UM ESPAÇO DE BANACH QUE NÃO CONTÉM NENHUM SUBESPAÇO ISOMORFO À $c_0(\mathrm{N})$, NENHUM SUBESPAÇO ISOMORFO À $l_1(\mathrm{N})$ E NENHUM SUBESPAÇO REFLEXIVO DE DIMENSÃO INFINITA

Mauricio Zuluaga Martinez

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Análise Matemática**

Orientador: **Prof. Dr. Elói Medina Galego**

Apoio financeiro do CNPq

-São Paulo, Março de 2003-

UM ESPAÇO DE BANACH QUE NÃO CONTÉM
NENHUM SUBESPAÇO ISOMORFO À $c_0(\mathrm{N})$,
NENHUM SUBESPAÇO ISOMORFO À $l_1(\mathrm{N})$
E NENHUM SUBESPAÇO REFLEXIVO
DE DIMENSÃO INFINITA

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação de mestrado devidamente
corrigida e defendida por
Mauricio Zuluaga Martinez
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, Março de 2003

Banca examinadora:

* Prof. Dr Elói Medina Galego (Presidente) - IME-USP

* Prof. Dr Chaim Samuel Hönig - IME-USP

* Prof. Dr Raymundo Luiz de Alencar -ITA

Agradecimentos

Ao meu orientador, **Professor Doutor Elói Medina Galego**, pelo incentivo em estudar o artigo deste trabalho.

Ao **Professor Doutor Valentin Ferenczi**, pela ajuda na prova da Afirmação 5.2.

Ao **Professor Doutor Yoshiharu Kohayakawa**, pela prova que nos deu do Lema 5.41.

À minha **familia**.

A todos meus professores na **Colombia** e no **Brasil**.

A meus amigos **Colombianos**.

A meus colegas de cursos aqui no **Brasil**.

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar a construção de um (o primeiro) espaço de Banach de dimensão infinita que não contém nenhum subespaço isomorfo à $c_0(\mathbf{N})$, nenhum subespaço isomorfo à $l_1(\mathbf{N})$ e nenhum subespaço reflexivo de dimensão infinita.

Abstract

An infinite-dimensional space is constructed which does not contain $c_0(\mathbf{N})$, $l_1(\mathbf{N})$ or an infinite-dimensional reflexive subspace.

Introdução

Um antigo Teorema de R. James [J] afirma que todo espaço de Banach X com uma base incondicional, ou é reflexivo ou contém um subespaço isomorfo à $c_0(\mathbf{N})$ ou contém um subespaço isomorfo à $l_1(\mathbf{N})$.

Daí surgiu naturalmente o seguinte problema que esteve em aberto por muitos anos.

Problema. Seja X um espaço de Banach. É verdade que X contém um subespaço reflexivo de dimensão infinita ou X contém um subespaço isomorfo à $c_0(\mathbf{N})$ ou à $l_1(\mathbf{N})$?

O Teorema de R. James acima mencionado garante solução positiva para o problema no caso em que X possua uma base incondicional.

A nossa dissertação consistirá em apresentar em detalhe a solução negativa desse problema dada por W. T. Gowers em 1994 [G].

O espaço construído por W. T. Gowers exige técnicas bem delicadas da geometria de espaços de Banach e envolve a teoria da probabilidade.

Esse trabalho de W. T. Gowers faz parte de uma série de artigos em geometria de espaços de Banach que o levou a ganhar a Medalha Field em 1998.

Índice

Notações

Notação 0.1 *Por* **N**, $\mathbf{Z}^+$ *e* **R** *denotaremos respectivamente os conjuntos* $\{1, 2, ...\}$, $\{0, 1, 2, ...\}$ *e o conjunto dos números reais.*

Notação 0.2 *Por* $l_p(\mathrm{N})$ *denotaremos o espaço de Banach das seqüências p-somáveis reais com a norma*

$$||(a_n)_{n\in N}||_{l_p} = \sqrt[p]{\sum_1^\infty |a_n|^p}.$$

Notação 0.3 *Por* $c_0(\mathrm{N})$ *denotaremos o espaço de Banach das seqüências que convergem a zero, com a norma do supremo.*

Notação 0.4 *Por* $c_{00}(\mathrm{N})$ *denotaremos o espaço vetorial das seqüências de escalares com apenas um número finito de coordenadas não nulas e por* $(e_n)_n$ *denotaremos a base vetorial unitária desse espaço.*

Notação 0.5 *Um* **intervalo E de N** *será um subconjunto dos números naturais da forma* $\{a, a+1, ..., b\}$ *para alguns* a, $b \in \mathrm{N}$.

Notação 0.6 *Seja* E *um subconjunto de* **N** , *usaremos também a letra* E *para denotar a* **projeção** *definida por* $E(\sum_1^\infty a_i e_i) = \sum_{i\in E} a_i e_i$, *onde* $\sum_1^\infty a_i e_i \in c_{00}(\mathrm{N})$.

Notação 0.7 *Se* E *e* F *são intervalos de* **N** *então escreveremos* $E<F$ *para indicar que* **max E<min F**.

Notação 0.8 *Por* **supp(x)** *denotaremos o suporte de um vetor* $x = \sum_1^\infty a_i e_i$, *isto é,* $supp(x) = \{i : a_i \neq 0\}$ *e por* **ran(x)** *denotaremos o menor intervalo de* **N** *contendo o seu suporte, logo* **supp(x)** $\subset$ **ran(x)**.

Observemos que se $E \subset \mathbf{N}$ então supp($E(x)$) $\subset$ supp(x), ran($E(x)$) $\subset$ ran(x). Mais ainda, se E =ran(x) ou E =supp(x) temos que $E(x) = x$.

Notação 0.9 *Sejam x e y vetores em $c_{00}(\mathbf{N})$, escreveremos* **x<y** *quando* **ran(x)<ran(y)**.

Notação 0.10 *Se $x_1 < .. < x_n$ são elementos de $c_{00}(\mathbf{N})$, então diremos que $x_1, .., x_n$ são* **sucessivos**.

Notação 0.11 *Escreveremos* **a $\vee$ b** *para indicar $max\{a, b\}$ com $a,b \in \mathbf{R}$.*

Preliminares

Inicialmente lembraremos algumas definições e resultados bem conhecidos da geometria de espaços de Banach.

Definição 0.1 *Seja X espaço de Banach sobre* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$, *indicaremos por X^** **o conjunto de todas as aplicações lineares contínuas** *de X, isto é, o dual topológico de X.*

Definição 0.2 *Uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço de Banach X é uma* **base de Schauder** *de X se, e somente se, para cada $x \in X$, existe uma única seqüência de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$. Se $||x_n|| = 1$, para todo $n \in \mathbf{N}$, diremos que a base é normalizada.*

Observação 0.3 *Seja X um espaço de Banach com base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Pela Proposição 1.a.2 [L-T, pag 1], as projeções $P_n : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ definidas por*

$$P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

são contínuas e

$$\sup\{||P_n|| : n \in \mathbf{N}\} < \infty.$$

O número $\sup\{||P_n|| : n \in \mathbf{N}\}$ *é chamado de* **constante básica** *de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e quando esse número for igual a 1, a base é chamada* **monótona.**

Proposição 0.4 *Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de vetores em X. Então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder de X se, e somente se, as três condições abaixo são verificadas*

1. $(x_n) \neq 0$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

2. *Existe uma constante K, tal que para cada seqüência de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ e inteiros $p < q$ tem-se*

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} a_i x_i\right\| \leq K\left\|\sum_{i=1}^{q} a_i x_i\right\|.$$

3. *O subespaço fechado gerado por $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é todo o espaço X.*

Definição 0.5 *Sejam X um espaço vetorial normado e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base vetorial de X. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é chamada* **bimonótona** *se, para quaisquer inteiros $p \leq q$ e para quaisquer $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \in X$ temos que*

$$\left\|\sum_{i=p}^{q} a_i x_i\right\| \leq \|x\|.$$

Definição 0.6 *Uma seqüência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é chamada de* **seqüência básica** *se for base de Schauder para o subespaço fechado gerado por ela, isto é, para $[(x_n)_{n=1}^{\infty}]$.*

Teorema 0.7 *(L-T, pág. 2) Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de elementos não nulos no espaço de Banach X. Então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma seqüência básica se, e somente se, existe um número real positivo k, tal que para qualquer seqüência de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ e inteiros $m < n$, têm-se*

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| \leq k\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\|.$$

Observação 0.8 *Sejam X um espaço de Banach, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência básica em X, $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência estritamente crescente de inteiros positivos e $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência de números reais. Uma seqüência $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ dada por*

$$u_j = \sum_{n=p_j+1}^{p_{j+1}} a_n x_n$$

com $u_j \neq 0$ para todo $j \in \mathbf{N}$ é chamada de **base de bloco de** $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Observação 0.9 *Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência básica X, então pelo Teorema 0.7 toda base de bloco $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é também uma seqüência básica de X. O subespaço fechado de X, gerado por $(u_j)_{j=1}^{\infty}$, $[(u_j)_{j=1}^{\infty}]$, é chamado de* **subespaço de bloco de** X.

Observação 0.10 *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência básica em* $\mathbf{X}$. *Para todo $j \in \mathbf{N}$, o funcional linear contínuo f_j^* definido por*

$$f_j^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = a_j$$

é chamada **funcional coeficiente** *da seqüência básica $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.*

Definição 0.11 *Duas bases de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de espaços de Banach* $\mathbf{X}$ *e* $\mathbf{Y}$ *respectivamente, são ditas* **equivalentes** *se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ também converge.*

Escreveremos $(x_n)_{n=1}^{\infty} \sim (y_n)_{n=1}^{\infty}$.

Proposição 0.12 *(L-T, pág. 5) Sejam X e Y espaços de Banach. Uma base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de X é equivalente a uma base de Schauder $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de Y se, e somente se, existe um isomorfismo: $T : X \to Y$ tal que $T(x_n) = y_n$, $\forall n \in \mathbf{N}$.*

Proposição 0.13 *(L-T, pág. 53) Seja X um dos espaços de Banach $c_0(\mathbf{N})$ ou $l_1(\mathbf{N})$ e $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base de bloco normalizada de $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ em X. Então $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ é equivalente a $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ e $[(z_n)_{n=1}^{\infty}]$ é isométrico a X.*

Teorema 0.14 *(L-T, pág. 7) Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base de Schauder do espaço de Banach X com funcionais coeficientes $(f_j^*)_{n=1}^{\infty}$. Se uma seqüência $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ em X satisfaz:*

a. $inf\{||y_n|| : n \in \mathbf{N}\} > 0$,

b. $(f_j^*)(y_n) \to 0$ *quando* $n \to \infty$ *para todo* $j \in \mathbf{N}$,

então existe uma subseqüência $(y_{p_n})_{n=1}^{\infty}$ de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ que é uma seqüência básica equivalente a uma base de bloco de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Observação 0.15 *(L-T, pág. 6) Sejam Y um subespaço de dimensão infinita de um espaço de Banach X e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base de Schauder de X. Então para todo inteiro positivo p existe $y \in Y$, $||y|| = 1$ tal que $y = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n x_n$, onde $a_i \in \mathbf{R}$.*

Proposição 0.16 *(Ho, pág. 189) Seja X um espaço de Banach reflexivo, então todo subespaço vetorial fechado Y de X também é reflexivo.*

Teorema 0.17 Hann-Banach. *(Ho, pág. 182.) Sejam X um espaço normado, X_0 um subespaço linear de X e $f_0 : X_0 \to R$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $f : X \to R$ tal que $f(x) = f_0(x)$, $\forall x \in X_0$, com $||f|| = ||f_0||$.*

Definição 0.18 *Sejam X um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base de Schauder de X.*

a. *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é* **contráctil** *se $\forall x^* \in X^*$, sendo*

$$x^*|_{[(x_i)_{i=n}^{\infty}]} : [(x_i)_{i=n}^{\infty}] \to R, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

a restrição de x^* ao fecho do subespaço gerado por $(x_i)_{i=n}^{\infty}$, têm-se

$$\left|\left| x^*|_{[(x_i)_{i=n}^{\infty}]} \right|\right| \to 0 \quad \textit{quando} \quad n \to \infty.$$

b. *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é* **limitadamente completa** *se para qualquer seqüência de escalares $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ com*

$$\sup\left\{ \left|\left| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right|\right| : n \in \mathbf{N} \right\} < \infty,$$

a série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ é convergente.

Proposição 0.19 *(L-T, pág. 8) Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base de Schauder de um espaço de Banach X e $(f_j^*)_{j=1}^{\infty}$ a seqüência de funcionais coeficientes associada à base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. A seqüência $(f_j^*)_{j=1}^{\infty}$ é base de Schauder de X^* se, e somente se, a base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é contráctil.*

Teorema 0.20 *(L-T, pág. 9) Seja X um espaço de Banach com uma base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Então são equivalentes:*

1. *X é reflexivo.*
2. *$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é contráctil.*

Definição 0.21 *Sejam X e Y espaços de Banach, dizemos que X* **tem um subespaço isomorfo a** *Y, se existe um operador linear contínuo injetor*

$$\varphi : Y \to X$$

com a imagem fechada e com inversa contínua.

Definição 0.22 *Uma função $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é* **côncava** *se $\forall x, y \in \mathbf{R}$ temos que $G(tx + (1-t)y) \geq tG(x) + (1-t)G(y)$, $\forall t \in (0,1)$.*

Dizemos que G é **convexa** *se $-G$ é côncava.*

É bem conhecido do cálculo diferencial que se G tem derivada até segunda ordem positiva então G é convexa.

Proposição 0.23 Desigualdade de Jensen. *(R, pág. 54.) Sejam G uma função côncava e $(a_i)_{i=1}^n$ uma seqüência de escalares satisfazendo $\sum_1^n a_i = 1$. Então*

$$G\Big(\sum_1^n a_i r_i\Big) \geq \sum_1^n a_i G(r_i).$$

Proposição 0.24 *(L-T, Proposição 1.a.11, pág. 6, Proposição 1.a.12, pág. 7 e Proposição 2.a.1, pág. 53) Seja X um espaço de Banach com base de Schauder $(x_n)_{n=1}^\infty$.*

a. *Se X contém um subespaço Z isomorfo à $c_0(\mathbf{N})$ (respectivamente $l_1(\mathbf{N})$), então Z contém um subespaço Y gerado por uma base de bloco normalizada $y_1, y_2, \ldots$, da base $(x_n)_{n=1}^\infty$ de X equivalente a base canônica $(w_n)_{n=1}^\infty$ de $c_0(\mathbf{N})$ (respectivamente $l_1(\mathbf{N})$).*

b. *Se X contém um subespaço Z de dimensão infinita, então Z contém um subespaço Y gerado por uma base de bloco normalizada $y_1, y_2, \ldots$, da base $(x_n)_{n=1}^\infty$ de X.*

Teorema 0.25 *(G-S, pág. 31) Sejam $r, n \in \mathbf{N}$. Então*

$$1 - \frac{\sum_{i=0}^{r-1+n/2} \binom{n}{i}}{2^n} \leq exp(-r/2n).$$

Capítulo 1

Alguns cálculos e definições básicas

Antes de começarmos construir o espaço de Banach mencionado na introdução, apresentaremos neste capítulo algumas propriedades de uma função real f, a existência de um certo conjunto $\mathbf{J}$ dos $\mathbf{N}$ e de uma função σ e um lema númerico que serão muito utilizados em todo este trabalho.

Proposição 1.1 *Denotando por f a função $f : [1, \infty) \to [1, \infty)$ dada por*

$$f(r) = \sqrt{\log_2(r+1)}.$$

Temos:

(i). $f(1) = 1 \quad e \quad f(r) < r \quad se \quad r > 1.$

(ii). f *é estritamente crescente e* $lim_{r\to\infty} f(r) = \infty$.

(iii). $lim_{r\to\infty} \frac{f(r)}{r^q} = 0,\ \forall q > 0.$

(iv). *A função* $\frac{r}{f(r)^2}$ *é côncava e não decrescente.*

NOTA: Em todo este trabalho, referir-nos-emos a essas propriedades indicando respectivamente $(i), (ii), (iii)$ e (iv).

Esses itens são muito utilizados nas provas dos quatro primeiros passos no Capítulo 5.

Prova de i. $f(r) = \left(\frac{\ln(r+1)}{\ln 2}\right)^{1/2}$, logo $lim_{r\to\infty} f(r) = \infty \quad$ e $\quad f(1) = 1.$

Prova de ii. $f'(r) = \frac{1}{2(r+1)\sqrt{\ln 2 \ln(r+1)}} > 0$, logo f é crescente e como

$$f'(r) = \frac{1}{2(r+1)\sqrt{\ln 2 \ln(r+1)}} < 1,$$

temos que

$$f(r) < r,$$

pois, se definirmos

$$g(r) = r - f(r),$$

então $g(1) = 0$ e

$$g'(r) = 1 - f'(r) > 0.$$

Assim $g(r) > 0$ se $r > 1$, isto é

$$f(r) < r \quad \text{se} \quad r > 1.$$

Prova de iii. Seja $q > 0$. Então

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{f'(r)}{qr^{q-1}} &= \frac{1}{2qr^{q-1}(r+1)\sqrt{\ln 2 \ln(r+1)}} \\ &= \frac{r}{(r+1)} \frac{1}{2qr^q} \frac{1}{\sqrt{\ln 2 \ln(r+1)}} \\ &< \frac{1}{2q} \frac{1}{\sqrt{\ln 2 \ln(r+1)}} \to 0, \quad \text{se} \quad r \to \infty. \end{aligned}$$

Agora $lim_{r\to\infty} \frac{f(r)}{r^q}$ tem a forma $\frac{\infty}{\infty}$. Logo

$$0 \leq lim_{r\to\infty} \frac{f(r)}{r^q} = lim_{r\to\infty} \frac{f'(r)}{qr^{q-1}} = 0.$$

Prova de iv. Seja $g(r) = \frac{r}{f(r)^2} = \frac{r \ln 2}{\ln(r+1)}$. Então

$$g'(r) = \ln 2 \left(\frac{\ln(r+1) - \frac{r}{r+1}}{\ln^2(r+1)} \right) > 0 \quad \text{se} \quad r \geq 1,$$

o que implica que g não é decrescente. Por outro lado, como $r = r + 1 - 1$, temos que

$$g'(r) = \ln 2 \left(\frac{1}{\ln(r+1)} + \frac{1}{(r+1)\ln^2(r+1)} - \frac{1}{\ln^2(r+1)} \right).$$

Logo

$$
\begin{aligned}
g''(r) &= \ln 2\left(\frac{-1}{(r+1)\ln^2(r+1)} - \frac{2\ln(r+1)+\ln^2(r+1)}{(r+1)^2\ln^4(r+1)} + \frac{2}{(r+1)\ln^3(r+1)}\right) \\
&= \ln 2\left(\frac{-1}{(r+1)\ln^2(r+1)} - \frac{2}{(r+1)^2\ln^3(r+1)} - \frac{1}{((r+1)\ln(r+1))^2}\right. \\
&+ \left.\frac{2}{(r+1)\ln^3(r+1)}\right) < 0 \quad \text{se} \quad r \geq 1.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$\frac{r}{f(r)^2} \quad \text{é côncava.} \qquad \blacksquare$$

No que segue vamos construir um $\mathbf{J}$ subconjunto dos números inteiros cujos elementos são muito grandes e estão bem "*separados*". Esse subconjunto será usado na construção do espaço de W.T.Gowers.

Proposição 1.2 *Existe um subconjunto infinito K de $\mathbf{N}$ satisfazendo:*

1. *Se $m, n \in K$ e $m < n$ então* $\log\log\log\log\log n \geq 1000m$ *e*
2. $f(m) > 10^{103}$, $\forall m \in K$.

Prova: Sejam $k \in \mathbf{N}$, $k_1 = 10^{10^{10^{10^{10^{1000k}}}}}$ e definamos $k_{n+1} = 10^{10^{10^{10^{10^{1000k_n}}}}}$ para $n \geq 1$. Então $\log\log\log\log\log(k_{n+1}) \geq 1000k_n$ e

$$
\begin{aligned}
f(k_n) &\geq f(k_1) = \sqrt{\log_2(k_1+1)} \geq \sqrt{\log_2 k_1} \\
&= \sqrt{\log_2 10^{10^{10^{10^{10^{1000K}}}}}} > \sqrt{\log_2 2^{10^{10^{10^{10^{1000K}}}}}} \\
&= \sqrt{10^{10^{10^{10^{1000K}}}}} = (10^{1/2})^{10^{10^{10^{1000K}}}} \\
&\geq 10^{10^{10^{1000K}}} \geq 10^{103}.
\end{aligned}
$$

Seja $K = \{k_1, k_2, ...\}$. Então claramente K satisfaz 1 e 2 da proposição. $\blacksquare$

A partir de agora, fixaremos um conjunto $\mathbf{J} = \{j_1, j_2, ...\}$ satisfazendo a Proposição 1.2. Neste momento seria possível mostrar a Observação 1.3, mas preferiremos prová-la mais adiante, onde provamos outras propriedades do conjunto $\mathbf{J}$, veja o Capítulo 4, seção O conjunto $\mathbf{J}$.

Observação 1.3 $\sum_1^\infty \frac{1}{f(j_n)} \leq \frac{1}{10^{102}} < 1$.

Prova: Veja a Observação 4.12. $\blacksquare$

1.1 Definições básicas

Definição 1.4 *Por* $\mathbf{Q}$ *denotaremos o subconjunto dos elementos* $x = \sum_1^\infty a_i e_i$ *em* $c_{00}(\mathbf{N})$ *para os quais os* a_i *são números racionais do intervalo* $[-1, 1]$.

Definição 1.5 *Por* $\mathbf{Q}_s$ *denotaremos conjunto das seqüências finitas de elementos sucessivos de* $\mathbf{Q}$, *veja a Notação 0.10.*

Proposição 1.6 *Existe uma bijeção* σ *entre* $\mathbf{Q}_s$ *e* $\mathbf{J}$.

Prova: Inicialmente observemos que $\mathbf{Q}$ é enumerável. De fato, se B_n indica o subconjunto dos elementos de $\mathbf{Q}$ contendo somente n coordenadas não nulas, então B_n é enumerável e $\mathbf{Q}= \bigcup_{n\in N} B_n$.

Agora, se C_n indica o subconjunto dos elementos de $\mathbf{Q}_s$ contendo somente n elementos sucessivos de $\mathbf{Q}$, então C_n é enumerável e $\mathbf{Q}_s= \bigcup_{n\in N} C_n$.

Logo os conjuntos $\mathbf{J}$ e $\mathbf{Q}_s$ são enumeráveis e infinitos e portanto existe uma bijeção entre eles. ■

Definição 1.7 σ *denotará uma função bijetora fixada de* $\mathbf{Q}_s$ *em* $\mathbf{J}$.

σ será muito útil na prova do 6ºPasso do Capítulo 5, veja Afirmação 5.97.

Definição 1.8 *Seja* $Y = (c_{00}(\mathbf{N}), ||.||)$ *um espaço normado tal que a base vetorial unitária* $(e_n)_{n=1}^\infty$ *é bimonótona.*

a. *Denotaremos por* $\mathbf{A}^*_\mathbf{m}(\mathbf{Y})$ *o conjunto das aplicações lineares contínuas de* Y *da forma* $\frac{x_1^*+\ldots+x_m^*}{f(m)}$ *onde:*

1. x_i^* *está em* $c_{00}(\mathbf{N})$, $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$.
2. *A norma de* x_i^* *em* Y^* *(*$||x_i^*||_{Y^*}$*) é menor ou igual a 1,* $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$.
3. $x_1^*, \ldots, x_m^*$ *são elementos sucessivos em* $c_{00}(\mathbf{N})$.

b. *Seja* $M \in \mathbf{N}$. *Uma* **seqüência especial** *de aplicações sobre* Y *é uma seqüência* $z_1^*, \ldots, z_M^*$ *satisfazendo:*

1. $z_1^*, \ldots, z_M^*$ *são elementos sucessivos em* $c_{00}(\mathbf{N})$.

2. $z_1^* \in A_m^*(Y) \cap \mathbf{Q}$ *para algum* m *em* $\mathbf{J}$.

3. $z_i^* \in A_{\sigma(z_1^*,\dots z_{i-1}^*)}^*(Y) \cap \mathbf{Q}$ *para* $2 \leq i \leq M$.

c. *Uma* **aplicação especial** *sobre* Y *é uma aplicação da forma* $E(z_1^* + \dots + z_M^*)$*, onde* E *é um intervalo de* $\mathbf{N}$ *e* $z_1^*, \dots, z_M^*$ *é uma seqüência especial de aplicações.*

d. *Seja* $w = E(z_1^* + \dots + z_M^*)$ *uma aplicação especial. Dizemos que* $\mathbf{Z} \subset \mathbf{N}$ *é um* **conjunto associado** *a essa aplicação se:*

$$Z = \{m_i \in \mathbf{N} : E \cap ran(z_i^*) \neq \phi, \quad z_i^* \in A_{m_i}^*(Y)\}.$$

e. *Dizemos que as aplicações especiais* $w_1^*, \dots, w_N^*$, $N \in \mathbf{N}$ *são* **aplicações especiais disjuntas (a.e.d)** *se os respectivos conjuntos associados* $Z_1, \dots, Z_N$ *são disjuntos dois a dois.*

A Definição 1.8 será usada no Capítulo 2, na construção da norma do espaço que deu solução negativa ao problema mencionado na introdução, bem como no Capítulo 4, veja Definições 4.1 e 4.2.

1.2 Um lema numérico

O Lema 1.9 será fundamental na prova do 3ºPasso no Capítulo 5.

Lema 1.9 *Sejam* $N \in \mathbf{N}$, $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$, $\epsilon > 0$ *e* $\delta = \sqrt{2\epsilon}$ *números reais satisfazendo:*

1. $\sum_{i=1}^{N} a_i^2 \leq 1$.

2. $\sum_{i=1}^{N} b_i^2 \leq 1$.

3. $\sum_{i=1}^{N} a_i b_i \geq 1 - \epsilon$.

Então existe um subconjunto $A \subset \{1, 2, \dots, N\}$ *tal que*

$$\sum_{i \in A} a_i^2 \geq 1 - \delta \quad e \quad 1 - \sqrt{\delta} \leq \frac{b_i}{a_i} \leq 1 + \sqrt{\delta}, \quad \forall i \in A.$$

Para fazer a prova do Lema 1.9 precisamos das oito afirmações abaixo.

Afirmação 1.10 $\sum_{i=1}^{N}(a_i - b_i)^2 \leq 2\epsilon$.

Prova: Pelos itens (1), (2) e (3) temos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}(a_i - b_i)^2 &= \sum_{i=1}^{N} a_i^2 - 2\sum_{i=1}^{N} a_i b_i + \sum_{i=1}^{N} b_i^2 \\ &\leq 1 - 2(1-\epsilon) + 1 = 2\epsilon.\end{aligned}$$

■

Afirmação 1.11 *Não existe* $D \subset \{1, 2, ..., N\}$ *tal que*

$$\sum_{i \in D} a_i^2 \geq \delta \quad e \quad (a_i - b_i)^2 > \delta a_i^2, \quad \forall i \in D.$$

Prova: Suponhamos que exista um tal D, então

$$\sum_{i=1}^{N}(a_i - b_i)^2 \geq \sum_{i \in D}(a_i - b_i)^2 > \sum_{i \in D} \delta a_i^2 \geq \delta\delta > 2\epsilon,$$

que é absurdo pela Afirmação 1.10. ■

Para facilitar os cálculos escrevemos:

$$C := \{i \in \{1, 2, ..., N\} : (a_i - b_i)^2 > \delta a_i^2\}$$

e

$$A := \{i \in \{1, 2, ..., N\} : (a_i - b_i)^2 \leq \delta a_i^2\}.$$

Afirmação 1.12 $\sum_{i \in C} a_i^2 < \delta$.

Prova: Se $\sum_{i \in C} a_i^2 \geq \delta$, então $C = \phi$, veja a Afirmação 1.11. Mas se $C = \phi$, então não é possível que $\sum_{i \in C} a_i^2 \geq \delta$. ■

Afirmação 1.13 $2\sum_{i \in C} a_i b_i < \sum_{i \in C} a_i^2 - \delta \sum_{i \in C} a_i^2 + \sum_{i \in C} b_i^2$.

Prova: Como $\delta(a_i)^2 < (a_i - b_i)^2$, $\forall i \in C$ temos

$$\begin{aligned}\delta \sum_{i \in C} a_i^2 &< \sum_{i \in C}(a_i - b_i)^2 \\ &= \sum_{i \in C} a_i^2 - 2\sum_{i \in C} a_i b_i + \sum_{i \in C} b_i^2.\end{aligned}$$

■

Afirmação 1.14 $2-2\epsilon < \sum_{i\in C} a_i^2 - \delta \sum_{i\in C} a_i^2 + \sum_{i\in C} b_i^2 + 2\sum_{i\in A} a_i b_i$.

Prova: Pelo item (3) e pela Afirmação 1.13 temos

$$\begin{aligned} 2-2\epsilon &\leq 2\sum_{i=1}^{N} a_i b_i \\ &= 2\sum_{i\in C} a_i b_i + 2\sum_{i\in A} a_i b_i \\ &\leq \sum_{i\in C} a_i^2 - \delta\sum_{i\in C} a_i^2 + \sum_{i\in C} b_i^2 + 2\sum_{i\in A} a_i b_i. \end{aligned}$$

■

Afirmação 1.15 $1-2\epsilon \leq \sum_{i\in A} a_i^2 + \delta - \delta^2$.

Prova: Pelas Afirmação 1.12 e 1.14 e como $2ab \leq a^2 + b^2$, temos que

$$\begin{aligned} 2-2\epsilon &< \sum_{i\in C} a_i^2 - \delta\sum_{i\in C} a_i^2 + \sum_{i\in C} b_i^2 + 2\sum_{i\in A} a_i b_i \\ &\leq \sum_{i\in C} a_i^2 - \delta\sum_{i\in C} a_i^2 + \sum_{i\in C} b_i^2 + \sum_{i\in A}\{a_i^2 + b_i^2\} \\ &= \sum_{i\in C} a_i^2 - \delta\sum_{i\in C} a_i^2 + \sum_{i\in C} b_i^2 + \sum_{i\in A} b_i^2 + \sum_{i\in A} a_i^2 \\ &= \sum_{i\in A} a_i^2 + \sum_{i\in C} a_i^2(1-\delta) + \sum_{i=1}^{N}(b_i)^2 \\ &< \sum_{i\in A} a_i^2 + \delta(1-\delta) + 1. \end{aligned}$$

■

Afirmação 1.16 $(1-\delta) \leq \sum_{i\in A} a_i^2$.

Prova: Pela Afirmação 1.15 $1-2\epsilon \leq \sum_{i\in A} a_i^2 + \delta - \delta^2$. Logo

$$1 \leq \sum_{i\in A} a_i^2 + \delta, \quad \text{pois} \quad \delta = \sqrt{2\epsilon}.$$

■

Afirmação 1.17 *Para cada $i \in A$ temos*

$$1-\sqrt{\delta} \leq \frac{b_i}{a_i} \leq 1+\sqrt{\delta}.$$

Prova: Seja $i \in A$. Então

$$(a_i - b_i)^2 \leq \delta a_i^2,$$

logo

$$|a_i - b_i| \leq \sqrt{\delta}|a_i|,$$

portanto

$$-\sqrt{\delta}|a_i| \leq b_i - a_i \leq \sqrt{\delta}|a_i|,$$

consequentemente

$$-\sqrt{\delta}|a_i| + a_i \leq b_i \leq \sqrt{\delta}|a_i| + a_i.$$

Se $a_i > 0$ então

$$-\sqrt{\delta}a_i + a_i \leq b_i \leq \sqrt{\delta}a_i + a_i.$$

Se $a_i < 0$ então

$$-\sqrt{\delta}(-a_i) + a_i \leq b_i \leq \sqrt{\delta}(-a_i) + a_i.$$

Do qual segue a Afirmação 1.17. ■

Prova do Lema 1.9. Segue diretamente das Afirmações 1.16 e 1.17. ■

Capítulo 2

Uma norma definida por indução e o espaço $\widetilde{X}$ de W. T. Gowers

Neste capítulo vamos definir uma norma conveniente $||.||$ sobre $c_{00}(\mathbf{N})$, veja Notação 0.4, tal que

$$||E(x)|| \leq ||x||, \quad \forall x \in c_{00}(\mathbf{N}), \quad \forall E \quad \text{intervalo de} \quad \mathbf{N},$$

veja Notações 0.5 e 0.6, isto é, a base canônica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de $c_{00}(\mathbf{N})$ é bimonótona, veja Definição 0.5.

Para obtermos isto, construiremos uma seqüência de normas $||.||_1, ||.||_2, ...$ tais que a base canônica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de $c_{00}(\mathbf{N})$ seja bimonótona. Mais ainda, $||x||_n \leq ||x||_m$, $\forall n, m \in \mathbf{N}$ com $n < m$, $||x||_m \leq ||x||_{l_1}$, $\forall m \in \mathbf{N}$ e $||E(x)||_m \leq ||x||_m$, $\forall m \in \mathbf{N}$ e $\forall E$ intervalo de $\mathbf{N}$.

Nossa norma $||x||$ será definida como o $lim_{m\to\infty}||x||_m$, $\forall x \in c_{00}(\mathbf{N})$.

Começamos definindo nosso primeiro espaço normado. Seja $\mathbf{X}_0 = (c_{00}, ||.||)$, onde

$$||x||_{X_0} = ||x||_{\infty} = \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n|, \quad \forall x = (x_1, x_2, ...) \in c_{00}(\mathbf{N}),$$

claramente a base canônica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de X_0 é bimonótona. Na próxima seção construiremos, a partir de X_0, uma seqüência de espaços normados sobre $c_{00}(\mathbf{N})$ para os quais a base canônica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ será bimonótona, veja Teorema 2.12.

Daqui para frente sempre $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ denotará **a base canônica vetorial de** $c_{00}(\mathbf{N})$.

2.1 Uma seqüência de normas

Na próxima definição precisamos das Notações 0.5, 0.6, 0.7 e da Definição 1.8(e). f é a função definida na Proposição 1.1.

Definição 2.1 *Para $m \in N$, coloquemos $X_m = (c_{00}(\mathbf{N}), ||.||)$ e $\forall x \in c_{00}(\mathbf{N})$ definamos*

$$\begin{aligned} ||x||_{X_m} &= ||x||_{X_{m-1}} \vee \\ &\sup\left\{\frac{\sum_1^N ||E_i(x)||_{X_{m-1}}}{f(N)} : N \geq 2, \quad E_1 < \ldots < E_N\right\} \vee \\ &\sup\left\{\left(\sum_1^M |x^*(x)|^2\right)^{1/2} : M \geq 1, \quad x_1^*, \ldots, x_M^* \text{ são a.e.d sobre } X_{m-1}\right\}. \end{aligned}$$

Para simplificarmos os cálculos também colocamos:

Definição 2.2 *Sejam $m \in N$ e $x \in c_{00}(\mathbf{N})$. Definimos*

$$|||x|||_m = \sup\left\{\left(\sum_1^M |x^*(x)|^2\right)^{1/2} : M \geq 1,\ x_1^*, \ldots, x_M^* \text{ são a.e.d sobre } X_{m-1}\right\}.$$

Observação 2.3 *Claramente $||x||_{X_m} \leq ||x||_{X_{m+1}}$, $\forall x \in c_{00}(\mathbf{N})$ e $\forall m \in \mathbf{N}$.*

Proposição 2.4 *$||.||_{X_m}$ é uma norma em $c_{00}(\mathbf{N})$, $\forall m \in \mathbf{Z}^+$.*

Prova: Sabemos que $||x||_{X_0} = ||x||_\infty$ é uma norma em $c_{00}(\mathbf{N})$. Suponhamos que $||x||_{X_m}$ seja uma norma em $c_{00}(\mathbf{N})$. Mostraremos que também $||x||_{X_{m+1}}$ é uma norma em $c_{00}(\mathbf{N})$. Sejam $x, y \in c_{00}(\mathbf{N})$ e $\lambda \in \mathbf{R}$, temos que demonstrar os três itens da definição de norma.

1. Se $0 = ||x||_{X_{m+1}}$ então, pela Observação 2.3, $||x||_{X_m} = 0$. Como $||.||_{X_m}$ é uma norma, temos que $x = 0$.

Agora pela hipótese de indução e pela Observação 2.3, temos que

$$0 \leq ||x||_{X_m} \leq ||x||_{X_{m+1}}.$$

Portanto, $0 \leq ||x||_{X_{m+1}}$.

2.

$$\begin{aligned}
||\lambda x||_{X_{m+1}} &= ||\lambda x||_{X_m} \vee \\
&\sup\left\{\frac{\sum_1^N ||E_i(\lambda x)||_{X_m}}{f(N)} : N \geq 2, \quad E_1 < ... < E_N\right\} \vee \\
&\sup\left\{\left(\sum_1^M |x_i^*(\lambda x)|^2\right)^{1/2} : M \geq 1, \quad x_1^*, ..., x_M^* \quad \text{são a.e.d sobre} \quad X_m\right\}. \\
&= |\lambda| ||x||_{X_m} \vee \\
&|\lambda| \sup\left\{\frac{\sum_1^N ||E_i(x)||_{X_m}}{f(N)} : N \geq 2, \quad E_1 < ... < E_N\right\} \vee \\
&|\lambda| \sup\left\{\left(\sum_1^M |x_i^*(x)|^2\right)^{1/2} : M \geq 1, \quad x_1^*, ..., x_M^* \quad \text{são a.e.d sobre} \quad X_m\right\}.
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
||x+y||_{X_{m+1}} &= ||x+y||_{X_m} \vee \\
&\sup\left\{\frac{\sum_1^N ||E_i(x+y)||_{X_m}}{f(N)} : N \geq 2, \quad E_1 < ... < E_N\right\} \vee \\
&\sup\left\{\left(\sum_1^M |x_i^*(x+y)|^2\right)^{1/2} : M \geq 1, \quad x_1^*, ..., x_M^* \quad \text{são a.e.d sobre} \quad X_m\right\}.
\end{aligned}$$

Consideremos três casos.

1ºCaso.

$||x+y||_{X_{m+1}} = ||x+y||_{X_m}$. Logo pela Observação 2.3

$$\begin{aligned}
||x+y||_{X_{m+1}} &= ||x+y||_{X_m} \leq ||x||_{X_m} + ||y||_{X_m} \\
&\leq ||x||_{X_{m+1}} + ||y||_{X_{m+1}}.
\end{aligned}$$

2ºCaso.

$||x+y||_{X_{m+1}} = \sup\left\{\frac{\sum_1^N ||E_i(x+y)||_{X_m}}{f(N)} : N \geq 2, \quad E_1 < ... < E_N\right\}$.

Portanto, pois $||.||_{X_m}$ é uma norma (hipótese de indução), temos

$$
\begin{aligned}
||x+y||_{X_{m+1}} &= \sup\left\{\frac{\sum_1^N ||E_i(x+y)||_{X_m}}{f(N)} : N \geq 2, \quad E_1 < ... < E_N\right\}\\
&\leq \sup\left\{\frac{\sum_1^N (||E_i(x)||_{X_m} + ||E_i(y)||_{X_m})}{f(N)} : N \geq 2, \quad E_1 < ... < E_N\right\}\\
&= \sup\left\{\frac{(\sum_1^N ||E_i(x)||_{X_m} + \sum_1^N ||E_i(y)||_{X_m})}{f(N)} : N \geq 2, \quad E_1 < ... < E_N\right\}\\
&\leq \sup\left\{\frac{\sum_1^N ||E_i(x)||_{X_m}}{f(N)} : N \geq 2, \quad E_1 < ... < E_N\right\}\\
&+ \sup\left\{\frac{\sum_1^N ||E_i(y)||_{X_m}}{f(N)} : N \geq 2, \quad E_1 < ... < E_N\right\}\\
&\leq ||x||_{X_{m+1}} + ||y||_{X_{m+1}}.
\end{aligned}
$$

3º Caso.

$$||x+y||_{X_{m+1}} = \sup\left\{\left(\sum_1^M |x_i^*(x+y)|^2\right)^{1/2} : M \geq 1, \quad x_1^*, ..., x_M^* \quad \text{são a.e.d sobre} \quad X_m\right\}.$$

Consequentemente,

$$||x+y||_{X_{m+1}} =$$

$$\sup\left\{\left(\sum_1^M |x_i^*(x+y)|^2\right)^{1/2} : M \geq 1, \quad x_1^*, ..., x_M^* \quad \text{são a.e.d sobre} \quad X_m\right\} =$$

$$\sup\left\{\left(\sum_1^M |x_i^*(x)+x_i^*(y)|^2\right)^{1/2} : M \geq 1, \quad x_1^*, ..., x_M^* \quad \text{são a.e.d sobre} \quad X_m\right\} \leq$$

$$\sup\left\{\left(\sum_1^M |x_i^*(x)|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_1^M |x_i^*(y)|^2\right)^{1/2} : M \geq 1, \quad x_1^*, ..., x_M^* \quad \text{são a.e.d sobre} \quad X_m\right\}$$

$$\sup\left\{\left(\sum_1^M |x_i^*(x)|^2\right)^{1/2} : M \geq 1, \quad x_1^*, ..., x_M^* \quad \text{são a.e.d sobre} \quad X_m\right\} +$$

$$\sup\left\{\left(\sum_1^M |x_i^*(y)|^2\right)^{1/2} : M \geq 1, \quad x_1^*, ..., x_M^* \quad \text{são a.e.d sobre} \quad X_m\right\} \leq$$

$$||x||_{X_{m+1}} + ||y||_{X_{m+1}}.$$ ■

Observação 2.5 *Pela Proposição 2.4 temos que,* $\forall m \in \mathbf{N}$,

$$X_m = (c_{00}(\mathbf{N}), ||.||) \quad \textit{é um espaço normado.}$$

2.2 A base canônica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de X_m é bimonótona

Pela Definição 2.1 de norma em X_m para mostrarmos que a base canônica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de X_m é bimonótona precisaremos provar três desigualdades. Uma delas, equação (2.2.1), será obtida por hipótese de indução, as outras duas são as Proposições 2.6 e 2.11.

Sejam $p, q \in \mathbf{N}$ com $p \leq q$ e $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in c_{00}(\mathbf{N})$. Claramente $X_0 = (c_{00}, ||.||)$ onde $||x||_{X_0} = ||x||_{\infty} = \sup_{n \in \mathbf{N}} |x_n|$, satisfaz

$$\left|\left|\sum_{n=p}^{q} x_n e_n\right|\right|_{X_0} \leq ||x||_{X_0}.$$

Suponhamos que X_{m-1} tem a seguente propriedade

$$\left|\left|\sum_{n=p}^{q} x_n e_n\right|\right|_{X_{m-1}} \leq ||x||_{X_{m-1}} \quad \forall p, q \in \mathbf{N} \quad \text{com} \quad p \leq q \quad \text{e} \quad \forall x \in c_{00}(\mathbf{N}), \quad \textbf{(2.2.1)}$$

e demonstremos que X_m tem a mesma propriedade.

Proposição 2.6 *Sejam $p, q \in \mathbf{N}$ com $p \leq q$ e $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in c_{00}(\mathbf{N})$. Então*

$$\sup\left\{\frac{\sum_{i=1}^{N} ||E_i(\sum_{n=p}^{q} x_n e_n)||_{X_{m-1}}}{f(N)} : N \geq 2, \quad E_1 < \ldots < E_N\right\} \leq$$
$$\sup\left\{\frac{\sum_{i=1}^{N} ||E_i(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n)||_{X_{m-1}}}{f(N)} : N \geq 2, \quad E_1 < \ldots < E_N\right\}.$$

Prova: Sejam $N \in \mathbf{N}$, $N \geq 2$, $E_1 < \ldots < E_N$ intervalos de $\mathbf{N}$, $i \in \{1, \ldots, N\}$, $E_i = \{a, a+1, \ldots, b\}$, $c := \max\{a, p\}$ e $d := \min\{b, q\}$. Então temos, pela Notação 0.6 e pela equação (2.2.1) aplicada ao vetor $\sum_{n=a}^{b} x_n e_n$, que

$$\begin{aligned}
\left|\left|E_i\left(\sum_{n=p}^{q} x_n e_n\right)\right|\right|_{X_{m-1}} &= \left|\left|\left(\sum_{n=c}^{d} x_n e_n\right)\right|\right|_{X_{m-1}} \\
&\leq \left|\left|\sum_{n=a}^{b} x_n e_n\right|\right|_{X_{m-1}} \\
&= \left|\left|E_i\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\right)\right|\right|_{X_{m-1}}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} ||E_i(\sum_{n=p}^{q} x_n e_n)||_{X_{m-1}}}{f(N)} \leq \frac{\sum_{i=1}^{N} ||E_i(\sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n)||_{X_{m-1}}}{f(N)},$$

e isto implica a Proposição 2.6. ■

Na Proposição 2.11 mostraremos que se $p, q \in \mathbb{N}$ com $p \leq q$ e $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in c_{00}(\mathbb{N})$ então $|||\sum_{n=p}^{q} x_n e_n|||_m \leq |||x|||_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$, veja Definição 2.2. Para isso será necessário a Observação 2.7 e a Proposição 2.10. Na Observação 2.7 usamos a Definição 1.8(a).

Observação 2.7 *Sejam $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de $\{-1,1\}$, $m-1 \in \mathbb{N}$, $x^* = (a_1, a_2...)$ e $y^* = (\varepsilon_1 a_1, \varepsilon_2 a_2...) \in X_{m-1}^* \cap c_{00}(\mathbb{N})$. Então $||x^*||_{X_{m-1}^*} = ||y^*||_{X_{m-1}^*}$. De fato, isto é uma consequência direta da proposição abaixo.*

Proposição 2.8 *Coloquemos $x^* = (a_1, ..., a_n, ...) \in X_{m-1}^* \cap c_{00}(\mathbb{N})$. Se $y^* = (a_1, ..., -a_n, ...)$., então $y^* \in X_{m-1}^* \cap c_{00}(\mathbb{N})$ e $||x^*||_{X_{m-1}^*} = ||y^*||_{X_{m-1}^*}$.*

Prova: Sejam $x = (x_1, .., x_n, ...) \in c_{00}(\mathbb{N})$ e $y = (x_1, .., -x_n, ...)$. Então $|x^*(x)| = |y^*(y)|$. Logo, $||x^*||_{X_{m-1}^*} = ||y^*||_{X_{m-1}^*}$.

Como $x^* = (a_1, ..., a_n, ...) \in X_{m-1}^* \cap c_{00}(\mathbb{N})$ temos que $||x^*||_{X_{m-1}^*} \leq 1$, logo $||y^*||_{X_{m-1}^*} \leq 1$. E pela maneira como construímos y^* temos os outros dois itens da Definição 1.8(a). Portanto $y^* \in X_{m-1}^* \cap c_{00}(\mathbb{N})$ e $||x^*||_{X_{m-1}^*} = ||y^*||_{X_{m-1}^*}$. ■

Observação 2.9 *Sejam $A \subset \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N} - A$, $y = \sum_{n=p}^{q} x_n e_n \in c_{00}(\mathbb{N})$ e $w = y + x_t e_t$, um corolário da proposição abaixo é o seguinte*

$$\exists \quad t^* \in X_{m-1}^* \cap c_{00}(\mathbb{N}) \quad \textit{tal que} \quad |t^*(y)| \leq |t^*(w)|.$$

Na próxima proposição utilizaremos a Notação 0.8 para suporte de um elemento de $c_{00}(\mathbb{N})$ e a seguinte definição: se $r \geq 0$, então sinal$(r) := 1$ e se $r < 0$, então sinal$(r) := -1$.

Proposição 2.10 *Sejam $A \subset \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{N} - A$, $y = \sum_{n=p}^{q} x_n e_n \in c_{00}(\mathbb{N})$, $w = y + x_t e_t$ e $x^* = (a_1, a_2, ...) \in X_{m-1}^* \cap c_{00}(\mathbb{N})$. Então $\exists t^* \in X_{m-1}^* \cap c_{00}(\mathbb{N})$ tal que*

a. $||x^*||_{X_{m-1}^*} = ||t^*||_{X_{m-1}^*}$.

b. *supp*$(x^*) =$ *supp*(t^*).

c. $|x^*(y)| = |t^*(y)| \leq |t^*(w)|$.

Prova: **1º Caso.** Suponhamos $x_t a_t = 0$. Neste caso basta tomarmos $t^* = x^*$.

2ºCaso. Suponhamos $x_t a_t \neq 0$. Neste caso tomemos $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tal que sinal$(\varepsilon_t x_t a_t) =$ sinal$(x^*(y))$ e coloquemos $t^* = (a_1, a_2, .., \varepsilon a_t, ...)$. Como $t \notin A$ temos que $t^*(y) = x^*(y)$, logo

$$\begin{aligned} |t^*(w)| &= |t^*(y + x_t e_t)| = |t^*(y) + t^*(x_t e_t)| \\ &= |(x^*(y) + \varepsilon_t x_t a_t| = |(x^*(y)| + |\varepsilon_t x_t a_t| \\ &> |(x^*(y)|. \end{aligned}$$

Isto mostra o item (c). O item (a) segue da Proposição 2.8 e o item (b) segue da definição de t^*. ■

Na próxima proposição usaremos a Definição 2.2 para $|||.|||$.

Proposição 2.11 *Sejam $m \in \mathbf{N}$, $p, q \in \mathbf{N}$ com $p \leq q$ e $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in c_{00}(\mathbf{N})$. Então*

$$\left|\left|\left| \sum_{n=p}^{q} x_n e_n \right|\right|\right|_{X_m} \leq |||x|||_{X_m}.$$

Prova: Sejam $A = \{p, ..., q\}$ e $y = \sum_{n=p}^{q} x_n e_n$.

1ºCaso. Se $A \cap supp(x) = supp(x)$, então $y = x$, logo $|||y|||_{X_m} = |||x|||_{X_m}$.

2ºCaso. Suponhamos $A \cap supp(x) \subset supp(x)$ e seja $x^* = (a_1, a_2, ...) \in X^*_{m-1} \cap c_{00}(\mathbf{N})$. Como supp$(x)$ é finito segue que existe uma seqüência finita $t_1, ..., t_r$ tal que $\{t_1, ..., t_r\} \cap A = \phi$ e $\{t_1, ..., t_r\} \cup A \cap supp(x) = supp(x)$.

Coloquemos $w_0 := y$ e $w_i := w_{i-1} + x_{t_i} e_{t_i}$, $\forall i \in \{1, ..., r\}$. Definamos $t_0^* = x^*$. Pela Proposição 2.10, $\exists t_i^* \in X^*_{m-1} \cap c_{00}(\mathbf{N})$ tal que $||t^*_{i-1}||_{X^*_{m-1}} = ||t^*_i||_{X^*_{m-1}}$, $supp(t^*_{i-1}) = supp(t^*_i)$ e $|t^*_{i-1}(w_{i-1})| = |t^*_i(w_{i-1})| \leq |t^*_i(w_i)|$, $\forall i \in \{1, ..., r\}$.

Consequentemente $||x^*||_{X^*_{m-1}} = ||t^*_r||_{X^*_{m-1}}$, $supp(x^*) = supp(t^*_r)$ e

$$|x^*(y)| \leq |t_1^*(w_1)| \leq ... \leq |t_r^*(w_r)| = |t_r^*(x)|.$$

Portanto, se $x_1^*, ..., x_M^*$ são a.e.d quaisquer em X_{m-1}, veja Definição 1.8(e), então podemos obter $t^*_{r_1}, ..., t^*_{r_M}$ a.e.d em X_{m-1} tais que

$$\left(\sum_1^M |x_i^*(y)|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_1^M |t^*_{r_i}(x)|^2 \right)^{1/2},$$

e isto implica a Proposição 2.11. ■

Teorema 2.12 *A base canônica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de X_m é bimonótona.*

Prova: Segue diretamente da equação (2.2.1) e das Proposições 2.6 e 2.11. ■

2.3 A seqüência de normas tem uma norma limite

Seja $x \in c_{00}(\mathbf{N})$. Na Proposição 2.16 mostraremos que $lim_{k\to\infty}||x||_{X_k}$ existe, onde $||.||_{X_k}$ é dada na Definição 2.1.

Proposição 2.13 *$\forall n \in \mathbf{N}$ e $\forall x \in c_{00}(\mathbf{N})$ vale que $||x||_{X_n} \leq ||x||_{l_1}$.*

Prova: Seja $x = (x_1, x_2, ...) \in c_{00}(\mathbf{N})$. Então

$$||x||_{X_0} = ||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = ||x||_{l_1}.$$

Suponhamos $||x||_{X_k} \leq ||x||_{l_1}$, $\forall x \in c_{00}(\mathbf{N})$ e demonstremos que $||x||_{X_{k+1}} \leq ||x||_{l_1}$, $\forall x \in c_{00}(\mathbf{N})$. Pela Definição 2.1 temos que mostrar três itens, o primeiro é obtido pela hipótese de indução acima, os outros dois são as Afirmações 2.14 e 2.15.

Afirmação 2.14 *Seja $k \in \mathbf{N}$. Então $|||x|||_{k+1} \leq ||x||_{l_1}$, $\forall x \in c_{00}(\mathbf{N})$.*

Prova: Seja $s \in \mathbf{N}$. Então $1 = ||e_s||_\infty \leq ||e_s||_{X_k} \leq ||e_s||_{l_1} = 1$, isto é, $||e_s||_{X_k} = 1$.

Seja agora $y^* = (y_1, y_2, ...) \in c_{00}(\mathbf{N}) \cap X_k^*$. Então $||y^*||_\infty \leq ||y^*||_{X_k^*}$. Para vermos isto, seja $|y_s| = max_{n\in\mathbf{N}}|y_n|$. Portanto

$$||y^*||_\infty = |y_s| = |y^*(e_s)| \leq \sup_{||x||_{X_k}\leq 1} |y^*(x)| = ||y^*||_{X_k^*}.$$

Sejam $m \in \mathbf{N}$ e $x^* \in A_m^*(X_k)$, veja Definição 1.8(a). Então $||x^*||_\infty \leq 1/f(m)$. De fato, como $x^* \in A_m^*(X_k)$, segue que existem $y_1^* < ... < y_m^* \in c_{00}(\mathbf{N}) \cap X_k^*$ com $||y_i^*||_{X_k^*} \leq 1$, $\forall i \in \{1, ..., m\}$, tal que $x^* = \frac{y_1^*+...+y_m^*}{f(m)}$. Logo, para algum $i \in \{1, ..., m\}$ temos que

$$||x^*||_\infty = \frac{||y_i^*||_\infty}{f(m)} \leq \frac{||y_i^*||_{X_k^*}}{f(m)} \leq \frac{1}{f(m)}.$$

Sejam $p \in \mathbf{N}$ e Z um conjunto associado à aplicação especial $z^* = E(x_1^* + ... + x_p^*)$ sobre X_k, veja Definições 1.8 (c) e (d). Então $||z^*||_\infty \leq 1/f(minZ)$. Isso é verdadeiro, pois se $z^* = E(x_1^* + ... + x_p^*)$ é uma aplicação especial sobre X_k, então

$\forall i \in \{1,...,p\}$ $\exists$ $m_i \in \mathbf{N}$ tal que $x_i^* \in A_{m_i}^*(X_k)$ e $Z \subset \{m_1,...,m_p\}$. Portanto, para algum $i \in \{1,...,p\}$ temos

$$\begin{aligned} ||z^*||_\infty &= ||E(x_1^* + ...x_p^*)||_\infty = ||E(x_1^*) + ... + E(x_p^*)||_\infty \\ &= ||E(x_i^*)||_\infty \leq ||x_i^*||_\infty \leq \frac{1}{f(m_i)} \leq \frac{1}{f(minZ)}, \end{aligned}$$

pois $x_1^* < ... < x_p^*$.

Sejam $x^* = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e_n^*$ um aplicação linear sobre X_k e $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in c_{00}(\mathbf{N})$. Então $|x^*(x)| \leq ||x^*||_\infty ||x||_{l_1}$, pois

$$\begin{aligned} |x^*(x)| &= \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (max|b_n|)|a_n| \\ &= ||x^*||_\infty ||x||_{l_1}. \end{aligned}$$

Sejam $M \in \mathbf{N}$ e $Z_1, ...Z_M$ uma seqüência disjunta de conjuntos associados a $z_1^*, ...z_M^*$ uma seqüência de a.e.d de X_k, veja Definição 1.8(e). Então $minZ_i \neq minZ_j$ se $i \neq j$.

Logo, por (ii), $f(minZ_i) \neq f(minZ_j)$. Como, pela Observação 1.3, $\sum_{j \in J} \frac{1}{f(j)} \leq 1$ temos que

$$\begin{aligned} \left(\sum_i^M |z_i^*(x)|^2\right)^{1/2} &\leq \sum_i^M |z_i^*(x)| \leq \sum_i^M ||z_i^*||_\infty ||x||_{l_1} \\ &\leq ||x||_{l_1} \sum_i^M \frac{1}{f(minZ_i)} \leq ||x||_{l_1}. \end{aligned}$$

Consequentemente, $\forall M \in \mathbf{N}$ e para toda seqüência de a.e.d $z_1^*, ...z_M^*$ segue que

$$\left(\sum_i^M |z_i^*(x)|^2\right)^{1/2} \leq ||x||_{l_1}.$$

E então, pela Definição 2.2, concluímos que $|||x|||_{k+1} \leq ||x||_{l_1}$. ∎

Afirmação 2.15 *Seja* $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in c_{00}(\mathbf{N})$. *Então*

$$\sup\left\{\frac{\sum_1^N ||E_i(x)||_{X_k}}{f(N)}, \quad 2 \leq N, \quad E_1 < ... < E_N\right\} \leq ||x||_{l_1}.$$

Prova: Sejam $2 \leq N \in \mathbf{N}$ e $E_1 < ... < E_N$, veja Notação 0.7. Então, pela Notação 0.6 para $E(x)$, temos

$$\begin{aligned}\sum_1^N ||E_i(x)||_{l_1} &= \sum_1^N \left|\left| \sum_{n \in E_i} a_n e_n \right|\right|_{l_1} = \sum_1^N \sum_{n \in E_i} |a_n| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq ||x||_{l_1}.\end{aligned}$$

Como, pela hipótese de indução , $||x||_{X_k} \leq ||x||_{l_1}$, $\forall x \in c_{00}(\mathbf{N})$, temos que

$$\frac{\sum_1^N ||E_i(x)||_{X_k}}{f(N)} \leq \frac{\sum_1^N ||E_i(x)||_{l_1}}{f(N)} \leq \frac{||x||_{l_1}}{f(N)} \leq ||x||_{l_1}.$$

Portanto

$$\sup\left\{\frac{\sum_1^N ||E_i(x)||_{X_k}}{f(N)}, \quad 2 \leq N, \quad E_1 < ... < E_N\right\} \leq ||x||_{l_1}. \qquad \blacksquare$$

Prova da Proposição 2.13: Pela Definição 2.1, a hipótese de indução e as Afirmações 2.14 e 2.15 segue que $||x||_{X_{k+1}} \leq ||x||_{l_1}$. $\blacksquare$

Proposição 2.16 *Seja $x \in c_{00}(\mathbf{N})$. Então $lim_{k \to \infty} ||x||_{X_k}$ existe.*

Prova: Pela Observação 2.3 segue que $||x||_{X_k} \leq ||x||_{X_{k+1}}$ e pela Proposição 2.13 temos que $||x||_{X_k} \leq ||x||_{l_1}$, $\forall k \in \mathbf{N}$. Logo $lim_{k \to \infty} ||x||_{X_k}$ existe. $\blacksquare$

2.4 Uma norma definida por indução

Definição 2.17 *Seja $x \in c_{00}(\mathbf{N})$. Coloquemos $||x|| = lim_{k \to \infty} ||x||_{X_k}$.*

Proposição 2.18 *$X = (c_{00}(\mathbf{N}), ||.||)$ é um espaço normado.*

Prova: Sejam $\lambda \in \mathbf{R}$ e $x, y \in c_{00}(\mathbf{N})$, temos que mostrar três itens.

1. Desde que $||.||_{X_k}$ é uma norma em $c_{00}(\mathbf{N})$, temos $0 \leq ||x||_{X_k}$, $\forall k \in \mathbf{N}$, portanto

$$0 \leq ||x||_{X_k} \leq ||x||_{X_{k+1}} \leq ... \leq lim_{k \to \infty} ||x||_{X_k} = ||x||.$$

Suponhamos que $||x|| = 0$. Como $||x||_{X_k} \leq ||x|| = 0$, temos que $||x||_{X_k} = 0$, $\forall k \in \mathbf{N}$. Logo $x = 0$.

Suponhamos que $x = 0$, logo $||x||_{X_k} = 0$, $\forall k \in \mathbf{N}$, portanto $||x|| = 0$.

2.

$$\begin{aligned} ||\lambda x|| &= lim_{k\to\infty}||\lambda x||_{X_k} = lim_{k\to\infty}|\lambda|||x||_{X_k} \\ &= |\lambda| lim_{k\to\infty}||x||_{X_k} = |\lambda|||x||. \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} ||x+y|| &= lim_{k\to\infty}||x+y||_{X_k} \leq lim_{k\to\infty}(||x||_{X_k} + ||y||_{X_k}) \\ &= lim_{k\to\infty}||x||_{X_k} + lim_{k\to\infty}||y||_{X_k} = ||x|| + ||y||. \end{aligned}$$

Logo $||.||$ é uma norma e consequentemente $X = (c_{00}(\mathbf{N}), ||.||)$ é um espaço normado. ■

Daqui para frente X **indica o espaço normado mencionado na Proposição 2.18.**

2.5 A base canônica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de X é bimonótona

Agora mostraremos que se $p, q \in \mathbf{N}$ com $p \leq q$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in c_{00}(\mathbf{N})$ e $y = \sum_{n=p}^{q} x_n e_n$, então a norma em X de y não é maior que a norma de x. Logo a base canônica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de X é bimonótona, veja Definição 0.5.

Proposição 2.19 *Sejam $p, q \in \mathbf{N}$ com $p \leq q$ e $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in c_{00}(\mathbf{N})$. Então*

$$\left|\left|\sum_{n=p}^{q} x_n e_n\right|\right| \leq ||x||.$$

Prova: Seja $m \in \mathbf{N}$. Então, pela Teorema 2.12, temos que $||\sum_{n=p}^{q} x_n e_n||_{X_m} \leq ||x||_{X_m}$. Logo

$$lim_{m\to\infty}\left|\left|\sum_{n=p}^{q} x_n e_n\right|\right|_{X_m} \leq lim_{m\to\infty}||x||_{X_m}$$

e portanto $||\sum_{n=p}^{q} x_n e_n|| \leq ||x||$. ■

Teorema 2.20 *A base canônica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de X é bimonótona.*

Prova: Se segue directamente da Proposição 2.19. ■

2.6 Propriedade da norma limite

Vamos procurar uma formula para a norma $||.||$ de X, veja Proposição 2.25. Primeiro, na Proposição 2.24, provaremos que se $x \in c_{00}(\mathbf{N})$ e $n \geq 1$, então

$$\begin{aligned} ||x||_{X_{n+1}} &= ||x||_\infty \vee \\ &\quad \sup\left\{\frac{\sum_1^N ||E_i(x)||_{X_n}}{f(N)} : N \geq 2, \quad E_1 < ... < E_N\right\} \vee \\ &\quad |||x|||_{n+1}. \end{aligned}$$

Proposição 2.21 *Sejam X e Y são dois espaços normados sobre $c_{00}(\mathbf{N})$ tais que $||x||_X \leq ||x||_Y$, $\forall x \in c_{00}(\mathbf{N})$. Então toda seqüência de a.e.d, sobre X também é uma seqüência de a.e.d sobre Y.*

Prova: Sejam $w_1^*, ...w_N^*$ uma seqüência de a.e.d sobre X, veja Definição 1.8(e), e z^* uma das tais aplicações. Então para algum $M \in \mathbf{N}$, para algum intervalo $E \subset \mathbf{N}$ e para alguma seqüência especial $z_1^* < ... < z_M^*$ sobre X, temos que $z^* = E(z_1^* + ... + z_M^*)$. Seja x^* um elemento qualquer dessa última seqüência especial sobre X. Então para algum $m \in J$, temos que

$$x^* = \frac{x_1^* + ... + x_m^*}{f(m)} \quad \text{onde} \quad x_1^* < ... < x_m^* \quad \text{e} \quad ||x_i^*||_{X^*} \leq 1.$$

Logo

$$||x_i^*||_{Y^*} = \sup_{||x||_Y \leq 1} |x_i^*(x)| \leq \sup_{||x||_X \leq 1} |x_i^*(x)| = ||x_i^*||_{X^*}.$$

Portanto, se $x_i^* \in X^*$ e $||x_i^*||_{X^*} \leq 1$ então $||x_i^*||_{Y^*} \leq 1$, e isto é o que teríamos que demonstrar para provarmos que $w_1^*, ...w_N^*$ também é uma seqüência de a.e.d sobre Y, pois as demais definições cumprem-se por ser válidas em X. ∎

Observação 2.22 *Sejam X e Y são dois espaços normados sobre $c_{00}(\mathbf{N})$ tais que $||x||_X \leq ||x||_Y$ $\forall x \in c_{00}(\mathbf{N})$. Então, pela Proposição 2.21 temos que*

$$\sup\left\{\left(\sum_1^M |x^*(x)|^2\right)^{1/2} : x_1^*, ..., x_M^* \text{ são a.e.d sobre } X\right\} \leq$$

$$\sup\left\{\left(\sum_1^M |x^*(x)|^2\right)^{1/2} : x_1^*, ..., x_M^* \text{ são a.e.d sobre } Y\right\}, \forall x \in c_{00}(\mathbf{N}).$$

Proposição 2.23 *Sejam $x \in c_{00}(\mathbb{N})$ e $n \in \mathbb{N}$. Se*

$$||x||_{X_{n+1}} > \sup\left\{\frac{\sum_1^N ||E_i(x)||_{X_n}}{f(N)} : N \geq 2, \quad E_1 < ... < E_N\right\} \vee |||x|||_{n+1}$$

então $||x||_{X_{n+1}} = ||x||_\infty$.

Prova: Suponhamos que

$$||x||_{X_{n+1}} > \sup\left\{\frac{\sum_1^N ||E_i(x)||_{X_n}}{f(N)} : N \geq 2, \quad E_1 < ... < E_N\right\} \vee |||x|||_{n+1}.$$

Portanto $||x||_{X_{n+1}} = ||x||_{X_n}$, veja a Definição 2.1. Logo

$$||x||_{X_n} > \sup\left\{\frac{\sum_1^N ||E_i(x)||_{X_n}}{f(N)} : N \geq 2, \quad E_1 < ... < E_N\right\} \vee |||x|||_{n+1}.$$

Agora pela Definição 2.2, a Proposição 2.22 e a Observação 2.3 temos que

$$||x||_{X_n} > \sup\left\{\frac{\sum_1^N ||E_i(x)||_{X_{n-1}}}{f(N)} : N \geq 2, \quad E_1 < ... < E_N\right\} \vee |||x|||_n.$$

Consequentemente $||x||_{X_n} = ||x||_{X_{n-1}}$.

Pelo mesmo raciocínio obtemos

$$||x||_{X_{n+1}} = ||x||_{X_n} = ||x||_{X_{n-1}} = ... = ||x||_{X_0} = ||x||_\infty.$$

■

Proposição 2.24 *Sejam $x \in c_{00}(\mathbb{N})$ e $n \in \mathbb{N}$. Então*

$$||x||_{X_{n+1}} = ||x||_\infty \vee \sup\left\{\frac{\sum_1^N ||E_i(x)||_{X_n}}{f(N)} : \quad N \geq 2, \quad E_1 < ... < E_N\right\} \vee |||x|||_{X_{n+1}}.$$

Prova: Como $||x||_\infty = ||x||_{X_0} \leq ||x||_{X_1} \leq ... \leq ||x||_{X_{n+1}}$, temos que $||x||_{X_{n+1}} \geq ||x||_\infty$. Suponhamos que $||x||_{X_{n+1}} > ||x||_\infty$. Portanto

$$||x||_{X_{n+1}} = \sup\left\{\frac{\sum_1^N ||E_i(x)||_{X_n}}{f(N)} : N \geq 2, \quad E_1 < ... < E_N\right\} \vee \quad |||x|||_{X_{n+1}}.$$

De fato, se

$$||x||_{X_{n+1}} > \sup\left\{\frac{\sum_1^N ||E_i(x)||_{X_n}}{f(N)} : N \geq 2, \quad E_1 < ... < E_N\right\} \vee \quad |||x|||_{X_{n+1}},$$

então pela Proposição 2.23 teríamos $||x||_{X_{n+1}} = ||x||_\infty$; que é absurdo.

Portanto

$$\begin{aligned} ||x||_{X_{n+1}} &= ||x||_\infty \vee \\ &\sup\left\{\frac{\sum_1^N ||E_i(x)||_{X_n}}{f(N)} : N \geq 2, \quad E_1 < ... < E_N\right\} \vee \\ &|||x|||_{X_{n+1}}. \end{aligned}$$

■

Proposição 2.25 *Seja* $x \in c_{00}(\mathbf{N})$. *Então*

$$\begin{aligned} ||x|| &= ||x||_\infty \vee \\ &\sup\left\{\frac{\sum_1^N ||E_i(x)||}{f(N)} : N \geq 2, \quad E_1 < ... < E_N\right\} \vee \\ &\sup\left\{\left(\sum_1^M |x_i^*(x)|^2\right)^{1/2} : M \geq 1, \quad x_1^*, ..., x_M^* \quad \textit{são a.e.d sobre} \quad X\right\}. \end{aligned}$$

Prova:

$$\begin{aligned} ||x|| &= lim_{n\to\infty} ||x||_{X_n} \\ &= lim_{n\to\infty}\left\{||x||_\infty \vee |||x|||_{n-1} \vee \right. \\ &\left.\sup\left\{\frac{\sum_1^N ||E_i(x)||_{X_{n-1}}}{f(N)} : N \geq 2, \quad E_1 < ... < E_N\right\}\right\}. \end{aligned}$$

Agora, $lim_{n\to\infty}||x||_\infty = ||x||_\infty$ e

$$lim_{n\to\infty} \sup\left\{\frac{\sum_1^N ||E_i(x)||_{X_{n-1}}}{f(N)} : N \geq 2, \quad E_1 < ... < E_N\right\} =$$

$$\sup\left\{\frac{\sum_1^N ||E_i(x)||}{f(N)} : N \geq 2, \quad E_1 < ... < E_N\right\}.$$

A seguir demonstremos que

$$lim_{n\to\infty}|||x|||_{n-1} = \sup\left\{\left(\sum_1^M |x_i^*(x)|^2\right)^{1/2} : M \geq 1, \quad x_1^*, ..., x_M^* \quad \text{são a.e.d sobre} \quad X\right\}.$$

De fato, sejam $x \in c_{00}(\mathbf{N})$ e $n \in \mathbf{N}$. Como $||x||_{X_n} \leq ||x||$, segue pela Observação 2.22 que

$$|||x|||_n \leq \sup\left\{\left(\sum_1^M |x_i^*(x)|^2\right)^{1/2} : M \geq 1, \quad x_1^*, ..., x_M^* \quad \text{são a.e.d sobre} \quad X\right\},$$

portanto

$$lim_{n\to\infty}|||x|||_n \leq \sup\left\{\left(\sum_1^M |x_i^*(x)|^2\right)^{1/2} : M \geq 1, \quad x_1^*, ..., x_M^* \quad \text{são a.e.d sobre} \quad X\right\}.$$

Resta mostrarmos a desigualdade contrária. Para isso, sejam $x \in c_{00}(\mathbf{N})$, $\epsilon > 0$ e $x^* \in X^*$. Desde que $||x|| = lim_{n\to\infty}||x||_{X_n}$ e $||x||_{X_n} \leq ||x||$, temos que existe $n \in \mathbf{N}$ tal que $||x||/1+\epsilon \leq ||x||_{X_n} \leq ||x||$. Logo

$$\frac{|x^*(x)|}{1+\epsilon} = \left|\frac{x^*(x)}{1+\epsilon}\right| \leq ||x^*||_{X^*}\left|\left|\frac{x}{1+\epsilon}\right|\right| \leq ||x^*||_{X^*}||x||_{X_n}.$$

Portanto $\frac{x^*}{1+\epsilon} \in X_n^*$. Agora

$$|x^*(x)| = \left|\frac{(1+\epsilon)x^*(x)}{1+\epsilon}\right| = (1+\epsilon)|x_n^*(x)| \quad \text{onde} \quad x_n^* := \frac{x^*}{1+\epsilon} \in X_n^*.$$

Observemos que $supp(x^*) = supp(\frac{x^*}{1+\epsilon}) = supp(x_n^*)$. Sejam $x_1^*, ..., x_M^*$ a.e.d sobre X. Então

$$\left(\sum_1^M |x_i^*(x)|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_1^M |[1+\epsilon]x_{n_i}^*(x)|^2\right)^{1/2} \quad \text{para alguns} \quad x_{n_i}^* \in X_{n_i}^*.$$

Coloquemos $m = \max\{n_1, ..., n_M\}$. Pelas Observações 2.3 e 2.22 temos que

$$\left(\sum_1^M |x_i^*(x)|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_1^M |[1+\epsilon]x_{n_i}^*(x)|^2\right)^{1/2} \quad \text{para alguns} \quad x_{n_i}^* \in X_m^*.$$

Portanto

$$|||(1+\epsilon)x|||_m \geq \sup\left\{\left(\sum_1^M |x_i^*(x)|^2\right)^{1/2} : M \geq 1, \quad x_1^*, ..., x_M^* \quad \text{são a.e.d sobre} \quad X\right\}.$$

Logo

$$lim_{m\to\infty}|||(1+\epsilon)x|||_m \geq$$

$$\sup\left\{\left(\sum_1^M |x_i^*(x)|^2\right)^{1/2} : M \geq 1, \quad x_1^*, ..., x_M^* \quad \text{são a.e.d sobre} \quad X\right\},$$

e como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos que

$lim_{m\to\infty}|||x|||_{X_m} \geq$

$$\sup\left\{\left(\sum_1^M |x_i^*(x)|^2\right)^{1/2} : M \geq 1, \quad x_1^*, ..., x_M^* \quad \text{são a.e.d sobre} \quad X\right\}. \qquad \blacksquare$$

2.7 O espaço $\widetilde{X}$ de W. T. Gowers

Seja $X = (c_{00}(\mathbf{N}), ||.||)$ o espaço normado referido na Proposição 2.18. O espaço que estamos interessados é o seu completado $\widetilde{X}$ que será chamado de espaço de W. T. Gowers. O objetivo principal desta dissertação é provar que este espaço não contém nenhum subespaço isomorfo à $c_0(\mathbf{N})$, nenhum subespaço isomorfo à $l_1(\mathbf{N})$ e nenhum subespaço reflexivo de dimensão infinita, veja o Capítulo 6.

Inicialmente observemos que, pelo Teorema 2.20 e pela Proposição 0.4, $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de Schauder de $\widetilde{X}$. Também notemos que a Proposição 2.25 implica imediatamente na proposição abaixo.

Proposição 2.26 *Sejam $x \in c_{00}(\mathbf{N})$, $E_1 < ... < E_N$, para algum $N \in \mathbf{N}$, $N \geq 2$, veja Notação 0.8, e $x_1^*, ..., x_M^*$, para algum $m \in \mathbf{N}$ são a.e.d sobre X, veja Definição 1.8(e). Então*

1. $||x||_\infty \leq ||x||$.

2. $\frac{\sum_1^N ||E_i(x)||}{f(N)} \leq ||x||$.

3. $(\sum_1^M |x_i^*(x)|^2)^{1/2} \leq ||x||$.

Quando justificaremos algo pela Proposição 2.26 estaremos pensando em um, dois ou todos os itens anteriores.

Agora daremos duas observações que serão usadas no Capítulo 4, veja Afirmação 4.21.

Observação 2.27 *Sejam $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ a base canônica vetorial de $c_{00}(\mathbf{N})$, $t \in \mathbf{N}$, $x_1 < ... < x_t \in X$ com $||x_i|| = 1$, $\forall i \in \{1, ..., t\}$ e $y = \sum_1^t x_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Então $|a_n| \leq 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$.*

Prova: Seja $n \in \mathbf{N}$. Então, pela Proposição 2.26(1), para algum $i \in \{1, ..., t\}$ temos $|a_n| \leq \sup\{|a_n| : n \in \mathbf{N}\} = ||y||_\infty = ||x_i||_\infty \leq ||x_i|| \leq 1$. ■

Observação 2.28 *Seja* $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ *a base canônica vetorial de* $c_{00}(\mathbf{N})$. *Então* $||e_n|| = 1 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

Prova: Pelas Proposições 2.13 e 2.24 temos $1 = ||e_n||_\infty \leq ||e_n||_{X_m} \leq ||e_n||_{l_1} \leq 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall m \in \mathbf{N}$. Logo $||e_n||_{X_m} = 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall m \in \mathbf{N}$. Portanto, veja Definição 2.17. $||e_n|| = 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$. ■

Capítulo 3

l_{1+}^n−Médias e Seqüências Rapidamente Crescentes (S.R.C)

Se $E_1 < ... < E_M$ são intervalos de $\mathbf{N}$ e $x \in c_{00}(\mathbf{N})$, então pela Proposição 2.26(2)

$$\sum_1^M ||E_j(x)|| \leq f(M)||x||. \tag{3.1}$$

Agora acharemos elementos $x \in c_{00}(\mathbf{N})$ para os quais

$$\sum_1^M ||E_j(x)|| \leq C(1 + 2M/N)||x|| \quad \text{para alguns} \quad N \in \mathbf{N} \quad \text{e} \quad C \in \mathbf{R}, \tag{3.2}$$

e outros elementos $x \in c_{00}(\mathbf{N})$ para os quais

$$\sum_1^M ||E_j(x)|| \leq f(M)(1 + 2\epsilon) \quad \text{para algum} \quad 0 < \epsilon < 1/2. \tag{3.3}$$

Começamos com duas definições visando encontrar elementos $x \in c_{00}(\mathbf{N})$ que satisfaçam a equação (3.2).

3.1 l_{1+}^n−Médias

Definição 3.1 *Sejam $n \in \mathbf{N}$ e $C \in \mathbf{R}$. Diremos que $x \in X$ é uma* l_{1+}^n**−média** *com constante C se:*

1. $||x|| = 1$.
2. *$x = x_1 + ... + x_n$ para alguns $x_1, ..., x_n \in X$, com $x_1 < ... < x_n$.*
3. $||x_i|| \leq \frac{C}{n}$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$.

Observação 3.2 *Sejam C_1, $C_2 \in \mathbf{R}$, $C_1 \leq C_2$. Se x é uma l_{1+}^n−média com constante C_1 então claramente x é um l_{1+}^n−média com constante C_2.*

Definição 3.3 *Diremos que $x \in X$ é um* l_{1+}^n**−vetor** *com constante C se:*

1. $x = x_1 + ... + x_n$ *para alguns* $x_1, ..., x_n \in X$, *com* $x_1 < ... < x_n$.

2. $||x_i|| \leq \frac{C}{n}||x||$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$.

Observação 3.4 *Sejam C_1, $C_2 \in \mathbf{R}$, $C_1 \leq C_2$. Se x é um l_{1+}^n−vetor com constante C_1 então claramente x é um l_{1+}^n−vetor com constante C_2.*

3.2 Existência de l_{1+}^n−Médias

O lema abaixo mostra a existência de l_{1+}^n−médias, $\forall n \in \mathbf{N}$, em certos subespaços de X. Nesse lema precisaremos trabalhar com vetores sucessivos, veja Notação 0.10.

Lema 3.5 $\forall n \in \mathbf{N}$ *e* $\forall C > 1$, $\exists N \in \mathbf{N}$ *tal que para qualquer seqüência $x_1, ..., x_N$ de vetores sucessivos não nulos em X, o subespaço gerado por $x_1, ..., x_N$ contém uma l_{1+}^n−média com constante C.*

Para fazer a prova do Lema 3.5 precisamos das quatros afirmações abaixo.

Afirmação 3.6 *Sejam $n \in \mathbf{N}$ e $C > 1$. Então*

$$\exists k \in \mathbf{N} \quad \textit{tal que} \quad k \log C > \log(f(n^k)).$$

Prova: Se $n = 1$ então tomamos $k > 1/\log C$, $k \in \mathbf{N}$. Sejam $n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$ e $q = \frac{\log C}{\log n}$. Então $C = n^q$ e $q > 0$, pois $\log r > 0$ se $r > 1$. Como por (iii) $lim_{k \to \infty} \frac{f(n^k)}{(n^k)^q} = 0$, temos que $\exists k \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{f(n^k)}{(n^k)^q} < 1$, isto é, $k \log C > \log(f(n^k))$. ■

Afirmação 3.7 *Sejam $N = n^k$, $k \in \mathbf{N}$, $x_1 < ... < x_N$ uma seqüência de vetores sucessivos não nulos, $x = x_1 + ... + x_N$ e $x(i,j) = \sum_{t=(j-1)n^i+1}^{jn^i} x_t$, $0 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n^{k-i}$. Então cada $x(i,j)$ é a soma de n sucessivos $x(i-1,j)'s$, $1 \leq i \leq k$, e mais ainda*

$$x(i,j) = \sum_{p=1}^{n} x(i-1,(j-1)n+p).$$

Prova: Observemos que $\big(((j-1)n+p)-1\big)n^{i-1} = (j-1)n^i + (p-1)n^{i-1}$.

Logo

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{n^{i-1}} x_{(j-1)n^i+(p-1)n^{i-1}+t} &= \sum_{t=([(j-1)n+p]-1)n^{i-1}+1}^{([(j-1)n+p]-1)n^{i-1}+n^{i-1}} x_t \\
&= \sum_{t=([(j-1)n+p]-1)n^{i-1}+1}^{[(j-1)n+p]n^{i-1}} x_t \\
&= x\big(i-1,(j-1)n+p\big).
\end{aligned}$$

Agora $n \leq n^i$ e

$$\begin{aligned}
x(i,j) &= \sum_{t=(j-1)n^i+1}^{jn^i} x_t \\
&= x_{(j-1)n^i+1} + \ldots + x_{jn^i} \\
&= x_{(j-1)n^i+1} + \ldots + x_{(j-1)n^i+n^i} \\
&= x_{(j-1)n^i+1} + \ldots + x_{(j-1)n^i+n^{i-1}} + \\
&\quad x_{(j-1)n^i+(n^{i-1}+1)} + \ldots + x_{(j-1)n^i+2n^{i-1}} + \\
&\quad x_{(j-1)n^i+(2n^{i-1}+1)} + \ldots + x_{(j-1)n^i+3n^{i-1}} + \ldots + \\
&\quad x_{(j-1)n^i+((n-1)n^{i-1}+1)} + \ldots + x_{(j-1)n^i+nn^{i-1}} \\
&= \sum_{t=1}^{n^{i-1}} x_{(j-1)n^i+(1-1)n^{i-1}+t} + \\
&\quad \sum_{t=1}^{n^{i-1}} x_{(j-1)n^i+(2-1)n^{i-1}+t} + \\
&\quad \sum_{t=1}^{n^{i-1}} x_{(j-1)n^i+(3-1)n^{i-1}+t} + \ldots + \\
&\quad \sum_{t=1}^{n^{i-1}} x_{(j-1)n^i+(n-1)n^{i-1}+t}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= x(i-1,(j-1)n+1)+\\
&\quad x(i-1,(j-1)n+2)+\\
&\quad x(i-1,(j-1)n+3)+\ldots+\\
&\quad x(i-1,(j-1)n+n)\\
&= \sum_{p=1}^{n} x(i-1,(j-1)n+p). \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Na próxima afirmação precisamos da definição de l_{1+}^n-vetor, veja Definição 3.3. Daqui para frente, nesta seção, os $\mathbf{x(i,j)}$ serão como na Afirmação 3.7.

Afirmação 3.8 *Se nenhum $x(i,j)$ é um l_{1+}^n-vetor com constante C e se $||x_i|| = 1$, $\forall i \in \{1,..,N\}$, então $||x(i,j)|| \leq \frac{n^i}{C^i}$. Em particular, uma vez que $x = x_1 + \ldots + x_N = x_1 + \ldots + x_{n^k} = \sum_{t=(1-1)n^k+1}^{1n^k} x_t = x(k,1)$, temos que $||x|| \leq n^k/C^k$.*

Prova: Por hipótese nenhum $x(i,j)$ é um l_{1+}^n-vetor, logo nenhum $\frac{x(i,j)}{||x(i,j)||}$ é uma l_{1+}^n-média com constante C e como, pela Afirmação 3.7, vale

$$\frac{x(i,j)}{||x(i,j)||} = \sum_{p=1}^{n} \frac{x(i-1,(j-1)n+p)}{||x(i,j)||}.$$

Pela Definição 3.1(3) temos que $\frac{x(i-1,s_1)}{||x(i,j)||} > \frac{C}{n}$ para algum $s_1 \in \mathbf{N}$ com $(j-1)n+1 \leq s_1 \leq (j-1)n+n$. Além disso, por hipótese, $\frac{x(i-1,s_1)}{||x(i-1,s_1)||}$ também não é uma l_{1+}^n-média com constante C. Portanto, de modo análogo, existe $s_2 \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{x(i-2,s_2)}{||x(i-1,s_1)||} > \frac{C}{n}$. Isto implica que

$$
\begin{aligned}
||x(i,j)|| &< \frac{n||x(i-1,s_1)||}{C}\\
&< \frac{n}{C}\frac{n}{C}||x(i-2,s_2)||\\
&= \frac{n^2||x(i-2,s_2)||}{C^2}.
\end{aligned}
$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio sobre $x(i-2,s_2)$ e assim sucessivamente i vezes, obtemos, para algum $s_i \in \mathbf{N}$, que

$$
\begin{aligned}
||x(i,j)|| &< \frac{n^i}{C^i}||x(i-i,s_i)||\\
&= \frac{n^i}{C^i}||x(0,s_i)||\\
&= \frac{n^i}{C^i}||x_{s_i}|| = \frac{n^i}{C^i},
\end{aligned}
$$

pois $x(i,j) = \sum_{t=(j-1)n^i+1}^{jn^i} x_t$. Logo $x(0,s_i) = \sum_{t=(s_i-1)n^0+1}^{s_i n^0} x_t = \sum_{t=s_i}^{s_i} x_t = x_{s_i}$ e $||x_i|| = 1$, $\forall i \in \{1,...,N\}$. ∎

Na próxima afirmação precisaremos trabalhar com intervalos de $\mathbf{N}$, veja Notação 0.5.

Afirmação 3.9 *Sejam $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$ e $C > 1$. Então existe $k \in \mathbf{N}$ tal que para qualquer seqüência $x_1, ..., x_{n^k}$ de vetores sucessivos de norma um, existe um intervalo E de $\mathbf{N}$, $E \subset \{1,2,...,n^k\}$ tal que*

$$\sum_{i\in E} x_i \quad \textit{é um} \quad l_{1+}^n - \textit{vetor com constante} \quad C.$$

Prova: Suponhamos que existam $n \in \mathbf{N}$ e $C > 1$ para os quais o resultado é falso. Sejam $k \in \mathbf{N}$ como na Afirmação 3.6, isto é, tal que $C^k > f(n^k)$, e $x_1, ..., x_{n^k}$ qualquer seqüência de vetores sucessivos de norma um,

$$x = \sum_{1}^{n^k} x_i \quad \text{e} \quad x(i,j) = \sum_{t=(j-1)n^i+1}^{jn^i} x_t.$$

Pela Afirmação 3.7 $x(i,j)$ é a soma de n sucessivos $x(i-1,j)'s$, e pela nossa hipótese $x(i,j)$ não é um l_{1+}^n−vetor, logo pela Afirmação 3.8 temos $||x|| \leq \frac{n^k}{C^k}$.

Sejam agora $E_i = ran(x_i)$, $\forall i \in \{1,...,n^k\}$, veja Notação 0.8. Então, como $||x_i|| = 1$ e $E_i(x_i) = x_i$, $\forall i \in \{1,...,n^k\}$, veja Notação 0.6, temos, pela Proposição 2.26(2), que

$$\frac{n^k}{f(n^k)} = \sum_{1}^{n^k} \frac{||x_i||}{f(n^k)} = \frac{\sum_1^{n^k} ||E_i x||}{f(n^k)} \leq ||x|| \leq \frac{n^k}{C^k}.$$

Portanto $C^K \leq f(n^k)$. Isto é uma contradição com $C^k > f(n^k)$. ∎

Prova do Lema 3.5. Suponhamos que o resultado seja falso, logo existem $n \in \mathbf{N}$, $C > 1$, tais que $\forall N \in \mathbf{N}$ existe alguma seqüência $x_1, ..., x_N$ de vetores sucessivos não nulos em X, tais que o subespaço gerado por $x_1, ..., x_N$ não contém nenhum l_{1+}^n−médias com constante C.

Para os n e C anteriores, sejam k como na Afirmação 3.6, $N = n^k$ e $x_1, ..., x_N$ uma seqüência de vetores sucessivos que podemos sem perda de generalidade supor normalizada, pois o subespaço gerado por essa seqüência não se altera se dividirmos cada um desses vetores pelas suas respectivas normas. Pela Afirmação 3.9 existe

$$E \subset \{1, 2, ..., N\} \quad \text{tal que} \quad x = \sum_{i \in E} x_i \quad \text{é um} \quad l_{1+}^n - \text{vetor}.$$

Logo $\frac{x}{||x||}$ é uma l_{1+}^n-média, contradizendo nossa suposição. ∎

3.3 Uma segunda limitação para $\sum_1^M ||E_j x||$

Sejam $N, M, n \in \mathbf{N}$. No próximo lema usaremos a Definição 3.3 de l_{1+}^N-vetor e as Notação 0.7 e 0.10 de "intervalos sucessivos" $E_1 < ... < E_M$ e de elementos (vetores) sucessivos $x_1 < ... < x_n$.

Se $E_1 < ... < E_M$ são intervalos de $\mathbf{N}$ e $x \in c_{00}(\mathbf{N})$, então pela Proposição 2.26(2), $\sum_1^M ||E_j(x)|| \leq f(M)||x||$. Agora, vamos mostrar que existem elementos em $c_{00}(\mathbf{N})$ para os quais a equação $(3, 2)$ mencionada no inicio deste capítulo vale, isto é $\sum_1^M ||E_j(x)|| \leq C(1 + 2M/N)||x||$ para alguns $N \in \mathbf{N}$ e $C \in \mathbf{R}$.

Lema 3.10 *Sejam $M, N \in \mathbf{N}$, $C > 1$, x um l_{1+}^N-vetor com constante C e $E_1 < ... < E_M$ uma seqüência de intervalos de $\mathbf{N}$. Então*

$$\sum_1^M ||E_j x|| \leq C(1 + 2M/N)||x||.$$

Sejam $x_1 < ... < x_N$ e E um intervalo de $\mathbf{N}$. Coloquemos

$$\mathbf{x} := \sum_{\mathbf{1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{x_i},$$

$$\mathbf{A} := \mathbf{A_E} = \{\mathbf{i} \in \{\mathbf{1}, ..., \mathbf{N}\} : \mathbf{supp(x_i)} \subset \mathbf{E}\}$$

e

$$\mathbf{B} := \mathbf{B_E} = \{\mathbf{i} \in \{\mathbf{1}, ..., \mathbf{N}\} : \mathbf{E(x_i)} \neq \phi\},$$

para fazer a prova do lema acima precisamos das três afirmações abaixo.

Na próxima afirmação o fato E é um intervalo de $\mathbf{N}$ será fundamental, veja Notação 0.5.

Afirmação 3.11 $|B| \leq |A| + 2$.

Prova: $|A| \leq |B|$, pois se $i \in A$ então $supp(x_i) \subset E$, logo $E(x_i) = x_i \neq \phi$. Assim $i \in B$ e portanto $A \subset B$.

Sejam $m = \min B$ e $M = \max B$. Mostremos que $A \cup \{m, M\} = B$. Se $m < i < M$, coloquemos

$$a := \max supp(x_m), \quad b \in supp(x_i), \quad c := \min supp(x_M),$$

logo, $a < b < c$, pois $x_m < x_i < x_M$.

Como $m = \min B$ temos que $E(x_m) \neq \phi$. Seja $d \in suppE(x_m)$. Então $d \in E \cap supp(x_m)$ e portanto $d \leq a$. Como $M = \max B$ temos que $E(x_M) \neq \phi$. Seja $e \in suppE(x_M)$. Então $e \in E \cap supp(x_M)$ e portanto $c \leq e$. Assim $d \leq a < b < c \leq e$.

Como E é um intervalo e $d, e \in E$, temos que $b \in E$, $\forall b \in supp(x_i)$. Logo $i \in A \subset B$. Consequentemente temos $A \cup \{m, M\} = B$. Portanto $|B| \leq |A| + 2$.■

Afirmação 3.12 $||E(x)|| \leq ||\sum_{i \in B} x_i||$.

Prova: Seja $y = \sum_{i \in B} x_i$ Então $||E(y)|| \leq ||y||$, pelo Teorema 2.20. E pela definição de B, se $i \notin B$, então $E(x_i) = 0$. Logo

$$\begin{aligned} ||E(x)|| &= ||E(x_1) + ... + E(x_N)|| = \left|\left| \sum_{i \in B} E(x_i) + \sum_{i \notin B} E(x_i) \right|\right| \\ &= \left|\left| \sum_{i \in B} E(x_i) \right|\right| = \left|\left| E\Big(\sum_{i \in B} x_i \Big) \right|\right| = ||E(y)|| \leq ||y|| = \left|\left| \sum_{i \in B} x_i \right|\right|. \quad ■ \end{aligned}$$

Sejam $E_1 < ... < E_M$, $x_1 < ... < x_N$ e $x = \sum_1^N x_i$ e como no que segue o Lema 3.10. Coloquemos

$$\mathbf{A_j := A_{E_j} = \{i \in \{1, ..., N\} : supp(x_i) \subset E_j\}}$$

e

$$\mathbf{B_j := B_{E_j} = \{i \in \{1, ..., N\} : E_j(x_i) \neq \phi\}}.$$

Afirmação 3.13 *Suponhamos que* $||x_i|| \leq C$, $\forall \in \{1, ..., N\}$ *e* $||x|| = N$. *Então*

$$\sum_1^M ||E_j(x_i)|| \leq C(1 + 2M/N)||x||.$$

Prova: Precisaremos de três observações.

a. Pela hipótese $||x|| = N$, logo $|C| \geq 1$. Pois $C < 1$ implicaria $||x|| = ||x_1 + ... + x_N|| \leq \sum_1^N ||x_i|| \leq \sum_1^N C = CN < N$; absurdo.

b. Os A_j são dois a dois disjuntos entre si e o mesmo ocorre com os B_j, pois $x_1 < ... < x_N$ e $E_1 < ... < E_M$.

c. $\sum_1^M |A_j| \leq N$. Pois $x_1 < ... < x_N$ e o item (b).

Agora, pelas Afirmações 3.12 e 3.11, temos que

$$\begin{aligned} ||E_j(x)|| &\leq \left|\left|\sum_{i\in B_j} x_i\right|\right| \leq \sum_{i\in B_j} ||x_i|| \leq \sum_{i\in B_j} C \\ &\leq C|B_j| \leq C(|A_j| + 2). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \sum_1^M ||E_j(x)|| &\leq \sum_1^M C(|A_j| + 2) \leq C(N + 2M) \\ &= C(1 + 2M/N)N = C(1 + 2M/N)||x||. \end{aligned}$$

∎

Prova do Lema 3.10. Seja $x = ky$ para algum $k \neq 0$ e para alguma y l_{1+}^N–média com constante C. Então existem

$$y_1 < ... < y_N \quad \text{com} \quad ||y_i|| \leq \frac{C}{N} \quad \text{tal que} \quad y = y_1 + ... + y_N \quad \text{e} \quad ||y|| = 1.$$

Seja $z = \frac{Nx}{k}$. Então $z = Ny = \sum_1^N Ny_i$. Escrevamos $z_i = Ny_i$. Logo

$$z = Ny = \sum_1^N z_i \quad \text{com} \quad ||z_i|| = ||Ny_i|| \leq C \quad \text{e} \quad ||z|| = ||Ny|| = N.$$

Assim, pela Afirmação 3.13, teremos

$$\sum_1^M ||E_j z|| \leq C(1 + 2M/N)||z||.$$

Dessa maneira, pela linearidade de E_j e pelas propriedades da norma, temos

$$\begin{aligned} \frac{N}{k}\sum_1^M ||E_j x|| &= \sum_1^M \left|\left|E_j\left(\frac{N}{k}x\right)\right|\right| = \sum_1^M ||E_j z|| \\ &\leq C(1 + 2M/N)||z|| = C(1 + 2M/N)\frac{N}{k}||x||. \end{aligned}$$

Portanto
$$\sum_{1}^{M} ||E_j x|| \leq C(1 + 2M/N)||x||. \blacksquare$$

3.4 Seqüências Rapidamente Crescentes (S.R.C)

Agora daremos uma definição que terá um papel fundamental neste trabalho.

Definição 3.14 *Diremos que uma seqüência $x_1 < ... < x_N$ é uma seqüência rapidamente crescente de l_{1+}−médias,* **S.R.C**, *de comprimento N com constante $1 + \epsilon$ se, para cada k:*

1. x_k *é uma* $l_{1+}^{n_k}$ − *média com constante* $1 + \epsilon$.

2. $n_1 \geq 2^{2^N}$.

3. $|ran(x_1 + ... + x_{k-1})| \leq \epsilon\sqrt{f(n_k)}$ $\forall k \in \{2, ..., N\}$.

Observação 3.15 *Pela Definição 3.1 claramente obtemos que se $x_1 < ... < x_N$ é uma S.R.C, então $||x_i|| = 1$, $\forall i \in \{1, ..., N\}$.*

Observação 3.16 *Sejam $\epsilon_1 \leq \epsilon_2$. Se $x_1, ..., x_N$ é uma S.R.C de comprimento N com constante $1 + \epsilon_1$, então claramente $x_1, ..., x_N$ é uma S.R.C de comprimento N com constante $1 + \epsilon_2$.*

O Lema 3.17, a Definição 4.3 de comprimento de um intervalo, O Lema 4.17 e o O Lema 5.1 que são resultados fundamentares nesta dissertação tem como hipótese alguma S.R.C.

3.5 Uma terceira limitação para $\sum_1^M ||E_j x||$

Lema 3.17 *Sejam $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$, $x_1, ..., x_N$ uma S.R.C de comprimento N com constante $1 + \epsilon$, $x = x_1 + ... + x_N$, $M \geq f^{-1}(\frac{6N}{\epsilon})$ e $E_1 < ... < E_M$ intervalos de* $\mathbb{N}$. *Então*
$$\sum_{1}^{M} \frac{||E_j x||}{f(M)} \leq 1 + 2\epsilon.$$

Para fazer a prova deste resultado precisamos das quatro afirmações abaixo.

Afirmação 3.18 *Sejam $n \in \mathbf{N}$ e y uma l_{1+}^n−média com constante C. Então*

a. *Existe m máximo, $m \in \mathbf{N}$, tal que y é uma l_{1+}^m−média com constante C.*

b. $n \leq m \leq |ran(y)|$.

Prova: Seja $A := \{k \in \mathbf{N} : \quad y \quad \text{é uma} \quad l_{1+}^k\text{−média com constante} \quad C\}$. $A \neq \phi$, pois $n \in A$. Sejam $k \in A$ e $s = |supp(y)|$. Então existem, pela Definição 3.1, $y_1, ..., y_k$ uma seqüência de vetores sucessivos não nulos tal que

$$y = y_1 + ... + y_k.$$

Logo

$$1 \leq |supp(y_i)| \quad \text{e} \quad \sum_1^k |supp(y_i)| = \left|\sum_1^k supp(y_i)\right| = |supp(y)|.$$

Portanto

$$k = \sum_1^k 1 \leq \sum_1^k |supp(y_i)| = |supp(y)| = s.$$

Consequentemente $k \leq s$ para todo $k \in A$. E então concluímos que A é finito e não vazio. Assim, A tem máximo. Seja $m = \max A$. Então como $\text{supp}(x) \subset \text{ran}(x)$ para todo $x \in c_{00}(\mathbf{N})$ (veja Notação 0.8), temos que

$$n \leq m \leq |supp(y)| \leq |ran(y)|$$

e

$$y \quad \text{é uma} \quad l_{1+}^m - \text{média com constante} \quad C. \qquad \blacksquare$$

Afirmação 3.19 *Sejam $n, M \in \mathbf{N}$, y uma l_{1+}^n−média com constante C e $E_1 < ... < E_M$ intervalos de $\mathbf{N}$. Então*

$$\sum_1^M ||E_j y|| \leq min\{f(M), f(|supp(y)|), C(1 + 2M/N)\}.$$

Prova: Será feita através de três desigualdades.

a. Pela Proposição 2.26(2) e pela Definição 3.1(1) temos que

$$\sum_1^M \frac{||E_j y||}{f(M)} \leq ||y|| = 1.$$

b. Seja $A = \{j \in \{1, ..., M\} : E_j y \neq 0\}$. Então

$$\sum_1^M ||E_j x|| = \sum_{j \in A} ||E_j x||.$$

Mas, pela Proposição 2.26(2) temos que $\sum_{j \in A} \frac{||E_j y||}{f(|A|)} \leq ||y|| = 1$, portanto

$$\sum_1^M ||E_j y|| = \sum_{j \in A} ||E_j y|| \leq f(|A|).$$

Sejam $j \in A$ e $y_j := E_j y$. Então $y_j \neq 0$. Se $a, b \in A$ e $a < b \in A$, então $y_a < y_b$, pois $E_1 < ... < E_M$, logo $\cup_{j \in A} supp(y_j)$ é disjunta e como $\cup_{j \in A} supp(y_j) \subset supp(y)$, obtemos

$$|A| = \sum_{j \in A} 1 \leq \sum_{j \in A} |supp(y_j)| \leq |supp(y)|.$$

Portanto, por (ii), temos

$$\sum_1^M ||E_j x|| \leq f(|A|) \leq f(|supp(y)|).$$

c. $\sum_1^M ||E_j y|| \leq C\left(1 + \frac{2M}{N}\right)||y|| = C\left(1 + \frac{2M}{N}\right)$. Isto é uma consequência do Lema 3.10 e da Definição 3.1(1). ■

Afirmação 3.20 *Sejam $x_1 < ... < x_N$ uma S.R.C tais que x_i é uma $l_{1+}^{n_i}$−média com constante C, $1 \leq i \leq N$. Então*

a. $2^{2^N} \leq n_1 < n_2 < ... < n_N$.

b. $|supp(x_i)| \leq \epsilon\sqrt{f(n_{i+1})}$, $\forall i \in \{1, ..., N\}$.

Prova: Pela Definição 3.14(2) $2^{2^N} \leq n_1$. Agora como $x_1 < ... < x_N$, temos que $ran(x_i) \subset ran(x_1 + ... + x_i)$. Logo $n_i \leq |ran(x_i)| \leq |ran(x_1 + ... + x_i)| \leq \epsilon\sqrt{f(n_{i+1})} < f(n_{i+1}) < n_{i+1}$, $\forall i \in \{1, ..., N-1\}$, pela Afirmação 3.18(b), a Definição 3.14(3) e (i). Assim temos (a).

Como, veja Notação 0.8, $supp(x_i) \subset ran(x_i)$ temos

$$|supp(x_i)| \leq |ran(x_i)| \leq |ran(x_1 + ... + x_i)| \leq \epsilon\sqrt{f(n_{i+1})},$$

veja Definição 3.14(3), e portanto também temos (b). ■

Afirmação 3.21 *Sejam $N, n_i \in \mathbf{N}$, $\forall i \in \{1, ..., N\}$, $x_1 < ... < x_N$ uma S.R.C tais que x_i é uma $l_{1+}^{n_i}$-média com constante C e $k \in \{1, ..., N\}$ fixo tal que $n_k \leq M$. Então $\sum_1^{k-1} f(|supp(x_i)|) \leq \epsilon\sqrt{f(M)}$.*

Prova: Por (i) temos que

$$f(|supp(x_i)|) \leq |supp(x_i)|$$

e como $x_1 < ... < x_N$, temos que

$$\sum_1^{k-1} |supp(x_i)| = |supp(x_1 + ... + x_{k-1})| \leq |ran(x_1 + ... + x_{k-1})|,$$

veja Notação 0.8. Logo, pela Definição 3.14(3) e (ii), temos

$$\begin{aligned} \sum_1^{k-1} f(|supp(x_i)|) &\leq \sum_1^{k-1} |supp(x_i)| \leq |ran(x_1 + ... + x_{k-1})| \\ &\leq \epsilon\sqrt{f(n_k)} \leq \epsilon\sqrt{f(M)}. \end{aligned}$$

∎

Prova do Lema 3.17: Pela Observação 3.15 $||x_i||$, $\forall i \in \{1, ..., N\}$ e pela Afirmação 3.18(a) podemos tomar n_i máximo tal que x_i é uma $l_{1+}^{n_i}$-média com constante $1 + \epsilon$, $\forall i \in \{1, ..., N\}$ e seja k máximo tal que $n_k \leq M$. Então $M < n_i$, $\forall i \in \{k + 1, ..., N\}$. Este máximo existe e é único pois os n_i são máximos e $n_1 < ... < n_N$, veja Afirmação 3.20(a) (Se os n_i não fossem máximos, k variaria para cada escolha dos n_i). E finalmente, pela Afirmação 3.21

$$\sum_1^{k-1} f(|supp(x_i)|) \leq \epsilon\sqrt{f(M)}.$$

Portanto pela Afirmação 3.19 temos

$$\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=1}^{M} ||E_j x_i|| \leq \sum_{i=1}^{k-1} f(|supp(x_i)|) \leq \epsilon\sqrt{f(M)} \leq \epsilon f(M).$$

Mas pela Proposição 2.26 e pela Observação 3.15 temos que $\frac{\sum_{j=1}^{M} ||E_j x_k||}{f(k)} \leq ||x_k|| = 1$. E como $k \leq n_k \leq M$, temos, por (ii), que

$$\sum_{j=1}^{M} ||E_j x_k|| \leq f(k) \leq f(M).$$

Isto mais o Lema 3.10 e o fato de que $f^{-1}(\frac{6N}{\epsilon}) \leq M$ implicam que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}||E_jx_i|| &= \sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{M}||E_jx_i|| + \sum_{j=1}^{M}||E_jx_k|| + \sum_{i=k+1}^{N}\sum_{j=1}^{M}||E_jx_i|| \\
&\leq \epsilon f(M) + f(M) + \sum_{i=k+1}^{N}(1+\epsilon)\Big(1+2\frac{M}{n_i}\Big) \\
&\leq \epsilon f(M) + f(M) + \sum_{i=k+1}^{N}(1+\epsilon)\Big(1+\frac{2M}{M}\Big) \\
&\leq \epsilon f(M) + f(M) + N(1+\epsilon)(1+2) \\
&\leq f(M)\Big(\epsilon + 1 + \frac{3N(1+\epsilon)}{f(M)}\Big) \\
&\leq f(M)\Big[\epsilon + 1 + \frac{(1+\epsilon)\epsilon}{2}\Big] \\
&\leq f(M)(\epsilon + 1 + \epsilon).
\end{aligned}
$$

Mas, veja Notação 0.6,

$$||E_jx|| = \Big|\Big|E_j\Big(\sum_{i=1}^{N}(x_i)\Big)\Big|\Big| = \Big|\Big|\sum_{i=1}^{N}E_jx_i\Big|\Big| \leq \sum_{i=1}^{N}||E_jx_i||.$$

Logo

$$\sum_{j=1}^{M}||E_jx|| \leq \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=1}^{N}||E_jx_i|| \leq f(M)(1+2\epsilon). \qquad \blacksquare$$

Capítulo 4

Combinação especial, comprimento de um intervalo e algumas propriedades do conjunto J

Se x^* é uma aplicação especial e $x \in c_{00}(\mathbf{N})$, então pela Proposição 2.26(3)

$$|x^*(x)| \leq ||x||.$$

A seguir, vamos definir uma aplicação x^* tal que para alguns $x \in c_{00}(\mathbf{N})$ vale

$$|x^*(x)| \leq \frac{||x||}{10^{100}} + \frac{4M}{f(M)}, \quad \exists M \in \mathbf{N},$$

veja o Lema 4.17. Para isto precisaremos de algumas definições.

4.1 Combinação especial

Definição 4.1 *Seja $N \in \mathbf{N}$. Uma* **combinação especial** *x^* é uma aplicação da forma $\sum_1^N a_i x_i^*$, onde $\sum_1^N |a_i|^2 = 1$ e $x_1^*, ..., x_N^*$ é uma seqüência de a.e.d, veja Definição 1.8(e).*

Seja $j \in \mathbf{J}$ com $\mathbf{J}$ satisfazendo a Proposição 1.2. Na próxima definição usaremos elementos de $A_j^*(X)$, veja Definição 1.8(a).

Definição 4.2 *Sejam $N \in \mathbf{N}$, $j_1, ..., j_N \in \mathbf{J}$ elementos distintos, $a_i \in \mathbf{R}$, $\forall i \in \{1, ..., N\}$ tal que $\sum_1^N |a_i|^2 = 1$, $x_i^* \in A_{j_i}^*(X)$ e $E_1, ..., E_N$ uma seqüência qualquer de intervalos de $\mathbf{N}$. Então*

$$x^* = \sum_1^N a_i E_i(x_i^*) \quad \textit{será chamada } \textbf{combinação básica especial}.$$

Logo uma combinação básica especial é uma aplicação em que as seqüências especiais usadas para construí-la tem comprimento no máximo 1 (pois só tem um $x_i^* \in A_{j_i}^*(X)$; um só somando diferente das a.e.d onde cada somando é soma de outros somandos e cada um desses últimos está em algum $A_j^*(X)$).

Portanto uma combinação básica especial é um caso particular de combinação especial.

As Definições 4.1 e 4.2 serão usadas na prova do 5ºPasso e do 4ºPasso do Capítulo 5, veja Afirmações 5.85 e 5.69.

4.2 Comprimento de um intervalo

Definição 4.3 *Sejam $M, N \in \mathbf{N}$, $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C com constante $1+\epsilon$, para algum $\epsilon > 0$. Pela Afirmação 3.18(a) $\forall s \in \{1, ..., M\}$ $\exists n_s \in \mathbf{N}$ máximo, tal que x_s é um $l_{1+}^{n_s}$−média com constante $1+\epsilon$. Logo, pela Definição 3.1 existem $x_{s1} < ... < x_{sn_s}$ tais que*

$$x_s = x_{s1} + ... + x_{sn_s} \quad com \quad ||x_{sp}|| \leq \frac{1+\epsilon}{n_s}, \quad \forall p \in \{1, ..., n_s\}.$$

Dado um intervalo qualquer $E \subset \mathbf{N}$, sejam

$\mathbf{j} := \mathbf{j_E} = \max\{\mathbf{t} \in \{\mathbf{1}, ..., \mathbf{M}\} : \mathbf{Ex_t} \neq \phi\}$,

$\mathbf{i} := \mathbf{i_E} = \min\{\mathbf{t} \in \{\mathbf{1}, ..., \mathbf{M}\} : \mathbf{Ex_t} \neq \phi\}$,

$\mathbf{s} := \mathbf{s_E} = \max\{\mathbf{k} \in \{\mathbf{1}, ..., \mathbf{n_j}\} : \mathbf{Ex_{jk}} \neq \phi\}$,

$\mathbf{r} := \mathbf{r_E} = \min\{\mathbf{k} \in \{\mathbf{1}, ..., \mathbf{n_i}\} : \mathbf{Ex_{ik}} \neq \phi\}$.

O **comprimento** *$\lambda(E)$ do intervalo E é dado por*

$$\lambda(E) = j - i + \frac{s}{n_j} - \frac{r}{n_i} = j_E - i_E + \frac{s_E}{n_{j_E}} - \frac{r_E}{n_{i_E}}.$$

4.3 Cálculos utilizando a definição de comprimento

Observação 4.4 *Sejam $M \in \mathbf{N}$, $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C com constante $1 + \epsilon$, para algum $\epsilon > 0$ e E um intervalo de $\mathbf{N}$. Então $\lambda(E) < M$.*

Prova: De fato, pela Definição 4.3, temos

$$\begin{aligned} \lambda(E) &= j_E - i_E + \frac{s_E}{n_{j_E}} - \frac{r_E}{n_{i_E}} \\ &\leq M - 1 + \frac{n_{j_E}}{n_{j_E}} - \frac{1}{n_{i_E}} \\ &= M - \frac{1}{n_{i_E}} < M. \end{aligned}$$

■

Observação 4.5 *Sejam $M, N \in \mathbf{N}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C com constante $1+\epsilon$, para algum $\epsilon > 0$. Se $E_1 < ... < E_N$ e $E = \cup_1^N E_i$, então $\sum_{i=1}^N \lambda(E_i) < \lambda(E)$.*

Prova: Se $E_1 < ... < E_N$, $E = \cup_1^N E_i$ e $x_1 < ... < x_M$, então pela Definição 4.3, $i_{E_1} = i_E$, $r_{E_1} = r_E$, $j_{E_M} = j_E$ e $s_{E_M} = s_E$.

Como $E_1 < ... < E_N$, temos, de novo pela Definição 4.3, que

$$j_{E_k} \leq i_{E_{k+1}}, \quad \forall k \in \{1, ..., N-1\}.$$

Seja $k \in \{1, ..., N-1\}$. Vamos achar limitações para $\frac{s_{E_k}}{n_{j_{E_k}}} - \frac{r_{E_{k+1}}}{n_{i_{E_{k+1}}}}$. Para isto consideremos os dois seguintes casos $j_{E_k} = i_{E_{k+1}}$ e $j_{E_k} < i_{E_{k+1}}$.

1. Se $j_{E_k} = i_{E_{k+1}}$ e já que $x_1 < ... < x_M$, então existe x_t com t máximo, tal que $j_{E_k} = t = i_{E_{k+1}}$ portanto $n_{j_{E_k}} = n_t = n_{i_{E_{k+1}}}$. Como $E_k < E_{k+1}$ também temos, neste caso, que $s_{E_k} \leq r_{E_{k+1}}$.

Concluímos então que

$$\frac{s_{E_k}}{n_{j_{E_k}}} - \frac{r_{E_{k+1}}}{n_{i_{E_{k+1}}}} = \frac{s_{E_k}}{n_t} - \frac{r_{E_{k+1}}}{n_t} \leq 0, \quad \text{se} \quad j_{E_k} = i_{E_{k+1}}.$$

2. Se $j_{E_k} < i_{E_{k+1}}$, então existem $x_t < ... < x_u$ com t máximo e u mínimo satisfazendo $j_{E_k} = t$ portanto $n_{j_{E_k}} = n_t$ e $i_{E_{k+1}} = u$ assim $n_{i_{E_{k+1}}} = n_u$. Consequentemente

$$\frac{s_{E_k}}{n_{j_{E_k}}} - \frac{r_{E_{k+1}}}{n_{i_{E_{k+1}}}} = \frac{s_{E_k}}{n_t} - \frac{r_{E_{k+1}}}{n_u} \leq \frac{s_{E_k}}{n_t} - \frac{1}{n_u}, \quad \text{se} \quad j_{E_k} < i_{E_{k+1}}.$$

Mas $\frac{1}{n_t} \leq \frac{s_{E_k}}{n_t} \leq 1$. Portanto

$$\frac{s_{E_k}}{n_{j_{E_k}}} - \frac{r_{E_{k+1}}}{n_{i_{E_{k+1}}}} \leq 1 - \frac{1}{n_u} \leq 1, \quad \text{se} \quad j_{E_k} < i_{E_{k+1}}.$$

Coloquemos $F = \{k : j_{E_k} - i_{E_{k+1}} \leq -1, \quad 1 \leq k \leq M-1\}$. Observemos que se $k \notin F$, então $-1 < j_{E_k} - i_{E_{k+1}}$. E como $j_{E_k} - i_{E_{k+1}} \leq 0$ temos que se $k \notin F$, então $j_{E_k} - i_{E_{k+1}} = 0$. Pois, pela Definição 4.3, j_{E_k} e $i_{E_{k+1}}$ são inteiros.

Agora pelos itens (1) e (2) e as observações acima sobre F temos que

$$\begin{aligned}
\sum_{v=1}^{N} \lambda(E_v) &= j_{E_1} - i_{E_1} + \frac{s_{E_1}}{n_{j_{E_1}}} - \frac{r_{E_1}}{n_{i_{E_1}}} + \sum_{v=2}^{N-1} \left\{ j_{E_v} - i_{E_v} + \frac{s_{E_v}}{n_{j_{E_v}}} - \frac{r_{E_v}}{n_{i_{E_v}}} \right\} + \\
&\quad j_{E_N} - i_{E_N} + \frac{s_{E_N}}{n_{j_{E_N}}} - \frac{r_{E_N}}{n_{i_{E_N}}} \\
&= j_{E_N} - i_{E_1} + \frac{s_{E_N}}{n_{j_{E_N}}} - \frac{r_{E_1}}{n_{i_{E_1}}} + \sum_{v=1}^{N-1} (j_{E_v} - i_{E_{v+1}}) + \sum_{v=1}^{N-1} \left(\frac{s_{E_v}}{n_{j_{E_v}}} - \frac{r_{E_{v+1}}}{n_{i_{E_{v+1}}}} \right) \\
&= \lambda(E) + \sum_{v \notin F} (j_{E_v} - i_{E_{v+1}}) + \sum_{v \notin F} \left(\frac{s_{E_v}}{n_{j_{E_v}}} - \frac{r_{E_{v+1}}}{n_{i_{E_{v+1}}}} \right) + \\
&\quad \sum_{v \in F} (j_{E_v} - i_{E_{v+1}}) + \sum_{v \in F} \left(\frac{s_{E_v}}{n_{j_{E_v}}} - \frac{r_{E_{v+1}}}{n_{i_{E_{v+1}}}} \right) \\
&\leq \lambda(E) + 0 + 0 + \sum_{v \in F} (-1) + \sum_{v \in F} 1 = \lambda(E).
\end{aligned}$$

■

Observação 4.6 *Sejam $M \in \mathbf{N}$, $x_1 < \ldots < x_M$ uma S.R.C com constante $1+\epsilon$, E um intervalo de $\mathbf{N}$ e $x = x_1 + \ldots + x_M$. Então $\|Ex\| \leq (1+\epsilon)\big(\lambda(E) + 2^{-2^M}\big)$.*

Prova: Seja $t \in \{1, \ldots, M\}$. Como $x_1, \ldots, x_M$ é uma S.R.C temos que x_t é uma $l_{1+}^{n_t}$−média, logo $\exists n_t \in \mathbf{N}$ tal que $x_t = x_{t1} + \ldots + x_{tn_t}$ com $\|x_{tu}\| \leq \frac{1+\epsilon}{n_t}$, $\forall u \in \{1, \ldots, n_t\}$ e $\|x_t\| = 1$, para alguns $x_{t1} < \ldots < x_{tn_t}$. Pela Afirmação 3.18(a) podemos tomar n_t máximo. E Pela Afirmação 3.20(a)

$$2^{2^M} \leq n_1 \leq \ldots \leq n_M.$$

Sejam $j := \max\{t \in \{1, \ldots, M\} : Ex_t \neq \phi\}$. Logo

$$Ex_t = \phi \quad \text{se} \quad t > j,$$

$i := \min\{t \in \{1, \ldots, M\} : Ex_t \neq \phi\}$. Logo

$$Ex_t = \phi \quad \text{se} \quad t < i,$$

$s := \max\{k \in \{1, ..., n_j\} : Ex_{jk} \neq \phi\}$ e $r := \min\{k \in \{1, ..., n_i\} : Ex_{ik} \neq \phi\}$.

Então, pela Definição 4.3

$$\lambda(E) = j - i + \frac{s}{n_j} - \frac{r}{n_i}$$

e como E é um intervalo de $\mathbf{N}$ e $x_1 < ... < x_M$ temos que se $i < u < j$ então

$$E(x_u) = x_u.$$

Mas

$$||E(x_t)|| = ||E(x_{t1}) + ... + E(x_{tn_t})|| \leq ||E(x_{t1})|| + ... + ||E(x_{tn_t})||, \quad \forall t \in \{1, ..., M\}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
||E(x_i)|| &= ||E(x_{ir}) + ... + E(x_{in_i})|| \\
&\leq ||E(x_{ir})|| + ... + ||E(x_{in_i})|| \\
&\leq ||x_{ir}|| + ... + ||x_{in_i}|| \\
&\leq \frac{1+\epsilon}{n_i}(n_i - r + 1)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
||E(x_j)|| &\leq ||E(x_{j1}) + ... + E(x_{js})|| \\
&\leq \frac{1+\epsilon}{n_J} s.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
||E(x)|| &= ||E(x_1) + ... + E(x_M)|| \leq ||E(x_1)|| + ... + ||E(x_M)|| \\
&= ||E(x_i)|| + ||E(x_{i+1})|| + ... + ||E(x_{j-1})|| + ||E(x_j)|| \\
&= ||E(x_i)|| + ||x_{i+1}||... + ||x_{j-1}|| + ||E(x_j)|| \\
&\leq \frac{1+\epsilon}{n_i}(n_i - r + 1) + \{1 + ... + 1\} + \frac{1+\epsilon}{n_J}(s) \\
&= \frac{1+\epsilon}{n_i}(n_i - r + 1) + \{(j-1) - (i+1) + 1\} + \frac{1+\epsilon}{n_J}(s) \\
&< (1+\epsilon) - (1+\epsilon)\frac{r}{n_i} + \frac{1+\epsilon}{n_i} + (j - i - 1)(1+\epsilon) + \frac{1+\epsilon}{n_J}(s) \\
&= (j - i + \frac{s}{n_j} - \frac{r}{n_i} + \frac{1}{n_i})(1+\epsilon) \\
&= \left(\lambda(E) + \frac{1}{n_i}\right)(1+\epsilon) \leq \left(\lambda(E) + \frac{1}{2^{2^M}}\right)(1+\epsilon).
\end{aligned}$$

■

4.4 Duas limitações para $||x||$

Observação 4.7 *Sejam $M \in \mathbf{N}$, $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C e $x = x_1 + ... + x_M$. Então*

$$\frac{M}{f(M)} \leq ||x|| \leq M.$$

Prova: Sejam $i, j \in \{1, ..., M\}$ e $E_i = ran(x_i)$. Então $E_1 < ... < E_M$, $E_i(x_j) = 0$ se $i \neq j$ e $E_i(x_i) = x_i$, portanto $E_i(x) = x_i$. Mas pela Observação 3.15 $||x_i|| = 1$, logo

$$||x|| \geq \sum_1^M \frac{||E_i(x)||}{f(M)} = \sum_1^M \frac{||x_i||}{f(M)} = \frac{M}{f(M)}.$$

Além disso

$$||x|| = ||x_1 + ... + x_M|| \leq ||x_1|| + ... + ||x_M|| = M.$$

■

A Observação 4.7 será muito útil na prova de que $\widetilde{X}$ não contém nenhum subespaço isomorfo à $c_0(\mathbf{N})$, veja o Capítulo 6 a Observação 6.1.

4.5 O conjunto J

Lembremos que existe um subconjunto infinito $\mathbf{J} = \{j_1, j_2, ...\} \subset \mathbf{N}$, tal que se $m, n \in \mathbf{J}$ e $m < n$ então $\log\log\log\log\log n \geq 1000m$ e $f(m) > 10^{103}$, $\forall m \in \mathbf{J}$, veja Proposição 1.2. Agora apresentaremos algumas propriedades de $\mathbf{J}$ que serão usadas mais para frente.

Observação 4.8 *Se $M \in \mathbf{J}$ então $10^{202} \leq M/f^2(M)$.*

Prova: Seja $j_1 := min\ \mathbf{J}$. Então

$$10^{103} \leq f(j_1) = \sqrt{log_2(j_1 + 1)} \leq \sqrt{j_1}, \quad \text{logo} \quad 10^{206} \leq j_1.$$

Por (ii) $\frac{r}{f^2(r)}$ é não decrescente e como $10^{206} \leq j_1 \leq M$ temos que

$$\frac{10^{206}}{f^2(10^{206})} \leq \frac{j_1}{f^2(j_1)} \leq \frac{M}{f^2(M)}.$$

Mas

$$\frac{1}{f^2(10^{206})} = \frac{1}{\log_2(10^{206})} \geq \frac{1}{\log_2(16^{206})} = \frac{1}{(206.(4))} \geq \frac{1}{10^3}.$$

Portanto

$$10^{202} < \frac{10^{206}}{10^3} < \frac{10^{202}}{f^2(10^{206})} \leq \frac{M}{f^2(M)}.$$ ■

Observação 4.9 *Sejam $M \in \mathbf{J}$, $x_1, ..., x_M$ uma S.R.C e $x = x_1 + ... + x_M$. Então*

$$\frac{1}{||x||} \leq \frac{1}{10^{305}}.$$

Prova: Como $M \in \mathbf{J}$, pelas Observações 4.7 e 4.8 temos que

$$\frac{1}{||x||} \leq \frac{f(M)}{M} \leq \frac{f(M)}{10^{202} f^2(M)} = \frac{1}{10^{202} f(M)} \leq \frac{1}{10^{202} 10^{103}}.$$ ■

Observação 4.10 *Se $M \in \mathbf{J}$ então $\sqrt{M} \leq \frac{M}{10^{101} f(M)}$.*

Prova: Pela Observação 4.8 temos $10^{202} \leq \frac{M}{f^2(M)}$. Logo $10^{101} \leq \frac{\sqrt{M}}{f(M)}$ e portanto $10^{101}\sqrt{M} \leq \frac{M}{f(M)}$. ■

Observação 4.11 $10^n 10^{102} \leq f(j_n)$, $\forall n \in \mathbf{N}$

Prova: $10^1 10^{102} = 10^{103} \leq f(j_1)$, pois $10^{103} \leq f(j)$, $\forall j \in \mathbf{J}$, veja Proposição 1.2(2).

Suponhamos que $10^k 10^{102} \leq f(j_k)$. Então pela Proposição 1.2(1) temos

$$10^{2k} 10^{204} 10^3 \leq f^2(j_k) 10^3 = \log_2(j_k + 1) 10^3 \leq j_k 10^3 \leq \log\log\log\log\log(j_{k+1}).$$

Mas

$$2^{10^{2(k+1)} 10^{204}} - 1 = 2^{10^{2k} 10^{206}} - 1 \leq 10^{10^{2k} 10^{206}} \leq 10^{10^{10^{10^{10^{2k} 10^{207}}}}} \leq j_{k+1}.$$

Logo

$$10^{k+1} 10^{102} = \sqrt{\log_2(2^{10^{2(k+1)} 10^{204}})} \leq \sqrt{\log_2(j_{k+1} + 1)} = f(j_{k+1}).$$ ■

Observação 4.12 $\sum_1^\infty \frac{1}{f(j_n)} \leq \frac{1}{10^{102}}$.

Prova: Pela Observação 4.11 temos

$$\sum_1^\infty \frac{1}{f(j_n)} \leq \sum_1^\infty \frac{1}{10^n 10^{102}} = \frac{1}{10^{102}}.\frac{1}{10}.\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{10^{103}}.\frac{10}{9} < \frac{1}{10^{102}}.$$ ∎

Observação 4.13 $\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{f(j_n)}} \leq \frac{1}{10^{51}} < 1$.

Prova: Pela Observação 4.11 temos

$$\begin{aligned}\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{f(j_n)}} &\leq \sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{10^n 10^{102}}} \leq \sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{4^n}10^{51}} \\ &= \sum_1^\infty \frac{1}{2^n 10^{51}} = \frac{1}{10^{51}}.\frac{1}{2}.\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{10^{51}}.\end{aligned}$$ ∎

Observação 4.14 *Para $k, l \in \mathbf{J}$ temos que*

1. *Se $l \leq k$ então* $\exp\exp\exp(l) \leq k$.
2. *Se $k \leq l$ então* $k \leq \log\log\log(l)$.

Prova: Pela Proposição 1.2(1) temos que

1. Se $l \leq k$ então $1000l \leq \log\log\log\log\log(k)$. Mas se $k < \exp\exp\exp(l)$, então $(\ln\ln\ln k) < l$ e como $\log\log\log(k) < \ln\ln\ln(k)$ temos que

$$\log\log(\log\log\log(k)) \leq \log\log(\ln\ln\ln(k)) \leq \log\log(l) < 1000l; \quad \text{absurdo.}$$

2. Se $k \leq l$ então $1000k \leq \log\log\log\log\log(l)$. Mas se $\log\log\log(l) \leq k$ então

$$\log\log(\log\log\log(l)) \leq \log\log(k) < 1000k; \quad \text{absurdo.}$$ ∎

Observação 4.15 *Sejam $l, M \in \mathbf{J}$ e $exp(\sqrt{\log l}) \leq M \leq l$. Então $l \leq 2^{2^M}$.*

Prova: Sejam $r \geq 256 = 2^8$ e

$$g(r) = \sqrt{\frac{r}{\log_2 10}} - \log_2 r = \sqrt{\frac{r}{\log_2 10}} - \frac{\ln r}{\ln 2}.$$

Então

$$g(2^8) = \frac{2^4}{\sqrt{\log_2 10}} - 8 > \frac{2^4}{\sqrt{\log_2 16}} - 8 = 0,$$

e

$$g'(r) = \frac{1}{2\sqrt{r\log_2 10}} - \frac{1}{r\ln 2} > \frac{1}{2\sqrt{r\log_2 16}} - \frac{2}{r} = \frac{1}{4\sqrt{r}} - \frac{2}{r} > 0,$$

pois $r \geq 2^8$ e $2\ln 2 = \ln 2^2 > \ln e = 1$. Logo, $g(r) > 0$ se $r \geq 64^2$. Portanto

$$\sqrt{\frac{r}{\log_2 10}} \geq \log_2 r \quad \text{se} \quad r \geq 2^8.$$

Pela Proposição 1.2(2) $10^{103} \leq f(j) = \sqrt{\log_2(j+1)}$, $\forall j \in \mathbf{J}$, logo $10^{206} \leq \log_2(l+1)$, portanto $2^{10^{206}} \leq l+1$. E então concluímos que

$$2^8 = 256 < 618 = 3.206 = \log_2 \log_2 2^{8^{206}} < \log_2 \log_2 2^{10^{206}} \leq \log_2 \log_2 j.$$

Mas

$$\ln(\log_2 \log_2(l)) \leq \log_2(\log_2 \log_2(l)) \leq \log_2 \log_2(l) \leq \sqrt{\frac{\log_2 l}{\log_2 10}} = \sqrt{\log l}.$$

Portanto

$$\log_2 \log_2(l) \leq exp\sqrt{\log l} \leq M. \qquad \blacksquare$$

4.6 Uma relação de comutatividade

Observação 4.16 *Sejam $y^* \in X^* \cap c_{00}(\mathbf{N})$, $E = ran(y^*)$ e $x = \sum_{n \in N} b_n e_n \in X$. Então*

$$(Ey^*)(x) = y^*(Ex) = y^*(x)$$

Prova: Se $y^* = \sum_{n \in N} a_n e_n^*$ e $E = \{c, c+1, ..., d\}$ então $y^* = \sum_c^d a_n e_n^*$ e se $n < c$ ou $n > d$ temos $a_n = 0$, consequentemente

1. $y^*(x) = \sum_{n \in N} a_n b_n = \sum_c^d a_n b_n$.

2. $y^*(Ex) = y^*\left(\sum_c^d b_n e_n \right) = \sum_c^d b_n y^*(e_n) = \sum_c^d b_n a_n$.

3. $(Ey^*)(x) = \left(\sum_c^d a_n e_n^* \right)(x) = \sum_c^d a_n e_n^*(x) = \sum_c^d a_n b_n$. $\blacksquare$

4.7 Outra limitação para $|x^*(x)|$

Se x^* é uma aplicação especial então pela Proposição 2.26(3) $|x^*(x)| \leq ||x||$. No Lema 4.17 apresentaremos outra limitação para uma combinação básica especial. Este lema será útil na prova do 4ºPasso no Capítulo 5, veja Afirmação 5.70.

Lema 4.17 *Sejam $l \in \mathbf{J}$, $N, M \in \mathbf{N}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C com constante $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ tal que $exp(\sqrt{\log l}) \leq M \leq l$. Suponhamos que $x = x_1 + ... + x_M$ seja um $l_{1+}^{M'}-$vetor com constante 2, para algum $M' \geq \log M$. Seja $x^* = \sum_1^N a_i x_i^*$ uma combinação básica especial. Então*

$$|x^*(x)| \leq \frac{||x||}{10^{100}} + 4\frac{M}{f(M)}.$$

Para fazer a prova do Lema 4.17 precisamos das 13 afirmações abaixo.

Afirmação 4.18 *Sejam $N, M \in \mathbf{N}$ e $x^* = \sum_1^N a_i x_i^*$ uma combinação básica especial. Então Existem inteiros distintos $k_1, ..., k_N \in \mathbf{J}$ tais que $\forall i \in \{1, ..., N\}$, x_i^* é um intervalo projeção de alguma aplicação em $A_{k_i}^*$.*

Prova: Como $x^* = \sum_1^N a_i x_i^*$ é uma combinação básica especial, temos pela Definição 4.2 que existem inteiros distintos $k_1, ..., k_N \in \mathbf{J}$ tais que $\forall i \in \{1, ..., N\}$, $x_i^* = F_i y_i$, onde F_i é um intervalo de $\mathbf{N}$ e $y_i \in A_{k_i}^*$, $\exists k_i \in \mathbf{N}$, isto é,

$$x_i^* = \frac{F_i(y_{i1}^* + ... + y_{ik_i}^*)}{f(k_i)}$$

com $y_1^* < ... < y_{k_i}^*$ e $||y_{is}^*|| \leq 1$, $\forall s \in \{1, ..., k_i\}$, veja a Definição 1.8(a). ■

Seja $i \in \{1, ..., N\}$. Daqui para frente nesta seção

$$\mathbf{x_i^*} := \frac{\mathbf{F_i(y_{i1}^* + ... + y_{ik_i}^*)}}{\mathbf{f(k_i)}},$$

onde F_i é um intervalo de $\mathbf{N}$, $y_1^* < ... < y_{k_i}^*$ e $||y_{is}^*|| \leq 1$, $\forall s \in \{1, ..., k_i\}$, como na prova da Afirmação 4.18.

Afirmação 4.19 *Sejam $l \in \mathbf{J}$, $N, M \in \mathbf{N}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C com constante $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ tal que $exp(\sqrt{\log l}) \leq M \leq l$ e $x^* = \sum_1^N a_i x_i^*$ uma combinação básica especial. Se $\exists i$ tal que $k_i = l$, então*

$$|x_i^*(x)| \leq 2M/f(M).$$

Prova: Sejam $s \in \{1, ..., l\}$ e $E_{is} = ran(y_{is}^*)$. Então pelas Observações 4.16 e 4.6

$$\begin{aligned} |(F_i y_{is}^*)(x)| &= |(F_i(y_{is}^*))(x)| = |(F_i y_{is}^*)(E_{is})(x)| \leq ||(F_i y_{is}^*)||.||E_{is}(x)|| \\ &\leq ||y_{is}^*||.||E_{is}(x)|| \leq ||E_{is}(x)|| \leq \frac{3}{2}(\lambda(E_{is}) + 2^{-2^M}). \end{aligned}$$

Se $D_i = \cup_{s=1}^{l} E_{is}$ então pelas Observações 4.5 4.4 e 4.15, (ii) e o fato de que $M \leq l$ temos que

$$\begin{aligned}
|x_i^*(x)| &= \frac{|F_i(y_{i1}^* + ... + y_{il}^*)(x)|}{f(l)} = \frac{|(F_i y_{i1}^* + ... + F_i y_{il}^*)(x)|}{f(l)} \\
&\leq \frac{|(F_i y_{i1}^*)(x) + ... + (F_i y_{il}^*)(x)|}{f(l)} \leq \frac{|(F_i y_{i1}^*)(x)| + ... + |(F_i y_{il}^*)(x)|}{f(l)} \\
&\leq \frac{\frac{3(\lambda(E_{i1})+2^{-2^M})}{2} + ... + \frac{3(\lambda(E_{il})+2^{-2^M})}{2}}{f(l)} = \frac{\frac{3}{2}(\sum_{s=1}^{l} \lambda(E_{is})) + (\frac{3}{2}(\sum_1^l 2^{-2^M}))}{f(l)} \\
&\leq \frac{\frac{3}{2}(\lambda(D_i)) + \frac{3}{2} l 2^{-2^M}}{f(l)} \leq \frac{\frac{3}{2}(\lambda(D_i)) + \frac{3}{2}}{f(l)} \leq \frac{\frac{3M}{2} + \frac{3}{2}}{f(l)} \\
&\leq \frac{\frac{3M}{2} + \frac{3}{2}M}{f(l)} = \frac{2M}{f(l)} \leq 2\frac{M}{f(M)}.
\end{aligned}$$

■

Afirmação 4.20 *Sejam $l \in \mathbf{J}$, $N, M \in \mathbf{N}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C com constante $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ tal que $exp(\sqrt{\log l}) \leq M \leq l$ e $x^* = \sum_1^N a_i x_i^*$ uma combinação básica especial. Se $\exists i$ tal que $k_i = M$. Então*

$$|x_i^*(x)| \leq 2M/f(M).$$

Prova: A prova é idêntica à anterior, basta trocarmos l por M. ■

Sejam $\mathbf{k_1, ..., k_N}$ **como na Afirmação 4.18. Suponhamos que** $k_i \notin \{l, M\}$, $\forall i \in \{1, ..., N\}$. Pela Observação 4.14 $k_i \leq \log\log\log l$ ou $k_i \geq \exp\exp\exp l$.

Seja $t \in \{1, ..., M\}$. Como $x_1, ..., x_M$ é uma S.R.C temos que x_t é uma $l_{1+}^{n_t}$–média, logo $x_t = x_{t1} + ... + x_{tn_t}$ com $||x_{tu}|| \leq \frac{1+\epsilon}{n_t}$ e $||x_t|| = 1$, para alguns $x_{t1} < ... < x_{tn_t}$, $\exists n_t \in \mathbf{N}$. Pela Afirmação 3.18(a) podemos tomar n_t máximo. E Pela Afirmação 3.20(a) $2^{2^M} \leq n_1 \leq ... \leq n_M$.

Sejam $i \in \{1, ..., N\}$ e

$$\mathbf{t_i} := \max\{\mathbf{j} \in \{\mathbf{1}, ..., \mathbf{M}\} : \mathbf{k_i} \geq \mathbf{n_j}\}.$$

Então Podemos escrever

$$x_i^*\Big(\sum_{j=1}^{M} x_j\Big) = x_i^*\Big(\sum_{j=1}^{t_i - 1} x_j\Big) + x_i^*(x_{t_i}) + x_i^*\Big(\sum_{j=t_i+1}^{M} x_j\Big).$$

Isto será útil nas duas seguintes afirmações.

Afirmação 4.21 *Sejam* $l \in \mathbf{J}$, $N, M \in \mathbf{N}$ *e* $x_1 < ... < x_M$ *uma S.R.C com constante* $\frac{3}{2} = 1+\frac{1}{2}$ *tal que* $exp(\sqrt{\log l}) \leq M \leq l$ *e* $x^* = \sum_1^N a_i x_i^*$ *uma combinação básica especial. Então*

$$\left| x_i^*\left(\sum_{j=1}^{t_i-1} x_j\right)\right| \leq 1/\sqrt{f(k_i)}.$$

Prova: Pela definição de t_i temos que $n_{t_i} \leq k_i$ e pela Definição 3.14(3) segue que $|supp(x_1 + ... + x_{t_i-1})| \leq |ran(x_1 + ... + x_{t_i-1})| \leq \frac{1}{2}\sqrt{f(n_{t_i})}$, logo, por (ii)

$$|supp(x_1 + ... + x_{t_i-1})| \leq \sqrt{f(k_i)}.$$

Seja $y_{t_i} := x_1 + ... + x_{t_i-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Então, pelas Observações 3.15 e 2.27, temos $|a_n| \leq 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

Pela Observação 2.28 $||e_n|| = 1$. Agora, como $y_1^* < ... < y_{k_i}^*$ e $||y_{is}^*|| \leq 1$, $\forall s \in \{1, ..., k_i\}$, temos que $|y_1^*(e_n) + ... + y_{k_i}^*(e_n)| \leq ||(e_n)||$, pois no máximo existe um $r \in \{1, ..., k_i\}$ tal que $|y_r^*(e_n)| \neq 0$. Portanto se $x_i^* = \sum_{n \in N} b_{in}^* e_n^*$, então

$$|b_{in}^*| = |x_i^*(e_n)| = \left|\frac{F_i(y_{i1}^* + ... + y_{ik_i}^*)(e_n)}{f(k_i)}\right| \leq ||(e_n)|| \leq 1.$$

Assim temos, para alguns $s \in \{1, ..., k_i\}$ e $n(s) \in \mathbf{N}$, que

$$||x_i^*||_\infty = \frac{||F_i y_{is}^*||_\infty}{f(k)} \leq \frac{||y_{is}^*||_\infty}{f(k)} = \frac{|b_{in(s)}^*|}{f(k)} \leq \frac{1}{f(k)},$$

logo

$$\begin{aligned} |x_i^*(y_{t_i})| &= \left|\sum_{n \in N} a_n b_n^*\right| \leq \sum_{n \in N} |a_n b_n^*| \leq \sum_{n \in N} (max|b_n^*|)|a_n| \\ &= ||x_i^*||_\infty \sum_{n \in N} |a_n| \leq ||x_i^*||_\infty \sum_{n \in supp(y_{t_i})} 1 = ||x_i^*||_\infty |supp(y_{t_i})| \\ &\leq ||x_i^*||_\infty \sqrt{f(k_i)} \leq \frac{\sqrt{f(k_i)}}{f(k_i)} = \frac{1}{\sqrt{f(k_i)}}. \end{aligned}$$

■

Seja $i \in \{1, ..., N\}$. Coloquemos

$$\mathbf{y_{t_i}} := \mathbf{x_1} + ... + \mathbf{x_{t_i - 1}},$$

$$\mathbf{y_i} := \mathbf{x_{t_i+1}} + \mathbf{x_{t_i+2}} + ... + \mathbf{x_M}.$$

Afirmação 4.22 *Sejam $l \in \mathbf{J}$, $N, M \in \mathbf{N}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C com constante $\frac{3}{2} = 1+\frac{1}{2}$ tal que $exp(\sqrt{\log l}) \leq M \leq l$ e $x^* = \sum_1^N a_i x_i^*$ uma combinação básica especial. Então*

$$|x_i^*(y_i)| \leq \sup\Big\{\sum_1^{k_i} \frac{||S_r(y_i)||}{f(k_i)} : S_1 < ... < S_{k_i}\Big\}.$$

Prova: Sejam $r \in \{1, ..., k_i\}$ e $E_{ir} = ran(y_{ir}^*)$. Então, pela Observação 4.16, temos

$$\begin{aligned} |x_i^*(y_i)| &= \Big|\sum_{r=1}^{k_i} \frac{(Fiy_{ir}^*)(y_i)}{f(k_i)}\Big| \leq \sum_{r=1}^{k_i} \Big|\frac{F_i y_{ir}^*(y_i)}{f(k_i)}\Big| = \sum_{r=1}^{k_i} \Big|\frac{F_i y_{ir}^* E_r(y_i)}{f(k_i)}\Big| \\ &\leq \sum_{r=1}^{k_i} ||F_i y_{ir}^*|| \Big|\Big|\frac{E_{ir}(y_i)}{f(k_i)}\Big|\Big| \leq \sum_{r=1}^{k_i} ||y_{ir}^*|| \Big|\Big|\frac{E_{ir}(y_i)}{f(k_i)}\Big|\Big| \leq \sum_{r=1}^{k_i} \Big|\Big|\frac{E_{ir}(y_i)}{f(k_i)}\Big|\Big| \\ &\leq \sup\Big\{\sum_{r=1}^{k_i} \frac{||S_r(y_i)||}{f(k_i)} : S_1 < ... < S_{k_i}\Big\}. \end{aligned}$$

■

Sejam $i \in \{1, ..., N\}$ e $\mathbf{S_1} < ... < \mathbf{S_{k_i}}$ intervalos de $\mathbf{N}$. Consideremos agora os casos $k_i > M$ e $k_i < M$. Pela Observação 4.14 se $k_i < M$, então $k_i \leq \log\log\log M$ e se $k_i > M$, então $k_i \geq \exp\exp\exp M$. Estas considerações serão usadas nas duas afirmações abaixo.

Afirmação 4.23 *Sejam $l \in \mathbf{J}$, $N, M \in \mathbf{N}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C com constante $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ tal que $exp(\sqrt{\log l}) \leq M \leq l$. Suponhamos que $x = x_1 + ... + x_M$ seja um $l_{1+}^{M'}$−vetor com constante 2, para algum $M' \geq \log M$ e $x^* = \sum_1^N a_i x_i^*$ uma combinação básica especial. Se $k_i < M$, então $|x_i^*(y_i)| \leq \frac{6||x||}{f(k_i)}$.*

Prova: Pela Proposição 2.26 e pelo Lema 3.10 temos

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{k_i} ||S_r(y_i)|| &\leq \sum_{r=1}^{k_i} ||S_r(x)|| \leq 2\Big(1 + \frac{2k_i}{M'}\Big)||x|| \leq 2\Big(1 + \frac{2k_i}{\log M}\Big)||x|| \\ &\leq 2\Big(1 + 2\frac{\log\log\log M}{\log M}\Big)||x|| \leq 2(1+2)||x|| = 6||x||, \end{aligned}$$

logo, pela Afirmação 4.22, concluímos que $|x_i^*(y_i)| \leq \frac{6||x||}{f(k_i)}$. ■

Afirmação 4.24 *Sejam $l \in \mathbf{J}$, $N, M \in \mathbf{N}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C com constante $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ tal que $exp(\sqrt{\log l}) \leq M \leq l$. Suponhamos que $x = x_1 + ... + x_M$ seja um $l_{1+}^{M'}$−vetor com constante 2, para algum $M' \geq \log M$ e $x^* = \sum_1^N a_i x_i^*$ uma combinação básica especial. Se $k_i > M$, então $|x_i^*(y_i)| \leq 1/\sqrt{f(k_i)}$.*

Prova: Como $\exp\exp\exp M < k_i$, segue que $\exp\exp M < \ln k_i < \log_2 k_i < \log_2(k_i+1) = f^2(k_i)$ e como $\exp r > (9r/2)^4$, $\forall r \geq 100$, temos que

$$\frac{9}{2}M < \sqrt[4]{\exp M} \leq \sqrt[4]{\exp\exp M} \leq \sqrt{f(k_i)}.$$

Lembrando que t_i é o máximo inteiro j tal que $k_i \geq n_j$, temos que $n_{t_i} \leq k_i < n_{t_i+1}$ e pela Afirmação 3.20(b) sabemos $n_{t_i+1} < n_{t_i+2} < ... < n_M$. Portanto, pela Observação 3.15 e pelo Lema 3.10, obtemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{k_i} ||S_r(y_i)|| &= \sum_{r=1}^{k_i} ||S_r(x_{t_i+1}) + ... + S_r(x_M)|| \\
&\leq \sum_{r=1}^{k_i}\sum_{j=t_i+1}^{M} ||S_r(x_j)|| = \sum_{j=t_i+1}^{M}\sum_{r=1}^{k_i} ||S_r(x_j)|| \\
&\leq \sum_{t_i+1}^{M} \frac{3}{2}\left(1+\frac{2k_i}{n_j}\right)||x_j|| = \sum_{t_i+1}^{M} \frac{3}{2}\left(1+\frac{2k_i}{n_j}\right) \\
&\leq \sum_{t_i+1}^{M} \frac{3}{2}\left(1+\frac{2k_i}{k_i}\right) = \frac{3}{2}3(M-t_i+2) < \frac{9M}{2}.
\end{aligned}$$

Logo, pela Afirmação 4.22, temos

$$|x_i^*(y_i)| \leq \sup\left\{\sum_{1}^{k_i} \frac{||S_r(y_i)||}{f(k_i)} : S_1 < .. < S_{k_i}\right\} \leq \frac{9M}{2f(k_i)} \leq \frac{\sqrt{f(k_i)}}{f(k_i)} \leq \sqrt{f(k_i)}. \blacksquare$$

Lembremos que $y_i = x_{t_i+1} + x_{t_i+2} + ... + x_M$, veja acima. Claramente as duas últimas afirmações implicam que:

Afirmação 4.25 *Sejam* $l \in \mathbf{J}$, $N, M \in \mathbf{N}$ *e* $x_1 < ... < x_M$ *uma S.R.C com constante* $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ *tal que* $exp(\sqrt{\log l}) \leq M \leq l$. *Suponhamos que* $x = x_1 + ... + x_M$ *seja um* $l_{1+}^{M'}-$*vetor com constante* 2, *para algum* $M' \geq \log M$ *e* $x^* = \sum_1^N a_i x_i^*$ *uma combinação básica especial. Então* $|x_i^*(y_i)| \leq \frac{1}{\sqrt{f(k_i)}} + \frac{6||x||}{f(k_i)}$.

Afirmação 4.26 *Sejam* $l \in \mathbf{J}$, $N, M \in \mathbf{N}$ *e* $x_1 < ... < x_M$ *uma S.R.C com constante* $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ *tal que* $exp(\sqrt{\log l}) \leq M \leq l$. *Suponhamos que* $x = x_1 + ... + x_M$ *seja um* $l_{1+}^{M'}-$*vetor com constante* 2, *para algum* $M' \geq \log M$ *e* $x^* = \sum_1^N a_i x_i^*$ *uma combinação básica especial. Então* $\sum_1^N \left|\sum_{1\leq j\leq M}^{j\neq t_i} x_i^*(x_j)\right| \leq \frac{||x||}{10^{101}}$.

Prova: Como $y_{t_i} = x_1 + ... + x_{t_i - 1}$ temos, pelas Afirmações 4.21 e 4.25, que

$$\begin{aligned}
\left|x_i^*\Big(\sum_{1\leq j\leq M}^{j\neq t_i} x_j\Big)\right| &= \left|x_i^*\Big(\sum_{1}^{t_i-1} x_j\Big) + x_i^*\Big(\sum_{t_i+1}^{M} x_j\Big)\right| \leq \left|x_i^*\Big(\sum_{1}^{t_i-1} x_j\Big)\right| + \left|x_i^*\Big(\sum_{t_i+1}^{M} x_j\Big)\right| \\
&= |x_i^*(y_{t_i})| + |x_i^*(y_i)| \leq \frac{1}{\sqrt{f(k_i)}} + |x_i^*(y_i)| \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{f(k_i)}} + \frac{1}{\sqrt{f(k_i)}} + \frac{6||x||}{f(k_i)}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelas Observações 4.9, 4.12 e 4.13, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{1}^{N}\left|\sum_{1\leq j\leq M}^{j\neq t_i} x_i^*(x_j)\right| &\leq \sum_{1}^{N}\Big(\frac{2}{\sqrt{f(k_i)}} + \frac{6||x||}{f(k_i)}\Big) \leq \sum_{1}^{\infty}\Big(\frac{2}{\sqrt{f(j_i)}} + \frac{6||x||}{f(j_i)}\Big) \\
&= 2\sum_{1}^{\infty}\Big(\frac{||x||}{\sqrt{f(j_i)}}.\frac{1}{||x||}\Big) + 6||x||\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{f(j_i)} \\
&\leq 2\frac{||x||}{10^{305}}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{f(j_i)}} + 6||x||\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{f(j_i)} \\
&\leq 2\frac{||x||}{10^{305}} + 6\frac{||x||}{10^{102}} < 2\frac{||x||}{10^{102}} + 6\frac{||x||}{10^{102}} < \frac{||x||}{10^{101}}.
\end{aligned}$$

■

Afirmação 4.27 *Sejam $l \in \mathbf{J}$, $N, M \in \mathbf{N}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C com constante $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ tal que exp$(\sqrt{\log l}) \leq M \leq l$. Suponhamos que $x = x_1 + ... + x_M$ seja um $l_{1+}^{M'}$-vetor com constante 2, para algum $M' \geq \log M$ e $x^* = \sum_1^N a_i x_i^*$ uma combinação básica especial. Então $\sum_{i=1}^N |x_i^*(x_{t_i})|^2 = \sum_{j=1}^M \sum_{t_i=j} |x_i^*(x_j)|^2$.*

Prova:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} |x_i^*(x_{t_i})|^2 &= |x_1^*(x_{t_1})|^2 + |x_2^*(x_{t_2})|^2 + ... + |x_N^*(x_{t_N})|^2 \\
&= \sum_{i:t_i=1} |x_i^*(x_1)|^2 + \sum_{i:t_i=2} |x_i^*(x_2)|^2 + ... + \sum_{i:t_i=M} |x_i^*(x_M)|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{M}\sum_{t_i=j} |x_i^*(x_j)|^2.
\end{aligned}$$

■

Afirmação 4.28 *Sejam $l \in \mathbf{J}$, $N, M \in \mathbf{N}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C com constante $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ tal que exp$(\sqrt{\log l}) \leq M \leq l$. Suponhamos que $x = x_1 + ... + x_M$ seja um $l_{1+}^{M'}$-vetor com constante 2, para algum $M' \geq \log M$ e $x^* = \sum_1^N a_i x_i^*$ uma combinação básica especial. Então $\sum_{t_i=j} |x_i^*(x_j)|^2 \leq 1$.*

Prova: Como $x^* = \sum_1^N a_i x_i^*$ é uma combinação básica especial temos que $x_1^*, ..., x_N^*$ é uma seqüência de a.e.d, veja Definição 4.2. Logo, pela Proposição 2.25, temos

$$\sqrt{\sum_{t_i=j} |x_i^*(x_j)|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^N |x_i^*(x_j)|^2} \leq ||x_j|| = 1. \qquad \blacksquare$$

Afirmação 4.29 *Sejam $l \in \mathbf{J}$, $N, M \in \mathbf{N}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C com constante $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ tal que $exp(\sqrt{\log l}) \leq M \leq l$. Suponhamos que $x = x_1 + ... + x_M$ seja um $l_{1+}^{M'}-$vetor com constante 2, para algum $M' \geq \log M$. Seja $x^* = \sum_1^N a_i x_i^*$ uma combinação básica especial. Então $\left|\sum_{i=1}^N a_i x_i^*(x_{t_i})\right| \leq \frac{||x||}{10^{101}}$.*

Prova: Pelas Observações 4.10 e 4.7 e pelas Afirmações 4.27 e 4.28 segue que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^N a_i x_i^*(x_{t_i})\right| &\leq \sum_{i=1}^N |a_i x_i^*(x_{t_i})| \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^N |a_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^N |x_i^*(x_{t_i})|^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{i=1}^N |x_i^*(x_{t_i})|^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{j=1}^M \sum_{t_i=j} |x_i^*(x_j)|^2\right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^M 1\right)^{1/2} = \sqrt{M} \\
&\leq \frac{1}{10^{101}} . \frac{M}{f(M)} \\
&\leq \frac{||x||}{10^{101}}.
\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Afirmação 4.30 *Sejam $l \in \mathbf{J}$, $N, M \in \mathbf{N}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C com constante $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$ tal que $exp(\sqrt{\log l}) \leq M \leq l$. Suponhamos que $x = x_1 + ... + x_M$ seja um $l_{1+}^{M'}-$vetor com constante 2, para algum $M' \geq \log M$. Seja $x^* = \sum_1^N a_i x_i^*$ uma combinação básica especial. Então Se $k_i \notin \{l, M\}$, $\forall i$, $1 \leq i \leq N$, então $|x^*(x)| \leq \frac{||x||}{10^{100}}$.*

Prova: Pelas Afirmações 4.26 e 4.29 temos

$$
\begin{aligned}
|x^*(x)| &= \left|\Big(\sum_{i=1}^{N} a_i x_i^*\Big)(x)\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{N} a_i x_i^*(x)\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{N} a_i x_i^*\Big(\sum_{j=1}^{M} x_j\Big)\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{N} a_i x_i^*\Big(\sum_{1\le j\le M}^{j\neq t_i} x_j + x_{t_i}\Big)\right| \\
&= \left|\sum_{i=1}^{N} a_i x_i^*\Big(\sum_{1\le j\le M}^{j\neq t_i} x_j\Big) + \sum_{i=1}^{N} a_i x_i^*(x_{t_i})\right| \\
&\le \left|\sum_{i=1}^{N} a_i x_i^*\Big(\sum_{1\le j\le M}^{j\neq t_i} x_j\Big)\right| + \left|\sum_{i=1}^{N} a_i x_i^*(x_{t_i})\right| \\
&\le \left|\sum_{i=1}^{N} a_i x_i^*\Big(\sum_{1\le j\le M}^{j\neq t_i} x_j\Big)\right| + \frac{||x||}{10^{101}} \\
&\le \frac{||x||}{10^{101}} + \frac{||x||}{10^{101}} = 2\frac{||x||}{10^{101}} \le \frac{||x||}{10^{100}}.
\end{aligned}
$$

∎

Prova do Lema 4.17:

1. Se $k_i \neq l$ e $k_i \neq M$, $\forall i\ 1 \le i \le N$ então, pela afirmação 4.30, temos que $|x^*(x)| \le \frac{||x||}{10^{100}}$.

2. Se $k_s = M$ ou $k_j = l$ para alguns $s, j \in \{1, ...N\}$ então pelas Afirmações 4.19 e 4.20 e pelo item anterior temos que

$$
\begin{aligned}
|x^*(x)| &= \left|\sum_{i=1}^{N} a_i x_i^*(x)\right| \le \left|\sum_{1\le i\le N}^{i\neq s,j} a_i x_i^*(x)\right| + |a_s x_s^*(x)| + |a_j x_j^*(x)| \\
&\le \left|\sum_{1\le i\le N}^{i\neq s,j} a_i x_i^*(x)\right| + |x_s^*(x)| + |x_j^*(x)| \\
&\le \frac{||x||}{10^{100}} + 2\frac{M}{f(M)} + 2\frac{M}{f(M)}.
\end{aligned}
$$

∎

Capítulo 5

O lema fundamental

O objetivo deste capítulo é apresentar a prova do Lema 5.1 que será muito útil na prova de que $\widetilde{X}$ não contém nenhum subespaço isomorfo à $l_1(\mathbf{N})$, veja Capítulo 6, Proposição 6.5. f e (i), (ii), (iii), (iv) são a função e os itens, respectivamente, da Proposição 1.1. $\mathbf{J}$ é um conjunto que satisfaz a Proposição 1.2.

Lema 5.1 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante 3/2. Então existe uma escolha $\epsilon_1, ..., \epsilon_M \in \{-1, 1\}$, tal que*

$$\left\|\sum_{i=1}^{M} \epsilon_i x_i\right\| < \frac{100M}{f(M)}.$$

Para provarmos o Lema 5.1 precisaremos da Afirmação 5.2 e da Observação 5.98, e nestas utilizaremos a Definição 4.3 de comprimento de um intervalo E de $\mathbf{N}$.

Afirmação 5.2 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante 3/2 como no Lema 5.1. Então existe uma escolha $\epsilon_1, ..., \epsilon_M \in \{-1, 1\}$, tal que para qualquer intervalo E de $\mathbf{N}$ temos*

$$\left\|E\left(\sum_{i=1}^{M} \epsilon_i x_i\right)\right\| < \frac{100\lambda(E) f(M)}{f^2(\lambda(E))}.$$

A prova da Afirmação 5.2 será feita por absurdo através de 6 passos. **Suponhamos que a Afirmação 5.2 seja falsa.** Logo, para toda escolha $\epsilon_1, ..., \epsilon_M \in$

$\{-1,1\}$, existe um intervalo E tal que

$$||E(\epsilon_1 x_1 + ... + \epsilon_M x_M)|| \geq \frac{100\lambda(E)f(M)}{f^2(\lambda(E))}. \qquad \textbf{(5.1)}$$

Antes de apresentarmos os Passos coloquemos as seguintes definições:

1. $|||x||| := \sup\{|x^*(x)| : x^* \text{ é uma combinação especial } \},\ x \in c_{00}(\mathbf{N}).$ **(5.2)**

2. $\epsilon := 10^{-50}.$ **(5.3)**

3. $\varepsilon := (\epsilon_1, ..., \epsilon_M) \in \{-1,1\}^M$ **(5.4)**

4. $x(\varepsilon) := \epsilon_1 x_1 + ... + \epsilon_M x_M$ **(5.5)**

Pela Proposição 2.26(3) obtemos que

$$|||x||| \leq ||x||, \quad \forall x \in c_{00}(\mathbf{N}). \qquad \textbf{(5.6)}$$

Como $x_1, ..., x_M$ é uma S.R.C, claramente temos que $\epsilon_1 x_1, ..., \epsilon_M x_M$ também é uma S.R.C de comprimento M e constante $3/2$, $\forall(\epsilon_1, ..., \epsilon_M) \in \{-1,1\}^M$. Observemos que se pode calcular o comprimento λ de cada intervalo E com qualquer uma das S.R.C anteriores, obtendo-se o mesmo valor. Isto nem sempre acontece.

1ºPASSO. Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então existe um intervalo $A \subset \{1, ..., M\}$ de cardinalidade N satisfazendo

$$N \geq 20exp(\sqrt{\log M})$$

tal que, com probabilidade maior ou igual a $1/M^2$ sobre $\{-1,1\}^{|A|}$, as seguintes afirmações são verdadeiras.

1. $|||\sum_{i\in A} \epsilon_i x_i)||| \geq (1-\epsilon)||\sum_{i\in A} \epsilon_i x_i)|| \vee (1-\epsilon)\frac{100Nf(M)}{f^2(N)}.$

2. Para cada subintervalo $B \subset A$, temos $||\sum_{i\in B} \epsilon_i x_i)|| < 100\frac{|B|f(M)}{f^2(|B|)}.$

Antes de enunciarmos o 2ºPasso, introduziremos algumas notações. Sejam k o menor inteiro maior que $\log N$, isto é, $k-1 \leq \log N \leq k$ e $B_1 < ... < B_{5k}$ subintervalos de A, com A como no 1ºPasso, tal que $(1-\epsilon)\frac{N}{5k} \leq |B_i| \leq (1+\epsilon)\frac{N}{5k}$ para todo $i \in \{1, ..., 5k\}$. Notemos que existem inteiros entre $(1-\epsilon)\frac{N}{5k}$ e $(1+\epsilon)\frac{N}{5k}$, pois $\frac{1}{2} < \epsilon\frac{N}{5k}$ ($\epsilon = 10^{-50}$) e nos números reais toda bola de raio maior que $\frac{1}{2}$ contém um número inteiro (centro $N/5k$). Sejam

$$v_i = \sum_{j\in B_i} \epsilon_j x_j, \quad \forall i \in \{1,...,5k\}$$

e

$$u_r = \sum_{(r-1)k+1}^{rk} v_i, \quad \forall \in \{1,...,5\}.$$

Logo os u_r e os v_i dependem do $\{\varepsilon_j : j \in A\}$.

2ºPASSO. Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então existe uma escolha de $\varepsilon_j \in \{-1,1\}$, com $j \in A$ tais que

$$\left|\left|\left|\sum_{r=1}^{5} \eta_r u_r\right|\right|\right| > (1-2\epsilon)\frac{100Nf(M)}{f^2(N)}, \quad \text{para cada escolha de} \quad \eta_1,...,\eta_5 \in \{-1,1\}$$

e também tais que

$$||v_i|| \leq (1+3\epsilon)\frac{20Nf(M)}{f^2(N)k}, \quad \forall i \in \{1,...,5k\}.$$

Fixemos um escolha de $\epsilon_i \in \{-1,1\}$ com $i \in A$ satisfazendo as condições do 2ºPasso, isto é, $u_1,...,u_5$ e $v_1,...,v_{5k}$ são agora vetores fixos. Também seja $r \in \{1,...,5\}$.

Coloquemos $\alpha := (1-22\epsilon)20\frac{Nf(M)}{f^2(N)}$. É possivel mostrar, veja as Afirmações 5.62 e 5.63, que existem combinações especiais x^* e y^* com

$$x^* = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*, \quad \text{para algum} \quad n \in \mathbf{N}$$

tal que

$$5\alpha \leq |x^*(u_1+u_2+u_3+u_4+u_5)| \leq 5\alpha\frac{1+3\epsilon}{1-22\epsilon},$$

e

$$y^* = \sum_{j=1}^{m} b_j y_j^*, \quad \text{para algum} \quad m \in \mathbf{N}$$

tal que

$$5\alpha \leq |y^*(u_1+u_2-u_3+u_4+u_5)| \leq 5\alpha\frac{1+3\epsilon}{1-22\epsilon}.$$

Temos quatro possíveis casos de sinais para números reais $x^*(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5)$ e $y^*(u_1 + u_2 - u_3 + u_4 + u_5)$ a considerar. Analisaremos o caso no qual ambos são positivos, isto é,

$$5\alpha \leq x^*(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5) \leq 5\alpha\frac{1 + 3\epsilon}{1 - 22\epsilon}$$

e

$$5\alpha \leq y^*(u_1 + u_2 - u_3 + u_4 + u_5) \leq 5\alpha\frac{1 + 3\epsilon}{1 - 22\epsilon}.$$

Os outros casos são semelhantes.

Definamos agora medidas de probabilidade μ e ν sobre $\{1, ..., n\}$ e $\{1, ..., m\}$ por $\mu(A) = \sum_{t \in A} a_t^2$ e $\nu(B) = \sum_{s \in B} b_s^2$, onde

$$a_t \in \{a_1, ..., a_n\} \quad \text{com} \quad x^* = \sum_1^n a_i x_i^*$$

e

$$b_s \in \{b_1, ..., a_m\} \quad \text{com} \quad y^* = \sum_1^m b_j y_j^*.$$

3ºPASSO. Seja $\delta = \sqrt{260\epsilon}$. Então existem

$$C \subset \{1, ..., n\} \quad \text{com} \quad \mu(C) \geq 1 - 5\delta$$

e

$$D \subset \{1, ..., m\} \quad \text{com} \quad \nu(D) \geq 1 - 5\delta,$$

tais que $\forall i \in C$, $\forall j \in D$ e $\forall r \in \{1, ..., 5\}$ temos

$$(1 - \sqrt{\delta})a_i\alpha(1 + 26\epsilon) \leq x_i^*(u_r) \leq (1 + \sqrt{\delta})a_i\alpha(1 + 26\epsilon)$$

e

$$(1 - \sqrt{\delta})b_i\alpha(1 + 26\epsilon) \leq \eta_r y_i^*(u_r) \leq (1 + \sqrt{\delta})b_i\alpha(1 + 26\epsilon).$$

Para o 4ºPasso voltamos a lembrar que $x^* = \sum_1^n a_i x_i^*$ e $y^* = \sum_1^n b_j y_j^*$ são combinações especiais. Logo cada x_i^* é da forma (para algum E_i intervalo de $\mathbf{N}$)

$$E_i(x_{i1}^* + ... + x_{ip_i}^*) \quad \text{para alguma seqüência especial} \quad x_{i1}^*, ..., x_{ip_i}^*.$$

E cada y_j^* é da forma (para algum F_j intervalo de $\mathbf{N}$)

$$F_j(y_{j1}^* + ... + y_{jq_j}^*) \quad \text{para alguma seqüência especial} \quad y_{j1}^*, ..., y_{jq_j}^*.$$

Sejam $i \in C$ e $j \in D$ como no 3ºPasso. Escolhamos

$$k_i \in \{1, ..., p_i\} \quad \text{o menor inteiro tal que} \quad ran(x_{ik_i}^*) \cap ran(u_5) \neq \phi.$$

Então

$$ran(x_{ik_i}^*) \cap ran(u_3) \neq \phi \quad \text{ou} \quad ran(x_{ik_i}^*) \cap ran(u_3) = \phi.$$

Definamos

$$C_1 = \{i \in C : ran(x_{ik_i}^*) \cap ran(u_3) \neq \phi\}.$$

Analogamente coloquemos

$$l_j \in \{1, ..., q_j\} \quad \text{o menor inteiro tal que} \quad ran(y_{jl_j}^*) \cap ran(u_5) \neq \phi.$$

Então

$$ran(y_{jl_j}^*) \cap ran(u_5) \neq \phi \quad \text{ou} \quad ran(y_{jl_j}^*) \cap ran(u_5) = \phi.$$

Definamos

$$D_1 = \{j \in D : ran(y_{jl_j}^*) \cap ran(u_3) \neq \phi\}.$$

4ºPASSO. $\max\{\mu(C_1), \nu(D_1)\} \leq 1/50$.

Sejam C_2 o complementar de C_1 e D_2 o complementar de D_1. Isto é, $C_2 = \{1, ..., n\} - C_1$ e $D_2 = \{1, ..., m\} - D_1$.

5ºPASSO. Existem $C_3 \subset C \cap C_2$ e $D_3 \subset D \cap D_2$ tal que

$$\min\{\mu(C_3), \nu(D_3)\} > 19/20$$

e existe uma bijeção

$$\phi : C_3 \to D_3,$$

tal que para cada $i \in C_3$ os aplicações especiais $U_5 x_1^*$ e $U_5 y_j^* U_5 y_{\phi(i)}^*$ são não disjuntos, isto é, admitem conjuntos associados não disjuntos.

Por último, lembrando a Notação 0.8 de que $ran(x)$ e o menor intervalo de $\mathbf{N}$ contendo o suporte de x temos

6ºPASSO. Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1 e seja também $V = ran(u_2 + u_3)$. Se $i \in C_3$, então $V_{x_i^*} = V_{y^*_{\phi(i)}}$.

Agora vamos apresentar as provas dos passos acima mencionados.

5.1 1°Passo.

Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então existe um intervalo $A \subset \{1, ..., M\}$ de cardinalidade N, satisfazendo

$$N \geq 20 \exp(\sqrt{\log M})$$

tal que com probabilidade maior ou igual a $1/M^2$ sobre $\{-1, 1\}^{|A|}$ as seguintes afirmações são verdadeiras.

1. $|||\sum_{i \in A} \epsilon_i x_i)||| \geq (1 - \epsilon)||\sum_{i \in A} \epsilon_i x_i)|| \vee (1 - \epsilon)\frac{100Nf(M)}{f^2(N)}$.

2. Para cada subintervalo $B \subset A$, temos $||\sum_{i \in B} \epsilon_i x_i)|| < 100\frac{|B|f(M)}{f^2(|B|)}$.

Para fazer a prova do 1ºPasso precisaremos de vários resultados auxiliares. As Afirmações mais importantes são as 5.3 e 5.26. O item (2) será provado na Afirmação 5.35. E o item (1) será provado na Afirmação 5.38.

Na Afirmação 5.3 utilizamos as definições dadas pelas equações (5.3) e (5.4).

Afirmação 5.3 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então $\forall \varepsilon \in \{-1, 1\}^M$ existe um único intervalo de $\mathbf{N}$ ("minimal"), que também chamaremos E, tal que*

$$||Ex(\varepsilon)|| \geq \frac{100\lambda(E)f(M)}{f^2(\lambda(E))}.$$

Prova: Sejam

$$C = \left\{E \quad \text{intervalo de } \mathbf{N}\text{:} \quad ||Ex(\varepsilon)|| \geq \frac{100\lambda(E)f(M)}{f^2(\lambda(E))}\right\} \quad \text{e} \quad B = \{|E| : E \in C\}.$$

$C \neq \phi$ por hipótese. Logo $B \neq \phi$ e $B \subset \mathbf{N}$, portanto B tem um elemento mínimo b. Se $|E_1| = b = |E_2|$ então comparamos $min(E_1)$ com $min(E_2)$ e tomamos como intervalo minimal aquele para o qual o mínimo é menor. ■

No que segue E **denotará o único intervalo de N satisfazendo a afirmação anterior.** Agora nosso objetivo é provar a Afirmação 5.9. Esta afirmação e a Afirmação 5.26 implicam a Afirmação 5.35, isto é, o item (2) do 1ºPasso.

Afirmação 5.4 *Sejam* $M \in \mathbf{J}$ *e* $x_1 < ... < x_M$ *uma S.R.C de comprimento* M *com constante* $3/2$ *como no Lema 5.1. Então* $||Ex(\varepsilon)|| \leq (3/2)\lambda(E) + 2$.

Prova: Pelos comentários que seguem a equação (5.6), temos que $\epsilon_1 x_1, ..., \epsilon_M x_M$ é uma S.R.C com constante $3/2 = 1 + 1/2$, logo basta aplicarmos a Observação 4.6. ■

Afirmação 5.5 *Sejam* $M \in \mathbf{J}$ *e* $x_1 < ... < x_M$ *uma S.R.C de comprimento* M *com constante* $3/2$ *como no Lema 5.1. Então* $20\exp(\sqrt{\log M}) \leq \lambda(E)$.

Para fazermos a prova da Afirmação 5.5 necessitaremos das três observações abaixo.

Observação 5.6 *Seja* $M \in \mathbf{J}$. *Então* $20\exp(\sqrt{\log M}) \leq M$.

Prova: Como $M \in \mathbf{J}$ satisfaz a Proposição 1.2, temos que $20^2 < M$, isto é, $2\ln 20 < \ln M$, portanto

$$\begin{aligned} \ln 20 + \sqrt{\log M} &< \ln 20 + logM = \ln 20 + \frac{\ln M}{\ln 10} \\ &< \ln 20 + \frac{\ln M}{2} < \ln M. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} 20\exp(\sqrt{\log M}) &= \exp(\ln 20)\exp(\sqrt{\log M}) \\ &= \exp(\ln 20 + \sqrt{\log M}) \\ &< \exp(\ln M) = M. \end{aligned}$$

■

Notemos que pela Observação 5.6 existe algum inteiro N tal que $20\exp(\sqrt{\log M}) \leq N \leq M$. Isto mostra que é possivel encontramos um conjunto da cardinalidade exigida no 1ºPasso.

Observação 5.7 *Se $n > 2$, $n \in \mathbf{N}$ e $r \geq 2n$, $r \in \mathbf{R}$. Então $\sqrt[n]{r+1} < \frac{r}{n}$.*

Prova: Se $n \geq 2$ então $\sqrt[n]{2n+1} < 2$. Portanto $f(2n) > 0$, onde

$$f(r) = \frac{r}{n} - \sqrt[n]{r+1}.$$

Mas

$$f'(r) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n\sqrt[n]{(r+1)^{n-1}}} = \frac{1}{n}\left[1 - \frac{1}{\sqrt[n]{(r+1)^{n-1}}}\right] > 0.$$

Logo

$$\sqrt[n]{r+1} < \frac{r}{n} \quad \text{Se} \quad r \geq 2n \quad \text{e} \quad n > 2.$$

■

Se $\lambda(E) > 40$ então pela Observação 5.7 com $n = 20$ temos $\sqrt[20]{\lambda(E)+1} < \frac{\lambda(E)}{20}$. Isto será útil na prova da Afirmação 5.5.

Observação 5.8 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então $\lambda(E) > 40$.*

Prova: Como $M \in \mathbf{J}$ temos, pela Proposição 1.2, $10^{103} \leq f(M)$. Pela equação (5.1) e pela Afirmação 5.4 temos $\frac{100\lambda(E)f(M)}{f^2(\lambda(E))} \leq ||Ex(\varepsilon)|| \leq (3/2)\lambda(E) + 2$, logo, por (i), segue que

$$\begin{aligned} 100\lambda(E)10^{103} &\leq 100\lambda(E)f(M) \\ &\leq \left(\frac{3\lambda(E)}{2} + 2\right)f^2(\lambda(E)) \\ &\leq \left(\frac{3\lambda(E)}{2} + 2\right)\lambda^2(E), \end{aligned}$$

portanto

$$10^{105} \leq \frac{3\lambda(E)}{2} + 2.$$

Isto é, $\lambda(E) > 40$. ■

Prova da Afirmação 5.5. Pela Afirmação 5.4 e pela equação (5.1) temos

$$\frac{100\lambda(E)f(M)}{f^2(\lambda(E))} < \frac{3\lambda(E)}{2} + 2 < \frac{3\lambda(E)}{2} + 2\lambda(E) = \frac{7\lambda(E)}{2}.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\frac{28\sqrt{\log M}}{\sqrt{\frac{1}{3}}} &< \frac{28\sqrt{\log M}}{\sqrt{log 2}} = 28\sqrt{log_2 M} \\
&\leq 28\sqrt{log_2(M+1)} = 28f(M) \\
&< \frac{200f(M)}{7} < f^2(\lambda(E)) \\
&= log_2(\lambda(E)+1) = \frac{\log(\lambda(E)+1)}{\ln 2},
\end{aligned}$$

portanto

$$40\sqrt{\log M} < 28\sqrt{3}\sqrt{\log M} < \frac{\log(\lambda(E)+1)}{\ln 2},$$

consequentemente

$$\begin{aligned}
\sqrt{\log M} &< \frac{\ln(\lambda(E)+1)}{20.2\ln 2} = \frac{\ln(\lambda(E)+1)}{20\ln 2^2} \\
&< \frac{\ln(\lambda(E)+1)}{20\ln e} = \frac{\ln(\lambda(E)+1)}{20},
\end{aligned}$$

logo pela Observação 5.7 com $n = 20$ e $r = \lambda(E) > 40$, pois pela Observação 5.8 $\lambda(E) > 40$, temos

$$\begin{aligned}
\exp(\sqrt{\log M}) &< \exp\left(\frac{\ln(\lambda(E)+1)}{20}\right) \\
&= \exp(\ln(\sqrt[20]{\lambda(E)+1})) \\
&= \sqrt[20]{\lambda(E)+1} \\
&< \frac{\lambda(E)}{20}.
\end{aligned}$$

∎

Para a próxima afirmação lembremos a equação (5.2), isto é:

$$|||x||| := \sup\{|x^*(x)| : x^* \quad \text{é uma combinação especial}\}.$$

Afirmação 5.9 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então $||Ex(\varepsilon)|| = |||Ex(\varepsilon)|||$.*

Para fazermos a prova da afirmação 5.9 necessitaremos das três observações abaixo.

Observação 5.10 *Seja $y \in \mathbf{X}$. Então $a = |||y|||$, onde*

$$a = \sup \left\{ \left(\sum_1^m |x_i^*(y)| \right)^{1/2} : x_1^*, ..., x_m^* \quad \textit{são a.e.d sobre } \mathbf{X}, \quad m \in N \right\}.$$

Prova: Sejam $x_1^*, ..., x_m^*$ uma seqüência de aplicações especiais disjuntas, $b = (x_1^*(y), ..., x_m^*(y))$ e $c = b/||b||_{l_2} = (c_1, ..., c_n)$. Logo $\sum_{i=1}^m c_i^2 = 1$ e $x^* = \sum_{i=1}^m c_i x_i^*$ é uma seqüência especial. Mas

$$\begin{aligned} |x^*(y)| &= \left| \sum_{i=1}^m c_i x_i^*(y) \right| = \frac{|\sum_{i=1}^m x_i^*(y) x_i^*(y)|}{||b||_{l_2}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^m |x_i^*(y)|^2}{||b||_{l_2}} = \left(\sum_{i=1}^m |x_i^*(y)|^2 \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

logo $a \leq |||y|||$.

Seja agora $x^* = \sum_{i=1}^m c_i x_i^*$ outra combinação especial qualquer, isto é, $m \in \mathbf{N}$, $\sum_{i=1}^m c_i^2 = 1$ e $x_1^*, ..., x_m^*$ uma seqüência de a.e.d, veja Definição 1.8(e),. Então pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos

$$\begin{aligned} |x^*(y)| &\leq \sum_{i=1}^m |c_i||x_i^*(y)| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^m |c_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^m |x_i^*(y)|^2 \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^m |x_i^*(y)|^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

portanto $|||y||| \leq a$. ∎

Observação 5.11 *Seja $x \in \mathbf{X}$. Então*

$$\sup \left\{ \sum_1^N \frac{||E_i x||}{f(N)} : E_1 < ... < E_N \right\} = max \left\{ \sum_1^N \frac{||E_i x||}{f(N)} : E_1 < ... < E_N \right\}.$$

Sejam $H = ran(x)$ e $n = |H|$. Então existem $a, d \in \mathbf{N}$ tais que

$$H = \{c, ..., d\} = \{c, c+1, ..., c+n-1\}.$$

Seja $F \subset H$ e $m = |F|$. A prova da Observação 5.11 será conseqüência dos quatro seguintes itens.

Observação 5.12

$$max \left\{ \sum_1^N \frac{||E_i x||}{f(N)} : E_1 < ... < E_N, \quad \cup_i^N E_i \subset \bar{E}, \quad \cup_i^N E_i \neq \bar{E} \right\} \leq$$

$$max \left\{ \sum_1^N \frac{||E_i x||}{f(N)} : E_1 < ... < E_N, \quad \cup_i^N E_i = \bar{E} \right\}.$$

Prova: Seja $t \in \bar{E}$ e $t \notin \cup_i^N E_i$. Então ocorre sómente um dos seguintes casos

$$t < E_1 < ... < E_N \quad \text{ou}$$

$$E_1 < .. \leq E_j < t < E_{j+1} ... \leq E_N \quad \text{ou}$$

$$E_1 < ... < E_N < t.$$

Em cada um desses casos definimos respectivamente

$$G_1 = t \cup E_1, \quad G_i = E_i, \quad i = 2, ..., N;$$

$$G_{j+1} = t \cup E_{j+1}, \quad G_i = E_i, \quad i = 1, ..., N, \quad i \neq j;$$

$$G_N = t \cup E_N, \quad G_i = E_i, \quad i = 1, ..., N-1.$$

Em qualquer caso temos pelo Teorema 2.20

$$||E_i x|| \leq ||G_i x||.$$

Portanto

$$\sum_1^N ||E_i x|| \leq \sum_1^N ||G_i x||.$$

Como $\bar{E}$ é um intervalo finito podemos adicionar um termo t por passo (trocando E_i por G_i antes de cada novo passo) até chegarmos em

$$\cup_i^N G_i = E.$$

■

Mostramos, na Observação 5.12, que os casos importantes a considerar em

$$\left\{ \sum_1^N ||E_i x|| / f(N) : E_1 < ... < E_N \right\}$$

1. Existem $n-(m-1)$ intervalos de comprimento m em H.

   De fato, seja $F \subset H$ e $m=|F|$, logo $F=\{a, a+1, ..., a+m-1\}$. Como $F \subset H$ então $c \leq a$ e $a+m-1 \leq c+n-1$ assim $c \leq a \leq c+(n-m)$, portanto a tem $n-m+1=n-(m-1)$ opções (isto também mostra que a e m determinam F).

2. Existem no máximo n^2 intervalos F em H.

   De fato, consideremos a seguinte tabela:

   Comprimento de F..... Número de intervalos com esse comprimento

   1.......................................$n-(1-1)=n$;

   2.......................................$n-(2-1)=n-1$;

   3.......................................$n-(3-1)=n-2$;

   n.......................................$n-(n-1)=1$.

   Logo existem $\frac{n(n+1)}{2}$ intervalos e $\frac{n(n+1)}{2} \leq n^2$.

3. Se $E_j(x)=0$ e $E_1<...\leq E_j \leq ...<E_N$, então como f é crescente temos que

$$\sum_{1}^{N} \frac{||E_i x||}{f(N)} = \sum_{1 \leq i \leq N}^{i \neq j} \frac{||E_i x||}{f(N)} \leq \sum_{1}^{N-1} \frac{||\hat{E}_s x||}{f(N-1)},$$

   com

$$\hat{E}_s = E_s \quad 1 \leq s < j \quad \text{e} \quad \hat{E}_s = E_{s+1} \quad j < s \leq N.$$

4. **Prova da observação 5.11.**

   O item (3) mostra que sómente precisamos considerar os casos $E_1<...<E_N$ com $E_i \cap H \neq \phi$ para todo i, $1 \leq i \leq N$ (como $supp(x)$ é finito então existe um N máximo tal que $E_N \cap H \neq 0$).

   O item (2) mostra que o número desses casos é finito. Portanto podemos trocar sup por max. ∎

Na Observação 5.12 vamos melhorar o resultado anterior. Seja $x \in X$ com $ran(x) \subset \bar{E}$, onde $\bar{E}$ é um intervalo de $\mathbf{N}$.

são aqueles para os quais $E_i \cap ran(x) \neq \phi$. Agora, como $E_i x = (E_i \cap ran(x))(x)$, segue que os casos que precisamos considerar são aqueles em que

$$E_i \cap ran(x) \neq \phi \quad \text{e} \quad E_i \subset ran(x).$$

No que segue vamos supor que a Afirmação 5.9 seja falsa e usando a Proposição 5.20, a Observação 5.21, a Proposição 5.24 e a Observação 5.25 vamos obter uma contradição.

Proposição 5.13 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então para algum $k \in \mathbf{N}$ existe uma seqüência de intervalos $F_1 < ... < F_k$ satisfazendo $\cup_i^k F_i = E$ tal que*

$$||Ex(\varepsilon)|| = \sum_1^K \frac{||F_i x(\varepsilon)||}{f(K)}.$$

Prova: Pela Proposição 2.26 temos

$$\begin{aligned} ||Ex(\varepsilon)|| &= ||Ex(\varepsilon)||_\infty \vee \\ & \sup\left\{ \sum_1^K \frac{||F_i Ex(\varepsilon)||}{f(K)} : \quad k \geq 2, \quad F_1 < ... < F_K \right\} \vee \\ & \sup\left\{ \left(\sum_1^m |x_i^*(Ex(\varepsilon))| \right)^2 : x_1^*, ..., x_m^* \quad \text{são a.e.d sobre } \mathbf{X} \quad , m \in \mathbf{N} \right\}. \end{aligned}$$

Mas pela Observação 4.4, por (ii) e pela equação (5.1), temos

$$||Ex(\varepsilon)||_\infty = 1 < 100 \leq \frac{100\lambda(E) f(M)}{f^2(\lambda(E))} \leq ||Ex(\varepsilon)||.$$

Mais ainda, pela Observação 5.10 segue que

$$|||Ex(\varepsilon)||| = \sup\left\{ \left(\sum_1^m |x_i^*(Ex(\varepsilon))| \right)^2 : x_1^*, ..., x_m^* \quad \text{são a.e.d sobre } \mathbf{X}, \quad m \in \mathbf{N} \right\}.$$

Como estamos supondo que $||Ex(\varepsilon)|| \neq |||Ex(\varepsilon)|||$, pela Observação 5.12, pela Proposição 2.26 e pela Proposição 2.26 temos

$$\begin{aligned}
||Ex(\varepsilon)|| &= \sup\left\{\sum_1^K \frac{||F_iEx(\varepsilon)||}{f(K)}: \quad k\geq 2, \quad F_1 < \ldots < F_K\right\} \\
&= max\left\{\sum_1^K \frac{||F_iEx(\varepsilon)||}{f(K)}: \quad k\geq 2, \quad F_1 < \ldots < F_K\right\} \\
&= \sum_1^K \frac{||F_iEx(\varepsilon)||}{f(K)} \quad \text{para alguns} \quad F_1 < \ldots < F_k \quad \text{e} \quad \cup_i^k F_i = E, \quad k \geq 2. \\
&= \sum_1^K \frac{||F_ix(\varepsilon)||}{f(K)} \quad \text{para alguns} \quad F_1 < \ldots < F_k \quad \text{e} \quad \cup_i^k F_i = E, \quad k \geq 2.
\end{aligned}$$

■

Daqui para frente, **neste passo,**

$$\mathbf{2 \leq k \quad \text{e} \quad F_1 < \ldots < F_k},$$

indicam respectivamente aquele inteiro e aqueles intervalos relativos a Proposição 5.13.

Proposição 5.14 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < \ldots < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então $\sum_1^k \lambda(F_i) \leq \lambda(E)$.*

Prova: Basta usarmos a Observação 4.5. ■

Proposição 5.15 $||F_ix(\varepsilon)|| \leq (1+1/2)\big(\lambda(F_i) + 2^{-2^M}\big)$.

Prova: Basta lembrarmos a Observação 4.6. ■

Proposição 5.16 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < \ldots < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então $k \leq f^{-1}(6M/\epsilon)$.*

Prova: Se $f^{-1}(6M/\epsilon) < k$, então pelo Lema 3.17, segue que

$$\sum_1^k \frac{||F_ix(\varepsilon)||}{f(k)} \leq 1 + 2\epsilon < 2,$$

mas pela Observação 4.4, por (ii), pela equação (5.1) e pela Proposição 5.13

$$\sum_1^k \frac{||F_ix(\varepsilon)||}{f(k)} = ||Ex(\varepsilon)|| > 100.$$

■

Observação 5.17 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então $f^{-1}(6M/\epsilon) < 2^{36M^2 10^{100}}$.*

Prova: Seja $y = f^{-1}(6M/\epsilon)$. Então $f(y) = \frac{6M}{10^{-50}}$. Logo

$$\log_2 y < \log_2(y+1) = f^2(y) = 36M^2 10^{100}.$$

■

Observação 5.18 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então*

$$\frac{k}{2^{2^M}} < \frac{2k}{2^{2^M}} \leq \frac{1}{2^{2^{\frac{M}{2}}}}.$$

Prova: Sejam $r \geq 2^{16}$ e $g(r) = (r-1) - 2log_2 r - 4.102$. Então

$$g(2^{16}) = (2^{16}-1) - 2.16 - 4.102 > 10^4 - 2.16 - 4.102 > 0$$

e $g'(r) = 1 - \frac{2}{r \ln 2} > 0$, logo $2log_2 r + 4.102 < (r-1)$, portanto

$$\begin{aligned} log_2(36M^2 10^{100} + 1) &< log_2(M^2 10^{102}) < log_2(M^2 16^{102}) \\ &= log_2 M^2 + log_2 16^{102} = 4.102 + 2log_2 M \\ &< M - 1 = (M-1)log_2 2 = log_2 2^{M-1}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} 36M^2 10^{100} + 1 &< 2^{M-1} = 2^{\frac{M}{2}} 2^{\frac{M}{2}-1} \\ &< 2^{\frac{M}{2}}(2^{\frac{M}{2}} - 1) = 2^M - 2^{\frac{M}{2}}. \end{aligned}$$

Logo

$$2^{\frac{M}{2}} < 2^M - 36M^2 10^{100} - 1.$$

Agora pela Proposição 5.16 e a Observação 5.17 concluímos que

$$\begin{aligned} \frac{2k}{2^{2^M}} &< \frac{f^{-1}(\frac{6M}{\epsilon})}{2^{2^{M-1}}} < \frac{2^{36M^2 10^{100}}}{2^{2^{M-1}}} \\ &= \frac{1}{2^{2^{M} - 36M^2 10^{100} - 1}} < \frac{1}{2^{2^{\frac{M}{2}}}}. \end{aligned}$$

■

Proposição 5.19 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante 3/2 como no Lema 5.1. Então*

$$\sum_1^k ||F_i x(\varepsilon)|| \leq \sum_1^k (1 + 1/2)\big(\lambda(E) + 2^{-2\frac{M}{2}}\big).$$

Prova: Basta aplicarmos as Proposições 5.15 e 5.14 e a Observação 5.18. ∎

Proposição 5.20 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante 3/2 como no Lema 5.1. Então*

$$\frac{\frac{3\lambda}{2} + \frac{3}{2}2^{-2\frac{M}{2}}}{f(k)} > \frac{100\lambda(E)f(M)}{f^2(\lambda(E))} > \frac{100\lambda(E)}{f(\lambda(E))}.$$

Prova: Pela Observação 4.4 e por (ii) temos

$$\frac{100\lambda(E)f(M)}{f^2(\lambda(E))} = \frac{100\lambda(E)}{f(\lambda(E))}\frac{f(M)}{f(\lambda(E))} > \frac{100\lambda(E)}{f(\lambda(E))}.$$

Agora basta usarmos as Proposições 5.19 e 5.13 e a equação (5.1). ∎

Observação 5.21 *Sejam $M \in J$, $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante 3/2 como no Lema 5.1 e $(\lambda(E))^{1/100} \leq k$. Então*

$$\frac{\frac{3\lambda(E)}{2} + 2^{-2\frac{M}{2}}}{f(k)} \leq \frac{\frac{3\lambda(E)}{2} + \frac{3}{2}.2^{-2\frac{M}{2}}}{f(k)} \leq \frac{100\lambda(E)}{f(\lambda(E))}.$$

Prova: Como $\sqrt[100]{\lambda(E)} \leq k$, segue que $\lambda(E) \leq k^{100}$. Logo por (ii)

$$\begin{aligned} f(\lambda(E)) &\leq f(k^{100}) = \sqrt{log_2(k^{100}+1)} \\ &< \sqrt{log_2(k+1)^{100}} \\ &= 10\sqrt{log_2(k+1)} = 10f(k), \end{aligned}$$

portanto

$$\frac{f(\lambda(E))}{f(k)} \leq 10.$$

E consequentemente

$$\frac{f(\lambda(E))}{f(k)}\left(\frac{3\lambda(E)}{2} + 2^{-2\frac{M}{2}}\right) < 10\left(\frac{3\lambda(E)}{2} + \frac{3}{2}\lambda(E)\right) < 100\lambda(E).$$ ∎

Observemos que a Proposição 5.20 e a Observação 5.21 causam uma **contradição** se

$$(\lambda(E))^{1/100} \leq k.$$

Agora vamos procurar uma contradição para o caso

$$(\lambda(E))^{1/100} \geq k \geq 2.$$

Isto mostraria que a Afirmação 5.9 é verdadeira.

Observação 5.22 $\frac{\lambda(E)}{f^2(\lambda(E))} \leq \sum_1^k \frac{\lambda(F_i)}{f^2(\lambda(F_i))f(k)}$.

Prova: Pela minimalidade de E, veja Afirmação 5.3, sabemos que

$$||F_i x(\varepsilon)|| \leq \frac{100\lambda(F_i)f(M)}{f^2(\lambda(F_i))},$$

logo

$$\frac{100f(M)\lambda(E)}{f^2(\lambda(E))} \leq ||Ex(\varepsilon)|| = \sum_1^k \frac{||F_i x(\varepsilon)||}{f(k)} < \sum_1^k \frac{100f(M)\lambda(F_i)}{f^2(\lambda(F_i))f(k)}. \qquad \blacksquare$$

Proposição 5.23 $f(k)f^2(\lambda(E)/k) < f^2(\lambda(E))$.

Prova: Pela Observação 5.22 temos

$$\frac{\lambda(E)}{f^2(\lambda(E))} < \sum_1^k \frac{\lambda(F_i)}{f^2(\lambda(F_i))f(k)} = \frac{k}{f(k)} \sum_1^k \frac{1}{k} \frac{\lambda(F_i)}{f^2(\lambda(F_i))}.$$

Mas por (iv) $G(r) = \frac{r}{f^2(r)}$ é côncava e $\sum_1^k \frac{1}{k} = 1$, logo pela desigualdade de Jensen, veja Proposição 0.23, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda(E)}{f^2(\lambda(E))} &< \frac{k}{f(k)} \sum_1^k \frac{1}{k} \frac{\lambda(F_i)}{f^2(\lambda(F_i))} \\
&< \frac{k}{f(k)} \frac{\sum_1^k \frac{\lambda(F_i)}{k}}{f^2(\sum_1^k \frac{\lambda(F_i)}{k})} \\
&< \frac{k}{f(k)} \frac{\lambda(E)}{k} \frac{1}{f^2(\frac{\lambda(E)}{k})}.
\end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Proposição 5.24 *Se* $2 \leq k \leq (\lambda(E))^{1/100}$ *então* $f(2)f((\lambda(E))^{99/100}) < f^2(\lambda(E))$.

Prova: Como $2 \leq k$ temos por (ii) que $f(2) \leq f(k)$. Mas estamos supondo que $(\lambda(E))^{1/100} \geq k$, isto é, $\frac{1}{(\lambda(E))^{1/100}} \leq \frac{1}{k}$, portanto

$$(\lambda(E))^{99/100} = \frac{\lambda(E)}{(\lambda(E))^{1/100}} \leq \frac{\lambda(E)}{k},$$

logo por (ii)

$$f((\lambda(E))^{99/100}) \leq f(\lambda(E)/k),$$

consequentemente pela Proposição 5.23

$$f(2)f^2((\lambda(E))^{99/100}) \leq f(k)f^2(\lambda(E)/k) < f^2(\lambda(E)).$$ ∎

Observação 5.25 $f^2(\lambda(E)) \leq f(2)f^2((\lambda(E))^{\frac{99}{100}})$.

Prova: Suponhamos que $f(2)f^2((\lambda(E))^{\frac{99}{100}}) < f^2(\lambda(E))$. Então, como $3/2 < f^2(2)$, temos pela Proposição 5.23 que

$$\sqrt{3/2}f^2((\lambda(E))^{\frac{99}{100}}) \leq f(2)f^2((\lambda(E))^{\frac{99}{100}}) < f^2(\lambda(E)).$$

Assim

$$\sqrt{3/2}log_2(\lambda(E))^{\frac{99}{100}} < \sqrt{3/2}log_2((\lambda(E))^{\frac{99}{100}} + 1) \leq log_2(\lambda(E) + 1),$$

portanto

$$log_2((\lambda(E))^{\frac{99}{100}})^{\sqrt{3}} < log_2(\lambda(E) + 1)^{\sqrt{2}},$$

logo

$$((\lambda(E))^{\frac{99}{100}})^{\sqrt{3}} < (\lambda(E) + 1)^{\sqrt{2}},$$

disto temos

$$(\lambda(E))^{\frac{99}{100}\frac{17}{10}} < (\lambda(E))^{\frac{99}{100}\sqrt{3}} < (\lambda(E) + 1)^{\sqrt{2}} < (\lambda(E) + 1)^{\frac{15}{10}},$$

isto é,

$$(\lambda(E))^{\frac{99}{100}17} < (\lambda(E) + 1)^{15},$$

o que implica

$$\lambda(E)^{561} < (\lambda(E) + 1)^{500}.$$

Mas isto é falso $\lambda(E) > 40$, veja Observação 5.8, pois $\frac{4^{10}}{3^{10}} = \frac{1048576}{59049} < 20 < 40 \leq \lambda(E)$, logo $4/3 < \sqrt[10]{\lambda(E)}$. Portanto

$$\lambda(E) + 1 < \lambda(E)\frac{4}{3} < \lambda(E)\sqrt[10]{\lambda(E)} = \lambda(E)^{1+\frac{1}{10}} < \lambda(E)^{\frac{561}{500}}. \quad \blacksquare$$

Notemos que a Observação 5.25 e a Proposição 5.24 também causam uma **contradição** se

$$2 \leq k \leq (\lambda(E))^{1/100}.$$

Prova da Afirmação 5.9. Se supormos que a Afirmação 5.9 seja falsa, então pela Proposição 5.20, a Observação 5.21, a Proposição 5.24 e Observação 5.25 obteremos uma contradição. Consequentemente a Afirmação 5.9 é verdadeira, isto é

$$||Ex(\varepsilon)|| = |||Ex(\varepsilon)|||. \quad \blacksquare$$

Agora nosso objetivo principal é provarmos a Afirmação 5.35. Lembremos que nas hipóteses do Lema 5.1 temos $x_1 < ... < x_M$ S.R.C, logo $||x_i|| = 1$, $\forall i \in \{1, ..., M\}$, veja Observação 3.15. Necessitaremos desses elementos de X para obtermos o conjunto A do 1ºPasso através da afirmação abaixo.

Afirmação 5.26 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então $A = \{s : ran(x_s) \subset E\}$ é um intervalo de $\mathbf{N}$.*

Prova: Sejam $a = \min A$ e $b = \max A$.

1ºCaso. Se $a = b$ então $A = \{a\}$.

2ºCaso. Se $a = b + 1$ então $A = \{a, a + 1\}$

3ºCaso. Agora suponhamos que exista t, tal que $a < t < b$. Então $x_a < ... < x_t < ... < x_b$, logo $\max ran(x_a) < \min ran(x_t) \leq \max ran(x_t) < \min ran(x_b)$. Como $a, b \in A$ temos que $ran(x_a) \subset E$ e $ran(x_b) \subset E$, com E intervalo de $\mathbf{N}$, portanto

$$\begin{aligned} ran(x_t) &= \{\min ran(x_t), ..., \max ran(x_t)\} \\ &\subseteq \{\min ran(x_a), ..., \max ran(x_b)\} \subseteq E. \end{aligned}$$

Assim $t \in A$. Logo em qualquer caso A é um intervalo de $\mathbf{N}$. ∎

Daqui para frente, neste passo,

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{s} : \mathbf{ran}(\mathbf{x_s}) \subset \mathbf{E}\} := \{\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{1}, ..., \mathbf{b}\}, \quad \exists \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{N},$$

indica o intervalo de $\mathbf{N}$ destacado na Afirmação 5.26. Observemos que A **é único.**

Também usaremos a letra A para nos referirmos à **projeção:**

$$\sum_1^M \epsilon_i x_i \mapsto \sum_{i \in A} \epsilon_i x_i,$$

que usaremos na Observação 5.29.

Afirmação 5.27 $|||Ex(\varepsilon)||| - 2 \leq |||Ax(\varepsilon)|||$.

Para fazermos a prova necessitaremos das quatro observações abaixo.

Observação 5.28 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1 e $A = \{a, a+1, ..., b\}$. Então*

$$se \quad s \leq a-2 \quad ou \quad b+2 \leq s, \quad temos\ que \quad Ex_s(\varepsilon) = \phi.$$

Prova: Seja $2 \leq i$. Suponhamos que $E(x_{a-i}(\varepsilon)) \neq \phi$, portanto existe $e \in E \cap ran(x_{a-i}(\varepsilon))$ e como $x_1 < ... < x_M$ temos $e \leq \max ran(x_{a-i}(\varepsilon)) < \min ran(x_{a-1}(\varepsilon))$ $\leq \max ran(x_{a-1}(\varepsilon)) < \min ran(x_a(\varepsilon)) \in E$. Lembrando que E é intervalo de $\mathbf{N}$, segue que $ran(x_{a-1}(\varepsilon)) = \{\min ran(x_{a-1}(\varepsilon)), ..., \max ran(x_{a-1}(\varepsilon))\} \subset E$ o qual implicaria que $a-1 \in A = \{a, ..., b\}$; absurdo. Logo $Ex_{a-i}(\varepsilon) = \phi$. Seja $s = a - i \leq a-2$. Então $E(x_s) = \phi$.

Suponhamos que $Ex_{b+i}(\varepsilon) \neq \phi$. Então existe $e \in E \cap ran(x_{b+i}(\varepsilon))$, logo $\max ran(x_b(\varepsilon)) \in E$, agora $\max ran(x_b(\varepsilon)) < \min ran(x_{b+1}(\varepsilon))$ $\leq \max ran(x_{b+1}(\varepsilon)) < \min ran(x_{b+i}(\varepsilon)) \leq e$, portanto $ran(x_{b+1}(\varepsilon)) \subset E$, em particular, implicaria $b+1 \in A = \{a, ..., b\}$; absurdo. Logo $Ex_{b+i}(\varepsilon) = \phi$. Seja $s = b+i \geq b+2$. Então $Ex_s(\varepsilon) = \phi$. ∎

Observação 5.29 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então*

$$Ex(\varepsilon) = Ex_{a-1}(\varepsilon) + Ax(\varepsilon) + Ex_{b+1}(\varepsilon).$$

Prova: $Ax(\varepsilon) = A(\sum_1^M x_i(\varepsilon)) = \sum_{i\in A} x_i(\varepsilon)$ e pela Observação 5.28 temos

$$
\begin{aligned}
&Ex(\varepsilon) = \\
&E\Big(\sum_1^M x_i(\varepsilon)\Big) = E\Big(\sum_1^{a-2} x_i + x_{a-1}(\varepsilon) + \sum_a^b x_i(\varepsilon) + x_{b+1}(\varepsilon) + \sum_{b+2}^M x_i(\varepsilon)\Big) = \\
&E\Big(\sum_1^{a-2} x_i(\varepsilon)\Big) + E(x_{a-1}(\varepsilon)) + E\Big(\sum_a^b x_i(\varepsilon)\Big) + E(x_{b+1}(\varepsilon)) + E\Big(\sum_{b+2}^M x_i(\varepsilon)\Big) = \\
&0 + Ex_{a-1}(\varepsilon) + E\Big(\sum_a^b x_i(\varepsilon)\Big) + Ex_{b+1}(\varepsilon) + 0 = \\
&E(x_{a-1}) + \sum_a^b x_i + E(x_{b+1}) = \\
&Ex_{a-1}(\varepsilon) + A\Big(\sum_a^b x_i(\varepsilon)\Big) + Ex_{b+1}(\varepsilon).
\end{aligned}
$$

∎

Observação 5.30 *Sejam x^* uma combinação especial, E um intervalo de $\mathbf{N}$ e $y \in \mathbf{X}$. Então pela Proposição 2.26 temos*

$$|x^*(Ey)| \le ||Ey|| \le ||y||.$$

Observação 5.31 *Seja x^* uma combinação especial. Então*

$$|x^*(Ex(\varepsilon)| \le |x^*(Ax(\varepsilon)| + 2.$$

Prova: Como, pela Observação 3.15, $||x_{a-1}(\varepsilon)|| = 1$ segue pelas Observações 5.29 e 5.30 que

$$
\begin{aligned}
|x^*(Ex(\varepsilon)| &= |x^*(Ex_{a-1}(\varepsilon) + Ax(\varepsilon) + Ex_{b+1}(\varepsilon)| \\
&\le |x^*(Ex_{a-1}(\varepsilon))| + |x^*(Ax(\varepsilon))| + |x^*(Ex_{b+1}(\varepsilon))| \\
&\le ||x_{a-1}(\varepsilon)|| + |x^*(Ax(\varepsilon))| + ||x_{b+1}(\varepsilon)|| \\
&= |x^*(Ax(\varepsilon))| + 2.
\end{aligned}
$$

∎

Prova da Afirmação 5.27: Basta tomarmos o supremo na desigualdade obtida na Observação 5.31. ∎

No que segue N **indicará a cardinalidade de A.**

Afirmação 5.32 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante 3/2 como no Lema 5.1. Então*

$$\frac{(1-\epsilon)100Nf(M)}{f(N)} \leq |||Ax(\varepsilon)|||.$$

Para fazermos a prova da Afirmação 5.32 precisaremos da Observação 5.33, onde usaremos a Definição 4.3.

Observação 5.33 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante 3/2 como no Lema 5.1. Então $|A| - 2^{-2^M} \leq \lambda(E) < |A| + 2$.*

Prova: Lembremos que $A = \{s : ran(x_s) \subset E\} = \{a, a+1, ..., b\}$, veja Afirmação 5.26. Seja $t \in A$. Então, pela Definição de S.R.C, segue que $x_t = x_{t1} + ... + x_{tn_t}$, para alguns $n_t \in \mathbf{N}$ e $x_{t1} < ... < x_{tn_t}$.

Sejam i =mínimo$\{t : E(x_t) \neq \phi\}$ e j =máximo$\{t : E(x_t) \neq \phi\}$. Então pela Observação 5.29 $i = a$ ou $i = a-1$ e $j = b$ ou $j = b+1$.

Sejam r =mínimo$\{u \in \{1, ..., n_i\} : E(x_{iu}) \neq \phi\}$ e s =máximo$\{u \in \{1, ..., n_j\} : E(x_{ju}) \neq \phi\}$.

Observemos que $a, b \in A$, isto é $ran(x_b) \subset E$ e $ran(x_a) \subset E$. Logo $j = b$ implica $s = n_b$ e $i = a$ implica $r = 1$.

Como $x_1 < ...x_M$ é S.R.C temos, pela Afirmação 3.20(a), que

$$2^{2^M} < n_1 < n_2 < ... < n_M.$$

Lembremos que $\lambda(E)$=$j - i + \frac{s}{n_j} - \frac{r}{n_i}$, veja Definição 4.3. Logo temos que analisar os casos $i = a$ ou $i = a-1$ e $j = b$ ou $j = b+1$.

1. $\lambda(E) = b - a + \frac{n_b}{n_b} - \frac{1}{n_a} = b - a + 1 - \frac{1}{n_a} = |A| - \frac{1}{n_a}$. Mas $|A| - 2^{-2^M} < |A| - \frac{1}{n_a} < |A| + 2$.

2. $\lambda(E) = b - (a-1) + \frac{n_b}{n_b} - \frac{r}{n_{a-1}} = b - a + 1 + 1 - \frac{r}{n_{a_1}} = |A| + (1 - \frac{r}{n_{a_1}})$. Mas $|A| - 2^{-2^M} < |A| < |A| + (1 - \frac{r}{n_{a_1}}) < |A| + 2$.

3. $\lambda(E) = (b+1) - a + \frac{s}{n_{b+1}} - \frac{1}{n_a} = b - a + 1 + \frac{s}{n_{b+1}} - \frac{1}{n_a} = |A| + \frac{s}{n_{b+1}} - \frac{1}{n_a}$. Mas $|A| - 2^{-2^M} < |A| + \frac{s}{n_{b+1}} - 2^{-2^M} < |A| + \frac{s}{n_{b+1}} - \frac{1}{n_a} < |A| + 2$.

4.

$$\begin{aligned}\lambda(E) &= (b+1)-(a-1)+\frac{s}{n_{b+1}}-\frac{r}{n_{a-1}}\\ &= b-a+1+1+\frac{s}{n_{b+1}}-\frac{r}{n_{a-1}}\\ &= |A|+\frac{s}{n_{b+1}}+(1-\frac{r}{n_{a-1}}).\end{aligned}$$

Mas $|A|-2^{-2^M}<|A|<|A|+\frac{s}{n_{b+1}}<|A|+\frac{s}{n_{b+1}}+(1-\frac{r}{n_{a-1}})<|A|+2.$ ■

Prova da Afirmação 5.32. Como N é a cardinalidade de A, temos, pela Afirmação 5.27, as equações (5.1) e (5.5), (iv), a Observação 5.33, (i) e Proposição 1.2 que

$$\begin{aligned}|||Ax(\varepsilon)||| &\geq |||Ex(\varepsilon)|||-2=||Ex(\varepsilon)||-2\\ &\geq \frac{100\lambda(E)f(M)}{f^2(\lambda(E))}-2\geq 100\frac{(|A|-2^{-2^M})f(M)}{f^2(|A|-2^{-2^M})}-2\\ &\geq \frac{100(|A|-2^{-2^M})f(M)}{f^2(|A|)}-2=100\frac{|A|f(M)}{f^2(|A|)}-\frac{100f(M)}{(2^{2^M}f^2(|A|))}-2\\ &\geq 100\frac{|A|f(M)}{f^2(|A|)}-\frac{100f(M)}{M}.\frac{1}{f^2(|A|)}-2\geq 100\frac{|A|f(M)}{f^2(|A|)}-100.1.1-2\\ &= 100\frac{|A|f(M)}{f^2(|A|)}-102\geq 100\frac{|A|f(M)}{f^2(|A|)}-10^2.10^{103}.10^{-50}\\ &= 100\frac{|A|f(M)}{f^2(|A|)}-10^2.10^{103}\epsilon\geq 100\frac{|A|f(M)}{f^2(|A|)}-10^2f(M)\epsilon\\ &\geq 100\frac{|A|f(M)}{f^2(|A|)}-10^2\frac{f(M)\epsilon N}{log_2(N+1)}=100\frac{|A|f(M)}{f^2(|A|)}-\frac{10^2f(M)\epsilon N}{f^2(N)}\\ &= \frac{100Nf(M)}{f^2(N)}-\frac{10^2f(M)\epsilon N}{f^2(N)}.\end{aligned}$$

■

Afirmação 5.34 *Sejam $M\in\mathbf{J}$ e $x_1<...<x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então*

$$|||Ax(\varepsilon)|||\geq ||Ax(\varepsilon)||-2\geq(1-\epsilon)||Ax(\varepsilon)||.$$

Prova: Lembremos que $\epsilon=10^{-50}$, veja a equação (5.3). Agora pela Proposição 2.26 e pela Observação 5.10 temos

$$\begin{aligned}||Ax(\varepsilon)|| &\geq \sup\left\{\left(\sum_1^m|x_i^*(Ax(\varepsilon))|\right)^{1/2}: x_1^*,...,x_m^* \text{ são a.e.d sobre } X,\quad m\in N\right\}\\ &= |||Ax(\varepsilon)|||.\end{aligned}$$

Também pela Afirmação 5.27, a equação (5.1) e a Proposição 1.2 temos

$$\begin{aligned}
|||Ax(\varepsilon)||| &\geq |||Ex(\varepsilon)||| - 2 = ||Ex(\varepsilon)|| - 2 \\
&\geq \frac{100\lambda(E)f(M)}{f^2(\lambda(E))} - 2 \\
&= 100\frac{\lambda(E)f(M)}{\log_2(\lambda(E)+1)} - 2 \\
&\geq 100f(M) - 2 \\
&\geq 10^2.10^{103} - 2 > 2.10^{50}.
\end{aligned}$$

Como $2 = 2.10^{50}\epsilon$ (equação (5.3)), pelas Afirmações 5.27 e 5.9, o Teorema 2.20 e a equação (5.6) segue que

$$\begin{aligned}
|||Ax(\varepsilon)||| &\geq |||Ex(\varepsilon)||| - 2 = ||Ex(\varepsilon)|| - 2 \\
&\geq ||Ax(\varepsilon)|| - 2.10^{50}\epsilon \\
&\geq ||Ax(\varepsilon)|| - \epsilon|||Ax(\varepsilon)||| \\
&\geq ||Ax(\varepsilon)|| - \epsilon||Ax(\varepsilon)||.
\end{aligned}$$

■

Afirmação 5.35 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Se $B \subset A$ é um intervalo de $\mathbf{N}$, então*

$$||Bx(\varepsilon)|| \leq \frac{100f(M)|B|}{f^2(|B|)}.$$

Pela minimalidade de E, veja Afirmação 5.3, temos que

$$||Bx(\varepsilon)|| \leq \frac{100f(M)\lambda(B)}{f^2(\lambda(B))}.$$

Mas precisaremos das duas observações abaixo para terminarmos a prova.

Observação 5.36 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C Então $M < \max ran(x_1)$.*

Prova: Seja $ran(x_1) = \{c, ..., d\}$. Então, pela Definição 3.14(2) e pela Afirmação 3.18 temos que $M < 2^{2^M} \leq n_1 \leq |ran(x_1)| = d - c + 1 \leq d = \max ran(x_1)$. ■

Observação 5.37 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1 e $B \subset A$ um intervalo de $\mathbf{N}$ qualquer. Se $\max ranB(x_1) \leq M$, então $B(x_i) = 0, \quad i = 2, ..., M$.*

Prova: Pela Observação 5.36 $\max ran(B(x_1)) \leq M < \max ran(x_1)$. Logo temos que B está contido em $ran(x_1)$ e é diferente de $ran(x_1)$ Como $x_1 < ... < x_M$, concluímos que $B(x_i) = 0, \quad i = 2, ..., M$. ∎

Prova da Afirmação 5.35: Como $B \subset A \subset \{1, 2, ..., M\}$ e B é um intervalo de $\mathbf{N}$ temos que $ranB(x_1) \subset ranB = B$. Portanto $\max ranB(x_1) \leq M$, logo, pela Observação 5.37, $B(x_i) = 0$, $i = 2, ..., M$, portanto o máximo dos i tais que $B(x_i) \neq \phi$ é igual a 1. Agora analisemos os casos.

1ºCaso Se $B(x_1) = 0$ então $\lambda(B) = 0 < 1 \leq |B|$.

2ºCaso Se $B(x_1) \neq \phi$ então para $x_1 = x_{11} + ... + x_{1n_1}$ e para alguns $r \leq s \in \{1, 2, ..., n_1\}$ temos que $\lambda(B) = \frac{s}{n_1} - \frac{r}{n_1} < 1 \leq |B|$.

Logo, por (iv),

$$||Bx(\varepsilon)|| \leq \frac{100f(M)\lambda(B)}{f^2(\lambda(B))} \leq \frac{100f(M)|B|}{f^2(|B|)}.$$ ∎

PROVA DO 1ºPASSO Pela Afirmação 5.3, Para cada escolha de $\varepsilon \in \{-1, 1\}^M$ existe um único intervalo E de $\mathbf{N}$ satisfazendo a desigualdade dessa afirmação.

Agora, seja A o único intervalo de $\mathbf{N}$ contido em $\{1, ..., M\}$ obtido através da Afirmação 5.26. Isto é, **a cada $\varepsilon \in \{-1, 1\}^M$ corresponde um único intervalo** $A := A(\varepsilon) \in \{1, ..., M\}$. Para concluirmos a prova do 1ºPasso basta usarmos isto na Afirmação 5.38.

As Afirmações 5.38, 5.34, 5.32 e 5.35 e a equação (5.5) provam o 1- Passo. ∎

Afirmação 5.38 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então algum intervalo $A \subset \{1, ..., M\}$ corresponde pelo menos a $\frac{2^M}{M^2}$ diferentes ε do conjunto $\{-1, 1\}^M$*

Prova: Seja $\varepsilon = (\epsilon_1, ..., \epsilon_M) \in \{-1, 1\}^M$. Então existem 2^M de tais ε. Seja $A(\varepsilon)$ o único intervalo $A \in \{1, ..., M\}$ de $\mathbf{N}$ correspondente a ε, veja acima.

Pelo item 2 da prova da Observação 5.11 onde tomamos $E = \{1, ..., M\}$ e $M = n = |E|$, existem máximo M^2 intervalos A em $\{1, ..., M\}$.

Seja N_A o número de $\varepsilon' s$ correspondentes a A (dado ε A é único, mas A pode corresponder a varios ε's).

Sejam $A_1, ..., A_{M^2}$ todos os possíveis $A' s$. Então, como existem 2^M $\varepsilon' s$, segue que $N_{A_1} + ... + N_{A_{M^2}} = 2^M$, portanto existe $i \in \{1, .., M\}$ tal que $N_{A_i} \geq \frac{2^M}{M^2}$. ∎

5.2 2°Passo.

Seja $n \in \mathbf{N}$. A seguir introduzimos uma distância no espaço $\{-1, 1\}^n$ baseada no número de coordenadas diferentes entre dois elementos. Ela é conhecida como a distância de Hamming.

Definição 5.39 *Se $\varepsilon, \gamma \in \{-1, 1\}^n$ então a* **distância de Hamming** *entre $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n)$ e $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n)$ é dada por*

$$\mathbf{d}(\varepsilon, \gamma) = |\{i : \varepsilon_i \neq \gamma_i, \}| \quad i \in \{1, ..., n\}.$$

Seja $n \in \mathbf{N}$, coloquemos $[n] := \{1, ..., n\}$ e definamos

$$\phi : 2^{[n]} \rightarrow \{-1, 1\}^n, \quad \phi(B) = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n),$$

onde $\varepsilon_i = 1$ se $i \in B$ e $\varepsilon_i = -1$ se $i \notin B$. Como ϕ é uma bijeção, também escreveremos $\{-1, 1\}^n = 2^{[n]}$.

Para cada $r \in \mathbf{N}$ definamos

$$\beta := \{S \subset [n] : |S| \leq n/2\}$$

e

$$\beta_r := \{T \subset [n] : |T \Delta S| \leq r, \quad \exists S \in \beta\}.$$

Onde $T \Delta S = (T \cap S^c) \cup (S \cap T^c)$, T^c é o complementar de T e S^c é o complementar de S.

Observemos que $\beta \subset \beta_r$ e mais ainda, se $|\beta| \leq |\theta|$, então

$$|\beta_r| \leq |\theta_r|, \quad \forall r \in \mathbf{N}.$$

Suponhamos que n seja par (o caso n ímpar é análogo). Então $|\beta| = \sum_{i=0}^{n/2} \binom{n}{i} = 2^{n-1}$ e para $r \leq n/2$ temos

$$|\beta_r| = \sum_{i=0}^{r+n/2} \binom{n}{i}. \quad (*)$$

Definição 5.40 *Seja* $Y : \{-1,1\}^n \to \mathbf{R}$. *Suponhamos que* Y *é* **1-Lipschitz,** *isto é,*

$$se \quad \mathbf{d}(\varepsilon, \gamma) \leq 1, \quad então \quad |Y(\varepsilon) - Y(\gamma)| \leq 1.$$

Seja $\mathbf{P}$ a distribuição uniforme sobre $\{-1,1\}^n$, isto é, $\mathbf{P}(B) = |B|/2^n$.

Seja m uma **mediana** de Y, isto é

$$\mathbf{P}\{\varepsilon : Y(\varepsilon) \leq m\} \geq 1/2 \quad \text{e} \quad \mathbf{P}\{\varepsilon : Y(\varepsilon) \geq m\} \geq 1/2.$$

E seja finalmente

$$\theta := \{H \subset [n] : Y(H) \leq m \quad (\{-1,1\}^n = 2^{[n]})\}.$$

Como $\mathbf{P}\{\varepsilon : Y(\varepsilon) \leq m\} \geq 1/2$, temos que $2^{n-1} \leq |\theta|$. Logo $|\beta| \leq 2^{n-1} \leq |\theta|$. Portanto

$$|\beta_r| \leq |\theta_r|. \quad (**)$$

1-Afirmação. Se $\mathbf{d}(H, H_1) \leq 1 \quad (\{-1,1\}^n = 2^{[n]})$ e $Y(H) \leq m$, então $Y(H_1) \leq m + 1$.

Prova: Como Y é 1-Lipschitz e $\mathbf{d}(H, H_1) \leq 1$ temos que $Y(H_1) \leq Y(H) + 1 \leq m + 1$. ∎

2-Afirmação. Se $\mathbf{d}(H, \varepsilon) \leq r \quad (\{-1,1\}^n = 2^{[n]})$ e $Y(H) \leq m$, então $Y(\varepsilon) \leq m + r$.

Prova: Sejam $H := H_0$, H_1, H_2,..., $H_r = \varepsilon$ tais que $\mathbf{d}(H_i, H_{i+1}) \leq 1, \quad \forall i \in \{0, ..., r-1\}$. Basta aplicarmos a 1-Afirmação r vezes. ∎

3-Afirmação. Se $Y(\varepsilon) \geq m + r$, então $\varepsilon \notin \theta_{r-1} \quad (\{-1,1\}^n = 2^{[n]})$.

Prova: Suponhamos que $\varepsilon \in \theta_{r-1}$. Logo existe $H \in \theta_{r-1}$ tal que $Y(H) \leq m$ e $|H \Delta \varepsilon| \leq r - 1$, isto é, $\mathbf{d}(H, \varepsilon) \leq r - 1$. Então, pela 2-Afirmação $Y(\varepsilon) \leq m + r - 1$; absurdo. ∎

Notemos que $\varepsilon \notin \theta_r$ se e somente se, $\mathbf{d}(\varepsilon, \theta) > r$, onde

$$\mathbf{d}(\varepsilon, \theta) = \min\{\mathbf{d}(\varepsilon, H) : H \in \theta\}.$$

Logo, pela 3-Afirmação temos

$$\text{se} \quad Y(\varepsilon) \geq m + r, \quad \text{então} \quad \mathbf{d}(\varepsilon, \theta) > r - 1. \quad (***)$$

Lembremos que se $Z \subset W$ então $\mathbf{P}(Z) \leq \mathbf{P}(W)$.

4-Afirmação. $\mathbf{P}\{\varepsilon : Y(\varepsilon) \geq m + r\} \leq 1 - \frac{\sum_{i=0}^{r-1+n/2} \binom{n}{i}}{2^n}$.

Prova: Por $(***)$, 3-Afirmação, $(**)$ e $(*)$ temos

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\varepsilon : Y(\varepsilon) \geq m + r\} &\leq \mathbf{P}\{\varepsilon : \mathbf{d}(\varepsilon, \theta) > r - 1\} \\ &= \mathbf{P}\{\varepsilon : \varepsilon \notin \theta_{r-1}\} \\ &= 1 - \mathbf{P}\{\varepsilon : \varepsilon \in \theta_{r-1}\} \\ &\leq 1 - \mathbf{P}\{\varepsilon : \varepsilon \in \beta_{r-1}\} \\ &= 1 - |\beta_{r-1}|/2^n \\ &= 1 - \frac{\sum_{i=0}^{r-1+n/2} \binom{n}{i}}{2^n}. \end{aligned}$$

■

Analogamente, pondo $\mathbf{d}(\varepsilon, \theta)) \leq -r$ no lugar de $\mathbf{d}(\varepsilon, \theta) \geq r$, podemos mostrar que

$$\mathbf{P}\{\varepsilon : Y(\varepsilon) \leq m - r\} \leq 1 - \frac{\sum_{i=0}^{r-1+n/2} \binom{n}{i}}{2^n}.$$

Mas, pelo Teorema 0.25

$$1 - \frac{\sum_{i=0}^{r-1+n/2} \binom{n}{i}}{2^n} \leq exp(-r/2n).$$

Em resumo, acabamos de provar:

Lema 5.41 *Seja $f : \{-1, 1\}^n \to R$ uma função que é 1-Lipschitz com respeito à distância de Hamming sobre $\{-1, 1\}^n$, $\mathbf{P}$ a distribuição uniforme sobre $\{-1, 1\}^n$, e $\mathbf{M}$ uma mediana de f. Então para $-\delta \geq 0$ temos*

$$\mathbf{P}[|f(\epsilon) - \mathbf{M}| \geq \delta n] \leq 2exp(-\delta^2 n/2).$$

Lembremos, equação (5.2), que $\forall x \in c_{00}(\mathbf{N})$, definimos

$$|||x||| := \sup\{|x^*(x)| : x^* \quad \text{é uma combinação especial}\}.$$

Pela hipótese do Lema 5.1 temos que $x_1 < .. < x_M$ é uma S.R.C, logo $||x_i|| = 1$, $\forall i \in \{1, ..., M\}$, veja Observação 3.15. Antes de enunciarmos o próximo passo, introduziremos algumas notações. Sejam

$$\mathbf{k} \quad \text{o menor inteiro maior que} \quad \log \mathbf{N} \quad (\mathbf{N} = |\mathbf{A}|),$$

isto é

$$k - 1 \leq \log N \leq k$$

e

$\mathbf{B_1} < ... < \mathbf{B_{5k}}$ subintervalos de $\mathbf{A}$, onde $\mathbf{A}$ é o conjunto obtido no 1ºPasso,

tais que

$$(1-\epsilon)\frac{N}{5k} \leq |B_i| \leq (1+\epsilon)\frac{N}{5k}, \quad \forall i \in \{1, ..., 5k\}.$$

Agora notemos que existem inteiros entre $(1-\epsilon)\frac{N}{5k}$ e $(1+\epsilon)\frac{N}{5k}$, pois $\frac{1}{2} < \epsilon\frac{N}{5k}$ ($\epsilon = 10^{-50}$ equação (5.3)) e nos números reais toda bola de raio maior que $\frac{1}{2}$ contém um número inteiro (centro $N/5k$). Sejam $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_M) \in \{-1, 1\}^N$,

$$\mathbf{v_i} = \sum_{\mathbf{j} \in \mathbf{B_i}} \epsilon_\mathbf{j} \mathbf{x_j} \quad \text{para todo} \quad \mathbf{i} \in \{\mathbf{1}, ..., \mathbf{5k}\},$$

e

$$\mathbf{u_r} = \sum_{(\mathbf{r}-1)\mathbf{k}+1}^{\mathbf{rk}} \mathbf{v_i} \quad \text{para todo} \quad \mathbf{r} \in \{\mathbf{1}, ..., \mathbf{5}\}.$$

Portanto que $v_1 < ... < v_{5k}$ e $u_1 < ... < u_5$ e os u_r e os v_i dependem do conjunto $\{\varepsilon_j : j \in A\}$.

2ºPASSO. Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então existe uma escolha de $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, com $j \in A$ tal que

$$\left|\left|\left| \sum_1^5 \eta_r u_r \right|\right|\right| > (1 - 2\epsilon)\frac{100 N f(M)}{f^2(N)},$$

para cada $(\eta_1, ..., \eta_5) \in \{-1,1\}^5$ e também satisfazendo para cada $i \in \{1, ..., 5k\}$

$$||v_i|| \leq (1+3\epsilon)\frac{20Nf(M)}{f^2(N)k}.$$

Para fazermos a prova necessitaremos das afirmações abaixo. As Afirmações mais importantes são a 5.44 e a 5.50 mas elas não são usadas diretamente na "prova do 2ºPasso". Na "prova do 2ºPasso" usamos as Afirmações 5.49 e 5.56 que são implicadas pelas Afirmações 5.44 e 5.50 . Nas provas das Afirmações 5.44 e a 5.50 é muito útil o Lema 5.41. Para poder aplicar o Lema 5.41 precisamos da seguinte definição.

Definição 5.42 *Sejam $n \in \mathbf{N}$, $Y : \{-1,1\}^n \to \mathbf{R}$ e $\mathbf{d}$ é a distância de Hamming. Y é* **2-Lipschitz** *quando satisfaz:*

$$se \quad \mathbf{d}(\varepsilon,\gamma) \leq 1, \quad então \quad |Y(\varepsilon) - Y(\gamma)| \leq 2.$$

Observemos que se Y é 2-Lipschitz então $Y/2$ é 1-Lipschitz. Mas por comodidade vamos usar duas funções 2-Lipschitz, veja Afirmações 5.43 e 5.51.

Nosso primeiro objetivo é provarmos a Afirmação 5.49 e para isto precisaremos de vários resultados auxiliares.

Afirmação 5.43 *Para cada escolha fixa $\eta_1, ..., \eta_5 \in \{-1,1\}^5$ temos que $|||\sum_1^5 \eta_r u_r|||$ é uma função 2-Lipschitz sobre $\{-1,1\}^{|A|}$.*

Prova: Sejam $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_N), \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_N) \in \{-1,1\}^N$ satisfazendo $d(\varepsilon,\gamma) = 1$, onde $\mathbf{d}$ é a distância de Hamming, isto é, ε e γ só são diferentes em uma única componente, digamos a r-ésima.

Coloquemos $v_i(\varepsilon) = \sum_{j\in B_i} \epsilon_j x_j$ onde $\epsilon_j \in \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_N\}$ e $v_i(\gamma) = \sum_{j\in B_i} \epsilon_j x_j$ onde $\epsilon_j \in \{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_N\}$.

Seja agora y^* uma combinação especial e coloquemos $a = y^*(|\epsilon_r|x_r)$. Então, para algum $b \in \mathbf{R}$, $y^*(\sum_1^5 \eta_r u_r(\varepsilon)) = b - a$ e $y^*(\sum_1^5 \eta_r u_r(\gamma)) = b + a$ (ou $y^*(\sum_1^5 \eta_r u_r(\varepsilon)) = b + a$ e $y^*(\sum_1^5 \eta_r u_r(\gamma)) = b - a$).

Portanto, pela Proposição 2.26 $|[|y^*(\sum_1^5 \eta_r u_r(\varepsilon))| - |y^*(\sum_1^5 \eta_r u_r(\gamma))|]| = |(|b - a| - |b+a|)| \leq 2|a| = 2|y^*(|\epsilon_r|x_r)| \leq 2||x_r|| = 2$.

Isto prova que $|||\sum_1^5 \eta_r u_r|||$ é uma função 2-Lipschitz sobre $\{-1,1\}^{|A|}$. ∎

Lembrando que $\mathbf{P}$ é a distribuição uniforme sobre $\{-1,1\}^n$ do Lema 5.41, temos

Afirmação 5.44 *Sejam* $M \in \mathbf{J}$ *e* $x_1 < \ldots < x_M$ *uma S.R.C de comprimento* M *com constante* $3/2$ *como no Lema 5.1 e* $|||\sum_1^5 \eta_r u_r|||$ *como na Afirmação 5.43. Então*

$$\mathbf{P}\Big[\Big(\Big|\Big|\Big|\sum_1^5 \eta_r u_r\Big|\Big|\Big| - \mathbf{M}\Big|\Big|\Big|\sum_1^5 \eta_r u_r\Big|\Big|\Big|\Big) > \frac{\epsilon 100 N f(M)}{20 f^2(N)}\Big] \leq \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{5\epsilon}{2f(N)}\Big)^2 N\Big).$$

Para fazermos a prova da Afirmação 5.44 necessitaremos da seguinte observação.

Observação 5.45 *Sejam* $M \in \mathbf{J}$ *e* $x_1 < \ldots < x_M$ *uma S.R.C de comprimento* M *com constante* $3/2$ *como no Lema 5.1. Então*

$$2\exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{\epsilon 100 f(M)}{20 f^2(N)}\Big)^2 N\Big) \leq \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{5\epsilon}{2f(N)}\Big)^2 N\Big).$$

Prova: Como $M \in J$, pela Proposição 1.2(2) temos que

$$10^{103} \leq f(M) = \sqrt{log_2(M+1)} = \sqrt{\frac{\ln(M+1)}{\ln 2}}.$$

Logo $10^{100} < \sqrt{\ln logM}$, consequentemente $\exp(10^{100}) < \exp(\sqrt{\log M}) \leq N \leq M$. Agora por (iv) temos que

$$\frac{25\epsilon^2}{8}\frac{N}{f^2(N)} > 3\epsilon^2 \frac{\exp(10^{100})}{f^2(\exp(10^{100}))} > \ln 2.$$

Portanto

$$\ln 2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{5\epsilon}{2f(N)}\Big)^2 N < \frac{1}{2}\frac{25\epsilon^2 N}{f^2(N)}.$$

Como $\exp(r+s) = \exp(r)\exp(s)$ para todo $s, r \in \mathbf{R}$, a funcão exp é crescente e $\exp(\log 2) = 2$, da desigualdade anterior provamos o que queríamos. ∎

Prova da afirmação 5.44. Pelo Lema 5.41 e pela Observação 5.45 temos que

$$\mathbf{P}\Big[\Big(\Big|\Big|\Big|\sum_1^5 \eta_r u_r\Big|\Big|\Big| - \mathbf{M}\Big|\Big|\Big|\sum_1^5 \eta_r u_r\Big|\Big|\Big|\Big) > \frac{\epsilon 100 N f(M)}{20 f^2(N)}\Big] \leq$$
$$2\exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{\epsilon 100 f(M)}{20 f^2(N)}\Big)^2 N\Big) \leq \exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{5\epsilon}{2f(N)}\Big)^2 N\Big).$$ ∎

Afirmação 5.46 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então*

$$\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{5\epsilon}{2f(N)}\right)^2 N\right) < 1/M^2.$$

Para fazermos a prova necessitaremos da Observação 5.47.

Observação 5.47 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então*

$$\exp\left(-\frac{\epsilon^2 N}{(40f(N))^2 5k}\right) \leq \frac{1}{M^2}.$$

Prova: No começo do 2ºPasso definimos k tal que $k-1 \leq \log N \leq k$ e pelo 1ºPasso, $20\exp(\sqrt{logM}) \leq N \leq M$. Logo

$$\begin{aligned}
\frac{\epsilon^2 N}{40^2} &\geq \frac{\epsilon^2 \exp(\sqrt{\log M})}{40^2} \geq 40^2\sqrt{\log M}^6 = 40^2[\log M]^3 \\
&= 40.5.8[\log M]^3 = 40.5[\log M^2]^3 = 5\frac{\ln M^2}{\ln 10}8\frac{\log_2 M^2}{\log_2 10}5\log M^2 \\
&> \ln M^2 \log_2 M^2 .5\log M^2 > \ln M^2 \log_2(M+1)5\log M^2 \\
&> \ln M^2 \log_2(N+1)5\log N^2 > \ln M^2 \log_2(N+1)5\log N \\
&\geq \ln M^2 \log_2(N+1)5[|\log N|] = \ln M^2 f^2(N)5k,
\end{aligned}$$

portanto

$$\ln M^2 < \frac{\epsilon^2 N}{(40f(N))^2 5k}.$$

Consequentemente

$$\exp\left(-\frac{\epsilon^2 N}{(40f(N))^2 5k}\right) \leq \exp(-\ln M^2) = \exp\left(\ln\frac{1}{M^2}\right) = \frac{1}{M^2}. \quad \blacksquare$$

Prova da afirmação 5.46. Como $\frac{\epsilon^2}{(40f(N))^2}\frac{N}{5k} < \frac{\epsilon^2}{(40f(N))^2}N < \frac{1}{2}\frac{(5\epsilon)^2}{(2f(N))^2}N$, pela Observação 5.47, segue que

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(5\epsilon)^2}{(2f(N))^2}N\right) &< \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{(40f(N))^2}N\right) \\
&< \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{(40f(N))^2}\frac{N}{5k}\right) \leq \frac{1}{M^2}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lembremos, equação (5.2), que $\forall x \in c_{00}(\mathbf{N})$ definimos

$$|||x||| := \sup\{|x^*(x)| : x^* \quad \text{é uma combinação especial}\}.$$

No que segue $\mathbf{M}Y$ indicará uma mediana de Y.

Afirmação 5.48 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1 e $|||\sum_1^5 \eta_r u_r|||$ como na Afirmação 5.43. Então*

$$\mathbf{M}\Big|\Big|\Big|\sum_1^5 \eta_r u_r\Big|\Big|\Big| \geq \left(1 - \epsilon - \frac{\epsilon}{20}\right)\frac{100Nf(M)}{f^2(N)}.$$

Prova: Como $v_i = \sum_{j \in B_i} \epsilon_j x_j$, $\forall i \in \{1, ..., 5k\}$, $u_r = \sum_{(r-1)k+1}^{rk} v_i$, $\forall r \in \{1, ..., 5\}$. com $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_M) \in \{-1, 1\}^N$ e $\eta_1, ..., \eta_5 \in \{-1, 1\}^5$ temos que

$$\sum_1^5 \eta_r u_r = \sum_{i \in A} \epsilon_i x_i \quad \text{para alguns} \quad (\epsilon_1, ..., \epsilon_N) \in \{-1, 1\}^N.$$

Mais ainda

$$\Big|\,|||\sum_1^5 \eta_r u_r||| - \mathbf{M}|||\sum_1^5 \eta_r u_r|||\,\Big| > \tfrac{\epsilon}{20}\tfrac{100Nf(M)}{f^2(N)}$$

se, e sómente se

$$\tfrac{\epsilon}{20}\tfrac{100Nf(M)}{f^2(N)} < |||\sum_1^5 \eta_r u_r||| - \mathbf{M}|||\sum_1^5 \eta_r u_r||| \text{ ou}$$

$$\tfrac{\epsilon}{20}\tfrac{100Nf(M)}{f^2(N)} < \mathbf{M}|||\sum_1^5 \eta_r u_r||| - |||\sum_1^5 \eta_r u_r|||.$$

Isto se, e sómente se

$$\tfrac{\epsilon}{20}\tfrac{100Nf(M)}{f^2(N)} + \mathbf{M}|||\sum_1^5 \eta_r u_r||| < |||\sum_1^5 \eta_r u_r||| \text{ ou}$$

$$|||\sum_1^5 \eta_r u_r||| < \mathbf{M}|||\sum_1^5 \eta_r u_r||| - \tfrac{\epsilon}{20}\tfrac{100Nf(M)}{f^2(N)}.$$

Suponhamos que

$$\mathbf{M}|||\sum_1^5 \eta_r u_r||| < (1 - \epsilon - \tfrac{\epsilon}{20})\tfrac{100Nf(M)}{f^2(N)}. \text{ Então}$$

$\frac{\epsilon}{20}\frac{100Nf(M)}{f^2(N)} + \mathbf{M}|||\sum_1^5 \eta_r u_r||| < (1-\epsilon)\frac{100Nf(M)}{f^2(N)}$,

logo, pelas Afirmações 5.44 e 5.46, temos

$\mathbf{P}\big[(1-\epsilon)\frac{100Nf(M)}{f^2(N)} \leq |||\sum_1^5 \eta_r u_r|||\big]$

$\leq \mathbf{P}\big[\frac{\epsilon}{20}\frac{100Nf(M)}{f^2(N)} + \mathbf{M}|||\sum_1^5 \eta_r u_r||| < |||\sum_1^5 \eta_r u_r|||\big]$

$\leq \mathbf{P}\big[\frac{\epsilon}{20}\frac{100Nf(M)}{f^2(N)} + \mathbf{M}|||\sum_1^5 \eta_r u_r||| < |||\sum_1^5 \eta_r u_r|||\big] +$

$\mathbf{P}\big[|||\sum_1^5 \eta_r u_r||| < \mathbf{M}|||\sum_1^5 \eta_r u_r||| - \frac{\epsilon}{20}\frac{100Nf(M)}{f^2(N)}\big]$

$= \mathbf{P}\Big[\Big||||\sum_1^5 \eta_r u_r||| - \mathbf{M}|||\sum_1^5 \eta_r u_r|||\Big| > \frac{\epsilon}{20}\frac{100Nf(M)}{f^2(N)}\Big] < \frac{1}{M^2}.$

Portanto

$\mathbf{P}\big[(1-\epsilon)\frac{100Nf(M)}{f^2(N)} \leq |||\sum_{i\in A}\epsilon_i x_i|||\big] = \mathbf{P}\big[(1-\epsilon)\frac{100Nf(M)}{f^2(N)} \leq |||\sum_1^5 \eta_r u_r|||\big] < \frac{1}{M^2}.$

O que uma contradição com o que obtivemos no 1ºPasso . ∎

Afirmação 5.49 *Sejam* $M \in \mathbf{J}$ *e* $x_1 < ... < x_M$ *uma S.R.C de comprimento* M *com constante* $3/2$ *como no Lema 5.1 e* $|||\sum_1^5 \eta_r u_r|||$ *como na Afirmação 5.43. Então*

$$\mathbf{P}\Bigg[\Bigg|\Bigg|\Bigg|\sum_1^5 \eta_r u_r\Bigg|\Bigg|\Bigg| < (1-2\epsilon)\frac{100Nf(M)}{f^2(N)}\Bigg] \leq \exp\Bigg(-\Big(\frac{\epsilon}{40f(N)}\Big)^2\frac{N}{5k}\Bigg).$$

Prova: Pelas Afirmações 5.48 e 5.44 temos que

$\mathbf{P}\big[|||\sum_1^5 \eta_r u_r||| < (1-2\epsilon)\frac{100Nf(M)}{f^2(N)}\big] \leq$

$\mathbf{P}\big[|||\sum_1^5 \eta_r u_r||| < (1-\epsilon-\frac{\epsilon}{20})\frac{100Nf(M)}{f^2(N)} - \frac{\epsilon}{20}\frac{100Nf(M)}{f^2(N)}\big] \leq$

$\mathbf{P}\big[|||\sum_1^5 \eta_r u_r||| < \mathbf{M}|||\sum_1^5 \eta_r u_r||| - \frac{\epsilon}{20}\frac{100Nf(M)}{f^2(N)}\big] \leq$

$\mathbf{P}\big[|||\sum_1^5 \eta_r u_r||| < \mathbf{M}|||\sum_1^5 \eta_r u_r||| - \frac{\epsilon}{20}\frac{100Nf(M)}{f^2(N)}\big] +$

$\mathbf{P}[\mathbf{M}|||\sum_1^5 \eta_r u_r||| + \frac{\epsilon}{20} < |||\sum_1^5 \eta_r u_r|||] =$

$\mathbf{P}\Big[\Big||||\sum_1^5 \eta_r u_r||| - \mathbf{M}|||\sum_1^5 \eta_r u_r|||\Big| > \frac{\epsilon}{20}\frac{100Nf(M)}{f^2(N)}\Big] \leq$

$\exp\big(-\frac{1}{2}\big(\frac{5\epsilon}{2f(N)}\big)^2 N\big) \leq \exp\big(-\big(\frac{\epsilon}{40f(N)}\big)^2 N\big) \leq \exp\big(-\big(\frac{\epsilon}{40f(N)}\big)^2 \frac{N}{5k}\big).$ ■

Nosso objetivo agora e provar a Afirmação 5.56, que junto com a Afirmação 5.49 implican o 2ºPasso.

Afirmação 5.50 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então*

$$\mathbf{P}\Big[||v_i|| > (1+\epsilon)^2 100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})}\Big] \leq \exp\Big(-\Big(\frac{\epsilon}{40f(N)}\Big)^2\frac{N}{5k}\Big).$$

Para fazermos a prova necessitaremos de quatro resultados preliminares.

Lembremos, veja o começo desta seção, que $(1-\epsilon)\frac{N}{5k} \leq |B_i| \leq (1+\epsilon)\frac{N}{5k}$ e que $x_1 < ... < x_M$ S.R.C Em particular, $||x_i|| = 1\ \forall i \in \{1, ..., M\}$, veja Observação 3.15.

Afirmação 5.51 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então $||v_i|| = ||\sum_{j\in B_i}\epsilon_j x_j||$ é uma função 2-Lipschitz sobre $\{-1,1\}^{|B_i|}$.*

Prova: Sejam $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{|B_i|}), \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{|B_i|}) \in \{-1,1\}^{|B_i|}$ satisfazendo $d(\varepsilon,\gamma) = 1$, onde **d** é a distância de Hamming, isto é, ε e γ só são diferentes em uma única componente, digamos a r-ésima.

Coloquemos $v_i(\varepsilon) = \sum_{j\in B_i}\epsilon_j x_j$, onde $\epsilon_j \in \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_{|B_i|}\}$ e $v_i(\gamma) = \sum_{j\in B_i}\epsilon_j x_j$, onde $\epsilon_j \in \{\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{|B_i|}\}$.

Logo $|(||v_i(\varepsilon)|| - ||v_i(\gamma)||)| \leq |(||v_i(\varepsilon) - v_i(\gamma)||)| = ||2\epsilon_r x_r|| = 2.$ ■

Observação 5.52 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então*

$$2\exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{\epsilon 100 f(M)}{20f^2(|B_i|)}\Big)^2|B_i|\Big) \leq \exp\Big(-\Big(\frac{\epsilon}{40}\frac{1}{f(N)}\Big)^2\frac{N}{5k}\Big).$$

Prova: Como por hipótese

$$(1-\epsilon)\frac{N}{5k} \leq |B_i| \leq (1+\epsilon)\frac{N}{5k},$$

temos, por (iv), que

$$\frac{(1-\epsilon)\frac{N}{5k}}{f^2((1-\epsilon)\frac{N}{5k})} \leq \frac{|B_i|}{f^2(|B_i|)}.$$

Logo é suficiente mostrarmos que

$$\left(\frac{\epsilon}{40f(N)}\right)^2 \frac{N}{5k} + \ln 2 < \frac{\epsilon^2 25(1-\epsilon)\frac{N}{5k}}{2f^2((1-\epsilon)\frac{N}{5k})} \frac{f^2(M)}{f^2(|B_i|)}.$$

Claramente

$$\ln 2 < \frac{\epsilon^2 25(1-\epsilon)\frac{N}{5k}}{2f^2((1-\epsilon)\frac{N}{5k})} \frac{f^2(M)}{f^2(|B_i|)}.$$

Agora

$$\left(\frac{\epsilon^2}{40f(N)}\right)^2 \frac{N}{5k} < \frac{\epsilon^2 12(1-\epsilon)\frac{N}{5k}}{f^2((1-\epsilon)\frac{N}{5k})} \frac{f^2(M)}{f^2(|B_i|)}$$

se, e somente se

$$\left(\frac{1}{40f(N)}\right)^2 < \frac{12(1-\epsilon)}{f^2((1-\epsilon)\frac{N}{5k})} \frac{f^2(M)}{f^2(|B_i|)}$$

e claramente esta desigualdade é verdadeira, pois pela de definição de k, veja o começo desta seção, $k-1 \leq \log N \leq k$ e pelo 1ºPasso, como $N = |A|$, $N \geq 20 \exp\sqrt{\log M}$ com $M \in J$, segue da Proposição 1.2, que $f(M) > 10^{103}$. ∎

Observação 5.53 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < \ldots < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então*

$$\mathbf{P}\left[|(||v_i|| - M||v_i||)| > \frac{\epsilon}{20}(1+\epsilon)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})}\right] \leq \exp\left[-\left(\frac{\epsilon}{40f(N)}\right)^2 N\right].$$

Prova: Como por hipótese $(1-\epsilon)\frac{N}{5k} \leq |B_i| \leq (1+\epsilon)\frac{N}{5k}$, temos, por (iv), que

$$\frac{|B_i|}{f^2(|B_i|)} \leq \frac{(1+\epsilon)\frac{N}{5k}}{f^2((1+\epsilon)\frac{N}{5k})} \leq \frac{(1+\epsilon)\frac{N}{5k}}{f^2(\frac{N}{5k})}.$$

Agora pelo Lema 5.41 com $|B_i| = n$, a Afirmações 5.43 e 5.51 e a Observação 5.52 segue que

$$\mathbf{P}\left[|(||v_i|| - \mathbf{M}||v_i||)| > \frac{\epsilon}{20}100f(M)\frac{N}{5k}\frac{\frac{(1+\epsilon)N}{5k}}{f^2(\frac{N}{5k})}\right] \leq$$
$$\mathbf{P}\left[|||v_i|| - \mathbf{M}||v_i||| > \frac{\epsilon}{20}100f(M)\frac{|B_i|}{f^2(|B_i|)}\right] \leq$$
$$2\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\epsilon 100f(M)}{20f^2(|B_i|)}\right)^2 |B_i|\right) \leq$$
$$\exp\left(-\left(\frac{\epsilon}{40}\frac{1}{f(N)}\right)^2\frac{N}{5k}\right). \qquad \blacksquare$$

Observação 5.54 *Sejam* $M \in \mathbf{J}$ *e* $x_1 < ... < x_M$ *uma S.R.C de comprimento* M *com constante 3/2 como no Lema 5.1. Então*

$$\mathbf{M}||v_i|| < (1+\epsilon+\epsilon/10)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})}.$$

Prova: Pela Afirmação 5.46 temos que $\exp\left(-\frac{\epsilon^2 N}{(40f(N))^2 5k}\right) \leq \frac{1}{M^2}$. Logo, pela Observação 5.53, concluímos que

$$\mathbf{P}\left[|||v_i|| - M||v_i||| > \frac{\epsilon}{20}(1+\epsilon)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})}\right] \leq \frac{1}{M^2}.$$

Mas, por hipótese $(1-\epsilon)\frac{N}{5k} \leq |B_i| \leq (1+\epsilon)\frac{N}{5k}$, logo, por (iv)

$$\frac{|B_i|}{f^2(|B_i|)} \leq \frac{N}{5k}\frac{(1+\epsilon)\frac{N}{5k}}{f^2((1+\epsilon)\frac{N}{5k})} < \frac{(1+\epsilon)\frac{N}{5k}}{f^2(\frac{N}{5k})},$$

assim

$$100f(M)\frac{|B_i|}{f^2(|B_i|)} \leq (1+\epsilon)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})},$$

portanto, pelo item (2) do 1ºPasso, temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M^2} &\leq \mathbf{P}\left[\left|\left|\sum_{j\in B_i}\epsilon_j x_j\right|\right| < 100f(M)\frac{|B_i|}{f^2(|B_i|)}\right] \\
&= \mathbf{P}\left[||v_i|| < 100f(M)\frac{|B_i|}{f^2(|B_i|)}\right] \\
&\leq \mathbf{P}\left[||v_i|| < (1+\epsilon)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})}\right].
\end{aligned}$$

Mas

$$|||v_i|| - \mathbf{M}||v_i||| > \frac{\epsilon}{20}(1+\epsilon)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})}$$

se, e somente se

$$\frac{\epsilon}{20}(1+\epsilon)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})} + \mathbf{M}||v_i|| < ||v_i||$$

ou

$$||v_i|| < \mathbf{M}||v_i|| - \frac{\epsilon}{20}(1+\epsilon)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})}.$$

Suponhamos que

$$(1+\epsilon+\epsilon/10)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})} \leq \mathbf{M}||v_i||.$$

Então

$$(1+\epsilon+\epsilon/10)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})} - \frac{\epsilon}{20}(1+\epsilon)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})} \leq \mathbf{M}||v_i|| - \frac{\epsilon}{20}(1+\epsilon)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})}.$$

Consequentemente, pois

$$1+\epsilon < 1+\epsilon+\epsilon/10 - \epsilon/20(1+\epsilon) \quad [\epsilon = 10^{-50}],$$

temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{M^2} &\leq \mathbf{P}\left[||v_i|| < (1+\epsilon)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})}\right] \\
&\leq \mathbf{P}\left[||v_i|| < (1+\epsilon+\epsilon/10)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})} - \frac{\epsilon}{20}(1+\epsilon)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})}\right] \\
&\leq \mathbf{P}\left[||v_i|| < M||v_i|| - \frac{\epsilon}{20}(1+\epsilon)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})}\right] \\
&\leq \mathbf{P}\left[||v_i|| < M||v_i|| - \frac{\epsilon}{20}(1+\epsilon)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})}\right] \\
&+ \mathbf{P}\left[\frac{\epsilon}{20}(1+\epsilon)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})} + M||v_i|| < ||v_i||\right] \\
&= \mathbf{P}\left[|(||v_i|| - M||v_i||)| > \frac{\epsilon}{20}(1+\epsilon)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})}\right] \leq \frac{1}{M^2}; \quad \text{absurdo.}
\end{aligned}$$

Portanto $(1+\epsilon+\epsilon/10)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})} \geq \mathbf{M}||v_i||$. ∎

Prova da Afirmação 5.50. Pela Observações 5.54 e 5.53 temos, pois $1 + \epsilon + \epsilon/10 + \frac{\epsilon}{20}(1+\epsilon) < 1 + \epsilon + \epsilon + \epsilon^2 = (1+\epsilon)^2$, que

$$\mathbf{P}\left[||v_i|| > (1+\epsilon)^2 100 \frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})}\right] \leq$$
$$\mathbf{P}\left[||v_i|| > (1+\epsilon+\epsilon/10)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})}) + \frac{\epsilon}{20}(1+\epsilon)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})}\right] \leq$$
$$\mathbf{P}\left[||v_i|| > \mathbf{M}||v_i|| + \frac{\epsilon}{20}(1+\epsilon)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})}\right] \leq$$
$$\mathbf{P}\left[||v_i|| > \mathbf{M}||v_i|| + \frac{\epsilon}{20}(1+\epsilon)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})}\right] +$$
$$\mathbf{P}\left[||v_i|| < \mathbf{M}||v_i|| - \frac{\epsilon}{20}(1+\epsilon)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})}\right] =$$
$$\mathbf{P}\left[\Big|||v_i|| - \mathbf{M}||v_i||\Big| > \frac{\epsilon}{20}(1+\epsilon)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})}\right] \leq$$
$$\exp\left(-\left(\frac{\epsilon}{40f(N)}\right)^2\frac{N}{5K}\right). \qquad \blacksquare$$

Observação 5.55 $\frac{(1+\epsilon)^2}{f^2(\frac{N}{5k})} \leq \frac{(1+3\epsilon)}{f^2(N)}$.

Prova: Coloquemos $a := (1+3\epsilon)/(1+\epsilon)^2$. Como, equação (5.3) , $\epsilon = 10^{-50}$ temos $a > 1$. Lembremos que $f(r) = \sqrt{\log_2(r+1)}$, veja Proposição 1.1. Portanto temos que demonstrar que $(N+1)(5k)^a \leq (N+5k)^a$. Pela definição de k, veja o começo desta seção, $k - 1 \leq \log N \leq k$ e pelo 1ºPasso, como $N = |A|$, $N \geq 20 \exp\sqrt{\log M}$ com $M \in J$, segue pela Proposição 1.2 que $f(M) > 10^{103}$. E Claramente $(r+1)(5\log r)^a \leq (r + 5\log r)^a$ se $a > 1$ e $r \geq 20\exp\sqrt{10^{102}}$. $\blacksquare$

Afirmação 5.56 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então*

$$\mathbf{P}\left[||v_i|| > (1+3\epsilon)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})}\right] \leq \exp\left(-\left(\frac{\epsilon}{40f(N)}\right)^2\frac{N}{5k}\right).$$

Prova: Pela Observação 5.55 temos que

$$\mathbf{P}\left[||v_i|| > (1+3\epsilon)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(N)}\right] \leq \mathbf{P}\left[||v_i|| > (1+\epsilon)^2 100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})}\right],$$

logo pela Afirmação 5.50

$$\mathbf{P}\left[||v_i|| > (1+3\epsilon)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})}\right] \leq \exp\left(-\left(\frac{\epsilon}{40f(N)}\right)^2\frac{N}{5k}\right).$$ ■

Afirmação 5.57

$$\exp\left(-\left(\frac{\epsilon}{40f(N)}\right)^2\frac{N}{5k}\right) < \frac{1}{5k+32}.$$

Prova: Como $f(r) = \sqrt{\log_2(r+1)}$, temos que demonstrar que $\ln(5k+32)\log_2(N+1)5k < \frac{\epsilon^2 N}{1600}$ $[\epsilon = 10^{-50}]$. Pela de definição de k, veja novamente começo desta seção, $k-1 \leq \log N \leq k$ e pelo 1ºPasso, como $N = |A|$, $N \geq 20\exp\sqrt{\log M}$ com $M \in J$, segue pela Proposição 1.2 que $f(M) > 10^{103}$. E Claramente $\ln(5\log r + 32)\log_2(r+1)5\log r < \frac{\epsilon^2}{1600r}$ se $r \geq 20\exp\sqrt{10^{102}}$. ■

PROVA DO 2ºPASSO : Coloquemos $a_{(\eta_1,\ldots,\eta_5)} = |||\sum_1^5 \eta_j u_j|||$, como $\eta_j \in \{-1,1\}$. Então existem 32 possibilidades para os $a_i's$. Coloquemos também:

$$h := (1+3\epsilon)100\frac{N}{5k}\frac{f(M)}{f^2(\frac{N}{5k})} \quad \text{e} \quad c := (1-2\epsilon)\frac{100Nf(M)}{f^2(N)}.$$

Agora se a escolha de $\varepsilon_j \in \{-1,1\}$ do 2ºPasso não existisse, então sua probabilidade em $\{-1,1\}^{|A|}$ seria zero, mas pelas Afirmações 5.56, 5.49, 5.46 e 5.57 temos

$$\mathbf{P}[||v_1|| \leq h, \ldots, ||v_{5k}|| \leq h, a_1 > c, \ldots, a_{32} > c] =$$

$$\mathbf{P}[||v_1|| \leq h\cap, \ldots, \cap||v_{5k}|| \leq h, \cap a_1 > c\cap, \ldots, \cap a_{32} > c] =$$

$$1 - Pr[||v_1|| > h \cup \ldots \cup ||v_{5k}|| > h \cup a_1 \leq c \cup \ldots \cup a_{32} \leq c] >$$

$$1 - Pr[||v_1|| > h] - \ldots - Pr[||v_{5k}|| > h] - Pr[|a_1 \leq c] - \ldots - Pr[|a_{32} \leq c] >$$

$$1 - \sum_1^{5k+32} \exp\left(-\left(\frac{\epsilon}{40f(N)}\right)^2\frac{N}{5k}\right) >$$

$$1 - \sum_1^{5k+32}\frac{1}{5k+32} = 0; \quad \text{absurdo.}$$ ■

5.3 3°Passo.

Fixemos um escolha de $\epsilon_i \in \{-1,1\}$ com $i \in A$ satisfazendo as condições do 2ºPasso , isto é, $\mathbf{u_1},...\mathbf{u_5}$ e $\mathbf{v_1},...\mathbf{v_{5k}}$ são agora vetores fixos.

Também seja r um elemento qualquer do conjunto $\{1,...,5\}$. Antes de enunciarmos o 3ºPasso, demonstraremos alguns resultados auxiliares.

Afirmação 5.58 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então $u_r = \sum_{(r-1)k+1}^{rk} v_i$ é a soma de uma S.R.C de comprimento maior ou igual a $\exp(\sqrt{logM})$ e constante $\frac{3}{2}$.*

Prova: Como $x_1,...,x_M$ é uma S.R.C de comprimento M e constante $\frac{3}{2}$, segue que $\epsilon_1 x_1,...,\epsilon_M x_M$ é uma S.R.C de comprimento M e constante $\frac{3}{2}$ para toda escolha de $\epsilon_i \in \{-1,1\}$ com $i \in \{1,...,M\}$. Agora observando que um subconjunto de uma S.R.C é também uma S.R.C, concluímos que $v_i = \sum_{j\in B_i} \epsilon_j x_j$ é uma S.R.C de comprimento $|B_i| > \frac{1-\epsilon}{5k}N$ (veja o começo do 2ºPasso) e constante $\frac{3}{2}$. Portanto $u_r = \sum_{(r-1)k+1}^{rk} v_i$ é uma S.R.C de comprimento $k|B_i| > (1-\epsilon)N/5 > (1-\epsilon)4\exp(\sqrt{logM}) > \exp(\sqrt{logM})$ e constante $\frac{3}{2}$, pois $N = |A|$ e $|A| > \exp(\sqrt{logM})$ pelo 1ºPasso. ■

Afirmação 5.59 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então $||u_r|| \geq |||u_r||| \geq (1-22\epsilon)20\frac{Nf(M)}{f^2(N)}$.*

Para fazer a prova precisamos da seguinte observação.

Observação 5.60 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então $||u_r|| \leq (1+3\epsilon)20\frac{Nf(M)}{f^2(N)}$.*

Prova: Pelo 2ºPasso temos

$$\begin{aligned}
||u_r|| &= \left|\left| \sum_{(r-1)k+1}^{rk} v_i \right|\right| \leq \sum_{(r-1)k+1}^{rk} ||v_i|| \\
&\leq \sum_{(r-1)k+1}^{rk} (1+3\epsilon)20\frac{N}{k}\frac{f(M)}{f^2(N)} \\
&= (1+3\epsilon)20\frac{Nf(M)}{f^2(N)}.
\end{aligned}$$

■

Prova da Afirmação 5.59. Pelo 2ºPasso temos

$$|||u_1 + ... + u_5||| > (1 - 2\epsilon)\frac{100Nf(M)}{f^2(N)}.$$

Seja $u_{i_j} \in \{u_1, ..., u_5\}$. Então, pela Afirmação 5.60, sabemos que

$$\begin{aligned} |||u_{i_1} + ... + u_{i_4}||| &\leq ||u_{i_1} + ... + u_{i_4}|| \leq ||u_{i_1}|| + ... + ||u_{i_4}|| \\ &\leq (1 + 3\epsilon)20\frac{Nf(M)}{f^2(N)} + ... + (1 + 3\epsilon)20\frac{Nf(M)}{f^2(N)} \\ &= (1 + 3\epsilon)80\frac{Nf(M)}{f^2(N)}. \end{aligned}$$

E portanto, pela equação (5.6), temos

$$\begin{aligned} ||u_r|| &\geq |||u_r||| = \left|\left|\left|\sum_1^5 u_i - \sum_{1\leq i\leq 5}^{i\neq r} u_i\right|\right|\right| \\ &\geq \left|\left|\left|\sum_1^5 u_i\right|\right|\right| - \left|\left|\left|\sum_{1\leq i\leq 5}^{i\neq r} u_i\right|\right|\right| \\ &\geq (1 - 2\epsilon)\frac{100Nf(M)}{f^2(N)} - (1 + 3\epsilon)80\frac{Nf(M)}{f^2(N)} \\ &= ((1 - 2\epsilon)5 - (1 + 3\epsilon)4)20\frac{Nf(M)}{f^2(N)} \\ &= (1 - 22\epsilon)20\frac{Nf(M)}{f^2(N)}. \end{aligned}$$

■

A afirmação abaixo será muito útil quando aplicaremos o Lema 4.17 ao vetor u_4.

Afirmação 5.61 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então u_r é um l_{1+}^k − vetor com constante $1 + 26\epsilon$.*

Prova: Pelo 2ºPasso e pela Afirmação 5.59 temos

$$\begin{aligned} ||v_i|| &\leq (1 + 3\epsilon)20\frac{Nf(M)}{f^2(N)} = (1 + 3\epsilon)20\frac{N}{k}\frac{f(M)}{f^2(N)} \\ &= (1 + 3\epsilon)20\frac{N}{k}\frac{f(M)}{f^2(N)}\frac{||u_r||}{||u_r||} < (1 + 3\epsilon)20\frac{N}{k}\frac{f(M)}{f^2(N)}\frac{||u_r||}{(1 - 22\epsilon)20\frac{Nf(M)}{f^2(N)}} \\ &= \frac{1 + 3\epsilon}{1 - 22\epsilon}\frac{1}{k}||u_r|| \leq (1 + 26\epsilon)\frac{1}{k}||u_r||. \end{aligned}$$

Mas $u_r = \sum_{(r-1)k+1}^{rk} v_i$, logo pela Definição 3.3 de $l_{1+}^k - vetor$ podemos concluir que u_r é um $l_{1+}^k - vetor$ com constante $1 + 26\epsilon$. ■

No que segue $\alpha := (1 - 22\epsilon)20\frac{Nf(M)}{f^2(N)}$. Notemos que pela Observação 5.60

$$||u_r|| \leq \alpha\frac{1 + 3\epsilon}{1 - 22\epsilon}. \tag{5.7}$$

Afirmação 5.62 *Existe uma combinação especial* $x^* = \sum_1^n a_i x_i^*$ *tal que*

$$5\alpha \leq |x^*(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5)| \leq 5\alpha\frac{1 + 3\epsilon}{1 - 22\epsilon}.$$

Prova: Pelo 2ºPasso, pela Observação 5.60 e pelas equações (5.3) e (5.6) temos

$$\begin{aligned} 5\alpha &< (1 - 2\epsilon)100\frac{Nf(M)}{f^2(N)} < |||u_1 + ... + u_5||| \\ &< |||u_1||| + ... + |||u_5||| \leq ||u_1|| + ... + ||u_5|| \\ &< 5\alpha\frac{1 + 3\epsilon}{1 - 22\epsilon}. \end{aligned}$$

Logo $5\alpha < \sup\{|x^*(u_1 + ... + u_5)| : x^* \text{ é uma combinação especial}\} = |||u_1 + ... + u_5||| \leq 5\alpha\frac{1+3\epsilon}{1-22\epsilon}$. Portanto existe uma combinação especial $x^* = \sum a_i x_i^*$, tal que $5\alpha \leq |x^*(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5)| \leq 5\alpha\frac{1+3\epsilon}{1-22\epsilon}$. ■

De maneira semelhante podemos provar

Afirmação 5.63 *Existe uma combinação especial* $y^* = \sum_1^m b_j y_j^*$, *tal que*

$$5\alpha \leq |y^*(u_1 + u_2 - u_3 + u_4 + u_5)| \leq 5\alpha\frac{1 + 3\epsilon}{1 - 22\epsilon}.$$

Sejam

$$\mathbf{x}^* = \sum_{\mathbf{i}=1}^{\mathbf{n}} \mathbf{a_i x_i^*} \quad \text{como na Afirmação 5.62}$$

e

$$\mathbf{y}^* = \sum_{\mathbf{j}=1}^{\mathbf{m}} \mathbf{b_j y_j^*} \quad \text{como na Afirmação 5.63.}$$

Então temos quatro casos de sinais dos números reais $x^*(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5)$ e $y^*(u_1 + u_2 - u_3 + u_4 + u_5)$ a considerar. Analisaremos o caso no qual ambos são positivos, isto é,

$$\mathbf{5\alpha \leq x^*(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5) \leq 5\alpha\frac{1 + 3\epsilon}{1 - 22\epsilon}}$$

e

$$\mathbf{5}\alpha \leq \mathbf{y}^*(\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} - \mathbf{u_3} + \mathbf{u_4} + \mathbf{u_5}) \leq \mathbf{5}\alpha\frac{\mathbf{1} + \mathbf{3}\epsilon}{\mathbf{1} - \mathbf{22}\epsilon}.$$

Os outros casos são semelhantes.

Definamos agora medidas de probabilidade μ e ν sobre $\{1, ..., n\}$ e $\{1, ..., m\}$ por $\mu(A) = \sum_{t\in A} a_t^2$ e $\nu(B) = \sum_{s\in B} b_s^2$, onde

$$a_t \in \{a_1, ..., a_n\} \quad \text{com} \quad x^* = \sum_1^n a_i x_i^*$$

e

$$b_s \in \{b_1, ..., a_m\} \quad \text{com} \quad y^* = \sum_1^m b_j y_j^*.$$

Afirmação 5.64 *Sejam* $[n] = \{1, ..., n\}$, $\sum_1^n a_i^2 = 1$ *e* $A \subset [n]$. *Então*

$$\mu : [n] \to \mathbf{R}, \quad \mu(A) = \sum_{i\in A} a_i^2 \quad \textit{é uma medida.}$$

Prova: De fato,

$$\mu(\phi) = \sum_{i\in\phi} a_i^2 = 0 \quad \text{e} \quad \mu([n]) = \sum_1^n a_i^2 = 1.$$

Agora se $B = \cup_{n\in N} A_n$, então

$$\begin{aligned}
\mu(B) &= \sum_{i\in B} a_i^2 = \sum_{i\in A_1} a_i^2 + \sum_{i\in A_2} a_i^2 + ... + \sum_{i\in A_{n_1}} a_i^2 + 0 + 0..\\
&= \mu(A_1) + ... + \mu(A_{n_1}) + \mu(\phi) + \mu(\phi) + .. = \sum_{n\in N} \mu(A_n).
\end{aligned}$$

■

De maneira semelhante podemos provar que ν **é uma medida sobre** $\{1, ..., m\}$.

Agora podemos apresentar o 3ºPasso.

3ºPASSO. Seja $\delta = \sqrt{260\epsilon}$. Então existem

$$C \subset \{1, ..., n\} \quad \text{com} \quad \mu(C) \geq 1 - 5\delta$$

e

$$D \subset \{1, ..., m\} \quad \text{com} \quad \nu(D) \geq 1 - 5\delta,$$

tais que $\forall i \in C$ e $\forall j \in D$ temos

$$(1-\sqrt{\delta})a_i\alpha(1+26\epsilon) \leq x_i^*(u_r) \leq (1+\sqrt{\delta})a_i\alpha(1+26\epsilon)$$

e

$$(1-\sqrt{\delta})b_i\alpha(1+26\epsilon) \leq \eta_r y_i^*(u_r) \leq (1+\sqrt{\delta})b_i\alpha(1+26\epsilon).$$

Para fazermos a prova necessitamos das afirmações abaixo. A prova deste passo depende do Lema 1.6 e das Afirmações 5.67 e 5.68.

Afirmação 5.65 $x^*(u_r) \leq \alpha\frac{1+3\epsilon}{1-22\epsilon}$ $\forall r \in \{1, ..., 5\}$.

Prova: Por ser x^* uma combinação especial e pela equações (5.6) e (5.7) temos que

$$x^*(u_r) \leq |x^*(u_r)| \leq |||u_r||| \leq ||u_r|| \leq \alpha\frac{1+3\epsilon}{1-22\epsilon}. \qquad \blacksquare$$

Pela Afirmação 5.65 e por $\alpha\frac{1+3\epsilon}{1-22\epsilon} \leq \alpha(1+26\epsilon)$ temos a seguinte afirmação:

Afirmação 5.66 $x^*(u_r) \leq \alpha(1+26\epsilon)$, $\forall r \in \{1, ..., 5\}$.

Afirmação 5.67 $\alpha(1-104\epsilon) \leq x^*(u_r)$ $\forall r \in \{1, ..., 5\}$.

Prova: Pela Afirmação 5.66

$$\sum_{1\leq i\leq 5}^{i\neq r} x^*(u_r) \leq \sum_{1\leq i\leq 5}^{i\neq r} \alpha(1+26\epsilon).$$

Se existisse $r \in \{1, ..., 5\}$ tal que $x^*(u_r) < \alpha(1-104\epsilon)$, então teríamos que

$$x^*(u_r) + \sum_{1\leq i\leq 5}^{i\neq r} x^*(u_r) < \alpha(1-104\epsilon) + \sum_{1\leq i\leq 5}^{i\neq r} \alpha(1+26\epsilon) = 5\alpha;$$

absurdo, pois estamos supondo que $5\alpha \leq x^*(u_1+u_2+u3+u_4+u_5)$. $\blacksquare$

Afirmação 5.68 $\sum_{i=1}^{n} |x_i^*(u_r)|^2 \leq \alpha^2(1+26\epsilon)^2$.

Prova: Sejam $c = (\sum_{i=1}^{n} a_i|x_i^*(u_r)|^2)^{1/2}$, $d_i = x_i^*(u_r)/c$ e $d = (d_1, ..., d_n)$. Portanto $|d|_{l_2} = 1$. Seja também $z^* = \sum_1^n d_i x_i^*$, logo z^* é uma combinação especial. Então, pela equações (5.6) e (5.7) e pelo fato que $\alpha(1+3\epsilon) < \alpha\frac{1+3\epsilon}{1-22\epsilon} \leq \alpha(1+26\epsilon)$, temos que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i^*(u_r)|^2\right)^{1/2} = \sum_{1}^{n} \frac{|x_i^*(u_r)|^2}{c} \\ &= \sum_{1}^{n} d_i x_i^*(u_r) = z^*(u_r) \\ &= |z^*(u_r)| \leq |||u_r||| \leq ||u_r|| \leq \alpha(1+26\epsilon). \end{aligned}$$

■

PROVA DO 3ºPASSO. Pela Afirmação 5.67 e a definição de x^* acima temos:

$(1-130\epsilon)(1+26\epsilon) \leq \alpha(1-104\epsilon) \leq x^*(u_r) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*(u_r)$. Portanto

$$1 - 130\epsilon \leq \frac{\sum_1^n a_i x_i^*(u_r)}{\alpha(1+26\epsilon)}.$$

Pela Afirmação 5.68 temos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i^*(u_r)|^2}{\alpha^2(1+26\epsilon)^2} \leq 1.$$

Agora, como $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*$ é uma combinação básica especial segue que

$$\sum_{1}^{n} a_i^2 = 1.$$

A existência do conjunto $C \subset \{1, ..., n\}$ segue do Lema 1.6 aplicado uma vez para cada r. Nesse lema tomamos $\epsilon' := 130\epsilon > 0$, $\delta = \sqrt{2\epsilon'}$, $a_i := a_i$, $b_i := \frac{|x_i^*(u_r)|}{\alpha^2(1+26\epsilon)}$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$. As hipótese que precisamos estão dadas pelas três equações seguintes $1 - 130\epsilon \leq \frac{\sum_1^n a_i x_i^*(u_r)}{\alpha(1+26\epsilon)}$, $\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i^*(u_r)|^2}{\alpha^2(1+26\epsilon)^2} \leq 1$ e $\sum_1^n a_i^2 = 1$. Analogamente podemos obter outro conjunto $D \subset \{1, ..., m\}$ satisfazendo o 3ºPasso. ■

5.4 4°Passo.

Como no 2ºPasso $u_1, ..., u_5$ e $v_1, ..., v_{5k}$ são vetores fixos. Voltamos a lembrar, veja o que segue a Afirmação 5.63, que $x^* = \sum_1^n a_i x_i^*$ e $y^* = \sum_1^m b_j y_j^*$ são combinações especiais. Logo cada aplicação especial, veja Definição 1.8.(c), x_i^* é da forma

$\mathbf{E_i(x^*_{i1} + ... + x^*_{ip_i})}$ para alguma seqüência especial de aplicações $\mathbf{x^*_{i1}, ..., x^*_{ip_i}}$,

e para algum E_i intervalo de $\mathbf{N}$ com $E_1 < ... \leq E_i \leq ... < E_n$.

E cada aplicação especial y^*_j é da forma

$\mathbf{F_j(y^*_{j1} + ... + y^*_{jq_j})}$ para alguma seqüência especial de aplicações $\mathbf{y^*_{j1}, ..., y^*_{jq_j}}$,

e para algum F_j intervalo de $\mathbf{N}$ com $F_1 < ... \leq F_j \leq ... < F_m$.

Sejam $i \in C$ e $j \in D$ como no 3ºPasso. Escolhamos

$$\mathbf{k_i \in \{1, ..., p_i\}} \quad \text{o menor inteiro tal que} \quad \mathbf{ran(x^*_{ik_i}) \cap ran(u_5) \neq \phi}.$$

Então

$$ran(x^*_{ik_i}) \cap ran(u_3) \neq \phi \quad \text{ou} \quad ran(x^*_{ik_i}) \cap ran(u_3) = \phi.$$

Definamos

$$\mathbf{C_1 = \{i \in C : ran(x^*_{ik_i}) \cap ran(u_3) \neq \phi\}}.$$

Analogamente coloquemos

$$\mathbf{l_j \in \{1, ..., q_j\}} \quad \text{o menor inteiro tal que} \quad \mathbf{ran(y^*_{jl_j}) \cap ran(u_5) \neq \phi}.$$

Então

$$ran(y^*_{jl_j}) \cap ran(u_5) \neq \phi \quad \text{ou} \quad ran(y^*_{jl_j}) \cap ran(u_5) = \phi.$$

Definamos

$$\mathbf{D_1 = \{j \in D : ran(y^*_{jl_j}) \cap ran(u_3) \neq \phi\}}.$$

4ºPASSO. Sejam μ e ν como na Afirmação 5.64. Então $max\{\mu(C_1), \nu(D_1)\} \leq 1/50$.

Coloquemos $\mathbf{C_2 = \{1, ..., n\} - C_1}$ e $\mathbf{D_2 = \{1, ..., m\} - D_1}$. Então

$$\sum_1^n a_i x^*_i(u_4) = \sum_{i \in C_1} a_i x^*_i(u_4) + \sum_{i \in C_2} a_i x^*_i(u_4).$$

Escrevamos $\mathbf{U_r}$ **para indicar** $ran(u_r)$. A prova deste passo segue da Observação 5.78. Para fazermos a prova do Passo 4 precisamos das afirmações abaixo. O Lema 4.17 é usado na prova da Afirmação 5.70

Afirmação 5.69 *$U_4(\sum_{i\in C_1} a_i x_i^*)$ é igual a $\sqrt{\mu(C_1)}$ multiplicado por uma combinação especial básica.*

Prova: $u_3 < u_4 < u_5$, veja no segue no Lema 5.41. Agora (veja o começo do 4ºPasso) como k_i é o menor inteiro tal que $ran(x_{ik_i}^*) \cap ran(u_5) \neq \phi$ e $ran(x_{ik_i}^*) \cap ran(u_3) \neq \phi$, pois, $i \in C_1$, temos que $U_4(x_i^*) = U_4(x_{ik_i}^*)$.

Como $x_i^* = E_i(x_{i1}^* + ... + x_{ip_i}^*)$ é uma aplicação especial temos que $x_{ik_i}^* \in A_{\sigma(x_{i1}^*,...,x_{i(k_i-1)}^*)}^*$. Portanto

$$U_4\Big(\sum_{i\in C_1} a_i x_i^*\Big) = \sqrt{\mu(C_1)} \sum_{i\in C_1} \frac{a_i}{\sqrt{\mu(C_1)}} U_4(x_{ik_i}^*)$$

é uma combinação especial básica, veja Definição 4.2 (com $E_i = U_4, \quad \forall i \in C_1$), e a Afirmação está provada, pois

$$\sum_{i\in C_1} (\frac{a_i}{\sqrt{\mu(C_1)}})^2 = \sum_{i\in C_1} \frac{a_i^2}{\mu(C_1)} = 1,$$

pela definição de μ dada no 3ºPasso. ∎

Afirmação 5.70 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então*

$$\Big|\sum_{i\in C_1} a_i x_i^*(u_4)\Big| \leq \sqrt{\mu(C_1)}\Big[\frac{||u_4||}{10^{100}} + \frac{4N}{5f(N/5)}\Big].$$

Prova: Observemos que u_4 satisfaz as condições do Lema 4.17 (substituindo $N/5$ por M e M por l). Logo pela Afirmação 5.69 e pelo Lema 4.17 obtemos

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{i\in C_1} a_i x_i^*(u_4)\Big| &= \Big|U_4\Big(\sum_{i\in C_1} a_i x_i^*(u_4)\Big)\Big| = \Big|\sqrt{\mu(C_1)} \sum_{i\in C_1} \frac{a_i}{\sqrt{\mu(C_1)}} U_4(x_i^*(u_4))\Big| \\ &\leq \sqrt{\mu(C_1)}\Big[\frac{||u_4||}{10^{100}} + \frac{4N}{5f(N/5)}\Big].\end{aligned}$$ ∎

Observação 5.71 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então $||u_4|| \geq 20\frac{Nf(M)}{f^2(N)}(1 - 130\epsilon)$.*

Prova: Pela Afirmação 5.59 e a definição de α dada antes da equação (5.7) temos

$$\begin{aligned} ||u_4|| &\geq |||u_4||| \geq \alpha(1-104\epsilon) \\ &= (1-22\epsilon)20\frac{Nf(M)}{f^2(N)}(1-104\epsilon) \\ &\geq 20\frac{Nf(M)}{f^2(N)}(1-130\epsilon). \end{aligned}$$

■

Escolhamos $a > 1$ tal que $a^2 \log_2 5 < (a^2-1)10^{100}$ e $\frac{1}{1-130\epsilon} < a$. No 1ºPasso mostramos, Observação 5.6 que existe $N \in \mathbf{N}$ tal que $20\exp(\sqrt{\log M}) \leq N \leq M$. Isto sera útil na seguinte afirmação.

Afirmação 5.72 $|\sum_{i\in C_1} a_i x_i^*(u_4)| \leq \sqrt{\mu(C_1)}\left[\frac{||u_4||}{10^{100}} + \frac{a^2}{25}||u_4||\right]$.

Para fazermos a prova desta afirmação necessitamos das seguintes observações.

Observação 5.73 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < ... < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então*

$$a^2 log_2 5 < (a^2-1)10^{100} < (a^2-1)log_2(N+1).$$

Prova: Como $10^{100} \leq \sqrt{\log M} \leq \ln N < log_2 N$ segue que

$$a^2 log_2 5 < (a^2-1)10^{100} < (a^2-1)\log_2(N+1),$$

pela escolha de a acima. ■

Observação 5.74 $f^2(N) \leq a^2 f^2(N/5)$.

Prova: Pela Observação 5.73 temos

$$f^2(N) = log_2(N+1) \leq a^2[log_2(N+1) - log_2 5] < a^2 log_2\frac{N+5}{5} = a^2 f^2(N/5).$$ ■

Observação 5.75

$$\frac{1}{100(1-130\epsilon)}\frac{f^2(N)}{f(M)f(N/5)} < \frac{a^2}{100}.$$

Prova: Pela Observação 5.74 temos

$$\frac{1}{100(1-130\epsilon)}\frac{f^2(N)}{f(M)f(N/5)} < \frac{a}{100}\frac{f(N)}{f(N/5)} < \frac{a}{100}a = \frac{a^2}{100}.$$ ■

Observação 5.76 *Sejam $M \in \mathbf{J}$ e $x_1 < \ldots < x_M$ uma S.R.C de comprimento M com constante $3/2$ como no Lema 5.1. Então $\frac{4N}{5f(N/5)} \le \frac{a^2}{25}||u_4||$.*

Prova: Pela Afirmação 5.59 e pela Observação 5.75 temos

$$\begin{aligned}
\frac{4N}{5f(N/5)}\frac{||u_4||}{||u_4||} &\le ||u_4||\frac{4N}{5f(N/5)}\frac{f^2(N)}{20Nf(M)(1-130\epsilon)} \\
&= \frac{4}{100}\frac{1}{1-130\epsilon}\frac{f^2(N)}{f(M)f(N/5)}||u_4|| \\
&\le \frac{4a^2}{100}||u_4|| = \frac{a^2}{25}||u_4||.
\end{aligned}$$ ■

Prova da Afirmação 5.72. Pela Afirmação 5.70 e pela Observação 5.76 temos

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i\in C_1} a_i x_i^*(u_4)\right| &\le \sqrt{\mu(C_1)}\left[\frac{||u_4||}{10^{100}} + \frac{4N}{5f(N/5)}\right] \\
&\le \sqrt{\mu(C_1)}\left[\frac{||u_4||}{10^{100}} + \frac{a^2}{25}||u_4||\right].
\end{aligned}$$ ■

Como $\sum_{i\in C_2} \frac{a_i^2}{[\sqrt{\mu(C_2)}]^2} = \sum_{i\in C_2} \frac{a_i^2}{\sum_{i\in C_2} a_i^2} = 1$, segue que $\sum_{i\in C_2} \frac{a_i}{\sqrt{\mu(C_2)}} x_i^*$ é uma combinação básica especial. Isto será útil na Afirmação 5.77.

Afirmação 5.77 $\left|\sum_{i\in C_2} a_i x_i^*(u_4)\right| \le \sqrt{\mu(C_2)}||u_4||$.

Prova: Como $\sum_{i\in C_2} \frac{a_i}{\sqrt{\mu(C_2)}} x_i^*$ é uma combinação básica especial temos, pela equação (5.2), que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i\in C_2} a_i x_i^*(u_4)\right| &= \sqrt{\mu(C_2)}\left|\sum_{i\in C_2} \frac{a_i}{\sqrt{\mu(C_2)}} x_i^*(u_4)\right| \\
&\le \sqrt{\mu(C_2)}|||u_4||| \\
&\le \sqrt{\mu(C_2)}||u_4||.
\end{aligned}$$ ■

Para a próxima observação notemos que pelo 3ºPasso temos

$$\begin{aligned}
||u_4|| &\leq (1+3\epsilon)20N\frac{f(M)}{f^2(N)} = \frac{(1+3\epsilon)\alpha}{1-22\epsilon} \\
&\leq (1+26\epsilon)\alpha = \alpha + 26\epsilon\alpha \leq \alpha + \frac{26\epsilon\alpha}{1-130\epsilon} = \frac{(1-104\epsilon)\alpha}{1-130\epsilon} \\
&\leq \frac{x^*(u_4)}{1-130\epsilon} = \sum_1^n \frac{a_i x_i^*(u_4)}{1-130\epsilon}.
\end{aligned}$$

Afirmação 5.78 $(1-130\epsilon) \leq \sqrt{\mu(C_1)}/20 + \sqrt{\mu(C_2)}$.

Prova: Pela comentário acima e as definições de C_1 e C_2 no começo desta seção temos

$$\begin{aligned}
(1-130\epsilon)||u_4|| &\leq \sum_1^n a_i x_i^*(u_4) \leq \sum_{i\in C_1} a_i x_i^*(u_4) + \sum_{i\in C_2} a_i x_i^*(u_4) \\
&= \sqrt{\mu(C_1)}\left[\frac{||u_4||}{10^{100}} + \frac{a^2}{25}||u_4||\right] + \sqrt{\mu(C_2)}||u_4||.
\end{aligned}$$

Agora basta tomarmos $a > 1$ tal que $10^{-100} + \frac{a^2}{25} < \frac{1}{20}$, $\frac{1}{1-130\epsilon} < a$ $(\epsilon = 10^{-50})$ e $a^2 log_2 5 < (a^2-1)10^{100}$ (Podemos tomar $a = 1 + 10^{-5}$ por exemplo). Logo $(1-130\epsilon) \leq \sqrt{\mu(C_1)}/20 + \sqrt{\mu(C_2)}$. ■

Para a prova do 4ºPasso lembremos $C_1 = \{i \in \{1,...,n\} : ran(x^*_{ik_i}) \cap ran(u_3) \neq \phi\}$ (veja o começo da seção) e $C_2 := \{1,...,n\} - C_1$.

PROVA DO 4ºPASSO : Claramente temos que $\mu(C_2) + \mu(C_1) = 1$. Suponhamos $\mu(C_1) > \frac{1}{50}$, então $\mu(C_2) \leq \frac{49}{50}$. Pois $\frac{49}{50} < \mu(C_2)$ implica $1 = \frac{49}{50} + \frac{1}{50} < \mu(C_2) + \mu(C_1) = 1$; absurdo. Portanto $\mu(C_2) \leq \frac{49}{50}$.

logo, pela,Afirmação 5.78 temos

$$(1-130\epsilon) \leq \frac{\sqrt{\mu(C_1)}}{20} + \sqrt{\mu(C_2)} \leq \frac{\sqrt{\mu(C_1)}}{20} + \frac{99}{100},$$

isto é

$$(1-130\epsilon) \leq \frac{1}{20\sqrt{50}} + \frac{99}{100} = \frac{1}{100\sqrt{2}} + \frac{99}{100}.$$

como $\epsilon = 10^{-50}$ (equação (5.3)), segue que $\sqrt{2} < 1 + \frac{1}{10^{44}}$; absurdo. Portanto $\mu(C_1) \leq \frac{1}{50}$. Similarmente podemos mostrar que $\nu(D_1) \leq \frac{1}{50}$. ■

5.5 5°Passo.

Como no 2ºPasso $u_1, ...u_5$ e $v_1, ...v_{5k}$ são vetores fixos . Sejam $x^* = \sum_{i=1}^n a_i x_i^*$ e $y^* = \sum_{j=1}^n b_j y_j^*$ como indicados após a Afirmação 5.63. Lembremos, veja o começo do 4ºPasso, que x_i^* é da forma $E_i(x_{i1}^* + ... + x_{ip_i}^*)$ para alguma seqüência especial de aplicações, $x_{i1}^*, ..., x_{ip_i}^*$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$. E cada y_j^* é da forma $F_j(y_{j1}^* + ... + y_{jp_j}^*)$ para alguma seqüência especial de aplicações, $y_{j1}^*, ..., y_{jp_j}^*$, $\forall j \in \{1, ..., m\}$. k_i o menor inteiro tal que $ran(x_{ik_i}^*) \cap ran(u_5) \neq \phi$. $C_1 = \{i : ran(x_{ik_i}^*) \cap ran(u_3) \neq \phi\}$. l_j menor inteiro tal que $ran(y_{jl_j}^*) \cap ran(u_5) \neq \phi$. $D_1 = \{j : ran(y_{jl_j}^*) \cap ran(u_3) \neq \phi\}$. $C_2 = \{1, ..., n\} - C_1$, $D_2 = \{1, ..., m\} - D_1$.

5ºPASSO. Sejam C e D como no 3ºPasso e também μ e ν como na Afirmação 5.64. Então existem $C_3 \subset C \cap C_2$ e $D_3 \subset D \cap D_2$ tal que

$$\min\{\mu(C_3), \nu(D_3)\} > 19/20$$

e existe uma bijeção

$$\phi : C_3 \to D_3$$

tal que para cada $i \in C_3$ os funcionais especiais $U_5 x_i^*$ e $U_5 y_j^* U_5 y_{\phi(i)}^*$ são não disjuntos, isto é, admitem conjuntos associados não disjuntos.

Para fazer a prova deste passo precisamos das 18 afirmações abaixo. A prova do 5ºPasso será consequência das Afirmação 5.90, 5.91 e 5.96.

Afirmação 5.79 *Podemos assumir que* $a_i > 0$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$ *e também que* $b_j > 0$, $\forall j \in \{1, ..., m\}$

Prova: Coloquemos $H = \{i : a_i < 0\}$, $\bar{H} = \{i : a_i = 0\}$, $H^c = \{i : a_i > 0\}$, $h_i = a_i$ se $a_i > 0$, $h_i = -a_i$ se $a_i < 0$, $z_i = x_i^*$ se $a_i > 0$ e $z_i = -x_i^*$ se $a_i < 0$. Então

$$\begin{aligned} x^* &= \sum_1^n a_i x_i^* = \sum_{i \in H} a_i x_i^* + \sum_{i \in \bar{H}} a_i x_i^* + \sum_{i \in H^c} a_i x_i^* \\ &= \sum_{i \in H} (-a_i)(-x_i^*) + \sum_{i \in H^c} a_i x_i^* \\ &= \sum_{i \in H} h_i z_i + \sum_{i \in H^c} h_i z_i = \sum_1^{n^*} h_i z_i, \end{aligned}$$

com $h_i > 0$, $i = 1, ..., n^* \leq n$. Claramente

$$x^* = \sum_1^{n^*} h_i z_i \quad \text{tem as mesmas propriedades que} \quad x^* = \sum_1^{n} a_i x_i^*. \qquad \blacksquare$$

Afirmação 5.80 *Sejam $x^* = \sum_{i=1}^n a_i x_i^*$ como no que segue a Afirmação 5.63 e C como no 3º Passo. Se $i \in C$, então*

$$x_i^*(u_r) > 0, \quad \forall r \in \{1, ..., 5\}.$$

Prova: Pelo Passo 3 e a Afirmação 5.79 temos que

$$0 < (1 - \sqrt{d}) a_i \alpha (1 + 5\epsilon) \leq x_i^*(u_r), \quad \forall i \in C, \quad \forall r \in \{1, ..., 5\}. \qquad \blacksquare$$

Afirmação 5.81 *Seja $x^* = \sum_{i=1}^n a_i x_i^*$ como no que segue a Afirmação 5.63 e seja C como no 3º Passo. Se $i \in C$, então*

$$ran(x_i^*) \cap ran(u_r) \neq \phi, \quad \forall i \in C \quad \forall r \in \{1, ..., 5\}.$$

Prova: Se $ran(x_i^*) \cap ran(u_r) = \phi$ para algum $i \in C$ e para algum $r \in \{1, ..., 5\}$, então $x_i^*(u_r) = 0$; absurdo com relação a Afirmação 5.80. $\blacksquare$

Analogamente temos

Afirmação 5.82 *Seja $y^* = \sum_{j=1}^n b_j y_j^*$ como após da Afirmação 5.63 e seja D como no 3º Passo. Se $j \in D$, então*

$$ran(y_j^*) \cap ran(u_r) \neq \phi, \quad \forall j \in D \quad \forall r \in \{1, ..., 5\}.$$

Lembremos, veja o começo desta seção, que k_i é o menor inteiro tal que $ran(x_{ik_i}^*) \cap ran(u_5) \neq \phi$, $\forall i \in \{1, ..., n\}$.

Afirmação 5.83 *Seja $x^* = \sum_{i=1}^n a_i x_i^*$ como no que segue a Afirmação 5.63 e seja C como no 3º Passo. Se $i \in C \cap C_2$, então*

$$ran(x_{ik_i}^*) \cap ran(u_3) = \phi \quad e \quad ran(x_i^*) \cap ran(u_3) \neq \phi.$$

Prova: Como C_2 é o complementar de C_1 temos que se $i \in C \cap C_2$, então $i \in C$ e $i \notin C_1$. Agora notemos que $i \notin C_1$ implica $ran(x^*_{ik_i}) \cap ran(u_3) = \phi$, mas como $i \in C$ temos, pela Afirmação 5.81, que $ran(x^*_i) \cap ran(u_r) \neq \phi$. ∎

Como $x^*_i = E_i(x^*_{i1} + ... + x^*_{ip_i})$ e, além disso, se $i \in C \cap C_2$ então pela Afirmação 5.83 $ran(x^*_i) \cap ran(u_3) \neq \phi$, concluímos que

$$\text{se} \quad i \in C \cap C_2, \quad \text{então} \quad ran(E_i x^*_{is}) \cap ran(u_3) \neq \phi \quad \text{para algum} \quad s \in \{1, ..., p_i\}.$$

Afirmação 5.84 *Seja $x^* = \sum_{i=1}^n a_i x^*_i$ como no que segue a Afirmação 5.63 e seja C como no 3ºPasso. Se $i \in C \cap C_2$ então $E_i(x^*_{i(k_i-1)}) \neq 0$.*

Prova: Coloquemos $B = \{s : 1 \leq s \leq p_i, \quad ran(E_i x^*_{is}) \cap ran(u_3) \neq \phi\}$. Logo, pelo comentário acima $B \neq \phi$. Seja $t = \min B$. Como, veja no que segue no Lema 5.41, $u_3 < u_5$, temos pela definição de k_i dada no começo desta seção, que $t < k_i$. Portanto $t \leq k_i - 1$.

Como, pela Afirmação 5.80, $0 < x^*_i(u_5)$, $x^*_i = E_i(x^*_{i1} + ... + x^*_{ip_i})$ e pela definição de k_i, veja o começo do 5ºPasso, $ran(x^*_{ik_i}) \cap ran(u_5) \neq \phi$, segue que $E_i x^*_{ik_i}(u_5) \neq 0$. Logo $E_i x^*_{ik_i} \neq 0$. Também pela definição de B e t temos que $E_i x^*_{it} \neq 0$.

Portanto $E_i x^*_{it} \neq 0$, $E_i x^*_{ik_i} \neq 0$ e $t \leq k_i - 1$. Como E_i é um intervalo e $x^*_{it} < ... < x^*_{i(k_i-1)} < x^*_{ik_i}$, obtemos que $E_i(x^*_{i(k_i-1)}) \neq 0$. ∎

Lembremos, veja comentários antes da Afirmação 5.69, que $U_5 = ran(u_5)$ com u_5 como no começo do 2ºPasso. Na Afirmação 5.85 precisamos da Definição 4.1 e dos comentários feitos no começo do 5ºPasso sobre x^*_i.

Afirmação 5.85 *Seja $x^* = \sum_{i=1}^n a_i x^*_i$ como no que segue a Afirmação 5.63 e seja C como no 3ºPasso. Se $i \in C \cap C_2$ então o conjunto associado a $U_5 x^*_i$ está univocamente determinado.*

Prova: Como $x^* = \sum_{i=1}^n a_i x^*_i$ é uma combinação básica, temos que $x^*_i = E_i(x^*_{i1} + ... + x^*_{ip_i})$ é uma aplicação especial. Logo, veja Definição 1.8(d), existe uma seqüência de inteiros $n_1, ..., n_{p_i} \in \mathbf{J}$ tal que $x^*_{i1} \in A^*_{n_1}$ e $n_j = \sigma(x^*_{i1}, ..., x^*_{i,j-1})$, para $2 \leq j \leq n_{p_i}$.

O primeiro inteiro n_1 não está necessariamente univocamente determinado, pois x_{i1}^* poderia ser escrito de várias maneiras, mas $n_2, ..., n_{p_i}$ estão univocamente determinados pois a função σ é injetora, veja Proposição 1.6.

Tomemos $Z \subset J$ um conjunto associado a x_i^* e uma seqüência $n_1, ..., n_{p_i}$, associada à seqüência $x_{i1}^*, ..., x_{ip_i}^*$. Z consiste dos n_j tais que $E_i \cap ran(x_{ij}^*) \neq \phi$.

Agora

$$U_5 x_i^* = U_5 E_i (x_{ik_i}^* + ... + x_{ip_i}^*),$$

com k_i, veja o começo do 5ºPasso, o menor inteiro tal que $ran(x_{ik_i}^*) \cap ran(u_5) \neq \phi$ e $U_5 := ran(u_5)$, veja o que antecede a Afirmação 5.69.

Como $i \in C$ temos, pela Afirmação 5.80, que $0 < x_i^*(u_5)$, logo $U_5 E_i \cap ran(x_{ik_i}^*) \neq \phi$, conseqüentemente o conjunto associado a $U_5 x_i^* \neq \phi$ e n_1 não pertencem a este conjunto associado, pois, Afirmação 5.84 se $i \in C \cap C_2$ então $E_i(x_{ik_{i-1}}^*) \neq 0$. Logo $k_i \neq 1$ ($k_i = 1$ implica x_{i0}^* não tem sentido) e disto o conjunto associado de $U_5 x_i^*$ está univocamente determinado por estar contido em $\{n_2, ..., n_{p_i}\}$ que é um conjunto univocamente determinado. ■

Coloquemos $\mathbf{C_4} = \{\mathbf{i} \in \mathbf{C} \cap \mathbf{C_2} : \mathbf{U_5 x_i^*}$ e $\mathbf{U_5 y_j^*}$ são disjuntos, $\forall \mathbf{j} \in \mathbf{D} \cap \mathbf{D_2}\}$,

veja C_3 antes da Afirmação 5.90.

Afirmação 5.86 *Seja $x^* = \sum_{i=1}^n a_i x_i^*$ como no que segue a Afirmação 5.63. Então $\sum_{i \in C_4} |x_i^*(u_5)|^2 + \sum_{j \in D \cap D_2} |y_j^*(u_5)|^2 \leq ||u_5||^2$.*

Prova: Como, Definição 4.1, os x_i^* são dois a dois disjuntos segue que os $U_5 x_i^*$ são disjuntos, analogamente os $U_5 y_j^*$ são disjuntos, portanto

$$\{\cup_{i \in C_4} U_5 x_i^*\} \cup \{\cup_{j \in D \cap D_2} U_5 y_j^*\}$$

é uma seqüência de a.e.d, veja Definição 1.8(e). Logo, como $U_5 = ran(u_5)$, temos, raciocinando como na prova da Observação 4.16, que

$$\sum_{i \in C_4} |x_i^*(u_5)|^2 + \sum_{j \in D \cap D_2} |y_j^*(u_5)|^2 =$$
$$\sum_{i \in C_4} |U_5 x_i^*(u_5)|^2 + \sum_{j \in D \cap D_2} |U_5 y_j^*(u_5)|^2 \leq ||u_5||^2.$$ ■

Lembremos, veja o que antecede a Afirmação 5.64, que $\mu(C_4) = \sum_{i\in C_4} a_i^2$.

Afirmação 5.87 *Sejam C e D como no 3º Passo. Então*

$$(1-\sqrt{d})^2(1+26\epsilon)^2\alpha^2\mu(C_4) + (1-\sqrt{d})^2(1+26\epsilon)^2\alpha^2\nu(D\cap D_2) \leq \alpha^2(1+26\epsilon)^2.$$

Prova: Pela prova da Afirmação 5.80 temos que

$$0 < (1-\sqrt{d})a_i\alpha(1+26\epsilon) \leq x_i^*(u_5), \quad \forall i \in C,$$

logo

$$\sum_{i\in C_4}(1-\sqrt{d})^2 a_i^2\alpha^2(1+26\epsilon)^2 \leq \sum_{i\in C_4}|x_i^*(u_5)|^2.$$

Analogamente

$$\sum_{j\in D\cap D_2}(1-\sqrt{d})^2 b_j^2\alpha^2(1+26\epsilon)^2 \leq \sum_{j\in D\cap D_2}|y_i^*(u_5)|^2.$$

Portanto, pela equação $(5,7)$, pelo comentário feito antes da Afirmação 5.66 e pela Afirmação 5.86, temos

$$(1-\sqrt{d})^2(1+26\epsilon)^2\alpha^2\mu(C_4) + (1-\sqrt{d})^2(1+26\epsilon)^2\alpha^2\nu(D\cap D_2) \leq$$
$$\sum_{i\in C_4}|x_i^*(u_5)|^2 + \sum_{j\in D\cap D_2}|y_j^*(u_5)|^2 \leq ||u_5||^2 \leq \alpha^2(1+26\epsilon)^2.$$ ∎

Afirmação 5.88 *Seja μ como na Afirmação 5.64. Então*

$$(1-\sqrt{d})^2\mu(C_4) + (1-5d-\frac{1}{50})(1-\sqrt{d})^2 \leq 1.$$

Prova: Pela Afirmação 5.87 obtemos que

$$(1-\sqrt{d})^2\mu(C_4) + (1-\sqrt{d})^2\nu(D\cap D_2) \leq 1.$$

E pelo 3º Passo $1-5d \leq \nu(D)$, Mas $D_1 \cup D_2 = \{1,...,m\}$ e $D_1 \cap D_2 = \phi$, veja o começo do 5º Passo. Logo

$$\nu(D) = \nu(D\cap D_1) + \nu(D\cap D_2) \leq \nu(D_1) + \nu(D\cap D_2) \leq \frac{1}{50} + \nu(D\cap D_2),$$

isto é, $1-5d-\frac{1}{50} \leq \nu(D\cap D_2)$. Portanto

$$(1-\sqrt{d})^2\mu(C_4)+(1-5d-1/50)(1-\sqrt{d})^2 \leq 1. \qquad \blacksquare$$

Afirmação 5.89 *Seja μ como na Afirmação 5.64. Então $\mu(C_4) < \frac{1}{40}$.*

Prova: Coloquemos $1-a=(1-\sqrt{d})^2$. Como $d=(\frac{260}{10^{50}})^{1/2} < \frac{1}{10^{23}}$, veja 3ºpasso, concluímos que

$$a = 2\sqrt{d} - d < \frac{2}{10^{11}} - d < \frac{2}{10^{11}}.$$

Mas pela Afirmação 5.88 temos que

$$(1-a)\mu(C_4) + (1-a)(1-5d-\frac{1}{50}) \leq 1,$$

logo $(1-a)\mu(C_4) \leq (1-a)5d + (1-a)/50 + a$. Portanto

$$\begin{aligned} \mu(C_4) &\leq 5d + \frac{1}{50} + \frac{a}{1-a} < \frac{5}{10^{23}} + \frac{1}{50} + \frac{1}{1000} \\ &< \frac{1}{1000} + \frac{1}{50} + \frac{1}{1000} = \frac{22}{1000} < \frac{25}{1000} = \frac{1}{40}. \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Coloquemos $\mathbf{C_3} = \mathbf{C} \cap \mathbf{C_2} \cap \mathbf{C_4^c}$.

Afirmação 5.90 *Seja μ como na Afirmação 5.64. Então $\mu(C_3) \geq 19/20$.*

Prova: Pelo 3ºPasso e pelo 4ºPasso temos que

$$\begin{aligned} 1-5d &\leq \mu(C) = \mu(C\cap C_1) + \mu(C \cap C_2) \\ &\leq \mu(C_1) + \mu(C\cap C_2) < \frac{1}{50} + \mu(C\cap C_2). \end{aligned}$$

Logo, pela Afirmação 5.89, temos que

$$\begin{aligned} 1-5d-\frac{1}{50} &\leq \mu(C\cap C_2) = \mu(C\cap C_2 \cap C_4) + \mu(C\cap C_2\cap C_4^c) \\ &\leq \mu(C_4) + \mu(C\cap C_2\cap C_4^c) < \frac{1}{40} + \mu(C_3). \end{aligned}$$

Consequentemente $\frac{19}{20} < 1 - \frac{1}{40} - \frac{1}{50} - 5d < \mu(C_3)$. $\blacksquare$

Similarmente temos:

Afirmação 5.91 $\nu(D_3) \geq 19/20$.

Lembremos

$C \subset \{1, ..., n\}$ é o conjunto C mencionado no 3ºPasso.

$D \subset \{1, ..., m\}$ é o conjunto D mencionado no 3ºPasso.

$C_1 := \{i \in C : ran(x^*_{ik_i}) \cap ran(u_3) \neq \phi\}$.

$D_1 := \{j \in D : ran(y^*_{jl_j}) \cap ran(u_3) \neq \phi\}$.

$C_2 := \{1, ..., n\} \cap C_1^c$.

$D_2 := \{1, ..., m\} \cap D_1^c$.

$C_4 := \{i \in C \cap C_2 : U_5 x^*_i \cap U_5 y^*_j = \phi \quad \forall j \in D \cap D_2\}$.

$D_4 := \{j \in D \cap D_2 : U_5 x^*_i \cap U_5 y^*_j = \phi \quad \forall i \in C \cap C_2\}$.

$C_3 := C \cap C_2 \cap C_4^c = \{i \in C \cap C_2 : U_5 x^*_i \cap U_5 y^*_j \neq \phi \quad \exists j \in D \cap D_2\}$.

$D_3 := D \cap D_2 \cap D_4^c = \{j \in D \cap D_2 : U_5 x^*_i \cap U_5 y^*_j \neq \phi \quad \exists i \in C \cap C_2\}$.

Afirmação 5.92 *Para cada $i \in C_3$ existe algum $j \in D \cap D_2$ tal que os conjuntos associados de $U_5 x^*_i$ e $U_5 y^*_j$ são não disjuntos.*

Prova: Seja $i \in C_3$. Como $y^* = \sum_1^m b_j y^*_j$ é uma combinação especial, segue que $y^*_1, ..., y^*_m$ é uma seqüência de a.e.d, isto é, os conjuntos $Z_1, ..., Z_m$ associados à seqüência $y^*_1, ..., y^*_m$ são disjuntos. Portanto a restrição dos mesmas à seqüência $U_5 y^*_1, ..., U_5 y^*_m$, também é disjunta e como $U_5 x^*_i \cap U_5 y^*_j \neq \phi$, $\exists j \in D \cap D_2$, pois $i \in C_3$, segue que os conjuntos associados à $U_5 x^*_i$ e $U_5 y^*_j$ também são não disjuntos. ∎

Analogamente provamos

Afirmação 5.93 *Para cada $j \in D_3$ existe algum $i \in C \cap C_2$ tal que os conjuntos associados $U_5 y^*_j$ e $U_5 x^*_i$ são não disjuntos.* ∎

Afirmação 5.94 *Para cada $i \in C_3$ existe um único $j \in C \cap C_2$ tal que os conjuntos associados $U_5 x^*_i$ e $U_5 y^*_j$ são não disjuntos.*

Prova: Lembremos que $x^* = \sum_1^n a_i x^*_i$ é uma combinação especial. Logo, $x^*_i, ..., x^*_n$ é uma seqüência de a.e.d. Portanto $\forall i \in \{1, ..., n\}$, $\exists p_i \in \mathbf{N}$ tal que $x^*_i = E_i(x^*_{i1} + ... + x^*_{ip_i})$ para alguma seqüência especial de aplicações $x^*_{i1}, ..., x^*_{ip_i}$, para as quais associamos uma seqüência de inteiros $n_1, n_2, ..., n_{p_i} \in \mathbf{J}$, tais que $n_s =$

$\sigma(x_{i1}^*, ..., x_{i(s-1)}^*)$, $\forall s \in \{2, ..., p_i\}$, onde σ é a bijeção entre $\mathbf{Q}_s$ e $\mathbf{J}$ fixada na Proposição 1.6.

Seja Z_i o conjunto associado à $U_5 x_i^*$, veja Afirmação 5.85. Escrevamos

$$Z_i = \{n_s : U_5 E_i \cap ran(x_{is}^*) \neq \phi, \quad x_{is}^* \in A_{n_s}^*(X) \quad 2 \leq s \leq p_i\},$$

pois como vimos na prova da 5.85 $n_1 \notin Z_i$.

Analogamente $y^* = \sum_1^n b_j y_j^*$ é uma combinação especial. Logo $y_j^*, ..., y_m^*$ é uma seqüência de a.e.d. Portanto, $\forall j \in \{1, ..., m\}$, $\exists q_j \in \mathbf{N}$ tal que $y_j^* = F_i(y_{j1}^* + ... + x_{jq_j}^*)$ para alguma seqüência especial de aplicações $y_{j1}^*, ..., x_{jq_j}^*$.

Suponhamos que i estivesse "associado" à j_1 e à j_2 com $j_1 < j_2$. Então $y_{j_1}^* < y_{j_2}^*$ e existiriam $n_{s_1} < n_{s_2} \in Z_i$ tais que n_{s_1} pertence ao conjunto associado à $U_5 y_{j_1}^*$ e n_{s_2} pertence ao conjunto associado à $U_5 y_{j_2}^*$.

Mas, pela Definição 1.8(b)(3) e como $x_{is_1}^* \in A_{n_{s_1}}^*(X)$, temos que $n_{s_1} = \sigma(x_{i1}^*, ..., x_{i(s_1-1)}^*)$ e $n_{s_2} = \sigma(x_{i1}^*, ..., x_{i(s_1-1)}^*, ..., x_{i(s_2-1)}^*)$.

Agora n_{s_1} também pertence ao conjunto associado à $U_5 y_{j_1}^*$ e σ é injetora (Proposição 1.6), logo para algum $j_1 s_1 \in \{j_1 1, ..., j_1 q_{j_1}\}$, com $j_1 \in \{1, ..., m\}$, temos que $y_{j_1 s_1}^* = (x_{i1}^* + ... + x_{i(s_1-1)}^*)/f(s_1 - 1)$, veja toda a Definição 1.8.

Analogamente para algum $j_2 s_2 \in \{j_2 1, ..., j_2 q_{j_2}\}$, com $j_2 \in \{1, ..., m\}$ temos que $y_{j_2 s_2}^* = (x_{i1}^* + ... + x_{i(s_2-1)}^*)/f(s_2 - 1)$; absurdo pois $y_{j_1}^* < y_{j_2}^*$. ∎

Analogamente obtemos .

Afirmação 5.95 *Para cada $j \in D_3$ existe um único $i \in D \cap D_2$ tal que os conjuntos associados à $U_5 y_j^*$ e $U_5 x_i^*$ são não disjuntos.*

Afirmação 5.96 *Existe uma bijeção $\phi : C_3 \to D_3$ tal que para cada $i \in C_3$ os funcionais especiais $U_5 x_1^*$ e $U_5 y_{\phi(i)}^*$ possuem conjuntos associados não disjuntos.*

Prova: Segue diretamente das Afirmações 5.92, 5.93, 5.94 e 5.95. ∎

PROVA DO 5ºPASSO: Segue imediatamente das Afirmações 5.90, 5.91 e 5.96. ∎

5.6 6°Passo.

Como no 2ºPasso $u_1, ...u_5$ e $v_1, ...v_{5k}$ são vetores fixos. Lembremos, veja o começo do 4ºpasso, que $x_i^* = E_i(x_{i1}^* + ... + x_{ip_i}^*)$ para alguma seqüência especial de aplicações $x_{i1}^*, ..., x_{ip_i}^*$ Analogamente $y_j^* = F_j(y_{j1}^* + ... + y_{jp_i}^*)$ para alguma seqüência especial de aplicações $y_{j1}^*, ..., y_{jq_j}^*$.

Também k_i é o menor inteiro tal que $ran(x_{ik_i}^*) \cap ran(u_5) \neq \phi$ ($k_i > 0$, veja a Afirmação 5.80) e l_j é o menor inteiro tal que $ran(y_{jl_j}^*) \cap ran(u_5) \neq \phi$, (analogamente $l_j > 0$ veja o começo do 4ºPasso.

6ºPASSO. Sejam $\phi : C_3 \to D_3$ como na Afirmação 5.95 e $V = ran(u_2 + u_3)$. Se $i \in C_3$, então $V_{x_i^*} = V_{y_{\phi(i)}^*}$.

Coloquemos $j = \phi(i)$. Vimos na Afirmação 5.84 que $E_i x_{i(k_i-1)}^* \neq \phi$ e analogamente $F_j y_{j(l_j-1)}^* \neq \phi$, onde $y_j^* = F_j(y_{j1}^* + ... + y_{jq_j}^*)$.

Denotemos por $\{x_i^*\}$ **um conjunto associado à** x_i^*, $\forall i \in \{1, ..., n\}$ analogamente denotemos por $\{y_j^*\}$ **um conjunto associado à** y_j^*, $\forall j \in \{1, ..., m\}$. Como $E_i x_{i(k_i-1)}^* \neq \phi$ foi mostramos na prova Afirmação 5.84 que $\{U_5 x_i^*\}$ está univocamente determinado. Analogamente, $\{U_5 y_j^*\}$ está univocamente determinado. Pelo 5ºPasso, $\{U_5 x_i^*\}$ e $\{U_5 y_j^*\}$ são não disjuntos.

Para fazer a prova deste passo precisamos da próxima afirmação.

Afirmação 5.97 *Seja ϕ como no 5ºPasso e $i \in C_3$ (veja o que segue a Afirmação 5.91). Então $k_i = l_j$ e*

$$\sigma(x_{i1}^*, ..., x_{i(k_i-1)}^*) = \sigma(y_{j1}^* + ... + y_{j(l_j-1)}^*).$$

Prova: Lembremos, veja acima, que $j = \phi(i)$. Seja $t \in \{x_i^*\} \cap \{y_j^*\}$. t existe pelo 5ºPasso e pelas nossas considerações antes desta proposição. Logo $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que $t = \sigma(x_{i1}^*, ..., x_{ik_i}^*, ..., x_p^*)$, veja toda a Definição 1.8 e $\exists r \in \mathbb{N}$ tal que $t = \sigma(y_{j1}^* + ... + y_{jl_j}^*, ..., y_r^*)$. Portanto $r = p$ e $x_{i1}^* = y_{j1}^*$, $x_{i2}^* = y_{j2}^*$,..., $x_{il_j}^* = y_{jl_j}^*$, pois pela Proposição 1.6, σ é uma injeção.

Suponhamos $l_j < k_i$. Como $\phi \neq ran(y_{jl_j}^*) \cap ran(u_5) = ran(x_{ilj}^*) \cap ran(u_5)$, pela minimalidade de k_i chega-se a um absurdo.

Analogamente se supusermos que $k_i < l_j$, chega-se a um absurdo. assim $k_i = l_j$. Portanto $\sigma(x^*_{i1}, ..., x^*_{i,k_i-1}) = \sigma(y^*_{j1} + ... + y^*_{j,l_j-1})$ (ou equivalentemente, $x^*_{it} = y^*_{jt}$ $\forall t < k_i$.) ∎

PROVA DO 6ºPASSO. Seja $i \in C_3$ e $j = \phi(i)$. Então $i \in C_2$ logo $ran(u_3) \cap ran(x^*_{ik_i}) = \phi$ (veja o que segue a Afirmação 5.91). Analogamente $ran(u_3) \cap ran(y^*_{jl_j}) = \phi$.

Como $ran(u_3)$ é um intervalo de $\mathbf{N}$ e $ran(u_3) \cap ran(x^*_{ik_i}) = \phi$ temos que $ran(u_3) \cap ran(x^*_{is}) = \phi$, $\forall s \in \{k_i, ..., p_i\}$. Analogamente $ran(u_3) \cap ran(y^*_{jt}) = \phi$, $\forall t \in \{l_j, ..., q_j\}$.

Como $i \in C_3$ temos que $i \in C$ (veja o que segue a Afirmação 5.91). Logo, pela Afirmação 5.81, $ran(u_1) \cap ran(x^*_i) \neq \phi$. Analogamente $ran(u_1) \cap ran(y^*_j) \neq \phi$.

Também, pela Afirmação 5.81, $ran(u_5) \cap ran(x^*_i) \neq \phi$. Analogamente $ran(u_5) \cap ran(y^*_j) \neq \phi$.

Como $u_1 < u_2 < u_3 < u_4 < u_5$, veja o começo do 2ºPasso, temos

$$ran(u_2 + u_3) \subset E_i \quad \text{e} \quad ran(u_2 + u_3) \subset F_j,$$

Pela Afirmação 5.97 concluímos que $k_i = l_j$ e $x^*_{it} = y^*_{jt}$ $\forall t < k_i$.

Consequentemente

$$\begin{aligned}
ran(u_2 + u_3)x^*_i &= ran(u_2 + u_3)E_i(x^*_{i1} + ... + x^*_{ik_i} + ... + x^*_{ip_i}) \\
&= ran(u_2 + u_3)(x^*_{i1} + ... + x^*_{ik_i} + ... + x^*_{ip_i}) \\
&= ran(u_2 + u_3)(x^*_{i1} + ... + x^*_{ik_i}) \\
&= ran(u_2 + u_3)(y^*_{j1} + ... + y^*_{jl_j}) \\
&= ran(u_2 + u_3)(y^*_{j1} + ... + y^*_{jl_j} + ... + y^*_{jq_j}) \\
&= ran(u_2 + u_3)F_j(y^*_{j1} + ... + y^*_{jl_j} + ... + y^*_{jq_j}) \\
&= ran(u_2 + u_3)y^*_j.
\end{aligned}$$ ∎

Prova da Afirmação 5.2 Supondo que essa afirmação seja falsa, vimos pelo 5ºPasso que $\mu(C_3) > 0$, logo $C_3 \neq \phi$. Seja $i \in C_3 \subset C$ (veja o que segue a Afirmação 5.91). Então pelo 3ºPasso obtemos

$$\frac{1}{2}\alpha \leq (1 - \sqrt{d})\alpha(1 + 5\epsilon) \leq \frac{x^*_i(u_2)}{a_i} \leq (1 + \sqrt{d})\alpha(1 + 5\epsilon) \leq 2\alpha.$$

Analogamente, $\forall j \in D$ temos

$$\frac{1}{2}\alpha \leq (1-\sqrt{d})\alpha(1+5\epsilon) \leq \frac{y_j^*(u_2)}{b_j} \leq (1+\sqrt{d})\alpha(1+5\epsilon) \leq 2\alpha$$

Agora pelo 6ºPasso $V = ran(u_2 + u_3)$, portanto

$$x_i^*(u_2) = Vx_i^*(u_2) = Vy_{\phi(i)}^*(u_2) = y_{\phi(i)}^*(u_2),$$

e como $D_3 \subset D$ (veja o que segue a Afirmação 5.91), segue que

$$\frac{1}{2}\alpha \leq \frac{y_{\phi(i)}^*(u_2)}{b_{\phi(i)}} = \frac{x_i^*(u_2)}{b_{\phi(i)}} \leq 2\alpha,$$

conseqüentemente

$$\frac{1}{4} \leq \frac{b_{\phi(i)}}{a_i} \quad (*).$$

Analogamente

$$\frac{1}{2}\alpha \leq (1-\sqrt{d})\alpha(1+5\epsilon) \leq \frac{x_i^*(u_3)}{a_i} \leq (1+\sqrt{d})\alpha(1+5\epsilon) \leq 2\alpha$$

e

$$\frac{1}{2}\alpha \leq -\frac{x_i^*(u_3)}{b_{\phi(i)}} \leq 2\alpha.$$

Logo $\frac{1}{4} \leq -\frac{b_{\phi(i)}}{a_i}$, portanto

$$\frac{b_{\phi(i)}}{a_i} \leq -\frac{1}{4};$$

absurdo com (*). Esta contradição prova a Afirmação 5.2. ■

Antes de provarmos o Lema 5.1 necessitamos de uma última observação.

Observação 5.98 *Sejam* $M \in \mathbf{J}$ *e* $x_1 < ... < x_M$ *uma S.R.C de comprimento* M *com constante* $3/2$ *como no Lema 5.1. E seja também* E *um intervalo de* $\mathbf{N}$. *Então*

$$\frac{100\lambda(E)f(M)}{f^2(\lambda(E))} \leq \frac{100M}{f(M)}.$$

Prova: Pela Observação 4.4 temos que $\lambda(E) < M$, logo por (iv)

$$\frac{\lambda(E)}{f^2(\lambda(E))} < \frac{M}{f^2(M)},$$

portanto

$$\frac{100\lambda(E)f(M)}{f^2(\lambda(E))} \leq \frac{100M}{f(M)}. \qquad \blacksquare$$

PROVA DO LEMA 5.1. Se $E = ran(y)$ então $y = E(y)$. Logo se tomarmos $E = ran(\epsilon_1 x_1 + ... + \epsilon_M x_M)$ temos $E(\epsilon_1 x_1 + ... + \epsilon_M x_M) = (\epsilon_1 x_1 + ... + \epsilon_M x_M)$. Agora é claro que a Afirmação 5.2 implica o Lema 5.1, pois basta tomarmos $E = ran(\epsilon_1 x_1 + ... + \epsilon_M x_M)$ e aplicarmos a Afirmação 5.2 e a Observação 5.98. $\blacksquare$

Capítulo 6

O Teorema principal

A seguir enunciamos o resultado mais importante deste trabalho. Seja $\widetilde{X}$ o completado do espaço X construído no Capítulo 2, isto é o espaço de W.T.Gowers.

Teorema *$\widetilde{X}$ não contém nenhum subespaço isomorfo à $c_0(\mathbf{N})$, nenhum subespaço isomorfo à $l_1(\mathbf{N})$ e nenhum subespaço reflexivo de dimensão infinita.*

A demontração será feita através das Proposições 6.3, 6.6 e 6.29.

6.1 $\widetilde{X}$ não contém nenhum subespaço isomorfo à $c_0(\mathbf{N})$.

Observação 6.1 *Sejam $N \in \mathbf{N}$ e $y_1 < y_2 < ... \in \widetilde{X}$ com $||y_i|| = 1$, $\forall i \in \mathbf{N}$. Então $||\sum_{i=1}^{N} y_i|| \geq \frac{N}{f(N)}$.*

Prova: Sejam $i, j \in \mathbf{N}$ e $E_i := ran(y_i)$. Então $E_1 < E_2 < ...$, $E_j(y_i) = 0 \in c_{00}(\mathbf{N})$ se $i \neq j$ e $E_i(y_i) = y_i$, pois $y_1 < y_2 < ....$ Coloquemos $y = \sum_{i=1}^{N} y_i$. Agora basta seguirmos a prova da Observação 4.7. ∎

Observação 6.2 *Sejam $y_1 < y_2 < ... \in \widetilde{X}$ com $||y_i|| = 1$, $\forall i \in \mathbf{N}$. Então $lim_{N \to \infty} ||\sum_{i=1}^{N} y_i|| = \infty$.*

Prova: Por (iii) $lim_{N \to \infty} \frac{N}{f(N)} = \infty$, logo pela Observação 6.1

$$lim_{N \to \infty} \left|\left| \sum_{i=1}^{N} y_i \right|\right| = \infty.$$

∎

Proposição 6.3 *Nenhum subespaço Z de $\widetilde{X}$ é isomorfo à $c_0(\mathbf{N})$.*

Prova: Suponhamos que exista um subespaço Z de $\widetilde{X}$ que é isomorfo à $c_0(\mathbf{N})$. Então pela Proposição 0.24 Z contém um subespaço Y gerado por uma base de bloco normalizada $y_1, y_2, \ldots$, da base canônica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\widetilde{X}$ que é equivalente a base canônica $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ de $c_0(\mathbf{N})$. Logo pela Proposição 0.12, existe um isomorfismo T,

$$T : c_0(\mathbf{N}) \to Y, \quad w_i \mapsto T(w_i) = y_i \quad \text{e} \quad N_1, M_1 > 0,$$

tais que

$$N_1 ||x||_\infty \leq ||T(x)|| \leq M_1 ||x||_\infty, \quad \forall x \in c_0(\mathbf{N}).$$

Seja $x = \sum_{i=1}^{N} w_i$. Então

$$\begin{aligned} \left|\left| \sum_{i=1}^{N} y_i \right|\right| &= \left|\left| T\left(\sum_{i=1}^{N} w_i \right) \right|\right| = ||T(x)|| \\ &\leq M_1 ||x||_\infty \leq M_1 \left|\left| \sum_{i=1}^{N} w_i \right|\right|_\infty \\ &= M_1. \end{aligned}$$

Portanto $|| \sum_{i=1}^{N} y_i || \leq M_1$, $\forall N \in \mathbf{N}$, $\exists M_1 > 0$. Mas isto é um absurdo por causa da Observação 6.2. ■

6.2 $\widetilde{X}$ não contém nenhum subespaço isomorfo à $l_1(\mathbf{N})$.

Observação 6.4 *Sejam Y um subespaço de dimensão infinita de $\widetilde{X}$ e $y_1, y_2, \ldots$, uma base de bloco normalizada da base canônica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ que é base de Y. Dado $M \in \mathbf{N}$ existem $x_1, \ldots, x_M$ S.R.C em Y com constante $\frac{3}{2}$.*

Prova: Pela Afirmação 3.18(b) se y é uma $l_{1+}^{m}-$média, então $m \leq |ran(y)|$.

Sejam $n_1 \geq 2^{2^M}$ e $C = 3/2 > 1$. Então pela Afirmação 3.9, existem $k_1 \in \mathbf{N}$ e $E_1 \subset \{1, \ldots, n_1^{k_1}\}$ tais que $z_1 = \sum_{i \in E_1} y_i$ é um $l_{1+}^{n_1}-$vetor com constante $3/2$.

Sejam $n_2 = min\{n \in N : \sqrt{f(n)}/2 \geq |ran(z_1)|\}$ e $C = 3/2 > 1$. Então novamente pela Afirmação 3.9, existem $k_2 \in \mathbf{N}$ e $E_2 \subset \{n_1^{k_1} + 1, \ldots, n_1^{k_1} + n_2^{k_2}\}$

tais que $z_2 = \sum_{i\in E_2} y_i$ é um $l_{1+}^{n_2}$−vetor com constante 3/2. Observemos que $2^{2^M} \leq n_1 \leq |ran(z_1)| \leq \sqrt{f(n_2)}/2 \leq n_2$ e $z_1 < z_2$.

Suponhamos construídas da forma anterior z_j $l_{1+}^{n_j}$−vetor com constante 3/2, com $1 \leq j \leq i$, $2 \leq i$, $z_1 < z_2 < ... < z_j$, $2^{2^M} \leq n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_j$ e $|ran(z_1 + ... + z_{j-1})| \leq \sqrt{f(n_j)}/2$ para $2 \leq j \leq i$.

Sejam $N_0 = 0$ e $N_j = \sum_{s=1}^{j} n_s^{k_s}$, $\forall j \in \{1, ..., i\}$. Notemos que z_j está no espaço gerado por $y_{N_{j-1}+1}, ..., y_{N_j}$.

Agora, sejam $n_{i+1} = min\{n \in N : \sqrt{f(n)}/2 \geq |ran(z_1 + ... + z_i)|\}$ e $C = \frac{3}{2} > 1$. Então uma vez mais pela Afirmação 3.9, existem $k_{i+1} \in \mathbf{N}$ e $E_{i+1} \subset \{N_i + 1, ..., N_i + n_{i+1}^{k_{i+1}}\}$ tais que $z_{i+1} = \sum_{s\in E_{i+1}} y_s$ é um $l_{1+}^{n_{i+1}}$−vetor com constante 3/2. Observemos que $2^{2^M} \leq n_1 \leq n_2 \leq ... \leq n_i \leq |ran(z_i)| \leq |ran(z_1 + ... + z_i)| \leq \sqrt{f(n_{i+1})}/2 \leq n_{i+1}$.

Seja $x_i = z_i/||z_i||$, logo $x_1, ..., x_M$ é uma S.R.C com constante 3/2. ■

Proposição 6.5 *Sejam Y um subespaço de dimensão infinita de $\widetilde{X}$, y_1, y_2,..., uma base de bloco normalizada da base canonica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ que é base de Y, $M \in \mathbf{J}$ e $x_1, ..., x_M$ uma S.R.C em Y com constante $\frac{3}{2}$. Então existe $u_1, ..., u_M$ uma S.R.C em Y com constante 3/2 tais que $||\sum_{i=1}^{M} u_i|| < \frac{100M}{f(M)}$.*

Prova: Pelo Lema 5.1 existem $\epsilon_1, ..., \epsilon_M \in \{-1, 1\}$ tais que $||\sum_{i=1}^{M} \epsilon_i x_i|| < \frac{100M}{f(M)}$. Sejam $i \in \{1, ..., M\}$ e $u_i = \epsilon_i x_i$. Então $||u_i|| = ||\epsilon_i x_i|| = ||x_i||$ e $ran(u_i) = ran(x_i)$. Portanto $u_1, ..., u_M$ é uma S.R.C em Y com constante 3/2 e $||\sum_{i=1}^{M} u_i|| < \frac{100M}{f(M)}$. ■

Proposição 6.6 *Nenhum subespaço Z de $\widetilde{X}$ é isomorfo à $l_1(\mathbf{N})$.*

Prova: Suponhamos que exista um subespaço Z de $\widetilde{X}$ que é isomorfo à $l_1(\mathbf{N})$. Então pela Proposição 0.24 Z contém um subespaço Y gerado por uma base de bloco normalizada $y_1, y_2, ...$ da base canonica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\widetilde{X}$ que é equivalente a base canônica $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ de $l_1(\mathbf{N})$. Logo pela Proposição 0.12, existe um isomorfismo T,

$$T : l_1(\mathbf{N}) \to Y, \quad w_i \mapsto T(w_i) = y_i \quad \text{e} \quad N_2, M_2 > 0$$

tais que

$$N_2||l||_{l_1} \leq ||T(l)|| \leq M_2||l||_{l_1}, \quad \forall l \in l_1(\mathbf{N}).$$

Seja $z_i = \sum_{s \in E_i} y_s$ como na prova da Observação 6.4. Logo $||z_i|| = ||\sum_{s\in E_i} y_s|| \leq \sum_{s\in E_i} ||y_s|| = \sum_{s\in E_i} 1 = |E_i|$. Seja também $x_i = \frac{z_i}{||z_i||}$. Coloquemos $l = \sum_{i=1}^{M}(\sum_{s\in E_i} \frac{w_s}{||z_i||})$. Portanto

$$\begin{aligned} T(l) &= T\Big(\sum_{i=1}^{M}\Big(\sum_{s\in E_i}\frac{w_s}{||z_i||}\Big)\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{M}\Big(\sum_{s\in E_i}\frac{y_s}{||z_i||}\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{M}\frac{z_i}{||z_i||} = \sum_{i=1}^{M} x_i. \end{aligned}$$

Seja $u_i = \epsilon_i x_i$ como na Proposição 6.5 e

$$y = \sum_{i=1}^{M}\epsilon_i\Big(\sum_{s\in E_i}\frac{w_s}{||z_i||}\Big),$$

então

$$T(y) = \sum_{i=1}^{M} u_i$$

e

$$\begin{aligned} N_2 M &\leq N_2\sum_{i=1}^{M} 1 \leq N_2\sum_{i=1}^{M}\frac{|\epsilon_i||E_i|}{||z_i||} \\ &= N_2\Big|\Big|\sum_{i=1}^{M}\epsilon_i\Big(\sum_{s\in E_i}\frac{w_s}{||z_i||}\Big)\Big|\Big|_{l_1} \\ &= N_2||y||_{l_1}. \end{aligned}$$

Logo

$$N_2 M \leq N_2||y||_{l_1} \leq ||T(y)|| = \Big|\Big|\sum_{i=1}^{M} u_i\Big|\Big| < \frac{100M}{f(M)},$$

portanto

$$N_2 < \frac{100}{f(M)}, \quad \forall M \in \mathbf{J}, \quad \text{para algum} \quad N_2 > 0; \quad \text{o que é um absurdo,}$$

pois por (ii)

$$\frac{100}{f(M)} \to 0, \quad \text{quando} \quad M \to \infty. \qquad \blacksquare$$

6.3 $\widetilde{X}$ não contém nenhum subespaço reflexivo de dimensão infinita

Nosso primeiro objetivo, Proposição 6.18, é demonstrar que existem $w \in \widetilde{X}$ e w^* no dual de $\widetilde{X}$ tais que $w^*(w) > 1/100$.

Observação 6.7 *Sejam $n \in \mathbf{N}$, $i \in \{1, ..., n\}$ e $u_1 < ... < u_n$ vetores sussesivos de $\widetilde{X}$ com $||u_i|| = 1$. Então existem u_i^* suporte funcional de u_i tal que $ran(u_i^*) \subset ran(u_i)$.*

Prova: Sejam $i \in \{1, ..., n\}$ e $L_i : [u_i] \to R$ tal que $L_i(\alpha u_i) = \alpha$. Então L_i é linear e $||L_i|| = \sup_{||\alpha u_i)|| \leq 1} |L_i(\alpha u_i)| = \sup_{|\alpha| \leq 1} |\alpha| = 1$.

Seja $E_i = ran(u_i)$. Então existe $l_i, p_i \in \mathbf{N}$ tal que $E_i = [l_i, ..., l_i + p_i]$. Sejam $X_i = [e_j : j \in E_i]$ e $supp(X_i) = \{s : e_s \in X_i\}$. Então $u_i = \sum_{j \in supp(X_i)} a_j e_j$, para alguns $a_j \in \mathbf{R}$. Portanto $u_i \in X_i$ e $[u_i] \subset X_i$. Pelo Teorema 0.17 existe $\widetilde{L}_i : X_i \to R$, extensão de L_i, com $||\widetilde{L}_i|| = ||L_i|| = 1$.

Agora se $E_i : \widetilde{X} \to X_i$ $x \mapsto E_i(x) = x|_{E_i}$, então $||E_i(x)|| \leq ||x||$.

Seja $u_i^* : \widetilde{X} \to R$ $\quad x \mapsto u_i^*(x) = \widetilde{L}_i(E_i(x))$. Claramente u_i^* é contínua, pois é uma composição de funções contínuas. Mais ainda,
$u_i^*(u_i) = \widetilde{L}_i(E_i(u_i)) = \widetilde{L}_i(u_i) = L_i(u_i) = 1$,
$u_i^*(u_j) = \widetilde{L}_i(E_i(u_j)) = \widetilde{L}_i(0) = 0$, se $i \neq j$ e
$||u_i^*|| = \sup_{||x|| \leq 1} |\widetilde{L}_i(E_i(x))| \leq \sup_{||x|| \leq 1} ||\widetilde{L}_i|| ||E_i(x)|| \leq \sup_{||x|| \leq 1} 1.||x|| = 1$.

Sejam $x \in \widetilde{X}$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ e $b_n = \widetilde{L}_i(e_n)$. Então
$u_i^*(x) = \widetilde{L}_i(E_i(x)) = \widetilde{L}_i(\sum_{n=l_i}^{l_i+p_i} a_n e_n) = \sum_{n=l_i}^{l_i+p_i} a_n \widetilde{L}_i(e_n) = \sum_{n=l_i}^{l_i+p_i} a_n b_n$.

Agora definamos $\widetilde{u_i} = \sum_{n \in E_i} b_n e_n^* \in l_1(\mathbf{N})$, portanto $u_i^* = \widetilde{u_i}$ e $ran(u_i^*) \subset ran(u_i)$. ■

Observação 6.8 *Sejam Y um subespaço de dimensão infinita de $\widetilde{X}$ e y_1, $y_2, ...,$ uma base de bloco normalizada da base canônica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ que é base Y. Então dado $M \in \mathbf{J}$ existe $u_1, ..., u_M$ uma S.R.C em Y, com constante $3/2$ satisfazendo $||\sum_{i=1}^{M} u_i|| < \frac{100M}{f(M)}$.*

Prova: Basta aplicarmos a Proposição 6.5. ■

Observação 6.9 *Sejam Y um subespaço de dimensão infinita de $\widetilde{X}$, y_1, y_2,..., uma base de bloco normalizada da base canônica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ que é base Y, $M \in \mathbf{J}$ e $u_1, ..., u_M$ uma S.R.C em Y com constante $3/2$ tal que $||\sum_{i=1}^{M} u_i|| < \frac{100M}{f(M)}$ e $v := \sum_{i=1}^{M} \frac{u_i}{||\sum_{i=1}^{M} u_i||}$. Então existe $v^* \in A_M^*$ tal que $v^*(v) > 1/100$.*

Prova: Pela Observação 6.7, seja u_i^* um suporte funcional de u_i tal que $ran(u_i^*) \subset ran(u_i)$. Coloquemos $v^* = \sum_{i=1}^{M} \frac{u_i^*}{f(M)}$. Logo

$$\begin{aligned} v^*(v) &= \sum_{i=1}^{M} \frac{u_i^*(v)}{f(M)} = \frac{1}{||\sum_{i=1}^{M} u_i||} \frac{1}{f(M)} \sum_{i=1}^{M} u_i^* \Big(\sum_{j=1}^{M} u_j \Big) \\ &= \frac{1}{||\sum_{i=1}^{M} u_i||} \frac{1}{f(M)} \sum_{i=1}^{M} 1 = \frac{1}{||\sum_{i=1}^{M} u_i||} \frac{M}{f(M)} \\ &> \frac{f(M)}{100M} \frac{M}{f(M)} > \frac{1}{100}. \end{aligned}$$ ■

Observação 6.10 *Sejam Y um subespaço de dimensão infinita de $\widetilde{X}$, y_1, y_2,..., uma base de bloco normalizada da base canônica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ que é base Y. $M \in \mathbf{J}$, $u_1, ..., u_M$ uma S.R.C em Y com constante $3/2$, tais que $||\sum_{i=1}^{M} u_i|| < \frac{100M}{f(M)}$ e u_i^* um suporte funcional de u_i tal que $ran(u_i^*) \subset ran(u_i)$. Se $v = \sum_{i=1}^{M} \frac{u_i}{||\sum_{i=1}^{M} u_i||}$ e $v^* = \sum_{i=1}^{M} \frac{u_i^*}{f(M)}$, então $v^*(v) > \frac{1}{100}$.*

Prova: A prova é idêntica aquela da Observação 6.9. ■

Agora vamos fazer um cálculo que será utilizado na Proposição 6.12.

Observação 6.11 *Seja $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ a base canônica de $c_{00}(\mathbf{N})$. Então*

1. $||e_j|| = 1$, $\forall j \in \mathbf{N}$.
2. *Seja $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in c_{00}(\mathbf{N})$ com $||x|| \leq 1$. Então $|a_j| \leq 1$.*
3. $||e_j^*|| = 1$, $\forall j \in \mathbf{N}$.

Prova: **1:** Veja a Observação 2.28.

2: Veja a Observação 2.27.

3: Sejam $j \in \mathbf{N}$ e $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in c_{00}(\mathbf{N})$ com $||x|| \leq 1$. Então $|a_j| \leq 1$, pelo item (2). Logo $|e_j^*(x)| = |a_j| \leq 1$, portanto $||e_j^*|| = \sup_{\{||x|| \leq 1\}} |e_j^*(x)| \leq 1$. Agora $||e_j|| = 1$ e $e_j^*(e_j) = 1$. Portanto $||e_j^*|| = 1$. ■

Sejam u_i como na Proposição 6.10, $N_i, M_i \in \mathbf{N}$, $b_j \in \mathbf{R}$, $u_i^* = \sum_{j=N_i}^{M_i} b_j e_j^*$ um suporte funcional de u_i, logo $||u_i^*|| = 1$, e $\mathbf{k := \max_{1 \le i \le M} M_i - N_i + 1}$. Então pela Observação 6.11(2) temos que $b_j \le 1$, $\forall j \in \mathbf{N}$, pois $u_i^* \in c_{00}(\mathbf{N})$.

Também sejam Y um subespaço de dimensão infinita de $\widetilde{X}$ e y_1, y_2,..., uma base de bloco normalizada da base canônica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ que é base Y.

Proposição 6.12 *Sejam $M \in \mathbf{N}$, $1 \le i \le M$ e $\epsilon > 0$. Então existe $z_i^* \in Y^*$ tal que $supp(z_i^*) \subset supp(u_i^*)$ e $||z_i^*|| \le \epsilon k + 1$.*

Prova: Coloquemos $c_j = 0$, se $b_j = 0$ e se $b_j \neq 0$ escolhamos c_j tal que $|c_j - b_j| \le \epsilon$, portanto podemos tomar $|c_j| \le 1$, $\forall j \in \mathbf{N}$.

Coloquemos $z_i^* = \sum_{j=N_i}^{M_i} c_j e_j^*$ e seja $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ com $||x|| \le 1$. Então usando que $|a_j| \le 1$, pela Observação 6.11, temos que

$$\begin{aligned}
|z_i^*(x)| &= |z_i^*(x) - u_i^*(x) + u_i^*(x)| \\
&\le |(z_i^* - u_i^*)(x)| + |u_i^*(x)| \\
&\le \left|\sum_{j=N_i}^{M_i} (c_j - b_j) a_j\right| + ||u_i^*||.||x|| \\
&\le \epsilon k + 1,
\end{aligned}$$

portanto, $||z_i^*|| \le \epsilon k + 1$ e pela forma como definimos os c_j concluímos que $supp(z_i^*) \subset supp(u_i^*)$. ∎

Agora vamos fazer alguns cálculos, os mais importantes são as Observações 6.16 e 6.17, que serão usados na Proposição 6.18. Sejam $\epsilon > 0$, k, c_j e z_i^* como na Proposição 6.12.

Observação 6.13 $w_i^* := \frac{z_i^*}{\epsilon k+1} = \sum_{j=N_i}^{M_i} \frac{c_j}{\epsilon k+1} e_j^*$ *é tal que*

$$supp(w_i^*) \subset supp(u_i^*) \quad e \quad ||w_i^*|| \le 1.$$

Observação 6.14 *Pela Observação 6.10* $v = \sum_{i=1}^{M} \frac{u_i}{||\sum_{i=1}^{M} u_i||}$. *Sejam* $v = \sum_{i=1}^{\infty} d_n e_n$, $w^* = \sum_{i=1}^{M} \frac{w_i^*}{f(M)}$ *e* $z^* = \sum_{i=1}^{M} \frac{z_i^*}{f(M)}$. *Então*

$$|w^*(v) - v^*(v)| \le \frac{\epsilon}{f(M)} \Big[k^2 M + kM \Big].$$

Prova: Pela Proposição 6.11(2) $|d_n| \leq 1$ e como c_j é tal que $|c_j - b_j| \leq \epsilon$, $\forall j \in \mathbb{N}$, veja a prova da Proposição 6.12, temos pela Observação 6.13 que

$$\begin{aligned}
|w^*(v) - v^*(v)| &\leq |w^*(v) - z^*(v)| + |z^*(v) - v^*(v)| \\
&= \frac{1}{f(M)} \sum_{i=1}^{M} |w_i^*(v) - z_i^*(v)| + \frac{1}{f(M)} \sum_{i=1}^{M} |z_i^*(v) - u_i^*(v)| \\
&\leq \frac{1}{f(M)} \left[\sum_{i=1}^{M} |w_i^*(v) - z_i^*(v)| + \sum_{i=1}^{M} |z_i^*(v) - u_i^*(v)| \right] \\
&\leq \frac{1}{f(M)} \left[\sum_{i=1}^{M} \left| \sum_{j=N_i}^{M_i} \left(\frac{c_j}{\epsilon k + 1} - c_j \right) d_j \right| + \sum_{i=1}^{M} \left| \sum_{j=N_i}^{M_i} (c_j - b_j) d_j \right| \right] \\
&\leq \frac{1}{f(M)} \left[\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=N_i}^{M_i} \frac{\epsilon k}{\epsilon k + 1} + \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=N_i}^{M_i} \epsilon \right] \\
&\leq \frac{1}{f(M)} \left[\frac{\epsilon k}{\epsilon k + 1} kM + \epsilon k M \right] \\
&\leq \frac{1}{f(M)} \left[\epsilon k^2 . M + \epsilon k M \right] \\
&= \frac{\epsilon}{f(M)} \left[k^2 M + kM \right].
\end{aligned}$$

■

Observação 6.15 *Pela Observação 6.10 existe* $0 < \epsilon_1$ *tal que* $0 < \epsilon_1 < v^*(v) - \frac{1}{100}$. *Seja* $\epsilon = \frac{\epsilon_1 f(M)}{k^2 M + kM + 1}$, *então pelo Observação 6.14*

$$|w^*(v) - v^*(v)| \leq \frac{k^2 M + kM}{f(M)} \frac{\epsilon_1 f(M)}{k^2 M + kM + 1} < \epsilon_1.$$

Observação 6.16 *Pelo Observaçõa 6.15* $v^*(v) - w^*(v) < \epsilon_1 < v^*(v) - \frac{1}{100}$, *logo*

$$\frac{1}{100} < w^*(v).$$

Observação 6.17 *Como* $\epsilon = \frac{\epsilon_1 f(M)}{k^2 M + kM + 1}$, *veja Observação 6.15, temos que*

$$w_i^* = \frac{z_i^*}{\epsilon k + 1} = \sum_{j=N_i}^{M_i} \frac{c_j}{\epsilon k + 1} e_j^* = \sum_{j=N_i}^{M_i} \frac{c_j}{\frac{\epsilon_1 f(M)}{k^2 M + kM + 1} k + 1} e_j^*.$$

Seja q_j *um número racional tal que o* c_j *da Proposição 6.12 seja escrito como*

$$c_j = (\epsilon k + 1) f(M) q_j = \left(\frac{\epsilon_1 f(M)}{k^2 M + kM + 1} k + 1 \right) f(M) q_j.$$

Então $|q_j| \leq 1$. *Pois* $|q_j| > 1$ *implica* $|c_j| = \left|\left(\frac{\epsilon_1 f(M)}{k^2M+kM+1}k+1\right)f(M)q_j\right| >$ $1.1.|q_j| > 1$*; absurdo, já que na Proposição 6.12 mostramos que* $|c_j| \leq 1$.

Proposição 6.18 *Seja* $M \in \mathbf{N}$. *Então existem* $w \in \widetilde{X}$ *e* w^* *tal que* $supp(w^*) \subset supp(w)$, $w^* \in \mathbf{Q}$, $w^* \in A_M^*$ *e* $w^*(w) > 1/100$.

Prova: Seja z_i^* como na prova da Proposição 6.12. Então $z_i^* = \sum_{j=N_i}^{M_i} c_j e_j^*$ e pela Proposição 6.10

$$supp(z_i^*) \subset supp(u_i^*) \subset supp(u_i).$$

Sejam $w := v$ com v como na Proposição 6.10, w_i^* como na Observação 6.13 e $w^* := \sum_{i=1}^{M} \frac{w_i^*}{f(M)}$. Então $w = \sum_{i=1}^{M} \frac{u_i}{\|\sum_{i=1}^{M} u_i\|}$, $w^* = \sum_{i=1}^{M} \frac{z_i^*}{\epsilon k+1} \frac{1}{f(M)}$ e

$$supp(w^*) \subset supp(w).$$

Agora pela Observação 6.17 concluímos que

$$w_i^* = \frac{z_i^*}{\epsilon k+1} = \frac{\sum_{j=N_i}^{M_i} c_j e_j^*}{\epsilon k+1} = \sum_{j=N_i}^{M_i} f(M) q_j e_j^*.$$

Portanto de novo pela Observação 6.17

$$w^* = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=N_i}^{M_i} q_j e_j \quad \text{com} \quad q_j \leq 1 \quad \text{número racional} \quad \forall j \in \mathbf{N}.$$

Isto mostra que $w^* \in \mathbf{Q}$, veja Definição 1.4. Mas pela Proposição 6.12

$$w^* = \sum_{i=1}^{M} \frac{w_i^*}{f(M)} = \sum_{i=1}^{M} \frac{z_i^*}{\epsilon k+1}.\frac{1}{f(M)} \quad \text{com} \quad \frac{\|z_i^*\|}{\epsilon k+1} \leq 1,$$

logo pela Definição 1.8(a) e pela Observação 6.16 temos que

$$w^* \in A_M^* \quad \text{e} \quad w^*(w) = w^*(v) > \frac{1}{100},$$

consequentemente, a Proposição 6.18 está provada. ∎

Nosso objetivo agora é mostrarmos que Y contém uma seqüência básica $v_1, v_2, \ldots$ que não é contráctil e portanto Y não é reflexivo. Para isto será útil a Proposição 6.18 e a seguinte definição.

Definição 6.19 *Seja $M \in \mathbf{J}$, um* **M- par** *é um par ordenado $(v, v^*) \in Y_X Y^*$ satisfazendo:*

(1) $ran(v^*) \subset ran(v)$.

(2) $v^* \in A^*_M \cap \mathbf{Q}$.

(3) $v^*(v) > 1/100$.

Proposição 6.20 *Seja $t \in \mathbf{N}$. Então para qualquer M-par (v, v^*), com $M \in \mathbf{N}$, podemos escolher v tal que $t < minsupp(v)$.*

Prova: Isto foi feito na prova da Observação 6.4, dado $t \in \mathbf{N}$, existe y_{n_0} tal que $t < minsupp(y_{n_0})$. Tomemos $y_{n_0}, ..., y_{n_0+n_1^k-1}$, $E_1 \subset \{n_0, ..., n_0 + n_1^k - 1\}$ e $z_1 = \sum_{i \in E_1} y_i$.

Agora basta lembrarmos que com os z_i da prova da Observação 6.4 construímos os x_i da Proposição 6.4 e com estes forão construidos os u_i de Proposição 6.5, os quais formaram os v da Observação 6.10 (e o w da Proposição 6.18). ∎

Proposição 6.21 *Existe uma seqüência de M_i-pares (v_i, v_i^*) com $v_i \in Y$, $\forall i \in \mathbf{N}$, tais que $v_1 < v_2 < ... \in Y$, e para $i > 1$, $v_i^* \in A^*_\sigma(v_1, ..., v^*_{i-1})$, $\forall i \in \mathbf{N}$.*

Prova: Construíamos (v_1, v_1^*) $M_1 - par$, veja Proposição 6.18. Seja $M_2 = \sigma(v_1^*)$, construímos $(v_2, v_2^*)M_2-$ par com $\min supp(v_2) > M_2$, pelas Proposições 6.18 e 6.20. Seja $M_3 = \sigma(v_1^*, v_2^*)$, agora construímos (v_3, v_3^*) M_3-par com $\min supp(v_3) > M_3$ e assim sucessivamente. ∎

No que segue $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, ...$ e $\mathbf{v_1^*}, \mathbf{v_2^*}, ...$ serão como na Proposição 6.21.

Proposição 6.22 *$v_1^*, v_2^*, ...$formam uma seqüência especial de aplicações..*

Prova: Basta aplicarmos a Proposição 6.21 e definição de seqüência especial de aplicações, veja Definição 1.8(b). ∎

Proposição 6.23 *Se x_i^* é uma aplicação especial, então $||x_i^*|| \leq 1$.*

Prova: Pela Proposição 2.26(3) $|x_i^*(x)| = (|x_i^*(x)|^2)^{1/2} = (\sum_{i=1}^1 |x_i^*(x)|^2)^{1/2} \leq ||x||$, logo $||x_i^*|| = \sup_{||x|| \leq 1} |x_i^*(x)| \leq \sup_{||x|| \leq 1} ||x|| = 1$. ∎

Proposição 6.24 *Seja $N \in \mathbf{N}$. Então $v_1^* + ... + v_N^*$ é uma aplicação especial.*

Prova: Como (v_i, v_i^*) é um M_i−par temos $ran(v_i^*) \subset ran(v_i)$, logo pela Proposição 6.21 $v_1^* < ... < v_N^*$. Sejam $a := \min supp(v_1^*)$, $b := \max supp(v_N^*)$ e $E := \{a, ..., b\}$. Então $v_1^* + ... + v_N^* = E(v_1^* + ... + v_N^*)$ e $E(v_1^* + ... + v_N^*)$ é um aplicação especial, pela Proposição 6.22 e a Definição 1.8(c). ■

Proposição 6.25 *Seja* $N \in \mathbf{N}$. *Então* $||\sum_{i=1}^N v_i^*|| \leq 1$.

Prova: Pela Proposição 6.24 $\sum_{i=1}^N v_i^*$ é uma aplicação especial, logo pela Proposição 6.23 $||\sum_{i=1}^N v_i^*|| \leq 1$. ■

Proposição 6.26 *Seja* $N \in \mathbf{N}$. *Então a aplicação em* $\widetilde{X}$ *definida por*

$$x \mapsto lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} v_n^*(x) \quad \textit{é contínuo.}$$

Prova: Seja $T_N : X \to R$, $x \mapsto \sum_{n=1}^N v_n^*(x)$. Então, pelas Proposição 6.25, temos

$$|T_N(x)| = \left|\sum_{n=1}^{N} v_n^*(x)\right| \leq \left|\left|\sum_{n=1}^{N} v_n^*\right|\right| ||x|| \leq ||x||.$$

Logo $x \mapsto lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^N v_n^*(x)$ é contínuo e se $||x|| \leq 1$, então $x \mapsto lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^N v_n^*(x)$ é limitado. Portanto pode ser estendido a $\widetilde{X}$. ■

Proposição 6.27 $v_1, v_2, ..$ *é uma seqüência básica.*

Prova: Sejam $m < n$. Então pelo Teorema 2.20 sabemos que $||\sum_{i=1}^m v_i|| \leq ||\sum_{i=1}^n v_i||$, logo pelo Teorema 0.7 $v_1, v_2, ..$ é uma seqüência básica. ■

Proposição 6.28 *A seqüência básica* $v_1, v_2, ..$ *não é contráctil.*

Prova: Pela Proposição 6.26 $lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^N v_i^*$ é um funcional linear contínuo em $\widetilde{X}$ e pela definição 6.3.1 de M-par $lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^N v_i^*(v_n) = v_n^*(v_n) \geq \frac{1}{100}$, $\forall n$. Portanto pela Definição 0.18 a seqüência básica $v_1, v_2, ..$ não é contráctil. ■

Proposição 6.29 $\widetilde{X}$ *não contém nenhum subespaço reflexivo de dimensão infinita.*

Prova: Suponhamos que Z seja um subespaço reflexivo de dimensão de $\widetilde{X}$. Então pela Proposição 0.24, Z contém um subespaço Y gerado por uma base de bloco $y_1, y_2, ...$, que podemos tomá-la normalizada, da base canônica $(e_n)_{n=1}^{\infty}$. Sejam $v_1, v_2, ..$ como na Proposição 6.21. Como estamos supondo que Z é reflexivo temos que cada subespaço fechado de Z é reflexivo, portanto $[(v_i)_{i=1}^{\infty}]$ também é reflexivo e pelo Teorema 0.20 $(v_i)_{i=1}^{\infty}$ seria contráctil, veja a Definição 0.18(a). Mas isto é um absurdo por causa da Proposição 6.28. ■

Bibliografia

[Ho] Honig., C.S , *Análise Funcional e Aplicações, v.1*, IME-USP, 1970.

[L-T] Lindenstrauss, J., Tzafriri, L., *Classical Banach Spaces, v.1*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1977.

[R] Rudin, W., *Analisis Real y Complejo*, Alhambra, Madrid, 1979.

[J] Robert C.James., *Bases and reflexivity of Banach Spaces*, Annals of Mathematics, Vol.52, 3, November, pag 518-527, 1950.

[G] W.T.Gowers., *A Banach space not containing* $c_0(\mathbf{N})$, $l_0(\mathbf{N})$ *or a reflexive subspace*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol.344, 1, july, pag 407-420, 1994.

[G-S] G.R.Grimmett and D.R.Stirzaker., *Probability and random processes*, Oxford Science Publications, Hong Kong, 1992.

[D] Joseph Diestel., *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1984.