Revestimentos Ramificados sobre Superfícies Compactas

Natalia Andrea Viana Bedoya

DISSERTAÇÃO APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
MESTRE EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Topologia Algébrica**

Orientador: **Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves**

Durante a elaboração deste trabalho, a autora recebeu apoio financeiro da CAPES e do CNPq.

- São Paulo, Março de 2004 -

Revestimentos Ramificados sobre Superfícies Compactas

Este exemplar corresponde à redação final
da dissertação de mestrado devidamente
corrigida e defendida por
Natalia Andrea Viana Bedoya
e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, março de 2004.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Daciberg Lima Gonçalves (Orientador) - IME-USP
- Profa. Dr. Lucilia Daruiz Borsari - IME-USP
- Prof. Dr. Derek Douglas Jack Hacon - PUC-RJ

Agradecimentos

À minha mãe, meu tio e meu irmão por tudo.

Ao Prof. Daciberg Lima Gonçalves pela paciência, disponibilidade e boa vontade para me orientar.

À Profa. Lucilia Daruiz Borsari por estar sempre disposta a me ajudar nos momentos difíceis.

À Profa. Marta Macho Stadler pela motivação.

Aos meus amigos do IME, especialmente aos colombianos, e à Kika pela sua valiosa colaboração e amizade.

E a todos os que direta ou indiretamente contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Resumo

Um revestimento ramificado $\phi : M \longrightarrow N$ de grau $d \in \mathbb{Z}^+$, determina um conjunto de partições de d, *o dado de ramificação*. Neste trabalho estudamos os seguintes problemas de realização: dada uma superfície compacta e conexa N, $d \in \mathbb{Z}^+$ e uma coleção de partições $\mathscr{D}$ de d:

1. Existe um revestimento ramificado conexo de grau d que realize $\mathscr{D}$ como dado de ramificação?

2. Dado $H \subset \pi_1(N)$ um subgrupo de índice finito l, existe um revestimento ramificado conexo que realize $\mathscr{D}$ e tal que $\phi_*(\pi_1(M)) = H$?

[EKS] responde a questão 1 quando N é uma superfície fechada diferente de $\mathbb{S}^2$, e ambas questões quando $N = \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ e $l = 1$. [BGKZ1] (geometricamente) e [BGKZ2] (algebricamente) respondem a questão 2 para N fechada diferente de $\mathbb{S}^2$ e de $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. No capítulo 6 deste trabalho respondemos as duas questões quando N é uma superfície com bordo.

Abstract

A branched covering $\phi : M \longrightarrow N$ of degree d determines a collection of partitions of d, *the branch date*. In this work we studied the following realization problems: given a compact connected surface N, $d \in \mathbb{Z}^+$ and a collection $\mathscr{D}$ of partitions of d:

1. Does there exist a connected branched coverig of degree d realizing $\mathscr{D}$ like a branch date?

2. Given $H \subset \pi_1(N)$ a subgroup of finite index l, does there exist a connected branched covering realizing $\mathscr{D}$ and such that $\phi_*(\pi_1(M)) = H$?

[EKS] answers the first question when N is a closed surface different of $\mathbb{S}^2$, and answers both questions when $N = \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ and $l = 1$. [BGKZ1] (by geometric arguments) and [BGKZ2] (by algebraic arguments) answer the second question when N is a closed surface different of $\mathbb{S}^2$ and $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. In chapter 6 of this work we answer the two questions when N is a bordered surface.

Sumário

1 Transformações Interiores **1**

2 Revestimentos Ramificados **9**

3 Sobre o Grupo Simétrico **21**

3.1 Resultados Básicos 21

3.2 Produtos em S_d 22

3.3 Construindo uma Operação de Colagem sobre Homomorfismos no Grupo Simétrico. 29

4 Revestimentos Ramificados sobre Superfícies Fechadas **37**

5 Revestimentos Ramificados Primitivos **51**

6 Sobre Superfícies com bordo **58**

Introdução

Todo revestimento ramificado $\phi : M \longrightarrow N$ de grau d, $d \in \mathbb{Z}^+$, sobre uma superfície compacta e conexa N determina uma coleção de partições de d, o *dado de ramificação.*

O objetivo deste trabalho é apresentar resultados de realização de conjuntos de partições de um inteiro positivo d, como dado de ramificação de um revestimento ramificado conexo sobre uma superfície N dada.

O estudo deste tipo de funções, iniciado por Hurwitz em 1891, foi motivado pelas propriedades locais das funções analíticas sobre superfícies de Riemann. No Capítulo 1 fazemos uma breve exposição da teoria das transformações interiores que nos permitirá trabalhar sobre qualquer tipo de superfícies. Usamos como referência os livros [AS] e [St].

No Capítulo 2, baseados nos artigos [EKS], [Ez] e [Hu], introduzimos a teoria dos revestimentos ramificados. Aqui, o principal resultado é o teorema de existência de Hurwitz.

O terceiro capítulo é dedicado a estudar propriedades do grupo simétrico, necessárias para avançar no problema. Para os resultados básicos usamos [DM], [Ro] e [Wi], e para o resto do capítulo [EKS], [Ez], [BGKZ1] e [BGKZ2].

O Capítulo 4, baseado em [Hu], [EKS] e [Ez], apresenta resultados quando N é fechada e diferente da esfera.

No quinto capítulo apresentamos resultados de realização mediante revestimentos ramificados primitivos, e uma generalização deste problema, sobre superfícies fechadas diferentes da esfera. Tais resultados encontram-se em [EKS] e [BGKZ2].

No Capítulo 6, obtemos respostas quando N é uma superfície com bordo.

Capítulo 1

Transformações Interiores

O objetivo deste capítulo é introduzir a teoria básica das transformações interiores. Usamos como referencia os livros [AS] e [St].

No estudo das funções entre duas superfícies destaca-se a classe dos revestimentos ramificados. Foi Hurwitz quem, motivado pelas propriedades locais das funções analíticas e sobrejetoras entre duas superfícies de Riemann, iniciou este estudo. Seja $\phi : X \longrightarrow Y$ uma tal função. O fato de ϕ ter estas propriedades significa que para todo $y \in Y$ e para todo $x \in \phi^{-1}(y)$ existem vizinhanças U_y, U_x respectivamente, $\phi(U_x) \subset U_y$, e homeomorfismos $\phi_y : U_y \longrightarrow A_y$, $\phi_x : U_x \longrightarrow A_x$, A_y, A_x abertos do plano complexo centrados na origem com $\phi_x(x) = 0 = \phi_y(y)$, tais que a composição $h := \phi_y \circ \phi \circ \phi_x^{-1} : A_x \longrightarrow A_y$ é analítica. Mais ainda, é possível tomar ϕ_x, ϕ_y tais que para todo $z \in A_x$, com $z \neq 0$, tem-se $h(z) = z^k$.[1]

Como h é analítica em A_x, para todo $z \in A_x$, $h(z)$ é da forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. Assim, aquele k é o primeiro índice tal que $a_k \neq 0$. Vamos chamar o inteiro k *índice de ramificação* do ponto x, e se $k > 1$ diz-se que x é um *ponto de ramificação.*

Conhecemos as características da função h:

1. A pré-imagem do zero é somente o zero.
2. Qualquer outro ponto tem k pré-imagens.

[1] Ver [Fu], capítulo 19, seção 19.a, páginas 263-266.

Portanto, $\phi : U_x \longrightarrow \phi(U_x)$ é do mesmo tipo. Sendo estas as propriedades inspiradoras para o desenvolvimento da teoria dos revestimentos ramificados e levando em consideração que são conseqüência de ϕ ser analítica e sobrejetora, surge a seguinte questão:
Se $f : S_1 \longrightarrow S_2$ é uma função sobrejetora entre duas superfícies, que condições temos que impor sobre f para que localmente se comporte como uma função analítica mesmo que alguma das superfícies seja não orientável?

Observa-se o seguinte:
Se S_1, S_2 são superfícies sobre as quais é possível definir uma estrutura complexa tal que elas se tornem superfícies de Riemann, basta pegar f analítica. Mas acontece que todas as superfícies sobre as quais é possível definir tal estrutura são orientáveis. Aliás, S é superfície de Riemann se e somente se S é orientável.[2]

Para o caso das superfícies não orientáveis, foram estudadas as propriedades topológicas das funções analíticas que segundo [St], são conseqüências das duas seguintes:
1. Toda função analítica é aberta.
2. Nenhum conjunto contínuo[3] é enviado por uma função analítica em um único ponto.

Define-se como *Transformação interior* toda transformação contínua entre duas superfícies que leve abertos em abertos e tal que nenhum conjunto contínuo é levado em um ponto só, isto é, a pré-imagem de todo ponto é um conjunto totalmente desconexo.

Temos então que todo homeomorfismo é uma transformação interior assim como toda função analítica, e que a composição de transformações interiores é transformação interior.

Para o estudo das propriedades locais das transformações interiores entre superfícies, basta considerar a transformação entre planos euclidianos. Seja $f : E \longrightarrow F$ uma transformação interior do plano E no plano $F = f(E)$, $q \in F$ e $p \in f^{-1}(q)$, D um domínio aberto[4] de F com $q \in D$ e $\Delta = \bar{D}$. Denote por (Δ, p) o fecho da componente conexa por caminhos de $f^{-1}(D)$ que contém p. Vamos dizer que (Δ, p) é o *domínio máximo* de Δ

[2]Ver [St], capítulo V, seção 1, página 102.
[3]Conjunto fechado e conexo não unitário.
[4]Conjunto aberto e conexo.

relacionado a p.

A imagem de (Δ, p) está contida em Δ, mas pode não ocupar todo o domínio. Se $a \in Int((\Delta, p))$ então $f(a) \in Int(\Delta)$, e se $a \in \partial(\Delta, p)$ então $f(a) \in \partial(\Delta)$.

Define-se como *domínio normal* do plano E por f, todo domínio $\delta \subset E$ fechado[5] e compacto[6] tal que se $a \in \partial(\delta)$ então $f(a) \in \partial(f(\delta))$. $f(\delta)$ é um domínio fechado e limitado contido em F. Com a notação acima, tomando $\Delta = f(\delta)$ e $p \in \delta$ então $\delta = (\Delta, p)$. Reciprocamente, se (Δ, p), domínio máximo de um domínio Δ dado, é fechado e limitado em E, então ele é normal. De fato, a imagem de (Δ, p) é compacta e igual a Δ.

Proposição 1.1 *Se $f : E \longrightarrow F$ é uma transformação interior do plano no plano então são satisfeitas as seguintes propriedades:*
(1) Se δ é um domínio normal, $\Delta = f(\delta)$, $p \in Int(\delta)$, e $\Delta' \subset \Delta$ é um domínio fechado com $q = f(p) \in \Delta'$, então o domínio (Δ', p) é normal.
(2) Dois domínios máximos quaisquer de Δ com um ponto em comum são iguais.
(3) Dentro de uma vizinhança qualquer de p, existe um domínio normal contendo p.

Demonstração: *(1)* e *(2)* saem da definição de domínio máximo. Para *(3)*, é suficiente pegar na vizinhança de p uma curva fechada simples γ em torno de p que não passe por nenhum outro ponto p' tal que $f(p') = f(p)$. O conjunto dos pontos que satisfazem esta igualdade, segundo uma das condições das transformações interiores, é um conjunto totalmente desconexo. Seja então $\rho > 0$ a distancia mínima de $f(\gamma)$ a $f(p) = q$. Se Δ é um domínio determinado por um círculo com centro em q e raio ρ, o domínio (Δ, p) é normal, pois é interior a γ e por isso é fechado e limitado. □

Lema 1.2 *Seja $f : E \longrightarrow F$ uma transformação interior e δ um domínio normal de E tal que $f(\delta) = \Delta$. A todo arco simples Σ com ponto inicial q e ponto final l contido no interior de Δ, e a todo ponto $p \in \delta$ tal que $f(p) = q$, corresponde um arco simples σ com ponto inicial p e contido no interior de δ tal que $f(\sigma) = \Sigma$, e $f : \sigma \longrightarrow \Sigma$ é um homeomorfismo.*

[5] Conjunto fechado tal que seu interior é um domínio aberto e todos seus pontos de fronteira são pontos de acumulação de seus pontos interiores.

[6] Notemos que como neste caso estamos trabalhando sobre o plano, basta pedir que δ seja limitado.

Demonstração: Seja $\Sigma : [0,1] \longrightarrow \Delta$, um caminho tal que $\Sigma(0) = q$ e $\Sigma(1) = l$. Encerremos cada um dos 2^n arcos determinados sobre Σ por $t = \frac{i}{2^n}$, $t \in [0,1]$ e $i = 1, \ldots, 2^n$, com domínios fechados Δ_n^i tais que:

1. $\Delta_n^i \subset \Delta$.
2. $\Delta_n^i \cap \Delta_n^j \neq \emptyset$ se e somente se $j = i \pm 1$.

É fácil satisfazer estas duas condições cobrindo Σ com círculos de centro em Σ e raio ρ fixo e suficientemente pequeno que dependa de n tal que:

3. $\Delta_{n+1}^i \subset \Delta_n^{i'}$, se o arco contido em Δ_{n+1}^i é um sub-arco do arco contido em $\Delta_n^{i'}$.
4. Quando n tenda a ∞, ρ tenda a 0.

O objetivo da última condição é que a união destes círculos tenda a Σ quando n tenda a infinito.

À cadeia (Δ_n^i), $i = 1, \ldots, 2^n$, faremos corresponder dentro de δ uma cadeia de domínios (δ_n^i) tal que para todo i, δ_n^i é o domínio máximo de Δ_n^i.

Em primeiro lugar vamos construir (Δ_n^1, p) que será δ_n^1. Já que ele está contido em δ é normal e sua imagem é todo Δ_n^1. Existe portanto dentro de δ_n^1, um ponto p_1 no mínimo tal que $f(p_1) = q_1$, onde q_i é o ponto dado por $t = \frac{i}{2^n}$. O conjunto dos pontos $p_1 \in \delta_n^1$ tais que $f(p_1) = q_1$ é fechado e compacto. Em torno de cada um destes pontos consideremos círculos σ suficientemente pequenos tais que $f(\sigma)$ está contido no interior de Δ_n^2, isto é possível pois q_1 está no interior deste domínio e f é contínua. Pela compacidade, podemos escolher um número finito de σ's que cobrem o conjunto dos p_1's. Do item *(2)* da proposição 1.1 , dois domínios (Δ_n^2, p_1) e (Δ_n^2, p_1') com p_1, p_1' no mesmo σ são iguais. Chamemos δ_n^2 quaisquer dos (Δ_n^2, p_1). Sobre cada δ_n^2 fazemos um procedimento análogo ao feito anteriormente sobre δ_n^1 mas trocando q_1 por q_2 e obtemos assim um número finito de cadeias (δ_n^i). Define-se o número n como o *posto* das cadeias (δ_n^i).

Seja m um inteiro positivo. A cadeia (Δ_{n+m}^i), $i = 1, \ldots, 2^{n+m}$, construída no interior da cadeia (Δ_n^i), $i = 1, \ldots, 2^n$, é tal que os primeiros 2^m domínios estão contidos dentro do domínio Δ_n^1, os 2^m domínios seguintes estão contidos no Δ_n^2, e assim por diante. Cada Δ_n^i contém 2^m domínios da cadeia (Δ_{n+m}^i). Se $r < m$ é um inteiro positivo, a cadeia (Δ_{n+r}^i) está contida na cadeia (Δ_n^i) e contém a cadeia (Δ_{n+m}^i). Analogamente, uma

cadeia (δ^i_{n+m}) está contida dentro de certa cadeia (δ^i_n), e se $r < m$, (δ^i_{n+r}) contém (δ^i_{n+m}) mas está contida na cadeia (δ^i_n). Entre as cadeias (δ^i_1), existe no mínimo uma que contém cadeias de todos os postos, pois o número de cadeias (δ^i_1) é finito. Peguemos uma cadeia de posto 1 que satisfaz esta condição. Entre as cadeias (δ^i_2) que ela contém, escolha uma que contém cadeias de todos os postos. Podemos continuar o processo indefinidamente e obtemos assim uma série de cadeias

$$(\delta^i_1), (\delta^i_2), ..., (\delta^i_n), ... \tag{1.1}$$

cada uma contida na anterior e contendo as seguintes. Assim a seqüência (1.1), é formada por conjuntos contínuos, limitados e encaixados. O conjunto comum σ entre eles é um conjunto contínuo ou é um ponto só. Logo σ deve conter no mínimo um ponto x_0 tal que $f(x_0) = y_0$, com $y_0 \in \Sigma$. De fato, todo conjunto de (1.1) contém um ponto que satisfaz esta condição. Pegando um destes pontos dentro de cada conjunto, qualquer ponto de acumulação do conjunto assim construído satisfaz a última igualdade e pertence a σ. Por outro lado, as cadeias (Δ^i_n) tendem a Σ quando n tende a infinito, donde $f(\sigma) \subset \Sigma$ e portanto $f(\sigma) = \Sigma$. Resta mostrar que f é injetora sobre σ, pois sendo contínua e σ limitado esta restrição será um homeomorfismo. Sejam a_1 e a_2 dois pontos distintos de σ tais que $f(a_1) = f(a_2) = b$. É claro que os domínios δ^i_n, δ^j_n que contém a_1, a_2 são iguais ou são vizinhos, pois se os Δ^i_n, Δ^j_n correspondentes têm intersecção não vazia, eles são iguais ou $j = i \pm 1$. Eles formam então um conjunto contínuo c_n e os conjuntos da série

$$c_1, c_2, ..., c_n, ...$$

são encaixados. Os c_n tem um conjunto contínuo c em comum que contém a_1, a_2. Portanto $f(c) = b$, já que b é o único ponto comum entre os $f(c_n)$, o que contradiz uma das condições das transformações interiores. □

Lema 1.3 *Dentro de todo domínio normal δ existe somente um número finito de caminhos σ com ponto inicial p satisfazendo as condições do lema anterior.*

Demonstração: Notemos que se σ_1, σ_2 são dois de tais caminhos, o único ponto que têm em comum é p, seu ponto inicial. Por absurdo suponha que têm outro ponto em

comum s, $s \neq p$. Então um sub-arco de σ_1 e um de σ_2 formam uma curva simples fechada determinando no plano um domínio de Jordan[7] d limitado. $f(d)$ é um domínio fechado e limitado tendo por fronteira um subconjunto de Σ o que é impossível, pois Σ é simples.

Suponha agora que existem infinitos caminhos $\sigma_1, \sigma_2, ...$ que satisfazem as condições do lema anterior. Sejam $b_1, b_2, ...$ seus pontos finais respectivamente com $b_i \neq b_j$ se $i \neq j$. Já que os b_i's estão dentro de δ e δ é domínio normal, o conjunto de b_i's tem um ponto de acumulação $b_0 \in \delta$ e é claro que $f(b_0) = l$. O ponto b_0 é interior a δ já que δ é normal e $l \in Int(\Delta)$.

Prolonguemos Σ por um arco Σ' com ponto inicial l e ponto final $r \in \Delta$ tal que $\Sigma.\Sigma'$ seja um arco simples.

A cada um dos b_i corresponde pelo lema anterior um caminho σ_i' tal que $f(\sigma_i') = \Sigma'$ portanto $\sigma_i.\sigma_i'$ se transforma em $\Sigma.\Sigma'$ por f, e os σ_i' não têm pontos em comum. Em particular, seus pontos finais b_i' são distintos e $f(b_i') = r$. Logo o conjunto dos b_i' tem um ponto de acumulação $b_0' \in \delta$ tal que $f(b_0') = r$.

Em torno de b_0 e b_0' peguemos dois círculos com b_0, b_0' como centros e raio suficientemente pequeno tal que estejam contidos no interior de δ. Existem dois caminhos, σ_j', σ_{j+1}', com seus pontos iniciais no círculo com centro em b_0 e com seus pontos finais no círculo com centro em b_0'. Sejam α, α' caminhos entre estes círculos tais que α junta b_j com b_{j+1} e α' junta b_j' com b_{j+1}'. O caminho $\sigma_j'.\alpha'.\sigma_{j+1}'^{-1}.\alpha^{-1}$ é uma curva fechada que determina um domínio de Jordan d. $f(d)$ tem todos os seus pontos fronteira sobre os caminhos Σ, $f(\alpha')$ e $f(\alpha)$, o que é impossível pois $f(d)$ é um domínio fechado e limitado. □

Corolario 1.4 *Se $q \in F$, $f^{-1}(q)$ é um conjunto de pontos isolados.*

Demonstração: $f^{-1}(q)$ é fechado, pois f é contínua. A prova da proposição reduz-se a mostrar que $f^{-1}(q)$ não tem pontos de acumulação no plano E.

Por absurdo, seja p_0 um ponto de acumulação de $f^{-1}(q)$. Pela proposição 1.1 é possível pegar um domínio normal δ tal que $p_0 \in \delta$. Seja $\Delta = f(\delta)$, $q = f(p_0) \in Int(\Delta)$ e $\Sigma \subset \Delta$ um arco simples com ponto inicial q e ponto final q'. A cardinalidade de $f^{-1}(q)$ é infinita.

[7] Domínio compacto determinado por uma curva fechada simples no plano.

Construímos caminhos σ da forma que se fez na demonstração do lema 1.2 partindo dos pontos em $f^{-1}(q)$ e contidos em δ. Pelo lema 1.3, cada um destes caminhos somente encontra um número finito dos outros. Seja σ_1 um caminho do conjunto, pela afirmação anterior existem infinitos caminhos que não cortam σ_1. Seja σ_2 um deles. Analogamente existe um número infinito de caminhos que não cortam nem σ_1 nem σ_2. Podemos continuar indefinidamente e obtemos assim uma série

$$\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n, ..$$

tal que $f(\sigma_i) = \Sigma$ e $\sigma_i \cap \sigma_j = \phi, i \neq j$, o que contradiz o lema 1.3. □

Pelo corolário anterior, para todo $p \in E$ existe uma vizinhança U_p de p, $U_p \subset E$ tal que se $x \in U_p$ e $x \neq p$ tem-se $f(x) \neq f(p)$.

Seja $\delta \subset U_p$ um domínio normal com $p \in Int(\delta)$ e seja Γ um círculo de centro $q = f(p)$, $\Gamma \subset \Delta = f(\delta)$ e $r \in C = \partial(\Gamma)$. Existe um número finito de pontos b_i, $i = 1, ..., m$, $b_i \in \delta$ tais que $f(b_i) = r$. Como δ é normal, pelo lema 1.2 existe um arco simples $\sigma_1 \subset \delta$ partindo de b_1 tal que $f(\sigma_1) = C$, de tal modo que a todo ponto de C diferente de r corresponde um único ponto sobre σ_1 e a r correspondem os extremos b_1 e b_2 de σ_1. Suponha $b_1 \neq b_2$ e seja γ_2 um caminho análogo a γ_1 com ponto inicial b_2 e ponto final b_3. Deste modo obtemos uma curva fechada simples $\mathscr{C}$ interior a δ. Seja γ o domínio de Jordan determinado por $\mathscr{C}$ sobre E. $f(\gamma)$ é fechado e compacto e todos seus pontos fronteira estão sobre C. Logo $f(\gamma)$ coincide com Γ já que γ é normal e está contido em δ. Quando percorremos $\mathscr{C}$ em um sentido determinado, percorremos n vezes C, $n \leq m$.

Se $n = 1$, $f : \gamma \longrightarrow \Gamma$ é um homeomorfismo. De fato, suponha que no interior de γ existem dois pontos p_1, p_2, tais que $f(p_1) = f(p_2) = l$. Considere um arco simples $\Sigma \subset \Gamma$ que passa pelos pontos q, l e r. Existem dois arcos simples dentro de γ partindo de p_1, p_2 que por f viram sub-arcos de Σ compreendidos entre l e r, e dois arcos análogos partindo dos mesmos pontos que por f viram sub-arcos de Σ compreendidos entre q e l. Os primeiros têm como ponto final b, único ponto de γ tendo r como imagem, pois $n = 1$. Os últimos têm como ponto final p, único ponto de U_p com q como imagem. Existe então um domínio de Jordan d determinado por estes arcos ou por alguns de seus sub-arcos. $f(d)$ é fechado e compacto e toda sua fronteira está sobre Σ, mas Σ é um arco

simples e portanto $p_1 = p_2$. Por outro lado, a transformação sobre $\mathscr{C}$ mostra que todo ponto de C inclusive r tem somente uma pré-imagem. Logo, neste caso, $f : \gamma \longrightarrow \Gamma$ é um homeomorfismo.

Suponha $n > 1$. Sejam $b_1 \neq b_2$ e σ_1, σ_2 dois arcos simples partindo de b_1, b_2 respectivamente que viram Σ por f. Estes dois arcos são interiores a γ (exceto b_1, b_2), pois $p \in Int(\delta)$ e nenhum deles corta $\mathscr{C}$. p é o único ponto comum entre eles. De fato, suponha t outro ponto comum, o primeiro que achamos ao percorrer σ_1, σ_2 de b_1, b_2 a p. Os sub-arcos determinados por b_1t, b_2t e b_1b_2 determinam um domínio de Jordan $d \subset \gamma$ e $p \notin d$, assim nenhum ponto dele tem q como imagem. Mas $f(d)$ é fechado e compacto e toda sua fronteira está sobre Σ e C, logo $f(d) = \Gamma$, e temos uma contradição pois $q \in \Gamma$ não tem pré-imagem.

Sejam b_1, b_2 consecutivos sobre $\mathscr{C}$. O domínio de Jordan determinado por σ_1, σ_2 e o arco determinado por b_1b_2 transforma-se em Γ por f. A transformação é um homeomorfismo sobre cada σ_i e sobre o arco b_1b_2. Todo ponto interior se transforma em pontos de Γ que não estão em Σ nem em C, e a transformação no interior também é homeomorfismo. Temos demonstrado o seguinte teorema:

Teorema 1.5 *Seja $f : S_1 \longrightarrow S_2$ uma transformação interior entre superfícies, $p \in S_1$. Então dentro de toda vizinhança de p, existe um domínio de Jordan γ normal, tendo p como ponto interior tal que é possível dividir γ em n setores por meio de n arcos simples que têm seus pontos finais na fronteira de γ e sendo p o ponto inicial de todos e o único ponto comum. Além disso, f restrita ao interior de cada setor é um homeomorfismo assim como sobre cada um dos arcos de divisão de γ.* □

Em resumo, temos que para todo $p \in S_1$ e $q = f(p) \in S_2$ existem vizinhanças U_p, U_q sobre as quais a função $f : U_p \longrightarrow U_q$ é tal que a única pré-imagem de q é p e qualquer outro ponto tem n pré-imagens. Assim, quando $n = 1$, sobre U_p, f é homeomorfismo local, mas se $n > 1$, dizemos que p é um ponto de ramificação.

Capítulo 2

Revestimentos Ramificados

Neste capítulo introduzimos a teoria dos revestimentos ramificados baseados nos artigos [Hu], [EKS] e [Ez].

Seja $N^- = N \cup B$ uma superfície, onde N é uma superfície sem bordo e as componentes conexas de B são homeomorfas a $\mathbb{S}^1$ ou a $\mathbb{R}$. Caso $B = \emptyset$, N^- é simplesmente uma superfície sem bordo.[1] No que segue, vamos supor N^- conexa e localmente conexa por caminhos (portanto, conexa por caminhos).

Um *revestimento ramificado* sobre N^-, é um conjunto (M^-, ϕ, N^-, B_ϕ) tal que:

1. M^- é uma superfície não necessariamente conexa, que chamaremos *superfície de revestimento.*

2. $\phi : M^- \longrightarrow N^-$ é uma função contínua, sobrejetora e interior.

3. B_ϕ é um conjunto discreto contido em N^- tal que $B_\phi \cap B = \emptyset$ e é a imagem dos pontos de ramificação de M^- por ϕ.[2] Isto é, $\phi : \phi^{-1}(N - B_\phi) \longrightarrow (N - B_\phi)$ é um revestimento *não* ramificado de grau d.

Chamaremos à restrição $\phi^{-1}(N^- - B_\phi) \longrightarrow N^- - B_\phi$ o *revestimento não ramificado associado a* (M^-, ϕ, N^-, B_ϕ).

[1] Ver [AS], capítulo I, seção 13 página 23.

[2] Na literatura faz-se um abuso de linguagem e diz-se que o conjunto B_ϕ é o conjunto dos pontos de ramificação.

Se a superfície de revestimento M é conexa, dizemos que (M, ϕ, N, B_ϕ) é um *revestimento ramificado conexo.*

Que $\phi : \phi^{-1}(N - B_\phi) \longrightarrow (N - B_\phi)$ seja um revestimento *não* ramificado de grau d quer dizer que para todo $x_0 \in N^- - B_\phi$ existe uma vizinhança aberta U_{x_o} tal que as componentes conexas de $\phi^{-1}(U_{x_0})$ são homeomorfas a U_{x_0} por ϕ, e que a cardinalidade do conjunto $\phi^{-1}(x_0)$, $\#(\phi^{-1}(x_0))$, é igual a d.

Já que $B_\phi = \{x_i\}_{i\in I}$ é discreto, para todo $x_i \in B_\phi$ existe uma vizinhança aberta V_{x_i} tal que $V_{x_i} \cap B_\phi = \{x_i\}$ e ϕ restrita a cada uma das componentes conexas $\widetilde{V}_{i_j}$ de $\phi^{-1}(V_{x_i})$, é do tipo $z \longmapsto z^{a_{i_j}}$, sendo $a_{i_j} \in \mathbb{Z}^+$ o índice de ramificação local, para $j \in J_i$ com $\#(J_i) = \#(\phi^{-1}(x_i))$. Isto é, na restrição $\phi : \widetilde{V}_{i_j} \longrightarrow V_{x_i}$ qualquer $x \neq x_i$ tem a_{i_j} pré-imagens sendo que x_i só tem uma. É justamente este o motivo pelo qual tiramos B_ϕ na condição 3. Além disso, a mesma condição implica que $\sum_{j\in J_i} a_{i_j} = d$, assim cada um dos $x_i \in B_\phi$, determina uma partição $A_i = [a_{i_j}]_{j\in J_i}$ de d dada pelos índices locais de ramificação. Denotemos por $\mathscr{D}$ o conjunto destas partições, $\mathscr{D} = \{A_i\}_{i\in I}$, e vamos chamá-lo *dado de ramificação.*

Para cada $x_i \in B_\phi$ definimos:

$$\nu(A_i) = \sum_{j\in J_i}(a_{i_j} - 1)$$

como o *defeito do ponto* x_i. Este defeito dá conta da quantidade de pontos que fazem falta na pré-imagem de x_i para ser um ponto "bom", no sentido de não ser imagem de um ponto de ramificação. Portanto $x \notin B_\phi$ implica $\nu(A) = 0$, pois $A = [1, 1, \ldots]$.

Definimos o *defeito do revestimento* como:

$$\nu(\mathscr{D}) = \sum_{i\in I} \nu(A_i).$$

É muito interessante entender o que acontece quando $B \neq \emptyset$, lembremos que $B \cap B_\phi = \emptyset$.

Seja $\{B\}$ o conjunto das componentes conexas de B. Se $C \in \{B\}$, C é homeomorfa a $\mathbb{S}^1$ ou a $\mathbb{R}$ e $\phi : \phi^{-1}(C) \longrightarrow C$ é um revestimento não ramificado.

Se C é uma linha, $\phi^{-1}(C)$ tem d componentes conexas e todas são linhas. Neste caso vamos definir o defeito de C igual a zero, $\nu(C) = 0$.

Se C é homeomorfa a $\mathbb{S}^1$, seja K o conjunto de componentes conexas de $\phi^{-1}(C)$. Se $C_t \in K$, C_t é um círculo ou uma linha. Se C_t é uma linha então $\phi : C_t \longrightarrow C$ é o revestimento universal de $\mathbb{S}^1$ que tem um número infinito a_t de folhas, $a_t = \infty$. Mas se C_t é homeomorfo a $\mathbb{S}^1$, então $\phi : C_t \longrightarrow C$ é um revestimento com um número a_t finito de folhas. Neste caso definimos o defeito de C como $\nu(C) = \Sigma_{t\in T}(a_t - 1)$, $\#(T) = \#(K)$.

Vamos dizer que o revestimento (M^-, ϕ, N^-, B_ϕ) é *não ramificado em* C se $\nu(C) = 0$.[3] Note que isto só acontece quando todas as componentes conexas de $\phi^{-1}(C)$ são homeomorfas a $\mathbb{S}^1$ e para cada uma delas o revestimento $\phi : C_t \longrightarrow C$ é a identidade, isto é, quando o número de componentes conexas é igual ao grau do revestimento.

Da discussão anterior é claro que as componentes conexas do bordo também determinam uma partição do grau do revestimento cujos termos podem ser finitos ou infinitos dependendo do caso.

Se $\mathscr{D}$ é um conjunto de partições não triviais de um inteiro positivo d, vamos dizer que $\mathscr{D}$ é *realizável* se existe um revestimento ramificado conexo tendo $\mathscr{D}$ como dado de ramificação.

Surge a seguinte questão geométrica:

Questão 1 *Dada uma superfície $N^- = N \cup B$, um candidato d para grau e um conjunto de partições $\mathscr{D} = \{A_i\}_{i\in I}$ de d onde cada termo de A_i, $i \in I$, é finito, será que existe um revestimento ramificado conexo (M^-, ϕ, N^-, B_ϕ) tal que realize $\mathscr{D}$?*

A resposta foi dada por Hurwitz e em essência o que ele fez foi traduzir o problema geométrico para um problema algébrico que consiste na realização de um determinado subgrupo de permutações do grupo simétrico $Sym(\Omega)$ de um conjunto Ω com d elementos.

Antes de enunciar e demonstrar o teorema vamos estudar um pouco algumas implicações da existência destes revestimentos.

Seja (M^-, ϕ, N^-, B_ϕ) um revestimento ramificado de grau d, $x_i \in B_\phi$ e V_{x_i} uma vizinhança de x_i tal que ϕ restrita às componentes conexas $\widetilde{V}_{i_j}$ de $\phi^{-1}(V_{x_i})$ é do tipo $z \longmapsto z^{a_{i_j}}$,

[3] Observemos que aqui o termo ramificação não tem nada a ver com pontos de ramificação, simplesmente descreve o caso em que o número de componentes conexas de $\phi^{-1}(C)$ é diferente de d.

$j \in J_i$. Seja $\phi^{-1}(x_i) = \{y_j\}_{j\in J_i}$, $V_{x_i}^\circ = V_{x_i} - \{x_i\}$ e $\widetilde{V}_{i_j}^\circ = \widetilde{V}_{i_j} - \{y_j\}$. É claro que $\phi : \bigcup_{j\in J_i} \widetilde{V}_{i_j} \longrightarrow V_{x_i}$ é um revestimento ramificado tendo a ramificação localizada em x_i, e $\phi : \bigcup_{j\in J_i} \widetilde{V}_{i_j}^\circ \longrightarrow V_{x_i}^\circ$ é seu revestimento não ramificado associado. Pela teoria geral de revestimentos[4] sabemos que existe uma ação a direita do grupo $\pi_1(V_{x_i}^\circ, x_{0_i})$, sobre o conjunto $\Omega_i = \phi^{-1}(x_{0_i}) = \{z_l\}_{l=1}^d$, definida por

$$\begin{aligned} \Omega_i \times \pi_1(V_{x_i}^\circ, x_{0_i}) &\longrightarrow \Omega_i \\ (z_l, \alpha) &\longmapsto z_l.\alpha = \widetilde{\alpha}(1) \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $\widetilde{\alpha}(1)$ é o ponto final do único levantamento de um representante da classe α tendo z_l como ponto inicial. Além disso, a ação será transitiva se e somente se $\bigcup_{j\in J_i} \widetilde{V}_{i_j}^\circ$ é conexo. No nosso caso $\pi_1(V_{x_i}^\circ, x_{0_i}) \cong \mathbb{Z}$, seja α_{x_i} seu gerador. Logo é α_{x_i} quem determina (2.1). Para todo $i \in I$ e $j \in J_i$, $\phi : \widetilde{V}_{i_j}^\circ \longrightarrow V_{x_i}^\circ$ é um revestimento não ramificado conexo, portanto $\pi_1(V_{x_i}^\circ, x_{0_i})$ age transitivamente sobre $\Omega_{i_j} = \Omega_i \cap \widetilde{V}_{i_j}^\circ$ e mais que isso, a ação é simplesmente uma permutação cíclica dos elementos de Ω_{i_j}, isto é, podemos considerar $\Omega_{i_j} = \{z_{j_1}, z_{j_2}, ..., z_{j_{a_{i_j}}}\}$ tal que $z_{j_s}.\alpha_{x_i} = z_{j_{s+1}}$, $s = 1, ..., a_{i_j} - 1$ e $z_{j_{a_{i_j}}}.\alpha_{x_i} = z_{j_1}$. Assim, o homomorfismo associado[5] a esta ação é:

$$\begin{aligned} \Psi_i : \pi_1(V_{x_i}^\circ, x_{0_i}) &\longrightarrow Sym(\Omega_i) \\ \alpha_{x_i} &\longmapsto \prod_{j\in J_i} (z_{j_1}\ z_{j_2} \ldots z_{j_{a_{i_j}}}) \end{aligned}$$

donde a ação de cada α_{x_i} sobre Ω_i descreve completamente a ramificação sobre x_i.

Seja $\widehat{N} = N^- - B_\phi$ e $z^* \in \widehat{N}$. Já que $\widehat{N}$ é conexo por caminhos, existe um caminho v_i de z^* a x_{0_i}. Notemos que a classe $\{v_i^*\}$ do caminho $v_i^* = v_i.\alpha_{x_i}.v_i^{-1}$ age sobre $\Omega = \phi^{-1}(z^*)$ e descreve completamente a mesma ramificação determinada por α_{x_i}. Uma situação análoga temos para cada $C^q \in \{B\}$ homeomorfa a $\mathbb{S}^1$. Notemos que $\pi_1(C^q, \hat{x}_q)$ é cíclico infinito, com $\{C^q\}$ como gerador dado por uma parametrização apropriada, e sua ação sobre $\phi^{-1}(\hat{x}_q)$ determina completamente a ramificação sobre C^q. Seja w_q um caminho em $\widehat{N}$ tal que $w_q(0) = z^*$, $w_q(1) = \hat{x}_q$ e para todo $t \in (0,1)$ $w_q(t) \in N$. A ação sobre Ω da classe $\{w_q^*\}$ do caminho $w_q^* = w_q.\{C^q\}.w_q^{-1}$ descreve a mesma ramificação determinada por $\{C^q\}$.

[4] Ver [Ma], capítulo V, seção 7, página 161.

[5] Ver [DM] página 5.

Logo o homomorfismo que corresponde à ação descrita acima é

$$\begin{aligned} \Psi : \pi_1(\widehat{N}, z^*) &\longrightarrow Sym(\Omega) \\ \{v_i^*\} &\longmapsto \sigma_{x_i} \\ \{w_q^*\} &\longmapsto \lambda_q \end{aligned}$$

onde o conjunto dos comprimentos dos ciclos dados pela decomposição única das permutações σ_{x_i} e λ_q descrevem a ramificação sobre x_i e C^q respectivamente. É importante notar que para garantir a conexidade de M^- basta a existência de uma classe $\beta \in \pi_1(\widehat{N}, z^*)$ tal que a permutação $\Psi(\beta)$ seja um ciclo de comprimento d, pois isto dá conta da transitividade da ação. Chamaremos o homomorfismo Ψ a *representação de Hurwitz* associada ao revestimento.

Considerando a notação acima enunciamos algebricamente a **Questão 1**:
Seja N^- uma superfície, $d \in \mathbb{Z}^+$ e $\mathscr{D} = \{A_i\}_{i \in I}$ um conjunto de partições de d onde cada termo de A_i é finito. Seja $\widehat{N} = N^- - \{x_i\}_{i \in I}$ e Ω um conjunto com d elementos. Será que existe um homomorfismo $\Psi : \pi_1(\widehat{N}, z^*) \longrightarrow Sym(\Omega)$ tal que para todo $i \in I$ o conjunto dos comprimentos dos ciclos da permutação $\Psi(\{v_i^*\})$ determine a partição A_i, e que a ação associada a Ψ de $\pi_1(\widehat{N}, z^*)$ sobre Ω seja transitiva?

Teorema 2.1 (Hurwitz) *Seja $N^- = N \cup B$ uma superfície, $\mathscr{D} = \{A_i\}_{i \in I}$ uma coleção de partições de um inteiro positivo d (não necessariamente finito) onde cada termo da partição A_i, $i \in I$, é finito. $\mathscr{B} = \{B_q\}_{q \in Q}$ uma coleção de partições de d, onde $\#(Q) = \#(\{B\})$ e os termos das partições B_q podem ser finitos ou infinitos. Então existe um revestimento ramificado de grau d, (M^-, ϕ, N^-, B_ϕ), tendo $\mathscr{D}$ como dado de ramificação se e somente se existe uma ação do grupo $\pi_1(\widehat{N}, z^*)$ sobre um conjunto Ω com d elementos tal que as órbitas dadas pela ação das classes $\{v_i^*\}$ e de $\{w_q^*\}$ sobre Ω determinam as partições A_i, B_q respectivamente. Mais ainda, M^- é conexo se e somente se a ação de $\pi_1(\widehat{N}, z^*)$ sobre Ω é transitiva.*

Demonstração: A condição necessária foi feita na discussão acima assim como a condição necessária e suficiente para a conexidade de M^-. Basta então demonstrar a condição suficiente do primeiro enunciado. Vamos supor que existe uma ação de $\pi_1(\widehat{N}, z^*)$ sobre

um conjunto Ω com d elementos tal que as órbitas dadas pela ação de $\{v_i^*\}$ e de $\{w_q^*\}$ sobre Ω descrevem as partições A_i e B_q respectivamente, $i \in I$, $q \in Q$. Portanto, existe um revestimento não ramificado $(\widehat{M}, \widehat{\phi}, \widehat{N})$ tal que $\widehat{\phi}^{-1}(z^*) = \Omega$.[6] Para cada $i \in I$, as órbitas dadas pela ação de $\{v_i^*\}$ sobre Ω estão em correspondência com as componentes conexas $\widetilde{V}_{i_j}^\circ$ de $\widehat{\phi}^{-1}(V_{x_i}^\circ)$, e para todo $q \in Q$ as órbitas da ação de $\{w_q^*\}$ sobre Ω estão em correspondência com as componentes conexas de $\widehat{\phi}^{-1}(C^q)$. A restrição de $\widehat{\phi}$ sobre cada $\widetilde{V}_{i_j}^\circ$ é um revestimento não ramificado de $V_{x_i}^\circ$, e este revestimento está determinado pelo subgrupo $\widehat{\phi}_*(\pi_1(\widetilde{V}_{i_j}^\circ, z_{j_1}))$ de $\pi_1(V_{x_i}^\circ, x_{0_i}) \cong \mathbb{Z}$.[7] Assim nossas únicas opções para descrever $\widetilde{V}_{i_j}^\circ$ são os espaços $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Im} z < 1\}$ ou $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < r,\ r \in \mathbb{Z}^+\}$. Mas a primeira opção é eliminada pois queremos construir um revestimento ramificado (M^-, ϕ, N^-, B_ϕ) e por definição ϕ tem que ser uma transformação interior e neste caso a pré-imagem do x_i será um conjunto contínuo, o que é impossível. Logo $\widetilde{V}_{i_j}^\circ$ é homeomorfo a $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < r,\ r \in \mathbb{Z}^+\}$. Portanto, podemos estender nosso revestimento $(\widehat{M}^-\widehat{\phi}, \widehat{N}^-)$ para um revestimento ramificado (M^-, ϕ, N^-, B_ϕ) simplesmente preenchendo os "buraquinhos" de maneira natural, isto é, levando o "zero" de $\widetilde{V}_{i_j}$ no x_i, $j \in J_i$. □

Com as hipóteses e a notação acima o teorema de Hurwitz pode reformular-se assim:

Corolario 2.2 *Existe um revestimento ramificado (M^-, ϕ, N^-, B_ϕ) de grau d tendo $\mathscr{D}$ como dado de ramificação se e somente se é possível definir o homomorfismo Ψ. Mais ainda, M^- é conexo se e somente se a ação que corresponde a Ψ é transitiva.* □

No caso que N^-, M^- sejam superfícies compactas , notemos que tanto B_ϕ quanto $\phi^{-1}(B_\phi)$ e d são finitos. Em particular se N^-, M^- são superfícies *fechadas*, isto é compactas e sem bordo.

Proposição 2.3 *Se $\phi : M \longrightarrow N$ é um revestimento ramificado de grau d entre superfícies fechadas então $\nu(\mathscr{D}) = d\chi(N) - \chi(M)$.*

Demonstração: Seja $B_\phi = \{x_1, \ldots, x_k\}$ e $\widehat{M} = \phi^{-1}(\widehat{N})$. Dada uma triangulação para $\widehat{N}$, o levantamento desta induz uma triangulação sobre $\widehat{M}$. Por cada simplexo em $\widehat{N}$

[6] Ver [Hu], proposição 1 página 168.

[7] Ver [Ma], teorema 6.6 página 159.

temos exatamente d simplexos em $\widehat{M}$. Isto é

$$\chi(\widehat{M}) = d\chi(\widehat{N}) \tag{2.2}$$

Mas $\chi(\widehat{N}) = \chi(N) - k$ e $\chi(\widehat{M}) = \chi(M) - \sum_{i=1}^{k}(d - \nu(A_i)) = \chi(M) - dk - \nu(\mathscr{D})$, logo substituindo em (2.2) temos que $\nu(\mathscr{D}) = d\chi(N) - \chi(M)$. □

A igualdade da proposição anterior é conhecida como *a fórmula de Riemann-Hurwitz.*

Se N é fechada as opções são:

$$N = \begin{cases} \mathbb{S}^2 & \text{Esfera} \\ \mathbb{T}_n & \text{Soma conexa de } n \text{ toros} \\ \mathbb{R}\mathrm{P}_n & \text{Soma conexa de } n \text{ planos projetivos } \mathbb{R}\mathrm{P}^2 \end{cases}$$

portanto

$$\pi_1(\widehat{N}, z^*) = \begin{cases} \langle \{v_1^*\}, \ldots, \{v_k^*\} | \{v_1^*\} \ldots \{v_k^*\} = 1 \rangle & N = \mathbb{S}^2 \\ \langle \{v_1^*\}, \ldots, \{v_k^*\}, \beta_1, \gamma_1, \ldots, \beta_n, \gamma_n | \{v_1^*\} \ldots \{v_k^*\} [\beta_1, \gamma_1] \ldots [\beta_n, \gamma_n] = 1 \rangle & N = \mathbb{T}_n \\ \langle \{v_1^*\}, \ldots, \{v_k^*\}, \beta_1, \ldots, \beta_n | \{v_1^*\} \ldots \{v_k^*\} \beta_1^2 \ldots \beta_n^2 = 1 \rangle & N = \mathbb{R}\mathrm{P}_n \end{cases}$$

assim, a construção de Ψ depende da relação r em cada grupo fundamental.

Notemos que quando é possível definir Ψ, em cada um dos casos $\Psi(r) = 1$ e a adaptação do teorema de Hurwitz a esta situação é a seguinte:

Corolario 2.4 *Seja N uma superfície fechada e $\mathscr{D} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ uma coleção de partições de d (onde é possível ter repetições). Então $\mathscr{D}$ é realizável se e somente se existe $\sigma_{x_i} \in S_d$ tal que o conjunto de comprimentos dos seus ciclos determinam a partição A_i, $i = 1, \ldots, k$, e:*

1. Para $N = \mathbb{S}^2$, $\sigma_{x_1} \ldots \sigma_{x_k} = 1$ e $\langle \sigma_{x_1}, \ldots, \sigma_{x_k} \rangle$ age transitivamente sobre $\{1, \ldots, d\}$.

2. Para $N = \mathbb{T}_n$, existem $\widehat{\beta}_j$, $\widehat{\gamma}_j \in S_d$, $1 \leq j \leq n$, tais que $\sigma_{x_1} \ldots \sigma_{x_k} [\widehat{\beta}_1, \widehat{\gamma}_1] \ldots [\widehat{\beta}_n, \widehat{\gamma}_n] = 1$ e $\langle \sigma_{x_1}, \ldots, \sigma_{x_k}, \widehat{\beta}_1, \widehat{\gamma}_1, \ldots, \widehat{\beta}_n, \widehat{\gamma}_n \rangle$ age transitivamente sobre $\{1, \ldots, d\}$.

3. Para $N = \mathbb{R}\mathrm{P}_n$, existem $\widehat{\beta}_j \in S_d$, $1 \leq j \leq n$, tais que $\sigma_{x_1} \ldots \sigma_{x_k} \widehat{\beta}_1^2 \ldots \widehat{\beta}_n^2 = 1$ e $\langle \sigma_{x_1}, \ldots, \sigma_{x_k}, \widehat{\beta}_1, \ldots, \widehat{\beta}_n \rangle$ age transitivamente sobre $\{1, \ldots, d\}$. □

Define-se o *Revestimento Orientável Duplo* de N, $\varphi : \widetilde{N} \longrightarrow N$, $N = \mathbb{R}\mathrm{P}_n$, como o revestimento não ramificado que corresponde ao subgrupo de $\pi_1(N, z^*)$ que é o kernel do homomorfismo

$$\begin{aligned} \omega : \pi_1(N, z^*) &\longrightarrow \{+1, -1\} \\ \beta_i &\longmapsto -1 \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq n$. Analogamente o revestimento orientável duplo de $\widehat{N}$, é o revestimento não ramificado que corresponde ao kernel do homomorfismo

$$\begin{aligned} \widehat{\omega} : \pi_1(\widehat{N}, z^*) &\longrightarrow \{+1, -1\} \\ \{v_i^*\} &\longmapsto +1 \\ \beta_j &\longmapsto -1 \end{aligned}$$

para $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq n$.

Por outro lado, se $\Psi : \pi_1(\widehat{N}, z^*) \longrightarrow S_d$ é a representação de Hurwitz associada a (M, ϕ, N, B_ϕ), então o revestimento não ramificado $\widehat{\phi} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{N}$, $\widehat{\phi} = \phi|_{\widehat{M}}$, corresponde ao subgrupo $\Psi^{-1}(S_{d-1}) \subset \pi_1(\widehat{N})$. Veja, o revestimento $\widehat{\phi} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{N}$ corresponde ao subgrupo $\widehat{\phi}_*(\pi_1(\widehat{M}, z_1)) \subset \pi_1(\widehat{N}, z^*)$, $z_1 \in \widehat{\phi}^{-1}(z^*)$, [8] assim, se $\alpha \in \widehat{\phi}_*(\pi_1(\widehat{M}, z_1))$, existe $\beta \in \pi_1(\widehat{M}, z_1)$ tal que $\widehat{\phi}_*(\beta) = \alpha$. Isto é, $\widetilde{\alpha}(0) = \widetilde{\alpha}(1) = z_1$, onde $\widetilde{\alpha}$ é o único levantamento de α tendo z_1 como ponto inicial. E segundo a ação que o revestimento determina, isto quer dizer que α pertence à isotropia de z_1, que denotamos por $I_{\pi_1(\widehat{N}, z^*)}(z_1)$. Donde $\widehat{phi}_*(\pi_1(\widehat{M}, z_1)) = I_{\pi_1(\widehat{N}, z^*)}(z_1) = \{\alpha \in \pi_1(\widehat{N}, z^*) \mid z_1.\alpha = z_1\}$. Logo, se $\alpha \in I_{\pi_1(\widehat{N}, z^*)}(z_1)$ então $\Psi(\alpha) \in S_{d-1}$.

Lema 2.5 *Seja $\phi : M \longrightarrow N$ é um revestimento ramificado conexo de grau d e $N = \mathbb{R}\mathrm{P}_n$. M é orientável se e somente se $\Psi^{-1}(S_{d-1}) \subset \mathrm{Ker}\ \widehat{\omega}$.* □

Notemos que o homomorfismo Ψ determinado por (M, ϕ, N, B_ϕ) não é único. De fato, ϕ determina um conjunto de classes de equivalência de homomorfismos. Vamos dizer que dois homomorfismos Ψ e Γ são equivalentes se existe uma permutação $\sigma \in S_d$ tal que para

[8] Ver [Ma], teorema 10.2 página 175.

todo $b \in \pi_1(\widehat{N}, z^*)$, $\Gamma(b) = \sigma^{-1}\Psi(b)\sigma$. Isto significa que para todo $b \in \pi_1(\widehat{N}, z^*)$, $\Psi(b)$ e $\Gamma(b)$ têm a mesma estrutura cíclica, e que vamos obter $\Gamma(b)$ simplesmente aplicando σ nos símbolos de $\Psi(b)$. Logo, renomeando os símbolos de $\phi^{-1}(z^*)$, ϕ induz Γ.

Suponhamos que $\phi : M \longrightarrow N$ e $\theta : L \longrightarrow N$ são revestimentos ramificados de grau d sobre N com $B_\phi = B_\theta$, e tais que induzem representações de Hurwitz equivalentes. Sejam $\phi^{-1}(z^*) = \{m_1, \ldots, m_d\}$, $\theta^{-1}(z^*) = \{l_1, \ldots, l_d\}$ e M_1 uma componente conexa de M. Vamos supor que $\{m_1, \ldots, m_{d_1}\}$ são as preimagens de z^* em M_1. Já que ϕ e θ induzem representações de Hurwitz equivalentes, existe $\sigma \in S_d$ tal que $\{l_{\sigma(1)}, \ldots, l_{\sigma(d_1)}\}$ são as preimagens de z^* na componente conexa L_1 de L. Assim, os revestimentos $\widehat{\phi}_1 : \widehat{M_1} \longrightarrow \widehat{N}$ e $\widehat{\theta}_1 : \widehat{L_1} \longrightarrow \widehat{N}$ são equivalentes.[9] Para demonstrar este fato, precisamos mostrar que existe um homeomorfismo $\mu : \widehat{M_1} \longrightarrow \widehat{L_1}$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \widehat{M_1} & \xrightarrow{\mu} & \widehat{L_1} \\ & \searrow^{\widehat{\phi}_1} & \downarrow{\scriptstyle \widehat{\theta}_1} \\ & & \widehat{N} \end{array}$$

comute. Mas isto equivale a demonstrar que $\widehat{\phi}_{1*}(\pi_1(\widehat{M_1}, m_1)) = \widehat{\theta}_{1*}(\pi_1(\widehat{L_1}, l))$,[10] para algum $l \in \{l_{\sigma(1)}, \ldots, l_{\sigma(d_1)}\}$. Vejamos:

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_{1*}(\pi_1(\widehat{M_1}, m_1)) &= \{\beta \in \pi_1(\widehat{N}, z^*) |\ m_1.\beta = m_1\} \\ &= \{\beta \in \pi_1(\widehat{N}, z^*) |\ \Psi(\beta)(1) = 1\} \\ &= \{\beta \in \pi_1(\widehat{N}, z^*) |\ \sigma\Gamma(\beta)\sigma^{-1}(1) = 1\} \\ &= \{\beta \in \pi_1(\widehat{N}, z^*) |\ \Gamma(\beta)(\sigma^{-1}(1)) = \sigma^{-1}(1)\} \\ &= \widehat{\theta}_{1*}(\pi_1(\widehat{L_1}, l_{\sigma^{-1}(1)})). \end{aligned}$$

Usando uma técnica similar à usada na demonstração do teorema de Hurwitz, podemos estender tanto $\widehat{\phi}_1$ quanto $\widehat{\theta}_1$ a revestimentos ramificados ϕ_1 e θ_1 de M_1 e L_1 sobre N respectivamente. Além disso, existe uma bijeção entre as componentes conexas de M e de L. Portanto se ϕ e θ induzem representações de Hurwitz equivalentes, ϕ e θ são

[9] O chapéu sobre as superfícies é para denotar as superfícies depois de furadas e, sobre as funções, é para denotar a restrição a elas.

[10] Ver [Ma], corolário 6.4 página 159.

equivalentes, isto é, existe um homeomorfismo $h : M \longrightarrow L$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{h} & L \\ & \searrow^{\phi} & \downarrow{\scriptstyle \theta} \\ & & N \end{array} \tag{2.3}$$

comuta.

Reciprocamente, se ϕ e θ são revestimentos ramificados equivalentes, eles determinam representações de Hurwitz Ψ, Γ equivalentes. Pois, que ϕ e θ sejam equivalentes implica a existência de um homeomorfismo h que faz comutar o diagrama acima. Logo o diagrama restrito a $\widehat{M}$, $\widehat{L}$ e $\widehat{N}$ também comuta. Além disso, notemos que h determina uma bijeção entre os conjuntos $\{m_1, \ldots, m_d\}$ e $\{l_1, \ldots, l_d\}$, portanto podemos considerar esta restrição de h como uma permutação de um conjunto com d elementos. Além disso, para todo $\beta \in \pi_1(\widehat{N}, z^*)$ existem $i, j \in \{1, \ldots, d_1\}$ tais que $m_i.\beta = m_j$, donde $h(m_i).h(\beta) = h(m_j)$ e pela unicidade dos levantamentos isto que dizer que $h^{-1}\Gamma(\beta)h(i) = j$. Assim Ψ e Γ são equivalentes.

Seja $\mathfrak{F}$ o conjunto de todas as classes de equivalência de revestimentos ramificados de grau d com seus pontos de ramificação localizados em $X = \{x_1, \ldots, x_k\} \subset N$, e seja $\mathfrak{P}$ o conjunto das classes de equivalência de homomorfismos entre $\pi_1(\widehat{N}, z^*)$ e S_d. Vamos mostrar que existe uma bijeção Λ entre estes conjuntos, $\Lambda : \mathfrak{F} \longrightarrow \mathfrak{P}$. Já mostramos que Λ é injetora. Para mostrar que é sobrejetora, usaremos algumas técnicas de construção de Hurwitz.

Seja o homomorfismo $\Psi : \pi_1(\widehat{N}, z^*) \longrightarrow S_d$. Vamos construir um revestimento ramificado de grau d sobre N, $\phi : M \longrightarrow N$, tal que ϕ vai induzir Ψ. Consideremos a representação poligonal de N dada na figura 2.1, onde $n \geq 0$ é o gênero da superfície, os $b_i \in \beta_i$, $c_i \in \gamma_i$ e os y_j's são caminhos que unem z^* com x_i, $i = 1, \ldots, k$.[11] Recortando pela trajetória de cada y_i obtemos um disco fechado Z(Ver Figura 2.2) que orientamos no sentido horário.

Vamos construir M mediante a colagem de d copias de Z, $Z_1, \ldots, Z_d$, segundo as seguintes identificações: se w é uma aresta sobre o bordo de Z tal que a permutação

[11] β_i, γ_i geradores do grupo fundamental de N dependendo do caso.

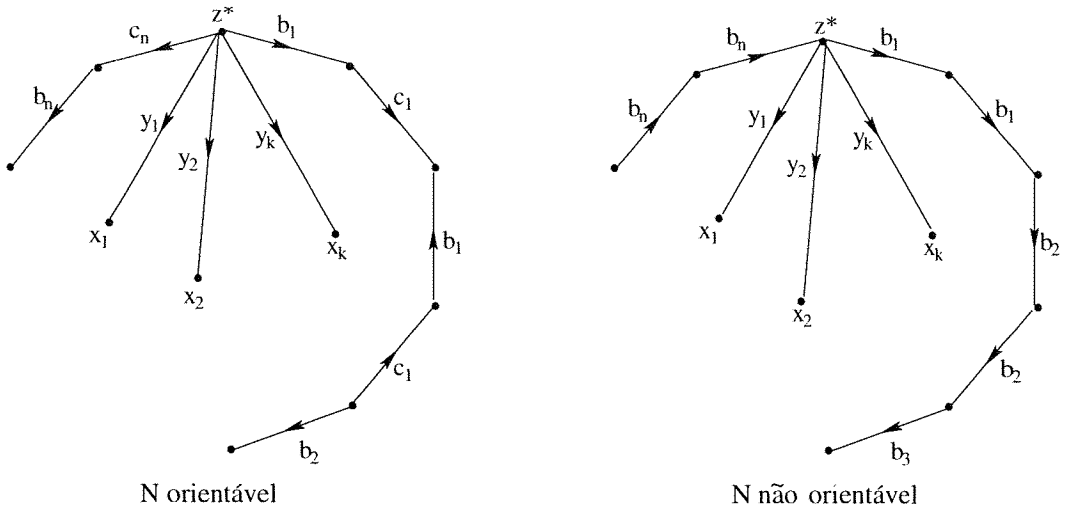


Figura 2.1: Representação Poligonal

$\Psi(\{w\})$ leva o símbolo i no símbolo j,[12] colamos Z_i a Z_j identificando as arestas w^i e $w^{j^{-1}}$ onde os índices indicam o disco ao qual elas pertencem. Defina o revestimento ramificado

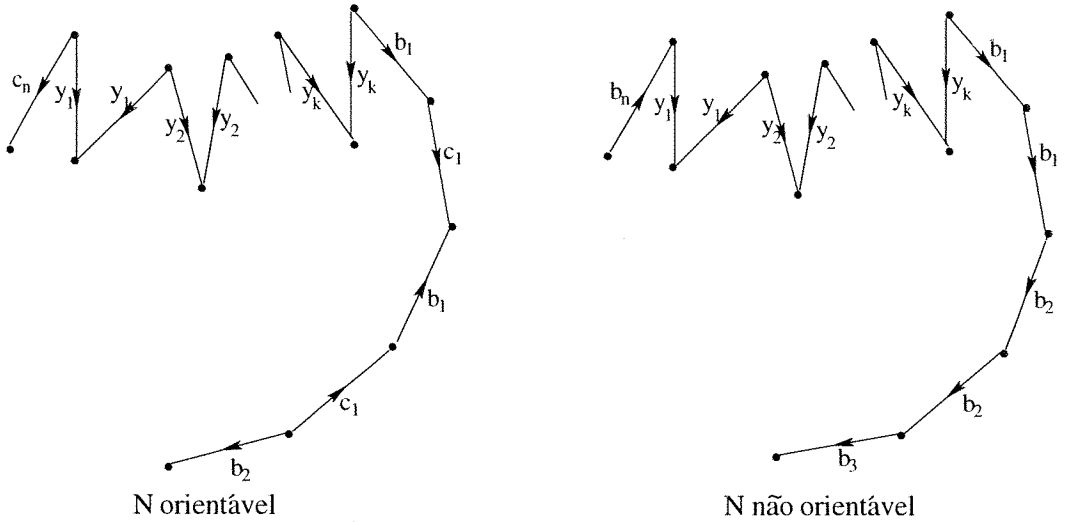


Figura 2.2: Disco fechado Z

$\phi : M \longrightarrow N$ usando os homeomorfismos $\phi_i : Z_i \longrightarrow Z$, $i = 1, \ldots, d$. Podemos nomear as pré-imagens de z^* tal que ϕ induz Ψ, pois construímos ϕ partindo de Ψ.

Da construção, a possível localização dos pontos de ramificação está sobre z^* e os x_i,

[12]Se $w = y_t$, consideramos $w \in \{v_t^*\}$.

$i = 1, \ldots, k$. Sabemos que o defeito de cada x_i está determinado pelo número de ciclos na decomposição da permutação $\Psi(\{v_i^*\})$ e, pela teoria já estudada, este número é menor que d. Por outro lado, o bordo r de Z é um laço em z^* e $\Psi(r) = 1$, logo $\Psi(r)$ tem d ciclos e portanto z^* tem d pré-imagens. Assim, os pontos de ramificação se localizam somente sobre os x_i.

Proposição 2.6 *Seja $\phi : M \longrightarrow N$ um revestimento ramificado conexo de grau d entre superfícies fechadas. Então:*
(1) Se N é orientável, M é orientável.
(2) Se d é ímpar e N não orientável, M é não orientável.

Demonstração: Seja Ψ um homomorfismo induzido por ϕ. Pela construção na discussão acima, partindo de Ψ podemos construir um revestimento ramificado $\theta : L \longrightarrow N$ de grau d que induz Ψ. Mas já provamos que isto implica a existência de um homeomorfismo h que faz comutar o diagrama (2.3). Da construção temos que L é orientável, portanto M é orientável, e está provado *(1)*. Para *(2)*, pelo lema 2.5 temos que M é não orientável se e somente se existe um $\alpha \in \Psi^{-1}(S_{d-1})$ tal que na sua representação como produto de $\{v_i^*\}$'s e β_j's aparece um número ímpar dos últimos, levando em consideração suas potências. Se d é ímpar, em particular $\Psi(\beta_j)$ é uma permutação de um número ímpar de símbolos e na sua decomposição cíclica existe no mínimo um ciclo de comprimento p ímpar. Seja $(x_1 \ldots x_p)$ este ciclo, logo β_j^p fixa x_1 e portanto $\beta_j^p \in \Psi^{-1}(S_{d-1})$, logo M é não orientável. □

Corolario 2.7 *Se (M, ϕ, N, B_ϕ) é um revestimento ramificado de grau d tendo $\mathscr{D}$ como dado de ramificação, então:*

$$\nu(\mathscr{D}) \geq \begin{cases} 2d-2 & \text{se } N{=}\mathbb{S}^2 \\ d-2 & \text{se } N{=}\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \text{ e } M \text{ é orientável} \\ d-1 & \text{se } N{=}\mathbb{R}\mathrm{P}^2 \text{ e } M \text{ é não orientável} \end{cases}$$

Demonstração: Se M é orientável, $\chi(M) \leq 2 = \chi(\mathbb{S}^2)$. Se M é não orientável, $\chi(M) \leq 1 = \chi(\mathbb{R}P^2)$. Agora é só aplicar a fórmula de Riemann-Hurwitz. □

Capítulo 3

Sobre o Grupo Simétrico

O objetivo deste capítulo é apresentar a teoria sobre o grupo simétrico necessária para avançar no estudo do problema de realização. Resultados disponíveis em [BGKZ2], [EKS] e [Ez].

3.1 Resultados Básicos

Para começar lembremos[1] que toda permutação $\alpha \in S_d$ pode ser escrita de um único jeito como produto de ciclos disjuntos γ_i

$$\alpha = \gamma_1 \dots \gamma_r \tag{3.1}$$

incluindo ciclos de comprimento um se for necessário. Portanto cada $\alpha \in S_d$ determina uma partição $A = \|\alpha\| = [|\gamma_1|, \dots, |\gamma_r|]$ de d, dada pelos comprimentos $|\gamma_i|$ de cada um de seus ciclos. Vamos dizer que uma permutação $\beta \in S_d$ *realiza* a partição A ou que $\beta \in A$, se a coleção dos comprimentos dos ciclos de β está dada por A.

Por outro lado, toda permutação pode ser escrita como produto de transposições onde o número de termos nesta decomposição é invariante módulo 2.

Tem-se que uma permutação é par se o número de termos em alguma decomposição

[1] Ver [DM] capítulo 1, [Ro] capítulo 3 e [Wi] capítulo 1.

desta como produto de transposições é congruente a zero módulo 2, caso contrário a permutação é ímpar. Além disso, o produto de duas transposições é par se e somente se ambas têm a mesma paridade.

Vamos supor que cada ciclo γ_i em (3.1) tem comprimento a_i, $\gamma_i = (r_{i_1} \dots r_{i_{a_i}})$. É claro que a decomposição

$$\gamma_i = (r_{i_1}\ r_{i_2})(r_{i_1}\ r_{i_3}) \dots (r_{i_1}\ r_{i_{a_i}}) \tag{3.2}$$

dá conta da paridade de γ_i, pois γ_i vai ser par se e somente se a_i é ímpar. Daqui é claro que a paridade de α depende da paridade de cada γ_i, e já que estes ciclos são disjuntos, é possível fatorar α como produto de transposições do tipo (3.2). Portanto α é par se e somente se

$$\sum_{i=1}^{r}(a_i - 1) \equiv 0 \pmod 2. \tag{3.3}$$

3.2 Produtos em S_d

Seja $d \in \mathbb{Z}^+$ e $\pi(d)$ o conjunto de partições de d onde cada termo das partições é maior que zero.

Se $A = [a_1, \dots, a_r] \in \pi(d)$, vamos definir $\nu(A) = \sum_{i=1}^{r}(a_i - 1) = d - r$. Mais ainda, se $\alpha \in A$, definimos $\nu(\alpha) = \nu(A)$.

Proposição 3.2.1 *Se $\alpha \in S_d$ com $\nu(\alpha) = d - r$, então para todo $t \geq 0$ tal que $r + 2t \leq d$, α pode-se escrever como produto de um d-ciclo e um $(r + 2t)$-ciclo.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, tomemos

$$\alpha = (1 \dots a_1)(a_1 + 1 \dots a_2) \dots (a_{r-1} + 1 \dots a_r)$$

onde $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_r = d$. Seja

$$\beta = (1 \quad a_1 + 1 \quad a_2 + 1 \dots a_{r-1} + 1 \quad b_1 \dots b_{2t})$$

onde $b_1 < b_2 < \cdots < b_{2t}$ e não estão no conjunto $\{1, a_1 + 1, \ldots, a_{r-1} + 1\}$. Então $\gamma = \alpha\beta$ é um d-ciclo: seja $\beta_0 = (1 \quad a_1 + 1 \ldots a_{r-1} + 1)$ e $\beta_1 = (1 \quad b_1 \ldots b_{2t})$ assim $\beta = \beta_0\beta_1$, logo

$$\begin{aligned}
\alpha\beta &= \alpha\beta_0\beta_1 \\
&= (1 \quad 2 \ldots d)(1 \quad b_1 \ldots b_{2t}) \\
&= (1 \ldots b_1 - 1 \quad b_2 \ldots b_3 - 1 \quad b_4 \ldots b_{2t-1} - 1 \\
&\quad b_{2t} \ldots d \quad b_1 \ldots b_2 - 1 \quad b_3 \ldots b_{2t-2} - 1 \quad b_{2t-1} \ldots b_{2t} - 1).
\end{aligned}$$

Donde $\alpha = \gamma\beta^{-1}$ tem a estrutura procurada. □

Corolario 3.2.2 *Toda permutação par de S_d pode ser escrita como:*

1. um produto de dois d-ciclos,

2. um comutador $\alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1}$ com α d-ciclo,

3. um produto de dois quadrados $\alpha^2\beta^2$ com $\alpha\beta$ d-ciclo.

Demonstração: Se γ é uma permutação par então por (3.3) $\nu(\gamma) = d - r$ é par, o que implica que d e r têm a mesma paridade e portanto $d = r + 2t$, $t > 0$. Pela proposição 3.2.1 existem d-ciclos σ, τ tais que $\gamma = \sigma\tau$ e a afirmação *1* está resolvida. Do anterior, τ e σ^{-1} são conjugados, isto é, existe $\beta \in S_d$ tal que $\tau = \beta\sigma^{-1}\beta^{-1}$ donde $\gamma = \sigma\beta\sigma^{-1}\beta^{-1}$ com σ d-ciclo e a afirmação *2* está pronta. Finalmente para mostrar a terceira, já que σ e τ são conjugados, existe $\alpha \in S_d$ tal que $\sigma = \alpha\tau\alpha^{-1}$ logo $\gamma = (\alpha\tau\alpha^{-1})\tau = \alpha\alpha\alpha^{-1}\tau\alpha^{-1}\tau = \alpha^2(\alpha^{-1}\tau)^2$ e $\alpha(\alpha^{-1}\tau)$ é um d-ciclo. □

Proposição 3.2.3 *Se α, $\beta \in S_d$ são d-ciclos, existe $\gamma \in S_d$ fixando um elemento tal que $\alpha = \gamma\beta\gamma^{-1}$.*

Demonstração: Sejam $\alpha = (c_1 \ldots c_d)$ e $\beta = (t_1 \ldots t_d)$. Se $c_i = t_j$ é só fazer

$$\gamma = \begin{pmatrix} c_1 & \ldots & c_i & \ldots & c_d \\ \ldots & t_{j-1} & t_j & t_{j+1} & \ldots \end{pmatrix}.$$

□

Lema 3.2.4 *Sejam* $A,\ B \in \pi(d)$ *com* $\nu(A)+\nu(B) = d-t,\ t \geq 1$. *Para todo* $\alpha \in A,\ \beta \in B$ *tem-se* $\nu(\alpha\beta) \leq d-t$.

Demonstração: Sejam $\alpha \in A,\ \beta \in B$ e $\gamma = \alpha\beta$. Suponha que a ação do grupo $\langle \alpha, \beta \rangle$ sobre $\{1, ...d\}$ determina exatamente q órbitas. Já que $\gamma \in \langle \alpha, \beta \rangle$, γ determina no mínimo q órbitas, isto é, $\nu(\gamma) \leq d-q$. Se C denota a partição dada por γ então

$$\nu(A) + \nu(B) + \nu(C) \leq d - t + d - q = 2d - t - q.$$

Por outro lado, $\alpha\beta\gamma^{-1} = 1$, e tirando a conexidade citada no corolário 2.4 já que $\langle \alpha, \beta \rangle$ não age transitivamente sobre $\{1, \ldots, d\}$, existe um revestimento ramificado $\phi : M \longrightarrow \mathbb{S}^2$ com dado de ramificação $\{A, B, C\}$ e tal que M é uma superfície fechada com exatamente q componentes conexas. Pela fórmula de Riemann-Hurwitz

$$\nu(A) + \nu(B) + \nu(C) = d\chi(\mathbb{S}^2) - \chi(M)$$

mas $\chi(M) \leq q\chi(\mathbb{S}^2) = 2q$, logo

$$2d - 2q \leq \nu(A) + \nu(B) + \nu(C) \leq 2d - t - q$$

daqui $q \geq t$ donde $\nu(\gamma) \leq d - q \leq d - t$. □

Proposição 3.2.5 *Sejam* $A,\ B \in \pi(d)$ *com* $\nu(A) + \nu(B) = d - t,\ t \geq 1$. *Então existem* $\alpha \in A$ *e* $\beta \in B$ *tais que:*

1. a ação do grupo $\langle \alpha, \beta \rangle$ *determina precisamente* t *órbitas e,*

2. se C *denota a partição dada pela ação descrita no numeral anterior então* $\alpha\beta \in C$.

Demonstração: A segunda afirmação é consequência da primeira. Veja, pelo lema 3.2.4 $\nu(\alpha\beta) \leq d - t$ e na prova do mesmo vamos ter que

$$2d - 2t \leq \nu(\alpha) + \nu(\beta) + \nu(\alpha\beta) \leq 2d - 2t$$

pois $q = t$, logo

$$\begin{aligned} \nu(\alpha) + \nu(\beta) + \nu(\alpha\beta) &= 2d - 2t \\ d - t + \nu(\alpha\beta) &= 2d - 2t \\ \nu(\alpha\beta) &= d - t. \end{aligned}$$

Já que a partição associada a $\alpha\beta$ deve refinar a partição C e $\nu(\alpha\beta) = \nu(C)$, então $\alpha\beta \in C$.

Provaremos a afirmação *1* fazendo indução sobre d. Para $d = 1$ é trivial. Para $d = 2$ as opções de t são $t = 1$ ou $t = 2$. Se $t = 1$, $\nu(A) + \nu(B) = 1$, o que implica que $\nu(A) = 0$ ou $\nu(B) = 0$. Sem perda de generalidade vamos supor que $\nu(A) = 0$, então $\alpha \in A$ é a identidade, logo $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta \rangle$ determina $d - \nu(B) = 1$ órbitas, pois $\beta \in B$. Se $t = 2$, $\nu(A) + \nu(B) = 0$, logo $\alpha = \beta = 1$ que obviamente age determinando 2 órbitas. Procedendo indutivamente, suponhamos $\nu(A) = d - r > 0$. Fixemos um representante $\alpha \in A = [d_1, \ldots, d_r]$

$$\alpha = (1 \quad 2 \ldots d_1)(d_1 + 1 \ldots d_2) \ldots (d_{r-1} + 1 \ldots d_r)$$

onde $d_r = d$ e $d_1 > 1$. Seja $B = [b_1, b_2, \ldots, b_s]$, portanto $\nu(B) = d - s$ e $t = r + s - d$. Seja $\beta \in B$, $\beta = \beta_1 \ldots \beta_s$, tal que os β_i são ciclos disjuntos que representam cada um dos b_i-ciclos cujos termos ainda não determinamos, $i = 1, \ldots, s$.

Observe que $b_1 \leq r$, já que

$$d - 1 \geq \nu(A) + \nu(B) \geq (d - r) + (b_1 - 1)$$

donde $r \geq b_1$. Seja $\beta_1 = (1 \quad d_1 + 1 \ldots d_{b_1 - 1} + 1)$. As órbitas dadas pela ação de $\langle \alpha \rangle$ sobre $\{1, \ldots, d\}$ são os conjuntos

$$P_i = \{d_{i-1} + 1, \ldots, d_i\}$$

$i = 1, \ldots, r$ e $d_0 = 0$. E pela escolha de β_1, o conjunto $P_1 \cup \ldots \cup P_{b_1}$ vai estar contido numa mesma órbita dada por $\langle \alpha, \beta \rangle$. Os $d - b_1$ pontos de $\{1, \ldots, d\}$-{elementos de β_1} ainda não distribuídos nos ciclos $\beta_2, \ldots, \beta_s$, podem dividir-se em $r - b_1 + 1$ conjuntos $Q_1, \ldots, Q_{r-b_1+1}$ onde:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{1, \ldots, d_{b_1}\} - \{\text{elementos de } \beta_1\} \\ Q_2 &= P_{b_1+1} \\ &\vdots \\ Q_{r-b_1+1} &= P_r. \end{aligned}$$

Note que $Q_1 \neq \emptyset$ já que $d_1 > 1$. Façamos agora $A' = [|Q_1|, \ldots, |Q_{r-b_1+1}|]$ e $B' = [b_2, \ldots, b_s]$ elementos de $\pi(d - b_1)$, onde $|Q_i|$ denota a cardinalidade do conjunto Q_i. Logo, $\nu(A') =$

$(d-b_1)-(r-b_1+1)$ donde $\nu(A')=d-r-1$ e $\nu(B')=(d-b_1)-(s-1)$. Assim,

$$\begin{aligned}\nu(A')+\nu(B') &= d-r-1+d-b_1-s+1\\ &= 2d-r-b_1-s\\ &= (d-b_1)+d-r-s\\ &= (d-b_1)-t.\end{aligned}$$

Seja $\alpha'=\alpha'_1\ldots\alpha'_{r-b_1+1}\in A'$, $\alpha'_i\in Q_i$. Por indução, existe $\beta'\in B'$ com elementos em $\{1,...,d\}-\{\text{elementos de }\beta_1\}$ tal que $\langle\alpha',\beta'\rangle$ determina t' órbitas, onde $t'=(d-b_1)-\nu(A')-\nu(\beta')=t$. Logo é só fazer $\beta=\beta_1\beta'$ para completar a prova, pois se $x\in\{1,\ldots,d\}$ pode acontecer:

(1) $x\geq d_{b_1}+1$, e neste caso a órbita de x está determinada pela ação dos α'_i, $t>1$ e de β'.

(2) $x<d_{b_1}+1$, neste caso x pertence à mesma órbita dos elementos em $\{1,\ldots,d\}-\{\text{elementos de }\beta_1\}$ menores ou iguais que d_{b_1}, assim $\langle\alpha,\beta\rangle$ determina t órbitas. □

Proposição 3.2.6 *Sejam A, $B\in\pi(d)$ com $\nu(A)+\nu(B)=(d-1)+r$, $r>0$. Então para cada k, $0\leq k\leq r$, $k\equiv r \pmod 2$, podemos escolher $\alpha\in A$, $\beta\in B$ tais que o grupo $\langle\alpha,\beta\rangle$ age transitivamente sobre $\{1,\ldots,d\}$ e $\nu(\alpha\beta)=(d-1)-k$.*

Demonstração: Seja $B=[b_1,\ldots,b_s]$, $k=r-2j$ e $i\geq 0$ determinado pelas condições:

$$\begin{aligned}\nu(A)+(b_1-1)+\cdots+(b_i-1) &\leq d-1\\ \nu(A)+(b_1-1)+\cdots+(b_{i+1}-1) &> d-1.\end{aligned}$$

Logo, existe um inteiro positivo f tal que $f-1<b_{i+1}-1$ e

$$\nu(A)+(b_1-1)+\cdots+(b_i-1)+(f-1)=d-1 \tag{3.4}$$

Seja $B'=[b_1,\ldots,b_i,f,1,\ldots,1]$ a partição induzida de d, e $B''=[b_{i+1}-f+1,b_{i+2},\ldots,b_s]$. Olhando para B'' como uma partição de n símbolos $\{u_1,\ldots,u_n\}$ um dos quais pertence ao f-ciclo de $\beta'\in B'$ e os outros são símbolos distintos dos que têm β' nos seus ciclos de comprimento maior que 1. Pela escolha, $\nu(B'')=r$ e pela proposição 3.2.1, B'' pode

realizar-se como produto de um n-ciclo e um $n-r+2j$-ciclo nos símbolos $\{u_1,\ldots,u_n\}$. Equivalentemente existe $\beta'' \in B''$ e um n-ciclo $\gamma \in S_n$ tal que $\gamma\beta'' \in [(n-r+2j),1,\ldots,1]$. Seja $\alpha \in A$, podemos assumir por 3.4 que $\alpha\beta'$ é um d-ciclo. Tomemos

$$\alpha\beta' = (u_1 \ldots w_1\ u_2 \ldots w_2 \ldots u_n \ldots w_n)$$

e $\gamma = (u_1 \ldots u_n)$. Seja $\beta = \beta'\beta''$. O produto $\alpha\beta = (\alpha\beta')\beta''$ pode-se descrever como o obtido a partir de $(u_1 \ldots u_n)\beta'' \in [(n-r+2j),1,\ldots,1]$ trocando cada u_j pelo bloco $u_j,\ldots,w_j$ dado em $\alpha\beta'$. Em outras palavras, $\alpha\beta$ é o produto de $r-2j+1$ ciclos disjuntos tais que

$$\nu(\alpha\beta) = d-(r-2j+1) = (d-1)-r+2j = (d-1)-k.$$

□

Corolario 3.2.7 *Sejam A, $B \in \pi(d)$ com $\nu(A)+\nu(B) \geq d-1$ e $\nu(A)+\nu(B) \equiv d+1 \pmod 2$. Então existem $\alpha \in A$, $\beta \in B$ tais que $\langle \alpha,\beta\rangle$ age transitivamente sobre $\{1,\ldots,d\}$, sendo $\alpha\beta$ um d-ciclo.*

Demonstração: Se $\nu(A)+\nu(B) = d-1$ é só olhar a proposição 3.2.5. Se $\nu(A)+\nu(B) \geq d+1$ pegando $k=0$ na proposição 3.2.6 temos que existem α, β tais que $\langle \alpha,\beta\rangle$ age transitivamente sobre $\{1,\ldots,d\}$ e $\nu(\alpha\beta) = d-1$ o que implica que $\alpha\beta$ seja um d-ciclo. □

Proposição 3.2.8 *Sejam A, $B \in \pi(d)$ com $\nu(A)+\nu(B) = d+2q$, $q \geq 0$. Então existem $\alpha \in A$, $\beta \in B$ tais que $\langle \alpha,\beta\rangle$ age transitivamente sobre $\{1,\ldots,d\}$ e se $A = B = [2,\ldots,2]$ então $\alpha\beta \in [d/2,d/2]$. Caso contrário, $\alpha\beta \in [d-1,1]$.*

Demonstração: Se $A = B = [2,\ldots,2]$ com $d = 2r$ e

$$\begin{aligned} \alpha &= (1\quad 2)(3\quad 4)\ldots(2r-1\quad 2r) \\ \beta &= (2\quad 3)(4\quad 5)\ldots(2r-2\quad 2r-1)(2r\quad 1) \end{aligned}$$

então

$$\alpha\beta = (1\quad 3\ldots(2r-1))(2r\quad 2r-2\ldots 2) \in [r,r].$$

Suponha que alguma das duas A ou B não está em $[2,\ldots,2]$, logo A ou B contém um termo maior que 2, pois do contrário teríamos $\nu(A)+\nu(B) < r+r = 2r = d$, o que é absurdo. Sem perda de generalidade, podemos assumir que A tem um dos seus termos maior que 2.

Seja $\alpha = (1\ldots d_1)(d_1+1\ldots d_2)\ldots(d_{r-1}+1\ldots d_r) \in A$ com $d_r = d$ e $d_1 > 2$. Já que $\nu(A) \leq d-1$, $\nu(B) > 0$. Seja $B = [b_1,\ldots,b_s]$ com $b_1 \geq 2$.

Considere as partições

$$\begin{aligned} A' &= [a_1-1, a_2, \ldots, a_r] \\ B' &= [b_1-1, b_2, \ldots, b_s] \end{aligned}$$

$a_{i+1} = d_{i+1} - d_i$ e $d_0 = 0$. Realizemos A' com $\alpha' = (1 \quad 2\ldots d_1-1)(d_1+1\ldots d_2)\ldots(d_{r-1}+1\ldots d_r)$. Estamos considerando A' e B' como partições de $\{1,\ldots,d\}-\{d_1\}$. Note que

$$\begin{aligned} \nu(A')+\nu(B') &= (\nu(A)-1)+(\nu(B)-1) \\ &= \nu(A)+\nu(B)-2 \\ &= d+2q-2 \\ &= (d-1)+(2q-1). \end{aligned}$$

Pela proposição 3.2.6 (proposição 3.2.5 se $q=0$), podemos escolher α', β' tais que $\langle\alpha',\beta'\rangle$ age transitivamente sobre $\{1,\ldots,d\}-\{d_1\}$ e tal que $\nu(\alpha'\beta') = (d-1)-1$, isto é, $\alpha'\beta'$ é um $(d-1)$-ciclo, onde β' pode-se escolher começando com o (b_1-1)-ciclo $(1 \quad d_1+1\ldots d_{b_1-2}+1)$. Seja $\alpha = \alpha'(1\ d_1)$ e $\beta = (1\ d_1)\beta'$, então $\alpha\beta = \alpha'\beta'$ é um $(d-1)$-ciclo. Mais ainda, $\langle\alpha,\beta\rangle$ é transitivo sobre $\{1,\ldots,d\}$ já que α move d_1 e $\alpha\beta$ é um $(d-1)$-ciclo nos símbolos diferentes de d_1. □

3.3 Construindo uma Operação de Colagem sobre Homomorfismos no Grupo Simétrico.

Seja N uma superfície e $(M_1, \phi_1, N, B_{\phi_1})$, $(M_2, \phi_2, N, B_{\phi_2})$ revestimentos ramificados conexos sobre N de graus n, m respectivamente que induzem as representações de Hurwitz:

$$\Psi_1 : \pi_1(\widehat{N}, z^*) \longrightarrow S_n, \ \Psi_2 : \pi_1(\widehat{N}, z^*) \longrightarrow S_m.$$

É possível construir a soma direta delas e obter o homomorfismo

$$\Psi_1 \times \Psi_2 : \pi_1(\widehat{N}, z^*) \longrightarrow S_{n+m}.$$

Mas esta construção não tem interesse geométrico pois o revestimento associado a ela não é conexo.

Em [BGKZ1] define-se uma operação de colagem entre M_1 e M_2 sendo que são superfícies de revestimento de N para revestimentos ramificados específicos.[2] Esta definição exige pegar sobre M_1, M_2 uma curva fechada simples que não reverte orientação e que não separa[3], tal que cada uma destas curvas é enviada por ϕ_1, ϕ_2 na mesma potência de um laço em N.

Nesta seção, vamos descrever a versão algébrica da operação de colagem mas só sobre revestimentos ramificados do toro ou da garrafa de Klein, onde a ramificação está localizada em um único ponto.

Para facilitar a notação, sejam

$$\begin{aligned} G_+ &= \langle a, b, c \mid [a, b]c^{-1} = 1 \rangle \\ G_- &= \langle a, b, c \mid abab^{-1}c^{-1} = 1 \rangle \end{aligned}$$

os grupos fundamentais do toro e da garrafa de Klein depois de tirar um pequeno disco respectivamente. Assim, quando falamos do grupo G estamos fazendo referência a G_+ ou G_- separadamente.

[2] Ver [BGKZ1], seção 2.3 página 6.

[3] Em geral a propriedade de não separabilidade define-se assim: Seja X um espaço topológico e $A \subset X$, dizemos que A não separa X, se para todo aberto U de X, $U - A$ é conexo.

Sejam

$$\Psi_1 : G \longrightarrow S_n$$
$$\Psi_2 : G \longrightarrow S_m$$

representações associadas a revestimentos ramificados conexos cuja ramificação está localizada em um único ponto da base, o mesmo para ambos.

Para todo $g \in G$ vamos denotar por $\widehat{g_i}$ a permutação $\Psi_i(g)$, $i = 1, 2$. O subgrupo de permutações gerado por $\widehat{a}_1$, $\widehat{b}_1$ age transitivamente sobre $\{1, \ldots, n\}$, assim como o subgrupo gerado por $\widehat{a}_2$, $\widehat{b}_2$ sobre $\{n+1, \ldots, n+m\}$, pela conexidade dos revestimentos.

Vamos assumir, que existe um laço em M_1 e um laço em M_2 tais que são levados homeomorficamente no mesmo laço na classe de homotopia de $a \in G$. Portanto existe um símbolo i_1 em $\{1, \ldots, n\}$ e um símbolo i_2 em $\{n+1, \ldots, n+m\}$ que ficam fixos por $\widehat{a}_1$ e $\widehat{a}_2$ respectivamente. Se $n \geq 2$, pela transitividade, nem $\widehat{b}_1$ fixa i_1, nem $\widehat{b}_2$ fixa i_2.

Seja $\widehat{a} = \widehat{a}_1 \times \widehat{a}_2 \in S_{n+m}$, a soma direta de $\widehat{a}_1$ e $\widehat{a}_2$. Assim, $\widehat{a}$ age sobre $\{1, \ldots, n\}$ como $\widehat{a}_1$ e sobre $\{n+1, \ldots, n+m\}$ como $\widehat{a}_2$.

Por outro lado, definimos $\widehat{b} \in S_{n+m}$ como a soma direta de $\widehat{b}_1$ e $\widehat{b}_2$, vezes a transposição $(i_1\ i_2)$, isto é, $\widehat{b} = (\widehat{b}_1 \times \widehat{b}_2)(i_1\ i_2)$.

Vamos mostrar que $\widehat{c} = \widehat{c}_1 \times \widehat{c}_2$ é a permutação que corresponde a $c = [a, b]$ ou $c = abab^{-1}$ dependendo do caso (proposição 3.3.2).

O resultado da operação colagem sobre as representações Ψ_1 e Ψ_2 é a representação

$$\begin{aligned} \Psi : G &\longrightarrow S_{n+m} \\ a &\longmapsto \widehat{a} \\ b &\longmapsto \widehat{b}. \end{aligned}$$

Proposição 3.3.1 *Se os subgrupos* $\langle \widehat{a}_1, \widehat{b}_1 \rangle$, $\langle \widehat{a}_2, \widehat{b}_2 \rangle$ *agem transitivamente sobre os conjuntos* $\{1, \ldots, n\}$ *e* $\{n+1, \ldots, n+m\}$ *respectivamente então o subgrupo* $\langle \widehat{a}, \widehat{b} \rangle$ *age transitivamente sobre* $\{1, \ldots, n+m\}$.

Demonstração: Observemos que a órbita de qualquer elemento $i \leq n$ contem i_2. De fato, pela transitividade, existe uma palavra w nas permutações $\widehat{a}_1$, $\widehat{b}_1$ que leva i no

símbolo $i_1.\widehat{b_1}^{-1}$. Vamos pegar a menor destas palavras e notemos que se trocamos $\widehat{a_1}$ por $\widehat{a}$ e $\widehat{b_1}$ por $\widehat{b}$, a palavra w' obtida em $\widehat{a}$ e $\widehat{b}$ também leva o símbolo i no $i_1.\widehat{b_1}^{-1}$. Agora

$$\begin{aligned}(i.w').\widehat{b} &= i_1.(\widehat{b_1}^{-1}\widehat{b}) \\ &= i_1.(\widehat{b_1}^{-1}(\widehat{b_1}\times\widehat{b_2})(i_1\ i_2)) \\ &= i_1.(i_1\quad i_2) \\ &= i_2\end{aligned}$$

logo existe uma palavra nas permutações $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ que leva o i no i_2. Analogamente existe uma palavra em $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ que leva os $j \geq n+1$ no símbolo i_1, em particular existe uma palavra em $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ que leva i_2 em i_1. Portanto é possível enviar todos os elementos em i_1 e assim a ação é transitiva. □

No estudo dos revestimentos ramificados sobre superfícies não orientáveis o *quasicomutador* $[a,b]_- = abab^{-1}$ tem um papel importante. Para unificar a notação, vamos generalizar a noção de comutador. Sejam r, $s \in \mathbb{Z}$, definimos

$$[a,b]_{r,s} = a^r b a^s b^{-1}.$$

Assim, $[a,b]_{1,-1} = [a,b]$ e $[a,b]_{1,1} = [a,b]_-$.

Proposição 3.3.2 *Para qualquer par de inteiros r, s,*

$$[\widehat{a},\widehat{b}]_{r,s} = [\widehat{a_1},\widehat{b_1}]_{r,s} \times [\widehat{a_2},\widehat{b_2}]_{r,s}.$$

Demonstração: Seja $i \leq n$ e consideremos $\widehat{a_1} = \widehat{a_1}\times id$, $\widehat{b_1} = \widehat{b_1}\times id$, $\widehat{a_2} = id\times\widehat{a_2}$, $\widehat{b_2} = id\times\widehat{b_2}$ em S_{n+m}. Então

$$\begin{aligned}i.\widehat{a}^r\widehat{b}\widehat{a}^s\widehat{b}^{-1} &= i.(\widehat{a_1}\times\widehat{a_2})^r[(\widehat{b_1}\times\widehat{b_2})(i_1\ i_2)](\widehat{a_1}\times\widehat{a_2})^s[(\widehat{b_1}\times\widehat{b_2})(i_1\ i_2)]^{-1} \\ &= i.\widehat{a_1}^r\widehat{b_1}(i_1\ i_2)\widehat{a}^s\widehat{b}^{-1}.\end{aligned}$$

Suponhamos que $i.\widehat{a_1}^r\widehat{b_1} \neq i_1$, assim $i.\widehat{a}^r\widehat{b}\widehat{a}^s\widehat{b}^{-1} = i.\widehat{a_1}^r\widehat{b_1}\widehat{a_1}^s\widehat{b}^{-1}$. Já que $\widehat{a_1}$ fixa i_1, temos que $i.\widehat{a_1}^r\widehat{b_1}\widehat{a_1}^s \neq i_1$. Daqui, sob a ação de $\widehat{b}^{-1}$ a transposição $(i_1\ i_2)$ não se aplica, portanto

$i.\widehat{a}^r\widehat{b}\widehat{a}^s\widehat{b}^{-1} = i.\widehat{a_1}^r\widehat{b_1}\widehat{a_1}^s\widehat{b_1}^{-1}$. Agora se $i.\widehat{a_1}^r\widehat{b_1} = i_1$ então:

$$\begin{aligned} i.\widehat{a}^r\widehat{b}\widehat{a}^s\widehat{b}^{-1} &= i_1.(i_1\ i_2)\widehat{a}^s\widehat{b}^{-1} \\ &= i_2.\widehat{a}^s\widehat{b}^{-1} \\ &= i_2.\widehat{b}^{-1} \\ &= i_1.\widehat{b_1}^{-1} \\ &= i_1.\widehat{a_1}^s\widehat{b_1}^{-1} \\ &= i.\widehat{a_1}^r\widehat{b_1}\widehat{a_1}^s\widehat{b_1}^{-1}. \end{aligned}$$

Para $i \geq n+1$ procede-se analogamente. □

Teorema 3.3.3 *Para cada partição $A = [d_1, \ldots, d_r]$ do número d com defeito positivo par, $\nu(A) = (d_1 - 1) + \cdots + (d_r - 1) = d - r > 0$, existem permutações $\widehat{a}$, $\widehat{b} \in S_d$ com as seguintes propriedades:*

(1) O subgrupo de S_d gerado por $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ age transitivamente sobre $\{1, \ldots, d\}$.

(2) O comutador $[\widehat{a}, \widehat{b}]$ consiste de ciclos de comprimentos $d_1, \ldots, d_r$.

(3) O símbolo 1 fica fixo por $\widehat{a}$.

(4) O símbolo 1 fica fixo por $\widehat{b}[\widehat{a}, \widehat{b}]$ ou por $\widehat{b}[\widehat{a}^2, \widehat{b}]$.

Demonstração: A prova é por indução sobre r. Assumamos $d_1 \geq \cdots \geq d_r$.

Se $r = 1$, então $A = [d]$ e pela hipóteses $\nu(A) = d - 1$ é par e maior que zero, logo d é ímpar e maior que 2, donde $d = 2k + 1$ com $k > 0$. Sejam

$$\widehat{a} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k & k+1 & \ldots & 2k & 2k+1 \\ 1 & \ldots & k & k+2 & \ldots & 2k+1 & k+1 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{b} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k & k+1 & k+2 & \ldots & 2k+1 \\ 2k+1 & \ldots & k+2 & k+1 & 1 & \ldots & k \end{pmatrix}.$$

Vamos conferir que $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ satisfazem as propriedades *(1)-(4)*:

(2): No nosso caso $[\widehat{a}, \widehat{b}]$ tem que ser um d-ciclo. Pelas definições de $\widehat{a}$, $\widehat{b}$:

$$[\widehat{a}, \widehat{b}] = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k & k+1 & \ldots & 2k & 2k+1 \\ 2 & \ldots & k+1 & k+2 & \ldots & 2k+1 & 1 \end{pmatrix}$$

é de fato um d-ciclo.

(1): É imediato de *(2)*.

(3): É claro da definição de $\widehat{a}$.

(4): $1.\widehat{b}\ [\widehat{a},\widehat{b}] = (2k+1)[\widehat{a},\widehat{b}] = 1$.

Para $r \geq 2$. Se existe um d_j ímpar, consideramos $A' = [d_1, \ldots, d_{j-1}, d_{j+1}, \ldots, d_r]$ e $A'' = [d_j]$, partições dos números $d' = d - d_j$, $d'' = d_j$ respectivamente. Se $d_r = 1$, fazemos $j = r$. Já que $\nu([d_j]) = d_j - 1$ é par e $\nu(A) = \nu(A') + \nu(A'')$ então $\nu(A')$ também é par. Mais ainda ambos $\nu(A')$, $\nu(A'')$ são maiores que zero e vale a hipóteses de indução, exceto se $d'' = d_j = 1$. Mas para este caso as propriedades *(1)-(4)* são satisfeitas trivialmente. Portanto, existem permutações $\widehat{a}_1$, $\widehat{b}_1$ e $\widehat{a}_2$, $\widehat{b}_2$ tais que $[\widehat{a}_1, \widehat{b}_1] \in A'$ e $[\widehat{a}_2, \widehat{b}_2] \in A''$. Além disso, já que estes pares de permutações satisfazem a propriedade *(3)* do teorema, podemos aplicar a operação de colagem entre elas e assim obtemos as permutações $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ que satisfazem as propriedades *(1)-(4)*. Vejamos:

(1): Da proposição 3.3.1.

(2): Da proposição 3.3.2.

(3): $1.\widehat{a} = 1.\widehat{a}_1 = 1$.

(4): Na operação de colagem usemos $i_1 = 1$. Temos $1.\widehat{b} = 1.\widehat{b}_1(1\ i_2) = 1.\widehat{b}_1$ e, usando a proposição 3.3.2,

$$\begin{aligned} 1.\widehat{b}[\widehat{a},\widehat{b}] &= 1.\widehat{b}_1[\widehat{a},\widehat{b}] \\ &= 1.\widehat{b}_1([\widehat{a}_1,\widehat{b}_1] \times [\widehat{a}_2,\widehat{b}_2]) \\ &= 1.\widehat{b}_1[\widehat{a}_1,\widehat{b}_1] \\ &= 1 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 1.\widehat{b}[\widehat{a}^2,\widehat{b}] &= 1.\widehat{b}_1([\widehat{a}_1^2,\widehat{b}_1] \times [\widehat{a}_2^2,\widehat{b}_2]) \\ &= 1.\widehat{b}_1[\widehat{a}_1^2,\widehat{b}_1] \\ &= 1. \end{aligned}$$

Agora, se todos os d_i são pares, então $d = 2k$, $k \geq 2$, e já que $\nu(A) = d - r$ é par, segue que r é par.

Se $r = 2$, então $A = [d_1, d_2]$. Assim $l = (d_1 - d_2)/2$ é um inteiro entre zero e $k - 2$. Seja $d_1 = k + l$ e $d_2 = k - l$.

Consideremos uma situação mais geral assumindo só que $d_2 > 1$, isto é $l \leq k - 2$. Em outras palavras, no que segue não precisamos de d_1, d_2 pares, só que $d_2 > 1$. Veja, para $0 \leq l \leq k - 2$ definimos

$$\widehat{a} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & 2k-1 & 2k \\ 1 & \dots & k-1 & k+1 & k+2 & \dots & 2k & k \end{pmatrix}$$

$$\widehat{b} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & k+l & k+l+1 & k+l+2 & \dots & 2k \\ 2k-1 & \dots & k+1 & k & 1 & \dots & l & 2k & l+1 & \dots & k-1 \end{pmatrix}$$

Se $l = 0$ ignoramos desde a coluna $k + 1$ até a coluna $k + l$. Confiramos *(1)-(4)*:

(2):

$$[\widehat{a}, \widehat{b}] = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k+l-1 & k+l & k+l+1 & \dots & 2k-1 & 2k \\ 2 & \dots & k+l & 1 & k+l+2 & \dots & 2k & k+l+1 \end{pmatrix}$$

donde $[\widehat{a}, \widehat{b}] = (1\ 2 \dots k + l)(k + l + 1 \dots 2k)$ é produto de ciclos de comprimentos d_1 e d_2 respectivamente.

(1): Está garantida por $\widehat{a}$ pois leva $2k$ em k.

(3): Da definição de $\widehat{a}$.

(4): 1. $\widehat{b}\ [\widehat{a}^2, \widehat{b}] = (2k - 1).[\widehat{a}^2, \widehat{b}] = 1$.

Se $r \geq 3$ então $r \geq 4$ e $d_r \geq 2$, pois r e d_r são pares . Podemos aplicar a operação de colagem a dois pares de permutações tais que seus comutadores sejam do tipo $A' = [d_1, \dots, d_{r-2}]$ e $A'' = [d_{r-1}, d_r]$, sendo A' e A'' partições dos números $d' = d - d_{r-1} - d_r$ e $d'' = d_{r-1} + d_r$ respectivamente. □

Corolario 3.3.4 *Seja $\widehat{c} \in S_d$ uma permutação par não trivial. Então existem permutações $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ com as seguintes propriedades:*

(1) $\langle \widehat{a}, \widehat{b} \rangle$ age transitivamente sobre $\{1, \dots, d\}$.

(2) $\widehat{c} = [\widehat{a}, \widehat{b}]$.

(3) $\widehat{a}$ fixa 1.

(4) O 1 fica fixo por $\widehat{b}\ [\widehat{a}, \widehat{b}]$ ou por $\widehat{b}\ [\widehat{a}^2, \widehat{b}]$.

□

Teorema 3.3.5 *Para cada partição $A = [d_1, \ldots, d_r]$ do número d com defeito positivo par, $\nu(A) = (d_1 - 1) + \cdots + (d_r - 1) = d - r > 0$, existem permutações $\widehat{a}$, $\widehat{b} \in S_d$ e um inteiro positivo q com as seguintes propriedades:*

(1) O subgrupo de S_d gerado por $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ age transitivamente sobre $\{1, \ldots, d\}$.

(2) O quasicomutador $[\widehat{a}, \widehat{b}]_-$ consiste de ciclos de comprimentos $d_1, \ldots, d_r$.

(3) O símbolo 1 fica fixo por $\widehat{a}$.

(4) O símbolo 1 fica fixo por $\widehat{b}$ $[\widehat{a}, \widehat{b}]_-^q$.

Demonstração: A prova é por indução sobre r. Assumamos $d_1 \geq \cdots \geq d_r$.

Se $r = 1$, $A = [d]$ e já que $\nu(A) = d - 1$ é par, então $d = 2k + 1$, $k \geq 1$. Definamos

$$\widehat{a} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k & k+1 & \ldots & 2k & 2k+1 \\ 1 & \ldots & k & k+2 & \ldots & 2k+1 & k+1 \end{pmatrix}$$

$$\widehat{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k+1 & k+2 & \ldots & 2k+1 \\ 2k+1 & k+1 & \ldots & 2k & 1 & \ldots & k \end{pmatrix}$$

vejamos que satisfazem *(1)*-*(4)*:

(2):

$$[\widehat{a}, \widehat{b}]_- = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & k & k+1 & \ldots & 2k & 2k+1 \\ 2 & \ldots & k+1 & k+2 & \ldots & 2k+1 & 1 \end{pmatrix}$$

é de fato um d-ciclo.

(1): É imediato de *(2)*.

(3): Da definição de $\widehat{a}$.

(4): $\widehat{b}$ $[\widehat{a}, \widehat{b}]_-^q$ fixa 1 para $q = 1$.

Para $r \geq 2$. Se existe um d_j ímpar, usamos os mesmos argumentos da prova do teorema 3.3.3. É por isto que vamos assumir todos os d_j pares, portanto em $\nu(A) = d - r$, d e r são pares.

Se $r = 2$, então $A = [d_1, d_2]$. Seja $l = (d_1 - d_2)/2$ assim $d_1 = k + l$ e $d_2 = k - l$. Vamos obter conclusões mais gerais se assumimos só que $d_2 > 1$, isto é, $l \leq k - 2$.

Para $0 \leq l \leq k-2$ definimos

$$\widehat{a} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k-1 & k & k+1 & \dots & 2k-1 & 2k \\ 1 & \dots & k-1 & k+1 & k+2 & \dots & 2k & k \end{pmatrix}$$

$$\widehat{b} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & k+l & k+l+1 & k+l+2 & \dots & 2k \\ k & \dots & 2k-1 & 1 & \dots & l & 2k & l+1 & \dots & k-1 \end{pmatrix}$$

Se $l = 0$ ignoramos desde a coluna $k+1$ até a coluna $k+l$. Verifiquemos *(1)-(4)*:

(2): Facilmente verifica-se que $[\widehat{a}, \widehat{b}]_- = (1\ 2 \dots k-1 \dots k+l)(k+l+1 \dots 2k)$.

(1): $\widehat{a}$ leva $2k$ em k e isto garante a transitividade.

(3): Da definição de $\widehat{a}$.

(4): $\widehat{b}$ leva o 1 no k, e $[\widehat{a}, \widehat{b}]_-^{l+1}$ leva k no 1.

Para os casos $r \geq 3$, isto é $r \geq 4$, usamos os mesmos argumentos da prova do teorema 3.3.3. □

Corolario 3.3.6 *Seja $\widehat{c} \in S_d$ uma permutação par não trivial. Então existem permutações $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ e um inteiro positivo q com as seguintes propriedades:*

(1) $\langle \widehat{a}, \widehat{b} \rangle$ age transitivamente sobre $\{1, \dots, d\}$.

(2) $\widehat{c} = [\widehat{a}, \widehat{b}]_-$.

(3) $\widehat{a}$ fixa 1.

(4) $\widehat{b}\ [\widehat{a}, \widehat{b}]_-^q$ fixa 1. □

Notemos que $[\widehat{a}, \widehat{b}]_- = \widehat{g}^2 \widehat{b}^{-2}$, onde $\widehat{g} = \widehat{a}\,\widehat{b}$. Assim, $\widehat{c}$ pode escrever-se como produto de quadrados de duas permutações que geram um subgrupo de S_d que age transitivamente sobre $\{1, \dots, d\}$.

Capítulo 4

Revestimentos Ramificados sobre Superfícies Fechadas

Neste capítulo apresentamos a solução da **Questão 1** quando N é fechada e diferente da esfera, baseados nos artigos [Hu], [EKS] e [Ez].

Seja (M, ϕ, N, B_ϕ), $B_\phi = \{x_1, \ldots, x_k\}$, um revestimento ramificado de grau d finito, onde N é uma superfície fechada. Segundo as possíveis presentações do grupo fundamental de $\widehat{N} = N - B_\phi$ da página 15, a existência de uma representação de Hurwitz Ψ, implica que

$$\Psi(\{v_{x_1}^*\} \ldots \{v_{x_k}^*\}) = \begin{cases} 1 & N = \mathbb{S}^2 \\ [\Psi(\gamma_n), \Psi(\beta_n)].[\Psi(\gamma_{n-1}), \Psi(\beta_{n-1})] \ldots [\Psi(\gamma_1), \Psi(\beta_1)] & N = \mathbb{T}_n \\ \Psi(\beta_n)^2.\Psi(\beta_{n-1})^2 \ldots \Psi(\beta_1)^2 & N = \mathbb{R}\mathrm{P}_n \end{cases}$$

Observemos que sempre $\Psi(\{v_{x_1}^*\} \ldots \{v_{x_k}^*\}) = \sigma_1 \ldots \sigma_k$ é uma permutação par. Isto quer dizer que se $A_i = [a_{i_1}, \ldots, a_{i_{j_i}}]$, $j_i = \#(\phi^{-1}(x_i))$, é a partição associada a σ_i, segundo os resultados da seção 3.1 do capítulo anterior, então

$$\nu(\mathscr{D}) = \sum_{i=1}^{k} \nu(A_i) \equiv 0 \pmod 2. \tag{4.1}$$

Se $\mathscr{D}$ é um conjunto de partições não triviais de d que satisfaz (4.1), dizemos que $\mathscr{D}$ é um *dado de ramificação virtual.*

Proposição 4.1 *Seja N uma superfície fechada e $\mathscr{D} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ um dado de ramificação virtual. Se $\chi(N) \leq 0$, $\mathscr{D}$ é relizável. Mais que isso, se N é não orientável e d é par, a superfície de revestimento pode ser escolhida não orientável.*

Demonstração: Vamos mostrar que partindo da congruência (4.1) é possível construir uma representação de Hurwitz Ψ. Basta definir o homomorfismo $\Psi : \pi_1(\widehat{N}, z^*) \longrightarrow S_d$ nos geradores de $\pi_1(\widehat{N}, z^*)$. Mas lembremos que:

$$\pi_1(\widehat{N}, z^*) = \begin{cases} \langle \{v_1^*\}, \ldots, \{v_k^*\}, \beta_1, \gamma_1, \ldots, \beta_n, \gamma_n | \{v_1^*\} \ldots \{v_k^*\} [\beta_1, \gamma_1] \ldots [\beta_n, \gamma_n] = 1 \rangle & N = \mathbb{T}_n \\ \langle \{v_1^*\}, \ldots, \{v_k^*\}, \beta_1, \ldots, \beta_n | \{v_1^*\} \ldots \{v_k^*\} \beta_1^2 \ldots \beta_n^2 = 1 \rangle & N = \mathbb{R}\mathrm{P}_n \end{cases}$$

Portanto, queremos que a relação nos grupos fundamentais acima tenha a identidade como imagem na definição de Ψ. Por outro lado, se $\nu(\mathscr{D}) \equiv 0 \pmod 2$, então $\Psi(\{v_1^*\} \ldots \{v_k^*\})$ tem que ser uma permutação par.

Se N é orientável, pelo corolário 3.2.2 podemos definir Ψ tal que $\Psi(\{v_1^*\} \ldots \{v_r^*\}) = [\Psi(\gamma_1), \Psi(\beta_1)]$ sendo $\Psi(\gamma_1)$ um d-ciclo e $\Psi(\beta_i) = \Psi(\gamma_i) = 1$, para $1 < i \leq n$. Donde $\Psi(\{v_1^*\} \ldots \{v_k^*\} [\beta_1, \gamma_1] \ldots [\beta_n, \gamma_n]) = 1$. E já que $\Psi(\gamma_1)$ é um d-ciclo, isto garante a conexidade da superfície de revestimento.

Se N é não orientável, analogamente, pelo corolário 3.2.2 podemos definir Ψ tal que $\Psi(\{v_1^*\} \ldots \{v_r^*\}) = \Psi(\beta_2)^2 . \Psi(\beta_1)^2$ sendo $\Psi(\beta_2) . \Psi(\beta_1)$ um d-ciclo e $\Psi(\beta_j) = 1$, $2 < j \leq n$. Donde $\Psi(\{v_1^*\} \ldots \{v_k^*\} \beta_1^2 \ldots \beta_n^2) = 1$. E já que $\Psi(\beta_2 . \beta_1)$ é um d-ciclo, a superfície de revestimento será conexa. Finalmente para demonstrar a última afirmação da proposição é importante lembrar que se d é ímpar, a superfície de revestimento é não orientável (proposição 2.6). Se d é par, combinando a demonstração da afirmação 3 do corolário 3.2.2 e a proposição 3.2.3 podemos definir $\Psi(\beta_2)$ como sendo uma permutação que fixa um elemento. Daqui, pelo lema 2.5 M será não orientável. □

O quê acontece quando $\chi(N) > 0$?, isto é, o quê acontece quando N é o plano projetivo ou a esfera?

Da teoria já estudada temos que se $\mathscr{D}$ é o dado de ramificação de (M, ϕ, N, B_ϕ), necessariamente $\mathscr{D}$ satisfaz:

1. $\nu(\mathscr{D}) \equiv 0 \pmod 2$

2. Pelo corolário 2.7:

   - $\nu(\mathscr{D}) \geq d-1$, para $N = \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ e M não orientável.
   - $\nu(\mathscr{D}) \geq d-2$, para $N = \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ e M orientável.
   - $\nu(\mathscr{D}) \geq 2d-2$, para $N = \mathbb{S}^2$

Chamaremos a combinação do primeiro enunciado com um dos itens do segundo as *Condições de Hurwitz.*

Teorema 4.2 *Seja N o plano projetivo e $\mathscr{D} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ um dado de ramificação virtual. $\mathscr{D}$ é realizável se e somente se $\mathscr{D}$ satisfaz as condições de Hurwitz $\nu(\mathscr{D}) \equiv 0 \pmod 2$ e $\nu(\mathscr{D}) \geq d-1$. Mais ainda, a superfície de revestimento pode ser escolhida não orientável.*

Demonstração: Resta garantir a existência de um revestimento ramificado (M, ϕ, N, B_ϕ) que realize $\mathscr{D}$. Precisamos então definir uma representação

$$\Psi : \langle \{v_1^*\} \ldots \{v_k^*\}, \beta_1 | \{v_1^*\} \ldots \{v_k^*\} \beta_1^2 = 1 \rangle \longrightarrow S_d$$

tal que $\Psi(\{v_i^*\}) = \alpha_i \in A_i$, $1 \leq i \leq k$, e $\Psi(\{v_1^*\} \ldots \{v_k^*\}\beta_1^2) = 1$.

Seja $\nu(\mathscr{D}) = 2s$, $s \in \mathbb{Z}^+$. Pode acontecer:

1. d ímpar. Neste caso $\nu(\mathscr{D}) = \sum_{i=1}^{k} \nu(A_i) = (d-1) + r$, com $d-1$ e $r \geq 0$ pares. Logo $\nu(A_1) + \nu(A_2) = (d-1) + t$, $t = r - \sum_{i=3}^{k} \nu(A_i)$.

   (a) Se $t > 0$, pela proposição 3.2.6, para todo R, $0 \leq R \leq t$ e $R \equiv t \pmod 2$ pode-se escolher $\alpha_1 \in A_1$, $\alpha_2 \in A_2$ tais que $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ age transitivamente sobre $\{1, \ldots, d\}$ e $\nu(\alpha_1\alpha_2) = (d-1) - R$.

   (b) Se $t \leq 0$, pela proposição 3.2.5, existem $\alpha_1 \in A_1$ e $\alpha_2 \in A_2$ tais que o grupo $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ age sobre $\{1, \ldots, d\}$ determinando $t'+1$ órbitas, $t' = -t$, e se C denota a partição de d dada pelas as órbitas da ação de $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ sobre $\{1, \ldots, d\}$, então $\alpha_1\alpha_2 \in C$.

Seja $A_{12} = \|\alpha_1\alpha_2\|$, temos que $\nu(A_{12}) + \nu(A_3) = (d-1) + t_1$, $t_1 = r - \sum_{i=4}^{k} \nu(A_i)$. Fazendo uma análise para t_1 análoga à feita anteriormente para t vamos ter que $\langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ age transitivamente sobre $\{1, \ldots, d\}$ ou age determinando $1 - t_1$ órbitas dependendo se $t_1 > 0$ ou $t_1 \leq 0$ respectivamente, e achamos um $A_{123} = \|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\|$ tal que $\nu(A_{123}) + \nu(A_4) = (d-1) + t_2$, $t_2 = r - \sum_{i=5}^{k} \nu(A_i)$. Agora analisamos t_2 e continuamos assim por diante até definir um $A_{12\ldots(k-1)} = \|\alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}\|$ tal que $\nu(A_{1\ldots(k-1)}) + \nu(A_k) = (d-1) + r$, logo pela proposição 3.2.6, existe $\alpha_k \in A_k$ tal que $\langle \alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}, \alpha_k \rangle$ age transitivamente sobre $\{1, \ldots, d\}$ e $\nu(\alpha_1 \ldots \alpha_k) = d-1$ pois $r \equiv 0 \pmod 2$. Portanto $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ é um d-ciclo par e existe $\widehat{\beta}_1 \in S_d$ tal que $\alpha_1 \ldots \alpha_k \widehat{\beta}_1^2 = 1$. Veja, se $\alpha_1 \ldots \alpha_k = (a_1 \ldots a_d)$ e $\beta = (a_1 \ a_{e+1} \ a_2 \ a_{e+2} \ldots a_i \ a_{e+i} \ldots a_{d-1} \ a_{e-1} a_d \ a_e)$ para $e = \frac{d+1}{2}$ é só fazer $\widehat{\beta}_1 = \beta^{-1}$

2. Se d é par. $\sum_{i=1}^{k} \nu(A_i) = (d-1) + r$, com $d-1$ e r ímpares. Fazendo a analise acima para este caso vamos ter que existem $\alpha_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, k$, tais que $\langle \alpha_1 \ldots \alpha_{k-1}, \alpha_k \rangle$ age transitivamente sobre $\{1, \ldots, d\}$ e já que $\sum_{i=1}^{k} \nu(A_1) = d + (r-1)$ com $r-1$ par, pela proposição 3.2.8 pode acontecer:

   (a) $\alpha_1 \ldots \alpha_k \in [d/2, d/2]$ se $A_{12\ldots(k-1)} = A_k = [2, \ldots, 2]$. Neste caso existe um d-ciclo $\widehat{\beta}_1 \in S_d$ tal que $\alpha_1 \ldots \alpha_k \widehat{\beta}_1^2 = 1$: se $\alpha_1 \ldots \alpha_k = (a_{1_1} \ldots a_{1_{d/2}})(a_{2_1} \ldots a_{2_{d/2}})$ e $\beta = (a_{1_1} \ a_{2_1} \ldots a_{1_i} \ a_{2_i} \ldots a_{1_{d/2}} \ a_{2_{d/2}})$ é só fazer $\widehat{\beta}_1 = \beta^{-1}$

   (b) Ou $\alpha_1 \ldots \alpha_k \in [d-1, 1]$, logo $\alpha_1 \ldots \alpha_k$ é um $(d-1)$-ciclo par, portanto existe um $(d-1)$-ciclo $\widehat{\beta}_1 \in S_d$, tal que $\alpha_1 \ldots \alpha_k \widehat{\beta}_1^2 = 1$. Veja, se $\alpha_1 \ldots \alpha_k = (a_1 \ldots a_{d-1})$ e $\beta = (a_1 \ a_{\frac{d}{2}+1} \ a_2 \ a_{\frac{d}{2}+2} \ldots a_{d-1} \ a_{\frac{d}{2}})$ é só fazer $\widehat{\beta}_1 = \beta^{-1}$.

Assim, pelo corolário 2.4, sempre é possível garantir a existência de um revestimento ramificado $\phi : M \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ que realize $\mathscr{D}$ como dado de ramificação.

Para ver que M pode ser não orientável, já que $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k \rangle$ age transitivamente sobre $\{1, \ldots, d\}$, existe $\gamma \in \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k \rangle$ tal que $\gamma(\beta(1)) = 1$, logo $\gamma\beta \in S_{d-1}$ e pelo lema 2.5, M é não orientável. □

Vamos dizer que (M, ϕ, N, B_ϕ) é um *revestimento ramificado orientável (não orientável)*, se M é orientável (não orientável).

Dos resultados anteriores notamos que se N é não orientável e $\mathscr{D}$ é um dado de ramificação virtual satisfazendo as condições de Hurwitz $\nu(\mathscr{D}) \equiv 0 \pmod 2$ e $\nu(\mathscr{D}) \geq d-1$ podemos realizar $\mathscr{D}$. Mais que isso, se d é ímpar, M é não orientável, e se d é par, sempre é possível achar um revestimento ramificado tal que M seja não orientável, mas nem sempre é possível realizar $\mathscr{D}$ com um revestimento ramificado orientável.

Exemplo 4.3 *O dado de ramificação virtual $\mathscr{D} = \{[3,1]\}$ não é realizável mediante um revestimento ramificado orientável da garrafa de Klein:*
Seja $\mathbb{K}$ a garrafa de Klein e $y \in \mathbb{K}$. Para que exista um revestimento ramificado de grau 4 com ramificação localizada sobre y, é preciso definir $\Psi : \langle a,b,c \mid abab^{-1}c^{-1} = 1\rangle \longrightarrow S_4$ tal que $[\widehat{a},\widehat{b}]_- \in [3,1]$. Mas notemos que para garantir a orientabilidade da superfície de revestimento, nenhum ciclo de $\Psi(a) = \widehat{a}$ nem de $\Psi(b) = \widehat{b}$ pode ter comprimento ímpar. Isto é, precisamos que $\widehat{a}$, $\widehat{b} \in [2,2]$ o que implica, pela proposição 3.2.8, que $[\widehat{a},\widehat{b}]_- \in [2,2]$, portanto é impossível definir Ψ.

Proposição 4.4 *Seja $d \in \mathbb{Z}^+$ par, N uma superfície fechada não orientável e $\mathscr{D} = \{A_1,\ldots,A_k\}$ um dado de ramificação virtual. $\mathscr{D}$ é realizável por um revestimento ramificado orientável se e somente se para $1 \leq i \leq k$ é $A_i = [B_i,C_i]$ onde B_i e C_i são partições de $d/2$ tais que $\{B_1,\ldots,B_k,C_1,\ldots,C_k\}$ é dado de ramificação de um revestimento ramificado de grau $d/2$ do revestimento orientável duplo de N.*

Demonstração: Seja (M,ϕ,N,B_ϕ) um revestimento ramificado orientável de grau d. Consideremos os homomorfismos

$$\begin{aligned} \omega : \pi_1(N,z^*) &\longrightarrow \{+1,-1\} \\ \beta_j &\longmapsto -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\omega} : \pi_1(\widehat{N},z^*) &\longrightarrow \{+1,-1\} \\ \{v_i^*\} &\longmapsto +1 \\ \beta_j &\longmapsto -1 \end{aligned}$$

$i = 1,\ldots,k,\ j = 1,\ldots,n.$

$\widehat{M} = M - \phi^{-1}(B_\phi)$ é também orientável e pelo lema 2.5,

$$\phi_*(\pi_1(\widehat{M}) = \Psi^{-1}(S_{d-1}) \subset \text{Ker } \omega \tag{4.2}$$

onde Ψ é a representação de Hurwitz associada a ϕ.

Seja $(\widetilde{N}, \pi, N)$ o revestimento orientável duplo de N determinado pelo Ker ω. Tanto $(\widehat{M}, \phi, \widehat{N})$ quanto $(\pi^{-1}(\widehat{N}), \pi, \widehat{N})$ são revestimentos não ramificados de $\widehat{N}$. Seja $\bar{N} = \pi^{-1}(\widehat{N})$. Pela teoria dos revestimentos, sabemos que pode-se levantar ϕ para um revestimento de $\bar{N}$ se e somente se $\phi_*(\pi_1(\widehat{M})) \subset \pi_*(\pi_1(\bar{N}))$. Temos que Ker $\omega \subset$ Ker $\widehat{\omega} = \pi_*(\pi_1(\bar{N}))$, logo por (4.2) podemos levantar ϕ para um revestimento não ramificado $\widetilde{\phi} : \widehat{M} \longrightarrow \bar{N}$ de grau $d/2$ que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{array}{ccc} & & \bar{N} \\ & \overset{\widetilde{\phi}}{\nearrow} & \downarrow \pi \\ \widehat{M} & \xrightarrow[\phi]{} & \widehat{N} \end{array} \tag{4.3}$$

Seja $B_{\widetilde{\phi}} = \pi^{-1}(B_\phi)$. Já que $B_{\widetilde{\phi}}$ é um conjunto discreto, podem-se preencher cada um destes "buraquinhos" em $\bar{N}$ do jeito usual. Com a comutatividade do diagrama (4.3) temos que cada $A_i \in \mathscr{D}$ pode escrever-se como $A_i = [B_i, C_i]$ onde B_i e C_i são partições de $d/2$ e assim $\{B_1, \ldots, B_k, C_1, \ldots, C_k\}$ é dado de ramificação de $(M, \widetilde{\phi}, \bar{N}, B_{\widetilde{\phi}})$.

Para a condição suficiente, suponha que cada $A_i \in \mathscr{D}$ é da forma $A_i = [B_i, C_i]$ onde $\{B_1, \ldots, B_k, C_1, \ldots, C_k\}$ é dado de ramificação de um revestimento ramificado $(M, \rho, \widetilde{N}, B_\rho)$ de grau $d/2$. É claro que M orientável, pois $\widetilde{N}$ é orientável, portanto $(M, \rho \circ \pi, N, \pi(B_\rho))$ é um revestimento ramificado orientável de grau d. □

Pela demonstração da proposição anterior, se d é par os revestimentos ramificados orientáveis de grau d do plano projetivo, dependem dos revestimentos ramificados de grau $d/2$ do revestimento orientável duplo de $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$. Isto é, estudar a realização de dados de ramificação virtuais sobre $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ mediante revestimentos ramificados orientáveis, equivale a estudar a realização de dados de ramificação "especiais" da esfera que como vamos ver não é um problema trivial.

As condições de Hurwitz para o caso da esfera são $\nu(\mathscr{D}) \equiv 0 \pmod 2$ e $\nu(\mathscr{D}) \geq 2d-2$, em geral elas não são suficientes para realizar $\mathscr{D}$.

Exemplo 4.5 *O conjunto* $\mathscr{D} = \{[2,2],[2,2],[3,1]\}$ *de partições do* 4 *satisfaz as condições de Hurwitz mas não é realizável, pois é impossível definir uma representação de Hurwitz* $\Psi : \pi_1(\mathbb{S}^2 - \{x_1, x_2, x_3\}) \longrightarrow S_4$, *já que, pela proposição 3.2.8, se* $\alpha,\ \beta \in [2,2]$, *então* $\alpha\beta \in [2,2]$, *ou se* $\beta \in [3,1]$ *então* $\alpha\beta \in [3,1]$.

Lembremos que para garantir a realização de um dado de ramificação virtual $\mathscr{D} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ mediante um revestimento ramificado conexo da esfera precisamos da existência de representantes $\alpha_i \in A_i$ tais que $\alpha_1 \ldots \alpha_k = 1$ e que a ação de $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_k \rangle$ sobre $\{1, \ldots, d\}$ seja transitiva.

Proposição 4.6 *O conjunto* $\mathscr{D} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ *de partições de* d, *com* $A_i = [d]$ *para algum* $i \in \{1, \ldots, k\}$, *é realizável por um revestimento ramificado de grau* d *da esfera se e somente se satisfaz as condições de Hurwitz.*

Demonstração: A condição necessária está feita. Vamos supor então que $\mathscr{D}$ satisfaz as condições de Hurwitz isto é, $\nu(\mathscr{D}) \geq 2d-2$ e $\nu(\mathscr{D}) \equiv 0 \pmod 2$.

Se $k = 2$, $\mathscr{D} = \{A_1, A_2\}$ com $\nu(A_i) = d - t_i$, $i = 1,2$. Mas pela hipótese $\nu(A_1) + \nu(A_2) \geq 2d-2$ donde $2d - (t_1 + t_2) \geq 2d - 2$, portanto $t_1 + t_2 \leq 2$ e assim $t_1 = t_2 = 1$, isto é, $A_1 = A_2 = [d]$. Peguemos $\alpha_1 = (1 \ldots d)$ e $\alpha_2 = \alpha_1^{-1}$, é claro que $\alpha_1\alpha_2 = 1$.

Se $k = 3$, $\mathscr{D} = \{A_1, A_2, A_3\}$ é tal que $\nu(A_1) + \nu(A_2) + \nu(A_3) \geq 2d - 2 > d - 1$, e já que pela hipótese existe $i \in \{1,2,3\}$ tal que $A_i = [d]$, então existe $i \in \{1,2,3\}$ tal que $\nu(A_i) = d - 1$. Sem perda de generalidade vamos supor $i = 3$, donde

$$\nu(A_1) + \nu(A_2) \equiv -d + 1 \pmod 2$$

e já que $d + 1 \equiv -d + 1 \pmod 2$ pelo corolário 3.2.7, existem $\alpha_1 \in A_1$, $\alpha_2 \in A_2$ tais que $\nu(\alpha_1\alpha_2) = d - 1 = \nu(A_3)$. Assim, é só pegar $\alpha_3 = (\alpha_1\alpha_2)^{-1}$.

Para $k > 3$, por indução. Vamos assumir $A_k = [d]$. Pode acontecer:

1. Que existam i, j tais que $\nu(A_i) + \nu(A_j) \leq d - 1$, para $i \neq j$. Sem perda de generalidade podemos supor $\nu(A_1) + \nu(A_2) \leq d - 1$, pela proposição 3.2.5 existem $\alpha_1 \in A_1$, $\alpha_2 \in A_2$ tais que $\nu(\alpha_1\alpha_2) = \nu(\alpha_1) + \nu(\alpha_2)$. Seja $A = \|\alpha_1\alpha_2\|$. Então

$\mathscr{D}' = \{A, A_3, \ldots, A_k\}$ satisfaz a hipóteses da proposição e pela indução, existe $\alpha \in A$ e $\alpha_i \in A_i$, $3 \leq i \leq k$ que realizam $\mathscr{D}'$. Isto é, existem $\alpha \in A$, $\alpha_i \in A_i$, $3 \leq i \leq k$, tais que $\alpha\alpha_3 \ldots \alpha_k = 1$. É claro que α e $\alpha_1\alpha_2$ são conjugados, portanto existe $\gamma \in S_d$ tal que $\alpha = \gamma\alpha_1\alpha_2\gamma^{-1}$ logo $\gamma\alpha_1\gamma^{-1}$, $\gamma\alpha_2\gamma^{-1}$, $\alpha_3, \ldots, \alpha_k$ realiza $\mathscr{D}$.

2. Que $\nu(A_i) + \nu(A_j) \geq d$, para todo $i \neq j$. Seja $\nu(A_1) + \nu(A_2) = d + R$, $R \geq 0$.

   (a) Se R for ímpar, $\nu(A_1) + \nu(A_2) = (d-1) + (R+1)$, e já que $R+1$ é par, pela proposição 3.2.6 podemos escolher $\alpha_1 \in A_1$, $\alpha_2 \in A_2$ tais que $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ age transitivamente sobre $\{1, \ldots, d\}$ e $\nu(\alpha_1\alpha_2) = d - 1$.

   (b) Se R for par, pela proposição 3.2.8, $\nu(\alpha_1\alpha_2) = d - 2$.

   Logo sempre vamos ter $\nu(\alpha_1\alpha_2) \geq d - 2$ e $\nu(\alpha_1\alpha_2) \equiv \nu(\alpha_1) + \nu(\alpha_2) \pmod 2$. Seja $A = \|\alpha_1\alpha_2\|$ e $\mathscr{D}' = \{A, A_3, \ldots, A_k\}$. Então $\nu(\mathscr{D}') \equiv 0 \pmod 2$ e

$$\begin{aligned} \nu(\mathscr{D}') &= \nu(\alpha_1\alpha_2) + 2d - 2 - (\nu(A_1) + \nu(A_2)) \\ &\geq 2d - 2 + 2q \\ &\geq 2d - 2 \end{aligned}$$

   onde $\nu(\alpha_1\alpha_2) - (\nu(A_1) + \nu(A_2)) = 2q$. Assim $\mathscr{D}'$ é realizável por indução e analogamente ao caso anterior, é possível realizar $\mathscr{D}$.

□

Proposição 4.7 *O conjunto $\mathscr{D} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ de partições de d, com $A_i = [d-1, 1]$ para algum $i \in \{1, \ldots, k\}$, é realizável por um revestimento ramificado da esfera se e somente se satisfaz as condições de Hurwitz e é diferente de:*
(1) $\{[2,2], \ldots, [2,2], [3,1]\}$ *para* $d = 4$ *e* $k \geq 3$.
(2) $\{[2, \ldots, 2], [2, \ldots, 2], [d-1, 1]\}$ *para* $d = 2r$ *e* $k = 3$.

Demonstração: Os dados de ramificação virtuais dados em *(1)* e *(2)* não são realizáveis, pois no primeiro caso tem-se que as permutações com estrutura cíclica $[2,2]$ geram o 2-Sylow de A_4 e este subgrupo de S_4 não contém 3-ciclos. E o segundo caso não é realizável

pela proposição 3.2.8, pois para todo α, $\beta \in [2,\ldots,2]$ temos que $\alpha\beta \in [d/2, d/2]$. Assim as condições necessárias foram demonstradas.

Resta provar que qualquer outro conjunto de partições satisfazendo as condições de Hurwitz é realizável. Para começar, da hipótese temos que $k \geq 3$, pois se $k = 1$, $\mathscr{D} = \{[d-1,1]\}$ e $\nu(\mathscr{D}) = d-2 < 2d-2$ o que contradiz uma das condições de Hurwitz. Se $k = 2$, $\mathscr{D} = \{A_1, A_2\}$. Vamos supor $A_1 = [d-1,1]$ e $\nu(A_2) = d-t$, $t > 0$. Logo $\nu(\mathscr{D}) = 2d-(t+2) \geq 2d-2$, donde $t \leq 0$, absurdo.

Seja então $k = 3$. Temos $\mathscr{D} = \{A_1, A_2, A_3\}$ satisfazendo as condições de Hurwitz e, sem perda de generalidade, $A_3 = [d-1,1]$. Assim, $\nu(A_1) + \nu(A_2) \geq 2d-2-\nu(A_3)$, isto é, $\nu(A_1) + \nu(A_2) = (2d-2+2q) - (d-2)$ para $q \geq 0$ pois $\nu(\mathscr{D})$ é par. Portanto $\nu(A_1)+\nu(A_2) = d+2q$. Pela proposição 3.2.8, existem $\alpha_1 \in A_1$, $\alpha_2 \in A_2$ tais que $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle$ age transitivamente sobre $\{1,\ldots,d\}$ e $\alpha_1\alpha_2 \in [d-1,1]$, pois $\mathscr{D}$ é diferente do conjunto em *(2)*. Fazendo $\alpha_3 = (\alpha_1\alpha_2)^{-1}$ é claro que $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 1$, com $\alpha_3 \in A_3$, e este produto realiza $\mathscr{D}$.

Para $k \geq 4$ vamos provar por indução e usaremos o *método de redução* da demonstração da proposição anterior. Assumamos que $A_k = \{[d-1,1]\}$. Pelas proposições 3.2.5, 3.2.6 e 3.2.8, existem $\alpha_1 \in A_1$, $\alpha_2 \in A_2$ tais que $\nu(\alpha_1\alpha_2) = \nu(\alpha_1) + \nu(\alpha_2)$ ou $\nu(\alpha_1\alpha_2) \geq d-2$ e além disso temos que $\nu(\alpha_1\alpha_2) \equiv \nu(\alpha_1) + \nu(\alpha_2) \pmod 2$.

Se $d = 4$, podemos pegar $\alpha_1\alpha_2 \notin [2,2]$ pois $\mathscr{D}$ é diferente do conjunto em *(1)*. Seja $\mathscr{D}' = \{\|\alpha_1\alpha_2\|, A_3, \ldots, A_k\}$, então $\nu(\mathscr{D}') = \nu(\mathscr{D})$ ou $\nu(\mathscr{D}') \geq 2d-2$, pela hipótese de indução $\mathscr{D}'$ é realizável e da mesma forma que na demonstração da proposição anterior podemos concluir que $\mathscr{D}$ é realizável. □

Teorema 4.8 *Seja $d \neq 4$. Um dado de ramificação virtual $\mathscr{D} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ é realizável por um revestimento ramificado de grau d da esfera se $\nu(\mathscr{D}) \equiv 0 \pmod 2$ e $\nu(\mathscr{D}) \geq 3(d-1)$.*

Demonstração: O caso $d = 2$ é trivial, pois neste caso para todo $A_i \in \mathscr{D}$, $A_i = [2]$ e as condições do teorema implicam que k é par. Assim podemos definir a seguinte

representação

$$\begin{aligned} \Psi : \langle \{v_1^*\}, \ldots, \{v_k^*\} \mid \{v_1\}^* \ldots \{v_k\}^* = 1 \} \rangle &\longrightarrow S_2 \\ \{v_i^*\} &\longmapsto \sigma_i = (1\ 2) \end{aligned}$$

para $i = \{1, \ldots, k\}$, logo $\sigma_1 \ldots \sigma_k = 1$.

Seja $d \geq 3$. O caso $k \leq 2$ é vazio. Veja, se $k = 2$, $\mathscr{D} = \{A_1, A_2\}$ e $\nu(\mathscr{D}) = 2d-(t_1+t_2)$. Já que $\nu(\mathscr{D}) \equiv 0 \pmod 2$ então $t_1+t_2 \equiv 0 \pmod 2$, além disso, $2d-(t_1+t_2) \geq 2d-(3-d)$ logo $t_1 + t_2 \leq 3 - d$, isto é $t_1 + t_2 \leq 0$, absurdo. Se $k = 1$, $d - t \equiv 0 \pmod 2$, isto quer dizer que $2|(d - t)$, mas $d - t \geq 3d - 3$ portanto $0 < t \leq 3 - 2d$, impossível porque no mínimo $d = 3$.

Seja $k = 3$, $\mathscr{D} = \{A_1, A_2, A_3\}$ e $\nu(\mathscr{D}) = 3d-(t_1+t_2+t_3) \geq 3d-3$ logo $t_1+t_2+t_3 \leq 3$ e já que $t_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, temos que $t_i = 1$ donde $A_i = [d]$. Agora, como $t_1 + t_2 + t_3 \equiv d \pmod 2$ então d é ímpar. Neste caso definimos $\alpha_1 = \alpha_2 = (1\ 2 \ldots d)$ e $\alpha_3 = (\alpha_1\alpha_2)^{-1}$.

Para $k \geq 4$, demonstraremos por indução. Pode acontecer:

1. Que existam i, j tais que $\nu(A_i) + \nu(A_j) \leq d - 1$, $i \neq j$. Sem perda de generalidade podemos supor $\nu(A_1) + \nu(A_2) \leq d - 1$ isto é $\nu(A_1) + \nu(A_2) = d - t$, $t \geq 1$ e pela proposição 3.2.5 existem $\alpha_1 \in A_1$, $\alpha_2 \in A_2$ tais que $\nu(\alpha_1\alpha_2) = \nu(\alpha_1) + \nu(\alpha_2)$. Seja $A = \|\alpha_1\alpha_2\|$ e $\mathscr{D}' = \{A, A_3 \ldots, A_k\}$. Por indução $\mathscr{D}'$ é realizável e portanto $\gamma\alpha_1\gamma^{-1}$, $\gamma\alpha_2\gamma^{-1}$, $\alpha_3, \ldots, \alpha_k$ realiza $\mathscr{D}$, para $\gamma \in S_d$, pois $\alpha \in A$ e $\alpha_1\alpha_2$ são conjugados.

2. Que $\nu(A_i) + \nu(A_j) \geq d$ para todo $i \neq j$. Então $2d - (t_i + t_j) \geq d$ logo $d \geq t_i + t_j$, portanto $t_1 + t_2 \in \{2, 3\}$ donde $t_1 = 1$ ou $t_2 = 1$ o que implica $A_1 = [d]$ ou $A_2 = [d]$, logo $\mathscr{D}$ é realizável pela proposição 4.6.

   Podemos supor então que $\nu(A_i) \leq d - 2$. Temos dois sub-casos:

   (a) Algum $A_i \neq [2, \ldots, 2]$. Suponhamos $A_1 \neq [2, \ldots, 2]$ e $\nu(A_1)$ minimal entre os

$\nu(A_j)$ com $A_j \neq [2,\ldots,2]$. Agora

$$\begin{aligned}\nu(A_1)+\nu(A_2) &= 2d-4-q,\ q\geq 0\\ &= (d-1)+(1+d-4-q)\\ &= d+(d-4-q).\end{aligned}$$

Se $1+d-4+q$ é ímpar, $d-4+q$ é par e pela proposição 3.2.8, existem $\alpha_1 \in A_1$, $\alpha_2 \in A_2$ tais que $\langle \alpha_1, \alpha_2\rangle$ age transitivamente sobre $\{1,\ldots,d\}$ e $\alpha_1\alpha_2 \in [d-1,1]$.

Se $1+d-4+q$ é par, pela proposição 3.2.6 existem $\alpha_1 \in A_1$, $\alpha_2 \in A_2$ tais que $\langle \alpha_1, \alpha_2\rangle$ age transitivamente sobre $\{1,\ldots d\}$ e $\nu(\alpha_1\alpha_2) = d-1$ portanto $\alpha_1\alpha_2 \in [d]$.

Seja $A = \|\alpha_1\alpha_2\|$ e $\mathscr{D}' = \{A, A_3,\ldots,A_k\}$. De outro lado

$$\nu(\mathscr{D}') \geq (d-2)+\frac{(k-2)d}{2} \geq 2d-2$$

já que no máximo existe um i tal que $\nu(A_i) < d/2$ e $k \geq 4$. Agora $\mathscr{D}'$ é realizável exceto se $k=4$ e $A_3 = A_4 = [2,\ldots,2]$, neste caso $\nu(\mathscr{D}) \leq 2(d-2)+(2d)/2 = 3d-4 < 3(d-1)$ pois $\nu(A_i) \leq d-2$, $i \in \{1,2\}$ e $\nu(A_j) = d/2$, $j \in \{3,4\}$, contradizendo o que assumimos.

Alterando a escolha de $\alpha \in A$ por o produto de $\gamma^{-1}\alpha_1\gamma$ e $\gamma^{-1}\alpha_2\gamma$ para um $\gamma \in S_d$, se realiza $\mathscr{D}$.

(b) Que $A_i = [2,\ldots,2]$ para $i = 1,\ldots,k$. Já que $\nu(\mathscr{D})$ é par e $3(d-1)$ é ímpar, então $\nu(\mathscr{D}) = kd/2 > 3(d-1)$, donde $k > \frac{6(d-1)}{d} \geq 5$ pois d é par e $d \geq 6$. Temos então que $\nu(A_1)+\nu(A_2) = d$, pela proposição 3.2.8 existem $\alpha_1 \in A_1$, $\alpha_2 \in A_2$ tais que $\langle \alpha_1, \alpha_2\rangle$ age transitivamente sobre $\{1,\ldots,d\}$ e $\alpha_1\alpha_2 \in [d/2, d/2]$.

Seja $A = \|\alpha_1\alpha_2\|$ e $\mathscr{D}' = \{A,\ A_3,\ldots,A_k\}$.

$$\begin{aligned}\nu(A)+\nu(A_3) &= d-2+d/2\\ &= d+(d/2-2)\\ &= (d-1)+(d/2-1).\end{aligned}$$

Se $d/2-2$ é par, pela proposição 3.2.8 existe $\alpha_3 \in A_3$ tal que $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \in [d-1,1]$.

Se $d/2-2$ é ímpar, pela proposição 3.2.6 existe $\alpha_3 \in A_3$ tal que $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = [d]$. Já que $k \geq 6$ as duas proposições anteriores garantem que o dado de ramificação virtual $\{\|\alpha_1\alpha_2\alpha_3\|,\ A_4, \ldots, A_k\}$ é realizável e daqui $\mathscr{D}$ é realizável.

□

Corolario 4.9 *Se $d \neq 4$ existe só um número finito de dados de ramificação virtuais não realizáveis mediante revestimentos ramificados de grau d da esfera.*

Demonstração: Só existe um número finito de dados de ramificação virtuais $\mathscr{D}$ tais que $\nu(\mathscr{D}) < 3(d-1)$. □

Corolario 4.10 *Para $d = 4$, um dado de ramificação virtual $\mathscr{D} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ é realizável mediante um revestimento ramificado de grau d da esfera se e somente se $\nu(\mathscr{D}) \geq 2d-2 = 6$, $\nu(\mathscr{D}) \equiv 0 \pmod 2$ e $\mathscr{D} \neq \{[2,2],[2,2],\ldots,[2,2],[3,1]\}$.*

Demonstração: As condições necessárias já foram provadas. Para as condições suficientes vimos que não é possível realizar $\{[2,2],\ldots,[2,2],[3,1]\}$. Se $\mathscr{D}$ contém um $[4]$ ou um $[3,1]$ pelas proposições 4.6 e 4.7 $\mathscr{D}$ é realizável. Senão, então $\mathscr{D}$ só contém $[2,2]$ e/ou $[2,1,1]$. Se ambos aparecem, vamos supor que $A_1 = [2,2]$ e $A_2 = [2,1,1]$, logo $\nu(A_1) + \nu(A_2) = 3 = 4-1$. Pelo corolário 3.2.7 existem $\alpha_1 \in A_1$, $\alpha_2 \in A_2$ tais que $A = \|\alpha_1\alpha_2\| = [4]$. assim, pela proposição 4.6, $\mathscr{D}' = \{A, A_3, \ldots, A_k\}$ é realizável e portanto $\mathscr{D}$ também. Se só aparecem $[2,1,1]$, já que $\nu(\mathscr{D}) \geq 6$, $\mathscr{D}$ tem no mínimo 6 partições. Temos então $\nu(A_1)+\nu(A_2) = 4-2$ e pela proposição 3.2.5 existem $\alpha_1 \in A_1$, $\alpha_2 \in A_2$ tais que $\nu(\alpha_1\alpha_2) = 4-2$. Seja $A = \|\alpha_1\alpha_2\|$, donde $\nu(A)+\nu(A_3) = 2+1 = 3 = 4-1$ e pelo corolário 3.2.7 existe $\alpha_3 \in A_3$ tal que $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \in [d] = [4]$, portanto $\mathscr{D}$ é realizável. Se só aparecem $[2,2]$, $\nu(A_1)+\nu(A_2) = 4$ e pela proposição 3.2.8 existem $\alpha_1 \in A_1$, $\alpha_2 \in A_2$ tais que $\alpha_1\alpha_2 \in [2,2]$. Seja $A = \|\alpha_1\alpha_2\|$. Se $k = 3$, $\alpha_3 = (\alpha_1\alpha_2)^{-1}$ implica que $\mathscr{D}$ é realizável. Se $k > 3$, por indução $\mathscr{D}'$ é realizável e portanto $\mathscr{D}$ é realizável. □

Proposição 4.11 *Se $d = ab$ com $a,\ b > 1$, então embora $\mathscr{D} = \{[a,\ldots,a],[b+1,1,\ldots,1],[a,a(b-1)]\}$ satisfaça as condições de Hurwitz, $\mathscr{D}$ não é realizável por nenhum revestimento ramificado da esfera.*

Demonstração: O plano para fazer a prova é o seguinte, fixar $\beta = (1\ 2 \ldots b+1) \in [b+1, 1, \ldots, 1]$, considerar todos os possíveis $\alpha \in [a, \ldots, a]$ com $\langle \alpha, \beta \rangle$ transitivo e mostrar que $\alpha\beta$ não pode cair em $[a, a(b-1)]$.

A transitividade requer que nenhum dos b a-ciclos de α envolva só dados maiores que $b+1$, pois não teríamos como conectar $b+1$ com $b+i$ por exemplo. Segue então que $(b-1)$ a-ciclos de α contêm exatamente um dado menor ou igual a $b+1$ e um deles contém dois. Sem perda de generalidade podemos assumir que

$$\alpha = (1 \ldots j \ldots)(2 \ldots) \ldots (j-1 \ldots)(j+1 \ldots) \ldots (b+1 \ldots)$$

para algum $j \leq b+1$. Assim

$$\alpha\beta = (\underbrace{1 \ldots}_{u} \underbrace{j+1 \ldots}_{a} \underbrace{j+2 \ldots}_{a} \quad \ldots \underbrace{b+1 \ldots}_{a})(\underbrace{j \ldots}_{v} \underbrace{2 \ldots}_{a} \quad \ldots \underbrace{j-1 \ldots}_{a})$$

onde $u + v = a$ e $u,\ v \geq 1$. Assim, $\alpha\beta \in [x, d-x]$ onde $x \equiv u \pmod{a}$, $d - x \equiv v \pmod{a}$. Em particular nem x nem $d-x$ são divisíveis por a, e por isto $\alpha\beta \notin [a, a(b-1)]$. □

Teorema 4.12 *Se $d \neq 8$ é par, então um dado de ramificação virtual $\mathscr{D} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ com $A_i = \{B_i, C_i\}$, e $B_i,\ C_i \in \pi(d/2)$, é realizável por um revestimento ramificado conexo orientável do $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ se $\nu(\mathscr{D}) \geq 3((d/2)-1)$ e $\nu(\mathscr{D}) \equiv 0 \pmod{2}$.*

Demonstração: Seja $d = 2d'$. Escolhamos um refinamento $B_i \sqcup C_i$ de A_i, $1 \leq i \leq k$. Então para $\mathscr{D}' = \{B_1, C_1, \ldots, B_k, C_k\}$ temos

$$\nu(\mathscr{D}') = \sum_{i=1}^{k} (\nu(B_i) + \nu(C_i)) = \sum_{i=1}^{k} \nu(A_i) \geq 3(d'-1)$$

Pelo teorema 4.8 $\mathscr{D}'$ é realizável por um revestimento ramificado conexo de grau d' da esfera. Assim, fazendo a composição com o revestimento $\mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ podemos completar a prova como na proposição 4.4. □

Temos como consequência que para $d \neq 8$ par, só um número finito de dados de ramificação virtuais, onde cada partição pode refinar-se e assim tornar-se um elemento de

$\pi(d/2)$, não são realizáveis por revestimentos ramificados conexos e orientáveis de grau d do plano projetivo.

Corolario 4.13 *Para* $d = 8$, *as coleções* $\mathscr{D}_k = \{[3,1,1,1,1,1],[2,2,2,2],\ldots,[2,2,2,2]\}$ *e* $\mathscr{E}_k = \{[3,1,2,2],[2,2,2,2],\ldots,[2,2,2,2]\}$ *para* $k \geq 2$ *e satisfazendo* $\nu(\mathscr{E}_k) > \nu(\mathscr{D}_k) = 4k-2 \geq 6 = d-2$ *não são realizáveis por nenhum revestimento ramificado conexo e orientável de* $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$.

Demonstração: O único refinamento do tipo $[4,4]$ das partições acima é aquele que o corolário 4.10 proíbe. □

Capítulo 5

Revestimentos Ramificados Primitivos

Estudamos, neste capítulo, a realização de dados da ramificação virtuais mediante revestimentos ramificados primitivos, e uma generalização deste problema, quando N é fechada e diferente da esfera. Ver [BGKZ2] e [EKS].

Todo revestimento ramificado (M, ϕ, N, B_ϕ) de grau finito d determina um subgrupo de $\pi_1(N)$ de índice finito, $\phi_*(\pi_1(M))$.

Questão 2 *Seja $H \subset \pi_1(N)$ um subgrupo de índice l finito, $d \in \mathbb{Z}^+$ finito, e $\mathscr{D} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ um dado de ramificação virtual. Será que existe um revestimento ramificado conexo (M, ϕ, N, B_ϕ) de grau d que realize $\mathscr{D}$ e tal que $\phi_*(\pi_1(M)) = H$?*

Notemos que quando $N = \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ e $H = \pi_1(N)$ a resposta à questão acima é afirmativa, pois um conjunto de partições de d satisfazendo as condições de Hurwitz $\nu(\mathscr{D}) \equiv 0 \pmod 2$ e $\nu(\mathscr{D}) \geq d - 1$, sempre pode-se realizar com um revestimento ramificado não orientável (M, ϕ, N, B_ϕ) e, neste caso, $\phi_*(\pi_1(M)) = \pi_1(N) \cong \mathbb{Z}_2$. Pois se for $\phi_*(\pi_1(M)) = \{0\}$, seria possível levantar ϕ a um revestimento ramificado de $\mathbb{S}^2$, o que é absurdo já que M é não orientável.

Uma função contínua chama-se *primitiva* se o homomorfismo induzido entre os grupos fundamentais é sobrejetor. Assim, vamos dizer que (M, ϕ, N, B_ϕ) é um *revestimento ramificado primitivo* se $\phi_*(\pi_1(M)) = \pi_1(N)$.

Lembremos que o subgrupo de isotropia de um elemento $z_i \in \phi^{-1}(z^*) = \{z_1, \ldots, z_d\}$ esta dado por

$$I_{\pi_1(\widehat{N},z^*)}(z_i) = \{a \in \pi_1(\widehat{N}, z^*) \mid z_i.a = z_i\}. \tag{5.1}$$

Agora, se Ψ é a representação de Hurwitz associada a ϕ, (5.1) pode-se escrever assim:

$$I_\Psi(i) = \{a \in \pi_1(\widehat{N}, z^*) \mid i.\widehat{a} = i\}.$$

onde $\widehat{a} = \Psi(a)$.

Teorema 5.1 *Seja N uma superfície compacta e (M, ϕ, N, B_ϕ) um revestimento ramificado de grau d. Então $\phi_*(\pi_1(M, z_1)) = i_*(I_\Psi(1))$, onde i_* é o homomorfismo de grupos induzido pela inclusão $i : \widehat{N} \hookrightarrow N$.*

Demonstração: Seja $\widehat{M} = M - \phi^{-1}(B_\phi)$ e $\widehat{\phi} = \phi|_{\widehat{M}}$. Sabemos que $\widehat{\phi} : \widehat{M} \longrightarrow \widehat{N}$ é um revestimento não ramificado de grau d e que $\widehat{\phi}_*(\pi_1(\widehat{M}, z_1)) = I_\Psi(1) \subset \pi_1(\widehat{N}, z^*)$.[1] Por outro lado, os homomorfismos

$$\begin{aligned} i_* : \pi_1(\widehat{N}, z^*) &\longrightarrow \pi_1(N, z^*) \\ j_* : \pi_1(\widehat{M}, z_1) &\longrightarrow \pi_1(M, z_1) \end{aligned}$$

induzidos pelas respectivas inclusões, são sobrejetores. Portanto

$$\begin{aligned} \phi_*(\pi_1(M, z_1)) &= \phi_*(j_*(\pi_1(\widehat{M}, z_1))) \\ &= i_*(\widehat{\phi}_*(\pi_1(\widehat{M}, z_1))) \\ &= i_*(I_\Psi(1)). \end{aligned}$$

□

Corolario 5.2 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. ϕ é primitiva.

2. A composição $I_\Psi(k) \hookrightarrow \pi_1(\widehat{N}, z^*) \longrightarrow \pi_1(N, z^*)$ é sobrejetora para todo $k \in \{1, \ldots, d\}$.

3. A composição $I_\Psi(k) \hookrightarrow \pi_1(\widehat{N}, z^*) \longrightarrow \pi_1(N, z^*)$ é sobrejetora para algum símbolo $k \in \{1, \ldots, d\}$. □

[1] Ver [Ma], capítulo V, seção 7, página 162.

Corolario 5.3 *Seja H um subgrupo de $\pi_1(N, z^*)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\phi_*(\pi_1(M, z_1)) = H$.

2. A imagem da composição $I_\Psi(1) \hookrightarrow \pi_1(\widehat{N}, z^*) \longrightarrow \pi_1(N, z^*)$ *é* H. □

Os teoremas 3.3.3, 3.3.5 junto com o corolário 5.2 garantem a realização de revestimentos ramificados primitivos sobre o toro ou a garrafa de Klein dado $\mathscr{D} = \{A\}$. Pois já que

$$\pi_1(\widehat{N}, z^*) = \begin{cases} \langle a, b, c \mid [a, b]c^{-1} = 1 \rangle & \widehat{N} = \text{toro menos um ponto} \\ \langle a, b, c \mid [a, b]_- c^{-1} = 1 \rangle & \widehat{N} = \text{garrafa de Klein menos um ponto} \end{cases}$$

basta definir

$$\begin{aligned} \Psi : \pi_1(\widehat{N}, z^*) &\longrightarrow S_d \\ a &\longmapsto \widehat{a} \\ b &\longmapsto \widehat{b} \end{aligned}$$

onde $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ são como nos teoremas 3.3.3 e 3.3.5 respectivamente. Além disso a sobrejetividade de $I_\Psi(k) \hookrightarrow \pi_1(\widehat{N}, z^*) \longrightarrow \pi_1(N, z^*)$ estará garantida se demonstramos que $a,\ b \in I_\Psi(k)$, para algum $k \in \{1, \ldots, d\}$ onde a, b são os geradores de $\pi_1(N, z^*)$. De fato:

1. No caso do toro, pelo teorema 3.3.3 $\widehat{a}$ fixa 1, portanto $a \in I_\Psi(1)$ e $i_*(a) = a \in \pi_1(\widehat{N}, z^*)$. O mesmo teorema garante que ou $b[a, b]$ ou $b[a^2, b]$ está em $I_\Psi(1)$, seja qual for o caso, temos $b \in \mathrm{Im}(i_*)$ pois $\pi_1(N, z^*)$ é abeliano e portanto qualquer comutador torna-se a identidade.

2. No caso da garrafa de Klein, segundo o teorema 3.3.5 $\widehat{a}$ fixa 1 assim como $\widehat{b}[\widehat{a}, \widehat{b}]_-^q$, para algum $q \in \mathbb{Z}^+$. Portanto a, $b[a, b]_-^q \in I_\Psi(1)$ e $i_*(a) = a$, $i_*(b[a, b]_-^q) = b \in \pi_1(N, z^*)$, pois $[a, b]_- = 1$ em $\pi_1(\widehat{N}, z^*)$.

Dizemos que o *subgrupo H de $\pi_1(N)$ corresponde ao revestimento ramificado* (M, ϕ, N, B_ϕ) se $\phi_*(\pi_1(M)) = H$.

Teorema 5.4 *Seja N uma superfície fechada diferente da esfera e do plano projetivo, $d \in \mathbb{Z}^+$, $H \subset \pi_1(N, z^*)$ um subgrupo e $\mathscr{D} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ um dado de ramificação virtual.*

Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. O subgrupo H corresponde a algum revestimento ramificado conexo entre superfícies fechadas que realiza $\mathscr{D}$.

2. H é um subgrupo de índice finito l tal que $l|d$ e para cada $i \in \{1,\ldots,k\}$ existem l partições

$$B_{i1} = [d_{i11},\ldots,d_{i1r_{i1}}],\ldots,B_{il} = [d_{il1},\ldots,d_{ilr_{il}}]$$

do número d/l tais que

$$A_i = B_{i1} \sqcup \cdots \sqcup B_{il} = [d_{i11},\ldots,d_{i1r_{i1}},\ldots,d_{il1},\ldots,d_{ilr_{il}}].$$

A versão algébrica do teorema anterior é:

Teorema 5.5 *Seja $\pi = \langle a_1,\ldots,a_n,s_1,\ldots,s_k \mid \prod^*(s_1\ldots s_k) = 1\rangle$ a presentação de um grupo, para $n \geq 2$, $k \geq 1$, e $\prod^* = \prod_{i=1}^{n/2}[a_{2i-1},a_{2i}]$ $(n = 2g)$, ou $\prod^* = a_1^2\ldots a_n^2$. Seja H um subgrupo de $\pi/\langle\langle s_1,\ldots,s_k\rangle\rangle$ onde $\langle\langle s_1,\ldots,s_k\rangle\rangle$ é o menor subgrupo normal contendo os elementos $s_1,\ldots,s_k$. Sejam $\sigma_1,\ldots,\sigma_k \in S_d - \{id\}$ permutações tais que $\prod_{i=1}^k \sigma_i$ é uma permutação par, e denotemos por A_i a coleção dos comprimentos dos ciclos de σ_i. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe um homomorfismo $\Psi : \pi \longrightarrow S_d$ tal que :*
   - *(a) O subgrupo $\Psi(\pi) < S_d$ age transitivamente sobre $\{1,\ldots,d\}$.*
   - *(b) $\Psi(s_i)$ é conjugado de σ_i*
   - *(c) A imagem da composição $I_\Psi(1) \hookrightarrow \pi \longrightarrow \pi/\langle\langle s_1,\ldots,s_k\rangle\rangle$ é H.*
2. *H é um subgrupo de índice finito l tal que $l|d$ e para cada $i \in \{1,\ldots,k\}$ existem l partições*

$$B_{i1} = [d_{i11},\ldots,d_{i1r_{i1}}],\ldots,B_{il} = [d_{il1},\ldots,d_{ilr_{il}}]$$

do número d/l tais que

$$A_i = B_{i1} \sqcup \cdots \sqcup B_{il} = [d_{i11},\ldots,d_{i1r_{i1}},\ldots,d_{il1},\ldots,d_{ilr_{il}}].$$

Notemos que os grupos fundamentais $\pi_1(\widehat{N}, z^*)$ e $\pi_1(N, z^*)$ são isomorfos a os grupos π e $\pi/\langle\langle s_1, \ldots, s_k\rangle\rangle$ respectivamente, e que estes isomorfismos respeitam as projeções $\pi_1(\widehat{N}, z^*) \longrightarrow \pi_1(N, z^*)$, $\pi \longrightarrow \pi/\langle\langle s_1, \ldots, s_k\rangle\rangle$. Além disso, do corolário 5.3 segue que os teoremas 5.4 e 5.5 são equivalentes.

Demonstração do Teorema 5.5 no caso primitivo: Se $H = \pi/\langle\langle s_1, \ldots, s_k\rangle\rangle$, então $l = 1$ e a segunda afirmação é sempre válida. Vamos ver que a primeira é sempre válida também.

Consideremos o caso $n = 2$, $k = 1$, $\pi = \langle a_1, a_2, s_1 \mid [a_1, a_2]s_1 = 1\rangle$ e $A_1 = [d_1, \ldots, d_r]$. Pelo corolário 3.3.4 existem permutações $\widehat{a_1}$, $\widehat{a_2} \in S_d$ tais que seu comutador é o produto de ciclos de comprimentos $d_1, \ldots d_r$. Assim podemos definir a seguinte representação de Hurwitz:

$$\begin{aligned} \Psi : \pi &\longrightarrow S_d \\ a_1 &\longmapsto \widehat{a_2} \\ a_2 &\longmapsto \widehat{a_1} \\ s_1 &\longmapsto [\widehat{a_1}, \widehat{a_2}] \end{aligned}$$

daqui as condições *(a)*, *(b)* seguem das propriedades *(1)*, *(2)* do corolário 3.3.4. Do mesmo corolário temos que o 1 fica fixo por $\widehat{a_1}$ e por $\widehat{a_2}[\widehat{a_1}, \widehat{a_2}]$ ou $\widehat{a_2}[\widehat{a_1}^2, \widehat{a_2}]$, donde $I_\Psi(1) \hookrightarrow \pi \longrightarrow \pi/\langle\langle s_1\rangle\rangle$ é sobrejetora.

Seja agora $k \geq 2$ e $A_i = [d_{i_1}, \ldots, d_{i_{r_i}}]$, $i = 1, \ldots, k$. Peguemos permutações $\widehat{s_i} \in S_d$ tais que seus ciclos tenham comprimentos $d_{i_1}, \ldots, d_{i_{r_i}}$ respectivamente. Se a permutação $\widehat{c} = \widehat{s_1} \ldots \widehat{s_k} \neq \widehat{e}$, onde $\widehat{e}$ é a permutação identidade, é só aplicar o corolário 3.3.4. Mas se $\widehat{s_1} \ldots \widehat{s_k} = \widehat{e}$ analisamos os seguintes casos:

(1) se em algum $\widehat{s_i}$ existe um ciclo de comprimento maior ou igual que 3.

(2) se todos os ciclos têm comprimento menor ou igual que 2 e $d \geq 3$.

(3) se $d = 2$.

Se acontece (1), é só trocar $\widehat{s_i}$ por $\widehat{s_i}^{-1}$. Se (2), trocamos em um $\widehat{s_i} \neq \widehat{e}$ um símbolo de um ciclo de comprimento 2 por um símbolo de outro ciclo qualquer. Assim, sem mudar o comprimento dos ciclos, o novo $\widehat{s_i}$ é tal que o produto $\widehat{s_1} \ldots \widehat{s_k}$ é diferente da identidade,

logo pode-se aplicar o corolário 3.3.4 e definimos a seguinte representação de Hurwitz

$$\begin{aligned} \Psi : \pi &\longrightarrow S_d \\ a_1 &\longmapsto \widehat{a_2} \\ a_2 &\longmapsto \widehat{a_1} \\ s_i &\longmapsto \widehat{s_i} \end{aligned}$$

donde $[a_1, a_2](s_1 \dots s_k) \longmapsto [\widehat{a}, \widehat{b}]^{-1}(\widehat{s_1} \dots \widehat{s_k}) = \widehat{e}$ e como no caso $k = 1$, o resto da primeira condição do teorema segue do mesmo corolário.

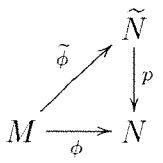
Se temos (3), existe um $\widehat{s_i} \neq \widehat{e}$. Peguemos permutações arbitrarias e diferentes $\widehat{a}$, $\widehat{b} \in S_2$ e automaticamente a primeira condição é satisfeita.

Assumamos agora que $\pi = \langle a_1, \dots, a_{2g}, s_1, \dots, s_k \mid \prod^*(s_1 \dots s_k) = 1 \rangle$ com $m \geq 1$ e $\prod^* = \prod_{i=1}^{g}[a_{2i-1}, a_{2i}]$. Definamos a representação de Hurwitz enviando a_1, a_2, $s_1, \dots, s_k$ como no caso analisado anteriormente e levemos $a_3, \dots, a_{2g}$ à permutação identidade.

Para o caso $\pi = \langle a_1, \dots, a_n, s_1, \dots, s_k \mid \prod^*(s_1 \dots s_k) = 1 \rangle$ com $m \geq 1$, $n \geq 2$ e $\prod^* = a_1^2 \dots a_n^2$ procedemos analogamente só que aplicando o corolário 3.3.6. □

Já que os teoremas 5.4 e 5.5 são equivalentes, temos demonstrado então o teorema 5.4 no caso primitivo, isto é quando $H = \pi_1(N, z^*)$.

Demonstração dos teoremas 5.4 e 5.5 no caso geral: Seja $\phi : M \longrightarrow N$ um revestimento ramificado tal que $\phi_*(\pi_1(M)) = H$. Consideremos o revestimento não ramificado $p : \widetilde{N} \longrightarrow N$ que corresponde ao subgrupo H. Então ϕ pode-se levantar a $\widetilde{\phi} : M \longrightarrow \widetilde{N}$ e o diagrama



comuta. Agora, qualquer ponto $x_i \in B_\phi$ tem $l = [\pi_1(N) : H]$ preimagens em $\widetilde{N}$ e daqui, pela comutatividade do diagrama, a partição $A_i = [d_{i_1}, \dots, d_{i_{r_i}}]$ pode-se escrever como a união de l partições do inteiro d/l.

Por outro lado, seja $p : \widetilde{N} \longrightarrow N$ o revestimento não ramificado que corresponde ao subgrupo H. Seja $\widetilde{\mathscr{D}} = \{B_{11}, \ldots, B_{1l}, \ldots, B_{k1}, \ldots, B_{kl}\}$ um dado de ramificação virtual. Já que $\chi(\widetilde{N}) = l.\chi(N) \leq 0$, a superfície $\widetilde{N}$ é diferente da esfera e do plano projetivo. Segue do teorema 5.4 para o caso primitivo que existe um revestimento ramificado conexo $h : M \longrightarrow \widetilde{N}$ que realiza $\widetilde{\mathscr{D}}$. Assim $(M, p \circ h, N, p(B_{\tilde{\phi}}))$ é o revestimento procurado. □

Capítulo 6

Sobre Superfícies com bordo

Neste capítulo resolvemos a **Questão 1** e a **Questão 2** quando N é uma superfície com bordo e $d \in \mathbb{Z}^+$ finito.

Seja N uma superfície fechada. Escolhamos sobre ela um número n finito de discos fechados disjuntos e tiremos o interior de cada um deles. A superfície N^{n*} assim obtida é uma superfície com n componentes de bordo. Reciprocamente, se N^{n*} é uma superfície com n componentes de bordo, cada componente é homeomorfa a um círculo. Portanto se pegamos n discos fechados e fazemos a colagem do i-ésimo disco com a i-ésima componente, obtemos uma superfície fechada N.[1]

Enunciemos novamente as questões que queremos resolver:

Questão 1: *Dada uma superfície N^{n*}, um candidato d para grau e um conjunto de partições $\mathscr{D} = \{A_i\}_{i \in I}$ de d onde cada termo de A_i, $i \in I$, é finito, será que existe um revestimento ramificado conexo $(M^*, \phi, N^{n*}, B_\phi)$ tal que realize $\mathscr{D}$?*

Questão 2: *Seja $H \subset \pi_1(N^{n*})$ um subgrupo de índice l finito, $d \in \mathbb{Z}^+$, e $\mathscr{D} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ um conjunto de partições de d. Existe um revestimento ramificado conexo $(M^*, \phi, N^{n*}, B_\phi)$ de grau d que realize $\mathscr{D}$ e tal que $\phi_*(\pi_1(M^*)) = H$?*

[1] Ver [Ma], capítulo I, seção 10, página 37.

Resposta à Questão 1: Observemos que se N^{n*} é uma superfície com bordo, $d \in \mathbb{Z}^+$ e $\mathscr{D} = \{A_1, \ldots, A_k\}$ é um conjunto de partições de d, a existência de um revestimento ramificado que realize $\mathscr{D}$ depende da possibilidade de definir uma representação de Hurwitz,[2] isto é, um homomorfismo $\Psi : \pi_1(\widehat{N}^{n*}) \longmapsto S_d$, onde $\widehat{N}^{n*}$ denota a superfície N^{n*} depois de tirados k pontos, $\{x_1, \ldots, x_k\}$. Mas tanto $\pi_1(N^{n*})$ quanto $\pi_1(\widehat{N}^{n*})$ são grupos livres, com $\pi_1(N^{n*}) \subset \pi_1(\widehat{N}^{n*})$, já que por cada x_i tirado acrescenta-se em um o número de geradores de $\pi_1(N^{n*})$. Logo, temos absoluta liberdade para definir a representação, pois não precisaremos cuidar de relação nenhuma. Assim, se $\alpha_i \in \pi_1(\widehat{N}^{n*})$ é a classe obtida a partir de x_i, definimos $\alpha_i \longmapsto \widehat{\alpha_i} \in S_d$ tal que a coleção dos comprimentos dos ciclos de $\widehat{\alpha_i}$ determina a partição A_i. E para garantir a conexidade do revestimento basta só definir $\Psi(a_j)$ como um d-ciclo, sendo a_j um gerador de $\pi_1(N^{n*})$. Portanto precisamos $\pi_1(N^{n*})$ não trivial, isto é, se $N = \mathbb{S}^2$ então $n > 1$. □

Resposta à Questão 2 no caso primitivo: Seja $H = \pi_1(N^{n*})$. Se N^{n*} é obtida a partir da esfera e $n = 2$, então $\pi_1(N^{n*}) = F(a)$ é um grupo livre em um gerador. Para $k = 1$ tem-se $\mathscr{D} = \{A\}$ com $A = [d_1, \ldots, d_r]$. Assim, $\pi_1(\widehat{N}^{n*}, z^*) = F(a, \alpha)$ é um grupo livre em dois geradores. Posso livremente definir a seguinte representação:

$$\begin{aligned} \Psi : F(a,\alpha) &\longrightarrow S_d \\ a &\longmapsto (c_1\ c_2 \ldots c_d) = \widehat{a} \\ \alpha &\longmapsto (z_1)(z_2)\ldots(z_r) = \widehat{\alpha} \end{aligned}$$

onde o d-ciclo $\widehat{a}$ garante a conexidade e (z_i) é um d_i-ciclo para $i = 1, \ldots, r$.

É o revestimento ramificado $(M^*, \phi, N^{n*}, B_\phi)$, associado a Ψ, primitivo? ou equivalentemente, é $\phi_*(\pi_1(M^*)) = F(a)$?

Observemos que o teorema 5.1 é válido para este tipo de superfícies, assim, pelo corolário 5.2, para responder esta pergunta, basta mostrar que existe $\beta \in I_\Psi(1)$ tal que

[2] Ver corolário 2.2.

$i_*(\beta) = a$, onde i_* é o homomorfismo induzido pela inclusão $i : \widehat{N}^{n*} \hookrightarrow N^{n*}$.

Sabemos que deve existir $j \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $1 \in (z_j)$.

1. Se $d_j > 1$, definimos $\widehat{a}$ tal que :

$$\begin{aligned} c_1 &= 1.\widehat{\alpha} \\ c_2 &= 1 \end{aligned}$$

pois $\widehat{\alpha}\widehat{a}$ vai fixar o 1:

$$1.\widehat{\alpha}\widehat{a} = c_1.\widehat{a} = c_2 = 1.$$

Além disso $i_*(\alpha a) = a$, portanto é só fazer $\beta = \alpha a$.

2. Se $d_j = 1$. Notemos que $a^d \in \phi_*(\pi_1(M))$ já que $\widehat{a}$ é um d-ciclo, basta então mostrar que existe $\gamma \in I_\Psi(1)$ tal que $i_*(\gamma) = a^h$, para $h \in \mathbb{Z}^+$, $(h, d) = 1$. Pois pelo lema de Bezout existem inteiros p, q tais que $ph + qd = 1$, e teremos que $a = a^{ph}a^{qd} \in \phi_*(\pi_1(M))$.

Sabemos que tem que existir um $d_i > 1$, $i \neq j$, pois $\widehat{\alpha}$ é diferente da identidade. Seja $c_t \in (z_i)$, e definamos $\widehat{a}$ tal que:

$$\begin{aligned} c_{t-1} &= 1 \\ c_{t+1} &= c_t.\widehat{\alpha} \end{aligned}$$

assim $\widehat{a}\widehat{\alpha}\widehat{a}^{d-2}$ fixa o 1:

$$1.\widehat{a}\widehat{\alpha}\widehat{a}^{d-2} = c_t.\widehat{\alpha}\widehat{a}^{d-2} = c_{t+1}.\widehat{a}^{d-2} = c_{t-1} = 1$$

e mais do que isso, $i_*(a\alpha a^{d-2}) = a^{d-1}$. Portanto é só definir $\gamma = a\alpha a^{d-2}$.

O caso $k > 2$ reduz-se ao caso anterior, pois já que $F(a, \alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ é livre, basta definir o d-ciclo $\widehat{a}$ dependendo de $\widehat{\alpha_1}$ para garantir a primitividade. Analogamente para $n > 2$, pois sendo $\pi_1(N^{n*}) = F(a_1, \ldots, a_{n-1})$ um grupo livre em $n-1$ geradores, é só definir o homomorfismo $\Psi : F(a_1, \ldots, a_{n-1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_k) \longrightarrow S_d$ tal que leve $\alpha_i \longmapsto \sigma_i$, $a_1 \longmapsto \widehat{a_1} = (c_1 \ \ldots c_d)$ e $a_j \longmapsto 1$, $2 \leq j \leq n-1$, onde o comprimento dos ciclos de σ_i obedece à partição A_i e o d-ciclo $\widehat{a_1}$ define-se dependendo de $\widehat{\alpha_1}$ para garantir a primitividade.

Se N^{n*} é obtida a partir do toro, a resposta reduz-se ao caso anterior, pois $\pi_1(\mathbb{T}^{n*}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^{(n+2)*})$ já que são grupos livres sobre conjuntos da mesma cardinalidade, onde $\mathbb{S}$ está representando a esfera. Aliás, pela mesma razão, $\pi_1(\mathbb{T}_g^{n*}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^{(2g+n)*})$, onde $\mathbb{T}_g$ é a soma conexa de g toros. Analogamente acontece se N^{n*} é obtida a partir do plano projetivo pois $\pi_1(\mathbb{P}^{n*}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^{(n+1)*})$ e em geral $\pi_1(\mathbb{P}_g^{n*}) \cong \pi_1(\mathbb{S}^{(g+n)*})$, onde $\mathbb{P}_g$ é a soma conexa de g planos projetivos. □

Resposta à Questão 2 no caso geral: Segue de copiar o teorema 5.4 junto com a sua demonstração mas usando o caso primitivo que acabamos de resolver . □

Referências Bibliográficas

[AS] Ahlfors, L.; Sario, L.: *Riemann Surfaces.* Princeton (1960).

[BGKZ1] Bogatiy, S.; Gonçalves, D.L.; Kudryavtseva, E,; Zieschang, H.: *Realization of Primitive Branched Coverings over Closed Surfaces.* To appear in Kluwer Academic Publishers.

[BGKZ2] Bogatiy, S.; Gonçalves, D.L.; Kudryavtzeva, E.; Zieschang, H.: *Construction of Branched Coverings over Closed Surfaces following the Hurwitz Approach.* Central Europ. J. of Math. **2**, 184-197 (2003).

[DM] Dixon, J.D.; Mortimer, B.: *Permutation Groups.* Springer-Verlag (1996).

[EKS] Edmonds, A.L.; Kulkarni, R.S.; Stong, R.E.: *Realizability of Branched Coverings of Surfaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **282**, 773-790 (1984).

[Ez] Ezell, C.L.: *Branch Point Structure of Covering Maps onto Nonorientable Surfaces.* Trans. Amer. Math. Soc. **243**, 123-133 (1978).

[Fo] Forster, O.: *Lectures on Riemann Surfaces.* Springer - Veralg (1981).

[Fu] Fulton, W.: *Algebraic Topology. A First Course.* Springer-Verlag (1995).

[Hu] Husemoller, D.H.: *Ramified Coverings of Riemann Surfaces.* Duke Math. J. **29**, 167-174 (1962).

[Lee] Lee, J.M.: *Introduction to Topological Manifolds.* Springer-Verlag (2000).

[Ma] Massey, W.S.: *Algebraic Topology: An introduction.* Harcoyrt, Brace & World (1967).

[Ro] Rotman, J.J.: *The Theory of Groups. An introduction.* Allyn and Bacon, Inv. (1965).

[St] Stoïlow, S.: *Leçons sur les Principies Topologiques de la Théorie des Fonctions Analytiques.* Gauthier-Villars (1956).

[Wi] Wielandt, H.: *Finite Permutation Groups.* Academic Press Inc. (1964).

Índice Remissivo

conjunto
- contínuo, 2
- realizável, 11

defeito
- de um ponto, 10
- do revestimento, 10

domínio
- aberto, 2
- fechado, 3
- Jordan, 6
- máximo, 2
- normal, 3

função primitiva, 51

Hurwitz
- condições de, 39
- fórmula de Riemann-, 15
- representação, 13
- teorema de, 13

ramificação
- índice de, 1
- dado de, 10
  - virtual, 37
- ponto, 1

revestimento
- não ramificado, 10
  - associado, 9
- orientável duplo, 16
- ramificado, 9
  - conexo, 10
  - não orientável, 40
  - orientável, 40
  - primitivo, 51
- superfície de, 9

superfícies fechadas, 14

transformação interior, 2