Espaços exponencialmente completos

Renato Leme Martin

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE
EM
MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Matemática**
Orientadora: **Prof$^{\underline{a}}$ Dr$^{\underline{a}}$ Ofélia Teresa Alas**

— São Paulo, SP — Fevereiro de 2002 —

ESPAÇOS EXPONENCIALMENTE COMPLETOS

Este exemplar corresponde a versão final da dissertação apresentada por Renato Leme Martin, devidamente corrigida e aprovada pela Comissão Julgadora.

São Paulo, Junho de 2002

Comissão Julgadora

- Prof$^{\underline{a}}$ Dr$^{\underline{a}}$ Ofélia Teresa Alas (Presidente) - IME-USP
- Prof$^{\underline{a}}$ Dr$^{\underline{a}}$ Lúcia Renato Junqueira - IME-USP
- Prof. Dr. Janey Daccach - UPM

Abstract

The main purpose of this dissertation is to present the exponential space of a topological space (also called hyperspace) and a way to get homeomorphisms in the class of compact metric zero-dimensional spaces. Also it determines the spaces homeomorphic to their own exponential space (called exponentially complete spaces). The theory of accumulation spectra is used to classify the spaces and, with some extra hypotheses to ensure the existence of homeomorphisms. Sierpinski's theorem and the fact that the Cantor space is exponentially complete are obtained as corollaries.

Resumo

O objetivo principal desta dissertação é apresentar o espaço exponencial de um espaço topológico (também denominado hiperespaço) e um meio de se obter homeomorfismos na classe dos espaços métricos compactos zero-dimensionais a fim de determinar os espaços homeomorfos ao seu exponencial, os chamados espaços exponencialmente completos. Para tanto é exibida a teoria dos espectros de acumulação para que os espaços sejam classificados e, mediante algumas hipóteses, garantir homeomorfismos. O teorema de Sierpinski e o fato que o espaço de Cantor é exponencialmente completo aparecem como corolários.

Sumário

Introdução

O foco deste trabalho centra-se nos espaços exponenciais: espaços topológicos definidos a partir de outro espaço topológico, em que os pontos deste novo espaço serão os fechados não vazios do espaço de partida. A topologia induzida será a topologia finita ou topologia de Vietoris na qual, cada aberto da nova topologia será definido através de uma quantidade finita de abertos do espaço inicial, sendo formado pelos pontos (fechados na topologia inicial) que estão contidos na união destes abertos e interceptam cada um deles.

A partir daí surge uma questão: existem espaços homeomorfos ao seu próprio exponencial? O título deste trabalho, *Espaços exponencialmente completos*, refere-se a este tipo de espaço.

Um trabalho realizado por Marjanović [4] em 1972 determina todos os espaços que são exponencialmente completos na classe dos espaços métricos compactos zero-dimensionais.

Para se obter os homeomorfismos tem-se como base a teoria dos espectros e ordens de acumulação, na qual o espaço é particionado em vários subconjuntos. A quebra inicia-se separando-se o conjunto dos pontos isolados; em seguida, o conjunto formado pelos pontos tais que toda vizinhança não possui pontos isolados e, desta forma, inicia-se uma construção recursiva. O espaço será classificado conforme seus pontos se distribuem nestes subconjuntos, definindo-se assim o espectro de acumulação do espaço. O homeomorfismo é garantido se dois espaços possuem o mesmo espectro, a mesma quantidade de pontos isolados e o fecho de cada conjunto não vazio da partição (a menos do conjunto de pontos isolados) é homeomorfo ao conjunto de Cantor. Veremos que o próprio conjunto de Cantor é um exemplo de um espaço exponencialmente completo.

Uma teoria análoga foi publicada por Vučemilović [16] em 1974 com respeito a espaços métricos zero-dimensionais enumeráveis. É também desenvolvido, por meio dos espectros, um modo de determinar homeomorfismos. O teorema de Sierpinski, que diz que todo espaço métrico enumerável não vazio zero-dimensional sem pontos isolados é homeomorfo ao conjunto dos racionais, acaba saindo como um corolário. Mais tarde, utilizando estes resultados, Vučemilović em conjunto com Marjanović, publicam um artigo [5] no qual são exibidos dois espaços não homeomorfos que possuem quadrados homeomorfos na classe dos espaços métricos zero-dimensionais enumeráveis.

Para garantir os homeomorfismos na classe dos espaços métricos compactos zero-dimensionais, é utilizada uma teoria desenvolvida por R. Vaught na qual define-se um tipo de relação entre espaços que implicará no homeomorfismo, ou seja, se dois espaços satisfazem a relação, são homeomorfos. Stevo Todorcevic em *Topics in Topology* [13] obtém os homeomorfismos definindo uma relação deste tipo, no caso, ter o mesmo espectro, a mesma quantidade de pontos isolados e a aderência de cada conjunto não vazio da partição citada anteriormente (a não ser o conjunto de pontos isolados) ser homeomorfo ao conjunto de Cantor.

Finalmente, vamos "calcular" o espectro de um espaço exponencial através do espaço de partida e com isso exibir os espaços métricos compactos zero-dimensionais que são exponencialmente completos.

No primeiro capítulo apresentaremos alguns resultados importantes relativos a espaços topológicos zero-dimensionais e a espaços metrizáveis, que como pode-se notar, estão presentes em todo o trabalho. Qualquer outra noção topológica não abordada nas preliminares poderá ser encontrada no livro do Engelking [1]. A principal fonte deste trabalho é o livro do Stevo Todorcevic [13] citado anteriormente.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo exibiremos alguns tipos de espaços topológicos e algumas de suas propriedades importantes que serão utilizadas ao longo do texto. Todos os espaços topológicos tratados serão Hausdorff.

Primeiramente trataremos dos espaços zero-dimensionais que estarão presentes durante todo o trabalho.

1.1 Espaços Zero-dimensionais

Definição 1.1. Um espaço topológico X é **zero-dimensional** se possui uma base composta por abertos-fechados.

Teorema 1.2. *Todo espaço zero-dimensional não possui nenhum subespaço conexo com cardinalidade maior que 1.*

Demonstração. Seja A um subespaço de X tal que $|A| > 1$. Tome x e y pontos distintos de A e U aberto-fechado tal que $x \in U$ e $y \notin U$. Assim podemos particionar A em dois subespaços abertos disjuntos $A \setminus U$ e $A \cap U$ concluindo que A não é conexo.

□

Lema 1.3. *Se X é espaço zero-dimensional com base enumerável então todo aberto pode ser escrito como união disjunta de uma seqüencia de abertos-fechados.*

Demonstração. Todo aberto U pode ser escrito como união de abertos-fechados da base. Assim, $U = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i = \bigcup_{i=0}^{\infty}(U_i \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} U_j)$.

□

Teorema 1.4 (Redução). *Seja X um espaço zero-dimensional com base enumerável. Se $G_0, \ldots, G_n, \ldots$ é uma seqüência (finita ou infinita) de abertos em X, então existe uma seqüência $U_0, \ldots, U_n, \ldots$ de abertos de X dois a dois disjuntos tais que $U_i \subset G_i$ para todo i e $\bigcup_{i=0}^{\infty} U_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} G_i$.*

Demonstração. De acordo com o lema anterior, podemos escrever G_i como união disjunta de abertos-fechados $G_i = \bigcup_{j=0}^{\infty} U_{i,j}$, para todo i. Seja $\{W_i : i \in \mathbb{N}\}$ outra enumeração de $\{U_{i,j} : i, j \in \mathbb{N}\}$. Definimos $T_0 = W_0$ e $T_n = W_n \setminus (W_0 \cup \cdots \cup W_{n-1})$ para $n \geq 1$. Obtemos os abertos-fechados desejados da seguinte forma: U_0 é a reunião dos T_n contidos em G_0, e para $n \geq 1$, U_n é a reunião dos T_k contidos em G_n que ainda não foram escolhidos anteriormente para compor algum U_m com $m < n$. Note que os abertos-fechados U_n satisfazem $\bigcup_{i=0}^{\infty} U_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} G_i$ e $U_i \subset G_i$ para todo i.

□

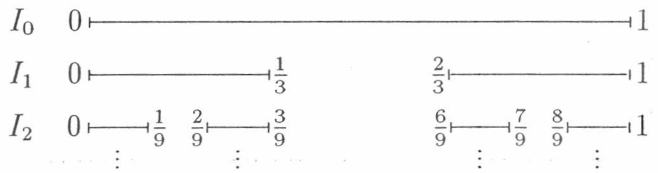
Teorema 1.5 (Separação). *Se $F_0, \ldots, F_n, \ldots$ é uma seqüência (finita ou infinita) de fechados em um espaço zero-dimensional com base enumerável tal que $\bigcap_{i=0}^{\infty} F_i = \varnothing$, então existe $V_0, \ldots, V_n, \ldots$ uma seqüência de abertos-fechados de X tais que $F_i \subset V_i$ para todo i e $\bigcap_{i=0}^{\infty} V_i = \varnothing$. Em particular, se A e B são fechados disjuntos, existe V aberto-fechado tal que $A \subset V$ e $V \cap B = \varnothing$.*

Demonstração. Definimos $G_i = X \setminus F_i$ e, utilizando o teorema anterior, obtemos a seqüência de abertos dois a dois disjuntos $U_0, \ldots U_n, \ldots$, fazemos

$V_i = X \setminus U_i$ e assim $\bigcup_{i=0}^{\infty} G_i = X \setminus \bigcap_{i=0}^{\infty} F_i = X = \bigcup_{i=0}^{\infty} U_i$. Com isso U_i e V_i são abertos-fechados para todo i e, através da última igualdade, temos que $\bigcap_{i=0}^{\infty} V_i = \varnothing$. A inclusão $U_i \subset G_i$ nos fornece $F_i \subset V_i$ para todo i.

$\square$

O conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ é um exemplo de espaço métrico compacto zero-dimensional. Sua construção inicia-se a partir do intervalo da reta real $I_0 = [0,1]$ dividindo-o em três partes iguais e retirando-se o intervalo aberto central. Desta forma obtemos um novo conjunto formado pela união de dois intervalos fechados $I_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. O passo seguinte consiste novamente em dividir cada um dos intervalos em três partes iguais retirando-se os intervalos abertos centrais. Desta forma obtemos $I_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}] \cup [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ e assim sucessivamente. O conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ será $\mathcal{C} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Para ilustrar melhor observe a figura:



Observe que $\{I_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma família de fechados em $[0,1]$ que satisfaz a propriedade da intersecção finita. Logo $\mathcal{C}$ é fechado, não vazio e compacto.

Outra característica importante do conjunto de Cantor é a de ser homeomorfo a $\{0,1\}^{\aleph_0}$. Isto pode ser verificado observando que cada ponto x de $\mathcal{C}$ pode ser escrito como

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2x_i}{3^i} \text{ , onde } x_i \in \{0,1\} \text{ e } i \in \mathbb{N}$$

Com isso definimos $f : \mathcal{C} \mapsto \{0,1\}^{\aleph_0}$ como $f(x) = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ que obviamente trata-se de uma função bijetora e contínua e portanto um homeomorfismo já que $\mathcal{C}$ é compacto. Assim verificamos também que $\mathcal{C}$ é zero-dimensional (teorema 1.8).

Definição 1.6. Para uma família $\{X_s : s \in S\}$ de espaços topológicos dois a dois disjuntos consideramos o conjunto $X = \bigcup_{x\in S} X_s$ e a família τ de todos os conjuntos $U \subset X$ tais que $U \cap X_s$ é aberto em X_s para todo $s \in S$. Desta forma τ define uma topologia em X. Ao conjunto X munido com a topologia τ damos o nome de **soma topológica de** $\{X_s : s \in S\}$ e denotamos $\bigoplus_{s\in S} X_S$ ou $X_1 \oplus \cdots \oplus X_k$ se $S = \{1, \ldots, k\}$.

Podemos estender a definição de soma topológica para uma família $\{X_s : s \in S\}$ de espaços não disjuntos fazendo $\bigoplus_{s\in S} X_S = \bigoplus_{s\in S}(X_S \times \{s\})$.

Teorema 1.7. *A soma $\bigoplus_{s\in S} X_s$, onde $S \neq \varnothing$ e $X_s \neq \varnothing$ para todo $s \in S$ é zero-dimensional se e só se cada X_s é zero-dimensional.*

□

Teorema 1.8. *O produto cartesiano $\prod_{s\in S} X_s$, onde $S \neq \varnothing$ e $X_s \neq \varnothing$ para todo $s \in S$ é zero-dimensional se e só se cada X_s é zero-dimensional*

□

A seguir abordaremos os espaços metrizáveis, utilizados no momento em que desejamos inserir uma métrica em um espaço topológico definido a partir da topologia de outro espaço métrico.

1.2 Espaços Metrizáveis

Definição 1.9. Um espaço topológico é **metrizável** se existe uma métrica d em X que gera a mesma topologia de X.

Teorema 1.10. *Um espaço regular Lindelöf é metrizável se e somente se possui uma base de abertos enumerável.*

Definição 1.11. Seja (X, d) um espaço métrico e $A \subset X$ não vazio. O **diâmetro de A** denotado por $\delta(A)$ é o supremo das distâncias dos pontos de A, ou seja, $\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$. O diâmetro pode ser ∞ e podemos definir $\delta(\varnothing) = 0$.

O teorema a seguir é muito poderoso quando tratamos de espaços métricos completos.

Teorema 1.12 (Intersecção de Cantor). *Seja (X, d) um espaço métrico completo. Então para toda seqüência decrescente $F_0 \supset \cdots \supset F_n \supset \ldots$ de fechados não-vazios de X com $\lim_{n\to\infty} \delta(F_n) = 0$, a intersecção $\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n = \{x\}$ para algum $x \in X$.*

Demonstração. A hipótese $\delta(F_n) \to 0$ garante que a intersecção não pode conter mais de um ponto. Basta mostrarmos que a intersecção não é vazia. Escolhemos x_n pertencente a F_n para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $\delta(F_n) \to 0$ obtemos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de Cauchy que, por X ser completo, converge para um ponto $x \in X$.

Vamos mostrar que x pertence a F_n para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ arbitrário. Como $F_0 \supset \cdots \supset F_n \supset \ldots$, os pontos da seqüência $(x_n)_{n\geq n_0}$ pertencem todos a F_{n_0}. Como F_{n_0} é fechado, x, que é limite desta seqüencia, pertence a F_{n_0}.

$\square$

Obs 1.13. *O teorema anterior será empregado nesta dissertação em espaços métricos compactos, já que* ***todo espaço métrico compacto é completo***

Capítulo 2

Espaços Exponenciais

Primeiramente iremos definir *espaço exponencial* de um espaço topológico, apresentar suas principais propriedades e alguns resultados.

Definição 2.1. O **espaço exponencial** $\exp(X)$ (também chamado de hiperespaço e denotado por 2^X) de um espaço topológico X é formado pelo conjunto de todos os fechados não vazios de X munido com a topologia gerada por dois tipos de abertos sub-básicos:

$$\begin{aligned} \langle U \rangle &= \{F \in \exp(X) | F \subseteq U\} \\ \rangle U \langle &= \{F \in \exp(X) | F \cap U \neq \varnothing\} \end{aligned}$$

onde U é um aberto não vazio de X.

Temos, assim, uma base para a topologia formada por elementos do tipo

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \{F \in \exp(X) | F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i \text{ e } F \cap U_i \neq \varnothing, 1 \leq i \leq n\}$$

onde $U_1, \ldots, U_n$ são abertos não vazios de X.

Note que

$$\langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \langle \bigcup_{i=1}^{n} U_i \rangle \cap \bigcap_{i=1}^{n} \rangle U_i \langle$$

Esta topologia é chamada de **topologia de Vietoris** ou **topologia finita**.

Podemos também definir uma sub-base de fechados da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \langle F\rangle &= \exp(X)\setminus \rangle X\setminus F\langle &= \{F'\in \exp(X)|F'\subset F\} \\ \rangle F\langle &= \exp(X)\setminus \langle X\setminus F\rangle &= \{F'\in \exp(X)|F'\cap F\neq \varnothing\} \end{aligned}$$

para F fechado não vazio em X.

Podemos ressaltar alguns subespaços de $\exp(X)$ importantes como $[X]^{\leq n}$ formado pelos conjuntos finitos de X com no máximo n elementos. São chamados de **enésima potência simétrica de** X . Observe que $[X]^{\leq 1}$ é um subespaço de $\exp(X)$ homeomorfo a X (através do homeomorfismo natural $x\mapsto \{x\}$) e que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[X]^{\leq n}$ é denso em $\exp(X)$.

A seguir, exibiremos algumas propriedades preservadas pelo exponencial.

Proposição 2.2. *X é compacto se e somente se $\exp(X)$ é compacto.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Utilizando o teorema da sub-base de Alexander [1] vamos mostrar que uma família $\mathcal{F}$ de elementos não-vazios de uma sub-base fechada de $\exp(X)$ com a propriedade da intersecção finita (p.i.f.) possui intersecção não vazia. $\mathcal{F}$ pode ser particionado em $\mathcal{F}_0$ e $\mathcal{F}_1$, onde $\mathcal{F}_0$ é formado por elementos do tipo $\langle F\rangle$ e $\mathcal{F}_1$ por elementos da forma $\rangle F\langle$. Observando que $\{F:\langle F\rangle\in\mathcal{F}_0\}$ satisfaz p.i.f. (dado que $\mathcal{F}_0$ satisfaz) e a compacidade de X obtemos

$$\varnothing\neq F_0=\bigcap\{F:\langle F\rangle\in\mathcal{F}_0\}$$

Precisamos mostrar que $F_0\in\cap\mathcal{F}_1$.

Se $F_0\notin\rangle F'\langle$, para algum $\rangle F'\langle\in\mathcal{F}_1$, temos que $F_0\cap F'=\varnothing$. Pela compacidade de X, existem $F_1,\ldots,F_p\in\{F:\langle F\rangle\in\mathcal{F}_0\}$ que satisfazem $F_1\cap\cdots\cap F_p\cap F'=\varnothing$. Com isso, teríamos $\langle F_1\rangle\cap\cdots\cap\langle F_p\rangle\cap\rangle F'\langle=\varnothing$, o que é um absurdo já que $\mathcal{F}$ satisfaz p.i.f.

($\Leftarrow$) Supondo $\exp(X)$ compacto e seja $\{U_s:s\in S\}$ uma cobertura aberta de X. Temos que $\{\langle X,U_s\rangle:s\in S\}$ é uma cobertura aberta de $\exp(X)$ que admite $\{\langle X, U_1\rangle, \ldots, \langle X, U_p\rangle\}$ subcobertura finita. Obtemos $\{U_1, \ldots, U_p\}$ subcobertura finita de X concluindo que X é compacto.

□

Proposição 2.3. *X é compacto métrico se e somente se $\exp(X)$ é compacto métrico*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Sendo β uma base enumerável de X, podemos construir $\{\langle U_1, \ldots, U_n\rangle : n \in \mathbb{N}, U_i \in \beta \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$ uma base enumerável de $\exp(X)$ já que X é compacto. Logo $\exp(X)$ é metrizável.

($\Leftarrow$) Sendo $\exp(X)$ métrico, o mesmo acontece com seu subespaço $[X]^{\leq 1}$ que é homeomorfo a X sendo portanto também métrico. Dada a compacidade de $\exp(X)$ obtemos a compacidade de X.

□

Proposição 2.4. *X é zero-dimensional se e só se $\exp(X)$ é zero-dimensional.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Basta observar que se U é um aberto-fechado de X então $\langle U\rangle$ e $\rangle U\langle$ são abertos-fechados em $\exp(X)$.

($\Leftarrow$) Imediato ao observarmos o subespaço $[X]^1$ de $\exp(X)$ que é homeomorfo a X.

□

Proposição 2.5. *Sejam X compacto, $g : X \to Y$ uma função contínua. Então $F \mapsto g[F]$ é uma função contínua de $\exp(X)$ em $\exp(Y)$.*

Demonstração. Definimos $G : \exp(X) \to \exp(Y)$ como $G(F) = g[F]$. G está bem definida pois como F é fechado em X que é compacto, F é compacto. Pela continuidade de g temos que $g[F]$ é compacto em Y e portanto fechado (os espaços são Hausdorff), ou seja, $g[F] \in \exp(Y)$.

Seja $F_Y \subseteq Y$ fechado e $F_X = g^{-1}[F_Y]$, mostraremos que $G^{-1}[\langle F_Y \rangle] = \langle F_X \rangle$. Cada coluna abaixo representa um lado da inclusão e cada linha é conseqüência da anterior.

$$\begin{array}{c|c}
F \in G^{-1}[\langle F_Y \rangle] & F \in \langle F_X \rangle \\
G(F) \in \langle F_Y \rangle & F \in \langle g^{-1}[F_Y] \rangle \\
g[F] \in \langle F_Y \rangle & F \subset g^{-1}[F_Y] \\
g[F] \subset F_Y & g[F] \subset g[g^{-1}[F_Y]] \subset F_Y \\
F \subset g^{-1}[g[F]] \subset g^{-1}[F_Y] & g[F] \in \langle F_Y \rangle \\
F \in \langle F_X \rangle & F \in G^{-1}[\langle F_Y \rangle] \\
\therefore G^{-1}[\langle F_Y \rangle] \subset \langle F_X \rangle & \therefore \langle F_X \rangle \subset G^{-1}[\langle F_Y \rangle]
\end{array}$$

Da mesma maneira, vamos mostrar que $G^{-1}[\rangle F_Y \langle] = \rangle F_X \langle$.

$$\begin{array}{c|c}
F \in G^{-1}[\rangle F_Y \langle] & F \in \rangle F_X \langle \\
g[F] \in \rangle F_Y \langle & F \cap F_X \neq \varnothing \\
y \in g[F] \cap F_Y \neq \varnothing & F \cap g^{-1}[F_Y] \neq \varnothing \\
\exists x \in F | g(x) = y & g[F] \cap g[g^{-1}[F_Y]] \neq \varnothing \\
x \in F \cap g^{-1}[F_Y] & g[F] \cap F_Y \neq \varnothing \\
F \in \rangle g^{-1}[F_Y] \langle & g[F] \in \rangle F_Y \langle \\
F \in \rangle F_X \langle & G(F) \in \rangle F_Y \langle \\
G^{-1}[\rangle F_Y \langle] \subset \rangle F_X \langle & F \in G^{-1}[\rangle F_Y \langle] \\
 & \rangle F_X \langle \subset G^{-1}[\rangle F_Y \langle]
\end{array}$$

$\square$

Podemos também determinar os pontos isolados e de acumulação do espaço exponencial de X com base nos pontos isolados e de acumulação de X. A seguir temos duas proposições a esse respeito.

Proposição 2.6. *Seja x ponto de acumulação de X e $F \in \exp(X)$. Se $x \in F$ então F é ponto de acumulação de* $\exp(X)$.

Demonstração. Supondo que F seja isolado em $\exp(X)$, devem existir $U_1, \ldots, U_n$ abertos de X que satisfaçam

$$\{F\} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$$

Logo $x \in U_k$ para algum k, $1 \leq k \leq n$. Como x é ponto de acumulação de X, U_k é infinito. Se F é finito, escolhemos $x_k \in U_k \setminus F$, caso contrário, escolhemos $x_k \in U_k$ qualquer. Para cada $i \neq k$ escolhemos $x_i \in U_i$. Assim, obtemos $\{x_1, \ldots, x_n\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ diferente de F contrariando a hipótese de que F é isolado. Logo F é ponto de acumulação de $\exp(X)$.

□

Proposição 2.7. *Se F é finito formado apenas por pontos isolados de X então F é ponto isolado de* $\exp(X)$.

Demonstração. Seja $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Verificamos a afirmação se observarmos que $\{F\} = \langle \{x_1\}, \ldots, \{x_n\} \rangle$.

□

Obs 2.8. *Se X é compacto todo ponto isolado de* $\exp(X)$ *é um conjunto finito de pontos isolados de X.*

Definição 2.9. Um espaço topológico X é **exponencialmente completo** se é homeomorfo a $\exp(X)$.

Veremos mais adiante que o conjunto de Cantor é exponencialmente completo. Já o espaço dos racionais $\mathbb{Q}$ não é, pois se observarmos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$, que é um subespaço fechado discreto, podemos verificar que

$$|\exp(\mathbb{Q})| \geq |\exp(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0} > |\mathbb{Q}|$$

Capítulo 3

Teorema do Homeomorfismo de Vaught

Este teorema visa caracterizar espaços homeomorfos na classe dos espaços métricos compactos zero-dimensionais ($\mathcal{Z}_0$).

Definiremos um tipo de relação que garantirá o homeomorfismo entre dois espaços, ou seja, se eles satisfazem a relação, são homeomorfos.

Definição 3.1. Uma relação binária R em $\mathcal{Z}_0$ é uma **relação de Vaught** se satisfaz as seguintes condições:

a) XRY implica YRX

b) $XR\varnothing$ implica $X = \varnothing$

c) se $XR(Y_0 \oplus Y_1)$ então existe uma decomposição $X = X_0 \oplus X_1$ tal que X_0RY_0 e X_1RY_1

Teorema 3.2 (Vaught). *Sejam $X, Y \in \mathcal{Z}_0$ tal que XRY para alguma relação de Vaught R em $\mathcal{Z}_0$. Então X é homeomorfo a Y.*

Demonstração. Vamos pensar em X e Y como subespaços de $\{0,1\}^{\aleph_0}$ e fazer uma construção recursiva para gerarmos abertos-fechados X_σ em X e Y_σ em Y, com σ em $\{0,1\}^{<\infty}$, tais que $X_\sigma RY_\sigma$.

Primeiramente fazemos $X_\varnothing = X$ e $Y_\varnothing = Y$. Suponha que X_σ e Y_σ estão definidos com $X_\sigma R Y_\sigma$. Vamos dividir a construção em dois casos:

- $|\sigma|$ é par

  Vamos construir $X_{\sigma 0} \oplus X_{\sigma 1} = X_\sigma$ com $X_{\sigma 0}$ e $X_{\sigma 1}$ abertos-fechados tais que $diam(X_{\sigma 0}), diam(X_{\sigma 1}) < \frac{2}{3} diam(X_\sigma)$. Utilizaremos em $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ a métrica:

  $$d(x,z) = 2^{-min\{n : x(n) \neq z(n)\}}$$

  Seja t a seqüência maximal em $\{0,1\}^{<\infty}$ tal que $X_\sigma \subset [t]$. Se m é o comprimento de t então 2^{-m-1} é o diâmetro de X_σ porque $\min\{n : x(n) \neq z(n)\} \geq m+1$ para todo $x, z \in X_\sigma$. Sejam

  $$X_{\sigma 0} = X_\sigma \cap [t0] \text{ e } X_{\sigma 1} = X_\sigma \cap [t1]$$

  Como t é maximal, geramos conjuntos não vazios e para $i = 0, 1$ e x , $z \in X_{\sigma i}$ temos $\min\{n : x(n) \neq z(n)\} \geq m+2$.

  Assim $diam(X_{\sigma 0})$, $diam(X_{\sigma 1}) \leq 2^{-m-2} < \frac{2}{3} diam(X_\sigma)$.

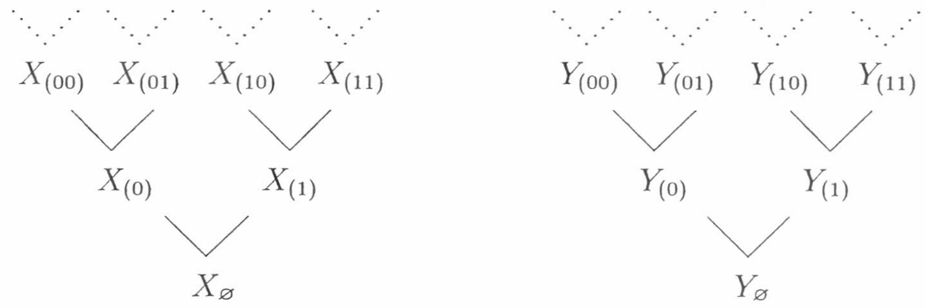
  Como $X_\sigma R Y_\sigma$, existe uma decomposição $Y_\sigma = Y_{\sigma 0} \oplus Y_{\sigma 1}$ tal que $X_{\sigma 0} R Y_{\sigma 0}$ e $X_{\sigma 1} R Y_{\sigma 1}$.

- $|\sigma|$ é ímpar

  Repetimos o procedimento anterior invertendo os papéis de X e Y para garantirmos não só a diminuição do diâmetro dos X_σ's, mas também do diâmetro do Y_σ's.

Desta forma construímos uma árvore de raiz X e uma árvore com raiz Y, onde a cada aberto-fechado X_σ da primeira árvore associa-se um aberto-fechado Y_σ correspondente da segunda árvore com $X_\sigma R Y_\sigma$.

Veja a figura:



Vamos definir um homeomorfismo $\phi : X \to Y$. Para cada $x \in X$ existe um único ramo infinito $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \sigma_2 \subset \ldots$ de $\{0,1\}^{<\infty}$ tal que $x \in X_{\sigma_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como Y é compacto, cada Y_{σ_n} é fechado com $Y_{\sigma_n} \supset Y_{\sigma_{n+1}}$ e $diam(Y_{\sigma_n}) \to 0$, temos um único y tal que:

$$\{y\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} Y_{\sigma_n}$$

Definimos:

$$\phi(x) = y$$

Vamos mostrar que ϕ é um homeomorfismo. Pela compacidade de X e Y basta verificarmos que ϕ é bijetora e contínua.

- ϕ *é injetora:* Diferentes ramos na árvore com raiz Y correspondem a diferentes pontos de Y.

- ϕ *é sobrejetora:* Todo ponto de Y corresponde a um ramo da árvore construída.

- ϕ *é contínua:* Seja U um aberto-fechado tal que $y \in U$ e $\phi(x) = y$. Dado que $diam(Y_{\sigma_n}) \to 0$ existe k tal que $Y_{\sigma_k} \subseteq U$. Logo $\phi[X_{\sigma_k}] \subseteq Y_{\sigma_k} \subseteq U$; além disso $x \in X_{\sigma_k}$.

Portanto ϕ é um homeomorfismo de X em Y.

$\square$

Vejamos agora algumas aplicações deste teorema ao definirmos relações de Vaught obtendo classes de espaços homeomorfos.

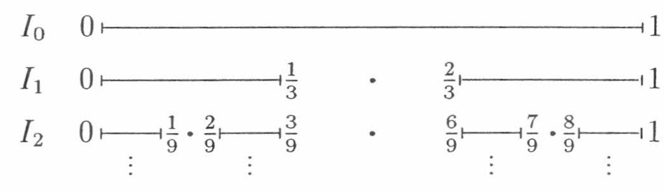
Corolário 3.3 (G. Cantor, L. E. J. Brouwer). *O conjunto de Cantor é o único espaço (não vazio) métrico compacto zero-dimensional sem pontos isolados.*

Demonstração. Basta definirmos a seguinte relação de Vaught R : $XR\varnothing$ se $X = \varnothing$; para X e Y não vazios, XRY se e só se X e Y não possuem pontos isolados. Se $X = X_0 \oplus X_1$, dividimos Y em abertos-fechados Y_0 e Y_1 tais que $Y = Y_0 \oplus Y_1$ e para $i = 0, 1$ pomos $Y_i = \varnothing$ se e só se $X_i = \varnothing$. Assim temos X_0RY_0 e X_1RY_1.

Desta forma R define uma relação de Vaught e com isso o conjunto de Cantor é o "único" espaço em $\mathscr{Z}_0$ sem pontos isolados.

□

Com base na construção do conjunto de Cantor podemos criar outro espaço que contém um conjunto denso de pontos isolados e o restante homeomorfo ao conjunto de Cantor. Basta ao retirarmos cada intervalo, mantermos seu ponto médio. Este espaço é conhecido como **espaço de Pelczynski** e denotado por $\mathcal{C}_2$.



Corolário 3.4 (Pelczynski). *O espaço de Pelczynski é o único espaço compacto métrico zero-dimensional com um conjunto denso de pontos isolados e o restante homeomorfo ao conjunto de Cantor.*

Demonstração. Novamente vamos definir uma relação de Vaught apropriada para caracterizar os espaços deste tipo. Definimos $XR\varnothing$ se $X = \varnothing$. Para X e Y não-vazios definimos XRY se ambos possuem um conjunto denso de pontos isolados e o restante homeomorfo ao conjunto de Cantor ou se X e Y são finitos com o mesmo número de elementos.

Para verificarmos a condição c. suponha XRY e que X pode ser decomposto em dois conjuntos abertos-fechados X_0 e X_1. Se X é vazio ou finito, Y também deve ser. Supondo que X e Y possuam conjunto denso de pontos isolados e o resto homeomorfo ao conjunto de Cantor. Se X_0 e X_1 interceptam a cópia do conjunto de Cantor dentro de X, então divida Y em dois abertos-fechados Y_0 e Y_1 ambos interceptando a cópia do conjunto de Cantor em Y. Assim, X_iRY_i para $i = 0, 1$. Se X_0 não intercepta o conjunto de Cantor, é formado apenas com pontos isolados e deve ser finito dado que é compacto. Neste caso, escolha o conjunto Y_0 com o mesmo número de elementos de X também formado apenas de pontos isolados. Faça $Y_1 = Y \setminus Y_0$ e assim temos X_iRY_i para $i = 0, 1$. Logo R é uma relação de Vaught em $\mathcal{Z}_0$ e conseqüentemente o espaço de Pelczynski é o "único" elemento de $\mathcal{Z}_0$ que satisfaz as condições do enunciado.

$\square$

A seguir apresentamos alguns exemplos de aplicação dos corolários anteriores.

Exemplo 3.5. $\exp(\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\})$ é homeomorfo a C_2.

Demonstração. Vamos utilizar o corolário anterior (Pelczynski) para mostrar este fato. Para $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\}$, mostraremos que o conjunto dos pontos isolados em $\exp(X)$ é denso e que o restante é homeomorfo ao conjunto de Cantor.

Destacamos que X é compacto e conseqüentemente $\exp(X)$ também e que os pontos isolados de $\exp(X)$ são conjuntos finitos contendo apenas pontos isolados de X, ou seja, qualquer ponto de X diferente de 0.

Em qualquer $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ aberto de $\exp(X)$ podemos escolher $x_i \in U_i \setminus \{0\}$, para cada i, obtendo $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ponto isolado de $\exp(X)$ pertencente a $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Logo o conjunto de pontos isolados é denso $\exp(X)$.

Vamos analisar o subespaço $Y = \exp(X) \backslash \{F \in \exp(X) : 0 \notin F$ e F é finito$\}$. Como tiramos todos os pontos isolados, o restante é fechado em $\exp(X)$ e portanto compacto.

Para $F \in Y$, temos que $0 \in F$. Se F fosse isolado em Y, existiriam $U_1, \ldots, U_n$ abertos em X tais que $\{F\} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap Y$ e assim, para algum k, $1 \leq k \leq n$ teríamos $0 \in U_k$, um aberto infinito. Sendo F finito, escolhemos $x_k \in U_k \setminus F$ e caso contrário $x_k \in U_k$ qualquer. Para $i \neq k$, escolhemos $x_i \in U_i$. Construímos o conjunto $\{0\} \cup \{x_1, \ldots, x_n\}$ que pertence a $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap Y$ e é diferente de F. Logo F não é isolado em Y.

Retirando os pontos isolados de $\exp(X)$, restam apenas pontos não isolados em Y que é compacto e, de acordo com outro corolário (Cantor), é homeomorfo ao conjunto de Cantor. Logo $\exp(X)$ é homeomorfo ao espaço de Pelczynski (C_2).

□

Exemplo 3.6. $\exp(C_2)$ é homeomorfo a C_2.

Demonstração. Primeiramente dividimos $C_2 = K \cup A$, onde K é homeomorfo ao conjunto de Cantor e A é o conjunto de pontos isolados de C_2.

Observe que os pontos isolados de $\exp(C_2)$ são subconjuntos finitos de$A$ e que o conjunto dos pontos isolados de $\exp(C_2)$ é denso já que todo aberto de C_2 possui ponto isolado (para $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ aberto em $\exp(C_2)$ escolhemos um ponto isolado de cada U_i formando um conjunto finito de pontos isolados de C_2 e portanto isolado em $\exp(C_2)$).

Seja $Y = \exp(C_2) \setminus \{F \in \exp(C_2) : F$ é isolado em $\exp(C_2)\}$. Se $F \in Y$, $F \cap K \neq \varnothing$. Seja $x \in F \cap K$. Se F fosse isolado em Y, existiriam $U_1, \ldots, U_n$ abertos em C_2, tais que $\{F\} = \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap Y$. Logo, para algum k teríamos, $x \in U_k$ infinito. Se F é finito, escolhemos $x_k \in U_k \backslash F$ e se F é infinito, $x_k \in U_k$ qualquer. Desta forma $F \neq \{x\} \cup \{x_1, \ldots, x_n\} \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap Y$ e assim F não pode ser isolado em Y. Retirando os pontos isolado de C_2 não resta nenhum ponto isolado no subespaço que é compacto e portanto homeomorfo ao conjunto de Cantor. Desta forma, concluímos que $\exp(C_2)$ é homeomorfo a C_2. □

Capítulo 4

Ordem e Espectro de Acumulação

A seguir será apresentada a teoria dos espectros e ordens de acumulação de espaços topológicos a fim de estabelecermos caracterizações de homeomorfismos entre espaços métricos zero-dimensionais.

Iremos particionar o espaço separando inicialmente os pontos isolados e, a partir daí, definir recursivamente os demais conjuntos. Definiremos a *ordem de acumulação* de um ponto do espaço conforme sua localização, e caracterizaremos o espaço através de seu *espectro de acumulação*, que corresponderá a ordem dos pontos deste conjunto. Com base nestes aspectos, definiremos uma relação de Vaught para determinarmos os homeomorfismos.

A seguir exibimos o processo de construção.

Seja X um espaço topológico,

$$\begin{aligned} X^{(0)} &= \text{conjunto dos pontos isolados de } X \\ X^{(1)} &= X \setminus \overline{X^{(0)}} \\ &\vdots \\ X^{(n)} &= (\overline{X^{(n-2)}} \setminus X^{(n-2)}) \setminus \overline{X^{(n-1)}}, \text{para } n \geq 2 \\ X^{(\infty)} &= \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{X^{(n)}} \end{aligned}$$

Exemplos.

1. Para $X = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, temos $X^{(0)} = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}, X^{(1)} = \varnothing$ e $X^{(2)} = \{0\}$

2. Se X é espaço de Cantor, então $X^{(0)} = \varnothing$ e $X^{(1)} = \mathcal{C}$

3. Se X é o espaço de Pelczynski ($\mathcal{C}_2$), então $X^{(0)}$ é o conjunto dos pontos médios dos intervalos removidos, $X^{(1)} = \varnothing$ e $X^{(2)} = \mathcal{C}$

Obs 4.1.

1. *Como $X^{(0)}$ é o conjunto dos pontos isolados, e, se um ponto isolado pertence à aderência de um conjunto, pertence também ao conjunto, pelo processo de construção anterior, temos que $X^{(0)}$ é disjunto de $X^{(n)}$ para todo $n \geq 1$.*

2. *$X^{(1)}$ é o subespaço de todos os pontos que possuem uma vizinhança sem pontos isolados.*

3. *Observando a definição, verificamos as seguintes inclusões*

$$\begin{array}{ccccccc} \overline{X^{(1)}} & \supset & \overline{X^{(3)}} & \supset \cdots \supset & \overline{X^{(2k+1)}} & \supset & \ldots \\ \overline{X^{(2)}} & \supset & \overline{X^{(4)}} & \supset \cdots \supset & \overline{X^{(2k)}} & \supset & \ldots \end{array}$$

Inicialmente, veremos que foi definida uma *cobertura* de X, ou seja, que $X = \bigcup_{0 \leq n \leq \infty} X^{(n)}$. Supondo que $x \in X$ e $x \notin X^{(\infty)} = \bigcap_{n \geq 0} \overline{X^{(n)}}$, existe m mínimo tal que $x \notin \overline{X^{(m)}}$.

Se $m = 0$, $x \in X \setminus \overline{X^{(0)}} = X^{(1)}$.

Se $m > 0$, temos $x \notin \overline{X^{(m)}}$ e $x \in \overline{X^{(m-1)}}$. Concluímos que $x \in X^{(m-1)}$ ou $x \in X^{(m+1)}$ ao observarmos a definição $X^{(m+1)} = (\overline{X^{(m-1)}} \setminus X^{(m-1)}) \setminus \overline{X^{(m)}}$.

$\square$

Para verificarmos que esta cobertura é *disjunta*, vamos demonstrar a proposição seguinte com a qual este fato se torna imediato.

Proposição 4.2. $\complement \overline{X^{(n)}} = X^{(0)} \cup \cdots \cup X^{(n-1)} \cup X^{(n+1)}$ *para* $1 \leq n < \infty$

Demonstração. Para $n = 1$, temos $\complement \overline{X^{(1)}} = X^{(0)} \cup X^{(2)}$.

($\subseteq$) $\overline{X^{(1)}} = \overline{X \setminus \overline{X^{(0)}}} = X \setminus \mathring{\overline{X^{(0)}}}$. Se $x \notin \overline{X^{(1)}}$ então $x \in \mathring{\overline{X^{(0)}}}$, ou seja, $x \in \overline{X^{(0)}}$. Observando $X^{(2)} = (\overline{X^{(0)}} \setminus X^{(0)}) \setminus \overline{X^{(1)}}$, segue que $x \in X^{(0)}$ ou $x \in X^{(2)}$.

($\supseteq$) Como $X^{(0)}$ e $X^{(1)}$ são abertos disjuntos, $X^{(0)}$ não encontra $\overline{X^{(1)}}$, e, pela definição, $X^{(2)}$ não encontra $\overline{X^{(1)}}$.

Para $n \geq 2$

($\subseteq$) Se $y \notin \overline{X^{(n)}}$ temos duas possibilidades. Ou n é mínimo para esta propriedade, ou existe $p < n$, mínimo, tal que $y \notin \overline{X^{(p)}}$. Então, pelas definições de $X^{(n)}$ e $X^{(p)}$ temos respectivamente,

$$\begin{cases} y \in X^{(n-1)} \\ \quad \text{ou} \\ y \in X^{(n+1)} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y \in X^{(p-1)} \\ \quad \text{ou} \\ y \in X^{(p+1)} \end{cases}$$

logo

$$\complement \overline{X^{(n)}} \subseteq X^{(0)} \cup \cdots \cup X^{(n-1)} \cup X^{(n+1)}$$

($\supseteq$) Utilizaremos a indução sobre n. Supondo a inclusão para valores menores que n e observando que $\overline{X^{(n)}} \subset \overline{X^{(n-2)}}$ e $\overline{X^{(n)}} \cap X^{(n+1)} = \varnothing$, concluímos que $\complement\overline{X^{(n)}} \supseteq X^{(0)} \cup \cdots \cup X^{(n-3)} \cup X^{(n-1)} \cup X^{(n+1)}$. Falta mostrarmos que $\overline{X^{(n)}} \cap X^{(n-2)} = \varnothing$.

Pela definição, $X^{(n)} \cap X^{(n-2)} = \varnothing$ e, através da hipótese de indução, obtemos $\complement\overline{X^{(n-3)}} = X^{(0)} \cup \cdots \cup X^{(n-4)} \cup X^{(n-2)}$, um aberto que contém $X^{(n-2)}$ e não encontra $X^{(n)}$.

Logo $\complement\overline{X^{(n)}} \subseteq X^{(0)} \cup \cdots \cup X^{(m-1)} \cup X^{(m+1)}$ verificando a igualdade.

□

Corolário 4.3. *Seja X um espaço topológico. Então $X^{(i)} \cap X^{(j)} = \varnothing$ para todo $i \neq j$*

Demonstração. Basta observar a proposição anterior na qual $\overline{X^{(n)}}$ não encontra $X^{(i)}$ para todo $i < n$. Conseqüentemente, $X^{(\infty)} \cap X^{(i)} = \varnothing$, para todo $i < \infty$.

□

Corolário 4.4. *Seja X um espaço topológico. Então $\overline{X^{(n)}} = X^{(n)} \cup \bigcup_{n+2 \leq k \leq \infty} X^{(k)}$ para $n \geq 0$.*

Demonstração. Este fato é verificado passando ao complementar nos dois lados da expressão da proposição anterior, juntamente com corolário anterior.

□

Corolário 4.5. *Seja X um espaço topológico. Então, para $n \geq 2$, $X^{(n)} = (X \setminus \bigcup_{k=0}^{n-2} X^{(k)}) \setminus \overline{X^{(n-1)}}$*

Demonstração. Basta utilizarmos a definição e o corolário anterior

$$\begin{aligned}
X^{(n)} &= (\overline{X^{(n-2)}} \setminus X^{(n-2)}) \setminus \overline{X^{(n-1)}} \\
X^{(n)} &= (X^{(n-2)} \cup \bigcup_{n \leq k \leq \infty} X^{(k)} \setminus X^{(n-2)}) \setminus \overline{X^{(n-1)}} \\
X^{(n)} &= \bigcup_{n \leq k \leq \infty} X^{(k)} \setminus \overline{X^{(n-1)}} \\
X^{(n)} &= (X \setminus \bigcup_{k=0}^{n-2} X^{(k)}) \setminus \overline{X^{(n-1)}}
\end{aligned}$$

□

Corolário 4.6. *$X^{(n)} = \varnothing$ implica $X^{(k)} = \varnothing$ para todo $k \geq n + 2$*

Demonstração. Conseqüência imediata do corolário 4.4.

□

Corolário 4.7. *$\bigcup_{k=0}^{n} X^{(k)}$ e $\bigcup_{k=0}^{n-2} X^{(k)} \cup X^{(n)}$ são abertos em X*

Demonstração. A segunda união, pela proposição anterior, é o complementar de $\overline{X^{(n-1)}}$ e, portanto aberta. A primeira união pode ser escrita como união de dois abertos $\bigcup_{k=0}^{n-3} X^{(k)} \cup X^{(n-1)}$ e $\bigcup_{k=0}^{n-2} X^{(k)} \cup X^{(n)}$

□

Através desta cobertura disjunta, vamos classificar os pontos conforme sua localização. Para cada $x \in X$ definimos a **ordem de acumulação de** x como:

$$r(x) = n, \text{ se } x \in X^{(n)}$$

O espaço será classificado através de um conjunto denominado **espectro de acumulação de** X :

$$s(X) = \{r(x) : x \in X\} = \{n : X^{(n)} \neq \varnothing\}.$$

Exemplos.

1. $s(\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}) = \{0, 2\}$
2. $s(\mathcal{C}) = \{1\}$
3. $s(\mathcal{C}_2) = \{0, 2\}$
4. $s(\mathcal{C}_n) = \{0, \ldots, n-2, n\}$
5. $s(\mathcal{C}_n \oplus \mathcal{C}_{n-1}) = \{0, \ldots, n\}$

onde $\mathcal{C}_{-1} = \varnothing, \mathcal{C}_0 = \{1\}, \mathcal{C}_1 = \mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ é a família dos intervalos removidos de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}^I_{n-2} \oplus \mathcal{C}^I_{n-3}$ é uma cópia de $\mathcal{C}_{n-2} \oplus \mathcal{C}_{n-3}$ dentro de I, para $I \in \mathcal{F}$, e

$$\mathcal{C}_n = \mathcal{C} \cup \bigcup_{I \in \mathcal{F}} \mathcal{C}^I_{n-2} \oplus \mathcal{C}^I_{n-3}$$

Para mostrarmos a veracidade dos exemplos 4 e 5 vamos utilizar a indução. Os casos $n = 0, 1, 2$ são verificados nos exemplos 1, 2 e 3. Para $n > 2$, temos, por hipótese de indução, $s(C_{n-3} \oplus C_{n-2}) = \{0, \ldots, n-2\}$.

Mas C_n possui um subespaço aberto-fechado $C_{n-3} \oplus C_{n-2}$ e portanto, $s(C_n) \supseteq \{0, \ldots, n-2\}$. Ainda mais

$$C^{(k)}_n \supseteq \bigcup_{I \in \mathcal{F}} (C^I_{n-3} \oplus C^I_{n-2})^{(k)}, \text{ para todo } k \leq n-2$$

Por outro lado, a cópia de $\mathcal{C}$ está na aderência do lado direito da inclusão anterior, logo disjunta de $C^{(k)}_n$ para $k \leq n-2$, obtendo a igualdade. Então

$$C^{(k)}_n = \bigcup_{I \in \mathcal{F}} (C^I_{n-3} \oplus C^I_{n-2})^{(k)}, \text{ para todo } k \leq n-2$$

e cada $C^{(k)}_n (k \leq n-2)$ é denso em C_n. Portanto,

$$C^{(n-1)}_n \subseteq C_n \setminus \overline{C^{(n-2)}_n} = \varnothing$$

já que $C^{(n-1)}_n \cap \overline{C^{(n-2)}_n} = \varnothing$, e

$$C^{(n)}_n = C_n \setminus \bigcup_{I \in \mathcal{F}} C^I_{n-3} \oplus C^I_{n-2} = \mathcal{C}.$$

Finalmente temos,

$$s(C_n) = \{0, \ldots, n-2, n\}$$

e

$$s(C_{n-1} \oplus C_n) = s(C_{n-1}) \cup s(C_n) = \{0, \ldots, n\}.$$

□

Algumas observações importantes:

4.8. *O Corolário 4.4 nos permite concluir que todos os possíveis espectros finitos são da forma* $\{0, \ldots, n\}$ *ou* $\{0, \ldots, n-2, n\}$ *com* $n \geq 0$

4.9. *Para todo* $n \geq 0, temos (X \oplus Y)^{(n)} = X^{(n)} \oplus Y^{(n)}$, *e conseqüentemente,* $s(X \oplus Y) = s(X) \cup s(Y)$.

4.10. *Se* X *é compacto, o único espectro infinito possível é* $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Demonstração. Suponha $X^{(n)} \neq \varnothing$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $\{n_1, \ldots, n_p\} \subset \mathbb{N}$ e $m = \max\{n_1, \ldots, n_p\}$. Pelo Corolário 4.4, $\overline{X^{(m)}} = X^{(m)} \cup \bigcup_{k \geq m+2} X^{(k)}$ e com isso, $\bigcup_{k \geq m+2} X^{(k)} \subseteq \overline{X^{(n_1)}} \cap \cdots \cap \overline{X^{(n_p)}}$.

Logo $\{\overline{X^{(k)}} : k \in \mathbb{N}\}$ tem a propriedade da intersecção finita e como X é compacto,

$$X^{(\infty)} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{X^{(n)}} \neq \varnothing$$

□

Obs 4.11. *Um exemplo de um espaço em* $\mathcal{Z}_0$ *com espectro infinito é o compactificado de Alexandroff de* $\bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n$, *já que possui pontos de todas as ordens finitas.*

Definição 4.12. Um espaço métrico compacto zero-dimensional é **pleno** ***(full)*** se $X^{(n)} \neq \varnothing$ implica $\overline{X^{(n)}}$ é homeomorfo ao conjunto de Cantor para todo inteiro $n \geq 1$.

Alguns fatos:

4.13. *Espaços finitos são plenos.*

4.14. *Soma de dois espaços plenos é um espaço pleno.*

4.15. *Subconjunto aberto-fechado de um espaço pleno é pleno.*

4.16. *Todos os* $\mathcal{C}_n$ *são plenos.*

Com estas definições podemos apresentar o próximo teorema que nos permite determinar se dois espaços são homeomorfos, conhecendo seus espectros de acumulação.

Teorema 4.17. *Dois espaços plenos com o mesmo espectro de acumulação e a mesma quantidade de pontos isolados são homeomorfos.*

Demonstração. As hipóteses do teorema definem uma relação de Vaught que nos permite concluir que os espaços são homeomorfos. Assim, a relação de Vaught será, para $X, Y \in \mathcal{Z}_0, XRY$ se:

i X e Y são plenos

ii $s(X) = s(Y)$ é finito

iii X e Y possuem a mesma quantidade de pontos isolados

Para verificarmos que é uma relação de Vaught , vamos nos ater a última condição da definição de relação de Vaught, a saber: se $XR(Y_0 \oplus Y_1)$ então existe uma decomposição $X = X_0 \oplus X_1$ tal que X_0RY_0 e X_1RY_1. As outras duas condições (simetria e $XR\varnothing \Rightarrow X = \varnothing$) são imediatas. Como todo subespaço aberto-fechado de um espaço pleno é pleno, verificamos i. Vamos analisar a condição ii, pois ao encontrarmos X_0 e X_1 que a satisfaçam conseguimos facilmente fazer uma troca de abertos-fechados entre X_0 e X_1 para satisfazer iii sem afetar ii. Podemos assumir que tanto Y_0 e Y_1 quanto $X^{(k)}$ (para $k \in s(X)$) são infinitos. Sejam $s = s(X)$, $t_0 = s(Y_0)$ e $t_1 = s(Y_1)$. Sem perda de generalidade assumimos $\max t_0 \leq \max t_1 = \max s = n$.

- Caso 1. $t_0 \subseteq t_1 = s$.

  Escolhemos x_i, z_i pontos distintos de $X^{(i)}$ para cada $i \in t_0$ (podemos escolher já que assumimos que todos os $X^{(i)}$ são infinitos). Pelo fato 4 sabemos que $\bigcup_{k \in t_0} X^{(k)}$ é aberto. Logo, por X ser zero-dimensional, é possível obter abertos-fechados U_i $(i \in t_o)$ tais que $x_i \in U_i$ e $z_j \notin U_i$ para todo $j \in t_0$. Seja $X_0 = \bigcup_{i \in t_0} U_i$ e $X_1 = X \setminus X_0$. Note que $X_0 \cap U_i$

é não-vazio se $i \in t_0$ e $X_1 \cap U_i$ é não vazio para todo $i \in s$. Logo $s(X_0) = t_0$, $s(X_1) = s = t_1$.

Observe que sempre que tivermos $s = (0, \ldots, n-2, n)$ estaremos no caso 1 pois como $\max t_1 = \max s$ não há possibilidade de $t_1 \subsetneq s$.

- Caso 2. t_0 e t_1 são subconjuntos próprios de s.

  Neste caso necessariamente $s = \{0, \ldots, n\}$. Como $\max t_1 = n$, teremos $t_0 = \{0, \ldots, n-3, n-1\}$ e $t_1 = \{0, \ldots, n-2, n\}$.

  Pelo fato 4 temos que $X^{(n-2)} \cup X^{(n)}$ e $X^{(n-1)}$ são abertos-fechados relativos em $X^{(n-2)} \cup X^{(n-1)} \cup X^{(n)}$. Com isso escolhemos $X_0 \subseteq X$ um aberto-fechado tal que

  $$X_0 \cap (X^{(n-2)} \cup X^{(n-1)} \cup X^{(n)}) = X^{(n-1)}.$$

  Assim, $s(X_0) \cap \{n-2, n-1, n\} = \{n-1\}$ e, consequentemente $s(X_0) = \{0, \ldots, n-3, n-1\}$. Assim, para $X_1 = X \setminus X_0$, teremos $s(X_1) = t_1$.

$\square$

Obs 4.18. *Note que $\{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ e o espaço de Pelczynski $\mathcal{C}_2$ possuem o mesmo espectro de acumulação $\{0, 2\}$ mas não são homeomorfos. Isto mostra que a hipótese no teorema anterior de que os espaços sejam plenos é essencial.*

Agora iremos mostrar um resultado análogo ao teorema anterior para a classe dos espaços métricos zero-dimensionais enumeráveis. Neste caso, não pode ser aplicado o teorema de Vaught já que os espaços não são compactos. A demonstração baseia-se diretamente nos espectros de acumulação dos espaços.

O lema e as definições a seguir serão utilizados na demonstração do teorema.

Lema 4.19. *Seja X zero-dimensional com $s(X) = \{0, \ldots, n-1, n\}$. Existe uma decomposição $X = Z \oplus W$, tal que Z e W são abertos-fechados disjuntos e*

a) $s(Z) = \{0\}$ e $s(W) = \{1\}$, para $n = 1$

b) $s(Z) = \{0, 2\}$ e $s(W) = \{1\}$, para $n = 2$

c) $s(Z) = \{0, \ldots, n-2, n\}$ e $s(W) = \{0, \ldots, n-3, n-1\}$, para $n \geq 3$.

Demonstração.

a) Imediato já que $X = X^{(0)} \oplus X^{(1)}$.

b) Basta observar que $X^{(0)} \cup X^{(2)}$ e $X^{(1)}$ são abertos.

c) Como $X^{(n-1)}$ e $X^{(n)}$ são fechados disjuntos e X é zero-dimensional, existe um aberto-fechado U tal que $X^{(n)} \subset U$ e $U \cap X^{(n-1)} = \varnothing$. Logo $S(U) = \{0, \ldots, n-2, n\}$. Seja $V = X \setminus U$, temos $S(V) = \{0, \ldots, n-3, n-1\}$ ou $S(V) = \{0, \ldots, n-2, n-1\}$. No primeiro caso $Z = U$ e $W = V$. No segundo caso, se $n = 3$, $s(U) = \{0, 1, 3\}$ e $s(V) = \{0, 2\}$ e também escolhemos $Z = U$ e $W = V$. Para $n > 3$ decompomos ainda V em dois abertos-fechados disjuntos U' e V' tais que $S(U') = \{0, \ldots, n-3, n-1\}$ e $S(V') = \{0, \ldots, n-4, n-2\}$ ou $S(V') = \{0, \ldots, n-3, n-2\}$, e então definimos $Z = U \cup V'$ e $W = U'$. $\square$

Definição 4.20. Um espaço métrico enumerável X é **$\mathbb{Q}$-pleno** ($\mathbb{Q}$-*full*), se para todo $n > 0$, $X^{(n)} \neq \varnothing$ implica que $X^{(n)}$ é homeomorfo ao conjunto dos racionais $\mathbb{Q}$.

Definição 4.21. Dois espaços $\mathbb{Q}$-plenos X e Y são **equivalentes** se possuem o mesmo espectro finito e a mesma quantidade de pontos isolados.

Proposição 4.22. *Sejam X e Y espaços $\mathbb{Q}$-plenos equivalentes tais que $s(X) = s(Y) = \{1\}$ ou $s(X) = s(Y) = \{0, \ldots, n-2, n\}$ para $n \geq 2$. Se X pode ser decomposto em dois abertos-fechados X' e X'', então existe uma decomposição de Y em dois abertos-fechados Y' e Y'' com X' equivalente a Y' e X'' equivalente a Y''.*

Demonstração. ver artigo [16]

□

Teorema 4.23. *Se X e Y são equivalentes então são homeomorfos.*

Demonstração. Utilizando as enumerações escrevemos $X = \{x_1, \ldots, x_i, \ldots\}$ e $Y = \{y_1, \ldots, y_i, \ldots\}$ e escolhemos $x_{i_0} \in X$ e $y_{i_0} \in Y$ os primeiros elementos de máxima ordem de acumulação.

Se $s(X) = s(Y) = \{0, \ldots, n-1, n\}$, devemos primeiramente particionar X em dois subespaços abertos-fechados com espectros $\{0\}$ e $\{1\}$ se $n = 1$, $\{0, 2\}$ e $\{1\}$ se $n = 2$, ou $\{0, \ldots, n-2, n\}$ e $\{0, \ldots, n-3, n-1\}$ para $n > 2$. Em seguida, fazemos o mesmo com Y de modo que os seus subespaços tenham a mesma quantidade de pontos isolados que os de X com espectros correspondentes. Já que X é zero-dimensional, podemos observá-lo como subespaço de $\{0, 1\}^{\aleph_0}$ e dividir cada um dos subespaços de X (ou X mesmo se não houve a primeira decomposição) em dois abertos-fechados com diâmetro menor que $2/3$ do diâmetro de X. Desta forma, obtemos até 4 subespaços de X com diâmetros reduzidos. Podemos então decompor os subespaços de Y construídos (Y se não houve a decomposição inicial) em abertos-fechados tais que cada subespaço de X possui um subespaço de Y correspondente com a mesma ordem de acumulação e mesma quantidade de pontos isolados. Agora, para cada subespaço obtido escolhemos o ponto de máxima ordem de acumulação que aparece primeiramente nas enumerações e não foram escolhidos anteriormente. Assim, teremos $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ pontos escolhidos dos subespaços de X e $y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}$, pontos escolhidos dos subespaços de Y correspondentes. Repetimos o processo em cada um dos subespaços de Y, e assim alternadamente, para garantirmos que o diâmetro dos subespaços de Y também diminuam.

Definimos a função $f : X \mapsto Y$ como $f(x_{i_n}) = y_{i_n}$. Para cada x_{i_n}, obtemos um único y_{i_n} correspondente. E, para um ponto $x_{i_k} \in X^{(m)}$ ainda não escolhido, como $X^{(0)} \cup \cdots \cup X^{(m)}$ é aberto, em X zero-dimensional, podemos repetir o processo por uma quantidade finita de vezes e encontramos um aberto-fechado U contido em $X^{(0)} \cup \cdots \cup X^{(m)}$ ao qual x_{i_k} pertence e tem diâmetro suficientemente pequeno para não encontrar os pontos de ordem m que precedem x_{i_k} (na enumeração) e os pontos de ordem maior que m já que $\{x_{i_j} : x_{i_j} \in X^{(m)} \text{ e } i_j < i_k\} \cup \bigcup_{t=m+1}^{n} X^{(t)}$ é fechado. Portanto f está bem definida. Com o mesmo raciocínio verificamos que f é injetora e sobrejetora. É simples mostrar que f é bicontínua.

Logo X e Y são homeomorfos.

□

Corolário 4.24 (Sierpinski). *Todo espaço métrico enumerável sem pontos isolados é homeomorfo ao conjunto dos racionais* $\mathbb{Q}$.

Demonstração. Segue como conseqüência imediata do teorema anterior no caso $s(X) = \{1\}$.

□

Corolário 4.25. *Um espaço compacto não pode ser* $\mathbb{Q}$*-pleno.*

Demonstração. Suponha que X é compacto e $X^{(n)}$ é homeomorfo a $\mathbb{Q}$ para todo $n > 0$ que $X^{(n)} \neq \varnothing$. Então $\overline{X^{(n)}}$ é compacto sem pontos isolados e conseqüentemente homeomorfo ao conjunto de Cantor $\mathcal{C}$, o que é impossível já que X é enumerável.

□

Capítulo 5

Espectros de Acumulação em Espaços Exponenciais

A partir do espectro de acumulação de um espaço métrico compacto zero-dimensional X iremos classificar os espectros de acumulação para o espaço exponencial de X. Em outras palavras, iremos determinar cada $(\exp(X))^{(i)}$ em função dos $X^{(j)}$.

Para simplificar a notação, denotaremos $\big(\exp(X)\big)^{(n)}$ como $\exp^{(n)}(X)$. e utilizaremos o seguinte fato que é conseqüência do corolário 4.5

5.1. $X^{(n)} = \complement\overline{X^{(n-1)}} \cap \complement X^{(n-2)} \cap \cdots \cap \complement X^{(0)}$

Vamos generalizar a notação dos conjuntos $\langle A \rangle$, $\rangle A \langle$ e $\langle A_1, \ldots, A_n \rangle$ para $A, A_1, \ldots, A_n$ subconjuntos quaisquer de X e assim obter uma expressão mais simplificada para cada $\exp^{(n)}(X)$:

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \{F \in \exp(X) : F \subseteq A\} \\ \rangle A \langle &= \{F \in \exp(X) : F \cap A \neq \varnothing\} \\ \langle A_1, \ldots, A_n \rangle &= \{F \in \exp(X) : F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i \text{ e } F \cap A_i \neq \varnothing \text{ para } 1 \leq i \leq n\} \end{aligned}$$

Vamos destacar alguns fatos. Para $A \subset X$, temos

5.2. $\overline{\langle A \rangle} = \langle \overline{A} \rangle$.

Demonstração.

($\subseteq$) Seja $F \in \overline{\langle A \rangle}$. Supondo que $F \not\subset \overline{A}$, existe $x \in F \setminus \overline{A}$ e Ω um aberto tal que $x \in \Omega$ e $\Omega \cap A = \varnothing$. Mas $\langle X, \Omega \rangle$ é uma vizinhança de F e deve interceptar $\langle A \rangle$, ou seja, existe $K \subset A$ tal que $K \cap \Omega \neq \varnothing$. (absurdo!).

($\supseteq$) Por outro lado seja $F \in \langle \overline{A} \rangle$ e $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ um aberto em $\exp(X)$ com $F \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Como $F \subseteq \overline{A}$ e $F \cap U_i \neq \varnothing$ para cada $1 \leq i \leq n$, então existe $x_i \in A \cap U_i$. Logo $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq A \cap \bigcup_{i=1}^{n} U_i \neq \varnothing$ e conseqüentemente $\{x_1, \ldots, x_n\} \in \langle A \rangle \cap \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$. Logo $F \in \overline{\langle A \rangle}$.

□

5.3. $\overline{\rangle A \langle} = \rangle \overline{A} \langle$.

Demonstração. Análoga à demonstração anterior.

□

5.4. *Se* $B \subset A \subset X$, *então* $\overline{\langle A \rangle \cap \rangle B \langle} = \langle \overline{A} \rangle \cap \rangle \overline{B} \langle$.

Demonstração.

($\subseteq$) Imediato.

($\supseteq$) Seja $B \neq \varnothing$ e $F \in \langle \overline{A} \rangle \cap \rangle \overline{B} \langle$. Temos $F \subseteq \overline{A}$ e $F \cap \overline{B} \neq \varnothing$. Supondo que $F \notin \overline{\langle A \rangle \cap \rangle B \langle}$, existe um aberto $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ tal que $F \in \langle U_1, \ldots, U_n \rangle$ e $\langle A \rangle \cap \rangle B \langle \cap \langle U_1, \ldots, U_n \rangle = \varnothing$. Seja $d_i \in F \cap U_i$ para todo i. Logo $d_i \in \overline{A}$ e conseqüentemente $U_i \cap A \neq \varnothing$. Escolhemos $a_i \in U_i \cap A$. Como $F \cap \overline{B} \neq \varnothing$, existe $b \in U_k \cap B$ para algum $1 \leq k \leq n$. Dado que $B \subset A$, obtemos $\{a_1, \ldots, a_n\} \cup \{b\}$ um ponto pertencente a $\langle U_1, \ldots, U_n \rangle \cap \langle A \rangle \cap \rangle B \langle$ e portanto $F \in \overline{\langle A \rangle \cap \rangle B \langle}$. □

A partir de agora, iremos determinar cada $\exp^{(n)}(X)$.

Proposição 5.5. $\exp^{(0)}(X) = \langle X^{(0)} \rangle$.

Demonstração. Como X é compacto, todo ponto isolado em $\exp(X)$ é um subconjunto finito de pontos isolados de X (veja proposição 2.7 e obs 2.8).

$\square$

Proposição 5.6. $\exp^{(1)}(X) = \rangle X^{(1)} \langle$.

Demonstração. Utilizando a definição, temos

$$\exp^{(1)}(X) = \exp(X) \setminus \overline{\exp^{(0)}} = \exp(X) \setminus \overline{\langle X^{(0)} \rangle} = \exp(X) \setminus \langle \overline{X^{(0)}} \rangle = \rangle X \setminus \overline{X^{(0)}} \langle = \rangle X^{(1)} \langle.$$

$\square$

Proposição 5.7. $\exp^{(2)}(X) = \langle X^{(0)} \cup X^{(2)} \rangle \cap \rangle X^{(2)} \langle$

Demonstração. Basta utilizar o fato 5.1 e as proposições anteriores,

$$\begin{aligned}
\exp^{(2)}(X) &= \complement\overline{\exp^{(1)}(X)} \cap \complement\exp^{(0)}(X) \\
&= \langle \complement\overline{X^{(1)}} \rangle \cap \rangle \complement X^{(0)} \langle \\
&= \langle X^{(0)} \cup X^{(2)} \rangle \cap \rangle \complement X^{(0)} \langle \text{ (proposição 4.2)} \\
&= \langle X^{(0)} \cup X^{(2)} \rangle \cap \rangle X^{(2)} \langle
\end{aligned}$$

$\square$

Proposição 5.8. $\exp^{(3)}(X) = \langle X^{(0)} \cup X^{(3)} \rangle \cap \rangle X^{(3)} \langle$

Demonstração. Utilizando o fato 5.1 e as proposições anteriores,

$$\begin{aligned}
\exp^{(3)}(X) &= \complement\overline{\exp^{(2)}(X)} \cap \complement\exp^{(1)}(X) \cap \complement\exp^{(0)}(X) \\
&= \complement\langle \overline{X^{(0)}}, \overline{X^{(2)}} \rangle \cap \complement\rangle X^{(1)} \langle \cap \complement\langle X^{(0)} \rangle \\
&= \complement\langle \overline{X^{(0)}}, \overline{X^{(2)}} \rangle \cap \langle \overline{X^{(0)}} \rangle \cap \complement\langle X^{(0)} \rangle \\
&= \langle X^{(0)} \cup X^{(3)} \rangle \cap \rangle X^{(3)} \langle
\end{aligned}$$

$\square$

Proposição 5.9. $\exp^{(4)}(X) = \langle X^{(0)} \cup X^{(2)} \cup X^{(4)} \rangle \cap \rangle X^{(4)} \langle$

Demonstração. Novamente através do fato 5.1 e dos $\exp^{(n)}(X)$ já calculados

$$\begin{aligned}
\exp^{(4)}(X) &= \complement\overline{\exp^{(3)}(X)} \cap \complement\exp^{(2)}(X) \cap \complement\exp^{(1)}(X) \cap \complement\exp^{(0)}(X) \\
&= \complement\langle \overline{X^{(0)}}, \overline{X^{(3)}} \rangle \cap \complement(\langle X^{(0)} \cup X^{(2)} \rangle \cap \rangle X^{(2)} \langle) \cap \complement\rangle X^{(1)} \langle \cap \complement\langle X^{(0)} \rangle \\
&= \langle \overline{X^{(0)}} \rangle \cap \complement\rangle \overline{X^{(3)}} \langle \cap \complement\langle X^{(0)} \cup X^{(2)} \rangle \\
&= \langle X^{(0)} \cup X^{(2)} \cup X^{(4)} \rangle \cap \rangle X^{(4)} \langle
\end{aligned}$$

□

Proposição 5.10. $\exp^{(5)}(X) = \langle X^{(0)} \cup X^{(2)} \cup X^{(3)} \cup X^{(5)} \rangle \cap \rangle X^{(2)} \cup X^{(5)} \langle \cap$
$\rangle X^{(3)} \cup X^{(5)} \langle$

Demonstração. Com o fato 5.1 e proposições anteriores, obtemos

$$\begin{aligned}
\exp^{(5)}(X) &= \complement\overline{\exp^{(4)}(X)} \cap \complement\exp^{(3)}(X) \cap \complement\exp^{(2)}(X) \cap \complement\exp^{(1)}(X) \cap \complement\exp^{(0)}(X) \\
&= \complement\langle \overline{X^{(0)}}, \overline{X^{(4)}} \rangle \cap \complement\Big(\langle X^{(0)}, X^{(3)} \rangle \cap \rangle X^{(3)} \langle\Big) \cap \complement\Big(\langle X^{(0)} \cup X^{(2)} \rangle \cap \rangle X^{(2)} \langle\Big) \cap \\
&\quad \cap \complement\rangle X^{(1)} \langle \cap \complement\langle X^{(0)} \rangle \\
&= \langle \overline{X^{(0)}} \rangle \cap \rangle \overline{X^{(4)}} \langle \cap \complement\Big(\langle X^{(0)} \cup X^{(3)} \rangle \cap \rangle X^{(3)} \langle\Big) \cap \complement\Big(\langle X^{(0)} \cup X^{(2)} \rangle \cap \rangle X^{(2)} \langle\Big) \cap \\
&\quad \cap \complement\langle X^{(0)} \rangle \\
&= \langle X^{(0)} \cup X^{(2)} \cup X^{(3)} \cup X^{(5)} \rangle \cup \complement(X^{(0)} \cup X^{(3)} \rangle \cap \complement(X^{(0)} \cup X^{(2)} \rangle \\
&= \langle X^{(0)} \cup X^{(2)} \cup X^{(3)} \cup X^{(5)} \rangle \cap \rangle X^{(2)} \cup X^{(5)} \langle \cap \rangle X^{(3)} \cup X^{(5)} \langle
\end{aligned}$$

□

Proposição 5.11. $\exp^{(6)}(X) = \varnothing$ *e conseqüentemente* $\exp^{(n)}(X) = \varnothing$ *para todo* $n \geq 8$.

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\exp^{(6)}(X) &= \complement\overline{\exp^{(5)}(X)} \cap \complement\exp^{(4)}(X) \cap \complement\exp^{(3)}(X) \cap \complement\exp^{(2)}(X) \cap \complement\exp^{(1)}(X) \cap \complement\exp^{(0)}(X) \\
&= \complement\langle \overline{X^{(0)}}, \overline{X^{(2)}}, \overline{X^{(3)}} \rangle \cap \complement\Big(\langle X^{(0)} \cup X^{(2)} \cup X^{(4)} \rangle \cap \rangle X^{(4)} \langle\Big) \cap \\
&\quad \cap \complement\Big(\langle X^{(0)}, X^{(3)} \rangle \cap \rangle X^{(3)} \langle\Big) \cap \complement\Big(\langle X^{(0)} \cup X^{(2)} \rangle \cap \rangle X^{(2)} \langle\Big) \cap \complement\rangle X^{(1)} \langle \cap \complement\langle X^{(0)} \rangle \\
&\subseteq \Big(\langle X^{(0)} \cup X^{(3)} \rangle \cap \cap\complement(\langle X^{(0)}, X^{(3)} \rangle \cap \rangle X^{(3)} \langle)\complement\langle X^{(0)} \rangle\Big) \cup \\
&\quad \cup\Big(\langle X^{(0)} \cup X^{(2)} \cup X^{(4)} \rangle\complement(\langle X^{(0)} \cup X^{(2)} \cup X^{(4)} \rangle \cap \rangle X^{(4)} \langle) \cap \\
&\quad \cap\complement(\langle X^{(0)} \cup X^{(2)} \rangle \cap \rangle X^{(2)} \langle) \cap \complement\langle X^{(0)} \rangle\Big) \\
&= \varnothing \cup \varnothing
\end{aligned}$$

□

Proposição 5.12. $\exp^{(7)}(X) = \langle \overline{X^{(0)}}, \overline{X^{(3)}}, \overline{X^{(4)}} \rangle$

Demonstração. De forma similar as demonstrações anteriores,temos

$$\begin{aligned}
\exp^{(7)}(X) &= \complement\overline{\exp^{(6)}(X)} \cap \complement\exp^{(5)}(X) \cap \complement\exp^{(4)}(X) \cap \complement\exp^{(3)}(X) \cap \\
&\quad \complement\exp^{(2)}(X) \cap \complement\exp^{(1)}(X) \cap \complement\exp^{(0)}(X) \\
&= \complement(\langle X^{(0)} \cup X^{(2)} \cup X^{(3)} \cup X^{(5)} \rangle \cap \rangle X^{(2)} \cup X^{(5)} \langle \cap \rangle X^{(3)} \cup X^{(5)} \langle) \cap \\
&\quad \cap\complement(\langle X^{(0)} \cup X^{(2)} \cup X^{(4)} \rangle \cap \rangle X^{(4)} \langle) \cap \\
&\quad \cap\complement(\langle X^{(0)}, X^{(3)} \rangle \cap \rangle X^{(3)} \langle) \cap \complement(\langle X^{(0)} \cup X^{(2)} \rangle \cap \rangle X^{(2)} \langle) \cap \\
&\quad \cap\complement\rangle X^{(1)} \langle \cap \complement\langle X^{(0)} \rangle
\end{aligned}$$

Vamos dividir o problema em duas parte. Na primeira calculamos

$$\begin{aligned}
&\langle \overline{X^{(0)}} \rangle \cap \complement\langle X^{(0)} \rangle \cap \complement\Big(\langle X^{(0)} \cup X^{(2)} \rangle \cap \rangle X^{(2)} \langle\Big) \cap \complement\Big(\langle X^{(0)} \cup X^{(2)} \cup X^{(4)} \rangle \cap \rangle X^{(4)} \langle\Big) = \\
&= \langle \overline{X^{(0)}} \rangle \cap \rangle X^{(3)} \cap \bigcup_{n \geq 5} X^{(n)} \langle = \\
&= \langle \overline{X^{(0)}} \rangle \cap \rangle \overline{X^{(3)}} \langle
\end{aligned}$$

E, na segunda,

$$\begin{aligned}
& \langle\overline{X^{(0)}}\rangle \cap \complement\langle X^{(0)}\rangle \cap \complement\Big(\langle X^{(0)} \cup X^{(2)}\rangle \cap \rangle X^{(2)}\langle\Big) \cap \complement\Big(\langle X^{(0)} \cup X^{(3)}\rangle \cap \rangle X^{(3)}\langle\Big) \cap \\
& \cap\complement(\langle X^{(0)} \cup X^{(2)} \cup X^{(3)} \cup X^{(5)}\rangle \cap \rangle X^{(2)} \cup X^{(5)}\langle \cap \rangle X^{(3)} \cup X^{(5)}\langle) = \\
= \; & \langle\overline{X^{(0)}}\rangle \cap \rangle X^{(4)} \cap \bigcup_{n\geq 6} X^{(n)}\langle = \\
= \; & \langle\overline{X^{(0)}}\rangle \cap \rangle\overline{X^{(4)}}\langle
\end{aligned}$$

E assim temos

$$\langle\overline{X^{(0)}}\rangle \cap \rangle\overline{X^{(3)}}\langle \cap \rangle\overline{X^{(4)}}\langle = \langle\overline{X^{(0)}}, \overline{X^{(3)}}, \overline{X^{(4)}}\rangle$$

□

Proposição 5.13. *Para todo inteiro positivo n, $\overline{\exp^{(n)}(X)}$ é vazio ou homeomorfo ao conjunto de Cantor.*

Demonstração. Primeiramente calculamos a aderência de cada conjunto determinado nas proposições anteriores deste capítulo.

$$\begin{aligned}
\overline{\exp^{(1)}(X)} &= \rangle\overline{X^{(1)}}\langle \\
\overline{\exp^{(2)}(X)} &= \langle\overline{X^{(0)}}, \overline{X^{(2)}}\rangle \\
\overline{\exp^{(3)}(X)} &= \langle\overline{X^{(0)}}, \overline{X^{(3)}}\rangle \\
\overline{\exp^{(4)}(X)} &= \langle\overline{X^{(0)}}, \overline{X^{(4)}}\rangle \\
\overline{\exp^{(5)}(X)} &= \langle\overline{X^{(0)}}, \overline{X^{(2)}}, \overline{X^{(3)}}\rangle \\
\overline{\exp^{(7)}(X)} &= \langle\overline{X^{(0)}}, \overline{X^{(3)}}, \overline{X^{(4)}}\rangle \\
\overline{\exp^{(n)}(X)} &= \varnothing \text{ para } n = 6 \text{ ou } n \geq 8
\end{aligned}$$

De acordo com o corolário 3.3 sabemos que um espaço métrico compacto zero-dimensional não vazio é homeomorfo ao conjunto de Cantor se não possui pontos isolados. Vamos, então, verificar este fato para cada conjunto $\overline{\exp^{(n)}(X)}$.

Para $n > 1$, para todo $F \in \overline{\exp^{(n)}(X)}$ teremos que $F \subset \overline{X^{(0)}}$ e deve existir um ponto $x \in F \setminus X^{(0)}$. Pegamos uma seqüência $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X^{(0)}$ que converge para x e definimos $F_k = F \cup \{x_k\}$ se $x_k \notin F$ e $F_k = F \setminus \{x_k\}$ se $x_k \in F$. Como cada x_k é isolado, o respectivo F_k é fechado e assim, temos a seqüência $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para F. Como cada F_k difere de F em apenas um ponto de $X^{(0)}$, F_k intercepta todo $\overline{X^{(m)}}$ para $m \geq 2$ que F intercepta. Logo F_k pertence a $\overline{\exp^{(n)}(X)}$.

Para $n = 1$. Seja $x \in F \cap \overline{X^{(1)}}$ e $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq X^{(1)} \setminus \{x\}$ uma seqüência que converge para x. Para cada k escolhemos um aberto-fechado $U_k \subset X^{(1)}$ tal que $x_k \in U_k$ e $\delta(U_k) < d(x, x_k)/3^k$ e definimos $F_k = F \cup U_k$ se $U_k \not\subseteq F$ ou $F_k = F \setminus U_k$ caso contrário. Assim, $F_k \to F$ e como x pertence a todo F_k, $F_k \in \rangle\overline{X^{(1)}}\langle$ e conseqüentemente F não é isolado em $\overline{\exp^{(n)}(X)}$.

□

A seguir apresentaremos uma tabela que relaciona os possíveis espectros de um espaço em $\mathcal{Z}_0$ e o respectivo espectro de seu exponencial. Como o teorema anterior garante que todo espaço exponencial de um espaço métrico compacto zero-dimensional é pleno, determinaremos os espaços exponencialmente completos bastando observar seus pontos isolados e seu espectro de acumulação (teorema 4.17).

Observe que se a quantidade dos pontos isolados de um espaço X é finita, a cardinalidade do conjunto dos pontos isolados de $\exp(X)$ é $2^{|X^{(0)}|} - 1$ já que é formado pelo conjunto das partes não vazias de $X^{(0)}$. Isto nos leva a concluir que os espaços exponencialmente completos ou não possuem pontos isolados, ou a quantidade de pontos isolados é infinita.

LISTA DE TODOS OS EXPONENCIAIS EM $\mathcal{Z}_0$

	$s(X)$	$s(\exp(X))$	$\exp(X)$
1	$\{0\}$	$\{0\}$	$\{2,3,\ldots,2^{\lvert X^{(0)}\rvert}\}$
2	$\{1\}$	$\{1\}$	$\mathcal{C}_1$
3	$\{0,1\}$	$\{0,1\}$	$\mathcal{C}_1 \cup \{2,3,\ldots,2^{\lvert X^{(0)}\rvert}\}$
4	$\{0,2\}$	$\{0,2\}$	$\mathcal{C}_2$
5	$\{0,1,2\}$	$\{0,1,2\}$	$\mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2$
6	$\{0,1,3\}$	$\{0,1,3\}$	$\mathcal{C}_3$
7	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3,5\}$	$\mathcal{C}_5$
8	$\{0,1,2,4\}$	$\{0,1,2,4\}$	$\mathcal{C}_4$
9	$\{0,1,2,3,4\}$	$\{0,1,2,3,4,5,7\}$	$\mathcal{C}_7$
10	$\{0,1,2,3,5\}$	$\{0,1,2,3,5\}$	$\mathcal{C}_5$
11	$\{0,1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4,5,7\}$	$\mathcal{C}_7$
12	demais espectros	$\{0,1,2,3,4,5,7\}$	$\mathcal{C}_7$

Através desta tabela podemos concluir os seguintes resultados:

Teorema 5.14 (Marjanović). *Os únicos espaços exponenciais a menos de um homeomorfismo na classe dos espaços métricos compactos zero-dimensionais são:* $\{2,3,\ldots,2^n\}$ *para* $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{C}_1 \cup \{2,3,\ldots,2^n\}$ *para* $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_5$ *e* $\mathcal{C}_7$.

□

Corolário 5.15. *As 9 soluções da equação* $X = \exp(X)$ *na classe dos espaços métricos compactos zero-dimensionais não triviais são:* $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_0 \oplus \mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_5$, $\mathcal{C}_7$

□

Apêndice A

Exponenciais de outros espaços topológicos

Este apêndice tem por finalidade expor alguns exemplos de exponenciais de espaços diferentes dos que estávamos trabalhando. A idéia é estabelecer se os espaços são exponencialmente completos ou não.

O primeiro espaço que veremos é $\{0,1\}^{\aleph_1}$, um espaço zero-dimensional compacto mas não metrizável. É um exemplo de espaço exponencialmente completo, fato mostrado por S.Sirota [12] em 1968.

A.1 $\{0,1\}^{\aleph_1}$

Para determinarmos o exponencial de $\{0,1\}^{\aleph_1}$ vamos utilizar a seguinte construção:

Para cada $\alpha \in \aleph_1 \setminus \{0\}$, seja X_α o produto topológico $\left(\{0,1\}^{\aleph_0}\right)^\alpha$ e para cada $0 < \alpha < \beta < \aleph_1$ seja

$$\begin{aligned} \Pi^\beta_\alpha : \quad & X_\beta \longrightarrow X_\alpha \\ \Pi^\beta_\alpha : \quad & \mathcal{C}^\beta \longrightarrow \mathcal{C}^\alpha \qquad \text{projeção contínua e aberta.} \end{aligned}$$

Se $\beta > \alpha > \gamma > 0$, então

$$\Pi^\alpha_\gamma \circ \Pi^\beta_\alpha = \Pi^\beta_\gamma$$

Estas condições determinam que $\{X_\beta; \Pi^\beta_\alpha; \aleph_1 \setminus \{0\}\}$ é um sistema inverso e vale:

$$\exp(\lim_{\leftarrow} X_\beta) = \lim_{\leftarrow} \exp(X_\beta)$$

Além disso, $\lim_{\leftarrow} X_\beta$ é homeomorfo a $\{0,1\}^{\aleph_1}$.

Para cada $0 \leq \beta < \aleph_1$, X_β é homeomorfo a $\mathcal{C}$ e, também, $\exp(X_\beta)$ é homeomorfo a $\mathcal{C}$. Logo $\exp(\{0,1\}^{\aleph_1})$ é homeomorfo a $\{0,1\}^{\aleph_1}$. Trata-se de um espaço exponencialmente completo.

A.2 $\{0,1\}^{\aleph_2}$

Em 1976 Shapiro publicou um artigo [10] em que, também utilizando limites inversos e uma construção complexa, mostrou que $\{0,1\}^{\aleph_2}$ não é exponencialmente completo. O espaço em questão não é metrizável e é zero-dimensional compacto.

A.3 $[0,1]$

Desde a década de 20 a escola polonesa de topologia conjecturava que $\exp([0,1])$ fosse homeomorfo ao cubo de Hilbert $[0,1]^{\aleph_0}$. Em 1975 Schori e West mostraram a veracidade desta afirmação concluindo-se que $[0,1]$ não é exponencialmente completo. Este espaço é metrizável, compacto mas não é zero-dimensional.

Referências Bibliográficas

[1] R. Engelking, *General topology*, Heldernmann, 1989.

[2] J. G. Hocking and G. S. Young, *Topology*, Addison-Wesley, 1961.

[3] K. Kunen, *Set theory: independence proofs*, North Holland, 1980.

[4] M. M. Marjanović, *Exponentially complete spaces III*, Publications de l'Institute Mathématique **14** (1972), no. 28, 97–109.

[5] M. M. Marjanović and A. R. Vučemilović, *Two non-homeomorphic countable spaces having homeomorphic squares*, Comm. Math. Univ. Caroline **26** (1985), 579–588.

[6] E. Michael, *Topologies on spaces of subsets*, Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1951), 152–182.

[7] Jr. S. B. Nadler, *Hyperspaces of sets*, Marcel Dekker, 1978.

[8] A. Pelczynski, *A remark on space 2^X for zero-dimentional X*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. **13** (1965), 85–89.

[9] R. M. Schori and J. E. West, *The hyperspace of the closed unit interval is a Hilbert cube*, Transactions of the American Mathematical Society **213** (1975), 217–235.

[10] L. Shapiro, *The space of closed subsets of $D^{\aleph_2}$ is not a dyadic bicompact*, Soviet Math. Dokl. **17** (1976), 937–941.

[11] G. F. Simmons, *Introduction to topology and modern analysis*, McGraw-Hill, 1963.

[12] S. Sirota, *The spectral representation of spaces of closed subsets of bicompacta*, Soviet Math. Dokl. **9** (1968), 997–1000.

[13] S. Todorcević, *Topics in topology*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1652, Springer, 1997.

[14] H. Torunczyk, *Characterizing Hilbert space topology*, Fund. Math. (1981), 247–262.

[15] Jan van Mill, *Characterization of some zero-dimensional separable metric spaces*, Transactions of the American Mathematical Society **1.264** (1981), 205–215.

[16] A. R. Vučemilović, *On countable spaces*, Mathematica Balkanica **4.127** (1974), 579–588.

[17] A. N. Vybornov, *Exponentials of zero-dimensional Polish spaces*, Soviet Math. Dokl. **32** (1985), 532–536.

Índice Remissivo