

Claramente, ϕ é um K-morfismo e injetivo. Mostremos que $\mathrm{Im}\phi = d(Q,I)$, iniciando pela prova de que $\phi(\lambda) = \partial^\lambda$ é uma derivação I-admissível de KQ, para cada $\lambda \in \mathcal{Z}^1(Q,I,K)$.

Seja $\rho \in R$ qualquer. Se $\rho = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_r$ $(r \geq 2)$, então $\phi(\lambda)(\rho) = c\rho \in I$, onde $c = \sum_{i=1}^{r} \lambda(\alpha_i)$ (pois $\phi(\lambda)$ é uma derivação diagonal). Se $\rho = \sum_{j=1}^{m} a_j\gamma_j$ é uma relação minimal $(m \geq 2)$, então de $\lambda(\gamma_1) = \lambda(\gamma_j)$ (para $1 \leq j \leq m$) resulta que $\phi(\lambda)(\rho) = \sum_{j=1}^{m} a_j\lambda(\gamma_1)\gamma_j = \lambda(\gamma_1)\rho \in I$. Portanto, $\mathrm{Im}\phi \subseteq d(Q,I)$.

Para a inclusão contrária, seja $\partial \in d(Q,I)$. Como ∂ é uma derivação diagonal de KQ, então ela determina uma aplicação $\lambda : Q_1 \to K$ tal que $\lambda(\alpha)\alpha = \partial(\alpha)$, para toda $\alpha \in Q_1$. Portanto, para concluir a prova do lema, resta mostrar que $\lambda \in \mathcal{Z}^1(Q,I,K)$.

Seja, então, $\rho = \sum_{i=1}^{m} a_i\gamma_i \in R$, com $m \geq 2$, uma relação minimal em Q. Suponhamos que existam i, $j \in \{1,2,\ldots,m\}$ tais $\lambda(\gamma_i) \neq \lambda(\gamma_j)$. Renumerando os índices, caso necessário, podemos supor que $\lambda(\gamma_1) \neq \lambda(\gamma_2)$ e que $\lambda(\gamma_1) \neq 0$. De $\rho \in I$ e de $\partial \in d(Q,I)$, decorre que $\partial(\rho) - \lambda(\gamma_1)\rho \in I$, o que contradiz a minimalidade de ρ, pois $\partial(\rho) - \lambda(\gamma_1)\rho = \sum_{i=2}^{m}(\lambda(\gamma_i) - \lambda(\gamma_1))a_i\gamma_i \in I$, com $\lambda(\gamma_2) - \lambda(\gamma_1) \neq 0$. Portanto, $\lambda \in \mathcal{Z}^1(Q,I,K)$. ∎

Observamos que, via o isomorfismo do lema acima, o subespaço $ch(Q,K) \subseteq \mathcal{Z}^1(Q,I,K)$ será entendido como um subespaço de $d(Q,I)$, quando necessário.

O objetivo agora é construir uma seqüência exata de K-espaços vetoriais que relaciona $\mathcal{Z}^1(Q,I,K)$ com $\mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I),K^+)$, como em [AP]. Utilizaremos, nessa construção, o

epimorfismo $\varphi : K^{Q_0} \to ch(Q,K)$ considerado na Prop. 3.3.

Lembramos que tal epimorfismo associa a cada função $\lambda \in K^{Q_0}$ a aplicação $\tilde{\lambda} \in ch(Q,K)$ dada por $\tilde{\lambda}(\alpha) = \lambda(o(\alpha)) - \lambda(t(\alpha))$, para toda flecha $\alpha \in Q_1$. Em particular, $\tilde{\lambda} = \varphi(\lambda) \in \mathcal{Z}^1(Q,I,K)$ e, dessa forma, podemos considerar φ como um K-morfismo de K^{Q_0} em $\mathcal{Z}^1(Q,I,K)$. Como na prova da referida proposição, temos que $\mathrm{Im}\varphi = ch(Q,K)$ e que $\mathrm{Ker}\varphi = \{\lambda \in K^{Q_0} \mid \lambda$ é constante em cada componente conexa de $Q\} \cong K^{m(Q)}$, onde $m(Q)$ indica o número de componentes conexas de Q.

Proposição 4.2 *Sejam Q um quiver finito e $m(Q)$ o número de componentes conexas de Q. Então existe uma seqüência exata de K-espaços vetoriais:*

$0 \to K^{m(Q)} \to K^{Q_0} \to \mathcal{Z}^1(Q,I,K) \xrightarrow{\sigma} Hom(\pi_1(Q,I),K^+) \to 0$, *tal que σ é um epimorfismo que cinde.*

Prova. Desde que $\pi_1(Q,I) = \prod_{j=1}^{m(Q)} \pi_1(Q^{(j)},I_j)$, onde $Q^{(j)}$ denota cada componente conexa de Q e $I_j = KQ^{(j)} \cap I$ (para $1 \leq j \leq m(Q)$), resulta que não há perda de generalidade em se supor que Q seja conexo.

Seja $\varphi : K^{Q_0} \to \mathcal{Z}^1(Q,I,K)$ o K-morfismo acima referido, para o qual vale que $\mathrm{Ker}\varphi \cong K$ e $\mathrm{Im}\varphi = ch(Q,K)$.

Vamos, agora, construir o K-morfismo σ do enunciado. Seja $g \in \mathcal{Z}^1(Q,I,K)$. Levando em conta que $g(\alpha\alpha^{-1}) = 0 = g(\alpha^{-1}\alpha)$, para toda flecha α de Q (por convenção, temos que $g(\alpha^{-1}) = -g(\alpha)$) e que $\sum_{i=1}^{r} g(\alpha_i) = \sum_{j=1}^{s} g(\beta_j)$, para dois caminhos quaisquer $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r$ e $\beta_1\beta_2\ldots\beta_s$ (r, $s \geq 2$) que aparecem em uma mesma relação minimal, segue facilmente que g respeita a relação de equivalência $\sim$ (ver definição de $\pi_1(Q,I)$ da seção 1.3 (B)) sobre o conjunto dos passeios de Q. Com essas considerações, podemos definir a aplicação $\sigma : \mathcal{Z}^1(Q,I,K) \to \mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I),K^+)$ que associa, a cada $g \in \mathcal{Z}^1(Q,I,K)$, a função $\sigma(g) : \pi_1(Q,I) \to K^+$ dada por $\sigma(g)([e_{x_0}]) = 0$ e, para cada $[\alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\cdots\alpha_r^{\varepsilon_r}] \neq [e_{x_0}]$ em $\pi_1(Q,I)$, $\sigma(g)([\alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\cdots\alpha_r^{\varepsilon_r}]) = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i g(\alpha_i)$. É fácil ver que $\sigma(g)$ é um morfismo de grupos e, portanto, $\sigma(g) \in \mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I),K^+)$. Da mesma forma, verifica-se facilmente que σ é um K-morfismo.

Desde que $\mathrm{Im}\varphi = ch(Q,K)$, segue que, para completar a prova, resta verificar que a

aplicação σ é um epimorfismo que cinde e que $\mathrm{Ker}\sigma = ch(Q,K)$.

Mostremos, primeiramente, que $\mathrm{Ker}\sigma \subseteq ch(Q,K)$. Sejam $g \in \mathrm{Ker}\sigma$ e w_1 e w_2 passeios em Q de mesma origem $x \in Q_0$ e mesmo término $y \in Q_0$. Consideremos o passeio fechado w em Q de origem em x_0 dado por $w = w_{x_0,x}w_1w_2^{-1}w_{x_0,x}^{-1}$, onde $w_{x_0,x}$ é o passeio x_0 para x fixado anteriormente. De $0 = \sigma(g)([w]) = g(w_{x_0,x}) + g(w_1) - g(w_2) - g(w_{x_0,x})$ segue, então, que $g(w_1) = g(w_2)$. A inclusão contrária resulta do fato de que, para cada $f \in ch(Q,K)$, a igualdade $f(w_1) = f(w_2)$ se verifica, para passeios quaisquer w_1 e w_2 de Q com mesma origem e mesmo término, o que mostra que $\mathrm{Ker}\sigma = ch(Q,K) = \mathrm{Im}\varphi$.

Exibiremos uma inversa à direita de σ, provando, assim, que σ é um epimorfismo que cinde. Para cada $h \in \mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I),K^+)$, podemos definir a função $g_h : Q_1 \to K$ dada por $g_h(\alpha) = h([w_{x_0,o(\alpha)}\alpha w_{x_0,t(\alpha)}^{-1}])$, para toda $\alpha \in Q_1$. Mostremos que g_h é um elemento de $\mathcal{Z}^1(Q,I,K)$. Notamos inicialmente que, para um caminho qualquer $\gamma = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r$, vale a igualdade $\sum_{i=1}^{r} g_h(\alpha_i) = h([w_{x_0,o(\alpha_1)}\gamma w_{x_0,t(\alpha_r)}^{-1}])$ (esse fato é uma conseqüência direta de que h é K-morfismo e de que $\prod_{i=1}^{r}[w_{x_0,o(\alpha_i)}\alpha_i w_{x_0,t(\alpha_i)}^{-1}] = [w_{x_0,o(\alpha_1)}\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r\ w_{x_0,t(\alpha_r)}^{-1}]$). Sejam, então, $\gamma_1 = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_r$ e $\gamma_2 = \beta_1\beta_2\ldots\beta_s$ $(r,s \geq 2)$ caminhos de x para y que aparecem em uma mesma relação minimal $\rho \in R$. Temos, então, que $\gamma_1 \sim \gamma_2$ e, portanto, que $\sum_{i=1}^{r} g_h(\alpha_i)$ $= h([w_{x_0,x}\gamma_1 w_{x_0,y}^{-1}]) = h([w_{x_0,x}\gamma_2 w_{x_0,y}^{-1}]) = \sum_{j=1}^{s} g_h(\beta_j)$. Logo, $g_h \in \mathcal{Z}^1(Q,I,K)$.

Consideremos a aplicação $c : \mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I),K^+) \to \mathcal{Z}^1(Q,I,K)$ que, a cada $h \in \mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I),K^+)$, associa a função $g_h \in \mathcal{Z}^1(Q,I,K)$ acima definida. Claramente, c é um morfismo de K-espaços vetoriais que, para cada $h \in \mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I),K^+)$ e para cada $[\alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\cdots\alpha_r^{\varepsilon_r}] \in \pi_1(Q,I)$, satisfaz $(\sigma\circ c)(h)([\alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\cdots\alpha_r^{\varepsilon_r}]) = \sum_{i=1}^{r}\varepsilon_i h([w_{x_0,o(\alpha_i)}\alpha_i w_{x_0,t(\alpha_i)}^{-1}])$ $= \sum_{i=1}^{r} h([w_{x_0,o(\alpha_i^{\varepsilon_i})}\alpha_i^{\varepsilon_i} w_{x_0,t(\alpha_i^{\varepsilon_i})}^{-1}]) = h([w_{x_0,x_0}\alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\cdots\alpha_r^{\varepsilon_r}w_{x_0,x_0}^{-1}]) = h([\alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\cdots\alpha_r^{\varepsilon_r}])$. Logo, $\sigma\circ c = id_{\mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I),K^+)}$. Portanto, obtemos a seqüência exata de K-espaços vetoriais pretendida. ∎

A Prop. 4.2, o isomorfismo $\mathcal{Z}^1(Q,I,K) \cong d(Q,I)$, estabelecido no Lema 4.1, e o fato de que $ch(Q,K) \cong K^{Q_0}/K^{m(Q)}$ trazem como conseqüência direta o seguinte corolário:

Corolário 4.3 *Existe uma seqüência exata de K-espaços vetoriais:*

$$0 \to ch(Q,K) \to d(Q,I) \to Hom(\pi_1(Q,I), K^+) \to 0.$$ ∎

4.2 A dimensão do $H^1(A)$ e o grupo fundamental

O objetivo desta seção é aprimorar a "fórmula" obtida para a dimensão de $H^1(A)$, quando essa é finita, a partir do Teo. 3.6 e da seqüência exata da Cor. 4.3. Esse aprimoramento, portanto, vai envolver a dimensão do K-espaço vetorial $\mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I), K^+)$ e, por isso, vamos retomar aqui alguns fatos necessários que foram estabelecidos no capítulo 1. Lembramos que, na Obs. 1.15 (iii), vimos que $\dim_K \mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I), K^+) = \mathrm{rk}(\overline{\Pi}) + r$, onde $\overline{\Pi}$ denota o grupo abelianizado de $\pi_1(Q,I)$, $r = \mathrm{rk}_p(\overline{\Pi})$, se $\mathrm{car}K = p \neq 0$, e $r = 0$, caso contrário.

Utilizaremos, ainda, as identificações consideradas no capítulo anterior, como as decorrentes do Lema 3.1 dos subespaços $s(Q,I)$ (das derivações especiais), $l(Q,I)$ (das derivações lineares) e $d(Q,I)$ (das derivações diagonais) do espaço $h(Q,I)$ das derivações normalizadas e I-admissíveis de KQ com as suas correspondentes imagens em $Nor(A) = Nor(KQ/I) \cong h(Q,I)/h_0(Q,I)$ (denotadas, respectivamente, por $s(A)$, $l(A)$ e $d(A)$), e dessas últimas com as suas imagens (denotadas da mesma forma) em $\mathrm{Im}\varepsilon$, onde ε é o K-morfismo contruído para o Teo. 3.6 (Obs. 3.5).

A proposição abaixo apresenta uma "fórmula" para $\dim_K H^1(A)$, que é obtida das seqüências exatas do Teo. 3.6 e do Cor. 4.3.

Proposição 4.4 *Seja $A = KQ/I$ uma álgebra. Suponhamos que a dimensão de $H^1(A)$ seja finita. Então:*

$$dim_K H^1(A) = dim_K \frac{F^2(A)}{F^2(A) \cap Inn(A)} + dim_K Im\varepsilon - dim_K d(A) + rk(\overline{\Pi}) + r,$$

onde $r = rk_p(\overline{\Pi})$, se $carK = p \neq 0$, e $r = 0$, caso contrário.

Em particular:

(1) Se A é quase fortemente acíclica, então:

$$dim_K H^1(A) = dim_K s(A) + dim_K l(A) - dim_K d(A) + rk(\overline{\Pi}) + r;$$

(2) Se I é um ideal homogêneo de KQ, então:

$$dim_K H^1(A) = dim_K \frac{F^2(A)}{F^2(A) \cap Inn(A)} + dim_K s(A) + dim_K l(A) - dim_K d(A) + rk(\overline{\Pi}) + r.$$

Prova. A afirmação geral da proposição é conseqüência imediata do Teo. 3.6, do Cor. 4.3 e da observação acima sobre a dimensão de $\mathrm{Hom}(\pi_1(Q, I), K^+)$.

Para os casos particulares, a afirmação segue diretamente do fato de que $\dim_K Im\varepsilon = \dim_K s(A) + \dim_K l(A)$ (Prop. 3.12). Notamos que se A é quase fortemente acíclica, então $F^2(A) = \{0\}$ e, portanto, $\dim_K H^1(A)$ é finita. ∎

O corolário que segue mostra que, para as álgebras $A = KQ/I$ cujo quiver Q não contém flechas múltiplas, é possível obter "fórmulas" mais simples para a dimensão de $H^1(A)$ nos casos em que A é quase fortemente acíclica ou em que o ideal I é homogêneo. Notamos que para as álgebras $A = KQ/I$ cujo quiver Q não contém flechas múltiplas, vale que os espaços $l(Q, I)$ e $d(Q, I)$ coincidem e, em conseqüência, que $l(A) = d(A)$ em $Nor(A)$.

Corolário 4.5 *Seja $A = KQ/I$ uma álgebra tal que o quiver Q não contém flechas múltiplas.*

(1) Se A é quase fortemente acíclica, então $dim_K H^1(A) = rk(\overline{\Pi}) + r + t$, onde $t = 0$, se $carK \neq 2$, e t é a multiplicidade da álgebra $K[X]/(X^2)$ como somando direto da álgebra A, se $carK = 2$.

(2) Se I é um ideal homogêneo de KQ e $H^1(A)$ tem dimensão finita, então:

$$dim_K H^1(A) = dim_K \frac{F^2(A)}{F^2(A) \cap Inn(A)} + dim_K s(A) + rk(\overline{\Pi}) + r.$$

(3) Se I é monomial e a dimensão de $H^1(A)$ é finita, então:

$$dim_K H^1(A) = dim_K \frac{F^2(A)}{F^2(A) \cap Inn(A)} + dim_K s(A) + \chi(Q),$$

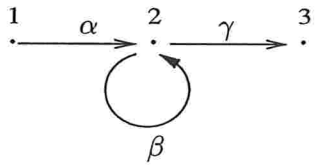
onde $\chi(Q) = 1 - \mid Q_0 \mid + \mid Q_1 \mid$ é a característica de Euler do quiver Q.

Prova. Lembramos que, se A é quase fortemente acíclica, então $s(A) = s(Q, I) \neq \{0\}$ somente se $\mathrm{car}K = 2$ e $A \cong B \times \left(K[X]/(X^2)\right)^m$, onde $m = \dim_K s(A) \geq 1$ (ver Obs. 3.10 (ii)). Logo, as afirmações (1) e (2) decorrem diretamente da proposição anterior, usando essa última observação e o fato de que $l(A) = d(A)$ (como foi observado acima).

Para a verificação de (3), basta notar que a hipótese de I ser monomial implica, pela Obs. 1.15 (i), que $\pi_1(Q,I) = \pi_1(Q)$ (o grupo fundamental de Q) e, portanto, é um produto direto de grupos livres, cada um deles de posto $\chi(Q^{(i)})$, a característica de Euler da correspondente componente conexa $Q^{(i)}$ de Q (Prop. 1.13). Logo, pela Obs. 1.15 (iii), $\dim_K \mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I), K^+) = \mathrm{rk}(\overline{\Pi}) = \mathrm{rk}(\pi_1(Q)) = \sum_{i=1}^{m(Q)} \chi(Q^{(i)}) = \chi(Q)$ (pois $r = 0$ e $\mathrm{rk}(\overline{\Pi})$ $= \mathrm{rk}(\pi_1(Q))$, uma vez que $\pi_1(Q^{(i)})$ é livre). Assim, a igualdade em (3) segue de (2), pois I também é homogêneo. ∎

A seguir daremos um exemplo mostrando que os resultados obtidos podem ser aplicados para álgebras de dimensão infinita.

Exemplo 4.6 Seja $A = KQ/I$, onde Q é o quiver



e I é o ideal gerado pelas relações $\alpha\gamma$ e $\alpha\beta\gamma$. Observamos que A é uma K-álgebra de dimensão infinita, pois $\overline{\beta}^n \in A$, para todo $n \geq 1$.

Dada uma derivação normalizada e I-admissível ∂ de KQ, verifica-se facilmente que:

$$\begin{cases} \partial(\alpha) = a_0\alpha + \sum_{i\geq 1} a_i\alpha\beta^i & , \ com\ a_i \in K, \forall\, i \geq 0 \\ \partial(\beta) = b_0e_2 + b_1\beta + (-a_1 - c_1)\beta^2 & , \ com\ b_0,\ b_1\ e\ c_1 \in K \\ \partial(\gamma) = c_0\gamma + c_1\beta\gamma - \sum_{i\geq 2} a_i\beta^i\gamma & , \ com\ c_0 \in K \end{cases}$$

Consideremos as seguintes derivações normalizadas de KQ:

$$\begin{cases} \partial_1(\alpha) = 0 \\ \partial_1(\beta) = e_2 \\ \partial_1(\gamma) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_2(\alpha) = \alpha \\ \partial_2(\beta) = 0 \\ \partial_2(\gamma) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_3(\alpha) = 0 \\ \partial_3(\beta) = \beta \\ \partial_3(\gamma) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_4(\alpha) = 0 \\ \partial_4(\beta) = 0 \\ \partial_4(\gamma) = \gamma \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_5(\alpha) = \alpha\beta \\ \partial_5(\beta) = -\beta^2 \\ \partial_5(\gamma) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_6(\alpha) = 0 \\ \partial_6(\beta) = -\beta^2 \\ \partial_6(\gamma) = \beta\gamma \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_7^{(j)}(\alpha) &= \alpha\beta^j \\ \partial_7^{(j)}(\beta) &= 0 \qquad\qquad (\text{ para todo j} \geq 2) \\ \partial_7^{(j)}(\gamma) &= -\beta^j\gamma \end{cases}$$

As derivações ∂_i, para $i = 1, 2, \ldots, 6$, e $\partial_7^{(j)}$, para $j \geq 2$, são I-admissíveis. Além disso, dada uma derivação ∂ normalizada e I-admissível de KQ, podemos escrever que:

$$\partial = a_0\partial_2 + b_0\partial_1 + b_1\partial_3 + c_0\partial_4 + a_1\partial_5 + c_1\partial_6 + \sum_{j\geq 2} a_j\partial_7^{(j)},$$

com b_0, b_1, c_0, c_1 e a_j em K, mostrando assim que o espaço $h(Q,I)$ é gerado por $D = \{\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_6, \partial_7^{(j)} \mid j \geq 2\}$ (o conjunto D, na verdade, é uma K-base de $h(Q,I)$). É fácil verificar que o conjunto D, com seus elementos vistos como derivações de A, também é uma K-base de $Nor(A)$.

Observamos que $Nor(A) \cap Inn(A)$ é gerado pelo conjunto $\{\partial_{\tau_1}, \partial_{\tau_3}, \partial_{\overline{\beta^j}} \mid j \geq 1\}$ e que $\partial_2 = \partial_{\tau_1}$, $\partial_4 = -\partial_{\tau_3}$, $\partial_6 - \partial_5 = \partial_{\overline{\beta}}$ e $\partial_7^{(j)} = -\partial_{\overline{\beta^j}}$, para todo $j \geq 2$. Portanto, podemos concluir que $\{\tilde{\partial}_1, \tilde{\partial}_3, \tilde{\partial}_5\}$ é uma K-base de $\frac{Nor(A)}{Nor(A)\cap Inn(A)}$, onde $\tilde{\partial}_i$ indica a classe de ∂_i, módulo $Nor(A) \cap Inn(A)$ ($i = 1, 3, 5$) e, conseqüentemente, que $\dim_K H^1(A) = 3$.

De outro lado, é de fácil verificação que os K-espaços vetoriais $\frac{F^2(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)}$ e $s(A)$ são ambos unidimensionais, pois ∂_5, ∂_6 e $\partial_7^{(j)}$, $j \geq 2$, formam uma K-base de $F^2(A)$ e $s(A)$ é gerado por ∂_1. Como $l(A) = d(A)$ e I é monomial, temos, então, pelo ítem (3) do corolário anterior, que $\dim_K H^1(A) = \dim_K \frac{F^2(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)} + \dim_K s(A) + \chi(Q) = 3$.

4.3 Um monomorfismo de Hom$(\pi_1(Q,I),K^+)$ em $H^1(A)$

Nesta seção mostraremos que existe um K-monomorfismo de Hom$(\pi_1(Q,I),K^+)$ em $H^1(A)$. A existência de tal monomorfismo foi inicialmente demonstrada por Assem e De la Peña, em [AP], para o caso das álgebras triangulares (álgebras do tipo $A = KQ/I$, cujo quiver Q não contém circuitos orientados), e em [FGM] e [PS], sem a restrição de que A seja triangular. Na prova que desenvolveremos aqui usaremos, no entanto, argumentos similares aos utilizados em [AP].

Teorema 4.7 *Seja $A = KQ/I$ uma K-álgebra. Então existe um K-monomorfismo $\mathfrak{s} : Hom(\pi_1(Q,I),K^+) \to H^1(A)$.*

Prova. Definiremos, inicialmente, uma aplicação $\mathfrak{s}^1 : \mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I),K^+) \to Der(A)$.

Para cada $f \in \mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I),K^+)$, podemos definir uma função $\tilde{f} : KQ \to KQ$ da seguinte maneira: dado $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\gamma_i \in KQ$ (onde, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, $\lambda_i \in K$ e γ_i é um caminho em Q), seja $\tilde{f}(a) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f([w_{x_0,o(\gamma_i)}\gamma_i w^{-1}_{x_0,t(\gamma_i)}])\gamma_i$. É claro que $\tilde{f} \in \mathrm{End}_K(KQ)$. Mostremos que $\tilde{f}(I) \subseteq I$. Para isso, é suficiente provar que $\tilde{f}(\rho) \in I$, para toda relação $\rho \in R$.

Seja, então, $\rho = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\gamma_i \in R$, onde $\lambda_i \in K$ e γ_i são caminhos de x para y em Q, com $\ell(\gamma_i) \geq 2$ $(1 \leq i \leq n)$. Se $\rho = \lambda_1\gamma_1$ $(\lambda_1 \neq 0)$, então $\tilde{f}(\rho) = \lambda_1 f([w_{x_0,x}\gamma_1 w^{-1}_{x_0,y}])\gamma_1 \in$ I. Se ρ é uma relação minimal (portanto $n \geq 2$), então $f([w_{x_0,x}\gamma_1 w^{-1}_{x_0,y}]) = f([w_{x_0,x}\gamma_j w^{-1}_{x_0,y}])$, para todo $1 \leq j \leq n$ (pois $\gamma_1 \sim \gamma_j$, para cada $j = 1, 2, \ldots, n$). Decorre daí que $\tilde{f}(\rho) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f([w_{x_0,x}\gamma_i w^{-1}_{x_0,y}])\gamma_i = f([w_{x_0,x}\gamma_1 w^{-1}_{x_0,y}])\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\gamma_i\Big) \in I$.

Desta forma, a cada $f \in \mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I),K^+)$, podemos associar o K-morfismo (também denotado por $\tilde{f}$) $\tilde{f} : A \to A$ definido, para cada $a = \sum_{i=1}^{r} a_i\overline{\gamma_i} \in A$ (com $a_i \in K$ e γ_i caminhos em Q), por $\tilde{f}(\sum_{i=1}^{r} a_i\overline{\gamma_i}) = \sum_{i=1}^{r} a_i f([w_{x_0,o(\gamma_i)}\gamma_i w^{-1}_{x_0,t(\gamma_i)}])\overline{\gamma_i}$.

Observamos que, para cada $x \in Q_0$, $\tilde{f}(\tau_x) = f([w_{x_0,x}e_x w^{-1}_{x_0,x}])\tau_x = 0$. Mostremos que $\tilde{f}$ é uma derivação de A. Sejam $a = \sum_{i=1}^{r} a_i\overline{\gamma_i}$ e $b = \sum_{j=1}^{s} b_i\overline{\mu_j} \in A$, onde a_i, $b_j \in K$ e γ_i, μ_j são caminhos em Q. Temos, então, que:

$$\tilde{f}(ab) = \tilde{f}(\sum_{i,j} a_i b_j \overline{\gamma_i\mu_j}) = \sum_{i,j} a_i b_j f([w_{x_0,o(\gamma_i)}\gamma_i\mu_j w^{-1}_{x_0,t(\mu_j)}])\overline{\gamma_i\mu_j} =$$

$$\sum_{\substack{i,j \\ t(\gamma_i)=o(\mu_j)}} a_i b_j f([w_{x_0,o(\gamma_i)}\gamma_i w^{-1}_{x_0,t(\gamma_i)}])\overline{\gamma_i\mu_j} + \sum_{\substack{i,j \\ t(\gamma_i)=o(\mu_j)}} a_i b_j f([w_{x_0,o(\mu_j)}\mu_j w^{-1}_{x_0,t(\mu_j)}])\overline{\gamma_i\mu_j} =$$

$$\Big(\sum_{i=1}^{r} a_i f([w_{x_0,o(\gamma_i)}\gamma_i w^{-1}_{x_0,t(\gamma_i)}])\overline{\gamma_i}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{s} b_i\overline{\mu_j}\Big) + \Big(\sum_{i=1}^{r} a_i\overline{\gamma_i}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{s} b_j f([w_{x_0,o(\mu_j)}\mu_j w^{-1}_{x_0,t(\mu_j)}])\overline{\mu_j}\Big)$$
$$= \tilde{f}(a)b + a\tilde{f}(b).$$

Portanto, $\tilde{f}$ é uma derivação normalizada de A e podemos considerar a aplicação $\mathfrak{s}^1 : \mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I),K^+) \to Nor(A) \subseteq Der(A)$ dada por $\mathfrak{s}^1(f) = \tilde{f}$, para cada $f \in$

$\mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I),K^+)$. É de simples verificação que $\mathfrak{s}^1$ é um K-morfismo. Seja $\mathfrak{s} = \pi \circ \mathfrak{s}^1 : \mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I),K^+) \to \frac{Der(A)}{Der(A)\cap Inn(A)}$, onde π denota o K-epimorfismo canônico de $Der(A)$ em $\frac{Der(A)}{Der(A)\cap Inn(A)} = H^1(A)$.

Mostremos que $\mathfrak{s}$ é injetivo. Para tanto, seja $f \in \mathrm{Ker}\mathfrak{s}$. Temos, então, que $\mathfrak{s}^1(f) \in Der(A) \cap Inn(A)$ e, conseqüentemente, $\mathfrak{s}^1(f) = \tilde{f} = \partial_a$, para algum $a \in A$. Escrevamos $a = \sum_{x\in Q_0} \lambda_x\tau_x + b$, com $\lambda_x \in K$ e $b \in J = F/I$, e provemos, inicialmente, que $b \in \mathrm{Z}(A)$, o centro de A. Com efeito, de um lado, de $a\tau_y - \tau_y a = \partial_a(\tau_y) = \tilde{f}(\tau_y) = 0$ em A, para cada $y \in Q_0$, resulta que $b\tau_y = \tau_y b$, para todo $y \in Q_0$. De outro lado, vale que $\Big(\sum_{x\in Q_0} \lambda_x\tau_x + b\Big)\overline{\alpha} - \overline{\alpha}\Big(\sum_{x\in Q_0} \lambda_x\tau_x + b\Big) = \partial_a(\overline{\alpha}) = \tilde{f}(\overline{\alpha}) = f([w_{x_0,x}\alpha w^{-1}_{x_0,y}])\overline{\alpha}$, para cada flecha $\alpha : x \to y$. Dessa igualdade, concluímos que $b\overline{\alpha} - \overline{\alpha}b = 0$ em A (pois $b\overline{\alpha} - \overline{\alpha}b \in J^2 = F^2/I$) e $f([w_{x_0,x}\alpha w^{-1}_{x_0,y}]) = \lambda_x - \lambda_y$. Obtemos, assim, que b comuta com todos os elementos de $\{\tau_x \mid x \in Q_0\}$ e com todos os elementos de $J = F/I$. Logo, $b \in \mathrm{Z}(A)$ e a derivação de A determinada por b é nula. Logo, podemos assumir que $\mathfrak{s}^1(f) = \tilde{f} = \partial_a$, para algum $a = \sum_{x\in Q_0} \lambda_x\tau_x \in A$.

Mostremos, finalmente, que nessas condições, f é nula. Seja w um passeio fechado em Q, com origem em x_0. Se $w = e_{x_0}$, então é claro que $f([w]) = 0$. Suponhamos, pois, que $w = \alpha_1^{\varepsilon_1}\alpha_2^{\varepsilon_2}\cdots\alpha_r^{\varepsilon_r}$ seja um passeio não trivial em Q. Vimos acima que, para cada flecha α, vale que $f([w_{x_0,o(\alpha)}\alpha w^{-1}_{x_0,t(\alpha)}]) = \lambda_{o(\alpha)} - \lambda_{t(\alpha)}$ e, portanto, que $f([w_{x_0,o(\alpha^\varepsilon)}\alpha^\varepsilon w^{-1}_{x_0,t(\alpha^\varepsilon)}]) = \lambda_{o(\alpha^\varepsilon)} - \lambda_{t(\alpha^\varepsilon)}$, para $\varepsilon = \pm 1$. Temos, então, que:

$$f([w]) = f([w_{x_0,x_0}\alpha_1^{\varepsilon_1}w^{-1}_{x_0,t(\alpha_1^{\varepsilon_1})}w_{x_0,o(\alpha_2^{\varepsilon_2})}\alpha_2^{\varepsilon_2}\ w^{-1}_{x_0,t(\alpha_2^{\varepsilon_2})}\cdots w_{x_0,o(\alpha_r^{\varepsilon_r})}\ \alpha_r^{\varepsilon_r}w^{-1}_{x_0,x_0}]) =$$

$$f([w_{x_0,x_0}\alpha_1^{\varepsilon_1}w^{-1}_{x_0,t(\alpha_1^{\varepsilon_1})}]) + f([w_{x_0,o(\alpha_2^{\varepsilon_2})}\alpha_2^{\varepsilon_2}w^{-1}_{x_0,t(\alpha_2^{\varepsilon_2})}]) + \ldots + f([w_{x_0,o(\alpha_r^{\varepsilon_r})}\ \alpha_r^{\varepsilon_r}w^{-1}_{x_0,x_0}]) =$$

$(\lambda_{x_0} - \lambda_{t(\alpha_1^{\varepsilon_1})}) + (\lambda_{o(\alpha_2^{\varepsilon_2})} - \lambda_{t(\alpha_2^{\varepsilon_2})}) + \ldots + (\lambda_{o(\alpha_r^{\varepsilon_r})} - \lambda_{x_0}) = 0$. Portanto, $\mathfrak{s}$ é um K-morfismo injetivo e o teorema está provado. ∎

As observações sobre $\mathrm{Im}\mathfrak{s}$ e sua dimensão que faremos a seguir serão bastante úteis na próxima seção.

Observação 4.8 (i) $\mathrm{Im}\mathfrak{s} \subseteq d(A) \cong \frac{d(A)+Nor(A)\cap Inn(A)}{Nor(A)\cap Inn(A)}$ (conseqüência de que $\mathfrak{s}^1(f)(\overline{\alpha}) = f([w_{x_0,o(\alpha)}\alpha w^{-1}_{x_0,t(\alpha)}])\overline{\alpha}$, para cada $\alpha \in Q_1$, e de que $H^1(A) \cong \frac{Nor(A)}{Nor(A)\cap Inn(A)}$);

(ii) $\dim_K Im\mathfrak{s} = \dim_K d(A) - \dim_K ch(Q, K)$ (conseqüência de $\mathfrak{s}$ ser K-monomorfismo e do Cor. 4.3).

4.4 Condições necessárias e suficientes para $H^1(A)$ se anular

As "fórmulas" para $\dim_K H^1(A)$ e o monomorfismo $\mathfrak{s} : \mathrm{Hom}(\pi_1(Q, I), K^+) \to H^1(A)$, apresentadas nas seções anteriores, possibilitarão, nesta seção, o estabelecimento de condições necessárias e suficientes para que $H^1(A)$ seja um K-espaço vetorial nulo.

A determinação de condições para que $H^1(A)$ se anule tem sido objeto de estudo de vários autores. Por exemplo, Happel, em [Ha], mostrou que, para as álgebras hereditárias indecomponíveis $A = KQ$ e para as álgebras indecomponíveis $A = KQ/F^2$, vale que $H^1(A) = \{0\}$ se, e somente se, Q é uma árvore. Farkas, Green e Marcos, em [FGM], mostraram a mesma equivalência para as álgebras $A = KQ/I$, onde $I \subseteq F^2$ é um ideal monomial. Os resultados de Happel, mencionados acima, podem ser obtidos como conseqüência do último corolário desta seção.

Com o objetivo, pois, de caracterizar as álgebras $A = KQ/I$ tais que $H^1(A) = \{0\}$, consideremos as seguintes condições:

(*) Toda derivação F^2 - linear é interna;

(**) Para toda $\partial \in h(Q, I)$, que não é F^2 - linear em KQ, existe uma aplicação $\lambda \in \mathcal{Z}^1(Q, I, K)$ tal que $\partial(\alpha) \equiv \lambda(\alpha)\alpha (\mathrm{mod}\ F^2)$;

(***) $\overline{\Pi}$ é um grupo finito de ordem prima com $p = \mathrm{car}K$.

Iniciamos a seção com a demonstração do resultado que estabelece condições necessárias e suficientes para que o monomorfismo $\mathfrak{s}$ do Teo. 4.7 seja um isomorfismo.

Corolário 4.9 *O monomorfismo $\mathfrak{s} : Hom(\pi_1(Q, I), K^+) \to H^1(A)$ do Teo. 4.7 é um isomorfismo se, e somente se, as condições (*) e (**) se verificam. Nesse caso, temos que $dim_K H^1(A) = rk(\overline{\Pi}) + r$, onde $r = rk_p(\overline{\Pi})$, se $carK = p \neq 0$, e $r = 0$, se $carK = 0$. Em particular:*

(1) Se A é quase fortemente acíclica, então $\mathfrak{s}$ é um isomorfismo se, e somente se, $l(A) \subseteq d(A)$ e A não possui nenhum somando direto (como álgebra) isomorfo a $K[X]/(X^2)$, quando $carK = 2$.

(2) Se I é um ideal homogêneo de KQ, então $\mathfrak{s}$ é um isomorfismo se, e somente se, a condição (*) se verifica, $l(A) \subseteq d(A)$ e $s(A) = \{0\}$.

Prova. Lembremos, inicialmente, que o subespaço $d(A)$ é levado injetivamente por ε em $\mathrm{Im}\varepsilon$ (Obs. 3.5 (i)).

Suponhamos que $\mathfrak{s}$ seja um isomorfismo. Temos então que $\dim_K H^1(A) = \dim_K Im\mathfrak{s} = \dim_K d(A) - \dim_K ch(Q,K)$ (ver Obs. 4.8 (ii)) é finita. Da seqüência exata do Teo. 3.6 obtemos que $\dim_K d(A) = \dim_K Im\varepsilon + \dim_K \frac{F^2(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)}$. Portanto $\frac{F^2(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)} = \{0\}$ e $d(A) \cong \frac{Nor(A)}{F^2(A)}$. De $\frac{F^2(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)} = \{0\}$ resulta a condição (*) e de $\mathcal{Z}^1(Q,I,K) \cong d(A) \cong \frac{Nor(A)}{F^2(A)}$, a condição (**) (pois $Nor(A) \cong \frac{h(Q,I)}{h_0(Q,I)}$, conforme o Lema 3.1).

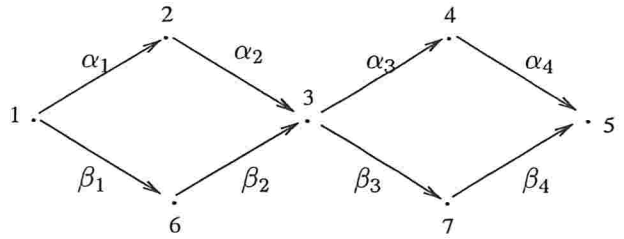
Reciprocamente, suponhamos que sejam válidas as condições (*) e (**). Da condição (*) resulta que $\frac{F^2(A)}{F^2(A)\cap Inn(A)} = \{0\}$. Logo, pelo Teo. 3.6, $H^1(A)$ é um K-espaço vetorial de dimensão finita e $\dim_K H^1(A) = \dim_K Im\varepsilon - \dim_K ch(Q,K)$. Da condição (**) e da identificação $Nor(A) \cong \frac{h(Q,I)}{h_0(Q,I)}$ segue que, para cada derivação $\partial \in Nor(A)$, $\partial \notin F^2(A)$, existe uma derivação $\partial_1 \in d(A)$ tal que $\partial - \partial_1 \in F^2(A)$; portanto, $\mathrm{Im}\varepsilon \cong d(A)$. Logo, $\dim_K H^1(A) = \dim_K d(A) - \dim_K ch(Q,K) = \dim_K Im\mathfrak{s}$ e, em conseqüência, $\mathfrak{s}$ é um isomorfismo.

No caso particular em que A é quase fortemente acíclica, vimos que $\dim_K H^1(A) = \dim_K s(A) + \dim_K l(A) - \dim_K ch(Q,K)$ (Prop. 3.12). Através dessa igualdade e do fato de que $s(A) = \{0\}$, exceto quando $\mathrm{car}K = 2$ e A admite (como álgebra) somando direto isomorfo a $K[X]/(X^2)$ (Obs. 3.10 (ii)), a primeira parte deste corolário garante que $\mathfrak{s}$ é um isomorfismo se, e somente se, $l(A) = d(A)$ e A não admite somando direto isomorfo a $K[X]/(X^2)$ (como álgebra), caso $\mathrm{car}K = 2$.

Para o caso particular em que o ideal I é homogêneo, o resultado segue também da Prop. 3.12 e da primeira parte deste corolário, através de argumentos similares aos utilizados acima. ∎

O exemplo abaixo mostra uma aplicação direta deste resultado.

Exemplo 4.10 Seja $A = KQ/I$, onde Q é o quiver



e $I = \langle\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4,\ \alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4 - \beta_1\beta_2\alpha_3\alpha_4\ \rangle$.

Claramente, A é uma álgebra quase fortemente acíclica. Além disso, $s(A) = \{0\}$ (pois Q não contém laços) e $l(A) = d(A)$ (pois Q não contém flechas múltiplas). Então, pelo corolário anterior, $\mathfrak{s}$ é um isomorfismo e $\dim_K H^1(A) = \mathrm{rk}(\overline{\Pi}) + r$.

Fixemos o vértice 3 como ponto base. De $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 \sim \beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$ segue que $\alpha_3\alpha_4\beta_4^{-1}\beta_3^{-1} \sim \alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\beta_1\beta_2$. Por outro lado, de $\alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4 \sim \beta_1\beta_2\alpha_3\alpha_4$ resulta que $\alpha_3\alpha_4\beta_4^{-1}\beta_3^{-1} \sim \alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4\alpha_4^{-1}\alpha_3^{-1} \sim \beta_3\beta_4\alpha_4^{-1}\alpha_3^{-1}$. Portanto, $\alpha_3\alpha_4\beta_4^{-1}\beta_3^{-1}\alpha_3\alpha_4\beta_4^{-1}\beta_3^{-1} \sim e_3$. Temos, então, que $\pi_1(Q,I) = \mathcal{W}(Q,3)/\sim$ é gerado por $x = [\alpha_3\alpha_4\beta_4^{-1}\beta_3^{-1}]$ e $x^2 = 1$. Logo, $\pi_1(Q,I) \cong \mathbb{Z}_2$, o que implica que $\dim_K H^1(A) = r$, ou seja, $H^1(A) = \{0\}$, se $\mathrm{car}K \neq 2$, e $H^1(A) \cong K$, se $\mathrm{car}K = 2$.

Estamos, agora, em condições de estabelecer as condições para que $H^1(A)$ seja nulo.

Corolário 4.11 *Seja $A = KQ/I$ uma álgebra. Então $H^1(A) = \{0\}$ se, e somente se, as condições (*), (**) e (***) se verificam. Em particular:*

(1) Se A é quase fortemente acíclica, então $H^1(A) = \{0\}$ se, e somente se, $l(A) \subseteq d(A)$ e a condição (***) se verifica.

(2) Se I é um ideal homogêneo de KQ, então $H^1(A) = \{0\}$ se, e somente se, $l(A) \subseteq d(A)$ e as condições (*) e (***) se verificam.

Prova. Observamos inicialmente que $\mathrm{Hom}(\pi_1(Q,I), K^+) = \{0\}$ se, e somente se, a condição (***) é verificada. Portanto, segue daí, via o Cor. 4.9, que $H^1(A) = \{0\}$ se, e somente se, (*), (**) e (***) se verificam.

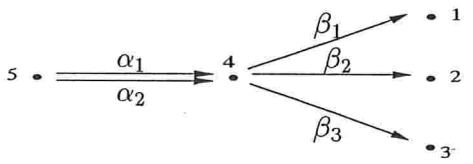
Os resultados relativos aos casos particulares em que A é quase fortemente acíclica (1) ou que I é um ideal homogêneo de KQ (2) decorrem da aplicação da Prop. 4.4 e do Cor. 4.9, desde que mostremos que, nesses casos, a condição (***) implica que $s(A) = \{0\}$.

Suponhamos que A seja quase fortemente acíclica e que (***) esteja verificada. Se $\{0\} \neq s(A) \cong s(Q, I)$, então, pela Obs. 3.10 (ii) , temos que car$K = 2$ e A admite um somando direto (como álgebra) isomorfo a $K[X]/(X^2)$. Portanto, existe um laço isolado α em Q com $\alpha^2 \in I$. Seja $f : Q_1 \to K$ tal que $f(\alpha) = 1$ e $f(\beta) = 0$, nas demais flechas β de Q. Temos que $f \in \mathcal{Z}^1(Q, I, K)$ e $f \notin ch(Q, K)$ (pois, se $f \in ch(Q, K)$, então $f(\alpha) = f(\alpha^2) = 2f(\alpha) = 0$ em K). Logo, $\mathrm{Hom}(\pi_1(Q, I), K^+) \cong \frac{\mathcal{Z}^1(Q,I,K)}{ch(Q,K)} \neq \{0\}$ (Cor. 4.3), contrariando assim a hipótese de que (***) se verifica.

Suponhamos, agora, que I seja um ideal homogêneo de KQ e que (***) se verifique. Desde que I é homogêneo, então a função $g : Q_1 \to K$ dada por $g(\alpha) = 1$, para toda $\alpha \in Q_1$, é tal que $g \in \mathcal{Z}^1(Q, I, K)$. De $\{0\} = \mathrm{Hom}(\pi_1(Q, I), K^+) \cong \frac{\mathcal{Z}^1(Q,I,K)}{ch(Q,K)}$, resulta então que $g \in ch(Q, K)$. Logo, Q não contém laços (pois caso contrário, g se anularia em tais laços) e, por conseqüência, $s(A) = \{0\}$. ∎

O exemplo abaixo mostra uma aplicação direta desse resultado.

Exemplo 4.12 Sejam K um corpo com pelo menos quatro elementos e λ_1, λ_2, λ_3 elementos de K, não nulos e distintos. Seja $A = KQ/I$, onde Q é o quiver



e I é o ideal de KQ gerado por $\{\alpha_1\beta_j + \lambda_j\alpha_2\beta_j,\ j = 1, 2, 3\}$.

Claramente, A é uma álgebra quase fortemente acíclica. Observamos que $Nor(KQ) = l(KQ)$ (pois Q não contém laços e $F^2(KQ) = \{0\}$). Mostremos que $l(A) \subseteq d(A)$. Seja $\partial \in l(KQ)$. Então $\partial(\alpha_1) = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2$, $\partial(\alpha_2) = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2$ e $\partial(\beta_i) = c_i\beta_i$ $(1 \leq i \leq 3)$, com a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 e c_3 em K.

Suponhamos que ∂ seja I-admissível. Portanto:

$\partial(\alpha_1\beta_j + \lambda_j\alpha_2\beta_j) = (a_1 + c_j + \lambda_j b_1)\alpha_1\beta_j + (a_2 + \lambda_j b_2 + \lambda_j c_j)\alpha_2\beta_j \in I(5,j) \subseteq I$, para cada $j \in \{1, 2, 3\}$. Destas igualdades segue que:

$$a_1 + \lambda_j b_1 = \frac{a_2}{\lambda_j} + b_2, \text{ para cada } j = 1, 2, 3. \tag{1}$$

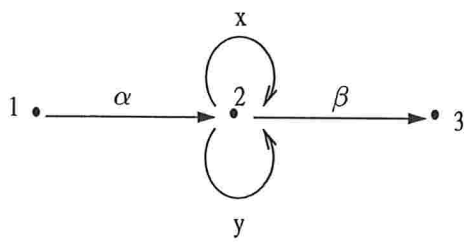
Utilizando o fato de que os λ_j são dois a dois distintos no sistema (1), obtemos facilmente que $a_2 = 0$, $b_1 = 0$ e que $a_1 = b_2$. Logo, $l(A) \subseteq d(A)$.

É fácil ver que $\pi_1(Q, I) = 1$ e, então, o Cor. 4.11(1) implica que $H^1(A) = \{0\}$.

O Cor. 4.9 garante que quando A é uma álgebra quase fortemente acíclica, cujo quiver não contém flechas múltiplas nem laços, então o monomorfismo $\mathfrak{s} : \mathrm{Hom}(\pi_1(Q, I), K^+) \to H^1(A)$ é um isomorfismo. No entanto a recíproca dessa afirmação não é verdadeira, conforme mostra o exemplo acima.

Finalmente, daremos um exemplo mostrando que, no caso geral, a condição (*) é, de fato, necessária no Cor. 4.11.

Exemplo 4.13 Seja $A = KQ/I$, onde Q é o quiver



e $I = \langle\ \alpha\beta,\ \alpha x\beta,\ x^3,\ xy,\ yx^2,\ x^2 - y^3,\ yx - x^2\ \rangle$.

Seja ∂ uma derivação normalizada e I-admissível de KQ. Notando que $x^j \in I$ (para $j \geq 3$), $y^j \in I$ (para $j \geq 4$), $xy^j \in I$ (para $j \geq 1$) e $y^j x \in I$ (para $j \geq 2$) e usando as relações que envolvem apenas x e y, obtemos, por ser ∂ uma derivação I-admissível de KQ, que $\partial(x) = ax^2 + by^2 + z_1$ e $\partial(y) = -bx + cx^2 + dy^2 + z_2$, com a, b, c, $d \in K$ e z_1, $z_2 \in e_2 I e_2$. Por ser ∂ normalizada, resulta também que $\partial(\alpha) = \alpha\gamma$ e $\partial(\beta) = \xi\beta$, com γ, $\xi \in e_2 KQ e_2$. Seja $\partial_{-\gamma}$ a derivação interna de KQ determinada por $-\gamma$. Uma vez que $(\partial - \partial_{-\gamma})(\alpha) = 0$, podemos assumir que $\partial(\alpha) = 0$ (se necessário, substituimos ∂ por $\partial - \partial_{-\gamma}$). Se escrevemos $\xi = b_0 e_2 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 y + b_4 y^2 + z$ (com $b_i \in K$, para

$0 \leq i \leq 4$, e $z \in e_2Ie_2$), a condição $\partial(\alpha\beta) = \alpha\partial(\beta) = \alpha\xi\beta \in I$ implica que $\partial(\beta) = (b_0e_2 + b_1x + z)\beta$, com b_0, $b_1 \in K$ e $z \in e_2Ie_2$. De outro lado, da condição $\partial(\alpha x\beta) = \alpha\partial(x)\beta + \alpha x\partial(\beta) \in I$ segue que $b = 0$. Logo, $\partial(x) \equiv 0(\text{mod } F^2)$, $\partial(y) \equiv 0(\text{mod } F^2)$, $\partial(\alpha) \equiv 0(\text{mod } F^2)$ e $\partial(\beta) \equiv b_0\beta(\text{mod } F^2)$, o que mostra que (**) é trivialmente satisfeita.

Mostraremos, agora, que $\pi_1(Q, I) = 1$ e que, portanto, a condição (***) também é satisfeita. Fixemos o vértice 2 como ponto base para a construção de $\pi_1(Q, I)$. De $yx \sim x^2$ segue que $y \sim x$, e de $x^2 \sim y^3 \sim x^3$ decorre que $x \sim e_2$. Logo, o grupo fundamental $\pi_1(Q, I) = \mathcal{W}(Q,2)/\sim$ é trivial e a condição (***) também é satisfeita.

Seja ∂ a derivação normalizada de KQ dada por $\partial(\alpha) = 0$, $\partial(\beta) = -x\beta$, $\partial(x) = x^2 = \partial(y)$. Pela construção acima, temos que $\partial \in F^2(Q, I)$. Logo, a correspondente derivação ∂ em $Nor(A)$ é tal que $\partial \in F^2(A)$. Como o subespaço $Nor(A) \cap Inn(A)$ é gerado por $\{\partial_{\tau_1}, \partial_{\tau_2}, \partial_a \mid a = a_1\overline{x} + a_2\overline{x^2} + a_3\overline{y} + a_4\overline{y^2}, a_i \in K\ (1 \leq i \leq 4)\}$ resulta então das igualdades $\partial_a(\overline{x}) = a_3\overline{x^2}$, $\partial_a(\overline{y}) = -a_1\overline{x^2}$, $\partial_a(\overline{\alpha}) = -\overline{\alpha}a$ e $\partial_a(\overline{\beta}) = a\overline{\beta}$ que $\partial \notin Nor(A) \cap Inn(A)$. Assim, a condição (*) não está satisfeita e, além disso, $H^1(A) \neq \{0\}$.

CAPÍTULO 5

A Álgebra de Lie $H^1(A)$

Vimos, no capítulo 2, que é possível munir $H^1(A)$ de uma estrutura de álgebra de Lie, através de sua identificação com o quociente $\frac{Nor(A)}{Nor(A)\cap Inn(A)}$. Nosso interesse em estudar $H^1(A)$, sob o ponto de vista de sua estrutura de álgebra de Lie, surgiu da tentativa de aplicar os resultados obtidos em [PS] como forma de obter propriedades interessantes dessa sua outra estrutura. Também atuou como incentivo ao nosso interesse o fato de que essa estrutura não tem sido quase estudada na literatura pertinente.

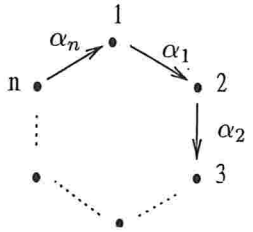
Optamos por buscar condições sobre algumas álgebras $A = KQ/I$ de dimensão finita que garantissem que a álgebra de Lie $H^1(A)$ fosse abeliana. Neste capítulo estudaremos, inicialmente, os seguintes casos: (1) O das álgebras hereditárias $A = KQ$, com $\mid Q_0 \mid \geq 2$; (2) O das álgebras do tipo $A = KQ/I$, onde Q é o quiver dado por um laço; (3) O das álgebras do tipo $A = KQ/I$, onde Q é o quiver dado por um circuito orientado de comprimento maior ou igual a dois; e (4) O das álgebras do tipo $A = KQ/I$, onde Q é o quiver conexo formado por dois laços α e β, impondo que I contenha α^2 e β^2. Resumidamente, obtivemos os seguintes resultados:

Proposição 5.2 *Seja $A = KQ$ uma álgebra hereditária, com $\mid Q_0 \mid \geq 2$. Então a álgebra de Lie $H^1(A)$ é abeliana se, e somente se, $dim_K e_x KQ e_y = 1$ sempre que existir uma flecha $\alpha : x \to y$ em Q, com x, y em Q_0.*

Proposição 5.4 *Seja $A = KQ/I$, onde Q é o quiver*

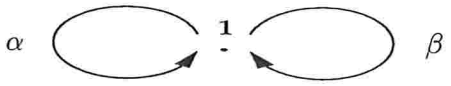
e $I = \langle\ \alpha^n\ \rangle$, *para algum* $n \geq 2$. *Então a álgebra de Lie* $H^1(A)$ *é abeliana se, e somente se,* $carK \neq 2$ *e* $I = \langle\ \alpha^2\ \rangle$.

Proposição 5.8 *Seja* $A = KQ/I$, *onde* Q *é o quiver*



e I *é um ideal admissível de* KQ. *Então a álgebra de Lie* $H^1(A)$ *é abeliana se, e somente se, algum caminho em* Q *de comprimento* $n+1$ *está em* I.

Proposição 5.23 *Seja* $A = KQ/I$, *onde* Q *é o quiver*



e I *é um ideal admissível de* KQ *contendo* α^2 *e* β^2. *A álgebra de Lie* $H^1(A)$ *é abeliana se, e somente se,* $I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ \alpha\beta\ \rangle$ *ou* $I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ \alpha\beta + \lambda\beta\alpha\ \rangle$, *onde* K *um corpo com no mínimo quatro elementos e* $\lambda \in K$, $\lambda \notin \{0,\ 1,\ -1\}$.

Com esses resultados, como dissemos na introdução, pensamos em adotar as álgebras consideradas como "exemplos básicos" para estudar uma estratégia de como construir, a partir delas, novas álgebras A em que pudessemos garantir algo sobre a abelianidade ou não de $H^1(A)$.

Trataremos dessa construção na seção 5.5 onde, a partir de uma K-álgebra

$B = KQ_B/I_B$ de dimensão finita, adotamos um procedimento técnico de construção de um quiver com relações (Q,I), sob certas condições (CQ) e (CI). Com esse procedimento, provamos o seguinte resultado:

Teorema 5.28 *Sejam K um corpo qualquer e a K-álgebra $B = KQ_B/I_B$, onde Q_B é um quiver finito, conexo e I_B é um ideal admissível de KQ_B. Consideremos a K-álgebra $A = KQ/I$, para um par (Q,I) nas condições (CQ) e (CI) vistas anteriormente. Suponhamos que $H^1(B)$ seja uma álgebra de Lie não abeliana. Então a álgebra de Lie $H^1(A)$ é não abeliana.*

Utilizaremos, neste capítulo, algumas notações, identificações e resultados estabelecidos nos capítulos anteriores, que recordaremos a seguir.

As álgebras com as quais trabalharemos são do tipo $A = KQ/I$, onde Q é um quiver finito e conexo e I é um ideal admissível de KQ. Além disso, o conjunto R de geradores de I é formado por relações em Q (isto é, combinações lineares de caminhos em Q, de comprimento maior ou igual a dois, todos com mesma origem e mesmo término) de forma que as relações não monomiais sejam minimais (Def. 1.7 (iii)). Como antes, para todo $x \in Q_0$ e para toda $\alpha \in Q_1$, τ_x e $\overline{\alpha}$ denotam, respectivamente, as classes, módulo I, do caminho trivial e_x em x e da flecha α.

Como vimos na seção 2.4, $H^1(A) \cong \frac{Nor(A)}{Nor(A) \cap Inn(A)}$ é uma álgebra de Lie, cujo colchete $[\ ,\ ]$ é definido por $[\partial_1 + Nor(A) \cap Inn(A), \partial_2 + Nor(A) \cap Inn(A)] = [\partial_1, \partial_2] + Nor(A) \cap Inn(A)$ $= (\partial_1 \circ \partial_2 - \partial_2 \circ \partial_1) + Nor(A) \cap Inn(A)$, para ∂_1, $\partial_2 \in Nor(A)$. Assim, $H^1(A)$ é uma álgebra de Lie abeliana se, e somente se, $[\partial_1, \partial_2] = \partial_1 \circ \partial_2 - \partial_2 \circ \partial_1 \in Nor(A) \cap Inn(A)$, para quaisquer ∂_1, $\partial_2 \in Nor(A)$.

Lembramos que o subespaço $Nor(A) \cap Inn(A) = \{\partial_a \mid a \in \bigoplus_{x \in Q_0} \tau_x A \tau_x\}$ (conforme Obs. 2.8), ou seja, é gerado pelo conjunto das derivações internas determinadas pelas classes, módulo I, dos passeios fechados em Q. Lembramos, ainda, que as derivações de $Nor(A)$ são determinadas pelas derivações normalizadas I-admissíveis de KQ, módulo $h_0(Q,I)$. Além disso, como já foi feito nos capítulos anteriores, utilizaremos a mesma notação para uma derivação normalizada e I-admissível de KQ e a correspondente derivação em $Nor(A)$ determinada por ela.

5.1 As álgebra hereditárias

As álgebra hereditárias aqui consideradas são as álgebras de caminhos $A = KQ$, onde K é um corpo qualquer, Q é um quiver finito (com $\mid Q_0 \mid \geq 2$), conexo e que não contém circuitos orientados. Estamos interessados em verificar que condições devem ser impostas sobre o quiver Q para que $H^1(A)$ seja uma álgebra de Lie abeliana.

Nesse caso, temos que $Nor(KQ) \cap Inn(KQ) = \{\partial_a \mid a = \sum_{x \in Q_0} \lambda_x e_x\}$, isto é, coincide com o K-subespaço de $Nor(KQ)$ gerado pelas derivações internas ∂_{e_x} determinadas pelos caminhos triviais e_x, com $x \in Q_0$ (pois Q não contém circuitos orientados). Decorre imediatamente desse fato que toda derivação normalizada e interna de $A = KQ$ é diagonal.

Lema 5.1 *Seja $A = KQ$ uma álgebra hereditária, com $\mid Q_0 \mid \geq 2$. Suponhamos que exista uma flecha $\alpha : x \to y$ em Q e que $dim_K e_x KQ e_y \geq 2$. Então a álgebra de Lie $H^1(A)$ não é abeliana.*

Prova. De fato, das hipóteses de que $\dim_K e_x KQ e_y \geq 2$ e de que Q não contém circuitos orientados resulta que existe em Q um caminho $\gamma = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n$, de x para y, com $n \geq 1$, onde as flechas α_i's são todas distintas, e $\alpha_i \neq \alpha$, para todo $1 \leq i \leq n$.

Seja $\partial_1 \in Nor(KQ)$ tal que $\partial_1(\alpha) = \alpha$ e $\partial_1(\beta) = 0$, para as demais flechas β de Q. Afirmamos que a derivação ∂_1 não é interna. Suponhamos, por absurdo, que $\partial_1 \in Inn(KQ)$. Então existe $a = \sum_{x \in Q_0} \lambda_x e_x \in KQ$, com $\lambda_x \in K$, tal que $\partial_1 = \partial_a$. Logo, de $0 = \partial_1(\gamma) = \partial_a(\gamma) = (\lambda_x - \lambda_y)\gamma$, resulta que $\lambda_x = \lambda_y$, contrariando o fato de que $\alpha = \partial_1(\alpha) = \partial_a(\alpha)$, pois $\partial_a(\alpha) = (\lambda_x - \lambda_y)\alpha = 0$.

Seja $\partial_2 \in Nor(KQ)$ a derivação definida por $\partial_2(\alpha) = \gamma$ e $\partial_2(\beta) = 0$, para toda flecha $\beta \neq \alpha$. ∂_2 também não é uma derivação interna, pois não é diagonal. Como $[\partial_1,\partial_2](\alpha) = \partial_1(\gamma) - \partial_2(\alpha) = -\gamma$ e $[\partial_1,\partial_2](\beta) = 0$, para as demais flechas β de Q, temos que $[\partial_1,\partial_2] = -\partial_2 \notin Inn(KQ)$, o que mostra que a álgebra de Lie $H^1(A) = H^1(KQ)$ não é abeliana. ∎

Decorre do lema acima que se Q contém flechas múltiplas ou caminhos de comprimento maior ou igual a dois paralelos a flechas, então a álgebra de Lie $H^1(A)$ não é abeliana.

Proposição 5.2 *Seja $A = KQ$ uma álgebra hereditária, com $\mid Q_0 \mid \geq 2$. Então a álgebra de Lie $H^1(A)$ é abeliana se, e somente se, $dim_K e_x KQ e_y = 1$ sempre que existir uma flecha $\alpha : x \to y$, com $x, y \in Q_0$.*

Prova. O Lema 5.1 garante a condição necessária.

Para a demonstração da recíproca, suponhamos que o conjunto de flechas de Q seja $Q_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$, com $n \geq 1$. Para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, consideremos ∂_i a derivação normalizada de KQ dada por $\partial_i(\alpha_i) = \alpha_i$ e $\partial_i(\alpha_j) = 0$, se $j \neq i$. De $\dim_K e_{o(\alpha_i)} KQ e_{t(\alpha_i)} = 1$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, e de $Nor(KQ) \cong \prod_{i=1}^{n} e_{o(\alpha_i)} KQ e_{t(\alpha_i)}$ (Prop. 2.3), segue que o K-espaço vetorial $Nor(KQ)$ é gerado pelo conjunto $\{\partial_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$. Mostremos, pois, que a álgebra de Lie $Nor(KQ)$ é abeliana, o que implica trivialmente que $H^1(A)$ é uma álgebra de Lie abeliana. A abelianidade de $Nor(KQ)$ decorre imediatamente de que $[\partial_i, \partial_j](\alpha_k) = 0$, para quaisquer $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. ∎

5.2 A álgebra do laço

Nesta seção consideramos a álgebra $A = KQ/I$, onde K é um corpo qualquer, Q é o quiver formado por um laço α

Figura 5.1: A álgebra do laço

e I é um ideal admissível de KQ.

Estamos interessados em estabelecer condições necessárias e suficientes sobre o ideal I para que $H^1(A)$ seja uma álgebra de Lie abeliana. Para isso, iniciamos fixando certas notações e fazendo algumas observações que serão úteis para o que segue.

Desde que I é um ideal admissível de KQ, então $I = \langle\ \alpha^n\ \rangle$, para algum $n \geq 2$. Tal fato é conseqüência de que o anel KQ é isomorfo ao anel $K[X]$, que é um domínio de

ideais principais, e de que F^2 é isomorfo ao ideal (X^2) de $K[X]$.

Para cada $i \geq 0$, denotamos por ∂_i a derivação normalizada de KQ que leva α em α^i, convencionando que $\alpha^0 = e_1$. Por indução, verifica-se facilmente que, para quaisquer $i, j \geq 0$ e para todo $k \geq 1$, são válidas as igualdades: $\partial_i(\alpha^k) = k\alpha^{i+k-1}$ e $[\partial_i,\partial_j](\alpha^k) = k(j-i)\,\alpha^{i+j+k-2}$. Como conseqüência, temos que: (a) ∂_0 é I-admissível se, e somente se, $\mathrm{car}K \mid n$; (b) Para cada $i \geq 1$, ∂_i é I-admissível. Além disso, $\partial_m \in h_0(Q,I)$, para todo $m \geq n$.

As considerações acima e o fato de que se $i \neq j$, então $\partial_i \not\equiv \partial_j (\mathrm{mod}\ h_0(Q,I))$ $(i, j \leq n-1)$, permitem explicitar o espaço vetorial $Nor(A)$ da seguinte forma:

(i) Se $\mathrm{car}K \mid n$, então $Nor(A) \cong K[X]/(X^n)$ (como K-espaço vetorial), pois as derivações $\partial_0, \partial_1, \ldots, \partial_{n-1}$ formam uma K-base de $Nor(A)$;

(ii) Se $\mathrm{car}K \nmid n$, então o conjunto $\{\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_{n-1}\} \subseteq Nor(A)$ é uma K-base de $Nor(A)$.

Observamos, ainda, que $H^1(A) \cong Nor(A)$, pois $Inn(A) = \{0\}$.

Lema 5.3 *Seja $A = KQ/I$, onde Q é o quiver dado por um laço α da Figura 5.1 e $I = \langle\ \alpha^n\ \rangle$, para algum $n \geq 2$. Se $n = 2$ e $carK = 2$, ou se $n \geq 3$, então a álgebra de Lie $H^1(A)$ não é abeliana.*

Prova. Para o caso $n \geq 3$, basta escolher as derivações ∂_1 e ∂_2 e verificar que $[\partial_1,\partial_2](\overline{\alpha}) = \overline{\alpha^2} \neq 0$ em A.

Se $I = \langle\ \alpha^2\ \rangle$ e $\mathrm{car}K = 2$, então a afirmação decorre do fato de que $[\partial_0,\partial_1](\overline{\alpha}) = \tau_1 \neq 0$ em A. ∎

Proposição 5.4 *Seja $A = KQ/I$, onde Q é o quiver*

e $I = \langle\ \alpha^n\ \rangle$, para algum $n \geq 2$. Então a álgebra de Lie $H^1(A)$ é abeliana se, e somente se, $carK \neq 2$ e $I = \langle\ \alpha^2\ \rangle$.

Prova. Se $H^1(A)$ é uma álgebra de Lie abeliana, então, pelo Lema 5.3, é imediato que car$K \neq 2$ e que $I = \langle\ \alpha^2\ \rangle$.

Para mostrar a recíproca, basta observar que se car$K \neq 2$ e I $= \langle\ \alpha^2\ \rangle$, então $\dim_K H^1(A) = 1$ e, portanto, $H^1(A)$ é uma álgebra de Lie abeliana. ∎

5.3 A álgebra do circuito

Esta seção tem como objetivo o estabelecimento de condições necessárias e suficientes sobre o ideal admissível I da álgebra de caminhos KQ, onde K é um corpo qualquer e Q é o circuito orientado de comprimento $n \geq 2$, para que a álgebra de Lie $H^1(KQ/I)$ seja abeliana. Consideremos, pois, a álgebra $A = KQ/I$, onde Q é o circuito orientado de comprimento $n \geq 2$ com a seguinte enumeração dos vértices e das flechas:

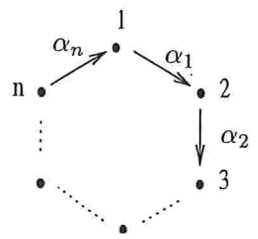


Figura 5.2: A álgebra do circuito

e I é um ideal admissível de KQ.

Iniciamos o nosso estudo através da determinação dos possíveis geradores de I, que sabemos ser em número finito, pois I é admissível.

Afirmação: *O ideal I é monomial* (isto é, I é gerado por relações monomiais em Q).

Com efeito, seja R um conjunto finito de geradores de I. Suponhamos que exista em R uma relação ρ minimal em Q da forma $\rho = a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \ldots + a_r\gamma_r$ $(r \geq 2)$, onde os γ_i's são caminhos em Q tais que $\ell(\gamma_i) \geq 2$, de mesma origem e mesmo término, e os a_i's $\in K$, não nulos, para todo $1 \leq i \leq r$. Renumerando os índices, se necessário, podemos supor que $2 \leq \ell(\gamma_1) < \ell(\gamma_2) < \ldots < \ell(\gamma_r)$ e reescrever ρ da forma $\rho = a_1\gamma_1(1 + b_2\delta_2 + \ldots + b_r\delta_r)$, com $b_j \in K$, $b_j \neq 0$, e δ_j um caminho de comprimento maior ou igual a um em Q $(2 \leq j \leq r)$.

De $\overline{\rho} = 0$ em A e de $\overline{b_2\delta_2 + \ldots b_r\delta_r} \in J = F/I = \mathrm{rad}(A)$, segue que $\overline{1 + b_2\delta_2 + \ldots b_r\delta_r}$ é invertível em A e que, portanto, $a_1\overline{\gamma_1} = 0$ em A. Logo, $\gamma_1 \in I$ (pois $a_1 \neq 0$), o que contradiz a minimalidade de ρ. Portanto, toda relação ρ geradora de I é monomial.

Observação 5.5 Resulta, pois, da afirmação acima, da definição de derivação e do fato de Q ser um circuito que toda derivação normalizada de KQ é I-admissível. Assim, $Nor(A)$ é gerado pelas derivações determinadas por aquelas de $Nor(KQ)$, cujas imagens não estão contidas em I.

Adotamos as seguintes convenções ao longo desta seção: para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, denotamos por γ_i o caminho fechado em Q, de comprimento mínimo, com origem no vértice i. Por exemplo, temos que $\gamma_1 = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n$. Desde que I é admissível, então existe $m \geq 1$ tal que $\gamma_i^m \in I$, para $1 \leq i \leq n$.

Lema 5.6 *Seja $A = KQ/I$, onde Q é o circuito orientado da Figura 5.2 e I é um ideal admissível de KQ. Se todo caminho em Q de comprimento $n+1$ está fora de I, então a álgebra de Lie $H^1(A)$ não é abeliana.*

Prova. Com a enumeração dos vértices e das flechas adotada no quiver Q da Figura 5.2, suponhamos que $\gamma_i\alpha_i = \alpha_i\gamma_{i+1} \notin$ I, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Consideremos ∂_1 a derivação normalizada de KQ definida por $\partial_1(\alpha_1) = \alpha_1$ e $\partial_1(\alpha_j) = 0$, para $j \neq 1$. Segue da Obs. 5.5 que ∂_1 é I-admissível. Afirmamos que a correspondente $\partial_1 \in Nor(A)$ não é uma derivação interna de A. De fato, se $\partial_1 \in Inn(A)$, então $\partial_1 = \partial_a$, para algum $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\tau_i + b \in A$, com $\lambda_i \in K$ $(1 \leq i \leq n)$ e $b \in \bigoplus_{i=1}^{n} \tau_i J^n \tau_i \subseteq J^n$. Desde que, para cada j $(1 \leq j \leq n)$, $\partial_a(\overline{\alpha_j}) = (\lambda_j - \lambda_{j+1})\overline{\alpha_j} + b_j$, com $b_j \in J^{n+1}$ (para $j = n$, $\lambda_{j+1} = \lambda_1$), então $\partial_a(\overline{\alpha_j}) = 0$ em A, para $2 \leq j \leq n$, o que implica que $\lambda_1 = \lambda_2$ e, portanto, $\partial_a(\overline{\alpha_1}) = b_1 \in J^{n+1}$, contrariando, assim, a hipótese de que $\overline{\alpha_1} = \partial_1(\overline{\alpha_1}) = \partial_a(\overline{\alpha_1})$.

Seja ∂_2 a derivação normalizada e I-admissível de KQ (ver Obs. 5.5) dada por $\partial_2(\alpha_1) = \gamma_1\alpha_1$ e $\partial_2(\alpha_j) = 0$, para $j \neq 1$. Mostremos que a correspondente $\partial_2 \in Nor(A)$ não é interna. Suponhamos que ∂_2 seja uma derivação interna de A; então $\partial_2 = \partial_a$, para algum $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\tau_i + \sum_{k=1}^{n} \mu_k\overline{\gamma_k} + b \in A$, com $b \in \bigoplus_{i=1}^{n} \tau_i J^{2n} \tau_i \subseteq J^{2n}$. De $0 = \partial_2(\overline{\alpha_j}) = (\lambda_j - \lambda_{j+1})\overline{\alpha_j} + (\mu_j - \mu_{j+1})\overline{\gamma_j\alpha_j} + z_j$, com $z_j \in J^{2n+1}$ $(2 \leq j \leq n)$, resulta que $\lambda_1 = \lambda_2$

e $\mu_1 = \mu_2$. Segue-se daí que $\partial_a(\overline{\alpha_1}) \in J^{2n+1}$ e que, portanto, $\partial_a(\overline{\alpha_1}) \neq \overline{\gamma_1\alpha_1} = \partial_2(\overline{\alpha_1})$, mostrando assim que $\partial_2 \notin Inn(A)$.

Além disso, em $Nor(A)$ temos que $[\partial_1, \partial_2](\overline{\alpha_1}) = \partial_1(\overline{\gamma_1\alpha_1}) - \partial_2(\overline{\alpha_1}) = \overline{\gamma_1\alpha_1}$ e que $[\partial_1,\partial_2](\overline{\alpha_j}) = 0$, para $j \neq 1$, ou seja, em $Nor(A)$ vale que $[\partial_1, \partial_2] = \partial_2 \notin Nor(A) \cap Inn(A)$. Portanto, $H^1(A)$ não é uma álgebra de Lie abeliana. ∎

Lema 5.7 *Seja $A = KQ/I$, onde Q é o quiver da Figura 5.2 e I é um ideal admissível de KQ. Se algum caminho em Q de comprimento $n+1$ está em I, então toda derivação F^2 - linear de A é interna.*

Prova. Por hipótese, existe um caminho em Q de comprimento $n+1$ que está em I. Renumerando, se necessário, os vértices e as flechas de Q, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\gamma_1\alpha_1 \in I$. Se todos os outros caminhos de Q de comprimento $n+1$ estiverem em I, então $F^2(A) = \{0\}$ e a afirmação segue trivialmente.

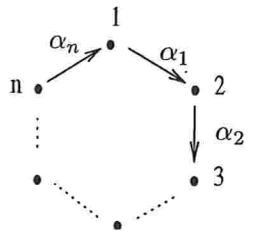
Suponhamos, pois, que exista algum caminho em Q de comprimento $n+1$ que esteja fora de I. Então existe um subconjunto próprio $\{j_1, j_2, \ldots, j_r\}$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $\gamma_{j_i}\alpha_{j_i} \notin I$, para todo $1 \leq i \leq r$, com $1 \leq r \leq n-1$. Reordenando os índices, se necessário, podemos supor que $2 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_r$. Para cada j_i $(1 \leq i \leq r)$ consideremos a derivação normalizada ∂^{j_i} de KQ definida por $\partial^{j_i}(\alpha_{j_i}) = \gamma_{j_i}\alpha_{j_i}$ e $\partial^{j_i}(\beta) = 0$, para as demais flechas β de Q. Tais derivações são I-admissíveis (ver Obs. 5.5) e, por definição, F^2 - lineares; mais ainda, são tais que $\partial^{j_j} \not\equiv \partial^{j_k} (\text{mod } h_0(Q,I))$, para $1 \leq j \neq k \leq r$. Portanto, as correspondentes derivações $\partial^{j_i} \in Nor(A)$ $(1 \leq i \leq r)$ determinadas por elas são F^2 - lineares em A e duas a duas distintas. De outro lado, a hipótese $\gamma_1\alpha_1 \in I$ implica que $\gamma_i^2 \in I$, para $1 \leq i \leq n$, o que garante, pois, que o conjunto $\{\partial^{j_i} \in Nor(A) \mid i = 1, 2, \ldots, r\}$ gera $F^2(A)$. Logo, para obter a afirmação do lema, resta provar que as ∂^{j_i} são derivações internas de A $(1 \leq i \leq r)$.

Para tanto, observamos que, para cada $i = 1, 2, \ldots, r$, a derivação interna $\partial_{\overline{\gamma_{j_i}}}$ determinada por $\overline{\gamma_{j_i}}$ é tal que $\partial_{\overline{\gamma_{j_i}}}(\overline{\alpha_{j_i}}) = \overline{\gamma_{j_i}\alpha_{j_i}}$, $\partial_{\overline{\gamma_{j_i}}}(\overline{\alpha_{j_i-1}}) = -\overline{\gamma_{j_i-1}\alpha_{j_i-1}}$ e $\partial_{\overline{\gamma_{j_i}}}(\overline{\beta}) = 0$, para as demais flechas β de Q.

Como $j_1 = \min\{k \mid \gamma_k\alpha_k \notin I\}$, então $\gamma_{j_1-1}\alpha_{j_1-1} \in I$ e, portanto, $\partial^{j_1} = \partial_{\overline{\gamma_{j_1}}}$ é uma derivação interna de A. Se $r = 1$, a prova está concluída. Se $r > 1$ e $j_2 = j_1 + 1$,

então $\partial_{\overline{\gamma_{j_2}}}(\overline{\alpha_{j_2}}) = \overline{\gamma_{j_2}\alpha_{j_2}}$, $\partial_{\overline{\gamma_{j_2}}}(\overline{\alpha_{j_1}}) = -\overline{\gamma_{j_1}\alpha_{j_1}}$ e $\partial_{\overline{\gamma_{j_2}}}(\overline{\beta}) = 0$, para as demais flechas β de Q. Logo, $\partial^{j_2} = \partial_{\overline{\gamma_{j_2}}} + \partial_{\overline{\gamma_{j_1}}}$, que é uma derivação interna de A. No entanto, se $r > 1$ e $j_2 > j_1 + 1$, temos então que $\gamma_{j_2-1}\alpha_{j_2-1} \in I$ e que ∂^{j_2} coincide com $\partial_{\overline{\gamma_{j_2}}}$, mostrando assim que, também neste caso, ∂^{j_2} é uma derivação interna de A. Repetindo esse mesmo argumento um número finito de vezes, obtemos a afirmação do lema. ∎

Proposição 5.8 *Seja $A = KQ/I$, onde Q é o quiver*



e I é um ideal admissível de KQ. Então a álgebra de Lie $H^1(A)$ é abeliana se, e somente se, algum caminho em Q de comprimento $n+1$ está em I.

Prova. Se $H^1(A)$ é uma álgebra de Lie abeliana, então, pelo Lema 5.6, existe algum caminho de comprimento $n+1$ em I.

Reciprocamente, suponhamos que exista algum caminho de comprimento $n+1$ em I. Então, pelo Lema 5.7, $F^2(A) \subseteq Inn(A)$. Por outro lado, como Q não contém flechas múltiplas, $s(A) = \{0\}$ (pois Q não contém laços) e o ideal I é monomial, podemos aplicar o Cor. 4.5 (3), seguindo então que $\dim_K H^1(A) = \chi(Q) = 1$. Portanto, $H^1(A)$ é uma álgebra de Lie abeliana. ∎

5.4 A álgebra dos dois laços

Em toda esta seção consideramos a álgebra $A = KQ/I$, onde K é um corpo qualquer, Q é o quiver

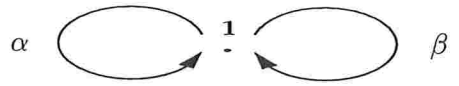


Figura 5.3: A álgebra dos dois laços

e I é um ideal admissível de KQ contendo α^2 e β^2.

Como nas seções anteriores, queremos estudar condições sobre I que garantam que a álgebra de Lie $H^1(A)$ seja abeliana.

O fato de A ser uma K-álgebra de dimensão finita (pois I é admissível), implica que existem $n, m \geq 1$ tais que $n = \min\{k \mid (\alpha\beta)^k \in I\}$ e $m = \min\{t \mid (\beta\alpha)^t \in I\}$. Podemos supor que $n \leq m$. Nessas condições, como α^2 e β^2 estão em I, segue imediatamente que $m = n$ ou $m = n + 1$. Portanto, o ideal I contém α^2, β^2, $(\alpha\beta)^n$ e $(\beta\alpha)^m$, mas não contém $(\alpha\beta)^{n-1}$ e $(\beta\alpha)^{m-1}$, com $m = n$ ou $m = n + 1$.

As considerações sobre m e n, feitas acima, permitem descrever as diferentes possibilidades para o ideal I, com a explicitação de seus geradores. Tal descrição será feita através do estudo dos seguintes casos: (i) $n = m = 1$; (ii) $n = m \geq 2$ e (iii) $1 \leq n < m = n + 1$. No que se refere ao caso (i), temos que $I = F^2$.

Antes, porém, de iniciarmos a explicitação dos geradores de I para os casos (ii) e (iii) acima mencionados, vamos estabelecer alguns resultados sobre os caminhos de Q, módulo I, que serão úteis para tal.

Lema 5.9 *Sejam Q o quiver de laços α e β da Figura 5.3 e I um ideal admissível de KQ, contendo α^2 e β^2. Suponhamos que $(\alpha\beta)^n \in I$ e que $(\alpha\beta)^{n-1} \notin I$, com $n \geq 2$.*

(1) Se $\sum_{j=1}^{n-1} a_j(\alpha\beta)^j \equiv 0(\mathrm{mod} I)$, com $a_j \in K$, então $a_j = 0$, para todo $j = 1, 2, \ldots, n-1$;

(2) Suponhamos que $r = \min\{k \mid (\alpha\beta)^k\alpha \in I\} \geq 2$. Se $\sum_{j=1}^{r-1} a_j(\alpha\beta)^j\alpha \equiv 0(\mathrm{mod} I)$, com $a_j \in K$, então $a_j = 0$, para todo $j = 1, 2, \ldots, r-1$.

Prova. (1) Suponhamos que $n \geq 2$ e que $\sum_{j=1}^{n-1} a_j(\alpha\beta)^j \equiv 0(\mathrm{mod} I)$. Se $n = 2$, então a afirmação segue trivialmente.

Se $n > 2$, então $\sum_{j=1}^{n-1} a_j(\alpha\beta)^j(\alpha\beta)^{n-2} = \sum_{j=1}^{n-1} a_j(\alpha\beta)^{j+n-2} \equiv 0(\mathrm{mod} I)$, o que implica imediatamente que $a_1 = 0$, uma vez que $(\alpha\beta)^{j+n-2} \in I$, para $2 \leq j \leq n-2$. Repetindo o mesmo argumento $n-1$ vezes, obtemos o resultado desejado.

A verificação da parte (2) é feita de forma análoga. ∎

Observação 5.10 Resultados similares a (1) e (2) do Lema 5.9 são também válidos para os caminhos $(\beta\alpha)^j$ e $(\beta\alpha)^j\beta$, respectivamente.

Nosso próximo objetivo, considerando os casos mencionados anteriormente, é explicitar as possibilidades para o ideal I e, através desta explicitação, mostrar que I é um ideal homogêneo de KQ. Iniciamos com as possibilidades de (ii) (isto é, $n = m \geq 2$).

Lema 5.11 *Seja $A = KQ/I$, onde Q é o quiver de laços α e β da Figura 5.3 e I é um ideal admissível de KQ contendo α^2 e β^2. Seja $n \geq 2$ tal que $(\alpha\beta)^n \in I$, $(\beta\alpha)^n \in I$, $(\alpha\beta)^{n-1} \notin I$ e $(\beta\alpha)^{n-1} \notin I$. Então as seguintes afirmações são válidas:*

(1) Se $(\alpha\beta)^{n-1}\alpha \in I$ e $(\beta\alpha)^{n-1}\beta \in I$, então ou $I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ (\alpha\beta)^{n-1}\alpha,\ (\beta\alpha)^{n-1}\beta\ \rangle$ ou $I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ (\alpha\beta)^{n-1} + \lambda(\beta\alpha)^{n-1}\ \rangle$, com $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$;

(2) Se $(\alpha\beta)^{n-1}\alpha \in I$ e $(\beta\alpha)^{n-1}\beta \notin I$, então $I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ (\alpha\beta)^{n-1}\alpha\ \rangle$ (analogamente, se $(\alpha\beta)^{n-1}\alpha \notin I$ e $(\beta\alpha)^{n-1}\beta \in I$, então $I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ (\beta\alpha)^{n-1}\beta\ \rangle$);

(3) Se $(\alpha\beta)^{n-1}\alpha \notin I$ e $(\beta\alpha)^{n-1}\beta \notin I$, então ou $I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ (\alpha\beta)^n,\ (\beta\alpha)^n\ \rangle$ ou $I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ (\alpha\beta)^{n-1}\alpha + \lambda(\beta\alpha)^{n-1}\beta\ \rangle$, com $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$.

Prova. (1) Suponhamos que $(\alpha\beta)^{n-1}\alpha \in I$ e $(\beta\alpha)^{n-1}\beta \in I$, com $n \geq 2$. Então o ideal $\langle\ \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^{n-1}\alpha, (\beta\alpha)^{n-1}\beta\ \rangle \subseteq I$. Seja $\rho \in I \subseteq F^2$, $\rho \neq 0$. Então ρ, como elemento de $F^2 \subseteq KQ$, pode ser escrito da seguinte forma:

$$\rho = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(\alpha\beta)^i + \sum_{j=1}^{n-1} b_j(\beta\alpha)^j + \sum_{k=1}^{n-2} c_k(\alpha\beta)^k\alpha + \sum_{l=1}^{n-2} d_l(\beta\alpha)^l\beta + y,$$

com a_i, b_j, c_k, $d_l \in K$ e $y \in \langle\ \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^{n-1}\alpha, (\beta\alpha)^{n-1}\beta\ \rangle \subseteq I$. Temos, portanto, que:

$$\rho_1 = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(\alpha\beta)^i + \sum_{j=1}^{n-1} b_j(\beta\alpha)^j + \sum_{k=1}^{n-2} c_k(\alpha\beta)^k\alpha + \sum_{l=1}^{n-2} d_l(\beta\alpha)^l\beta \equiv 0(\mathrm{mod} I).$$

Logo, vale que $\rho_1\alpha \equiv 0(\mathrm{mod} I)$ e segue-se daí que:

$$\rho_2 = \sum_{i=1}^{n-2} a_i(\alpha\beta)^i\alpha + \sum_{l=1}^{n-2} d_l(\beta\alpha)^{l+1} \equiv 0(\mathrm{mod}I),$$

pois $(\alpha\beta)^{n-1}\alpha \in I$ e $a_{n-1}(\alpha\beta)^{n-1}\alpha + \sum_{j=1}^{n-1} b_j(\beta\alpha)^j\alpha + \sum_{k=1}^{n-2} c_k(\alpha\beta)^k\alpha^2 \equiv 0(\mathrm{mod}I)$. De $\rho_2 \equiv 0(\mathrm{mod}I)$ resulta que $\beta\rho_2 \equiv 0(\mathrm{mod}I)$ e, portanto, que $\sum_{i=1}^{n-2} a_i(\beta\alpha)^{i+1} \equiv 0(\mathrm{mod}I)$. Pela aplicação do análogo ao Lema 5.9 (1) (ver Obs. 5.10), obtemos que $a_i = 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n-2$ e, em conseqüência, que $\rho_2 = \sum_{l=1}^{n-2} d_l(\beta\alpha)^{l+1} \equiv 0(\mathrm{mod}I)$. Pela Obs. 5.10 concluímos que $d_l = 0$, para $l = 1, 2, \ldots, n-2$. Assim,

$$\rho_1 = a_{n-1}(\alpha\beta)^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} b_j(\beta\alpha)^j + \sum_{k=1}^{n-2} c_k(\alpha\beta)^k\alpha \equiv 0(\mathrm{mod}I).$$

Utilizando argumentos análogos aos de acima para $\rho_1\beta \equiv 0(\mathrm{mod}I)$ e o fato de que $(\beta\alpha)^{n-1}\beta \in I$, obtemos que:

$$\rho_3 = \sum_{j=1}^{n-2} b_j(\beta\alpha)^j\beta + \sum_{k=1}^{n-2} c_k(\alpha\beta)^{k+1} \equiv 0(\mathrm{mod}I) \text{ e, portanto,}$$

$$\alpha\rho_3 = \sum_{j=1}^{n-2} b_j(\alpha\beta)^{j+1} + \sum_{k=1}^{n-2} c_k\alpha(\alpha\beta)^{k+1} \equiv 0(\mathrm{mod}I).$$

A aplicação do Lema 5.9 (1) a $\alpha\rho_3 \equiv 0(\mathrm{mod}I)$ e a $\rho_3 \equiv 0(\mathrm{mod}I)$ leva-nos a concluir que $b_j = 0$ e $c_k = 0$, para $j, k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$. Logo, todo elemento $\rho \in I$ é da forma $\rho = a(\alpha\beta)^{n-1} + b(\beta\alpha)^{n-1} + y$, com a, $b \in K$ e $y \in \langle\ \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^{n-1}\alpha, (\beta\alpha)^{n-1}\beta\ \rangle \subseteq I$. Portanto, de $(\alpha\beta)^{n-1}$ e $(\beta\alpha)^{n-1} \notin I$, segue que ou $I = \langle\ \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^{n-1}\alpha, (\beta\alpha)^{n-1}\beta\ \rangle$ ou $I = \langle\ \alpha^2, \beta^2, a(\alpha\beta)^{n-1} + b(\beta\alpha)^{n-1}\ \rangle$, com a e b, não nulos, em K. Nesse segundo caso, é possível reescrever I como $\langle\ \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^{n-1} + \lambda(\beta\alpha)^{n-1}\ \rangle$, para algum $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$, o que conclui a demonstração de (1).

(2) Seja $n \geq 2$ e suponhamos que $(\alpha\beta)^{n-1} \notin I$, $(\alpha\beta)^{n-1}\alpha \in I$ e $(\beta\alpha)^{n-1}\beta \notin I$. Seja $0 \neq \rho$ um elemento qualquer tal que $\rho \in I \subseteq F^2$. Podemos, então, escrever que:

$$\rho = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(\alpha\beta)^i + \sum_{j=1}^{n-1} b_j(\beta\alpha)^j + \sum_{k=1}^{n-2} c_k(\alpha\beta)^k\alpha + \sum_{l=1}^{n-1} d_l(\beta\alpha)^l\beta + y,$$

com a_i, b_j, c_k, d_l em K e $y \in \langle\ \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^{n-1}\alpha\ \rangle \subseteq I$. Considerando o elemento $\rho_1 = \rho - y \equiv 0(\mathrm{mod}I)$ e multiplicando-o à direita e/ou à esquerda, alternadamente por

α e β, obtemos, através das hipóteses, do Lema 5.9 e da Obs. 5.10, que todos os a_i, b_j, c_k e d_l são nulos. Portanto, $\rho \in \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ (\alpha\beta)^{n-1}\alpha\ \rangle$, o que mostra que $I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ (\alpha\beta)^{n-1}\alpha\ \rangle$.

(3) Seja $n \geq 2$ e suponhamos que $(\alpha\beta)^n \in I$, $(\beta\alpha)^n \in I$, mas que $(\alpha\beta)^{n-1}\alpha$ e $(\beta\alpha)^{n-1}\beta$ não estejam em I. Seja $0 \neq \rho \in I \subseteq F^2$ qualquer e escrevamos:

$$\rho = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(\alpha\beta)^i + \sum_{j=1}^{n-1} b_j(\beta\alpha)^j + \sum_{k=1}^{n-1} c_k(\alpha\beta)^k\alpha + \sum_{l=1}^{n-1} d_l(\beta\alpha)^l\beta + y,$$

com a_i, b_j, c_k, d_l em K e $y \in \langle\ \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^n, (\beta\alpha)^n\ \rangle \subseteq I$. Através de argumentos análogos aos utilizados nos ítens (1) e (2), concluímos também que $a_i = b_j = c_k = d_l = 0$, para $i, j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ e para $k, l \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$. Portanto, $\rho = c(\alpha\beta)^{n-1}\alpha + d(\beta\alpha)^{n-1}\beta + y$, com c e d em K e $y \in \langle\ \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^n, (\beta\alpha)^n\ \rangle \subseteq I$. Logo, ou $I = \langle\ \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^n, (\beta\alpha)^n\ \rangle$ ou $I = \langle\ \alpha^2, \beta^2, c(\alpha\beta)^{n-1}\alpha + d(\beta\alpha)^{n-1}\beta\ \rangle$, com c e d, ambos não nulos, em K. Reescrevendo I de maneira conveniente nesse segundo caso, obtemos o resultado desejado. ∎

O lema a seguir trata do caso (iii) mencionado anteriormente (isto é, $1 \leq n < m$).

Lema 5.12 *Seja $A = KQ/I$, onde Q é o quiver de laços α e β da Figura 5.3 e I é um ideal admissível de KQ, contendo α^2 e β^2. Seja $n \geq 1$ tal que $(\alpha\beta)^n \in I$, $(\alpha\beta)^{n-1} \notin I$ e $(\beta\alpha)^n \notin I$. Então o ideal I é gerado pelas relações α^2, β^2 e $(\alpha\beta)^n$.*

Prova. Suponhamos, pois, que $(\alpha\beta)^n \in I$, $(\alpha\beta)^{n-1} \notin I$ e $(\beta\alpha)^n \notin I$. Se $n = 1$, então é claro que $I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ \alpha\beta\ \rangle$. Suponhamos que $n \geq 2$. Da hipóteses impostas acima, resulta que $(\alpha\beta)^{n-1}\alpha \notin I$, mas que $(\beta\alpha)^n\beta \in I$ e, portanto, que $(\beta\alpha)^{n+1} \in I$. Seja $0 \neq \rho \in I \subseteq F^2$. Podemos escrever então que:

$$\rho = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(\alpha\beta)^i + \sum_{j=1}^{n} b_j(\beta\alpha)^j + \sum_{k=1}^{n-1} c_k(\alpha\beta)^k\alpha + \sum_{l=1}^{n-1} d_l(\beta\alpha)^l\beta + y,$$

com a_i, b_j, c_k, d_l em K e y no ideal $\langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ (\alpha\beta)^n\ \rangle \subseteq I$. Repetindo os argumentos utilizados na prova do Lema 5.11 (1) sobre produtos de ρ_1 por α e β escolhidos convenientemente, onde $\rho_1 = \sum_{i=1}^{n-1} a_i(\alpha\beta)^i + \sum_{j=1}^{n} b_j(\beta\alpha)^j + \sum_{k=1}^{n-1} c_k(\alpha\beta)^k\alpha + \sum_{l=1}^{n-1} d_l(\beta\alpha)^l\beta$, obtemos igualmente que todos os escalares são nulos. Assim, $\rho \in \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ (\alpha\beta)^n\ \rangle$ e, portanto, $I = \langle\ \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^n\ \rangle$. ∎

As observações iniciais e os Lemas 5.11 e 5.12 propiciam apresentar a seguinte proposição, que caracteriza os ideais admissíveis da álgebra de caminhos do quiver de dois laços α e β, contendo α^2 e β^2.

Proposição 5.13 *Sejam Q o quiver de dois laços α e β da Figura 5.3 e I um ideal admissível de KQ, contendo α^2 e β^2. Então I é um dos seguintes ideais:*

(1) $I = F^2 = \langle\ \alpha^2, \beta^2, \alpha\beta, \beta\alpha\ \rangle$;

(2) $I = \langle\ \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^{n-1}\alpha, (\beta\alpha)^{n-1}\beta\ \rangle$, *para algum* $n \geq 2$;

(3) $I = \langle\ \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^{n-1} + \lambda(\beta\alpha)^{n-1}\ \rangle$, *para algum* $n \geq 2$, *com* $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$;

(4) $I = \langle\ \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^{n-1}\alpha\ \rangle$, *para algum* $n \geq 2$;

(5) $I = \langle\ \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^{n}, (\beta\alpha)^{n}\ \rangle$, *para algum* $n \geq 2$;

(6) $I = \langle\ \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^{n-1}\alpha + \lambda(\beta\alpha)^{n-1}\beta\ \rangle$, *para algum* $n \geq 2$, *com* $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$;

(7) $I = \langle\ \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^{n}\ \rangle$, *para algum* $n \geq 1$.

Em conseqüência, I é um ideal homogêneo de KQ.

Prova. De acordo com o observado acima, a afirmação é conseqüência dos comentários iniciais desta seção e dos Lemas 5.11 e 5.12. ∎

Notamos, também, que $Nor(A) \cap Inn(A) = \{\partial_a \mid a \in J\}$, pois $\partial_{\tau_1} = 0$; dessa forma, temos que $\partial_a(\overline{\alpha})$ e $\partial_a(\overline{\beta})$ são elementos de J^2.

Agora, que já conhecemos as diferentes possibilidades para o ideal I, estamos em condições de determinar em quais casos a álgebra de Lie $H^1(A)$ é abeliana. Apresentaremos, primeiramente, os casos nos quais $H^1(A)$ não é abeliana como álgebra de Lie, exibindo derivações normalizadas não internas convenientes, cujo colchete resulte numa derivação não interna de A. Estaremos, no entanto, fazendo tal apresentação numa ordem diferente da lista que aparece na Prop. 5.13, de forma a agrupar os casos em que podem ser usadas derivações particulares em comum.

Antes, no entanto, visando facilitar a verificação de que certas derivações são I-admissíveis, explicitamos algumas "fórmulas" de cálculo das mesmas sobre caminhos de Q, nas Obs. 5.14, 5.15 e 5.16 que seguem. A validade de tais "fórmulas" decorre diretamente da definição de derivação e do processo de indução.

Observação 5.14 (1) Seja ∂ a derivação normalizada de KQ tal que $\partial(\alpha) = \alpha$ e $\partial(\beta) = 0$. Então $\partial(\alpha^2) = 2\alpha^2$ e, para todo $j \geq 1$, são válidas as seguintes igualdades:

(i) $\partial((\alpha\beta)^j) = j(\alpha\beta)^j$ e $\partial((\beta\alpha)^j) = j(\beta\alpha)^j$;

(ii) $\partial((\alpha\beta)^j\alpha) = (j+1)\ (\alpha\beta)^j\alpha$ e $\partial((\beta\alpha)^j\beta) = j(\beta\alpha)^j\beta$.

Dessas igualdades segue facilmente que ∂ é I-admissível em qualquer das possibilidades listadas na Prop. 5.13, exceto a de número (6). Além disso, vale o análogo, com as devidas adaptações, para a derivação normalizada de KQ que leva α em 0 e β em β.

(2) Seja ∂ a derivação normalizada de KQ dada por $\partial(\alpha) = \alpha$ e $\partial(\beta) = \beta$. Então $\partial(\alpha^2) = 2\alpha^2$, $\partial(\beta^2) = 2\beta^2$ e, para todo $j \geq 1$, as seguintes igualdades se verificam:

(i) $\partial((\alpha\beta)^j\alpha) = (2j + 1)(\alpha\beta)^j\alpha$ e

(ii) $\partial((\beta\alpha)^j\beta) = (2j + 1)(\beta\alpha)^j\beta$.

Observação 5.15 Seja ∂ a derivação normalizada de KQ definida por $\partial(\alpha) = \alpha\beta\alpha$ e $\partial(\beta) = 0$. Então $\partial(\alpha^2) = \alpha^2\beta\alpha + \alpha\beta\alpha^2$ e, para todo $j \geq 1$, vale que:

(i) $\partial((\alpha\beta)^j) = j(\alpha\beta)^{j+1}$ e $\partial((\beta\alpha)^j) = j(\beta\alpha)^{j+1}$;

(ii) $\partial((\alpha\beta)^j\alpha) = (j+1)\ (\alpha\beta)^{j+1}\alpha$ e $\partial((\beta\alpha)^j\beta) = j(\beta\alpha)^{j+1}\beta$.

Observação 5.16 Seja $\lambda \in K$, não nulo. Consideremos a derivação normalizada ∂ de KQ dada por $\partial(\alpha) = \lambda e_1$ e $\partial(\beta) = e_1$. Então $\partial(\alpha^2) = 2\lambda\alpha$, $\partial(\beta^2) = 2\beta$ e, para todo $j \geq 1$, as seguintes igualdades se verificam:

(i) $\partial((\alpha\beta)^j\alpha) = \lambda\big((\alpha\beta)^j + (\beta\alpha)^j + \sum_{k=0}^{j-2}(\alpha\beta)^k\alpha\beta^2\alpha(\beta\alpha)^{j-k-2}\big) + \sum_{k=0}^{j-1}(\alpha\beta)^k\alpha^2(\beta\alpha)^{j-k-1}$;

(ii) $\partial((\beta\alpha)^j\beta) = (\alpha\beta)^j + (\beta\alpha)^j + \sum_{k=0}^{j-2}(\beta\alpha)^k\beta\alpha^2\beta(\alpha\beta)^{j-k-2} + \lambda\big(\sum_{k=0}^{j-1}(\beta\alpha)^k\beta^2(\alpha\beta)^{j-k-1}\big)$.

Conforme mencionamos anteriormente, iniciamos o nosso estudo pelas possibilidades para o ideal I em que $H^1(A)$ não é uma álgebra de Lie abeliana. Dentre essas (conforme a lista da Prop. 5.13), analisamos os casos (2) e (4) com $n = 2$ e o caso (3) para $n = 2$ e $\lambda = -1$ através do seguinte lema:

Lema 5.17 *Seja $A = KQ/I$, onde Q é o quiver de laços α e β (Figura 5.3) e I é um dos seguintes ideais: ou $I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2\ \alpha\beta\alpha\ \rangle$ ou $I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ \alpha\beta\alpha,\ \beta\alpha\beta\ \rangle$ ou $I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ \alpha\beta - \beta\alpha\ \rangle$. Então a álgebra de Lie $H^1(A)$ não é abeliana.*

Prova. Consideremos as derivações normalizadas ∂_1 e ∂_2 de KQ definidas por $\partial_1(\alpha) = 0$, $\partial_1(\beta) = \beta$, $\partial_2(\alpha) = \alpha\beta$ e $\partial_2(\beta) = 0$. As I-admissibilidades de ∂_1 e ∂_2 seguem facilmente da definição de derivação, em qualquer dos casos; além disso, $\partial_1 \not\equiv \partial_2 (\text{mod } h_0(Q,I))$. Mostremos que as correspondentes derivações ∂_1 e ∂_2 em $Nor(A)$ determinadas por elas não são internas.

A derivação $\partial_1 \in Nor(A)$ não pode ser interna, pois $0 \neq \partial_1(\overline{\beta}) = \overline{\beta} \in J$ e, pelo observado anteriormente, $\partial_a(\overline{\beta}) \in J^2$, para qualquer derivação interna de A. A verificação de que ∂_2 não é uma derivação interna depende de cada ideal I considerado. Quando $I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ \alpha\beta - \beta\alpha\ \rangle$, a afirmação segue trivialmente do fato de que $Nor(A) \cap Inn(A) = \{0\}$. Para as outras possibilidades, denotando por $I_1 = I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ \alpha\beta\alpha\ \rangle$, por $I_2 = I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ \alpha\beta\alpha,\ \beta\alpha\beta\ \rangle$ e as correspondentes álgebras $A = KQ/I$ por A_1 e A_2, temos que $Nor(A_1) \cap Inn(A_1) = \{\partial_a \mid a = a_1\overline{\alpha} + a_2\overline{\beta} + a_3\overline{\alpha\beta}$, com $a_1,\ a_2,\ a_3 \in K\}$ (pois $J^4 = \{0\}$ e $\partial_{\overline{\alpha\beta}} = -\partial_{\overline{\beta\alpha}}$ e $\partial_{\overline{\beta\alpha\beta}}$ é nula) e $Nor(A_2) \cap Inn(A_2) = \{\partial_a \mid a = a_1\overline{\alpha} + a_2\overline{\beta}$, com $a_1,\ a_2 \in K\}$ (pois $J^3 = \{0\}$ e $\partial_{\overline{\alpha\beta}}$ e $\partial_{\overline{\beta\alpha}}$ são nulas). A condição $\partial_a(\overline{\beta}) = 0$ implica, no primeiro caso, que $a_1 = 0 = a_3$ e, no segundo caso, que $a_1 = 0$. Portanto, para ambos, temos que $\partial_a(\overline{\alpha}) = a_2(\overline{\beta\alpha} - \overline{\alpha\beta})$, o que mostra que ∂_2 não é uma derivação interna (pois $\partial_2(\overline{\alpha}) = \overline{\alpha\beta}$).

De $[\partial_1,\ \partial_2](\overline{\alpha}) = \partial_1(\overline{\alpha\beta}) - \partial_2(0) = \overline{\alpha\beta}$ e $[\partial_1,\ \partial_2](\overline{\beta}) = \partial_1(0) - \partial_2(\overline{\beta}) = 0$, segue que $[\partial_1,\ \partial_2] = \partial_2 \notin Nor(A) \cap Inn(A)$ e, portanto, que a álgebra de Lie $H^1(A)$ não é abeliana.

∎

Analisemos, agora, o caso (1) e a parte correspondente a $n = 2$, car$K \neq 2$ e $\lambda = 1$ do caso (3) (conforme a lista da Prop. 5.13).

Lema 5.18 *Seja $A = KQ/I$, onde Q é o quiver de laços α e β da Figura 5.3. Suponhamos que ou o ideal $I = F^2 = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ \alpha\beta,\ \beta\alpha\ \rangle$ ou $I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ \alpha\beta + \beta\alpha\ \rangle$, com car$K \neq 2$. Então a álgebra de Lie $H^1(A)$ não é abeliana.*

Prova. Consideremos as derivações normalizadas ∂_1 e ∂_2 de KQ definidas por $\partial_1(\alpha) = \alpha$, $\partial_1(\beta) = 0$, $\partial_2(\alpha) = \beta$ e $\partial_2(\beta) = 0$. Claramente, essas derivações são I-admissíveis e

$\partial_1 \not\equiv \partial_2 (\text{mod } h_0(Q,I))$. As derivações normalizadas ∂_1 e ∂_2, quando vistas como derivações de A, não são internas, pois, em qualquer das possibilidades para o ideal I, as derivações internas de determinadas por $a \in J$ são tais que $\partial_a(\overline{\alpha}) \in J^2$ e $\partial_1(\overline{\alpha})$, $\partial_2(\overline{\alpha}) \notin J^2$.

Logo, a álgebra de Lie $H^1(A)$ não é abeliana, pois em $Nor(A)$ temos que $[\partial_1, \partial_2] = -\partial_2 \notin Nor(A) \cap Inn(A)$. ∎

O próximo lema mostra que $H^1(A)$ também é uma álgebra de Lie não abeliana se o ideal I é um dos listados em (2), (3) e (4) (todos eles com $n \geq 3$), (5) e em (7) (esse último com $n \geq 2$).

Lema 5.19 *Seja $A = KQ/I$, onde Q é o quiver de laços α e β da Figura 5.3. Suponhamos que I seja um dos seguintes ideais:*

(a) $I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ (\alpha\beta)^{n-1}\alpha,\ (\beta\alpha)^{n-1}\beta\ \rangle$, para algum $n \geq 3$;

(b) $I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ (\alpha\beta)^{n-1} + \lambda(\beta\alpha)^{n-1}\ \rangle$, para algum $n \geq 3$, com $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$;

(c) $I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ (\alpha\beta)^{n-1}\alpha\ \rangle$, para algum $n \geq 3$;

(d) $I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ (\alpha\beta)^{n},\ (\beta\alpha)^{n}\ \rangle$, para algum $n \geq 2$;

(e) $I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ (\alpha\beta)^{n}\ \rangle$, para algum $n \geq 2$.

Então $H^1(A)$ não é uma álgebra de Lie abeliana.

Prova. Sejam ∂_1 e ∂_2 as derivações normalizadas de KQ definidas por $\partial_1(\alpha) = \alpha$, $\partial_1(\beta) = 0$, $\partial_2(\alpha) = \alpha\beta\alpha$ e $\partial_2(\beta) = 0$. As Obs. 5.14 e 5.15 garantem a I-admissibilidade de ∂_1 e de ∂_2, em qualquer dos casos considerados.

Desde que $\partial_1 \not\equiv \partial_2 (\text{mod } h_0(Q,I))$, mostremos então que as correspondentes derivações normalizadas ∂_1 e ∂_2 em A, determinadas por elas, não são internas.

Retomando, mais uma vez, que $Nor(A) \cap Inn(A) = \{\partial_a \mid a \in J\}$ e escrevendo $a = a_1\overline{\alpha} + a_2\overline{\beta} + a_3\overline{\alpha\beta} + a_4\overline{\beta\alpha} + y$, com $a_i \in K$ $(1 \leq i \leq 4)$ e $y \in J^3$, temos que a condição $\partial_a(\overline{\beta}) = 0$ implica que $a_1 = 0$ e que $a_4 = a_3$. Portanto, $\partial_a(\overline{\alpha}) = a_2(\overline{\beta\alpha} - \overline{\alpha\beta}) + y\overline{\alpha} - \overline{\alpha}y$ (observe que $y\overline{\alpha} - \overline{\alpha}y \in J^4$). Logo, em qualquer das possibilidades consideradas para I, $\partial_i \notin Nor(A) \cap Inn(A)$, pois $\partial_i(\overline{\beta}) = 0$ e $\partial_i(\overline{\alpha}) \neq \partial_a(\overline{\alpha})$, para toda derivação interna de A $(i = 1, 2)$.

Vejamos, agora, o colchete $[\partial_1,\partial_2]$ em $Nor(A)$. De $[\partial_1, \partial_2](\overline{\alpha}) = \partial_1(\overline{\alpha\beta\alpha}) - \partial_2(\overline{\alpha}) =$

$\overline{\alpha\beta\alpha}$ e de $[\partial_1, \partial_2](\overline{\beta}) = 0$ resulta que $[\partial_1, \partial_2] = \partial_2 \notin Inn(A)$ e que, portanto, a álgebra de Lie $H^1(A)$ não é abeliana. ∎

O lema a seguir trata do caso (6) listado na Prop. 5.13.

Lema 5.20 *Seja $A = KQ/I$, onde Q é o quiver de laços α e β da Figura 5.3 e $I = \langle\ \alpha^2, \beta^2, (\alpha\beta)^{n-1}\alpha + \lambda(\beta\alpha)^{n-1}\beta\ \rangle$, com $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$ e $n \geq 2$. Então a álgebra de Lie $H^1(A)$ não é abeliana.*

Prova. Consideremos ∂_1 a derivação normalizada de KQ dada por $\partial_1(\alpha) = \alpha$ e $\partial_1(\beta) = \beta$. As igualdades da Obs. 5.14 (2) garantem que ∂_1 é I-admissível.

Para a escolha de uma outra derivação em $Nor(A)$, vamos levar em conta a característica do corpo K. Se car$K = 2$, então consideramos a derivação $\partial_2 \in Nor(KQ)$ tal que $\partial_2(\alpha) = \lambda e_1$ e $\partial_2(\beta) = e_1$; se, no entanto, car$K \neq 2$, então escolhemos para $\partial_2 \in Nor(KQ)$ a derivação tal que $\partial_2(\alpha) = \alpha\beta\alpha$ e $\partial_2(\beta) = 0$. No primeiro caso, a I-admissibilidade de ∂_2 é garantida pelas igualdades na Obs. 5.16 e, no segundo caso, pelas da Obs. 5.15. Notamos, ainda, que $\partial_1 \not\equiv \partial_2 (\text{mod } h_0(Q,I))$, independente da escolha de ∂_2. Claramente, a derivação ∂_1, entendida como uma derivação de A, não é uma derivação interna, pois, por exemplo, $\partial_1(\overline{\alpha}) = \overline{\alpha} \notin J^2$ e $\partial_a(\overline{\alpha}) \in J^2$, para cada derivação interna ∂_a de A. A derivação ∂_2 normalizada em A, associada a aquela escolhida no caso em que car$K = 2$, é claramente uma derivação não interna de A. Se a car$K \neq 2$, um argumento análogo ao usado na prova do Lema 5.19 mostra que a ∂_2 associada em $Nor(A)$ também não é interna.

Portanto, em $Nor(A)$ temos que $[\partial_1,\partial_2] = \partial_2 \notin Inn(A)$, se car$K = 2$, e $[\partial_1,\partial_2] = 2\partial_2 \notin Inn(A)$, se car$K \neq 2$, o que mostra que $H^1(A)$ não é uma álgebra de Lie abeliana ∎

Notamos, agora, que dentre as possibilidades do ideal I, listadas na Prop. 5.13, as únicas que ainda não foram analisadas são aquelas em que ou $I = \langle\ \alpha^2, \beta^2, \alpha\beta + \lambda\beta\alpha\ \rangle$, com λ em K, $\lambda \notin \{0, 1, -1\}$, ou $I = \langle\ \alpha^2, \beta^2, \alpha\beta\ \rangle$. Esses são exatamente os únicos casos em que a álgebra de Lie $H^1(A)$ é abeliana, como veremos no que segue.

Lema 5.21 *Seja K um corpo com pelo menos quatro elementos. Consideremos $A = KQ/I$, onde Q é o quiver de dois laços α e β da Figura 5.3 e $I = \langle\ \alpha^2, \beta^2, \alpha\beta + \lambda\beta\alpha\ \rangle$, com $\lambda \in K$, $\lambda \notin \{0, 1, -1\}$. Então a álgebra de Lie $H^1(A)$ é abeliana.*

Prova. Observamos, primeiramente, que A, como K-espaço vetorial, tem como uma K-base o conjunto $\{\tau_1, \overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\beta\alpha}\}$. Além disso, é imediato ver que $Nor(A) \cap Inn(A)$ é gerado pelas derivações internas $\partial_{\overline{\alpha}}$ e $\partial_{\overline{\beta}}$, determinadas por $\overline{\alpha}$ e $\overline{\beta}$, respectivamente.

Para determinar $Nor(A)$, vejamos, pois, quais derivações normalizadas de KQ são I-admissíveis. Seja ∂ uma derivação normalizada de KQ. Então, temos que:

$$\partial(\alpha) = a_1e_1 + a_2\alpha + a_3\beta + a_4\alpha\beta + a_5\beta\alpha + y_1 \text{ e}$$

$$\partial(\beta) = b_1e_1 + b_2\alpha + b_3\beta + b_4\alpha\beta + b_5\beta\alpha + y_2,$$

com a_i, b_j em K $(1 \leq i, j \leq 5)$ e $y_1, y_2 \in F^3 \subseteq I$. Então ∂ é I-admissível se, e somente se, estão satisfeitas as condições (i) $2a_1\alpha + a_3(\beta\alpha + \alpha\beta) \in I$; (ii) $2b_1\beta + b_2(\alpha\beta + \beta\alpha) \in$ I e (iii) $(\lambda + 1)(a_1\beta + b_1\alpha) \in I$.

De (iii) e da hipótese de que $\lambda \neq -1$ segue que $a_1 = b_1 = 0$. Por outro lado, afirmamos que $\alpha\beta + \beta\alpha \notin I$ pois, caso contrário, teríamos que $(1 - \lambda)\beta\alpha \in I$, o que contradiz as hipóteses de que $\lambda \neq 1$ e $\beta\alpha \notin I$. Portanto, das condições (i) e (ii) e de $\alpha\beta + \beta\alpha \notin I$ resulta que $b_3 = 0 = a_2$. Reescrevendo convenientemente $\partial(\alpha)$ e $\partial(\beta)$ obtemos, então, que $\partial \in h(Q, I)$ se, e somente se,

$$\partial(\alpha) = \lambda_1\alpha + \lambda_2(\alpha\beta + \lambda\beta\alpha) + \lambda_3\beta\alpha + y_1 \text{ e}$$

$$\partial(\beta) = \mu_1\beta + \mu_2(\alpha\beta + \lambda\beta\alpha) + \mu_3\beta\alpha + y_2,$$

com λ_i, $\mu_j \in K$ $(1 \leq i, j \leq 3)$ e y_1 e y_2 em $F^3 \subseteq I$. Logo, o K-espaço vetorial $h(Q, I)/h_0(Q,I)$ é gerado pelas classes, módulo $h_0(Q,I)$, das seguintes derivações:

$$\begin{cases} \partial_1(\alpha) = \alpha \\ \partial_1(\beta) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_2(\alpha) = 0 \\ \partial_2(\beta) = \beta \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_3(\alpha) = \beta\alpha \\ \partial_3(\beta) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_4(\alpha) = 0 \\ \partial_4(\beta) = \beta\alpha \end{cases}$$

Como tais classes são duas a duas disjuntas, então $Nor(A)$ é gerado pelas correspondentes ∂_1, ∂_2, ∂_3 e ∂_4 em $Nor(A)$. Porém, em $Nor(A)$, temos que $\partial_3 = (1+\lambda)^{-1}\partial_{\overline{\beta}} \in Nor(A) \cap Inn(A)$, $\partial_4 = -(1+\lambda)^{-1}\partial_{\overline{\alpha}} \in Nor(A) \cap Inn(A)$ e que $\partial_1 - \partial_2 \notin Nor(A) \cap Inn(A)$. Portanto, as classes de ∂_1 e ∂_2, módulo $Nor(A) \cap Inn(A)$, determinam uma K-base de $\frac{Nor(A)}{Nor(A) \cap Inn(A)} \cong H^1(A)$ (isto é, $\dim_K H^1(A) = 2$). A abelianidade da álgebra de Lie $H^1(A)$ decorre, então, de que $[\partial_1, \partial_2] = 0$ em $Nor(A)$. ∎

Lema 5.22 *Seja $A = KQ/I$, onde Q é o quiver de laços α e β da Figura 5.3 e $I = \langle\, \alpha^2, \beta^2, \alpha\beta \,\rangle$. Então a álgebra de Lie $H^1(A)$ é abeliana.*

Prova. Iniciamos observando que o conjunto $\{\tau_1, \overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\beta\alpha}\}$ é uma base do K-espaço vetorial A e que o subespaço $Nor(A) \cap Inn(A)$ é gerado pelas derivações internas $\partial_{\overline{\alpha}}$ e $\partial_{\overline{\beta}}$.

Encontremos, agora, as derivações normalizadas de A através das derivações normalizadas de KQ que são I-admissíveis. Seja ∂ uma derivação normalizada de KQ. Podemos escrever então que:

$$\partial(\alpha) = a_1e_1 + a_2\alpha + a_3\beta + a_4\beta\alpha + y_1 \text{ e } \partial(\beta) = b_1e_1 + b_2\alpha + b_3\beta + b_4\beta\alpha + y_2,$$

com a_i, b_j em K $(1 \leq i, j \leq 4)$ e y_1, y_2 em I. Logo, ∂ é I-admissível se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas : (i) $2a_1\alpha + a_3\beta\alpha \in I$, (ii) $2b_1\beta + b_2\beta\alpha \in I$ e (iii) $a_1\beta + b_1\alpha \in I$.

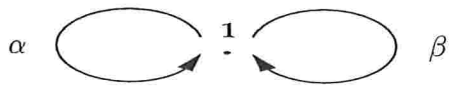
Segue de (iii) que $a_1 = b_1 = 0$; em conseqüência, de (i), (ii) e de $\beta\alpha \notin I$, resulta também que $a_3 = 0 = b_2$. Reescrevendo $\partial(\alpha)$ e $\partial(\beta)$ de forma conveniente concluímos que $\partial \in h(Q, I)$ se, e somente se, $\partial(\alpha) = \lambda_1\alpha + \lambda_2\beta\alpha + y_1$ e $\partial(\beta) = \mu_1\beta + \mu_2\beta\alpha + y_2$, com λ_i, μ_j em K y_i em I $(i = 1, 2)$. Logo, como no lema anterior, as derivações normalizadas de A obtidas das derivações ∂_1, ∂_2, ∂_3 e ∂_4 em $h(Q, I)$, módulo $h_0(Q,I)$, dadas por

$$\begin{cases} \partial_1(\alpha) = \alpha \\ \partial_1(\beta) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_2(\alpha) = 0 \\ \partial_2(\beta) = \beta \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_3(\alpha) = \beta\alpha \\ \partial_3(\beta) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_4(\alpha) = 0 \\ \partial_4(\beta) = \beta\alpha \end{cases}$$

determinam uma K-base de $Nor(A)$. Mas em $Nor(A)$ temos que $\partial_3 = \partial_{\overline{\beta}} \in Inn(A)$, $\partial_4 = -\partial_{\overline{\alpha}} \in Inn(A)$ e $\partial_1 - \partial_2 \notin Inn(A)$. Assim, $H^1(A)$ é gerado pelo conjunto $\{\partial_1 + Nor(A) \cap Inn(A), \partial_2 + Nor(A) \cap Inn(A)\}$ e, portanto, é uma álgebra de Lie abeliana (pois $[\partial_1, \partial_2] = 0$ em $Nor(A)$). ∎

A proposição abaixo sintetiza os resultados obtidos ao longo desta seção.

Proposição 5.23 *Seja $A = KQ/I$, onde Q é o quiver*



e I é um ideal admissível de KQ contendo α^2 e β^2. A álgebra de Lie $H^1(A)$ é abeliana se, e somente se, $I = \langle\ \alpha^2, \beta^2, \alpha\beta\ \rangle$ ou $I = \langle\ \alpha^2, \beta^2, \alpha\beta + \lambda\beta\alpha\ \rangle$, onde K um corpo com no mínimo quatro elementos e $\lambda \in K$, $\lambda \notin \{0, 1, -1\}$.

Prova. As hipóteses sobre I acarretam que I é um dos ideais da lista na Prop. 5.13. Os lemas 5.17, 5.18, 5.19 e 5.20, por sua vez, garantem que se $H^1(A)$ é uma álgebra de Lie abeliana, então, dentre as possibilidades de I listadas na Prop. 5.13, apenas $I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ \alpha\beta\ \rangle$ ou $I = \langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ \alpha\beta + \lambda\beta\alpha\ \rangle$, com $\lambda \in K \setminus \{0,\ 1,\ -1\}$, permanecem.

A recíproca segue imediatamente dos Lemas 5.21 e 5.22. ∎

5.5 Construindo $H^1(A)$ - Lie não abeliana

Nesta seção mostraremos que dada uma álgebra $B = KQ_B/I_B$ tal que $H^1(B)$ é uma álgebra de Lie não abeliana, podemos construir, a partir de B, inúmeros exemplos de álgebras $A = KQ/I$, cujo $H^1(A)$ é também uma álgebra de Lie não abeliana. A estratégia utilizada é a de construir, a partir do par (Q_B,I_B), um novo quiver com relações (Q,I), por adjunção de novos vértices e/ou novas flechas a Q_B, porém mantendo certo controle sobre essas adjunções e sobre as novas relações de KQ.

Desta forma, os casos estudados nas seções anteriores deste capítulo podem ser vistos como "exemplos básicos" de K-álgebras de dimensão finita, cujo primeiro grupo de cohomologia de Hochschild é uma álgebra de Lie não abeliana, a partir das quais se poderia obter uma gama diversificada de exemplos com a mesma propriedade.

Vejamos, pois, a construção de (Q,I).

Sejam K um corpo e $B = KQ_B/I_B$ uma K-álgebra, onde Q_B é um quiver finito e conexo e $I_B = \langle\ R_B\ \rangle$ é um ideal admissível de KQ_B (R_B denota um conjunto de geradores de I_B fixado).

(CQ) Construção de Q: $Q = (Q_0,Q_1)$ é obtido acrescentando novos vértices (denotados por $\tilde{x}$) e/ou novas flechas (denotadas por $\tilde{\alpha}$) ao quiver $Q_B = (Q_{B,0},\ Q_{B,1})$ de forma que:

(CQ1) $\tilde{\alpha}$ é um laço ou $\tilde{\alpha}$ tem pelo menos um de seus vértices em algum $\tilde{x} \in \tilde{Q}_0 = Q_0 \backslash Q_{B,0}$;

(CQ2) Caminhos fechados de Q contendo alguma flecha $\tilde{\alpha}$ (se existirem) não inter-

ceptam nenhum caminho fechado de Q_B (isto é, não passam por vértices de caminhos fechados de Q_B).

(CI) Construção de I: Construído o quiver Q como em (CQ), seja I o ideal admissível de KQ gerado pelo conjunto $R = R_B \cup R_1$, onde R_1 é finito e seus elementos $\tilde{\rho}_i$ são combinações lineares de caminhos em Q, de comprimento maior ou igual a dois, de mesma origem e mesmo término, contendo apenas flechas $\tilde{\alpha} \in \tilde{Q}_1 = Q_1 \backslash Q_{B,1}$.

Para ilustrar, exibiremos alguns exemplos:

Exemplo 5.24 Sejam K um corpo e o par (Q_B, I_B), onde Q_B é o quiver:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] \arrow[r, shift right, "\alpha_2"'] & 2 \arrow[r, "\alpha_3"] & 3 \end{tikzcd}$$

e $I_B = \{0\}$. Consideremos o par (Q, I), com Q sendo o quiver:

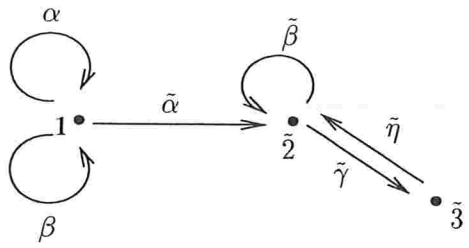
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left, "\alpha_1"] \arrow[r, shift right, "\alpha_2"'] & 2 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[loop above, "\tilde{\alpha}"] & 3 \end{tikzcd}$$

e o ideal I de KQ gerado por $R = \{\tilde{\alpha}^2\}$. Claramente, $F^4 \subseteq I \subseteq F^2$, o que mostra que I é um ideal admissível de KQ. O par (Q, I) respeita as condições (CQ) e (CI) consideradas acima.

Exemplo 5.25 Sejam K um corpo qualquer e o par (Q_B, I_B), onde Q_B é o quiver:

$$\begin{tikzcd} \overset{\alpha}{\circlearrowleft} & 1 \arrow[loop left, "\beta"] \end{tikzcd}$$

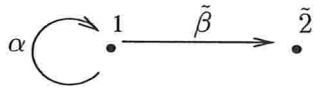
e I_B é o ideal admissível de KQ_B gerado por $R_B = \{\alpha^2, \beta^2, \alpha\beta - \beta\alpha\}$. Seja Q o quiver:



(que satisfaz as condições em (CQ)) e consideremos o ideal I de KQ gerado por $R = R_B \cup \{\tilde{\beta}^2, \tilde{\gamma}\tilde{\eta}, \tilde{\eta}\tilde{\gamma} - \tilde{\eta}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\}$. Desde que $F^6 \subseteq I \subseteq F^2$, então I é um ideal admissível satisfazendo (CI). Logo, o par (Q,I) satisfaz as condições (CQ) e (CI).

Exemplo 5.26 Seja K um corpo qualquer. Consideremos o quiver Q_B:

e o ideal admissível $I_B = \langle\ \alpha^3\ \rangle \subseteq KQ_B$. O par (Q,I), onde Q é o quiver:



e I é o ideal de KQ gerado pelas relações $\alpha^3 = 0$ e $\alpha^2\tilde{\beta} = 0$ satisfaz a condição (CQ), mas não a (CI).

Seja a K-álgebra $B = KQ_B/I_B$ (Q_B é um quiver conexo e finito e I_B é um ideal admissível de KQ_B) e consideremos (Q,I) obtido de (Q_B,I_B) por (CQ) e (CI).

Destacamos que, por construção, cada elemento de I é uma K-combinação linear de expressões da forma $\gamma_1\rho\gamma_2$, com $\rho = \rho_B \in R_B$ ou $\rho = \tilde{\rho} \in R_1$ e γ_1 e γ_2 caminhos em KQ. Além disso, também por construção, temos que um caminho fechado em Q ou é um caminho fechado em Q_B (só contém flechas de Q_B) ou é um caminho fechado que só contém flechas novas (do tipo $\tilde{\alpha}$), cuja origem pode pertencer a $Q_{B,0}$ ou a $\tilde{Q}_0 = Q_0 \backslash Q_{B,0}$.

A seguir, faremos algumas observações sobre o comportamento relativo das derivações normalizadas de $B = KQ_B/I_B$ e de $A = KQ/I$.

Primeiramente, notamos que, via a Prop. 2.3, podemos assumir que $Nor(KQ_B)$ é um K-subespaço de $Nor(KQ)$, ou seja, dada uma derivação normalizada $\partial \in Nor(KQ_B)$, ∂ será entendida como uma derivação normalizada de KQ de tal forma que $\partial(\tilde{\alpha}) = 0$, para toda flecha $\tilde{\alpha}$ de $\tilde{Q}_1 = Q_1 \backslash Q_{B,1}$.

Recordemos que $h(Q_B,I_B)$ denota o K-subespaço de $Nor(KQ_B)$ das derivações normalizadas ∂ tais que $\partial(I_B) \subseteq I_B$. Assim da construção de I, que garante que $I_B \subseteq I$, resulta que $h(Q_B,I_B)$ e $h_0(Q_B,I_B) = \{\partial \in Nor(KQ_B) \mid \mathrm{Im}\partial \subseteq I_B\}$ são subespaços de $h(Q,I)$ e $h_0(Q,I)$, respectivamente. Segue, então, facilmente que é possível obter um K-monomorfismo $\psi : h(Q_B,I_B)/h_0(Q_B,I_B) \to h(Q,I)/h_0(Q,I)$, que é dado por $\psi(\partial + h_0(Q_B,I_B)) = \partial + h_0(Q,I)$, para cada $\partial \in h(Q_B,I_B)$.

Para seguir adiante e relacionar as derivações normalizadas de B com as de A, lembremos do Lema 3.1 que trata do isomorfismo $h(Q_B,I_B)/h_0(Q_B,I_B) \xrightarrow{\overline{f_B}} Nor(B)$, onde $f_B : h(Q_B,I_B) \to Nor(B)$ (ver a prova do lema citado) é tal que $f_B(\partial)(b + I_B) = \partial(b) + I_B$, $b \in KQ_B$. Também no Lema 3.1, a prova de que f é sobrejetiva sugere o isomorfismo inverso $g : Nor(B) \to h(Q_B,I_B)/h_0(Q_B,I_B)$ de $\overline{f}$, do qual trataremos agora de forma suscinta.

Seja $\partial \in Nor(B)$ e, para cada flecha α de Q_B, escolhamos $x_\alpha \in e_{o(\alpha)}KQ_Be_{t(\alpha)}$ tal que $\partial(\alpha + I_B) = x_\alpha + I_B$. Definimos $g_1 : Nor(B) \to h(Q_B,I_B)$ de modo que $g_1(\partial)(\alpha) = x_\alpha$ (é fácil ver que, para todo caminho u de x para y em Q_B, vale que $g_1(\partial)(u) = x_u$, onde x_u é tal que $\partial(u + I_B) = x_u + I_B$ e, portanto, que $g_1(\partial) \in h(Q_B,I_B)$). A g é, então, obtida pela composição de g_1 com o epimorfismo canônico $h(Q_B,I_B) \to h(Q_B,I_B)/h_0(Q_B,I_B)$.

Portanto, através dos isomorfismos g, $\overline{f_A}$ e do K-monomorfismo ψ anterior, obtemos o K-monomorfismo $\overline{\psi} = \overline{f_A} \circ \psi \circ g : Nor(B) \to Nor(A)$ que, a cada $\partial \in Nor(B)$, associa $\tilde{\partial} = \overline{\psi}(\partial)$, tal que $\tilde{\partial}(\tilde{\alpha} + I) = I$, para toda flecha $\tilde{\alpha} \in \tilde{Q}_1$ e, para cada $\alpha \in Q_{B,1}$, $\tilde{\partial}(\alpha + I) = x_\alpha + I$, com $x_\alpha \in e_xKQ_Be_y$ escolhido de forma que $\partial(\alpha + I_B) = x_\alpha + I_B$. Além disso, se u é um caminho de x para y em Q_B, então $\tilde{\partial}(u + I) = x_u + I$, tal que $\partial(u + I_B) = x_u + I_B$, onde x_u é obtido em função dos x_α escolhidos nas imagens de ∂ nas classes das flechas de Q_B, módulo I_B.

Com essas considerações e convenções, podemos tratar de obter alguma relação entre

as derivações internas de B e de A, através do lema que segue.

Lema 5.27 *Sejam as álgebras $B = KQ_B/I_B$ e $A = KQ/I$ sob as hipóteses anteriores e $\overline{\psi} : Nor(B) \to Nor(A)$ o K-monomorfismo definido acima. Se ∂ é uma derivação normalizada de B tal que $\tilde{\partial} = \overline{\psi}(\partial)$ é um derivação interna de A, então ∂ é uma derivação interna de B.*

Prova. Seja $\partial \in Nor(B)$ tal que $\tilde{\partial} = \overline{\psi}(\partial) \in Nor(A) \cap Inn(A)$. Logo, existe $a \in \bigoplus_{x \in Q_0} (e_x + I)A(e_x + I) \subseteq A$ tal que $\tilde{\partial} = \partial_a$. Como já observamos, os caminhos fechados em Q são ou caminhos fechados de Q_B, ou caminhos que contém apenas flechas do tipo $\tilde{\alpha}$ (novas). Assim, podemos escrever que:

$$a = \sum_{x \in Q_0} \lambda_x(e_x + I) + \sum_{u \in C_B} a_u(u + I) + \sum_{\tilde{\gamma} \in C_{BA}} a_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma} + I) + \sum_{\tilde{\varphi} \in C_{AA}} a_{\tilde{\varphi}}(\tilde{\varphi} + I),$$

onde os λ_x, a_u, $a_{\tilde{\gamma}}$, $a_{\tilde{\varphi}}$ são escalares em K, C_B denota o conjunto dos caminhos fechados de Q_B, de comprimento maior ou igual a um; C_{BA} o conjunto dos caminhos fechados de Q, de comprimento maior ou igual a um, com origem em vértices de Q_B, mas contendo apenas flechas de $\tilde{Q}_1$; e C_{AA} denota o conjunto dos caminhos fechados de Q, de comprimento maior ou igual a um, com origem em $\tilde{Q}_0$ e contendo apenas flechas de $\tilde{Q}_1$.

Portanto, temos que $a(\tilde{\alpha} + I) - (\tilde{\alpha} + I)a = I$, para toda $\tilde{\alpha}$ de $\tilde{Q}_1$ e, para toda flecha α de Q_B, $a(\alpha + I) - (\alpha + I)a = x_\alpha + I$, onde $x_\alpha \in e_{o(\alpha)}KQ_Be_{t(\alpha)}$ é tal que $\partial(\alpha + I_B) = x_\alpha + I_B$.

Estudemos, pois, as igualdades acima para as flechas $\tilde{\alpha} \in \tilde{Q}_1$ acrescentadas em algum vértice $x \in Q_{B,0}$ (tais flechas sempre existem, pois Q é construído com preservação de conexidade) e flechas $\alpha \in Q_B$ incidentes nesse vértice.

(i_1) Suponhamos que $\tilde{\alpha} \in \tilde{Q}_1$ seja tal que $o(\tilde{\alpha}) = x \in Q_{B,0}$ e $t(\tilde{\alpha}) = \tilde{y} \in \tilde{Q}_0$. Suponhamos, também, que exista pelo menos um caminho fechado $u \in C_B$, com $u \notin I$ e $o(u) = x$. De $a(\tilde{\alpha} + I) - (\tilde{\alpha} + I)a = I$ obtemos que:

$$(\lambda_x - \lambda_{\tilde{y}})(\tilde{\alpha} + I) + \sum_{\substack{u \in C_B \\ o(u) = o(\tilde{\alpha})}} a_u(u\tilde{\alpha} + I) - \sum_{\substack{\tilde{\varphi} \in C_{AA} \\ o(\tilde{\varphi}) = \tilde{y}}} a_{\tilde{\varphi}}(\tilde{\alpha}\tilde{\varphi} + I) = I$$ (pois, se $\tilde{\gamma} \in C_{BA}$, então $\tilde{\gamma}$ e u não se interceptam), ou seja, obtemos que:

$$(*)\ (\lambda_x - \lambda_{\tilde{y}})\tilde{\alpha} + \sum_{\substack{u \in C_B \\ o(u) = o(\tilde{\alpha})}} a_u u\tilde{\alpha} - \sum_{\substack{\tilde{\varphi} \in C_{AA} \\ o(\tilde{\varphi}) = t(\tilde{\alpha})}} a_{\tilde{\varphi}}\tilde{\alpha}\tilde{\varphi} \in I.$$

Usando a observação feita anteriormente sobre os elementos de I e o fato de que $u \notin I$, de (*) podemos concluir que $a_u = 0$, para todo $u \in C_B$, $u \notin I$, cuja origem é origem de alguma flecha $\tilde{\alpha} \in \tilde{Q}_1$.

De forma análoga, obtemos que $a_u = 0$, para todo $u \in C_B$, $u \notin I$, cuja origem é término de alguma flecha $\tilde{\alpha} \in \tilde{Q}_1$.

Seja C_{BB} o subconjunto de C_B, formado pelos caminhos fechados de Q_B, sobre cujos vértices não incidem flechas do tipo $\tilde{\alpha}$ (flechas novas). Temos, então, por (i_1), que:

$$a = \sum_{x \in Q_0} \lambda_x(e_x + I) + \sum_{u \in C_{BB}} a_u(u + I) + \sum_{\tilde{\gamma} \in C_{BA}} a_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\gamma} + I) + \sum_{\tilde{\varphi} \in C_{AA}} a_{\tilde{\varphi}}(\tilde{\varphi} + I).$$

Vejamos outra possibilidade.

(i_2) Seja $x \in Q_{B,0}$ tal que x é origem de uma flecha α de Q_B e de um caminho fechado $\tilde{u}$. Portanto, $t(\alpha) = y \neq x$ (pois, por (CQ2), α não pode ser um laço).

De $a(\alpha + I) - (\alpha + I)a = x_\alpha + I$, com $x_\alpha \in e_x F_B e_y \subseteq e_x K Q_B e_y$, resulta que ou

(a) $x_\alpha - (\lambda_x - \lambda_y)\alpha - \sum_{\substack{\tilde{\gamma} \in C_{BA} \\ o(\tilde{\gamma}) = o(\alpha)}} a_{\tilde{\gamma}}\tilde{\gamma}\alpha + \sum_{\substack{\tilde{\gamma} \in C_{BA} \\ o(\tilde{\gamma}) = t(\alpha)}} a_{\tilde{\gamma}}\alpha\tilde{\gamma} \in I$, se existem caminhos $\tilde{\gamma} \in C_{BA}$, $\tilde{\gamma} \notin I$, com $o(\tilde{\gamma}) = t(\alpha) = y$, ou

(b) $x_\alpha - (\lambda_x - \lambda_y)\alpha + \sum_{\substack{u \in C_{BB} \\ o(u) = t(\alpha)}} a_u \alpha u - \sum_{\substack{\tilde{\gamma} \in C_{BA} \\ o(\tilde{\gamma}) = o(\alpha)}} a_{\tilde{\gamma}}\tilde{\gamma}\alpha \in$ I, se existem caminhos $u \in C_{BB}$, $u \notin I$, com $o(u) = t(\alpha)$.

Desde que $x_\alpha - (\lambda_x - \lambda_y)\alpha \in e_x K Q_B e_y$ e $\sum_{o(\tilde{\gamma}) = o(\alpha)} a_{\tilde{\gamma}}\tilde{\gamma}\alpha - \sum_{o(\tilde{\gamma}) = t(\alpha)} a_{\tilde{\gamma}}\alpha\tilde{\gamma} \notin I$ (a) ou $\sum_{o(\tilde{\gamma}) = o(\alpha)} a_{\tilde{\gamma}}\tilde{\gamma}\alpha \notin I$ (b) (pela observação sobre as combinações lineares das expressões num elemento de I e de $\tilde{\gamma} \notin I$), então podemos inferir que $a_{\tilde{\gamma}} = 0$, para $\tilde{\gamma} \in C_{BA}$, $\tilde{\gamma} \notin I$, com $o(\tilde{\gamma}) = x \in Q_{B,0}$, tal que x é origem de um caminho fechado $\tilde{u}$ e de uma flecha (não laço) de Q_B.

Vale o análogo se $x \in Q_{B,0}$ é tal que $x = o(\tilde{u})$, para algum caminho fechado $\tilde{u}$, e $x = t(\alpha)$, para alguma flecha α (não laço) de Q_B.

Logo, $a_{\tilde{\gamma}} = 0$, para todo $\tilde{\gamma} \in C_{BA}$, $\tilde{\gamma} \notin I$ e podemos reescrever:

$a = \sum_{x \in Q_0} \lambda_x(e_x + I) + \sum_{\substack{u \in C_{BB} \\ u \notin I}} a_u(u + I) + \sum_{\substack{\tilde{\varphi} \in C_{AA} \\ \tilde{\varphi} \notin I}} a_{\tilde{\varphi}}(\tilde{\varphi} + I)$, onde λ_x, a_u e $a_{\tilde{\varphi}}$ são escalares em K.

Conseqüentemente, para cada flecha α de Q_B, vale que:

$$(**)\ x_\alpha \equiv \Big((\lambda_{o(\alpha)} - \lambda_{t(\alpha)})\alpha + \sum_{\substack{u \in C_{BB} \\ o(u)=o(\alpha) \\ u \notin I}} a_u u\alpha - \sum_{\substack{u \in C_{BB} \\ o(u)=t(\alpha) \\ u \notin I}} a_u \alpha u\Big)(\mathrm{mod} I_B).$$

Seja, pois, $b = \sum_{x \in Q_{B,0}} \lambda_x(e_x + I_B) + \sum_{\substack{u \in C_{BB} \\ u \notin I_B}} a_u(u + I_B) \in \bigoplus_{x \in Q_{B,0}} (e_x + I_B)B(e_x + I_B) \subseteq B$.

Consideremos a derivação interna ∂_b de B, determinda por b. Temos, então, que $\partial_b \in Nor(B) \cap Inn(B)$ e por (**), para cada flecha α de Q_B, vale que $\partial_b(\alpha + I_B) = x_\alpha + I_B = \partial(\alpha + I_B)$; logo, $\partial = \partial_b \in Nor(B) \cap Inn(B)$ e o lema está provado. ∎

O Lema 5.27 nos mostra que as derivações normalizadas de B, que não são internas, são aplicadas por $\overline{\psi}$ em derivações normalizadas de A, também não internas.

Estamos agora em condições de estabelecer o resultado que mostra que é possível construir, a partir de uma dada K-álgebra B em que $H^1(B)$ é uma álgebra de Lie não abeliana, novas K-álgebras A com a mesma propriedade sobre $H^1(A)$.

Antes, porém, vamos convencionar que $[\ ,\ ]_B$ e $[\ ,\ ]_A$ denotam, respectivamente, o colchete de Lie de $H^1(B)$ e $H^1(A)$.

Teorema 5.28 *Sejam K um corpo e a K-álgebra $B = KQ_B/I_B$, onde Q_B é um quiver finito, conexo e I_B é um ideal admissível de KQ_B. Consideremos a álgebra $A = KQ/I$, para um par (Q,I) nas condições (CQ) e (CI) vistas anteriormente. Suponhamos que $H^1(B)$ seja uma álgebra de Lie não abeliana. Então a álgebra de Lie $H^1(A)$ é não abeliana.*

Prova. Sejam (Q,I) um par obtido de (Q_B,I_B) dado, nas condições (CQ) e (CI), e $A = KQ/I$. A hipótese de que $H^1(B)$ é uma álgebra de Lie não abeliana implica que existem ∂_1 e ∂_2 derivações normalizadas (não internas) de B tais que $[\partial_1,\partial_2]_B \in Nor(B)$, mas $[\partial_1,\partial_2]_B \notin Inn(B)$. O Lema 5.27 garante que as correspondentes $\tilde{\partial}_1 = \overline{\psi}(\partial_1)$ e $\tilde{\partial}_2 = \overline{\psi}(\partial_2)$ são derivações normalizadas de A, não internas. Para completar a demonstração do teorema,

resta provar que $[\tilde{\partial}_1,\tilde{\partial}_2]_A \notin Inn(A)$. Pelo Lema 5.27, basta mostrar que $\overline{\psi}([\partial_1,\partial_2]_B) = [\overline{\psi}(\partial_1),\overline{\psi}(\partial_2)]_A$, pois se $[\tilde{\partial}_1,\tilde{\partial}_2]_A = [\overline{\psi}(\partial_1),\overline{\psi}(\partial_2)]_A = \overline{\psi}([\partial_1,\partial_2]_B) \in Inn(A)$, então $[\partial_1,\partial_2]_B \in Inn(B)$, contrariando a hipótese de que $[\partial_1,\partial_2]_B \notin Inn(B)$.

Mostremos, pois, que $\overline{\psi}$ preserva colchete de Lie, para o que é suficiente garantir que $\overline{\psi}(\partial_1 \circ \partial_2) = \overline{\psi}(\partial_1) \circ \overline{\psi}(\partial_2)$, para duas derivações quaisquer ∂_1 e ∂_2 em $Nor(B)$, ou ainda, que $\widetilde{\partial_1 \circ \partial_2}$ e $\tilde{\partial}_1 \circ \tilde{\partial}_2$ coincidem nas classes, módulo I, das flechas de Q. É imediato que, para cada flecha $\tilde{\alpha} \in \tilde{Q}_1$, a igualdade $(\widetilde{\partial_1 \circ \partial_2})(\tilde{\alpha} + I) = I = (\tilde{\partial}_1 \circ \tilde{\partial}_2)(\tilde{\alpha} + I)$ se verifica.

Para cada flecha α de Q_B, fixemos as escolhas x_α, $y_\alpha \in e_{o(\alpha)}KQ_Be_{t(\alpha)}$ tais que $\partial_1(\alpha + I_B) = x_\alpha + I_B$ e $\partial_2(\alpha + I_B) = y_\alpha + I_B$ (recorde-se da contrução de $f_B : Nor(B) \to \mathrm{h}(Q_B,I_B)$). Então $\tilde{\partial}_1(\alpha + I) := x_\alpha + I$ e $\tilde{\partial}_2(\alpha + I) := y_\alpha + I$. Com a escolha fixada dos x_α, para cada α, e do fato de que cada y_α é uma combinação linear de caminhos em Q_B, paralelos a α, obtemos que existe $w_{y_\alpha} \in e_{o(\alpha)}KQ_Be_{t(\alpha)}$ tal que $\partial_1(y_\alpha + I_B) = w_{y_\alpha} + I_B$ (w_{y_α} é uma combinação linear de expressões contendo x_γ's correspondentes às flechas que formam os caminhos da combinação linear y_α). Portanto, $(\partial_1 \circ \partial_2)(\alpha + I_B) = w_{y_\alpha} + I_B$, resultando então, para cada flecha α em Q_B, que $(\widetilde{\partial_1 \circ \partial_2})(\alpha + I) := w_{y_\alpha} + I = \tilde{\partial}_1(y_\alpha + I) := \tilde{\partial}_1(\tilde{\partial}_2(\alpha + I)) = (\tilde{\partial}_1 \circ \tilde{\partial}_2)(\alpha + I)$. Logo, $\overline{\psi}(\partial_1 \circ \partial_2) = \overline{\psi}(\partial_1) \circ \overline{\psi}(\partial_2)$, e portanto $\overline{\psi}([\partial_1,\partial_2]_B) = [\overline{\psi}(\partial_1),\overline{\psi}(\partial_2)]_A$, ou seja, $\overline{\psi}$ é, de fato, um morfismo de álgebras de Lie. ∎

Como última observação, chamamos a atenção do fato de que se $Nor(B)$ é uma álgebra de Lie não abeliana, então $Nor(A)$ é também uma álgebra de Lie não abeliana, pois $\overline{\psi}$ é um K-monomorfismo de álgebras de Lie.

Voltemos aos exemplos considerados no início desta seção, ou seja, Exs. 5.24, 5.25 e 5.26

Exemplo 5.24.1 Seja $B = KQ_B/I_B$, onde Q_B é o quiver do Ex. 5.24. Pelo Lema 5.1, $H^1(B)$ é uma álgebra de Lie não abeliana, pois B é uma álgebra de caminhos (hereditária), cujo quiver Q_B contém flechas múltiplas. Consideremos $A = KQ/I$, onde (Q,I), como no citado exemplo, é obtido de Q_B acrescentando o laço $\tilde{\alpha}$ no vértice 2 e $I = \langle\, \tilde{\alpha}^2 \,\rangle$. Pela Prop. 5.28, $H^1(A)$ é uma álgebra de Lie não abeliana. No entanto, este fato pode ser verificado diretamente se considerarmos ∂_1, $\partial_2 \in \mathrm{End}_K(A)$, definidas por:

$\partial_1(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\overline{e_i}+\sum_{j=1}^{3}a_j\overline{\alpha_j}+a_4\overline{\tilde{\alpha}}+\sum_{k=1}^{2}b_k\overline{\alpha_k\alpha_3}+\sum_{l=1}^{2}c_l\overline{\alpha_l\tilde{\alpha}}+c_3\overline{\tilde{\alpha}\alpha_3})=a_1\overline{\alpha_1}+b_1\overline{\alpha_1\alpha_3}+c_1\overline{\alpha_1\tilde{\alpha}}$ e $\partial_2(\sum_{i=1}^{3}\lambda_i\overline{e_i}+\sum_{j=1}^{3}a_j\overline{\alpha_j}+a_4\overline{\tilde{\alpha}}+\sum_{k=1}^{2}b_k\overline{\alpha_k\alpha_3}+\sum_{l=1}^{2}c_l\overline{\alpha_l\tilde{\alpha}}+c_3\overline{\tilde{\alpha}\alpha_3})=(a_1+a_2)\overline{\alpha_2}+(b_1+b_2)\overline{\alpha_2\alpha_3}+(c_1+c_2)\overline{\alpha_2\tilde{\alpha}}$, com λ_i, a_j, b_k, c_l escalares em K ($1\leq i,\ l\leq 3$, $1\leq j\leq 4$, $1\leq k\leq 2$), onde $\overline{x}$ indica a classe de $x\in KQ$, módulo I. É fácil ver que ∂_1 e ∂_2 são derivações normalizadas não internas de A e tais que $[\partial_1,\partial_2]_A\notin Inn(A)$.

Exemplo 5.25.1 Seja $B=KQ_B/I_B$, onde (Q_B,I_B) é o par tal que Q_B é o quiver de dois laços α e β e $I_B=\langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ \alpha\beta\ -\beta\alpha\ \rangle$. Pelo Lema 5.17, a álgebra de Lie $H^1(B)$ é não abeliana. Como no Ex. 5.25, seja (Q,I) contruído a partir de (Q_B,I_B) pela adjunção de dois novos vértices $\tilde{2}$ e $\tilde{3}$ e das flechas $\tilde{\beta}$ (laço), $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\eta}$ a Q_B e escolhendo-se o ideal $I=\langle\ \alpha^2,\ \beta^2,\ \alpha\beta\ -\beta\alpha,\ \tilde{\beta}^2,\ \tilde{\gamma}\tilde{\eta},\ \tilde{\eta}\tilde{\gamma}\ -\tilde{\eta}\tilde{\beta}\tilde{\gamma}\ \rangle$. A álgebra $A=KQ/I$ é de dimensão finita (I é admissível). Pela Prop. 5.28, $H^1(A)$ é uma álgebra de Lie não abeliana.

Os exemplos que seguem mostram que se construímos, a partir de um par (Q_B,I_B) tal que $H^1(KQ_B/I_B)$ é uma álgebra de Lie não abeliana, um par (Q,I) não satisfazendo alguma das condições (CQ) ou (CI), então a álgebra de Lie $H^1(KQ/I)$ pode ser abeliana ou não abeliana.

Exemplo 5.26.1 Seja o par (Q_B,I_B), onde Q_B é o quiver de um laço α no vértice 1 e $I_B=\langle\ \alpha^3\ \rangle\subseteq KQ_B$. A álgebra $B=KQ_B/I_B$ é tal que $H^1(B)$ é uma álgebra de Lie não abeliana (pelo Lema 5.3). Construído o par (Q,I), como no Ex. 5.26, pela adjunção de um novo vértice $\tilde{2}$ e de uma flecha $\tilde{\beta}:1\to\tilde{2}$ e pela escolha de $I=\langle\ \alpha^3,\ \alpha^2\tilde{\beta}\ \rangle$, vimos, no citado exemplo, que (Q,I) não satisfaz a condição (CI). Seja $A=KQ/I$ (I é admissível, pois $F^3\subseteq I\subseteq F^2$). A álgebra de Lie $H^1(A)$ não é abeliana. Para a verificação disto, basta considerar as derivações ∂_1 e ∂_2 normalizadas de A, dadas por:

$$\partial_1(\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\overline{e_i}+\sum_{i=1}^{2}a_i\overline{\alpha^i}+a_3\overline{\tilde{\beta}}+a_4\overline{\alpha\tilde{\beta}})=a_1\overline{\alpha}+(a_2+a_2)\overline{\alpha^2}+a_4\overline{\alpha\tilde{\beta}}\text{ e}$$

$$\partial_2(\sum_{i=1}^{2}\lambda_i\overline{e_i}+\sum_{i=1}^{2}a_i\overline{\alpha^i}+a_3\overline{\tilde{\beta}}+a_4\overline{\alpha\tilde{\beta}})=a_1\overline{\alpha^2},$$

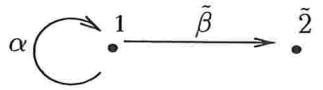
onde λ_i e a_j ($1\leq i\leq 2$, $1\leq j\leq 4$) são escalares em K e $\overline{x}$ denota a classe de x, módulo I.

Verifica-se facilmente que ∂_1 e ∂_2 não são derivações internas de A e que $[\partial_1,\partial_2]_A \notin Inn(A)$.

Exemplo 5.29 Seja K um corpo tal que car$K = 2$. Consideremos o par (Q_B,I_B), onde Q_B é o quiver:

e I_B é o ideal gerado por α^2. A K-álgebra $B = KQ_B/I_B$ é tal que $H^1(B)$ é uma álgebra de Lie não abeliana, conforme foi visto no Lema 5.3.

Seja (Q,I) onde Q é o quiver:



e é I o ideal de KQ gerado por α^2, $\alpha\tilde{\beta}$. O quiver Q satisfaz a condição (CQ), o ideal I, embora admissível, não satisfaz a condição (CI); portanto o par (Q,I) não satisfaz (CQ) e (CI).

Consideremos a K-álgebra de dimensão finita $A = KQ/I$. O conjunto $\{\overline{e_1}, \overline{e_{\tilde{2}}}, \overline{\alpha}, \overline{\tilde{\beta}}\}$ é uma K-base de A. É de verificação imediata que os K-endomorfismos ∂_1 e ∂_2 de A, definidos por :

$$\partial_1(\lambda_1\overline{e_1} + \lambda_2\overline{e_{\tilde{2}}} + a_1\,\overline{\alpha} + a_2\,\overline{\tilde{\beta}}) = a_1\overline{\alpha} \text{ e}$$

$$\partial_2(\lambda_1\overline{e_1} + \lambda_2\overline{e_{\tilde{2}}} + a_1\,\overline{\alpha} + a_2\,\overline{\tilde{\beta}}) = a_2\overline{\tilde{\beta}},$$

onde λ_i, a_i $(1 \leq i \leq 2)$ são escalares em K, formam uma K-base do espaço $Nor(A)$. Além disso, temos que $\partial_2 = \partial_{\tau_1}$ e que $\partial_1 \notin Inn(A)$. Logo, a classe da derivação ∂_1, módulo $Nor(A) \cap Inn(A)$, gera $H^1(A)$ que, sendo unidimensional, é uma álgebra de Lie abeliana.

Referências Bibliográficas

[AP] I. Assem e J.A. de la Peña, *The fundamental group of a triangular algebra*, Comm. Algebra **24**(1), 1996, 187-208.

[ASS] I. Assem, D. Simson e A. Skowroński, *Elements of representation theory of associative algebras*, preprint, 1997

[CE] H. Cartan e S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton University Press, 1956.

[CLS] C. Cibils, F. Larrión e L. Salmerón, *Métodos diagramáticos en teoría de representaciones*, México, UNAM, 1982.

[FGGM] D. Farkas, C. Geiss, E. Green e E. Marcos, *Diagonalizable derivations of finite-dimensional algebras I*, Israel J. Math. **117**, 2000, 157-181.

[FGM] D. Farkas, E. Green e E. Marcos, *Diagonalizable derivations of finite-dimensional algebras II*, Pacific J. Math. **196**(2), 2000, 341-351.

[Ga] P. Gabriel, *Unzerlegbare Darstellugen I*, Manuscripta Math. **6**(1972), 71-103.

[GS] F. Guil-Asensio e M. Saorín, *The group of outer automorphisms and the Picard group of an algebra*, Algebras and Repres. Theory 2, 1999, 313-330.

[Ha] D. Happel, *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras*, Sem. Malliavin, LNM **1404**, Springer Verlag, 1989, 108-126.

[Ho] G. Hochschild, *On the cohomology groups of an associative algebra*, Ann. of Math. **46**, 1946, 56-67.

[JAP] J. A. de la Peña, *On the abelian Galois coverings of an algebra*, J. Algebra **102**, 1986, 129-134.

[JM] A. Jones e H. Merklen, *Representações de álgebras, métodos diagramáticos*, Publicações do IME-USP, SP.

[Ma] W. S. Massey, *Algebraic Topology: an introduction*, 6th edition, Springer Verlag, 1984.

[MP] R. Martínez-Villa e J. A. de la Peña, *The universal cover of a quiver with relations*, J. Pure Appl. Algebra **30**, 1983, 277-292.

[PS] J. A. de la Peña e M. Saorín, *The first Hochschild cohomology group of an algebra*, Manuscripta Math. **104**, 2001, 431-442.

[SM] L. A. B. San Martin, *Álgebra de Lie*, Editora da UNICAMP, 1999.

[Sk] A. Skowroński, *Simply connected algebras and Hochschild cohomologies*, Canadian Math. Soc., Conference Proceedings, vol. 14, 1993, 431-447.

[We] C.A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge University Press, 1997.