

**A Aplicação de Gauss de Superfícies  
Tipo Espaço em  $\mathbb{L}^3$  e  $\mathbb{L}^4$**

José Antonio Moraes Vilhena

TESE APRESENTADA  
AO  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA  
DA  
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
PARA  
OBTENÇÃO DO GRAU  
DE  
DOUTOR EM MATEMÁTICA

Área de Concentração: **Geometria Diferencial**  
Orientador: **Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti**

*Durante a elaboração deste trabalho o autor recebeu apoio financeiro do CNPq*

São Paulo, fevereiro de 2004

## A Aplicação de Gauss de Superfícies Tipo Espaço em $\mathbb{L}^3$ e $\mathbb{L}^4$

Este exemplar corresponde à redação final da Tese devidamente corrigida e defendida por **José Antonio Moraes Vilhena** e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, fevereiro de 2004.

Comissão Julgadora:

- Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti (Presidente) - IME-USP
- Prof. Dr. Plínio A. Q. Simões - IME-USP
- Prof. Dr. Ruy Tojeiro de F. Júnior - UFSCar
- Prof. Dr. Valério Ramos Batista - IMECC - UNICAMP
- Prof. Dr. Celso J. da Costa - UFF

*Ao meu filho Felipe*

## Agradecimentos

Ao Prof. Antonio C. Asperti pela orientação, sugestões, contribuições, leitura crítica deste trabalho e pela estimável amizade.

Ao grupo de geometria USP-UNICAMP pelos preciosos seminários.

Aos Professores: Plínio A. Q. Simões (pelas sugestões e contribuições matemáticas através de conversas informais e de seu trabalho de pesquisa), Antonio de Pádua F. Filho (por ter compartilhado comigo parte de sua pesquisa mesmo que incipiente), Maria Elisa E. L. Galvão (pelas sugestões durante o exame de qualificação), Cláudio Gorodski (pelas sugestões e esclarecimentos) e Rosa M. B. Chaves (pelo incentivo e contribuição para este trabalho).

Aos grandes e sinceros amigos que fiz no IME, que são tantos que me reservo o direito de não citá-los nominalmente.

À Irene minha companheira do dia-a-dia. Espero contar contigo sempre.

## Resumo

Em [22], D. Hoffman e R. Osserman provaram, entre outros resultados, que uma superfície mínima em  $\mathbb{R}^4$  com aplicação de Gauss contida em um hiperplano de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$ , isto é 1-degenerada, é completamente descrita por uma fórmula tipo Weierstrass. Este trabalho foi continuado pelos mesmos autores em [23] e [24], onde foram classificadas todas as superfícies em  $\mathbb{R}^4$  com aplicação de Gauss 1-degenerada. No nosso trabalho, fazemos um estudo paralelo ao de Hoffman e Osserman, para superfícies tipo espaço com aplicação de Gauss 1-degenerada no espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^4$  de dimensão 4. Obtivemos resultados similares, porém com maior número de casos, o que se deve essencialmente à geometria de  $\mathbb{L}^4$ . Também damos uma fórmula de representação tipo Kenmotsu (este tipo de fórmula foi obtido pela primeira vez por K. Kenmotsu em [25] e [26], para superfícies em  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^4$ ) para superfícies tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$  com vetor curvatura média não nulo nem de tipo luz.

## Abstract

In [22], D. Hoffman and R. Osserman proved that a minimal surface in  $\mathbb{R}^4$  with Gauss map contained in a hiperplane of  $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$  - that is to say, the Gauss map is 1-degenerate - can be completely described by a Weierstrass type formula. This work was continued by the same authors in [23] and [24], where all surfaces in  $\mathbb{R}^4$  with 1-degenerate Gauss map were classified. In our work, we make an analogous study to that of Hoffman and Osserman, this time for spacelike surfaces with 1-degenerate Gauss map in the four dimensional Lorentz-Minkowski space  $\mathbb{L}^4$ . We obtain similar results but, due to the geometry of  $\mathbb{L}^4$ , these results always appear with more cases to consider. We also present a Kenmotsu type representation formula (this kind of formula was firstly obtained by Kenmotsu in [25] and [26] for surfaces in  $\mathbb{R}^3$  and  $\mathbb{R}^4$ ) for spacelike surfaces in  $\mathbb{L}^4$ , with nonzero and not lightlike mean curvature vector.

# Sumário

Introdução	1
<b>1 Preliminares</b>	<b>7</b>
1.1 O Espaço de Lorentz-Minkowski de dimensão $n$	7
1.2 O espaço tempo de Lorentz-Minkowski	11
1.3 Superfícies tipo espaço em $\mathbb{L}^n$	13
1.4 Equações fundamentais	15
1.5 O método do referencial móvel	16
1.6 O operador de Laplace-Beltrami	21
1.7 Grassmanniano e quádrlica complexa	21
1.8 A aplicação de Gauss generalizada	23
1.9 A representação de Weierstrass para superfícies máximas em $\mathbb{L}^4$	24
1.10 As quádrlicas complexas $Q_1^1$ e $Q_1^2$	25
1.11 Expressões para as normais $\nu$ e $\tau$	27
1.12 A representação de Weierstrass para superfícies máximas em $\mathbb{L}^n$	30
<b>2 Superfícies máximas com aplicação de Gauss degenerada em <math>\mathbb{L}^4</math></b>	<b>35</b>
2.1 Representação de hiperplanos em $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ sob a ação de $O^{++}(n-1, 1)$ .	35
2.2 Famílias de superfícies máximas em $\mathbb{L}^4$	58
<b>3 Problema de Björling para superfícies máximas em <math>\mathbb{L}^4</math></b>	<b>74</b>

3.1	O problema de Björling . . . . .	74
3.2	Simetrias de superfícies máximas em $\mathbb{L}^4$ . . . . .	81
<b>4</b>	<b>A aplicação de Gauss para superfícies tipo espaço em <math>\mathbb{L}^3</math> e <math>\mathbb{L}^4</math></b>	<b>89</b>
4.1	Superfícies tipo espaço em $\mathbb{L}^n$ e aplicação de Gauss . . . . .	89
4.2	Aplicação de Gauss para superfícies tipo espaço em $\mathbb{L}^3$ . . . . .	94
4.3	Aplicação de Gauss para superfícies tipo espaço em $\mathbb{L}^4$ . . . . .	103
4.4	Fórmula de representação para superfícies tipo espaço em $\mathbb{L}^4$ . . . . .	116
<b>5</b>	<b>Superfícies tipo espaço com aplicação de Gauss degenerada em <math>\mathbb{L}^4</math></b>	<b>125</b>
5.1	Triedro de Frenet para curvas do tipo espaço em $\mathbb{L}^3$ . . . . .	125
5.2	Hélices tipo espaço em $\mathbb{L}^3$ . . . . .	128
5.3	Classificação das superfícies tipo espaço com aplicação de Gauss degenerada de tipo 1 . . . . .	133
5.4	Classificação das superfícies tipo espaço com aplicação de Gauss degenerada de tipo 2 . . . . .	138
5.5	Classificação das superfícies tipo espaço com aplicação de Gauss degenerada de tipo 3 . . . . .	143
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>150</b>

## INTRODUÇÃO

O espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^n$  é o espaço Euclidiano  $\mathbb{R}^n$  munido com uma forma bilinear simétrica não degenerada de índice 1. Uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^n$  é a imagem de uma superfície abstrata  $M^2$  conexa e orientada, através de uma imersão com métrica induzida Riemanniana. A classe de superfícies tipo espaço com vetor curvatura média zero é de particular interesse, haja vista a estreita relação com a teoria de funções analíticas e a propriedade de maximizar ou minimizar localmente área, dentre uma família de superfícies tipo espaço de classe  $\mathcal{C}^2$ , que tem como bordo uma curva fechada regular. Observamos que para hipersuperfícies tipo espaço em  $\mathbb{L}^n$ , temos sempre a propriedade de maximizar localmente a área no sentido acima.

A aplicação de Gauss clássica para superfícies em  $\mathbb{R}^3$ , foi introduzida por Gauss no seu trabalho fundamental sobre superfícies em  $\mathbb{R}^3$  e usada para definir a quantidade hoje conhecida como curvatura de Gauss. Para superfícies de codimensão alta no espaço Euclidiano, temos uma generalização natural da aplicação de Gauss, onde o espaço imagem é um Grassmanniano adequado. D. A. Hoffman e R. Osserman em [22] fizeram um estudo detalhado das propriedades da *aplicação de Gauss generalizada* de uma superfície  $S$  imersa em  $\mathbb{R}^n$ . Como é bem conhecido, o Grassmanniano de 2-subespaços orientados de  $\mathbb{R}^n$  pode ser identificado com a hiperquádrica complexa  $Q^{n-2}$  de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$ . Assim, tanto a geometria intrínseca de  $Q^{n-2}$  quanto a estrutura de subvariedade de  $\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}$  são importantes no estudo de superfícies em  $\mathbb{R}^n$ .

O. Kobayashi e L. V. McNertney em ([29], [32]) deram uma fórmula tipo Weierstrass para superfícies máximas no espaço de Lorentz-Minkowski de dimensão 3, a saber

$$X(z) = \Re e \int_{z_0}^z \left( \frac{f}{2}(1 + g^2), \frac{if}{2}(1 - g^2), fg \right) dw + X(z_0),$$

onde  $g$  é uma função meromorfa,  $f$  uma função analítica e  $|f(z)| \neq 1$  em uma superfície de Riemann  $M^2$ , e além disso, sempre que  $g$  tem um pólo de ordem  $m$ ,  $f$  tem no mesmo ponto um zero de ordem  $2m$ . Neste caso, a aplicação de Gauss é por definição uma aplicação que associa a cada ponto  $p \in M^2$ , o vetor

unitário  $N$  normal a  $T_{X(p)}S$ . Portanto,  $N(z)$  pertence a  $H_0^2(-1) := \{(x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{L}^3 : (x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = -1\}$ , onde  $z$  é uma coordenada conforme de  $M^2$ . Para superfícies tipo espaço  $M^2$  orientadas e de codimensão maior em um espaço de Lorentz-Minkowski de dimensão  $n$ , é natural também pensar em aplicação de Gauss generalizada, e este conceito foi introduzido por F. J. M. Estudillo e A. Romero em [16] do seguinte modo. Seja  $G_{2,n}^+$  o subconjunto aberto do Grasmanniano usual, consistindo de todos os 2-subespaços orientados tipo espaço em  $\mathbb{L}^n$ . Podemos identificar  $G_{2,n}^+$  com a hiperquádrica complexa indefinida  $Q_1^{n-2} := \{[z] \in \mathbb{CP}_1^{n-1} : (z^1)^2 + \dots + (z^{n-1})^2 - (z^n)^2 = 0\}$ , onde  $\mathbb{CP}_1^{n-1} := \{z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} : \langle\langle z, z \rangle\rangle > 0\}/\mathbb{C}^*$  e  $\langle\langle z, w \rangle\rangle = z^1 \overline{w^1} + \dots - z^n \overline{w^n}$  é a forma hermitiana indefinida sobre  $\mathbb{C}^n$  ([7],[34]). Portanto, se associarmos a cada ponto  $p \in M$  o ponto  $T_p M$  de  $G_{2,n}^+$ , temos a aplicação  $G : M \rightarrow Q_1^{n-2}$  que é chamada *aplicação de Gauss generalizada* para superfícies de tipo espaço em  $\mathbb{L}^n$ .

Motivado por esses resultados e técnicas, começamos estudar com detalhes a quádrica  $Q_1^{n-2}$ , embora resultados relativos a  $Q_1^2$  já tivessem sido obtidos por Plínio A. Q. Simões e Antonio P. F. Filho [17]. Mostramos que se  $S = X(M^2)$  é uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$  com aplicação de Gauss generalizada dada localmente por  $\Phi(z) = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4)$ , em termos do parâmetro conforme  $z$ , isto é,  $X_z = \mu \Phi$ , então  $\Phi = (1 + \mathbf{a}\mathbf{b}, i(1 - \mathbf{a}\mathbf{b}), \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b})$ , onde  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  são funções de  $M^2$  em  $\mathbb{C}$  tais que  $\mathbf{a}\overline{\mathbf{b}} \neq 1$ . Também damos uma representação para a quádrica geral  $Q_1^{n-2}$  e como aplicação provamos um teorema de representação tipo Weierstrass para superfícies máximas em  $\mathbb{L}^n$ , semelhante ao Teorema 3.1 [22] para superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^n$ . Ainda com respeito a  $Q_1^2$  no Capítulo 1, estudamos a sua intersecção com hiperplanos tangentes e não tangentes.

Segundo D. A. Hoffman e R. Osserman, a questão de degenerescência de superfícies em  $\mathbb{R}^n$  é a parte principal do artigo [22]. Um tipo de degenerescência acontece quando a imagem de  $M^2$  pela aplicação de Gauss está contida em um subespaço projetivo de codimensão  $k$  de  $\mathbb{CP}^{n-1}$ , veja ([10],[22]). Usando o fato que ([22], Proposição. 2.5) sob ação do grupo  $SO(n, \mathbb{R})$ , o conjunto de hiperplanos em  $\mathbb{CP}^{n-1}$  pode ser parametrizado

por  $t \in [0, 1]$  (isto é, se  $H$  é o hiperplano dado por  $p_1 z^1 + \dots + p_n z^n = 0$ , então existe  $M \in SO(n)$  tal que, se  $\tilde{z} = Mz$ ,  $H$  terá equação  $it\tilde{z}^1 - \tilde{z}^2 = 0$ , com  $t \in [0, 1]$ ). Em [22] é feita uma análise completa de superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^4$  com aplicação de Gauss 1-degenerada. Neste caso, o Teorema 4.7 de [22] dá uma representação completa dessa classe de superfícies:

$$X_t(z) = \Re e \int_{z_0}^z \left( 1, it, \frac{1}{2} \left( \frac{d}{F} + F \right), \frac{i}{2} \left( \frac{d}{F} - F \right) \right) \omega, \quad t \neq \pm 1, \quad d = t^2 - 1$$

onde  $F$  é uma função meromorfa e  $\omega$  é uma diferencial analítica.

Tendo em vista esses resultados, perguntamos se seria possível dar uma fórmula de representação geral para superfícies máximas em  $\mathbb{L}^4$  com aplicação de Gauss 1-degenerada. O primeiro e crucial passo para responder esta pergunta foi provar, usando outras técnicas, a Proposição 2.11 do Capítulo 2, semelhante à Proposição 2.5 de [22]. Essencialmente, a Proposição 2.11 diz que sob a ação do subgrupo  $O^{++}(n-1, 1)$  do grupo de Lorentz  $O(n-1, 1)$ , o hiperplano  $p_1 z^1 + \dots + p_{n-1} z^{n-1} - p_n z^n = 0$  do espaço projetivo complexo  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$  de dimensão  $n-1$ , pode assumir três formas especiais:  $it\tilde{z}^1 - \tilde{z}^2 = 0$ ,  $it\tilde{z}^1 + \tilde{z}^n = 0$  ou  $\tilde{z}^1 - it\tilde{z}^2 - \tilde{z}^n = 0$ , dependendo do tipo causal do subespaço real de dimensão 2 que contém os vetores  $\Re e(p), \Im m(p) \in \mathbb{L}^n$ . Usando este resultado, provamos os Teoremas 2.16, 2.17 e 2.18, os quais dão uma fórmula de representação geral para as superfícies máximas com aplicação de Gauss 1-degenerada de tipo 1, 2 e 3 em  $\mathbb{L}^4$ , dadas respectivamente por:

$$X_t(z) = \Re e \int_{z_0}^z \left( 1, it, \frac{i}{2} \left( r_1 g_1 - \frac{1}{g_1} \right), \frac{i}{2} \left( r_1 g_1 + \frac{1}{g_1} \right) \right) \eta_1, \quad t \neq \pm 1, \quad r_1 = t^2 - 1,$$

onde  $g_1$  é uma função meromorfa e  $\eta_1$  é uma diferencial analítica;

$$Y_t(z) = \Re e \int_{z_0}^z \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{g_2} + r_2 g_2 \right), \frac{i}{2} \left( \frac{1}{g_2} - r_2 g_2 \right), 1, -it \right) \eta_2, \quad r_2 = -(t^2 + 1)$$

onde  $g_2$  é uma função meromorfa e  $\eta_2$  é uma diferencial analítica e,

$$Z_t(z) = \Re e \int_{z_0}^z (1 + g_3 h_3, i(1 - g_3 h_3), g_3 - h_3, g_3 + h_3) dw$$

onde  $g_3(z)$  é uma função meromorfa e  $h_3(z) = \frac{-g_3(z) + t + 1}{(t-1)g_3(z) + 1}$ , ( $t \neq 0$ ).

No Capítulo 3 estudamos o Problema de Björling no espaço de Lorentz-Minkowski  $\mathbb{L}^4$ , que passaremos a descrever. No espaço Euclidiano de dimensão 3, seja  $\mathbf{c} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva regular real analítica e  $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  um campo analítico de vetores ao longo de  $\mathbf{c}$  tal que  $\|\mathbf{n}(s)\| = 1$  e  $\langle \mathbf{c}'(s), \mathbf{n}(s) \rangle = 0$  para todo  $s$  em  $I$ . Um tal par  $(\mathbf{c}, \mathbf{n})$  é chamado de *faixa real analítica*. O problema de Björling clássico ([13],[20]) foi proposto por E. G. Björling [8] em 1844 e consiste em construir uma superfície mínima  $S$  em  $\mathbb{R}^3$  dada por  $X : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$  satisfazendo as condições  $X(u, 0) = \mathbf{c}(u)$  e  $N(u, 0) = \mathbf{n}(u)$ , para todo  $u$  pertencente a  $I$ , onde  $N$  é a normal unitária de  $S$ . A solução para este problema foi dada por H. A. Schwarz em [40] por meio de uma fórmula explícita em termos da faixa prescrita  $(\mathbf{c}, \mathbf{n})$ . Esta fórmula dá um bonito método, além da representação de Weierstrass [37], para construir superfícies mínimas com interessantes propriedades geométricas. Por exemplo, propriedades de simetria.

O problema equivalente no espaço de Lorentz-Minkowski 3-dimensional foi proposto e resolvido, usando uma fórmula de representação complexa obtida em [3]. Os autores introduziram a teoria local de superfícies máximas em  $\mathbb{L}^3$  de um modo diferente da representação de Weierstrass de  $\mathbb{L}^3$  dado em ([29], [32]). No espaço Euclidiano de dimensão 4, o problema de Björling para superfícies mínimas foi proposto e resolvido em [6], veja também [4]. Nesse trabalho os autores também recuperam os princípios de simetria de superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^4$  obtidos por Eisenhart [15].

Motivado pelos resultados e técnicas de [3], [6] e [17], nós introduzimos no Capítulo 3 a teoria local de superfícies máximas em  $\mathbb{L}^4$ , usando uma fórmula de representação complexa—veja Teorema 3.1— que descreve a geometria local dessas superfícies. Essa fórmula é usada para resolver o problema de Björling em  $\mathbb{L}^4$ . Como uma consequência do Teorema 3.1 nós recuperamos as fórmulas de representação do problema de Björling para superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$  e superfícies máximas em  $\mathbb{L}^3$ . Também recuperamos os princípios de simetria para essas superfícies. Finalmente, estudamos os princípios de simetria para as superfícies máximas em  $\mathbb{L}^4$  e apresentamos novos exemplos.

Uma importante diferença entre a teoria global de superfícies máximas em  $\mathbb{L}^3$  e a teoria global de superfícies máximas em  $\mathbb{L}^4$  é estabelecida pelo assim chamado

*Teorema de Calabi–Bernstein.* Ele afirma que uma superfície máxima completa em  $\mathbb{L}^3$  é um plano ([9],[11]). No entanto, este resultado não pode se estendido para  $\mathbb{L}^n$ ,  $n \geq 4$ , como prova-se em [16]. Isto será confirmado através de alguns exemplos de superfícies máximas completas em  $\mathbb{L}^4$  via fórmula de Björling.

Depois que este trabalho ficou pronto, fomos informados que P. Mira (Ph.D. Thesis, Murcia, em preparação) estudou o problema de Björling para superfícies máximas em  $\mathbb{L}^n$ . Nós não temos acesso a este trabalho, mas o método parece ser diferente do nosso.

A partir do Capítulo 4 o trabalho tem como meta principal a classificação de todas as superfícies tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$  com aplicação de Gauss 1-degenerada de tipos 1, 2 e 3. Para este fim precisamos essencialmente saber que propriedades a aplicação  $G : M^2 \rightarrow G_{2,n}^+$  tem, pelo fato de ser definida como aplicação de Gauss generalizada de uma superfície tipo espaço  $S = X(M^2)$  imersa em  $\mathbb{L}^4$ . Usando as técnicas de D. Hoffman e R. Osserman ([23],[24]) e Kenmotsu [26], provamos que se  $G$  é dada localmente por  $\Phi$  através das funções complexas  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , então  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  precisam satisfazer certas equações envolvendo-as, veja Teorema 4.12 e Teorema 4.13. Como consequência do Teorema 4.13 nós recuperamos: 1. uma equação que é a condição de integrabilidade para superfícies em  $\mathbb{R}^3$  com curvatura média não nula e aplicação de Gauss prescritas dada por Kenmotsu em [25]; 2. uma equação que é a condição de integrabilidade para superfícies tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$  com curvatura média não nula e aplicação de Gauss prescritas dada por K. Akutagawa e S. Nishikawa em [2].

Por último na Proposição 4.15, damos uma fórmula de representação tipo Kenmotsu para superfícies tipo espaço simplesmente conexas imersas em  $\mathbb{L}^4$ , localmente conformes com vetor curvatura média não nulo e nem de tipo luz, que ilustramos com um exemplo.

No Capítulo 5, começamos fazendo um estudo de curvas tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$  adaptando o referencial de Frenet. Como aplicação damos uma descrição completa de uma classe especial de curvas tipo espaço: as hélices elípticas, hiperbólicas e parabólicas, as quais são definidas como sendo as *hélices* de  $\mathbb{L}^3$ , que têm respectivamente como

eixo uma reta  $l$  tipo tempo, espaço ou luz.

Finalmente, usando o Teorema 4.12 provamos os Teoremas 5.4, 5.6 e 5.8, onde classificamos localmente respectivamente todas as superfícies tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$  com aplicação de Gauss 1-degenerada de tipos 1, 2 e 3. Essencialmente nesses teoremas, mostramos que as superfícies tipo espaço com as propriedades acima são: localmente certas famílias de superfícies máximas em  $\mathbb{L}^4$ ; cilindros construídos sobre hélices contidas em algum  $\mathbb{L}^3 \subset \mathbb{L}^4$  ou superfícies contidas em algum espaço afim não degenerado de dimensão 3 de  $\mathbb{L}^4$ .

# Capítulo 1

## Preliminares

Este Capítulo tem como finalidade fixar notações e apresentar algumas propriedades básicas sobre o espaço de Lorentz-Minkowski de dimensão  $n$  [36], dando ênfase ao caso  $n = 4$  [35]. Apresentamos também resultados sobre superfícies tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$  obtidos por nós e em [17]. Finalmente, estudamos o conceito de aplicação de Gauss generalizada para superfícies tipo espaço em  $\mathbb{L}^n$  [22].

### 1.1 O Espaço de Lorentz-Minkowski de dimensão $n$

O espaço de *Lorentz-Minkowski* de dimensão  $n$ ,  $n \geq 2$ , denotado por  $\mathbb{L}^n$ , é o espaço Euclidiano de dimensão  $n$ , munido com uma forma bilinear  $\langle, \rangle$ , simétrica, não degenerada de índice 1, a qual é denominado *produto escalar lorentziano*. Seja  $\{e_i : 1 \leq i \leq n\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^n$  e sejam  $v = v^i e_i$ <sup>†</sup> e  $w = w^i e_i$  vetores de  $\mathbb{L}^n$ . Então,

$$\langle u, v \rangle = u^1 v^1 + \dots + u^{n-1} v^{n-1} - u^n v^n.$$

**Definição 1.1.** Um vetor  $v$  de  $\mathbb{L}^n$  é

1. tipo espaço, se  $\langle v, v \rangle > 0$  ou  $v = 0$ ;

---

<sup>†</sup>Usaremos a convenção de soma de Einstein  $v^i e_i = \sum_{i=1}^n v^i e_i$

2. tipo tempo, se  $\langle v, v \rangle < 0$ ;
3. tipo luz, se  $\langle v, v \rangle = 0$  e  $v \neq 0$ .

A divisão acima dá origem ao chamado *caráter causal* do vetor. Além disso, diremos que um vetor  $v$  tipo tempo ou luz é *futuro dirigido* se  $\langle v, e_n \rangle < 0$  e *passado dirigido* se  $\langle v, e_n \rangle > 0$ . Dizemos que um conjunto de  $n$  vetores  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$  é uma *base ortonormal* para  $\mathbb{L}^n$  se

- $\langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle = 0$ , se  $i \neq j$ ;
- $\langle \epsilon_i, \epsilon_i \rangle = 1$ , para todo  $i = 1, \dots, n-1$ ;
- $\langle \epsilon_n, \epsilon_n \rangle = -1$ .

Note que a base canônica  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  é uma base ortonormal de  $\mathbb{L}^n$  a qual também será chamada de canônica. A *norma lorentziana*  $\|v\|$  de um vetor  $v$  de  $\mathbb{L}^n$  é definida por  $\|v\| := \sqrt{|\langle v, v \rangle|}$ . Vamos orientar o espaço  $\mathbb{L}^n$  pelo elemento de volume

$$d\mathbb{L}^n := dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} \wedge (-dx^n), \quad (1.1)$$

onde  $\{dx^1, \dots, dx^n\}$  é a base dual da canônica de  $\mathbb{R}^n$  e  $d\mathbb{L}^n(v_1, \dots, v_n) = -\det(v_1, \dots, v_n)$ . Diremos que uma base ortonormal  $\{\epsilon_1, \dots, \epsilon_n\}$  de  $\mathbb{L}^n$  é *positivamente orientada* ou é um *referencial de Minkowski* se ela é compatível com a orientação  $d\mathbb{L}^n(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) < 0$  e além disso o vetor tipo tempo  $\epsilon_n$  é futuro dirigido.

Definimos o *cone de luz*  $C_L(x_0)$  em  $x_0 \in \mathbb{L}^n$  por

$$C_L(x_0) := \{x \in \mathbb{L}^n : \langle x - x_0, x - x_0 \rangle = 0\},$$

e o *raio de luz*  $R_{x_0, x}$  contendo  $x_0$  e  $x$  por

$$R_{x_0, x} := \{x_0 + t(x - x_0) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Também definimos a *pseudo-esfera* de raio  $r > 0$  em  $\mathbb{L}^n$  como sendo a hiperquádrica

$$S_1^{n-1}(r) := \{x \in \mathbb{L}^n : \langle x, x \rangle = r^2\},$$

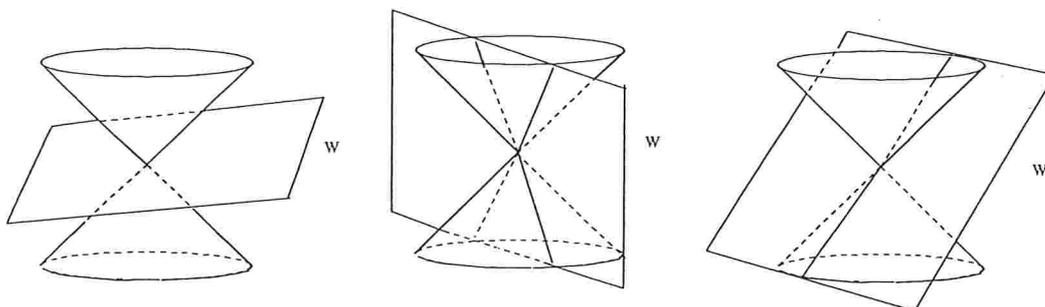
com dimensão  $n - 1$  e índice 1, e o *pseudo-espço hiperbólico* de raio  $r > 0$  em  $\mathbb{L}^n$  como sendo a hiperquádrica

$$H_0^{n-1}(-r) := \{x \in \mathbb{L}^n : \langle x, x \rangle = -r^2\},$$

com dimensão  $n - 1$  e índice 1.

Seja  $W$  um subespaço vetorial de  $\mathbb{L}^n$  e seja  $\langle, \rangle$  seu produto escalar. Então, existem três possibilidades mutuamente exclusivas para  $W$  (como ilustrado a figura abaixo):

- Se  $\langle, \rangle|_W$  é positivo definido, então  $W$  é *tipo espaço*;
- Se  $\langle, \rangle|_W$  é não-degenerado de índice 1, então  $W$  é *tipo tempo (Lorentziano)*;
- Se  $\langle, \rangle|_W$  é degenerado, então  $W$  é *tipo luz (degenerado)*.



Apresentamos no que se segue uma série de resultados bastante conhecidos sobre o  $\mathbb{L}^n$ , veja por exemplo ([35],[36]).

**Lema 1.1.** *Se  $v$  é um vetor tipo tempo de  $\mathbb{L}^n$ , então o subespaço  $\text{span}[v]^\perp$  é tipo espaço e  $\mathbb{L}^n = \text{span}[v] \oplus \text{span}[v]^\perp$ .*

**Lema 1.2.** *Para um subespaço  $W$  de  $\mathbb{L}^n$ , são equivalentes:*

1.  $W$  é degenerado;
2.  $W$  contém um vetor tipo luz, mas nenhum de tipo tempo;
3.  $W \cap \mathcal{C}_L(0) = R - \{0\}$ , onde  $R$  é um raio de luz.

A forma quadrática  $\mathbf{q}(v) = \langle v, v \rangle$ , associada ao produto escalar  $\langle, \rangle$  é chamada *elemento de comprimento* de  $\mathbb{L}^n$  e denotado por  $ds^2$ . Em coordenadas,

$$ds^2 = (dx^1)^2 + \cdots + (dx^{n-1})^2 - (dx^n)^2.$$

É possível construir uma base com vetores linearmente independentes em  $\mathcal{C}_L(x_0)$ , desde que não sejam mutuamente ortogonais, pois

**Proposição 1.3.** *Dois vetores tipo luz  $u$  e  $v$  de  $\mathbb{L}^n$  são ortogonais se, e somente se eles são paralelos.*

Uma aplicação linear  $T : \mathbb{L}^n \rightarrow \mathbb{L}^n$  é uma *transformação ortogonal* de  $\mathbb{L}^n$  se  $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$  para todo  $u$  e  $v$  em  $\mathbb{L}^n$ . Temos a seguinte

**Proposição 1.4.** *Seja  $T : \mathbb{L}^n \rightarrow \mathbb{L}^n$  uma aplicação linear. São equivalentes:*

1.  $T$  é uma transformação ortogonal;
2.  $T$  preserva a forma quadrática  $\mathbf{q}$ ;
3.  $T$  leva qualquer base ortonormal de  $\mathbb{L}^n$  em outra base ortonormal de  $\mathbb{L}^n$ .

Seja a matriz  $n \times n$ ,  $I_{n-1,1} := \begin{bmatrix} Id & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ . Note que, se considerarmos  $u$  e  $v$  como vetores coluna, podemos escrever  $\langle u, v \rangle$  na forma

$$\langle u, v \rangle = u^t I_{n-1,1} v.$$

Portanto, se  $A$  representa a matriz de  $T$ , temos que

$$\langle Au, Av \rangle = u^t A^t I_{n-1,1} Av,$$

donde

$$\langle Au, Av \rangle = \langle u, v \rangle \Leftrightarrow A^t I_{n-1,1} A = I_{n-1,1}.$$

Definimos o *grupo de Lorentz* ou *grupo pseudo-ortogonal* por

$$O(n-1, 1) := \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : A I_{n-1,1} A^t = I_{n-1,1}\}.$$

Isto é equivalente a dizer que  $O(n-1, 1)$  é o conjunto das matrizes de  $GL(n, \mathbb{R})$  que preservam o produto escalar  $\langle u, v \rangle = u^t I_{n-1,1} v$ .

O grupo  $O(n-1, 1)$  tem quatro componentes conexas. Para descrevê-las, escrevemos  $A \in O(n-1, 1)$  na forma de bloco como

$$\begin{bmatrix} a_E & b \\ c & a_T \end{bmatrix},$$

onde  $a_E$  é uma matriz de ordem  $n-1$  e  $a_T$  é um número real. Como  $A$  é invertível e preserva o caráter causal dos vetores de  $\mathbb{L}^n$ , segue-se que  $a_E$  é invertível e  $a_T \neq 0$ . Diremos que um elemento  $A \in O(n-1, 1)$  *preserva(inverte) a orientação do espaço* se  $\det(a_E) > 0$  ( $\det(a_E) < 0$ ), e *preserva(inverte) a orientação do tempo* se  $a_T > 0$  ( $a_T < 0$ ).

Deste modo,  $O(n-1, 1)$  se decompõe em quatro conjuntos abertos disjuntos indexados pelo sinal de  $\det(a_E)$  e de  $a_T$ :

$$O^{++}(n-1, 1), \quad O^{+-}(n-1, 1), \quad O^{-+}(n-1, 1) \quad \text{e} \quad O^{--}(n-1, 1).$$

**Observação 1.1.** O conjunto  $O^{++}(n-1, 1)$  é a componente da identidade, portanto um subgrupo de  $O(n-1, 1)$ . Destacamos ainda o *grupo pseudo-ortogonal especial*

$$SO(n-1, 1) = O^{++}(n-1, 1) \cup O^{--}(n-1, 1).$$

## 1.2 O espaço tempo de Lorentz-Minkowski

Estamos interessados no estudo de superfícies tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$ . Para isto precisamos saber um pouco de cálculo vetorial nesse espaço. Os elementos de  $\mathbb{L}^4$  são às vezes chamados de eventos, e se esse evento se escreve em coordenadas  $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$  em um base ortonormal  $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4\}$  de  $\mathbb{L}^4$ , nos referimos à  $(x^1, x^2, x^3)$  como sendo as coordenadas espaciais e a  $x^4$  como coordenada temporal do evento  $x$ .

Dados os vetores  $u, v$  e  $w$  de  $\mathbb{L}^4$ , nós definimos o *produto vetorial*  $\boxtimes(u, v, w)$  de  $\mathbb{L}^4$  por

$$\langle \boxtimes(u, v, w), x \rangle := -\det(u, v, w, x), \quad \forall x \in \mathbb{L}^4.$$

Agora de

$$\boxtimes(u, v, w) = \langle \boxtimes(u, v, w), e_1 \rangle e_1 + \langle \boxtimes(u, v, w), e_2 \rangle e_2 + \langle \boxtimes(u, v, w), e_3 \rangle e_3 - \langle \boxtimes(u, v, w), e_4 \rangle e_4$$

segue-se que o produto vetorial acima é dado em coordenadas por

$$\boxtimes(u, v, w) = \left( \begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \\ u^4 & v^4 & w^4 \end{array} \right|, - \left| \begin{array}{ccc} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^3 & v^3 & w^3 \\ u^4 & v^4 & w^4 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{ccc} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^4 & v^4 & w^4 \end{array} \right|, \left| \begin{array}{ccc} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{array} \right| \end{array} \right).$$

Por definição temos que

$$\langle \boxtimes(u, v, e_4), x \rangle = -\det(u, v, e_4, x) = \det(u, v, x, e_4).$$

De (1.1) segue-se que

$$\begin{aligned} \langle \boxtimes(u, v, e_4), x \rangle &= -(dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge (-dx^4))(u, v, x, e_4) \\ &= (dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3)(\hat{u}, \hat{v}, \hat{x}) \\ &= d\mathbb{R}^3(\hat{u}, \hat{v}, \hat{x}), \end{aligned}$$

onde  $\hat{u} = (u^1, u^2, u^3, 0)$ ,  $\hat{v} = (v^1, v^2, v^3, 0)$  e  $\hat{x} = (x^1, x^2, x^3, 0)$ . De modo análogo mostramos que

$$\langle \boxtimes(u, v, e_2), x \rangle = -d\mathbb{L}^3(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{x}), \quad (1.2)$$

onde  $\tilde{u} = (u^1, 0, u^3, u^4)$ ,  $\tilde{v} = (v^1, 0, v^3, v^4)$  e  $\tilde{x} = (x^1, 0, x^3, x^4)$ . Observamos que (1.2) define o produto vetorial  $\times$  em  $\mathbb{L}^3 \equiv \{x^2 = 0\} \subset \mathbb{L}^4$ . Temos a seguinte

**Proposição 1.5.** *O produto vetorial  $\boxtimes$  de  $\mathbb{L}^4$  tem as seguintes propriedades:*

1.  $\langle \boxtimes(u, v, w), u \rangle = \langle \boxtimes(u, v, w), v \rangle = \langle \boxtimes(u, v, w), w \rangle = 0$ ;
2.  $\boxtimes(u, v, e_4) = \hat{u} \times \hat{v}$ , onde  $\hat{u} = (u^1, u^2, u^3, 0)$ ,  $\hat{v} = (v^1, v^2, v^3, 0) \in \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{L}^4$ ;
3.  $\boxtimes(u, v, e_2) = \tilde{u} \times \tilde{v}$ , onde  $\tilde{u} = (u^1, 0, u^3, u^4)$ ,  $\tilde{v} = (v^1, 0, v^3, v^4) \in \mathbb{L}^3 \subset \mathbb{L}^4$ ;
4.  $\boxtimes(u, v, e_1) = -\tilde{u} \times \tilde{v}$  e  $\boxtimes(u, v, e_3) = -\tilde{u} \times \tilde{v}$ ;

$$5. \langle \boxtimes(u_1, u_2, u_3), \boxtimes(v_1, v_2, v_3) \rangle = -\det(\langle u_i, v_j \rangle), \quad 1 \leq i, j \leq 3, \quad u_i, v_j \in \mathbb{L}^4;$$

onde  $\times$  é respectivamente o produto vetorial de  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{L}^3$ .

Agora dado um 2-plano tipo espaço  $\Pi = \text{span}[u, v]$  em  $\mathbb{L}^4$ , onde  $\langle u, u \rangle = \langle v, v \rangle = \lambda^2 > 0$  e  $\langle u, v \rangle = 0$ , sejam

$$\nu_0 := \boxtimes(u, v, e_4), \quad \tau_0 := \lambda^2 e_4 + u^4 u + v^4 v. \quad (1.3)$$

Então  $\{\nu_0, \tau_0\}$  é uma base para  $\Pi^\perp$ .

**Proposição 1.6.** ([17]) *Sejam  $\nu_0$  e  $\tau_0$  definidos como acima. Temos que:*

1.  $\nu_0 = \hat{u} \times \hat{v}$  e  $\langle \nu_0, \nu_0 \rangle = \lambda^2(\lambda^2 + (u^4)^2 + (v^4)^2)$ ;
2.  $\tau_0 = \boxtimes\left(\frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda}, \nu_0\right)$  e  $\langle \tau_0, \tau_0 \rangle = -\lambda^2(\lambda^2 + (u^4)^2 + (v^4)^2)$ ;
3. se  $\mu_0 := \sqrt{\lambda^2(\lambda^2 + (u^4)^2 + (v^4)^2)}$ ,  $\nu := \frac{\nu_0}{\mu_0}$  e  $\tau := \frac{\tau_0}{\mu_0}$ , então  $\left\{\frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda}, \nu, \tau\right\}$  é uma base ortonormal positivamente orientada de  $\mathbb{L}^4$ .

**Demonstração:** O item (1) segue-se dos itens (2) e (5) da Proposição 1.5. Ainda pelo item (5) da Proposição 1.5 vemos que  $\langle \boxtimes\left(\frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda}, \nu_0\right), \boxtimes\left(\frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda}, \nu_0\right) \rangle = -\langle \nu_0, \nu_0 \rangle = -\lambda^2(\lambda^2 + (u^4)^2 + (v^4)^2)$ . Além disso, a quarta coordenada de  $\boxtimes\left(\frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda}, \nu_0\right)$  é igual a  $\lambda^2 + (u^4)^2 + (v^4)^2 = \tau_0^4$ . Assim, temos dois vetores futuro dirigidos com normas iguais e ortogonais à  $u, v$  e  $\nu_0$ . Portanto são iguais, o que prova (2). Para provar (3) basta observar que  $\det\left(\frac{u}{\lambda}, \frac{v}{\lambda}, \nu, \tau\right) = -\langle \tau, \tau \rangle = 1$ .  $\square$

### 1.3 Superfícies tipo espaço em $\mathbb{L}^n$

**Definição 1.2.** Uma imersão diferenciável  $X : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^n$  de uma variedade diferenciável conexa e orientada de dimensão 2 é chamada uma *superfície tipo espaço*  $S$  em  $\mathbb{L}^n$ , se a métrica induzida  $ds^2 := X^*\langle, \rangle$  sobre  $M^2$  é uma métrica Riemanniana.

Qualquer ponto  $p$  de  $M^2$  tem um sistema de *coordenadas isotérmico*  $(U, z = u + iv)$ , isto é,

$$\langle X_u, X_u \rangle = \langle X_v, X_v \rangle = \lambda^2 > 0, \quad \langle X_u, X_v \rangle = 0, \quad (1.4)$$

onde  $X_u(z) := \frac{\partial}{\partial u}(f \circ z^{-1})(z)$ ,  $X_v(z) := \frac{\partial}{\partial v}(f \circ z^{-1})(z)$ . Assim, podemos escrever  $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$ . Uma estrutura conforme é então induzida sobre  $M^2$ , tornando-a uma superfície de Riemann.

**Observação 1.2.** Às vezes nos referimos a um sistema de coordenadas isotérmico  $(U, z = u + iv)$  de  $M^2$ , simplesmente dizendo que  $z$  é um parâmetro conforme na vizinhança de um ponto  $p$  de  $M^2$  ou que  $z$  é uma coordenada isotérmica.

Seja  $S$  uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$ . De acordo com a Proposição 1.6, podemos definir uma base ortonormal  $\{\nu, \tau\}$  de  $(T_X(p)S)^\perp$  por

$$\nu = \frac{\nu_0}{\mu_0} \quad \text{and} \quad \tau = \frac{\tau_0}{\mu_0}, \quad (1.5)$$

onde

$$\nu_0 = \boxtimes(X_u, X_v, e_4), \quad \tau_0 = \lambda^2 e_4 + x_u^4 X_u + x_v^4 X_v, \quad \mu_0 = \sqrt{\lambda^2(\lambda^2 + (x_u^4)^2 + (x_v^4)^2)},$$

e onde  $z = u + iv$  é um parâmetro conforme na vizinhança  $U$  de  $p$ . Observe que  $\nu$  e  $\tau$  são respectivamente campos de vetores tipo espaço e tipo tempo futuro dirigido, normais à superfície  $S = X(M)$ . Além disso, se  $(U, z = u + iv)$  e  $(V, w(z) = \tilde{u}(z) + i\tilde{v}(z))$  são vizinhanças conformes de  $M^2$  tal que  $U \cap V \neq \emptyset$ , então  $X_{\tilde{u}} = X_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}$ ,  $X_{\tilde{v}} = X_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + X_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}$ ,  $\tilde{\nu}_0(w) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})} \nu_0(z)$  e  $\tilde{\tau}_0(w) = \frac{\partial(u,v)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})} \tau_0(z)$ . Assim,  $\tilde{\nu}(w) = \nu(z)$  e  $\tilde{\tau}(w) = \tau(z)$  para todo ponto em  $U \cap V$ . Portanto,  $\nu$  e  $\tau$  são vetores unitários globalmente definidos ao longo da superfície  $S$ . Vamos denotar  $\beta = \{\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4\}$  como sendo o *referencial ortonormal local* adaptado a  $S$ , onde

$$\partial_1 = \frac{X_u}{\lambda}, \quad \partial_2 = \frac{X_v}{\lambda}, \quad \partial_3 = \nu, \quad \partial_4 = \tau. \quad (1.6)$$

**Observação 1.3.** O referencial normal  $\{\nu, \tau\}$  acima, foi introduzido em [17], onde superfícies tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$  são estudadas.

## 1.4 Equações fundamentais

**Definição 1.3.** Sejam  $u^1, \dots, u^n$  coordenadas naturais sobre  $\mathbb{L}^n$ . Se  $V = v^i e_i$  e  $W = w^i e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  são campos de vetores sobre  $\mathbb{L}^n$ , o campo de vetores

$$\bar{\nabla}_V W = V[w^i]e_i$$

é chamado a *derivada covariante natural* de  $W$  com respeito a  $V$ .

Esta definição pode ser estendida para variedades semi-Riemannianas arbitrárias.

**Teorema 1.7.** ([36]) *Sobre uma variedade semi-Riemanniana  $M^n$ , existe uma única conexão  $\nabla$  tal que*

1.  $[V, W] = \nabla_V W - \nabla_W V$ ,
2.  $Z\langle V, W \rangle = \langle \nabla_Z V, W \rangle + \langle V, \nabla_Z W \rangle$ ,

onde  $Z, V, W \in \mathcal{X}(M)$ .  $\nabla$  é chamada *conexão de Levi-Civita* de  $M$ , e é caracterizada pela fórmula de Koszul

$$2\langle \nabla_V W, Z \rangle = V\langle W, Z \rangle + W\langle Z, V \rangle - Z\langle V, W \rangle - \langle V, [W, Z] \rangle + \langle W, [Z, V] \rangle + \langle Z, [V, W] \rangle.$$

Sejam  $M^n$  e  $\bar{M}^m$  respectivamente uma variedade Riemanniana e semi-Riemanniana, e seja  $f : M^n \rightarrow \bar{M}^m$  uma imersão isométrica. Considerando a decomposição  $T_{f(p)}\bar{M} = df_p(T_p M) \oplus df_p(T_p M)^\perp$ , qualquer vetor  $v \in T_{f(p)}\bar{M}$ ,  $p \in M$ , tem uma única expressão  $v = v^\top + v^\perp$ . Sendo  $\bar{\nabla}$  a conexão de  $\bar{M}$ , podemos definir a conexão  $\nabla$  de  $M$  por

$$f_*(\nabla_V W) := \left( \bar{\nabla}_{\tilde{V}} \tilde{W} \right)^\top \quad (1.7)$$

onde  $\tilde{V}$  é uma extensão de  $df_p(V_p) = (f_*V)_{f(p)}$ . Assim obtemos a *fórmula de Gauss*

$$\bar{\nabla}_V f_* W = f_* \nabla_V W + \alpha(V, W), \quad \forall V, W \in \mathcal{X}(M), \quad (1.8)$$

onde  $\alpha : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)^\perp$  é a *segunda forma fundamental* de  $M$ . A *conexão normal*  $\nabla^\perp$  é definida por

$$\nabla_V^\perp \xi := (\bar{\nabla}_V \xi)^\perp = \bar{\nabla}_V \xi - (\bar{\nabla}_V \xi)^\top, \quad \forall \xi \in \mathcal{X}(M)^\perp. \quad (1.9)$$

Agora dado  $\xi \in \mathcal{X}(M)^\perp$  unitário o operador de Weingarten  $A^\xi : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$  é definido por

$$\langle A^\xi(V), W \rangle = \langle \alpha(V, W), \xi \rangle. \S \quad (1.10)$$

Assim que,

$$(\bar{\nabla}_V \xi)^\top = -f_* A^\xi(V). \quad (1.11)$$

Logo, segue-se de (1.9) que

$$\bar{\nabla}_V \xi = -f_* A^\xi(V) + \nabla_V^\perp \xi; \quad (1.12)$$

esta equação é a *fórmula de Weingarten*.

Indicaremos por  $R$  e  $\bar{R}$  os tensores de curvatura respectivamente de  $M$  e  $\bar{M}$  e  $R^\perp$  o tensor normal relativo à imersão  $f$ . Lembramos que

$$R(V, W)Z = \nabla_V \nabla_W Z - \nabla_W \nabla_V Z - \nabla_{[V, W]} Z, \quad \forall V, W, Z \in \mathcal{X}(M).$$

## 1.5 O método do referencial móvel

Sejam  $\bar{\nabla}$  e  $\nabla$ , respectivamente as conexões de Levi-Civita de  $\mathbb{L}^4$  e de  $(M^2, ds^2)$ , onde  $M^2$  é uma variedade diferenciável e  $ds^2$  é a métrica Riemanniana induzida por uma imersão isométrica de  $M^2$  em  $\mathbb{L}^4$ . Diremos que  $\beta_U = \{e_A : 1 \leq A \leq 4\}$  é um *referencial móvel* no aberto  $U$  de  $\mathbb{L}^4$  se, para todo ponto  $p$  de  $U$ ,  $\{e_A(p) : 1 \leq A \leq 4\}$  é uma base positivamente orientada de  $\mathbb{L}^4$ , e que  $\beta_U^* = \{\theta^A : 1 \leq A \leq 4\}$  é um *co-referencial dual* de  $\beta_U$  se, para todo  $p$  em  $U$ ,  $\{\theta^A(p) : 1 \leq A \leq 4\}$  é a base dual de  $\{e_A(p) : 1 \leq A \leq 4\}$ , isto é,  $\theta^A(e_B) = 1$ , se  $A = B$  e  $\theta^A(e_B) = 0$ , se  $A \neq B$ ,  $1 \leq B \leq 4$ .

**Observação 1.4.** Nesta seção vamos usar como índices  $A, B, C$  variando de 1 a 4;  $i, j, k$  variando de 1 a 2 e  $\alpha, \beta, \gamma$  variando de 3 a 4.

---

<sup>\S</sup>Note que para hipersuperfícies  $\alpha(V, W) = \varepsilon \langle A^\xi(V), W \rangle \xi$ , onde  $\varepsilon = \langle \xi, \xi \rangle$ .

Sejam  $S$  uma superfície tipo espaço dada pela imersão  $X : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$  e  $U$  um aberto de  $\mathbb{L}^4$  tal que  $S \cap U \neq \emptyset$  e  $X|_\Omega$  seja um mergulho, onde  $\Omega \subseteq X^{-1}(S \cap U)$  é um aberto conexo. Neste caso, diremos que o referencial móvel  $\beta_U = \{e_A : 1 \leq A \leq 4\}$  é adaptado a  $S$ , se  $e_1, e_2 \in \mathcal{X}(X(\Omega))$  e  $e_3, e_4 \in \mathcal{X}(X(\Omega))^\perp$ . Caso  $X_*(\tilde{e}_1) = e_1$  e  $X_*(\tilde{e}_2) = e_2$ ,  $\beta_\Omega = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$  é um referencial móvel ortonormal de  $M^2$ .

Dado agora  $V \in \mathcal{X}(U)$ , podemos escrever  $V = \theta^A(V)e_A$ ,  $A = 1, 2, 3, 4$ , onde

$$\theta^A(V) := \langle V, e_A \rangle, \text{ se } A = 1, 2, 3 \text{ e } \theta^4(V) := -\langle V, e_4 \rangle.$$

Definimos as 1-formas de conexão de  $\beta_U$  por

$$\bar{\nabla} e_A := \theta_A^B \otimes e_B, \quad (1.13)$$

ou seja, se  $V \in \beta_U$ , então  $\bar{\nabla}_V e_A = \theta_A^B(V)e_B$  que é equivalente a  $\theta_A^B(V) = \theta^B(\bar{\nabla}_V e_A)$ .

**Proposição 1.8.** *Seja  $\beta_U = \{e_A : 1 \leq A \leq 4\}$  um referencial móvel no aberto  $U$  de  $\mathbb{L}^4$  e  $\beta_U^* = \{\theta^A : 1 \leq A \leq 4\}$  o co-referencial dual. Então as 1-formas  $\theta_A^B$  em  $U$ , satisfazem*

$$1. d\theta^A = -\theta_B^A \wedge \theta^B, \text{ (1ª equação de estrutura);}$$

$$2. d\theta_B^A = -\theta_C^A \wedge \theta_B^C, \text{ (2ª equação de estrutura),}$$

onde  $\theta_A^B = -\theta_B^A$ , para todo  $1 \leq A, B \leq 3$ ,  $\theta_A^A = \theta_4^4 = 0$ .

**Demonstração:** A primeira segue do fato que

$$d\theta^A(V, W) = V[\theta^A(W)] - W[\theta^A(V)] - \theta^A([V, W]), \quad \forall V, W \in \mathcal{X}(U),$$

$\theta^A(V) = \langle V, e_A \rangle$  para  $A = 1, 2, 3$ ,  $\theta^4(V) = -\langle V, e_4 \rangle$  e  $\theta_A^B(V) = \langle \bar{\nabla}_V e_A, e_B \rangle$ . A segunda equação segue-se de  $\bar{R} \equiv 0$ , pois

$$\bar{\nabla}_V \bar{\nabla}_W e_B = V[\theta_B^A(W)]e_A + \theta_B^A(W)\theta_A^C(V)e_C.$$

Por último, note que

$$0 = V[\langle e_4, e_A \rangle] = \langle \bar{\nabla}_V e_4, e_A \rangle + \langle e_4, \bar{\nabla}_V e_A \rangle = \theta_4^A(V)\langle e_A, e_A \rangle + \theta_A^4(V)\langle e_4, e_4 \rangle.$$

Assim,  $\langle e_A, e_A \rangle \theta_4^A(V) - \theta_4^A(V) = 0$ . □

Sejam agora  $\omega^A := X^* \theta^A$ ,  $\omega_B^A := X^* \theta_B^A$ . Então para um referencial adaptado à superfície, temos que se  $V$  é tangente à superfície  $S$ , então

- $\omega^3(V) = X^* \theta^3(V) = \theta^3(dX(V)) = 0$ ,
- $\omega^4(V) = X^* \theta^4(V) = \theta^4(dX(V)) = 0$ .

Assim, se  $\beta_\Omega = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$  é um referencial móvel em  $\Omega \subset M^2$  e se  $\beta_\Omega^* = \{\omega^1, \omega^2\}$  o seu dual, segue-se de (1.7) que

$$X_* \nabla_V \tilde{e}_j = (\overline{\nabla}_{dX(V)} dX(\tilde{e}_j))^T = \omega_j^i(V) dX(\tilde{e}_i) = X_* (\omega_j^i(V) \tilde{e}_i).$$

Portanto,  $\nabla_V \tilde{e}_j = \omega_j^i(V) \tilde{e}_i$ ,  $1 \leq i, j \leq 2$ . Além disso, como  $X^*$  comuta com  $d$  temos:

**Proposição 1.9.** *Seja  $\beta_U = \{e_A : 1 \leq A \leq 4\}$  um referencial móvel adaptado à uma superfície  $S$  tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$  e  $\beta_U^* = \{\omega^A : 1 \leq A \leq 4\}$  o co-referencial dual. Então as 1-formas  $\omega_B^A$ , satisfazem*

1.  $d\omega^A = -\omega_j^A \wedge \omega^j$ ,  $\omega^\alpha = 0$ ;
2.  $d\omega_B^A = -\omega_C^A \wedge \omega_B^C$ ,

onde  $\omega_A^B = -\omega_B^A$ , para todo  $1 \leq A, B \leq 3$ ,  $\omega_A^4 = \omega_4^A$  e  $\omega_4^4 = 0$ .

Vamos agora reescrever as equações (1) e (2) acima, tendo o cuidado de separar as partes tangentes e normais:

- $d\omega^i = -\omega_j^i \wedge \omega^j$ ,
- $d\omega_j^i = -\omega_k^i \wedge \omega_j^k - \omega_\alpha^i \wedge \omega_j^\alpha$ ,
- $d\omega_\alpha^i = -\omega_k^i \wedge \omega_\alpha^k - \omega_\beta^i \wedge \omega_\alpha^\beta$ ,
- $d\omega_\beta^\alpha = -\omega_k^\alpha \wedge \omega_\beta^k - \omega_\gamma^\alpha \wedge \omega_\beta^\gamma$ .

A equação de Gauss: pela primeira e segunda equações de estrutura temos que

$$\omega_i^\alpha \wedge \omega^i = 0, \quad d\omega_2^1 = \omega_1^3 \wedge \omega_2^3 - \omega_1^4 \wedge \omega_2^4.$$

Pelo Lema de Cartan,  $\omega_i^\alpha = h_{ij}^\alpha \omega^j$ , donde segue-se que

$$d\omega_2^1 = (h_{11}^3 h_{22}^3 - h_{21}^3 h_{21}^3) \omega^1 \wedge \omega^2 - (h_{11}^4 h_{22}^4 - h_{21}^4 h_{21}^4) \omega^1 \wedge \omega^2$$

Por outro lado,  $X_*(A^{e_\alpha}) = -(\omega_\alpha^i \otimes e_i)^\top = -(\omega_\alpha^1 \otimes e_1 + \omega_\alpha^2 \otimes e_2)$ , onde  $\omega_3^i = -\omega_i^3$  e  $\omega_4^i = \omega_i^4$ ,  $i = 1, 2$ . Portanto na base  $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ ,

$$[A^{e_\alpha}] = \varepsilon^\alpha \begin{bmatrix} h_{11}^\alpha & h_{12}^\alpha \\ h_{21}^\alpha & h_{22}^\alpha \end{bmatrix}, \quad \varepsilon^\alpha = \langle e_\alpha, e_\alpha \rangle = \pm 1.$$

Portanto,

$$d\omega_2^1 = (\det(A^{e_3}) - \det(A^{e_4})) \omega^1 \wedge \omega^2.$$

Finalmente, seja  $\Omega_j^i$  a 2-forma de curvatura dada por  $Re_j := \Omega_j^i \otimes e_i$ , então  $\Omega_2^1(e_1, e_2) = \langle R(e_1, e_2)e_2, e_1 \rangle = K$ , onde  $K$  é a curvatura Gaussiana da superfície  $S$ . Conclusão, para o referencial adaptado dado em (1.6) temos que

$$K = \det(A^\nu) - \det(A^\tau).$$

**Lema 1.10.** *Sejam  $S = X(M)$  uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$  e  $(U, z = u + iv)$  coordenadas isotérmicas locais de  $M^2$ . Então*

$$K = -\frac{\Delta \log \lambda}{\lambda^2},$$

onde  $\Delta$  é o Laplaciano usual.

**Demonstração:** Sejam  $e_1 := \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial u}$ ,  $e_2 := \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial v}$  então  $\omega^1 = \lambda du$  e  $\omega^2 = \lambda dv$ . Assim  $\omega_1^2 = -\frac{\lambda_v}{\lambda} du + \frac{\lambda_u}{\lambda} dv$ . O resultado segue-se de  $d\omega_2^1 = K\omega^1 \wedge \omega^2$ ,  $\square$

Agora, seja  $\Omega_\beta^\alpha$  a 2-forma de curvatura normal definida por  $R^\perp e_\beta := \Omega_\beta^\alpha \otimes e_\alpha$ , logo  $\Omega_\beta^\alpha(e_i, e_j) = \varepsilon^\alpha \langle R^\perp(e_i, e_j)e_\beta, e_\alpha \rangle$ . Por outro lado, podemos mostrar que  $R^\perp(e_i, e_j)e_\beta = d\omega_\beta^\alpha(e_i, e_j)e_\alpha - (\omega_\beta^\alpha \wedge \omega_\alpha^\gamma)(e_i, e_j)e_\gamma$ , donde segue-se que  $R^\perp(e_i, e_j)e_\beta = d\omega_\beta^\alpha(e_i, e_j)e_\alpha$ .

Assim,  $\Omega_\beta^\alpha = d\omega_\beta^\alpha = -\omega_k^\alpha \wedge \omega_\beta^k$ . Agora como  $0 = d\omega^\alpha = -\omega_i^\alpha \wedge \omega^i$ , pelo Lema de Cartan podemos escrever

$$\omega_k^\alpha = h_{ki}^\alpha \omega^i, \quad h_{ki}^\alpha = h_{ik}^\alpha,$$

de modo que

$$\Omega_\beta^\alpha = \sum_k \varepsilon^\beta h_{ki}^\alpha h_{kj}^\beta \omega^i \wedge \omega^j,$$

donde segue-se a *equação de Ricci*,

$$R^\perp(V, W)\xi = \alpha(V, A^\xi W) - \alpha(W, A^\xi V), \quad \xi \in \chi(U)^\perp,$$

onde  $\alpha(V, Z) = h_{ij}^\alpha \omega^i(V)\omega^j(Z)e_\alpha$ . A *curvatura normal*  $K_N$  da superfície tipo espaço  $S = X(M)$  em  $\mathbb{L}^4$  é definida por  $K_N := \langle R^\perp(e_1, e_2)e_4, e_3 \rangle$ , logo

$$d\omega_4^3 = K_N \omega^1 \wedge \omega^2,$$

ou seja  $K_N = \Omega_4^3(e_1, e_2)$ , ou ainda  $K_N = \langle [A^{e_4}, A^{e_3}]e_1, e_2 \rangle$ .

**Lema 1.11.** ([30], [39]) *Sejam  $S$  uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$ ,  $\nu$  e  $\tau$  os vetores normais unitários espacial e temporal de  $S$ . Então*

$$K_N = \frac{4}{\lambda^2} \mathfrak{Im}(\langle \nu_z, \tau_{\bar{z}} \rangle),$$

onde  $z = u + iv$  é parâmetro conforme em  $S$ .

**Demonstração:** Seja  $\{\frac{\partial u}{\lambda}, \frac{\partial v}{\lambda}, \nu, \tau\}$  o referencial adaptado a  $S$  dada em (1.6). Não é difícil ver que  $\omega_4^3 = \langle \tau_u, \nu \rangle du + \langle \tau_v, \nu \rangle dv$ , de modo que

$$\begin{aligned} d\omega_4^3 &= \frac{1}{\lambda^2} (\langle \tau_v, \nu \rangle_u - \langle \tau_u, \nu \rangle_v) \omega^1 \wedge \omega^2 \\ &= -\frac{4}{\lambda^2} \mathfrak{Im}(\langle \nu_{\bar{z}}, \tau_z \rangle) \omega^1 \wedge \omega^2. \end{aligned}$$

□

Para finalizar esta seção vamos definir *superfície máxima* em  $\mathbb{L}^4$ . Dado  $p \in M^2$ , o *vetor curvatura média* da superfície  $S = X(M^2)$  é  $H_p = \frac{1}{2} \text{tr}(\alpha_p)$ ; se  $\{e_1, e_2\}$  é uma base ortonormal de  $T_p M$ , então

$$H_p = \frac{1}{2} (\alpha(e_1, e_1) + \alpha(e_2, e_2)). \quad (1.14)$$

**Definição 1.4.** Uma superfície  $S$  tipo espaço em  $\mathbb{L}^n$  é *máxima* se  $H \equiv 0$ .

Observamos que a palavra máxima aqui é simplesmente sinônimo para superfícies tipo espaço com vetor curvatura média zero, já que em  $\mathbb{L}^4$  essas superfícies representam o máximo (resp. mínimo) para a integral de área, se a variação normal é feita na direção do tempo (resp. espaço); mais detalhes ver [27].

## 1.6 O operador de Laplace-Beltrami

Seja  $C^\infty(M)$  o conjunto das funções  $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$ . O *gradiente* de  $f$  é definido por  $df(V) = \langle grad(f), V \rangle$ , para todo  $V \in \mathcal{X}(M)$ . A *divergência* de  $V$  é a função  $div(V) : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $div(V)_p := tr(w_p \rightarrow \nabla_{w_p} V)$ ; se  $\beta_U = \{e_i : i = 1, 2\}$  é um referencial móvel ao longo de  $U \subset M^2$ , então podemos ver que  $div(V) = \sum_i \langle \nabla_{e_i} V, e_i \rangle$ . Também, se  $f \in C^\infty(M)$  e  $\Delta_M := div(grad(f))$ , então

$$\Delta_M f = \sum_i (e_i[e_i[f]] - e_j[f]\omega_i^j(e_i)). \quad (1.15)$$

Dizemos que  $f \in C^\infty(M)$  é harmônica se  $\Delta_M f \equiv 0$ . Além disso, de (1.15) segue-se que  $\Delta_M = \frac{1}{\lambda^2} \Delta$ , onde  $\Delta := \partial_u^2 + \partial_v^2$  é o Laplaciano usual em coordenadas conformes.

**Proposição 1.12.** ([39]) *Se  $S = X(M)$  é uma superfície tipo espaço de  $\mathbb{L}^n$ , então  $\Delta_M X = 2H$ .*

**Demonstração:** De (1.14), temos que  $2H_p = \sum_i \alpha_p(e_i, e_i)$ . Por outro lado, da equação de Gauss dada em (1.8), segue-se que  $\alpha(e_i, e_i) = \bar{\nabla}_{e_i}(X_* e_i) - X_*(\nabla_{e_i} e_i)$ , donde  $\alpha(e_i, e_i) = e_i[e_i[X]] - e_j[X]\omega_i^j(e_i)$ . Assim,  $2H = \sum_i (e_i[e_i[X]] - e_j[X]\omega_i^j(e_i))$ . □

## 1.7 Grassmanniano e quádrlica complexa

O espaço complexo  $n$ -dimensional  $\mathbb{C}^n$ , munido da *forma hermitiana*

$$\langle\langle z, w \rangle\rangle = \sum_{j=1}^{n-1} z^j \bar{w}^j - z^n \bar{w}^n,$$

será denotado por  $\mathbb{C}_1^n$ . Seja  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$  o *espaço projetivo complexo* de dimensão complexa  $n - 1$ , isto é, o espaço de todas as retas complexas que passam pela origem de  $\mathbb{C}^n$ , com a topologia quociente. De modo equivalente,

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}^n) = (\mathbb{C}^n \setminus \{0\}) / \sim, \quad z \sim w \Leftrightarrow z = \lambda w, \quad \lambda \in \mathbb{C}^*, \quad z, w \in \mathbb{C}^n.$$

Em vista da forma hermitiana dada acima, podemos dividir  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$  em três subconjuntos: 1) O *espaço projetivo complexo indefinido* de dimensão complexa  $n - 1$ ,  $\mathbb{CP}_1^{n-1} := \{z \in \mathbb{C}^n : \ll z, z \gg > 0\} / \sim$ , correspondendo às retas positivas de  $\mathbb{C}_1^n$ ; 2) o *espaço hiperbólico complexo* de dimensão complexa  $n - 1$ ,  $\mathbb{CH}^{n-1} := \{z \in \mathbb{C}^n : \ll z, z \gg < 0\} / \sim$ , correspondendo às retas negativas de  $\mathbb{C}_1^n$  e 3) o *cone complexo*, ou seja o bordo de  $\mathbb{CH}^{n-1}$ ,  $\partial\mathbb{CH}^{n-1} := \{z \in \mathbb{C}^n : \ll z, z \gg = 0\} / \sim$ , correspondendo às retas nulas de  $\mathbb{C}_1^n$ .

Vamos agora identificar a quádrlica complexa  $Q_1^{n-2}$  de  $\mathbb{CP}_1^{n-1}$ ,

$$Q_1^{n-2} = \{[z] \in \mathbb{CP}_1^{n-1} : (z^1)^2 + \dots + (z^{n-1})^2 - (z^n)^2 = 0\} \quad (1.16)$$

com o conjunto de todos os 2-planos que passam pela origem, tipo espaço e orientados de  $\mathbb{L}^n$ . Este conjunto é o Grassmanniano, que será denotado por  $G_{2,n}^+$ . Com efeito, para qualquer ponto  $p = [(z^1, z^2, \dots, z^n)]$  de  $Q_1^{n-2}$ , se  $z^k = u^k + iv^k$ , obtemos um par de vetores  $u = (u^1, u^2, \dots, u^n)$  e  $v = (v^1, v^2, \dots, v^n)$  de  $\mathbb{L}^n$  satisfazendo  $\langle u, u \rangle = \langle v, v \rangle = \lambda^2 > 0$ ,  $\langle u, v \rangle = 0$ , onde  $\langle, \rangle$  é a métrica Lorentziana de  $\mathbb{L}^n$ . Assim,  $\{u, v\}$  forma uma base ortogonal positiva de um 2-plano de tipo espaço orientado  $\Pi$ . Inversamente, para qualquer 2-plano de tipo espaço orientado  $\Pi$ , podemos escolher uma base ortonormal positiva  $\{u, v\}$  de  $\Pi$  e, pondo  $z := u + iv$ , obtemos um ponto  $p = [z]$  de  $Q_1^{n-2}$ . Portanto, podemos construir uma aplicação natural de  $G_{2,n}^+$  no espaço projetivo complexo indefinido  $\mathbb{CP}_1^{n-1}$ , a qual é um difeomorfismo sobre a quádrlica complexa  $Q_1^{n-2}$ .

**Observação 1.5.** a) Usaremos mais tarde que  $[z] \in Q_1^{n-2}$  se, e somente se  $\ll z, \bar{z} \gg = \langle z, z \rangle^{\mathbb{C}} = 0$ , pois  $\langle z, z \rangle^{\mathbb{C}} = \ll z, \bar{z} \gg = (z^1)^2 + \dots + (z^{n-1})^2 - (z^n)^2$ .

b) Uma diferente escolha de base orientada para  $\Pi$ , nos levará a  $\tilde{z} = e^{i\theta} z$ , que corresponde ao mesmo ponto  $[z]$  da quádrlica.

Denotamos por  $G_{2,n}^-$  o Grassmanniano de todos os 2-planos tipo tempo e orientados de  $\mathbb{L}^n$ . Dados  $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{L}^n$ , com  $\langle \nu_1, \nu_1 \rangle = -\langle \nu_2, \nu_2 \rangle = \lambda^2 > 0$  e  $\langle \nu_1, \nu_2 \rangle = 0$ , seja  $\Pi = \text{span}[\nu_1, \nu_2] \in G_{2,4}^-$ . Nós podemos identificar, como acima,  $G_{2,n}^-$  com a quádrlica real  $QR$ , a qual é definida como o conjunto das classes  $[z] \in \partial\mathbb{C}\mathbb{H}^{n-1}$  tal que  $\langle \Re e(z), \Im m(z) \rangle = 0$  e  $\Re e(z), \Im m(z)$  são linearmente independentes.

## 1.8 A aplicação de Gauss generalizada

Lembramos em primeiro lugar que a superfície tipo espaço  $S$  é, por definição orientada. A *aplicação de Gauss generalizada*  $G$  de uma superfície  $S$  tipo espaço em  $\mathbb{L}^n$  pode ser construída como se segue: para qualquer ponto  $p$  de  $M^2$ , associamos o ponto  $T_{X(p)}S$  (plano tangente a  $S$  em  $X(p)$ ) de  $G_{2,n}^+$ . Usando a identificação acima entre  $G_{2,n}^+$  e  $Q_1^{n-2}$ , temos que  $G$  pode ser vista como uma aplicação de  $M^2$  em  $Q_1^{n-2}$ . Localmente, se  $z = u + iv$  é um parâmetro conforme em uma vizinhança de um ponto  $p$  de  $M^2$ , na orientação de  $M^2$ , de modo que  $S$  é dada na vizinhança de  $p$  por  $(u, v) \mapsto X = (x^1, \dots, x^n)$ , então o par de vetores  $X_u, X_v$  são ortogonais e têm o mesmo comprimento. Segue-se que a aplicação de Gauss generalizada  $G$  pode ser dada localmente por

$$z \mapsto [X_{\bar{z}}], \quad (1.17)$$

onde  $X_{\bar{z}} := \frac{\partial X}{\partial \bar{z}}$ , com  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right)$  e  $\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right)$ .

**Observação 1.6.** Apesar de  $G$  ser definida localmente por  $z \mapsto [X_u + iX_v]$ , seguindo [24], pag. 30 é usual trabalhar(e faremos isso) com o complexo conjugado  $\bar{G}$  de  $G$ , dada localmente por  $\bar{G}(z) = [X_z] = [X_u - iX_v]$ . Assim, sempre que escrevermos que uma aplicação  $\Phi$  representa  $G$ , localmente, será no sentido de que  $\bar{G} = [\Phi]$ , ou  $X_z = \mu\Phi$ , para alguma função  $\mu : M^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , que nunca se anula.

Note que quando  $n = 3$ , a aplicação  $G$  reduz-se à aplicação de Gauss clássica para superfícies tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$ , que associa cada ponto  $p$  de  $M^2$  o vetor normal unitário a  $S$ , que neste caso pertence a  $H_0^2(-1)$ . Observe que  $G_{2,3}^+$  tem duas componentes conexas, cada uma identificada com uma das folhas de  $H_0^2(-1)$ .

## 1.9 A representação de Weierstrass para superfícies máximas em $\mathbb{L}^4$

Seja  $S = X(M)$  uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$ . Definimos as funções complexas  $\varphi^k$  por

$$\varphi^k := \frac{\partial x^k}{\partial u} - i \frac{\partial x^k}{\partial v}, \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (1.18)$$

em termos de coordenadas isotérmicas locais  $(U, z = u + iv)$  de  $M^2$ . Não é difícil ver que

$$(\varphi^1)^2 + (\varphi^2)^2 + (\varphi^3)^2 - (\varphi^4)^2 = 0, \quad |\varphi^1|^2 + |\varphi^2|^2 + |\varphi^3|^2 - |\varphi^4|^2 = 2\lambda^2 > 0.$$

Note que se  $\Psi(z) = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4)$ , então  $\Psi(z) = 2X_z$ .

A métrica induzida em  $M^2$  é da forma  $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$  e as 1-formas complexas  $\omega^k := \varphi^k dz$  são globalmente definidas em  $M^2$ . Agora, se  $S$  é uma superfície máxima, segue-se da Proposição 1.12 que  $\omega^k$  é holomorfa. Assim, se  $\omega$  não tem períodos reais,  $S$  pode ser representada por

$$X(z) = \Re \int_{z_0}^z \omega + k_0, \quad \text{onde } \omega = (\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4) \text{ e } z_0, z \in M. \quad (1.19)$$

Como no caso clássico  $\mathbb{R}^4$ , a recíproca também é verdade e foi provado em [17]:

**Teorema 1.13.** *Seja  $M^2$  uma superfície de Riemann conexa e  $\omega = (\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega^4)$  uma 1-forma holomorfa com valores em  $\mathbb{C}^4$ , globalmente definida em  $M^2$ , satisfazendo*

- 1)  $\ll \omega, \bar{\omega} \gg \equiv 0$ ,
- 2)  $\ll \omega, \omega \gg > 0, \quad \forall p \in M^2$ ,
- 3)  $\Re \int_{\gamma} \omega = 0$ , para todo caminho fechado  $\gamma$  em  $M^2$ .

*Então a aplicação  $X : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$  dada pela equação (1.19) define uma superfície máxima em  $\mathbb{L}^4$ .*

## 1.10 As quádricas complexas $Q_1^1$ e $Q_1^2$

Considere um 2-plano tipo espaço orientado  $\Pi = \text{span}[x, y]$  em  $\mathbb{L}^3$ , com  $\langle x, x \rangle = \langle y, y \rangle = \lambda^2$  e  $\langle x, y \rangle = 0$ . Sejam  $N \in H_0^2(-1)$  seu vetor unitário normal e o ponto  $[z] \in Q_1^1$ , dados respectivamente por  $N = \frac{x \times y}{\|x \times y\|}$  e  $z = (z^1, z^2, z^3) = x + iy$ . A relação entre  $z$  e  $N$  é dada por

$$x \times y = \Im(\overline{z^2}z^3, \overline{z^3}z^1, -\overline{z^1}z^2), \quad (1.20)$$

onde  $\times$  é o produto vetorial de  $\mathbb{L}^3$ . Vamos indicar com  $*Q_1^1$  o conjunto  $\{[z] \in Q_1^1 : z^3 \neq 0\}$ . Se  $\zeta := \frac{z^1 + iz^2}{z^3}$ , podemos verificar que

$$[z] = \left[ \left( \frac{1}{\zeta} + \zeta \right), i \left( \frac{1}{\zeta} - \zeta \right), 2 \right] \in *Q_1^1, \quad \zeta \in \mathbb{C} \setminus \{|\zeta| = 1, \zeta = 0\},$$

pois  $\frac{1}{\zeta} = \frac{z^1 - iz^2}{z^3}$ . Além disso, de (1.20) segue-se que

$$N(\zeta) = \left( \frac{2\Re(\zeta)}{1 - |\zeta|^2}, \frac{2\Im(\zeta)}{1 - |\zeta|^2}, \frac{1 + |\zeta|^2}{1 - |\zeta|^2} \right), \quad \zeta = u + iv \in \mathbb{C} \setminus \{|\zeta| = 1, \zeta = 0\}. \quad (1.21)$$

Observe que  $N(\zeta)$  é exatamente a inversa da projeção estereográfica do pseudo-espaço hiperbólico  $H_0^2(-1) \setminus \{(0, 0, -1), (0, 0, 1)\}$  sobre  $\mathbb{C} \setminus \{|\zeta| = 1, \zeta = 0\}$  pelo polo sul  $(0, 0, -1)$ . Observe que se  $z^3 = 0$ , então  $z^1 - iz^2 = 0$  ou  $z^1 + iz^2 = 0$  de modo exclusivo. Supondo  $z^3 = 0$  e  $z^1 + iz^2 = 0$ , temos que  $\frac{1}{\zeta} \rightarrow \infty$  e  $N \rightarrow (0, 0, 1)$ . Assim, podemos estender a aplicação  $F$  entre  $*Q_1^1$  e  $H_0^2(-1) \setminus \{(0, 0, -1), (0, 0, 1)\}$  para uma bijeção

$$\tilde{F} : Q_1^1 \rightarrow H_0^2(-1).$$

**Observação 1.7.** A métrica induzida pela projeção estereográfica de  $H_0^2(-1)$  é dada por  $ds^2 = \frac{4|d\zeta|^2}{(1 - |\zeta|^2)^2}$ . Seria interessante provar que existe uma métrica tipo Fubini-Study em  $\mathbb{C}P_1^2$  tal que a métrica induzida sobre  $Q_1^1$  tornasse  $\tilde{F}$  acima uma isometria.

Seja  $*Q_1^2 = Q_1^2 \setminus H$ , onde  $H = \{[z] : z^1 - iz^2 = 0\}$  é um hiperplano tangente a  $Q_1^2$  no ponto  $p = (1, -i, 0, 0)$ . Dado  $[z] = [(z^1, z^2, z^3, z^4)] \in *Q_1^2$ , sejam

$$w_1 := \frac{z^3 + z^4}{z^1 - iz^2} \quad \text{e} \quad w_2 := \frac{-z^3 + z^4}{z^1 - iz^2}. \quad (1.22)$$

Então

$$\begin{aligned} w_1 w_2 &= \frac{-((z^3)^2 - (z^4)^2)}{(z^1 - iz^2)^2} = \frac{((z^1)^2 + (z^2)^2)}{(z^1 - iz^2)^2} = \frac{z^1 + iz^2}{z^1 - iz^2}, \\ 1 + w_1 w_2 &= \frac{2z^1}{z^1 - iz^2}, \quad 1 - w_1 w_2 = \frac{-2iz^2}{z^1 - iz^2}, \\ w_1 + w_2 &= \frac{2z^4}{z^1 - iz^2} \quad \text{e} \quad w_1 - w_2 = \frac{2z^3}{z^1 - iz^2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$z = \frac{z^1 - iz^2}{2} (1 + w_1 w_2, i(1 - w_1 w_2), w_1 - w_2, w_1 + w_2). \quad (1.23)$$

Vamos indicar  $\varphi$  como sendo

$$\varphi(w_1, w_2) := (1 + w_1 w_2, i(1 - w_1 w_2), w_1 - w_2, w_1 + w_2). \quad (1.24)$$

Observamos agora que, dado qualquer par  $(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 : w_1 \overline{w_2} = 1\}$ , temos que

$$[(1 + w_1 w_2, i(1 - w_1 w_2), w_1 - w_2, w_1 + w_2)] \in {}^*Q_1^2 \quad (1.25)$$

Portanto, (1.25) define uma aplicação biholomorfa  $F$  entre  $\mathbb{C}^2 \setminus \{(w^1, w^2) \in \mathbb{C}^2 : w^1 \overline{w^2} = 1\}$  e  ${}^*Q_1^2$ , que se estende continuamente para uma bijeção  $\tilde{F}$  de  $\mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty \setminus \{(w_1, w_2) \in \mathbb{C}^2 : w_1 \overline{w_2} = 1\}$  em  $Q_1^2$ . De fato,  $Q_1^2 \cap H = L_1 \cup L_2$ , onde

$$L_1 : z^1 - iz^2 = 0 \quad \text{e} \quad z^3 - z^4 = 0, \quad L_2 : z^1 - iz^2 = 0 \quad \text{e} \quad z^3 + z^4 = 0.$$

Observe que  $L_1 \cap L_2 = \{(1, -i, 0, 0)\}$ . Agora considerando (1.25) como coordenadas homogêneas de  $\mathbb{CP}_1^3$ , temos que

$$\lim_{w_1 \rightarrow \infty} F(w_1, w_2) = (w_2, -iw_2, 1, 1) \in L_1. \quad (1.26)$$

Note que qualquer ponto de  $L_1$  pode ser representado por (1.26), exceto quando  $z^3 = 0$ . Analogamente,

$$\lim_{w_2 \rightarrow \infty} F(w_1, w_2) = (w_1, -iw_1, -1, 1) \in L_2. \quad (1.27)$$

Finalmente,

$$\lim_{(w_1, w_2) \rightarrow \infty} F(w_1, w_2) = (1, -i, 0, 0) \in L_1 \cap L_2. \quad (1.28)$$

**Observação 1.8.** (i) Se substituirmos  $w_1 = w_2$  em (1.23), temos que

$$(z^1, z^2, z^3, z^4) = \frac{z^1 - iz^2}{2} (1 + w_1^2, i(1 - w_1^2), 0, 2w_1).$$

(ii) Se  $w_2 = -w_1$  em (1.23), temos que

$$(z^1, z^2, z^3, z^4) = \frac{z^1 - iz^2}{2} (1 - w_1^2, i(1 + w_1^2), 2w_1, 0).$$

Seja  $S = X(M)$  uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$  e seja  $2X_z = \Psi$ , com  $\Psi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4)$ . Então a conformidade local de  $S$  implica que  $\ll \Psi, \bar{\Psi} \gg = 0$ , isto é  $[\Psi] \in Q_1^2$  e  $\ll \bar{\Psi}, \Psi \gg = 2\lambda^2 > 0$ . Sejam agora

$$\mathbf{a}(z) := \frac{\varphi^3 + \varphi^4}{\varphi^1 - i\varphi^2}, \quad \mathbf{b}(z) := \frac{-\varphi^3 + \varphi^4}{\varphi^1 - i\varphi^2} \quad \text{e} \quad \mu := \frac{\varphi^1 - i\varphi^2}{2}. \quad (1.29)$$

Segue-se de (1.23) que

$$X_z = \mu(1 + \mathbf{a}\mathbf{b}, i(1 - \mathbf{a}\mathbf{b}), \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}). \quad (1.30)$$

Se a superfície  $S$  for máxima, pela Proposição (1.12)  $X_z$  é holomorfa, logo se  $\Psi dz$  não tem períodos reais, então  $S$  é dada por

$$X(z) = 2\Re \int_{z_0}^z \mu(1 + \mathbf{a}\mathbf{b}, i(1 - \mathbf{a}\mathbf{b}), \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) dw. \quad (1.31)$$

Pelo Teorema 1.13 vale também a recíproca, isto é, dadas as funções  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  meromorfas e  $\mu$  uma função holomorfa tal que  $\Psi dz = \mu(1 + \mathbf{a}\mathbf{b}, i(1 - \mathbf{a}\mathbf{b}), \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) dz$  seja uma 1-forma holomorfa sem períodos reais com valores em  $\mathbb{C}^4$  e  $\ll \Psi, \bar{\Psi} \gg > 0$ , então (1.31) é uma imersão conforme máxima de  $M^2$  em  $\mathbb{L}^4$ . No Capítulo 4 estudaremos as superfícies tipo espaço em geral.

## 1.11 Expressões para as normais $\nu$ e $\tau$

Vamos primeiro expressar a métrica induzida por  $X$  em  $M^2$  em função de  $\mu$ ,  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ . De (1.4), segue-se que  $\lambda^2 = 2 \ll X_z, X_z \gg$ . Por um cálculo direto, a partir de (1.30), verifica-se que

$$\lambda^2 = 4|\mu|^2 |1 - \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}|^2 \quad \Rightarrow \quad ds^2 = 4|\mu|^2 |1 - \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}|^2 |dz|^2. \quad (1.32)$$

Vimos em (1.5) que  $\nu_0 = \boxtimes(X_u, X_v, e_4)$ ,  $\tau_0 := \lambda^2 e_4 + x_u^4 X_u + x_v^4 X_v$  e  $-\langle \tau_0, \tau_0 \rangle = \langle \nu_0, \nu_0 \rangle = \lambda^2(\lambda^2 + (x_u^4)^2 + (x_v^4)^2)$ . Como  $X_u = X_z + \overline{X_z}$  e  $X_v = i(X_z - \overline{X_z})$ , obtemos  $\nu_0 = -2i(\widehat{X_z} \times \overline{\widehat{X_z}})$ ,  $\tau_0 = 2 \left( \langle X_z, X_z \rangle + 2|x_z^4|^2 e_4 + (x_z^4 \overline{x_z^k} + \overline{x_z^4} x_z^k) e_k \right)$ ,  $k = 1, 2, 3$ , onde  $\widehat{X_z} = \mu(1 + \mathbf{a}\mathbf{b}, i(1 + \mathbf{a}\mathbf{b}), \mathbf{a} - \mathbf{b}, 0)$ . Não é difícil ver que (1.30), nos conduz a

$$\tau_0(z) = 4|\mu|^2 \begin{bmatrix} (1 + |\mathbf{b}|^2)\Re e(\mathbf{a}) + (1 + |\mathbf{a}|^2)\Re e(\mathbf{b}) \\ (1 + |\mathbf{b}|^2)\Im m(\mathbf{a}) + (1 + |\mathbf{a}|^2)\Im m(\mathbf{b}) \\ |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 \\ (1 + |\mathbf{a}|^2)(1 + |\mathbf{b}|^2) \end{bmatrix},$$

$$\nu_0(z) = 4|\mu|^2 \begin{bmatrix} (1 + |\mathbf{b}|^2)\Re e(\mathbf{a}) - (1 + |\mathbf{a}|^2)\Re e(\mathbf{b}) \\ (1 + |\mathbf{b}|^2)\Im m(\mathbf{a}) - (1 + |\mathbf{a}|^2)\Im m(\mathbf{b}) \\ |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Agora como  $\lambda^2 + (x_u^4)^2 + (x_v^4)^2 = \lambda^2 + 4|x_z^4|^2$ , temos que

$$\lambda^2 + (x_u^4)^2 + (x_v^4)^2 = 4|\mu|^2(1 + |\mathbf{a}|^2)(1 + |\mathbf{b}|^2),$$

donde segue-se que  $\|\nu_0\| = \|\tau_0\| = 4|\mu|^2|1 - \mathbf{a}\overline{\mathbf{b}}|\sqrt{(1 + |\mathbf{a}|^2)(1 + |\mathbf{b}|^2)}$ . Portanto,

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \tilde{\nu}, \quad \tau = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \tilde{\tau}, \quad \rho := |1 - \mathbf{a}\overline{\mathbf{b}}|^2(1 + |\mathbf{a}|^2)(1 + |\mathbf{b}|^2), \quad (1.33)$$

onde  $\tilde{\nu}$  e  $\tilde{\tau}$  são dados respectivamente por

$$\begin{bmatrix} (1 + |\mathbf{b}|^2)\Re e(\mathbf{a}) - (1 + |\mathbf{a}|^2)\Re e(\mathbf{b}) \\ (1 + |\mathbf{b}|^2)\Im m(\mathbf{a}) - (1 + |\mathbf{a}|^2)\Im m(\mathbf{b}) \\ |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} (1 + |\mathbf{b}|^2)\Re e(\mathbf{a}) + (1 + |\mathbf{a}|^2)\Re e(\mathbf{b}) \\ (1 + |\mathbf{b}|^2)\Im m(\mathbf{a}) + (1 + |\mathbf{a}|^2)\Im m(\mathbf{b}) \\ |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 \\ (1 + |\mathbf{a}|^2)(1 + |\mathbf{b}|^2) \end{bmatrix}.$$

**Observação 1.9.** As expressões de  $\nu$  e  $\tau$  em função de  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  dadas acima, foram obtidas por Plínio A. Q. Simões e Antonio de Pádua F. Filho em [17].

Usando as expressões de  $\nu$  e  $\tau$  acima, obtivemos o seguinte resultado com respeito às curvaturas Gaussiana e normal de uma superfície máxima em  $\mathbb{L}^4$ .

**Proposição 1.14.** *Seja  $S$  uma superfície máxima em  $\mathbb{L}^4$  dada por (1.31). Então*

$$K = \frac{4}{\lambda^2} \Re e \left\{ \frac{\mathbf{a}_z \overline{\mathbf{b}_z}}{(1 - \mathbf{a}\overline{\mathbf{b}})^2} \right\}, \quad K_N = \frac{4}{\lambda^2} \Im m \left\{ \frac{\mathbf{a}_z \overline{\mathbf{b}_z}}{(1 - \mathbf{a}\overline{\mathbf{b}})^2} \right\}. \quad (1.34)$$

**Demonstração:** De (1.32) segue-se que

$$\Delta \log \lambda = \frac{1}{2} (\Delta \log(1 - \mathbf{a}\overline{\mathbf{b}}) + \Delta \log(1 - \overline{\mathbf{a}}\mathbf{b})),$$

pois  $\Delta \log |\mu| = 0$ . Não é difícil ver que

$$\Delta \log(1 - \mathbf{a}\overline{\mathbf{b}}) = -\frac{4\mathbf{a}_z \overline{\mathbf{b}_z}}{(1 - \mathbf{a}\overline{\mathbf{b}})^2}, \quad \Delta \log(1 - \overline{\mathbf{a}}\mathbf{b}) = -\frac{4\overline{\mathbf{a}_z} \mathbf{b}_z}{(1 - \overline{\mathbf{a}}\mathbf{b})^2}.$$

Portanto,

$$\Delta \log \lambda = -4 \Re e \left\{ \frac{\mathbf{a}_z \overline{\mathbf{b}_z}}{(1 - \mathbf{a}\overline{\mathbf{b}})^2} \right\}.$$

Finalmente pelo Lema 1.10 temos a fórmula para  $K$ .

Agora pelo Lema 1.11, sabemos que  $K_N = \frac{4}{\lambda^2} \Im m(\langle \nu_z, \tau_{\overline{z}} \rangle)$ . Segue-se de (1.33) que

$$\nu_z = -\frac{\rho_z}{2\rho^{3/2}} \tilde{\nu} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \tilde{\nu}_z, \quad \tau_{\overline{z}} = -\frac{\rho_{\overline{z}}}{2\rho^{3/2}} \tilde{\tau} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \tilde{\tau}_{\overline{z}},$$

de modo que

$$\langle \nu_z, \tau_{\overline{z}} \rangle = \frac{1}{2\rho^2} \left( -\langle \tilde{\nu}, \tilde{\tau}_{\overline{z}} \rangle \rho_z - \langle \tilde{\nu}_z, \tilde{\tau} \rangle \rho_{\overline{z}} + 2\rho \langle \tilde{\nu}_z, \tilde{\tau}_{\overline{z}} \rangle \right).$$

Através de um longo cálculo, porém direto, onde usamos (1.33), chegamos à seguinte expressão

$$\begin{aligned} 2\rho^2 \langle \nu_z, \tau_{\overline{z}} \rangle &= (1 + |\mathbf{a}|^2)(1 + |\mathbf{b}|^2) \left( |1 - \mathbf{a}\overline{\mathbf{b}}|^2 \left( (1 + |\mathbf{b}|^2)^2 |\mathbf{a}_z|^2 - (1 + |\mathbf{a}|^2)^2 |\mathbf{b}_z|^2 \right) \right) + \\ &+ i \left( 2 \Im m \left\{ \mathbf{a}_z \overline{\mathbf{b}_z} (1 - \mathbf{a}\overline{\mathbf{b}})^2 \right\} (1 + |\mathbf{a}|^2)^2 (1 + |\mathbf{b}|^2)^2 \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Im m \langle \nu_z, \tau_{\overline{z}} \rangle &= \frac{1}{\rho^2} \left( \Im m \left\{ \mathbf{a}_z \overline{\mathbf{b}_z} (1 - \mathbf{a}\overline{\mathbf{b}})^2 \right\} (1 + |\mathbf{a}|^2)^2 (1 + |\mathbf{b}|^2)^2 \right) \\ &= \frac{\Im m \left\{ \mathbf{a}_z \overline{\mathbf{b}_z} (1 - \mathbf{a}\overline{\mathbf{b}})^2 \right\}}{|1 - \mathbf{a}\overline{\mathbf{b}}|^4} \\ &= \Im m \left\{ \frac{\mathbf{a}_z \overline{\mathbf{b}_z}}{(1 - \mathbf{a}\overline{\mathbf{b}})^2} \right\}. \end{aligned}$$

Isto encerra a demonstração da Proposição.  $\square$

## 1.12 A representação de Weierstrass para superfícies máximas em $\mathbb{L}^n$

Na seguinte Proposição obtivemos um resultado similar ao da Proposição 2.2 de [22], a qual se refere à intersecção da quádrlica  $Q_1^2$  com um hiperplano  $H$  de  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$  não tangente.

**Proposição 1.15.** *Seja  $N = Q_1^2 \cap H$ , onde  $H$  é um hiperplano não tangente à quádrlica  $Q_1^2$ , isto é,  $H$  é dado por*

$$p_1 z^1 + p_2 z^2 + p_3 z^3 - p_4 z^4 = 0, \quad (1.35)$$

e os coeficientes satisfazem

$$(p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2 - (p_4)^2 \neq 0. \quad (1.36)$$

Então,  $N$  pode ser representada por (1.23), com

$$w_2 = \frac{\alpha w_1 + \beta}{\gamma w_1 + \delta}, \quad (1.37)$$

onde

$$\alpha := p_3 - p_4, \quad \beta := p_1 + ip_2, \quad \gamma := -p_1 + ip_2, \quad \delta := p_3 + p_4 \quad e \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \quad (1.38)$$

Reciprocamente, se (1.37) for substituído em (1.23), então a curva complexa resultante pertence ao hiperplano  $H$ , com

$$p_1 = \frac{\beta - \gamma}{2}, \quad p_2 = \frac{\beta + \gamma}{2i}, \quad p_3 = \frac{\alpha + \delta}{2}, \quad p_4 = \frac{\delta - \alpha}{2} \quad (1.39)$$

e a condição  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ , implica que  $H$  não é tangente a  $Q_1^2$ .

**Demonstração:** Usando a representação (1.23) de  ${}^*Q_1^2$ , qualquer ponto de  ${}^*Q_1^2 \cap P$  satisfaz

$$\alpha w_1 - (\gamma w_1 + \delta)w_2 + \beta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w_2 = \frac{\alpha w_1 + \beta}{\gamma w_1 + \delta}, \quad (1.40)$$

com

$$\alpha := p_3 - p_4, \beta := p_1 + ip_2, \gamma := -p_1 + ip_2, \delta := p_3 + p_4.$$

Logo,

$$\alpha\delta - \beta\gamma = (p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2 - (p_4)^2 \neq 0.$$

Como a transformação de Möbius se estende para  $\mathbb{C}_\infty$ , podemos tomar  $[z] \in Q_1^2$ .

Para a recíproca, basta observar que se  $w_1$  e  $w_2$  estão relacionados por (1.37), então voltando a partir de (1.40) vemos que

$$p_1(1 + w_1w_2) + p_2i(1 - w_1w_2) + p_3(w_1 - w_2) - p_4(w_1 + w_2) = 0,$$

e  $(p_1)^2 + (p_2)^2 + (p_3)^2 - (p_4)^2 = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ . Isto encerra a demonstração.  $\square$

Antes de enunciar a próxima proposição, convém definir a aplicação  $Z : \mathbb{C}^{n-2} \rightarrow \mathbb{C}^n$  por

$$Z(\zeta) := \left\{ 1 + (\zeta^{n-2})^2 - \sum_{k=1}^{n-3} (\zeta^k)^2, i \left( 1 - (\zeta^{n-2})^2 + \sum_{k=1}^{n-3} (\zeta^k)^2 \right), 2\zeta^1, \dots, 2\zeta^{n-2} \right\},$$

onde  $\zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^{n-2})$  e  $\zeta^j = \frac{z^{j+2}}{z^1 - iz^2}$ ,  $j = 1, \dots, n-2$ .

**Proposição 1.16.** *Seja  $H$  um hiperplano em  $\mathbb{C}\mathbb{P}_1^{n-1}$  dado por  $z^1 - iz^2 = 0$ . Então,  ${}^*Q_1^{n-2} := Q_1^{n-2} \setminus H$  é biholomorfo a  $\mathbb{C}^{n-2} \setminus \{\zeta \in \mathbb{C}^{n-2} : \ll Z(\zeta), Z(\zeta) \gg = 0\}$ , através da aplicação*

$$\zeta \mapsto \frac{z^1 - iz^2}{2} Z(\zeta), \quad (1.41)$$

onde

$$\zeta^1 = \frac{z^3}{z^1 - iz^2}, \dots, \zeta^{n-2} = \frac{z^n}{z^1 - iz^2}. \quad (1.42)$$

**Demonstração:** Dado qualquer ponto  $[Z] \in {}^*Q_1^{n-2}$ ,  $Z = (z^1, \dots, z^n)$  e definindo  $\zeta^k$ ,  $k = 1, \dots, n-2$  por (1.42) temos que

$$(\zeta^1)^2 + \dots + (\zeta^{n-3})^2 - (\zeta^{n-2})^2 = -\frac{z^1 + iz^2}{z^1 - iz^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} z^1 &= \frac{z^1 - iz^2}{2} \left( 1 + \frac{z^1 + iz^2}{z^1 - iz^2} \right) = \frac{z^1 - iz^2}{2} (1 - ((\zeta^1)^2 + \dots + (\zeta^{n-3})^2) + (\zeta^{n-2})^2) \\ z^2 &= \frac{i(z^1 - iz^2)}{2} \left( 1 - \frac{z^1 + iz^2}{z^1 - iz^2} \right) = \frac{i(z^1 - iz^2)}{2} (1 + (\zeta^1)^2 + \dots + (\zeta^{n-3})^2 - (\zeta^{n-2})^2). \end{aligned}$$

Reciprocamente, dado  $(\zeta^1, \dots, \zeta^{n-2}) \in \mathbb{C}^{n-2}$  e pondo

$$\begin{aligned} z^1 &= 1 - \sum_{k=1}^{n-3} (\zeta^k)^2 + (\zeta^{n-2})^2, \quad z^2 = i \left( 1 + \sum_{k=1}^{n-3} (\zeta^k)^2 - (\zeta^{n-2})^2 \right) \text{ e} \\ z^k &= 2\zeta^{k-2}, \quad k = 3, \dots, n. \end{aligned}$$

$[(z^1, \dots, z^n)]$  é um ponto de  ${}^*Q_1^{n-2}$ . Com efeito,

$$(z^3)^2 + \dots + (z^{n-1})^2 - (z^n)^2 = 4((\zeta^1)^2 + \dots + (\zeta^{n-3})^2 - (\zeta^{n-2})^2) = -((z^1)^2 + (z^2)^2).$$

□

Seja  $S = X(U)$  uma superfície máxima em  $\mathbb{L}^n$  dada pela aplicação conforme  $X : U \subset M^2 \rightarrow \mathbb{L}^n$ . As funções

$$\varphi^k := \frac{\partial x^k}{\partial u} - i \frac{\partial x^k}{\partial v}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.43)$$

são holomorfas e satisfazem

$$(\varphi^1)^2 + \dots + (\varphi^{n-1})^2 - (\varphi^n)^2 = 0, \quad (1.44)$$

$$|\varphi|^2 = |\varphi^1|^2 + \dots + |\varphi^{n-1}|^2 - |\varphi^n|^2 \geq 0 \quad (1.45)$$

sobre todo  $U$  e (1.45) é igual a zero somente em pontos isolados.

Vamos tratar agora da representação tipo Weierstrass para superfícies máximas em  $\mathbb{L}^n$  em termos de sua aplicação de Gauss.

**Teorema 1.17.** *Sejam  $U$  uma região simplesmente conexa de  $\mathbb{C}$ ,  $f$  uma função holomorfa arbitrária não nula e  $g_1, \dots, g_{n-2}$  funções meromorfas arbitrárias em  $U$ . Para*

qualquer  $p \in U$ , seja

$\mu_p$  : = ordem dos zeros de  $f$  em  $p$ ,

$\nu_p$  : = ordem máxima de pólos em  $p$  de  $g_1, \dots, g_{n-2}, \sum_{k=1}^{n-3} g_k^2 - g_{n-2}^2$ .

Seja também

$$\Psi = \frac{f}{2} \left\{ 1 - \sum_{k=1}^{n-3} g_k^2 + g_{n-2}^2, i \left( 1 + \sum_{k=1}^{n-3} g_k^2 - g_{n-2}^2 \right), 2g_1, \dots, 2g_{n-2} \right\}. \quad (1.46)$$

Defina a aplicação conforme tipo espaço  $X : U \rightarrow \mathbb{L}^n$  por

$$X(\zeta) := \Re e \left\{ \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Psi(z) dz \right\} + X(\zeta_0), \quad (1.47)$$

onde  $\zeta_0, \zeta \in U$  e  $\zeta_0$  e  $X(\zeta_0)$  são constantes. Se  $\mu_p \geq \nu_p$ , para todo  $p \in U$ , então  $S = X(U)$  é uma superfície máxima generalizada em  $\mathbb{L}^n$  e  $S$  é regular sempre que  $\mu_p = \nu_p$ , para todo  $p \in U$ .

Reciprocamente, se  $X : U \rightarrow \mathbb{L}^n$  é uma superfície máxima tipo espaço em  $\mathbb{L}^n$ , com métrica induzida  $ds^2 = \lambda^2 |d\zeta|^2$  em  $U$ , então  $S = X(U)$  é obtida por (1.47) (a menos de reparametrização).

**Demonstração:** Seja  $\varphi^k$  a  $k$ -ésima função coordenada de  $\Psi$  dada em (1.46). Temos que

$$(\varphi^1)^2 + \dots + (\varphi^{n-1})^2 - (\varphi^n)^2 = 0.$$

Agora a condição  $\mu_p \geq \nu_p$  garante que cada  $\varphi^k$  é holomorfa em  $U$ , de modo que  $\Delta X = 0$ , onde  $X : U \rightarrow \mathbb{L}^n$  é dada por  $X = \Re e \int \Psi dz$ . Logo  $H(p) = 0$  para todo  $p \in U$  e (1.47) define uma superfície máxima generalizada em  $\mathbb{L}^n$ . Além disso, se  $\mu_p = \nu_p$  em cada ponto  $p \in U$ , então pelo menos uma das funções  $\varphi^k$  é diferente de zero em  $p$ , o que implica que a superfície é regular.

Reciprocamente, dada uma superfície máxima  $X : U \rightarrow \mathbb{L}^n$ , então  $\Psi := 2X_z$  é holomorfa e satisfaz (1.44). Assim, a função  $f := \varphi^1 - i\varphi^2$ , onde  $\varphi^k$  é dado em (1.43), é também holomorfa e só tem zeros isolados. Seja,

$$g_k := \frac{\varphi^{k+2}}{\varphi^1 - i\varphi^2}, \quad k = 1, \dots, n-2. \quad (1.48)$$

Cada função  $g_k$  é meromorfa em  $U$  e tem pólos somente onde  $f$  tem zeros. Mas, em um ponto  $p \in U$ , onde  $f(p) \neq 0$ , segue-se de (1.44) que

$$[\Psi(p)] = [(\varphi^1(p), \dots, \varphi^n(p))] \in {}^*Q_1^{n-2} = Q_1^{n-2} \setminus \{\varphi^1 - i\varphi^2 = 0\}.$$

Comparando (1.48) com (1.42) da Proposição 1.16, temos que (1.46) é exatamente a representação de  ${}^*Q_1^{n-2}$  substituindo  $\zeta^k$  por  $g_k$ . Em particular, os valores  $g_1(p), \dots, g_k(p)$  representam um ponto de  ${}^*Q_1^{n-2}$  em coordenadas não-homogêneas, e portanto determinam a imagem da aplicação de Gauss do ponto  $p \in U$ . O fato que cada  $\varphi^k$  é holomorfa implica que  $\mu_p \geq \nu_p$ , mesmo nos pontos onde uma ou mais funções  $g_k$  têm um pólo. Em particular, em tais pontos  $f$  precisa ter zeros. Como (1.46) vale sempre que  $f \neq 0$ , por continuidade, precisa valer também nos zeros de  $f$ . Finalmente, para que a superfície  $S$  seja regular, as funções  $\varphi^k$  não podem se anular simultaneamente em nenhum ponto, e isto é garantido por  $\mu_p = \nu_p$ . Isto termina a demonstração.  $\square$

**Observação 1.10.** Quando  $n = 3$  no Teorema acima, (1.46) reduz-se à representação de Weierstrass de uma superfície máxima em  $\mathbb{L}^3$ . De fato, neste caso

$$\Psi = \frac{f}{2} \left( 1 + g^2, i(1 - g^2), 2g \right)$$

e  $X : U \rightarrow \mathbb{L}^3$  é dada por  $X = \Re e \int \Psi dz$ . A condição  $\mu_p \geq \nu_p$ , significa que se  $g$  tem um pólo de ordem  $m$  em  $p$ ,  $f$  tem um zero de ordem no mínimo  $2m$  em  $p$ .

Para  $n = 4$ , segue-se de (1.46) que

$$\Psi = \frac{f}{2} \left\{ 1 - (g_1^2 - g_2^2), i(1 + g_1^2 - g_2^2), 2g_1, 2g_2 \right\}.$$

Pondo  $\mathbf{a} := g_1 + g_2$ ,  $\mathbf{b} := -g_1 + g_2$  temos,

$$\mathbf{ab} = -(g_1^2 - g_2^2), \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = 2g_2, \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} = 2g_1$$

logo,

$$\Psi = \frac{f}{2} \left( 1 + \mathbf{ab}, i(1 - \mathbf{ab}), \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} \right)$$

e  $X : U \rightarrow \mathbb{L}^4$  dada por  $X = \Re e \int \Psi dz$  é a representação de Weierstrass para superfícies máximas em  $\mathbb{L}^4$ , veja (1.30) e (1.31).

## Capítulo 2

# Superfícies máximas com aplicação de Gauss degenerada em $\mathbb{L}^4$

Estamos interessados no estudo de superfícies máximas com aplicação de Gauss degenerada em  $\mathbb{L}^4$ . Com este objetivo, vamos primeiro estudar a intersecção da quádrlica complexa  $Q_1^{n-2}$  com um hiperplano arbitrário em  $\mathbb{CP}_1^{n-1}$ .

### 2.1 Representação de hiperplanos em $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ sob a ação de $O^{++}(n-1, 1)$ .

**Proposição 2.1.** *Um 2-plano  $\Pi$  do  $\mathbb{L}^n$  contendo o raio de luz  $R_{0,v}$  é tangente ao cone de luz  $\mathcal{C}_L(0)$  por  $R_{0,v}$  se, e somente se  $\langle x, v \rangle = 0$ , para todo ponto  $x \in \Pi$ .*

**Demonstração:** Como  $\Pi$  contém  $R_{0,v}$ , existe um vetor  $u$  de tipo espaço em  $\mathbb{L}^n$  tal que  $\Pi = \text{span}[u, v]$ . Suponhamos primeiro que  $\langle x, v \rangle \neq 0$  para algum  $x \in \Pi$ . Então

$$\langle x, x \rangle = \alpha^2 \langle u, u \rangle + 2\alpha\beta \langle u, v \rangle < 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Portanto,  $\Pi$  é um 2-plano de Lorentz em  $\mathbb{L}^n$  e não pode ser tangente a  $\mathcal{C}_L(0)$ .

Seja agora  $\Pi$  um 2-plano do  $\mathbb{L}^n$  contendo o raio de luz  $R_{0,v}$  tal que  $\langle x, v \rangle = 0$ , para todo  $x \in \Pi$ . Vamos provar que  $\Pi \cap \mathcal{C}_L(0) = R_{0,v}$ . Claro que  $R_{0,v} \subseteq \Pi \cap \mathcal{C}_L(0)$ .

Seja  $x \in \Pi \cap \mathcal{C}_L(0)$ , isto é,  $\langle x, v \rangle = 0$  e  $x \in \mathcal{C}_L(0)$ . Então  $x$  é tipo espaço ou  $x = \lambda v$  e  $x \in \mathcal{C}_L(0)$ . Logo,  $x = \lambda v \in R_{0,v}$ . Portanto,  $\Pi \cap \mathcal{C}_L(0) \subseteq R_{0,v}$ .  $\square$

**Corolário 2.2.** *Se  $u \neq \lambda v$  é um vetor tipo espaço de  $\mathbb{L}^n$  ortogonal ao raio de luz  $R_{0,v}$ , então o 2-plano  $\Pi = \text{span}[u, v]$  é tangente ao cone de luz  $\mathcal{C}_L(0)$  por  $R_{0,v}$ .*

**Demonstração:** Todo ponto  $x$  pertencente a  $\Pi$  se escreve da forma  $x = \alpha u + \beta v$ , com  $\langle u, v \rangle = 0$  e  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Assim,

$$\langle x, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \beta \langle v, v \rangle = 0, \quad \forall x \in \Pi.$$

Pela Proposição 2.1, temos que  $\Pi$  é tangente ao cone de luz  $\mathcal{C}_L(0)$  por  $R_{0,v}$ .  $\square$

**Lema 2.3.** *O subgrupo  $O^{++}(n-1, 1)$  do grupo de Lorentz  $O(n-1, 1)$  age transitivamente em 2-planos pela origem, sejam eles espaciais, Lorentzianos ou degenerados do  $\mathbb{L}^n$ .*

**Demonstração:** Dados  $v_1$  e  $v_2$  vetores do mesmo tipo causal, com a mesma norma e orientação se forem tipo tempo ou tipo luz em  $\mathbb{L}^n$ , existe  $A \in O^{++}(n-1, 1)$  tal que  $Av_1 = v_2$ . Se  $r_1$  e  $r_2$  são as retas determinadas por  $v_1$  e  $v_2$  então  $Ar_1 = r_2$ . Temos os seguintes casos a considerar.

1) Se  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  são 2-planos tipo espaço(ou tipo tempo) em  $\mathbb{L}^n$ , sejam  $r_1$  e  $r_2$  retas tipo espaço (ou tipo tempo) respectivamente contidas em  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$ . Assim, se  $Ar_1 = r_2$  como acima, chamamos  $\tilde{\Pi}_1 = A(\Pi_1)$  e temos  $\tilde{\Pi}_1 \cap \Pi_2 = r_2$ . Agora existe um subgrupo de  $O^{++}(n-1, 1)$  que fixa  $r_2$  e leva  $\tilde{\Pi}_1$  em  $\Pi_2$ .

2) Sejam  $\Pi_1$  e  $\Pi_2$  2-planos degenerados do  $\mathbb{L}^n$ , e seja  $v_i \neq 0$  um vetor tipo luz futuro dirigido de  $\Pi_i, i = 1, 2$ . Vamos considerar  $\Pi_1 = \text{span}[u_1, v_1]$ , onde  $u_1$  é um vetor tipo espaço do  $\mathbb{L}^n$ . Segue da Proposição 2.1 que  $\langle u_1, v_1 \rangle = 0$ . Se  $Av_1 = v_2$  como acima, seja  $\tilde{u}_1 = Au_1$ . Logo,  $\langle v_2, v_2 \rangle = 0$ ,  $\langle \tilde{u}_1, \tilde{u}_1 \rangle > 0$  e  $\langle \tilde{u}_1, v_2 \rangle = \langle Au_1, Av_1 \rangle = \langle u_1, v_1 \rangle = 0$ . Segue do Corolário 2.2 que  $\tilde{\Pi}_1 = \text{span}[\tilde{u}_1, v_2]$  é um 2-plano tangente ao cone de luz  $\mathcal{C}_L(0)$  por  $R_{0,v_2}$ . Finalmente, existe um subgrupo de  $H$  de  $O^{++}(n-1, 1)$  que fixa  $R_{0,v_2}$  e leva  $\tilde{\Pi}_1$  em  $\Pi_2$ .  $\square$

**Lema 2.4.** *Sejam  $u = (u^1, 0, \dots, 0, u^n)$  e  $v = (v^1, 0, \dots, 0, v^n)$  vetores linearmente independentes de  $\mathbb{L}^n$ . Então, agindo pelo subgrupo*

$$H_1 := \left\{ \begin{bmatrix} \cosh(\theta) & 0 & \sinh(\theta) \\ 0 & I_{n-2} & 0 \\ \sinh(\theta) & 0 & \cosh(\theta) \end{bmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.1)$$

de  $O^{++}(n-1, 1)$ , se necessário, podemos assumir que

$$u^1 u^n + v^1 v^n = 0. \quad (2.2)$$

Além disso, se  $v$  (ou  $u$ ) é um vetor do tipo luz, então as coordenadas de  $u$  (ou  $v$ ) são não nulas.

**Demonstração:** Suponhamos que  $u$  e  $v$  já satisfazem (2.2), com  $\langle v, v \rangle = 0$ . Se  $u^1 u^n = 0$ , então teríamos  $v^1 v^n = 0$ , e isto nos conduz a um absurdo. Portanto,  $u^1 u^n \neq 0$ .

Suponhamos agora que (2.2) não valha. Pondo,  $\tilde{u} = Au$  e  $\tilde{v} = Av$ , com  $A \in H_1$ , temos

$$\tilde{u}^1 \tilde{u}^n + \tilde{v}^1 \tilde{v}^n = \alpha \cosh(2\theta) + \beta \sinh(2\theta),$$

onde

$$\alpha = u^1 u^n + v^1 v^n \quad \text{e} \quad \beta = \frac{1}{2}((u^1)^2 + (u^n)^2 + (v^1)^2 + (v^n)^2) > 0.$$

Assim,

$$\tilde{u}^1 \tilde{u}^n + \tilde{v}^1 \tilde{v}^n = 0 \Leftrightarrow \tanh(2\theta) = \frac{-\alpha}{\beta}. \quad (2.3)$$

A equação (2.3) tem uma única solução,  $\theta = \frac{1}{2} \tanh^{-1}\left(\frac{-\alpha}{\beta}\right)$  se, e somente se  $|\alpha| < \beta$ , pois  $|\tanh(2\theta)| < 1$ . É fácil ver que

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2} \left\{ (u^1 + u^n)^2 + (v^1 + v^n)^2 \right\},$$

$$\beta - \alpha = \frac{1}{2} \left\{ (u^1 - u^n)^2 + (v^1 - v^n)^2 \right\}.$$

Afirmamos que  $\alpha + \beta = 0$  ou  $\beta - \alpha = 0$  se, e somente se  $\langle u, u \rangle = 0$ ,  $\langle v, v \rangle = 0$  e  $\langle u, v \rangle = 0$  (isto é,  $v = \lambda u$ ). De fato,

$$\alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow u^1 = -u^n \text{ e } v^1 = -v^n.$$

Logo,

$$\langle u, u \rangle = (u^1)^2 - (u^n)^2 = 0, \langle v, v \rangle = (v^1)^2 - (v^n)^2 = 0 \text{ e } \langle u, v \rangle = u^1 v^1 - u^n v^n = 0.$$

O caso  $\beta - \alpha = 0$  é análogo.

Reciprocamente, se  $\langle u, u \rangle = 0$ ,  $\langle v, v \rangle = 0$  e  $\langle u, v \rangle = 0$ , então  $v = \lambda u$ . Assim,  $u^1 = -u^n$  implica  $v^1 = -v^n$  ou  $u^1 = u^n$  implica  $v^1 = v^n$ , donde  $\alpha + \beta = 0$  ou  $\beta - \alpha = 0$  o que prova o afirmado. Portanto,  $\beta - \alpha > 0$  e  $\alpha + \beta > 0$  donde  $-\beta < \alpha < \beta$ , isto é,  $|\alpha| < \beta$ .  $\square$

**Lema 2.5.** *Sejam  $u = (u^1, u^2)$  e  $v = (v^1, v^2)$  vetores linearmente independentes de  $\mathbb{R}^2$ , satisfazendo  $u^1 u^2 + v^1 v^2 = 0$ . Então agindo por  $SO(2)$ , se necessário, podemos assumir que*

$$(u^1)^2 - (u^2)^2 + (v^1)^2 - (v^2)^2 \leq 0.$$

**Demonstração:** Suponhamos que  $(u^1)^2 - (u^2)^2 + (v^1)^2 - (v^2)^2 > 0$ . Pondo  $\tilde{u} = Au$  e  $\tilde{v} = Av$ , com  $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \in SO(2)$ , temos:

$$\begin{aligned} \tilde{u}^1 \tilde{u}^2 + \tilde{v}^1 \tilde{v}^2 &= \frac{1}{2}((u^1)^2 - (u^2)^2 + (v^1)^2 - (v^2)^2) \sin(2\theta), \\ (\tilde{u}^1)^2 - (\tilde{u}^2)^2 + (\tilde{v}^1)^2 - (\tilde{v}^2)^2 &= \frac{1}{2}((u^1)^2 - (u^2)^2 + (v^1)^2 - (v^2)^2) \cos(2\theta). \end{aligned}$$

Tomando  $\theta = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ , segue o resultado.  $\square$

**Lema 2.6.** *Sejam  $u = (u^1, u^2)$  e  $v = (v^1, v^2)$  vetores linearmente independentes de  $\mathbb{R}^2$  satisfazendo  $u^1 u^2 + v^1 v^2 = 0$  e  $(u^1)^2 - (u^2)^2 + (v^1)^2 - (v^2)^2 \leq 0$ . Então*

$$(u^1)^2 \leq (v^2)^2 \text{ e } (v^1)^2 \leq (u^2)^2.$$

**Demonstração:** Vamos dividir em dois casos:

**Caso 1.** Se  $u^2v^2 \neq 0$ , então  $\frac{u^1}{v^2} = -\frac{v^1}{u^2}$ . Segue-se que

$$\begin{aligned} (u^1)^2 - (u^2)^2 + (v^1)^2 - (v^2)^2 &\leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left( \frac{(u^1)^2}{(v^2)^2} - 1 \right) (v^2)^2 + \left( \frac{(v^1)^2}{(u^2)^2} - 1 \right) (u^2)^2 &\leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left( \frac{(u^1)^2}{(v^2)^2} - 1 \right) ((u^2)^2 + (v^2)^2) &\leq 0 \Rightarrow \frac{(u^1)^2}{(v^2)^2} \leq 1. \end{aligned}$$

**Caso 2.** Se  $u^2v^2 = 0$ , como  $u$  e  $v$  são linearmente independentes, então  $u^2$  e  $v^2$  não são simultaneamente nulos. Vamos supor  $u^2 = 0$  (o caso  $v^2 = 0$  é análogo). Então  $v^1 = 0$  e portanto

$$(u^1)^2 - (u^2)^2 + (v^1)^2 - (v^2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow (u^1)^2 - (v^2)^2 \leq 0.$$

□

**Lema 2.7.** *O conjunto*

$$H_2 := \left\{ \left[ \begin{array}{cccccc} 1 - \left(\frac{n-2}{2}\right)s^2 & s & \cdots & s & \left(\frac{n-2}{2}\right)s^2 & \\ -s & 1 & & 0 & s & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ -s & 0 & & 1 & s & \\ -\left(\frac{n-2}{2}\right)s^2 & s & \cdots & s & 1 + \left(\frac{n-2}{2}\right)s^2 & \end{array} \right] \in O(n-1, 1) : s \in \mathbb{R} \right\}$$

é um subgrupo de  $O^{++}(n-1, 1)$ , que fixa o vetor  $e_1 + e_n$  e fixa também cada 2-plano  $P^2 = \text{span}[e_j, e_1 + e_n]$ ,  $j = 2, \dots, n-1$ , tangente ao cone de luz  $\mathcal{C}_L(0)$  do  $\mathbb{L}^n$  por  $R_{0, e_1 + e_n}$ .

**Demonstração:** Seja

$$A = \left[ \begin{array}{cccccc} 1 - \left(\frac{n-2}{2}\right)s^2 & s & \cdots & s & \left(\frac{n-2}{2}\right)s^2 & \\ -s & 1 & & 0 & s & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ -s & 0 & & 1 & s & \\ -\left(\frac{n-2}{2}\right)s^2 & s & \cdots & s & 1 + \left(\frac{n-2}{2}\right)s^2 & \end{array} \right]_{n \times n}$$

em  $H_2$ . É fácil ver que

$$\det \begin{bmatrix} 1 - \left(\frac{n-2}{2}\right)s^2 & s & \cdots & s \\ -s & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ -s & 0 & & 1 \end{bmatrix} = 1 - \left(\frac{n-2}{2}\right)s^2 - s^2 \sum_{j=2}^{n-1} (-1)^{2j+1} = 1 + \left(\frac{n-2}{2}\right)s^2 > 0,$$

portanto,  $A \in O^{++}(n-1, 1)$ . Sejam  $A$  e  $B$  pertencentes a  $H_2$ , onde

$$B = \begin{bmatrix} 1 - \left(\frac{n-2}{2}\right)r^2 & r & \cdots & r & \left(\frac{n-2}{2}\right)r^2 \\ -r & 1 & & 0 & r \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -r & 0 & & 1 & r \\ -\left(\frac{n-2}{2}\right)r^2 & r & \cdots & r & 1 + \left(\frac{n-2}{2}\right)r^2 \end{bmatrix}.$$

A inversa de  $B$  é da forma

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \left(\frac{n-2}{2}\right)r^2 & -r & \cdots & -r & \left(\frac{n-2}{2}\right)r^2 \\ r & 1 & & 0 & -r \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ r & 0 & & 1 & -r \\ -\left(\frac{n-2}{2}\right)r^2 & -r & \cdots & -r & 1 + \left(\frac{n-2}{2}\right)r^2 \end{bmatrix}.$$

Disto segue-se que

$$AB^{-1} = \begin{bmatrix} 1 - \left(\frac{n-2}{2}\right)(s-r)^2 & (s-r) & \cdots & (s-r) & \left(\frac{n-2}{2}\right)(s-r)^2 \\ -(s-r) & 1 & & 0 & (s-r) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ -(s-r) & 0 & & 1 & (s-r) \\ -\left(\frac{n-2}{2}\right)(s-r)^2 & (s-r) & \cdots & (s-r) & 1 + \left(\frac{n-2}{2}\right)(s-r)^2 \end{bmatrix} \in H_2.$$

Portanto,  $H_2$  é um subgrupo de  $O^{++}(n-1, 1)$ .  $\square$

De agora em diante estudaremos a intersecção de hiperplanos arbitrários de  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$  com a quádrlica complexa

$$Q_1^{n-2} = \{[z] \in \mathbb{C}\mathbb{P}_1^{n-1} : (z^1)^2 + \cdots + (z^{n-1})^2 - (z^n)^2 = 0\}.$$

Observe que  $O^{++}(n-1, 1)$  age naturalmente em  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$  do seguinte modo: dado  $[p] \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ , podemos escrever  $p = u + iv$ . Então a ação é dada por  $([p], A) \mapsto [Ap]$ , onde  $Ap = Au + iAv$ . Como esta ação deixa  $Q_1^{n-2}$  invariante, é suficiente considerar hiperplanos representados sob tal ação. Os resultados que se seguem vão mostrar que um hiperplano arbitrário sempre tem uma representação simples, após a ação de  $O^{++}(n-1, 1)$ . Seja sempre  $p = u + iv \in \mathbb{C}^n$ ,  $n \geq 3$ , com  $u, v$  vetores de  $\mathbb{L}^n$ .

**Proposição 2.8.** *Para cada ponto  $[p] \in \mathbb{CP}_1^{n-1}$ , podemos associar um número real  $t$ , com as seguintes propriedades:*

a) *Se  $u$  e  $v$  geram um 2-plano do tipo espaço de  $\mathbb{L}^n$ , ou são tipo espaço linearmente dependentes, então:*

$$[Mp] = [(t, i, 0, \dots, 0)], \text{ com } M \in O^{++}(n-1, 1) \text{ e } |t| \leq 1.$$

*Em particular,  $t = 0$  se, e somente se  $p = \lambda x$ , com  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ,  $\langle x, x \rangle > 0$  e  $t = \pm 1$  se, e somente se  $[p] \in Q_1^{n-2}$ .*

b) *Se  $u$  e  $v$  geram um 2-plano de Lorentz de  $\mathbb{L}^n$ , então:*

$$[Mp] = [(t, 0, \dots, 0, i)], \text{ com } M \in O^{++}(n-1, 1) \text{ e } |t| > 1.$$

*Mais especificamente, existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que se  $u$  é de tipo espaço(tempo) e  $v$  é de tipo tempo(espaço), então  $1 < |t| < \alpha$  e, se  $u$  e  $v$  são do tipo espaço, então  $1 \leq \alpha < |t|$ .*

c) *Se  $u$  e  $v$  geram um 2-plano degenerado do  $\mathbb{L}^n$ , então:*

$$[Mp] = [(i, t, 0, \dots, 0, i)], \text{ com } M \in O^{++}(n-1, 1) \text{ e } t \in \mathbb{R}^*.$$

**Demonstração:** a) Vamos supor primeiro que os vetores tipo espaço  $u$  e  $v$  do  $\mathbb{L}^n$  são linearmente independentes. Seja  $\Pi$  o 2-plano de tipo espaço gerado por  $u$  e  $v$ . O Lema 2.3 implica que agindo por  $O^{++}(n-1, 1)$ , podemos assumir que

$$\Pi = \text{span}[(1, 0, \dots, 0), (0, 1, 0, \dots, 0)],$$

$u = (u^1, u^2, 0, \dots, 0)$ ,  $v = (v^1, v^2, 0, \dots, 0)$  e  $u^1v^2 - u^2v^1 \neq 0$ . Agora, agindo pelo subgrupo

$$H_3 := \left\{ A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-2} \end{bmatrix} \in O^{++}(n-1, 1) : \theta \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.4)$$

de  $O^{++}(n-1, 1)$ , se necessário, podemos assumir que

$$u^1u^2 + v^1v^2 = 0. \quad (2.5)$$

Com efeito, suponhamos que (2.5) não valha. Pondo  $\tilde{u} = Au$  e  $\tilde{v} = Av$ , segue que

$$\tilde{u}^1\tilde{u}^2 + \tilde{v}^1\tilde{v}^2 = (u^1u^2 + v^1v^2) \cos(2\theta) + \frac{1}{2} ((u^1)^2 - (u^2)^2 + (v^1)^2 - (v^2)^2) \sin(2\theta).$$

Logo, existe um único  $\theta(\text{mod}(\pi))$  dado por

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{-2(u^1u^2 + v^1v^2)}{(u^1)^2 - (u^2)^2 + (v^1)^2 - (v^2)^2} \right),$$

tal que  $\tilde{u}^1\tilde{u}^2 + \tilde{v}^1\tilde{v}^2 = 0$ . Temos agora dois casos a considerar:

**Caso 1:**  $u^2v^2 = 0$ . Se  $u^2 = 0$ , então  $v^1 = 0$  e  $v^2 \neq 0$  (resp.  $v^2 = 0$ ,  $u^1 = 0$  e  $u^2 \neq 0$ ).

Assim,

$$\begin{aligned} [Mp] &= [(u^1, 0, \dots, 0) + i(0, v^2, 0, \dots, 0)] = \left[ \left( \frac{u^1}{v^2}, i, 0, \dots, 0 \right) \right] = \\ &= [(t, i, 0, \dots, 0)], \text{ com } t := \frac{u^1}{v^2} \text{ e } M \in O^{++}(n-1, 1) \end{aligned} \quad (2.6)$$

(resp.  $[Mp] = [(t, i, 0, \dots, 0)]$ , com  $t := -\frac{v^1}{u^2}$  e  $M \in O^{++}(n-1, 1)$ ).

**Caso 2:** Se  $u^2v^2 \neq 0$ , então podemos definir os números reais

$$a := v^2, \quad b := -u^2 \text{ e } t := \frac{u^1}{v^2} = -\frac{v^1}{u^2}. \quad (2.7)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 [Mp] &= [(at, -b, 0, \dots, 0) + i(bt, a, 0, \dots, 0)] = \\
 &= [(a + ib)t, (a + ib)i, 0, \dots, 0] = \\
 &= [(t, i, 0, \dots, 0)], \text{ com } M \in O^{++}(n-1, 1).
 \end{aligned}$$

Segue dos Lemas 2.5 e 2.6 que  $t$  dado em (2.6) e (2.7) pertence ao intervalo  $[-1, 1]$ . Além disso,

$$\begin{aligned}
 \langle Mu, Mu \rangle = \langle u, u \rangle = a^2 t^2 + b^2, \quad \langle Mv, Mv \rangle = \langle v, v \rangle = b^2 t^2 + a^2 \text{ e} \\
 \langle Mu, Mv \rangle = \langle u, v \rangle = ab(t^2 - 1).
 \end{aligned}$$

Portanto,  $\langle u, u \rangle = \langle v, v \rangle$  e  $\langle u, v \rangle = 0$  se, e somente se  $t = \pm 1$ . Isto é,  $[p] \in Q_1^{n-2}$  se, e somente se  $t = \pm 1$ . Isto completa a primeira parte de (a).

Suponhamos agora que  $u$  e  $v$  são vetores linearmente dependentes. Neste caso  $p = \lambda x$ , com  $\langle x, x \rangle > 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  e existe uma matriz  $M \in O^{++}(n-1, 1)$  tal que

$$Mp = \tilde{\lambda} e_2 \Leftrightarrow [Mp] = [(0, i, 0, \dots, 0)].$$

**b)** Seja  $\Pi$  o 2-plano de Lorentz do  $\mathbb{L}^n$  gerado pelos vetores  $u$  e  $v$ . Como  $\ll p, p \gg = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle > 0$ , podemos ter três situações:

- b.1)** Os vetores  $u$  e  $v$  são de tipo espaço;
- b.2)** O vetor  $u$  é tipo espaço e  $v$  é tipo tempo( ou  $u$  é tipo tempo e  $v$  é tipo espaço);
- b.3)** O vetor  $u$  é tipo espaço,  $v$  é tipo luz e **não** ortogonais( ou  $u$  é tipo luz,  $v$  é tipo espaço e **não** ortogonais).

Vamos primeiro nos deter aos casos **(b.1)** e **(b.2)**. Pelo Lema 2.3, podemos supor que

$$\Pi = \text{span}[(1, 0, \dots, 0, 0), (0, \dots, 0, 1)].$$

Assim, podemos escrever  $u = (u^1, 0, \dots, 0, u^n)$  e  $v = (v^1, 0, \dots, 0, v^n)$ . Usando o Lema 2.4 podemos assumir que

$$u^1 u^n + v^1 v^n = 0.$$

- Se  $u^n = 0$ , então  $v^n \neq 0$  e  $v^1 = 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} [Mp] &= [(u^1, 0, \dots, 0, 0) + i(0, 0, \dots, 0, v^n)] = \left[ \left( \frac{u^1}{v^n}, 0, \dots, 0, i \right) \right] = \\ &= [(t, 0, \dots, i)], \text{ com } t := \frac{u^1}{v^n} \text{ e } M \in O^{++}(n-1, 1). \end{aligned}$$

Como

$$\ll p, p \gg = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle > 0 \Leftrightarrow (u^1)^2 - (v^n)^2 > 0 \Leftrightarrow t^2 > 1,$$

temos  $|t| > 1$ .

- Se  $v^n = 0$ , então  $u^n \neq 0$  e  $u^1 = 0$ . Assim,

$$[Mp] = [(t, 0, \dots, i)], \text{ com } t := -\frac{v^1}{u^n} \text{ e } M \in O^{++}(n-1, 1),$$

e como acima, vemos também que  $|t| > 1$ .

- Se  $u^n v^n \neq 0$ , então podemos definir os números reais

$$a := v^n, \quad b := -u^n \quad \text{e} \quad t := \frac{u^1}{v^n} = -\frac{v^1}{u^n}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} [Mp] &= [(at, 0, \dots, 0, -b) + i(bt, 0, \dots, 0, a)] = \\ &= [((a + ib)t, \dots, (a + ib)i)] = \\ &= [(t, 0, \dots, 0, i)], \text{ com } M \in O^{++}(n-1, 1). \end{aligned}$$

Também temos

$$\begin{aligned} \langle Mu, Mu \rangle &= \langle u, u \rangle = a^2 t^2 - b^2, \quad \langle Mv, Mv \rangle = \langle v, v \rangle = b^2 t^2 - a^2 \\ \langle Mu, Mv \rangle &= \langle u, v \rangle = ab(t^2 + 1) \quad \text{e} \quad \ll p, p \gg = (a^2 + b^2)(t^2 - 1). \end{aligned}$$

Vamos analisar a variação de  $t$  nas expressões acima. Se  $u$  e  $v$  são vetores do tipo espaço e  $\ll p, p \gg > 0$ , então  $t^2 > \frac{b^2}{a^2}$ ,  $t^2 > \frac{a^2}{b^2}$  e  $t^2 > 1$ . Temos dois casos:

1) Se  $|a| < |b|$ , então  $1 < \frac{|b|}{|a|} < |t|$ . Portanto,  $1 < \frac{|u^n|}{|v^n|} < |t|$ ;

2) Se  $|a| \geq |b|$ , então  $1 \leq \frac{|a|}{|b|} < |t|$ . Portanto,  $1 \leq \frac{|v^n|}{|u^n|} < |t|$ .

Agora se  $u$  é um vetor tipo espaço e  $v$  é tipo tempo, então temos:  $\frac{b^2}{a^2} < t^2 < \frac{a^2}{b^2}$  e  $t^2 > 1$ . Isto implica,  $|a| > |b|$ . Portanto,

$$1 < |t| < \frac{|v^n|}{|u^n|}.$$

Finalmente se  $u$  é um vetor tipo tempo e  $v$  é tipo espaço, então temos:  $\frac{a^2}{b^2} < t^2 < \frac{b^2}{a^2}$  e  $t^2 > 1$ . Isto implica,  $|a| < |b|$ . Portanto,

$$1 < |t| < \frac{|u^n|}{|v^n|}.$$

**b.3)** Já vimos que pelos Lemas 2.3 e 2.4 podemos considerar

$$\Pi = \text{span}[(1, 0, \dots, 0), (0, \dots, 0, 1)],$$

escrever  $u = (u^1, 0, \dots, 0, u^n)$ ,  $v = (v^1, 0, \dots, 0, v^n)$  e assumir que

$$u^1 u^n + v^1 v^n = 0.$$

Além disso, supondo o vetor  $v$  do tipo luz, as coordenadas de  $u$  são não nulas, então podemos definir os números reais

$$a := v^n, \quad b := -u^n \quad \text{e} \quad t := \frac{u^1}{v^n} = -\frac{v^1}{u^n}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} [Mp] &= [(at, 0, \dots, 0, -b) + i(bt, 0, \dots, 0, a)] = \\ &= [((a + ib)t, \dots, (a + ib)i)] = \\ &= [(t, 0, \dots, 0, i)], \quad \text{com } M \in O^{++}(n-1, 1). \end{aligned}$$

Como  $(u^1)^2 - (u^n)^2 > 0$ ,  $(v^1)^2 - (v^n)^2 = 0$  e  $u^n v^n \neq 0$ , temos

$$(u^1)^2 - (v^n)^2 + (v^1)^2 - (u^n)^2 > 0 \Leftrightarrow \left( \frac{(u^1)^2}{(v^n)^2} - 1 \right) (v^n)^2 + \left( \frac{(v^1)^2}{(u^n)^2} - 1 \right) (u^n)^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{(u^1)^2}{(v^n)^2} - 1 \right) ((u^n)^2 + (v^n)^2) > 0 \Rightarrow \frac{(u^1)^2}{(v^n)^2} > 1 \Leftrightarrow |t| > 1.$$

Logo,

$$t^2 = \frac{(u^1)^2}{(v^n)^2} = \frac{(v^1)^2}{(u^n)^2} = \frac{(v^n)^2}{(u^n)^2} = \frac{a^2}{b^2} > 1.$$

Portanto,  $(u, u) = \frac{a^4 - b^4}{b^4} > 0$  e  $(v, v) = 0$ .

c) Seja  $\Pi$  o 2-plano degenerado do  $\mathbb{L}^n$ , gerado pelos vetores  $u$  e  $v$ . Como  $\ll p, p \gg > 0$ , podemos ter duas situações:

c.1) Os vetores  $u$  e  $v$  são do tipo espaço. Pelo Lema 2.3, podemos assumir que

$$\Pi = \text{span}[(0, 1, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0, 1)],$$

e escrever

$$\begin{aligned} u &= (u^1, u^2, 0, \dots, 0, u^1), \quad u^2 \neq 0, \\ v &= (v^1, v^2, 0, \dots, 0, v^1), \quad v^2 \neq 0 \text{ e } u^1 v^2 - u^2 v^1 \neq 0. \end{aligned}$$

Agindo com o subgrupo  $H_2$  de  $O^{++}(n-1, 1)$  dado no Lema 2.7, se necessário, podemos assumir que

$$u^1 u^2 + v^1 v^2 = 0. \tag{2.8}$$

Com efeito, suponha que (2.8) não valha. Pondo,  $\tilde{u} = Au$  e  $\tilde{v} = Av$ , com  $A \in H_2$ , temos que

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= (u^1 + su^2, u^2, 0, \dots, 0, u^1 + su^2), \\ \tilde{v} &= (v^1 + sv^2, v^2, 0, \dots, 0, v^1 + sv^2). \end{aligned}$$

Assim,

$$\tilde{u}^1 \tilde{u}^2 + \tilde{v}^1 \tilde{v}^2 = (u^1 + su^2)u^2 + (v^1 + sv^2)v^2 = (u^1 u^2 + v^1 v^2) + s((u^2)^2 + (v^2)^2).$$

Portanto,

$$\tilde{u}^1 \tilde{u}^2 + \tilde{v}^1 \tilde{v}^2 = 0 \Leftrightarrow s = -\frac{(u^1 u^2 + v^1 v^2)}{(u^2)^2 + (v^2)^2}.$$

Usando a equação (2.8) e o fato que  $u$  e  $v$  são linearmente independentes, é fácil ver que  $u^1$  e  $v^1$  são sempre diferentes de zero. Então, podemos definir os números reais

$$a := v^1, \quad b := -u^1 \quad \text{e} \quad t := \frac{u^2}{v^1} = -\frac{v^2}{u^1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} [Mp] &= [(-b, at, 0, \dots, 0, -b) + i(a, bt, 0, \dots, 0, a)] = \\ &= [((a + ib)i, (a + ib)t, \dots, (a + ib)i)] = \\ &= [(i, t, \dots, 0, i)], \quad \text{com } M \in O^{++}(n-1, 1) \quad \text{e} \quad t \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

**c.2)** O vetor  $u$  é tipo espaço,  $v$  é tipo luz e ortogonais (ou  $u$  é tipo luz,  $v$  é tipo espaço e ortogonais). Pelo Lema 2.3 podemos assumir que

$$\Pi = \text{span}[(0, 1, \dots, 0), (1, 0, \dots, 0, 1)].$$

Logo, podemos escrever  $u = (u^1, u^2, \dots, 0, u^1)$ , com  $u^2 \neq 0$  e  $v = (v^1, 0, \dots, 0, v^1)$ , com  $v^1 \neq 0$ . Além disso, existe um elemento  $A \in H_2$  tal que  $Au = (0, u^2, 0, \dots, 0, 0)$  e  $Av = v$ . Para ver isto, basta tomar  $s = -\frac{u^1}{u^2}$  em  $A$ . Então,

$$\begin{aligned} [Mp] &= [(0, u^2, 0, \dots, 0, 0) + i(v^1, 0, 0, \dots, 0, v^1)] = \\ &= [(i, \frac{u^2}{v^1}, 0, \dots, 0, i)] = \\ &= [(i, t, \dots, 0, i)], \quad \text{com } M \in O^{++}(n-1, 1) \quad \text{e} \quad t := \frac{u^2}{v^1} \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

Agora se  $u$  é tipo luz e  $v$  é tipo espaço, vemos que

$$[Mp] = [(i, t, \dots, 0, i)], \quad \text{com } M \in O^{++}(n-1, 1) \quad \text{e} \quad t := -\frac{v^2}{u^1} \in \mathbb{R}^*.$$

□

**Proposição 2.9.** *Para cada ponto  $[p] \in \mathbb{C}\mathbb{H}^{n-1}$ , podemos associar um número real  $t$ , com as seguintes propriedades:*

$$[Mp] = [(t, 0, \dots, 0, i)], \quad \text{com } M \in O^{++}(n-1, 1) \quad \text{e} \quad |t| < 1.$$

Mais especificamente, existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que se  $u$  é de tipo espaço(tempo) e  $v$  é de tipo tempo(espaço), então  $0 \leq \alpha < |t| < 1$  e, se  $u$  e  $v$  são do tipo tempo, então  $0 \leq |t| < \alpha \leq 1$ . Em particular,  $t = 0$  se, e somente se  $p = \lambda x$ , com  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  e  $\langle x, x \rangle < 0$ .

**Demonstração:** Para cada  $[p] \in \mathbb{C}\mathbb{H}^{n-1}$ , temos  $\ll p, p \gg = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle < 0$ . Logo, temos as seguintes possibilidades:

- 1) Os vetores  $u$  e  $v$  são do tipo tempo;
- 2) O vetor  $u$  é tipo espaço e  $v$  é tipo tempo(ou  $u$  é tipo tempo e  $v$  é tipo espaço);
- 3) O vetor  $u$  é tipo tempo,  $v$  é tipo luz (ou  $u$  é tipo luz,  $v$  é tipo tempo).

Se  $u$  e  $v$  são linearmente independentes, então  $\Pi = \text{span}[u, v]$  é um 2-plano de Lorentz do  $\mathbb{L}^n$ . Pelo Lema 2.3 podemos assumir que

$$\Pi = [(1, 0, \dots, 0, 0), (0, \dots, 0, 1)]$$

e escrever  $u = (u^1, 0, \dots, 0, u^n)$  e  $v = (v^1, 0, \dots, 0, v^n)$ . Usando o Lema 2.4, podemos assumir que

$$u^1 u^n + v^1 v^n = 0.$$

- Se  $u^n = 0$ , então  $v^n \neq 0$  e  $v^1 = 0$ . Portanto,

$$\begin{aligned} [Mp] &= [(u^1, 0, \dots, 0, 0) + i(0, 0, \dots, 0, v^n)] = \left[ \left( \frac{u^1}{v^n}, 0, \dots, 0, i \right) \right] = \\ &= [(t, 0, \dots, i)], \text{ com } t := \frac{u^1}{v^n} \text{ e } M \in O^{++}(n-1, 1). \end{aligned}$$

Como

$$\ll p, p \gg = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle < 0 \Leftrightarrow (u^1)^2 - (v^n)^2 < 0 \Leftrightarrow t^2 < 1,$$

temos  $|t| < 1$ .

- Se  $v^n = 0$ , então  $u^n \neq 0$  e  $u^1 = 0$ . Logo,

$$[Mp] = [(t, 0, \dots, i)], \text{ com } t := -\frac{v^1}{u^n} \text{ e } M \in O^{++}(n-1, 1).$$

Como anteriormente, ainda temos  $|t| < 1$ .

- Se  $u^n v^n \neq 0$ , então podemos definir os números reais

$$a := v^n, \quad b := -u^n \quad \text{e} \quad t := \frac{u^1}{v^n} = -\frac{v^1}{u^n}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} [Mp] &= [(at, 0, \dots, 0, -b) + i(bt, 0, \dots, 0, a)] = \\ &= [(a + ib)t, \dots, (a + ib)i] = \\ &= [(t, 0, \dots, 0, i)], \quad \text{com } M \in O^{++}(n-1, 1) \end{aligned}$$

e observe que

$$\langle Mu, Mu \rangle = \langle u, u \rangle = a^2 t^2 - b^2, \quad \langle Mv, Mv \rangle = \langle v, v \rangle = b^2 t^2 - a^2$$

$$\langle Mu, Mv \rangle = \langle u, v \rangle = ab(t^2 + 1), \quad \text{e} \quad \ll p, p \gg = (a^2 + b^2)(t^2 - 1).$$

Em (1),  $u$  e  $v$  são vetores tipo tempo e como  $\ll p, p \gg < 0$ , segue-se que  $t^2 < \frac{b^2}{a^2}$ ,  $t^2 < \frac{a^2}{b^2}$  e  $t^2 < 1$ . Temos dois casos:

- Se  $|a| < |b|$ , então  $0 < |t| < \frac{|a|}{|b|} < 1$ . Portanto,  $0 < |t| < \frac{|v^n|}{|u^n|} < 1$ ;
- Se  $|a| \geq |b|$ , então  $0 < |t| < \frac{|b|}{|a|} \leq 1$ . Portanto,  $0 < |t| < \frac{|u^n|}{|v^n|} \leq 1$ .

Em (2), se  $u$  é um vetor tipo espaço e  $v$  é tipo tempo, então temos  $\frac{b^2}{a^2} < t^2 < \frac{a^2}{b^2}$  e  $t^2 < 1$ . Isto implica  $|a| > |b|$ . Assim,

$$0 < \frac{|u^n|}{|v^n|} < |t| < 1.$$

Se  $u$  é um vetor tipo tempo e  $v$  é tipo espaço, então temos:  $\frac{a^2}{b^2} < t^2 < \frac{b^2}{a^2}$  e  $t^2 < 1$ , o que implica  $|a| < |b|$ . Portanto,

$$0 < \frac{|v^n|}{|u^n|} < |t| < 1.$$

Em (3), supondo o vetor  $v = (v^1, 0, \dots, 0, v^n)$  de tipo luz e  $u = (u^1, 0, \dots, 0, u^n)$  tipo tempo, pelo Lema 2.4  $u^1$  e  $u^n$  são diferentes de zero e como  $u^1 u^n + v^1 v^n = 0$ , podemos definir os números reais

$$a := v^n, \quad b := -u^n \quad \text{e} \quad t := \frac{u^1}{v^n} = -\frac{v^1}{u^n}.$$

Assim que,

$$\begin{aligned} [Mp] &= [(at, 0, \dots, 0, -b) + i(bt, 0, \dots, 0, a)] = \\ &= [((a + ib)t, \dots, (a + ib)i)] = \\ &= [(t, 0, \dots, 0, i)], \quad \text{com } M \in O^{++}(n-1, 1). \end{aligned}$$

Como  $(u^1)^2 - (u^n)^2 < 0$ ,  $(v^1)^2 - (v^n)^2 = 0$  e  $u^n v^n \neq 0$ , temos

$$\begin{aligned} (u^1)^2 - (v^n)^2 + (v^1)^2 - (u^n)^2 < 0 &\Leftrightarrow \left( \frac{(u^1)^2}{(v^n)^2} - 1 \right) (v^n)^2 + \left( \frac{(v^1)^2}{(u^n)^2} - 1 \right) (u^n)^2 < 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left( \frac{(u^1)^2}{(v^n)^2} - 1 \right) ((u^n)^2 + (v^n)^2) < 0 \Rightarrow \frac{(u^1)^2}{(v^n)^2} < 1 \Leftrightarrow |t| < 1. \end{aligned}$$

Logo,

$$t^2 = \frac{(u^1)^2}{(v^n)^2} = \frac{(v^1)^2}{(u^n)^2} = \frac{(v^n)^2}{(u^n)^2} = \frac{a^2}{b^2} < 1.$$

Portanto,  $\langle u, u \rangle = \frac{a^4 - b^4}{b^4} < 0$  e  $\langle v, v \rangle = 0$ .

Vamos analisar agora o caso em que  $u$  e  $v$  sejam vetores linearmente dependentes e começamos observando que isto só pode acontecer no caso (1), isto é, com  $u$  e  $v$  tipo tempo. Neste caso,  $p = \lambda x$ ,  $\langle x, x \rangle < 0$  e  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Existe uma matriz  $M \in O^{++}(n-1, 1)$  tal que

$$Mp = \tilde{\lambda} e_n \Leftrightarrow [Mp] = [(0, 0, \dots, i)].$$

□

**Proposição 2.10.** *Para cada ponto  $[p] \in \partial\text{CH}^{n-1}$ , valem as seguintes propriedades:*

a) *Se  $u$  e  $v$  geram um 2-plano de Lorentz de  $\mathbb{L}^n$ , então:*

$$[Mp] = [(\pm 1, 0, \dots, 0, i)] \quad \text{com } M \in O^{++}(n-1, 1).$$

b) Se  $u$  e  $v$  estão contidos em um mesmo raio de luz  $R_{0,u}$ , então:

$$[Mp] = [(i, 0, \dots, 0, i)] \text{ com } M \in O^{++}(n-1, 1).$$

**Demonstração:** Para cada  $[p] \in \partial\text{CH}^{n-1}$ , temos  $\ll p, p \gg = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle = 0$ .

Logo, temos as seguintes possibilidades:

- 1) O vetor  $u$  é tipo espaço e  $v$  é tipo tempo (ou  $u$  é tipo tempo e  $v$  é tipo espaço);
- 2) O vetor  $u$  é tipo luz,  $v$  é tipo luz e não ortogonais(l.i.);
- 3) O vetor  $u$  é tipo luz,  $v$  é tipo luz e ortogonais(l.d.).

Portanto, para  $u$  e  $v$  pertencentes aos casos 1 e 2 acima,  $\Pi = \text{span}[u, v]$  é um 2-plano de Lorentz do  $\mathbb{L}^n$ . Pelo Lema 2.3 podemos supor que

$$\Pi = \text{span}[(1, 0, \dots, 0, 0), (0, \dots, 0, 1)].$$

Logo, podemos escrever  $u = (u^1, 0, \dots, 0, u^n)$  e  $v = (v^1, 0, \dots, 0, v^n)$ . Usando o Lema 2.4 podemos assumir que

$$u^1 u^n + v^1 v^n = 0.$$

Para o caso 1, temos:

- Se  $u^n = 0$ , então  $v^n \neq 0$  e  $v^1 = 0$ . Logo,

$$\begin{aligned} [Mp] &= [(u^1, 0, \dots, 0, 0) + i(0, 0, \dots, 0, v^n)] = \left[ \left( \frac{u^1}{v^n}, 0, \dots, 0, i \right) \right] = \\ &= [(\pm 1, 0, \dots, i)], \text{ com } M \in O^{++}(n-1, 1), \end{aligned}$$

pois

$$\ll p, p \gg = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow (u^1)^2 - (v^n)^2 = 0 \Leftrightarrow t^2 = 1.$$

- Se  $v^n = 0$ , então  $u^n \neq 0$  e  $u^1 = 0$ . De modo análogo, temos

$$[Mp] = [(\pm 1, 0, \dots, i)], \text{ com } M \in O^{++}(n-1, 1).$$

- Se  $u^n v^n \neq 0$ , então podemos definir os números reais

$$a := v^n, \quad b := -u^n \quad \text{e} \quad t := \frac{u^1}{v^n} = -\frac{v^1}{u^n}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 Mp &= (at, 0, \dots, 0, -b) + i(bt, 0, \dots, 0, a) = \\
 &= (a + ib)(t, \dots, i) \text{ com } M \in O^{++}(n-1, 1), \\
 \langle Mu, Mu \rangle &= \langle u, u \rangle = a^2 t^2 - b^2, \quad \langle Mv, Mv \rangle = \langle v, v \rangle = b^2 t^2 - a^2, \\
 \langle Mu, Mv \rangle &= \langle u, v \rangle = ab(t^2 + 1) \text{ e } \ll p, p \gg = (a^2 + b^2)(t^2 - 1).
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$0 = \ll p, p \gg = (a^2 + b^2)(t^2 - 1) \Leftrightarrow t^2 = 1,$$

$$[Mp] = [(\pm 1, 0, \dots, 0, i)].$$

Para o caso 2, podemos ter

$$u = (u^1, 0, \dots, 0, u^1) \text{ e } v = (-u^1, 0, \dots, 0, u^1)$$

ou

$$u = (u^1, 0, \dots, 0, u^1) \text{ e } v = (u^1, 0, \dots, 0, -u^1).$$

Logo,

$$[Mp] = [(1 - i, 0, \dots, 0, 1 + i)] = [(1, 0, \dots, 0, i)]$$

ou

$$[Mp] = [(1 + i, 0, \dots, 0, 1 - i)] = [(-1, 0, \dots, 0, i)].$$

Isto encerra a demonstração do item (a).

Relembrando que no caso 3, temos

$$\langle u, u \rangle = 0, \quad \langle v, v \rangle = 0 \text{ e } \langle u, v \rangle = 0 \Rightarrow v = \lambda u, \text{ com } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Segue-se que

$$Mp = u + iv = (1 + i\lambda)u \Rightarrow [Mp] = [u].$$

Existe  $A \in O^{++}(n-1, 1)$  tal que  $Au = (u^1, 0, \dots, 0, u^1)$ . Portanto,

$$[Mp] = [(i, 0, \dots, 0, i)].$$

O que prova o item (b). □

**Proposição 2.11.** *Seja  $H$  o hiperplano em  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ ,  $n \geq 3$ , definido pela equação  $\langle p, z \rangle^{\mathbb{C}} = 0$  com  $p = u + iv$  e  $u, v \in \mathbb{L}^n$ . Temos o seguinte:*

1) *Se  $u$  e  $v$  geram um 2-plano tipo espaço do  $\mathbb{L}^n$  ou são tipo espaço linearmente dependentes, então existe uma matriz  $M \in O^{++}(n-1, 1)$  tal que para  $\tilde{z} = Mz$ , o hiperplano  $H$  tem equação*

$$c_1 \tilde{z}^1 - \tilde{z}^2 = 0, \quad (2.9)$$

*para algum número complexo  $c_1$  da forma  $c_1 = it$ ,  $|t| \leq 1$ . Em particular,  $H$  é tangente a  $Q_1^{n-2}$  se, e somente se  $c_1 = \pm i$  e;  $p = \lambda x$  com  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ,  $\langle x, x \rangle > 0$  se, e somente se  $t = 0$ .*

2) *Se  $u$  e  $v$  geram um 2-plano de Lorentz do  $\mathbb{L}^n$  ou são tipo tempo linearmente dependentes, então existe uma matriz  $M \in O^{++}(n-1, 1)$  tal que para  $\tilde{z} = Mz$ , o hiperplano  $H$  tem equação*

$$c_2 \tilde{z}^1 + \tilde{z}^n = 0, \quad (2.10)$$

*para algum número complexo  $c_2$  da forma  $c_2 = it$ , com  $t \in \mathbb{R}$ . Mais especificamente,  $|t| > 1$  se  $[p] \in \mathbb{CP}_1^{n-1}$ ,  $|t| < 1$  se  $[p] \in \mathbb{CH}^{n-1}$ ,  $t = \pm 1$  se  $[p] \in \partial\mathbb{CH}^{n-1}$ , e  $p = \lambda x$  com  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ,  $\langle x, x \rangle < 0$  se, e somente se  $t = 0$ .*

3) *Se  $u$  e  $v$  geram um 2-plano tangente ao cone de luz  $\mathcal{C}_L(0)$  do  $\mathbb{L}^n$  ou são tipo luz linearmente dependentes, então existe uma matriz  $M \in O^{++}(n-1, 1)$  tal que para  $\tilde{z} = Mz$ , o hiperplano  $H$  tem equação*

$$\tilde{z}^1 - c_3 \tilde{z}^2 - \tilde{z}^n = 0, \quad (2.11)$$

*para algum número complexo  $c_3$  da forma  $c_3 = it$ , com  $t \in \mathbb{R}$ . Mais especificamente,  $t \in \mathbb{R}^*$  se  $[p] \in \mathbb{CP}_1^{n-1}$  e  $t = 0$  se  $[p] \in \partial\mathbb{CH}^{n-1}$ .*

**Demonstração:** Segue imediatamente das Proposições 2.8, 2.9 e 2.10, porque sob a mudança de coordenadas  $\tilde{z} = Mz$ ,  $M \in O^{++}(n-1, 1)$ , o hiperplano  $\langle p, z \rangle^{\mathbb{C}} = 0$  é transformado em  $\langle \tilde{p}, \tilde{z} \rangle^{\mathbb{C}} = 0$ , onde  $\tilde{p} = Mp$ .  $\square$

**Observação 2.1.** No segundo item da Proposição acima, podemos considerar sem perda de generalidade que  $c_2 \tilde{z}^{n-1} + \tilde{z}^n = 0$ .

Sejam agora  $z, w \in \mathbb{C}_1^n$ , podemos escrever

$$\langle\langle z, w \rangle\rangle = z^1 \overline{w^1} + \dots + z^{n-1} \overline{w^{n-1}} - z^n \overline{w^n},$$

na forma

$$\langle\langle z, w \rangle\rangle = z^t I_{n-1,1} \overline{w}, \quad \text{onde } z = \begin{bmatrix} z^1 \\ \vdots \\ z^n \end{bmatrix} \quad \text{e } w = \begin{bmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^n \end{bmatrix}.$$

Logo

$$\langle\langle w, z \rangle\rangle = \overline{\langle\langle z, w \rangle\rangle} = \overline{z^t} I_{n-1,1} w, \quad \text{onde } I_{n-1,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

Seja  $A \in GL(n, \mathbb{C})$ . Então

$$\langle\langle Aw, Az \rangle\rangle = \overline{(Az)^t} I_{n-1,1} Aw = \overline{z^t} \overline{A^t} I_{n-1,1} Aw,$$

donde

$$\langle\langle Aw, Az \rangle\rangle = \langle\langle w, z \rangle\rangle \Leftrightarrow \overline{A^t} I_{n-1,1} A = I_{n-1,1} \Leftrightarrow A I_{n-1,1} \overline{A^t} = I_{n-1,1}.$$

Portanto o grupo *pseudo unitário*  $U(n-1, 1)$  é definido por

$$U(n-1, 1) := \{A \in GL(n, \mathbb{C}) : A I_{n-1,1} \overline{A^t} = I_{n-1,1}\}. \quad (2.12)$$

**Proposição 2.12.** *Seja  $H$  um hiperplano de  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ ,  $n \geq 3$ , definido pela equação  $\langle p, z \rangle^{\mathbb{C}} = 0$ , que não é tangente a  $Q_1^{n-2}$ . Temos:*

1) *Se  $\Re(p)$  e  $\Im(p)$  estão contidos em um 2-plano de tipo espaço do  $\mathbb{L}^n$ , então  $H \cap Q_1^{n-2}$  é equivalente, sob a ação de  $U(n-1, 1)$ , à quádrlica*

$$k(z^2)^2 + (z^3)^2 + \dots + (z^{n-1})^2 - (z^n)^2 = 0, \quad \text{com} \quad (2.13)$$

$$k = \frac{1 + c_1^2}{1 + |c_1|^2}, \quad c_1 = it \quad \text{e } |t| < 1.$$

2) Se  $\ll p, p \gg < 0$  e  $\Re(p), \Im(p)$  estão contidos em um 2-plano de Lorentz do  $\mathbb{L}^n$ , então  $H \cap Q_1^{n-2}$  é equivalente, sob a ação de  $U(n-1, 1)$ , à quádrlica

$$\mu(z^1)^2 + (z^2)^2 + \cdots + (z^{n-1})^2 = 0, \quad \text{com} \quad (2.14)$$

$$\mu = \frac{1 - c_2^2}{1 - |c_2|^2}, \quad c_2 = it \quad \text{e} \quad |t| < 1.$$

3) Se  $\ll p, p \gg > 0$  e  $\Re(p), \Im(p)$  estão contidos em um 2-plano de Lorentz do  $\mathbb{L}^n$ , então  $H \cap Q_1^{n-2}$  é equivalente, sob a ação de  $U(n-1, 1)$ , à quádrlica

$$(z^2)^2 + (z^3)^2 + \cdots + \eta(z^n)^2 = 0, \quad \text{com} \quad (2.15)$$

$$\eta = \frac{1 - c_2^2}{|c_2|^2 - 1}, \quad c_2 = it \quad \text{e} \quad |t| > 1.$$

4) Se  $\ll p, p \gg > 0$  e  $\Re(p), \Im(p)$  estão contidos em um 2-plano tangente ao cone de luz  $\mathcal{C}_L(0)$  do  $\mathbb{L}^n$  então

$$\begin{cases} \frac{\bar{c}_3}{c_3}(z^1)^2 + (z^2)^2 + \cdots + (z^{n-1})^2 - \frac{\bar{c}_3}{c_3 d^2}(z^n)^2 = 0, \\ z^1 - c_3 z^2 - z^n = 0, \end{cases}$$

com  $c_3 \in \mathbb{C}^*$  e  $d^2 = 1 + |c_3|^2$  é equivalente, sob a ação de  $U(n-1, 1)$ , à quádrlica

$$(z^2)^2 + (z^3)^2 + \cdots + (z^{n-1})^2 + (z^n)^2 = 0.$$

**Demonstração:** 1) Podemos assumir pela Proposição 2.11 item (1) que  $H$  tem equação

$$c_1 z^1 - z^2 = 0, \quad \text{com} \quad c_1 \neq \pm i. \quad (2.16)$$

Seja  $d := \sqrt{1 + |c_1|^2}$  e introduzimos coordenadas  $\tilde{z} = (\tilde{z}^1, \dots, \tilde{z}^n)$  dadas pela transformação pseudo-unitária  $A : z \mapsto \tilde{z}$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} c_1/d & -1/d & \cdots & 0 & 0 \\ 1/d & \bar{c}_1/d & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

De (2.12) segue-se que

$$A^{-1} = I_{n,1} \overline{A^t} I_{n,1},$$

donde  $A^{-1} : \tilde{z} \mapsto z$  é dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{c_1}/d & 1/d & \dots & 0 & 0 \\ -1/d & c_1/d & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Então  $A^{-1}(\tilde{z}) = z$  é equivalente a

$$z^1 = \frac{1}{d}(\overline{c_1}\tilde{z}^1 + \tilde{z}^2), \quad z^2 = \frac{1}{d}(-\tilde{z}^1 + c_1\tilde{z}^2), \quad z^3 = \tilde{z}^3, \dots, z^n = \tilde{z}^n. \quad (2.19)$$

Segue-se daí que

$$(z^1)^2 + (z^2)^2 = \frac{1}{d^2} \{(\overline{c_1}\tilde{z}^1 + \tilde{z}^2)^2 + (-\tilde{z}^1 + c_1\tilde{z}^2)^2\}. \quad (2.20)$$

Portanto, se  $z \in H \cap Q_1^{n-2}$  temos

$$k(\tilde{z}^2)^2 + \dots + (\tilde{z}^{n-1})^2 - (\tilde{z}^n)^2 = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{z}^1 = 0, \quad \text{onde} \quad k := \frac{1 + c_1^2}{1 + |c_1|^2}.$$

2) Pela Proposição 2.11 item (2),  $H$  tem equação

$$c_2 z^1 + z^n = 0, \quad \text{com} \quad c_2 = it, \quad |t| < 1. \quad (2.21)$$

Seja  $r := \sqrt{1 - |c_2|^2}$  e introduzimos coordenadas  $\tilde{z}$  dadas pela transformação pseudo-unitária  $A : z \mapsto \tilde{z}$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 1/r & 0 & \dots & 0 & \overline{c_2}/r \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ c_2/r & 0 & \dots & 0 & 1/r \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

De (2.12) temos que  $A^{-1} : \tilde{z} \mapsto z$  é dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/r & 0 & \dots & 0 & -\overline{c_2}/r \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -c_2/r & 0 & \dots & 0 & 1/r \end{bmatrix}. \quad (2.23)$$

O restante da demonstração desta parte segue os mesmos passos da parte anterior.

3) Neste caso,  $H$  tem equação:

$$c_2 z^1 + z^n = 0, \quad \text{com } c_2 = it, \quad |t| > 1. \quad (2.24)$$

Seja  $r' := \sqrt{|c_2|^2 - 1}$  e introduzimos coordenadas  $\tilde{z}$  dadas pela transformação pseudo-unitária  $A : z \mapsto \tilde{z}$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} c_2/r' & 0 & \dots & 0 & 1/r' \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 1/r' & 0 & \dots & 0 & \overline{c_2}/r' \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

Assim,  $\tilde{z}^1 = c_2 z^1 + z^n = 0$ . De (2.12) temos que  $A^{-1} : \tilde{z} \mapsto z$  é dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \overline{c_2}/r' & 0 & \dots & 0 & -1/r' \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -1/r' & 0 & \dots & 0 & c_2/r' \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

donde segue-se que

$$(z^1)^2 - (z^n)^2 = \eta(\tilde{z})^n, \quad \text{com } \eta := \frac{1 - c_2^2}{|c_2|^2 - 1}, \quad (2.27)$$

$$(\tilde{z}^2)^2 + \dots + (\tilde{z}^{n-1})^2 + \eta(\tilde{z}^n)^2 = 0.$$

4) Neste caso,  $H$  tem equação:

$$z^1 - c_3 z^2 - z^n = 0, \text{ com } c_3 = it, t \neq 0. \quad (2.28)$$

Seja  $r = |c_3|$ ,  $d^2 = 1 + |c_3|^2$  e introduzimos coordenadas  $\tilde{z}$  dadas pela transformação pseudo-unitária  $A : z \mapsto \tilde{z}$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} 1/r & -c_3/r & 0 & -1/r \\ \bar{c}_3/d & 1/d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id_{n-3} & 0 \\ -1/rd & c_3/rd & 0 & d/r \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

Assim,  $\tilde{z}^1 = z^1 - c_3 z^2 - z^n = 0$ . De (2.12) temos que  $A^{-1} : \tilde{z} \mapsto z$  é dada por

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/r & c_3/d & 0 & 1/rd \\ -\bar{c}_3/r & 1/d & 0 & -\bar{c}_3/rd \\ 0 & 0 & Id_{n-3} & 0 \\ 1/r & 0 & 0 & d/r \end{bmatrix},$$

donde se segue facilmente o resultado.  $\square$

## 2.2 Famílias de superfícies máximas em $\mathbb{L}^4$

Nosso objetivo agora é encontrar fórmulas de representação tipo Weierstrass para superfícies máximas em  $\mathbb{L}^4$ , com aplicação de Gauss degenerada.

**Definição 2.1.** Uma superfície  $S$  de tipo espaço em  $\mathbb{L}^n$ ,  $n \geq 3$ , tem aplicação de Gauss  $G$  degenerada, se a imagem  $G(M^2)$  está contida em um hiperplano

$$p_1 z^1 + \dots - p_n z^n = 0, \quad p, z \in \mathbb{C}^n$$

de  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ . Dizemos que:

1)  $S$  tem aplicação de Gauss degenerada de tipo 1 se  $\Re e(p)$ ,  $\Im m(p)$  geram um 2-plano

de tipo espaço em  $\mathbb{L}^n$ , ou são vetores tipo espaço linearmente dependentes ( $n > 3$ );  
 2)  $S$  tem aplicação de Gauss degenerada de tipo 2 se  $\Re e(p)$ ,  $\Im m(p)$  geram um 2-plano de Lorentz em  $\mathbb{L}^n$ , ou são tipo tempo linearmente dependentes;  
 3)  $S$  tem aplicação de Gauss degenerada de tipo 3 se  $\Re e(p)$ ,  $\Im m(p)$  geram um 2-plano tangente ao cone de luz  $\mathcal{C}_L(x_0)$  do  $\mathbb{L}^n$ , ou são de tipo luz linearmente dependentes ( $n > 4$ ).

**Observação 2.2.** 1) Na definição acima por *degenerada*, estamos entendendo 1-*degenerada*, isto é, a imagem pela aplicação de Gauss  $G$  está contida em um subespaço projetivo de codimensão 1. Em geral diz-se que a aplicação de Gauss é *k-degenerada* se  $k$  é o maior inteiro tal que  $G(M^2)$  está contida em um subespaço projetivo de codimensão  $k$  (ver [22]).

2) No item (1) da definição acima, se  $\Re e(p)$ ,  $\Im m(p)$  fossem vetores tipo espaço linearmente dependentes de  $\mathbb{L}^3$ , pela Proposição 2.11 o hiperplano acima tem uma forma especial  $H = \{z \in \mathbb{C}^4 : z^2 = 0\}$ . Assim, a superfície tipo espaço  $S$  estaria contida em um 2-plano de Lorentz, mas isto é impossível. O mesmo raciocínio se usa para excluir o caso  $n = 3$  no item (3).

3) No item (3) da definição acima, se  $\Re e(p)$ ,  $\Im m(p)$  são vetores de tipo luz linearmente dependentes de  $\mathbb{L}^4$ , pela Proposição 2.11 o hiperplano acima tem uma forma especial  $H = \{z \in \mathbb{C}^4 : z^1 - z^4 = 0\}$ . Mas,  $G(M) \subset H \cap Q_1^2 = \{z^1 - z^4 = 0, z^2 - iz^3 = 0\} \cup \{z^1 - z^4 = 0, z^2 + iz^3 = 0\}$ . Neste caso, a aplicação de Gauss da superfície  $S$ , seria 2-degenerada e não 1-degenerada.

As demonstrações dos três Lemas seguintes seguem imediatamente da Proposição 2.11.

**Lema 2.13.** *Seja  $S$  uma superfície máxima com aplicação de Gauss degenerada de tipo 1 em  $\mathbb{L}^n$ ,  $n \geq 3$ . Então existe uma base ortonormal positivamente orientada de  $\mathbb{L}^n$  tal que as coordenadas  $\phi^k$  da aplicação de Gauss  $\Phi$  de  $S$ , em termos de coordenadas isotérmicas locais, satisfazem*

$$c_1\phi^1 - \phi^2 = 0, (\phi^3)^2 + \cdots - (\phi^n)^2 = -(1 + c_1^2)(\phi^1)^2 \text{ e } \ll \Phi, \Phi \gg > 0, \quad (2.30)$$

onde  $c_1$  é uma constante complexa diferente de  $\pm i$ . Reciprocamente, dado qualquer constante complexa  $c_1 \neq \pm i$  e funções holomorfas  $\phi^1, \dots, \phi^n$  satisfazendo (2.30), então a superfície máxima  $S$  correspondente tem aplicação de Gauss degenerada de tipo 1 contida no hiperplano  $c_1 z^1 - z^2 = 0$ .

**Lema 2.14.** *Seja  $S$  uma superfície máxima com aplicação de Gauss degenerada de tipo 2 em  $\mathbb{L}^n$ ,  $n \geq 3$ . Então existe uma base ortonormal positivamente orientada de  $\mathbb{L}^n$  tal que as coordenadas  $\phi^k$  da aplicação de Gauss  $\Phi$  de  $S$ , em termos de coordenadas isotérmicas locais, satisfazem*

$$c_2 \phi^{n-1} + \phi^n = 0, \quad (\phi^2)^2 + \dots + (\phi^{n-1})^2 = (c_2^2 - 1)(\phi^1)^2 \text{ e } \ll \Phi, \Phi \gg > 0, \quad (2.31)$$

onde  $c_2$  é uma constante complexa diferente de  $\pm 1$ . Reciprocamente, dado qualquer constante complexa  $c_2 \neq \pm 1$  e funções holomorfas  $\phi^1, \dots, \phi^n$  satisfazendo (2.31), então a superfície máxima  $S$  correspondente tem aplicação de Gauss degenerada de tipo 2 contida no hiperplano  $c_2 z^1 + z^n = 0$ .

**Lema 2.15.** *Seja  $S$  uma superfície máxima com aplicação de Gauss degenerada de tipo 3 em  $\mathbb{L}^n$ ,  $n \geq 3$ . Então existe uma base ortonormal positivamente orientada de  $\mathbb{L}^n$  tal que as coordenadas  $\phi^k$  da aplicação de Gauss  $\Phi$  de  $S$ , em termos de coordenadas isotérmicas locais, satisfazem*

$$\begin{cases} \phi^1 - c_3 \phi^2 - \phi^n = 0, \\ (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 \dots + (\phi^{n-1})^2 - (\phi^n)^2 = 0 \end{cases} \text{ e } \ll \Phi, \Phi \gg > 0, \quad (2.32)$$

onde  $c_3$  é uma constante complexa diferente de zero. Reciprocamente, dado qualquer constante complexa  $c_3 \neq 0$  e funções holomorfas  $\phi^1, \dots, \phi^n$  satisfazendo (2.32), então a superfície máxima  $S$  correspondente tem aplicação de Gauss degenerada de tipo 3 contida no hiperplano  $z^1 - c_3 z^1 + z^n = 0$ .

O seguinte teorema nos dará uma representação geral das superfícies máximas com aplicação de Gauss degeneradas de tipo 1 em  $\mathbb{L}^4$ .

**Teorema 2.16.** *Seja  $S$  uma superfície máxima regular com aplicação de Gauss degenerada de tipo 1 em  $\mathbb{L}^4$ , definida pela imersão  $X : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$ . Então podemos associar a  $S$  uma quádrupla  $(M^2, g_1, \eta_1, c_1)$ , onde  $M^2$  é uma superfície de Riemann,  $g_1$  é uma função meromorfa não constante e  $\Re e(g_1) \neq 0$  sobre  $M^2$ ,  $\eta_1$  é uma 1-forma holomorfa, e  $c_1$  é uma constante complexa tal que*

I) *A tripla  $(g_1, \eta_1, c_1)$  satisfaz as propriedades:*

a)  $c_1 \neq \pm i$ ;

b) *A 1-forma diferencial  $\eta_1$  em um sistema de coordenadas isotérmicas*

*$(U, \zeta = u + iv)$  de  $M^2$  é definida globalmente por*

$$\eta_1 = 2 \frac{\partial x^1}{\partial \zeta} d\zeta \quad (2.33)$$

*e os zeros de  $\eta_1$  coincidem, em posição e ordem, com os zeros e polos de  $g_1$ ;*

c) *Se  $c_1 \notin \mathbb{R}$ , então a primeira coordenada  $x^1$  de  $X$  tem uma conjugada harmônica a valores singulares sobre  $M^2$ ;*

d) *Para qualquer caminho fechado  $\gamma$  sobre  $M^2$ ,*

$$\Im m \int_{\gamma} \frac{\eta_1}{g_1} = 0, \quad \Im m \int_{\gamma} r_1 g_1 \eta_1 = 0 \quad e \quad \Re e \int_{\gamma} \eta_1 = 0, \quad \text{onde } r_1 := -(1 + c_1^2). \quad (2.34)$$

II) *A superfície  $S$  é dada, a menos de congruência, por*

$$X(\zeta) = \Re e \int_{\zeta_0}^{\zeta} \left( 1, c_1, \frac{i}{2} \left( r_1 g_1 - \frac{1}{g_1} \right), \frac{i}{2} \left( r_1 g_1 + \frac{1}{g_1} \right) \right) \eta_1, \quad (2.35)$$

*onde  $\zeta_0, \zeta \in M^2$  e  $\zeta_0$  é fixo.*

*Reciprocamente, dada uma quádrupla arbitrária  $(M^2, g_1, \eta_1, c_1)$  tendo as propriedades citadas em (I), então (2.35) define uma superfície máxima regular com aplicação de Gauss degenerada de tipo 1 em  $\mathbb{L}^4$ .*

**Demonstração:** ( $\Rightarrow$ ) Pelo Lema 2.13 existe uma base ortonormal positivamente orientada de  $\mathbb{L}^4$  com respeito à qual a aplicação de Gauss de  $S$ , em termos de qualquer sistema de coordenadas isotérmico  $(U, \zeta = u + iv)$  de  $M^2$ , satisfaz

$$\phi^2 = c_1 \phi^1, \quad (2.36)$$

$$(\phi^3)^2 - (\phi^4)^2 = r_1(\phi^1)^2, \quad \text{com } r_1 = -(1 + c_1^2). \quad (2.37)$$

Observe que não podemos ter  $(\phi^3)^2 - (\phi^4)^2 = 0$ , caso contrário teríamos também  $(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 = 0$  o que implica  $\phi^2 = \pm i\phi^1$ . Portanto, a superfície  $S$  teria aplicação de Gauss 2-degenerada. Similarmente, a condição (a) vale, caso contrário se  $c_1 = \pm i$ , junto com as equações (2.36) e (2.37),  $S$  teria aplicação de Gauss 2-degenerada. Assim, a função

$$g_1 = -\frac{i\phi^1}{\phi^3 - \phi^4} \quad (2.38)$$

é meromorfa e independente da escolha de coordenadas sobre  $M^2$ . Além disso,  $g_1 \neq 0$ , pois caso contrário,  $\phi^1 \equiv 0$  e por (2.36)  $\phi^2 \equiv 0$ . Como  $X_\zeta = \mu\Phi$ ,  $x^1$  e  $x^2$  seriam constantes. Assim, a superfície  $S$  estaria contida em um 2-plano de Lorentz  $\Pi = \{x^1 = cte, x^2 = cte\} \subset \mathbb{L}^4$  e isto nos conduz a um absurdo.

Segue-se de (2.37) e (2.38) que

$$\phi^3 - \phi^4 = -\frac{i\phi^1}{g_1} \quad \text{e} \quad \phi^3 + \phi^4 = ir_1g_1\phi^1.$$

Portanto, a aplicação de Gauss tem a forma

$$\Phi = \left( 1, c_1, \frac{i}{2}(r_1g_1 - \frac{1}{g_1}), \frac{i}{2}(r_1g_1 + \frac{1}{g_1}) \right) \phi^1. \quad (2.39)$$

Note que a função  $g_1$  não pode ser constante, porque se fosse, a aplicação de Gauss também seria constante ( $S$  estaria contida em um 2-plano de tipo espaço), ou seja a aplicação de Gauss de  $S$  seria 3-degenerada.

A 1-forma  $\eta_1 = 2\mu\phi^1 d\zeta$  é globalmente definida sobre  $M^2$ . Logo (2.35) segue do fato que  $X(\zeta) = \Re e \int_{\zeta_0}^{\zeta} \tilde{\Phi}(w)\eta_1$ , onde  $\Phi = \tilde{\Phi}\phi^1$ . Como estamos supondo  $S$  sem períodos reais, temos que  $\Re e \int_{\gamma} \tilde{\Phi}(w)\eta_1 = 0$  para qualquer caminho fechado  $\gamma$  em  $M^2$ . Isto nos diz que

$$\Im m \int_{\gamma} r_1g_1\eta_1 - \Im m \int_{\gamma} \frac{\eta_1}{g_1} = 0, \quad \Im m \int_{\gamma} r_1g_1\eta_1 + \Im m \int_{\gamma} \frac{\eta_1}{g_1} = 0, \quad \Re e \int_{\gamma} \eta_1 = 0$$

e  $\Re e \int_{\gamma} c_1\eta_1 = 0$  e daí segue-se (d). Se  $c_1 \notin \mathbb{R}$ , podemos supor  $c_1 = it$ , com  $t \neq 0$ . Logo

$$\Re e \int_{\gamma} c_1\eta_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Im m \int_{\gamma} \eta_1 = 0$$

e isto prova (c).

Como  $S$  é regular, as formas  $g_1\eta_1$  e  $\eta_1/g_1$  não podem se anular identicamente, caso contrário, de (2.39) teríamos  $\phi^3 d\zeta, \phi^4 d\zeta$  identicamente nulas e usando (2.36) e (2.37) também teríamos  $\phi^1 d\zeta, \phi^2 d\zeta$  identicamente nulos. Neste caso, os vetores tangentes  $X_u$  e  $X_v$  seriam ambos nulos. Assim, em um zero de  $g_1$ ,  $g_1\eta_1$  precisa ser zero e  $\eta_1/g_1$  diferente de zero e, em um polo de  $g_1$ ,  $g_1\eta_1$  precisa ser diferente de zero e  $\eta_1/g_1$  precisa ser zero. Isto prova (b).

( $\Leftarrow$ ) Reciprocamente, seja  $(M^2, g_1, \eta_1, c_1)$  satisfazendo as propriedades citadas em (I), temos por (d) que a integral  $\int_{\zeta_0}^{\zeta} \tilde{\Phi}(w)\eta_1$  está bem definida. Assim, (2.35) nos dá uma aplicação bem definida  $X : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$ . As correspondentes componentes da aplicação de Gauss  $\phi^k, k = 1, 2, 3, 4$  são holomorfas por (b) e segue-se de (2.35) que

$$c_1\phi^1 - \phi^2 = 0, (\phi^3)^2 - (\phi^4)^2 = r_1(\phi^1)^2 \text{ e } \ll \Phi, \Phi \gg > 0.$$

Concluimos então que, (2.35) define uma superfície máxima regular  $S$  com aplicação de Gauss degenerada de tipo 1 em  $\mathbb{L}^4$ . Resta mostrar ainda que se a aplicação de Gauss está contida em um hiperplano arbitrário  $H$  de  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ , então  $H : c_1 z^1 - z^2 = 0$ . Suponhamos que a aplicação de Gauss de  $S$  satisfaça a equação  $\langle p, \Phi \rangle^{\mathbb{C}} \equiv 0$ , com  $p \neq 0$ . Segue de (2.39) que

$$(r_1(p_3 - p_4)i)g_1^2 + 2(p_1 + c_1 p_2)g_1 - (p_3 + p_4)i \equiv 0. \quad (2.40)$$

Se  $p_3 - p_4 \neq 0$  ( $r_1 \neq 0$ , pois  $c_1 \neq \pm i$ ) ou  $p_3 + p_4 \neq 0$ , então  $g_1$  é uma função constante, contra a hipótese. Logo,  $p_3 - p_4 = 0$  e  $p_3 + p_4 = 0$ . Assim,  $p_3 = p_4 = 0$ . Portanto, a equação (2.40), reduz-se a

$$(p_1 + c_1 p_2)g_1 \equiv 0. \quad (2.41)$$

Como  $g_1 \not\equiv 0$ , (2.41) implica  $p_1 = -c_1 p_2$ , com  $p_2 \neq 0$ , pois  $p \neq 0$ . Substituindo  $p = (-c_1 p_2, p_2, 0, 0)$  em  $\langle p, \Phi \rangle^{\mathbb{C}} \equiv 0$  temos

$$p_2(c_1\phi^1 - \phi^2) \equiv 0,$$

o que implica  $c_1\phi^1 - \phi^2 \equiv 0$ . Concluimos que a imagem pela aplicação de Gauss está contida na intersecção da quádrlica complexa  $Q_1^2$  com um único hiperplano  $c_1 z^1 - z^2 = 0$ .  $\square$

**Observação 2.3.** No caso em que  $c_1 = 0$  ( $r_1 = -1$ ),  $S$  está contida no espaço tridimensional  $\mathbb{L}^3 \equiv \{x^2 = cte\} \subset \mathbb{L}^4$  e a fórmula dada em (2.35) reduz-se a

$$X(\zeta) = \Re e \int_{\zeta_0}^{\zeta} \left( 1, 0, \frac{-i}{2} \left( g + \frac{1}{g} \right), \frac{i}{2} \left( \frac{1}{g} - g \right) \right) \eta,$$

onde  $g = g_1$  e  $\eta = \eta_1$ . Como  $g = \frac{-i\phi^1}{\phi^3 - \phi^4}$  e  $\eta = 2\mu\phi^1 dz$ , pondo  $f = 2(\phi^3 - \phi^4)\mu$ , temos que  $\eta = ifgdz$ . Logo,

$$X(\zeta) = \Re e \int_{\zeta_0}^{\zeta} \left( ifg, 0, \frac{f}{2}(g^2 + 1), \frac{f}{2}(g^2 - 1) \right) dw. \quad (2.42)$$

Observe que (2.42) é, a menos de congruências, a representação de Weierstrass para superfícies máximas de segunda espécie em  $\mathbb{L}^3$  dada em [29].

A métrica induzida por  $X$  em (2.35), é dada por

$$ds_{1,t}^2 = 2 \ll X_\zeta, X_\zeta \gg |d\zeta|^2.$$

Como  $X_\zeta = \mu\Phi$ , temos que

$$ds_{1,t}^2 = 2|\mu|^2 \ll \Phi, \Phi \gg |d\zeta|^2.$$

Não é difícil ver que

$$\ll \Phi, \Phi \gg = \frac{2|\phi^1|^2}{|g_1|^2} (\Re e\{g_1\}^2 + t^2 \Im m\{g_1\}^2).$$

Donde segue-se que

$$ds_{1,t}^2 = (\Re e\{g_1\}^2 + t^2 \Im m\{g_1\}^2) \frac{4|\mu|^2 |\phi^1|^2 |d\zeta|^2}{|g_1|^2}.$$

Agora como  $\eta_1 = 2\mu\phi^1 d\zeta$ ,  $g_1 = \frac{-i\phi^1}{\phi^3 - \phi^4}$ . Então definindo  $f_1 := 2\mu(\phi^3 - \phi^4)$  segue-se que  $\eta_1 = if_1 g_1 d\zeta$ . Portanto, obtemos  $ds_{1,t}^2$  em função de  $g_1$ ,  $f_1$  e  $t$ :

$$ds_{1,t}^2 = (\Re e(g_1)^2 + t^2 \Im m(g_1)^2) |f_1|^2 |d\zeta|^2. \quad (2.43)$$

Note que  $ds_{1,0}^2 = \Re e(g_1)^2 |f_1|^2 |d\zeta|^2$  é exatamente a métrica induzida por  $X$ , dada pela representação de Weierstrass (2.42); isto justifica a condição  $\Re e(g_1) \neq 0$  do Teorema 2.16.

O Teorema 2.16 nos diz que para  $c_1 \neq \pm i$ , a superfície máxima  $S$  definida por (2.35) tem aplicação de Gauss contida em um único hiperplano  $c_1 z^1 - z^2 = 0$ . E ele tem coeficientes reais se, e somente se  $c_1 \in \mathbb{R}$  ( $c_1 = 0$ , tomando  $c_1$  normalizado).

Dizemos que uma superfície  $S$  é *reversa* se  $X(M)$  não está contida em nenhum subespaço afim próprio de  $\mathbb{L}^4$ . Portanto, uma superfície máxima  $S$  com aplicação de Gauss degenerada de tipo 1 é reversa se, e somente se  $c_1 \notin \mathbb{R}$ , isto é,  $c_1 = it$ ,  $0 < t < 1$ .

Dado o par  $(g_1, \eta_1)$  e considerando  $c_1 = it$ ,  $0 \leq t < 1$ , como parâmetro complexo, a representação tipo Weierstrass dada em (2.35) define uma família a 1-parâmetro de superfícies máximas com aplicação de Gauss degenerada de tipo 1 em  $\mathbb{L}^4$ . Já vimos que quando  $c_1 = 0$ , temos uma representação de Weierstrass global para superfícies máximas de  $\mathbb{L}^3 \subset \mathbb{L}^4$ . Assim, cada superfície máxima de  $\mathbb{L}^3$  determina uma família a 1-parâmetro de superfícies máximas com aplicação de Gauss degeneradas de tipo 1 em  $\mathbb{L}^4$ . Por outro lado, iniciando com uma dada superfície máxima com aplicação de Gauss degenerada de tipo 1 em  $\mathbb{L}^4$ , então, a menos de congruências, ela pode ser representada por (2.35) com  $c_1$  da forma  $c_1 = it$ ,  $0 \leq t < 1$ .

**Exemplo 2.1.** Seja  $g_1 = \zeta$ ,  $f_1 = 2a$ , com  $a \in \mathbb{R}^*$  e  $M^2 = \mathbb{C} \setminus \{\zeta = u + iv : u \neq 0\}$ . A família obtida é

$$X_t(u, v) = a \left( -2uv, (v^2 - u^2)t, u - \left(\frac{u^3}{3} - uv^2\right)(t^2 - 1), -u - \left(\frac{u^3}{3} - uv^2\right)(t^2 - 1) \right).$$

Em particular para  $t = 0$  temos

$$X_0(u, v) = a \left( -2uv, 0, u + \frac{u^3}{3} - uv^2, -u + \frac{u^3}{3} - uv^2 \right).$$

Seja

$$\tilde{X}_0(u, v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} X_0(u, v). \quad (2.44)$$

Note que  $\tilde{X}(u, v)$  é a superfície máxima Enneper de segunda espécie (catenóide parabólico) de  $\mathbb{L}^3$ .

O seguinte Teorema nos dará uma representação geral das superfícies máximas com aplicação de Gauss degeneradas de tipo 2 em  $\mathbb{L}^4$ .

**Teorema 2.17.** *Seja  $S$  uma superfície máxima regular com aplicação de Gauss degenerada de tipo 2 em  $\mathbb{L}^4$  definida pela imersão  $X : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$ . Então podemos associar a  $S$  uma quádrupla  $(M^2, g_2, \eta_2, c_2)$ , onde  $M^2$  é uma superfície de Riemann,  $g_2$  é uma função meromorfa não constante sobre  $M^2$ ,  $\eta_2$  é uma 1-forma holomorfa, e  $c_2$  é uma constante complexa tal que*

I) A tripla  $(g_2, \eta_2, c_2)$  satisfaz as propriedades:

a)  $c_2 \neq \pm 1$ ;

b) A 1-forma diferencial  $\eta_2$  em um sistema de coordenadas isotérmicas

$(U, \zeta = u + iv)$  de  $M^2$  é definida globalmente por

$$\eta_2 = 2 \frac{\partial x^3}{\partial \zeta} d\zeta \quad (2.45)$$

e os zeros de  $\eta_2$  coincidem em posição e ordem com os zeros e polos de  $g_2$ ;

c) Se  $c_2 \notin \mathbb{R}$ , então  $x^3$  tem uma conjugada harmônica a valores singulares sobre  $M^2$ ;

d) Para qualquer caminho fechado  $\gamma$  sobre  $M^2$ ,

$$\overline{\Im \int_{\gamma} \frac{\eta_2}{g_2}} = -\Im \int_{\gamma} r_2 g_2 \eta_2 \quad \text{e} \quad \Re \int_{\gamma} \eta_2 = 0, \quad \text{onde} \quad r_2 := c_2^2 - 1. \quad (2.46)$$

II) A superfície  $S$  é dada, a menos de congruência, por

$$X(\zeta) = \Re \int_{\zeta_0}^{\zeta} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{g_2} + r_2 g_2 \right), \frac{i}{2} \left( \frac{1}{g_2} - r_2 g_2 \right), 1, -c_2 \right) \eta_2, \quad (2.47)$$

onde  $\zeta_0, \zeta \in M^2$  e  $\zeta_0$  é fixo.

Reciprocamente, dada uma quádrupla arbitrária  $(M^2, g_2, \eta_2, c_2)$  tendo as propriedades citadas em (I), então (2.47) define uma superfície máxima regular com aplicação de Gauss degenerada de tipo 2 em  $\mathbb{L}^4$ .

**Demonstração:** Pelo Lema 2.14 existe uma base ortonormal positivamente orientada de  $\mathbb{L}^4$  tal que a aplicação de Gauss de  $S$ , em termos de qualquer sistema de coordenadas isotérmico  $(U, \zeta = u + iv)$  de  $M^2$ , satisfaz

$$\phi^4 = -c_2 \phi^3, \quad (2.48)$$

$$(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 = r_2(\phi^3)^2, \quad \text{com } r_2 := (c_2^2 - 1). \quad (2.49)$$

Observe que não podemos ter  $\phi^1 - i\phi^2 \neq 0$ , caso contrário teríamos também  $(\phi^3)^2 - (\phi^4)^2 = 0$ , o que implica que  $\phi^4 = \pm\phi^3$ . Portanto, a aplicação de Gauss de  $S$  seria 2-degenerada. Similarmente, a condição (a) vale, caso contrário se  $c_2 = \pm 1$ , junto com as equações (2.48) e (2.49), a aplicação de Gauss de  $S$  seria 2-degenerada. Assim, a função

$$g_2 = \frac{\phi^3}{\phi^1 - i\phi^2} \quad (2.50)$$

é meromorfa e independente da escolha de coordenadas sobre  $M^2$ . Além disso,  $G \neq 0$ , pois caso contrário,  $\phi^3 \equiv 0$  e por (2.48),  $\phi^4 \equiv 0$ . Assim, a superfície  $S$  estaria contida em um 2-plano de tipo espaço  $\Pi = \{x^3 = cte, x^4 = cte\} \subset \mathbb{L}^4$  e, portanto, a sua aplicação de Gauss seria 3-degenerada.

Segue de (2.49) e (2.50) que

$$\phi^1 - i\phi^2 = \frac{\phi^3}{g_2} \quad \text{e} \quad \phi^1 + i\phi^2 = r_2 g_2 \phi^3.$$

Portanto, a aplicação de Gauss tem a forma

$$\Phi = \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{g_2} + r_2 g_2 \right), \frac{i}{2} \left( \frac{1}{g_2} - r_2 g_2 \right), 1, -c_2 \right) \phi^3. \quad (2.51)$$

Concluimos de (2.51) que a função  $G$  não pode ser constante, porque se fosse, a aplicação de Gauss também seria constante ( $S$  estaria contida em um 2-plano de tipo espaço), ou seja a aplicação de Gauss seria 3-degenerada.

A 1-forma  $\eta_2 = 2\mu\phi^3 d\zeta$  é globalmente definida sobre  $M^2$ . Portanto, (2.47) segue do fato que  $X(\zeta) = \Re e \int_{\zeta_0}^{\zeta} \tilde{\Phi}(w) \eta_2$ . Como estamos supondo  $S$  sem períodos reais, temos que  $\Re e \int_{\gamma} \tilde{\Phi}(w) \eta_2 = 0$  para qualquer caminho fechado  $\gamma$  em  $M^2$ . Isto nos diz que

$$\begin{aligned} \Re e \int_{\gamma} \frac{\eta_2}{g_2} + \Re e \int_{\gamma} r_2 g_2 \eta_2 &= 0, \quad -\Im m \int_{\gamma} \frac{\eta_2}{g_2} + \Im m \int_{\gamma} r_2 g_2 \eta_2 = 0, \\ \Re e \int_{\gamma} \eta_2 &= 0 \quad \text{e} \quad \Re e \int_{\gamma} c_2 \eta_2 = 0, \end{aligned}$$

e isto prova (d). Se  $c_2 \notin \mathbb{R}$ , podemos supor que  $c_2 = it$ , com  $t \neq 0$ . Logo,

$$\Re e \int_{\gamma} c_2 \eta_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Im m \int_{\gamma} \eta_2 = 0, \quad \text{isto prova (c).}$$

Como  $S$  é regular, as formas  $g_2\eta_2$  e  $\eta_2/g_2$  não podem se anular identicamente, caso contrário, de (2.51) teríamos  $\phi^1 d\zeta, \phi^2 d\zeta$  identicamente nulas e usando (2.48) e (2.49) também teríamos  $\phi^3 d\zeta, \phi^4 d\zeta$  identicamente nulos. Neste caso, os vetores tangentes  $X_u$  e  $X_v$  seriam ambos nulos. Assim, em um zero de  $g_2$ ,  $g_2\eta_2$  precisa ser zero e  $\eta_2/g_2$  diferente de zero e, em um polo de  $g_2$ ,  $g_2\eta_2$  precisa ser diferente de zero e  $\eta_2/g_2$  precisa ser zero. Isto prova (b).

( $\Leftarrow$ ) Reciprocamente, dada uma quádrupla arbitrária  $(M^2, g_2, \eta_2, c_2)$  satisfazendo as propriedades citadas em (I), temos por (d) que a integral  $\int_{\zeta_0}^{\zeta} \tilde{\Phi}(w)\eta_2$  está bem definida. Assim, (2.47) nos dá uma aplicação bem definida  $X : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$ . As correspondentes componentes da aplicação de Gauss  $\phi^k, k = 1, 2, 3, 4$  são holomorfas por (b) e segue de (2.47) que

$$c_2\phi^3 + \phi^4 = 0, (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 = (c_2^2 - 1)(\phi^3)^2 \text{ e } \ll \Phi, \Phi \gg > 0.$$

Concluimos que (2.47) define uma superfície máxima regular  $S$ , com aplicação de Gauss degenerada de tipo 2 em  $\mathbb{L}^4$ . Resta mostrar ainda que se a aplicação de Gauss está contida em um hiperplano arbitrário  $H$  de  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ , então  $H : c_2z^3 + z^4 = 0$ . Suponhamos que a aplicação de Gauss de  $S$  satisfaça a equação  $\langle p, \Phi \rangle^{\mathbb{C}} \equiv 0$ , com  $p \neq 0$ . Segue-se de (2.51) que

$$r_2(p_1 - ip_2)g_2^2 + 2(p_3 + c_2p_4)g_2 + (p_1 + ip_2) \equiv 0. \quad (2.52)$$

Se  $p_1 - ip_2 \neq 0$  ( $r_2 \neq 0$ , pois  $c_2 \neq \pm 1$ ) ou  $p_1 + ip_2 \neq 0$ , então  $g_2$  é uma função constante, contra a hipótese. Logo,  $p_1 - ip_2 = 0$  e  $p_1 + ip_2 = 0$ . Assim,  $p_1 = p_2 = 0$ . Portanto, a equação (2.52), reduz-se a

$$(p_3 + c_2p_4)g_2 \equiv 0. \quad (2.53)$$

como  $g_2 \not\equiv 0$ , (2.53) implica  $p_3 = -c_2p_4$ , com  $p_4 \neq 0$ , pois  $p \neq 0$ . Substituindo  $p = (0, 0, -c_2p_4, p_4)$  em  $\langle p, \Phi \rangle^{\mathbb{C}} \equiv 0$  temos

$$p_4(c_2\phi^3 + \phi^4) \equiv 0,$$

o que implica  $c_2\phi^3 + \phi^4 \equiv 0$ . Concluimos que a imagem pela aplicação de Gauss está contida na intersecção da quádrlica complexa  $Q_1^2$  com um único hiperplano  $c_2z^3 + z^4 = 0$ .

□

A métrica induzida por  $X$  em (2.47), é dada por

$$ds_{2,t}^2 = 2|\mu|^2 \ll \Phi, \Phi \gg |d\zeta|^2.$$

Para este caso, não é difícil ver que

$$\ll \Phi, \Phi \gg = \frac{|\phi^3|^2}{2|g_2|^2} \left( (1 + r_2|g_2|^2)^2 + 4|g_2|^2 \right).$$

Assim,

$$ds_{2,t}^2 = \frac{1}{4} \left( (1 + r_2|g_2|^2)^2 + 4|g_2|^2 \right) \frac{4|\mu|^2 |\phi^3|^2 |d\zeta|^2}{|g_2|^2}.$$

Agora como  $\eta_2 = 2\mu\phi^3 d\zeta$ , segue-se de (2.50) que  $\eta_2 = f_2 g_2 d\zeta$ , com  $f_2 := 2\mu(\phi^1 - i\phi^2)$ .

Portanto,

$$ds_{2,t}^2 = \frac{|f_2|^2}{4} \left( (1 + r_2|g_2|^2)^2 + 4|g_2|^2 \right) |d\zeta|^2. \quad (2.54)$$

**Observação 2.4.** No caso em que  $c_2 = 0$  ( $r_2 = -1$ ),  $S$  está contida no espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3 \equiv \{x^4 = cte\} \subset \mathbb{L}^4$  e a fórmula dada em (2.47) reduz-se a

$$X(\zeta) = \Re e \int_{\zeta_0}^{\zeta} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{g} - g \right), \frac{i}{2} \left( \frac{1}{g} + g \right), 1, 0 \right) \eta,$$

onde  $g = g_2$ ,  $\eta = \eta_2$  e  $f = f_2$ . Logo, substituindo  $\eta = fgd\zeta$  na expressão acima temos

$$X(\zeta) = \Re e \int_{\zeta_0}^{\zeta} \left( \frac{f}{2} (1 - g^2), \frac{if}{2} (1 + g^2), fg, 0 \right) dw. \quad (2.55)$$

Assim, a superfície  $S$  está contida no espaço tridimensional  $\mathbb{R}^3 \equiv \{x^4 = 0\} \subset \mathbb{L}^4$ , e observe que (2.55) é exatamente a representação de Weierstrass clássica para superfícies mínimas do  $\mathbb{R}^3$ , tendo como métrica induzida

$$ds_{2,0}^2 = \left( \frac{|f|(1 + |g|^2)}{2} \right)^2 |d\zeta|^2.$$

O Teorema 2.17 significa que para  $c_2 \neq \pm 1$  a superfície  $S$  dada por (2.47) tem aplicação de Gauss contida em um único hiperplano  $H = \{[z] : c_2 z^3 + z^4 = 0\}$  de acordo com a Proposição 2.11. Note que  $H$  tem coeficientes reais se, e somente se  $c_2 = 0$  e  $S$  é reversa em  $\mathbb{L}^4$  se, e somente se  $c_2 \notin \mathbb{R}$ .

Concluimos que dado um par  $(g_2, \eta_2)$  e considerando  $c_2 = it$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , como parâmetro complexo, então a fórmula de representação tipo Weierstrass (2.47), define uma família a 1-parâmetro de superfícies máximas com aplicação de Gauss degeneradas de tipo 2 em  $\mathbb{L}^4$ . Já vimos que quando  $t = 0$ , recuperamos a representação de Weierstrass das superfícies mínimas do  $\mathbb{R}^3$ . Portanto, cada superfície mínima de  $\mathbb{R}^3$ , determina uma família de superfícies máximas com aplicação de Gauss degeneradas de tipo 2 em  $\mathbb{L}^4$ . Por outro lado, iniciando com uma dada superfície máxima com aplicação de Gauss degenerada de tipo 2 em  $\mathbb{L}^4$ , então, a menos de congruências, ela pode ser representada por (2.47) com  $c_2$  da forma  $c_2 = it$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Exemplo 2.2.** Seja  $(g_2, f_2) = (\zeta, 2a)$ , com  $a \in \mathbb{R}^*$  e  $M^2 = \mathbb{C}$ . A família obtida é

$$X_t(u, v) = a\left(u + \left(uv^2 - \frac{u^3}{3}\right)(t^2 + 1), -v + \left(\frac{v^3}{3} - u^2v\right)(t^2 + 1), u^2 - v^2, 2uvt\right).$$

Em particular para  $t = 0$  temos a superfície mínima Enneper clássica de  $\mathbb{R}^3$ .

$$X_0(u, v) = a\left(u + uv^2 - \frac{u^3}{3}, -v - u^2v + \frac{v^3}{3}, u^2 - v^2, 0\right).$$

O seguinte Teorema nos dará uma representação geral das superfícies máximas com aplicação de Gauss degeneradas de tipo 3 em  $\mathbb{L}^4$ .

**Teorema 2.18.** *Seja  $S$  uma superfície máxima regular com aplicação de Gauss degenerada de tipo 3 em  $\mathbb{L}^4$ , dada pela imersão  $X : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$ , onde  $M^2$  é uma superfície de Riemann conexa. Então podemos associar a  $S$  uma quádrupla  $(M^2, g_3, \eta_3, c_3)$ , onde  $g_3$  é uma função meromorfa não constante sobre  $M^2$ ,  $\eta_3$  é uma 1-forma holomorfa e  $c_3$  é uma constante complexa, tal que:*

*I) A tripla  $(g_3, \eta_3, c_3)$  satisfaz as propriedades:*

*a)  $c_3 \neq 0$ ;*

*b) A 1-forma diferencial  $\eta_3$  em um sistema de coordenadas isotérmicas  $(U, \zeta = u + iv)$  de  $M^2$  é definida globalmente por*

$$\eta_3 = \left( \frac{\partial x^1}{\partial \zeta} - i \frac{\partial x^2}{\partial \zeta} \right) d\zeta \quad (2.56)$$

tal que a 1-forma holomorfa sobre  $M^2$  com valores em  $\mathbb{C}^4$

$$(1 + g_3 h_3, i(1 - g_3 h_3), g_3 - h_3, g_3 + h_3) \eta_3, \quad h_3(z) = \frac{-g_3(z) + t + 1}{(t - 1)g_3(z) + 1}, \quad t \in \mathbb{R}^*$$

nunca se anula;

c) Para qualquer caminho fechado  $\gamma$  sobre  $M^2$ ,

$$\Re \int_{\gamma} (1 + g_3 h_3, i(1 - g_3 h_3), g_3 - h_3, g_3 + h_3) \eta_3 = 0, \quad h_3 = \frac{-g_3 + t + 1}{(t - 1)g_3 + 1} \quad (2.57)$$

II) A superfície  $S$  é dada, a menos de congruências, por

$$X(\zeta) = \Re \int_{\zeta_0}^{\zeta} (1 + g_3 h_3, i(1 - g_3 h_3), g_3 - h_3, g_3 + h_3) \eta_3, \quad h_3 = \frac{-g_3 + t + 1}{(t - 1)g_3 + 1}. \quad (2.58)$$

Reciprocamente, dada uma quádrupla arbitrária  $(M^2, g_3, \eta_3, c_3)$  tendo as propriedades citadas em (I), então (2.58) define uma superfície máxima regular com aplicação de Gauss degenerada de tipo 3 em  $\mathbb{L}^4$ .

**Demonstração:** Pelo Lema 2.15 existe uma base ortonormal positivamente orientada de  $\mathbb{L}^4$ , tal que a aplicação de Gauss de  $S$ , em termos de qualquer sistema de coordenadas isotérmico  $(U, \zeta = u + iv)$  de  $M^2$ , satisfaz

$$\begin{cases} \phi^1 - c_3 \phi^2 - \phi^n = 0 \\ (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 \cdots + (\phi^{n-1})^2 - (\phi^n)^2 = 0, \end{cases} \quad (2.59)$$

e  $\ll \Phi, \Phi \gg > 0$ . Observe que o hiperplano  $H$  acima não é tangente à quádrica  $Q_1^2$ , pois  $c_3 = it \neq 0$  pelo Lema 2.15. Logo, pela Proposição 1.15,  $N = H \cap Q_1^2$ , pode ser representada por

$$\Phi(z) = (1 + g_3 h_3, i(1 - g_3 h_3), g_3 - h_3, g_3 + h_3) \eta_3, \quad (2.60)$$

com as funções complexas  $g_3(z)$  e  $h_3(z)$ , relacionada através da transformação de Möbius

$$h_3(z) = \frac{-g_3(z) + t + 1}{(t - 1)g_3(z) + 1}, \quad t \neq 0.$$

Além disso,  $g_3(z) \neq 0$ , pois caso contrário,  $\phi^3 + \phi^4 \equiv 0$  e  $(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 \equiv 0$  e a aplicação de Gauss de  $S$  seria 2-degenerada. Também  $g_3(z)$  não é uma constante,

caso contrário, assim seria  $\Phi$  e portanto,  $S$  estaria contida em um 2-plano de tipo espaço de  $\mathbb{L}^4$ .

A 1-forma  $\eta_3 = \mu(\phi^1 - i\phi^2)d\zeta$  é globalmente definida sobre  $M^2$ . Agora como  $\Phi$  representa localmente a aplicação de Gauss de  $S$ , e é definida por  $X_\zeta = \mu\Phi$ , temos que  $\eta_3 = (x_\zeta^1 - ix_\zeta^2)d\zeta$ . Portanto, (2.58) segue do fato que  $X(\zeta) = \Re e \int_{\zeta_0}^{\zeta} \Phi(w)$ . Como estamos supondo  $S$  sem períodos reais, temos que  $\Re e \int_{\gamma} \Phi(w) = 0$  para qualquer caminho fechado  $\gamma$  em  $M^2$ , e isto prova (d). Por último, como  $S$  é regular,  $\Phi$  não pode se anular nunca, caso contrário,  $X_u$  e  $X_v$  seriam ambos nulos, e isto prova (b). ( $\Leftrightarrow$ ) Reciprocamente, dada uma quádrupla arbitrária  $(M^2, g_3, \eta_3, c_3)$  satisfazendo as propriedades citadas em (I), temos por (c) que a integral  $\int_{\zeta_0}^{\zeta} \Phi(w)$  está bem definida. Assim, (2.58) nos dá uma aplicação bem definida  $X : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$ . As correspondentes componentes da aplicação de Gauss  $\phi^k, k = 1, 2, 3, 4$  são holomorfas por (b) e segue-se de (2.58) que

$$\begin{cases} \phi^1 - c_3\phi^2 - \phi^n = 0, \\ (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 \dots + (\phi^{n-1})^2 - (\phi^n)^2 = 0, \end{cases}$$

e  $\langle\langle \Phi, \Phi \rangle\rangle > 0$ . Então, (2.58) define uma superfície máxima regular  $S$ , degenerada de tipo 3 em  $\mathbb{L}^4$ . Resta mostrar ainda que se a aplicação de Gauss está contida em um hiperplano arbitrário  $H$  de  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^n)$ , então  $H : z^1 - c_3z^3 - z^4 = 0$ . Suponhamos que a aplicação de Gauss de  $S$  satisfaça a equação  $\langle p, \Phi \rangle^{\mathbb{C}} \equiv 0$ , com  $p \neq 0$ . Segue-se de (2.60) que

$$\begin{aligned} &(-p_1 + ip_2 + (t-1)p_3 - (t-1)p_4)g_3^2 + 2(tp_1 - ip_2 + p_3)g_3 + \\ &+(p_1 + ip_2 - (t+1)p_3 - (t+1)p_4) \equiv 0. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Mas,  $g_3(z)$  é uma função não constante. Logo,

$$\begin{cases} -p_1 + ip_2 + (t-1)p_3 - (t-1)p_4 = 0, \\ p_1 + ip_2 - (t+1)p_3 - (t+1)p_4 = 0, \end{cases} \quad (2.62)$$

e a equação (2.61) reduz-se a

$$(tp_1 - ip_2 + p_3)g_3(z) = 0. \quad (2.63)$$

Somando as equações de (2.62) e usando o fato que  $g_3(z) \neq 0$  e  $t \neq 0$ , temos

$$\left. \begin{array}{l} ip_2 - p_3 - tp_4 = 0 \\ tp_1 - ip_2 + p_3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow t(p_1 - p_4) = 0 \Rightarrow p_1 = p_4.$$

Subtraindo as equações de (2.62) temos  $p_1 - tp_3 - p_4 = 0$ , logo substituindo  $p_1 = p_4$  nesta equação, segue-se que  $p_3 = 0$ . Finalmente de (2.63) segue  $p_2 = -itp_1$ . Portanto, substituindo  $p = (p_1, -itp_1, 0, p_1)$ , com  $p_1 \neq 0$ , em  $\langle p, \Phi \rangle^{\mathbb{C}} \equiv 0$  temos

$$p_1(\phi^1 - it\phi^2 - \phi^4) \equiv 0,$$

o que implica  $\phi^1 - it\phi^2 - \phi^4 \equiv 0$ . Conclusão: a imagem pela aplicação de Gauss está contida na intersecção da quádrlica complexa  $Q_1^2$  com um único hiperplano  $z^1 - itz^2 - z^4 = 0$ .

□

## Capítulo 3

# Problema de Björling para superfícies máximas em $\mathbb{L}^4$

Neste Capítulo, nós estendemos e resolvemos o problema tipo Björling para superfícies máximas no espaço de Lorentz-Minkowski de dimensão 4. Como aplicação construímos novos exemplos de superfícies máximas em  $\mathbb{L}^4$  e estabelecemos princípios de simetrias para essas superfícies.

### 3.1 O problema de Björling

Sejam  $\mathbf{c} : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^4$  uma curva regular tipo espaço analítica real em  $\mathbb{L}^4$  e  $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbb{C}^4$  um campo de vetores analítico real ao longo de  $\mathbf{c}$  (isto é,  $\Re e(\mathbf{n}), \Im m(\mathbf{n}) : I \rightarrow \mathbb{L}^4$  são vetores ao longo de  $\mathbf{c}$ ) tal que  $\langle \mathbf{c}'(s), \Re e(\mathbf{n}) \rangle = 0 = \langle \mathbf{c}'(s), \Im m(\mathbf{n}) \rangle$ ,  $\langle \Re e(\mathbf{n}), \Re e(\mathbf{n}) \rangle = -\langle \Im m(\mathbf{n}), \Im m(\mathbf{n}) \rangle = 1$  e  $\Im m(\mathbf{n})$  é futuro dirigido para todo  $s \in I$ . Em analogia com o  $\mathbb{R}^3$ , chamamos um tal par  $(\mathbf{c}, \mathbf{n})$  uma *faixa analítica* em  $\mathbb{L}^4$ . O problema de Björling é então encontrar uma superfície máxima  $S$  definida por  $X : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^4$  com  $I \subset \Omega$ , tal que

1.  $X(u, 0) = \mathbf{c}(u)$ ,
2.  $A(u, 0) = \mathbf{n}(u)$ ,  $\forall u \in I$ ,  $A : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^4$ ,  $A(z) := \nu(z) + i\tau(z)$ .

É fácil ver que se  $X : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^4$  é uma superfície máxima em  $\mathbb{L}^4$ , então  $\mathbf{c}(u) := X(u, 0)$  e  $\mathbf{n}(u) := A(u, 0)$  satisfazem as condições acima e, em particular, são reais analíticas. Então existem as extensões holomorfas  $\mathbf{c}(z)$  e  $\mathbf{n}(z)$ , e essas extensões são únicas pelo *teorema da identidade* para funções analíticas (veja [28] pg. 87). Nesta situação, podemos explicitamente recuperar  $X(z)$  a partir de  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{n}$  por meio de uma única fórmula de representação complexa.

**Teorema 3.1.** *Seja  $S$  uma superfície máxima em  $\mathbb{L}^4$  dada por  $X : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^4$ . Defina a curva  $\mathbf{c}(u) := X(u, 0)$  e o campo de vetores  $\mathbf{n}(u) := A(u, 0)$  ao longo de  $\mathbf{c}$ , em um intervalo real  $I \subset U$ . Escolha qualquer conjunto aberto simplesmente conexo  $\Omega \subseteq U$  contendo  $I$ , sobre o qual podemos definir extensões holomorfas  $\mathbf{c}(z)$  e  $\mathbf{n}(z)$  de  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{n}$ . Então, para todo  $z \in \Omega$  vale*

$$X(z) = \Re e \left( \mathbf{c}(z) + i \int_{s_0}^z \boxtimes (\Re e(\mathbf{n}(w)), \Im m(\mathbf{n}(w)), \mathbf{c}'(w)) dw \right), \quad (3.1)$$

onde  $s_0$  é um ponto fixo arbitrário de  $I$  e a integral é feita ao longo de um caminho arbitrário em  $\Omega$  ligando  $s_0$  a  $z$ .

**Demonstração:** Como  $S$  é máxima, a função complexa  $\Psi : U \rightarrow \mathbb{C}^4$  definida por (1.18)

$$\Psi = 2 \frac{\partial X}{\partial z}, \quad \text{com } \Psi = (\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4),$$

é holomorfa em  $U$  e por (1.19) podemos escrever

$$X(z) = \Re e \int_{z_0}^z \Psi dz + k_0, \quad (3.2)$$

onde  $k_0 \in \mathbb{L}^4$  é uma constante adequada tal que  $X(u, 0) = \mathbf{c}(u)$  para todo  $u \in I$ .

Seja  $\{\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4\}$  o referencial ortonormal local adaptado a  $S$  dado em (1.6). Agora escrevendo  $\boxtimes$  nesse referencial,

$$\boxtimes(\partial_3, \partial_4, \partial_1) = \langle \boxtimes(\partial_3, \partial_4, \partial_1), \partial_2 \rangle \partial_2 = -\det(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4) \partial_2 = -\partial_2,$$

e como  $X_v = \lambda \partial_2$ , temos que

$$\Psi(z) = X_u(z) - iX_v(z) = X_u + i \boxtimes (\nu(z), \tau(z), X_u(z)) \quad (3.3)$$

em coordenadas isotérmicas ( $U, z = u + iv$ ). Restringindo  $\Psi(z)$  a  $I$  e usando a definição de  $\mathbf{c}, \mathbf{n}$  obtemos

$$\begin{aligned}\Psi(u, 0) &= X_u(u, 0) + i \boxtimes (\nu(u, 0), \tau(u, 0), X_u(u, 0)) = \\ &= \mathbf{c}'(u) + i \boxtimes (\Re(\mathbf{n}(u)), \Im(\mathbf{n}(u)), \mathbf{c}'(u)).\end{aligned}$$

Como essas funções são reais analíticas, podemos estendê-las a duas funções holomorfas  $\Psi(z), \mathbf{c}'(z) + i \boxtimes (\Re(\mathbf{n}(z)), \Im(\mathbf{n}(z)), \mathbf{c}'(z))$  em um conjunto aberto simplesmente conexo  $\Omega \subseteq U$  e elas coincidem em  $I \subset \Omega$ . Assim, pelo teorema da identidade para funções analíticas segue-se que

$$\Psi(z) = \mathbf{c}'(z) + i \boxtimes (\Re(\mathbf{n}(z)), \Im(\mathbf{n}(z)), \mathbf{c}'(z)), \quad \forall z \in \Omega.$$

Portanto,

$$\Gamma(z) := \mathbf{c}(z) + i \int_{s_0}^z \boxtimes (\Re(\mathbf{n}(w)), \Im(\mathbf{n}(w)), \mathbf{c}'(w)) dw, \quad \forall z \in \Omega$$

está bem definida em  $\Omega$  e obviamente é a primitiva da aplicação holomorfa  $\Psi(z)$ . Assim, (3.2) nos conduz a

$$X(z) = \Re \left( \mathbf{c}(z) + i \int_{s_0}^z \boxtimes (\Re(\mathbf{n}(w)), \Im(\mathbf{n}(w)), \mathbf{c}'(w)) dw \right).$$

Isto completa a demonstração do Teorema.  $\square$

**Observação 3.1.** Podemos escolher qualquer  $s_0 \in I$  em (3.1) e o valor de  $X(z)$  permanecerá o mesmo, pois  $\mathbf{c}'(z), \Re(\mathbf{n}(z)), \Im(\mathbf{n}(z))$  assumem valores reais em  $I \in \Omega$ .

Usando a fórmula de representação complexa dada em (3.1), podemos mostrar que o problema de Björling tem uma solução única.

**Teorema 3.2.** *Existe uma solução única  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{L}^4$  do problema de Björling para superfícies máximas em  $\mathbb{L}^4$ , a qual é dada por*

$$X(z) = \Re \left( \mathbf{c}(z) + i \int_{s_0}^z \boxtimes (\Re(\mathbf{n}(w)), \Im(\mathbf{n}(w)), \mathbf{c}'(w)) dw \right), \quad (3.4)$$

com  $w = u + iv \in \Omega$ ,  $s_0 \in I$ , onde  $\Omega$  é um conjunto aberto simplesmente conexo de  $\mathbb{C}$  contendo o intervalo real  $I$  e para o qual  $\mathbf{c}, \mathbf{n}$  admitem extensões holomorfas  $\mathbf{c}(z), \mathbf{n}(z)$ .

**Demonstração:** Defina a curva holomorfa  $\Psi : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^4$  por

$$\Psi(z) = \mathbf{c}'(z) + i \boxtimes (\Re(\mathbf{n}(z)), \Im(\mathbf{n}(z)), \mathbf{c}'(z)), \quad \forall z \in \Omega. \quad (3.5)$$

onde  $\Omega$  é um conjunto aberto simplesmente conexo de  $\mathbb{C}$  contendo  $I$  no qual as extensões holomorfas  $\mathbf{c}(z), \mathbf{n}(z)$  existem. Como pela Proposição 1.5,  $\mathbf{c}'(u)$  e  $\boxtimes(\Re(\mathbf{n}(u)), \Im(\mathbf{n}(u)), \mathbf{c}'(u))$  são ortogonais e têm o mesmo comprimento, segue-se que

$$(\varphi^1(u, 0))^2 + (\varphi^2(u, 0))^2 + (\varphi^3(u, 0))^2 - (\varphi^4(u, 0))^2 = 0, \quad \forall u \in I.$$

Também temos que

$$|\varphi^1(u, 0)|^2 + |\varphi^2(u, 0)|^2 + |\varphi^3(u, 0)|^2 - |\varphi^4(u, 0)|^2 = 2\langle \mathbf{c}'(u), \mathbf{c}'(u) \rangle > 0.$$

Assim

$$\begin{aligned} (\varphi^1(z))^2 + (\varphi^2(z))^2 + (\varphi^3(z))^2 - (\varphi^4(z))^2 &= 0, \\ |\varphi^1(z)|^2 + |\varphi^2(z)|^2 + |\varphi^3(z)|^2 - |\varphi^4(z)|^2 &> 0, \end{aligned}$$

para todo  $z \in \Omega$ . Além disso, a curva holomorfa  $\Psi$  não tem períodos reais, porque  $\Omega$  é simplesmente conexo. Portanto pelo Teorema 1.13,  $X(z) = \Re \int_{s_0}^z \Psi(w)dw$  define uma superfície máxima  $S = X(\Omega)$  em  $\mathbb{L}^4$ , onde  $\Psi$  é dada por (3.5) e  $s_0 \in I$ . Agora devemos verificar que esta superfície satisfaz às condições de Björling,  $X(u, 0) = \mathbf{c}(u)$  e  $A(u, 0) = \mathbf{n}(u)$ . A verificação da primeira condição é fácil, pois  $\boxtimes(\Re(\mathbf{n}), \Im(\mathbf{n}), \mathbf{c}')$  é real quando restrita a  $I$ . Para verificar a segunda condição, primeiro recordamos que  $\Psi = 2(\partial X / \partial z)$ . Assim, segue-se de (3.5) que, restrita a  $I$ , temos

$$X_u(u, 0) = \mathbf{c}'(u), \quad X_v(u, 0) = -\boxtimes(\Re(\mathbf{n}(u)), \Im(\mathbf{n}(u)), \mathbf{c}'(u)).$$

Por outro lado, de (3.3) temos que

$$X_v(u, 0) = -\boxtimes(\nu(u, 0), \tau(u, 0), \mathbf{c}'(u)).$$

Como  $\Im(\mathbf{n}(u))$  é futuro dirigido, segue-se que  $\Re(\mathbf{n}(u)) = \nu(u, 0)$  e  $\Im(\mathbf{n}(u)) = \tau(u, 0)$ .

Por último provamos a unicidade, a qual deve ser entendida no seguinte sentido: Se  $\tilde{X}(u, v)$ ,  $z = u + iv \in \tilde{\Omega}$ , é outra solução, então  $X(u, v) = \tilde{X}(u, v)$  para  $z = u + iv \in \Omega \cap \tilde{\Omega}$ . De fato, qualquer par de soluções  $X, \tilde{X}$  do problema de Björling coincide em um intervalo real  $I \subset \Omega \cap \tilde{\Omega}$ , e como ambas são analíticas elas precisam coincidir em  $\Omega \cap \tilde{\Omega}$ . Isto completa a demonstração do Teorema.  $\square$

Observe que a unicidade no Teorema acima, refere-se somente às superfícies máximas  $X : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^4$  satisfazendo  $X(u, 0) = \mathbf{c}(u)$  e  $A(u, 0) = \mathbf{n}(u)$ . Na realidade um pouco mais pode ser provado: dado uma faixa analítica  $(\mathbf{c}, \mathbf{n})$  em  $\mathbb{L}^4$ , existe uma única imersão máxima  $X : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$  cuja imagem contém  $\mathbf{c}(I)$  e  $A$  restrito a  $\mathbf{c}$  é  $\mathbf{n}$ . A parte da existência desta afirmação segue-se do Teorema 3.2. A parte da unicidade, segue-se aplicando os mesmos argumentos usados em [3] na demonstração do Corolário abaixo:

**Corolário 3.3.** ([3]) *Seja  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma curva tipo espaço regular analítica em  $\mathbb{L}^3$ , e seja  $V : I \rightarrow \mathbb{L}^3$  um campo unitário de vetores tipo tempo e analítico ao longo de  $\mathbf{c}$  tal que  $\langle \mathbf{c}', V \rangle \equiv 0$ . Existe uma única imersão máxima em  $\mathbb{L}^3$  cuja imagem contém  $\mathbf{c}(I)$  e tal que sua aplicação de Gauss ao longo de  $\mathbf{c}$  é  $V$ . Esta imersão máxima pode ser construída através da fórmula de Björling para o  $\mathbb{L}^3$ .*

**Exemplo 3.1.** Considere

$$\begin{cases} \mathbf{c}(s) = (s - s^3, 0, s^2, 0) \in \mathbb{L}^4, \\ \mathbf{n}(s) = \frac{1}{(1-2s^2+9s^4)^{1/2}}(2s, -2\sqrt{2}si, -(1-3s^2), (1+3s^2)i) \in \mathbb{C}^4, \end{cases}$$

para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Por um cálculo direto, obtemos que

$$\boxtimes(\Re(\mathbf{n}(s)), \Im(\mathbf{n}(s)), \mathbf{c}'(s)) = (0, 1 + 3s^2, 0, -2\sqrt{2}s),$$

cujas extensão holomorfa é

$$\boxtimes(\Re(\mathbf{n}(w)), \Im(\mathbf{n}(w)), \mathbf{c}'(w)) = (0, 1 + 3w^2, 0, -2\sqrt{2}w).$$

Assim

$$X(z) := \Re((z - z^3, 0, z^2, 0)) - \Im((0, z + z^3 - (s_0 + s_0^3), 0, -\sqrt{2}z^2 + \sqrt{2}s_0^2))$$

e portanto, a solução do problema de Björling para a faixa dada é

$$X(z) = (u + 3uv^2 - u^3, -v - 3u^2v + v^3, u^2 - v^2, 2\sqrt{2}uv),$$

com  $z = u + iv \in \mathbb{C}$ .

**Exemplo 3.2.** Considere

$$\begin{cases} \mathbf{c}(s) = (1 + \cos(s), 0, \sin(s), 2 \sin(s/2)) \in \mathbb{L}^4, \\ \mathbf{n}(s) = (\cos(s), 0, \sin(s), 0) + i(-1 - \cos(s), 0, \cos(s) \cot(s/2), \csc(s/2)) \in \mathbb{C}^4, \end{cases}$$

para todo  $s \in (0, 2\pi)$ . Por cálculos similares ao exemplo anterior,

$$\boxtimes(\Re(\mathbf{n}(w)), \Im(\mathbf{n}(w)), \mathbf{c}'(w)) = (0, \sin(z/2), 0, 0).$$

Então

$$X(z) := \Re((1 + \cos(z), 0, \sin(z), 2 \sin(z/2))) - \Im((0, -2 \cos(z/2) + 2 \cos(s_0/2), 0, 0))$$

e portanto, a solução do problema de Björling para a faixa dada é

$$X(z) = (1 + \cos(u) \cosh(v), -2 \sin(u/2) \sinh(v/2), \cosh(v) \sin(u), 2 \cosh(v/2) \sin(u/2)),$$

com  $z = u + iv$ , onde  $u \in (0, 2\pi)$  e  $v \in \mathbb{R}$ .

Como consequência do Teorema 3.2, nós recuperamos a fórmula de representação do problema de Björling clássico em  $\mathbb{R}^3$  e também para o problema de Björling em  $\mathbb{L}^3$ , veja [3].

**Corolário 3.4.** *Seja  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{R}^3 \equiv \{x^4 = 0\} \subset \mathbb{L}^4$ , uma curva regular real analítica e seja  $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbb{C}^4$  um campo de vetores real analítico ao longo de  $\mathbf{c}$  tal que  $\mathbf{n}(s) = \xi(s) + ie_4$ , onde  $\xi(s) \in \mathbb{R}^3$  é um campo unitário de vetores satisfazendo  $\langle \mathbf{c}'(s), \xi(s) \rangle = 0$  para todo  $s \in I$ . Então existe uma solução única do problema de Björling para superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$ , a qual é dada por*

$$X(z) = \Re \left\{ \mathbf{c}(z) - i \int_{s_0}^z (\xi(w) \times \mathbf{c}'(w)) dw \right\}, \quad (3.6)$$

onde  $w = u + iv \in \Omega$ ,  $s_0 \in I$ ,  $\Omega$  é um conjunto aberto simplesmente conexo de  $\mathbb{C}$  contendo  $I$  e  $\times$  é o produto vetorial de  $\mathbb{R}^3$ .

**Demonstração:** Do Teorema 3.2, segue-se que a solução do problema de Björling para a faixa analítica dada é

$$\begin{aligned} X(z) &= \Re e \left( \mathbf{c}(z) + i \int_{s_0}^z \boxtimes (\xi(w), e_4, \mathbf{c}'(w)) dw \right) \\ &= \Re e \left( \mathbf{c}(z) - i \int_{s_0}^z \boxtimes (\xi(w), \mathbf{c}'(w), e_4) dw \right). \end{aligned}$$

Assim, da Proposição 1.5 ítem 2 temos que

$$\begin{aligned} X(z) &= \Re e \left( \mathbf{c}(z) - i \int_{s_0}^z \widehat{\xi}(w) \times \widehat{\mathbf{c}}'(w) dw \right) \\ &= \Re e \left( \mathbf{c}(z) - i \int_{s_0}^z \xi(w) \times \mathbf{c}'(w) dw \right). \end{aligned}$$

□

**Corolário 3.5.** *Seja  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{L}^3$ ,  $\mathbb{L}^3 \equiv \{x^2 = 0\} \subset \mathbb{L}^4$ , uma curva regular tipo espaço real analítica e seja  $\mathbf{n} : I \rightarrow \mathbb{C}^4$  um campo de vetores real analítico ao longo de  $\mathbf{c}$  da forma  $\mathbf{n}(s) = e_2 + iV(s)$ , onde  $V(s) \in \mathbb{L}^3$  é um campo unitário de vetores tipo tempo, futuro dirigido tal que  $\langle \mathbf{c}'(s), V(s) \rangle = 0$  para todo  $s \in I$ . Então existe uma solução única do problema de Björling para superfícies máximas em  $\mathbb{L}^3$ , a qual é dada por*

$$X(z) = \Re e \left\{ \mathbf{c}(z) + i \int_{s_0}^z (V(w) \times \mathbf{c}'(w)) dw \right\}, \quad (3.7)$$

onde  $w = u + iv \in \Omega$ ,  $s_0 \in I$ ,  $\Omega$  é um conjunto aberto simplesmente conexo de  $\mathbb{C}$  contendo  $I$  e  $\times$  é o produto vetorial de  $\mathbb{L}^3$ .

**Demonstração:** Do Teorema 3.2, segue-se que a solução do problema de Björling para o par  $(\mathbf{c}, \mathbf{n})$  é

$$\begin{aligned} X(z) &= \Re e \left( \mathbf{c}(z) + i \int_{s_0}^z \boxtimes (e_2, V(w), \mathbf{c}'(w)) dw \right) \\ &= \Re e \left( \mathbf{c}(z) + i \int_{s_0}^z \boxtimes (V(w), \mathbf{c}'(w), e_2) dw \right). \end{aligned}$$

Assim, da Proposição 1.4 ítem 3 temos que

$$\begin{aligned} X(z) &= \Re \left( \mathbf{c}(z) + i \int_{s_0}^z \check{V}(w) \times \check{\mathbf{c}}'(w) dw \right) \\ &= \Re \left( \mathbf{c}(z) + i \int_{s_0}^z V(w) \times \mathbf{c}'(w) dw \right). \end{aligned}$$

□

### 3.2 Simetrias de superfícies máximas em $\mathbb{L}^4$

Agora, nós estudaremos as simetrias das superfícies máximas em  $\mathbb{L}^4$  via a fórmula de representação complexa do problema de Björling para essas superfícies. Para fazer isto fixamos as seguintes notações. Seja  $f(z) = x(z) + iy(z)$ , onde  $x(z), y(z)$  são funções definidas em um conjunto aberto  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  com valores reais. Se  $x(z)$  é harmônica e  $f(z)$  é holomorfa em  $\Omega$ , então  $x(\bar{z})$  é harmônica e  $\overline{f(\bar{z})}$  é holomorfa como uma função de  $z$  no conjunto aberto  $\Omega^* := \{\bar{z} : z \in \Omega\}$ . Note que  $\Omega$  é simétrico (em relação ao eixo real) se, e somente se  $\Omega = \Omega^*$ . Também temos que se  $I \subset \Omega$ ,  $f$  é holomorfa em  $\Omega$  e  $f$  restrita a  $I$  assume valores reais, então  $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$  em  $I \subset \Omega \cap \Omega^*$ . Portanto,  $f(z)$  pode ser estendida de maneira holomorfa para  $\Omega \cup \Omega^*$ .

**Proposição 3.6.** *Seja  $X : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^4$  a solução do problema de Björling, para uma dada faixa analítica  $(\mathbf{c}, \mathbf{n})$  em  $\mathbb{L}^4$ , onde  $\Omega$  é um conjunto aberto, simplesmente conexo e simétrico, contendo o intervalo real  $I$  e para o qual  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{n}$  admitem extensões holomorfas  $\mathbf{c}(z)$  e  $\mathbf{n}(z)$ , onde  $z = u + iv \in \Omega$ . Então para todo  $z \in \Omega$  temos que*

$$X(\bar{z}) = \Re \left\{ \mathbf{c}(z) - i \int_{s_0}^z \boxtimes (\Re(\mathbf{n}(w)), \Im(\mathbf{n}(w)), \mathbf{c}'(w)) dw \right\}. \quad (3.8)$$

**Demonstração:** A superfície  $\tilde{S} = \tilde{X}(\Omega)$  dada por  $\tilde{X}(u, v) := X(u, -v)$ , claramente satisfaz  $\tilde{X}_{uu}(u, v) = X_{uu}(u, -v)$ ,  $\tilde{X}_{vv}(u, v) = X_{vv}(u, -v)$  e será uma superfície máxima em  $\mathbb{L}^4$ , pois  $\Delta \tilde{X} = 0$ . Associado a  $\tilde{X}$ , seja  $\tilde{A}(u, v) := \tilde{\nu}(u, v) + i\tilde{\tau}(u, v)$ . De (1.5) segue-se que

$$\tilde{\tau}_0(u, v) = (\lambda^2 e_4 + x_u^4 X_u + x_v^4 X_v)(u, -v),$$

$$\tilde{\nu}_0(u, v) = -\boxtimes (X_u(u, -v), X_v(u, -v), e_4),$$

e assim  $\tilde{\tau}(u, v) = \tau(u, -v)$  e  $\tilde{\nu}(u, v) = -\nu(u, -v)$ . Portanto,

$$\tilde{A}(u, v) = -\overline{A(u, -v)}. \quad (3.9)$$

Isto implica  $\tilde{A}(u, 0) = -\overline{A(u, 0)} = -\overline{\mathbf{n}(u)}$  e  $\tilde{X}(u, 0) = X(u, 0) = \mathbf{c}(u)$ . Logo  $\tilde{X}$  é a solução do problema de Björling para  $\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{c}$ ,  $\tilde{\mathbf{n}} = -\overline{\mathbf{n}}$  e então  $\tilde{X}(z) = \Re e \int_{s_0}^z \tilde{\Psi}(w) dw$ , onde  $\tilde{\Psi}(z) = \tilde{X}_u + i \boxtimes (\tilde{\nu}(z), \tilde{\tau}(z), \tilde{X}_u(z))$ , veja (3.4). Restringindo  $\tilde{\Psi}(z)$  a  $I$  e usando (3.9), obtemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(u, 0) &= X_u(u, 0) + i \boxtimes (-\nu(u, 0), \tau(u, 0), X_u(u, 0)) \\ &= \mathbf{c}'(u) - i \boxtimes (\Re e(\mathbf{n}(u)), \Im m(\mathbf{n}(u)), \mathbf{c}'(u)). \end{aligned}$$

Quando estendemos essas funções para  $\Omega^*$ , segue-se o resultado.  $\square$

As demonstrações dos seguintes corolários são análogas as dos Corolários 3.4 e 3.5.

**Corolário 3.7.** *Nas mesmas hipóteses da Proposição 3.6, se  $S = X(\Omega) \subset \mathbb{R}^3 \equiv \{x^4 = 0\}$  e  $\mathbf{n}$  é da forma  $\mathbf{n}(s) = \xi(s) + ie_4$ , com  $\xi(s) \in \mathbb{R}^3$  unitário tal que  $\langle \mathbf{c}'(s), \xi(s) \rangle = 0$  para todo  $s \in I$ , então*

$$X(\bar{z}) = \Re e \left\{ \mathbf{c}(z) + i \int_{s_0}^z (\xi(w) \times \mathbf{c}'(w)) dw \right\}, \quad \forall z \in \Omega. \quad (3.10)$$

**Corolário 3.8.** *Nas mesmas hipóteses da Proposição 3.6, se  $S = X(\Omega) \subset \mathbb{L}^3 \equiv \{x^2 = 0\}$  e  $\mathbf{n}$  é da forma  $\mathbf{n}(s) = e_2 + iV(s)$ , com  $V(s) \in \mathbb{L}^3$  tipo tempo, unitário, futuro dirigido e tal que  $\langle \mathbf{c}'(s), V(s) \rangle = 0$  para todo  $s \in I$ , então*

$$X(\bar{z}) = \Re e \left\{ \mathbf{c}(z) - i \int_{s_0}^z (V(w) \times \mathbf{c}'(w)) dw \right\}, \quad \forall z \in \Omega. \quad (3.11)$$

**Observação 3.2.** Usando as fórmulas (3.6) e (3.10), não difícil recuperar os dois princípios de simetrias descobertos por Schwarz para superfícies mínimas em  $\mathbb{R}^3$  (veja [13] p. 123). Também, usando (3.7) e (3.11), podemos recuperar os dois princípios de simetrias para superfícies máximas em  $\mathbb{L}^3$  dados em [3], Teorema 3.10.

Agora usando (3.4) e (3.8), provaremos três princípios de simetrias para superfícies máximas em  $\mathbb{L}^4$ . Eles foram motivados pelos trabalhos de Schwarz e [3] acima mencionado. Antes disso, temos a seguinte definição.

**Definição 3.1.** Seja  $\Pi^k$  um  $k$ -plano em  $\mathbb{L}^4$ . Assuma que  $\Pi^k$  é tipo espaço se  $k = 1$ ;  $\Pi^k$  é tipo espaço, tipo tempo ou degenerado se  $k = 2$ ; e  $\Pi^k$  é tipo tempo se  $k = 3$ . Sob essas condições, dizemos que  $\Pi^k$  é um  $k$ -plano de simetria de uma superfície tipo espaço  $X : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$  se para todo  $p \in M^2$ , existe um certo  $q \in M^2$  tal que  $X(p)$  e  $X(q)$  são simétricos com respeito a  $\Pi^k$ , isto é, tal que  $(X(q) + X(p))/2 \in \Pi^k$  e  $X(q) - X(p)$  é perpendicular a  $\Pi^k$ .

**Teorema 3.9.** *Seja  $S$  uma superfície máxima em  $\mathbb{L}^4$ , dada por  $X : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^4$ . Então temos que:*

- 1) *Qualquer segmento de linha reta tipo espaço contida em  $S$  é um eixo de simetria de  $S$ ;*
- 2) *Se  $S$  intercepta qualquer 2-plano  $\Pi^2$  tipo tempo ou tipo espaço, ortogonalmente ao longo de uma curva regular de  $S$ , então  $\Pi^2$  é um plano de simetria de  $S$ ;*
- 3) *Se  $S$  intercepta qualquer 3-espaço  $\Pi^3$  tipo tempo, ortogonalmente ao longo de uma curva regular de  $S$ , então  $\Pi^3$  é um 3-plano de simetria de  $S$ .*

Antes de iniciar a demonstração, é conveniente fazer as seguintes observações. Suponha, por exemplo, que a superfície máxima  $S$  contenha um segmento de linha reta  $L$ , o qual pode ser assumido um segmento do eixo  $x^1$ . Então é possível definir coordenadas conformes  $z = u + iv$  numa vizinhança de  $L$ , de modo que  $X(u, 0)$  parametrize  $L$ , veja [21]. Observações análogas são feitas no caso em que  $S$  intercepta ortogonalmente o 2-plano  $\{x^2 = x^3 = 0\}$ , o 2-plano  $\{x^3 = x^4 = 0\}$  ou o 3-espaço  $\{x^2 = 0\}$ . Com isto em mente, não é difícil ver que o Teorema 3.9 é agora uma consequência do seguinte

**Lema 3.10.** *Seja  $S$  uma superfície máxima em  $\mathbb{L}^4$ , dada por  $X : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^4$ , com  $\Omega$  simétrico e simplesmente conexo.*

1) *Se, para todo  $u \in I$ , a curva  $\mathbf{c}(u) = X(u, 0)$  está contida no eixo  $x^1$ , então*

$$X(u, -v) = (x^1(u, v), -x^2(u, v), -x^3(u, v), -x^4(u, v)). \quad (3.12)$$

2) *Se, para todo  $u \in I$ , a curva  $\mathbf{c}(u) = X(u, 0)$ , está contida no plano  $\Pi^2 = \{x^2 = x^3 = 0\}$  tipo tempo, e se a superfície  $S$  intercepta  $\Pi^2$  ortogonalmente ao longo de  $\mathbf{c}$ , então*

$$X(u, -v) = (x^1(u, v), -x^2(u, v), -x^3(u, v), x^4(u, v)). \quad (3.13)$$

3) *Se, para todo  $u \in I$ , a curva  $\mathbf{c}(u) = X(u, 0)$ , está contida no plano  $\Pi^2 = \{x^3 = x^4 = 0\}$  tipo espaço, e se a superfície  $S$  intercepta  $\Pi^2$  ortogonalmente ao longo de  $\mathbf{c}$ , então*

$$X(u, -v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), -x^3(u, v), -x^4(u, v)). \quad (3.14)$$

4) *Se, para todo  $u \in I$ , a curva  $\mathbf{c}(u) = X(u, 0)$ , está contida no 3-espaço  $\Pi^3 = \{x^2 = 0\}$  tipo tempo, e se a superfície  $S$  intercepta  $\Pi^3$  ortogonalmente ao longo de  $\mathbf{c}$ , então*

$$X(u, -v) = (x^1(u, v), -x^2(u, v), x^3(u, v), x^4(u, v)). \quad (3.15)$$

**Demonstração:** (1) Seja  $\mathbf{c}(u) := X(u, 0)$  e  $\mathbf{n}(u) := A(u, 0)$ . Por hipótese, segue-se que  $\mathbf{c}(u) = (c^1(u), 0, 0, 0)$ ,  $\Re e(\mathbf{n}(u)) = (0, \nu^2(u, 0), \nu^3(u, 0), \nu^4(u, 0))$  e  $\Im m(\mathbf{n}(u)) = (0, \tau^2(u, 0), \tau^3(u, 0), \tau^4(u, 0))$ . Assim, por um cálculo direto podemos verificar que  $\boxtimes(\Re e(\mathbf{n}(u)), \Im m(\mathbf{n}(u)), \mathbf{c}'(u))$  é da forma  $(0, \boxtimes^2(u), \boxtimes^3(u), \boxtimes^4(u))$ . De acordo com (3.4) e (3.8), segue-se respectivamente que

$$X(z) = \left( \Re e(c^1(z)), -\Im m \int_{s_0}^z \boxtimes^2(w) dw, -\Im m \int_{s_0}^z \boxtimes^3(w) dw, -\Im m \int_{s_0}^z \boxtimes^4(w) dw \right),$$

$$X(\bar{z}) = \left( \Re e(c^1(z)), \Im m \int_{s_0}^z \boxtimes^2(w) dw, \Im m \int_{s_0}^z \boxtimes^3(w) dw, \Im m \int_{s_0}^z \boxtimes^4(w) dw \right),$$

o que prova (3.12).

(2) Como por hipótese,  $S$  intercepta  $\Pi^2 = \{x^2 = 0, x^3 = 0\}$  ortogonalmente em

$\mathbf{c}(u) := X(u, 0)$ , segue-se que  $\mathbf{c}(u) = (c^1(u), 0, 0, c^4(u))$ . Agora lembrando que o 2-plano  $\Pi^2$  gerado por  $\Re(\mathbf{n}(u))$  e  $\Im(\mathbf{n}(u))$  é ortogonal a  $T_{\mathbf{c}(u)}S$  ao longo de  $\mathbf{c}$ , segue-se que  $\boxtimes(\Re(\mathbf{n}(u)), \Im(\mathbf{n}(u)), \mathbf{c}'(u))$  é da forma  $(0, \boxtimes^2(u), \boxtimes^3(u), 0)$ . De acordo com (3.4) e (3.8) chegamos à fórmula (3.13).

(3) A prova é análoga ao item (2).

(4) A hipótese implica que  $\mathbf{c}(u) = (c^1(u), 0, c^3(u), c^4(u))$ . Como  $S$  intercepta  $\Pi^3$  ortogonalmente, temos que  $X_v(u, 0) \in (\Pi^3)^\perp$  e portanto  $X_v(u, 0)$  é paralelo ao vetor unitário  $e_2$ , o qual é normal a  $\Pi^3$ . Então  $\Re(\mathbf{n}(u))$  e  $\Im(\mathbf{n}(u))$  pertencem ao 3-espaço  $\Pi^3 = \{x^2 = 0\}$ , o que implica que a segunda componente desses vetores são iguais a zero. Assim  $\boxtimes(\Re(\mathbf{n}(u)), \Im(\mathbf{n}(u)), \mathbf{c}'(u))$  é da forma  $(0, \boxtimes^2, 0, 0)$ . Portanto, em conjunção com (3.4) e (3.8), obtemos (3.15).  $\square$

Se no Teorema 4.1,  $\Pi^2$  é um 2-plano degenerado, nós temos:

**Proposição 3.11.** *Seja  $X : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{L}^4$  uma superfície máxima, com  $\Omega$  simétrico, simplesmente conexo e assuma que  $S = X(\Omega)$  intercepta o 2-plano degenerado  $\Pi^2 = [e_1 + e_4, e_2]$  ortogonalmente ao longo da curva  $\mathbf{c}(u) = X(u, 0)$ . Então  $S$  está contida no 3-espaço degenerado  $\Pi^3 = [e_1 + e_4, e_2, e_3]$ . Além disso  $\Pi^2$  é um plano de simetria para  $S$  se, e somente se  $X_v(u, 0)$  é um múltiplo de  $e_3$ .*

**Demonstração:** Considere a base  $\mathcal{F} = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4\}$  de  $\mathbb{L}^4$ , onde  $\epsilon_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 + e_4)$ ,  $\epsilon_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(e_1 - e_4)$ ,  $\epsilon_3 = e_2$ ,  $\epsilon_4 = e_3$  e observe que  $\Pi^2 = [\epsilon_1, \epsilon_3]$ . É claro que  $\mathbf{c}(u) = X(u, 0)$  é da forma  $\mathbf{c}(s) = (c^1(s), c^2(s), 0, c^4(s))$ . Como o 2-plano  $\Pi^2 = [\Re(\mathbf{n}(u)), \Im(\mathbf{n}(u))]$  é ortogonal a  $T_{\mathbf{c}(u)}S$  ao longo de  $\mathbf{c}$ , segue-se que  $-X_v(u, 0) = \boxtimes(\Re(\mathbf{n}(u)), \Im(\mathbf{n}(u)), \mathbf{c}'(u))$  é da forma  $(\boxtimes^1(u), 0, \boxtimes^3(u), \boxtimes^1(u))$ . Pelo mesmo argumento anterior, obtemos que

$$X(z) = \left( \Re(c^1(z)) - \Im \int_{s_0}^z \boxtimes^1(w) dw, \Re(c^2(z)), -\Im \int_{s_0}^z \boxtimes^3(w) dw, \right. \\ \left. \Re(c^1(z)) - \Im \int_{s_0}^z \boxtimes^1(w) dw \right),$$

$$X(\bar{z}) = \left( \Re e(c^1(z)) + \Im \int_{s_0}^z \boxtimes^1(w)dw, \Re e(c^2(z)), \Im \int_{s_0}^z \boxtimes^3(w)dw, \right. \\ \left. \Re e(c^1(z)) + \Im \int_{s_0}^z \boxtimes^1(w)dw \right),$$

os quais escritos na base  $\mathcal{F}$  dão respectivamente

$$X(z) = \sqrt{2} \left( \Re e(c^1(z)) - \Im \int_{s_0}^z \boxtimes^1(w)dw, 0, \Re e(c^3(z)), -\Im \int_{s_0}^z \boxtimes^4(w)dw, \right)_{\mathcal{F}},$$

$$X(\bar{z}) = \sqrt{2} \left( \Re e(c^1(z)) + \Im \int_{s_0}^z \boxtimes^1(w)dw, 0, \Re e(c^3(z)), \Im \int_{s_0}^z \boxtimes^4(w)dw, \right)_{\mathcal{F}}.$$

Portanto, a primeira parte é clara e  $S$  é simétrica com respeito a  $\Pi^2$  se, e somente se  $\Im \int_{s_0}^z \boxtimes^1(w)dw = 0$ , isto é,  $\int_{s_0}^z \boxtimes^1(w)dw \equiv 0$  e a última afirmação segue-se.  $\square$

**Observação 3.3.** Note que se  $\Pi^3$  é tipo espaço ou degenerado, então não existe vetor tipo espaço ortogonal a  $\Pi^3$  em  $\mathbb{L}^4$ . Portanto o problema de simetria de superfícies máximas não é definido para estes casos.

**Exemplo 3.3.** Considere

$$\begin{cases} \mathbf{c}(s) = (0, s, 0, 0) \in \mathbb{L}^4, \\ \mathbf{n}(s) = \left( \frac{e^{-s}}{\sqrt{4+e^{-2s}}}, 0, -\frac{2}{\sqrt{4+e^{-2s}}}, 0 \right) + i \left( -\frac{e^{-s}}{\sqrt{4+e^{-2s}}}, 0, -\frac{e^{-2s}}{2\sqrt{4+e^{-2s}}}, \frac{\sqrt{4+e^{-2s}}}{2} \right) \in \mathbb{C}^4, \end{cases}$$

para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Por um cálculo direto, obtemos que

$$\boxtimes(\Re e(\mathbf{n}(w)), \Im(\mathbf{n}(w)), \mathbf{c}'(w)) = \left( -1, 0, -\frac{e^{-w}}{2}, \frac{e^{-w}}{2} \right).$$

Portanto, a solução do problema de Björling para a dada faixa é

$$X(z) = \left( v, u, \frac{1}{2}e^{-u} \sin(v), -\frac{1}{2}e^{-u} \sin(v) \right),$$

com  $z = u + iv \in \mathbb{C}$ . Note que  $x^2$  é um eixo de simetria da superfície máxima completa  $S = X(\mathbb{C})$ .

**Exemplo 3.4.** Considere

$$\begin{cases} \mathbf{c}(s) = (\sinh(s), 0, 0, \cosh(s)) \in \mathbb{L}^4, \\ \mathbf{n}(s) = (0, \cos(s), \sin(s), 0) + i(\sinh(s), 0, 0, \cosh(s)) \in \mathbb{C}^4, \end{cases}$$

para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Por um cálculo direto, obtemos que

$$\boxtimes(\Re(\mathbf{n}(w)), \Im(\mathbf{n}(w)), \mathbf{c}'(w)) = (0, -\sin(w), \cos(w), 0).$$

Portanto, a solução do problema de Björling para a dada faixa é a superfície máxima completa

$$X(z) = \begin{bmatrix} \cosh(u) & 0 & 0 & \sinh(u) \\ 0 & \cos(u) & -\sin(u) & 0 \\ 0 & \sin(u) & \cos(u) & 0 \\ \sinh(u) & 0 & 0 & \cosh(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sinh(v) \\ \cos(v) \end{bmatrix},$$

com  $z = u + iv \in \mathbb{C}$ . Note que  $\Pi^2 = [e_1, e_4]$  é um 2-plano tipo tempo de simetria da superfície  $S = X(\mathbb{C})$ .

**Exemplo 3.5.** Considere

$$\begin{cases} \mathbf{c}(s) = (\cos(s), \sin(s), 0, 0) \in \mathbb{L}^4, \\ \mathbf{n}(s) = (\cos(s), \sin(s), 0, 0) + i(0, 0, \sinh(s), \cosh(s)) \in \mathbb{C}^4, \end{cases}$$

para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Calculando como acima, obtemos que

$$\boxtimes(\Re(\mathbf{n}(w)), \Im(\mathbf{n}(w)), \mathbf{c}'(w)) = (0, 0, -\cosh(w), -\sinh(w), 0).$$

Portanto, a solução do problema de Björling para a dada faixa é a superfície máxima completa

$$X(z) = \begin{bmatrix} \cos(u) & -\sin(u) & 0 & 0 \\ \sin(u) & \cos(u) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cosh(u) & \sinh(u) \\ 0 & 0 & \sinh(u) & \cosh(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cosh(v) \\ 0 \\ \sin(v) \\ 0 \end{bmatrix},$$

com  $z = u + iv \in \mathbb{C}$ . Note que  $\Pi^2 = [e_1, e_2]$  é um 2-plano tipo espaço de simetria da superfície  $S = X(\mathbb{C})$ .

**Exemplo 3.6.** Considere

$$\begin{cases} \mathbf{c}(s) = (s^2, s, 0, s^2) \in \mathbb{L}^4, \\ \mathbf{n}(s) = \frac{1}{\sqrt{2+4s^2}} \{(1, -2s, -1, 0) + i(1 + 4s^2, 2s, 1, 2 + 4s^2)\} \in \mathbb{C}^4, \end{cases}$$

para todo  $s \in \mathbb{R}$ . Calculando como acima, obtemos que

$$\boxtimes(\Re(\mathbf{n}(w)), \Im(\mathbf{n}(w)), \mathbf{c}'(w)) = (-1, 0, -1, -1).$$

A solução do problemas de Björling para a faixa dada é a superfície máxima completa

$$X(z) = (u^2 - v^2 + v, u, v, u^2 - v^2 + v),$$

com  $z = u + iv \in \mathbb{C}$ . Esta superfície intercepta o 2-plano degenerado  $\Pi^2 = [e_1 + e_4, e_2]$  ortogonalmente ao longo de  $X(u, 0) = \mathbf{c}(u)$ , mas  $\Pi^2$  não um plano de simetria de  $S$ .

Por outro lado, se nós tomarmos a mesma curva  $\mathbf{c}(s) = (s^2, s, 0, s^2)$ , mas o vetor

$$\mathbf{n}(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + 4s^2}} \{(1, -2s, 0, 0) + i(4s^2, 2s, 0, 1 + 4s^2)\},$$

obtemos que

$$\boxtimes(\Re(\mathbf{n}(w)), \Im(\mathbf{n}(w)), \mathbf{c}'(w)) = (0, 0, -1, 0),$$

donde, segue-se que

$$X(z) = (u^2 - v^2, u, v, u^2 - v^2),$$

a qual é simétrica com respeito ao 2-plano  $\Pi^2$ .

**Exemplo 3.7.** O 3-espaço  $\Pi^3 = \{x^2 = 0\}$  tipo tempo é um 3-espaço de simetria da superfície máxima  $S$  dada no exemplo 3.2.

## Capítulo 4

# A aplicação de Gauss para superfícies tipo espaço em $\mathbb{L}^3$ e $\mathbb{L}^4$

O objetivo deste Capítulo é estabelecer condições explícitas em termos da aplicação de Gauss generalizada de uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$ , veja Teorema 4.12. Finalmente na Seção 4.4, Proposição 4.15, provamos uma fórmula de representação tipo Kenmotsu para certas superfícies em  $\mathbb{L}^4$ .

### 4.1 Superfícies tipo espaço em $\mathbb{L}^n$ e aplicação de Gauss

De acordo com a Seção 1.8, a aplicação de Gauss generalizada  $G$  de uma superfície tipo espaço  $S$  em  $\mathbb{L}^n$  é a aplicação que associa cada ponto de  $M^2$  um ponto da quádrlica  $Q_1^{n-2}$  de  $\mathbb{C}\mathbb{P}_1^{n-1}$ , definida localmente por

$$G(z) = [X_{\bar{z}}]. \quad (4.1)$$

A conformidade local de  $S$  é expressa por

$$ds^2 = \lambda^2 |dz|^2, \quad \lambda^2 = 2 \ll X_z, X_z \gg. \quad (4.2)$$

Além disso, de (1.12) vimos que

$$\Delta_M X = 2H \Leftrightarrow X_{z\bar{z}} = \frac{\lambda^2}{2} H. \quad (4.3)$$

Agora dado uma aplicação de  $M^2$  sobre a quádrlica  $Q_1^{n-2}$  de  $\mathbb{C}\mathbb{P}_1^{n-1}$ , podemos representá-la localmente na forma  $[\Phi(z)]$ , onde  $\Phi(z) = (\phi^1(z), \phi^2(z), \dots, \phi^{n-1}(z), \phi^n(z))$  satisfaz

$$(\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + \dots + (\phi^{n-1})^2 - (\phi^n)^2 = 0. \quad (4.4)$$

Esta aplicação descreve a aplicação de Gauss de uma superfície  $S$  de tipo espaço em  $\mathbb{L}^n$ , dada por  $X : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^n$ , se

$$X_z = \mu \Phi, \quad (4.5)$$

para alguma função  $\mu : M^2 \rightarrow \mathbb{C}$ . Note que  $S$  é regular sempre que  $\mu$  não se anula. Portanto, de (4.2), (4.3) e (4.5) temos que

$$\lambda^2 = 2 \ll X_z, X_z \gg = 2|\mu|^2 \ll \Phi, \Phi \gg, \quad \frac{\lambda^2}{2} H = X_{z\bar{z}} = (\mu \Phi)_{\bar{z}} = \mu_{\bar{z}} \Phi + \mu \Phi_{\bar{z}}.$$

Logo,

$$\bar{\mu} \ll \Phi, \Phi \gg H = \Phi(\log \mu)_{\bar{z}} + \Phi_{\bar{z}}, \quad (4.6)$$

sempre que  $\mu \neq 0$ .

Neste capítulo, usaremos bastante o seguinte fato:  $[\Phi] \in Q_1^{n-2}$  é equivalente a  $\ll \Phi, \bar{\Phi} \gg = (\phi^1)^2 + (\phi^2)^2 + \dots + (\phi^{n-1})^2 - (\phi^n)^2 = 0$ . Logo,

$$\ll \Phi, \bar{\Phi} \gg_{\bar{z}} = 2(\phi_{\bar{z}}^1 \phi^1 + \phi_{\bar{z}}^2 \phi^2 \dots + \phi_{\bar{z}}^{n-1} \phi^{n-1} - \phi_{\bar{z}}^n \phi^n) = 2 \ll \Phi_{\bar{z}}, \bar{\Phi} \gg,$$

$$\ll \Phi, \bar{\Phi} \gg_z = 2(\phi_z^1 \phi^1 + \phi_z^2 \phi^2 \dots + \phi_z^{n-1} \phi^{n-1} - \phi_z^n \phi^n) = 2 \ll \Phi_z, \bar{\Phi} \gg.$$

Portanto,

$$\ll \Phi_{\bar{z}}, \bar{\Phi} \gg = \ll \Phi, \bar{\Phi}_{\bar{z}} \gg = 0, \quad \ll \Phi_z, \bar{\Phi} \gg = \ll \Phi, \bar{\Phi}_z \gg = 0. \quad (4.7)$$

Para o desenvolvimento da teoria, precisamos provar o seguinte Lema algébrico

**Lema 4.1.** *Seja  $W$  um vetor de  $\mathbb{C}_1^n$  da forma  $W = A + iB$  onde  $A$  e  $B$  são vetores reais de tipo espaço de  $\mathbb{L}^n$  satisfazendo  $\langle A, A \rangle = \langle B, B \rangle > 0$  e  $\langle A, B \rangle = 0$ . Seja  $\Pi^2$  o 2-plano de tipo espaço gerado por  $A$  e  $B$ . Para qualquer par de vetores  $C$  e  $D$  de  $\mathbb{L}^n$ , seja  $Z = C + iD \in \mathbb{C}_1^n$  e defina  $Z^\top := C^\top + iD^\top$ , onde  $C^\top, D^\top$  são as projeções de  $C$  e  $D$  sobre  $\Pi^2$ . Então*

$$Z^\top = \frac{\ll Z, W \gg}{\ll W, W \gg} W + \frac{\ll Z, \bar{W} \gg}{\ll W, W \gg} \bar{W}, \quad (4.8)$$

onde  $\mathbb{C}_1^n := (\mathbb{C}^n, \ll, \gg)$  com  $\ll z, w \gg := \sum_{k=1}^{n-1} z^k \bar{w}^k - z^n \bar{w}^n, \forall z, w \in \mathbb{C}^n$ .

**Demonstração:** Claro que

$$C^\top = \frac{\langle C, A \rangle}{\langle A, A \rangle} A + \frac{\langle C, B \rangle}{\langle B, B \rangle} B, \quad D^\top = \frac{\langle D, A \rangle}{\langle A, A \rangle} A + \frac{\langle D, B \rangle}{\langle B, B \rangle} B$$

são as projeções de  $C, D$  sobre  $\Pi^2$ . Note que

$$A = \frac{W + \bar{W}}{2}, \quad B = \frac{W - \bar{W}}{2i}, \quad C = \frac{Z + \bar{Z}}{2} \text{ e } D = \frac{Z - \bar{Z}}{2i}.$$

Por um cálculo direto, segue-se que

$$C^\top = \frac{\ll Z, W \gg W + \ll \bar{Z}, W \gg W + \ll Z, \bar{W} \gg \bar{W} + \ll \bar{Z}, \bar{W} \gg \bar{W}}{2 \ll W, W \gg},$$

$$D^\top = -i \frac{\ll Z, W \gg W - \ll \bar{Z}, W \gg W + \ll Z, \bar{W} \gg \bar{W} - \ll \bar{Z}, \bar{W} \gg \bar{W}}{2 \ll W, W \gg}.$$

Portanto, substituindo as expressões acima de  $C^\top$  e  $D^\top$  em  $Z^\top = C^\top + iD^\top$ , segue o resultado.  $\square$

Podemos aplicar o Lema 4.1 para  $W = \Phi$ , de modo que  $\Pi$  seja o plano tangente a superfície  $S$  definida por  $X$  tal que  $X_z = \mu\Phi$  e  $Z = \Phi_{\bar{z}}$ . De (4.7),  $\ll \Phi_{\bar{z}}, \Phi \gg = 0$ . Assim, pelo Lema 4.1,

$$(\Phi_{\bar{z}})^\top = \eta\Phi \quad \text{com } \eta := \frac{\ll \Phi_{\bar{z}}, \Phi \gg}{\ll \Phi, \Phi \gg}. \quad (4.9)$$

Denotando por  $\mathbb{V}$  a componente de  $\Phi_{\bar{z}}$  ortogonal ao plano  $\Pi^2 = T_p S$ , isto é,  $\mathbb{V} := \Phi_{\bar{z}} - (\Phi_{\bar{z}})^\top$ , temos

$$\mathbb{V} = \Phi_{\bar{z}} - \eta\Phi. \quad (4.10)$$

O vetor curvatura média  $H$  é ortogonal ao plano tangente de  $S$ , portanto, de (4.6) e (4.10) temos

$$\begin{aligned}\bar{\mu} \ll \Phi, \Phi \gg H &= \Phi(\log \mu)_{\bar{z}} + \Phi_{\bar{z}} = (\Phi_{\bar{z}} - \eta\Phi) + ((\log \mu)_{\bar{z}} + \eta)\Phi, \\ \mathbb{V} &= \bar{\mu} \ll \Phi, \Phi \gg H,\end{aligned}\tag{4.11}$$

$$(\log \mu)_{\bar{z}} + \eta = 0.\tag{4.12}$$

**Observação 4.1.** Como  $H \in (T_p S)^\top$ , temos que  $\ll H, X_z \gg = 0$ , donde  $\ll H, \Phi \gg = 0$  sempre que  $\mu(z) \neq 0$ . Logo, de (4.6) segue-se que

$$(\log \mu)_{\bar{z}} \ll \Phi, \Phi \gg + \ll \Phi_{\bar{z}}, \Phi \gg = 0 \Leftrightarrow (\log \mu)_{\bar{z}} + \eta = 0.$$

Agora podemos demonstrar o seguinte

**Teorema 4.2.** *Seja  $S$  uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^n$  dada localmente por uma aplicação conforme  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{L}^n$ . Seja  $\Phi$  a aplicação de Gauss de  $S$ , isto é,  $X_z = \mu\Phi$ . Então, para todo  $z \in \Omega$  temos que  $\mathbb{V}$  é da forma*

$$\mathbb{V}(z) = e^{i\alpha(z)}R(z),\tag{4.13}$$

onde  $R(z)$  é um vetor real de  $\mathbb{L}^n$ . Além disso, sobre o conjunto  $\{z \in \Omega : \mathbb{V}(z) \neq 0\}$ , a função  $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é definida unicamente módulo  $2\pi$  e satisfaz

$$\alpha_{z\bar{z}} = \Im(\eta_z).\tag{4.14}$$

**Demonstração:** Pondo  $\rho = |\mu|$ , podemos escrever

$$\mu = \rho e^{-i\alpha(z)},\tag{4.15}$$

onde  $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é unicamente determinada módulo  $2\pi$ , quando  $\rho \neq 0$ . Então, de (4.11) temos

$$\mathbb{V}(z) = \rho e^{i\alpha(z)} \ll \Phi, \Phi \gg H = e^{i\alpha(z)}R(z), \text{ com } R(z) := \rho \ll \Phi, \Phi \gg H.$$

Como  $\mathbb{V}(z) \neq 0$  implica  $\rho \neq 0$ , podemos definir sobre o conjunto  $\{z \in \Omega : \mathbb{V}(z) \neq 0\}$  a função  $\alpha$  e, substituindo (4.15) em (4.12) temos que

$$(\log \rho e^{-i\alpha(z)})_{\bar{z}} = -\eta \Leftrightarrow (\log \rho)_{\bar{z}} - i\alpha_{\bar{z}} = -\eta.$$

Agora derivando em relação a  $z$ , segue-se que

$$(\log \rho)_{\bar{z}z} - i\alpha_{\bar{z}z} = -\eta_z.$$

Finalmente como  $(\log \rho)_{\bar{z}z}$  e  $\alpha_{\bar{z}z}$  são ambas reais,  $\alpha_{\bar{z}z} = \Im(\eta_z)$ .  $\square$

Note que  $\mathbb{V}$  e  $\eta$  dados em (4.13) e (4.14), são expressos via (4.9) e (4.10) explicitamente em termos das componentes de uma representação  $\Phi$  da aplicação de Gauss  $G$  em coordenadas homogêneas, e são independentes da particular representação de  $G$ .

**Lema 4.3.** *Dado uma aplicação  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ , seja  $\widehat{\Phi} = f\Phi$  onde  $f$  é uma função complexa não nula diferenciável. Sejam  $\eta, \mathbb{V}$  definidos em função de  $\Phi$  como em (4.9) e (4.10) e os correspondentes  $\widehat{\eta}, \widehat{\mathbb{V}}$  em termos de  $\widehat{\Phi}$ . Então*

$$\widehat{\mathbb{V}} = f\mathbb{V} \tag{4.16}$$

e sobre o conjunto onde  $\widehat{\mathbb{V}}$  e  $\mathbb{V}$  não se anulam, as funções  $\alpha, \widehat{\alpha}$  definidas por (4.13) satisfazem

$$\widehat{\alpha}_{\bar{z}z} - \Im(\widehat{\eta}_z) = \alpha_{\bar{z}z} - \Im(\eta_z). \tag{4.17}$$

**Demonstração:** De (4.9) é fácil ver que

$$\widehat{\eta} = \frac{\ll (f\Phi)_{\bar{z}}, f\Phi \gg}{\ll f\Phi, f\Phi \gg} = \eta + \frac{f_{\bar{z}}}{f}. \tag{4.18}$$

De (4.10) e (4.18) temos

$$\widehat{\mathbb{V}} = \widehat{\Phi}_{\bar{z}} - \widehat{\eta}\widehat{\Phi} = f_{\bar{z}}\Phi + f\Phi_{\bar{z}} - \left(\eta + \frac{f_{\bar{z}}}{f}\right) f\Phi = f\mathbb{V}.$$

Pondo  $f = re^{i\theta}$ , segue-se de (4.18) que

$$\widehat{\eta} = \eta + (\log f)_{\bar{z}} = \eta + (\log r)_{\bar{z}} + i\theta_{\bar{z}},$$

assim que

$$\widehat{\eta}_z = \eta_z + i\theta_{\bar{z}z} + (\log r)_{\bar{z}z}. \quad (4.19)$$

Mas por (4.16),  $\widehat{V} = re^{i(\alpha+\theta)}R(z)$ . Logo,

$$\widehat{\alpha} = \alpha + \theta, \text{ sempre que } V \neq 0.$$

Portanto, substituindo  $\theta_{\bar{z}z} = \widehat{\alpha}_{\bar{z}z} - \alpha_{\bar{z}z}$  em (4.19) e usando o fato que  $\widehat{\alpha}_{\bar{z}z}, \alpha_{\bar{z}z}$  e  $(\log r)_{\bar{z}z}$  são reais, segue o resultado.  $\square$

## 4.2 Aplicação de Gauss para superfícies tipo espaço em $\mathbb{L}^3$

Para superfícies tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$ , podemos explicitar a relação entre as aplicações de Gauss clássica e generalizada. A aplicação  $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$ , definida por

$$\varphi : w \mapsto (1 + w^2, i(1 - w^2), 2w) \quad (4.20)$$

satisfaz  $(\varphi^1)^2 + (\varphi^2)^2 - (\varphi^3)^2 = 0$ , portanto define uma aplicação

$$\begin{aligned} [\varphi] : \mathbb{C} \setminus \{|w| = 1\} &\rightarrow \{[\varphi] \in Q_1^1 : \varphi^3 \neq 0\} \\ w &\mapsto [\varphi(w)] \end{aligned}$$

que se estende para o biholomorfismo  $[\varphi] : \mathbb{C}_\infty \setminus \{|w| = 1\} \rightarrow Q_1^1$ . Sabemos que a quádrica  $Q_1^1$  pode ser identificada com o Grassmanniano de 2-planos tipo espaço orientados em  $\mathbb{L}^3$ ,  $\Pi = [\Re(\varphi(w)), \Im(\varphi(w))]$ . Por outro lado, a aplicação

$$w \mapsto N(w) = \frac{1}{1 - |w|^2} (2\Re(w), 2\Im(w), 1 + |w|^2), \quad (4.21)$$

de  $\mathbb{C}_\infty \setminus \{|w| = 1\}$  em  $H_0^2(-1) = \{x \in \mathbb{L}^3 : \langle x, x \rangle = -1\}$ , é a inversa da projeção estereográfica  $\sigma$  pelo polo sul  $(0, 0, -1)$  de  $H_0^2(-1)$ . E  $N$  restrita a  $D^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  assume valores em  $H^2(-1)$ . De (4.20) e (4.21) é fácil ver que  $\ll N(w), \varphi(w) \gg = 0$ . Como  $N(0) = (0, 0, 1)$  e  $[\varphi(0)]$  corresponde ao 2-plano de tipo

espaço  $\Pi = [(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$  de  $\mathbb{L}^3$  com orientação induzida, então  $N(w)$  é o oposto da normal, unitária orientada de  $[\varphi(w)]$ . Assim, determinar uma superfície de tipo espaço, cuja aplicação de Gauss generalizada é  $G : M^2 \rightarrow Q_1^1$ , expressa na forma

$$G = [\varphi \circ f] = [(1 + f^2, i(1 - f^2), 2f)],$$

para alguma função complexa  $f : M^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ , é equivalente a determinar uma superfície tipo espaço com aplicação de Gauss clássica

$$N = \frac{1}{1 - |f|^2} (2\Re e(f), 2\Im m(f), 1 + |f|^2). \quad (4.22)$$

Localmente, podemos escrever  $w = f(z)$  em termos de coordenadas isotérmicas  $(U, z = u + iv)$  da superfície de Riemann  $M^2$ . Usando o fato que

$$\Phi(z) = (1 + f^2, i(1 - f^2), 2f), \quad |f(z)| \neq 1, \quad (4.23)$$

podemos obter  $\eta(z)$  e  $\mathbb{V}(z)$ , definidos respectivamente em (4.9) e (4.10), em função de  $f$ . Por um cálculo direto obtemos

$$\eta = -\frac{2\bar{f}f_{\bar{z}}}{1 - |f|^2}, \quad \mathbb{V}(z) = \frac{2f_{\bar{z}}}{1 - |f(z)|^2} (2\Re e(f), 2\Im m(f), 1 + |f|^2) = 2f_{\bar{z}}N.$$

Como o vetor normal unitário  $N$ , é um vetor real de tipo tempo de  $\mathbb{L}^3$ , temos que a condição (4.13) é sempre satisfeita para qualquer aplicação de classe  $C^1$   $\Phi(z)$ , assumindo valores na quádriga  $Q_1^1$ . Além disso, para o caso  $n = 3$  podemos reescrever a condição necessária (4.14) em função de  $f$ . Para isso precisamos definir as seguintes funções auxiliares

$$F(f) := \frac{f_{\bar{z}}}{1 - |f|^2}, \quad \widehat{F}(f) := \frac{f_z}{1 - |f|^2}, \quad L(f) := f_{z\bar{z}} + \frac{2\bar{f}f_z f_{\bar{z}}}{1 - |f|^2} \quad (4.24)$$

e sobre o conjunto  $\{z : f_{\bar{z}} \neq 0\}$ , seja

$$S(f) := \frac{L(f)}{f_{\bar{z}}} \quad \text{e} \quad T(f) = \frac{\partial S}{\partial \bar{z}} = \left[ \frac{f_{z\bar{z}}}{f_{\bar{z}}} + \frac{2\bar{f}f_z}{1 - |f|^2} \right]_{\bar{z}}. \quad (4.25)$$

Antes de continuar, precisamos verificar quais são as possíveis singularidades da função  $f$ , e por conseguinte as singularidades das funções acima, pois,  $f$  pode possivelmente assumir o valor  $\infty$ .

**Lema 4.4.** Se  $f : M^2 \rightarrow \mathbb{C}$  é definida em uma superfície de Riemann  $M^2$ , então as seguintes diferenciais são globalmente definidas:

$$\begin{aligned}\widehat{F}dz, Sdz & \text{ de tipo } (1,0), \\ Fd\bar{z} & \text{ de tipo } (0,1), \\ Ldzd\bar{z}, Tdzd\bar{z} & \text{ de tipo } (1,1),\end{aligned}$$

onde  $F$  e  $\widehat{F}$  são definidas sobre o conjunto  $\{z : |f(z)| \neq 1\}$  e,  $S$  e  $T$  são definidas em  $\{z : f_{\bar{z}} \neq 0, |f(z)| \neq 1\}$ .

**Demonstração:** Sejam  $(V, w = x + iy)$  e  $(U, z = u + iv)$  coordenadas locais de  $M^2$  tal que  $U \cap V \neq \emptyset$  e  $z = z(w)$ . Assim,  $f_w = f_z \frac{\partial z}{\partial w}$ ,  $f_{\bar{w}} = f_{\bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{w}}$  e  $dz = \frac{\partial z}{\partial w} dw$ . Como  $f(w) = f(z(w))$  em  $U \cap V$ , segue o resultado.  $\square$

**Lema 4.5.** Seja  $R$  a transformação de Möbius

$$R(w) = \frac{\alpha w + \beta}{\beta w + \bar{\alpha}}, \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1.$$

Então as funções auxiliares  $|F|$ ,  $|\widehat{F}|$ ,  $S$  e  $T$  obtidas a partir de  $w = f(z)$ , são invariantes por  $R(f(z))$ , isto é,  $|F(f)| = |F(R(f))|$ ,  $|\widehat{F}(f)| = |\widehat{F}(R(f))|$ ,  $S(f) = S(R(f))$  e  $T(f) = T(R(f))$ .

**Demonstração:** Por um cálculo direto temos

$$\begin{aligned}R_z &= \frac{f_z}{(\bar{\beta}f + \bar{\alpha})^2}, \quad R_{\bar{z}} = \frac{f_{\bar{z}}}{(\bar{\beta}f + \bar{\alpha})^2}, \quad R_{z\bar{z}} = \frac{f_{z\bar{z}}(\bar{\beta}f + \bar{\alpha}) - 2f_z f_{\bar{z}} \bar{\beta}}{(\bar{\beta}f + \bar{\alpha})^3}, \\ 1 - |R|^2 &= \frac{1 - |f|^2}{|\bar{\beta}f + \bar{\alpha}|^2}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}S(R(f)) &= \frac{f_{z\bar{z}}}{f_{\bar{z}}} - \frac{2f_z \bar{\beta}}{(\bar{\beta}f + \bar{\alpha})} + \frac{2(\bar{\alpha}f + \bar{\beta})}{(\bar{\beta}f + \bar{\alpha})} \frac{f_z}{1 - |f|^2} = \\ &= \frac{f_{z\bar{z}}}{f_{\bar{z}}} + \left( \frac{-2f_z \bar{\beta}(1 - |f|^2) + 2(\bar{\alpha}f + \bar{\beta})f_z}{(\bar{\beta}f + \bar{\alpha})} \right) \frac{1}{1 - |f|^2} = \\ &= \frac{f_{z\bar{z}}}{f_{\bar{z}}} + \frac{2\bar{f}f_z}{1 - |f|^2} = S(f),\end{aligned}$$

$$|F(R(f))| = \frac{|R_{\bar{z}}|}{|1 - |R(f)|^2|} = \frac{|f_{\bar{z}}|}{|\bar{\beta}f + \bar{\alpha}|^2} \frac{|\bar{\beta}f + \bar{\alpha}|^2}{|1 - |f|^2|} = \frac{|f_{\bar{z}}|}{|1 - |f|^2|} = |F(f)|.$$

Os demais casos são imediatos.  $\square$

**Observação 4.2.** A transformação de Möbius acima tem uma interessante relação com o grupo de Lie  $SU(n-1, 1) = U(n-1, 1) \cap SL(n, \mathbb{C})$ , no caso  $n = 2$ . Mais precisamente,  $SU(1, 1)$  pode ser dado por:

$$SU(1, 1) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} : |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

Agora podemos encontrar condições explícitas sobre a aplicação de Gauss de uma superfície de tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$ .

**Teorema 4.6.** *Seja  $S$  uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$  definida pela imersão  $X : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$ , e seja  $w = f(z)$  a representação local da aplicação de Gauss, isto é  $\sigma \circ N(z) = f(z)$  e  $|f(z)| \neq 1$ , em um sistema de coordenadas isotérmicas  $(U, z)$  de  $M^2$ . Sejam as funções associadas  $F$  e  $T$  definidas por (4.24) e (4.25). Então em qualquer ponto de  $M^2$ , uma das seguintes condições está satisfeita:*

$$(i) F(z) = 0 \quad \text{ou} \quad (ii) F(z) \neq 0 \quad \text{e} \quad \Im\{T(z)\} = 0. \quad (4.26)$$

**Demonstração:** Pelo Lema 4.5 a função  $T(f)$  é invariante por transformação de Möbius, então podemos escolher coordenadas locais  $(U, w)$  sobre  $H_0^2(-1)$  tal que  $w = f(z) \neq \infty$  numa vizinhança de um ponto de  $M^2$  sobre a qual também temos  $|f(z)| \neq 1$ , pois a superfície  $S$  é tipo espaço. Note que as condições (1) e (2) acima são equivalentes a:

$$i') f_{\bar{z}} = 0 \quad \text{ou} \quad ii') f_{\bar{z}} \neq 0 \quad \text{e} \quad \Im\left\{ \left( \frac{f_{\bar{z}z}}{f_{\bar{z}}} + \frac{2\bar{f}f_z}{1 - |f|^2} \right)_{\bar{z}} \right\} = 0. \quad (4.27)$$

Vamos mostrar que (ii') é exatamente a forma assumida por (4.14) para o caso  $n = 3$ . Vamos supor que  $f_{\bar{z}} \neq 0$ . Vimos antes que para superfícies tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$ ,  $\eta$  e  $\mathbb{V}$  são

dadas por  $\eta(z) = -2\bar{f}F(f)$  e  $\mathbb{V}(z) = 2f_{\bar{z}}N(z)$ . Comparando isto com as expressões de  $\eta$  e  $\mathbb{V}$  dadas respectivamente em (4.13) e (4.14) do Teorema 4.2, segue-se que

$$\alpha = \arg(f_{\bar{z}}) \pmod{2\pi}. \quad (4.28)$$

Assim,

$$\alpha_{z\bar{z}} = (\arg(f_{\bar{z}}))_{z\bar{z}} = (\Im\{\log f_{\bar{z}}\})_{z\bar{z}} = \Im\left\{\left(\frac{f_{z\bar{z}}}{f_{\bar{z}}}\right)_{\bar{z}}\right\}. \quad (4.29)$$

Portanto, provar (ii') é equivalente, usando (4.29), mostrar que

$$\alpha_{z\bar{z}} = -\Im\left\{\left(\frac{2\bar{f}f_z}{1-|f|^2}\right)_{\bar{z}}\right\} = -2\Im\{(\bar{f}\widehat{F})_{\bar{z}}\}. \quad (4.30)$$

Por outro lado, já vimos que  $\eta = -2\bar{f}F$ . Assim, a equação (4.14) toma a forma

$$\alpha_{z\bar{z}} = -2\Im\{(\bar{f}F)_z\}. \quad (4.31)$$

Comparando (4.30) e (4.31), precisamos simplesmente verificar que

$$\Im\{(\bar{f}\widehat{F})_{\bar{z}}\} = \Im\{(\bar{f}F)_z\}. \quad (4.32)$$

É fácil ver que

$$(\bar{f}\widehat{F})_{\bar{z}} - (\bar{f}F)_z = \frac{(\bar{f})_{\bar{z}}f_z - (\bar{f})_zf_{\bar{z}}}{(1-|f|^2)^2}, \quad (\bar{f})_z = \bar{f}_{\bar{z}}, \quad (\bar{f})_{\bar{z}} = \bar{f}_z.$$

Portanto,

$$(\bar{f}\widehat{F})_{\bar{z}} - (\bar{f}F)_z = \frac{|f_z|^2}{(1-|f|^2)^2} - \frac{|f_{\bar{z}}|^2}{(1-|f|^2)^2} = |\widehat{F}|^2 - |F|^2 \in \mathbb{R}.$$

Esta última equação tem como consequência imediata (4.32), o que prova o Teorema.  $\square$

**Observação 4.3.** Para uma superfície de tipo espaço regular em  $\mathbb{L}^3$ , o vetor

$$\mathbb{V} = \mu \ll \Phi, \Phi \gg H$$

é dado explicitamente por  $\mathbb{V} = 2f_{\bar{z}}N(z)$ . Então,

$$H = 0 \Leftrightarrow \mathbb{V} = 0 \Leftrightarrow f_{\bar{z}} = 0.$$

Assim, a equação de primeira ordem (4.26)(i) vale precisamente nos pontos onde o vetor curvatura média é igual a zero. Enquanto que para superfícies de tipo espaço onde  $H \neq 0$ , a equação de terceira ordem (4.26)(ii) precisa valer.

Um resultado que generaliza o Teorema 4.6 foi provado em [2], onde foi obtido uma equação tipo Kenmotsu [25], relacionando a aplicação de Gauss e a função curvatura média. Precisamente, temos

**Proposição 4.7.** ([2]) *Seja  $M^2$  uma superfície de tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$ . Então a função curvatura média  $h$  de  $M^2$  e a aplicação de Gauss  $f$  de  $M^2$  em  $\mathbb{C}$  satisfazem a EDP de segunda ordem*

$$h \left( f_{z\bar{z}} + \frac{2\bar{f}f_zf_{\bar{z}}}{1-|f|^2} \right) = h_z f_{\bar{z}}. \quad (4.33)$$

No mesmo trabalho, foi ainda provado que a equação (4.33) serve como condição de integrabilidade para a existência de uma superfície tipo espaço com aplicação de Gauss e curvatura média dadas.

Para mostrar que o Teorema 4.6 pode ser obtido do Proposição 4.7, vamos reescrever a equação (4.33) com a notação introduzida em (4.24) e (4.25) sobre o conjunto  $\{z : f_{\bar{z}} \neq 0\}$ . Temos

$$h \left( f_{z\bar{z}} + \frac{2\bar{f}f_zf_{\bar{z}}}{1-|f|^2} \right) = h_z f_{\bar{z}} \Leftrightarrow S(f) = (\log h)_z.$$

Como  $S_{\bar{z}} = (\log h)_{z\bar{z}} \in \mathbb{R}$  pois,  $h : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $T(f) = S_{\bar{z}}$  temos

$$\Im(S_{\bar{z}}) = \Im(T) = 0.$$

Portanto, nos pontos onde  $f_{\bar{z}} \neq 0$ , e por conseguinte  $h \neq 0$ , a equação (4.33) implica a equação (4.26)(ii).

Podemos estabelecer relações entre os resultados acima mencionados para o caso de superfícies de tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$  e os de Akutagawa e Nishikawa [2]. Seja  $H$  o vetor curvatura média de uma superfície tipo espaço imersa em  $\mathbb{L}^3$  por uma aplicação  $X : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$ , dada na forma  $H = hN$ , onde  $N$  é a normal unitária  $N : M^2 \rightarrow H_0^2(-1)$  e

$h$  é a curvatura média escalar. Para este caso já vimos que  $\mathbb{V}$  é dado explicitamente por  $\mathbb{V} = 2f_{\bar{z}}N(z)$ . Comparando esta última expressão com (4.11) temos

$$\bar{\mu} \ll \Phi, \Phi \gg H = 2f_{\bar{z}}N(z) \Leftrightarrow \bar{\mu} \ll \Phi, \Phi \gg h = 2f_{\bar{z}}.$$

Mas de (4.23), é fácil ver que  $\ll \Phi, \Phi \gg = 2(1 - |f|^2)^2$ . Assim

$$\mu(z) = \frac{\bar{f}_{\bar{z}}}{h(1 - |f|^2)^2} = \frac{\bar{f}_z}{h(1 - |f|^2)^2}. \quad (4.34)$$

nos pontos onde  $h \neq 0$ . Concluimos então que dada uma superfície  $S$  tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$ , podemos obter uma fórmula de representação para  $S$  em função da aplicação de Gauss  $f$  e da função curvatura média  $h$ . Mais precisamente, temos o:

**Teorema 4.8.** *Seja  $S$  uma superfície tipo espaço imersa em  $\mathbb{L}^3$  por  $X : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$ , onde  $M^2$  é uma superfície de Riemann simplesmente conexa. Seja  $h \neq 0$  a função curvatura média da imersão e seja  $\Phi(z)$  definida em (4.23), a representação local da aplicação de Gauss de  $S$ , isto é,  $X_z = \mu\Phi(z)$ . Então a superfície  $S$  pode ser obtida explicitamente por*

$$X(z) = 2\Re e \int_{z_0}^z \frac{\bar{f}_z}{h(1 - |f|^2)^2} (1 + f^2, i(1 - f^2), 2f) dw + X(z_0). \quad (4.35)$$

Faremos agora uma breve apresentação da relação existente entre as funções  $F(f)$ ,  $\widehat{F}(f)$  e  $L(f)$  associadas à aplicação de Gauss de superfícies tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$  e a energia de aplicações entre superfícies. Vamos começar revendo alguns fatos sobre aplicações harmônicas entre variedades Riemannianas; detalhes podem ser encontrados em [14], [38] e [41]. Seja  $f : (M^m, ds^2) \rightarrow (N^n, d\sigma^2)$  uma aplicação diferenciável entre duas variedades Riemanniana. A *densidade de energia* de  $f$  é definida por

$$e(f) := \frac{1}{2} \text{Tr}(f^* d\sigma^2). \quad (4.36)$$

Dada uma região  $\Omega \subset M^m$ , a *energia total*  $E$  da aplicação  $f$  sobre  $\Omega$  é definida por

$$E(f) = \int_{\Omega} e(f) d\Omega. \quad (4.37)$$

Um campo vetorial  $V$  ao longo da aplicação  $f$  é uma seção do fibrado vetorial  $f^{-1}TN = \cup_{p \in M} T_{f(p)}N$ , induzido sobre  $M^m$ . O conjunto de todas as seções de  $f^{-1}TN$ , é  $\Gamma(f^{-1}TN) = \{V : M \rightarrow TN : V(p) \in T_{f(p)}N, p \in M\}$ . Define-se uma variação de  $f$  por  $f_t(p) := \exp_{f(p)}(tV(p))$ , que é uma aplicação diferenciável de  $M \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  em  $N$ . Se  $V$  tem suporte compacto em  $\Omega$ , então a fórmula da primeira variação de  $E$  é dada por

$$\left. \frac{dE(f_t)}{dt} \right|_{t=0} = - \int_{\Omega} d\sigma^2(\tau(f), V) d\Omega, \quad (4.38)$$

$$\tau(f)_p := \sum_{i=1}^m \left( \tilde{\nabla}_{e_i} f_* e_i - f_* \nabla_{e_i} e_i \right)_p, \quad p \in \Omega \quad (4.39)$$

onde  $\tilde{\nabla}$  é a conexão de  $\Gamma(f^{-1}TN)$  e  $\{e_i\}_{i=1}^m$  é um referencial ortonormal de  $M^m$ . O elemento  $\tau(f) \in \Gamma(f^{-1}TN)$  é chamado *campo de tensão* de  $f$ .

Em geral, uma aplicação  $C^\infty f : M^m \rightarrow N^n$  ( $f \in C^\infty(M, N)$ ) entre variedades Riemannianas é *harmônica* se, e somente se  $f$  é um ponto crítico da energia  $E$  em  $C^\infty(M, N)$ , isto é, para qualquer variação  $f_t \in C^\infty(M, N)$  de  $f$  com  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , temos

$$\left. \frac{dE(f_t)}{dt} \right|_{t=0} = 0.$$

Assim, a aplicação  $f \in C^\infty(M^m, N^n)$  é harmônica se, e somente se

$$\tau(f) = 0, \quad \text{para todo ponto de } M. \quad (4.40)$$

Esta equação é chamada a *equação de Euler-Lagrange* da integral energia.

No caso de uma aplicação entre superfícies, o campo de tensão  $\tau(f)$  pode ser expresso usando coordenadas locais conformes  $(U, z = x^1 + ix^2)$  de  $M^2$  e  $(\tilde{U}, w = y^1 + iy^2)$  de  $N^2$  como se segue. Seja  $f^1 = y^1 \circ f$  e  $f^2 = y^2 \circ f$  tal que  $w = f(z)$  seja a expressão local de  $f : M^2 \rightarrow N^2$ . Então,

$$\tau(f)(z) = \sum_{\gamma=1}^2 \tau(f)^\gamma \frac{\partial}{\partial y^\gamma},$$

$$\tau(f)^\gamma(z) = \Delta_M f^\gamma + {}^N \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(f(z)) \frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial f^\beta}{\partial x^j} g^{ij}. \quad (4.41)$$

onde  $\Delta_M$  é o Laplaciano de  $M^2$ ,  ${}^N\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  são os símbolos de Christoffel de  $(N^2, d\sigma^2)$  e  $(g^{ij})$  é a matrix inversa de  $(g_{ij})$ ,  $g_{ij} := ds^2(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j})$  e  $h_{\alpha\beta} := d\sigma^2(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \frac{\partial}{\partial y^\beta})$ . Sejam  $\lambda^2|dz|^2$  e  $\psi^2|dw|^2$  as expressões locais das métricas  $ds^2$  e  $d\sigma^2$  nos sistemas de coordenadas, temos

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad (g^{ij}) = \begin{bmatrix} 1/\lambda^2 & 0 \\ 0 & 1/\lambda^2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (h_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} \psi^2 & 0 \\ 0 & \psi^2 \end{bmatrix}.$$

É fácil ver que

$$\begin{aligned} {}^N\Gamma_{11}^1 &= \frac{\psi_{y^1}}{\psi}, \quad {}^N\Gamma_{12}^1 = \frac{\psi_{y^2}}{\psi}, \quad {}^N\Gamma_{22}^1 = -\frac{\psi_{y^1}}{\psi}, \\ {}^N\Gamma_{11}^2 &= -\frac{\psi_{y^2}}{\psi}, \quad {}^N\Gamma_{12}^2 = \frac{\psi_{y^1}}{\psi}, \quad {}^N\Gamma_{22}^2 = \frac{\psi_{y^2}}{\psi}, \\ \tau(f)^\gamma &= \Delta_M f^\gamma + \left( \left( \frac{\partial f^1}{\partial x^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f^1}{\partial x^2} \right)^2 \right) {}^N\Gamma_{11}^\gamma g^{11} + \\ &\quad + 2 \left( \frac{\partial f^1}{\partial x^1} \frac{\partial f^2}{\partial x^1} + \frac{\partial f^1}{\partial x^2} \frac{\partial f^2}{\partial x^2} \right) {}^N\Gamma_{12}^\gamma g^{11} + \\ &\quad + \left( \left( \frac{\partial f^2}{\partial x^1} \right)^2 + \left( \frac{\partial f^2}{\partial x^2} \right)^2 \right) {}^N\Gamma_{22}^\gamma g^{11}, \quad \gamma = 1, 2. \end{aligned}$$

Por um cálculo direto podemos mostrar que

$$\begin{aligned} \tau(f) = \tau(f)^1 + i\tau(f)^2 &= \Delta_M(f) + 2\frac{\psi_f}{\psi}((f^1_{x_1})^2 + (f^1_{x_2})^2 + \\ &\quad + 2i(f^1_{x_1}f^2_{x_1} + f^1_{x_2}f^2_{x_2}) - ((f^2_{x_1})^2 + (f^2_{x_2})^2)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\tau(f) = \frac{4}{\lambda^2} \left( f_{z\bar{z}} + 2\frac{\psi_f}{\psi} f_z f_{\bar{z}} \right), \quad (4.42)$$

pois

$$\Delta_M = \frac{1}{\lambda^2} \Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial_z \partial_{\bar{z}}},$$

$$\begin{aligned} 4(f^1 + if^2)_z (f^1 + if^2)_{\bar{z}} &= (f^1_{x_1})^2 + (f^1_{x_2})^2 + 2i(f^1_{x_1}f^2_{x_1} + \\ &\quad + f^1_{x_2}f^2_{x_2}) - ((f^2_{x_1})^2 + (f^2_{x_2})^2). \end{aligned}$$

Restringindo ao caso onde  $N = H_0^2(-1) = \{x \in \mathbb{L}^3 : \langle x, x \rangle = -1\}$ . Seja  $w = f(z)$  a expressão local da aplicação de Gauss  $f : M^2 \rightarrow H_0^2(-1)$  de uma superfície  $S$  tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$ , onde  $w$  é parâmetro conforme de  $H_0^2(-1)$ , obtido pela projeção estereográfica de  $H_0^2(-1)$ . Então,

$$d\sigma^2 = \left( \frac{2}{1 - |f|^2} \right)^2 |dz|^2.$$

Assim,

$$\psi = \frac{2}{1 - |f|^2}, \quad \psi_f = \frac{2\bar{f}}{(1 - |f|^2)^2} \Rightarrow \frac{\psi_f}{\psi} = \frac{\bar{f}}{1 - |f|^2}.$$

Portanto,

$$\tau(f) = \frac{4}{\lambda^2} \left( f_{z\bar{z}} + \frac{2\bar{f}f_z f_{\bar{z}}}{1 - |f|^2} \right) = \frac{4}{\lambda^2} L(f). \quad (4.43)$$

De (4.42), podemos escrever (4.33) na forma

$$\frac{h\tau(f)\lambda^2}{4} = h_z f_{\bar{z}}.$$

Usando ainda a Observação 4.3, podemos demonstrar o seguinte corolário da Proposição 4.7 provado primeiro por T.K. Milnor [33]

**Corolário 4.9.** *A curvatura média de uma superfície tipo espaço  $S$  imersa por  $X : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^3$  onde  $M^2$  é uma superfície de Riemann conexa, é constante se, e somente se a aplicação de Gauss  $G : M^2 \rightarrow H_0^2(-1)$  é harmônica.*

### 4.3 Aplicação de Gauss para superfícies tipo espaço em $\mathbb{L}^4$

Estamos interessados em obter condições necessárias explícitas para a aplicação de Gauss generalizada de uma superfície  $S$  tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$ . Seja  $S$  uma tal superfície imersa em  $\mathbb{L}^4$  por  $X : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$  com aplicação de Gauss generalizada  $G : M^2 \rightarrow Q_1^2$ , dada localmente por  $G = [X_z]$  onde  $(U, z = u + iv)$  são coordenadas isotérmicas de

$M^2$ . Podemos expressá-la por uma par de funções  $w_1 = \mathbf{a}(z)$ ,  $w_2 = \mathbf{b}(z)$  tal que  $\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}} \neq 1$ . Logo, podemos escrever  $G(z) = [\Phi(z)]$  onde por (1.24),

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \varphi(\mathbf{a}(z), \mathbf{b}(z)) = \\ &= (1 + \mathbf{a}(z)\mathbf{b}(z), i(1 - \mathbf{a}(z)\mathbf{b}(z)), \mathbf{a}(z) - \mathbf{b}(z), \mathbf{a}(z) + \mathbf{b}(z)).\end{aligned}\quad (4.44)$$

Precisamos definir certas funções auxiliares a partir das funções complexas  $\mathbf{a}(z)$  e  $\mathbf{b}(z)$  descritas pela aplicação de Gauss.

$$\begin{aligned}F_1 = F_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &:= \frac{\mathbf{a}_{\bar{z}}}{1 - \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}}, \quad F_2 = F_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \frac{\mathbf{b}_{\bar{z}}}{1 - \bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}}, \\ \widehat{F}_1 = \widehat{F}_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &:= \frac{\mathbf{a}_z}{1 - \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}}, \quad \widehat{F}_2 = \widehat{F}_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \frac{\mathbf{b}_z}{1 - \bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}},\end{aligned}\quad (4.45)$$

$$S_1 = S_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \frac{\mathbf{a}_{z\bar{z}}}{\mathbf{a}_{\bar{z}}} + 2\bar{\mathbf{b}} \cdot \frac{\mathbf{a}_z}{1 - \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}}, \quad S_2 = S_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \frac{\mathbf{b}_{z\bar{z}}}{\mathbf{b}_{\bar{z}}} + 2\bar{\mathbf{a}} \cdot \frac{\mathbf{b}_z}{1 - \bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}},\quad (4.46)$$

$$T_1 = T_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \left( \frac{\mathbf{a}_{z\bar{z}}}{\mathbf{a}_{\bar{z}}} + 2\bar{\mathbf{b}}\widehat{F}_1 \right)_{\bar{z}}, \quad T_2 = T_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) := \left( \frac{\mathbf{b}_{z\bar{z}}}{\mathbf{b}_{\bar{z}}} + 2\bar{\mathbf{a}}\widehat{F}_2 \right)_{\bar{z}},\quad (4.47)$$

onde  $T_1$  e  $T_2$  são definidos sobre o conjunto  $\{z : \mathbf{a}_{\bar{z}} \neq 0, \mathbf{b}_{\bar{z}} \neq 0\}$ .

Seguem os seguintes resultados envolvendo essas funções.

**Lema 4.10.** *Seja  $R$  a transformação de Möbius dada no Lema 4.5. Seja  $Y$  qualquer uma das funções auxiliares  $\overline{F}_1 F_2$ ,  $F_1 \overline{F}_2$ ,  $\widehat{F}_1 \widehat{F}_2$ ,  $\widehat{F}_1 \widehat{F}_2$ ,  $S_k$  e  $T_k$ ,  $k = 1, 2$  obtidas a partir das funções  $\mathbf{a}(z)$  e  $\mathbf{b}(z)$ . Então  $Y$  é invariante por  $(R(\mathbf{a}), R(\mathbf{b}))$ , isto é,  $Y(R(\mathbf{a}), R(\mathbf{b})) = Y(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ .*

**Demonstração:** Por um cálculo direto temos

$$R(\mathbf{a})_z = \frac{\mathbf{a}_z}{(\beta\mathbf{a} + \bar{\alpha})^2}, \quad R(\mathbf{a})_{\bar{z}} = \frac{\mathbf{a}_{\bar{z}}}{(\beta\mathbf{a} + \bar{\alpha})^2}, \quad R(\mathbf{a})_{z\bar{z}} = \frac{\mathbf{a}_{z\bar{z}}(\beta\mathbf{a} + \bar{\alpha}) - 2\mathbf{a}_z\mathbf{a}_{\bar{z}}\bar{\beta}}{(\beta\mathbf{a} + \bar{\alpha})^3}.$$

Note que o cálculo é o mesmo para  $R(\mathbf{b})$ . Disto segue que

$$1 - R(\mathbf{a})\overline{R(\mathbf{b})} = \frac{1 - \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}}{(\beta\mathbf{a} + \bar{\alpha})(\beta\bar{\mathbf{b}} + \alpha)}.$$

Mas,

$$S_1(R(\mathbf{a}), R(\mathbf{b})) = \frac{R(\mathbf{a})_{z\bar{z}}}{R(\mathbf{a})_{\bar{z}}} + \frac{2\overline{R(\mathbf{b})}R(\mathbf{a})_z}{1 - R(\mathbf{a})R(\mathbf{b})},$$

sonde segue-se que

$$\begin{aligned} S_1(R(\mathbf{a}), R(\mathbf{b})) &= \frac{\mathbf{a}_{z\bar{z}}}{\mathbf{a}_{\bar{z}}} - \frac{2\mathbf{a}_z\bar{\beta}}{(\bar{\beta}\mathbf{a} + \bar{\alpha})} + \frac{2(\bar{\alpha}\bar{\mathbf{b}} + \bar{\beta})}{(\bar{\beta}\mathbf{a} + \bar{\alpha})} \frac{\mathbf{a}_z}{1 - \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}} = \\ &= \frac{\mathbf{a}_{z\bar{z}}}{\mathbf{a}_{\bar{z}}} + \left( \frac{-2\bar{\beta}(1 - \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}) + 2(\bar{\alpha}\bar{\mathbf{b}} + \bar{\beta})}{(\bar{\beta}\mathbf{a} + \bar{\alpha})} \right) \frac{\mathbf{a}_z}{1 - \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}} = \\ &= \frac{\mathbf{a}_{z\bar{z}}}{\mathbf{a}_{\bar{z}}} + \frac{2\bar{\mathbf{b}}\mathbf{a}_z}{1 - \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}} = S_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \end{aligned}$$

Como  $T_1 = (S_1)_{\bar{z}}$ , segue-se também que  $T_1(R(\mathbf{a}), R(\mathbf{b})) = T_1(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Temos ainda

$$\begin{aligned} \overline{F_1(R(\mathbf{a}), R(\mathbf{b}))} F_2(R(\mathbf{a}), R(\mathbf{b})) &= \frac{\overline{R(\mathbf{a})_{\bar{z}}}}{1 - R(\mathbf{a})R(\mathbf{b})} \cdot \frac{R(\mathbf{b})_{\bar{z}}}{1 - R(\mathbf{a})R(\mathbf{b})} = \\ &= \frac{\bar{\mathbf{a}}_{\bar{z}} \mathbf{b}_{\bar{z}}}{(\bar{\beta}\bar{\mathbf{a}} + \alpha)^2 (\bar{\beta}\mathbf{b} + \bar{\alpha})^2} \cdot \frac{(\beta\bar{\mathbf{a}} + \alpha)^2 (\beta\mathbf{b} + \bar{\alpha})^2}{(1 - \bar{\mathbf{a}}\mathbf{b})^2} = \\ &= \frac{\bar{\mathbf{a}}_{\bar{z}} \mathbf{b}_{\bar{z}}}{(1 - \bar{\mathbf{a}}\mathbf{b})^2} = \overline{F_1(\mathbf{a}, \mathbf{b})} F_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}). \end{aligned}$$

A invariância das outras funções são análogas.  $\square$

Claramente as funções  $F_k$  e  $T_k$ , advindas da aplicação de Gauss de uma superfície  $S$  tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$ , são diferenciáveis sempre que  $w_k(w_1 = \mathbf{a}(z), w_2 = \mathbf{b}(z))$  é finito. Agora se  $\mathbf{a}(z) = \infty$  ou  $\mathbf{b}(z) = \infty$ , podemos aplicar a transformação de Möbius acima de modo que ambas as funções  $\mathbf{a}(z)$  e  $\mathbf{b}(z)$  sejam finitas em numa dada vizinhança. Isto corresponde a uma transformação de Lorentz na superfície  $S$  de  $\mathbb{L}^4$ . Para ver isto, primeiro exibiremos um homomorfismo do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  no subgrupo  $O^{++}(3, 1)$ , do grupo de Lorentz  $O(3, 1)$ , que permitirá fazer uma conexão entre as transformações de Lorentz e as transformações de Möbius da análise complexa.

Uma matriz  $A \in GL(2, \mathbb{C})$ , é *hermitiana* se  $\bar{A}^t = A$ , e nós denotaremos por  $Herm(2, \mathbb{C})$  o conjunto de todas elas.

$$Herm(2, \mathbb{C}) := \{A \in GL(2, \mathbb{C}) : \bar{A}^t = A\}.$$

Qualquer matriz  $\mathcal{H} \in Herm(2, \mathbb{C})$  é unicamente expressa na forma

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} v^3 - v^4 & v^1 + iv^2 \\ v^1 - iv^2 & -v^3 - v^4 \end{bmatrix}$$

onde  $v^i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  são números reais. Agora, cada matriz  $A$  pertencente ao grupo especial linear  $SL(2, \mathbb{C})$ , dá origem a uma aplicação  $\mathcal{L}_A : Herm(2, \mathbb{C}) \rightarrow Herm(2, \mathbb{C})$  definida por  $\mathcal{L}_A(\mathcal{H}) = A\mathcal{H}\overline{A^t}$ . Esta aplicação tem as seguintes propriedades:

- 1)  $\mathcal{L}_{AB} = \mathcal{L}_A \circ \mathcal{L}_B$ ;
- 2)  $\det(\mathcal{L}_A(\mathcal{H})) = \det(\mathcal{H})$ .

Como  $\mathcal{L}_A(\mathcal{H}) \in Herm(2, \mathbb{C})$ , se escreve na forma

$$\mathcal{L}_A(\mathcal{H}) = \begin{bmatrix} \tilde{v}^3 - \tilde{v}^4 & \tilde{v}^1 + i\tilde{v}^2 \\ \tilde{v}^1 - i\tilde{v}^2 & -\tilde{v}^3 - \tilde{v}^4 \end{bmatrix}.$$

Podemos calcular o determinante de  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{L}_A(\mathcal{H})$  e, usando a propriedade (2) acima temos

$$(\tilde{v}^1)^2 + (\tilde{v}^2)^2 + (\tilde{v}^3)^2 - (\tilde{v}^4)^2 = (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 - (v^4)^2.$$

Assim a aplicação linear  $(v^1, v^2, v^3, v^4) \mapsto (\tilde{v}^1, \tilde{v}^2, \tilde{v}^3, \tilde{v}^4)$  definida por

$$\begin{bmatrix} \tilde{v}^3 - \tilde{v}^4 & \tilde{v}^1 + i\tilde{v}^2 \\ \tilde{v}^1 - i\tilde{v}^2 & -\tilde{v}^3 - \tilde{v}^4 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} v^3 - v^4 & v^1 + iv^2 \\ v^1 - iv^2 & -v^3 - v^4 \end{bmatrix} \overline{A^t} \quad (4.48)$$

preserva o produto escalar  $\langle u, v \rangle = u^1v^1 + u^2v^2 + u^3v^3 - u^4v^4$  de  $\mathbb{L}^4$ , de modo que a matriz desta transformação linear pertence ao grupo de Lorentz  $O(3, 1)$ . Para construir explicitamente esta matriz em termos das entradas da matriz  $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \in$

$SL(2, \mathbb{C})$ , seja

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^3 - v^4 & v^1 + iv^2 \\ v^1 - iv^2 & -v^3 - v^4 \end{bmatrix},$$

respectivamente  $(\tilde{h}_j^i)$  para  $\mathcal{L}_A(\mathcal{H})$ . Deste modo podemos definir a aplicação  $M :$

$(v^1, v^2, v^3, v^4) \mapsto (h_{11}, h_{12}, h_{21}, h_{22})$  por

$$\begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{21} \\ h_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ v^4 \end{bmatrix}.$$

De modo análogo,

$$\begin{bmatrix} \tilde{h}_{11} \\ \tilde{h}_{12} \\ \tilde{h}_{21} \\ \tilde{h}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}^1 \\ \tilde{v}^2 \\ \tilde{v}^3 \\ \tilde{v}^4 \end{bmatrix}.$$

Além disso, é fácil calcular

$$M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -i & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim  $M^{-1} : (\tilde{h}_{11}, \tilde{h}_{12}, \tilde{h}_{21}, \tilde{h}_{22}) \mapsto (\tilde{v}^1, \tilde{v}^2, \tilde{v}^3, \tilde{v}^4)$ . Falta estabelecer explicitamente uma conexão entre  $(h_{kl})$  e  $(\tilde{h}_{kl})$ . Isto é obtido através de  $\mathcal{L}_A$ , uma vez que

$$\mathcal{L}_A(\mathcal{H}) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\gamma} \\ \bar{\beta} & \bar{\delta} \end{bmatrix}$$

é equivalente a

$$\begin{bmatrix} \tilde{h}_{11} \\ \tilde{h}_{12} \\ \tilde{h}_{21} \\ \tilde{h}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\bar{\beta} & \bar{\alpha}\beta & |\beta|^2 \\ \alpha\bar{\gamma} & \alpha\bar{\delta} & \beta\bar{\gamma} & \beta\bar{\delta} \\ \bar{\alpha}\gamma & \bar{\beta}\gamma & \bar{\alpha}\delta & \bar{\beta}\delta \\ |\gamma|^2 & \gamma\bar{\delta} & \bar{\gamma}\delta & |\delta|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ h_{21} \\ h_{22} \end{bmatrix}.$$

Observe que a relação entre  $(v^i)$  e  $(\tilde{v}^i)$  é dada pela composição de aplicações

$$(v^i) \xrightarrow{M} (h_{kl}) \xrightarrow{[\mathcal{L}_A]} (\tilde{h}_{kl}) \xrightarrow{M^{-1}} (\tilde{v}^i).$$

Portanto, a representação matricial da aplicação (4.48) é dada por

$$\Lambda_A = M^{-1} \cdot [\mathcal{L}_A] \cdot M$$

Finalmente, calculando explicitamente  $\Lambda_A$  em termos das entradas de  $A \in SL(2, \mathbb{C})$  obtemos

$$\Lambda_A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \alpha\bar{\delta} + \bar{\beta}\gamma + \beta\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\delta & i(\alpha\bar{\delta} + \bar{\beta}\gamma - \beta\bar{\gamma} - \bar{\alpha}\delta) \\ i(-\alpha\bar{\delta} + \bar{\beta}\gamma - \beta\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\delta) & \alpha\bar{\delta} - \bar{\beta}\gamma - \beta\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\delta \\ \alpha\bar{\beta} - \gamma\bar{\delta} + \bar{\alpha}\beta - \bar{\gamma}\delta & i(\alpha\bar{\beta} - \gamma\bar{\delta} - \beta\bar{\alpha} + \delta\bar{\gamma}) \\ -(\alpha\bar{\beta} + \gamma\bar{\delta} + \bar{\alpha}\beta + \bar{\gamma}\delta) & -i(\alpha\bar{\beta} + \gamma\bar{\delta} - \beta\bar{\alpha} - \delta\bar{\gamma}) \\ \alpha\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\gamma - \beta\bar{\delta} - \bar{\beta}\delta & -(\alpha\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\gamma + \beta\bar{\delta} + \bar{\beta}\delta) \\ i(-\alpha\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\gamma + \beta\bar{\delta} - \bar{\beta}\delta) & -i(-\alpha\bar{\gamma} + \bar{\alpha}\gamma - \beta\bar{\delta} + \bar{\beta}\delta) \\ \alpha\bar{\alpha} - \gamma\bar{\gamma} - \beta\bar{\beta} + \delta\bar{\delta} & -(\alpha\bar{\alpha} - \gamma\bar{\gamma} + \beta\bar{\beta} - \delta\bar{\delta}) \\ -(\alpha\bar{\alpha} + \gamma\bar{\gamma} - \beta\bar{\beta} - \delta\bar{\delta}) & \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta} \end{bmatrix}. \quad (4.49)$$

Observe que  $\Lambda_{44} > 0$  e  $\det(\Lambda_A) = \det([\mathcal{L}_A])$ . Por um cálculo direto podemos mostrar que  $\det([\mathcal{L}_A]) = |\alpha\delta - \beta\gamma|^4 = 1$ , assim  $\det(\Lambda_A) = 1$ . Além disso, denotando por  $(\Lambda_A)_E$  a matriz obtida de  $\Lambda_A$  eliminando a terceira linha e a terceira coluna, prova-se que  $\det((\Lambda_A)_E) = \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2) > 0$ . Portanto, a matriz  $\Lambda_A$  pertence ao grupo  $O^{++}(n-1, 1)$ .

A aplicação  $A \mapsto \Lambda_A$  que vai de  $SL(2, \mathbb{C})$  para  $O^{++}(3, 1)$  é chamada de *aplicação espinorial*. Note que se  $A, B \in SL(2, \mathbb{C})$ , então

$$\Lambda_A \Lambda_B = (M^{-1}[\mathcal{L}_A]M)(M^{-1}[\mathcal{L}_B]M) = M^{-1}[\mathcal{L}_A][\mathcal{L}_B]M.$$

Mas, pela propriedade (1) de  $\mathcal{L}_A$ , temos que  $[\mathcal{L}_A][\mathcal{L}_B] = [\mathcal{L}_{AB}]$ . Assim que,

$$\Lambda_A \Lambda_B = \Lambda_{AB}.$$

Portanto, a aplicação espinorial é um homomorfismo do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$  para  $O^{++}(3, 1)$ , isto é, é uma representação do grupo  $SL(2, \mathbb{C})$ . Esta representação não é injetora, pois  $\Lambda_A = \Lambda_{-A}$ . De fato,  $\Lambda_A = \Lambda_B$  implica  $A = \pm B$ . Com efeito,

$$\Lambda_A = \Lambda_B \Leftrightarrow \Lambda_A(\Lambda_B)^{-1} = Id_4.$$

Agora como  $(\Lambda_A)^{-1} = \Lambda_{-A}$  temos que

$$\Lambda_{AB^{-1}} = Id_4 \Rightarrow AB^{-1} = \pm Id_2.$$

Um particular exemplo é dado por  $A(\theta) = \begin{bmatrix} \cosh \theta/2 & \sinh \theta/2 \\ \sinh \theta/2 & \cosh \theta/2 \end{bmatrix} \in SL(2, \mathbb{C})$ , com  $\theta$  real. Neste caso, segue de (4.49) que

$$\Lambda_{A(\theta)} = \begin{bmatrix} \cosh \theta & 0 & 0 & -\sinh \theta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sinh \theta & 0 & 0 & \cosh \theta \end{bmatrix} \in O^{++}(3, 1).$$

Agora estamos em condições de aplicar os resultados acima para o nosso caso particular. Primeiro vamos recordar a relação entre a aplicação de Möbius  $R(w)$  do Lema 4.10 e o grupo  $SU(1, 1) = U(1, 1) \cap SL(2, \mathbb{C})$  a saber:

$$SU(1, 1) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} : |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

Portanto, para  $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \in SU(1, 1)$  temos de (4.49) que

$$\Lambda_A = \begin{bmatrix} \Re(\alpha^2 + \beta^2) & -\Im(\alpha^2 - \beta^2) & 0 & -2\Re(\alpha\beta) \\ \Im(\alpha^2 + \beta^2) & \Re(\alpha^2 - \beta^2) & 0 & -2\Im(\alpha\beta) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2\Re(\alpha\bar{\beta}) & -2\Im(\alpha\bar{\beta}) & 0 & |\alpha|^2 + |\beta|^2 \end{bmatrix} \in O^{++}(3, 1).$$

Conclusão, a cada mudança de coordenadas conformes na superfície  $S$  tipo espaço de  $\mathbb{L}^4$  através da aplicação de Möbius  $R(w)$ , de modo que  $\mathbf{a}(z)$  e  $\mathbf{b}(z)$  sejam finitos, corresponde uma transformação de Lorentz  $\Lambda_A \in O^{++}(3, 1)$  de  $\mathbb{L}^4$ .

**Lema 4.11.** *Sejam  $F_k$  e  $\widehat{F}_k$ ,  $k = 1, 2$ , definidos em (4.45) e (4.47). Temos que*

$$\Im \left\{ (\bar{\mathbf{b}}F_1)_z + (\bar{\mathbf{a}}F_2)_z \right\} = \Im \left\{ (\bar{\mathbf{b}}\widehat{F}_1)_{\bar{z}} + (\bar{\mathbf{a}}\widehat{F}_2)_{\bar{z}} \right\}.$$

**Demonstração:** Por um cálculo direto temos

$$(\overline{\mathbf{b}F_1})_z - (\overline{\mathbf{b}\widehat{F}_1})_{\bar{z}} = \frac{\mathbf{a}_{\bar{z}} \overline{\mathbf{b}_z} - \mathbf{a}_z \overline{\mathbf{b}_{\bar{z}}}}{(1 - \mathbf{a}\overline{\mathbf{b}})^2},$$

pois  $(\overline{\mathbf{b}})_z = \overline{\mathbf{b}_z}$  e  $(\overline{\mathbf{b}})_{\bar{z}} = \overline{\mathbf{b}_z}$ . Analogamente,

$$(\overline{\mathbf{a}F_2})_z - (\overline{\mathbf{a}\widehat{F}_2})_{\bar{z}} = \frac{\overline{\mathbf{a}_z} \mathbf{b}_z - \overline{\mathbf{a}_{\bar{z}}} \mathbf{b}_{\bar{z}}}{(1 - \overline{\mathbf{a}\mathbf{b}})^2}.$$

Portanto,

$$(\overline{\mathbf{a}F_2})_z - (\overline{\mathbf{a}\widehat{F}_2})_{\bar{z}} = \overline{(\overline{\mathbf{b}F_1})_z - (\overline{\mathbf{b}\widehat{F}_1})_{\bar{z}}}$$

que é equivalente a

$$(\overline{\mathbf{a}F_2})_z - \overline{(\overline{\mathbf{b}F_1})_z} = (\overline{\mathbf{a}\widehat{F}_2})_{\bar{z}} - \overline{(\overline{\mathbf{b}\widehat{F}_1})_{\bar{z}}}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} 2i\Im\{(\overline{\mathbf{b}F_1})_z + (\overline{\mathbf{a}F_2})_z\} &= \left( (\overline{\mathbf{b}F_1})_z + (\overline{\mathbf{a}F_2})_z \right) - \overline{\left( (\overline{\mathbf{b}F_1})_z + (\overline{\mathbf{a}F_2})_z \right)} \\ &= \left( (\overline{\mathbf{a}F_2})_z - (\overline{\mathbf{b}F_1})_z \right) - \overline{\left( (\overline{\mathbf{a}F_2})_z - (\overline{\mathbf{b}F_1})_z \right)} \\ &= \left( (\overline{\mathbf{a}\widehat{F}_2})_{\bar{z}} - (\overline{\mathbf{b}\widehat{F}_1})_{\bar{z}} \right) - \overline{\left( (\overline{\mathbf{a}\widehat{F}_2})_{\bar{z}} - (\overline{\mathbf{b}\widehat{F}_1})_{\bar{z}} \right)} \\ &= \left( (\overline{\mathbf{b}\widehat{F}_1})_{\bar{z}} + (\overline{\mathbf{a}\widehat{F}_2})_{\bar{z}} \right) - \overline{\left( (\overline{\mathbf{b}\widehat{F}_1})_{\bar{z}} + (\overline{\mathbf{a}\widehat{F}_2})_{\bar{z}} \right)} \\ &= 2i\Im\{(\overline{\mathbf{b}\widehat{F}_1})_{\bar{z}} + (\overline{\mathbf{a}\widehat{F}_2})_{\bar{z}}\}. \end{aligned}$$

□

Podemos agora enunciar o principal resultado deste capítulo, que terá um papel fundamental no estudo das superfícies tipo espaço de  $\mathbb{L}^4$  com aplicação de Gauss degenerada.

**Teorema 4.12.** *Seja  $S$  uma superfície tipo espaço orientada imersa em  $\mathbb{L}^4$  por  $X : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$ , com aplicação de Gauss generalizada  $G$  dada localmente por (4.44) via o par de funções  $\mathbf{a}(z)$  e  $\mathbf{b}(z)$ , onde  $z$  é uma coordenada isotérmica sobre  $S$ . Então,*

$$\overline{F_1}F_2 = F_1\overline{F_2}, \quad (4.50)$$

$$\Im\{T_1 + T_2\} = 0 \quad \text{sempre que } \mathbf{a}_{\bar{z}} \neq 0, \mathbf{b}_{\bar{z}} \neq 0. \quad (4.51)$$

**Demonstração:** Vamos aplicar o Teorema 4.2 para mostrar que (4.13) e (4.14) implicam respectivamente (4.50) e (4.51). O primeiro passo é expressar as funções  $\eta(z)$  e  $\mathbb{V}(z)$ , definidas em (4.9) e (4.10), em termos das funções  $\mathbf{a}(z)$ ,  $\mathbf{b}(z)$  e  $F_k(z)$ . De (4.44) temos

$$\Phi_{\bar{z}}(z) = \mathbf{a}_{\bar{z}}(\mathbf{b}, -i\mathbf{b}, 1, 1) + \mathbf{b}_{\bar{z}}(\mathbf{a}, -i\mathbf{a}, -1, 1), \quad (4.52)$$

$$\ll \Phi, \Phi \gg = 2|1 - \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}|^2 > 0, \quad \text{pois } \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}} \neq 1. \quad (4.53)$$

Segue-se daí, por um cálculo direto, que

$$\ll \Phi_{\bar{z}}, \Phi \gg = 2\bar{\mathbf{b}}\mathbf{a}_{\bar{z}}(\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b} - 1) + 2\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}_{\bar{z}}(\bar{\mathbf{b}} - 1).$$

Assim,

$$\eta(z) = -\frac{\bar{\mathbf{b}}\mathbf{a}_{\bar{z}}}{1 - \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}} - \frac{\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}_{\bar{z}}}{1 - \bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}} \Leftrightarrow \eta(z) = -(\bar{\mathbf{b}}F_1 + \bar{\mathbf{a}}F_2). \quad (4.54)$$

Agora substituindo (4.44), (4.52) e (4.54) em  $\mathbb{V}(z) = \Phi_{\bar{z}} - \eta\Phi$ , temos

$$\begin{aligned} \mathbb{V}(z) &= \frac{\mathbf{a}_{\bar{z}}}{1 - \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}} (2\Re e(\mathbf{b}), 2\Im m(\mathbf{b}), 1 - |\mathbf{b}|^2, 1 + |\mathbf{b}|^2) + \\ &+ \frac{\mathbf{b}_{\bar{z}}}{1 - \bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}} (2\Re e(\mathbf{a}), 2\Im m(\mathbf{a}), |\mathbf{a}|^2 - 1, |\mathbf{a}|^2 + 1) \\ &= F_1\mathcal{B} + F_2\mathcal{A}, \end{aligned} \quad (4.55)$$

onde

$$\mathcal{A} : = (2\Re e(\mathbf{a}), 2\Im m(\mathbf{a}), |\mathbf{a}|^2 - 1, |\mathbf{a}|^2 + 1), \quad (4.56)$$

$$\mathcal{B} : = (2\Re e(\mathbf{b}), 2\Im m(\mathbf{b}), 1 - |\mathbf{b}|^2, 1 + |\mathbf{b}|^2). \quad (4.57)$$

Note que  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  são vetores reais não nulos, tipo luz e futuro dirigidos de  $\mathbb{L}^4$ , tal que  $\ll \mathcal{A}, \mathcal{B} \gg = -2|1 - \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}|^2 < 0$ . Portanto, são vetores linearmente independentes do cone de luz de  $\mathbb{L}^4$ . De (4.55), concluímos que  $\mathbb{V}(z) = 0$  se, e somente se  $F_1(z) = F_2(z) = 0$  que é equivalente a  $\mathbf{a}_{\bar{z}}(z) = \mathbf{b}_{\bar{z}}(z) = 0$ . Em particular quando  $\mathbb{V}(z) = 0$ , (4.50) é trivialmente satisfeita.

Sejam  $\mathbb{V} = (\mathbb{V}^1, \mathbb{V}^2, \mathbb{V}^3, \mathbb{V}^4)$ ,  $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2, \mathcal{A}^3, \mathcal{A}^4)$  e  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2, \mathcal{B}^3, \mathcal{B}^4)$ . Observe que a condição (4.13) do Teorema 4.2 nos diz que  $\mathbb{V}$  é igual a um vetor real  $R(z)$  de  $\mathbb{L}^4$

multiplicado por uma função complexa não nula sempre que  $\mathbb{V}(z) \neq 0$ . Isto equivale a dizer que  $\mathbb{V}^t \overline{\mathbb{V}} = R^t R$  é uma matriz hermitiana real (simétrica). Portanto, suas entradas  $\mathbb{V}^j \overline{\mathbb{V}^k}$ ,  $1 \leq j, k \leq 4$ , precisam ser reais. Por outro lado, de (4.55) segue-se que

$$\begin{aligned} \mathbb{V}^j \overline{\mathbb{V}^k} &= (F_1 \mathcal{B}^j + F_2 \mathcal{A}^j) \overline{(F_1 \mathcal{B}^k + F_2 \mathcal{A}^k)} = \\ &= (|F_1|^2 \mathcal{B}^j \mathcal{B}^k + |F_2|^2 \mathcal{A}^j \mathcal{A}^k) + (\overline{F_1} F_2 \mathcal{A}^j \mathcal{B}^k + F_1 \overline{F_2} \mathcal{A}^k \mathcal{B}^j). \end{aligned}$$

Assim,

$$\mathbb{V}^j \overline{\mathbb{V}^k} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\overline{F_1} F_2 \mathcal{A}^j \mathcal{B}^k + F_1 \overline{F_2} \mathcal{A}^k \mathcal{B}^j) \in \mathbb{R}$$

pois  $(|F_1|^2 \mathcal{B}^j \mathcal{B}^k + |F_2|^2 \mathcal{A}^j \mathcal{A}^k)$  é um número real. Ou seja,

$$\mathbb{V}^j \overline{\mathbb{V}^k} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (\overline{F_1} F_2 - F_1 \overline{F_2}) (\mathcal{A}^j \mathcal{B}^k - \mathcal{A}^k \mathcal{B}^j) = 0.$$

Isto implica que

$$\overline{F_1} F_2 - F_1 \overline{F_2} = 0 \text{ ou } \mathcal{A}^j \mathcal{B}^k - \mathcal{A}^k \mathcal{B}^j = 0, \quad \forall 1 \leq j < k \leq 4. \quad (4.58)$$

Mostraremos que  $(\mathcal{A}^j \mathcal{B}^k - \mathcal{A}^k \mathcal{B}^j)$  não pode ser igual a zero em nenhum ponto  $z_0 \in U$ , onde  $(U, z)$  é uma vizinhança coordenada conforme de  $S$ . Com efeito, como  $S$  é uma superfície tipo espaço, a métrica induzida pela imersão  $X : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$ ,  $ds^2 = 4|\mu|^2 |1 - \overline{\mathbf{a}\mathbf{b}}|^2 |dz|^2$ , é Riemanniana, logo  $\overline{\mathbf{a}\mathbf{b}} \neq 1$  sobre  $U$ . Seja  $z_0 \in U$  algum ponto onde  $\mathbb{V}(z_0) \neq 0$  tal que

$$\mathcal{A}^j(z_0) \mathcal{B}^k(z_0) - \mathcal{A}^k(z_0) \mathcal{B}^j(z_0) = 0, \quad \forall 1 \leq j < k \leq 4.$$

Segue-se de (4.56) e (4.57) que as seis equações acima são equivalentes a:

- $\mathcal{A}^1 \mathcal{B}^2 - \mathcal{A}^2 \mathcal{B}^1 = 0 \Leftrightarrow \Re e(\mathbf{a}) \Im m(\mathbf{b}) = \Re e(\mathbf{b}) \Im m(\mathbf{a});$
- $\mathcal{A}^1 \mathcal{B}^3 - \mathcal{A}^3 \mathcal{B}^1 = 0 \Leftrightarrow \Re e(\mathbf{a})(1 - |\mathbf{b}|^2) = \Re e(\mathbf{b})(|\mathbf{a}|^2 - 1);$
- $\mathcal{A}^1 \mathcal{B}^4 - \mathcal{A}^4 \mathcal{B}^1 = 0 \Leftrightarrow \Re e(\mathbf{a})(1 + |\mathbf{b}|^2) = \Re e(\mathbf{b})(1 + |\mathbf{a}|^2);$
- $\mathcal{A}^2 \mathcal{B}^3 - \mathcal{A}^3 \mathcal{B}^2 = 0 \Leftrightarrow \Im m(\mathbf{a})(1 - |\mathbf{b}|^2) = \Im m(\mathbf{b})(|\mathbf{a}|^2 - 1);$

- $\mathcal{A}^2\mathcal{B}^4 - \mathcal{A}^4\mathcal{B}^2 = 0 \Leftrightarrow \Im m(\mathbf{a})(1 + |\mathbf{b}|^2) = \Im m(\mathbf{b})(|\mathbf{a}|^2 + 1);$
- $\mathcal{A}^3\mathcal{B}^4 - \mathcal{A}^4\mathcal{B}^3 = 0 \Leftrightarrow (|\mathbf{a}|^2 - 1)(1 + |\mathbf{b}|^2) = (1 - |\mathbf{b}|^2)(|\mathbf{a}|^2 + 1).$

Estas equações implicam respectivamente que

1.  $\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}};$
2.  $\Re e(\mathbf{a} + \mathbf{b})(1 - \bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}) = 0;$
3.  $\Re e(\mathbf{a} - \mathbf{b})(1 - \bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}) = 0;$
4.  $\Im m(\mathbf{a} + \mathbf{b})(1 - \bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}) = 0;$
5.  $\Im m(\mathbf{a} - \mathbf{b})(1 - \bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}) = 0;$
6.  $|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 = 1.$

Usando as equações (1) e (6) acima temos

$$|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 = 1 \Leftrightarrow (\bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}})(\bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}) = 1 \Rightarrow (\bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}})^2 = 1 \Rightarrow \mathbf{a}(z_0)\bar{\mathbf{b}}(z_0) = \pm 1. \quad (4.59)$$

Agora usando as equações (2), (3), (4) e (5) podemos facilmente concluir que  $\mathbf{a}(z_0) = \mathbf{b}(z_0) = 0$ , o que contradiz (4.59). Conclusão,  $\mathbb{V}^t\bar{\mathbb{V}}$  é uma matriz hermitiana real se, e somente se  $\bar{F}_1F_2 = F_1\bar{F}_2$  e isto prova (4.50).

Para provar (4.51), precisamos primeiro estabelecer uma relação entre o argumento das funções coordenadas de  $\mathbb{V}$  e o argumento das funções  $F_1$  e  $F_2$ . De (4.50) e (4.55) segue-se que

$$\begin{aligned} \bar{F}_1\mathbb{V}(z) &= \bar{F}_1(F_1\mathcal{B} + F_2\mathcal{A}) = F_1\bar{F}_1\mathcal{B} + \bar{F}_1F_2\mathcal{A} \\ &= F_1\bar{F}_1\mathcal{B} + F_1\bar{F}_2\mathcal{A} = F_1(\bar{F}_1\mathcal{B} + \bar{F}_2\mathcal{A}) = F_1\bar{\mathbb{V}}(z). \end{aligned}$$

De modo análogo, prova-se que  $\bar{F}_2\mathbb{V}(z) = F_2\bar{\mathbb{V}}(z)$ . Como estamos assumindo que  $\mathbf{a}_{\bar{z}} \neq 0$  e  $\mathbf{b}_{\bar{z}} \neq 0$ , segue-se que  $F_1 \neq 0$  e  $F_2 \neq 0$ . Por conseguinte  $\mathbb{V}(z) \neq 0$ , logo temos alguma componente, digamos  $\mathbb{V}^j$ , de  $\mathbb{V}$ , diferente de zero que satisfaz

$$\bar{F}_1\mathbb{V}^j = F_1\bar{\mathbb{V}}^j, \quad \bar{F}_2\mathbb{V}^j = F_2\bar{\mathbb{V}}^j. \quad (4.60)$$

Assim, (4.60) implica que

$$\arg(\overline{F_1}\mathbb{V}^j) = 0 \pmod{\pi}, \quad \arg(\overline{F_2}\mathbb{V}^j) = 0 \pmod{\pi},$$

que é equivalente a

$$-\arg(F_k) + \arg(\mathbb{V}^j) = 0 \pmod{\pi}, \quad k = 1, 2.$$

Agora de (4.13),  $\mathbb{V}(z) = e^{i\alpha(z)}R(z)$  e daí  $\arg(\mathbb{V}^j) = \alpha(z) \pmod{2\pi}$ . Portanto,

$$\alpha(z) = \arg(F_k) \pmod{\pi}, \quad k = 1, 2.$$

Logo

$$\alpha(z) = \frac{1}{2}(\arg(F_1) + \arg(F_2)) \Leftrightarrow \alpha(z) = \frac{1}{2}(\arg(F_1F_2)) \pmod{\frac{\pi}{2}} \quad (4.61)$$

De (4.45) segue-se que

$$\arg(F_1F_2) = \arg\left(\frac{\mathbf{a}_{\bar{z}}}{1-\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}} \cdot \frac{\mathbf{b}_{\bar{z}}}{1-\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}}\right) = \mathfrak{I}m\left\{\log\left(\frac{\mathbf{a}_{\bar{z}}\mathbf{b}_{\bar{z}}}{|1-\mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}|^2}\right)\right\}.$$

Portanto,

$$\alpha(z) = \frac{1}{2}\mathfrak{I}m\left(\log \mathbf{a}_{\bar{z}} + \log \mathbf{b}_{\bar{z}}\right) + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \alpha_z &= \frac{1}{2}\mathfrak{I}m\left(\frac{\mathbf{a}_{\bar{z}z}}{\mathbf{a}_{\bar{z}}} + \frac{\mathbf{b}_{\bar{z}z}}{\mathbf{b}_{\bar{z}}}\right), \\ \alpha_{z\bar{z}} &= \frac{1}{2}\mathfrak{I}m\left\{\left(\frac{\mathbf{a}_{\bar{z}z}}{\mathbf{a}_{\bar{z}}}\right)_{\bar{z}} + \left(\frac{\mathbf{b}_{\bar{z}z}}{\mathbf{b}_{\bar{z}}}\right)_{\bar{z}}\right\}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

De (4.62) temos

$$\begin{aligned} \alpha_{z\bar{z}} &= \frac{1}{2}\mathfrak{I}m\left\{\left(\frac{\mathbf{a}_{\bar{z}z}}{\mathbf{a}_{\bar{z}}} + 2\bar{\mathbf{b}}\widehat{F_1}\right)_{\bar{z}} + \left(\frac{\mathbf{b}_{\bar{z}z}}{\mathbf{b}_{\bar{z}}} + 2\bar{\mathbf{a}}\widehat{F_2}\right)_{\bar{z}} - 2\left((\bar{\mathbf{b}}\widehat{F_1})_{\bar{z}} + (\bar{\mathbf{a}}\widehat{F_2})_{\bar{z}}\right)\right\}, \\ \alpha_{z\bar{z}} &= \frac{1}{2}\mathfrak{I}m\left\{T_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + T_2(\mathbf{a}, \mathbf{b})\right\} - \mathfrak{I}m\left((\bar{\mathbf{b}}\widehat{F_1})_{\bar{z}} + (\bar{\mathbf{a}}\widehat{F_2})_{\bar{z}}\right). \end{aligned} \quad (4.63)$$

Por outro lado, vimos em (4.14) que  $\alpha_{z\bar{z}} = \mathfrak{I}m(\eta_z)$ . Logo de (4.54), segue que

$$\alpha_{z\bar{z}} = -\mathfrak{I}m\left((\bar{\mathbf{b}}F_1)_z + (\bar{\mathbf{a}}F_2)_z\right). \quad (4.64)$$

Finalmente comparando (4.63) com (4.64) e usando o Lema 4.11, provamos (4.51).

Concluimos que para superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$  as condições necessárias de integrabilidade: (4.13) e (4.14), reduz-se respectivamente a (4.50) e (4.51). Finalmente observando que (4.50) e (4.51) são independentes da escolha de coordenadas conformes de  $M^2$ , provamos o teorema.  $\square$

**Observação 4.4.** Podemos dar um exemplo de uma aplicação  $[\Phi] : U \rightarrow Q_1^2$  que não pode ser localmente a aplicação de Gauss de nenhuma superfície tipo espaço imersa conformemente em  $\mathbb{L}^4$ . Com efeito, pondo  $\mathbf{a}(z) = z + \bar{z}$  e  $\mathbf{b}(z) = -i(z - \bar{z})$  em (4.44), temos que  $\mathbf{a}_{\bar{z}} = 1$  e  $\mathbf{b}_{\bar{z}} = i$ . Logo,

$$\overline{F_1}F_2 = \frac{i}{(1 - 4\Re(z)\Im(z))^2}, \quad F_1\overline{F_2} = \frac{-i}{(1 - 4\Re(z)\Im(z))^2}.$$

Isto nos diz que a condição (4.50) é negada.

Vamos agora expressar uma relação entre o vetor curvatura média de uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$  e as funções  $\mathbf{a}(z)$  e  $\mathbf{b}(z)$  definidas a partir da aplicação de Gauss dessa superfície.

Seja  $S$  uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$  dada localmente pela imersão  $X : U \subset M^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$  onde  $(U, z = u + iv)$  é uma vizinhança conforme de  $M^2$ . Então sabemos que a métrica induzida por  $X$  em  $S$  é da forma  $ds^2 = \lambda^2|dz|^2$ , onde  $\lambda^2 = 2 \ll X_z, X_z \gg$ . Se  $\Phi : U \rightarrow \mathbb{C}^4$  representa localmente a aplicação de Gauss de  $S$ , isto é,  $X_z = \mu\Phi$ , então

$$\lambda^2 = 2|\mu|^2 \ll \Phi, \Phi \gg. \quad (4.65)$$

Segue-se de (4.44) que  $\ll \Phi, \Phi \gg = 2|1 - \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}|^2$ , portanto

$$\lambda^2 = 4|\mu|^2|1 - \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}|^2 > 0.$$

Vimos em (4.11) que  $\mathbb{V} = \bar{\mu} \ll \Phi, \Phi \gg H$  donde obtemos

$$\langle H, H \rangle = \frac{\ll \mathbb{V}, \mathbb{V} \gg}{|\mu|^2 \ll \Phi, \Phi \gg^2}. \quad (4.66)$$

Por outro lado, de (4.55) segue-se que

$$\ll \mathbb{V}, \mathbb{V} \gg = (\overline{F_1}F_2 + F_1\overline{F_2}) \ll \mathbf{A}, \mathbf{B} \gg.$$

Portanto,

$$\langle\langle \mathbb{V}, \mathbb{V} \rangle\rangle = -(\overline{F}_1 F_2 + F_1 \overline{F}_2) \langle\langle \Phi, \Phi \rangle\rangle. \quad (4.67)$$

Pelo Teorema 4.12 temos que

$$\langle\langle \mathbb{V}, \mathbb{V} \rangle\rangle = -2\overline{F}_1 F_2 \langle\langle \Phi, \Phi \rangle\rangle. \quad (4.68)$$

Substituindo (4.65) e (4.68) em (4.66), segue-se que

$$\langle H, H \rangle = \frac{-4\overline{F}_1 F_2}{\lambda^2}. \quad (4.69)$$

Observe que tudo o que fizemos até aqui diz respeito somente a condições necessárias sobre a aplicação de Gauss de uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$ . Paralelamente à teoria da aplicação de Gauss para superfícies em  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^4$ , estudada profundamente por [23] e [24], podemos fazer naturalmente as seguintes perguntas:

- 1) As duas condições necessárias (4.50) e (4.51) para que uma aplicação  $\Phi$  seja a aplicação de Gauss de uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$  são também suficientes?
- 2) Seja  $S$  uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$  e  $G$  sua aplicação de Gauss dada localmente por (4.44), em termos de coordenadas conformes  $z$ , via o par de funções complexas  $(\mathbf{a}(z), \mathbf{b}(z))$ . Quais são as condições sobre as funções  $\mathbf{a}(z)$  e  $\mathbf{b}(z)$ , tal que  $S$  esteja contida em algum  $\mathbb{H}^3(-r^2)$  ou  $\mathbb{S}_1^3(r^2)$ ,  $r \neq 0$ ?
- 3) Dado uma função complexa  $\mathbf{a}(z)$ , existe uma segunda função  $\mathbf{b}(z)$  tal que o par  $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  satisfaça (4.50) e (4.51), de modo que corresponda a aplicação de Gauss de uma superfície tipo espaço imersa conformemente em  $\mathbb{L}^4$ ?

## 4.4 Fórmula de representação para superfícies tipo espaço em $\mathbb{L}^4$

Nesta seção primeiro provaremos que as componentes  $\mathbf{a}(z)$  e  $\mathbf{b}(z)$  da aplicação de Gauss de uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$  e o seu vetor curvatura média  $H$ , precisam

satisfazer uma equação de derivadas parciais de segunda ordem. Também daremos explicitamente o fator de integração  $\mu$ , dado em (4.5), em função de  $\mathbf{a}(z)$ ,  $\mathbf{b}(z)$  e  $H$ , o que permitirá dar uma fórmula de representação explícita para superfícies tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$  em termos da aplicação de Gauss e do vetor curvatura média.

Na discussão feita após a Proposição 4.7, vimos que

$$h \left( f_{z\bar{z}} + \frac{2\bar{f}f_z f_{\bar{z}}}{1 - |f|^2} \right) = h_z f_{\bar{z}} \Leftrightarrow S(f) = (\log h)_z \quad (4.70)$$

sempre que  $f_{\bar{z}} \neq 0$ . Como  $h$  é real, temos que  $(\log h)_{z\bar{z}}$  é um número real. Assim,

$$\Im m\{(S(f))_{\bar{z}}\} = 0 \Leftrightarrow \Im m\{T(f)\} = 0.$$

Nosso objetivo agora é generalizar a equação (4.70) para superfícies tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$ , de modo que a condição necessária  $\Im m\{T_1 + T_2\} = 0$ , dada em (4.51), seja uma consequência dessa equação generalizada. Mais precisamente, temos o seguinte Teorema

**Teorema 4.13.** *Seja  $S$  uma superfície tipo espaço imersa em  $\mathbb{L}^4$  por  $X : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$ , com aplicação de Gauss generalizada  $G$  dada localmente por (4.44) via o par da funções  $\mathbf{a}(z)$  e  $\mathbf{b}(z)$ , onde  $z$  é uma coordenada isotérmica sobre  $S$ . Então o vetor curvatura média  $H$  e as funções  $\mathbf{a}(z)$  e  $\mathbf{b}(z)$  satisfazem a EDP de segunda ordem*

$$\langle H, H \rangle \left( \mathbf{b}_{\bar{z}} \left( \mathbf{a}_{z\bar{z}} + \frac{2\bar{\mathbf{b}}\mathbf{a}_{\bar{z}}\mathbf{a}_z}{1 - \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}}} \right) + \mathbf{a}_{\bar{z}} \left( \mathbf{b}_{z\bar{z}} + \frac{2\bar{\mathbf{a}}\mathbf{b}_{\bar{z}}\mathbf{b}_z}{1 - \bar{\mathbf{a}}\bar{\mathbf{b}}} \right) \right) = \mathbf{a}_{\bar{z}}\mathbf{b}_{\bar{z}}\langle H, H \rangle_z \quad (4.71)$$

**Demonstração:** A aplicação de Gauss de  $S$  é definida localmente por  $G(z) = [X_z]$  e representada por

$$\Phi(z) = (1 + \mathbf{a}(z)\mathbf{b}(z), i(1 - \mathbf{a}(z)\mathbf{b}(z)), \mathbf{a}(z) - \mathbf{b}(z), \mathbf{a}(z) + \mathbf{b}(z)), \quad (4.72)$$

isto é,  $X_z = \mu\Phi(z)$  para alguma função  $\mu : M^2 \rightarrow \mathbb{C}$ . De (4.9) e (4.10) vimos que

$$\bar{\mu} \ll \Phi, \Phi \gg H = \Phi_{\bar{z}} - \eta\Phi, \quad \eta := \frac{\ll \Phi_{\bar{z}}, \Phi \gg}{\ll \Phi, \Phi \gg}.$$

Podemos facilmente ver que

$$\ll \bar{\mu} \ll \Phi, \Phi \gg H, \overline{(\bar{\mu} \ll \Phi, \Phi \gg H)} \gg =$$

$$= \ll \Phi_{\bar{z}}, \overline{\Phi_{\bar{z}}} \gg - 2\eta \ll \Phi_{\bar{z}}, \overline{\Phi} \gg + \eta^2 \ll \Phi, \overline{\Phi} \gg .$$

Como  $[\Phi] \in Q_1^2$ , isto é,  $\ll \Phi, \overline{\Phi} \gg = 0$ , segue-se que  $\ll \Phi_{\bar{z}}, \overline{\Phi} \gg = 0$ . Assim, a equação acima reduz-se a

$$\ll \Phi, \Phi \gg^2 \langle H, H \rangle \bar{\mu}^2 = \ll \Phi_{\bar{z}}, \overline{\Phi_{\bar{z}}} \gg \quad (4.73)$$

Vamos agora calcular explicitamente  $\ll \Phi_{\bar{z}}, \overline{\Phi_{\bar{z}}} \gg$  em função de  $\mathbf{a}(z)$  e  $\mathbf{b}(z)$ . Derivando (4.72) em relação a  $\bar{z}$ , obtém-se que

$$\Phi_{\bar{z}} = \mathbf{a}_{\bar{z}}(\mathbf{b}, -i\mathbf{b}, 1, 1) + \mathbf{b}_{\bar{z}}(\mathbf{a}, -i\mathbf{a}, -1, 1) \quad (4.74)$$

e daí, segue-se que

$$\ll \Phi_{\bar{z}}, \overline{\Phi_{\bar{z}}} \gg = -4\mathbf{a}_{\bar{z}}\mathbf{b}_{\bar{z}}. \quad (4.75)$$

Portanto,

$$\ll \Phi, \Phi \gg^2 \langle H, H \rangle \bar{\mu}^2 = -4\mathbf{a}_{\bar{z}}\mathbf{b}_{\bar{z}}. \quad (4.76)$$

Agora derivando  $\bar{\mu} \ll \Phi, \Phi \gg H = \Phi_{\bar{z}} - \eta\Phi$  em relação a  $z$ , temos

$$\ll \Phi, \Phi \gg_z (\bar{\mu}H) + \ll \Phi, \Phi \gg (\bar{\mu}H)_z = \Phi_{\bar{z}z} - \eta_z\Phi - \eta\Phi_z.$$

Mas,

$$\begin{aligned} & \ll \Phi, \Phi \gg_z (\bar{\mu}H) + \ll \Phi, \Phi \gg (\bar{\mu}H)_z = \\ & = (\ll \Phi_z, \Phi \gg + \ll \Phi, \Phi_{\bar{z}} \gg) \bar{\mu}H + \ll \Phi, \Phi \gg ((\bar{\mu})_z H + \bar{\mu}H_z). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \ll \Phi, \Phi \gg \bar{\mu}H_z &= \Phi_{\bar{z}z} - \eta_z\Phi - \eta\Phi_z - (\ll \Phi_z, \Phi \gg + \overline{\ll \Phi_{\bar{z}}, \Phi \gg}) \bar{\mu}H - \\ & - (\ll \Phi, \Phi \gg H) \bar{\mu}_z. \end{aligned}$$

Além disso, note que

$$\bar{\mu}H = \frac{\Phi_{\bar{z}} - \eta\Phi}{\ll \Phi, \Phi \gg}, \quad \ll \Phi, \Phi \gg H = \frac{\Phi_{\bar{z}} - \eta\Phi}{\bar{\mu}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle\langle \Phi, \Phi \rangle\rangle \bar{\mu} H_z &= \Phi_{\bar{z}z} - \eta_z \Phi - \eta \Phi_z - \left( \langle\langle \Phi_z, \Phi \rangle\rangle + \overline{\langle\langle \Phi_{\bar{z}}, \Phi \rangle\rangle} \right) \frac{\Phi_{\bar{z}} - \eta \Phi}{\langle\langle \Phi, \Phi \rangle\rangle} - \\
&- \overline{\left( \frac{\mu_{\bar{z}}}{\mu} \right)} (\Phi_{\bar{z}} - \eta \Phi) = \\
&= \Phi_{\bar{z}z} - \eta \Phi_z - \left( \frac{\langle\langle \Phi_z, \Phi \rangle\rangle}{\langle\langle \Phi, \Phi \rangle\rangle} + \frac{\overline{\langle\langle \Phi_{\bar{z}}, \Phi \rangle\rangle}}{\langle\langle \Phi, \Phi \rangle\rangle} + \overline{\left( \frac{\mu_{\bar{z}}}{\mu} \right)} \right) \Phi_{\bar{z}} + \\
&+ \left( \left( \frac{\langle\langle \Phi_z, \Phi \rangle\rangle}{\langle\langle \Phi, \Phi \rangle\rangle} + \frac{\overline{\langle\langle \Phi_{\bar{z}}, \Phi \rangle\rangle}}{\langle\langle \Phi, \Phi \rangle\rangle} + \overline{\left( \frac{\mu_{\bar{z}}}{\mu} \right)} \right) \eta - \eta_z \right) \Phi.
\end{aligned}$$

De (4.12) sabemos que

$$\frac{\mu_{\bar{z}}}{\mu} = -\eta.$$

Por outro lado,  $\eta = \frac{\langle\langle \Phi_{\bar{z}}, \Phi \rangle\rangle}{\langle\langle \Phi, \Phi \rangle\rangle}$ , de modo que

$$\langle\langle \Phi, \Phi \rangle\rangle \bar{\mu} H_z = \Phi_{\bar{z}z} - \eta \Phi_z - \frac{\langle\langle \Phi_z, \Phi \rangle\rangle}{\langle\langle \Phi, \Phi \rangle\rangle} \Phi_{\bar{z}} + \left( \frac{\langle\langle \Phi_z, \Phi \rangle\rangle}{\langle\langle \Phi, \Phi \rangle\rangle} \eta - \eta_z \right) \Phi. \quad (4.77)$$

Calculando o produto simétrico entre (4.77) e  $\bar{\mu} \langle\langle \Phi, \Phi \rangle\rangle H = \Phi_{\bar{z}} - \eta \Phi$ , afim de obter o produto escalar entre  $H$  e  $H_z$ , temos que

$$\begin{aligned}
\langle\langle \Phi, \Phi \rangle\rangle^2 \langle H, H_z \rangle \bar{\mu}^2 &= \langle\langle \Phi_{\bar{z}}, \overline{\Phi_{\bar{z}z}} \rangle\rangle - \eta (\langle\langle \Phi_{\bar{z}}, \overline{\Phi_z} \rangle\rangle + \langle\langle \Phi, \overline{\Phi_{\bar{z}z}} \rangle\rangle) - \\
&- \frac{\langle\langle \Phi_z, \overline{\Phi} \rangle\rangle}{\langle\langle \Phi, \overline{\Phi} \rangle\rangle} \langle\langle \Phi_{\bar{z}}, \overline{\Phi_z} \rangle\rangle
\end{aligned}$$

pois  $[\Phi] \in Q_1^2$ . Usando que  $0 = \langle\langle \Phi, \overline{\Phi_z} \rangle\rangle_{\bar{z}} = \langle\langle \Phi_{\bar{z}}, \overline{\Phi_z} \rangle\rangle + \langle\langle \Phi, \overline{\Phi_{\bar{z}z}} \rangle\rangle$  na equação acima, temos que

$$\langle\langle \Phi, \Phi \rangle\rangle^2 \langle H, H_z \rangle \bar{\mu}^2 = \frac{1}{2} \langle\langle \Phi_{\bar{z}}, \overline{\Phi_z} \rangle\rangle_z - \frac{\langle\langle \Phi_z, \overline{\Phi} \rangle\rangle}{\langle\langle \Phi, \overline{\Phi} \rangle\rangle} \langle\langle \Phi_{\bar{z}}, \overline{\Phi_z} \rangle\rangle \quad (4.78)$$

De (4.74) e  $\langle\langle \Phi, \Phi \rangle\rangle = 2(1 - \mathbf{a}\bar{\mathbf{b}})(1 - \bar{\mathbf{a}}\mathbf{b})$ , podemos calcular

$$\frac{\langle\langle \Phi_z, \overline{\Phi} \rangle\rangle}{\langle\langle \Phi, \overline{\Phi} \rangle\rangle} = - \left( \bar{\mathbf{b}} \widehat{F}_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \bar{\mathbf{a}} \widehat{F}_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \right), \quad (4.79)$$

onde  $\widehat{F}_i$  é dada em 4.45. Finalmente, substituindo (4.75) e (4.79) em (4.78), segue-se que

$$\begin{aligned} \ll \Phi, \Phi \gg^2 \bar{\mu}^2 \langle H, H_z \rangle &= -2(\mathbf{a}_{z\bar{z}} \mathbf{b}_{\bar{z}} + \mathbf{a}_{\bar{z}} \mathbf{b}_{zz}) + 2(\bar{\mathbf{b}} \widehat{F}_1 + \bar{\mathbf{a}} \widehat{F}_2)(-2\mathbf{a}_{\bar{z}} \mathbf{b}_{\bar{z}}) = \\ &= -2 \left( \mathbf{b}_{\bar{z}} \left( \mathbf{a}_{z\bar{z}} + \frac{2\bar{\mathbf{b}} \mathbf{a}_{\bar{z}} \mathbf{a}_z}{1 - \bar{\mathbf{a}} \bar{\mathbf{b}}} \right) + \mathbf{a}_{\bar{z}} \left( \mathbf{b}_{z\bar{z}} + \frac{2\bar{\mathbf{a}} \mathbf{b}_{\bar{z}} \mathbf{b}_z}{1 - \bar{\mathbf{a}} \bar{\mathbf{b}}} \right) \right). \end{aligned}$$

Multiplicando ambos os membros desta equação por  $\langle H, H \rangle$  e usando o fato que  $\ll \Phi, \Phi \gg^2 \bar{\mu}^2 \langle H, H \rangle = -4\mathbf{a}_{\bar{z}} \mathbf{b}_{\bar{z}}$  por (4.76). Concluimos que

$$\left( \mathbf{b}_{\bar{z}} \left( \mathbf{a}_{z\bar{z}} + \frac{2\bar{\mathbf{b}} \mathbf{a}_{\bar{z}} \mathbf{a}_z}{1 - \bar{\mathbf{a}} \bar{\mathbf{b}}} \right) + \mathbf{a}_{\bar{z}} \left( \mathbf{b}_{z\bar{z}} + \frac{2\bar{\mathbf{a}} \mathbf{b}_{\bar{z}} \mathbf{b}_z}{1 - \bar{\mathbf{a}} \bar{\mathbf{b}}} \right) \right) \langle H, H \rangle = 2\mathbf{a}_{\bar{z}} \mathbf{b}_{\bar{z}} \langle H, H_z \rangle.$$

Isto encerrar a demonstração do teorema.  $\square$

Qualquer superfície  $\check{S}$  tipo espaço em  $\mathbb{L}^3 \equiv \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{L}^4 : x^3 = 0\}$  pode ser considerada de modo natural uma superfície em  $\mathbb{L}^4$ . Para este caso nós podemos assumir que  $\mathbf{b}(z) = \mathbf{a}(z)$  em (4.44). De modo análogo, qualquer superfície  $\widehat{S}$  em  $\mathbb{R}^3 \equiv \{(x^1, x^2, x^3, x^4) \in \mathbb{L}^4 : x^4 = 0\}$  pode ser uma superfície em  $\mathbb{L}^4$ . Para este caso nós podemos assumir que  $\mathbf{b}(z) = -\mathbf{a}(z)$  em (4.44). Assim, podemos usar o Teorema 4.13, mais especificamente a fórmula (4.71), para recuperar, de uma nova maneira, as condições de integrabilidade para superfícies tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$  e superfícies em  $\mathbb{R}^3$  com aplicação de Gauss e curvatura média não nula prescritas.

Os vetores reais  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  dados em (4.56) e (4.57), são tipo luz futuro dirigido tal que  $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle = -2|1 - \bar{\mathbf{a}} \bar{\mathbf{b}}|^2$ , portanto são linearmente independentes sempre que  $\mathbf{a}(z)$  e  $\mathbf{b}(z)$  descrevem a aplicação de Gauss  $\Phi$  de uma superfície  $S$  tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$ . É fácil ver que  $\langle \Phi, \mathcal{A} \rangle = 0$  e  $\langle \Phi, \mathcal{B} \rangle = 0$ . Assim,  $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$  é uma base para  $(T_p S)^\perp$ . Além disso, como  $H \in (T_p S)^\perp$  podemos escrever  $H$  na forma

$$H = \frac{\langle H, \mathcal{B} \rangle \mathcal{A} + \langle H, \mathcal{A} \rangle \mathcal{B}}{\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle},$$

donde segue-se que

$$\langle H, H \rangle = \frac{2\langle H, \mathcal{A} \rangle \langle H, \mathcal{B} \rangle}{\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle}. \quad (4.80)$$

• Se  $\mathbf{b}(z) = \mathbf{a}(z)$ , sabemos que  $\Phi(z) = (1 + \mathbf{a}^2, i(1 - \mathbf{a}^2), 0, 2\mathbf{a})$  representa localmente a aplicação de Gauss de superfícies tipo espaço  $\check{S}$  em  $\mathbb{L}^3 \subset \mathbb{L}^4$ . Neste caso, o vetor curvatura média  $H = \check{H}$  é tipo tempo e paralelo à aplicação de Gauss clássica  $\check{N} : M^2 \rightarrow H_0^2(-1)$  de  $\check{S}$ . De (4.80) temos que

$$\langle \check{H}, \check{H} \rangle = -\frac{\langle \check{H}, \check{A} \rangle \langle \check{H}, \check{B} \rangle}{(1 - |\mathbf{a}|^2)^2},$$

com  $\check{A} = \check{B} = (2\Re(\mathbf{a}), 2\Im(\mathbf{a}), 0, |\mathbf{a}|^2 + 1)$ . Logo de (4.22), segue-se que

$$\check{A} = (1 - |\mathbf{a}|^2)\check{N}, \quad \check{B} = (1 - |\mathbf{a}|^2)\check{N}.$$

Portanto,

$$\langle \check{H}, \check{H} \rangle = -\langle \check{H}, \check{N} \rangle^2 = -h^2,$$

onde  $h$  é a curvatura média escalar de  $\check{S}$ .

Finalmente, substituindo  $\mathbf{b}(z) = \mathbf{a}(z)$  na equação (4.71), temos que

$$-2h^2\mathbf{a}_{\bar{z}} \left( \mathbf{a}_{z\bar{z}} + \frac{2\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}_z\mathbf{a}_{\bar{z}}}{1 - |\mathbf{a}|^2} \right) = -2hh_z(\mathbf{a}_{\bar{z}})^2 \Leftrightarrow$$

$$h\mathbf{a}_{\bar{z}} \left( h \left( \mathbf{a}_{z\bar{z}} + \frac{2\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}_z\mathbf{a}_{\bar{z}}}{1 - |\mathbf{a}|^2} \right) - h_z\mathbf{a}_{\bar{z}} \right) = 0.$$

Como  $h = 0$  se, e somente se  $\mathbf{a}_{\bar{z}} = 0$ , a equação acima implica que

$$h \left( \mathbf{a}_{z\bar{z}} + \frac{2\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}_z\mathbf{a}_{\bar{z}}}{1 - |\mathbf{a}|^2} \right) = h_z\mathbf{a}_{\bar{z}}.$$

Observamos que esta equação é a mesma equação (4.33) da Proposição 4.7.

• Se  $\mathbf{b}(z) = -\mathbf{a}(z)$ , sabemos que  $\Phi(z) = (1 - \mathbf{a}^2, i(1 + \mathbf{a}^2), 2\mathbf{a}, 0)$  representa localmente a aplicação de Gauss de superfícies  $\hat{S}$  em  $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{L}^4$ . Neste caso, o vetor curvatura média  $H = \hat{H}$  é tipo espaço e paralelo a aplicação de Gauss clássica  $\hat{N} : M^2 \rightarrow \mathbb{S}^2(1)$  de  $\hat{S}$ . É bem conhecido que

$$\hat{N}(z) = \frac{1}{1 + |\mathbf{a}|^2} (2\Re(\mathbf{a}), 2\Im(\mathbf{a}), |\mathbf{a}|^2 - 1, 0). \quad (4.81)$$

Agora de (4.80) temos que

$$\langle \hat{H}, \hat{H} \rangle = -\frac{\langle \hat{H}, \hat{A} \rangle \langle \hat{H}, \hat{B} \rangle}{(1 + |\mathbf{a}|^2)^2},$$

com  $\hat{A} = -\hat{B} = (2\Re(\mathbf{a}), 2\Im(\mathbf{a}), |\mathbf{a}|^2 - 1, 0)$ . Logo de (4.81) segue-se que

$$\hat{A} = (1 + |\mathbf{a}|^2)\hat{N}, \quad \hat{B} = -(1 + |\mathbf{a}|^2)\hat{N}.$$

Portanto,

$$\langle \hat{H}, \hat{H} \rangle = \langle \hat{H}, \hat{N} \rangle^2 = h^2,$$

onde  $h$  é a curvatura média escalar de  $\hat{S}$ .

Finalmente, substituindo  $\mathbf{b}(z) = -\mathbf{a}(z)$  na equação (4.71), temos que

$$-2h^2 \mathbf{a}_{\bar{z}} \left( \mathbf{a}_{z\bar{z}} - \frac{2\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}_z\mathbf{a}_{\bar{z}}}{1 + |\mathbf{a}|^2} \right) = -2hh_z(\mathbf{a}_{\bar{z}})^2 \Leftrightarrow$$

$$h\mathbf{a}_{\bar{z}} \left( h \left( \mathbf{a}_{z\bar{z}} - \frac{2\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}_z\mathbf{a}_{\bar{z}}}{1 + |\mathbf{a}|^2} \right) - h_z\mathbf{a}_{\bar{z}} \right) = 0.$$

Como  $h = 0$  se, e somente se  $\mathbf{a}_{\bar{z}} = 0$ , a equação acima implica que

$$h \left( \mathbf{a}_{z\bar{z}} - \frac{2\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}_z\mathbf{a}_{\bar{z}}}{1 + |\mathbf{a}|^2} \right) = h_z\mathbf{a}_{\bar{z}}.$$

A equação acima é a condição de integrabilidade para superfícies com curvatura média prescrita em  $\mathbb{R}^3$ , provada por Kenmotsu veja [25] pag. 96.

Como consequência imediata do Teorema 4.13 temos o seguinte

**Corolário 4.14.** *Nas hipóteses do Teorema 4.13, se o vetor curvatura média  $H$  não é nulo nem de tipo luz para todo ponto de  $M^2$  então*

$$S_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + S_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\log \langle H, H \rangle)_z, \quad (4.82)$$

onde  $z$  é um parâmetro conforme sobre  $M^2$ .

**Demonstração:** A equação (4.76) implica que  $a_{\bar{z}}b_{\bar{z}} \neq 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} a_{\bar{z}}b_{\bar{z}} \left( \left( \frac{a_{z\bar{z}}}{a_{\bar{z}}} + \frac{2\bar{b}a_z}{1-\bar{a}b} \right) + \left( \frac{b_{z\bar{z}}}{b_{\bar{z}}} + \frac{2\bar{a}b_z}{1-\bar{a}b} \right) \right) \langle H, H \rangle &= 2a_{\bar{z}}b_{\bar{z}} \langle H, H_z \rangle \Leftrightarrow \\ \left( \frac{a_{z\bar{z}}}{a_{\bar{z}}} + \frac{2\bar{b}a_z}{1-\bar{a}b} \right) + \left( \frac{b_{z\bar{z}}}{b_{\bar{z}}} + \frac{2\bar{a}b_z}{1-\bar{a}b} \right) &= \frac{2\langle H, H_z \rangle}{\langle H, H \rangle} \Leftrightarrow \\ S_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + S_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= (\log \langle H, H \rangle)_z. \end{aligned}$$

□

Observe que  $\langle H, H \rangle$  é uma função real, de modo que  $(\log \langle H, H \rangle)_{z\bar{z}} \in \mathbb{R}$ . Assim, a equação (4.82) implica que

$$\Im\{(S_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + S_2(\mathbf{a}, \mathbf{b}))_{\bar{z}}\} = 0 \Leftrightarrow \Im\{T_1(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + T_2(\mathbf{a}, \mathbf{b})\} = 0.$$

Portanto, a equação (4.82) implica a equação (4.51) do Teorema 4.12.

Uma outra consequência interessante pode ser obtida usando a equação (4.76), da qual segue-se que

$$\bar{\mu}^2 = \frac{-4a_{\bar{z}}b_{\bar{z}}}{\langle H, H \rangle \ll \Phi, \Phi \gg^2}$$

sempre que  $\langle H, H \rangle \neq 0$ . Ou seja, o fator de integração  $\mu$  pode ser dado explicitamente por

$$\bar{\mu}^2 = \frac{-a_{\bar{z}} \cdot b_{\bar{z}}}{\langle H, H \rangle |1 - \bar{a}b|^4}. \quad (4.83)$$

Portanto, dado uma superfície  $S$  tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$ , com vetor curvatura média  $H$  não nulo e nem tipo luz, podemos dar uma fórmula de representação para  $S$  em função da aplicação de Gauss  $G$  e do vetor curvatura  $H$ .

**Proposição 4.15.** *Seja  $S$  uma superfície tipo espaço imersa em  $\mathbb{L}^4$  por  $X : M^2 \rightarrow \mathbb{L}^4$ , onde  $M^2$  é uma superfície de Riemann simplesmente conexa, com o vetor curvatura média  $H$  diferente de zero e nem tipo luz sobre  $M^2$  e  $\Phi(z)$ , definido em (4.44), sua representação local da aplicação de Gauss, isto é,  $X_z = \mu\Phi(z)$ , onde  $\mu$  é uma função complexa não nula. Então a superfície  $S$  pode ser obtida explicitamente por*

$$X(z) = 2\Re \int_{z_0}^z \mu(1 + \mathbf{a}b, i(1 - \mathbf{a}b), \mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b}) dw + X(z_0), \quad (4.84)$$

onde  $\mu$  é dado por (4.83).

Observemos que se as condições (4.50) e (4.51) são também suficientes, então vale também a recíproca da Proposição acima. Isto é, dado uma aplicação arbitrária de uma superfície de Riemann simplesmente conexa na quádrlica  $Q_1^2$ , representada localmente por  $\Phi(z)$ , como em (4.44), via o par de funções  $\mathbf{a}(z), \mathbf{b}(z)$ , tal que satisfazem as condições  $\overline{F_1}F_2 = F_1\overline{F_2}$ ,  $\langle \mathbb{V}, \mathbb{V} \rangle \neq 0$  e  $S_1 + S_2 = (\log h)_z$ , onde  $h : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ , então (4.84) define uma superfície tipo espaço imersa em  $\mathbb{L}^4$  com aplicação de Gauss dada localmente por  $\Phi$ ,  $\langle H, H \rangle = h$  e métrica induzida  $ds^2 = 4|\mu|^2|1 - \mathbf{a}\overline{\mathbf{b}}|^2|dz|^2$  dada, usando (4.83), por

$$ds^2 = \left( \frac{4|\mathbf{a}_{\overline{z}}||\mathbf{b}_{\overline{z}}|}{|\langle H, H \rangle||1 - \mathbf{a}\overline{\mathbf{b}}|^2} \right) |dz|^2.$$

**Exemplo 4.1.** Sejam  $M^2 = \mathbb{C}$ ,

$$\mathbf{a}(z) = \sqrt{k}e^{\frac{z+\overline{z}}{2t}}, \quad \mathbf{b}(z) = \frac{k}{\sqrt{k}}e^{-\frac{z+\overline{z}}{2t}}, \quad \langle H, H \rangle = \frac{1-t^2}{4t^4},$$

onde  $z = u + iv \in \mathbb{C}$  e  $k = \frac{1-t}{1+t}$ , com  $t \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ . Como  $\mathbf{a}_{\overline{z}} = \frac{\mathbf{a}(z)}{2t}$ ,  $\mathbf{b}_{\overline{z}} = -\frac{\mathbf{b}(z)}{2t}$  e  $|1 - \mathbf{a}\overline{\mathbf{b}}|^4 = (1-k)^4$ , segue-se de (4.83) que

$$\overline{\mu}^2 = \frac{k}{4t^2\langle H, H \rangle} \left( \frac{1+t}{2t} \right)^4 = \frac{k(1+t)^4}{2^4t^2(1-t^2)} \Rightarrow \mu = \frac{1+t}{4t}.$$

Além disso,

$$\Phi(z) = \left( \frac{2}{1+t}, \frac{2t}{1+t}i, \mathbf{a}(z) - \frac{k}{\mathbf{a}(z)}, \mathbf{a}(z) + \frac{k}{\mathbf{a}(z)} \right).$$

Donde não é difícil ver que

$$\Phi(z) = \frac{2t}{1+t} \left( \frac{1}{t}, i, \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \sinh \frac{z+\overline{z}}{2t}, \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \cosh \frac{z+\overline{z}}{2t} \right).$$

Assim,

$$X_z = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t}, i, \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \sinh \frac{z+\overline{z}}{2t}, \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \cosh \frac{z+\overline{z}}{2t} \right).$$

Portanto,

$$X(u, v) = \left( \frac{u}{t}, -v, \sqrt{1-t^2} \cosh \frac{u}{t}, \sqrt{1-t^2} \sinh \frac{u}{t} \right).$$

Sejam  $e_1 := X_u$  e  $e_2 := X_v$ . De (1.14),  $H = \frac{1}{2}(\overline{\nabla}_{e_1}e_1)^\perp = \frac{1}{2}(X_{uu})^\perp = \frac{1}{2}X_{uu}$ . Assim que,  $H = \frac{\sqrt{1-t^2}}{2t^2}(0, 0, \cosh \frac{u}{t}, \sinh \frac{u}{t})$ . Logo,  $\langle H, H \rangle = \frac{1-t^2}{4t^4}$ .

## Capítulo 5

# Superfícies tipo espaço com aplicação de Gauss degenerada em $\mathbb{L}^4$

No capítulo 2 estudamos as superfícies máximas com aplicação de Gauss degenerada. Neste Capítulo nós iremos estudar todas as superfícies de tipo espaço com tal propriedade, com a finalidade de descrevê-las completamente. Para isto usaremos os resultados do Capítulo 3, mais especificamente o Teorema 4.12 e também o estudo de hélices tipo espaço feito na seguinte seção.

### 5.1 Triedro de Frenet para curvas do tipo espaço em $\mathbb{L}^3$

Sejam dados dois vetores  $u$  e  $v$  pertencentes ao espaço de Lorentz–Minkowski  $\mathbb{L}^3$ . De acordo com a Proposição 1.5, podemos associar um único vetor  $u \times v \in \mathbb{L}^3$  tal que para todo  $w \in \mathbb{L}^3$  satisfaz  $\langle u \times v, w \rangle = \det(u, v, w)$ , onde  $\langle, \rangle = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 - (dx^3)^2$  e métrica de Lorentz–Minkowski. O vetor  $u \times v$  acima é denominado *produto vetorial* de  $u$  e  $v$ . Além disso, se  $u = (u^1, u^2, u^3)$  e  $v = (v^1, v^2, v^3)$  então  $u \times v$  é dado em

coordenadas por

$$u \times v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & -\vec{k} \\ u^1 & u^2 & u^3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \end{vmatrix} = (u^2v^3 - u^3v^2, u^3v^1 - \underline{u^1v^3}, \underline{u^2v^1} - u^1v^2).$$

Usando esta expressão podemos facilmente verificar as seguintes propriedades:

1.  $u \times v = 0$  se, e somente se  $u$  e  $v$  são linearmente independentes;
2.  $u \times v = -v \times u$ ;
3.  $\langle u \times v, u \times v \rangle = \langle u, v \rangle^2 - \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle$ ;
4. Se  $u$  ou  $v$  é tipo tempo, então  $u \times v$  é tipo espaço;
5. Se  $u$  ou  $v$  é tipo espaço, então  $u \times v$  é tipo tempo;
6. Se  $u$  ou  $v$  é tipo luz e  $\langle u, v \rangle = 0$ , então  $u \times v$  é tipo luz;
7.  $(u \times v) \times w = \langle w, v \rangle u - \langle w, u \rangle v$ .

Seja  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma curva regular tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$  com velocidade unitária, isto é  $\|c'(s)\| = 1$ , e vetor aceleração  $c''(s)$  tal que  $\langle c''(s), c''(s) \rangle \neq 0$ . Definindo a *curvatura* e o *vetor normal* de  $c$  respectivamente por

$$k(s) := \|c''(s)\|, \quad n(s) := \frac{c''(s)}{k(s)} \quad (5.1)$$

e denotando  $c'(s)$  por  $t(s)$  temos que  $t(s)$  e  $n(s)$  são vetores ortonormais e

$$t'(s) = k(s)n(s). \quad (5.2)$$

Definindo,

$$b(s) := t(s) \times n(s) \quad (5.3)$$

temos o referencial ortonormal  $\{t(s), n(s), b(s)\}$  que é o *triedro de Frenet*. Podemos escrever  $b'(s)$  neste referencial,

$$\begin{aligned} b'(s) &= \langle b', t \rangle t + \frac{\langle b', n \rangle n}{\langle n, n \rangle} + \frac{\langle b', b \rangle b}{\langle b, b \rangle} = \frac{\langle b', n \rangle n}{\langle n, n \rangle} \\ &= \varepsilon \tau(s) n(s), \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde a função  $\tau(s) := \langle \mathbf{b}', \mathbf{n} \rangle$  é denominada *torção* de  $\mathbf{c}$  e  $\varepsilon = \langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle$ . Da propriedade (7) acima é fácil ver que  $\mathbf{b}(s) \times \mathbf{n}(s) = \varepsilon \mathbf{t}(s)$  e  $\mathbf{n}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{b}(s)$ . Derivando esta última expressão e usando as equações (5.2) e (5.4) temos que

$$\mathbf{n}'(s) = -\varepsilon k(s) \mathbf{t}(s) + \varepsilon \tau(s) \mathbf{b}(s).$$

Portanto,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t}'(s) \\ \mathbf{n}'(s) \\ \mathbf{b}'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -\varepsilon k(s) & 0 & \varepsilon \tau(s) \\ 0 & \varepsilon \tau(s) & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{t}(s) \\ \mathbf{n}(s) \\ \mathbf{b}(s) \end{bmatrix}.$$

As três fórmulas acima são chamadas *fórmulas de Frenet*.

Seja agora  $\mathbf{c}(s)$  uma curva tipo espaço contida em um 2-plano degenerado  $\Pi$  de  $\mathbb{L}^3$ , onde  $s$  denota o parâmetro comprimento de arco. Assumindo que  $\mathbf{c}'' \neq 0$ , segue-se da equação  $\langle \mathbf{c}'', \mathbf{c}' \rangle = 0$  que  $\mathbf{c}''$  é tipo luz, veja Proposição 2.1. Em [31] pg. 473, R. López e F. López dão, para este caso, a noção de curvatura como segue: Fixe um vetor tipo luz  $\mathbf{n}$  constante ao longo de  $\mathbf{c}$ , então  $\mathbf{c}'' = k\mathbf{n}$ . Claro que  $k$  depende da escolha de  $\mathbf{n}$  e  $k$  é constante se, e somente se  $\mathbf{c}''$  é um vetor constante sobre  $\mathbf{c}$ . As curvas tipo espaço de  $\mathbb{L}^3$  com aceleração tipo luz têm uma interessante propriedade demonstrada pelo Prof. Ruy Tojeiro (comunicação pessoal) na seguinte

**Proposição 5.1.** *Seja  $\mathbf{c} : I \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma curva com velocidade unitária tal que  $\mathbf{c}''(s)$  é um vetor tipo luz para todo  $s \in I$ . Então  $\mathbf{c}(I)$  está contida em um plano degenerado em  $\mathbb{L}^3$*

**Demonstração:** Precisamos provar que existe um vetor tipo luz  $v \in \mathbb{L}^3$  tal que  $\langle \mathbf{c}'(s), v \rangle = 0$  para todo  $s \in I$ . Como  $\langle \mathbf{c}'(s), \mathbf{c}''(s) \rangle = 0$  para todo  $s \in I$ , é suficiente provar que existe uma função diferenciável  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$  tal que a função  $\beta(s) = \lambda(s)\mathbf{c}''(s)$  é um vetor constante  $v \in \mathbb{L}^3$ . Temos

$$\beta' = \langle \beta', \mathbf{c}' \rangle \mathbf{c}' + \langle \beta', \mathbf{c}'' \rangle w + \langle \beta', w \rangle \mathbf{c}'',$$

onde  $\langle w(s), w(s) \rangle = 0 = \langle w(s), \mathbf{c}'(s) \rangle$  e  $\langle w(s), \mathbf{c}''(s) \rangle = 1$ . Por outro lado, como  $\langle \mathbf{c}'', \mathbf{c}''' \rangle = 0$  (diferenciando  $\langle \mathbf{c}'', \mathbf{c}'' \rangle = 0$ ),  $\langle \mathbf{c}', \mathbf{c}''' \rangle = 0$  (diferenciando  $\langle \mathbf{c}', \mathbf{c}'' \rangle = 0$  e

usando que  $\langle \mathbf{c}'', \mathbf{c}'' \rangle = 0$  e  $\beta' = \lambda' \mathbf{c}'' + \lambda \mathbf{c}'''$ , obtemos que  $\langle \beta', \mathbf{c}' \rangle = 0 = \langle \beta', \mathbf{c}'' \rangle$ , e portanto  $\beta' = \langle \beta', w \rangle \mathbf{c}''$ . Mas,  $\langle \beta', w \rangle = \lambda' + \lambda \rho$  onde  $\rho = \langle \mathbf{c}''', w \rangle$ , logo é suficiente escolher  $\lambda$  como a solução de  $\lambda' + \lambda \rho = 0$ , isto é,  $\lambda = \exp(-\int \rho)$ .

□

## 5.2 Hélices tipo espaço em $\mathbb{L}^3$

Uma curva tipo espaço em  $\mathbb{L}^3$  é chamada de hélice se seu vetor tangente forma um ângulo constante com uma reta  $l$  fixada em  $\mathbb{L}^3$ . Veremos que neste caso a geometria dessas curvas podem diferir bastante das hélices clássicas de  $\mathbb{R}^3$ . Isto se deve essencialmente ao caráter causal de  $l$ . Seja  $\mathbf{v} \neq 0$  um vetor na direção de  $l$ , que suporemos unitário sempre que a direção  $l$  não for tipo luz. Então diremos que uma curva  $\mathbf{c} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$  tipo espaço parametrizada pelo comprimento de arco é uma *hélice* se

$$\langle \mathbf{c}'(s), \mathbf{v} \rangle = cte. \quad (5.5)$$

Mais especificamente diremos que se  $\mathbf{v}$  é um vetor tipo espaço, então  $\mathbf{c}$  é uma *hélice hiperbólica*; se  $\mathbf{v}$  é um vetor tipo tempo, então  $\mathbf{c}$  é uma *hélice elíptica*; e se  $\mathbf{v}$  é um vetor tipo luz, então  $\mathbf{c}$  é uma *hélice parabólica*.

**Proposição 5.2.** *Seja  $\mathbf{c} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$  uma curva tipo espaço regular tal que  $\langle \mathbf{c}''(s), \mathbf{c}''(s) \rangle \neq 0$  e com curvatura e torção diferentes de zero para todo  $s \in I$ . Então  $\mathbf{c}$  é uma hélice se, e somente se  $\frac{k}{\tau}$  é constante.*

**Demonstração:** Podemos assumir que  $\mathbf{c}$  é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco, assim que  $\langle \mathbf{c}'(s), \mathbf{c}'(s) \rangle = 1$ ,  $\langle \mathbf{c}''(s), \mathbf{c}'(s) \rangle = 0$  e  $\langle \mathbf{n}(s), \mathbf{n}(s) \rangle = \varepsilon = \pm 1$ . Se  $\mathbf{c}$  é uma hélice, então  $\langle \mathbf{c}'(s), \mathbf{v} \rangle = cte$  para  $\mathbf{v}$  fixo. Portanto,  $\langle \mathbf{c}''(s), \mathbf{v} \rangle = 0$ , isto é,  $k \langle \mathbf{n}(s), \mathbf{v} \rangle = 0$ . Como  $k \neq 0$ , segue-se que  $\langle \mathbf{n}, \mathbf{v} \rangle = 0$ . Assim,  $\mathbf{v}$  pertence ao 2-plano  $\Pi = \text{span}[\mathbf{t}, \mathbf{b}]$ . Dependendo do caráter causal dos vetores  $\mathbf{v}$  e  $\mathbf{b}$ , podemos ter as seguintes situações:

1. Se  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 1$  e  $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 1$ , então podemos escrever

$$\mathbf{v} = \cos \theta(s) \mathbf{t}(s) + \sin \theta(s) \mathbf{b}(s). \quad (5.6)$$

2. Se  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 1$  e  $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = -1$ , então podemos escrever

$$\mathbf{v} = \cosh \theta(s) \mathbf{t}(s) - \sinh \theta(s) \mathbf{b}(s). \quad (5.7)$$

3. Se  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = -1$  e  $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = -1$ , então

$$\mathbf{v} = \sinh \theta(s) \mathbf{t}(s) - \cosh \theta(s) \mathbf{b}(s). \quad (5.8)$$

4. Se  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$  e  $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = -1$ , então

$$\mathbf{v} = c_1(\mathbf{t}(s) - \mathbf{b}(s)) \quad \text{ou} \quad \mathbf{v} = c_2(\mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s)), \quad (5.9)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes não nulas.

No item (2), derivando (5.7) em relação a  $s$  e usando as fórmulas de Frenet, obtemos

$$\theta'(s) \sinh \theta \mathbf{t}(s) - \theta'(s) \cosh \theta \mathbf{b}(s) + (k \cosh \theta - \tau \sinh \theta) \mathbf{n}(s) = 0.$$

Portanto, para todo  $s \in I$  temos

$$\begin{cases} \theta'(s) \sinh \theta = 0 \\ \theta'(s) \cosh \theta = 0 \\ k \cosh \theta - \tau \sinh \theta = 0. \end{cases}$$

Segue-se das duas primeiras equações acima que  $\theta'(s) = 0$  para todo  $s \in I$ . Portanto,  $\theta(s)$  é uma constante. Agora da terceira equação temos que

$$\frac{k}{\tau} = \tanh \theta$$

é constante. Além disso, note que  $|\frac{k}{\tau}| < 1$ . Como a prova dos outros itens é análoga, isto encerra a primeira parte da demonstração.

Reciprocamente, suponhamos que  $k/\tau$  é constante.

1. Se  $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = 1$ , fixemos  $\theta$  tal que  $\tan \theta = \frac{k}{\tau}$ . Então,

$$\mathbf{v} = \cos \theta \mathbf{t}(s) + \sin \theta \mathbf{b}(s) \quad (5.10)$$

é um vetor tipo espaço unitário e constante para todo  $s \in I$ .

2. Se  $\left| \frac{k}{\tau} \right| < 1$  e  $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = -1$ , fixemos  $\theta$  tal que  $\tanh \theta = \frac{k}{\tau}$ . Então

$$\mathbf{v} = \cosh \theta \mathbf{t}(s) - \sinh \theta \mathbf{b}(s) \quad (5.11)$$

é um vetor tipo espaço unitário e constante para todo  $s \in I$ .

3. Se  $\left| \frac{k}{\tau} \right| > 1$  e  $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = -1$ , fixemos  $\theta$  tal que  $\coth \theta = \frac{k}{\tau}$ . Então

$$\mathbf{v} = \sinh \theta \mathbf{t}(s) - \cosh \theta \mathbf{b}(s) \quad (5.12)$$

é um vetor tipo tempo unitário e constante para todo  $s \in I$ .

4. Se  $\frac{k}{\tau} = \pm 1$  e  $\langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle = -1$ , então

$$\mathbf{v} = \mathbf{t}(s) - \mathbf{b}(s), \quad \text{resp.} \quad \mathbf{v} = \mathbf{t}(s) + \mathbf{b}(s), \quad (5.13)$$

é um vetor tipo luz e constante.

Vamos fazer a prova do item (3), já que a prova dos outros itens é análoga. Que  $\mathbf{v}$  é tipo tempo e unitário é óbvio. Resta provar que é constante. De fato,

$$\mathbf{v}'(s) = (k \sinh \theta - \tau \cosh \theta) \mathbf{n} = 0$$

para todo  $s \in I$ . Logo,  $\mathbf{v}$  é um vetor constante e

$$\langle \mathbf{t}(s), \mathbf{v} \rangle = \sinh \theta$$

é também constante. Portanto,  $\mathbf{c}$  é uma hélice por definição.  $\square$

**Observação 5.1.** Note que se  $\mathbf{v}$  é tipo tempo ou luz,  $\mathbf{b}$  não pode ser tipo espaço.

Vamos agora descrever, a menos de isometrias de  $\mathbb{L}^3$ , as hélices hiperbólicas, elípticas e parabólicas. No que se segue,  $\mathbf{c}(s) = (x(s), y(s), z(s))$  denotará sempre uma

curva tipo espaço, parametrizada pelo comprimento de arco, com  $\langle \mathbf{c}''(s), \mathbf{c}''(s) \rangle \neq 0$  e com curvatura e torção não nulas.

• Hélices hiperbólicas: Seja  $\mathbf{v}$  um vetor tipo espaço na direção de uma reta  $l$ . Agindo por  $O^{++}(2, 1)$ , se necessário, podemos supor que  $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$ . Assim, para mostrarmos que a curva  $\mathbf{c}(s)$  é uma hélice hiperbólica, temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} \langle \mathbf{c}'(s), \mathbf{v} \rangle = c_1 \\ \langle \mathbf{c}'(s), \mathbf{c}'(s) \rangle = 1, \end{cases}$$

o qual é equivalente a  $x(s) = c_1$  e  $(y'(s))^2 - (z'(s))^2 = 1 - c_1^2$ .

\* Se  $n$  é tipo espaço, então a curva

$$\mathbf{c}(s) = \left( \frac{b}{c}s, \frac{a}{c} \int \sinh \left( \frac{\theta(s)}{c} \right) ds, \frac{a}{c} \int \cosh \left( \frac{\theta(s)}{c} \right) ds \right), \quad (5.14)$$

onde  $a, b, c$  são números reais tais que  $c^2 = b^2 - a^2$ ,  $a > 0$ ,  $\theta'(s) > 0$  e  $c \neq 0$ , é uma hélice hiperbólica e  $k = \frac{a\theta'}{c^2}$ ,  $\tau = -\frac{b\theta'}{c^2}$ . Portanto,  $k/\tau = -a/b$  e  $|k/\tau| < 1$ .

\* Se  $n$  é tipo tempo, então

$$\mathbf{c}(s) = \left( \frac{b}{c}s, \frac{a}{c} \int \cosh \left( \frac{\theta(s)}{c} \right) ds, \frac{a}{c} \int \sinh \left( \frac{\theta(s)}{c} \right) ds \right), \quad (5.15)$$

onde  $c^2 = a^2 + b^2$ ,  $a > 0$ ,  $\theta'(s) > 0$  e  $c \neq 0$ , é uma hélice hiperbólica tal que  $k = \frac{a\theta'}{c^2}$ ,  $\tau = \frac{b\theta'}{c^2}$ . Portanto,  $k/\tau = a/b$ .

A menos de ação por  $O^{++}(2, 1)$ , todas as hélices hiperbólicas de  $\mathbb{L}^3$  são obtidas do modo acima.

• Hélices elípticas: Seja  $\mathbf{v}$  um vetor tipo tempo na direção de uma reta  $l$ . Agindo por  $O^{++}(2, 1)$ , se necessário, podemos supor que  $\mathbf{v} = (0, 0, 1)$ . Assim, para mostrarmos que a curva  $\mathbf{c}(s)$  é uma hélice elíptica, temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} \langle \mathbf{c}'(s), \mathbf{v} \rangle = c_1 \\ \langle \mathbf{c}'(s), \mathbf{c}'(s) \rangle = 1, \end{cases}$$

o qual é equivalente a  $z(s) = -c_1$  e  $(x'(s))^2 + (y'(s))^2 = 1 + c_1^2$ .

\* Se  $n$  é tipo espaço, então

$$\mathbf{c}(s) = \left( \frac{a}{c} \int \cos \left( \frac{\theta(s)}{c} \right) ds, \frac{a}{c} \int \sin \left( \frac{\theta(s)}{c} \right) ds, \frac{b}{c} s \right), \quad (5.16)$$

onde  $c^2 = a^2 - b^2$ ,  $a > 0$ ,  $\theta'(s) > 0$  e  $c \neq 0$ , é uma hélice elíptica tal que  $k = \frac{a\theta'}{c^2}$ ,  $\tau = -\frac{b\theta'}{c^2}$ . Portanto,  $k/\tau = -a/b$  e  $|k/\tau| > 1$ .

A menos de ação por  $O^{++}(2,1)$ , todas as hélices elípticas de  $\mathbb{L}^3$  são obtidas do modo acima.

• Hélices parabólicas: Seja  $\mathbf{v}$  um vetor tipo luz na direção de uma reta  $l$ . Agindo por  $O^{++}(2,1)$ , se necessário, podemos supor que  $\mathbf{v} = (1, 0, 1)$ . Assim, para mostrarmos a curva  $\mathbf{c}(s)$  é uma hélice parabólica, temos que resolver o sistema

$$\begin{cases} \langle \mathbf{c}'(s), \mathbf{v} \rangle = c, & c \neq 0 \\ \langle \mathbf{c}'(s), \mathbf{c}'(s) \rangle = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'(s) - z'(s) = c \\ x'(s) + z'(s) = \frac{1}{c} (1 - y'(s)^2). \end{cases}$$

Portanto, a curva

$$\mathbf{c}(s) = \left( \frac{c}{2}s + \frac{1}{2c} \int (1 - f^2) ds, \int f ds, -\frac{c}{2}s + \frac{1}{2c} \int (1 - f^2) ds \right), \quad (5.17)$$

onde  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função tal que  $f'(s) \neq 0$  para todo  $s \in I$ , é uma hélice parabólica. É fácil calcular

$$\mathbf{c}''(s) = \left( -\frac{ff'}{c}, f', -\frac{ff'}{c} \right).$$

Assim,  $\langle \mathbf{c}'', \mathbf{c}'' \rangle = (f')^2 > 0$  e portanto,  $k = |f'|$ . Logo,  $\mathbf{n} = (-f/c, 1, -f/c)$  se  $f' > 0$  e  $\mathbf{n} = (f/c, -1, f/c)$  se  $f' < 0$ . O vetor binormal é

$$\mathbf{b} = \left( -\frac{1 - c^2 + f^2}{2c}, f, -\frac{1 + c^2 + f^2}{2c} \right), \quad \text{se } f' > 0,$$

$$\mathbf{b} = \left( \frac{1 - c^2 + f^2}{2c}, -f, \frac{1 + c^2 + f^2}{2c} \right), \quad \text{se } f' < 0.$$

Derivando  $\mathbf{b}$  temos respectivamente

$$\mathbf{b}'(s) = f' \left( -\frac{f}{c}, 1, -\frac{f}{c} \right), \quad \mathbf{b}'(s) = f' \left( \frac{f}{c}, -1, \frac{f}{c} \right)$$

assim  $\tau = f'$  e portanto  $k/\tau = \pm 1$ .

A menos de ação por  $O^{++}(2,1)$ , todas as hélices parabólicas de  $\mathbb{L}^3$  são obtidas do modo acima.

### 5.3 Classificação das superfícies tipo espaço com aplicação de Gauss degenerada de tipo 1

**Lema 5.3.** *Seja  $\eta = -(\bar{b}F_1 + \bar{a}F_2)$  dada em (4.54). Se  $b = k/a$ , onde  $k \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ , então*

$$\eta = -\frac{4i k \Re\{a\} \Im\{a\} a_{\bar{z}}}{a|a - \bar{a}k|^2}. \quad (5.18)$$

**Demonstração:** Substituindo  $b = k/a$  e  $b_{\bar{z}} = -ka_{\bar{z}}/a^2$  nas funções  $F_1$  e  $F_2$  dadas em (4.45) elas assumem a forma

$$F_1 = \frac{\bar{a}a_{\bar{z}}}{(\bar{a} - ak)}, \quad F_2 = \frac{-ka_{\bar{z}}}{a(a - \bar{a}k)}.$$

Assim,

$$-\eta = \frac{k a_{\bar{z}}}{\bar{a} - ak} - \frac{k \bar{a} a_{\bar{z}}}{a(a - \bar{a}k)} = \frac{k(a^2 - \bar{a}^2)a_{\bar{z}}}{a|a - \bar{a}k|^2}.$$

□

O seguinte Teorema classifica localmente todas as superfícies tipo espaço de  $\mathbb{L}^4$  com aplicação de Gauss degenerada de tipo 1.

**Teorema 5.4.** *Seja  $S$  uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$ . Se  $S$  assume uma das seguintes formas:*

- 1)  $S$  está contida em algum 3-espaço afim de Lorentz de  $\mathbb{L}^4$ ;
- 2)  $S$  é uma superfície máxima em  $\mathbb{L}^4$ , descrita pelo Teorema 2.16;
- 3)  $S$  é uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$  da forma  $\mathbb{R} \times H_h$ , onde  $H_h$  é uma hélice hiperbólica.

Então  $S$  tem aplicação de Gauss degenerada de tipo 1.

Reciprocamente, se  $S$  é uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$  com aplicação de Gauss degenerada de tipo 1, de modo que  $\langle p, \Phi \rangle^{\mathbb{C}} = 0$  para algum vetor complexo  $p$  tal que  $\Re(p)$  e  $\Im(p)$  estão contidos em um 2-plano de tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$ , então:

- i)  $S$  é da forma (1) acima se, e somente se  $p$  é um vetor real tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$ ;
- ii) Se  $[p] \notin Q_1^2$  e  $p$  não é real, então  $S$  é localmente do tipo (2) ou (3) acima.

**Demonstração:** Se a superfície  $S$  assume umas das formas (1), (2) ou (3), então não é difícil ver que ela é degenerada de tipo 1. Para provar a recíproca, usaremos a Proposição 2.11, a qual nos diz que, sob a ação do grupo de Lorentz, a equação do hiperplano  $H$

$$p_1\phi^1 + p_2\phi^2 + p_3\phi^3 - p_4\phi^4 = 0,$$

que contém a aplicação de Gauss de  $S$ , assume a forma especial

$$it\phi^1 - \phi^2 = 0, \quad (5.19)$$

para algum número real  $t$ ,  $|t| \leq 1$ . Como trataremos aqui somente de superfícies com aplicação de Gauss degenerada, temos que excluir os casos  $t = \pm 1$ , já que estes correspondem às superfícies 2-degeneradas. Assim, temos dois casos a considerar:

*Caso 1:*  $t = 0$ . De (5.19), temos que  $\phi^2 = 0$ . Agora como  $G(z) = [X_z] = [\Phi]$ , onde  $z$  é uma coordenada local isotérmica de  $S$  e  $\Phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4)$ , segue-se que a função coordenada  $x^2$  da imersão  $X$  de  $S$  é uma constante. Portanto,  $S$  está contida em um 3-espaco afim de Lorentz de  $\mathbb{L}^4$ . Isto corresponde ao caso (1) do Teorema.

*Caso 2:*  $t \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ . Neste caso, usaremos a representação local  $\Phi$  da aplicação de Gauss de  $S$  em termos das funções  $\mathbf{a}(z)$  e  $\mathbf{b}(z)$  dada em (4.44). Da Proposição 1.15, segue-se que a intersecção  $N = H \cap Q_1^2$  pode ser representada por uma transformação de Möbius  $\mathbf{b}(z)$  em função de  $\mathbf{a}(z)$ . Em particular, no nosso caso, substituindo  $\phi^1 = 1 + \mathbf{a}\mathbf{b}$  e  $\phi^2 = i(1 - \mathbf{a}\mathbf{b})$  em (5.19) obtemos

$$\mathbf{b}(z) = \frac{k}{\mathbf{a}(z)}, \quad (5.20)$$

onde  $k = \frac{1-t}{1+t}$ , e daí segue-se que

$$\mathbf{b}_{\bar{z}} = \frac{-k\mathbf{a}_{\bar{z}}}{\mathbf{a}^2}. \quad (5.21)$$

Assim as funções  $F_1$  e  $F_2$  dadas em (4.45) assumem a forma

$$F_1 = \frac{\bar{\mathbf{a}}\mathbf{a}_{\bar{z}}}{(\bar{\mathbf{a}} - \mathbf{a}k)}, \quad F_2 = \frac{-k\mathbf{a}_{\bar{z}}}{\mathbf{a}(\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}}k)}. \quad (5.22)$$

Agora usando a equação fundamental (4.50),  $\overline{F_1}F_2 = F_1\overline{F_2}$ , segue-se que

$$\left( \frac{a\overline{a\overline{z}}}{(a - \overline{a}k)} \right) \left( \frac{-ka\overline{z}}{a(a - \overline{a}k)} \right) = \left( \frac{\overline{a}a\overline{z}}{(\overline{a} - ak)} \right) \left( \frac{-k\overline{a\overline{z}}}{\overline{a}(\overline{a} - ak)} \right).$$

Como  $k \neq 0$ , esta equação é equivalente a

$$\frac{|a\overline{z}|^2}{(a - \overline{a}k)^2} = \frac{|a\overline{z}|^2}{(\overline{a} - ak)^2} \Leftrightarrow \frac{(k^2 - 1)\Im\{a^2\}|a\overline{z}|^2}{|a - \overline{a}k|^4} = 0.$$

Observe que  $k^2 - 1 \neq 0$  e  $a - \overline{a}k \neq 0$ , pois  $t \in (-1, 1) \setminus \{0\}$  e a superfície  $S$  considerada é tipo espaço, de modo que  $a\overline{b} \neq 1$ . Portanto, concluímos que

$$\text{I. } a\overline{z} = 0$$

ou

$$\text{II. } \Im\{a^2\} = 0 \Leftrightarrow \Re\{a\}\Im\{a\} = 0.$$

No caso **I**, temos de (5.21) também que  $b\overline{z} = 0$ , logo em tais pontos a curvatura média de  $S$  é zero e portanto a superfície é máxima e isto corresponde ao caso (2) do Teorema. Por continuidade, a equação **II** vale sobre o fecho do conjunto onde  $a\overline{z} \neq 0$ . Assim, a menos que  $a\overline{z}$  se anule sobre algum subconjunto aberto de  $S$ , a superfície  $S$  toda satisfaz **II**. Temos que mostrar que neste caso a superfície  $S$  tem localmente a forma descrita no item (3) do Teorema. Para isto precisamos dar uma descrição geométrica para  $S$ .

• Se  $\Im\{a\} = 0$ , então a função  $a(z) = u(z)$ , onde  $u(z)$  é uma função real. De (5.20) temos  $b(z) = \frac{k}{u(z)}$ . Agora substituindo isto na expressão de  $\Phi$  dada em (4.44) segue-se que

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \left( \frac{2}{1+t}, \frac{2t}{1+t}i, u(z) - \frac{k}{u(z)}, u(z) + \frac{k}{u(z)} \right) \\ &= \frac{2}{1+t} \left( 1, it, \frac{1}{2} \left( (1+t)u - \frac{(1-t)}{u} \right), \frac{1}{2} \left( (1+t)u + \frac{(1-t)}{u} \right) \right). \end{aligned}$$

Como a função  $u(z)$  nunca se anula, podemos definir

$$e^{\theta(z)/t} = \frac{|u(z)|}{\sqrt{k}}.$$

Supondo primeiro  $u(z) > 0$ , temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( (1+t)u - \frac{(1-t)}{u} \right) &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{k}(1+t)e^{\theta/t} - \frac{1-t}{\sqrt{k}}e^{-\theta/t} \right) \\ &= \sqrt{1-t^2} \left( \frac{e^{\theta/t} - e^{-\theta/t}}{2} \right) \\ &= \sqrt{1-t^2} \sinh \frac{\theta}{t}. \end{aligned}$$

De modo análogo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( (1+t)u + \frac{(1-t)}{u} \right) &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{k}(1+t)e^{\theta/t} + \frac{1-t}{\sqrt{k}}e^{-\theta/t} \right) \\ &= \sqrt{1-t^2} \left( \frac{e^{\theta/t} + e^{-\theta/t}}{2} \right) \\ &= \sqrt{1-t^2} \cosh \frac{\theta}{t}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Phi(z) = \frac{2t}{1+t} \left( \frac{1}{t}, i, \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \sinh \frac{\theta}{t}, \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \cosh \frac{\theta}{t} \right). \quad (5.23)$$

Para o caso  $u(z) < 0$  temos que

$$\Phi(z) = \frac{2t}{1+t} \left( \frac{1}{t}, i, -\frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \sinh \frac{\theta}{t}, -\frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \cosh \frac{\theta}{t} \right). \quad (5.24)$$

O próximo passo é fazer uma mudança de coordenadas conformes a fim de eliminar o fator de integração  $\mu(z)$  da equação  $X_z = \mu(z)\Phi(z)$ . Usando a equação  $\eta(z) = -(\bar{\mathbf{b}}F_1 + \bar{\mathbf{a}}F_2)$  dada em (4.54) para o nosso caso específico, segue-se do Lema 5.3 que  $\eta = 0$ . Então por (4.12),  $(\log \mu)_{\bar{z}} = -\eta = 0$ , de modo que  $\log \mu$  é holomorfa e, portanto,  $\mu$  é também uma função holomorfa que não se anula. Introduzimos novas coordenadas conformes  $\zeta = \zeta(z)$  sobre  $S$ , pela equação  $\frac{d\zeta}{dz} = \mu(z)$ . Pela regra da cadeia,

$$X_\zeta = X_z \frac{dz}{d\zeta} = (\mu\Phi) \frac{1}{\mu} = \Phi.$$

Agora pondo  $\zeta = s + i\xi$ , obtemos, a menos de fator constante,

$$X_s - iX_\xi = \left( \frac{1}{t}, i, \pm \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \sinh \frac{\theta}{t}, \pm \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \cosh \frac{\theta}{t} \right)$$

Segue-se daí que

$$X_s = \left( \frac{1}{t}, 0, \pm \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \sinh \frac{\theta}{t}, \pm \frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \cosh \frac{\theta}{t} \right), \quad X_\xi = (0, -1, 0, 0).$$

Observe que nessas novas coordenadas  $\theta$  é uma função só de  $s$ . Agora pondo  $a = \pm\sqrt{1-t^2}$ ,  $b = 1$  e  $c = t$  temos que  $c^2 = b^2 - a^2$  e

$$X_s = \left( \frac{b}{c}, 0, \frac{a}{c} \sinh \frac{\theta(s)}{c}, \frac{a}{c} \cosh \frac{\theta(s)}{c} \right).$$

Finalmente comparando isto com (5.14), concluimos que  $X_s$  é o vetor tangente de uma hélice hiperbólica com vetor normal tipo espaço. Portanto, a superfície é então o produto desta hélice com uma linha reta na direção  $x^2$ . Isto encerra a prova do caso  $\Im\{\mathbf{a}\} = 0$ .

• Se  $\Re\{\mathbf{a}\} = 0$ , então a função  $a(z) = iv(z)$ , onde  $v(z)$  é uma função real que nunca se anula. De (5.20) temos  $b(z) = -i\frac{k}{v(z)}$ . Substituindo isto em (4.44) segue-se que

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \left( \frac{2}{1+t}, \frac{2t}{1+t}i, i \left( v(z) + \frac{k}{v(z)} \right), i \left( v(z) - \frac{k}{v(z)} \right) \right) \\ &= \frac{2}{1+t} \left( 1, it, \frac{i}{2} \left( (1+t)v + \frac{(1-t)}{v} \right), \frac{i}{2} \left( (1+t)v - \frac{(1-t)}{v} \right) \right). \end{aligned}$$

Agora definindo

$$e^{\theta(z)} = \frac{|v(z)|}{\sqrt{k}}$$

temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( (1+t)v + \frac{(1-t)}{v} \right) &= \pm\sqrt{1-t^2} \cosh \theta, \\ \frac{1}{2} \left( (1+t)v - \frac{(1-t)}{v} \right) &= \pm\sqrt{1-t^2} \sinh \theta. \end{aligned}$$

Neste ponto, procedendo de modo análogo ao caso anterior e introduzindo as novas coordenadas  $\zeta = s + i\xi$ , temos, a menos de fator constante, que

$$X_s - iX_\xi = \left( -1, -it, \mp i\sqrt{1-t^2} \cosh \theta, \mp i\sqrt{1-t^2} \sinh \theta \right)$$

Segue-se daí que

$$X_s = (-1, 0, 0, 0), \quad X_\xi = \left( 0, t, \pm\sqrt{1-t^2} \sinh \theta, \pm\sqrt{1-t^2} \cosh \theta \right).$$

Observe que nessas novas coordenadas  $\theta$  é uma função só de  $\xi$ . Agora pondo  $a = \pm\sqrt{1-t^2}$ ,  $b = t$  e  $c = 1$ , temos que  $c^2 = a^2 + b^2$  e

$$X_\xi = \left( 0, \frac{b}{c}, \frac{a}{c} \cosh \frac{\theta(\xi)}{c}, \frac{a}{c} \sinh \frac{\theta(\xi)}{c} \right).$$

Agora comparando isto com (5.15), concluímos que  $X_\xi$  é o vetor tangente de uma hélice hiperbólica com vetor normal tipo tempo. Portanto, a superfície é então o produto desta hélice com uma linha reta na direção  $x^1$ . Isto encerra a prova do caso  $\Re\{a\} = 0$  e também a demonstração do Teorema.  $\square$

Na demonstração do Teorema acima, vimos que se  $\Im m\{a\} = 0$ , então a superfície  $S$  obtida é da forma  $\mathbb{R} \times H_h$  com  $X_s = X_s(s)$  e  $X_\xi = -e_2$ . Logo, de (1.5) vemos que  $\nu = \nu(s)$  e  $\tau = \tau(s)$ . Assim,  $\nu_z = \frac{\nu_s}{2}$  e  $\tau_{\bar{z}} = \frac{\tau_s}{2}$ . Portanto,  $\langle \nu_z, \tau_{\bar{z}} \rangle = \frac{1}{4} \langle \nu_s, \tau_s \rangle \in \mathbb{R}$ , donde, junto com o Lema 1.14, segue-se que  $K_N = 0$ . Já no caso,  $\Re\{a\} = 0$ , temos que  $X_s = -e_1$  e  $X_\xi = X_\xi(\xi)$ . Logo,  $\nu = \nu(\xi)$  e  $\tau = \tau(\xi)$ . Assim, ainda temos  $K_N = 0$ . Portanto, todas as superfícies dadas no item (3) do Teorema, têm  $K_N = 0$ . Além disso, as superfícies do item (1) também têm  $K_N = 0$  e as do item (2) têm  $H = 0$ .

**Observação 5.2.** Se a superfície  $S$  do Teorema 5.4 for simplesmente conexa e analítica real, então ela será globalmente do tipo (2) ou (3) acima.

## 5.4 Classificação das superfícies tipo espaço com aplicação de Gauss degenerada de tipo 2

**Lema 5.5.** *Seja  $\eta = -(\bar{b}F_1 + \bar{a}F_2)$  dada em (4.54). Se  $b = e^{i\alpha}a$ , onde  $\alpha \in \mathbb{R}$  é fixado, então*

$$\eta = \frac{2(|a|^2 - \cos \alpha) \bar{a} a_{\bar{z}}}{|1 - e^{i\alpha}|a|^2|^2}. \quad (5.25)$$

**Demonstração:** Substituindo  $b = e^{i\alpha}a$  e  $b_{\bar{z}} = e^{i\alpha}a_{\bar{z}}$  nas funções  $F_1$  e  $F_2$  dadas em

(4.45) elas assumem a forma

$$F_1 = \frac{\mathbf{a}_{\bar{z}}}{1 - e^{-i\alpha}|\mathbf{a}|^2}, \quad F_2 = \frac{e^{i\alpha}\mathbf{a}_{\bar{z}}}{(1 - e^{i\alpha}|\mathbf{a}|^2)}.$$

Assim,

$$\eta = - \left( \frac{e^{-i\alpha}}{1 - e^{-i\alpha}|\mathbf{a}|^2} + \frac{e^{i\alpha}}{1 - e^{i\alpha}|\mathbf{a}|^2} \right) \bar{\mathbf{a}} \mathbf{a}_{\bar{z}} = - \frac{(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} - 2|\mathbf{a}|^2)\mathbf{a} \mathbf{a}_{\bar{z}}}{|1 - e^{i\alpha}|\mathbf{a}|^2|^2}.$$

□

O seguinte Teorema classifica localmente todas as superfícies tipo espaço de  $\mathbb{L}^4$  com aplicação de Gauss degenerada de tipo 2.

**Teorema 5.6.** *Seja  $S$  uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$ . Se  $S$  assume uma das seguintes formas:*

- 1)  $S$  está contida em algum 3-espaço afim espacial de  $\mathbb{L}^4$ ;
- 2)  $S$  é uma superfície máxima em  $\mathbb{L}^4$ , descrita pelo Teorema 2.17;
- 3)  $S$  é uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$  da forma  $\mathbb{R} \times H_e$ , onde  $H_e$  é uma hélice elíptica.

Então  $S$  tem aplicação de Gauss degenerada de tipo 2.

Reciprocamente, se  $S$  é uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$  com aplicação de Gauss degenerada de tipo 2, de modo que  $\langle p, \Phi \rangle^{\mathbb{C}} = 0$  para algum vetor complexo  $p$  tal que  $\Re(p)$  e  $\Im(p)$  estão contidos em um 2-plano de Lorentz em  $\mathbb{L}^4$ , então:

- i)  $S$  é da forma (1) acima se, e somente se  $p$  é um vetor real tipo tempo em  $\mathbb{L}^4$ ;
- ii) Se  $p$  não é real, então  $S$  é localmente do tipo (2) ou (3) acima.

**Demonstração:** Se a superfície  $S$  assume umas das formas (1), (2) ou (3), então não é difícil ver que ela é degenerada de tipo 2. Para provar a recíproca, usaremos a Proposição 2.11, a qual nos diz que, sob à ação do grupo de Lorentz, a equação do hiperplano  $H$

$$p_1\phi^1 + p_2\phi^2 + p_3\phi^3 - p_4\phi^4 = 0,$$

que contém a aplicação de Gauss de  $S$ , assume a forma especial

$$i\phi^3 + \phi^4 = 0, \tag{5.26}$$

para algum número real  $t$ . Assim, temos dois casos a considerar:

*Caso 1:*  $t = 0$ . De (5.26), temos que  $\phi^4 = 0$ . Agora como  $G(z) = [X_z] = [\Phi]$ , onde  $z$  é uma coordenada local isotérmica de  $S$  e  $\Phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4)$ , segue-se que a função coordenada  $x^4$  da imersão  $X$  de  $S$  é constante. Portanto,  $S$  está contida em um 3-espaço afim espacial de  $\mathbb{L}^4$ . Isto corresponde ao caso (1) do Teorema.

*Caso 2:*  $t \neq 0$ . Neste caso, usaremos a representação local  $\Phi$  da aplicação de Gauss de  $S$  em termos das funções  $\mathbf{a}(z)$  e  $\mathbf{b}(z)$  dada em (4.44). Da Proposição 1.15, segue-se que a intersecção  $N = H \cap Q_1^2$  pode ser representada por uma transformação de Möbius  $\mathbf{b}(z)$  em função de  $\mathbf{a}(z)$ . Em particular no nosso caso, substituindo  $\phi^3 = \mathbf{a} - \mathbf{b}$  e  $\phi^4 = \mathbf{a} + \mathbf{b}$  em (5.26) obtemos

$$\mathbf{b}(z) = \left( \frac{it + 1}{it - 1} \right) \mathbf{a}(z), \quad t \neq 0. \quad (5.27)$$

Podemos substituir  $t$  por  $t = -\cot \frac{\alpha}{2}$ , onde  $\alpha \in (0, 2\pi)$ . Note que  $\alpha = \pi$  corresponde a  $t = 0$ , logo este valor deve ser excluído para  $\alpha$ . E por um cálculo direto verificamos que

$$\frac{it + 1}{it - 1} = e^{i\alpha}, \quad \alpha \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}.$$

Assim,

$$\mathbf{b}(z) = e^{i\alpha} \mathbf{a}(z), \quad \mathbf{b}_{\bar{z}} = e^{i\alpha} \mathbf{a}_{\bar{z}} \quad (5.28)$$

e as funções  $F_1$  e  $F_2$  dadas em (4.45) assumem a forma

$$F_1 = \frac{\mathbf{a}_{\bar{z}}}{1 - e^{-i\alpha} |\mathbf{a}|^2}, \quad F_2 = \frac{e^{i\alpha} \mathbf{a}_{\bar{z}}}{(1 - e^{i\alpha} |\mathbf{a}|^2)}. \quad (5.29)$$

Agora usando a equação fundamental (4.50),  $\overline{F_1} F_2 = F_1 \overline{F_2}$ , segue-se que

$$\left( \frac{\overline{\mathbf{a}_{\bar{z}}}}{1 - e^{i\alpha} |\mathbf{a}|^2} \right) \left( \frac{e^{i\alpha} \mathbf{a}_{\bar{z}}}{(1 - e^{i\alpha} |\mathbf{a}|^2)} \right) = \left( \frac{\mathbf{a}_{\bar{z}}}{1 - e^{-i\alpha} |\mathbf{a}|^2} \right) \left( \frac{e^{-i\alpha} \overline{\mathbf{a}_{\bar{z}}}}{(1 - e^{-i\alpha} |\mathbf{a}|^2)} \right).$$

Esta equação é equivalente a

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\alpha} |\mathbf{a}_{\bar{z}}|^2}{(1 - e^{i\alpha} |\mathbf{a}|^2)^2} &= \frac{e^{-i\alpha} |\mathbf{a}_{\bar{z}}|^2}{(1 - e^{-i\alpha} |\mathbf{a}|^2)^2} \Leftrightarrow \frac{(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})(1 - |\mathbf{a}|^4) |\mathbf{a}_{\bar{z}}|^2}{|1 - e^{i\alpha} |\mathbf{a}|^2|^4} = 0, \\ \frac{(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha})(1 - |\mathbf{a}|^4) |\mathbf{a}_{\bar{z}}|^2}{|1 - e^{i\alpha} |\mathbf{a}|^2|^4} &= 0 \Leftrightarrow \sin \alpha (1 - |\mathbf{a}|^2) |\mathbf{a}_{\bar{z}}|^2 = 0. \end{aligned}$$

Observe que  $\sin \alpha \neq 0$ , pois  $\alpha \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$  e  $1 - e^{i\alpha}|a|^2 \neq 0$ , pois a superfícies  $S$  em questão é tipo espaço de modo que  $a\bar{b} \neq 1$ . Portanto, concluímos da equação acima que

$$\text{I. } a_{\bar{z}} = 0$$

ou

$$\text{II. } |a| = 1 \Leftrightarrow a(z) = e^{i\beta(z)},$$

onde  $\beta(z)$  é uma função real.

No caso **I**, temos de (5.28) também que  $b_{\bar{z}} = 0$ , logo em tais pontos a curvatura média de  $S$  é zero e portanto a superfície é máxima e isto corresponde ao caso (2) do Teorema. Por continuidade, a equação **II** vale sobre o fecho do conjunto onde  $a_{\bar{z}} \neq 0$ . Assim, a menos que  $a_{\bar{z}}$  se anule sobre algum subconjunto aberto de  $S$ , a superfície  $S$  toda satisfaz **II**. Temos que mostrar que neste caso a superfície  $S$  tem localmente a forma descrita no item (3) do Teorema. Para isto precisamos dar uma descrição geométrica para  $S$ .

• Se  $|a| = 1$ , então  $a(z)$  tem a forma  $a(z) = e^{i\beta(z)}$ . Sem perda de generalidade podemos considerar  $\beta(z) = \frac{\theta(z)}{c} - \frac{\alpha}{2}$ , onde  $\theta(z)$  é uma função real e  $c = \sin \frac{\alpha}{2}$ . Assim,

$$a(z) = e^{i\left(\frac{\theta(z)}{c} - \frac{\alpha}{2}\right)}, \quad b(z) = e^{i\left(\frac{\theta(z)}{c} + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Agora substituindo isto na expressão de  $\Phi$  dada em (4.44) segue-se que

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \left(1 + e^{\frac{2i\theta}{c}}, i\left(1 - e^{\frac{2i\theta}{c}}\right), -e^{\frac{i\theta}{c}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right), e^{\frac{i\theta}{c}}\left(e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}\right)\right) \\ &= 2e^{\frac{i\theta}{c}} \left(\frac{e^{-i\theta/c} + e^{i\theta/c}}{2}, \frac{e^{i\theta/c} - e^{-i\theta/c}}{2i}, -i\frac{(e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}})}{2i}, \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} + e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{2}\right) \\ &= 2e^{\frac{i\theta}{c}} \left(\cos \frac{\theta}{c}, \sin \frac{\theta}{c}, -i \sin \frac{\alpha}{2}, \cos \frac{\alpha}{2}\right) \\ &= 2e^{\frac{i\theta}{c}} \sin \frac{\alpha}{2} \left(\frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\theta}{c}, \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin \frac{\theta}{c}, -i, \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}\right) \\ &= 2ce^{\frac{i\theta}{c}} \left(\frac{1}{c} \cos \frac{\theta}{c}, \frac{1}{c} \sin \frac{\theta}{c}, -i, \frac{b}{c}\right), \end{aligned}$$

onde  $b = \cos \frac{\alpha}{2}$ . Ségue-se do Lema 5.3 que

$$\eta = \frac{2(1 - \cos \alpha) \bar{a} a_{\bar{z}}}{|1 - e^{i\alpha}|^2} = \bar{a} a_{\bar{z}}.$$

Além disso como  $a(z) = e^{i\beta(z)}$ , temos que  $a_{\bar{z}} = ia(z)\beta_{\bar{z}}$ , donde segue-se que  $\eta = i\beta_{\bar{z}}$ . Esta última igualdade colocada em (4.12) fornece  $(\log \mu)_{\bar{z}} = -i\beta_{\bar{z}}$ . Usando isto, provaremos que a função complexa  $F(z) := \log \mu + i\frac{\theta(z)}{c} + \log 2c$  é holomorfa. Com efeito,

$$F_{\bar{z}} = (\log \mu)_{\bar{z}} + i\frac{\theta_{\bar{z}}}{c} = -i\beta_{\bar{z}} + i\frac{\theta_{\bar{z}}}{c} = 0,$$

pois  $\beta_{\bar{z}} = \frac{\theta_{\bar{z}}}{c}$ . Logo,  $e^{F(z)}$  também é holomorfa e

$$\mu(z) = \frac{1}{2c} e^{F(z)} e^{-i\frac{\theta}{c}}. \quad (5.30)$$

Substituindo (5.30) em  $X_z = \mu\tilde{\Phi}$  temos que

$$X_z = e^F \tilde{\Phi}, \quad \tilde{\Phi} = \left( \frac{1}{c} \cos \frac{\theta}{c}, \frac{1}{c} \sin \frac{\theta}{c}, -i, \frac{b}{c} \right). \quad (5.31)$$

Agora, introduzindo novas coordenadas conformes  $\zeta = \zeta(z)$  sobre  $S$ , pela equação  $\frac{d\zeta}{dz} = e^{F(z)}$ , temos que

$$X_{\zeta} = X_z \frac{dz}{d\zeta} = \left( e^F \tilde{\Phi} \right) \frac{1}{e^F} = \tilde{\Phi}.$$

Portanto, a menos de fator constante, obtemos

$$X_s - iX_{\xi} = \left( \frac{1}{c} \cos \frac{\theta}{c}, \frac{1}{c} \sin \frac{\theta}{c}, -i, \frac{b}{c} \right), \quad \zeta = s + i\xi,$$

sonde segue-se que

$$X_s = \left( \frac{1}{c} \cos \frac{\theta}{c}, \frac{1}{c} \sin \frac{\theta}{c}, 0, \frac{b}{c} \right), \quad X_{\xi} = (0, 0, 1, 0).$$

Observe que nas novas coordenadas  $\theta$  é função apenas de  $s$ . Relembrando que  $b = \cos \frac{\alpha}{2}$  e  $c = \sin \frac{\alpha}{2}$ , temos que  $c^2 = a^2 - b^2$  para  $a = 1$ . Assim,

$$X_s = \left( \frac{a}{c} \cos \frac{\theta(s)}{c}, \frac{a}{c} \sin \frac{\theta(s)}{c}, 0, \frac{b}{c} \right)$$

é o vetor tangente de uma hélice elíptica com vetor normal tipo espaço, compare isto com (5.16). Portanto, concluímos que a superfície é o produto desta hélice com uma linha reta na direção  $x^3$ . Isto encerra a demonstração do Teorema.  $\square$

A mesma observação feita no final do Teorema 5.4 pode ser feita aqui, para concluir que as superfícies dadas no Teorema acima têm  $K_N = 0$  no item (1),  $H = 0$  no item (2) e  $K_N = 0$  no item (3).

**Observação 5.3.** Se a superfície  $S$  do Teorema 5.6 for simplesmente conexa e analítica real, então ela será globalmente do tipo (2) ou (3) acima.

## 5.5 Classificação das superfícies tipo espaço com aplicação de Gauss degenerada de tipo 3

**Lema 5.7.** *Sejam as funções  $F_1 = \frac{a_{\bar{z}}}{1 - a\bar{b}}$  e  $F_2 = \frac{b_{\bar{z}}}{1 - \bar{a}b}$  tal que*

$$b(z) = \frac{-a(z) + t + 1}{(t-1)a(z) + 1}, \quad t \neq 0, \quad a\bar{b} \neq 1. \quad (5.32)$$

*Então  $\bar{F}_1 F_2 = F_1 \bar{F}_2$  se, e somente se*

$$(a - \bar{a})|a_{\bar{z}}|^2 = 0. \quad (5.33)$$

*Além disso, se  $\eta = -(\bar{b}F_1 + \bar{a}F_2)$ , então*

$$\eta = 0, \quad \text{ou} \quad \eta = \left[ \log \left( \frac{(u-1)^2}{(t-1)u+1} \right) \right]_{\bar{z}}, \quad (5.34)$$

*onde  $u = u(z)$  é uma função real.*

**Demonstração:** De (5.32), segue-se que

$$b_{\bar{z}} = -\frac{a_{\bar{z}}t^2}{((t-1)a+1)^2}, \quad t \in \mathbb{R}^*. \quad (5.35)$$

Assim, por um cálculo direto verificamos que

$$F_1 = \frac{a_{\bar{z}}((t-1)\bar{a}+1)}{(t-1)\bar{a}+1-a(-\bar{a}+t+1)},$$

$$F_2 = \frac{-a_{\bar{z}}t^2}{((t-1)a+1)((t-1)a+1-\bar{a}(-a+t+1))}.$$

Substituindo isto em  $\overline{F_1}F_2 = F_1\overline{F_2}$  obtemos

$$\frac{[\{(t-1)a+1-\bar{a}(-a+t+1)\}^2 - \{(t-1)\bar{a}+1-a(-\bar{a}+t+1)\}^2] |a_{\bar{z}}|^2 t^2}{\{(t-1)a+1-\bar{a}(-a+t+1)\}^2 \{(t-1)\bar{a}+1-a(-\bar{a}+t+1)\}^2} = 0.$$

Como o numerador da expressão acima é diferença de quadrados e o denominador é diferente de zero, ela é equivalente a

$$\{(t-1)(a+\bar{a})+2+2|a|^2-(t+1)(a+\bar{a})\} \{2t(a-\bar{a})\} |a_{\bar{z}}|^2 t^2 = 0,$$

o que implica que

$$(1+|a|^2-(a+\bar{a}))(a-\bar{a})|a_{\bar{z}}|^2 t^3 = 0. \quad (5.36)$$

Observe que

$$1+|a|^2-(a+\bar{a})=0 \Leftrightarrow |a-1|=0 \Leftrightarrow a(z) \equiv 1.$$

Porém, se  $a(z) \equiv 1$  assim seria  $b(z)$  e portanto  $a\bar{b}=1$ . De modo que  $1+|a|^2-(a+\bar{a}) \neq 0$ . Além disso,  $t \neq 0$ . Conclusão, a equação (5.36) é equivalente a

$$(a-\bar{a})|a_{\bar{z}}|^2 = 0.$$

Isto encerra a prova da primeira parte do Lema.

Para a segunda parte, note que se  $a(z)$  é holomorfa, é claro que  $\eta = 0$ . Suponhamos que  $a_{\bar{z}} \neq 0$ . Logo, de (5.33) temos que  $a(z) = u(z)$  para alguma função real  $u(z) \neq 1$ . Neste caso,

$$F_1 = \frac{((t-1)u+1)u_{\bar{z}}}{(u-1)^2},$$

$$F_2 = \frac{-t^2 u_{\bar{z}}}{((t-1)u+1)(u-1)^2}.$$

Substituindo isto na expressão de  $\eta$ , obtemos

$$\eta = \frac{u_{\bar{z}}}{u-1} + \frac{tu_{\bar{z}}}{((t-1)u+1)(u-1)}.$$

Agora como

$$\frac{tu_{\bar{z}}}{((t-1)u+1)(u-1)} = \frac{u_{\bar{z}}}{u-1} - \frac{(t-1)u_{\bar{z}}}{(t-1)u+1},$$

segue-se que

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{2u_{\bar{z}}}{u-1} - \frac{(t-1)u_{\bar{z}}}{(t-1)u+1} \\ &= [\log(u-1)^2]_{\bar{z}} - [\log((t-1)u+1)]_{\bar{z}}. \end{aligned}$$

Isto encerra a prova do Lema. □

O seguinte Teorema classifica localmente todas as superfícies tipo espaço de  $\mathbb{L}^4$  com aplicação de Gauss degenerada de tipo 3.

**Teorema 5.8.** *Seja  $S$  uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$ . Se  $S$  assume uma das seguintes formas:*

- 1)  $S$  é uma superfície máxima em  $\mathbb{L}^4$ , descrita pelo Teorema 2.18;
- 2)  $S$  é uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$  da forma  $\mathbb{R} \times H_p$ , onde  $H_p$  é uma hélice parabólica.

Então  $S$  tem aplicação de Gauss degenerada de tipo 3.

Reciprocamente, se  $S$  é uma superfície tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$  com aplicação de Gauss degenerada de tipo 3, de modo que  $\langle p, \Phi \rangle^{\mathbb{C}} = 0$  para algum vetor complexo  $p$  tal que  $\Re(p)$  e  $\Im(p)$  geram um 2-plano degenerado em  $\mathbb{L}^4$ , então  $S$  é localmente do tipo (1) ou (2) acima.

**Demonstração:** Se a superfície  $S$  assume uma das formas (1) ou (2), então não é difícil ver que ela é degenerada de tipo 3. Para provar a recíproca, usaremos a Proposição 2.11, a qual nos diz que, sob a ação do grupo de Lorentz, a equação do hiperplano  $H$

$$p_1\phi^1 + p_2\phi^2 + p_3\phi^3 - p_4\phi^4 = 0,$$

que contém a aplicação de Gauss de  $S$ , assume a forma especial

$$\phi^1 - it\phi^2 - \phi^4 = 0, \quad (5.37)$$

para algum número real  $t$  diferente de zero, pois  $\Re e(p)$  e  $\Im m(p)$ , neste caso, são linearmente independentes. Da Proposição 1.15, segue-se que

$$\mathbf{b}(z) = \frac{-\mathbf{a}(z) + t + 1}{(t-1)\mathbf{a}(z) + 1}, \quad t \neq 0.$$

Como a superfície  $S$  em questão é tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$ , segue-se do Lema 5.7 que a equação fundamental  $\overline{F}_1 F_2 = F_1 \overline{F}_2$  é equivalente, neste caso, a

$$(\mathbf{a} - \bar{\mathbf{a}})|\mathbf{a}_{\bar{z}}|^2 = 0.$$

Portanto, concluímos da equação acima que

$$\text{I. } \mathbf{a}_{\bar{z}} = 0$$

ou

$$\text{II. } \mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}} \Leftrightarrow \mathbf{a}(z) = u(z),$$

onde  $u(z)$  é uma função real.

No caso **I**, temos de (5.35) também que  $\mathbf{b}_{\bar{z}} = 0$ , logo em tais pontos a curvatura média de  $S$  é zero e portanto a superfície é máxima e isto corresponde ao caso (1) do Teorema. Por continuidade, a equação **II** vale sobre o fecho do conjunto onde  $\mathbf{a}_{\bar{z}} \neq 0$ . Assim, a menos que  $\mathbf{a}_{\bar{z}}$  se anule sobre algum subconjunto aberto de  $S$ , a superfície  $S$  toda satisfaz **II**. Temos que mostrar que neste caso a superfície  $S$  tem localmente a forma descrita no ítem (2) do Teorema. Para isto precisamos dar uma descrição geométrica para  $S$ .

- Se  $\mathbf{a}(z) = u(z)$ , então  $\mathbf{b}(z)$  tem a forma

$$\mathbf{b}(z) = \frac{-u(z) + t + 1}{(t-1)u(z) + 1}, \quad t \neq 0.$$

Agora substituindo isto na expressão de  $\Phi$  dada em (4.44) segue-se que

$$\Phi = \frac{(u-1)^2}{(t-1)u+1} \left( \frac{2tu-u^2+1}{(u-1)^2}, i, \frac{(t-1)u^2+2u-t-1}{(u-1)^2}, \frac{(t-1)u^2+t+1}{(u-1)^2} \right)$$

Não é difícil ver que

$$\Phi = \frac{(u-1)^2}{(t-1)u+1} \left( \frac{2t-2}{u-1} + \frac{2t}{(u-1)^2} - 1, i, \frac{2t}{u-1} + t - 1, t + \frac{2t-2}{u-1} + \frac{2t}{(u-1)^2} - 1 \right).$$

Ainda pelo Lema 5.7 temos que

$$\eta = \left[ \log \left( \frac{(u-1)^2}{(t-1)u+1} \right) \right]_{\bar{z}}.$$

Usando isto e lembrando que  $(\log \mu)_{\bar{z}} + \eta = 0$ , a função complexa

$$F(z) := \log \mu + \log \left( \frac{(u-1)^2}{(t-1)u+1} \right)$$

é holomorfa e

$$\mu(z) = \left( \frac{(t-1)u+1}{(u-1)^2} \right) e^{F(z)}. \quad (5.38)$$

Substituindo (5.38) em  $X_z = \mu\Phi$  temos que

$$X_z = e^{F(z)} \left( \frac{2t-2}{u-1} + \frac{2t}{(u-1)^2} - 1, i, \frac{2t}{u-1} + t - 1, t + \frac{2t-2}{u-1} + \frac{2t}{(u-1)^2} - 1 \right).$$

Pondo  $\tilde{f} = \frac{2t}{u-1} + t$  e em seguida  $f = \tilde{f} - 1$  na expressão acima, não é difícil ver que

$$X_z = e^F \tilde{\Phi}, \quad \tilde{\Phi} = \left( -\frac{t}{2} - \frac{1}{t}(1-f^2), i, f, \frac{t}{2} - \frac{1}{t}(1-f^2) \right).$$

Agora, introduzindo novas coordenadas conformes  $\zeta = \zeta(z)$  sobre  $S$ , pela equação  $\frac{d\zeta}{dz} = e^{F(z)}$ , podemos escrever  $X_\zeta = \tilde{\Phi}$ , onde  $\zeta = s + i\xi$ . Segue-se daí que

$$X_s = \left( -\frac{t}{2} - \frac{1}{t}(1-f^2), 0, f, \frac{t}{2} - \frac{1}{t}(1-f^2) \right), \quad X_\xi = (0, -1, 0, 0).$$

Observe que  $f$  é uma função que só depende de  $s$ . Finalmente, note que

$$X_s = \left( \frac{c}{2} + \frac{1}{c}(1-f^2), 0, f, -\frac{c}{2} + \frac{1}{c}(1-f^2) \right),$$

onde  $c = -t$ . Além disso,  $f_s = \frac{-2tu_s}{(u-1)^2} \neq 0$ , caso contrário  $\mathbf{a}_{\bar{z}} = 0$ . Assim,  $X_s$  é o vetor tangente de uma hélice parabólica com vetor normal tipo espaço, compare

isto com (5.17). Portanto, concluímos que a superfície em questão é o produto desta hélice com uma linha reta na direção  $x^2$ . Isto encerra a demonstração do Teorema.  $\square$

**Observação 5.4.** Se a superfície  $S$  do Teorema 5.8 for simplesmente conexa e analítica real, então ela será globalmente do tipo (1) ou (2) acima.

**Observação 5.5.** De modo análogo aos Teoremas 5.4 e 5.6, podemos concluir aqui que as superfícies dadas nos itens (1) e (2) do Teorema acima têm curvaturas média e normal nulas. Portanto, como no caso clássico  $\mathbb{R}^4$ , veja [24], exigir a propriedade, aplicação de Gauss degenerada, seja ela de tipo 1, 2 ou 3 em uma superfície  $S$  tipo espaço em  $\mathbb{L}^4$ , obrigatoriamente faz com que alguma função curvatura se anule em  $S$ .

Para encerrar este capítulo faremos uma breve discussão sobre as superfícies  $S$  tipo espaço imersas em  $\mathbb{L}^4$  que têm aplicação de Gauss generalizada contida na intersecção da quádrlica  $Q_1^2$  com os hiperplanos  $iz^1 - z^2 = 0$  e  $z^1 - z^4 = 0$ . Seja  $\Phi$  tal que  $X_z = \mu\Phi$ , com  $[\Phi] \in Q_1^2$ . Se  $\phi^2 = i\phi^1$ , então  $\phi^3 = \pm\phi^4$  e podemos tomar  $\Phi(z) = (1, i, \pm b(z), b(z))$ , onde  $b(z) = \frac{\phi^4}{\phi^1}$ ,  $\phi^1$  e  $\phi^4$  são sempre diferentes de zero. Agora se  $\phi^4 = \phi^1$ , então  $\phi^2 = \pm i\phi^3$ . Assim, podemos considerar  $\Phi(z) = (a(z), \pm i, 1, a(z))$ , onde  $a(z) = \frac{\phi^1}{\phi^3}$ ,  $\phi^1$  e  $\phi^3$  são sempre diferentes de zero. Observe que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ i \\ b \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ -i \\ 1 \\ b \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ i \\ -b \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ i \\ 1 \\ b \end{bmatrix}.$$

Seja  $\Phi(z) = (a(z), -i, 1, a(z))$ . Podemos facilmente calcular  $\eta$  e  $\mathbb{V}$  em função  $a(z)$ , para isto basta usar as fórmulas (4.9) e (4.10) do Capítulo 3. De fato,

$$\Phi_{\bar{z}} = (a_{\bar{z}}, 0, 0, a_{\bar{z}}), \quad \langle\langle \Phi, \Phi \rangle\rangle = 2$$

portanto,

$$\eta = \frac{\langle\langle \Phi_{\bar{z}}, \Phi \rangle\rangle}{\langle\langle \Phi, \Phi \rangle\rangle} = 0, \quad \mathbb{V} = \Phi_{\bar{z}} - \eta\Phi = a_{\bar{z}}(1, 0, 0, 1).$$

Isto implica que  $\mu$  é sempre holomorfa e o vetor curvatura média de  $S$  é um vetor tipo luz da forma  $H = (H^1, 0, 0, H^1)$  e  $H \equiv 0$  se, e somente se  $\mathbf{a}(z)$  é uma função holomorfa. Como  $\mu$  é holomorfa, seja  $\zeta = s + i\xi$  novas coordenadas obtidas por  $\frac{d\zeta}{dz} = 2\mu(z)$ , de modo que  $2X_\zeta = (\mathbf{a}(\zeta), -i, 1, \mathbf{a}(\zeta))$ . Se  $\mathbf{a}(\zeta)$  for holomorfa, seja a função holomorfa  $\psi(\zeta) = f(\zeta) + ig(\zeta)$  tal que  $\psi_\zeta = \mathbf{a}(\zeta)$ . Portanto,

$$\begin{aligned} X(z) &= \Re e(\psi(\zeta), -i\zeta, \zeta, \psi(\zeta)) \\ &= (f(s, \xi), \xi, s, f(s, \xi)). \end{aligned}$$

Vale ressaltar que este tipo de superfície foi primeiro estudado em [17] por Plínio A. Q. Simões e Antonio Pádua F. Filho, onde foi chamada de superfície *exótica*. Agora se  $\mathbf{a}(z)$  for uma função real, digamos  $u(\zeta)$  (rep. imaginária  $iu(\zeta)$ ), então

$$X_s = (u(s), 0, 1, u(s)), \quad X_\xi = (0, 1, 0, 0).$$

Portanto, a superfície  $S$  é o produto  $\mathbb{R} \times \mathbf{c}$ , onde  $\mathbf{c}$  é uma curva tipo espaço contida no 2-plano degenerado  $\Pi = \text{span}[(1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0)]$ . Por último, podemos dar exemplos de superfícies onde  $\mathbf{a}$  não se enquadra em nenhum dos dois casos acima. Por exemplo, se  $\mathbf{a}(\zeta) = 2\bar{\zeta}$ , então a superfície obtida é

$$X(s, \xi) = (s^2 + \xi^2, \xi, s, s^2 + \xi^2).$$

Observe que em todos os casos acima as superfícies estão contidas em um 3-espaço, a saber  $\Pi = \text{span}[(1, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)]$ , degenerado de  $\mathbb{L}^4$ . E também não é difícil ver que essas superfícies têm curvatura Gaussiana  $K$  e curvatura normal  $K_N$  identicamente nulas.

## Referências Bibliográficas

- [1] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw–Hill, 1979.
- [2] K. Akutagawa & S. Nishikawa, *The Gauss map and spacelike surfaces with prescribed mean curvature in Minkowski 3-space*, Tôhoku Math. J. 42(1990), 67–82.
- [3] L. J. Alías, R. M. B. Chaves & P. Mira, *Björling problem for maximal surfaces in Lorentz–Minkowski space*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 134 (2003) No 2, 289–316.
- [4] L. J. Alías & P. Mira, *A Schwarz–type formula for minimal surfaces in Euclidean space  $\mathbb{R}^n$* , C. R. Math. Acad. Sci. Paris, 334 (2002) 5, 389–394.
- [5] L. J. Alías & B. Palmer, *Curvature properties of zero mean curvature surfaces in four–dimensional Lorentzian space forms*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 124 (1998), 315–327.
- [6] S. Alves, R. M. B. Chaves & P. A. Simões, *Björling problem for minimal surfaces in the Euclidean 4–dimensional space*, preprint.
- [7] M. Barros & A. Romero, *Indefinite Kählerian manifolds*, Math. Ann. 261 (1982), 55–62.
- [8] E. G. Björling, *In integrationem aequationis derivatarum partialum superfici, cujus in puncto unoquoque principales ambo radii curvedinis aequales sunt sngoque contrario*, Arch. Math. Phys. (1) 4 (1844), 290–315.

- [9] E. Calabi, *Example of Bernstein problems for some nonlinear equations*, Proc. Symp. Pure Math. 15 (1970), 223-230.
- [10] S.S. Chern & R. Osserman, *Complete minimal surfaces in euclidean  $n$ -space*, J. Analyse Math., 19(1967), 15-34.
- [11] S. Y. Cheng & S. T. Yau, *Maximal spacelike hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces*, Ann. of Math. 104 (1976), 407-419.
- [12] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, 1976.
- [13] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster, & O. Wohlrab, *Minimal Surfaces I*, Springer-Verlag, A Series of Comprehensive Studies in Mathematics 295.
- [14] J. Eells & L. Lemaire, *A report on harmonic maps*, Bull. London Math. Soc. 10(1978), 1-68.
- [15] L. P. Eisenhart, *Minimal surfaces in Euclidean four-space*, Amer. Math. Soc. 1911, 215-236.
- [16] F. J. M. Estudillo & A. Romero, *On maximal surfaces in the  $n$ -dimensional Lorentz-Minkowski space*, Geom. Dedicata 38 (1991), 167-174.
- [17] A. P. Franco F. & P. A. Simões, *The Gauss map of spacelike surfaces of the Minkowski space*, preprint
- [18] W. M. Goldman, *Complex hyperbolic geometry*, Oxford University Press; 1999.
- [19] V. P. Gorokh, *Stability of a minimal surface in pseudo-Euclidean space*, Ukrain. Geom. Sb., 33 (1990) 41-45; English transl. in J. Soviet Math. 53 (1991), 491-493.
- [20] A. Gray, *Modern Differential Geometry of curves and surfaces*, CRC Press, Boca Raton, Florida 1998.

- [21] D. A. Hoffman & H. Karcher, *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature*, Geometry, V, 5–93, 267–272, Encyclopaedia Math. Sci., 90, Springer, 1997.
- [22] D. A. Hoffman & R. Osserman, *The geometry of the generalized Gauss map*, Mem. Amer. Math. Soc. No. 236, vol. 28,(1980).
- [23] D. A. Hoffman & R. Osserman, *The Gauss map of surfaces in  $\mathbb{R}^n$* , J. Diff. Geom. 18(1983), 733–754.
- [24] D. A. Hoffman & R. Osserman, *The Gauss map of surfaces in  $\mathbb{R}^3$  e  $\mathbb{R}^4$* , Proc. London Math. Soc. 3, 50(1985), 27–56.
- [25] K. Kenmotsu, *Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature*, Math. Ann. 245(1979), 89–99.
- [26] K. Kenmotsu, *The mean curvature vector of surfaces in  $\mathbb{R}^4$* , Bull. London Math. Soc. 19(1987), 458–462.
- [27] V. A. Klyachin & V. M. Miklyukov, *Criteria of instability of surfaces of zero mean curvature in warped Lorentz products*, Sbornik Math. 187:11 (1996), 1643–1663.
- [28] K. Knopp, *Theory of functions parts I and II*, Dover Publications, inc., 1996.
- [29] O. Kobayashi, *Maximal Surfaces in the 3-Dimensional Minkowski Space  $\mathbb{L}^3$* , Tokio J. Math. vol. No. 2(1983), 297–309.
- [30] Célia Mendes C. Lopes, *Superfícies de tipo espaço com vetor curvatura média nulo em  $\mathbb{L}^3$  e  $\mathbb{L}^4$* , Dissertação de Mestrado, IME-USP, 2002.
- [31] F. J. López, R. López & R. Souam, *Maximal surfaces of Riemann type in Lorentz-Minkowski space  $\mathbb{L}^3$* , Michigan Math. J. 47(2000), 469–497.
- [32] L. V. McNertney, *On parameter families of surfaces with constant curvature in Lorentz 3-space*, Ph.D. Thesis, Brown University, 1980.

- [33] T. K. Milnor, *Harmonic maps and classical surface theory in Minkowski 3-space*, Trans. Amer. Math. Soc. 1, 280(1983).
- [34] S. Montiel & A. Romero, *Complex Einstein hypersurfaces of indefinite complex space forms*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 94 (1983), 495–508.
- [35] G. L. Naber, *The Geometry of Minkowski Spacetimes*, Springer-Verlag, New York 1992.
- [36] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry*, Academic press, 1983.
- [37] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1969.
- [38] E. Ruh & J. Vilms, *The tension field of the Gauss map*, Trans. Amer. Math. Soc. 149(1970), 569–573.
- [39] Plínio A. Q. Simões, *Superfícies espaciais em  $\mathbb{L}^3$  e  $\mathbb{L}^4$* , Notas de Aula, 2000.
- [40] H. A. Schwarz, *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Springer-Verlag, Berlin 1890.
- [41] H. Urakawa, *Calculus of Variations and Harmonic Maps*, Transl. Math. Monographs, AMS, vol.132, 1990.