# Sobre as Álgebras Estandarmente Estratificadas.

José Fidel Hernández Advíncula

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA
OBTENÇÃO DO GRAU
DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Álgebra**
Orientador: **Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos**

*Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq.*

-São Paulo, Setembro de 2004-

# Sobre as Álgebras Estandarmente Estratificadas.

Este exemplar corresponde à redação final

da tese devidamente corrigida

defendida por José Fidel Hernández Advíncula

e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 3 de Setembro de 2004.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos (Orientador) - IME - USP
- Prof. Dr. Héctor Alfredo Merklen Goldschmidt - IME - USP
- Prof. Dr. Miguel Angel Ferrero - IM - UFRGS
- Prof. Dr. Paulo Roberto Brumati - IMEC- UNICAMP
- Prof. Dr. Antonio Engler - IMEC- UNICAMP

Aos meus pais.

## Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar ao meu orientador, o Prof. Dr. Eduardo do Nascimento Marcos por sua dedicação e apoio, bem como agradeço também ao Prof. Dr. Héctor Merklen pela sua coorientação. Graças à ajuda destes professores pude realizar este trabalho.

Sou grato à Universidad de La Habana por dar-me a oportunidade de fazer o doutorado, agradecimento que estendo aos meus colegas do Departamento de Ecuaciones Diferenciales.

Agradeço também a minha eterna Professora de Álgebra e atual colega a Dra Teresita Noriega pela sua amizade e apoio.

Agradeço a todos os Professores e alunos do grupo de representações.

Aos amigos Walter e Sônia.

A todas as pessoas que de uma forma ou outra contribuíram para a minha formação.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro durante este doutorado.

# Resumo

Neste trabalho estudamos as álgebras estandarmente estratificadas, em geral e obtivemos os seguintes resultados:

- Uma caracterização das álgebras que são estandarmente estratificadas em todas as ordens dos simples, obtendo como corolário uma caracterização para as álgebras hereditárias.
- Estudamos a estratificação das álgebras com só dois simples, as álgebras na forma triangular e obtemos um resultado para as álgebras com radical quadrado zero.
- Obtemos um resultado sobre os complexos na categoria dos módulos filtrados por módulos estandares.

## Abstract

In this work we study the standardly stratified algebras in general, and obtain the followings results:

- A characterization of the algebras which are standardly stratified in all orders of simples, getting as a corollary a characterization for hereditary algebras.
- We study the stratification of the algebras with only two simples, the algebras in the triangular form and get a result for algebras with radical square zero.
- We get a result over the complexes in the category of modules filtered by standard modules.

# Introdução

Neste trabalho estudamos as álgebras estandarmente estratificadas em geral.

A tese esta estruturada em cinco capítulos. Os quais faço uma sucinta apresentação a seguir.

O Capítulo 1 destina-se a uma revisão de noções básicas, como anéis, módulos, carcazes, categorias e teoria de Auslander - Reiten. Os conceitos principais são definidos, tendo como objetivos fixar notações e fazer a tese o mais autocontida possível.

No Capítulo 2 fazemos uma recompilação detalhada das definições e resultados sobre álgebras estandarmente estratificadas e quase hereditárias, incluindo muitas provas e exemplos. Começamos este capítulo com o conceito de módulos filtrados com relação a uma família de módulos, que é conceito básico para a teoria de álgebras estandarmente estratificadas. Uma álgebra é estandarmente estratificada se ela considerada como módulo sobre si mesma é filtrada pela família dos módulos estandares. Um caso particular de álgebras estandarmente estratificadas são as quase hereditárias, que são as álgebras estandarmente estratificadas de dimensão global finita, estas foram as primeiras a serem estudadas.

No Capítulo 2, exibimos exemplos que mostram que o conceito de álgebra estandarmente estratificadas depende da ordenação dos módulos simples. Isto é uma álgebra pode ser estandarmente estratificada numa ordem e em outra não. Isto motivou uma pergunta do professor Merklen em nosso seminário, ele queria saber se conhecíamos as álgebras que são estandarmente estratificadas em uma única ordem dos simples.

O Capítulo 3 é dedicado as álgebras que são estandarmente estratificadas em todas as ordens dos simples, o estudo deste problema surgiu tratando de responder à pergunta formulada pelo professor Merklen. Ao tratar de descrever as álgebras que são estandarmente estratificadas em uma única ordem dos simples, vimos que a resposta parece ser bastante difícil. No entanto pudemos descrever o caso oposto, ou seja as álgebras que são estandarmente estratificadas em todas as ordens dos simples. Mostramos que tais álgebras são precisamente as álgebras com ideais idempotentes projetivos. Como Corolário obtemos uma caracterização das álgebras hereditárias que generaliza o resultado de Ringel que diz que uma álgebra é hereditária se e só se é quase hereditária em todas as ordens.

No Capítulo 4 estudamos alguns casos particulares, começamos com as álgebras com só dois simples não isomorfos, obtendo uma descrição sobre as possíveis estratificações para este tipo de álgebras. A seguir examinamos as álgebras na forma triangular, isto é álgebras da forma $\begin{pmatrix} U & 0 \\ M & V \end{pmatrix}$, sendo $U, V$ álgebras e $M$ um $V-U$-bimódulo, para estas álgebras obtemos um resultado sobre sua estratificação baseado num resultado de Marcos-Merklen-Saenz.[15]

Em seguida estudamos as álgebras com radical quadrado zero. Lembramos que se $A$ é estandarmente estratificada então a subcategoria $F(\Delta)$ dos módulos filtrados por módulos estandares sempre contém os módulos projetivos e esta contida na subcategoria $P^{<\infty}$ dos módulos de dimensão projetiva finita. Para as álgebras com radical quadrado zero mostramos que podemos escolher uma ordem tal que $F(\Delta)$ seja o maior possível e também escolher uma ordem tal que $F(\Delta)$ seja o menor possível no sentido da frase anterior.

No final do Capítulo 4 vemos uma relação entre a inclinação e a estratificação, usando a relação de ordem sobre a classe dos módulos inclinantes que aparece no trabalho de Happel-Unger [12]. Isto é mostramos que o conjunto parcialmente ordenado, por inclusão, obtido das diferentes formas em que uma álgebra pode ser estandarmente estratificada é um subconjunto do conjunto parcialmente ordenado formado pelos módulos inclinantes.

Um outro problema abordado foi o seguinte, o Professor Eduardo Marcos tinha a conjetura de se a categoria derivada de uma álgebra estandarmente estratificada seria equivalente à categoria dos complexos com entrada em módulos filtrados por módulos estandares. Esta era uma pergunta natural pois a categoria dos módulos filtrados por módulos estandares contém os projetivos e a categoria derivada de uma álgebra é equivalente em certos casos à categoria dos complexos com entradas somente de módulos projetivos.

Assim o Capítulo 5 dedica-se ao estudo breve das categorias derivadas e sua aplicação aos complexos em $F(\Delta)$, como este é um tema um tanto diferente do anterior, embora bem relacionados, o deixamos para ser tratado ao final. Começando com uma revisão de fatos gerais sobre categorias derivadas. Isto é primeiro vemos a definição de categoria triangulada e estudamos o exemplo da categoria de complexos quociente pela relação de homotopia de morfismos. Depois estudamos o processo de localização de uma categoria com respeito a um sistema multiplicativo e sua aplicação para definir a categoria derivada. Por último culminamos com o estudo dos complexos em módulos filtrados para uma álgebra estandarmente estratificada. Obtemos o seguinte resultado: a localização da categoria dos complexos em módulos filtrados para uma álgebra estandarmente estratificada é equivalente à categoria derivada desta álgebra.

# Sumário

# Capítulo 1

# Anéis, módulos, carcazes, álgebras e categorias

Neste capítulo faremos uma revisão de fatos básicos. Isso tem dois objetivos primeiro tornar a tese mais auto contida e segundo fixar notações.

A maioria dos conceitos e resultados enunciados aqui encontram-se por exemplo em [1] e em [3] . A seguir anotamos apenas os mais relevantes para este trabalho.

## 1.1 Anéis e Módulos

- **Anéis**

Um anel $R$ é um conjunto munido de duas operações binárias, chamadas adição $(+)$ e multiplicação $(.)$, tais que:

(1) $R$ é um grupo abeliano com relação à adição, isto é $(R, +)$ é um grupo abeliano.

(2) $R$ é um semigrupo com relação à multiplicação, isto é $(R, .)$ é um semigrupo.

(3) A operação de multiplicação é distributiva sobre à adição.

Sempre que não houver menção contrária estaremos considerando que o $R$ contém unidade, isto é, existe $1 \in R$ tal que $1.x = x.1 = x$ para todo $x \in R$.
A menos que seja o anel trivial 0, sempre $0 \neq 1$.

Um subconjunto $\mathcal{I}$ de um anel $R$ é **ideal à esquerda** (respectivamente à direita) se as seguintes propriedades são verificadas:

(1) $\forall r \in R$ e $\forall a \in \mathcal{I}$ tem-se $ra \in \mathcal{I}$ (respectivamente $ar \in \mathcal{I}$).

(2) $\mathcal{I}$ é subgrupo abeliano de $R$ em relação à adição.

Chamamos de ideal bilateral de $R$ os ideais que são simultaneamente ideal à esquerda e à direita.

- **Módulos**

Seja $R$ um anel. Um $R$-módulo *à esquerda* é um grupo abeliano $M$, que denotaremos aditivamente, sobre o qual existe uma ação linear de $R$; isto é, existe uma transformação $(-,-) : R \times M \longrightarrow M$, denotada por $(r,m) = rm$, que satisfaz:

(1) $(r+s)m = rm + sm$

(2) $r(m+n) = rm + rn$

(3) $(r.s)m = r(sm)$

(4) $1m = m$

para todos $r, s \in R$ e $m \in M$.

Equivalentemente, $M$ é um grupo abeliano junto com um homomorfismo de anéis $\rho : R \longrightarrow End(M)$, onde $End(M)$ é o anel dos endomorfismos do grupo abeliano $M$.

Seja $R$ um anel. Considere a aplicação $\lambda, \rho : R \times R \longrightarrow R$ definidas por: $\lambda(a,x) = ax$ e $\rho(a,x) = xa$. $R$ munido de sua operação aditiva e a multiplicação determinada por $\lambda$ (respectivamente $\rho$) é um $R$-módulo à esquerda (respectivamente à direita) o qual denotamos por ${}_RR$ (respectivamente $R_R$).

Sejam $M$ e $N$ $R$-módulos. Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é um homomorfismo de $R$-módulos se preserva a operação de soma e a ação de $R$.

O anel dos endomorfismos de um módulo $M$ é o anel dos homomorfismos de módulo de $M$ em si mesmo.

Um $R$-módulo $M$ à esquerda é dito finitamente gerado à esquerda se existem $x_1, ..., x_n \in M$ tais que $M = Rx_1 + ... + Rx_n$

Seja $R$ um anel com unidade. Lembramos que o radical de Jacobson de $R$, que denotaremos por $\mathcal{J}_R$, ou simplesmente $\mathcal{J}$, é a intersecção de todos os ideais maximais à esquerda de $R$. Aliás, $\mathcal{J}_R$ é também a intersecção de todos os ideais maximais à direita. Portanto $\mathcal{J}_R$ é um ideal bilateral de $R$.

Dado um $R$-módulo $M$ o radical de $M$, que denotaremos por $radM$ é a intersecção de todos os $R$-módulos que são sub-módulos maximais de $M$. Se $R$ for um anel artiniano pode-se mostrar que para todo $R$-módulo finitamente gerado $M$ tem-se: $radM = \mathcal{J}_R.M$.

## 1.2 Simples, Indecomponíveis, Projetivos e Injetivos

Trataremos agora de alguns módulos, que são em certo sentido importantes. Primeiro os simples, como seu nome indica estes são os mais simples, precisando isto:

Dizemos que um $R$-módulo é simples se não tem submódulos próprios. Isto é, não é zero e seus únicos submódulos são zero e ele mesmo.

Muito ligados a estes temos a definição de módulo indecomponível. Um $R$-módulo é indecomponível se não tem *somandos diretos não triviais.*

Claramente todo módulo simples é indecomponível mas o recíproco não é certo.

Outros módulos importantes são os projetivos e os injetivos.

**Definição 1.1.** *Um $R$ módulo $P$ chama-se projetivo se para toda aplicação $\gamma : P \to N$ e todo epimorfismo $g : M \to N$ existe uma $\overline{\gamma} : P \to M$ que faz o seguinte diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\overline{\gamma}"'] \arrow[d, "\gamma"] & \\ M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

O conceito dual é o de módulo injetivo

**Definição 1.2.** *Um $R$ módulo $I$ chama-se injetivo se para toda aplicação $\lambda : K \to I$ e todo monomorfismo $f : K \to L$ existe uma $\overline{\lambda} : L \to I$ que faz o seguinte diagrama comutativo*

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda"'] & L \arrow[dl, "\overline{\lambda}"] \\
 & I &
\end{tikzcd}
$$

Segue facilmente das definições que:

- Se $P$ é projetivo toda *seqüência exata curta* $0 \to X \to Y \to P \to 0$ com $X, Y$ $R$-módulos, cinde. Isto é $Ext^1(P, X) = 0$, para todo $R$-módulo $X$.
- Se $I$ é injetivo toda *seqüência exata curta* $0 \to I \to Y \to Z \to 0$ com $Y, Z$ $R$-módulos, cinde. Isto é $Ext^1(Z, I) = 0$, para todo $R$-módulo $Z$.

## 1.3 Álgebras, carcaz e álgebra de carcaz

**Definição 1.3.** *Seja $R$ um anel comutativo. Uma $R$-álgebra $\Lambda$ consiste de um par $(\Lambda, \varphi)$, onde $\Lambda$ é um anel e $\varphi$ é um homomorfismo $\varphi : R \longrightarrow \Lambda$ cuja imagem está contida no centro de $\Lambda$.*

Nesta tese, $\varphi$ será sempre monomorfismo e neste caso identificamos $R$ com a imagem de $\varphi$ e dizemos que $R$ está contido no centro de $\Lambda$

**Definição 1.4.** *Dizemos que $\Lambda$ é uma $R$-álgebra de Artin, ou uma álgebra artiniana, se $\Lambda$ é finitamente gerada como $R$-módulo, sendo $R$ um anel artiniano comutativo.*

*Observemos que se $R$ é um corpo, uma $R$-álgebra de Artin é o mesmo que uma álgebra de dimensão finita sobre este corpo.*

Quando $R$ é um corpo, uma base para a $R$-álgebra $A$, é uma base para $A$ vista como módulo, ou seja como $R$ espaço vetorial. Se $A$ admite uma $R$-base finita dizemos $A$ tem dimensão finita sobre $R$.

Sejam $A$ e $B$ duas $R$-álgebras. Uma transformação $f : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo de $R$-álgebras se $f$ é um homomorfismo de $R$-módulos que também é homomorfismo de anéis.

### Carcaz

Chamaremos carcaz a um grafo orientado, isto é $Q$ é um carcaz se $Q = (Q_0, Q_1)$ onde $Q_0$ é o conjunto dos vértices e $Q_1$ é o conjunto das flechas, exigiremos só que $Q_0 \neq \emptyset$.

Chamaremos caminho num carcaz a uma seqüência de flechas $\alpha_s \ldots \alpha_2\alpha_1$ tal que o origem da flecha $\alpha_{i+1}$ coincida com o final da flecha $\alpha_i$ para $i = 1, \ldots, s-1$.
Dado um corpo $K$ e um carcaz $Q$ podemos construir a álgebra de carcaz $KQ$ da maneira seguinte:
$KQ$ é o $K$-espaço vetorial com base em todos os caminhos dirigidos, com a multiplicação seguinte:
$\alpha_s \ldots \alpha_1$ multiplicado por $\beta_t \ldots \beta_1$ é o caminho $\alpha_s \ldots \alpha_1\beta_t \ldots \beta_1$ se o final da flecha $\beta_t$ coincide com a origem da flecha $\alpha_1$ e é zero em caso contrario.
Um ideal $I$ de $KQ$ chama-se admissível se $I \subset F^2$ e $F^n \subset I$ para algum $n$ onde $F$ é o ideal gerado pelas flechas.
Uma representação do carcaz $Q$ é um sistema $(V_i, f_\alpha)$, onde $V_i$ é um $K$ espaço vetorial para cada $i \in Q_0$ e $f_\alpha : V_s \longrightarrow V_t$ é uma aplicação linear para cada flecha $\alpha$ de $s$ a $t$.
Uma representação do carcaz $Q$ sujeito as relações dadas pelo ideal admissível $I$ é uma representação do tipo anterior com as aplicações lineares satisfazendo as relações do ideal $I$, para a soma e composição de aplicações, isto é as aplicações lineares substituídas nas relações que geram o ideal $I$ dão como resultado zero.
Isto é se $\sum k_\alpha \alpha \in I$ , com $k_\alpha \in K, \alpha \in Q_1$ então $\sum k_\alpha f_\alpha = 0$.
Uma álgebra é chamada básica se ela considerada como módulo sobre si mesma se decompõe como soma de projetivos indecomponíveis não isomorfos dois a dois. Para uma álgebra $\Lambda$ de dimensão finita, básica sobre um corpo $K$ algebricamente fechado, tem-se um resultado de Gabriel que diz que $\Lambda$ é isomorfa ao quociente de uma álgebra de carcaz finito por um ideal admissível.

Com efeito:
Seja $\Lambda$ uma k-álgebra de dimensão finita, indecomponível e básica, e tomemos $E = \{e_1, ..e_n\}$ um sistema completo de idempotentes ortogonais e primitivos de $\Lambda$. Chama-se carcaz ordinário de $\Lambda$ ao carcaz que resulta de tomarpode ser um conjunto (de vértices) em bijeção com $E$, e estipulando que entre os vértices $i$ e $j$ existem exatamente $dim_k[e_j(rad\Lambda/rad^2\Lambda)e_i]$ flechas.

## 1.4 Categorias e Funtores

Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste de um par $(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$ onde $\mathcal{C}_0$ é uma classe chamada classe de objetos e $\mathcal{C}_1$ é uma classe de conjuntos chamada classe dos morfismos com as seguintes propriedades:

(1) Para cada par de objetos $A, B$ de $\mathcal{C}$, existe um conjunto que denotamos por $\mathcal{C}(A, B)$ ou $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ , o qual chamamos de conjunto dos $\mathcal{C}$-morfismos de $A$ para $B$.

(2) Para cada tripla de objetos $A, B, D$, está definida uma aplicação de $\mathcal{C}(B, D) \times \mathcal{C}(A, B) \longrightarrow \mathcal{C}(A, B)$ associando $(\beta, \alpha) \longrightarrow \beta\alpha$ chamada composição de morfismos. Exigimos ainda que sejam satisfeitas as seguintes condições:

   (a) Se $A, B, A', B'$ são objetos da categoria $\mathcal{C}$ tais que $(A, B) \neq (A', B')$ então $\mathcal{C}(A, B) \cap \mathcal{C}(A', B') = \varnothing$

   (b) Se $A, B, C, D$ são objetos da categoria $\mathcal{C}$ tais que $\alpha, \beta, \gamma$ são morfismos de $A$ para $B$, $B$ para $C$ e de $C$ para $D$ respectivamente, então $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$ (propriedade associativa da composição)

   (c) Para cada objeto $A \in \mathcal{C}$ existe um morfismo $1_A$ de $A$ para $A$ tal que para qualquer objeto $B$ de $\mathcal{C}$, para todo $\alpha \in \mathcal{C}(A, B)$ e todo $\beta \in \mathcal{C}(B, A)$ tem-se que $1_A\beta = \beta$ e $\alpha 1_A = \alpha$. A este morfismo $1_A$ chamamos identidade de $A$.

A categoria **oposta ou dual**, $\mathcal{C}^{op}$, da categoria $\mathcal{C}$ é definida da seguinte forma: os objetos de $\mathcal{C}^{op}$ são os mesmos de $\mathcal{C}$, o conjunto dos morfismos $\mathcal{C}^{op}(A, B)$ é igual ao conjunto $\mathcal{C}(B, A)$, e, se $f \in \mathcal{C}^{op}(A, B)$ e $g \in \mathcal{C}^{op}(B, C)$ a composição em $\mathcal{C}^{op}$,é dada por $g \circ f = fg \in \mathcal{C}(C, A) = \mathcal{C}^{op}(A, C)$.

Em uma categoria $\mathcal{C}$, um morfismo $f \in \mathcal{C}(A, B)$ é chamado de isomorfismo se existe $g \in \mathcal{C}(B, A)$ tal que $fg = 1_B$ e $gf = 1_A$. Quando existe um isomorfismo $f \in \mathcal{C}(A, B)$ diz-se que $A$ é isomorfo a $B$, e denota-se $A \cong B$.

Um morfismo $f \in \mathcal{C}(A, B)$ é chamado monomorfismo em $\mathcal{C}$ (respectivamente epimorfismo) se quaisquer que sejam $g_1, g_2 \in \mathcal{C}(C, A)$ (respectivamente $\in \mathcal{C}(A, C)$), vale que $fg_1 = fg_2$ (respectivamente $g_1 f = g_2 f$) implica $g_1 = g_2$.

Dizemos que $X$ é objeto **zero** de uma categoria $\mathcal{C}$ se para qualquer objeto $Y \in \mathcal{C}$, não vazio, tem-se: $\mathcal{C}(X, Y)$ e $\mathcal{C}(Y, X)$ são conjuntos unitários, este objeto quando existe é único a menos de isomorfismo e vamos denotá-lo por 0.

**Definição 1.5.** *Uma categoria $\mathcal{C}$ é aditiva se satisfaz as seguintes condições:*

- *Existe um objeto zero em $\mathcal{C}$*

- *Para quaisquer $A, B \in \mathcal{C}$ está definida uma operação binária $(+)$ sobre $\mathcal{C}(A,B)$ tal que $(\mathcal{C}(A,B), +, 0_{A,B})$ é um grupo abeliano, onde $0_{A,B}$ é o elemento neutro do grupo $\mathcal{C}(A,B)$, e $0_{A,B}$ é a composição $0_{A,0}0_{0,B}$ onde $0_{0,B}$ representa o único elemento de $\mathcal{C}(0,B)$ e $0_{A,0}$ representa o único elemento de $\mathcal{C}(0,B)$.*

- *Se $A, B, C \in \mathcal{C}$, $f_1, f_2, f \in \mathcal{C}(A,B)$, e $g_1, g_2, g \in \mathcal{C}(B,C)$ então:*

$$\begin{aligned}(g_1 + g_2)f &= g_1 f + g_2 f\\ g(f_1 + f_2) &= g f_1 + g f_2\end{aligned}$$

- *Para qualquer conjunto finito $\{A_1, .., A_n\} \subseteq Obj(\mathcal{C})$ existe um objeto $A$ denotado por $\coprod_i A_i$ e morfismos $p_j : A \longrightarrow A_j$, $\iota_j : A_j \longrightarrow A$, $j \in \{1, ..\}$ tais que: $p_j \iota_j = 1_{A_j}$, $\sum \iota_j p_j = 1_A$ e $p_k \iota_j = 0$ sempre que $k \neq j$.*

Dizemos que um objeto $A$ em uma categoria aditiva $\mathcal{C}$ é indecomponível se ele não é isomorfo a $B \coprod C$, com $B, C$ não nulos.

**Definição 1.6.** *Dizemos que uma categoria aditiva $\mathcal{C}$ é de Krull-Schmidt se todo objeto indecomponível tem anel de endomorfismo local.*

É possível demonstrar que se uma categoria $\mathcal{C}$ é de Krull-Schmidt então cada objeto $M$ de $\mathcal{C}$ pode ser expresso da forma: $M = \coprod_i M_i^{\alpha_i}$, onde $M_i^{\alpha_i}$ indica a soma de $\alpha_i$ cópias isomorfas do indecomponível $M_i$, e esta soma é única a menos de permutação.

**Definição 1.7.** *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e $f \in \mathcal{C}(A,B)$. Chamamos de núcleo de $f$ em $\mathcal{C}$ o morfismo $k_f \in \mathcal{C}(K_f, A)$ com as seguintes características.*

- *$k_f$ é monomorfismo em $\mathcal{C}$*
- *$f k_f = 0_{K,A}$*
- *Para toda $g \in \mathcal{C}(X,A)$ tal que $fg = 0_{X,A}$ existe $g' \in \mathcal{C}(X,K)$ tal que $g = kg'$.*

A definição de conúcleo de um morfismo em uma categoria é feito de forma dual a definição de núcleo.

**Definição 1.8.** *Uma categoria é abeliana quando é aditiva e satisfaz as seguintes propriedades adicionais:*

*(1) Para todo morfismo $f \in \mathcal{C}$ existem em $\mathcal{C}$ o núcleo e o conúcleo de $f$.*

*(2) Todo monomorfismo é núcleo de seu conúcleo e qualquer epimorfismo é conúcleo de seu núcleo.*

*(3) Qualquer morfismo $f$ pode ser fatorado na forma: $e.m = f$, onde $m$ é um epimorfismo e $e$ é um monomorfismo.*

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias. Um funtor (covariante) $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ é um par de aplicações. Uma, que associa a cada objeto $A \in \mathcal{C}$ um objeto $T(A) \in \mathcal{D}$ e a outra, que para cada morfismo $\alpha \in \mathcal{C}(A, B)$ associa o morfismo $T(\alpha) \in \mathcal{D}(T(A), T(B))$, tal que as duas condições seguintes são satisfeitas:

$F_1$ : Para cada objeto $A \in \mathcal{C}$, $T(1_A)$ é o morfismo identidade de $T(A)$ ;

$F_2$ : Se a composição $\beta\alpha$ de morfismos de $\mathcal{C}$ está definida então a composição $T(\beta)T(\alpha)$ também está definida em $\mathcal{D}$, além disso: $T(\beta)T(\alpha) = T(\beta\alpha)$.

Dada uma categoria $\mathcal{C}$ podemos definir o funtor identidade $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ que associa a cada objeto $X \in \mathcal{C}$ o próprio $X$, e a cada morfismo $f \in \mathcal{C}$ o próprio morfismo $f$.

Um funtor contravariante $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ é um funtor (covariante) $T : \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{D}$.

Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorias e $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ um funtor. Dizemos que um funtor $F$ é fiel(respectivamente pleno) se para cada par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ a transformação de $\mathcal{C}(A, B)$ em $\mathcal{C}(F(A), F(B))$ que associa $f$ a $F(f)$ é injetora (respectivamente sobrejetora). O funtor é dito denso se para todo objeto $A \in \mathcal{D}$ existe $X \in \mathcal{C}$ tal que $F(X) \cong A$.

Dizemos que uma categoria $\mathcal{B}$ é subcategoria de uma categoria $\mathcal{C}$ se:

- Todo objeto de $\mathcal{B}$ é um objeto de $\mathcal{C}$.
- $\mathcal{B}(X, Y) \subset \mathcal{C}(X, Y)$ para todos $X, Y$ objetos de $\mathcal{B}$.

Dizemos que uma subcategoria $\mathcal{B}$ de uma categoria $\mathcal{C}$ é plena se $\mathcal{B}(X, Y) = \mathcal{C}(X, Y)$ para todo $X, Y$ objetos de $\mathcal{B}$.

Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ categorias e $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ funtores. Uma transformação natural $\eta : F \longrightarrow G$ é uma aplicação que a cada objeto $A$ de $\mathcal{C}$ associa um morfismo $\eta(A) \in \mathcal{D}(F(A), G(A))$ tal que para quaisquer objetos $A, B \in \mathcal{C}$ e qualquer $f \in \mathcal{C}(A, B)$ o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} & \eta(A) & \\ F(A) & \longrightarrow & G(A) \\ \downarrow_{F(f)} & & \downarrow_{G(f)} \\ F(B) & \longrightarrow & G(B) \\ & \eta(B) & \end{array}$$

Quando para todo $A \in \mathcal{C}$, $\eta(A)$ é um isomorfismo, dizemos que $\eta$ é um isomorfismo natural.

Dizemos que duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ são equivalentes se existem funtores $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ e $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ tais que $FG \cong 1_{\mathcal{D}}$ e $GF \cong 1_{\mathcal{C}}$, onde $\cong$ denota um isomorfismo natural de funtores. É sabido que um funtor é uma equivalência de categorias se e somente se é fiel, pleno e denso.

Definimos uma dualidade entre duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$, como um funtor contravariante, $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ , tal que o funtor $\mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{D}$ determinado por $T$ é uma equivalência.

**Notações:**

Seja $R$ um anel. Denotaremos por $Mod(R)$ a categoria dos $R$-módulos à esquerda e por $mod(R)$ a categoria dos $R$-módulos finitamente gerados.

**Definição 1.9.** *Seja $R$ um anel. Dizemos que uma subcategoria $\mathcal{C}$ de $Mod(R)$ é fechada para extensões se para toda seqüência exata curta $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow T \longrightarrow 0$ com $M, T \in \mathcal{C}$ tem-se que $N \in \mathcal{C}$.*

**Exemplo 1.1.** *Se $R = \frac{KQ}{I}$, com $I$ admissível, então as categorias $ModR$ e $Rep(Q_R, I)$ (respectivamente as categorias $modR$ e $rep(Q_R, I)$) são equivalentes.*

**Observação 1.1.** *O Teorema de Gabriel garante que se $K$ é um corpo algebricamente fechado e $R$ é uma $K$-álgebra de dimensão finita, então $R$ é Morita equivalente a uma $K$-álgebra do tipo $\frac{KQ}{I}$, onde $Q$ é um carcaz finito e $I$ um ideal admissível.*

## 1.5 Seqüências e Carcaz de Auslander-Reiten

De agora em diante os módulos que considerarmos são módulos finitamente gerados.

As seqüências que quase cindem, também conhecidas como seqüências de Auslander-Reiten, desempenham um papel importantíssimo na teoria de representações de álgebras.

M. Auslander e I. Reiten desenvolveram estas técnicas na década de 70 e elas influenciaram decisivamente o rumo de toda a teoria.

Apresentaremos suscintamente as definições básicas e enunciaremos alguns dos resultados mais importantes a este respeito. Para um tratamento mais aprofundado recomendamos [3] que traz com riqueza de detalhes todos estes conceitos.

**Definição 1.10.** *Seja $\Lambda$ uma álgebra de Artin. Chamaremos de* **seqüência de Auslander-Reiten** *uma seqüência exata curta da forma:*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

*verificando as seguintes afirmações:*

- *$M$ e $N$ são indecomponíveis*
- *para qualquer morfismo $h : X \longrightarrow M$ em mod$\Lambda$, que não seja um epimorfismo que cinde, existe $\widehat{h} : X \longrightarrow E$ tal que $g\widehat{h} = h$*

O próximo resultado que enunciaremos nos garante a existência e unicidade, a menos de isomorfismos, de seqüências de Auslander-Reiten em $mod\Lambda$ quando $\Lambda$ é uma álgebra de Artin.

**Teorema 1.1.** *(Auslander-Reiten) Sejam $\Lambda$ uma álgebra de Artin e $M$ um $\Lambda$-módulo indecomponível.*

- *Se $M$ não for projetivo existe uma (única a menos de isomorfismo) seqüência de Auslander-Reiten terminando em $M$.*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

- *Se $M$ não for injetivo existe uma ( única a menos de isomorfismo) seqüência de Auslander-Reiten iniciando em $M$.*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

**Definição 1.11.** *Sejam $\Lambda$ uma álgebra de Artin, $M$ um $\Lambda$-módulo indecomponível e $g : E \longrightarrow M$ em mod$\Lambda$. Diremos que $g$ é um morfismo quase cindido à direita se: (a) $g$ não for epimorfismo que cinde; (b) Se $h : X \longrightarrow M$ em mod$\Lambda$ e não for epimorfismo que cinde, então existe $h' : X \longrightarrow E$ tal que $gh' = h$*

Dualmente um morfismo $f : M \longrightarrow E$ é quase cindido à esquerda, se $f$ não é mono que cinde e todo morfismo $h : M \longrightarrow X$ que não for monomorfismo que cinde se fatora através da $f$.

**Definição 1.12.** *Dizemos que $f : M \longrightarrow E$ é um morfismo* **poço**, *ou simplesmente* **poço** *em $M$, se $f$ for um morfismo minimal à direita e quase cindido à direita. Analogamente, um morfismo é dito* **fonte** *quando for minimal à esquerda e quase cindido à esquerda.*

**Definição 1.13.** *Seja $\Lambda$ uma álgebra de Artin. Um morfismo $f \in Hom_\Lambda(X, Y)$, com $X, Y$ indecomponiveis, que não cinde é dito irredutível se para cada decomposição de $f = gh$, $g$ é um epimorfismo que cinde ou $h$ é monomorfismo que cinde.*

Um morfismo $f \in Hom_\Lambda(X, Y)$ que não é monomorfismo nem epimorfismo sempre pode ser fatorado naturalmente, ver **Definição 1.8** . Portanto, se $f$ é irredutível, $f$ é um epimorfismo ou um monomorfismo.

**Proposição 1.1.** *Sejam $\Lambda$ uma álgebra de Artin e $M$ um $\Lambda$ módulo indecomponível. As seguintes afirmações são verdadeiras:*

*(a) Um morfismo $h : M \longrightarrow X$ é irredutível se e somente se existe $h' : M \longrightarrow X'$ tal que $(h, h')^t$ é uma fonte em $M$.*

*(b) Um morfismo $h : X \longrightarrow M$ é irredutível se e somente se existe $h' : X' \longrightarrow M$ tal que $(h, h')$ é um poço em $M$.*

**Proposição 1.2.** *Dada um seqüência de Auslander-Reiten:*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \longrightarrow 0$$

*Vale que $f$ é um morfismo fonte e $g$ é um morfismo poço. Ademais qualquer outro morfismo fonte em $N$ (ou poço em $M$) é isomorfo a $f$ (ou a $g$).*

**Proposição 1.3.** *(a) Se $P$ é um projetivo indecomponível não simples então a inclusão do radical de $P$ em $P$ é o único morfismo poço, a menos de isomorfismo chegando em $P$. (b) Se $I$ é um injetivo indecomponível não simples então a projeção natural de $I$ em $I/socI$ é o único morfismo fonte, a menos de isomorfismo, saindo de $I$.*

- Carcaz de Auslander-Reiten

**Definição 1.14.** *[3] Seja $\Lambda$ uma álgebra de Artin. O* **carcaz de Auslander-Reiten** *de $\Lambda$, o qual denotamos por $\Gamma_\Lambda$, é o carcaz definido (a menos de isomorfismo) da seguinte forma:*

*(1) Os vértices, $[M]$, estão em correspondência biunívoca com as classes de isomorfismos dos $\Lambda$-módulos, $M$, indecomponíveis, ou seja, para cada $M \in ind(\Lambda)$ associamos um vértice $[M]$ e $[M] = [M']$ se e somente se $M \cong M'$.*

*(2) Existe uma flecha de $[M]$ para $[M']$ se e somente se existe um morfismo irredutível de $M$ para $M'$.*

- **Seqüências de Auslander-Reiten em subcategorias**

Dada uma subcategoria plena de $modA$, fechada para extensões , sendo $A$ uma álgebra de Artin é importante saber quando existem seqüências de Aslander - Reiten relativas a esta subcategoria, a fim de responder esta questão parcialmente veremos alguns conceitos, que nos darão uma condição suficiente para a existência de seqüências de Auslander - Reiten relativas. Estes conceitos acham-se por exemplo em [4]

.

Se $X$ é uma subcategoria plena de $modA$, uma $X$ aproximação à direita de $M$ é uma aplicação $\gamma : \mathcal{X} \to M, \mathcal{X} \in X$, tal que para toda aplicação $\gamma' : \mathcal{X}' \to M$, com $\mathcal{X}' \in X$, $\exists \varepsilon : \mathcal{X}' \to \mathcal{X}$ tal que $\gamma' = \gamma\varepsilon$, dualmente define-se $X$ aproximação à esquerda.

Uma subcategoria chama-se **Contravariantemente finita** se todo módulo da mesma tem uma $X$ aproximação à direita, dualmente define-se **Covariantemente finita.**

Uma subcategoria $X$ diz-se **funtorialmente finita** se $\forall M \in modA$ temos uma $X$ aproximação à direita e uma $X$ aproximação esquerda, ou equivalentemente se é **Contravariantemente finita** e **Covariantemente finita**.

Um módulo $X$ em uma subcategoria $\mathcal{C}$, chama-se **Ext-projetivo** ou **projetivo relativo** numa subcategoria $\mathcal{C}$ de $modA$ se ele é projetivo em relação a todos os módulos da subcategoria. Isto é toda seqüência exata curta em $\mathcal{C}$, que termine em $X$, cinde, ou seja $Ext^1(X,Y) = 0$, para todo $Y$ em $\mathcal{C}$.

De forma dual tem-se o conceito de **Ext-injetivo** ou **injetivo relativo** numa subcategoria.

Para uma subcategoria **funtorialmente finita** $\mathcal{C}$ fechada para somandos diretos prova-se que existem seqüências de Auslander - Reiten relativas a esta subcategoria, no sentido seguinte:

- Para todo $X$ em $\mathcal{C}$ que não seja Ext-projetivo em $\mathcal{C}$, existe uma seqüência de Auslander - Reiten na subcategoria, terminando em $X$.

- Para todo $Y$ em $\mathcal{C}$ que não seja Ext-injetivo em $\mathcal{C}$, existe uma seqüência de Auslander - Reiten na subcategoria, começando em $Y$.

# Capítulo 2

# Álgebras Estandarmente Estratificadas e Quase Hereditárias

Neste capítulo estudaremos algumas subcategorias da categoria de módulos de uma álgebra de Artin, que são **Covariantemente finitas**, **Contravariantemente finitas** e **Funtorialmente finitas**, estas últimas são importantes, pois quando são fechadas para somandos diretos tem seqüências de Auslander - Reiten relativas. Em particular estudaremos a categoria de módulos filtrados que permitem definir as Álgebras Estandarmente Estratificadas e Quase Hereditárias.

## 2.1 Módulos Filtrados

De agora em diante, salvo menção em contrário todas as subcategorias consideradas serão plenas.

Sejam $A$ uma álgebra de Artin e $\theta = \{\theta(1), ..., \theta(n)\} \subset modA$ tal que $Ext^1(\theta(j), \theta(i)) = 0, \forall j \geq i$. Neste caso denotaremos por $F(\theta)$ a classe dos $M \in modA$, tais que $M$ tem uma filtração com quocientes em $\theta$, isto é existe uma cadeia de submódulos $0 = M_0 \subset M_1 \subset ... \subset M_t = M$ com $\frac{M_i}{M_{i-1}} \simeq \theta(k)$.

Consideremos $X(\theta)$ a subcategoria de $modA$ dos módulos que são somandos diretos de módulos em $F(\theta)$, mostraremos com um exemplo que $F(\theta)$ está contida em $X(\theta)$ mas não coincidem em geral, depois provaremos que $X(\theta)$ é contravariantemente finita e segue desse fato e de que todo elemento de $X(\theta)$ é somando de um elemento em $F(\theta)$, que $F(\theta)$ também é contravariantamente finita , e mediante uma construção dual que $F(\theta)$ é covariantemente finita e portanto tem seqüências de Auslander - Reiten relativas.

Claramente $F(\theta) \subset X(\theta)$, mas $F(\theta)$ não é necessariamente fechado para somandos diretos como mostra o seguinte exemplo:

**Exemplo 2.1.** *Seja* $\begin{pmatrix} k & k & k \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$ *que é o álgebra de carcaz dada pelo carcaz seguinte*

$$\begin{tikzcd} 3\bullet \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & \bullet 1 \\ 2\bullet \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

*aqui os projetivos são* $P_1 = S_1$, $P_2 : \begin{array}{c} 2 \\ \downarrow \beta \\ 1 \end{array}$, $P_3 : \begin{array}{c} 3 \\ \downarrow \alpha \\ 1 \end{array}$, *e os injetivos são*

$$I_1 : \begin{tikzcd} 3 \arrow[dr, "\alpha"] & \\ & 1 \\ 2 \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}, \qquad I_2 = S_2,\ I_3 = S_3$$

Se tomarmos $\theta = \{I_1, P_1 = S_1\}$ é claro que $Ext^1(\theta(j), \theta(i)) = 0, \forall j \geq i$.

Como a série de composição de $P_2$ é $0 \subset S_1 \subset P_2$, então $P_2$ não tem uma filtração com quocientes em $\theta$, ou seja $P_2 \notin F(\theta)$, de forma análoga $P_3 \notin F(\theta)$, agora temos a seguinte filtração

$0 \subset S_1 \subset P_2 \oplus P_3$, como o quociente $\frac{P_2 \oplus P_3}{S_1}$ é isomorfo a $I_1$, logo $P_2 \oplus P_3 \in F(\theta)$, assim $P_2 \in X(\theta)$ e $P_3 \in X(\theta)$.

Agora veremos alguns resultados que servem para mostrar que $F(\theta)$ é funtorialmente finita.

Começamos com uma subcategoria $X$ de $modA$ e denotamos por $Y$ a subcategoria dos módulos $\mathcal{Y}$ de $modA$ tais que $Ext^1(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = 0$ para $\mathcal{X} \in X$.

**Lema 2.1.** *Seja $M \in modA$ e $0 \to \mathcal{Y} \to \mathcal{X} \xrightarrow{\gamma} M \to 0$ uma seqüência exata com $\mathcal{X} \in X, \mathcal{Y} \in Y$, então $\gamma$ é uma $X$ aproximação à direita de $M$.*

**Demonstração.** Seja um morfismo $\mathcal{X}' \longrightarrow M$, com $\mathcal{X}' \in X$ podemos construir o seguinte diagrama de pull-back

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathcal{Y} & \longrightarrow & E & \overset{\gamma'}{\rightleftarrows} & \mathcal{X}' & \to 0 \\ & \| & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to & \mathcal{Y} & \longrightarrow & \mathcal{X} & \longrightarrow & M & \to 0 \end{array}$$

de donde como $\mathcal{X}' \in X, \mathcal{Y} \in Y$ temos que $Ext^1(\mathcal{X}',\mathcal{Y}) = 0$ logo $\gamma'$ cinde, e assim $\gamma$ é uma $X$ aproximação à direita de $M$. $\square$

**Lema 2.2.** *Suponhamos $X$ fechada para extensões e que para todo $N$ existe uma seqüência $0 \to N \to \mathcal{Y}^N \to \mathcal{X}^N \to 0$ com $\mathcal{X}^N \in X, \mathcal{Y}^N \in Y$. Então para todo módulo $M \in modA$ existe uma $X$ aproximação à direita.*

**Demonstração.** Se $M \in modA$, consideremos primeiro o caso no que existe um epimorfismo $\pi : \mathcal{X} \to M, \mathcal{X} \in X$, seja $K = Ker\pi$, da seqüência exata

$$0 \to K \to \mathcal{Y}^K \to \mathcal{X}^K \to 0$$

temos o diagrama seguinte, onde $Z$ é o push-out de $\begin{array}{ccc} K & \to & \mathcal{Y}^K \\ \downarrow & & \\ \mathcal{X} & & \end{array}$

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0 \longrightarrow & K & \longrightarrow & \mathcal{Y}^K & \longrightarrow & \mathcal{X}^K & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \| & \\ 0 \longrightarrow & \mathcal{X} & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \mathcal{X}^K & \to 0 \\ & \downarrow \pi & & \downarrow \gamma & & & \\ & M & = & M & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ & 0 & & 0 & & & \end{array}$$

Como $\mathcal{X}, \mathcal{X}^K \in X$ e $X$ é fechado para extensões então $Z \in X$.

Como $\mathcal{Y}^K \in Y$, aplicando o **Lema 2.1** à seqüência da coluna do meio do diagrama, temos que $\gamma : Z \to M$ é uma $X$ aproximação à direita. No caso geral consideramos $M'$ o submódulo de $M$ gerado pelas imagens de morfismos $(X)' \to M$, isto é $M'$ é o **traço** de $X'$ em $M$, este traço denota-se por $\tau_{X'}(M)$, onde $(X)' \in X$. Existe um número finito de morfismos $\pi_i : (X)_i \to M$ com $(X)_i \in X$ tais que as imagens de $\pi_i$ geram $M'$. Como $X$ é fechado para somas diretas então existe $(X) = \oplus(X)_i \in X$ e um epimorfismo $\pi : (X) \to M'$, logo pelo argumento anterior temos uma $X$ aproximação à direita $\gamma' : Z \to M'$, denotando por $i : M' \to M$ a inclusão , é claro que $i\gamma'$ é uma $X$ aproximação à direita de $M$. □

Agora enunciaremos outros resultados que necessitamos, sua demonstração pode ser encontrada em [18]

**Lema 2.3.** *Seja $1 \leq t \leq n, N$ um $A$ módulo com $Ext^1(\theta(j), N) = 0 \forall j > t$. Então existe uma seqüência $0 \to N \to N' \to Q \to 0$ com $Q$ uma soma de copias de $\theta(t)$ e $Ext^1(\theta(j), N') = 0 \forall j \geq t$.*

Denotaremos por $Y = Y(\theta)$, a subcategoria $Y = Y(F(\theta))$, ou seja $Y(\theta) = \{\mathcal{Y} \in modA / Ext^1(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) = 0, \mathcal{X} \in F(\theta)\}$.

**Lema 2.4.** *Seja $1 \leq t \leq n, N$ um $A$ módulo com $Ext^1(\theta(j), N) = 0 \forall j > t$. Então existe uma seqüência $0 \to N \to \mathcal{Y} \to \mathcal{X} \to 0$ com $\mathcal{X} \in F(\theta(1), ..., \theta(t))$ e $\mathcal{Y} \in Y(\theta)$.*

**Proposição 2.1.** *A categoria $Y(\theta)$ é contravariantemente finita.*

Também podemos definir dualmente a subcategoria $W(\theta) = \{\mathcal{W} \in modA / Ext^1(\mathcal{W}, \mathcal{Y}) = 0, \mathcal{Y} \in F(\theta)\}$, de modo similar se mostra para $W(\theta)$ resultados duais aos obtidos para $Y(\theta)$. Isto é , pode-se mostrar que $W(\theta)$ é covariantemente finita.

É claro que os módulos em $F(\theta) \cap Y(\theta)$ são os Ext-injetivos de $F(\theta)$ e os módulos em $F(\theta) \cap W(\theta)$ são os Ext-projetivos de $F(\theta)$.

## 2.2 Módulos Estandares e Coestandares

Consideremos $S_1, ..., S_n$ uma ordenação fixada dos módulos simples, $P_i$ a cobertura projetiva de $S_i$ e $Q_i$ a envolvente injetiva de $S_i$, define-se o módulo estandar $\Delta_i$ como o quociente máximo de $P_i$ com fatores de composição $S_j, j \leq i$. Seja $\Delta = \{\Delta_1, ..., \Delta_n\}$, consideremos $F(\Delta)$, neste caso $F(\Delta) = X(\Delta)$ ou seja $F(\Delta)$ é fechada para somandos diretos, (este fato provara-se na pagina 32). Dualmente define-se o módulo coestandar $\nabla_i$ como o submódulo máximo de $Q_i$ com fatores de composição $S_j, j \leq i$.[18]

Da definição dos módulos estandares e coestandares temos as seguintes propriedades:

(1) $Hom(\Delta_i, \Delta_j) = 0$ para $i > j$.

(2) $Ext^1(\Delta_i, \Delta_j) = 0$ para $i \geq j$.

(3) $Ext^1(\Delta_i, \nabla_j) = 0 \ \forall \ i, j$.

(4) $Hom(P_i, \nabla_j) = 0$ para $i > j$.

(5) $Hom(\Delta_j, Q_i) = 0$ para $i > j$.

(6) $Hom(\Delta_i, \nabla_j) \neq 0 \Leftrightarrow i = j$.

Para mostrar estas propriedades necessitamos dos seguintes resultados

Se $P$ e $I$ são um projetivo e um injetivo indecomponiveis respectivamente então

$Hom(P, M) \neq 0 \Leftrightarrow TopP$ é fator de composição de $M$.

$Hom(M, I) \neq 0 \Leftrightarrow socI$ é fator de composição de $M$.

Se $M, N$ são indecomponíveis e $f : M \longrightarrow N$ não nula então $(Imf) \cap socN \neq 0$ e $Top(Imf)$ é fator de $TopM$.

Vejamos algumas idéias da demostração de cada um dos itens

(1) Como $Top\Delta_i = S_i$ e $S_i$ não é fator de composição de $S_j$, pois $i > j$, então $Hom(\Delta_i, \Delta_j) = 0$ para $i > j$.

(2) Aplicando $Hom(\ ,\Delta_j)$ à seqüência exata curta $0 \to U_i \to P_i \to \Delta_i \to 0$ obtemos a seqüência exata longa $0 \to Hom(\Delta_i,\Delta_j) \to Hom(P_i,\Delta_j) \to Hom(U_i,\Delta_j) \to Ext^1(\Delta_i,\Delta_j) \to Ext^1(P_i,\Delta_j) \to ...$ Vejamos que $Hom(U_i,\Delta_j) = 0$, para $i \geq j$ e assim $Ext^1(\Delta_i,\Delta_j) = 0$ Se existe $\Psi \neq 0$, $\Psi \in Hom(U_i,\Delta_j)$, então existe um epimorfismo $\Theta : U_i \to S_k$ para $k \leq j \leq i$, assim podemos construir uma seqüência $0 \to \frac{U_i}{Ker\Theta} \to \frac{P_i}{Ker\Theta} \to \Delta_i \to 0$, e isto contradiz a maximalidade de $\Delta_i$ como quociente de $P_i$ com fatores de composição $S_k, k \leq i$.

(3) O resultado segue por um argumento similar ao do item anterior, aplicando agora $Hom(\ ,\nabla_j)$ à seqüência $0 \to U_i \to P_i \to \Delta_i \to 0$.

(4) É claro desde que $\nabla_j$ não tem $S_i = TopP_i$ como fator de composição.

(5) Análogo ao anterior.

(6) Assumamos que existe $f \neq 0 \in Hom(\Delta_i,\nabla_j)$, então $Top(Imf) = S_i$ e $Soc(Imf) = S_j$ Agora se $Top(Imf) = S_i$ então $S_i$ é fator de composição de $\nabla_j$, logo $j \geq i$ e se $Soc(Imf) = S_j$ então $S_j$ é fator de composição de $\Delta_i$, logo $i \geq j$. Portanto $i = j$.

Define-se $[X : S_j]$ como a multiplicidade de $S_j$ como fator de composição de $X$.

Agora enunciaremos um lema que caracterizará os módulos estandares.

**Lema 2.5.** $$X \simeq \Delta_i \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} TopX \simeq S_i \\ [X : S_j] \neq 0 \Rightarrow j \leq i \\ Ext^1(X,S_j) \neq 0 \Rightarrow j > i \end{array}$$

**Demonstração.** Provaremos primeiro que se $X \simeq \Delta_i$ então satisfazem-se as condições. Por definição $\Delta_i$ é o quociente de $P_i$, logo $P_i$ é a cobertura projetiva de $\Delta_i$, assim $Top\Delta_i \simeq S_i$

Também $\Delta_i$ tem somente fatores de composição $S_j, j \leq i$, logo é claro que $[X : S_j] \neq 0 \Rightarrow j \leq i$.

Para ver que $Ext^1(\Delta_i, S_j) \neq 0 \Rightarrow j > i$, tomemos a seqüência $0 \to U_i \to P_i \to \Delta_i \to 0$ e apliquemos o funtor $Hom(, S_j)$, assim temos
$0 \to Hom(\Delta_i,S_j) \to Hom(P_i,S_j) \to Hom(U_i,S_j) \to Ext^1(\Delta_i,S_j) \to Ext^1(P_i,S_j)$
Claro que $Ext^1(P_i,S_j) = 0$ e $Hom(\Delta_i,S_j) \simeq Hom(P_i,S_j)$ pois $\Delta_i$ é indecomponível e $P_i$

é a cobertura projetiva de $\Delta_i$, assim $Hom(P_i,S_j) \xrightarrow{0} Hom(U_i,S_j)$, logo $Hom(U_i,S_j) \simeq Ext^1(\Delta_i,S_j)$. Se $Ext^1(\Delta_i,S_j) \neq 0 \Rightarrow Hom(U_i,S_j) \neq 0$, logo existiria $\overline{U} \subset U_i$ tal que $\frac{U_i}{\overline{U}} \simeq S_j$, logo $\frac{P_i}{\overline{U}}$ teria $S_j$ como fator de composição, se $j \leq i$, isto contradiz a maximalidadede $\Delta_i$ como quociente de $P_i$ com fatores de composição $S_k, k \leq i$, pois $\overline{U} \subset U_i$.

Provemos agora a implicação no outro sentido, ou seja se $X$ satisfaz as condições então $X \simeq \Delta_i$.
Claramente se $TopX \simeq S_i$, então $P_i$ é a cobertura projetiva de $X$, logo $X$ é quociente de $P_i$.
Se $[X : S_j] \neq 0 \Rightarrow j \leq i$, então $X$ tem so fatores de composição $S_j$ para $j \leq i$.
Como $X$ é quociente de $P_i$, com fatores de composição $S_j$ para $j \leq i$, temos uma seqüência $0 \to K \to P_i \to X \to 0$ com $U_i \subset K$.
Falta só provar a maximalidade de $X$ como quociente de $P_i$ com fatores de composição $S_j$ para $j \leq i$ e para isto usaremos a ultima condição, ou o que é o mesmo se $Y$ tem fatores de composição $S_j$ para $j \leq i$ então $Ext^1(X,Y) = 0$.
Provemos que $U_i$ coincide com $K$, para isto consideremos o diagrama seguinte

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \frac{K}{U_i} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & U_i \arrow[r] \arrow[d] & P_i \arrow[r] \arrow[d, equal] & \Delta_i \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & P_i \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \frac{K}{U_i} \arrow[d] & 0 & 0 & \\
 & 0 & & &
\end{tikzcd}$$

Se assumimos $U_i \subsetneq K$, claro que $\frac{K}{U_i}$ tem tem fatores de composição $S_j$ para $j \leq i$, assim $Ext^1(X, \frac{K}{U_i}) = 0$, logo $\Delta_i = \frac{K}{U_i} \oplus X$, mas como $\Delta_i$ é indecomponível, então $\frac{K}{U_i} = 0$.

$\square$

**Lema 2.6.** *Seja $M \in modA$. Se $Hom(\Delta_i, M) = 0$ para $1 \leq i \leq n \Rightarrow M = 0$. Se $Hom(M, \nabla_i) = 0$ para $1 \leq i \leq n \Rightarrow M = 0$.*

**Demonstração.** Dado $M \neq 0$ temos que $\tau_{\frac{\Lambda}{r\Lambda}}(M) = soc(M) \neq 0$, assim $Hom(\frac{\Lambda}{r\Lambda}, M) \neq 0$. Como existe um epimorfismo $\coprod \Delta_i \longrightarrow \coprod S_i \longrightarrow 0$, onde $\coprod S_i = \frac{\Lambda}{r\Lambda}$, por composição temos que $Hom(\coprod \Delta_i, M) \neq 0$. □

Outra forma de definir $\Delta_i$ é definindo $U_i$ como a soma de todas as imagens de morfismos $P_j \to P_i$ para $j > i$ e assim $\Delta_i = \frac{P_i}{U_i}$. Dualmente define-se $\nabla_i$ como a interseção de todos os núcleos de morfismos $Q_i \to Q_j$ para $j > i$.

Se $\Lambda = \frac{KQ}{I}$ então $\Delta_i = \frac{\Lambda e_i}{\Lambda \varepsilon_{i+1} \Lambda e_i}$, onde $\varepsilon_k = e_k + ... + e_n$ para $1 \leq k \leq n$ e $\varepsilon_{n+1} = 0$.

Nestes casos, ou seja quando tomarmos $F(\Delta)$ e $F(\nabla)$ estas subcategorias são fechadas para somandos diretos.

Vejamos agora uma outra descrição de $F(\Delta)$ e $F(\nabla)$.

Seja

$$J_i = \sum_{j \geq i} Im(P_j \to_A A)$$

Assim $A = J_1 \subset J_2 \subset ... \subset J_n \subset J_{n+1} = 0$

$M \in F(\Delta) \Leftrightarrow \frac{J_i M}{J_{i+1} M}$ é projetivo como $\frac{A}{J_{i+1}}$ módulo.

$M \in F(\nabla) \Leftrightarrow \frac{J_i M}{J_{i+1} M}$ é injetivo como $\frac{A}{J_{i+1}}$ módulo.

Com esta descrição é fácil ver que $F(\Delta)$ e $F(\nabla)$ são fechadas para somandos diretos ( $F(\Delta) = X(\Delta)$ e $F(\nabla) = X(\nabla)$).

$M_1 \oplus M_2 \in F(\Delta) \Rightarrow \frac{J_i(M_1 \oplus M_2)}{J_{i+1}(M_1 \oplus M_2)} \simeq \frac{J_i M_1}{J_{i+1} M_1} \oplus \frac{J_i M_2}{J_{i+1} M_2}$ é projetivo e como somandos de projetivos são projetivos $\Rightarrow M_1, M_2 \in F(\Delta)$.

Ou seja temos visto que para $\Theta = \Delta$ e para $\Theta = \nabla$, tem-se que $F(\Theta)$ é fechado para somandos diretos.

## 2.3 Álgebras estandarmente estratificadas e quase hereditárias

A álgebra $A$ diz-se estandarmente estratificada se $A \in F(\Delta)$. Se além disso o anel de endomorfismos de cada módulo estandar é simples $A$ é chamada quase-hereditária. Outra maneira de dizer que $A$ é estandarmente estratificada é dizer que $P \in F(\Delta)$ para todo $P$

projetivo indecomponível.
Notemos que se $A$ é estandarmente estratificada temos que os projetivos estão em $F(\Delta)$.

Segue da definição que $\Delta_n$ é o projetivo $P_n$ e que $\nabla_n$ é o injetivo $Q_n$.

Para as álgebras quase hereditárias $\Delta_1 = \nabla_1 = S_1$ e os injetivos estão em $F(\nabla)$.

Se $DA \in F(\nabla)$, ou seja os injetivos estão em $F(\nabla)$ dizemos que $A$ é coestandarmente estratificada.

Se $A$ é estandarmente estratificada $ProjA \subset F(\Delta) \subset modA$ e se $A$ é coestandarmente estratificada $InjA \subset F(\nabla) \subset modA$, onde $ProjA$ e $InjA$ são as subcategorias de $modA$ formadas pelos módulos projetivos e injetivos respectivamente.

Vejamos uma outra definição de quase- hereditária, para isto necessitamos o conceito de ideal de herança. (heredity ideal).

Um ideal de herança é um ideal $J$ diferente $A$, idempotente $(J^2 = J)$ com $JNJ = 0, N = radA$, tal que $J$ é projetivo como $A$ módulo.

$A$ é quase hereditária se existe uma cadeia

$$0 = J_0 \subset J_1 \subset \ldots \subset J_{t-1} \subset J_t \subset \ldots \subset J_m = A$$

de ideais de $A$ tais que para $1 \leq t \leq m$, $\frac{J_t}{J_{t-1}}$ é um ideal de herança de $\frac{A}{J_{t-1}}$.

Podemos trabalhar com $J = J_n = AeA$, onde $e$ é o idempotente tal que $\Delta_n = Ae$, pois $\Delta_n$ é projetivo, assim $\frac{A}{J}$ é quase hereditária com respeito a $S_1, ..., S_{n-1}$.

Vejamos por exemplo que as álgebras semisimples são quase hereditárias , para isto basta tomar a cadeia de ideais $0 \subset A \subset A$ e aqui claro que o quociente $\frac{A}{0} \simeq A$ é um ideal de herança de $\frac{A}{0} \simeq A$, pois por ser $A$ semisimples $radA = 0$ e claro $A(RadA)A = 0$.
Segue que $A$ é quase hereditária se existe um ideal herança $J$ tal que $\frac{A}{J}$ é quase hereditária, e assim definir as álgebras quase hereditárias indutivamente, assumindo que as álgebras semisimples são quase hereditárias.

Vejamos alguns exemplos

**Exemplo 2.2.** *Seja $A$ a álgebra de carcaz dada pelo carcaz seguinte*

$$\begin{tikzcd}
 & & \bullet 1 \\
4\bullet \arrow[r] & \bullet 3 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & \bullet 2
\end{tikzcd}$$

*com esta ordem* $P_1 = S_1$, $P_2 = S_2$, $P_3$ $\begin{array}{ccc} & 3 & \\ \swarrow & & \searrow \\ 1 & & 2 \end{array}$, $P_4$ $\begin{array}{ccc} & 4 & \\ & \downarrow & \\ & 3 & \\ \swarrow & & \searrow \\ 1 & & 2 \end{array}$,

*como* $\Delta_i$ *é o quociente máximo de* $P_i$ *com fatores de composição* $S_j, j \leq i$, *temos que* $\Delta_1 = P_1, \Delta_2 = P_2$, *de uma qualquer das dois series de composição de* $P_3$:

$0 \subset S_1 \subset radP_3 \subset P_3$ *ou* $0 \subset S_2 \subset radP_3 \subset P_3$ *temos que* $\Delta_3 = P_3$ *e analogamente* $\Delta_4 = P_4$.

Neste caso todos os $\Delta_i = P_i$, quando isso suceder $F(\Delta) = ProjA$ como mostra o seguinte

**Lema 2.7.** $F(\Delta) = ProjA \Leftrightarrow$ *Todo* $\Delta_i$ *é projetivo.*

**Demonstração.** Se $F(\Delta) = ProjA$, então é claro que todo $\Delta_i$ é projetivo pois todo $\Delta_i \in F(\Delta)$.

Para ver a implicação no outro sentido, temos que ver que se $M \in F(\Delta)$ então $M$ é projetivo.

Façamos indução em $l(M)$ o comprimento de $M$.

Para $M = \Delta_i$ claro.

Seja agora $M \in F(\Delta)$ temos $0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_t = M$ com $\frac{M_i}{M_{i-1}} \simeq \Delta_k$ que é projetivo assim temos $0 \to N \to M \to \Delta_i \to 0$, esta seqüência cinde, ou seja $M \simeq \Delta_i \oplus N$, mas $N$ tem comprimento menor que $M$, logo é projetivo e $\Delta_i$ é projetivo, então $M$ é projetivo. $\square$

Vejamos agora um outro exemplo

Exemplo 2.3.

$$\begin{tikzcd} & & \bullet 3 \\ 1\bullet \arrow[r] & \bullet 2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & \bullet 4 \end{tikzcd}$$

*este é o carcaz do exemplo anterior com outra ordenação dos simples, aqui facilmente vemos que* $\Delta_i = S_i$ *para todo* $i$*, neste caso claro que* $F(\Delta) = modA$.

Descreveremos agora quando $F(\Delta) = ProjA$ ou $F(\Delta) = modA$ em termos do carcaz de $A$.

A álgebra $A$ é chamada fracamente triangular se existe uma ordem dos simples (ou dos projetivos) tal que $Hom(P_j, P_i) = 0$ para $j > i$.

No carcaz de $A$ chamaremos circuito orientado "verdadeiro" a um circuito que envolve mais de um vértice. Diremos que um vértice $v$ é uma quase fonte quando é uma fonte ao esquecermos dos laços, ou seja as únicas possíveis flechas $\alpha$ que terminam em $v$ são laços.

Notemos que dizer que $A$ é fracamente triangular é o mesmo que dizer que o carcaz de $A$ não tem circuitos orientados verdadeiros, como mostraremos na Proposição seguinte.

**Proposição 2.2.** *As seguintes condições são equivalentes:*

*(1) Existe uma ordem dos simples tal que* $F(\Delta) = ProjA$.

*(2) Existe uma ordem dos simples tal que* $Hom(P_j, P_i) = 0$ *para* $j > i$.

*(3) O carcaz de* $A$ *não tem circuitos orientados verdadeiros.*

**Demonstração.** • $1 \Rightarrow 2$

Claro pois pelo **Lema 2.7** todo $\Delta_i$ é projetivo, logo $\Delta_i = P_i$.

• $2 \Rightarrow 1$

Se $Hom(P_j, P_i) = 0$ para $j > i$, claro que $P_i$ não tem fatores de composição $S_j$ para $j > i$ e é o quociente máximo com esta propriedade, logo $P_i = \Delta_i$, ou seja todo $\Delta_i$ é projetivo e $F(\Delta) = \Pr ojA$.

- $2 \Rightarrow 3$

  Se temos um circuito

$$
\begin{tikzcd}
 & \overset{v_{i_1}}{\bullet} \arrow[r] & \overset{v_{i_2}}{\bullet} \arrow[dr] & \\
\bullet \arrow[ur] & & & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[u] \arrow[dr] & & & \bullet \\
 & \cdots & \cdots \quad \cdots \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

  , existem $j < i$, tais que $v_i$ e $v_j$ são consecutivos no circuito, logo $Hom\,(P_j, P_i) \neq 0$..

- $3 \Rightarrow 2$

  Se $Q$ não tem circuitos verdadeiros então tem que existir um vértice que seja uma quase fonte.

  Chamemos $v_n$ a um tal vértice, assim $Hom\,(P_n, P_i) = 0$ para $i < n$.

  Analogamente para $Q \setminus \{v_n\}$, existe um vértice que é quase fonte e assim sucessivamente.

$\square$

**Proposição 2.3.** *As seguintes condições são equivalentes:*

*(1) Existe uma ordem dos simples tal que* $F\,(\Delta) = modA$.

*(2)* $\Delta_i = S_i$.

*(3)* $A$ *é triangular e a ordem é contrária à ordem admissível, isto é* $v_n$*é poço e* $v_i$ *é poço de* $Q\backslash\{v_{i+1}, ..., v_n\}$.

**Demonstração.** • $1 \Rightarrow 2$

Se $F\,(\Delta) = modA$, então claro que $S_i, \forall i$, logo todo $S_i$ tem uma filtração em $\Delta$, como é simples $S_i = \Delta_i$.

- $2 \Rightarrow 1$

  É evidente, pois os módulos que tem filtração em todos os simples são todos os $A$ módulos.

- $2 \Rightarrow 3$
  Se $\Delta_i = S_i$, como $\Delta_n$ é projetivo, então é projetivo simples, logo $v_n$ é poço, segue-se por indução.

- $3 \Rightarrow 2$
  Como $A$ é triangular e a ordem é contraria à ordem admissível, de um vértice $v_i$ só temos caminhos a vértices $v_j$ para $j$ maiores, assim $tr_{\coprod\limits_{j>i} P_j} P_i = radP_i$ e assim $\Delta_i = S_i$.

$\square$

**Exemplo 2.4.**

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & \bullet 2 \\ 4\bullet \arrow[r] & \bullet 1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & \bullet 3 \end{tikzcd}$$

*este é o carcaz dos exemplos anteriores com outra ordenação dos simples, neste caso claro que* $\Delta_1 = S_1, \Delta_2 = S_2, \Delta_3 = S_3$ *e* $\Delta_4 = P_4$, *logo* $F(\Delta) \neq \operatorname{Pr}ojA$ *e* $F(\Delta) \neq modA$.

Logo com os exemplos anteriores vemos que a definição de $F(\Delta)$ depende da ordenação dos simples.

**Exemplo 2.5.** *(1) Seja* $A = \frac{KQ}{I}$ *onde* $Q$ *é o carcaz*

$$\begin{array}{ccccccc} n & \alpha_{n-1} & n-1 & & 2 & \alpha_1 & 1 \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet & \cdots\cdots & \bullet & \longrightarrow & \bullet \end{array}$$

*e* $I$ *é o ideal gerado pelas relações* $\alpha_{i-1}\alpha_i$ *para* $i = 2,..n-1$, *aqui* $P_i \quad \begin{array}{c} i \\ \downarrow \quad \alpha_{i-1} \\ i-1 \end{array}$

*para* $i = 2,..n-1$ *e* $P_1 = S_1$.

*Na ordem* $1, 2, ..., n$, $\Delta_i = S_i$ *e* $F(\Delta) = modA$.

*Na ordem* $n, n-1, ..., 1$, $\Delta_i = P_i$ *e* $F(\Delta) = Proj$.

*Mas na ordem* $n, 1, 2, ..., n-1$, $\Delta_n = S_n$ *e* $\Delta_i = P_i$, *para* $i = 2,..n-1$, *assim o* $P_n \notin F(\Delta)$, *logo* $A$ *não é estandarmente estratificada nesta ordem.*

*(2) Seja $A$ autoinjetiva, conexa, não local então $A$ não é estandarmente estratificada em nenhuma ordem.*

Por um resultado de María Ines Platzeck e Idun Reiten [17], $F(\Delta) \subset P^{<\infty}$, onde $P^{<\infty}$ é a subcategoria plena de $modA$ formada pelos módulos de dimensão projetiva finita.

**Lema 2.8.** *Se $A$ é autoinjetiva os únicos módulos de dimensão projetiva finita são os projetivos*

**Demonstração.** Suponhamos $M$ um módulo de dimensão projetiva finita, logo uma resolução projetiva minimal de $M$ é $0 \longrightarrow P^k \longrightarrow \ldots \longrightarrow P^1 \longrightarrow P^0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$, como $P^k$ é injetivo, a seqüência cinde, logo $M$ é projetivo □

Como conseqüência do lema, segue a afirmação do **Exemplo 2.5 (2)**, pois se $A$ é estandarmente estratificada em alguma ordem $F(\Delta) = Proj \Leftrightarrow \Delta_i = P_i \Leftrightarrow Hom(P_j, P_i) = 0$ para $j > i$.

Logo o vértice $v_n$ é uma quase fonte, assim o $I_n$ tem fatores de composição só $S_n$, mas $I_n$ é projetivo por ser $A$ autoinjetiva, logo $I_n = P_n$ e como tem fatores de composição só $S_n$ então $v_n$ é poço a menos de laços, logo como $v_n$ é fonte a menos de laços, $A$ tem que ser desconexa ou local , logo $A$ não é estandarmente estratificada.

Vejamos um outro exemplo, este aparece no artigo de Corina Saenz "On modules with Weil filtration for Schur algebras of finite type".[19]

**Exemplo 2.6.** *Seja $A_m$ a álgebra $\frac{KQ}{I}$ onde $Q$ é o seguinte carcaz*

$$\overset{1}{\bullet} \underset{\alpha_1}{\overset{\beta_1}{\rightleftarrows}} \overset{2}{\bullet} \underset{\alpha_2}{\overset{\beta_2}{\rightleftarrows}} \overset{3}{\bullet} \; \ldots \; \overset{m-1}{\bullet} \underset{\alpha_{m-1}}{\overset{\beta_{m-1}}{\rightleftarrows}} \overset{m}{\bullet}$$

*e $I$ e o ideal gerado pelos caminhos $\alpha_{i+1}\alpha_i, \beta_i\beta_{i+1}, \alpha_i\beta_i - \beta_{i+1}\alpha_{i+1}$, $1 \leq i \leq m-2, \alpha_{m-1}\beta_{m-1}$. Aqui os projetivos são*

$$P_1 = \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \beta_1 \\ 2 \\ \downarrow \alpha_1 \\ 1 \end{array}$$

$$P_2 = \begin{tikzcd} & 2 \arrow[dl, "\alpha_1"'] \arrow[dr, "\beta_2"] & \\ 1 \arrow[dr, "\beta_1"'] & & 3 \arrow[dl, "\alpha_2"] \\ & 2 & \end{tikzcd}, \quad \cdots \quad , P_{m-1} = \begin{tikzcd} & m-1 \arrow[dl, "\alpha_{m-2}"'] \arrow[dr, "\beta_{m-1}"] & \\ m-2 \arrow[dr, "\beta_{m-2}"'] & & m \arrow[dl, "\alpha_{m-1}"] \\ & m-1 & \end{tikzcd}$$

*e* $P_m = \begin{array}{c} m \\ \downarrow \\ m-1 \end{array} \alpha_{m-1}$

*Temos que* $\Delta_1 = S_1$, $\quad \Delta_i = \begin{array}{c} i \\ \downarrow \\ i-1 \end{array} \alpha_{i-1}$ *para* $i \neq 1$.

*De forma análoga, os injetivos são* $I_i = P_i$, *para* $i \neq m$ *e* $I_m = \begin{array}{c} m-1 \\ \downarrow \\ m \end{array} \beta_{m-1}$ *e de aqui* $\nabla_1 = S_1$, $\nabla_i = \begin{array}{c} i-1 \\ \downarrow \\ i \end{array} \beta_{i-1}$

*Esta álgebra é quase hereditária, mas não hereditária.*

Lembraremos agora alguns conceitos que aparecem em [2]. Estes são os conceitos de **resolvente** e **corresolvente** que estão muito relacionados com os conceitos de subcategoria **contravariantemente finita** e **covariantemente finita** e seus ortogonais.

Uma subcategoria $X$ de $modA$ chama-se **resolvente** se:

(1) $X$ é fechada para extensões.

(2) $X$ é fechada para núcleos de sobrejeções.

(3) $X$ contém os projetivos.

Dualmente define-se **corresolvente.**

Para as álgebras estandarmente estratificadas, claramente $F(\Delta)$ é fechada para extensões e contém os projetivos, mostra-se os seguintes resultados para as álgebras estandarmente estratificadas, uma demonstração dos mesmos acha-se em [20]

**Proposição 2.4.** *Se $A$ é estandarmente estratificada $F(\Delta)$ é resolvente.*

**Esboço da demonstração:** Pela observação anterior só falta mostrar que $F(\Delta)$ é fechada para núcleos de sobrejeções e isto é feito fazendo indução na cardinalidade do conjunto $S_\Delta(M)$ que é o conjunto dos $i \in 1, \ldots, n$ tais que $[M : \Delta_i] \neq 0$ □

**Corolário 2.1.** *Se $A$ é estandarmente estratificada, os Ext-projetivos de $F(\Delta)$ são justamente os projetivos.*

**Demonstração.** Se $M$ é Ext-projetivo em $F(\Delta)$ temos que provar que $M$ é projetivo, ou seja que $Ext^1(M, X) = 0, \forall X \in A$.

Seja $0 \to X \to L \to M \to 0$, consideremos $X_1$ uma $F(\Delta)$ aproximação de $X$, esta existe pois $F(\Delta)$ é funtorialmente finita, assim

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & X & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \| & \\ 0 \to & X_1 & \longrightarrow & E & \longrightarrow & M & \to 0 \end{array}$$

Por ser $X_1$ uma $F(\Delta)$ aproximação de $X$ então$X_1 \in F(\Delta)$, como $M$ é Ext-projetivo em $F(\Delta)$ segue que $0 \to X_1 \to E \to M \to 0$ cinde. □

**Corolário 2.2.** *Se $A$ é estandarmente estratificada, $X \in F(\Delta), \mathcal{Y} \in Y(\Delta)$ então $Ext^i(X, \mathcal{Y}) = 0, \forall i \geq 1$.*

**Demonstração.** Seja $X \in F(\Delta)$, $P$ sua cobertura projetiva, como $P$ é projetivo então $P \in F(\Delta)$.

Logo temos a seqüência exata $0 \to X_1 \to P \to X \to 0$ portanto $X_1 \in F(\Delta)$, assim $Ext^i(X, \mathcal{Y}) \simeq Ext^{i-1}(X_1, \mathcal{Y})$, para $i \geq 2$.

Por indução $Ext^{i-1}(X_1, \mathcal{Y}) = 0$. □

Dualmente temos o seguinte resultado

**Proposição 2.5.** *$F(\nabla)$ é fechada para conúcleos de injeções.*

**Corolário 2.3.** *Se $DA \in F(\nabla)$ então $F(\nabla)$ é corresolvente.*

**Proposição 2.6.** *Se $A$ e um álgebra quase hereditária, $F(\Delta)$ é resolvente e $F(\nabla)$ é corresolvente.*

Lembremos que temos várias subcategorias de $modA$ já definidas:

- $F(\Delta)$, a subcategoria dos módulos filtrados em $\Delta$.
- $Y(\Delta) = \{Y \in modA : Ext^1(X, Y) = 0, X \in F(\Delta)\}$.
- $W(\Delta) = \{W \in modA : Ext^1(W, X) = 0, X \in F(\Delta)\}$.
- $F(\nabla)$, a subcategoria dos módulos filtrados em $\nabla$.
- $Y(\nabla) = \{Y \in modA : Ext^1(X, Y) = 0, X \in F(\nabla)\}$.
- $W(\nabla) = \{W \in modA : Ext^1(W, X) = 0, X \in F(\nabla)\}$.

Vejamos agora algumas relações entre $F(\Delta), Y(\Delta), F(\nabla)$ e $W(\nabla)$.

Temos que as subcategorias $W(\Delta), F(\Delta), Y(\Delta), F(\nabla), W(\nabla)$, são contravariantemente finitas e que $F(\Delta), Y(\Delta), F(\nabla), W(\nabla), Y(\nabla)$ são covariantemente finitas.

**Proposição 2.7.** *Se $A$ é estandarmente estratificada, $Y(\Delta)$ é corresolvente e $F(\nabla)$ está contida em $Y(\Delta)$.*

**Demonstração.** $Y(\Delta)$ é fechada para extensões e contem os injetivos, seja $f : M \to N$, injetiva com $M, N \in Y(\Delta)$, denotemos por $C$ seu conúcleo, aplicando $Hom(\Delta_i, \ )$ a $0 \to M \to N \to C \to 0$, obtemos $Ext^1(\Delta_i, N) \to Ext^1(\Delta_i, C) \to Ext^2(\Delta_i, M)$, por um Corolário anterior $Ext^1(\Delta_i, N) = Ext^2(\Delta_i, M) = 0 \Rightarrow Ext^1(\Delta_i, C) = 0 \Rightarrow C \in F(\Delta)$. □

Dualmente temos a seguinte

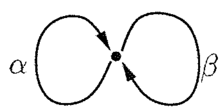
**Proposição 2.8.** *Se $A$ é coestandarmente estratificada, ou seja $DA \in F(\nabla)$, então $W(\nabla)$ é corresolvente e $F(\Delta) \subset W(\nabla)$.*

**Proposição 2.9.** *Se $A$ é quase hereditária então $F(\nabla) = Y(\Delta)$ e $F(\Delta) = W(\nabla)$.*

**Esboço da demonstração:** Usando as **Proposições 2.7** e **2.8**, só resta provar as inclusões no sentido contrário, o que se faz de modo indutivo. □

**Exemplo 2.7.** *(1) As inclusões para álgebras estandarmente estratificadas podem ser próprias, seja $A = \frac{K[x]}{(x^2)}$, esta é um álgebra local com um único simples, neste caso $F(\Delta) = ProjA$ que é igual à subcategoria dos módulos que são somandos diretos de somas de copias de $A$ que denotamos por $addA$ e analogamente $F(\nabla) = InjA = addA$, claramente $Y(\Delta) = modA$ e assim as inclusões $F(\nabla) \subset Y(\Delta)$ e $F(\Delta) \subset W(\nabla)$ são próprias.*

*(2) Para as álgebras quase hereditárias $F(\Delta) \cap F(\nabla) \neq 0$, no caso das álgebras estandarmente estratificadas isto não é necessariamente verdadeiro. Por exemplo, seja $A = \frac{K[x,y]}{(x,y)^2}$, neste caso temos um só simples, a menos de isomorfismo, mas o projetivo e o injetivo indecomponíveis são não isomorfos, aqui $A = \frac{KQ}{I}$ onde $Q$ é o carcaz*




*assim* $P = \begin{array}{ccc} & 1 & \\ \swarrow & & \searrow \\ 1 & & 1 \end{array}$ *e* $I = \begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ \nwarrow & & \nearrow \\ & 1 & \end{array}$

*logo* $F(\Delta) = \Pr ojA$ *e* $F(\nabla) = InjA$, *logo* $F(\Delta) \cap F(\nabla) = 0$.

**Proposição 2.10.** *[20] Para uma álgebra $A$ estandarmente estratificada as seguintes condições são equivalentes:*

*(1)* $A$ *é quase hereditária.*

*(2)* $F(\nabla) = Y(\Delta)$

*(3)* $gl \dim A < \infty$.

## 2.4 Módulos inclinantes para álgebras estandarmente estratificadas

Os resultados desta seção baseiam-se no artigo de Auslander e Reiten "Applications of contravariantly finite subcategories".[2]

Agora veremos um resultado sobre a existência de módulos inclinantes especiais para álgebras estandarmente estratificadas.

Lembremos a definição de módulo inclinante.

Um $A$ módulo inclinante (generalizado) é um módulo $T$ tal que:

(1) $pdT < \infty$.

(2) $Ext^i(T,T) = 0, \forall i > 0$

(3) Existe uma seqüência $0 \to A \to T_0 \to T_1 \to .... \to T_s \to 0$, com $T_i \in addT, \forall i$.

**Lema 2.9.** *Seja $X$ uma subcategoria resolvente contravariantemente finita, $Y = \{C/Ext^1(C,\mathcal{X}) = 0, \mathcal{X} \in X\}$. Então $W = X \cap Y$ tem as seguintes propriedades:*

*(1)* $W$ *é auto-ortogonal, ou seja* $Ext^i(\mathcal{X},\mathcal{Y}) = 0, \mathcal{X} \in W, \mathcal{Y} \in W, \forall i > 0$.

*(2)* $\forall \mathcal{X} \in X$ *existe uma seqüência* $0 \to \mathcal{X} \to \mathcal{W} \to \mathcal{X}' \to 0, \mathcal{W} \in W, \mathcal{X}' \in X$.

*(3)* $\forall \mathcal{Y} \in Y$ *existe uma seqüência* $0 \to \mathcal{Y}' \to \mathcal{W} \to \mathcal{Y} \to 0, \mathcal{W} \in W, \mathcal{Y}' \in X$.

**Teorema 2.1.** *Seja $A$ é estandarmente estratificada.*

*Então existe um módulo inclinante $T$, único a menos da multiplicidade dos somandos diretos indecomponíveis tal que $add(T) = W(\Delta)$.*

**Demonstração.** Como $A$ é estandarmente estratificada, sabemos que $F(\Delta)$ é coresolvente e contravariantemente finita, logo se tomarmos $X = F(\Delta), Y = Y(\Delta), W = W(\Delta) = X \cap Y = F(\Delta) \cap Y(\Delta)$, podemos aplicar o lema anterior, ou seja $W$ tem as três propriedades do lema.

Provaremos agora que a soma direta dos indescomponíveis em $W$ é um módulo inclinante, assim $add(T) = W(\Delta)$.

Usaremos o fato de que se $X \in F(\Delta)$ então $pdX \leq n-1$, onde $n$ é o número de simples.

Vamos a mostrar agora que dado $X \in F(\Delta)$, existe uma seqüência $0 \to X \to W_0 \to W_1 \to .... \to W_{n-1} \to 0$, com $W_i \in W(\Delta)$.

Seja $X_{-1} = X \in F(\Delta)$ construamos uma seqüência
$\varepsilon_i : 0 \to X_{i-1} \to W_i \to X_i \to 0, W_i \in W(\Delta) = F(\Delta) \cap Y(\Delta) \Rightarrow W_i \in Y(\Delta), X_i \in F(\Delta)$.

Tomamos $X_{n-1}$ e aplicamos o funtor $Hom(X_{n-1}, )$ a $\varepsilon_i$, assim obtemos a seqüência exata

$$\to Ext^j(X_{n-1}, W_i) \to Ext^j(X_{n-1}, X_i) \to Ext^{j+1}(X_{n-1}, X_{i-1}) \to Ext^{j+1}(X_{n-1}, W_i) \to,$$

como $W_i \in W, X_i, X_{i-1} \in F(\Delta) \Rightarrow Ext^j(X_{n-1}, W_i) = 0 = Ext^{j+1}(X_{n-1}, W_i)$, segue que $Ext^j(X_{n-1}, X_i) \simeq Ext^{j+1}(X_{n-1}, X_{i-1}), \forall j > 1$,
assim $Ext^1(X_{n-1}, X_{n-2}) \simeq Ext^2(X_{n-1}, X_{n-3}) \simeq ... \simeq Ext^n(X_{n-1}, X_{-1})$,
agora como $X_{n-1} \in F(\Delta) \Rightarrow pdX_{n-1} \leq n-1 \Rightarrow Ext^n(X_{n-1}, X_{-1}) = 0$, logo segue que $Ext^1(X_{n-1}, X_{n-2}) = 0$, assim $\varepsilon_{n-1} : 0 \to X_{n-2} \to W_{n-1} \to X_{n-1} \to 0$ cinde, então $X_{n-2}$ é somando direto de $W_{n-1} \in W(\Delta) \Rightarrow X_{n-2} \in W(\Delta)$.

Assim temos uma seqüência

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to X = X_{-1} \to & W_0 & \to & W_1 & \to & W_2 & \to \ldots \to W_{n-2} \to X_{n-2} = W'_{n-1} \to 0 \\
& & \searrow & \nearrow & \searrow & \nearrow & \\
& & X_0 & & X_1 & & 
\end{array}$$

ou seja $\forall X \in F(\Delta)$ temos $0 \to X \to W_0 \to W_1 \to .... \to W_{n-1} \to 0$, com $W_i \in W(\Delta)$.

Para $X = A$, temos $0 \to A \to W_0 \to W_1 \to .... \to W_{n-1} \to 0$, ponendo $T = \oplus W_j$ este é um módulo inclinante, claro que $pdT < \infty$, pois $T \in W(\Delta) = F(\Delta) \cap Y(\Delta)$ então $T \in F(\Delta)$ logo $pdT \leq n-1$, $Ext^i(T,T) = 0, \forall i > 0$, claro pois $T \in W(\Delta)$ que é auto-ortogonal.

Além disso se $M \in W(\Delta)$, claro $T \oplus M$ é inclinante e por teoria de inclinação $M \in addT$ donde $W(\Delta) = addT$. □

Um módulo inclinante $T$, com $add(T) = W(\Delta)$, a menos da multiplicidade dos somandos diretos indecomponíveis, é chamado de módulo caraterístico.

Se $A$ é quase hereditária este $T$ é inclinante -coinclinante.

Para $A$ estandarmente estratificada não é assim em geral.

**Exemplo 2.8.** *Seja* $A = \frac{K[x,y]}{(x,y)^2}$, *neste caso* $F(\Delta) = \Pr ojA$ , $Y(\Delta) = modA$ *e* $F(\Delta) \cap Y(\Delta) = F(\Delta)$ *como* $F(\nabla) = InjA$ *e* $A$ *é local, os* $A-mod$ *de dimensão injetiva finita são os injetivos, portanto não temos nenhum coinclinante em* $F(\Delta) \cap Y(\Delta) = F(\Delta) = \Pr ojA$.

**Proposição 2.11.** *Para* $A$ *estandarmente estratificada temos que* $F(\Delta)$ *está contido em* ${}^{\perp}W(\Delta) = \{X : Ext^i(X, W(\Delta)) = 0, \forall i\}$

**Demonstração.** Se $X \in F(\Delta)$, pelo **Corolário 2.2** temos que $Ext^i(X,T) = 0, \forall i$, para $T$ um módulo inclinante tal que $add(T) = W(\Delta) = F(\Delta) \cap Y(\Delta)$, pois $X \in F(\Delta)$ e $T \in Y(\Delta)$. □

Em geral esta inclusão é própria.

**Exemplo 2.9.** *Tomemos a álgebra* $A = \frac{K[x,y]}{(x,y)^2}$, *neste caso* $F(\Delta) = ProjA$ , $Y(\Delta) = modA$ *e* $F(\Delta) \cap Y(\Delta) = F(\Delta)$, *claramente* ${}^{\perp}W(\Delta) = modA$.

**Proposição 2.12.** *Para as álgebras quase hereditárias* $F(\Delta) = {}^{\perp} W(\Delta)$.

**Corolário 2.4.** *Se* $A$ *é uma álgebra quase hereditária, o módulo característico determina* $F(\Delta)$ *e* $F(\nabla)$ *como segue*

$F(\Delta) = \{\mathcal{X}/Ext^i(\mathcal{X},T) = 0, \forall i\}$

$F(\nabla) = \{\mathcal{Y}/Ext^i(T,\mathcal{Y}) = 0, \forall i\}$ *Como conseqüência* $T$ *determina* $\Delta$ *e* $\nabla$.

**Esboço da demonstração:** O resultado é uma conseqüência dos resultados do artigo [2] pois no caso das álgebras quase hereditárias para $F(\Delta)$ temos que $Y(\Delta) = F(\nabla)$. Vejamos que $T$ determina $\Delta$ e $\nabla$.

Obtemos $\Delta$ de $F(\Delta)$ como segue:

Sabemos que $\Delta(i) = \frac{P_i}{U_i}$, podemos escrever $U_i = \sum Ker(\psi : P_i \twoheadrightarrow \mathcal{X}, \mathcal{X} \in F(\Delta), \psi \neq 0)$, seja $\psi : P_i \twoheadrightarrow \mathcal{X}, \psi \neq 0$, como $\mathcal{X} \in F(\Delta), \exists \mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ com $\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{X}'} \in \Delta$, pois $F(\Delta)$ é fechada para núcleos de epi.

Como $P_i \longrightarrow \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{X}'}$ é epi então $\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{X}'} \simeq \Delta(i) \Rightarrow U_i \subset Ker\varphi\pi, \pi : \mathcal{X} \longrightarrow \frac{\mathcal{X}}{\mathcal{X}'} \Rightarrow U_i = Ker\varphi\pi$ pois $\frac{P_i}{U_i}$ e $\frac{\mathcal{X}}{\mathcal{X}'}$ por ser isomorfos a $\Delta(i)$ tem o mesmo comprimento, assim $U_i = Ker\varphi\pi = Ker\pi$. Analogamente obtemos $\nabla$ de $F(\nabla)$. □

Temos a seguinte

**Proposição 2.13.** *Se $A$ e um álgebra quase hereditária, $T$ pode ser escrito como $T = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} T(i)$ e temos duas seqüências exatas*

$$0 \longrightarrow \Delta(i) \xrightarrow{\beta(i)} T(i) \longrightarrow \mathcal{X}(i) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{Y}(i) \longrightarrow T(i) \xrightarrow{\gamma(i)} \nabla(i) \longrightarrow 0$$

*onde $\beta(i)$ é uma $F(\nabla)$ - aproximação à esquerda e $\mathcal{X}(i) \in F\{\Delta(1), ..., \Delta(i-1)\}$ e $\gamma(i)$ é uma $F(\Delta)$ - aproximação à direita e $\mathcal{Y}(i) \in F\{\nabla(1), ..., \nabla(i-1)\}$.*

No caso das álgebras estandarmente estratificadas temos uma proposição análoga , que tem só a primeira seqüência.

# Capítulo 3

# Álgebras que são estandarmente estratificadas em todas as ordens.

Neste capítulo estudaremos as álgebras que são estandarmente estratificadas com respeito a qualquer ordem dos simples. Mostraremos que tais álgebras são exatamente as álgebras com ideais idempotentes projetivos, deduzindo como corolário uma caracterização para as álgebras hereditárias.

Neste capítulo todas as álgebras são $K$- álgebras de dimensão finita, básicas e indecomponíveis com $K$ um corpo algebricamente fechado. Por um teorema fundamental de Gabriel toda álgebra $\Lambda$ com estas propriedades é isomorfa a uma álgebra da forma $\Lambda = \frac{KQ}{I}$ onde $Q$ é um carcaz finito e $I$ um ideal admissível.
Sejam $v_1, ...v_n$ os vértices de $Q$ numa ordem fixada e $S_1, ..., S_n$ a ordenação correspondente dos módulos simples, $P_i$ a cobertura projetiva de $S_i$.

## 3.1 Álgebras com ideais idempotentes projetivos

As álgebras com ideais idempotentes projetivos têm sido estudadas por vários autores, por exemplo [6] [14] [16]. Essas álgebras podem ser vistas como um exemplo particular de álgebras estandarmente estratificadas

Uma álgebra $\Lambda$ diz-se com ideais idempotentes projetivos [16] e denotamos por **iip** se todo ideal idempotente de $\Lambda$ é um $\Lambda$ módulo projetivo.

Notemos que a noção de álgebra **iip** é uma generalização da noção de álgebra hereditária, pois para as hereditárias todo ideal é projetivo e para as **iip** pedimos que os ideais idempotentes sejam projetivos . Uma caracterização das álgebras **iip** que usaremos foi feita por M.I.Platzeck [16]. É a seguinte $\Lambda$ é **iip** se $\tau_{\widehat{P_i}}(\Lambda)$ é projetivo $\forall i$ onde $\widehat{P_i} = \bigoplus_{j \neq i} P_j$.

**Lema 3.1.** *Se $\Lambda$ é um álgebra com ideais idempotentes projetivos, então $\tau_P(Q)$ é projetivo para $P$ projetivo indecomponível e $Q$ projetivo.*

**Demonstração.** $\tau_P(Q)$ é um somando de $\tau_P(\Lambda^s)$, se provarmos que $\tau_P(\Lambda)$ é projetivo, teremos provado nossa afirmação, porem isto é claro, pois $P = \Lambda e$ com $e$ idempotente, assim $\tau_P(\Lambda) = \Lambda e \Lambda$ , que é um ideal idempotente e portanto projetivo. □

**Lema 3.2.** *Se $\Lambda$ é um álgebra com ideais idempotentes projetivos, então $\tau_{P_1 \amalg ... \amalg P_t}(\Lambda)$ é projetivo onde os $P_i$ são projetivos indecomponíveis não isomorfos.*

**Demonstração.** Claramente $P_1 \amalg ... \amalg P_t = \Lambda e_1 + ... + \Lambda e_t = \Lambda(e_1 + ... + e_t)$, logo $\tau_{P_1 \amalg ... \amalg P_t}(\Lambda) = \Lambda(e_1 + ... + e_t)\Lambda$, que é um ideal idempotente e portanto projetivo. □

## 3.2 Sobre um quociente de álgebras estandarmente estratificadas

O seguinte lema nos possibilita, estudar um quociente particular de uma álgebra estandarmente estratificada que resulta ser também estandarmente estratificada.

Este resultado não é novo, mas incluímos sua demonstração por sua importância.

**Lema 3.3.** *Se $\Lambda$ é estandarmente estratificada na ordem $e_1, ..., e_n$ então $\frac{\Lambda}{\Lambda\varepsilon_i\Lambda}$ é estandar estratificada na ordem $e_1, ..., e_{i-1}$, onde $\varepsilon_i = e_i + ... + e_n$.*

**Demonstração.** Denotemos $B = \frac{\Lambda}{\Lambda\varepsilon_i\Lambda}$ e por $\Delta_k(\Lambda)$ e $\Delta_k(B)$ os $\Delta$ módulos de $\Lambda$ e $B$, respectivamente.

Primeiro $\Delta_j(\Lambda), j = 1, ..., n$ são $B$-módulos, pois $\Delta_j(\Lambda) = \frac{\Lambda e_j}{\Lambda\varepsilon_i\Lambda e_j}$ e como $j < i$ este é um $\Lambda$-módulo anulado por $\Lambda\varepsilon_i\Lambda$ , logo é um $B$-módulo.

Todos os $\Delta_j(\Lambda)$ tem $Top\Delta_j(\Lambda) = S_j$ e $\Delta_r(\Lambda)$ só tem fatores de composição $S_k, k < r$.

Provemos que esses $\Delta_j(\Lambda)$ são exatamente os $\Delta_j(B)$.

Como $\Delta_r(\Lambda)$ tem $Top\Delta_r(\Lambda) = S_r$ e tem fatores de composição $S_k, k < r$ e é um $B$-módulo então $\Delta_r(\Lambda)$ é um quociente de $P_r(B)$ com fatores de composição $S_k, k < r$,e como $\Delta_r(B)$ é o quociente máximo de $P_r(B)$ com esta propriedade temos um epimorfismo de $\Delta_r(B)$ a $\Delta_r(\Lambda)$.

Também temos um epimorfismo de $P_r(\Lambda)$ a $P_r(B)$ e outro de $P_r(B)$ a $\Delta_r(B)$, assim temos um epimorfismo de $P_r(\Lambda)$ a $\Delta_r(B)$ ,ou seja $\Delta_r(B)$ é quociente de $P_r(\Lambda)$ que tem $Top\Delta_r(\Lambda) = S_r$ com fatores de composição $S_k, k < r$ e como $\Delta_r(\Lambda)$ é o quociente máximo de $P_r(\Lambda)$ com esta propriedade temos um epimorfismo de $\Delta_r(\Lambda)$ a $\Delta_r(B)$.

Logo $\Delta_r(\Lambda) \simeq \Delta_r(B)$.

Falta provar que $P_r(B) \in F_B(\Delta), \forall r$.

Lembremos que $P_r(B) = \frac{P_r(\Lambda)}{(\Lambda\varepsilon_i\Lambda)P_r(\Lambda)}$ e que se $M$ é um $\Lambda$-módulo $\frac{M}{(\Lambda\varepsilon_i\Lambda)M}$ é um $B$-módulo.

Agora como $\Lambda$ é estandarmente estratificada temos $P_r(\Lambda) \in F_\Lambda(\Delta)$, ou seja temos uma filtração

$Q_r^s \subset ... \subset Q_r^2 \subset Q_r^1 \subset P_r(\Lambda)$ com quocientes $\Delta_k(\Lambda), k < r$.

Fazendo quocientes temos

$\frac{Q_r^s}{(\Lambda\varepsilon_i\Lambda)Q_r^s} \subset ... \subset \frac{Q_r^2}{(\Lambda\varepsilon_i\Lambda)Q_r^2} \subset \frac{Q_r^1}{(\Lambda\varepsilon_i\Lambda)Q_r^1} \subset P_r(B) = \frac{P_r(\Lambda)}{(\Lambda\varepsilon_i\Lambda)P_r(\Lambda)}$

Logo $P_r(B) \in F_B(\Delta)$. □

## 3.3 Caracterização das álgebras estandarmente estratificadas em todas as ordens

**Teorema 3.1.** *A álgebra $\Lambda$ é estandarmente estratificada em todas as ordens se e só se é uma álgebra com ideais idempotentes projetivos.*

**Demonstração.** Vamos a provar primeiro que se $\Lambda$ é estandarmente estratificada em todas as ordens então é uma álgebra com ideais idempotentes projetivos.

Seja $\Lambda$ estandarmente estratificada em todas as ordens, podemos escolher uma ordem dos simples tal que $l(P_i) \leqslant l(P_{i+1}), \forall i$

Vejamos que neste caso $P_k = \Delta_k$, para todo $k$.

Sempre vale por definição que $P_n = \Delta_n$, temos ainda uma seqüência exata
$0 \to \tau_{P_n}(P_{n-1}) \to P_{n-1} \to \Delta_{n-1} \to 0$.
Se $\tau_{P_n}(P_{n-1}) \neq 0 \Rightarrow \tau_{P_n}(P_{n-1}) \simeq P_n^{k_n}$, pois $\Lambda$ é estandarmente estratificada , como temos a hipótese sobre o comprimento não pode acontecer, logo $\tau_{P_n}(P_{n-1}) = 0$, analogamente raciocinamos para provar que todo $P_k = \Delta_k$.

Suponhamos que $\Delta_n, \Delta_{n-1}, ..., \Delta_{n-j+1}$ são projetivos ,
se $\tau_{\coprod_{r>n-j} P_r}(P_{n-j}) \neq 0 \Rightarrow \tau_{\coprod_{r>n-j} P_r}(P_{n-j}) \simeq \coprod_{r>n-j} P_r^{k_r}$ o que não pode ser, devido a hipótese sobre o comprimento, logo $P_j = \Delta_j$.

Logo temos uma ordem onde $P_k = \Delta_k$. e portanto $F(\Delta) = Proj$

Além disso $Hom(P_j, P_i) = Hom(\Delta_j, \Delta_i) = 0$ para $j > i$. Isto é o mesmo que dizer que $\Lambda$ é quase triangular.

Nesta álgebra o vértice $v_n$ é uma fonte se esquecermos os laços neste vértice.

Seja $\Lambda = \frac{KQ}{I}$, então consideremos $\overline{Q}$ o carcaz obtido de $Q$ eliminando $v_n$ e $\overline{I}$ o ideal gerado pelas relações que restam em $I$ ao eliminar as flechas que saem de $v_n$.

Logo $\frac{\Lambda}{\Lambda e_n \Lambda} = \frac{K\overline{Q}}{\overline{I}}$ também é estandarmente estratificada em todas as ordens isto é conseqüência do **Lema 3.3**.

Escrevemos $\Lambda = 1\Lambda 1 = (e_n + \widehat{e_n})\Lambda(e_n + \widehat{e_n}) = (e_n\Lambda e_n) + (e_n\Lambda\widehat{e_n}) + (\widehat{e_n}\Lambda e_n) + (\widehat{e_n}\Lambda\widehat{e_n})$.

$L = (e_n\Lambda e_n)$ é uma álgebra local por tanto estandarmente estratificada em todas as ordens.

$(e_n\Lambda\widehat{e_n}) = 0 = Hom\left(P_n, \widehat{P_n}\right)$.

$M = (\widehat{e_n}\Lambda e_n) = \tau_{\widehat{P_n}}(P_n)$

$U = (\widehat{e_n}\Lambda\widehat{e_n}) = \frac{\Lambda}{\Lambda e_n \Lambda} = \frac{K\overline{Q}}{\overline{I}}$

Assim

$$\Lambda \simeq \begin{pmatrix} L & 0 \\ M & U \end{pmatrix}$$

Descrevamos os projetivos da álgebra $\Lambda$, esses são $Q_n = (P_n, M \otimes P_n, id)$, onde $P_n$ é o projetivo da álgebra local $L$, e $Q_i = (0, P_i, 0)$ onde $P_i, \forall i \in \{1, ..., n-1\}$ são os projetivos de $U$.

Por um resultado de Marcos, Merklen, Saenz em "Standardly Stratified Split and Lower Triangular Algebras" [15] **Proposição 16** temos que $M = (\widehat{e_n}\Lambda e_n) = \tau_{\widehat{P_n}}(P_n) \in F_{(\widehat{e_n}\Lambda\widehat{e_n})}(\Delta)$.

Como $\Lambda$ é estandarmente estratificada em todas as ordens, podemos escolher uma ordem de modo que $e_n$ seja o primeiro.

Provaremos que $\Lambda$ é **iip** por indução no número de simples.

Claro que uma álgebra local é **iip**.

Vejamos agora que $\Lambda$ é um álgebra com ideais idempotentes projetivos, para isto basta mostrar, usando um resultado de Platzeck, [16] que $\tau_{\widehat{P_i}}(\Lambda)$ é projetivo para todo $i$.

Também temos que $U$ é **iip**, por hipóteses de indução, pois tem um número menor de simples que $\Lambda$.

Vejamos $\tau_{\widehat{Q_i}}(\Lambda) = \tau_{\widehat{Q_i}}(Q_n \oplus Q_1 \oplus ... \oplus Q_{n-1}) = \tau_{\widehat{Q_i}}(Q_n) \oplus \tau_{\widehat{Q_i}}\left(\underset{j\neq n}{\amalg} Q_j\right)$

Se $i \neq n, \tau_{\widehat{Q_i}}(Q_n) = Q_n$, este é projetivo pois $Q_n$ é somando de $\widehat{Q_i}$, já que $i \neq n$, $\tau_{\widehat{Q_i}}\left(\underset{j\neq n}{\amalg} Q_j\right) \simeq \tau_{\widehat{P_i}}(U)$ que é projetivo por ser $U$ **iip**, logo $\tau_{\widehat{Q_i}}(\Lambda)$ é projetivo.

Se $i = n$, $\tau_{\widehat{Q_i}}(Q_n) = (0, M, 0)$, ou seja é isomorfo a $\tau_{\widehat{P_i}}(P_n) = M$ e $\tau_{\widehat{Q_i}}\left(\underset{j\neq n}{\amalg} Q_j\right) \simeq \tau_{\widehat{P_i}}(U) = U$,pois $\widehat{Q_n} \simeq \underset{j\neq n}{\amalg} P_n = U$, claramente $\tau_{\widehat{Q_i}}\left(\underset{j\neq n}{\amalg} Q_j\right)$ é projetivo.

Só nos resta ver que $(0, M, 0)$ é projetivo ou equivalentemente que $M$ é projetivo.

Para ver que $M$ é projetivo como $U = (\widehat{e_n}\Lambda\widehat{e_n}) = \frac{\Lambda}{\Lambda e_n \Lambda} = \frac{K\overline{Q}}{\overline{I}}$ é estandarmente estratificada em todas as ordens, então como em $\Lambda$ pode-se escolher uma ordem tal que $P_k = \Delta_k$. e portanto $F_{(\widehat{e_n}\Lambda\widehat{e_n})}(\Delta) = Proj$ e como $M = (\widehat{e_n}\Lambda e_n) = \tau_{\widehat{P_n}}(P_n) \in F_{(\widehat{e_n}\Lambda\widehat{e_n})}(\Delta)$, então $M$ é projetivo.

Provaremos agora a outra implicação, ou seja que se $\Lambda$ é uma álgebra com ideais idempotentes projetivos então $\Lambda$ é estandarmente estratificada em todas as ordens.
Seja $\Lambda$ uma álgebra com ideais idempotentes projetivos e seja $e_1, ..., e_n$ uma ordem dos idempotentes, mostremos que $\Lambda$ é estandarmente estratificada nesta ordem.

Para isto provemos que $P_k \in F(\Delta), \forall k$.

Primeiro $P_n = \Delta_n \in F(\Delta)$.

Suponhamos que $P_n, P_{n-1}, ..., P_{n-k+1} \in F(\Delta)$ e provemos que $P_{n-k} \in F(\Delta)$.

Se $P_{n-k} = \Delta_{n-k}$, claro que $P_{n-k} \in F(\Delta)$, senão temos uma seqüência $0 \to \tau_{\underset{r>n-k}{\amalg} P_r}(P_{n-k}) \to P_{n-k} \to \Delta_{n-k} \to 0$, e como $\tau_{\underset{r>n-k}{\amalg} P_r}(P_{n-k})$ é projetivo, como conseqüência dos **Lemas 3.1** e **3.2**, $\tau_{\underset{r>n-k}{\amalg} P_r}(P_{n-k}) = \underset{r>n-k}{\amalg} P_r^{s_r} \in F(\Delta)$. □

## 3.4 Corolários

**Corolário 3.1.** *Se $\Lambda$ é estandarmente estratificada em todas as ordens então existe uma ordem tal que $F(\Delta) = Proj$.*

**Demonstração.** Para uma álgebra $\Lambda$ é estandarmente estratificada em todas as ordens escolhemos na demonstração do **Teorema 3.1** uma ordem dos simples tal que $l(P_i) \leqslant l(P_{i+1}), \forall i$, neste caso todos os $P_k = \Delta_k$ e portanto $F(\Delta) = Proj$. □

**Corolário 3.2.** *Se $\Lambda$ é estandarmente estratificada em todas as ordens então existe uma ordem tal que $F(\Delta) = P^{<\infty}$, onde $P^{<\infty}$ é a subcategoria dos módulos de dimensão projetiva finita.*

**Demonstração.** Se $\Lambda$ é estandarmente estratificada em todas as ordens então $\Lambda$ é um álgebra com ideais idempotentes projetivos e neste caso podemos tomar uma ordem tal que $Hom(P_j, P_i) = 0$ para $j < i$, assim $\Delta_i = \frac{P_i}{\tau_{\overline{P}_i}(P_i)}$ [16] e $F(\Delta) = P^{<\infty}$. □

Usando os resultados anteriores podemos obter uma caracterização das álgebras hereditárias que generaliza um resultado de Ringel em [18].

**Corolário 3.3.** *As seguintes condições são equivalentes:*

*(1) $gl \dim \Lambda < \infty$ e $\Lambda$ é estandarmente estratificada em todas as ordens.*

*(2) $Q$ não tem circuitos orientados e $\Lambda$ é quase hereditária em todas as ordens.*

*(3) $\Lambda$ é quase hereditária em todas as ordens.*

*(4) $\Lambda$ é hereditária.*

**Demonstração.** $2 \Rightarrow 1$ Clara.

$1 \Rightarrow 2$

Se $\Lambda$ é estandarmente estratificada em todas as ordens então pelo Corolário anterior existe uma ordem tal que $F(\Delta) = P^{<\infty}$ e por ser $gl\dim\Lambda < \infty$ logo $F(\Delta) = P^{<\infty} = \operatorname{mod}\Lambda \Rightarrow \Delta_i = S_i \Rightarrow Q$ não tem circuitos orientados.

Por ser estandarmente estratificada em todas as ordens e $gl\dim\Lambda < \infty$ logo é quase hereditária em todas as ordens.

$2 \Rightarrow 3$ Evidente.

$3 \Rightarrow 1$

Claro que se $\Lambda$ é quase hereditária em todas as ordens então $\Lambda$ é estandarmente estratificada em todas as ordens e tem $gl\dim\Lambda < \infty$.

$1 \Rightarrow 4$

Se $\Lambda$ é estandarmente estratificada em todas as ordens então pelo Corolário anterior existe uma ordem tal que $F(\Delta) = P^{<\infty}$ e por ser $gl\dim\Lambda < \infty$ então $F(\Delta) = P^{<\infty} = mod\Lambda$.

Pelo Artigo de Coelho, Marcos, Merklen, Platzeck [6] se $\Lambda$ é um álgebra com ideais idempotentes projetivos então $fd\Lambda \leq 1$, logo $gl\dim\Lambda = fd\Lambda \leq 1$, logo $\Lambda$ é hereditária.

$4 \Rightarrow 1$

Seja agora $\Lambda$ uma álgebra hereditária, claro que $gl\dim\Lambda < \infty$, se $e_1, ..., e_n$ uma ordem dos idempotentes, mostremos que $\Lambda$ é estandarmente estratificada nesta ordem.

Para isto provemos que $P_k \in F(\Delta), \forall k$.

Primeiro $P_n = \Delta_n \in F(\Delta)$.

Suponhamos que $P_n, P_{n-1}, ..., P_{n-k+1} \in F(\Delta)$ e provemos que $P_{n-k} \in F(\Delta)$.

Se $P_{n-k} = \Delta_{n-k}$ claro, senão temos uma seqüência $0 \to \tau_{\underset{r>n-k}{\amalg} P_r}(P_{n-k}) \to P_{n-k} \to \Delta_{n-k} \to 0$, e $\tau_{\underset{r>n-k}{\amalg} P_r}(P_{n-k})$ é projetivo, pois é submódulo de $P_{n-k}$, logo, $\tau_{\underset{r>n-k}{\amalg} P_r}(P_{n-k}) = \underset{r>n-k}{\amalg} P_r^{s_r} \in F(\Delta)$. $\square$

## 3.5 Observações e Exemplos

**Observação 3.1.** *Se $A$ e um álgebra local $F(\Delta) = Proj = P^{<\infty}$.*

**Observação 3.2.** *Podem existir ordens dos simples, onde em uma delas $F(\Delta) = Proj$ e na outra $F(\Delta) = P^{<\infty}$, sem que $A$ seja necessariamente com ideais idempotentes projetivos.*

Os seguintes exemplos confirmam a **Observação 3.2**:

**Exemplo 3.1.** *(1) Seja $A = \frac{KQ}{I}$ onde $Q$ é o carcaz*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

*e $I$ é o ideal gerado pelas relações $\beta\alpha = 0$ e $\beta^2 = 0$, na ordem $1, 2$ esta álgebra não é estandar estratificada pois $P_1 \notin F(\Delta)$, no entanto na ordem $2, 1$, $F(\Delta) = Proj$, assim $A$ não é **iip**, mas se analizarmos os módulos de dimensão projetiva finita são os projetivos, pois um módulo sobre esta álgebra tem dimensão projetiva finita se tem dimensão par como $K$ espaço e os únicos indecomponíveis com dimensão par são os projetivos. Logo $F(\Delta) = \Pr oj = P^{<\infty}$.*

*(2) Ainda no caso que existam ordens distintas tais que $F(\Delta) = \Pr oj$ e $F(\Delta) = P^{<\infty}$, $A$ não é necessariamente **iip**, como mostra o exemplo a seguir:*

*Seja $A = \frac{KQ}{I}$ onde $Q$ é o carcaz $\overset{n}{\bullet} \overset{\alpha_{n-1}}{\longrightarrow} \overset{n-1}{\bullet} \cdots\cdots \overset{2}{\bullet} \overset{\alpha_1}{\longrightarrow} \overset{1}{\bullet}$, e $I$ é o ideal gerado pelas relações $\alpha_{i+1}\alpha_i$, para $i = 1, ..., n-2$, neste caso na ordem $1, 2, ..., n$, $F(\Delta) = \Pr oj$ e na ordem $n, n-1, ..., 2, 1$, $F(\Delta) = P^{<\infty}$, mas esta álgebra não é estandarmente estratificada em todas as ordens pois é de dimensão global finita e se for estandarmente estratificada seria hereditária pelo Corolário, também podemos ver diretamente que não é estandarmente estratificada na ordem $n, 1, 2, ..., n-1$.*

# Capítulo 4

# Estudo de alguns casos particulares

Neste capítulo estudaremos alguns casos particulares de álgebras, começamos com as álgebras com só dois simples não isomorfos e olharemos quando estas são estandarmente estratificadas. Em seguida estudaremos as álgebras triangulares. Posteriormente veremos que para as álgebras de radical quadrado zero sempre que não possuam circuitos verdadeiros se alcançam os extremos para a estratificação, isto é existem ordens tal que $F(\Delta) = Proj$ e $F(\Delta) = P^{<\infty}$. Finalmente veremos uma relação entre inclinação e estratificação que nos permite ver o conjunto parcialmente ordenado (poset) das estratificações como um subposet do poset dos módulos inclinantes.

## 4.1 O caso de dois simples não isomorfos

Como um primeiro caso estudaremos o caso em que $A$ é uma álgebra com só dois simples não isomorfos, isto é o mesmo que dizer que um sistema completo de idempotentes ortogonais e primitivos tem só dois idempotentes $e_1, e_2$. De modo que nesta seção todas as álgebras são do tipo $A = KQ/I$ onde $Q$ é um carcaz finito com dois vértices e $I$ é um ideal admissível.

Com a ordenação acima, temos:

$\Delta_1 = \frac{P_1}{\tau_{P_2}(P_1)}$ e $\Delta_2 = P_2$.

**Proposição 4.1.** *Se $Q$ tem só dois vértices associados a idempotentes $e_1, e_2$ então $A$ é estandarmente estratificada com esta ordem* $\Leftrightarrow \tau_{P_2}(P_1) \simeq P_2^{n_2}$.

**Demonstração.** $\Leftarrow$ Para ver que $A$ é estandarmente estratificada, temos que ver que $P_1 \in F(\Delta)$, como $\Delta_1 \in F(\Delta)$ e $\tau_{P_2}(P_1) \simeq P_2^{n_2} \in F(\Delta)$ pois $\Delta_2 = P_2$ então $P_1 \in F(\Delta)$ pois sempre vale que $F(\Delta)$ é fechada para extensões e temos a seguinte seqüência exata: $0 \longrightarrow \tau_{P_2}(P_1) \longrightarrow P_1 \longrightarrow \Delta_1 \longrightarrow 0$.

$\Rightarrow$

Como $P_1, \Delta_1 \in F(\Delta)$ concluímos que $\tau_{P_2}(P_1) \in F(\Delta)$, pois por ser $A$ estandarmente estratificada, sabemos que $F(\Delta)$ é resolvente.

Existe um epimorfismo $P_2^n \longrightarrow \tau_{P_2}(P_1)$, logo $Top\tau_{P_2}(P_1) = S_2^n$.

Sabemos que existe um epimorfismo $\tau_{P_2}(P_1) \longrightarrow \Delta_1$ ou $\Delta_2$.

Mas $\Delta_1$ não pode ser pois $Top\Delta_1 = S_1$,então $\tau_{P_2}(P_1) \longrightarrow P_2 \longrightarrow 0$ cinde $\Rightarrow \tau_{P_2}(P_1) \simeq P_2^{n_2}$.

$\square$

Seja $P_1 = Ae_1$ e $P_2 = Ae_2$ então $Tr(Ae_2, A) = Tr(Ae_2, P_1 \sqcup P_2) \supset Tr(Ae_2, P_1) \sqcup Tr(Ae_2, P_2)$ , claramente $Tr(Ae_2, P_2)$ é projetivo.

Lembremos que $\tau_{Ae_i}(M) = Ae_iM$, de onde concluímos que $\tau_{P_2}(P_1)$ é o ideal gerado pelos caminhos de 1 a 2.

**Proposição 4.2.** *As seguintes condições são equivalentes*

*(1) $A$ é estandarmente estratificada na ordem $e_1, e_2$.*

*(2) $\tau_{P_2}(P_1) = Tr(P_2, P_1) \simeq P_2^r$.*

*(3) $Tr(P_2, A) \simeq P_2^m$.*

*(4) $Tr(P_2, A)$ é projetivo.*

*(5) $Ae_2A$ é projetivo.*

**Demonstração.** Claramente $1 \Leftrightarrow 2$ (Proposição).

$3 \Rightarrow 4$ Nada a fazer

$4 \Rightarrow 3$

Como $Tr\,(P_2, A)$ é projetivo e existe um epimorfismo $P_2^t \to Tr\,(P_2, A)$ para algum $t$, este epimorfismo cinde e usando Krull-Schmidt e o fato de que $P^2$ é indecomponível segue a afirmação.

$2 \Leftrightarrow 3$ Esta equivalência é uma conseqüência da observação anterior.

$5 \Leftrightarrow 4$ Claro pois $Tr\,(Ae_2, A) = Ae_2A$. □

Já sabemos que $A$ é estandarmente estratificada com as duas ordens se e só se $A$ é **iip** ( de ideais idempotentes projetivos) com dois vértices.

Aqui temos duas possibilidades para uma álgebra com dois simples não isomorfos:

(1) Não existem circuitos verdadeiros.

(2) Existem circuitos verdadeiros.

No primeiro caso, como não existem circuitos verdadeiros então existe uma ordem tal que $F(\Delta) = Proj$. Como não existem circuitos verdadeiros, denotemos por 1 o vértice que é a origem das flechas não laços e por 2 seu final.

Agora se $\tau_{P_2}(P_1)$ é projetivo então a álgebra é **iip**.

Logo o problema se reduz a ver quando $\tau_{P_2}(P_1)$ é projetivo e para isso temos que ter que tem que em $P_1$ toda classe de caminho que chegue ao vértice 2, se complete a $P_2$, isto é $A\gamma \simeq P_2$, isto para garantir que $\tau_{P_2}(P_1)$ é projetivo, logo não pode haver relações começando em 1 tal que 2 seja um vertice do meio do camniho.

Vejamos um exemplo de cada um dos casos anteriores:

**Exemplo 4.1.** • *(a) Seja a álgebra dada pelo carcaz* $\overset{1}{\bullet} \rightrightarrows \overset{2}{\bullet}$.
*Na ordem* $1, 2$ *temos que* $\Delta_i = S_i$, *logo* $F(\Delta) = modA$.
*Na ordem* $2, 1$ *temos que* $\Delta_i = P_i$, *logo* $F(\Delta) = Proj$.

- *(b) Seja* $A = \frac{KQ}{I}$ *onde* $Q$ *é o carcaz*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

*e* $I$ *é dado por* $\beta\alpha = 0$ *e e* $I$ *é dado por* $\beta^2 = 0$.

*Na ordem* $1,2$ *temos que* $\Delta_1 = S_1$ *e* $\Delta_2 = P_2$*, logo não é estandarmente estratificada.*
*Na ordem* $2,1$ *temos que* $\Delta_i = P_i$*, logo* $F(\Delta) = Proj$.

Se o carcaz tem circuitos verdadeiros não existe uma ordem tal que $F(\Delta) = Proj$, logo a álgebra não pode ser **iip**. Neste caso existe no máximo uma ordem que torna a álgebra estandarmente estratificada. Isto ocorre se e só se um dos módulos $\tau_{P_2}(P_1)$ ou $\tau_{P_1}(P_2)$ é projetivo.

Estudemos o módulo $\tau_P(Q)$, onde $P = Ae$ e $Q = Af$.

Temos que :
$\frac{\tau_P(Q)}{rad\tau_P(Q)} = \frac{AeAf}{rAeAf}$ onde $r = radA$.

$\frac{AeAf}{rAeAf} = \frac{(A_0+r)(eAf)}{rAeAf}$.

Onde $A_0$ é o conjunto dos vértices e $A_1$ é o conjunto das flechas.

Agora se $x \in (A_0+r)(eAf)$ então $x = (a_0+m)(e\lambda f) = a_0(e\lambda f) + m(e\lambda f) \in A_0eAf + reAf$, assim

$$\frac{(A_0+r)(eAf)}{rAeAf} = \frac{A_0eAf+reAf}{rAeAf} = \frac{A_0eAf}{A_0eAf \cap rAeAf}$$

$$= \frac{eAf}{eAf \cap reAf} = \frac{erf}{erf \cap rerf}$$

Agora $r = \frac{r}{r^2} \amalg r^2$ como espaço vetorial e $\frac{r}{r^2}$ é o espaço vetorial gerado pelas classes das flechas módulo $r^2$.

Denotemos $eA_1f$ o conjunto das flechas de $f$ a $e$, assim

$\frac{erf}{erf \cap rerf} = \frac{eA_1 f \amalg er^2 f}{erf \cap rerf} = eA_1 f \amalg \frac{er^2 f}{erf \cap rerf}$

Agora $erf \cap rerf = ererf$

A inclusão $ererf \supset erf \cap rerf$ , é clara, pois $ererf \subset rerf$ e $ererf \subset erf$.

Para ver a inclusão $erf \cap rerf \subset ererf$, seja $x \in erf \cap rerf$ então $\begin{cases} x \in erf \\ x \in rerf \end{cases}$

Se $x \in erf$ então $x = ex$, se $x \in rerf$ então $x = ex \in ererf$.

Logo $eA_1 f \amalg \frac{er^2 f}{erf \cap rerf} = eA_1 f \amalg \frac{er^2 f}{ererf}$, ou seja $\frac{\tau_P(Q)}{rad\tau_P(Q)} = eA_1 f \oplus \frac{er^2 f}{ererf}$

Assim $\tau_P(Q) = A(eA_1 f) + A\frac{er^2 f}{ererf}$

Em nosso caso $\tau_{P_2}(P_1) = A(eA_1 f) + A\frac{er^2 f}{ererf}$, tomando por $e, f$ os idempotentes correspondentes a $P_1, P_2$ respectivamente, vejamos que significa isto para as relações no carcaz.

$\tau_{P_2}(P_1)$ é projetivo se só se $AeA_1 f$ é projetivo , ou seja $\oplus Ae\alpha f \simeq P_2$, isto é se $\lambda(e\alpha f) = 0$ então $\alpha = 0$.

Se $\tau_{P_2}(P_1)$ não é projetivo, então existem $\beta_1, \ldots, \beta_t$ caminhos não nulos em $Ae$, isto é começando em $e$, tais que $\beta_1\alpha_1 + \cdots + \beta_t\alpha_t = 0$, para $\alpha_1, \ldots, \alpha_t$ flechas em $A_1 f$.

Vejamos alguns exemplos de álgebras com dois simples não isomorfos e um circuito verdadeiro que são estandarmente estratificada em uma ordem.

**Exemplo 4.2.**

- *Seja* $A = \frac{KQ}{I}$ *onde* $Q$ *é o carcaz* $1\bullet \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\leftrightarrows}} \bullet 2$ *e* $I$ *é dado por* $\beta\alpha = 0$, *esta álgebra é estandarmente estratificada na ordem* $1, 2$.

- *Seja* $A = \frac{KQ}{I}$ *onde* $Q$ *é o carcaz* $1\bullet \begin{matrix} \overset{\alpha}{\rightarrow} \\ \overset{\beta}{\leftarrow} \\ \overset{\gamma}{\rightarrow} \end{matrix} \bullet 2$ *e* $I$ *é dado por* $\beta\alpha = 0, \beta\gamma = 0$, *esta álgebra é estandarmente estratificada na ordem* $1, 2$.

Resumindo para uma álgebra com dois simples não isomorfos temos:

- Se o carcaz de $A$ não tem circuitos verdadeiros e não tem relações começando em 1 tal que 2 seja um vertice do meio do camniho, sendo 1 a origem das flechas não laços e 2 seu término, a álgebra é **iip**. Veja **Exemplo 4.1** (a).

- Se o carcaz de $A$ não tem circuitos verdadeiros e tem relações começando em 1 tal que 2 seja um vertice do meio do camniho, sendo 1 a origem das flechas não laços e 2 seu término, a álgebra só é estandarmente estratificada na ordem $2, 1$ e $F(\Delta) = Proj$. Veja **Exemplo 4.1 (b)**.

- Se o carcaz de $A$ tem circuitos verdadeiros, a álgebra pode ser estandarmente estratificada numa ordem só ou não é estandarmente estratificada em nenhuma ordem, dependendo de se um dos $\tau_{P_2}(P_1)$ ou $\tau_{P_1}(P_2)$ é projetivo, ou se nenhum deles é projetivo. Veja **Exemplo 4.2**

## 4.2 O caso das álgebras na forma triangular

Estudamos agora as álgebras na forma triangular:

Diremos que uma álgebra é "critica" se é estandarmente estratificada numa só ordem.

Seja $R = \begin{pmatrix} U & 0 \\ M & V \end{pmatrix}$, sabemos que se $R$ é estandarmente estratificada $\Leftrightarrow$ $V$ é estandarmente estratificada e $M \in F_V(\Delta)$, [15].

Diremos que uma ordem do simples é "boa" se $R$ é estandarmente estratificada nessa ordem

Como conseqüência temos a seguinte

**Proposição 4.3.** *Seja $U$ local e $V$ com uma ordem boa $S_1, ..., S_t$ então $S_1, ..., S_t, S_U$ é boa para $R = \begin{pmatrix} U & 0 \\ M & V \end{pmatrix} \Leftrightarrow M \in F_V(\Delta)$.*

**Corolário 4.1.** *Seja $U$ local, se $M \in F_V(\Delta)$. Então $S_U, S_1, ..., S_t$ é boa se e só se $R$ não é critica.*

**Demonstração.** A necessidade segue do fato de que $S_1, ..., S_t, S_U$ e $S_U, S_1, ..., S_t$ são duas ordens boas distintas.

Para ver a outra implicação, como $M \in F_V(\Delta)$ então $S_1, ..., S_t, S_U$ é boa.

Agora $P_U = S_U$, pois $e_U$ é fonte.

Além disso $\Delta_U = \frac{P_U}{\tau_{\amalg P_j} P_U} = S_U$

Cada $\Delta_i = \frac{P_i}{\amalg \tau_{P_J} P_i + \tau_{P_U} P_i}$ claro $\tau_{P_U} P_i = 0$ pois $e_U$ é fonte.

Logo $P_1, ..., P_t$ são filtrados em $\Delta_U, \Delta_1, ..., \Delta_t$, só falta ver que $P_U$ é filtrado em $\Delta_U, \Delta_1, ..., \Delta_t$, mas temos uma seqüência $0 \longrightarrow M \longrightarrow P_U \longrightarrow S_U \longrightarrow 0$ e como $M \in F_V(\Delta)$ , então temos que $P_U$ é filtrado em $\Delta_U, \Delta_1, ..., \Delta_t$, logo a ordem $S_U, S_1, ..., S_t$ e outra ordem boa. $\square$

## 4.3 Caso de radical quadrado zero

Seja $A = \frac{KQ}{J^2}$, onde $Q$ é um carcaz finito, conexo e $J$ é o ideal gerado pelas flechas, isto é o mesmo que dizer que $A$ é a álgebra com radical quadrado zero, cujo carcaz é $Q$.

**Exemplo 4.3.** *Seja $A = \frac{KQ}{J^2}$, onde $Q$ é o carcaz $\underset{1}{\bullet} \leftrightarrows \underset{2}{\bullet} \rightarrow \underset{3}{\bullet}$ e $J$ é o ideal gerado pelas flechas, podemos mostrar que não é estandarmente estratificada em nenhuma ordem.*

Provaremos agora alguns lemas:

**Lema 4.1.** *Seja $A = \frac{KQ}{J^2}$, se existe um circuito contendo $x$, então $pdS_x = \infty$.*

**Demonstração.** $A = \frac{KQ}{J^2}$ é uma álgebra de Koszul e cada simples $S_0$ tem a seguinte resolução projetiva minimal $\ldots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow S_0 \longrightarrow 0$ onde
$P_n = A \underset{A_0}{\otimes}$ <caminhos de comprimento $n$ terminando em $v_0$ em $KQ$ >.[5]

Logo se $pdS_0 < \infty$, existe $t$ tal que para $n \geq t, P_n = 0$.

Logo existe $t$ tal que não existem caminhos de comprimento $\geq t$ terminando em $v_0$.

Logo $v_0$ não está num circuito. $\square$

**Lema 4.2.** *Seja $A = \frac{KQ}{J^2}$, e suponhamos que $Q$ tem um circuito verdadeiro. Seja $S_1, ..., S_m$ uma ordem dos simples, então existe um vértice $a_1$ tal que $pd\Delta(a_1) = \infty$.*

**Demonstração.** Seja $S_1, ..., S_m$ a ordem dada e sejam $a_1, ..., a_n$ os vértices de um circuito verdadeiro.

Sem perda de generalidade podemos assumir $a_1 < a_2$ e que existe uma flecha $a_1 \longrightarrow a_2$.

Temos uma seqüência $0 \longrightarrow \underset{\substack{a_1 \longrightarrow a \\ a_1 < a}}{\amalg} S_a \longrightarrow P_{a_1} \longrightarrow \Delta_{a_1} \longrightarrow 0$ e $pd\Delta_{a_1} < \infty \Leftrightarrow pdS_a < \infty$, $\forall a_1 < a$ com $a_1 \longrightarrow a$.

Em particular se $pd\Delta_{a_1} < \infty \Rightarrow pdS_{a_2} < \infty$, e resultado segue-se do lema prévio. □

Podemos então provar o seguinte resultado:

**Proposição 4.4.** *Seja $A = \frac{KQ}{J^2}$, temos que as seguintes condições são equivalentes:*

*(1) Existe uma ordem onde $F(\Delta) = Proj$.*

*(2) $Q$ não tem circuitos verdadeiros.*

*(3) $A$ é estandarmente estratificada em alguma ordem.*

**Demonstração.** $1 \Leftrightarrow 2$
Já está provado na **Proposição 2.2**

$1 \Rightarrow 3$ Esta implicação é clara.

$2 \Rightarrow 1$
Esta implicação é conseqüência do **Lema 4.2**, pois se $A$ é estandarmente estratificada então $F(\Delta) \subset P^{<\infty}$, logo $pd\Delta_i < \infty, \forall i$. □

A seguinte pergunta é bastante natural

**Pergunta:** Existe alguma ordem dos vértices tal que $F(\Delta) = P^{<\infty}$?

Se existe alguma ordem dos vértices tal que $F(\Delta) = P^{<\infty}$, claro que é estandarmente estratificada nesta ordem, pela proposição anterior, $Q$ não tem circuitos verdadeiros.

Como $Q$ não tem circuitos verdadeiros então $A$ tem dimensão global infinita se e só se não tem laços.

**Caso1:**

Se o carcaz de $A$ não tem laços, então $gl \dim A < \infty$, e por o Corolário 2.6 do artigo "Modules of finite projective dimension for standardly stratified algebras" de Platzeck e

Reiten,[17] temos que na ordem tal que $Hom(P_i, P_j) = 0, i < j$ temos que $F(\Delta) = P^{<\infty} = modA$. Isto pode mostrar-se também diretamente, tomando a ordem contaria a que da $F(\Delta) = Proj$, como não tem laços nesta ordem resulta ser $\Delta_i = S_i$ e assim $F(\Delta) = modA = P^{<\infty}$

**Caso 2:** Se $Q$ tem laços e nenhum projetivo é simples, na ordem dos simples tal que $F(\Delta) = Proj$ temos em cada $\Delta_i$ um caminho não nulo começando em $i$ e tal que composto com todo caminho não trivial é zero, isto porque $rad^2 A = 0$, então pelo Teorema 2.5 do artigo "Modules of finite projective dimension for standardly stratified algebras"de Platzeck e Reiten [17], temos que $F(\Delta) = Proj = P^{<\infty}$. Um caso particular deste é quando tem laço em todo vértice.

**Corolário 4.2.** *Se $A$ é uma álgebra de radical quadrado zero sem circuitos verdadeiros e tal que não tem nenhum projetivo simples (em termos do carcaz, que em todo poço tenha laço) os únicos módulos de dimensão projetiva finita são os projetivos.*

Falta analisarmos o caso em que $Q$ tem laços e além disso $A$ tem um módulo projetivo simples.

**Caso 3:** Vejamos agora que o caso em que há laços e um projetivo simples também existe uma ordem tal que $F(\Delta) = P^{<\infty}$ Dizer que $\Lambda$ tem um projetivo simples é o mesmo que dizer que seu carcaz tem um poço.
Provaremos que existe uma ordem tal que $F(\Delta) = P^{<\infty}$ por indução no número de vértices.
Primeiro quando $Q$ tem dois vértices, $A$ é **iip** e portanto tem uma ordem tal que $F(\Delta) = P^{<\infty}$. Seja agora $A = \frac{KQ}{I}$ e $v$ um poço.
Consideremos $A' = \frac{A}{<v>}$, isto é $A' = \frac{KQ'}{I'}$, onde $Q'$ é o carcaz obtido de $Q$ suprimindo o vértice $v$ e $I'$ o ideal obtido de $I$ suprimindo as relações que chegam ao vértice $v$.
Claramente a todo $M \in modA$ podemos associar um módulo sobre $A'$, este é $\frac{M}{<v>M}$
Provaremos agora que

$$pd_A M < \infty \iff pd_{A'} \frac{M}{< v > M} < \infty$$

Primeiro provaremos a implicação $\Rightarrow$ Esta é conseqüência da seguinte seqüência exata $0 \to vM \to M \to \frac{M}{<v>M} \to 0$. Claramente $vM \simeq S_v{}^{dimvM}$ que é projetivo por ser $v$ poço. Agora como $\frac{M}{<v>M} \simeq \frac{A}{<v>} \otimes_A M$ e temos que $Ext^i{}_{A'}(\frac{A}{<v>} \otimes_A M, \ ) = Ext^i{}_A(M, \ )$. Temos então que $pd_A M < \infty \Rightarrow pd_{A'} \frac{M}{<v>M} < \infty$. Vejamos agora que se $M \in modA'$, temos que $pd_{A'} M < \infty \Rightarrow pd_A M < \infty$. Para provar isto façamos indução na $pd_{A'} M$.

Se $pd_{A'}M = 0, M$ é projetivo. Se $M$ é projetivo indecomponível, $M = A'e_w$, sendo $w$ um vértice de $Q$. Temos duas possibilidades $w$ vizinho de $v$ ou não. Se $w$ não é vizinho de $v$ então $A'e_w = Ae_w$, logo $pd_A M = 0$. Se $w$ é vizinho de $v$, temos a seqüência $0 \to S_v{}^t \to Ae_w \to A'e_w \to 0$, como $S_v{}^t$ é $A$-projetivo, então $pd_A A'e_w = 1$. Suponhamos agora que $pd_{A'}M = n < \infty$. Temos a seqüência $0 \to \Omega_{A'}(M) \to P_{A'}(M) \to M \to 0$. Como $pd_{A'}\Omega_{A'}(M) < n$, por hipotesis de indução $pd_A\Omega_{A'}(M)$ é finita, também como $P_{A'}(M)$ é $A'$ projetivo, temos que $pd_A P_{A'}(M)$ é finita, logo $pd_A(M)$ é finita. Assim temos provado o lema seguinte:

**Lema 4.3.** *As seguintes condições são equivalentes:*

*(1)* $pd_A(M) < \infty$

*(2)* $pd_A \frac{M}{vM} < \infty$

*(3)* $pd_{A'} \frac{M}{vM} < \infty$

Assim temos que $P^{<\infty}(A') \subset P^{<\infty}(A)$

Temos também que como $v$ é poço e portanto $P_v$ simples, qualquer que seja a ordem que tomarmos em $A$, tem-se que $\Delta_v = P_v = S_v$.

Assumamos agora que $A'$ tem uma ordem $S_1, \ldots, S_t$ tal que $F(\Delta) = P^{<\infty}(A')$.

Tomemos em $A$ a ordem que obtemos ao colocar $v$ ao final, isto é $S_1, \ldots, S_t, S_v$.

Pode-se ver que nesta ordem temos $\Delta_i(A) \simeq \Delta_i(A')$ para $i = 1, \ldots, t$.

Seja agora $M$ um $A$-módulo tal que $pd_A(M) < \infty$ e tomemos a seqüência exata $0 \to vM \to M \to \frac{M}{vM} \to 0$.
Claramente $vM = S_v{}^{dimvM} = P_v{}^{dimvM} = \Delta_v{}^{dimvM} \in F_A(\Delta)$.

Por outro lado $\frac{M}{vM}$ tem $pd$ finita como $A'$-módulo, logo $\frac{M}{vM} \in F_{A'}$ mas como $\Delta_i(A) \simeq \Delta_i(A')$ para $i = 1, \ldots, t$ então $\frac{M}{vM} \in F_A$.
Logo $M \in F_A$.

Assim temos provado a seguinte

**Proposição 4.5.** *Se* $A = \frac{KQ}{J^2}$, *existe uma ordem onde* $F(\Delta) = P^{<\infty}$ *se e só se* $Q$ *não tem circuitos verdadeiros.*

Ou seja juntando os enunciados da **Proposição 4.4** e da **Proposição 4.5**, temos o seguinte Teorema que expresa que se uma álgebra com radical quadrado zero é estandarmente estratificada numa ordem, então existem ordens tais que $F(\Delta)$ é o mais pequeno e o mais grande posivel respeitivamente.

**Teorema 4.1.** *Seja $A = \frac{KQ}{J^2}$, temos que as seguintes condições são equivalentes:*

*(1) Existe uma ordem onde $F(\Delta) = Proj$.*

*(2) Existe uma ordem onde $F(\Delta) = P^{<\infty}$*

*(3) $Q$ não tem circuitos verdadeiros.*

*(4) $A$ é estandarmente estratificada em alguma ordem.*

## 4.4 Relação entre inclinação e estratificação

Seja $T$ um módulo inclinante generalizado, isto é

- a) $pdT < \infty$.
- b) $Ext^i(T, T) = 0$, $\forall i \geq 0$.
- c) Existe uma seqüência $0 \longrightarrow A \longrightarrow T_0 \longrightarrow T_1 \longrightarrow .... \longrightarrow T_r \longrightarrow 0$, com $T_i \in addT$, $\forall i$.

Na classe do todos os módulos inclinantes para uma álgebra de Artin a seguinte relação de ordem parcial tem sido estudada por Happel e Unger $T_1 \leqslant T_2 \Leftrightarrow T_1^{\perp} \subseteq T_2^{\perp}$, [12].

Para esta relação existe um $T$ é minimal se e somente se $P^{<\infty}$ é contravariantemente finita.

Seja $A$ uma álgebra para uma ordenação dos simples $S_1, ..., S_n$ , temos os módulos estandar $\Delta_1, ..., \Delta_n$ e os módulos filtrados em $\Delta$, os $F(\Delta)$.

$Y(\Delta) = \{Y/Ext^1(X, Y) = 0, X \in F(\Delta)\}$

Se $A$ é estandarmente estratificada, isto é $A \in F(\Delta)$, sabemos que vale $Ext^i(X.Y) = 0, \forall X \in F(\Delta), Y \in Y(\Delta)$.

Neste caso temos um módulo inclinante $T \in addW = F(\Delta) \cap Y(\Delta)$

Claro que $Y(\Delta) \subset T^{\perp}$pois $T \in F(\Delta)$

Num artigo de Auslander -Reiten prova-se que $Y(\Delta) = T^{\perp}$.

Se temos duas ordenações dos simples tais que

$F_1(\Delta) \subset F_2(\Delta) \Rightarrow Y_2(\Delta) \subset Y_1(\Delta)$

(Se $Y \in Y_2(\Delta) \Rightarrow Ext^1(X,Y) = 0, X \in F_2(\Delta)$, como $F_1(\Delta) \subset F_2(\Delta) \Rightarrow Ext^1(X,Y) = 0, X \in F_1(\Delta) \Rightarrow Y \in Y_1(\Delta)$).

Temos então $Y_2(\Delta) \subset Y_1(\Delta)$ , e como $Y_i(\Delta) = T_i^{\perp}$ então $T_2^{\perp} \subseteq T_1^{\perp}$, ou seja a ordem entre as diferentes formas que uma álgebra pode ser estandar estratificada induz uma ordem inversa entre os módulos inclinantes correspondentes a ditas estratificações.

Sabemos que $Proj \subset F(\Delta) \subset modA$, além disso $F(\Delta) \subset P^{<\infty}$.

Se $F(\Delta) = P^{<\infty}$, ou seja $F(\Delta)$ é máximo então $P^{<\infty}$ é contravariantemente finita, pois $F(\Delta)$ é, logo $T$ é mínimo.

Se $F(\Delta) = Proj$, ou seja $F(\Delta)$ é mínimo então $Y(\Delta) = \{Y/Ext^1(X,Y) = 0, X \in F(\Delta)\} = modA$, logo $F(\Delta) \cap Y(\Delta) = Proj$, portanto $T = P_1 \oplus ... \oplus P_n = A$, logo $T^{\perp} = A^{\perp} = modA$ e concluímos que $T$ é máximo.

Logo temos que o poset dado pelas diferentes formas que uma álgebra pode ser estandar estratificada é um subposet do poset dos módulos inclinantes.

**Observação 4.1.** *Temos vários casos em que se alcançam os dois extremos*

*(1) As Hereditárias*

*(2) As Quase Hereditárias*

*(3) As IIP*

*No caso de radical quadrado zero acabamos de ver na seção prévia que se o carcaz não tem circuitos verdadeiros se alcançam o mínimo e o máximo.*

É interessante ver quando os inclinantes estão associados a estratificação.

**Observação 4.2.** *No caso das álgebras hereditárias dadas pelos carcaz* $2\bullet \longrightarrow \bullet 1$ *e* $3\bullet \longrightarrow 2\bullet \longrightarrow \bullet 1$ *todo inclinante esta associado a uma estratificação, mas na álgebra hereditária dada pelo carcaz*

$$\begin{tikzcd}
1\bullet \arrow[dr] & \\
& \bullet 3 \\
2\bullet \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

*o inclinante dado pelo módulo* $T = P_1 \oplus P_2 \oplus I_3$ *não esta associado a nenhuma estratificação.*
*Na álgebra de Kronecker, ou seja a álgebra hereditária dada pelo carcaz* $1\bullet \rightrightarrows \bullet 2$ *só temos duas estratificações a dada pelos projetivos e a dada pelos injetivos mas temos infinitos inclinantes.*
*A álgebra dada pelo carcaz* $1\bullet \rightleftarrows \bullet 2$ *com radical quadrado zero não é estandarmente estratificada em nenhuma ordem mas tem um único inclinante, o trivial dado pela soma dos projetivos.*

# Capítulo 5

# Categorias Derivadas e Complexos em $F(\Delta)$

Neste Capítulo apresentamos primeiro um resumo de alguns conceitos da teoria de Categorias Derivadas, no sentido de fazer mais autocontidos os resultados deste capítulo, um estudo aprofundado e as demonstrações dos resultados podem ser encontradas por exemplo em [10],[9],[11],[21]. Finalmente expomos um resultado sobre os complexos na subcategoria $F(\Delta)$.

Começamos este Capítulo com a definição de Categoria Triangulada, temos sempre em mente os exemplos $K(\mathcal{A})$ e $D(\mathcal{A})$ para um categoria abeliana $\mathcal{A}$, onde $K(\mathcal{A})$ é a categoria quociente pelo ideal de homotopia da categoria dos complexos em $\mathcal{A}$ e $D(\mathcal{A})$ sua localização. Depois das definições e propriedades mais conhecidas da teoria de categorias trianguladas, passaremos a definir e estudar esses exemplos.

## 5.1 Categorias trianguladas

Seja $K$ uma categoria aditiva, $T : K \longrightarrow K$, um automorfismo, isto é uma auto equivalência, $T^{-1} \circ T = T \circ T^{-1} = id$.

Definimos triângulos em $K$, como uma tripla de objetos $(A, B, C)$, junto com uma tripla de morfismos $(u, v, w)$, as seguintes três notações para triângulos aparecem na literatura

- $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} TA$

- $$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "w"'] & \\ A \arrow[rr, "u"'] & & B \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd}$$

- $(A, B, C, u, v, w)$

Um morfismo de triângulos de $(A, B, C, u, v, w)$ para $(A', B', C', u', v', w')$ é uma tripla de morfismos $(f, g, h)$ tal que faz o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \xrightarrow{w} & TA \\ f \downarrow & \circlearrowleft & g \downarrow & \circlearrowleft & h \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow Tf \\ A' & \xrightarrow[u']{} & B' & \xrightarrow[v']{} & C' & \xrightarrow[w']{} & TA' \end{array}$$

**Definição 5.1.** *Uma categoria $K$ aditiva é uma categoria triangulada se existe um automorfismo $T$ de $K$ e uma família de triângulos chamados exatos tal que*

- *TR 1:*

  *(1) A família de triângulos exatos é fechada para isomorfismos.*

  *(2) Todo $A \xrightarrow{u} B$ forma parte de um triângulo exato, da forma $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} TA$.*

  *(3) $A \xrightarrow{1_A} A \longrightarrow 0 \longrightarrow TA$ é triângulo exato.*

- *TR 2: Translações:*

  *Se $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} TA$ é exato então são exatos os triângulos $B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} TA \xrightarrow{-Tu} TB$ e $T^{-1}C \xrightarrow{-T^{-1}w} A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$.*

- *TR 3: A existência de $f, g$ implica que existe $h$ que faz o seguinte diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & C & \xrightarrow{w} & TA \\ f \downarrow & \circlearrowleft & g \downarrow & \circlearrowleft & \exists h \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow Tf \\ A' & \xrightarrow[u']{} & B' & \xrightarrow[v']{} & C' & \xrightarrow[w']{} & TA' \end{array}$$

- *TR 4 Axioma do Octaedro. Consideremos os triângulos exatos* $(X, Y, Z', u, i, i')$, $(Y, Z, X', v, j, j')$, $(X, Z, Y', v, k, k')$, *então existem morfismos* $f : Z' \to Y'$ *e* $g : Y' \to X'$ *tal que o seguinte diagrama comuta e a terceira linha é um triângulo exato*

$$
\begin{array}{ccccccccc}
T^{-1}Y' & \xrightarrow{T^{-1}k'} & X & \xrightarrow{1_X} & X & & & & \\
T^{-1}g \downarrow & & u \downarrow & & \downarrow vu & & & & \\
T^{-1}X' & \xrightarrow{T^{-1}j'} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{j} & X' & \xrightarrow{j'} & TY \\
 & & i \downarrow & & k \downarrow & & 1_{X'} \downarrow & & \downarrow Ti \\
 & & Z' & \xrightarrow{f} & Y' & \xrightarrow{g} & X' & \underset{j'Ti}{\rightarrow} & TY' \\
 & & i' \downarrow & & \downarrow k' & & & & \\
 & & TX & \underset{1_{TX}}{\rightarrow} & TX & & & &
\end{array}
$$

**Observação 5.1.** *A partir de agora a palavra triângulo significará triângulo exato, e o adjetivo exato poderá o não ser usado.*

**Observação 5.2.** *(1) Se* $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} TA$ *é exato então* $vu = 0 = wv$.

*(2) Lema dos Cinco:*

*Se* $(f, g, h)$ *é um morfismo de triângulos com* $f, g$ *isomorfismos então* $h$ *também é isomorfismo.*

**Proposição 5.1.** *Sejam* $K$ *uma categoria triangulada e* $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ *um triângulo exato. Então as seguintes seqüências são exatas*

$$... \to Hom_K(U, T^iX) \underset{Hom_K(U,T^iu)}{\longrightarrow} Hom_K(U, T^iY) \underset{Hom_K(U,T^iv)}{\longrightarrow} Hom_K(U, T^iZ) \underset{Hom_K(U,T^iw)}{\longrightarrow} Hom_K(U, T^{i+1}X) \to ...$$

$$... \to Hom_K(T^{i+1}X, U) \underset{Hom_K(T^iw,U)}{\longrightarrow} Hom_K(T^iZ, U) \underset{Hom_K(T^iv,U)}{\longrightarrow} Hom_K(T^iY, U) \underset{Hom_K(T^iu,U)}{\longrightarrow} Hom_K(T^iX, U) \to ...$$

**Corolário 5.1.** *(1) Todo morfismo* $f : A \to B$ *determina um triângulo exato, no sentido que a menos de isomorfismo de triângulos existe um único triângulo* $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} TA$.

*(2) Todo triângulo está determinado por um qualquer dos seus morfismos, no sentido que se dois triângulos tem o mesmo morfismo na mesma posição são isomorfos.*

**Proposição 5.2.** *Sejam* $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ *e* $X' \xrightarrow{u'} Y' \xrightarrow{v'} Z' \xrightarrow{w'} TX'$ *dois triângulos e um morfismo* $g : Y \to Y'$, *então* $\exists f, h$ *tal que* $(f, g, h)$ *é morfismo de triângulos* $\Leftrightarrow v'gu = 0$.

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & TX \\ f\downarrow & \circlearrowleft & g\downarrow & \circlearrowleft & h\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow Tf \\ X' & \xrightarrow[u']{} & Y' & \xrightarrow[v']{} & Z' & \xrightarrow[w']{} & TX' \end{array}$$

**Proposição 5.3.** *Sejam* $K$ *uma categoria triangulada e* $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ *um triângulo exato em* $K$, *saõ equivalentes:*

*(1)* $w = 0$

*(2)* $u$ *é seção, isto é existe* $u' : Y \to X$ *tal que* $u'u = 1_X$.

*(3)* $v$ *é retração, isto é existe* $v' : Z \to Y$ *tal que* $vv' = 1_Z$.

**Proposição 5.4.** *Seja* $K$ *uma categoria triangulada,* $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$ *um triângulo exato, saõ equivalentes:*

*(1) Se* $W \xrightarrow{f} Z$ *não é retração então existe* $f' : W \longrightarrow Y$ *tal que* $vf' = f$.

*(2) Se* $W \xrightarrow{f} Z$ *não é retração então* $wf = 0$.

**Lema 5.1.** *Seja* $K$ *uma categoria triangulada* $X \xrightarrow{u} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow TX$ *é triângulo exato se e só se* $u$ *é isomorfismo.*

### Funtores Cohomológicos

**Definição 5.2.**
- *Um morfismo de categorias trianguladas* $f : K' \longrightarrow K$ *é um funtor aditivo que comuta com os funtores de translações e transforma triângulos em triângulos.*

- *Dizemos que $K'$ é uma subcategoria triangulada de $K$, se $K'$ é uma subcategoria plena de $K$, a inclusão é um morfismo de categorias trianguladas e todo triângulo em $K$ com vértices em $K'$ é um triângulo em $K$.*

**Definição 5.3.** *Sejam $K$ uma categoria triangulada, $\mathcal{A}$ abeliana, dizemos que $H : K \longrightarrow \mathcal{A}$ é um funtor cohomológico covariante se para todo triângulo $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} TA$ obtém-se uma seqüência exata longa em $\mathcal{A}$ $... \xrightarrow{w^*} H(T^iA) \xrightarrow{u^*} H(T^iB) \xrightarrow{v^*} H(T^iC) \xrightarrow{w^*} H(T^{i+1}A) \xrightarrow{u^*} ...$, com $u^* = H(T^iu)$.*

**Exemplo 5.1.** *Se $K$ é uma categoria triangulada $Hom_K(X, \ ) : K \longrightarrow Ab, X \in ObjK$ é um funtor cohomológico covariante.*

**Observação 5.3.** *Se $H : K \longrightarrow \mathcal{A}$ é um funtor cohomológico covariante e definimos $K_H = \{A \in ObjK / H^i(A) = 0, \forall i\}$ onde $H^i(A) = H(T^iA)$ então temos que $K_H$ é subcategoria triangulada.*

## 5.2 Complexos e Homotopia.

Nesta seção começamos com o conceito de complexo, para posteriormente definir a categoria $K(\mathcal{A})$.

**Definição 5.4.** *Se $\mathcal{A}$ é uma categoria abeliana, $Com(\mathcal{A})$ denota a categoria de complexos de $\mathcal{A}$ a qual se define como segue*

*Objetos: São seqüências de objetos e morfismos de $\mathcal{A}$, da forma*

$$C^* : .... \longrightarrow C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} C^{n+2} \longrightarrow ... \text{ , tal que } d^{n+1} \circ d^n = 0$$

*Morfismos: Um morfismo de complexos está dado por uma seqüência de $\mathcal{A}$-morfismos*

$$\begin{array}{llcccccccc}
B^* & & ... \longrightarrow & B^n & \xrightarrow{d_B^n} & B^{n+1} & \xrightarrow{d_B^{n+1}} & B^{n+2} & \longrightarrow ... \\
\downarrow & \varphi = (\varphi_n)_{n \in Z} & & \downarrow \varphi_n & & \downarrow \varphi_{n+1} & & \downarrow \varphi_{n+2} & \\
C^* & & ... \longrightarrow & C^n & \xrightarrow{d_C^n} & C^{n+1} & \xrightarrow{d_C^{n+1}} & C^{n+2} & \longrightarrow ...
\end{array}$$

onde os quadrados são todos comutativos.

**Definição 5.5.** *Morfismos Homotópicos: Dois morfismos de complexos $\varphi$ e $\psi$ de $B^*$ a $C^*$ são ditos homotópicos, e denota-se por $\varphi \sim \psi$ se existem morfismos diagonais $h_i$ tais que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots \longrightarrow & B^n & \xrightarrow{d_B^n} & B^{n+1} & \xrightarrow{d_B^{n+1}} & B^{n+2} & \longrightarrow \ldots \\
& \downarrow \varphi_n - \psi_n & \swarrow h_{n+1} & \downarrow \varphi_{n+1} - \psi_{n+1} & \swarrow h_{n+2} & \downarrow \varphi_{n+2} - \psi_{n+2} & \\
\ldots \longrightarrow & C^n & \xrightarrow{d_C^n} & C^{n+1} & \xrightarrow{d_C^{n+1}} & C^{n+2} & \longrightarrow \ldots
\end{array}$$

**Observação 5.4.** *(1)* $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \varphi - \psi \sim 0.$

*(2) Os morfismos homotópicos a zero formam um ideal da categoria $Com(\mathcal{A})$.*

*(3) A relação $\sim$ em $Hom_{Com(\mathcal{A})}(B^*, C^*)$ é de equivalência. Esta relação de equivalência é chamada relação de equivalência de homotopia.*

**Definição 5.6.** *Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana, define-se a categoria quociente $K(\mathcal{A})$ da categoria de complexos $C(\mathcal{A}) = Com(\mathcal{A})$ como segue;*

*Os objetos $K(\mathcal{A})$ são os mesmos objetos de $C(\mathcal{A})$.*

*Os morfismos $Hom_{K(\mathcal{A})}(B^*, C^*) = \frac{Hom_{C(\mathcal{A})}(B^*, C^*)}{\sim}$ onde $\sim$ é a relação de equivalência de homotopia.*

Esta categoria $K(\mathcal{A})$ é aditiva.

**Definição 5.7. Funtor de Cohomologia.**
*Para $n \in \mathbb{Z}$ temos um funtor de cohomologia. É o funtor $H^n : Com\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, definido da forma seguinte:*

$H^n(C^*) = \frac{Kerd_C^n}{Imd_{C^{n-1}}}$ *nos objetos.*

*Como $d^n \circ d^{n-1} = 0$ então $Imd^{n-1} \subset Kerd^n$, logo para um complexo $C^*$ temos a seguinte seqüência exata $0 \to Imd_C^{n-1} \xrightarrow{i} KerImd_C^{n-1} \xrightarrow{\pi} H^n(C^*) = \frac{Kerd_C^n}{Imd_{C^{n-1}}} \to 0$, onde $i$ é a inclusão e $\pi$ a projeção no conúcleo de $i$.*

*Agora se $f : B^* \to C^*$ é um morfismo de complexos, este induz os morfismos seguintes $Imd_B^{n-1} \to Imd_C^{n-1}$ e $Kerd_B^n \to Kerd_C^n$, assim temos o seguinte diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & Imd_B^{n-1} & \xrightarrow{i} & KerImd_B^{n-1} & \xrightarrow{\pi} & H^n(B^*) & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0 \to & Imd_C^{n-1} & \xrightarrow{i} & KerImd_C^{n-1} & \xrightarrow{\pi} & H^n(C^*) & \to 0 \end{array}$$

*Logo pela propriedade universal do conúcleo existe uma aplicação $H^n(f) : H^n(B^*) \to H^n(C^*)$, esta aplicação é a imagem de $f$ pelo funtor $H^n$.*

*Usaremos as notações $H^*(C^*) = H^n(C^*)_{n\in Z}, H^*(\varphi) = H^n(\varphi)_{n\in Z}$*

Um complexo $C$ é chamado exato quando $H^*(C) = 0$.

**Observação 5.5.** *(1) $H^n$ é um funtor, ou seja, $H^n(\varphi \circ \psi) = H^n(\varphi) \circ H^n(\psi)$.*

*(2) $H^*(\varphi - \psi) = H^*(\varphi) - H^*(\psi)$. Isto é $H^n$ é um funtor aditivo.*

*(3) $\varphi \sim \psi \Rightarrow H^*(\varphi) = H^*(\psi)$, ou seja $H^*$ leva morfismos homotópicos em igualdades*

A família dos $H^n : Com(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$ fatora por $K(\mathcal{A})$, ou seja existe $\widehat{H^n}$ tornando o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} Com(\mathcal{A}) \arrow[r, "H^n"] \arrow[d, "quoc."'] & \mathcal{A} \\ K(\mathcal{A}) \arrow[ur, "\widehat{H^n}"'] & \end{tikzcd}$$

**Definição 5.8.** *Quase-isomorfismo: Um morfismo $B^* \xrightarrow{f} C^*$ em $Com(\mathcal{A})$ é dito um quase isomorfismo (**qi**) se $H^n(f)$ é isomorfismo $\forall n \in Z$.*

Pode-se ver facilmente o seguinte fato $0^*$ e $B^*$ são **qi** $\Leftrightarrow$ $B^*$ é exato.

**Definição 5.9.** *$B^* \xrightarrow{f} C^*$, $f$ é homotopismo (ou equivalência homotópica) se $\exists\, C^* \xrightarrow{g} B^*$ tal que $g \circ f \sim 1_{B^*}$ e $f \circ g \sim 1_{C^*}$.*

**Observação 5.6.** • *Duas resoluções projetivas são homotópicamente equivalentes.*

- *Se $f$ homotopismo então $f$ é **qi**.*

**Definição 5.10.** *Dado um morfismo $B^* \xrightarrow{f} C^*$, define-se o cone como o complexo que na posição $n$ é $(Cone(f))_n = C^n \oplus B^{n+1}$, ou seja*
$Cone(f) : .... \longrightarrow C^{n-1} \oplus B^n \xrightarrow{\delta} C^n \oplus B^{n+1} \longrightarrow \ldots$ , *onde* $\delta_{Cone} = \begin{pmatrix} d_C & -f \\ 0 & -d_B \end{pmatrix}$.

*Definimos ainda Cone de um complexo como $Cone(C^*) = Cone(1_{C^*})$.*

Se temos um complexo $C^* : .... \longrightarrow C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} C^{n+2} \longrightarrow$ ...,denotaremos por $C^*[-m]$ ao complexo que resulta ao transladar $m$ lugares à esquerda, isto é $(C^*[-m])_n = C_{n+m}$.

**Observação 5.7.** *Alguns autores denotam por $C^*[m]$ o complexo que nós denotamos por $C^*[-m]$.*

**Observação 5.8.** *(1) $Cone(C^*) \sim 0^*$.*

*(2) $H^n(Cone(C^*)) = 0$.*

*(3) $Cone(C^*)$ "cinde", isto é existe $h_n : C^{n+1} \to C^n$ tal que $\delta_n h_n \delta_n = \delta_n$.*

*(4) Seja $B^* \xrightarrow{f} C^*$. Existe $h$ que faz e $f$ e $0$ homotópicas se e só se $(f, -h) : ConeB^* \to C^*$ é morfismo.*

*(5) Se $B^* \xrightarrow{f} C^*$, formamos a seqüência $0 \to C^* \to Conef \to B^*[-1] \to 0$ e aplicando o funtor de cohomologia $H$ temos*

$$H^n(C^*) \underset{H^n(id,0)}{\longrightarrow} H^n(Conef) \underset{H^n(0,-id)}{\longrightarrow} H^n(B^*[-1]) \simeq H^{n+1}(B^*) \xrightarrow{H^{n+1}(f)} H^{n+1}(C^*)$$

**Corolário 5.2.** *$B^* \xrightarrow{f} C^*$ é **qi** se e só se $Conef$ é exato.*

**Definição 5.11.** *Cilindro de um morfismo $B^* \xrightarrow{f} C^*$, define-se o cilindro*
$Cilf : .... \longrightarrow B^{n-1} \oplus C^{n-1} \oplus B^n \xrightarrow{\delta} B^n \oplus C^n \oplus B^{n+1} \longrightarrow \ldots$ *onde* $\delta_{Cone} = \begin{pmatrix} d_B & 0 & -1 \\ 0 & d_C & -f \\ 0 & 0 & -d_B \end{pmatrix}$.

*Cilindro de um complexo: $CilC^* = Cil1_{C^*}$.*

**Observação 5.9.** *(1) Se* $f, g : B^* \to C^*$ *são dois morfismos e* $f \overset{h}{\sim} g \Leftrightarrow (f, g, h) : CilB^* \to C^*$ *é morfismo.*

*(2) Seja* $B^* \xrightarrow{f} C^*$, *consideremos* $\alpha : C^* \to Cilf$, *definida por* $\alpha(c) = (0, 0, c)$ *e* $\beta : Cilf \to C^*$, *definida por* $\beta(b, c, b') = f(b) + c$, *estas* $\alpha, \beta$ *são homotopismos, pois* $\beta\alpha = id_{C^*}, \alpha\beta \sim id_{Cilf}$.

**Proposição 5.5. Propriedade Universal** *Consideremos* $F : Com\mathcal{A} \longrightarrow D$ *um funtor que transforme homotopismos em isomorfismos, então* $\exists!\widehat{F}$ *tal que* $F$ *fatora através de* $K(\mathcal{A})$.

$$\begin{tikzcd} Com(\mathcal{A}) \arrow[r, "F"] \arrow[d] & D \\ K(\mathcal{A}) \arrow[ur, "\exists!\widehat{F}"'] & \end{tikzcd}$$

## 5.3 Triângulos em $K(\mathcal{A})$

Definiremos agora triângulos em $K(\mathcal{A})$ e mostraremos que esta é uma categoria triangulada

Seja $A^* \xrightarrow{u} B^*$, um morfismo em $K(\mathcal{A})$, temos a seqüência exata em $K(\mathcal{A})$

$$\begin{array}{cccccc} 0 \longrightarrow & B^* \xrightarrow{v} & Cone(u) & \xrightarrow{\delta} A^*[-1] & \longrightarrow 0 \\ & b \rightsquigarrow & (0, b) & & \\ & & (a, b) & \rightsquigarrow a & \end{array}$$

Definiremos os triângulos puros

$$\begin{tikzcd} & Cone(u) \arrow[dl, "\delta"'] & \\ A \arrow[rr, "u"'] & & B \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd}$$

ou $A^* \xrightarrow{u} B^* \xrightarrow{v} Coneu \xrightarrow{\delta} A^*[-1]$

Um triângulo em $K(\mathcal{A})$ se diz exato quando existem isomorfismos $f, g, h$ tais que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccccccc} A^* & \xrightarrow{u} & B^* & \xrightarrow{v'} & C^* & \xrightarrow{\delta'} & A^*[-1] \\ f\downarrow & \circlearrowleft & g\downarrow & \circlearrowleft & h\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow f[-1] \\ A^* & \xrightarrow[u]{} & B^* & \xrightarrow[v]{} & Cone(u) & \xrightarrow[\delta]{} & A^*[-1] \end{array}$$

ou seja os triângulos exatos são os triângulos isomorfos aos puros.

**Exemplo 5.2.** *(1) Seja $A \xrightarrow{0} A$, este morfismo se completa para o triângulo $A \to A \to Cone0 \to A[-1]$.*

*(2) Temos o triângulo $A \xrightarrow[1_A]{} A \to Cone(1_A) = 0^* \to A[-1]$.*

*(3) Se $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} A[-1]$ é exato então são exatos $B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} A[-1] \xrightarrow{-u[-1]} B[-1]$ e $C[1] \xrightarrow{-w[1]} A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C$, estes são os transladados.*

**Observação 5.10.** *Se temos dois triângulos $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} Cone(u) \xrightarrow{\delta} A[-1]$ e $A' \xrightarrow{u'} B' \xrightarrow{v'} Cone(u') \xrightarrow{\delta'} A'[-1]$ e dois morfismos $f : A \to A'$ e $g :\to B'$ tais que $u'f = gu$ existe um morfismo $h : Cone(u) \to Cone(u')$ tal que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{u} & B & \xrightarrow{v} & Cone(u) & \xrightarrow{\delta} & A[-1] \\ f\downarrow & & g\downarrow & & \exists h\downarrow & & \downarrow f[-1] \\ A' & \xrightarrow[u']{} & B' & \xrightarrow[v']{} & Cone(u') & \xrightarrow[\delta']{} & A'[-1] \end{array}$$

**Teorema 5.1.** *$K(\mathcal{A})$ é categoria triangulada, onde os triângulos são os triângulos isomorfos aos puros.*

**Corolário 5.3.** *Seja $\mathcal{C}$ subcategoria plena de $C(\mathcal{A}), K' = \frac{\mathcal{C}}{\sim}$, se $\mathcal{C}$ for aditiva, fechada para translações e cones então $K'$ é categoria triangulada.*

**Exemplo 5.3.** *Algumas subcategorias de $Com(\mathcal{A})$ com as propriedades do* **Corolário 5.3** *e as notações para as correspondentes subcategorias trianguladas de $K(\mathcal{A})$ são as seguintes:*

- $Com^{+}$ *(complexos limitados inferiormente)* $\rightsquigarrow K^{+}$
- $Com^{-}$ *(complexos limitados superiormente)* $\rightsquigarrow K^{-}$
- $Com^{b}$ *(complexos limitados)* $\rightsquigarrow K^{b}$
- $Com^{+,b}$ *(complexos limitados inferiormente, com homologia limitada)* $\rightsquigarrow K^{+,b}$
- $Com^{-,b}$ *(complexos limitados superiormente, com homologia limitada)* $\rightsquigarrow K^{-,b}$

**Interpretação de Triângulos:**

Seja $0 \to A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \to 0$ seqüência exata em $Com(\mathcal{A})$,

$$\begin{array}{ll} Cone(u) & (a,b) \\ \downarrow\varphi & \downarrow \\ C & v(b) \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & B \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Cone(u) \arrow[r] \arrow[d, equal] & A[-1] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Cilu \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Cone(u) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "u"'] & B \arrow[r, "v"'] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^n(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^n(Cilu) \arrow[r] \arrow[d, "H^n(\beta)"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^n(Cone(u)) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & H^{n+1}(A) \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^{n+1}(Cilu) \arrow[r] \arrow[d, "H^{n+1}(\beta)"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^n(A) \arrow[r] & H^n(B) \arrow[r] & H^n(C) \arrow[r] & H^{n+1}(A) \arrow[r] & H^{n+1}(B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Pelo Lema dos Cinco temos que $\varphi$ é **qi**.

Embora $A \xrightarrow{u} B \longrightarrow Cone(u) \longrightarrow A[-1]$, seja triângulo e $Cone(u)$ seja **qi** a $C$ isto não implica que $\exists C \xrightarrow{w} A[-1]$ tal que $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{v} C \xrightarrow{w} A[-1]$ seja triângulo.

**Exemplo 5.4.** *Consideremos $K(mod\mathbb{Z})$, aqui tomemos cada módulo como o complexo concentrado em zero associado a ele*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z}_4 & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow 0 \\ & & 0 \rightsquigarrow 0 & & 0 \rightsquigarrow 0 & & \\ & & 1 \rightsquigarrow 2 & & 1 \rightsquigarrow 1 & & , \\ & & & & 2 \rightsquigarrow 0 & & \\ & & & & 2 \rightsquigarrow 1 & & \end{array}$$

*$\nexists w$ tal que $\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}_2 \xrightarrow{w} \mathbb{Z}_2[-1]$ seja triângulo, pois se assumimos que existe uma tal $w$, podemos mostrar que isto implicaria que a seqüência exata $0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$ cinde, o que sabemos que não é certo.*

Do seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} A \longrightarrow & Cil(u) & \xrightarrow{\pi} & Cone(u) & \xrightarrow{proj} & A[-1] \\ || \circlearrowleft & \downarrow \beta & \circlearrowleft & \downarrow 1_{Cone(u)} & \circlearrowleft & || \\ A \underset{u}{\longrightarrow} & B & \underset{inc}{\longrightarrow} & Cone(u) & \underset{proj}{\longrightarrow} & A[-1] \end{array}$$

temos que $A \longrightarrow Cilu \longrightarrow Cone(u) \longrightarrow A[-1]$ é triângulo exato.

Definição:

Uma seqüência exata $0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow 0$ em $Com(\mathcal{A})$ chama-se quase cindida se para todo $i$ existe $w_i : Z_i \longrightarrow Y_i$ tal que $v_i \circ w_i = 1_{Z_i}$.

**Observação 5.11.** *(1) $\exists w_i : Z_i \longrightarrow Y_i$ tal que $v_i \circ w_i = 1_{Z_i} \Leftrightarrow \exists \lambda_i : Y_i \longrightarrow X_i$ tal que $\lambda_i \circ u_i = 1_{X_i}$.*

*(2) A família $(w_i)_{i \in I}$ não tem que ser morfismo de complexos.*

**Exemplo 5.5.** *A seqüência*

$$\begin{array}{ccccc} 0 \to & A \longrightarrow & Cil(u) & \longrightarrow Cone(u) & \longrightarrow 0 \\ & x \rightsquigarrow (0,x,0) & & (x,x',y) \rightsquigarrow (x,y) & \end{array}$$

*é uma seqüência exata quase cindida.*

**Lema 5.2.** *Toda seqüência exata quase cindida em $Com(\mathcal{A})$ pode ser completada a um triângulo exato em $K(\mathcal{A})$. Isto é se $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ é uma seqüência exata quase cindida em $Com(\mathcal{A})$, então existe $h : C \to A[-1]$ tal que $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} A[-1]$ é um triângulo exato em $K(\mathcal{A})$.*

**Observação 5.12.** *De forma análoga ao* **Exemplo 5.4** *mostramos que se $\mathcal{A} = mod\mathbb{Z}$ o triângulo $\mathbb{Z}_2 \xrightarrow{2} \mathbb{Z}_4 \longrightarrow Cone2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2[-1]$ não pode ser obtido de nenhuma seqüência exata.*

## 5.4 Localização e Categoria Derivada

### Localização de Categorias

**Definição 5.12.** *Seja $S$ uma coleção de morfismos na categoria $C$, uma localização de $C$ com respeito a $S$, é uma categoria $S^{-1}C$ junto com um funtor $q : C \longrightarrow S^{-1}C$ tal que*

*(1) $q(s)$ é isomorfismo para todo $s \in S$.*

*(2) Todo funtor $F : C \longrightarrow D$ tal que $F(s)$ é isomorfismo $\forall s \in S$ fatora de forma única através de $q$, isto é existe $S^{-1}F$ tal que $S^{-1}Fq = F$, ou seja o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "F"] \arrow[d, "q"'] & D \\ S^{-1}C \arrow[ur, "\exists! S^{-1}F"'] & \end{tikzcd}$$

**Definição 5.13.** *Uma coleção $S$ de morfismos em $C$ é chamada um sistema multiplicativo em $C$ se satisfaz:*

*(1) (a) $S$ é fechado para composição.*

*(b) Se $X \in ObjC$ então $1_X \in S$*

(2) *Condição de existência: Se temos dois morfismos $t : Z \to Y$ e $g : X \to Y$, com $g \in S$, existem um objeto $W$ e dois morfismos $f : W \to Z$ e $s : W \to X$, com $s \in S$ tal que $tf = gs$, ou seja o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, dotted, "s"', "\sim"] & Z \arrow[d, "t", "\sim"'] \\ X \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

*e analogamente a situação dual*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"', "\sim"] & Z \arrow[d, dotted, "t", "\sim"'] \\ X \arrow[r, dashed, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

(3) *Condição de Cancelamento: Dados dois morfismos $f, g : X \to Y$ as seguintes condições são equivalentes:*

- *(i)Existe um morfismo $t : X' \to X$, com $t \in S$ tal que $ft = gt$.*
- *(ii)Existe um morfismo $s : Y \to Z$, com $s \in S$ tal que $sf = sg$.*

$$X' \xrightarrow[\sim]{t} X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow[\sim]{s} Z$$

Seja $R$ anel comutativo com unidade $\mathcal{R}$ a categoria aditiva seguinte

$Obj\mathcal{R} = \bullet$ ( um único objeto).

$Hom_{\mathcal{R}}(\bullet, \bullet) = R$.

Seja $S$ um subconjunto de $R$ fechado para a multiplicação, então $S^{-1}\mathcal{R}$ é a categoria seguinte

$ObjS^{-1}\mathcal{R} = \bullet$

$Hom_{S^{-1}\mathcal{R}}(\bullet, \bullet) = S^{-1}R$, o anel localizado.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d] & R \arrow[r, "F"] \arrow[d, "q"'] & D \\ \frac{x}{1} & S^{-1}R \arrow[ur, "S^{-1}F"'] & \end{tikzcd}$$

$$\text{e}\quad \begin{aligned} S^{-1}F:\ & S^{-1}\mathcal{R} \longrightarrow D \\ & \tfrac{x}{s} \rightsquigarrow F(x)\,F(s)^{-1} \end{aligned}$$

A construção do anel $S^{-1}\mathcal{R}$ serve de protótipo para a construção da localização $S^{-1}C$.

**Definição 5.14.** *Seja $s \in S$, dizemos que $X \underset{\sim}{\xleftarrow{s}} X_1 \xrightarrow{f} Y$ é uma fração à esquerda, denotada por $fs^{-1}$.*

*Dizemos que $fs^{-1} \sim gt^{-1}$ se existe uma fração $X \longleftarrow X_3 \longrightarrow Y$ que faz o diagrama*

$$\begin{array}{ccccc} & & X_1 & & \\ & s\swarrow\sim & \uparrow & \searrow f & \\ \textit{comutativo}\quad X & \overset{\sim}{\longleftarrow} & X_3 & \longrightarrow & Y \\ & t\nwarrow\sim & \downarrow & \nearrow g & \\ & & X_2 & & \end{array}$$

**Observação 5.13.** $\sim$ *é uma relação de equivalência.*

**Definição 5.15.** *$Hom_S(X,Y)$ é a família das classes de equivalência de frações.*

**Observação 5.14.** *$Hom_S(X,Y)$ não tem que ser conjunto.*

**Definição 5.16.** *$S$ é chamado localmente pequeno ( à esquerda) se para todo $X$ em $ObjC$, existe um conjunto $S_X$ de morfismos de $S$, todos com contradomínio $X$ tal que para todo morfismo $X_1 \longrightarrow X$ em $S$ existe um morfismo em $C$, $X_2 \longrightarrow X_1$ tal que $X_2 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X$ esta em $S_X$.*

**Observação 5.15.** *Se $S$ é localmente pequeno então $Hom_S(X,Y)$ é conjunto.*

Seja $X \underset{\sim}{\xleftarrow{s}} X_1 \xrightarrow{f} Y \in Hom_S(X,Y)$, se $S$ é localmente pequeno então $\exists X_2 \xrightarrow{g} X_1$ em $C$ tal que $X_2 \xrightarrow{g} X_1 \xrightarrow{s} X$ está em $S_X$.

$$\left(X \underset{\sim}{\xleftarrow{s}} X_1 \xrightarrow{f} Y\right) \sim \left(X \underset{\sim}{\xleftarrow{sg}} X_2 \xrightarrow{fg} Y\right), sg \in S_X.$$

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "f"] & \\
X & X_2 \arrow[l, "\sim"'] \arrow[u, "g"'] \arrow[r] \arrow[d, equal] & Y \\
 & X_2 \arrow[ul, "sg", "\sim"'] \arrow[ur, "fg"'] &
\end{tikzcd}$$

**Composição de Frações:**

$Hom_S(X,Y) \times Hom_S(Y,Z) \longrightarrow Hom_S(X,Z)$

$X \underset{\sim}{\overset{s}{\longleftarrow}} U \overset{a}{\longrightarrow} Y, Y \underset{\sim}{\overset{t}{\longleftarrow}} V \overset{b}{\longrightarrow} Z$

$$\begin{tikzcd}
 & & W \arrow[dl, "\alpha"', "\sim"] \arrow[dr, "\beta"] & & \\
 & U \arrow[dl, "s"', "\sim"] \arrow[dr, "a"] & & V \arrow[dl, "t"', "\sim"] \arrow[dr, "b"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd} ,(W, s\alpha, b\beta).$$

A operação de composição de frações é associativa e $X \overset{1_X}{\longleftarrow} X \overset{1_X}{\longrightarrow} X$ é a identidade.

**Teorema 5.2.** *(Gabriel-Zisman) Seja $S$ um sistema multiplicativo localmente pequeno (SMLP) de uma categoria $C$.*

*A categoria $S^{-1}C$ existe e é a localização de $C$ com respeito a $S$, o funtor universal $q : C \longrightarrow S^{-1}C$ leva $f : X \longrightarrow Y$ em $X \overset{1_X}{\longleftarrow} X \overset{f}{\longrightarrow} Y \left(X = X \overset{f}{\longrightarrow} Y\right)$.*

**Proposição 5.6.** *Se $C$ é uma categoria aditiva então $S^{-1}C$ é uma categoria aditiva.*

**Esboço da demonstração:** Sejam $(U, s, a), (V, t, b) \in Hom(X, Y)$

$$\begin{tikzcd}
 & & Y \\
V \arrow[urr, bend left, "b"] \arrow[d, "t"'] & S \arrow[l, "u"] \arrow[ur, "y"'] \arrow[dl, "x"'] \arrow[d, "v"] & \\
X & U \arrow[l, "s"] \arrow[uur, bend right, "a"'] &
\end{tikzcd}$$

$(U, s, a) + (V, t, b) = (S, x, y)$, onde $x = su = tv, y = au + bv$. □

**Observação 5.16.** *Para simplificar a demostração iremos a assumir que vale a seguinte propriedade, se $s \in S$ e $su \in S$ então $u \in S$ ( se esta propriedade se satisfaz, o sistema chama-se Hipersaturado).*

$S^{-1}C$ é uma categoria aditiva e $q$ é aditivo.

**Definição 5.17. Localização de Subcategorias** *Seja $B$ uma subcategoria plena de $C$ e seja $S$ um sistema multiplicativo localmente pequeno em $C$ cuja restrição $S \cap B$ em $B$ é também um sistema multiplicativo, iremos escrever $S^{-1}B$ para $(S \cap B)^{-1} B$, $B$ é chamada subcategoria localizada de $C$ para $S$, se o funtor natural $S^{-1}B \longrightarrow S^{-1}C$ é fiel e pleno.*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i"] \arrow[d, "q_B"'] & C \arrow[r, "q_C"] & S^{-1}C \\ S^{-1}B \arrow[ur, "!F_S"'] & & \end{tikzcd}$$

**Proposição 5.7.** *Suponhamos que para todo $s \in Hom_C(X, Y) \cap S$ com $Y \in ObjB$ existe $f \in Hom_C(Z, X)$ com $Z \in ObjB$ tal que a composição $Z \xrightarrow{f} X \underset{s \in S}{\xrightarrow{\sim}} Y$ esta em $S$, então o funtor $F_S : S^{-1}B \longrightarrow S^{-1}C$ é fiel e pleno.*

**Exemplo 5.6.** *Assumamos que $D(\mathcal{A})$ existe, ou seja $(S^{-1}K(\mathcal{A}) \simeq D(\mathcal{A}))$, onde $S = \{qi\}$ em $K(\mathcal{A})$ então $K^-(\mathcal{A}), K^+(\mathcal{A}), K^b(\mathcal{A}), K^{-,b}(\mathcal{A}), K^{+,b}(\mathcal{A})$ são subcategorias localizáveis e suas localizações são $D^-(\mathcal{A}), D^+(\mathcal{A}), D^b(\mathcal{A}), D^b(\mathcal{A}), D^b(\mathcal{A})$ e tem-se*

$$\begin{tikzcd} & D^-(\mathcal{A}) \arrow[dr] & \\ D^b(\mathcal{A}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & D(\mathcal{A}) \\ & D^+(\mathcal{A}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

*com as imersões plenas de subcategorias.*

**Definição 5.18.** *Seja $K$ uma categoria triangulada, dizemos que um sistema de morfismos $S$ provém de um funtor cohomológico $H : K \longrightarrow \mathcal{A}$ se*

$$S = \{s \in Mor(K) / H^i(S) = H(T^i(S)) \text{ é isomorfismo } \forall i\}$$

**Exemplo 5.7.** *Os* ***qi*** *em $K^*(\mathcal{A}), * = -, +, b$, porque provém do funtor cohomológico $H^* : K^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{A}$.*

**Proposição 5.8.** *Se $S$ provém de um funtor cohomológico, então tem-se*

*(1) $S$ é um sistema multiplicativo.*

*(2) $S^{-1}K$ é categoria triangulada e $K \xrightarrow{q} S^{-1}K$ é um morfismo de categorias trianguladas.*

**Esboço da demonstração:** Assumimos que $S^{-1}K$ existe

$\overline{T} : S^{-1}K \longrightarrow S^{-1}K$ o funtor de translação

$Obj S^{-1}K = Obj K$

$\overline{T}(Z) = T(Z), \forall Z \in Obj S^{-1}K$

$\overline{T}(fs^{-1}) = \overline{T}\left(\xleftarrow{s}\xrightarrow{f}\right) = T(f)T(s^{-1}) = \xleftarrow{T(s)}\xrightarrow{T(f)}$ ou seja

$$\begin{array}{ccccc} X & \xleftarrow{s} & Z & \xrightarrow{f} & Y \\ & & \downarrow \overline{T} & & \\ T(X) & \xleftarrow{T(s)} & T(Z) & \xrightarrow{T(f)} & T(Y) \end{array}$$

□

**Definição 5.19.** *Triângulos Exatos em $S^{-1}K$.*
*Tomamos a imagem através do funtor de localização dos triângulos em $K$. Em seguida consideramos a menor família de triângulos fechada por isomorfismos que contêm a imagem dos triângulos de $K$. Isto é se temos um triângulo em $K$*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX$$

*a este triângulo corresponde*

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & X & & & & Y & & & & Z & \\
1 \swarrow & & \searrow u & & 1 \swarrow & & \searrow v & & 1 \swarrow & & \searrow w \\
X & & & Y & & & & Z & & & TX = \overline{T}X
\end{array}
$$

**Corolário 5.4. Propriedade Universal:** *Seja $F : K \longrightarrow L$ um morfismo de categorias trianguladas tal que $F(s)$ é isomorfismo, $\forall s \in S$, consideremos a localização $K \xrightarrow{q} S^{-1}K$, então $\exists! F'$ tal que $F = F'q$ e $F'$ é morfismo de categorias trianguladas*

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "F"] \arrow[d, "q"'] & L \\
S^{-1}K \arrow[ur, dashed, "\exists! S^{-1}F"'] &
\end{tikzcd}
$$

**Exemplo 5.8.** *Seja $\mathcal{A}$ abeliana, $K^-(\mathcal{A}), K^+(\mathcal{A}), K^b(\mathcal{A}), K^{-,b}(\mathcal{A}), K^{+,b}(\mathcal{A})$.*

*Se existirem $D(\mathcal{A}), D^-(\mathcal{A}), D^+(\mathcal{A}), D^b(\mathcal{A})$ são categorias trianguladas.*

## 5.5 A categoria $D^+(\mathcal{A})$

Seja $I \subset \mathcal{A}$ a subcategoria plena dos objetos injetivos, $Com^+(I)$ a subcategoria plena de $Com^+(\mathcal{A})$ dos complexos inferiormente limitados com todas as entradas sendo objetos injetivos.

Como $Com^+(I)$ é aditiva, fechada para translações e cones segue que $K^+(I) = \frac{Com^+(I)}{\sim}$ é categoria triangulada ( subcategoria plena triangulada de $K^+(\mathcal{A})$).

Além disso $S \cap K^+(I)$ ( os **qi** de $K^+(I)$) é um sistema multiplicativo.

Denotaremos $S^{-1}K^+(I)$ por $D^+(I)$.

$K^+(I) \xrightarrow{q_I^+} D^+(I)$ é morfismo de categorias trianguladas, então temos assumindo que $D^+(\mathcal{A})$ existe

$$
\begin{array}{ccc}
K^+(I) & \hookrightarrow & K^+(\mathcal{A}) \\
q_I^+ \downarrow & \searrow F & \downarrow q_{\mathcal{A}}^+ \\
D^+(I) & \underset{\exists! G}{\dashrightarrow} & D^+(\mathcal{A})
\end{array}
$$

Vejamos que $K^+(I) \xrightarrow{q_I^+} D^+(I)$ é um isomorfismo.

**Lema 5.3.** *Se $X \in K(\mathcal{A})$, exato e $Y \in K^+(I)$ então $Hom_{K(\mathcal{A})}(X,Y) = 0$.*

**Lema 5.4.** *$f \in Hom_{K^+(I)}(X,Y)$ **qi** então $f$ é isomorfismo em $K^+(I)$.*

**Esboço da demonstração:** $X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow Conef \xrightarrow{\varphi} X[-1]$

Como $f$ é qi $\Rightarrow Conef$ exato $\Rightarrow \varphi \sim 0$ ( pelo lema anterior). □

**Corolário 5.5.** *$K^+(I) \xrightarrow{q_I^+} D^+(I)$ é um isomorfismo de categorias trianguladas.*

$$\begin{array}{ccc} K^+(I) & \hookrightarrow & K^+(\mathcal{A}) \\ iso \downarrow & & \downarrow q_{\mathcal{A}}^+ \\ D^+(I) & \underset{\exists ! G}{\dashrightarrow} & D^+(\mathcal{A}) \end{array}$$

**Proposição 5.9.** *O funtor $D^+(I) \xrightarrow{G} D^+(\mathcal{A})$ é fiel e pleno.*

**Teorema 5.3.** *Se $\mathcal{A}$ tem suficientes injetivos então $K^+(I) \simeq D^+(I) \xrightarrow{G} D^+(\mathcal{A})$ é isomorfismo de categorias trianguladas.*

**Observação 5.17.** *(1) Valem os resultados duais.*

*$K^-(P)$ é subcategoria localizável de $K^-(\mathcal{A})$.*

*$K^-(P) \simeq D^-(P)$.*

*Se $\mathcal{A}$ tem suficientes projetivos então $K^-(P) \simeq D^-(P) \simeq D^-(\mathcal{A})$.*

*(2) Se $\mathcal{A}$ tem suficientes injetivos ( projetivos) então $D^+(\mathcal{A})\,(D^-(\mathcal{A}))$ existem ( embora $D(\mathcal{A})$ possa não existir).*

*(3) Se $gl\dim \mathcal{A} < \infty \Rightarrow K^b(I) \simeq K^b(P) \simeq D^b(\mathcal{A})$.*

**Observação 5.18. Sobre a categoria $D(\mathcal{A})$**

*(1)* **Interpretação de Triângulos:**

*Vimos que se* $0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow 0$ *é uma seqüência exata em* $Com(\mathcal{A})$ *quase cindida então* $\exists w$ *tal que* $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow X[-1]$ *é triângulo exato. Este resultado não vale para qualquer seqüência exata em* $Com(\mathcal{A})$, **Exemplo 5.4.**

*(2)* **Afirmação:** *Toda seqüência exata* $0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow 0$ *em* $Com(\mathcal{A})$ *pode ser completada a um triângulo exato em* $D^+(\mathcal{A})$. *Isto pode fazer-se pois se temos uma seqüência exata* $0 \to X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \to 0$, *sabemos que* $Cone(u)$ *é quase isomorfo a* $Z$, *assim podemos formar o triângulo seguinte em* $D^+(\mathcal{A})$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & X & & & Y & & & Cone(u) & & \\ 1\swarrow & & \searrow u & 1\swarrow & & \searrow v & 1\swarrow & & \searrow w & \\ X & & & Y & & & Z & & & X[-1] \end{array}$$

*(3)* **Conseqüência:** *Todo triângulo exato em* $D^+(\mathcal{A})$ *"provém" ( a menos de isomorfismo) de uma seqüência exata em* $Com(\mathcal{A})$.

**A inclusão** $\mathcal{A} \hookrightarrow D^*(\mathcal{A})$.

**Definição 5.20.** *Um 0-complexo é um complexo* $X$ *tal que* $X_i = 0, \forall i \neq 0, X_0 \in Obj\mathcal{A}$.

$\ldots \to 0 \to X_0 \to 0 \to \ldots$

**Definição 5.21.** *Um* $H^o$*-complexo é um complexo* $X$ *tal que* $H^i(X) = 0, \forall i \neq 0$.

Todo 0-complexo é um H$^o$-complexo.

Temos o funtor $Q : \mathcal{A} \longrightarrow D^*(\mathcal{A})$, dado pela composição dos seguintes funtores

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{A} & \overset{i}{\hookrightarrow} & Com^*(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi} & K^*(\mathcal{A}) & \xrightarrow{q^*} & D^*(\mathcal{A}) \\ X & & X^0 & & & & X^0 \\ & & & & & & \| \\ \downarrow f & \rightsquigarrow & \downarrow f & \rightsquigarrow & f & & X^0 \\ Y & & Y^0 & & & & \downarrow f \\ & & & & & & Y^0 \end{array}$$

Aqui $i$ é a inclusão, $\pi$ é o funtor quociente e $q^*$ é o funtor de localização.

$Hom_{\mathcal{A}}(X,Y) \simeq Hom_{K(\mathcal{A})}(\pi i X, \pi i Y)$ logo $\pi i$ é fiel e pleno.

$Q = q^* \circ \pi \circ i.$

**Proposição 5.10.** *O funtor $Q : \mathcal{A} \longrightarrow D^*(\mathcal{A})$ é uma equivalência entre $\mathcal{A}$ e a subcategoria plena dos $H^o$-complexos em $D^*(\mathcal{A})$.*

**Esboço da demonstração:** $Hom_{K^*(\mathcal{A})}(X^*, Y^*) \underset{b}{\overset{a}{\rightleftarrows}} Hom_{D^*(\mathcal{A})}(X^*, Y^*)$

$a : f^* \rightsquigarrow q_{\mathcal{A}}(f^*), X^* \xleftarrow{1} X^* \xrightarrow{f^*} Y^*$

$$b : \quad \widetilde{f} \qquad \begin{array}{ccc} & Z & \\ s \swarrow & & \searrow f \\ X & & Y \end{array} \qquad \pi i\left(\overline{H}^0(f)\,\overline{H}^0(s)^{-1}\right)$$

Se demonstra que $a, b$ são inversas e portanto $Q$ é fiel e pleno. $\square$

**Definição 5.22.** $Ext^i_{\mathcal{A}}(X,Y) = Hom_{D^b(\mathcal{A})}(X[0], Y[-i]) = Hom_{D^b(\mathcal{A})}(X, Y[-i])$

**Observação 5.19.** $Hom_{D^b(\mathcal{A})}(X[-k], Y[-i-k]) \simeq Ext^i_{\mathcal{A}}(X,Y).$

Isto permite definir

$$\begin{array}{llll} Ext^i_{\mathcal{A}}(X,Y) & \times \; Ext^j_{\mathcal{A}}(Y,Z) & \longrightarrow & Ext^{i+j}_{\mathcal{A}}(X,Z) \\ f & \quad g & & \\ Hom_{D^b(\mathcal{A})}(X[0], Y[-i]) & \quad Hom_{D^b(\mathcal{A})}(Y[0], Z[-j]) & & \\ & \quad Hom_{D^b(\mathcal{A})}(Y[-i], Z[-i-j]) & & \end{array}$$

Um elemento de $Ext^i_{\mathcal{A}}(X,Y)$ é uma seqüência exata

$0 \to Y \to K^{-i+1} \to \ldots. \to K^0 \to X \to 0$, esta pode ser completada e vista como um complexo acíclico

$\mathcal{K} : \ldots \to 0 \to 0 \to Y \to K^{-i+1} \to \ldots. \to K^0 \to X \to 0 \to 0 \to \ldots$

Consideremos $\overline{\mathcal{K}}$ ( o complexo truncado)

$\overline{\mathcal{K}} : \ldots \to 0 \to 0 \to Y \to K^{-i+1} \to \ldots. \to K^0 \to 0 \to 0 \to \ldots$

Claramente $\overline{\mathcal{K}}$ é **qi** a $X[0]$

Isto permite construir
$$\begin{tikzcd} & \overline{\mathcal{K}} \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X[0] & & Y[-i] \end{tikzcd}$$
, este é um morfismo $Y(\mathcal{K}) \in Hom_{D^b(\mathcal{A})}(X[0], Y[-i])$

**Teorema 5.4.** *(1) (a)* $Ext^i_{\mathcal{A}}(X,Y) = 0$ *se* $i < 0$.

*(b)* $Ext^0_{\mathcal{A}}(X,Y) = Hom_{\mathcal{A}}(X,Y)$.

*(c) Qualquer elemento de* $Ext^i_{\mathcal{A}}(X,Y), i > 0$ *é da forma* $Y(\mathcal{K})$ *para algum complexo acíclico* $\mathcal{K}$ *e se* $Y(\mathcal{K}) \in Ext^i_{\mathcal{A}}(X,Y), Z(\mathcal{L}) \in Ext^j_{\mathcal{A}}(Y,Z)$ *temos* $Z(\mathcal{M}) = Z(\mathcal{L} \circ \mathcal{K}) = Z(\mathcal{L}) \circ Y(\mathcal{K}) \in Ext^i_{\mathcal{A}}(X,Y)$.

**Observação 5.20.** *Se* $\mathcal{A} = modR$*, podemos considerar* $\mathcal{A} \hookrightarrow D^B(\mathcal{A})$*, e pode-se provar que neste caso as duas definições de* $Ext^i(X,Y)$*, para* $X, Y \in \mathcal{A}$ *coincidem. Isso se prova usando o fato que* $X$ *é quase isomorfo a sua resolução projetiva.*

## 5.6 Complexos em $F(\Delta)$

**Teorema 5.5.** *Se* $C$ *é uma subcategoria plena de uma categoria abeliana* $A$*, tal que* $C$ *é fechada para isomorfismos e somas diretas e contém os projetivos então* $S^{-1}K^-(C) \simeq D^-(A)$.

**Demonstração.** Claramente $K^-(C)$ é uma subcategoria triangulada de $K^-(A)$, pois $K^-(C)$ é fechada para a formação de Cones, somas diretas e translações, além disso $S \cap K^-(C)$ é um sistema multiplicativo, por ser $K^-(C)$ fechada para a formação de Cones.

Assim temos

$$\begin{tikzcd} K^-(C) \arrow[r] \arrow[d, "q_C"'] & K^-(A) \arrow[d, "q_A"] \\ S^{-1}K^-(C) \arrow[r, "G"'] & D^-(A) \end{tikzcd}$$

A existência de $G$ esta garantida pela propriedade do funtor $q_C$ de localização.

Agora como $P \subset C \Rightarrow K^-(P) \subset K^-(C)$.
Vejamos que $G$ é uma equivalência.
$G$ é denso, pois claro que para todo $X \in ObjD^-(A)$, existe $Z \in ObjK^-(P)$ e portanto em $ObjK^-(C)$ tal que $X \longrightarrow Z$ é quase isomorfismo, já que
$K^-(P) \simeq S^{-1}K^-(P) \simeq D^-(A)$.
$G$ é fiel e pleno, para isto temos que ver se dado $f : X \to Y$ quase isomorfismo com $X$ em $ObjK^-(C)$ e $Y$ em $ObjK^-(A)$, existe $g : Y \to Z$ com $Y$ em $ObjK^-(A)$ e $Z$ em $ObjK^-(C)$,tal que $g \circ f$ seja quase isomorfismo.
Claro que para $Y \in ObjK^-(A)$ existe $Z \in ObjK^-(P)$ e portanto em $ObjK^-(C)$ tal que $Y \longrightarrow Z$ é quase isomorfismo, pois
$K^-(P) \simeq S^{-1}K^-(P) \simeq D^-(A)$. Logo como $S$ é sistema multiplicativo, temos o que queríamos.
Assim $S^{-1}K^-(C) \simeq D^-(A)$. □

De forma análoga temos os seguintes teoremas

**Teorema 5.6.** *Se $C$ é uma subcategoria plena de uma categoria abeliana $A$ , tal que $C$ é fechada para somas diretas e contém os injetivos $S^{-1}K^+(C) \simeq D^+(A)$.*

**Teorema 5.7.** *Seja $A$ um álgebra de Artin de dimensão global finita.*
*Se $C$ é uma subcategoria plena de $modA$ fechada para somas diretas que contém os projetivos ou os injetivos então $S^{-1}K^b(C) \simeq D^b(A)$.*

Também temos os seguintes corolários

**Corolário 5.6.** *Se $A$ é um álgebra estandarmente estratificada $S^{-1}K^-(F(\Delta)) \simeq D^-(A)$ e se $A$ é um álgebra coestandarmente estratificada $S^{-1}K^+(F(\nabla)) \simeq D^+(A)$.*

**Demonstração.** Se $A$ é estandarmente estratificada, claro que $F(\Delta)$ é fechada para somas diretas e contém os projetivos, logo a afirmação é uma conseqüência do **Teorema 5.5**, analogamente no caso da coestandarmente estratificada a afirmação é uma conseqüência do **Teorema 5.6** □

**Corolário 5.7.** *Se $A$ é quase hereditária então*
$S^{-1}K^b(F(\Delta)) \simeq S^{-1}K^b(F(\nabla)) \simeq D^b(A)$.

**Demonstração.** Se $A$ é quase hereditária, é claro que a dimensão global de $A$ é finita e que $F(\Delta)$ é fechada para somas diretas e contém os projetivos e $F(\nabla)$ é fechada para somas diretas e contém os injetivos, então a afirmação segue do **Teorema 5.7.** □

**Observação 5.21.** *Em geral não podemos assegurar que* $K^*(C) \simeq S^{-1}K^*(C)$ *por exemplo, seja* $A$ *hereditária , em tal caso pode-se escolher uma ordenação dos projetivos tal que* $Hom(P_i, P_j) = 0$ *para* $i > j$*, assim* $F(\Delta) = modA$ *e claro que* $K^-(A)$ *não é equivalente a* $D^-(A)$*, basta tomar* $X$ *não projetivo, então* $X^\circ$ *(o concentrado) é quase isomorfo a* $P_1 \longrightarrow P_0$ *sua resolução projetiva, mas não são isomorfos em* $K^-(A)$.

# Referências Bibliográficas


[1] F. W. Anderson and K. R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, Graduate texts in Mathematics, 13, Springer-Verlag, Heildeberg-Berlin, 1973.

[2] M. Auslander, I. Reiten, *Aplications of Contravariantly Finite Subcategories*, Advances in Mathematics, 86, 1991, 111-152.

[3] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge studies in advanced mathematics, 36, 1995, Cambridge University Press.

[4] M. Auslander, S. Smalø, *Almost split sequences in subcategories*, Journal of Algebra, 69, 1981, 426-454.

[5] A. A. Beilinson, V. Ginsburg, W. Soergel, *Koszul duality patterns in Representation Theory*, J. Am. Soc. , 9 , 1996, 473-527.

[6] F. Coelho , E. N. Marcos, H. Merklen, M. I. Platzeck, *Modules of infinite projective dimension over algebras whose idempotent ideals are projective*, Tsukuba J. Mathematic, Vol. 21 ,No.2, 345-359, 1997.

[7] V. Dlab, *Quasi-hereditary Algebras*, Appendix Finite Dimensional Algebras by Y. Drozd and V. Kirichenko, Springer-Verlag, 1994.

[8] V. Dlab, C. M. Ringel *Quasi-hereditary Algebras*, Carleton Mathematical Series, 224, March, 1998.

[9] P. Grivel, *Catégories dérivées et foncteurs dérivées* dans "Algebraic D-modules" edité par Armand Borel, Acdademic Press.

[10] S. Gelfand, Y. Manin, *Methods of homological Algebra*, Springer-Verlag, 1996.

[11] D. Happel, *Triangulated categories in representation theory*, London Mathematical Society, Lecture Notes Series, 119, Cambridge University Press, 1998.

[12] D. Happel and L. Unger, *On a partial order of tilting modules*, Preprint.

[13] J. F. Hernández, E. N. Marcos, *Sobre a categoria* $S^{-1}K^*(C)$, Revista Ciencias Matemáticas, Universidad de La Habana, Vol 1, 2004.

[14] E. N. Marcos, H. Merklen, M. I. Platzeck, *The Grothendieck group of the category of modules of finite projective dimension over certain weakly triangular algebras*, Communications in Algebra, Vol. 28, No.3, pag. 1387-1404, 2000.

[15] E. N. Marcos, H. Merklen, C.Saenz, *Standardly Stratified Split and Lower Triangular Algebras*, Colloquium Mathematicum, Vol. 93, No. 20, pag. 303-311, 2002.

[16] M. I. Platzeck, *Artin rings with all idempotent ideals are projective*, Communications in Algebra, Vol. 24, No.8, pag. 2515-2533, 1996.

[17] M. I. Platzeck, I.Reiten, *Modules of finite projective dimension for standardly stratified algebras*,Communications in Algebra, Vol. 29, No.3, pag. 973-986, 2001.

[18] C. M. Ringel, *The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebras has almost split sequences*, Mathematische Zeitschrift, Vol. 208, pag. 209-223, 1991.

[19] C. Sáenz, *On modules with Weyl filtration for Schur algebras of finite type*, Journal of Algebra, 237, pag. 49 - 63, 2001.

[20] Changchang Xi, *Standardly Stratified Algebras and Cellular Algebras*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 133, pag. 37-53, Cambridge University Press, 2002.

[21] C. Weibel, *An introduction to homological Algebra*, Cambridge University Press, 1994.